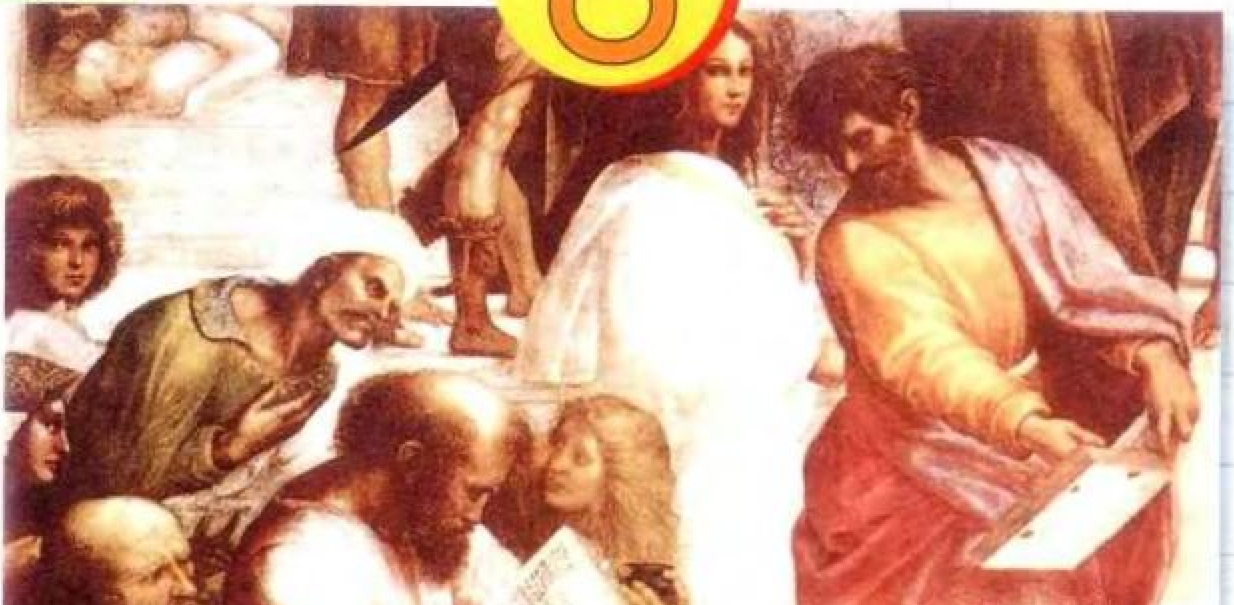
Г. В. АПОСТОЛОВА

Геометрія

8



ББК 22.151я721
А76

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист МОН України №1.4/18-679 від 27.03.08 р.)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Відповідальні за підготовку до видання:
Прокопенко Н. С. – головний спеціаліст МОН України;
Потапова Ж. В. – методист вищої категорії Інституту інноваційних технологій і змісту освіти

Рецензенти:

Ясінський В. В. – директор Інституту доуніверситетської підготовки і професійної орієнтації НТУУ «КПІ», докт. фіз.-мат. наук, професор, заслужений працівник народної освіти України;

Грищенко В. О. – старший науковий співробітник Інституту математики НАН України, канд. фіз.-мат. наук;

Баришнікова О. І. – учитель-методист ліцею «Поділ» м. Києва

Упорядкування завдань
Вашуленко О. П., Карликової О. А.

Апостолова, Г. В.
А76 Геометрія : 8 : дворівн. підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / Г. В. Апостолова. – К. : Генеза, 2008. – 272 с.
ISBN 978-966-504-798-8.

Пропонований дворівневий підручник для 8-го класу відрізняється від чинних підручників практичною спрямованістю, залученням історичних фактів, об'ємним дидактичним матеріалом (практичні роботи та завдання чотирьох рівнів складності), наявністю додаткового навчального матеріалу (рубрика «Для допитливих» і розділ «Цікаві додатки»).

Надає можливість учням поглибити і розширити знання предмета за допомогою вчителя або самостійно.

Учителю дає змогу природно продовжити навчання геометрії на позакласних заняттях, реалізувати особистісно диференційований підхід у навчанні геометрії учнів з урахуванням їхніх вікових особливостей розвитку.

Може бути використаний для навчання геометрії учнів як в загальноосвітніх класах, так і в класах з поглибленим вивченням математики.

ББК 22.151я721

ISBN 978-966-504-798-8

Автор Галина Вадимівна Апостолова – професор Київського обласного інституту післядипломної освіти педагогічних кадрів, кандидат фізико-математичних наук, учитель-методист.

Я вдячна всім своїм учням за спільний пошук шляхів відкриття світу, за те, що разом раділи й дивувалися красі та гармонійності його математичної моделі. У цьому підручнику є часточка від зустрічі з кожним із вас.

Шановний учню!

Можливо, на фоні дивовижних досягнень науки і техніки, з якими Ви зустрічаєтеся на кожному кроці, геометрія, що пропонується для вивчення в школі, може здаватися якимось несучасним предметом, зовсім непотрібним у наш час людині, у чиє життя ввійшли комп'ютери, мобільні телефони, цифрові технології.

Так, людство в цілому за останні тисячоліття стало набагато розумнішим. А чи стала розумнішою кожна людина? Сьогодні ми знаємо набагато більше за своїх предків, бо «стоїмо на їхніх плечах». Розвиток людства – це, в першу чергу, розвиток людської думки. Геометрія є своєрідним дзеркалом, унікальною скарбничкою, яка зберігає найвищі досягнення людства, перлини людської думки, які створені впродовж більш як двох тисячоліть наймудрішими його представниками. Оволодіти цими скарбами – це не лише навчитися логічно й послідовно мислити, а й в дарунок отримувати насолоду від самого процесу мислення, здатності до самостійного відкриття.

В. Фухс (відомий німецький математик XX ст.) казав:
«Геометрія – це широкий розкішний краєвид, відкритий усім тим, для кого мислення становить справжню радість».

Підручник надає Вам можливість скористатися скарбницею Геометрії якнайповніше.

Бажаю радості навчання за цим підручником.

Автор

Інформація для учнів

Перш ніж розпочати роботу за підручником, уважно прочитайте *вступ*, в якому узагальнюється вже вивчене вами, і зверніть увагу на *форзаци* – на них представлено опорні факти геометрії за курс сьомого класу.

Домашню роботу доцільно починати з опрацювання *практичних робіт*, поданих після кожного параграфа. Це допоможе вам «відчути» геометрію, полегшить засвоєння і запам'ятовування вивченого.

На поля підручника винесено *головну* (*опорну*) *інформацію*, а наприкінці підручника наводяться узагальнюючі *опорні конспекти* з окремих тем. Користуйтеся ними під час підготовки до уроку та під час розв'язування задач.

Обов'язковий (*мінімальний*) обсяг інформації позначено вертикальною кольоровою рискою.

Завдання за складністю поділено на чотири рівні: завдання з нуликом біля номера – найпростіші, завдання без позначки біля номера – дещо складніші, завдання із зірочкою біля номера вимагають більш глибоких міркувань, завдання з двома зірочками – найскладніші, їх виконання вимагає творчих зусиль.

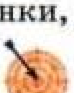
Завдання *«Для повторення»* та *«Готуємося до тематичного оцінювання»* допоможуть вам повторити вивчене, підготуватися до підсумкової атестаційної роботи.

Окрім того, наприкінці підручника пропонуються *завдання в тестовій формі «Перевір себе»*. Їхня мета – визначити рівень ваших умінь і знань та допомогти вам адаптуватися до майбутнього тестування.

«Відповіді й поради» допоможуть вам переконатися у правильності виконання завдань, а інколи вкажуть шлях до розв'язування.

Завдання рубрики *«Для допитливих»*, *параграфи* з такою самою піктограмою та останній розділ *«Цікаві додатки»* призначені для ширшого і глибшого ознайомлення з геометрією, ніж це вимагається за програмою загальноосвітньої школи.

Наприкінці підручника на вас чекає *«Словничок»* нових термінів і незнайомих слів (із посиланнями на сторінки, де вони трапляються).

Піктограми в підручнику позначають:  – означення; $\boxed{Т}$ – теорема; $\boxed{Н}$ – наслідок;  – матеріал для ознайомлення;  – додатковий матеріал.

Не чекайте вказівок учителя, працюйте самостійно – підручник надає вам таку можливість. Пам'ятайте, що готуватися до зовнішнього тестування, до вступних іспитів у ВНЗ із певних тем треба тоді, коли ці теми вивчаються.

Той, хто вчиться самостійно, досягне в сім разів більше, ніж той, кому все роз'яснюється.

Артур Гітерман (поет)

Інформація для вчителів і батьків

Зазвичай у підручнику обсяг навчального матеріалу чітко обмежений – все, що є в ньому, учитель повинен опрацювати з класом. Тому й створюються підручники для ЗОНЗ та для класів з поглибленим вивченням математики. А під час підготовки до вступних іспитів у ВНЗ або до математичних змагань перед учнями постає нелегке питання: яку літературу використовувати. Зрозуміло, що за такого підходу більше можливостей мають діти в мегаполісах, де є спеціалізовані навчальні заклади.

Головна мета цього підручника – надати рівні можливості всім учням, незалежно від місця їхнього проживання та навчання, а вчителю допомогти здійснити диференційований підхід до кожної окремої особистості в класі, природно продовжити і поглибити вивчення певних тем на позакласних заняттях (або запропонувати декотрим учням зробити це самостійно).

Цей підручник є дворівневим, тобто ***за ним можна працювати як за загальноосвітньою програмою, так і в класах з поглибленим вивченням математики***. Можна сказати, що він є багаторівневим – як щодо дидактичних завдань, так і за поданням теоретичного матеріалу.

Дидактичний матеріал, уміщений після кожного параграфа, розподіляється на чотири рівні.

Завдання перших трьох рівнів, номери яких позначено кольором, пропонуються **для домашньої роботи.**

Завдання рубрики «Для допитливих» містять додаткові задачі підвищеної складності і не тільки з тем, які вивчаються за програмою.

Теоретичний матеріал скомпоновано так.

– Параграфи, обов'язкові для вивчення, відповідають вимогам державного стандарту, основний матеріал у них позначено вертикальною кольоровою рискою.

– Параграфи, обов'язкові для ознайомлення, але не обов'язкові для оцінювання (вони позначені відповідною піктограмою).

– Параграфи, не обов'язкові для вивчення (вони мають спеціальну піктограму).

– Рубрика «Для допитливих» доповнює навчальний матеріал параграфів додатковою інформацією, як історичною (наприклад, про стародавніх та вітчизняних учених), так і з математики до відповідної теми.

– Розділ «Цікаві додатки» містить додаткову (до програми ЗОНЗ) інформацію.

Матеріали розділу VI і рубрики «Для допитливих» можна використовувати для організації позакласних занять з учнями, їх підготовки до вступних іспитів у ВНЗ, математичних змагань.

Радимо в роботі з підручником використовувати й посібник «Геометрія в опорних конспектах і малюнках. Робочий зошит учня 8 класу». Він містить теоретичний матеріал у вигляді опорних схем та задачі на готових кресленнях – 48 сторінок. Це допоможе зберегти навчальний час (під час пояснення вчителем нового матеріалу учні не переписують його з дошки), полегшить запам'ятовування опорної інформації (за рахунок підключення зорової пам'яті), її узагальнення та повторення (узагальнюючі конспекти). Окрім того, учні можуть працювати за підручником удома, а в школу достатньо носити лише такий зошит.

Більше про методику роботи за цим підручником і робочим зошитом можна дізнатися з посібника «Уроки геометрії. Книга для вчителя. 8 клас».

**Пам'ять – вартовий усьому
і скарбничка всього.**

Ціцерон

Вступ

Погляд на старі проблеми під іншим кутом зору – це потребує творчої уяви і дає великі переваги.

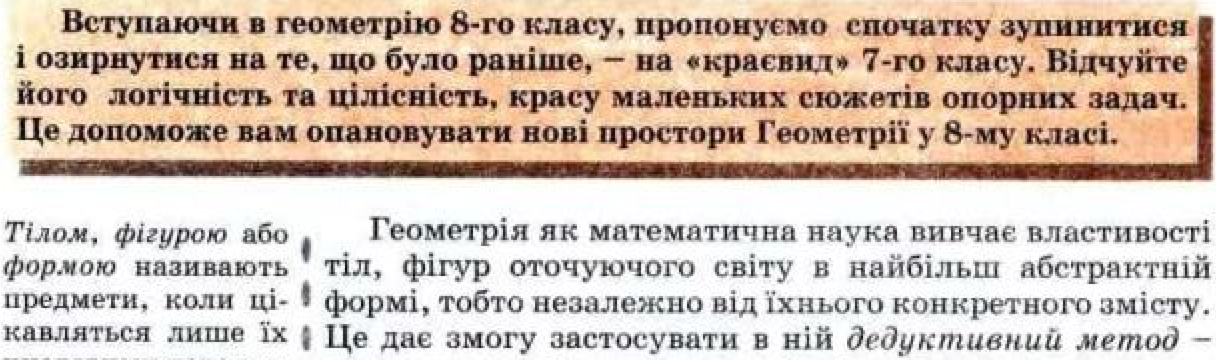
Альберт Ейнштейн

Вступаючи в геометрію 8-го класу, пропонуємо спочатку зупинитися і озирнутися на те, що було раніше, – на «краєвид» 7-го класу. Відчуйте його логічність та цілісність, красу маленьких сюжетів опорних задач. Це допоможе вам опановувати нові простори Геометрії у 8-му класі.

Тілом, фігурою або *формою* називають предмети, коли цікавляться лише їх числовими характеристиками (розміром, площею, об'ємом, розташуванням ...).

Геометрія як математична наука вивчає властивості тіл, фігур оточуючого світу в найбільш абстрактній формі, тобто незалежно від їхнього конкретного змісту. Це дає змогу застосувати в ній *дедуктивний метод* – ланцюжок логічних переходів від твердження-умови до твердження-висновку. (Нагадаємо, що *твердженням* називається речення, на яке можна відповісти «так» або «ні», тобто воно може бути *істинним* або *хибним*.)

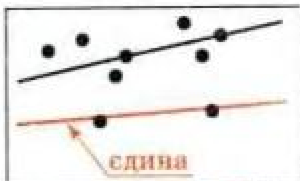
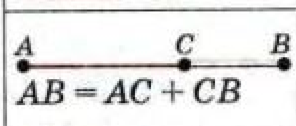
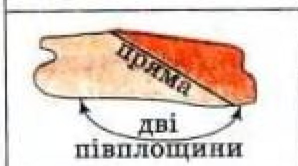
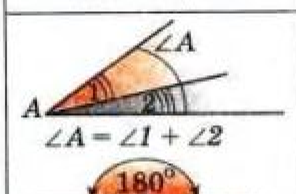
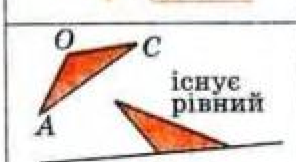
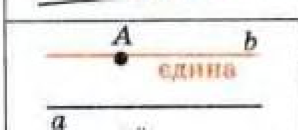
Геометрія – це не просто зібрання певних фактів і міркувань, а строга, цілісна, естетична у своїй логічності наука. Її структуру можна представити так.



Аксіоми евклідової геометрії не є вільним витвором Евкліда, а здобуті людством у процесі багатовікового досвіду. Їх формулювання дуже важливе, бо є наріжним каменем побудови геометрії. Так, російський математик Микола Іванович Лобачевський (1792–1856) піддав сумніву лише одну з аксіом Евкліда (аксіому про єдиність прямої, паралельної даній, що проходить через певну точку поза заданою прямою) і отримав зовсім іншу Геометрію, що, як з'ясувалося, описує властивості фігур, розміри яких більші за розміри Землі.

Геометрія – це математична наука про просторові форми, яка спирається на дедуктивний метод – ланцюжок логічних переходів (кроків) від твердження-умови до твердження-висновку.

Ми з вами продовжуємо вивчати фігури на площині за Евклідом (планіметрію). Нагадаємо **АКСІОМИ ЕВКЛІДОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ** (планіметрії).

	**I.**	**Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй. Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.**
	**II.**	**З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.**
	**III.**	**Кожен відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою точкою.**
	**IV.**	**Пряма розбиває площину на дві півплощини.**
	**V.**	**Кожен кут має певну міру, більшу від нуля. Міра кута дорівнює сумі мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що починається в його вершині і проходить між його сторонами. Градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°.**
	**VI.**	**На будь-якій прямій від заданої точки в заданому напрямі можна відкласти відрізок даної довжини і при цьому тільки один.**
	**VII.**	**Від будь-якої півпрямої в дану півплощину можна відкласти заданий кут з вершиною в початку цієї півпрямої, при цьому тільки один.**
	**VIII.**	**Який би не був трикутник, існує трикутник, рівний даному в заданому розміщенні відносно заданої прямої.**
	**IX.**	**Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести лише одну пряму, паралельну даній.**

Побудова геометрії:
1) основні поняття;
2) аксіоми;
3) означення інших фігур та доведення властивості фігур, що відмінні від аксіом.

Ви вже маєте певний досвід роботи з геометричними поняттями й фактами і розумієте, що всі геометричні властивості фігур подаються у вигляді тверджень. Для подальшого вивчення геометрії корисно узагальнити, з якими видами математичних тверджень ви ознайомилися (і будете працювати далі).

Логічний крок *доведення*:
1. Вихідне твердження (кілька тверджень);
2. «Тоді»;
3. Твердження-висновок.

ОЗНАЧЕННЯ – **це твердження, в яких роз'яснюється (через відомі поняття), які саме об'єкти або властивості підпадають під дану назву.**

Наприклад, пригадайте означення трикутника, суміжних кутів, рівності двох кутів тощо.

АКСІОМА – **твердження, що приймається без доведення** (кажуть ще – *постулат*).

Ми з вами вже обговорювали вагомість цих тверджень у побудові геометрії і повторили їх формулювання за Евклідом. Ми не можемо за власним бажанням додати до переліку аксіом геометрії ще якесь твердження. *Усі твердження стосовно геометричних властивостей фігур, що відмінні від аксіом, ми повинні доводити.*

Евклідова геометрія спирається на аксіоми, що були сформульовані Евклідом. (Греція, V ст. до н.е.)

ТЕОРЕМИ – **твердження, істинність яких виявляється тільки після логічного міркування – доведення.**

З досвіду вивчення геометрії в 7-му класі ви маєте приклади таких тверджень та їх доведень.

Теорема складається з двох тверджень: *твердження-умови* і *твердження-висновку*. Теорему завжди можна записати у вигляді:

«ЯКЩО» – *«твердження-умова»* – «ТО» – *«твердження-висновок»*.

Наприклад, теорему про властивість вертикальних кутів – «Вертикальні кути рівні» – можна сформулювати так: «ЯКЩО два кути є вертикальними, ТО вони рівні між собою». Спробуйте переформулювати в такому вигляді теореми: «Сума суміжних кутів дорівнює 180°»; «Бісектриси суміжних кутів перпендикулярні».

Означення – назва (з поясненням, що саме так називається).

НАСЛІДКИ – **твердження, які є безпосереднім висновком з аксіоми або теореми.**

Чи можна назвати наслідок теоремою? Так, бо ми повинні це твердження доводити. Але при цьому таке доведення спирається на теорему або аксіому, наслідком якої її називають, і це доведення зазвичай містить невелику кількість логічних кроків.

Аксіома – приймається без доведення.

Теорема – *доводиться* певним логічним міркуванням (доведенням).

ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА ДО ДАНОЇ – **така теорема, в якій умовою служить висновок, а висновком – умова заданої (прямої) теореми.**

Наприклад, такі дві теореми є обернені одна до одної.

Якщо внутрішні різносторонні кути рівні, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.	Якщо сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то внутрішні різносторонні кути рівні.

Якщо одну з них назвати прямою, то другу слід назвати оберненою.

Важливо пам'ятати: *якщо доведено пряму теорему, то правильність оберненої теореми ще не можна вважати само собою зрозумілою!*

Обернене твердження не завжди виконується (у курки дві ноги, але якщо в когось дві ноги, то він не обов'язково є куркою). Наведемо приклад, коли обернене математичне твердження не виконується:

Якщо два кути є вертикальними, то вони рівні.	Якщо два кути рівні, то вони є вертикальними.

ОЗНАКА – **теорема, яка стверджує, що виконання певних умов забезпечує належність фігури (фігур) певній множині, яку вже було визначено раніше.**

Наприклад, пригадайте ознаки рівнобедреного трикутника, ознаки паралельності двох прямих.

ВЛАСТИВІСТЬ – **теорема, яка стверджує, що належність фігури (фігур) певній множині забезпечує виконання певних умов.**

Наприклад, пригадайте властивості рівнобедреного трикутника, властивості паралельних прямих, властивості суміжних кутів.

Підкреслимо, що не завжди ознака і властивість фігури є взаємно оберненими твердженнями (наприклад, ознаки і властивості вертикальних чи суміжних кутів).

Перш ніж розпочати подальше заглиблення у світ Геометрії та розв'язування її задач, узагальнимо вже набутий вами досвід і сформулюємо, що означає «розв'язати геометричну задачу» і як краще виконати запис її розв'язування.

Розв'язування задач з планіметрії, як правило, передбачає такі етапи.

1. *Виконання малюнка за текстом умови.*
2. *Нанесення позначень на малюнок.*
3. *Скорочений запис тверджень умови задачі через введені позначення.*
4. *Формулювання і скорочений запис твердження, яке треба довести, або того, що треба знайти за умовою задачі.*
5. *Позначення того, що запис умови задачі закінчено*: зазвичай проводять горизонтальну риску або пишуть слово «Розв'язання» («Доведення»).

Доведення спирається на аксіоми і твердження, доведені раніше (складається з логічних кроків).

Наслідок – безпосередній висновок з теореми або аксіоми.

Пряма і обернена теореми – міняються місцями умова і висновок.

ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА ВИМАГАЄ ДОВЕДЕННЯ!

Множина – сукупність об'єктів, які ми уявляємо як єдине ціле.
Наприклад: множина вусатих, множина трикутників.

Ознака – теорема, яка за висновок має належність фігур певній множині (означення якій було дано раніше).

Властивість – теорема, яка за висновок має виконання певних умов, якщо фігура належить даній множині.

Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо ступайте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!

Д. Пойя

6. *Запис логічних кроків розв'язання (доведення):*
- *треба доводити ті співвідношення, що ми використовуємо і які не збігаються з твердженнями умови і не є аксіомами або теоремами;*
- *логічний крок має структуру: вихідне твердження; «тоді» ($\Rightarrow$); твердження-висновок;*
- *вихідними твердженнями логічного кроку можуть бути: твердження умови задачі, аксіоми, теореми та твердження, що були доведені в попередніх логічних кроках;*

7. *Запис відповіді або «що вимагалося довести» (скорочено «Щ. в. д.»).*

Зауваження.

Малюнок не є підставою для висновків.

Доведення від супротивного:
1. Чітко сформулювати твердження, що саме треба довести;
2. Сформулювати твердження, обернене до (1);
3. Зробити припущення, що (2) виконується;
4. Прийти логічними кроками до протиріччя;
5. Висновок: (2) є хибним і виконується (1).

Оглядаючи вивчене в 7-му класі, не можна оминути спосіб доведення **«від супротивного»**.

Англійський математик Г. Харді (1877–1947) сказав: «Доведення від супротивного, таке любе Евклідові, – це чи не найбільш витончена зброя математики».

Нагадаємо, яких саме логічних кроків-міркувань вимагає його застосування.

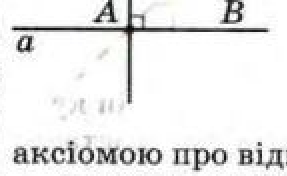
Крок 1: *проаналізувати твердження, яке вимагається довести, і сформулювати супротивне (протилежне) твердження.*

Крок 2: *зробити припущення, що сформульоване твердження є правильним.*

Крок 3: *спираючись на це припущення, логічними (дедуктивними) міркуваннями прийти до абсурдного висновку.*

Крок 4: *сказати, що тоді зроблене нами припущення треба відкинути і прийняти те твердження, яке й треба було довести.*

Як приклад розглянемо запис доведення методом від супротивного відомої вам теореми: «До даної прямої у заданій на ній точці можна провести тільки один перпендикуляр».



Дано: точку A на прямій a.

Довести: існує $AK \perp a$ і AK – єдина.

1) Нехай існує така друга пряма $AC \perp a$.

2) Якщо $AK \perp a$ і $AC \perp a$, то $\angle KAB = 90^\circ = \angle CAB$, чого бути не може за аксіомою про відкладання кутів, – це протиріччя.

Тоді AK – єдиний перпендикуляр до a.

Щ. в. д.

Обговоримо ще такий метод доведення, як **контрприклад.** Цим методом легко довести хибність певного твердження – достатньо навести один приклад того, коли твердження не виконується (контрприклад).

Чи правильним є твердження: «Всі трикутники є гострокутними»? Це твердження хибне, бо ми можемо побудувати, наприклад, трикутник, у якого один з кутів прямий, – такий трикутник не є гострокутним.

Щоб встановити хибність якогось твердження, достатньо навести один контрприклад.

ВАЖЛИВЕ зауваження. *Якщо навести приклади (навіть дуже багато прикладів), коли твердження виконується, то це не є його доведенням.*

Якщо навести приклади (навіть дуже багато прикладів), коли твердження виконується, то це не є його доведенням!

Перш ніж звернутися до повторення основних опорних фактів з курсу геометрії 7-го класу, пригадаємо таке важливе поняття, як геометричне місце точок (ГМТ).

Геометричним місцем точок називається сукупність (множина) ВСІХ точок, що задовольняють певну умову.

Щоб стверджувати, що деяка фігура є певним ГМТ, треба довести два взаємно обернених твердження.

1. ***Довести***, *що всі точки фігури задовольняють вказану умову,* – ***властивість фігури.***
2. ***Довести обернене:*** *ВСІ точки, що задовольняють вказану умову, містяться на цій фігурі* – ***ознаку фігури.***

Зауважимо, останнє означає, що поза фігурою немає точок, які задовольняли б задану умову.

Як вже згадувалося раніше, якщо якесь твердження виконується, то не завжди виконується йому обернене. Так, твердження: «Якщо це кіт, то він має вуса» – правильне. А от обернене йому твердження: «Якщо хтось має вуса, то це кіт» не є правильним.

Важливо, якщо ми розглядаємо фігуру, як певне ГМТ, не забувати про доведення її відповідної ознаки.

Математики кажуть про вказану вище пару доведень:

- *доведення п. 1* (***властивості***) – **«доведення необхідної умови»**;
- *доведення п. 2 (ознаки)* – **«доведення достатньої умови»**.

Довести, що певна фігура є певним ГМТ, означає довести:
1) *необхідність* – відповідну властивість фігури;
2) *достатність* – відповідну ознаку фігури.

Наприклад, твердження, що **бісектриса кута є ГМТ, рівновіддалених від сторін кута**, означає:

1) **якщо точка належить бісектрисі кута, то вона рівновіддалена від сторін цього кута** (необхідна умова);
2) **якщо якась точка рівновіддалена від сторін кута, то вона належить бісектрисі цього кута (достатня умова).**

Повторити основні опорні факти, що вивчалися в 7-му класі, вам допоможуть малюнки-схеми на форзацах та на сторінці 250 підручника, а також такі запитання.

Запитання для повторення

1. Як позначаються точки, прямі, промені, відрізки, кути, трикутники?
2. Які відрізки (кути) називаються рівними?
3. Яка фігура називається кутом?
4. Який кут називається: розгорнутим; прямим?
5. Які кути називаються суміжними? Сформулюйте основні властивості суміжних кутів.
6. Які кути називаються вертикальними? Сформулюйте основні властивості вертикальних кутів.
7. Які прямі називаються паралельними? Яким знаком позначають паралельність прямих? Сформулюйте основні властивості паралельних прямих.
8. Сформулюйте ознаки паралельності двох прямих.
9. Що таке перпендикуляр, проведений через дану точку до даної прямої? Скільки таких перпендикулярів можна провести? (Розгляньте два випадки розміщення даної точки відносно заданої прямої.)
10. Що називається відстанню між: двома точками; точкою і прямою; двома паралельними прямими?
11. Що таке трикутник? Що таке кут трикутника при даній вершині?
12. Дайте означення внутрішніх і зовнішніх кутів трикутника. Які властивості цих кутів ви знаєте?
13. Що таке висота (бісектриса, медіана) трикутника? Наведіть приклади зображення відповідних відрізків у трикутнику, проведених з вершини його гострого (тупого) кута; до сторін, що містять гострий (тупий) кут.
14. Які властивості висот (бісектрис, медіан) трикутника ви знаєте?
15. Які трикутники називаються рівними? Наведіть приклади рівних трикутників та запишіть співвідношення для їхніх відповідних сторін (кутів).
16. Сформулюйте ознаки рівності трикутників.
17. Сформулюйте ознаки рівності прямокутних трикутників.
18. Які трикутники називаються рівнобедреними? Сформулюйте властивості рівнобедреного трикутника.
19. Що таке «геометричне місце точок» (ГМТ), які задовольняють певну умову?
20. Сформулюйте властивості бісектриси кута (серединного перпендикуляра до відрізка) як відповідного ГМТ.
21. Яка фігура називається колом?
22. Які властивості хорд кола ви знаєте?
23. Яким може бути взаємне розміщення прямої і кола? Сформулюйте умови вказаних вами розміщень (через порівняння радіуса кола з відстанню від центра кола до прямої).
24. Сформулюйте означення, властивості і ознаки дотичної до кола.
25. Скільки кіл можна вписати в заданий кут? А в заданий трикутник? Відповідь обґрунтуйте.
26. Яка точка є центром кола, вписаного у трикутник? Чому?
27. Яка точка є центром кола, описаного навколо трикутника? Чому?
28. Яким може бути взаємне розміщення двох кіл? Сформулюйте умови вказаних вами розміщень (через порівняння відстані між центрами кіл з радіусами цих кіл).
29. Сформулюйте властивості лінії центрів – прямої, що проходить через центри кіл, – для двох дотичних кіл (для двох кіл, що перетинаються).
30. Що означає «розв'язати задачу на побудову»?
31. Які опорні задачі на побудову ви знаєте?

Вступну роботу закінчено. Час відкривати підручник і разом з ним – таємниці красуні Геометрії.

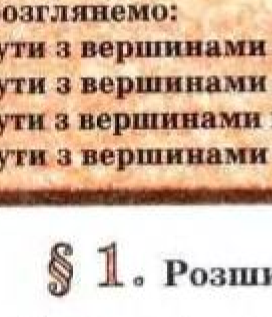
Розділ I
ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ З КОЛОМ

У цьому розділі ми з вами продовжимо вивчати властивості кола, розглянемо:
- **кути з вершинами в центрі кола;**
- **кути з вершинами на колі;**
- **кути з вершинами всередині кола;**
- **кути з вершинами поза колом.**

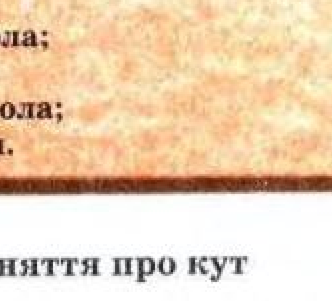
§ 1. Розширення поняття про кут

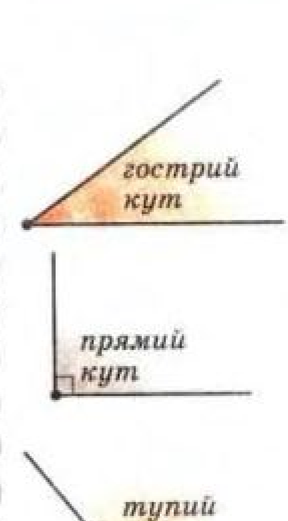
У 7-му класі ми розглядали властивості кутів, не більших за розгорнутий кут. Для подальшого вивчення геометрії треба розширити поняття про кут.

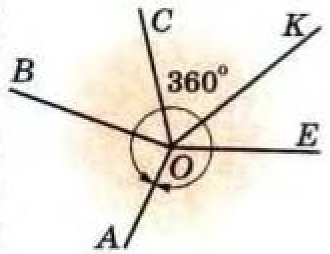
Візьмемо довільний промінь n і з одного його боку з вершиною у початку цього променя відкладемо $\angle(an) = \alpha$, а з другого $\angle(bn) = \beta$ (мал. 1.1). Тоді $\angle(ba)$ – сума кутів $\angle(an)$ і $\angle(bn)$. Мірою цього кута буде сума мір кутів α і β. Може статися, що градусна міра суми кутів, менших за розгорнутий, перебільшить 180° (мал. 1.2).



Мал. 1.1


Мал 1.2





Мал. 1.3

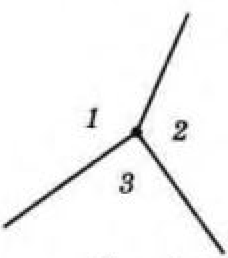
Відповідну частину площини також будемо називати кутом. Градусна міра такого кута перебільшує міру розгорнутого кута.

При знаходженні суми кутів може статися, що після додавання кількох кутів, наприклад п'яти кутів на малюнку 1.3, сторона OA першого кута суміститься зі стороною OA останнього кута. Фігурою, що відповідає сумі цих кутів, буде вся площина, розміщена навколо спільної вершини кутів O.

Така фігура називається ***повним кутом***. *Повний кут складається з двох розгорнутих кутів,* отже, його градусною мірою буде сума мір цих кутів, тобто 360°.

Практична робота 1

1. На окремому аркуші паперу проведіть 2 промені з початком у спільній точці. Скільки кутів є на малюнку? Зафарбуйте кожен з них різними кольорами.

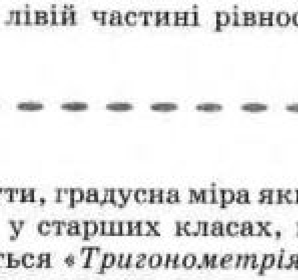


Мал. 1.4

2. На окремому аркуші паперу проведіть 3 промені з початком у спільній точці. Пронумеруйте утворені ними кути так, як показано на малюнку 1.4.
3. Виріжте ці кути і за допомогою транспортира визначте їхню градусну міру.
4. За допомогою отриманих шаблонів кутів зобразіть на папері суму кутів *1* і *2*, *3* і *1*. Визначте градусну міру утворених кутів.
5. За допомогою отриманих шаблонів кутів зобразіть на папері суму двох кутів, один з яких дорівнює найменшому з кутів *1*, *2*, *3*. Визначте градусну міру утвореного кута.
6. Позначте промені, зображені в пункті 2 як OA, OB і OC. На скільки кутів ці промені поділили площину?
7. Згідно з останнім малюнком доповніть вираз у лівій частині рівності $\angle AOB + \ldots = 360^\circ$, щоб вона була правильною.

Для допитливих

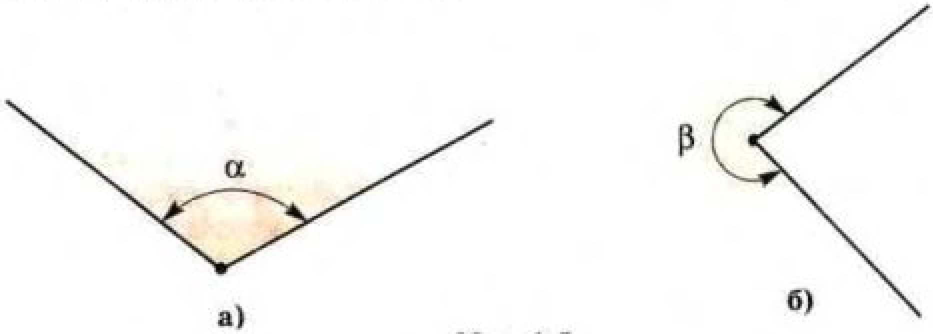
Напевне, у вас уже виникло запитання, чи існують кути, градусна міра яких перебільшує повний кут? Так, існують! Їх пізніше, у старших класах, ви будете вивчати в розділі математики, який називається «*Тригонометрія*». У тригонометрії кут розглядають як фігуру, утворену двома променями, які виходять із спільної точки і хоча б один з яких вільно обертається навколо цієї точки, «як стрілка годинника». Градусна міра такого кута враховує кількість повних обертів, які зробив один промінь відносно другого. Наприклад, на малюнку градусна міра такого кута буде $360^\circ + 180^\circ + 45^\circ = 585^\circ$. Спробуйте в такому розумінні міри кута самостійно розв'язати задачу.



На скільки градусів повертається велика стрілка годинника: а) за 2 год; б) за 4 год; в) за 12 год 45 хв?

Завдання 1

1°. Використовуючи транспортир, визначте градусні міри кутів, зображених на малюнках 1.5-а і 1.5-б.



Мал. 1.5

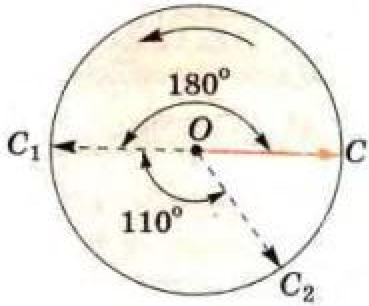
2°. Знайдіть градусну міру кута між стрілками OC і OC_2 на малюнку 1.6.

3°. Допишіть рівність за малюнком 1.7:

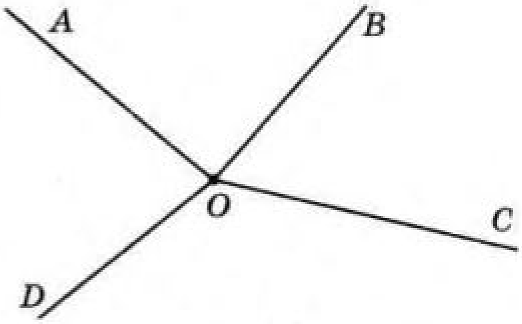
а) $\angle AOB + \angle BOC = \angle \ldots$;

б) $\angle BOC + \angle COD + \angle DOA = \angle \ldots$;

в) $\angle DOA + \angle AOB + \angle BOC + \angle COD = \ldots$.

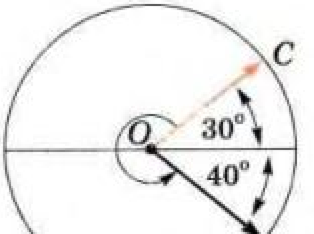


Мал. 1.6

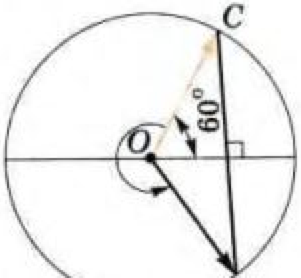


Мал. 1.7

4. Знайдіть градусну міру кута між стрілками OC і OC_1: а) на малюнку 1.8; б) на малюнку 1.9.



Мал. 1.8

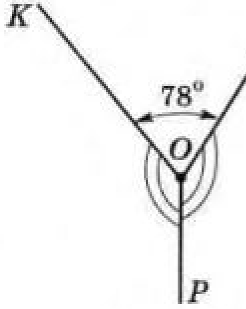


Мал. 1.9

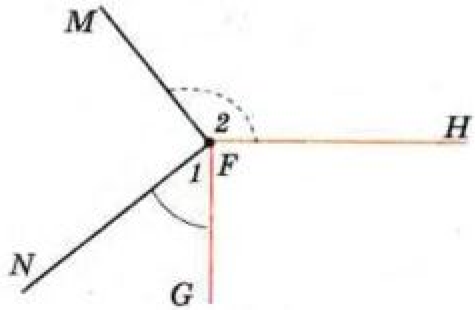
Для допитливих

Маленька Катруся вийшла погуляти між 8 і 9 годинами ранку якраз тоді, коли годинна та хвилинна стрілки годинника сумістилися. Вона повернулася додому між 2 і 3 годинами після полудня, коли годинна та хвилинна стрілки лежали на одній прямій. Скільки часу гуляла Катруся?

5. За малюнком 1.10 обчисліть градусну міру кута MOP, якщо OP – бісектриса кута MOK.



Мал. 1.10



Мал. 1.11

6. На прямій AB позначено точку O. Знайдіть градусні міри кутів, що мають за вершину точку O.

7*. На малюнку 1.11 $MF \perp NF$, $HF \perp GF$. Доведіть, що $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

8. Повний кут поділено на три частини променями OT, OR і OM. Знайдіть градусні міри утворених кутів, якщо: а) $\angle ROM = 100^\circ$, $\angle ROT - \angle TOM = 20^\circ$; б) $\angle ROM = 3\angle ROT$, $\angle TOM = 2\angle ROT$; в) $\angle ROM : \angle ROT : \angle TOM = 1 : 7 : 4$.

9*. На скільки градусів повертається годинна стрілка годинника: а) за 12 год; б) за 4 год; в) за 2 год 30 хв?

10**. Знайдіть градусну міру кута між стрілками годинника, коли він показує: а) 2 год 15 хв; б) 1 год 12 хв; в) 7 год 18 хв.

11**. Складанням паперу і за допомогою ножиць побудуйте кут градусної міри: а) 270°; б) 315°.

12**. За допомогою лише циркуля і лінійки побудуйте кут градусної міри: а) 135°; б) 285°.

13**. Побудуйте бісектрису кута, більшого за розгорнутий.

14**. Побудуйте бісектрису повного кута.

Зауваження. Твердження, доведене нами в 7-му класі, про властивість бісектриси кута як геометричного місця точок всередині кута, рівновіддалених від його сторін, тепер не буде правильним для розширеного поняття кута. Його треба уточнити так. *Бісектриса кута, меншого за розгорнутий, є геометричним місцем точок, що містяться всередині кута і рівновіддалені від сторін цього кута.*

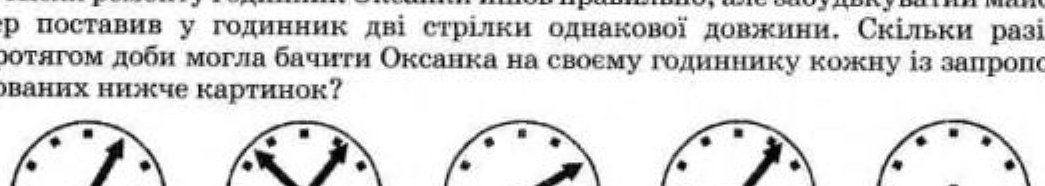
Для допитливих

1. Через дану в крузі точку проведіть хорду, що поділяється цією точкою навпіл.

2. Побудуйте коло заданого радіуса, що дотикається до даної прямої в даній точці.

3. Дано дві паралельні прямі і січна. Побудуйте коло, що дотикається до всіх трьох заданих прямих.

4. Після ремонту годинник Оксанки йшов правильно, але забудькуватий майстер поставив у годинник дві стрілки однакової довжини. Скільки разів протягом доби могла бачити Оксанка на своєму годиннику кожну із запропонованих нижче картинок?



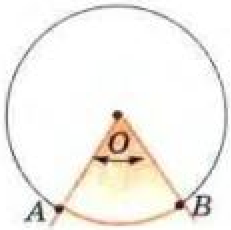
А Б В Г Д

§ 2. Центральний кут. Градусна міра дуги кола

Центральним кутом називається кут із вершиною в центрі кола.

Дугою кола, яка відповідає центральному куту, називається частина кола, яка міститься всередині цього центрального кута.

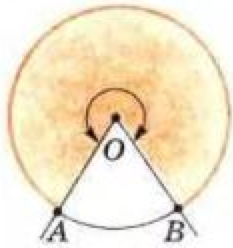
Частина центрального кута, яку обмежує відповідна йому дуга кола, називається *сектором.*



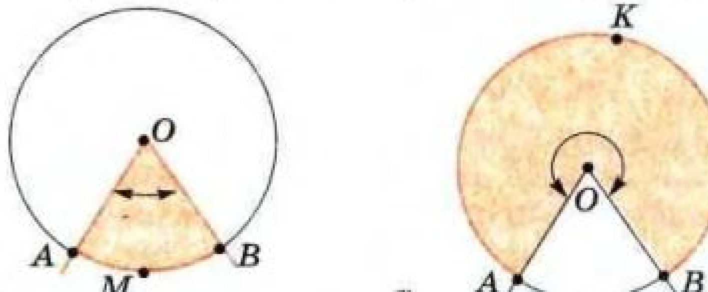
⇑

$\angle AOB$ –
центральний

⇓

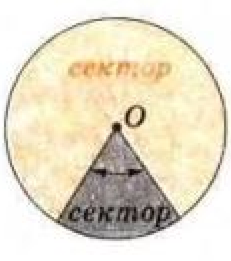


Наприклад, на малюнку 1.12 маємо два центральні кути AOB, один з яких менший за розгорнутий кут, а другий – більший. Їм відповідають дві дуги з кінцями в точках A і B: дуга, менша за півколо (мал. 1.12-а), і дуга, більша за півколо (мал. 1.12-б). Щоб розрізняти ці дуги, на кожній із них можна позначити точку, наприклад M і K (мал. 1.12), і записувати відповідні дуги так: $\smile AMB$ і $\smile AKB$. Тоді можна назвати і відповідний сектор кола, наприклад $AMBO$ (мал. 1.12-а) або $AKBO$ (мал. 1.12-б).



а) б)

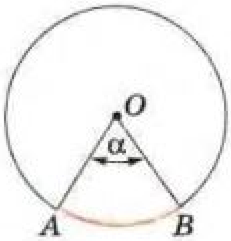
Мал. 1.12



Зауваження. Якщо центральний кут буде розгорнутим, то також матимемо два центральні кути (розгорнуті) і дві відповідні їм дуги (півкола) та два сектори (півкруги).

Градусною мірою дуги кола називається градусна міра відповідного їй центрального кута.

Міра дуги кола не залежить від радіуса кола, адже від радіуса кола не залежить міра відповідного центрального кута. Який би не був радіус кола, *міра дуги повного кола* – 360°, оскільки йому відповідає повний центральний кут, міра якого 360°.

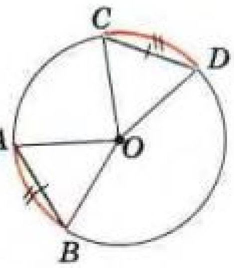


градусна міра $\smile AB = \alpha$

Для допитливих

1. Петрику треба було поділити коло на дві рівні дуги. Він накреслив коло на аркуші паперу і пішов вечеряти. Поки його не було, миша вигризла клаптик паперу з центром кола. Чи зможе тепер Петрик поділити це коло навпіл?

2. Знайдіть геометричне місце середин усіх хорд даного кола, що мають задану довжину (меншу за діаметр).

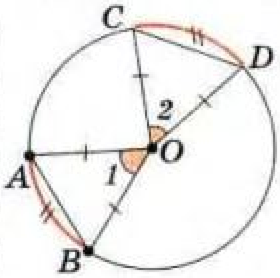


$AB = CD$

$\Updownarrow$

$\smile AB = \smile CD$

Т Теорема. **В одному колі рівні дуги стягуються рівними хордами.**



Мал. 1.13

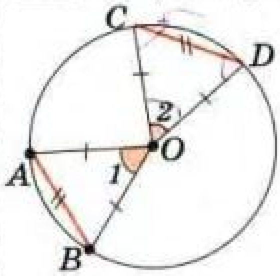
Нехай дуга AB дорівнює дузі CD (мал. 1.13). Треба довести рівність хорд AB і CD.

Доведення

За умовою $\smile AB = \smile CD$, тобто $\angle 1 = \angle 2$, $OA = OB = OC = OD$ (як радіуси кола). Тоді $\triangle AOB = \triangle COD$ (за першою ознакою) і $AB = CD$.

Теорему доведено.

Т Теорема (обернена). **В одному колі рівні хорди стягують рівні дуги.**



Мал. 1.14

Нехай хорди AB і CD рівні (мал. 1.14). Треба довести рівність дуг AB і CD.

Доведення

За умовою $AB = CD$ і $OA = OB = OC = OD$ (як радіуси кола). Тоді $\triangle AOB = \triangle COD$ (за третьою ознакою) і $\angle 1 = \angle 2$, тобто $\smile AB = \smile CD$.

Теорему доведено.

Зауваження. *Теореми, доведені нами для одного кола, залишаються правильними і для рівних кіл,* бо такі кола відрізняються одне від одного лише розміщенням.

Практична робота 2

1. Накресліть коло і позначте дві точки на ньому.
2. Різними кольорами наведіть дуги, на які поділяють коло ці точки.
3. Сполучіть центр кола з точками, які ви позначили. Виміряйте утворені кути.
4. Назвіть дуги і центральні кути, які їм відповідають.
5. Визначте градусні міри утворених дуг.
6. Різними кольорами зафарбуйте сектори, що відповідають утвореним дугам, і назвіть їх.

Для допитливих

Всесвітньо відомий український математик **Василь Петрович Єрмаков** (1845–1922), професор Київського університету, член-кореспондент Петербурзької академії наук, народився в селі Терюха Гомельської області. Він відомий не лише своїми працями з вищої математики, а й задачами, які складав, у тому числі й геометричними. *Спробуйте розв'язати* одну з них.

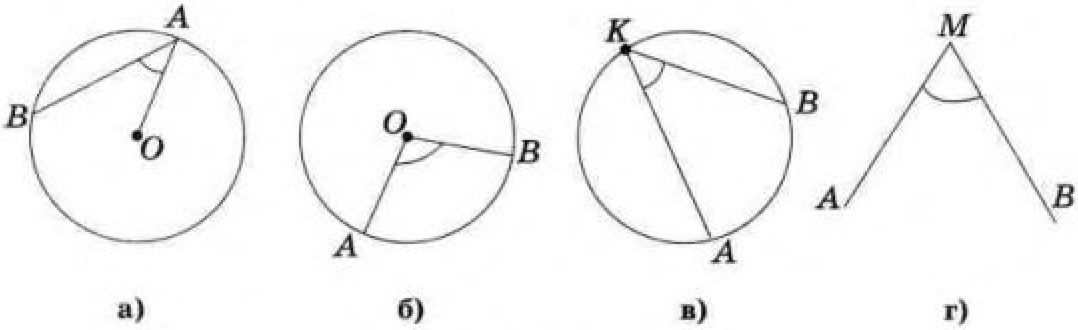
Дано два рівні кола, що не мають спільних точок. На їхніх двох внутрішніх дотичних позначили дві довільні точки F і F_1. З них до кожного кола можна провести ще по одній дотичній. Нехай нові дотичні, проведені з точок F і F_1 до першого кола, перетинаються в точці A, а до другого – у точці B. Треба довести, що:

1) пряма AB – паралельна прямій, яка сполучає центри кіл;

2) пряма, яка містить середини FF_1 і AB, проходить через середину відрізка, що сполучає центри даних кіл.

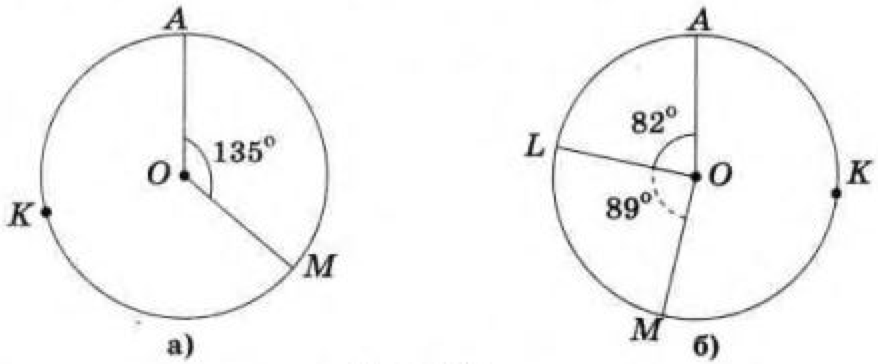
Завдання 2

1°. Які з кутів, зображених на малюнку 1.15, центральні (O – центр кола)?



Мал. 1.15

2°. За малюнком 1.16 знайдіть градусну міру дуги AKM.



Мал. 1.16

3°. За допомогою тільки циркуля і лінійки накресліть дугу, градусна міра якої дорівнює: а) $180°$; б) $360°$.

4. Як зміниться градусна міра дуги кола, що відповідає центральному куту $67°$, якщо радіус кола: а) збільшити на 5 см; б) зменшити вдвічі?

5. Побудуйте сектор, градусна міра дуги якого дорівнює: а) $85°$; б) $125°$; в) $245°$.

6. На скільки градусів відрізняються міри двох дуг кола, якщо різниця градусних мір відповідних їм центральних кутів дорівнює: а) $4°$; б) $120°$?

7. Накресліть коло з центром O і позначте на ньому точку A. Побудуйте хорду AB так, щоб: а) $\angle AOB = 90°$; б) $\angle AOB = 60°$; в) $\angle AOB = 180°$; г) $\angle AOB = 120°$.

8°. Знайдіть градусні міри дуг кола, на які його ділить діаметр цього кола.

9. Чи можна трьома точками поділити коло на дуги, градусні міри яких: а) $132°, 183°, 48°$; б) $56°, 204°, 100°$; в) $244°, 90°, 16°$?

10. На скільки секторів треба розрізати круг, щоб дуги, які обмежують ці сектори, мали однакову градусну міру: а) $60°$; б) $10°$? Чи будуть рівними між собою хорди, що стягують ці дуги? Відповідь обґрунтуйте.

Мал. 1.17

11*. У колі проведено діаметри AB і CD. Доведіть, що $AD = CB$.

12*. Хорди AB і PK (мал. 1.17) рівні. Доведіть рівність хорд AK і PB.

13. Радіус кола з центром O дорівнює 16 см. Знайдіть хорду AB, якщо: а) $\angle AOB = 180°$; б) $\angle AOB = 60°$; в) $\angle AOB = 300°$.

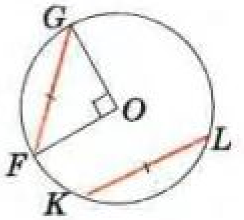
14*. Трикутник ABC вписаний у коло. Сторона AB – діаметр кола, а точка C ділить дугу ACB навпіл. Знайдіть кути трикутника ABC.

15*. Сторона AB трикутника ABC є діаметром кола, а сторони AC і CB перетинають коло в точках K і P відповідно. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо точки K і P ділять дугу AB на три рівні частини.

16*. Розділіть за допомогою циркуля коло: а) на шість рівних частин; б) на три рівні частини.

17. Побудуйте трикутник за радіусом описаного кола і двома його сторонами.

18. Знайдіть градусні міри дуг, на які коло ділиться точками K і L, якщо $\angle FOG = 90^\circ$, $KL = FG$, точка O – центр кола (мал. 1.18).



Мал. 1.18

19. Точки A і B поділяють коло на дві дуги. Знайдіть градусні міри цих дуг, якщо їхня різниця дорівнює 160°.

20. Точки A, B і C поділяють коло на три дуги, градусні міри яких відносяться як 1 : 2 : 3. Знайдіть градусні міри вказаних дуг.

21. Хорда кола завдовжки 12 см стягує дугу, градусна міра якої становить 60°. Обчисліть діаметр кола.

22. Хорда кола стягує дугу, градусна міра якої становить 60°. Знайдіть довжину хорди, якщо діаметр кола дорівнює 14 см.

23*. Серединний перпендикуляр до хорди AB перетинає коло в точках P і M. Знайдіть градусні міри дуг BP, AP, AM і MB, якщо відрізок AB з центра кола видно під кутом 120°.

24.** Хорди AB, BC і CA видно з центра кола під кутами, градусні міри яких відносяться як 2 : 5 : 5. Чи можуть точки A і C лежати в одній півплощині відносно прямої OB? Знайдіть градусні міри дуг, які стягують ці хорди.

25.** Точки M і K лежать по один бік від діаметра AB. Знайдіть градусні міри дуг, на які поділяється коло точками A, B, M і K, якщо центральний кут AOM на 20° більший за кут MOK, який удвічі менший за кут KOB. Розгляньте два випадки.

26.** Точки M і K лежать по один бік від діаметра AB. Знайдіть градусні міри дуг, на які поділяється коло точками A, B, M і K, якщо центральний кут AOM утричі більший за кут MOK, але вдвічі менший за кут KOB. Розгляньте два випадки.

27.** Точки P і M лежать по різні боки від діаметра CB. Знайдіть градусні міри дуг, на які поділяється коло точками C, P, B і M, якщо центральний кут BOM удвічі менший за кут COM, а градусні міри дуг MCP і MBP відносяться як 4 : 5.

28.** Через точку кола проведено хорду і дотичну. Знайдіть кут між ними, якщо хорда стягує дугу 40°.

29.** Через точку кола проведено хорду і дотичну. Знайдіть градусні міри дуг, які стягує хорда, якщо кут між хордою і дотичною дорівнює 23°.

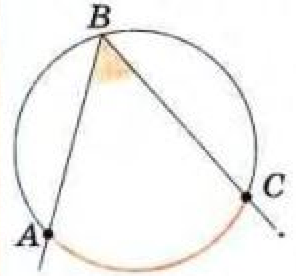
Для допитливих

1. Два кола перетинаються в точках A і B. Точки C і D цих кіл є діаметрально протилежними точці A. Доведіть, що точки D, C і B лежать на одній прямій.

2. Дві вершини B і D квадрата $ABCD$ належать колу, центром якого є точка A. Серединний перпендикуляр до відрізка BC перетинає вказане коло в точці M. Знайдіть градусну міру кута AMC.

§ 3. Вписаний кут

Вписаним кутом називається кут (менший за 180°), вершина якого належить колу, а його сторони перетинають це коло.

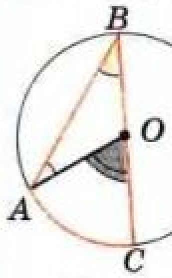


Мал. 1.19

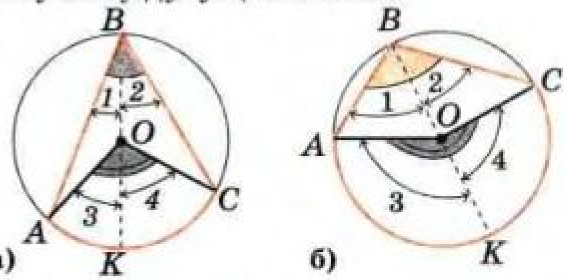
Наприклад, кут ABC на малюнку 1.19 – вписаний. Він спирається на дугу AC, що лежить між його сторонами.

Теорема. **Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.**

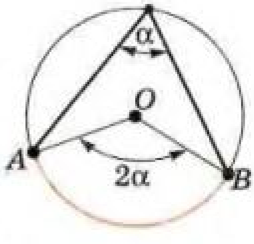
Цю теорему треба розуміти так: градусна міра вписаного кута дорівнює половині градусної міри центрального кута, який спирається на ту саму дугу цього кола.



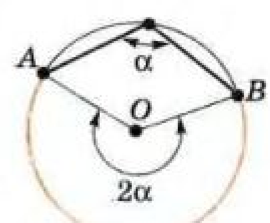
Мал. 1.20



Мал. 1.21



$\alpha = \frac{1}{2} \smile AB$



Доведення

Розглянемо три випадки розміщення центра кола.

1. *Центр кола O лежить на стороні вписаного кута* ABC (мал. 1.20).

Провівши радіус OA, отримаємо рівнобедрений трикутник AOB (OA і OB – радіуси), в якого $\angle A = \angle B$. Для цього трикутника кут AOC зовнішній; тому він дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, несуміжних з ним, тобто $\angle AOC = 2\angle B$. Тоді $\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2} \smile AC$, і твердження теореми виконується.

2. *Центр кола O лежить усередині вписаного кута* ABC (мал. 1.21).

Діаметр BK поділяє заданий вписаний кут на два кути, кожний з яких вимірюється половиною відповідного йому центрального кута (див. випадок 1):

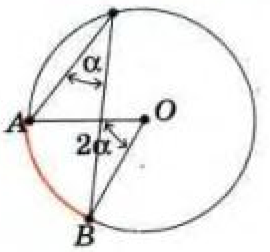
$$\angle ABC = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}\angle 3 + \frac{1}{2}\angle 4 = \frac{1}{2}(\angle 3 + \angle 4) = \frac{1}{2}\angle AOC,$$

і твердження теореми виконується.

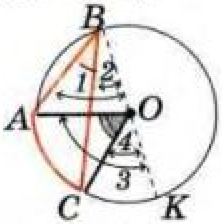
Для допитливих

Коло γ_1 перетинає діаметр AB кола γ_2 у точці C, $AC < \frac{1}{2}AB$. Спільна дотична до заданих кіл дотикається до γ_2 у точці D. Доведіть, що $CD \perp AB$.

$\alpha = \frac{1}{2} \smile AB$



3. *Центр кола O лежить поза вписаним кутом ABC* (мал. 1.22).



Мал. 1.22

Проведемо діаметр BK.

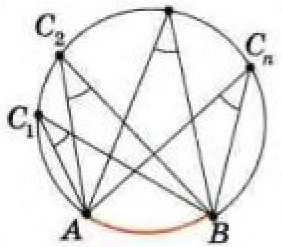
Маємо два вписані кути $\angle 1$ і $\angle 2$ (див мал. 1.22). Кожен з цих кутів вимірюється половиною відповідного йому центрального кута:

$$\angle ABC = \angle 1 - \angle 2 = \frac{1}{2}\angle 3 - \frac{1}{2}\angle 4,$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle 3 - \angle 4) = \frac{1}{2}\angle AOC,$$

і твердження теореми виконується.

Теорему доведено.



$\smile AB$ *– спільна*

$\Downarrow$

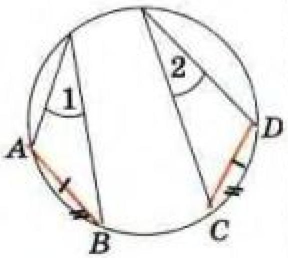
$\angle C_1 = \angle C_2 = ...$

Н Наслідок 1. **Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні.**

Кожен із цих кутів вимірюється половиною однієї й тієї самої дуги (мал. 1.23).

Н Наслідок 2. **В одному колі (рівних колах) вписані кути, що спираються на рівні дуги, рівні між собою, і навпаки – рівні вписані кути спираються на рівні дуги.**

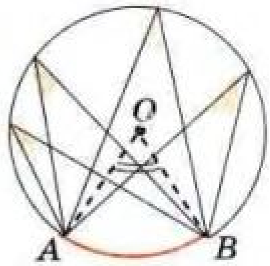
Кожен із цих кутів, градусні міри яких однакові, вимірюється половиною дуги (мал. 1.24).



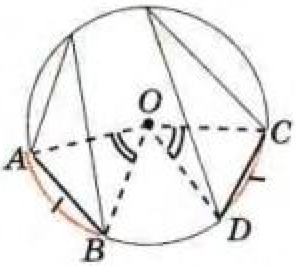
$AB = CD$

$\Updownarrow$

$\angle 1 = \angle 2$



Мал. 1.23

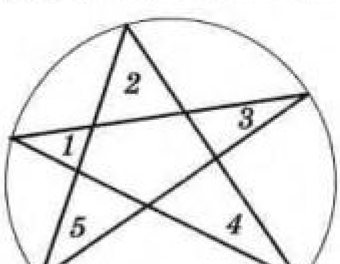


Мал. 1.24

Для допитливих

1. У коло вписали «зірочку» (мал. **А**). Знайдіть суму кутів *1, 2, 3, 4* і *5*. Чи зміниться значення суми кутів зірочки, якщо вона буде семикутна?

2. На папері намалювали «зірочку» (мал. **Б**). Знайдіть суму кутів *1, 2, 3, 4* і *5*.

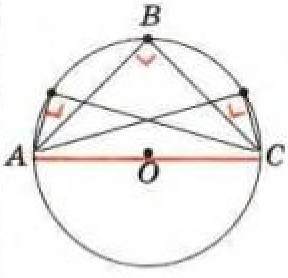


А

Б

Наслідок 3. Будь-який вписаний кут, що спирається на діаметр, – прямий.

Такий кут вимірюється половиною міри півкола і, отже, дорівнює $180^\circ : 2 = 90^\circ$ (мал. 1.25).



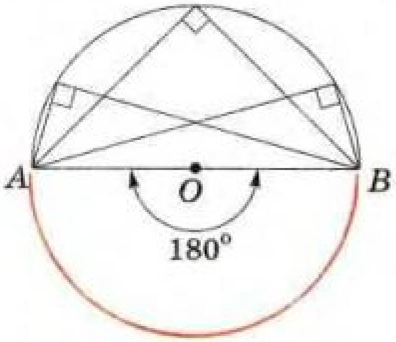
$AC = 2R$

$\Updownarrow$

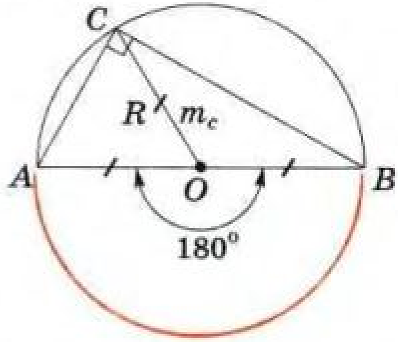
$\angle ABC = 90^\circ$

Наслідок 4. Будь-який прямий вписаний кут спирається на діаметр.

Градусна міра відповідного центрального кута AOB (мал. 1.25) дорівнює $90^\circ \cdot 2 = 180^\circ$, і точки A, O та B лежать на одній прямій, тобто AB – діаметр.



Мал. 1.25



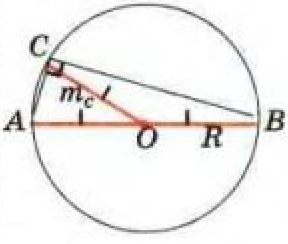
Мал. 1.26

Наслідок 5. Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є серединою його гіпотенузи.

Гіпотенуза такого трикутника стягує дугу градусної міри 180°, тобто півколо (мал. 1.26).

Наслідок 6. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює половині цієї гіпотенузи.

Медіана гіпотенузи є радіусом описаного навколо трикутника кола, а гіпотенуза – діаметром цього кола (мал. 1.26).



$\angle C = 90^\circ$

$\Downarrow$

$O \in c,$

$m_c = \frac{c}{2} = R$

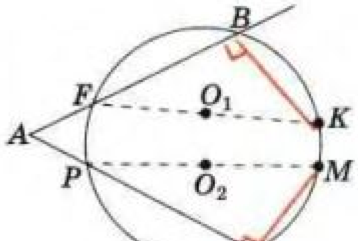
Для допитливих

Нагадаємо: **софізм** – це навмисно помилковий умовивід, який має видимість правильного. Будь-який софізм містить одну або кілька замаскованих помилок.

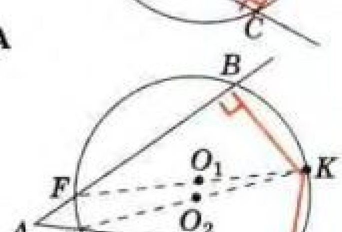
Розгадайте софізм: **будь-яке коло має два центри.**

Нехай січні AB і AC перетинаються в точці A (мал. **А**). Побудуємо в точках B і C до прямих AB і AC перпендикуляри, які перетнуть дане коло в точках K і M відповідно. Кути FBK і PCM – прямі, тоді хорди FK і PM – діаметри, а середини цих хорд будуть різними центрами даного кола. Твердження доведено?!

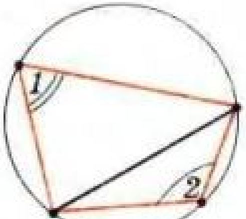
Тим, хто вважає, що точки K і M повинні збігатися, бо кути FBK і PCM – прямі, пропонуємо відповідне «доведення» за малюнком **Б**.



А



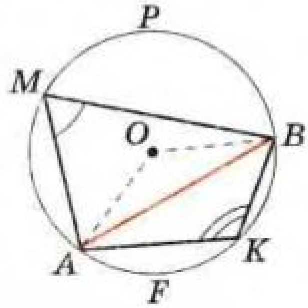
Б



$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

Опорна задача

У колі проведена хорда. Доведіть, що сума вписаних кутів, які спираються на цю хорду і вершини яких лежать по різні боки від неї, дорівнює 180°.



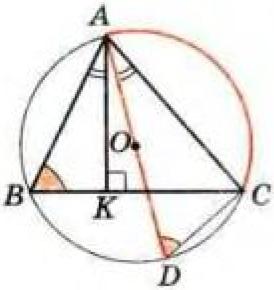
Дано: $M \in \smile APB$; $K \in \smile AFB$.
Довести: $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$.

1) $\angle AMB = \frac{1}{2} \smile AFB$,

$\angle AKB = \frac{1}{2} \smile APB$ (як вписані);

2) $\angle AMB + \angle AKB = \frac{1}{2} (\smile AFB +$

$+ \smile APB) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$. Щ. в. д.



$AK \equiv h_a$,

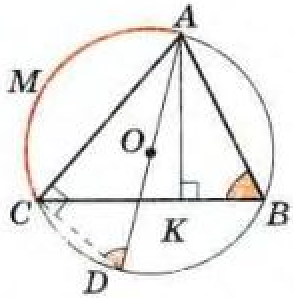
$AD \equiv 2R$

$\Downarrow$

$\angle CAO = \angle BAK$

Опорна задача

Доведіть, якщо для трикутника ABC O – центр описаного кола, а AK – його висота, то $\angle OAC = \angle BAK$.



Дано: $AK \perp CB$; $OA \equiv R$.
Довести: $\angle OAC = \angle BAK$.

1) $AD \equiv 2R \rightarrow \angle DCA = 90^\circ$;
2) $\smile AMC \rightarrow \angle CDA = \angle CBA = \angle B$;
3) $\triangle CDA$ і $\triangle KBA$: $\angle OAC = 90^\circ - \angle B = \angle BAK$. Щ. в. д.

Ми розглянули випадок, коли центр описаного кола O міститься всередині $\triangle ABC$. Інші випадки розміщення центра описаного кола розгляньте самостійно.

Практична робота 3

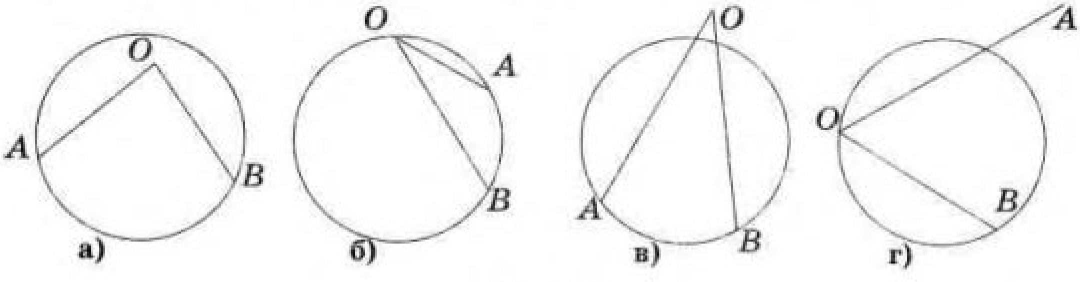
1. Накресліть коло і позначте його центр та дві точки на ньому. Кольоровим олівцем наведіть одну з дуг кола, обмежених позначеними точками.
2. Накресліть центральний кут, який відповідає цій дузі. За допомогою транспортира визначте градусну міру дуги.
3. Накресліть вписаний кут, який спирається на ту саму дугу. За допомогою транспортира визначте його градусну міру і порівняйте з градусною мірою центрального кута. Зробіть висновок і запишіть його.
4. Розгляньте другу дугу кола і наведіть її іншим кольором; виконайте для неї завдання п. 2–3.
5. Порівняйте градусні міри двох дуг. Зробіть висновок і запишіть його.
6. Порівняйте градусні міри вписаних кутів, що спираються на ці дві дуги. Зробіть висновок і запишіть його.
7. Знайдіть суму центральних кутів, які відповідають вашим дугам, і суму двох вписаних кутів, що спираються на них. Порівняйте їх.

Для допитливих

Коло γ_1 (із центром O_1) проходить через центр O_2 кола γ_2 ($R_2 < R_1$). Із точки C кола γ_1 провели дотичні до кола γ_2, що перетинають γ_1 у точках A і B. Доведіть, що $AB \perp O_1O_2$.

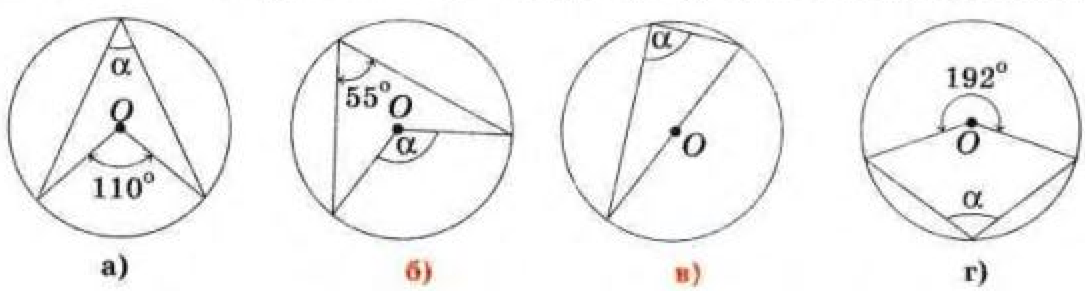
Завдання 3

1°. Які серед кутів AOB є вписаними в коло (мал. 1.27)?



Мал. 1.27

2°. Точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру кута α за малюнком 1.28.



Мал. 1.28

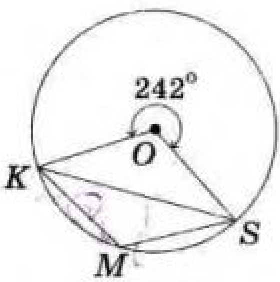
3°. Обчисліть градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює: а) $48°$; б) $143°$; в) $180°$; г) $322°$; д) β.

4°. Обчисліть градусну міру центрального кута кола, якщо градусна міра відповідного йому вписаного кута дорівнює: а) $13°$; б) $90°$; в) $128°$; г) $87°$; д) α.

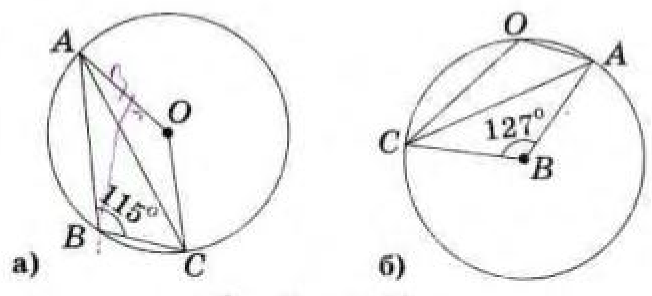
5°. Знайдіть градусну міру вписаного кута ABC, якщо дуга AC, на яку він спирається, дорівнює: а) $24°$; б) $57°$; в) $90°$; г) $126°$; д) $180°$.

6. Знайдіть кути трикутника KMS за малюнком 1.29, якщо $KM = MS$, O – центр кола, $\angle KOS = 242°$.

7. За малюнком 1.30 знайдіть градусну міру кута AOC, якщо центри кіл на малюнках 1.30-а і 1.30-б точки O і B відповідно.



Мал. 1.29



Мал. 1.30

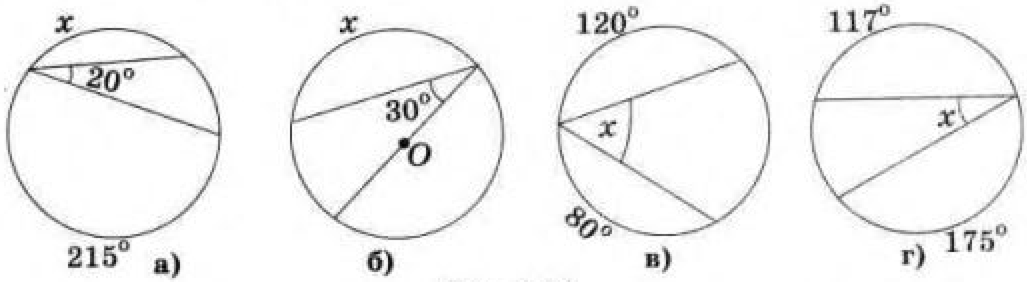
8. Точка M кола і його центр O лежать по різні боки від хорди AB. Знайдіть: а) кут AMB, якщо $\angle AOB = 132°$; б) кут AOB, якщо $\angle AMB = 118°$.

9*. Точка O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Знайдіть кут ABC, якщо $\angle AOC = 120°$. Скільки розв'язків має задача?

10. Хорди AB, BC і AC видно з центра кола під кутами відповідно: а) $110°$, $120°$ і $130°$; б*) $150°$, $40°$ і $110°$. Знайдіть кути трикутника ABC.

11. Чи існує трикутник, сторони якого видно з центра описаного навколо нього кола під кутами відповідно 30°, 60° і 80°? Відповідь обґрунтуйте.

12°. За малюнком 1.31 знайдіть x.



Мал. 1.31

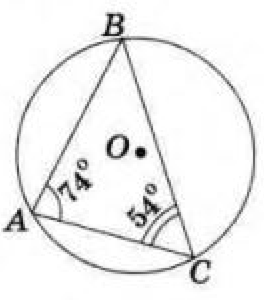
13. Хорда ділить коло на дуги, міри яких відносяться як 5 : 7. Визначте градусні міри вписаних кутів, що спираються на цю хорду.

14. Точка O – центр кола (мал. 1.32), $\angle BAC = 74^\circ$, $\angle ACB = 54^\circ$. Знайдіть: $\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle BOC$.

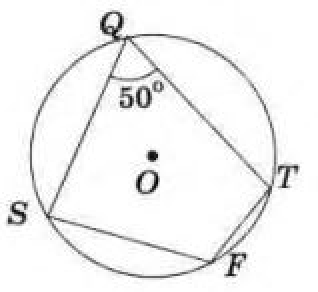
15*. Точки A, B і C ділять коло на три дуги, градусні міри яких відносяться як 2 : 7 : 6. Знайдіть кути трикутника ABC.

16. За малюнком 1.33 знайдіть кут SFT, якщо точка O – центр кола.

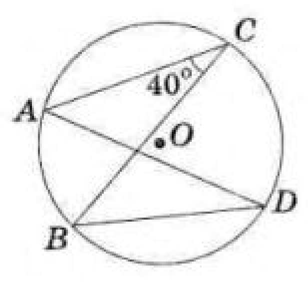
17. Точка O – центр кола, $\angle ACB = 40^\circ$ (мал. 1.34). Знайдіть кут ADB.



Мал. 1.32



Мал. 1.33



Мал. 1.34

18*. Точки B і D лежать на колі по один бік від хорди AC, $\angle ABC = 45^\circ$. Знайдіть кут ADC.

19*. Точки K і L лежать на колі по різні боки від хорди MN, $\angle MKN = 87^\circ$. Знайдіть кут MLN.

20*. На колі позначили точки: A, B, C, K. Хорди AB і BC взаємно перпендикулярні. Знайдіть кути AOC і AKC.

21*. Центральний кут AOB на 30° більший за вписаний кут, який спирається на хорду AB. Знайдіть кут AOB. (Розгляньте 2 випадки.)

Для допитливих

1. За столом сидять 5 хлопців і 6 дівчат, а на столі на тарілці лежать булочки. Кожна дівчина дала по одній булочці кожному знайомому хлопцю. Потім кожен хлопець дав з тарілки по одній булочці кожній незнайомій дівчині. Після цього тарілка виявилася порожньою. Скільки було булочок на тарілці спочатку?

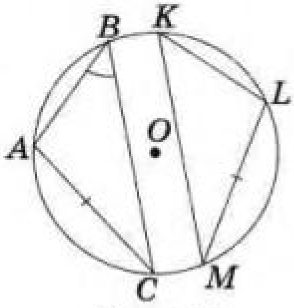
2. O – центр кола, вписаного в трикутник ABC. Доведіть, що центр кола, яке проходить через точки A, B, O, належить прямій CO.

3. Обчисліть кути рівнобедреного трикутника, в якому центри вписаного та описаного кіл взаємно симетричні відносно основи трикутника.

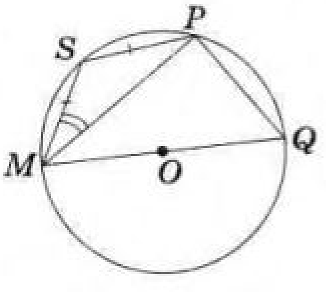
22. За малюнком 1.35 знайдіть кут MKL, якщо $\angle ABC = 35^\circ$, а точка O – центр кола.

23. Точка O – центр кола, $\angle SMP = 20^\circ$ (мал. 1.36). Знайдіть кут SPQ.

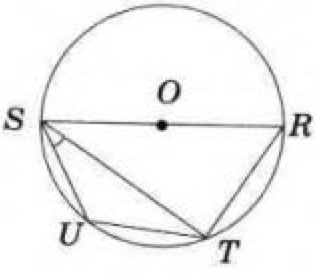
24*. На малюнку 1.37 точка O – центр кола, $\angle UST = 25^\circ$, $UT = TR$. Знайдіть кут UTR.



Мал. 1.35



Мал. 1.36



Мал. 1.37

25*. Хорда AB стягує дугу, що дорівнює 115°, а хорда AC – дугу 43°. Знайдіть кут BAC. (Розгляньте два випадки.)

26*. Один з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 20°. Під яким кутом видно кожний з його катетів із центра описаного кола?

27*. На колі послідовно розміщено точки A, K, P і B. Хорда AB є діаметром, а $\angle KPA = 32^\circ$. Знайдіть: а) $\angle KPB$; б) $\angle KAB$.

28*. Продовження висоти CH прямокутного трикутника ABC, проведеної до його гіпотенузи, ділить дугу AB описаного кола на дуги, одна з яких на 40° менша за другу. Знайдіть гострі кути трикутника.

29*. а) Доведіть, що градусні міри дуг кола, які містяться між двома паралельними хордами, однакові. б) Чи однакові дуги кола, які містяться між хордою і паралельною їй дотичною? в) Чи однакові дуги, які містяться між двома паралельними дотичними?

30*. Хорди AB і CK рівні і паралельні, а хорди AK і CB перетинаються. Доведіть, що AK і CB – діаметри.

31*. У коло вписано рівносторонній трикутник ABC. На колі між точками A і B, B і C та C і A розташовані точки M, P і H відповідно. Знайдіть суму кутів AMB, BPC і CHA.

32*. У коло вписано трикутник ABC. На колі між точками A і B, B і C та C і A містяться точки K, L і T відповідно. Знайдіть суму кутів AKB, BLC і CTA.

33.** I і O – центри вписаного і описаного кіл трикутника ABC. Знайдіть градусну міру кута C, якщо $\angle AIB = \angle OAB$.

34.** Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 40°. Одна з бічних сторін його є діаметром півкола, яке поділяється двома іншими сторонами на три частини. Знайдіть градусні міри цих частин.

35.** Хорда AB дорівнює радіусу кола, а точка C міститься поза цим колом, причому відрізки AC і CB перетинають більшу дугу кола в точках K і H та поділяють цю дугу у відношенні 7 : 1 : 7. Знайдіть кут ACB.

Для допитливих

1. Скільки розв'язків має задача: побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і медіаною, проведеною з вершини прямого кута?

2. Побудуйте рівнобедрений трикутник за радіусом вписаного кола та висотою, проведеною до основи цього трикутника.

3. До двох кіл, що дотикаються одне до одного зовнішньо у точці K, провели спільну дотичну K_1K_2 (K_1 і K_2 – точки дотику). Знайдіть градусну міру кута K_1KK_2.

36*. Навколо трикутника ABC описано коло з центром O. Знайдіть кут між стороною AC і діаметром описаного кола, проведеним через вершину трикутника A, якщо: **а)** $\angle ABC = 40^\circ$; **б)** $\angle ABC = 140^\circ$.

37.** У трикутнику ABC проведено висоту AH, а точка O – центр описаного кола. Доведіть, що $\angle OAH = |\angle ABC - \angle BCA|$.

38.** Два кола перетинаються в точках A і B. Через точку A проведено січну, яка перетинає кола в точках K і M. Доведіть, що величина кута KBM стала для кожної січної, що проходить через точку A.

39.** Через точки A і B перетину двох кіл провели паралельні прямі, які перетинають одне коло в точках M_1 і N_1, а друге – в точках M_2 і N_2. Доведіть, що $M_1N_1 = M_2N_2$.

40.** Два кола перетинаються в точках A і B. Продовження хорд AC і BD першого кола перетинають друге коло в точках E і P. Доведіть, що CD і EP паралельні.

41*. Відкладіть (за допомогою циркуля і лінійки без позначок) від заданої точки на колі дугу, на яку буде спиратися вписаний кут заданої градусної міри: **а)** 60°; **б)** 45°; **в)** 30°; **г)** α.

42*. Побудуйте дотичну до кола в заданій точці на ньому і хорду, яка проходить через точку дотику і відтинає дугу градусної міри 45°.

43*. Побудуйте геометричне місце точок, з яких даний відрізок видно під прямим кутом.

44*. Побудуйте прямокутний трикутник за його висотою і медіаною, проведеними до гіпотенузи.

45*. Побудуйте прямокутний трикутник за точками перетину його висот, серединою гіпотенузи та основою висоти, проведеної до гіпотенузи.

46.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за радіусом описаного кола і: **а)** основою; **б)** висотою, проведеною до основи.

47.** Побудуйте геометричне місце точок, з яких даний відрізок видно під заданим кутом.

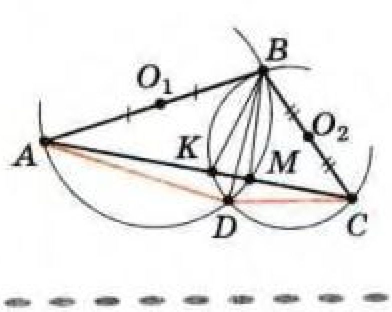
48.** Побудуйте трикутник за радіусом описаного кола, стороною та: **а)** медіаною, проведеною до цієї сторони; **б)** висотою, опущеною на цю сторону.

49.** Побудуйте два кола однакового радіуса, при перетині яких від кожного з них відтинається дуга заданої градусної міри: **а)** 60°; **б)** 45°; **в)** 30°.

Для допитливих

Розгадайте софізм: **через дві різні точки можна провести дві різні прямі.**

На сторонах AB і BC трикутника ABC (див. мал.) як на діаметрах побудуємо півкола, які перетнуться в точці D. Сполучимо цю точку з точками A і C. Тоді $\angle ADB = \angle CDB = 90^\circ$ як вписані, що спираються на діаметр. Тому точки A, D і C належать одній прямій. А це означає, що через точки A і C провели дві різні прямі?!



Першоквітневий жарт математика із сином.

– Ти з самого ранку чекав, щоб я тебе розіграв?

– Так, з самого ранку.

– Але я тебе не розіграв?

– Так.

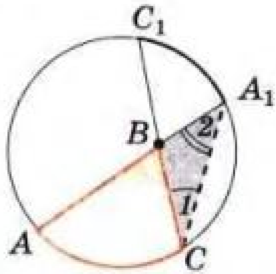
– А ти з самого ранку чекав розіграшу?

– Чекав!

– Ось я тебе і розіграв!

§ 4. Вимірювання кутів, утворених хордами, січними і дотичними

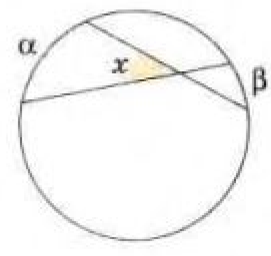
Теорема 1. **Кут з вершиною всередині кола вимірюється півсумою градусних мір двох дуг, на які спираються цей кут і вертикальний до нього.**



Мал. 1.38

Нехай дано кут з вершиною B всередині кола, A і C – точки перетину його сторін з колом, а A_1 і C_1 – точки перетину сторін кута, що є вертикальним даному, з цим колом (мал. 1.38). Треба довести, що

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile A_1C_1).$$



$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Доведення

Кут ABC є зовнішнім кутом трикутника A_1BC, а кути AA_1C і C_1CA_1 – вписаними. Тоді

$$\angle ABC = \angle AA_1C + \angle C_1CA_1 = \frac{1}{2}\smile AC + \frac{1}{2}\smile A_1C_1,$$

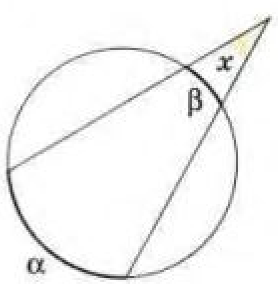
що й вимагалося довести.

Теорема 2. **Кут, вершина якого лежить зовні кола, а сторони перетинаються з колом, вимірюється піврізницею градусних мір двох дуг, що містяться всередині цього кута.**

Мал. 1.39

Нехай сторони кута з вершиною B перетинають задане коло в точках A і A_1 та C і C_1 відповідно (мал. 1.39). Треба довести, що

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile A_1C_1 - \smile AC).$$



$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Доведення

Кут 1 є зовнішнім кутом трикутника ABC_1, причому кути 1 і 2 – вписані. Тоді

$$\angle 1 = \angle ABC + \angle 2.$$

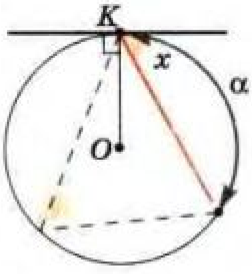
Звідси:

$$\angle ABC = \angle 1 - \angle 2 = \frac{1}{2}\smile A_1C_1 - \frac{1}{2}\smile AC.$$

Теорему доведено.

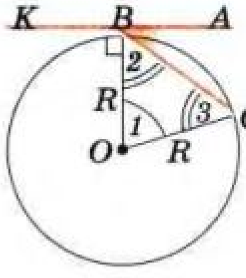
Для допитливих

1. У колі провели дві взаємно перпендикулярні хорди AB і CD. Доведіть, що:
а) сума градусних мір дуг AC і CD дорівнює $180°$;
б) пряма, яка проходить через точку перетину хорд перпендикулярно до CB, поділяє відрізок AD навпіл.
2. У трикутнику ABC кут B дорівнює $60°$, бісектриси AD і CE перетинаються в точці I. Доведіть, що $ID = IE$.



$x = \frac{\alpha}{2}$

Т Теорема 3. **Кут між дотичною до кола і хордою, проведеною через точку дотику, вимірюється половиною градусної міри дуги, яку стягує хорда і яка лежить усередині цього кута.**



Мал. 1.40

Нехай дано коло, його дотичну AB і хорду BC (мал. 1.40). Треба довести, що

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile BC.$$

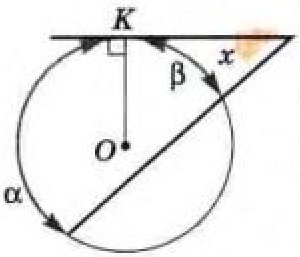
Доведення

Сполучимо точки B і C з центром кола O.

1) B – точка дотику, OB – радіус кола. Тоді $\angle ABO = 90^\circ$.

2) OB і OC – радіуси кола. Тоді $\angle 2 = \angle 3 = (180^\circ - \angle 1) : 2$.

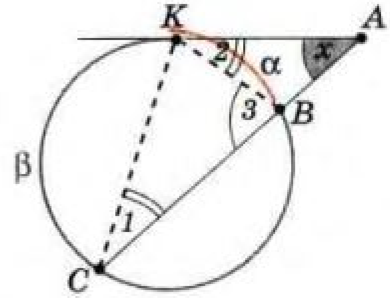
3) $\angle ABC = \angle ABO - \angle 2 = 90^\circ - (180^\circ - \angle 1) : 2 = \frac{1}{2}\angle 1$.
Теорему доведено.



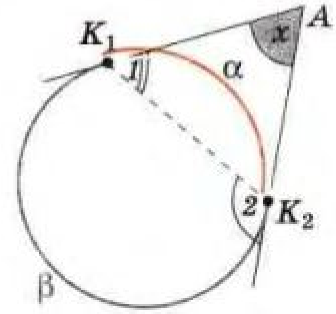
$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$

Н Наслідок 1. **Кут між дотичною і січною, проведеними з однієї точки, вимірюється піврізницею градусних мір утворених дуг, що містяться між січною і дотичною.**

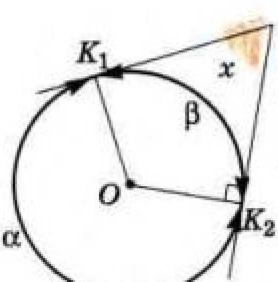
За теоремою: $\angle 2 = \angle 1 = \alpha : 2$ (мал. 1.41). Зовнішній кут трикутника AKB $\angle 3 = \beta : 2$. Тоді шуканий кут $x = \angle 3 - \angle 2 = (\beta - \alpha) : 2$.



Мал. 1.41



Мал. 1.42



$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$

Н Наслідок 2. **Кут між дотичними, проведеними до кола з однієї точки, вимірюється піврізницею градусних мір утворених дуг.**

За теоремою: $\angle 1 = \alpha : 2$, $\angle 2 = \beta : 2$ (мал. 1.42). Кут 2 – зовнішній кут трикутника K_1AK_2. Тоді шуканий кут $x = \angle 2 - \angle 1 = (\beta - \alpha) : 2$.

Для допитливих

Задача італійського талановитого самоука математика і винахідника **Ніколо Тарталья** (1500–1557).

Задано відрізок AB, побудуйте за допомогою лінійки (без поділок) і даного розхилу циркуля, більшого за AB, рівносторонній трикутник зі стороною AB.

Практична робота 4

1. Накресліть коло. Позначте його центр та дві точки на ньому.
2. Через одну з двох позначених на колі точок проведіть дотичну до кола (пригадайте відповідну опорну задачу № 8, с. 250).
3. Сполучіть позначені точки кола хордою.
4. Кольоровим олівцем наведіть одну з дуг кола, що обмежена позначеними точками, і побудуйте вписаний кут, який спирається на цю дугу. Іншим кольором зафарбуйте кут між хордою і дотичною, всередині якого міститься відмічена дуга.
5. Виміряйте транспортиром градусну міру вписаного кута і зафарбованого кута між хордою і дотичною. Якщо градусні міри цих кутів однакові, ви виконали практичну роботу правильно.

6*. Складіть план практичної роботи, мета якої є дослідне підтвердження формули для обчислення кута між двома хордами кола, що перетинаються.

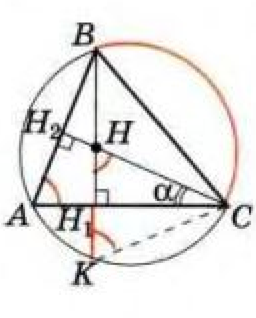
7*. Складіть план практичної роботи, мета якої є дослідне підтвердження формули для обчислення кута між двома січними, що перетинають коло і проходять через точку поза колом.

Завдання 4

1. На колі послідовно позначені точки A, B, C і D. Січні AB і CD перетинаються в точці P поза колом. Знайдіть кут APD, якщо: **а)** різниця градусних мір дуг AD і BC дорівнює 90°; **б)** різниця градусних мір дуг AD і BC дорівнює 240°; **в)** $\smile BC = 20^\circ$, $\smile DA = 130^\circ$.
2. На колі послідовно позначені чотири точки A, B, C і D. Відомо, що $\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile DA = 3 : 2 : 3 : 4$. Січні AB та CD перетинаються в точці P. Знайдіть кут APD.
3. На колі послідовно позначені чотири точки A, B, C і D. Відомо, що $\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile DA = 1 : 2 : 3 : 4$. Хорди AC та BD перетинаються в точці P. Знайдіть кут APD.
4. На колі послідовно позначені чотири точки A, B, C і D. Хорди AC і BD перетинаються в точці P. Знайдіть $\smile AB$, якщо $\smile CD = 30^\circ$, а $\angle APD = 86^\circ$.
5. Через точку кола проведено хорду й дотичну. Знайдіть кут між ними, якщо хорда стягує дугу міри 40°.

Для допитливих

Опорна задача. Доведіть, що точки, симетричні ортоцентру трикутника відносно його сторін, лежать на колі, описаному навколо цього трикутника.



1) $\angle A = \angle BKC$, бо спираються на одну дугу BC (див. мал.);
2) $\angle KHC = \angle A$ як кути, утворені взаємно перпендикулярними сторонами;
3) $\angle KHC = \angle A = \angle BKC$ і ΔKCH – рівнобедрений, CH_1 – його висота і медіана. Звідси точки K і H – симетричні відносно AC.
4) За аксіомами про відкладання кутів і відрізків, існує лише одна точка, симетрична даній відносно заданої прямої. Тоді точка K – шукана. Щ. в. д.

Випадки прямокутного і тупокутного трикутників розгляньте самостійно.

Розв'яжіть самостійно такі задачі.

1. Побудуйте трикутник за положенням його вершини, ортоцентра і центра описаного кола.

2. Побудуйте трикутник ABC за положенням його вершини A, ортоцентра H і серединою сторони BC.

6. У колі проведено хорду AB і дотичну до кола в точці A. Кут між дотичною і хордою дорівнює $60°$. Знайдіть центральний кут, який спирається на хорду AB.

7. У колі проведено хорду AB, довжина якої дорівнює радіусу кола. Знайдіть кут між хордою AB і дотичною до кола в точці A.

8. У колі проведено хорди AB і BC. Відомо, що $\smile AB : \smile BC = 9 : 4$, крім того, $BC \perp AC$. Знайдіть кут ABC.

9*. У колі проведено дві рівні хорди AB і BC. Доведіть, що пряма AC паралельна дотичній до кола в точці B.

10*. На колі позначені точки A, B, C. Відомо, що $\smile AB : \smile BC : \smile CA = 5 : 2 : 3$. У точці C проведена дотична до кола. Січна AB перетинає дотичну до кола в точці P. Знайдіть кут APC.

11*. На колі позначені точки A і B. Відомо, що градусні міри утворених дуг відносяться як $5 : 3$. Знайдіть кут між дотичними до кола, проведеними в точках A і B.

12*. Коло дотикається до сторін кута. Знайдіть градусні міри дуг, на які коло ділиться точками дотику, якщо: а) градусна міра кута дорівнює $60°$; б) градусна міра кута дорівнює γ.

13*. Доведіть, що з будь-якої точки поза колом діаметр кола, продовження якого не проходить через цю точку, видно під гострим кутом.

14*. Доведіть, що з будь-якої точки всередині кола діаметр кола, який не проходить через цю точку, видно під тупим кутом.

15**. З точки P до кола, центр якого O, проведено дві дотичні PA і PB, а через точку B проведено діаметр BC. Доведіть, що CA та OP паралельні.

16**. Два кола різних радіусів дотикаються одне до одного зовнішньо у точці M. Через M проведено пряму, яка перетинає кола в точках A і B, та дві дотичні до кіл у цих точках. Доведіть, що дотичні паралельні між собою.

17**. Два кола перетинаються в точках A і B. Центр першого кола належить другому колу. У точці B проведено дотичну до другого кола, яка перетинає перше в точці C. Доведіть, що $AB = BC$.

18**. Через кінці діаметра AB кола проведено дві прямі: через точку A – дотичну l, а через точку B – січну m. Нехай P – друга точка перетину січної m з колом. Проведемо через точку P дотичну n і позначимо через M і N точки перетину прямої l з прямими відповідно m і n. Доведіть, що трикутник MNP – рівнобедрений.

Для допитливих

1. У сумці більше, ніж один кенгуру. Перший кенгуру сказав: «Нас тут шестеро», – і вистрибнув із сумки. Кожної наступної хвилини один з решти кенгуру говорив: «Усі, хто вистрибнув переді мною, говорили неправду», – і вистрибував. Скільки кенгуру сказали правду?

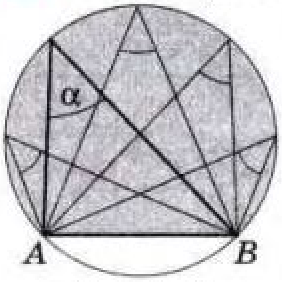
2. На Кольоровій вулиці в ряд стоять п'ять будинків: синій, червоний, жовтий, рожевий і зелений. Будинки пронумеровані від 1 до 5. Синій і жовтий будинки мають парні номери. Червоний будинок по сусідству тільки з синім будинком. Синій будинок межує із зеленим. Який колір будинку під номером 3?

3. Василь живе на дев'ятому поверсі в будинку, на кожному поверсі якого по шість квартир. У будинку його приятеля Петра на кожному поверсі по сім квартир. Петро живе на сьомому поверсі в квартирі з тим самим номером, що має квартира Василя. Який номер мають квартири хлопчиків?

4. Острів Мрій має своєрідний графік погоди: в понеділок і середу – завжди дощ, у суботу – туман, в інші дні тижня – сонце. Група туристів хоче відпочити на цьому острові 44 дні. В який день тижня їм треба розпочати свій відпочинок на острові, щоб сонячних днів було якнайбільше?

§ 5. Сегмент, що містить заданий кут

Сегментом називається частина круга, обмежена дугою кола і хордою, що стягує цю дугу.

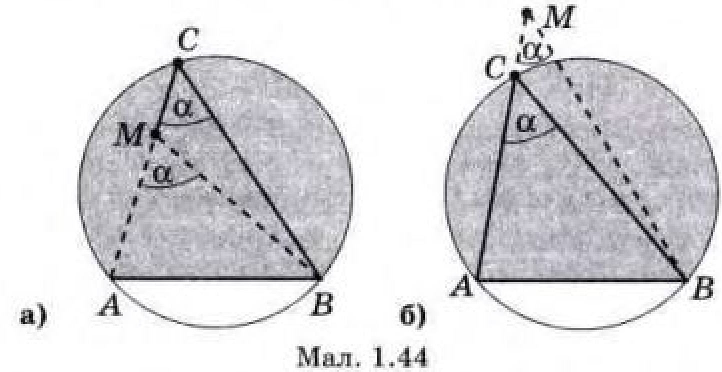


Мал. 1.43

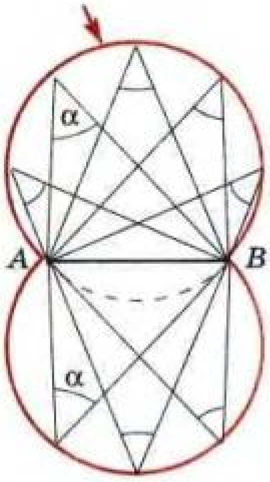
Кожна хорда поділяє круг на два сегменти. Якщо вписаний кут позначити α, а дугу, на яку він спирається, – через AB (мал. 1.43), то заштрихований на малюнку сегмент відповідає множині вписаних кутів градусної міри α.

Доведемо, що *геометричним місцем точок, з яких відрізок AB видно під кутом α, є дуга вказаного сегмента.* (Тобто не існує кутів з вершинами у півплощині, що розглядається, які спираються на відрізок AB і дорівнюють куту α.)

Доведення проведемо від супротивного. Нехай існує такий кут, вершина якого M лежить усередині відповідного сегмента або поза ним (мал. 1.44). Точку перетину прямої AM із дугою сегмента позначимо через C. Тоді $\angle ACB = \angle AMB = \alpha$, чого бути не може, бо для $\triangle CMB$ один з цих кутів є внутрішнім, а другий – зовнішнім.



Мал. 1.44



ГМТ, з яких $[AB]$ видно під кутом α

Нагадаємо позначення:
$[AB]$ – відрізок AB.

Для допитливих

1. Нехай H – ортоцентр трикутника ABC. Відомо, що $AB = CH$. Знайдіть кут ACB.

2. Відрізки AP і BK – висоти гострокутного трикутника ABC, точка H – його ортоцентр. Точку перетину відрізків AP і BK позначили через T. Доведіть, що точки C, H, P, T лежать на одному колі.

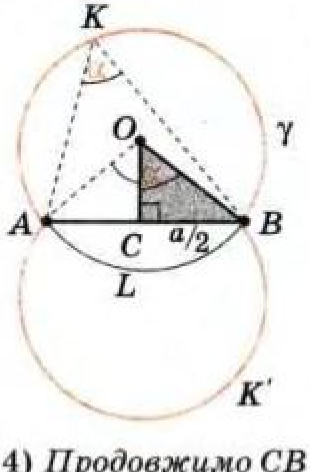
3. У трикутнику ABC проведено висоту CH і бісектрису CK, точка N – проекція точки K на сторону BC, кут ABC дорівнює α, відрізки HN і AC – паралельні. Знайдіть кути BAC і ACB.

4. Дано рівнобедрений трикутник ABC ($AC = BC$). Коло γ з центром O дотикається до прямої BC у точці B та продовження сторони AC (за точку C) у точці D. Доведіть, що точка перетину прямих AB і DO лежить на колі γ.

5. Коло дотикається до сторін AP і BP трикутника ABP у точках C і D відповідно, центр кола належить стороні AB. Доведіть, що $\angle CHP = \angle PHD$, де PH – висота трикутника ABP.

Опорна задача

Побудуйте геометричне місце точок, з яких даний відрізок видно під заданим гострим кутом.



Дано: *відрізок* a, кут α.

Побудувати: $\smile AKB$: $AB = a$ (1); $\angle AKB = \alpha$ (2).

План побудови

1) $a \to \frac{1}{2}a$;

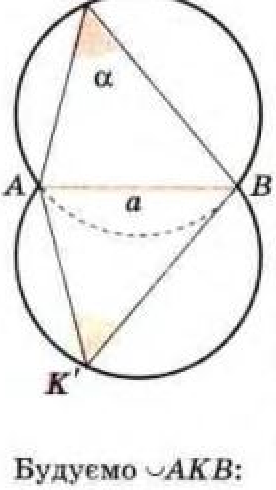
2) $\frac{1}{2}a,\ \alpha \to \triangle OCB$ ($\angle OCB = 90°$, $CB = \frac{1}{2}a$, $\angle COB = \alpha$);

3) *Будуємо коло з центром O і радіусом OB.*

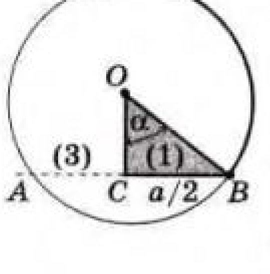
4) *Продовжимо* $CB \to (CB) \cap \gamma = A$.

5) $\smile AK'B$ – *симетрична* $\smile AKB$ *відносно* AB.

$\smile AKB$ і $\smile AK'B$ – *шукане ГМТ.*



Будуємо $\smile AKB$:



Доведення

Маємо за побудовою: $\angle OCB = 90°$, $CB = \frac{1}{2}a$, $\angle COB = \alpha$, $OC \perp CB$, $OA = R = OB$, $\smile AK'B$ симетрична $\smile AKB$ відносно AB.

Довести: (1) і (2).

1) $\triangle AOB$: $OA = R = OB$, OC – висота, $CB = \frac{a}{2} = \frac{AB}{2}$. Тоді OC – бісектриса і медіана $\to \angle AOB = 2\alpha$, $AB = a$, і (1) виконується.

2) $\smile ALB$: $\angle AOB = 2\alpha$ – центральний, $\angle AKB$ – вписаний $\to \angle AKB = \alpha$, і для $\smile AKB$ (2) виконується.

3) $\smile AK'B$ симетрична $\smile AKB$ відносно AB. Тоді $\smile AK'B = \smile AKB$ і для $\smile AK'B$ (2) виконується.

Щ. в. д.

Розгляньте самостійно випадок, коли заданий кут тупий.

Для допитливих

1. Через точку перетину двох кіл проведіть січну так, щоб її частина, яка міститься всередині кіл, мала задану довжину.

2. Через точку M всередині заданого кола проведіть хорду AB так, щоб різниця довжин відрізків AM і BM дорівнювала довжині заданого відрізка n.

3. Побудуйте трикутник за радіусами вписаного в нього та описаного навколо нього кіл і стороною.

4. Побудуйте трикутник за радіусом описаного кола, стороною та сумою двох інших сторін.

5. Побудуйте трикутник за точками N_1, N_2, N_3 – симетричними ортоцентру шуканого трикутника відносно його сторін.

6. За допомогою однієї лінійки проведіть із заданої точки перпендикуляр до діаметра даного кола.

Завдання 5

1. Доведіть, якщо точки B і C лежать в одній півплощині відносно прямої AD і $\angle ACD = \angle ABD$, то точки A, B, C, D належать одному колу.
2. Доведіть, якщо точки B і C лежать у різних півплощинах відносно прямої AD і $\angle ABD + \angle ACD = 180^\circ$, то точки A, B, C, D належать одному колу.

3*. Нехай AA_1 і BB_1 – висоти гострокутного трикутника ABC. Доведіть, що $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$.

4*. Точки K і P – основи висот, проведених до двох сторін гострокутного трикутника, а M – середина третьої його сторони. Доведіть, що серединний перпендикуляр до відрізка KP проходить через точку M.

5*. Точка C рухається по дузі кола, яку стягує хорда AB. Знайдіть траєкторію інцентра трикутника ABC.

6*. Побудуйте точку, з якої задані відрізки AB і BC видно під заданими кутами α і β відповідно.

7*. Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом та висотою, опущеною на задану сторону.

8*. Побудуйте трикутник за стороною, протилежним кутом і медіаною, проведеною до заданої сторони.

9.** Побудуйте трикутник за двома кутами та медіаною, проведеною до однієї з його сторін.

10.** Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом та радіусом вписаного кола.

11.** Знайдіть геометричне місце точок, з яких задане коло видно під кутом 60°.

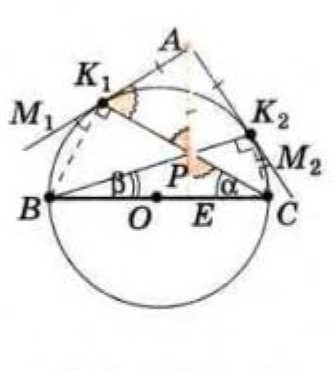
12.** Знайдіть геометричне місце таких точок M, що дотичні, проведені з точки M до заданого кола, мають задану довжину.

Для допитливих

Давньогрецький учений **Архімед** (III ст. до н. е.) всесвітньо відомий своїми технічними відкриттями. Не менш важливі результати його досліджень і в галузі математики, зокрема в геометрії кіл. Особливо багато теорем про кола він сформулював і довів у трактаті «Книга лем»*. Ось одна з них.

Лема Архімеда. **Якщо з точки A проведено дотичні AK_1 і AK_2 до кола діаметра BC, а хорди CK_1 і BK_2 перетинаються в точці P, то $AP \perp BC$.**

Доведення



1) Нехай $\smile BK_1 = 2\alpha$, а $\smile CK_2 = 2\beta$. Тоді $\angle M_1K_1B = \alpha$, $\angle M_2K_2C = \beta$ (як кути між дотичними і хордами, проведеними в точку дотику); $\angle K_1AK_2 = (180^\circ + 2\alpha + 2\beta - (180^\circ - 2\alpha - 2\beta)) : 2 = 2\alpha + 2\beta$ (як кут між двома дотичними, проведеними з однієї точки).
2) $\angle K_1PK_2 = \angle BPC = 180^\circ - \alpha - \beta$, $AK_1 = AK_2$. Тоді, якщо провести коло з центром у точці A і радіусом $AK_1 = AK_2$, точка P буде лежати на цьому колі ($\angle K_1PK_2$ буде вписаним, а $\angle K_1AK_2$ – центральним) і $AK_1 = AP$ (як радіуси).
3) $AK_1 = AP$, тоді $\angle AK_1P = \angle APK_1$ і $\angle EPC = \angle APK_1 = \angle AK_1P = (180^\circ - 90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \alpha$.
4) З $\triangle EPC$: $\angle PEC = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$. Щ. в. д.

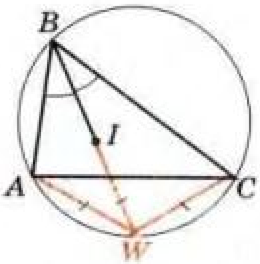
*Зауваження. ***Лемою** математики називають невелику допоміжну теорему, яку зазвичай наводять перед доведенням основної теореми.*

2*

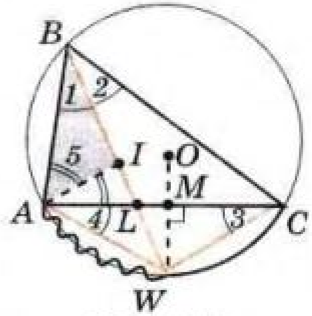
§ 6. Властивості точки перетину продовження бісектриси трикутника з описаним навколо трикутника колом

Теорема. **Точка перетину бісектриси кута трикутника (при певній його вершині) з описаним навколо цього трикутника колом рівновіддалена від інцентра трикутника та двох інших його вершин.**

Нехай продовження бісектриси l_B трикутника ABC перетинає коло, описане навколо цього трикутника, в точці W (мал. 1.45). Треба довести, що $WI = WA = WC$.



$AW = WI = WC$



Мал. 1.45

Доведення

1) Кути 1 і 3 – вписані і спираються на спільну дугу AW. Тоді $\angle 1 = \angle 3 = \frac{1}{2}\angle B$.

2) Кути 2 і 4 – вписані і спираються на спільну дугу CW. Тоді $\angle 2 = \angle 4 = \frac{1}{2}\angle B$.

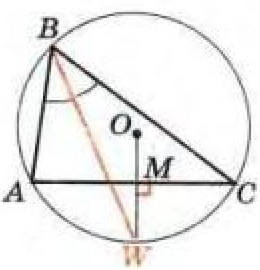
3) $\angle 4 = \frac{1}{2}\angle B = \angle 3$, тоді $WA = WC$.

4) I – інцентр, тоді $\angle IAC = \angle 5 = \frac{1}{2}\angle A$.

5) Кут AIW – зовнішній кут трикутника AIB. Тоді
$\angle AIW = \angle 1 + \angle 5 = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle A = \angle IAW$.

Звідси маємо: $WI = WA = WC$.

Теорему доведено.



$WM \perp AC$

$\Downarrow$

$O \in WM$

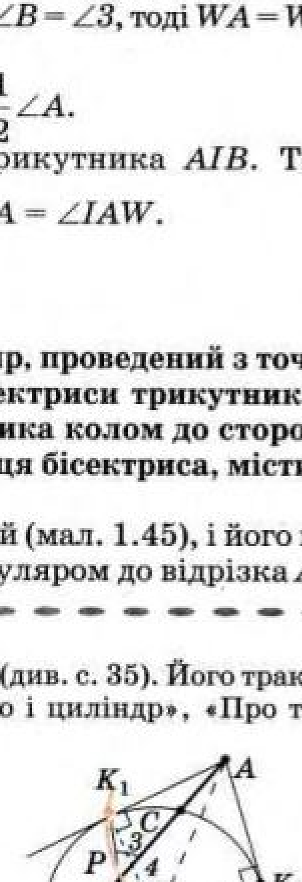
Наслідок 1. **Перпендикуляр, проведений з точки перетину продовження бісектриси трикутника з описаним навколо трикутника колом до сторони трикутника, яку перетинає ця бісектриса, містить центр описаного кола.**

Трикутник AWC – рівнобедрений (мал. 1.45), і його висота WM є серединним перпендикуляром до відрізка AC.

Для допитливих

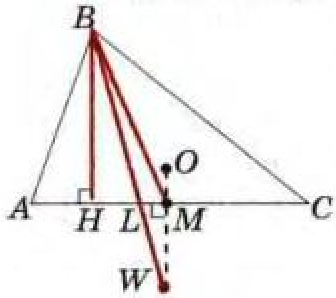
Архімед був великим геометром стародавнього світу (див. с. 35). Його трактати «Книга про круги, що дотикаються», «Про кулю і циліндр», «Про тіла обертання», «Про вимірювання круга» та інші мали велике значення для розвитку математики. Спробуйте (за наведеним малюнком) довести таку *лему Архімеда*.

Якщо з точки A провести до кола дві дотичні AK_1 і AK_2 та січну, яка перетинає коло в точках C і B, а з точки K_2 – хорду $K_2M \parallel AB$, то пряма K_1M поділить хорду BC навпіл.



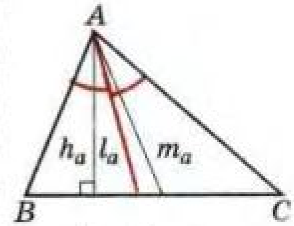
Більше дізнатися про геометричні дослідження Архімеда можна у додатку 4 розділу VI.

Наслідок 2. **У нерівнобедреному трикутнику бісектриса завжди міститься між його висотою і медіаною, проведеними з тієї самої вершини.**



Мал. 1.46

Відрізок BW, який містить бісектрису l_B, перетинає AC у точці L (мал. 1.46). Проекції його кінців на пряму AC – точка H (основа висоти h_B) і M (середина AC). Точки B і W лежать у різних півплощинах відносно прямої AC. Тоді точка L буде внутрішньою точкою відрізка HM.



$h_a \leqslant l_a \leqslant m_a$

Завдання 6

1. Відрізки AH і AK є відповідно висотою і бісектрисою трикутника ABC. Точка O – центр описаного кола. Доведіть, що AK є бісектрисою кута OAH.
2. Нехай W_a, W_b, W_c – точки перетину продовження бісектрис рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) із колом, описаним навколо цього трикутника. Доведіть, що $AW_a = CW_c$.
3. Доведіть, що центр кола, яке проходить через дві вершини трикутника і його інцентр, належить колу, описаному навколо даного трикутника.
4. Нехай W_a, W_b, W_c – точки перетину продовження бісектрис із колом, описаним навколо гострокутного трикутника ABC. Доведіть, що: **а)** якщо $AW_a = BW_b = CW_c$, то трикутник ABC – правильний; **б)** інцентр трикутника ABC є ортоцентром трикутника $W_aW_bW_c$; **в)** $AW_A = BW_B = CW_C > P_{\triangle ABC}$.
5. Висота, медіана і бісектриса, проведені з вершини A трикутника ABC, ділять кут A трикутника на чотири рівні частини. Знайдіть кути трикутника ABC.
6. Висота і медіана трикутника ABC, проведені з вершини C, ділять його кут C на три рівні частини. Знайдіть кути трикутника ABC.
7. Побудуйте трикутник ABC за положенням трьох точок: його вершини A, серединою сторони BC і точкою перетину бісектриси кута A зі стороною BC.
8. Побудуйте трикутник за його висотою, бісектрисою і медіаною, проведеними з однієї вершини.
9. Побудуйте трикутник за точками перетину його бісектрис з описаним навколо цього трикутника колом.

Для допитливих

Зауваження. Зверніть увагу, що твердження про взаємне розміщення висоти, медіани і бісектриси трикутника, проведених з однієї вершини, а також про співвідношення між гіпотенузою прямокутного трикутника і його медіаною, проведеною до гіпотенузи, ми довели за допомогою додаткової побудови кола. Такий метод інколи називають ***методом допоміжного кола***. Він дає змогу, скориставшись властивостями вписаних кутів, розв'язувати цікаві геометричні задачі.

Скориставшись методом допоміжного кола, розв'яжіть таку задачу.

Через деяку точку площини проведено три прямі так, що кут між довільними двома з них дорівнює 60°. Доведіть, що основи перпендикулярів, проведених з довільної точки площини до цих прямих, є вершинами рівностороннього трикутника.

Завдання для повторення розділу I

1°. Яка градусна міра повного кута?

2°. Дайте означення центрального кута.

3°. Чи залежить градусна міра центрального кута від радіуса кола?

4°. У яких межах змінюється градусна міра центрального кута?

5°. Як визначають градусну міру дуги кола?

6°. **а)** Сформулюйте теорему про дуги, що стягують рівні хорди кола.
б) Сформулюйте обернену теорему.
в) Чи справедливе твердження цих теорем для різних кіл з однаковими радіусами?

7. Доведіть теореми, сформульовані в попередньому завданні.

8°. Який кут називається вписаним кутом?

9°. Сформулюйте теорему про міру вписаного кута.

10. Доведіть теорему, сформульовану в попередньому завданні.

11°. Сформулюйте наслідки з теореми про міру вписаного кута.

12*. Як знайти градусну міру кута між:
а) дотичною і хордою, проведеною в точку дотику;
б) двома хордами кола, що перетинаються;
в) двома січними одного кола;
г) січною і дотичною до одного кола;
д) двома дотичними до одного кола?

13. Хорда ділить коло на дві дуги так, що градусна міра однієї в 4 рази більша за міру другої дуги. Знайдіть:
а) градусні міри обох дуг кола;
б) градусні міри вписаних кутів, що спираються на хорду.

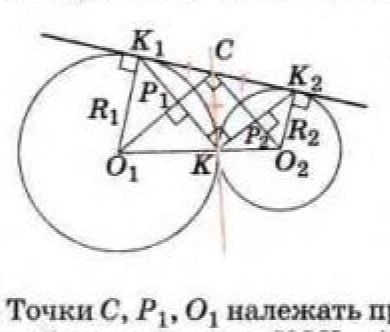
14. У коло вписано рівнобедрений трикутник. Під яким кутом з центра кола видно: **а)** сторону цього трикутника; **б*)** відрізок, що сполучає середини двох сторін трикутника?

15. Точки A, B, C ділять коло на три дуги, градусні міри яких відносяться як $1 : 2 : 3$. Знайдіть: **а)** кути трикутника ABC; **б*)** на які частини ділить найбільшу дугу кола продовження відповідної висоти трикутника.

Для допитливих

Опорна задача *про два кола, що дотикаються.*

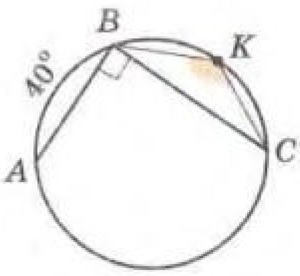
До двох дотичних кіл провели спільну зовнішню дотичну і спільну внутрішню дотичну. **Доведіть: а) внутрішня дотична ділить відрізок зовнішньої дотичної, який міститься між точками дотику, навпіл; б) кут, утворений хордами даних кіл, що сполучають точки дотику, – прямий; в) кут, утворений відрізками, що сполучають центри кіл з точкою перетину дотичних, – прямий.**



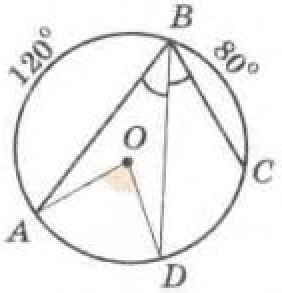
Дано: K_1K_2 і CK – *спільні дотичні* до γ_1 і γ_2.
Довести: $K_1C = CK_2$ (а), $\angle O_1CO_2 = 90°$ (б); $\angle K_1KK_2 = 90°$ (в).

1) K_1C і CK – дотичні до γ_1; K_2C і CK – дотичні до γ_2. Тоді $K_1C = CK = CK_2$ і (а) виконується.
2) $\triangle K_1KK_2$: $K_1C = CK = CK_2 \rightarrow \angle K_1KK_2 = 90°$ і (б) виконується.
3) Точки C, P_1, O_1 належать прямій (бо CP_1 – сер. пер. до K_1K_2), і $(CO_1) \equiv (CP_1)$ – бісектриса кута KCK_1. Аналогічно: CO_2 – бісектриса кута KCK_2.
4) CO_1 і CO_2 – бісектриси суміжних кутів KCK_1 і KCK_2. Тоді $\angle O_1CO_2 = 90°$ і (в) виконується.

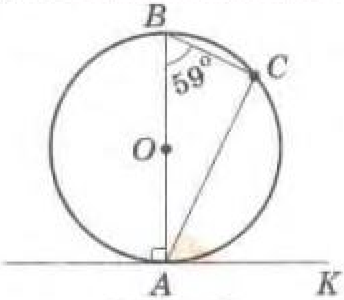
16*. Знайдіть кут: **а)** BKC за малюнком 1. 47; **б)** AOD за малюнком 1.48; **в)** CAK за малюнком 1.49; **г)** AKE за малюнком 1.50; **д)** GFT за малюнком 1.51.



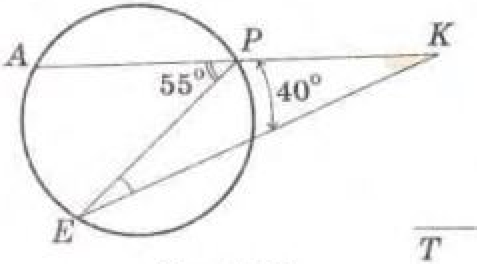
Мал. 1.47



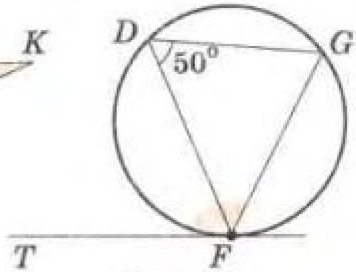
Мал. 1.48



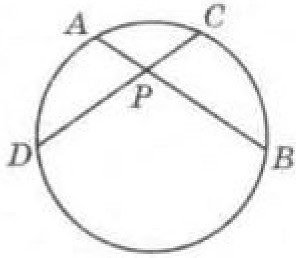
Мал. 1.49



Мал. 1.50



Мал. 1.51



Мал. 1.52

17*. Якими можуть бути кути рівнобедреного трикутника, якщо його основу видно з центра описаного навколо цього трикутника кола під кутом 40°?

18*. **а)** Точки дотику A і B двох дотичних до кола ділять коло на дві дуги, градусні міри яких відносяться як 2 : 3. Знайдіть кути трикутника ABC, де C – точка перетину дотичних.

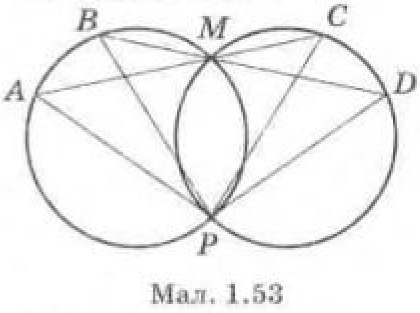
б) Кут між дотичними, проведеними до кола, вдвічі більший за кут між радіусами, проведеними до точок дотику. Знайдіть кут між дотичними.

в) З точки M до кола проведені дві дотичні MA і MB, де A і B – точки дотику. Відрізок, що сполучає точку M з центром кола, перетинає коло в точці K. Кут AMB удвічі менший за кут AKB. Знайдіть кут AMB.

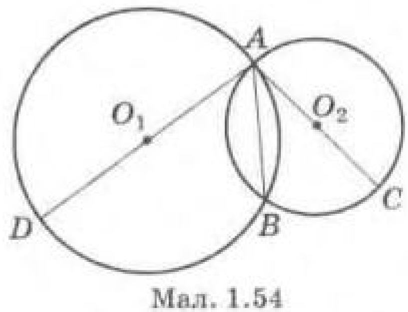
г) Кут між дотичними до кола вдвічі більший за вписаний кут, що спирається на дугу, обмежену точками дотику. Знайдіть кут між дотичними.

19*. **а)** Хорди AB і CK перетинаються в точці P, при цьому $AP = PC$. Доведіть, що $BP = PK$. **б)** Рівні хорди AB і CD перетинаються в точці P (мал. 1.52). Доведіть, що $PC = PA$.

20. Доведіть: **а*)** за малюнком 1.53, що $\angle APC = \angle BPD$; **б**)** за малюнком 1.54, що $AB \perp DC$.



Мал. 1.53



Мал. 1.54

21*. Побудуйте дотичну до заданого кола паралельно заданій прямій.

Для допитливих

Квадрат поділили на прямокутники так, що жодна точка квадрата не є вершиною чотирьох прямокутників. Доведіть, що число точок квадрата, які є вершинами прямокутників, парне.

Готуємося до тематичного оцінювання № 1

Варіант I

1. Коло поділене точками A і B на дві дуги так, що одна з них на 210° більша за другу. Знайдіть:
   (1 б.) **а)** градусні міри утворених дуг;
   (1 б.) **б)** кут, під яким хорду AB видно з центра кола;
   (1 б.) **в)** міри вписаних кутів, що спираються на хорду AB;
   (2 б.) **г)** кути трикутника ABC, якщо CA і CB дотичні.
2. (3 б.) Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 56°, а його бічна сторона є діаметром півкола. Знайдіть градусні міри дуг, на які сторони трикутника поділяють півколо.
3. (4 б.) Хорди AB і CD рівні. Кінці цих хорд сполучили відрізками прямих, які утворили нові хорди. Доведіть, що одна з пар цих хорд – AC і BD або BC і AD – паралельні.

Варіант II

1. Коло з центром O поділене точками A і B на такі дві дуги, градусні міри яких відносяться як $2 : 3$. Знайдіть:
   (1 б.) **а)** градусні міри утворених дуг;
   (1 б.) **б)** кут, під яким хорду AB видно з центра кола;
   (1 б.) **в)** міри вписаних кутів, що спираються на хорду AB;
   (2 б.) **г)** кути трикутника ABC, якщо CA і CB дотичні.
2. (3 б.) Хорда AB ділить коло на дві дуги. На одній з них відмітили точки C і D так, що кути CAB і ABD рівні. Доведіть, що хорди AB і CD паралельні.
3. (4 б.) Діаметр кола AB перпендикулярний до хорди CD. Точка M лежить на колі і не збігається ні з точкою C, ні з точкою D. Доведіть, що промені MA і MB ділять навпіл кути, утворені при перетині прямих MC і MD.

Для допитливих

Аполлоній Пергський (бл. 262 – 190 рр. до н. е.), автор багатьох математичних праць, був молодший за Архімеда років на 25. З його 8 книг про теорію кривих до нас дійшли перші чотири в грецькому оригіналі, п'ята, шоста і сьома – в арабському перекладі, восьма відновлена за розповідями про неї. Саме в останній він розглядав такі задачі на побудову кола:
«Дано три фігури, кожна з яких може бути точкою, прямою або колом. Побудувати коло, яке проходило б через кожну з даних точок і дотикалося б до кожної з даних прямих, кожного з даних кіл».

Розв'яжіть кілька таких задач.

1. Побудуйте коло, яке проходить через три задані точки.

2. Побудуйте коло, яке дотикається до трьох заданих попарно непаралельних прямих. Скільки розв'язків має задача?

3. Побудуйте коло, яке дотикається до двох даних паралельних прямих і проходить через дану точку, що міститься між даними прямими.

4. Побудуйте коло, яке дотикається до двох даних паралельних прямих і даного кола.

5. Побудуйте коло, яке дотикається до двох даних концентричних кіл і проходить через задану точку на одному з цих кіл.

6. Побудуйте коло, яке дотикається до двох даних концентричних кіл і проходить через задану точку, розміщену між цими колами.

Розділ II
БАГАТОКУТНИКИ. ПЛОЩА ПЛОСКОЇ ФІГУРИ. ЧОТИРИКУТНИКИ

У цьому розділі ми пригадаємо загальні властивості багатокутників і зупинимося на вивченні чотирикутників, зокрема вже знайомих вам з молодших класів: паралелограма, прямокутника, ромба, квадрата і трапеції. Кожний з них має ряд цікавих і важливих властивостей. З усіх цих властивостей ми вивчатимемо лише невелику кількість – тільки ті, що будуть нам необхідні для подальшого вивчення геометрії.

Ви ознайомитеся з поняттям площі геометричної фігури на площині. Нехай вас не дивує слово «ознайомитеся». Ви розв'язували задачі на обчислення площ геометричних фігур ще в початкових класах і начебто знаєте, що таке площа. А чи справді це так? Спробуйте відповісти на запитання: «Що таке площа?», і ви зрозумієте, що це не так уже й просто.

§ 7. Багатокутники* та їх властивості

Поняття ламаної і багатокутника вам відомі з попередніх років навчання. Нагадаємо їх.

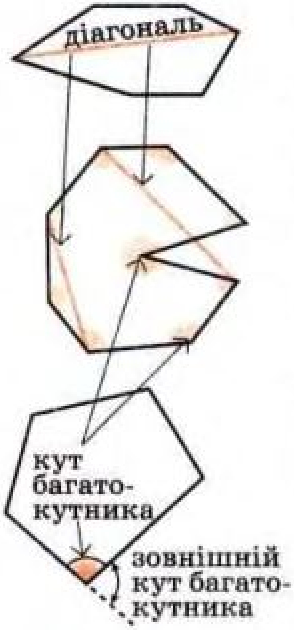
- ***Багатокутником*** **називається внутрішня частина площини, обмежена замкненою ламаною, яка не перетинає сама себе.** Ланки такої ламаної називають *сторонами* багатокутника, а вершини – *вершинами* багатокутника.
- *Периметр* багатокутника – сума довжин усіх його сторін.

В опуклому багатокутнику жодний з кутів не перевищує 180°.

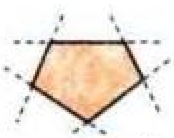
Якщо число сторін *багато*кутника відомо, то *«багато»* → *«число»*: *три*кутник, *сто*кутник, *шести*кутник...

---

* У перекладі з російської: «многоугольник» – «багатокутник» (Гейченко В. В. та ін. Російсько-український словник наукової термінології. – К.: Наук. думка, 1998. – 892 с).

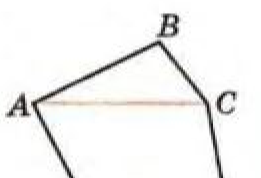


- *Діагоналі багатокутника* – це відрізки, які сполучають дві несусідні його вершини (наприклад, AC на малюнку 2.1).
- *Кутами багатокутника* називаються кути з вершинами у вершинах багатокутника, сторони яких містять сусідні (суміжні) сторони багатокутника, а самі ці кути містять багатокутник (мал. 2.2).
- Кути, суміжні до кутів багатокутника, називаються його *зовнішніми кутами* (мал. 2.3).
- Багатокутники можуть бути *опуклими* і *неопуклими* (див. мал. на полі).
- *Правильним багатокутником* називається багатокутник, у якого всі сторони рівні і всі кути рівні.
- *Одноіменними* називаються багатокутники з однаковим числом вершин.
- *Вписаним у коло* називається багатокутник, усі вершини якого належать колу.
- *Описаним навколо кола* називається багатокутник, усі сторони якого дотикаються до кола.

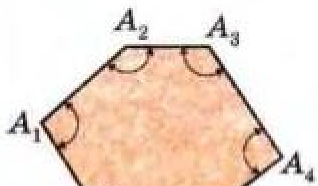


опуклий

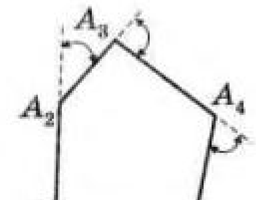
неопуклий



Мал. 2.1



Мал. 2.2



Мал. 2.3

ВЛАСТИВОСТІ БАГАТОКУТНИКІВ

Властивість 1. **Будь-яка сторона багатокутника менша за суму всіх його інших сторін.**

Ця властивість безпосередньо випливає з вже відомого вам твердження, що найкоротший шлях між двома точками – прямий. Доведемо це.

Описаний багатокутник

Т Теорема. **Довжина відрізка прямої, який сполучає дві точки, менша від довжини будь-якої ламаної, що сполучає ті самі точки.**

Доведення

Позначимо на площині точку B (що не належить прямій MN) і сполучимо точки M і N ламаною MBN (мал. 2.4).

За нерівністю трикутника маємо

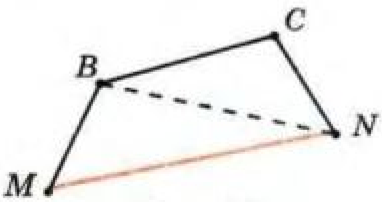
$$MB + BN > MN,$$

і для ламаної з 2 ланок твердження теореми виконується.

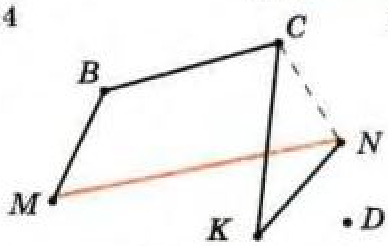
Вписаний багатокутник

Позначимо на площині точку C (що не належить прямій BC) і сполучимо точки M і N ламаною $MBCN$ (мал. 2.5).

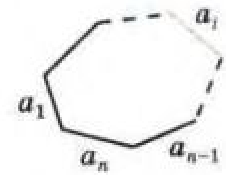
Мал. 2.4



Мал. 2.5



Мал. 2.6



$a_i < a_1 + ... + a_{i-1} + $
$+ a_{i+1} + ... + a_n$

Враховуючи нерівність трикутника для сторін $\triangle BCN$, маємо $MB + (BC + CN) > MB + BN > MN$ і для трьох ланок твердження теореми виконується.

Зрозуміло, що послідовно збільшуючи кількість вершин ламаної (мал. 2.6), отримаємо правильність твердження теореми для довільної ламаної, що сполучає задані точки M і N.

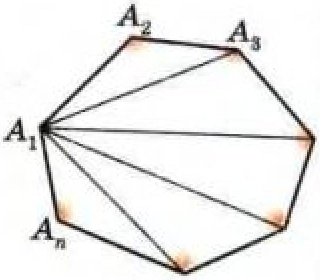
Властивість 2.

Т Теорема. **Сума градусних мір кутів опуклого багатокутника, який має n вершин, дорівнює $180°(n-2)$.**

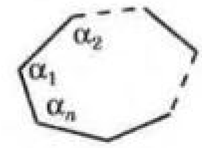
Доведення

Сполучимо одну з вершин даного багатокутника з усіма іншими вершинами (мал. 2.7) – отримаємо $(n-3)$ діагоналі, що ділять багатокутник на $(n-2)$ трикутники. Сума кутів багатокутника дорівнює сумі кутів утворених трикутників, тобто $180°(n-2)$.

Теорему доведено.



Мал. 2.7



$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n =$
$= 180°(n-2)$

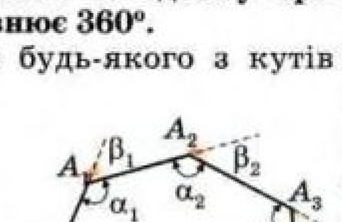
Властивість 3.

Н Наслідок. **Сума градусних мір зовнішніх кутів опуклого багатокутника, узятих по одному при кожній із його вершин, дорівнює 360°.**

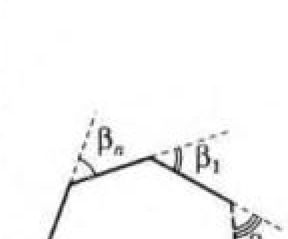
Якщо до градусної міри будь-якого з кутів багатокутника додати градусну міру відповідного йому зовнішнього кута, отримаємо 180°. Таких пар маємо n (мал. 2.8), а сума їх градусних мір становить $n \cdot 180°$.

Сума градусних мір кутів багатокутника, за теоремою, дорівнює $180°(n-2)$. Тоді сума градусних мір його зовнішніх кутів становить:

$n \cdot 180° - 180°(n-2) = 2 \cdot 180° = 360°$.

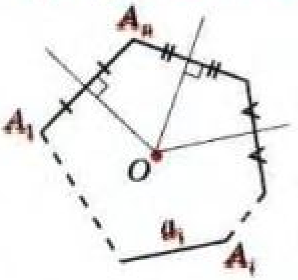


Мал. 2.8



$\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n =$
$= 360°$

$A_1 \ldots A_n$– вписаний



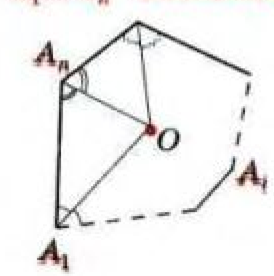
Серединні перпендикуляри до сторін перетинаються в одній точці O.

Мал. 2.9

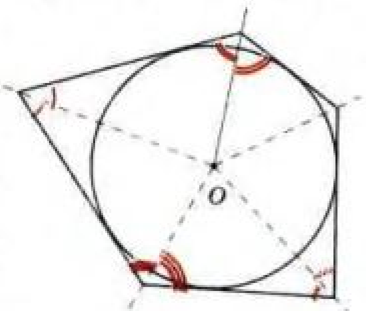
Властивість 4.
Багатокутник можна вписати в коло тоді і тільки тоді, коли серединні перпендикуляри до всіх його сторін перетинаються в одній точці. Ця точка є центром цього кола (мал. 2.9).

Ця властивість випливає з того, що серединний перпендикуляр до відрізків є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка. (Тобто всі точки, рівновіддалені від кінців відрізка, лежать на його серединному перпендикулярі. І навпаки, кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від його кінців.)

$A_1 \ldots A_n$– описаний



Бісектриси кутів перетинаються в одній точці O.



Мал. 2.10

Властивість 5.
Багатокутник можна описати навколо кола тоді і тільки тоді, коли бісектриси всіх його кутів перетинаються в одній точці. Ця точка є центром цього кола (мал. 2.10).

Ця властивість випливає безпосередньо з того, що бісектриса кута є геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін цього кута. (Тобто всі точки кута, рівновіддалені від його сторін, лежать на бісектрисі кута, а кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін.)

Практична робота 5

1. Накресліть опуклий п'ятикутник; позначте його вершини; порівняйте довжину кожної сторони із сумою довжин інших сторін. Запишіть відповідні нерівності.
2. Накресліть неопуклий п'ятикутник; позначте його вершини; порівняйте довжину кожної сторони із сумою довжин інших сторін. Запишіть відповідні нерівності.
3. Накресліть довільний багатокутник, число вершин якого більше за 5, і позначте його вершини; порівняйте довжину кожної сторони із сумою довжин інших сторін. Запишіть відповідні нерівності.
4. Запишіть висновок.

Практична робота 6

1. Накресліть опуклі n-кутники для $n = 5; 6; 7; 8$.

Для допитливих

1. Дано два правильні трикутники. Розріжте їх на найменш можливе число частин так, щоб із них можна було скласти шестикутник.

2. Дано чотири однакові правильні шестикутники. Розріжте їх на найменш можливе число частин так, щоб із них можна було скласти правильний шестикутник.

2. Зробіть необхідні вимірювання і заповніть таблицю.

Число вершин	5	6	7	8
Сума градусних мір внутрішніх кутів				
Сума градусних мір зовнішніх кутів (по одному при кожній вершині)				

3. Перевірте правильність вимірювань і обчислень згідно з формулами для суми внутрішніх і суми зовнішніх кутів опуклого багатокутника.
4*. Накресліть неопуклий чотирикутник, п'ятикутник, шестикутник. Зробіть необхідні вимірювання і заповніть таблицю.

Число вершин	4	5	6
Сума градусних мір внутрішніх кутів			
Сума градусних мір зовнішніх кутів (по одному при кожній вершині)			

Який висновок ви можете зробити?

Практична робота 7

Заповніть таблицю для міри внутрішнього та зовнішнього кутів правильного n-кутника.

Число вершин	3	4	5	6	8	12	n
Внутрішній кут							
Зовнішній кут							

Практична робота 8*

1. Накресліть опуклий п'ятикутник.
2. Проведіть усі діагоналі, які виходять з однієї вершини п'ятикутника, полічіть їх число. Потім проведіть усі діагоналі п'ятикутника і полічіть їх. У скільки разів число всіх діагоналей більше за число діагоналей, проведених з однієї вершини?
3. Накресліть опуклі шестикутник, семикутник і восьмикутник. Для кожного з них виконайте завдання, сформульовані для п'ятикутника у п. 2.
4. Заповніть відповідну таблицю. Який висновок можна зробити?

Для допитливих

1. Петрик склав аркуш паперу 5 разів, кожного разу – по осі симетрії утвореного прямокутника. Потім він вирізав усередині останнього прямокутника дірку і розгорнув папір. Скільки дірок він побачив?

2. Чи існує 5-кутна зірка з такою властивістю: навколо будь-якого з її зафарбованих чотирикутників (див. мал.) можна описати коло?

3. Доведіть: якщо сторони опуклого шестикутника $ABCDEF$ дорівнюють 1, то радіус кола, описаного навколо одного з трикутників ACE і BFD, не перевищує 1.

Порада. Скористайтеся методом від супротивного.

4. Семикутник $A_1 \ldots A_7$ вписано у коло, причому центр цього кола міститься всередині семикутника. Доведіть, що сума кутів при вершинах A_1, A_3 і A_5 менша за 450°.

Завдання 7

1°. Знайдіть суму кутів опуклого: а) дев'ятикутника; б) дванадцятикутника; в) двадцятикутника.

2°. Скільки вершин має опуклий багатокутник, у якого сума кутів дорівнює: а) 1620°; б) 720°?

3°. Скільки вершин має багатокутник, у якого: а) кожний кут дорівнює 135°; б) кожний кут дорівнює 140°?

4. Спробуйте накреслити: а) п'ятикутник з чотирма гострими кутами; б) шестикутник із п'ятьма гострими кутами.

5. Чи правильним є твердження, що серед кутів опуклого чотирикутника завжди знайдеться хоча б один прямий або тупий кут? Відповідь обґрунтуйте.

6. Багатокутник має чотири гострі кути. Доведіть, що він неопуклий.

7. Яке найбільше число: а) гострих кутів може мати опуклий багатокутник; б) прямих кутів може мати опуклий багатокутник?

8. Чи можуть усі кути багатокутника бути тупими?

9. Чи може опуклий багатокутник мати: а) найбільший кут 107°; б) кожний кут по 165°?

10. Усі сторони опуклого п'ятикутника рівні між собою. Два кути, прилеглі до однієї з його сторін, – прямі. Знайдіть інші кути п'ятикутника.

11*. Доведіть, що в опуклому п'ятикутнику знайдуться два прилеглі до однієї сторони кути, сума яких більша за 180°.

12*. Скільки вершин має опуклий багатокутник, у якого: а) три кути по 80°, а всі інші – по 150°; б) три кути прямі, а інші – по 150°; в) кожний кут не більший за 120°; г) три кути по 113°, а інші кути рівні між собою, градусна міра кожного кута – ціле число?

13*. На кожній стороні опуклого багатокутника взяли по одній точці і послідовно їх сполучили. Доведіть, що периметр утвореного багатокутника менший за периметр даного багатокутника.

14*. Доведіть, що сума діагоналей опуклого п'ятикутника більша за його периметр.

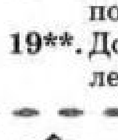
15**. Доведіть, що більша діагональ опуклого чотирикутника більша принаймні за одну із його сторін.

16**. Чи існує правильний багатокутник, довжина однієї діагоналі якого дорівнює сумі двох його інших діагоналей? Відповідь обґрунтуйте.

17**. Усередині опуклого багатокутника лежить відрізок MN. Доведіть, що довжина відрізка MN не перевищує найбільшу сторону або найбільшу діагональ цього багатокутника.

18**. Доведіть, що в опуклому шестикутнику з рівними кутами: а) сторони попарно паралельні; б) різниці протилежних сторін рівні.

19**. Доведіть, що в опуклому п'ятикутнику з рівними кутами немає паралельних сторін.



Для допитливих

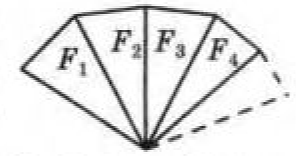
1. Квадратний аркуш паперу розрізали на 6 частин, кожна з яких має форму опуклого багатокутника. П'ять із цих частин загубилися, а та, що залишилася, має форму правильного восьмикутника. Чи можна за цією частиною встановити початкові розміри квадрата?

2. Хрестики-нулики-3 – гра у «хрестики-нулики», в якій виграє той, хто першим поставить 3 свої позначки на одній прямій.

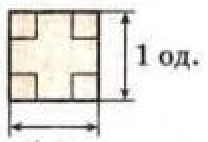
На папері в клітинку намалюйте багатокутник із найменшим числом клітинок такий, щоб, граючи на ньому у хрестики-нулики-3, той, хто розпочинає гру, завжди вигравав.

§ 8. Поняття площі та її основні властивості

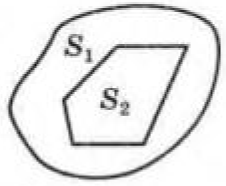
$F_1 = F_2 \Rightarrow S_1 = S_2$



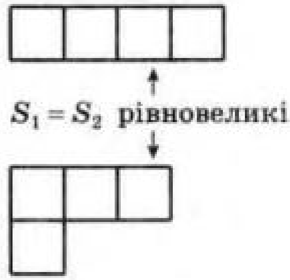
$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$



$S = 1$ од.^{2}



$S_2 < S_1$



Так що ж таке «площа»? Здоровий глузд підказує, що це поняття можна ввести не лише для плоских геометричних фігур, а й для просторових фігур, таких, наприклад, як циліндр або сфера. Проте у цьому розділі ми будемо розглядати тільки плоскі геометричні фігури.

Площа – це число, яке ставиться у відповідність обмеженій з усіх боків плоскій фігурі і яке має такі властивості:

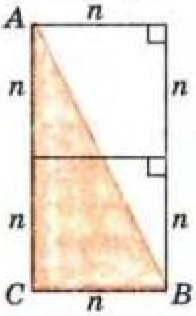
1) площа фігури є числом невід'ємним;
2) площі рівних фігур рівні;
3) якщо фігуру поділено на частини, що не перекриваються, то площа фігури дорівнює сумі площ цих частин;
4) за одиницю площі приймають площу квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці виміру; одиниця площі дорівнює одиниці виміру в квадраті (кв. од.).

Наприклад, площа квадрата зі стороною 1 м дорівнює одному квадратному метру (1 м^2); площа квадрата зі стороною 1 лікоть дорівнює одному ліктю в квадраті.

Зрозуміло, що з *цих властивостей випливає*:

1) якщо фігура містить усередині себе іншу фігуру, то площа першої фігури не менша за площу другої;
2) площа квадрата зі стороною n одиниць виміру (n – довільне невід'ємне число) дорівнює n^2 кв. од. (або од.^{2}).

Зауважимо, що квадрат, сторона якого дорівнює n одиниць виміру, – не єдина фігура, що має площу n^2. Наприклад, із властивостей площі випливає, що площа прямокутного трикутника ABC (мал. 2.11) також дорівнює n^2.

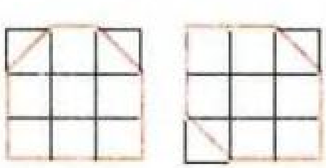


Мал. 2.11

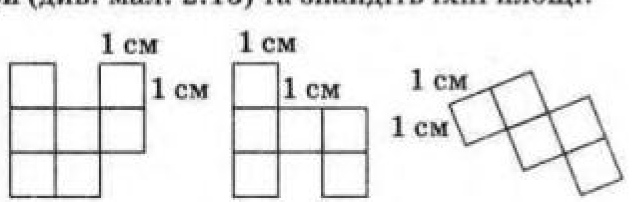
Фігури, які мають рівні площі, називаються ***рівновеликими***.

Практична робота 9

1. Виріжте з паперу два рівні прямокутні трикутники.
2. За допомогою цих трикутників як шаблонів накресліть: рівнобедрений трикутник, прямокутник, паралелограм.
3. Порівняйте площі накреслених фігур. Як називають такі фігури?
4. Перемалюйте в зошит фігури (див. мал. 2.12) у масштабі 4 : 1, взявши 4 клітинки зошита як 1 клітинку малюнка 2.12. Порівняйте площі цих фігур.
5. Перемалюйте в зошит фігури (див. мал. 2.13) та знайдіть їхні площі.



Мал. 2.12



Мал. 2.13

Завдання 8

1°. Знайдіть площі фігур F_1, F_2, F_3, F_4, зображених на малюнку 2.14, якщо площа фігури F дорівнює 1.

2°. Відновіть запис:

а) $1\ см^2 = \ldots\ мм^2$, $200\ дм^2 = \ldots\ м^2$, $1\ га = 100 \ldots$;

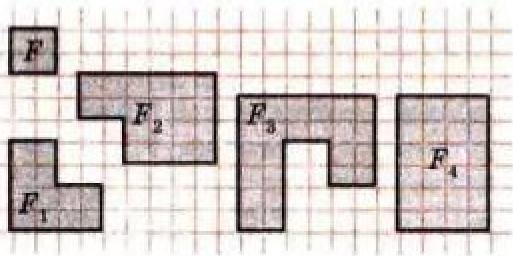
б) $40\,000\ см^2 = \ldots\ м^2$, $13\ дм^2 = \ldots\ см^2$, $4 \ldots = 400\ см^2$.

3°. Скільки квадратів з периметром 100 см міститься в $1\ м^2$?

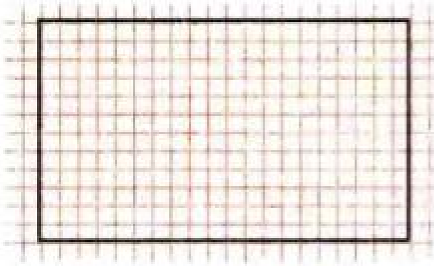
4°. Чи є серед прямокутників із площею $32\ см^2$ такий, який можна розрізати на два однакові квадрати? Які його виміри?

5°. Як розрізати прямокутний трикутник на дві рівновеликі частини?

6. Як розрізати прямокутник, зображений на малюнку 2.15, на три нерівні фігури однакової площі? Якщо можете, запропонуйте кілька способів.



Мал. 2.14

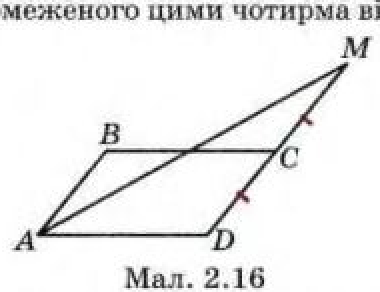


Мал. 2.15

7. За малюнком 2.16 доведіть, що $S_{ABCD} = S_{AMD}$, якщо у чотирикутнику $ABCD$: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, а точки D, C і M лежать на одній прямій і $DC = CM$.

8. На стороні AD прямокутника $ABCD$ побудовано трикутник ADE так, що його сторони AE і DE перетинають відрізок BC у точках M і N, причому точка M – середина відрізка AE. Доведіть, що $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

9*. Площа квадрата дорівнює Q. Кожну його вершину сполучено відрізком із серединою однієї зі сторін квадрата (мал. 2.17). Встановіть форму чотирикутника, обмеженого цими чотирма відрізками, і знайдіть його площу.



Мал. 2.16

Мал. 2.17

10*. Розріжте два рівні квадрати на частини так, щоб із них можна було скласти квадрат.

11.** Поділіть квадрат на 3 частини, з яких можна скласти тупокутний трикутник.

12.** Прямокутник 4×9 поділіть на дві рівні частини, з яких можна скласти квадрат.

Для допитливих

Знак S або s, яким традиційно позначають площу або поверхню фігури, є першою літерою латинського слова *superficies* – «поверхня».

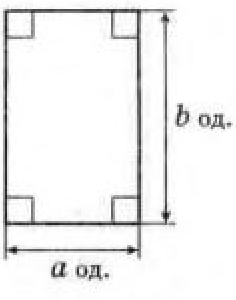
Обчислення площі фігури називають ще *квадратурою*. Цей термін походить від латинського *quadratura*, що означає «надання квадратної форми». У стародавніх єгиптян квадратура деякої фігури зводилася до побудови рівновеликого квадрата.

§ 9. Площа прямокутника

Доведемо основну теорему цього розділу.

Т Теорема (про площу прямокутника). **Якщо сторони прямокутника дорівнюють a і b, то його площа дорівнює добутку ab.**

Тобто для площі прямокутника виконується відома вам рівність $S = ab$, де a і b – **довжини сторін** цього прямокутника, **виміряні в одних і тих самих одиницях**.



$S = a \cdot b$ од^2

a, b – довільні додатні числа

Доведення

Можливі три випадки: a і b – натуральні числа; a і b – раціональні числа; a і b – ірраціональні числа.

ВИПАДОК 1: *a і b – натуральні числа.*

Тоді прямокутник можна розділити на $a \cdot b$ одиничних квадратів (мал. 2.18). Площа прямокутника дорівнює сумі площ цих квадратів, тобто $S = a \cdot b$, і твердження теореми виконується.

Мал. 2.18

ВИПАДОК 2: *a і b – раціональні числа.*

У цьому випадку числа a і b можна представити у вигляді дробів, у чисельниках і знаменниках яких стоять натуральні числа. Нехай число n – спільний знаменник цих дробів, маємо:

$$a = \frac{k}{n} = k \cdot \frac{1}{n} \text{ (од. вим.)} \quad \text{і} \quad b = \frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} \text{ (од. вим.)},$$

де k, m, n – натуральні числа.

Думка, ніби здібність до математики трапляється рідше, ніж здібність до інших наук, – це лише ілюзія, яку породили ті, хто береться до математики непослідовно і недбало.

Й. Ф. Гербарт

Для допитливих

Якщо багатокутник розрізати і з утворених частин скласти інший багатокутник (без зазорів і суміщення частинок), то такі багатокутники називаються *рівноскладеними*. Зрозуміло, що рівноскладені багатокутники є рівновеликими (див. с. 55).

1. Дано прямокутник зі сторонами, що дорівнюють 10 см і 12 см. Розріжте цей прямокутник на частини так, щоб із них можна було скласти квадрат.

2. Два квадрати розмірами 3×3 і 1×1 розріжте на частини так, щоб із них можна було скласти один квадрат.

3. Розв'яжіть попередню задачу для двох довільних квадратів.

4. Розріжте квадрат розміром 7×7 на п'ять частин і перекладіть їх так, щоб отримати три квадрати розмірами 2×2, 3×3 і 6×6. Зробіть це кількома способами.

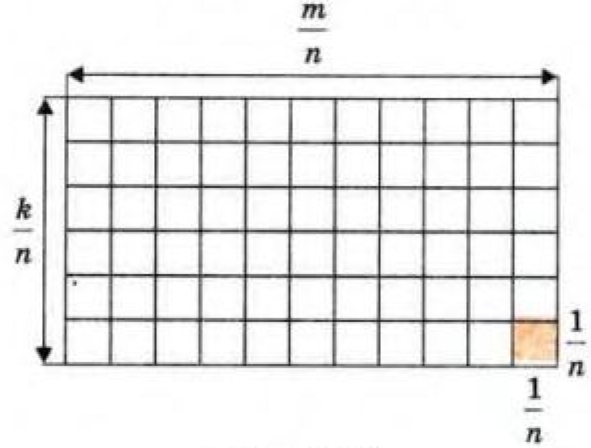
Тоді сторону довжиною a можна поділити на k рівних частин по $\frac{1}{n}$ од. вим.; сторону довжиною b можна поділити на m рівних частин по $\frac{1}{n}$ од. вим. (мал. 2.19). Всього маємо $k \cdot m$ квадратів. Площа прямокутника дорівнює сумі площ цих квадратів:

$$S = km\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{n} = ab.$$

Твердження теореми виконується.

Ідеал математики – створення обчислення, яке полегшує міркування в будь-якій сфері мислення.

А. Н. Уайтхерд



Мал. 2.19

ВИПАДОК 3: *a і b – ірраціональні числа.*

У цьому випадку числа a і b можна подати у вигляді нескінченних десяткових дробів. Округлимо кожен із них з недостачею і надлишком, залишивши однакове число знаків після коми:

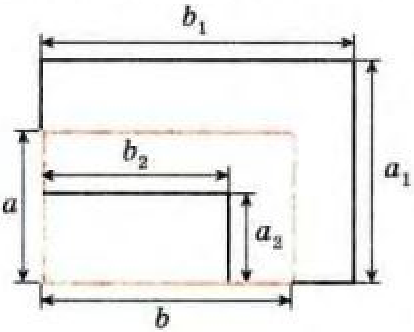
$$a_2 < a < a_1 \quad \text{і} \quad b_2 < b < b_1.$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 – раціональні. Тоді площі прямокутників із довжинами сторін a_1 і b_1 та a_2 і b_2 дорівнюють $S_1 = a_1 \cdot b_1$ і $S_2 = a_2 \cdot b_2$ відповідно (див. випадок 2).

Для допитливих

За часів Паскаля (XVI ст.) математику найчастіше називали геометрією. Якось дванадцятирічний *Блез Паскаль* запитав у батька, Етьєна Паскаля, що таке «геометрія». Етьєн Паскаль, не надаючи своїм словам особливого значення, сказав, що геометрія – це така собі теорія, яка вивчає способи креслення фігур і вказує співвідношення між їх елементами. Через деякий час батько побачив, що син зосереджено розмірковує над складеними з паличок трикутниками. Як з'ясувалося, Блез якраз додумував доведення відкритого ним цікавого факту: у будь-якому трикутнику сума всіх трьох кутів разом складає два прямі кути. Тоді Етьєн відімкнув шафу з книгами і дав Блезу «Начала» Евкліда. Тринадцятирічний Блез опанував її як захоплюючий роман. Невдовзі Блеза Паскаля допустили до участі в засіданнях наукового паризького гуртка (пізніше на базі цього гуртка було створено Паризьку академію наук).

Зрозуміло, що прямокутник із довжинами сторін a_1 і b_1 містить прямокутник із довжинами сторін a і b, а останній містить прямокутник із довжинами сторін a_2 і b_2 (мал. 2.20). Тоді для площ цих прямокутників виконується нерівність $S_2 < S < S_1$ і $a_2b_2 < S < a_1b_1$.



Мал. 2.20

Остання нерівність буде правильною завжди, скільки знаків при наших округленнях ми не залишили б. Чим більше їх число – тим менші розбіжності між значеннями площ трьох прямокутників.

Таким чином, у цьому випадку з довільною точністю значення площі прямокутника наближається до числа ab, і твердження теореми виконується.

Теорему доведено.

У природі міра є головним знаряддям пізнання. Наука починається тоді, коли починаються вимірювання.

Д. І. Менделєєв

Проілюструємо наведені вище міркування для третього випадку математичною викладкою.

Нехай пропоновані округлення були проведені до n-го знака після коми. Тоді числа a_1, a_2, b_1, b_2 дорівнюють

$$a_1 = \frac{k}{10^n},\ a_2 = \frac{k-1}{10^n},\ b_1 = \frac{m}{10^n},\ b_2 = \frac{m-1}{10^n}$$

і остання нерівність має вигляд

$$\frac{(k-1)(m-1)}{10^{2n}} < S < \frac{km}{10^{2n}}.$$

З подвійної нерівності $\frac{k-1}{10^n} < a < \frac{k}{10^n}$ отримаємо, що

$$10^n a < k < 10^n a + 1.$$

Для допитливих

1. У прямокутнику взято довільні точки A і B. Ці точки сполучили з усіма вершинами прямокутника так, як показано на малюнку **А**. Доведіть, що сума площ кольорових частин дорівнює сумі площ сірих частин.

2. На сусідніх сторонах прямокутника позначили по точці, які сполучили з його вершинами. Покажіть, що сума площ кольорових частин дорівнює площі сірої частини (див. мал. **Б**).

А

Б

Аналогічно маємо, що $10^n b < m < 10^n b + 1$. Тоді

$$\frac{(10^n a - 1)(10^n b - 1)}{10^{2n}} < S < \frac{(10^n a + 1)(10^n b + 1)}{10^{2n}},$$

або після розкриття дужок

$$ab - \frac{a+b}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} < S < ab + \frac{a+b}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}.$$

Звідси

$$-\frac{a+b}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} < S - ab < \frac{a+b}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}$$

і тим паче

$$-\frac{a+b}{10^n} - \frac{1}{10^{2n}} < S - ab < \frac{a+b}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}.$$

Останню нерівність можна записати у вигляді

$$|S - ab| < \frac{a+b}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}.$$

У лівій частині останнього виразу стоїть невід'ємна величина, яка дорівнює нулю лише тоді, коли $S = ab$.

Якщо $S \neq ab$, то ліва частина останньої нерівності – деяке додатне число, яке не залежить від n. Праву частину цієї нерівності вибором достатньо великого значення n можна зробити меншою за це додатне число, чого бути не може. Тому ця нерівність буде правильною лише у випадку, коли $S = ab$.

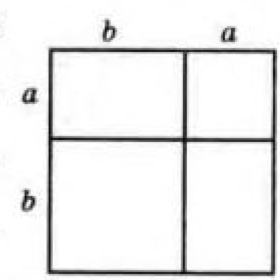
Що і вимагалося довести.

Сміливість розуму притаманна всім математикам. Математик не любить, коли йому про щось розповідають, він до всього хоче дійти сам.

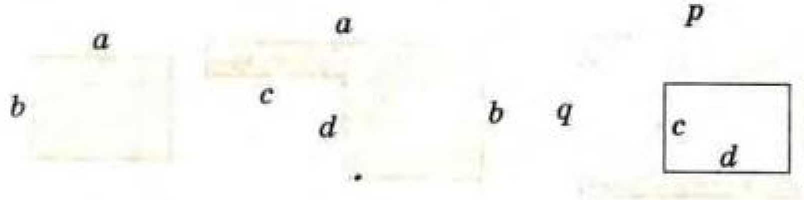
В. Сойєр

Практична робота 10

1. Накресліть прямокутник, сторони якого позначте як a і b.
2. Добудуйте цей прямокутник до квадрата зі стороною $a + b$ (мал. 2.21).
3. Запишіть вираз для обчислення площі утвореного квадрата зі стороною $a + b$.
4. З яких фігур складається утворений квадрат? Запишіть вирази для обчислення їхніх площ.
5. Допишіть рівність $(a + b)^2 = \dots$.
6. Яку формулу ви отримали?
7. Перемалюйте фігури, зображені на малюнку 2.22, у зошит. Запишіть формули для обчислення площ цих фігур.



Мал. 2.21



а) б) в)

Мал. 2.22

Завдання 9

1°. Знайдіть площу квадрата, якщо його сторона дорівнює:

а) 1,5 см; б) $\frac{2}{3}$ дм; в) $3\sqrt{2}$ м.

2°. Обчисліть сторону квадрата, якщо його площа дорівнює:
а) 160 $см^2$; б) 12 $м^2$; в) 1,69 $дм^2$.

3°. Обчисліть площу прямокутника зі сторонами:

а) $a = 5$ см, $b = 4$ см; б) $a = \frac{3}{4}$ м, $b = \frac{1}{2}$ м; в) $a = \sqrt{6}$ см, $b = 4\sqrt{5}$ см.

4. Як зміниться площа прямокутника, якщо: **а)** кожну сторону збільшити у 3 рази; **б)** одну пару протилежних сторін зменшити у 5,5 раза; **в)** одну пару протилежних сторін збільшити у $\sqrt{2}$ разів, а другу зменшити у два рази?

5. Обчисліть сторони прямокутника, якщо його площа – 120 $см^2$, а одна з його сторін: **а)** на 2 см більша за другу; **б)** у 1,2 раза менша за другу.

6. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його площа дорівнює 60 $см^2$, а периметр – 38 см.

7. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 50 см, а сторони відносяться як 1 : 4.

8. Сторони прямокутника відносяться як 5 : 4, а його площа дорівнює 9680 $см^2$. Обчисліть периметр цього прямокутника.

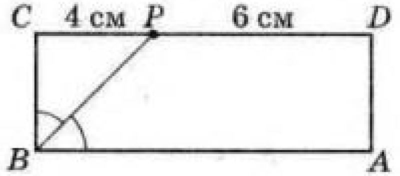
9*. Точка діагоналі квадрата віддалена від його двох сторін на 2,8 см і 4,7 см. Знайдіть його площу.

10*. Обчисліть площу прямокутника $ABCD$, зображеного на малюнку 2.23, якщо BP – бісектриса кута B.

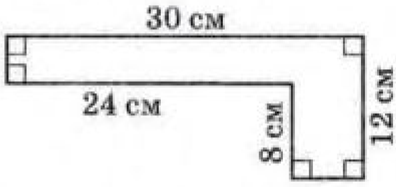
11*. Бісектриси двох кутів, що прилягають до однієї зі сторін прямокутника, ділять протилежну (вказаній стороні) сторону на 3 частини, довжина кожної з яких дорівнює 12 см. Знайдіть площу прямокутника.

12*. Площі квадрата і прямокутника однакові. Сторона квадрата дорівнює 24 см, а одна із сторін прямокутника – 12 см. Знайдіть другу сторону прямокутника.

13. Знайдіть площу фігури, зображеної на малюнку 2.24.

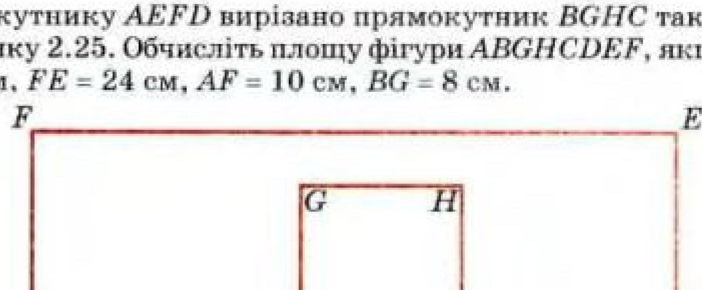


Мал. 2.23



Мал. 2.24

14. У прямокутнику $AEFD$ вирізано прямокутник $BGHC$ так, як показано на малюнку 2.25. Обчисліть площу фігури $ABGHCDEF$, якщо $AB = 10$ см, $CD = 8$ см, $FE = 24$ см, $AF = 10$ см, $BG = 8$ см.



Мал. 2.25

15*. У прямокутнику $ABCD$ точка E – точка перетину бісектрис кутів A і D. Знайдіть площу фігури $ABCDE$, якщо $AB = 12$ см, $BC = 20$ см.

16*. Знайдіть площу квадрата: а) описаного навколо кола, радіус якого дорівнює r; б) вписаного у коло, радіус якого дорівнює R.

17. Скільки потрібно кахельних плиток прямокутної форми зі сторонами 20 см і 30 см, щоб обкласти частину стіни, що має розмір $3 \times 2{,}5$ м?

18. Дві ділянки землі огороджено парканами однакової довжини. Перша ділянка має форму прямокутника зі сторонами 220 м і 160 м, а друга – форму квадрата. Площа якої ділянки більша і на скільки?

19. Пшеничне поле має форму прямокутника, сторони якого дорівнюють 450 м і 250 м. Ширина хедера комбайна дорівнює 4,6 м. Яку площу поля скосить комбайн за 5 об'їздів?

20*. Вісь симетрії діагоналі прямокутника ділить його сторону на дві такі частини: 13 см і 12 см. Знайдіть площу прямокутника.

21*. Обчисліть площу прямокутника, периметр якого дорівнює 70 см, а діагональ – 27 см.

22*. Знайдіть площу прямокутника, периметр якого дорівнює 64 см, а радіус описаного кола – 12 см.

23*. Периметр квадрата (у метрах) і його площа (у квадратних метрах) виражені однаковими числами. Визначте площу квадрата.

24*. Довжина діагоналі квадрата (у сантиметрах) і його площа (у квадратних сантиметрах) виражені однаковими числами. Визначте площу квадрата.

25.** Знайдіть відношення площ частин, на які прямокутник поділяється бісектрисою його кута, якщо: а) сторони прямокутника відносяться як $3:4$; б) перпендикуляр, опущений з вершини кута прямокутника на діагональ, ділить її у відношенні $9:16$.

26.** Дано три паралельні прямі, середня з яких віддалена від крайніх на відстані a і b. Знайдіть площу квадрата, три вершини якого лежать на цих прямих.

27.** Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) перетинаються в точці O. Площі трикутників AOB і COD дорівнюють відповідно S_1 і S_2. Знайдіть площу трапеції.

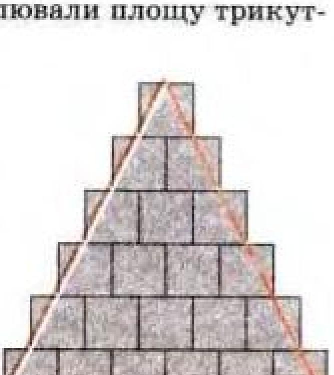
Для допитливих

Не завжди уявлення про вимірювання геометричних величин було таким, як нині. Не завжди правила, які використовували для обчислення площ, давали істинні результати.

Наприклад, площу трикутника обчислювали як добуток основи і половини бічної сторони. Так робили стародавні вавилоняни та єгиптяни. Порівняно недавно (400 – 500 років тому) так обчислювали площу трикутника і на Русі.

Якщо мали чотирикутник неправильної форми, то його площу обчислювали як добуток півсуми протилежних сторін. Так вимірювали вавилоняни.

У середні віки, щоб обчислити площу трикутника, основа і висота якого дорівнюють цілому числу n, знаходили суму членів натурального ряду чисел від 1 до n. Тобто за площу мали $\frac{n(n+1)}{2}$. Звідки було взято такий спосіб обчислення площі вказаного трикутника, ви бачите на малюнку.



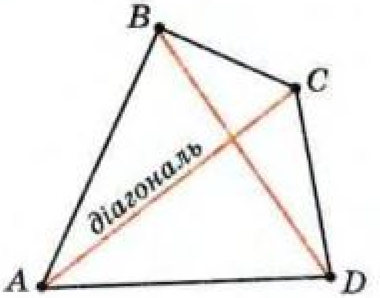
§ 10. Загальні відомості про чотирикутники

Нагадаємо:

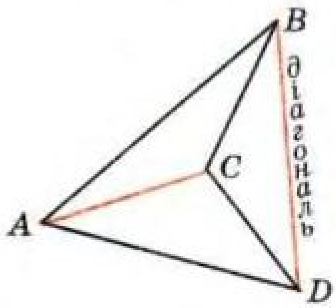
– *чотирикутником* називається багатокутник, який має чотири вершини і чотири сторони;

– *чотирикутник* може бути *опуклим* (мал. 2.26) або *неопуклим* (мал. 2.27);

– *діагоналі* чотирикутника – це відрізки, які сполучають дві протилежні (несусідні) його вершини (наприклад, на малюнках 2.26 і 2.27– відрізки AC і BD).



Мал. 2.26



Мал. 2.27

Далі ми будемо вивчати властивості опуклих чотирикутників.

Для допитливих

Рівноскладені багатокутники є рівновеликими (див. с. 49). Цим користувалися ще стародавні вчені для доведення математичних тверджень, зокрема і теореми Піфагора: «У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів: $c^2 = a^2 + b^2$».

Існує багато доведень теореми Піфагора, при яких квадрати, побудовані на катетах і гіпотенузі прямокутного трикутника, розрізають так, щоб кожній частині квадрата, побудованого на гіпотенузі, відповідала частина одного з двох квадратів, побудованих на катетах. Так у книзі «Вінок знання» індійський математик **Бхаскара** (1114–1185) наводить «доведення» теореми Піфагора у вигляді креслення з підписом «Дивись!» (мал. **А** і **Б**). Відновіть доведення Бхаскари.

А

Б

Проте слід зауважити, що такі міркування не можна вважати за доведення, доки ми не довели рівність одна одній усіх відповідних частин. Це, як правило, в таких задачах зробити неважко, але при великій кількості розрізань на доведення потрібно чимало часу.

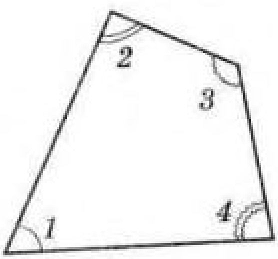
Властивість 1.

Будь-яка сторона чотирикутника менша за суму трьох інших його сторін.

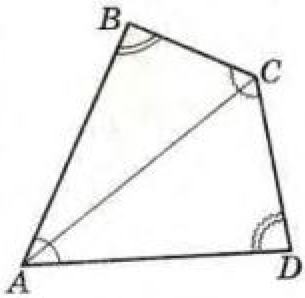
Це твердження випливає з властивості багатокутника: будь-яка сторона багатокутника менша за суму всіх його інших сторін (див. с. 42).

Властивість 2.

Теорема. **Сума внутрішніх кутів чотирикутника дорівнює 360°.**



$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360^\circ$



Мал. 2.28

Доведення

Діагональ чотирикутника ділить його на два трикутники. Наприклад, на малюнку 2.28 діагональ AC ділить чотирикутник $ABCD$ на трикутники ABC і ACD. Тоді сума внутрішніх кутів чотирикутника дорівнює сумі кутів цих трикутників, тобто $180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$.

Теорему доведено.

Нагадаємо: вивчаємо опуклі чотирикутники

Наслідок 1. **Не існує чотирикутника, в якого всі кути гострі або всі кути тупі.**

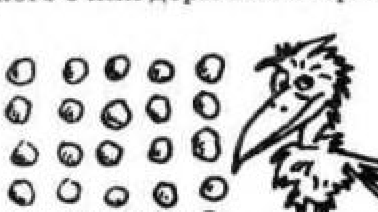
Твердження легко доводиться від супротивного.

Нехай існує чотирикутник, в якого градусна міра кожного з чотирьох кутів більша за 90°. Тоді сума всіх кутів такого чотирикутника буде більшою за $90^\circ \cdot 4$ і не дорівнюватиме 360°. Це суперечить теоремі, отже, зроблене припущення є хибним.

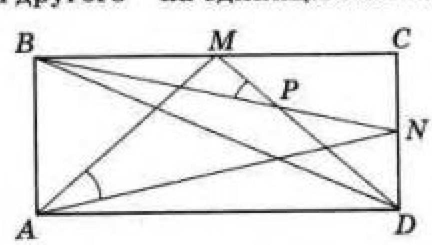
Нехай існує чотирикутник, в якого градусна міра кожного з чотирьох кутів менша за 90°. Тоді сума всіх кутів такого чотирикутника буде меншою за $90^\circ \cdot 4$ і не дорівнюватиме 360°. Це суперечить теоремі, отже, зроблене припущення є хибним.

Для допитливих

1. Горіхи розклали у вигляді квадрата (мал. **А**). Покажіть, що їх можна розмістити у вигляді таких двох рівносторонніх трикутників, що сторона одного з них дорівнює стороні квадрата, а другого – на одиницю менша.



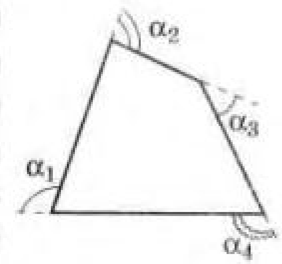
А



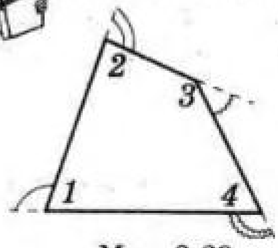
Б

2. У прямокутнику $ABCD$ (мал. Б) точка M – середина сторони BC, точка N – середина сторони CD, а P – точка перетину відрізків DM і BN. Доведіть, що $\angle MAN = \angle BPM$.

Наслідок 2. Сума зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині чотирикутника, дорівнює 360°.



$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^\circ$



Мал. 2.29

Сума зовнішніх кутів чотирикутника є сумою кутів, суміжних із кутами цього чотирикутника (мал. 2.29):

$(180^\circ - \angle 1) + (180^\circ - \angle 2) + (180^\circ - \angle 3) + (180^\circ - \angle 4) = 180^\circ \cdot 4 - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4) = 360^\circ.$

Серед множини опуклих чотирикутників *виділяють такі види чотирикутників.*

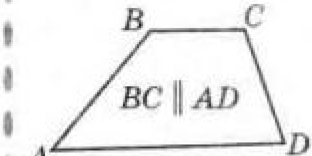
ТРАПЕЦІЯ – чотирикутник, у якого дві протилежні сторони паралельні (мал. 2.30).

ПАРАЛЕЛОГРАМ – чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні (мал. 2.31).

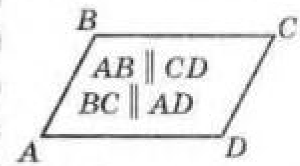
РОМБ – паралелограм, у якого всі сторони рівні (мал. 2.32).

ПРЯМОКУТНИК – паралелограм, у якого всі кути прямі (мал. 2.33).

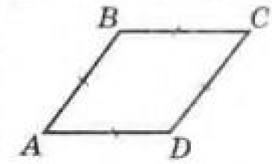
КВАДРАТ – прямокутник, у якого всі сторони рівні (мал. 2.34).



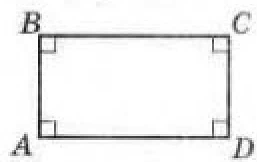
трапеція



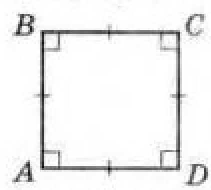
паралелограм



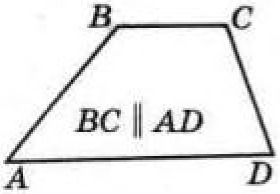
ромб



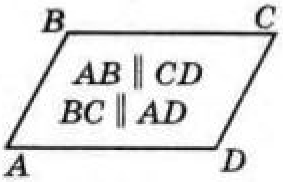
прямокутник



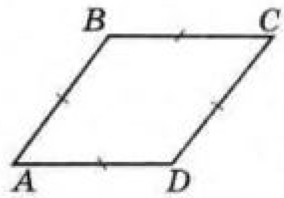
квадрат



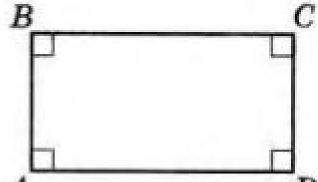
Мал. 2.30



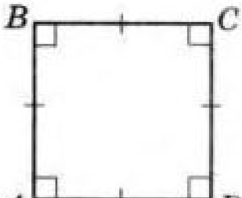
Мал. 2.31



Мал. 2.32



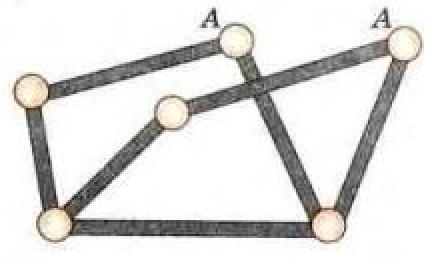
Мал. 2.33



Мал. 2.34

Для допитливих

На відміну від трикутника, який три задані відрізки формує єдино можливим чином, контур чотирикутника не є жорсткою «конструкцією». Уявіть чотири планки, які з'єднали за допомогою шарнірів (див. мал.). Такій фігурі можна надавати різних форм, якщо «тягти» за вершину *A*.



Практична робота 11

1. Позначте будь-які чотири точки так, щоб жодні три з них не лежали на одній прямій.
2. Сполучіть ці точки відрізками так, щоб утворився чотирикутник. Який чотирикутник ви отримали – опуклий чи неопуклий?
3. Виміряйте сторони утвореного чотирикутника. Порівняйте довжину однієї з його сторін із сумою довжин трьох інших сторін. Зробіть висновок.
4. Накресліть опуклий чотирикутник. Позначте вершини чотирикутника і проведіть у ньому діагоналі. Назвіть їх.
5. Виміряйте транспортиром кути побудованого опуклого чотирикутника і обчисліть суму градусних мір його кутів. Зробіть висновок.
6. Накресліть неопуклий чотирикутник. Виміряйте транспортиром його кути і обчисліть суму їх градусних мір. Зробіть висновок.

Завдання 10

1°. Які фігури на малюнку 2.35:
а) не є чотирикутниками;
б) є опуклими чотирикутниками?

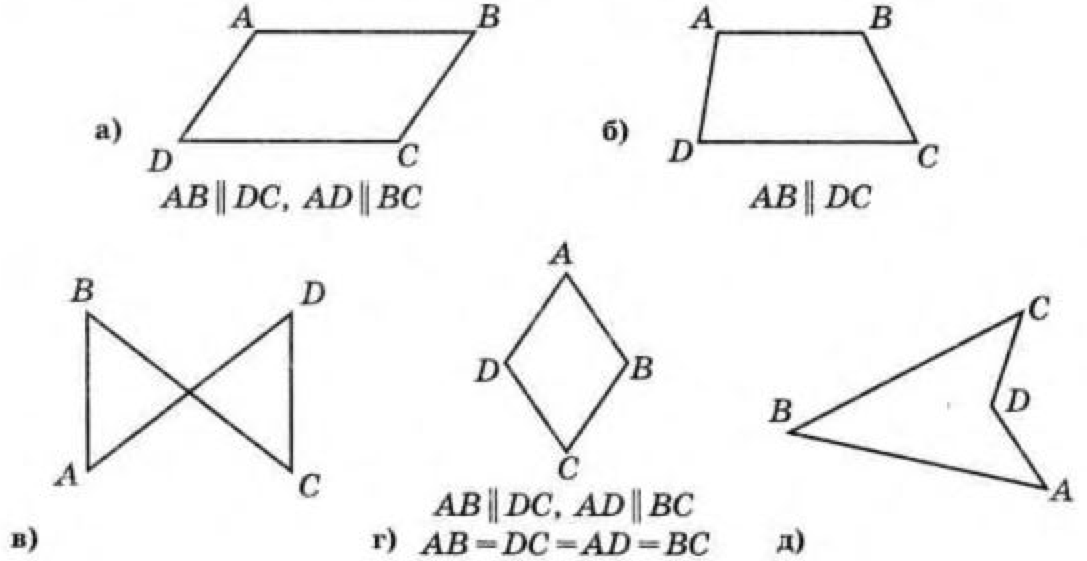
2°. Серед чотирикутників на малюнку 2.35 знайдіть: трапецію; паралелограм; ромб.

3°. Чи існує чотирикутник, сторони якого дорівнюють: а) 2 см, 2 см, 3 см і 6 см; б) 1 см, 3 см, 5 см і 9 см; в) 5 см, 17 см, 3 см і 7 см?

4. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо:
а) його периметр дорівнює 6 см, а одна сторона більша від кожної іншої відповідно на 3 мм, 4 мм, 5 мм;
б) його периметр дорівнює 66 см, одна сторона більша за другу на 8 см і на стільки ж менша за третю, а четверта сторона – у три рази більша за другу.

5*. Зробіть схематичний малюнок чотирикутників, у яких:
а) три сторони рівні;
б) дві протилежні сторони рівні;
в) усі сторони рівні.

6°. Визначте, чи існує чотирикутник, кути якого дорівнюють: а) 45°, 65°, 87°, 32°; б) 123°, 98°, 111°, 156°.



Мал. 2.35

7. Чи існує чотирикутник, у якого:
а) три кути прямі, а четвертий – гострий;
б) один із кутів дорівнює сумі трьох інших?

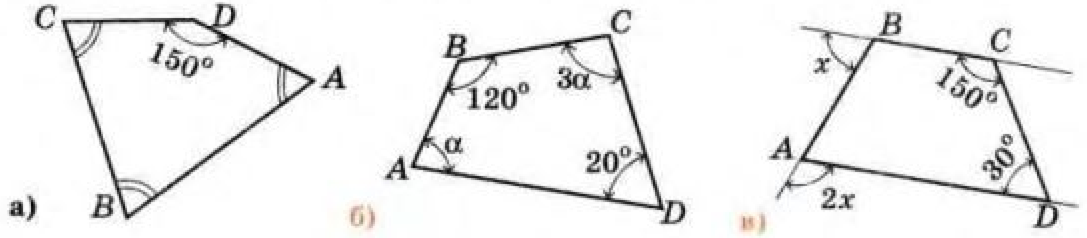
8. Якою в чотирикутнику може бути найбільша кількість кутів:
а) гострих; б) тупих; в) прямих?

9*. Чи може опуклий чотирикутник мати кут, більший за 180°?

10**. В опуклому чотирикутнику три гострі кути рівні. В яких межах може змінюватися градусна міра кожного з них?

11°. Усі кути чотирикутника рівні. Знайдіть їх.

12°. Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$ (мал. 2.36).



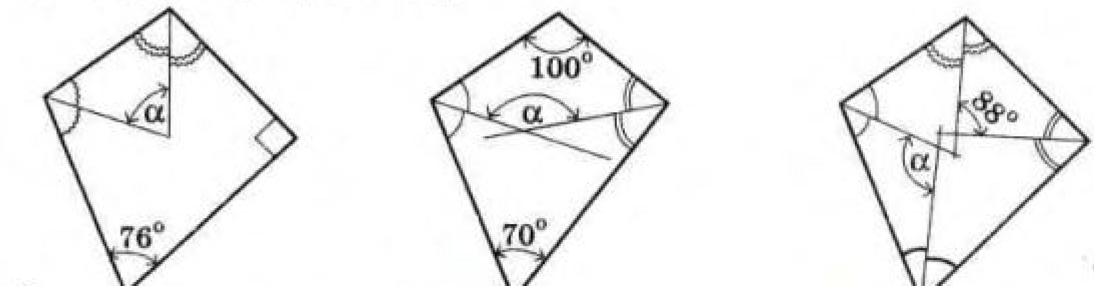
Мал. 2.36

13°. Знайдіть кути чотирикутника $KLMN$, якщо:
а) $\angle K = \angle L$, $\angle M = \angle N$, $\angle K = 2\angle N$;
б) градусні міри кутів пропорційні числам 1, 2, 4, 5.

14. Знайдіть кути чотирикутника $FGHL$, якщо:
а) $\angle F = 70^\circ$, кут G у півтора раза більший за кут F, а кут L – на 85° менший за кут H; б) $\angle F = 90^\circ$, кут G удвічі більший за кут H, градусна міра якого становить 70 % від градусної міри кута F.

15**. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = \angle B = 100^\circ$, $\angle ABD = 50^\circ$, $\angle CAD = 60^\circ$. Знайдіть кути ACD, BCD і CDA.

16**. Зайдіть кут α (мал. 2.37).



Мал. 2.37

Для допитливих

1. Двоє по черзі ламають шоколадку розміром 6 × 8. За один хід можна зробити прямолінійний поділ будь-якого з утворених шматочків (уздовж заглиблення). Програє той, хто не може зробити хід. Хто з гравців виграє?

2. Розв'яжіть попередню задачу для випадку, коли початковий розмір шоколадки буде 5 × 5.

3. Гра в шахи часто закінчується нічиєю. Чи може закінчуватися нічиєю гра у «піддавки»?

4. Від квадрата відрізали прямокутний трикутник, сума катетів якого дорівнює стороні квадрата. Доведіть, що сума кутів, під якими видно з трьох вершин квадрата, що залишилися, відрізок, по якому провели розрізання, дорівнює 90°.

17*. Чи можуть бісектриси двох суміжних кутів чотирикутника бути паралельними?

18*. Зробіть схематичний малюнок чотирикутників, у яких:

а) бісектриси протилежних кутів паралельні;

б) бісектриси двох протилежних його кутів лежать на одній прямій.

19.** Доведіть, якщо бісектриси двох протилежних кутів чотирикутника паралельні або лежать на одній прямій, то два інші кути рівні.

20*. Зробіть схематичний малюнок чотирикутника, в якого:

а) прямі, на яких лежать протилежні сторони, паралельні;

б) прямі, на яких лежать дві протилежні сторони, перпендикулярні;

в) кожна діагональ більша за будь-яку його сторону;

г) кожна діагональ менша за будь-яку його сторону.

21*. Доведіть, що:

а) довжина відрізка, який сполучає дві точки на протилежних сторонах опуклого чотирикутника, менша за його півпериметр;

б) у чотирикутника будь-яка діагональ менша за половину периметра.

22*. Діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні. Доведіть, що площа такого чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей.

23.** Доведіть, що:

а) сума відрізків, які сполучають середини протилежних сторін опуклого чотирикутника, менша за периметр чотирикутника;

б) в опуклому чотирикутнику сума діагоналей більша за суму двох його протилежних сторін;

в) сума діагоналей опуклого чотирикутника більша за півпериметр і менша за периметр.

24.** Діагональ AC ділить другу діагональ чотирикутника $ABCD$ на дві рівні частини. Доведіть: якщо $AB > AD$, то $BC < DC$.

25.** Два протилежні кути опуклого чотирикутника тупі. Доведіть, що діагональ, яка сполучає ці вершини, менша за діагональ, що сполучає інші дві вершини.

26.** Побудуйте чотирикутник за:

а) сторонами та однією з діагоналей;

б) сторонами та одним з кутів.

27.** Побудуйте чотирикутник $ABCD$ за кутами A і B, сторонами AB і AD та сумою сторін BC і CD.

Для допитливих

1. У чотирикутнику провели його діагоналі. Яка найбільша кількість прямих кутів при цьому утвориться?

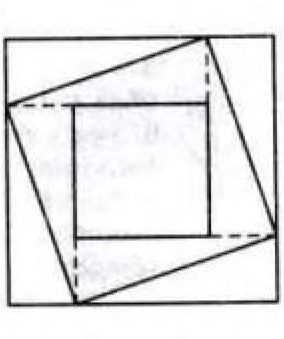
2. В опуклому чотирикутнику $MPKH$: $\angle M + \angle P = 180°$, $\angle MKH = \angle KMP$. На сторонах MH і PK позначено точки A і B так, що $PB = PA$. Відрізок AB проходить через точку перетину діагоналей чотирикутника. Доведіть, що $HP \perp AB$.

3. Відновіть квадрат $ABCD$ за:

а) його центром і двома точками на паралельних сторонах квадрата (задані точки не лежать на одній прямій із центром);

б) вершиною A і двома точками на сторонах квадрата, що не містять вершини A;

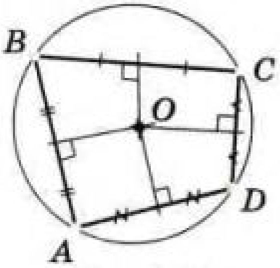
в) чотирма точками – по одній на кожній стороні квадрата.



4. Площа найбільшого квадрата (див. мал.) дорівнює 16 кв. од.; площа найменшого квадрата – 4 кв. од. Яка площа кольорового квадрата?

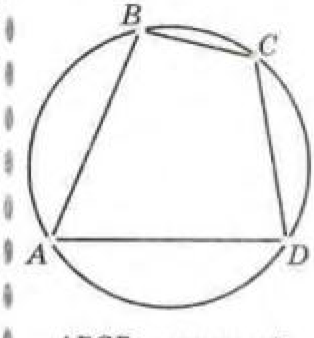
§ 11. Вписані й описані чотирикутники

Нагадаємо: **чотирикутник називається *вписаним* у коло, якщо всі його вершини належать колу** (мал. 2.38). Це *коло* називається *описаним навколо даного чотирикутника*. **Центром такого кола є точка перетину серединних перпендикулярів, проведених до всіх сторін чотирикутника** (див. § 7, властивість 4).



Мал. 2.38

Правильним є й обернене твердження (див. § 7). **Якщо серединні перпендикуляри, проведені до всіх сторін чотирикутника, перетинаються в одній точці, то навколо цього чотирикутника можна описати коло.**



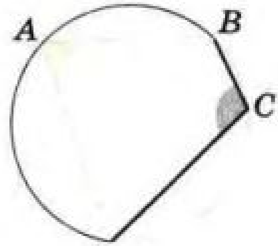
ABCD – вписаний чотирикутник

⇓

$\angle A + \angle C = 180°$

$\angle B + \angle D = 180°$

Теорема 1. **Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.**



Мал. 2.39

Вершини чотирикутника $ABCD$ належать колу (мал. 2.39). Треба довести, що $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

Доведення

1) $\angle A = \frac{1}{2} \smile DCB$; $\angle C = \frac{1}{2} \smile DAB$ як вписані.

Тоді

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\smile DCB + \smile DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

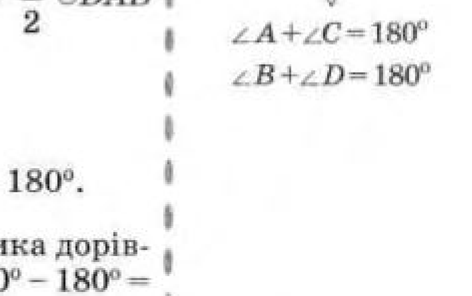
2) Сума всіх внутрішніх кутів чотирикутника дорівнює 360°. Тоді $\angle B + \angle D = 360° - (\angle A + \angle C) = 360° - 180° = 180°$.

Теорему доведено.

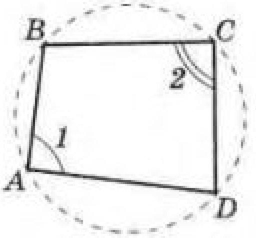
Для допитливих

Арабський математик **Гасан Ібн Гайтем** (XI ст.) запропонував такий спосіб виявлення того, що заданий чотирикутник є вписаним, при цьому він користувався лише циркулем.

Якщо накреслено чотирикутник *ABCD*, Гасан Ібн Гайтем пропонує одним і тим самим розхилом циркуля провести дуги з центрами у протилежних вершинах *A* і *C*. Точки перетину дуг зі сторонами чотирикутника та продовженням однієї з них позначимо, як вказано на малюнку. Якщо $|KN| = |PF|$, то чотирикутник *ABCD* – вписаний, а якщо рівність не виконується – то ні.



Обґрунтуйте спосіб Гасана Ібн Гайтема або спростуйте його.



$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

$\Downarrow$

ABCD – вписаний

Нагадаємо позначення:
$\notin$ – «не належить».

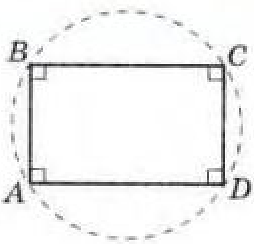
Теорема 2 (обернена до теореми 1). **Якщо сума двох протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180°, то навколо такого чотирикутника можна описати коло.**

Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Через точки A, B і D провели коло γ. Треба довести, що точка C належить цьому колу.

Доведення

Доведемо теорему від супротивного. Нехай $C \notin \gamma$ (мал. 2.40) і пряма DC перетинає коло в точці K. За прямою теоремою $\angle A + \angle K = 180^\circ = \angle A + \angle C$. Звідси маємо, що і $\angle K = \angle C$, притому один із цих кутів – зовнішній для трикутника BCK. Цього бути не може.

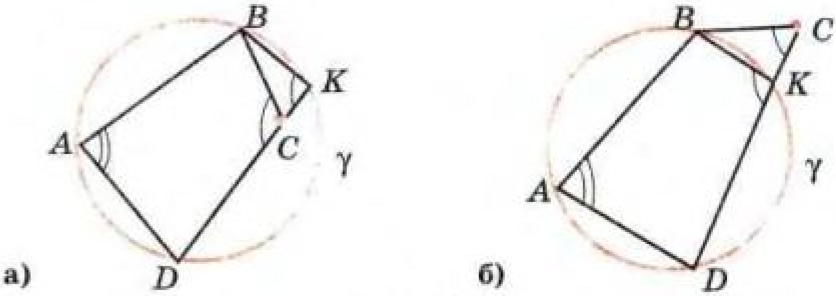
Теорему доведено.



ABCD – прямокутник

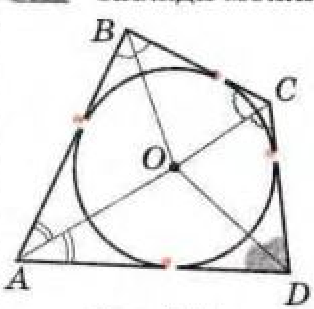
$\Downarrow$

ABCD – вписаний



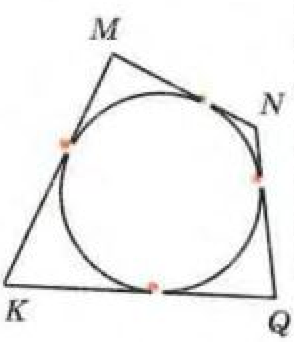
Мал. 2.40

Наслідок. Навколо довільного прямокутника завжди можна описати коло.



Мал. 2.41

Нагадаємо: чотирикутник називається *описаним* навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до кола (мал. 2.41). Тобто *коло вписують у чотирикутник*. **Центром такого кола буде точка перетину бісектрис усіх внутрішніх кутів чотирикутника** (див. § 7, властивість 5).



KMNQ – описаний чотирикутник

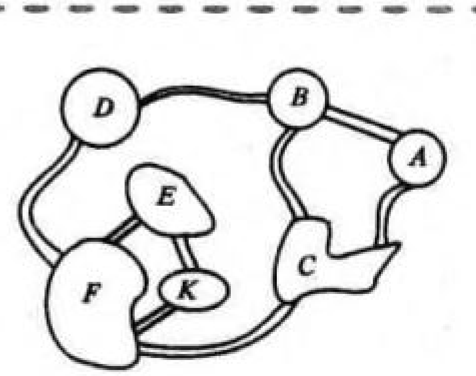
Правильним є і обернене твердження (див. § 7). **Якщо бісектриси всіх кутів чотирикутника перетинаються в одній точці, то в нього можна вписати коло.**

Для допитливих

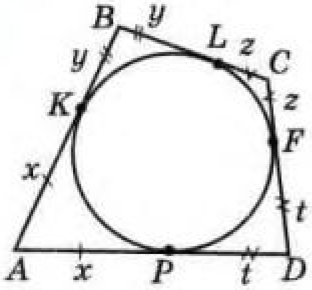
На морі сім островів, які з'єднані мостами так, як показано на малюнку.

На який острів повинен привезти мандрівників катер, щоб вони мали змогу пройти по кожному місточку лише 1 раз?

З якого острова катер повинен буде забрати мандрівників?



Т Теорема 3. **Суми протилежних сторін чотирикутника, описаного навколо кола, рівні.**



Мал. 2.42

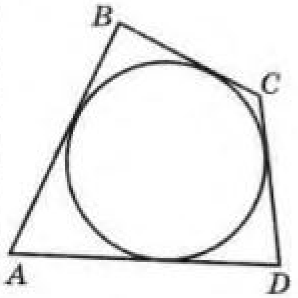
Нехай у чотирикутник $ABCD$ вписане коло. Треба довести, що

$$AB + CD = BC + AD.$$

Доведення

Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні. Позначимо довжини відповідних відрізків через x, y, z і t (мал. 2.42). Тоді $AB + CD = (x + y) + (z + t) = (x + t) + (y + z) = AD + BC$.

Теорему доведено.



ABCD − описаний

$\Downarrow$

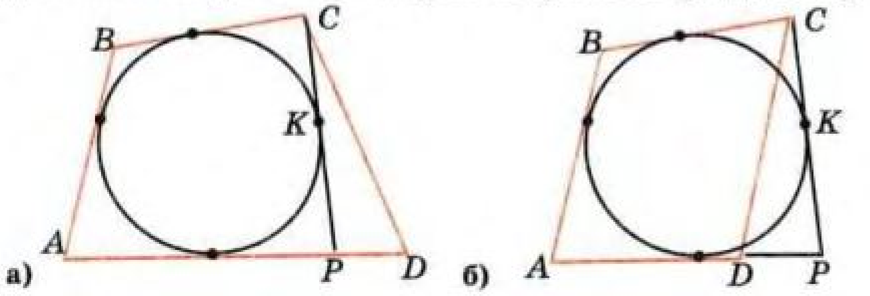
BC + AD = AB + CD

Т Теорема 4 (обернена до теореми 3). **Якщо в опуклому чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло.**

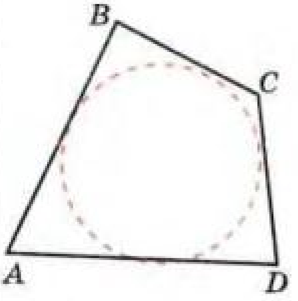
Нехай для чотирикутника $ABCD$ виконується співвідношення $AB + CD = BC + AD$. Треба довести, що в цей чотирикутник можна вписати коло.

Доведення

Доведемо теорему від супротивного. Нехай коло дотикається до трьох сторін такого чотирикутника і не дотикається до його четвертої сторони CD (мал. 2.43).



Мал. 2.43



AD + BC = AB + CD

$\Downarrow$

ABCD − описаний

1) Через вершину C проведемо дотичну до кола, яка перетне пряму AD у точці P. За прямою теоремою маємо: $AB + CP = BC + AP$.

2) $AB + CD = BC + AD$ і $AB + CP = BC + AP$. Віднімемо від першої рівності другу (або від другої першу). Маємо: $|CD - CP| = |AD - AP|$, тобто $|CD - CP| = PD$, що суперечить нерівності для сторін трикутника CDP.

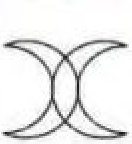
Висновок: точки P і D збігаються. Теорему доведено.

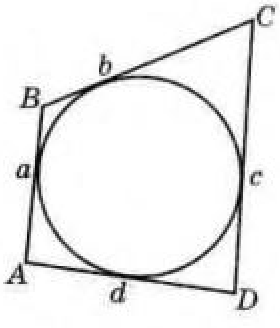
Нагадаємо позначення: $|AB|$ – довжина відрізка AB.

Н Наслідок. **У ромб завжди можна вписати коло.**

Для допитливих

Кажуть, що Магомет креслив, не відриваючи руки, знак, який зображає два Місяці (див. мал.). Спробуйте це зробити і ви.





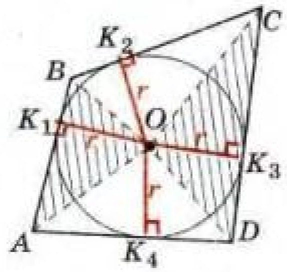
$S_{ABCD} = p \cdot r$

$p \triangleq (a+b+c+d):2$

$r = \dfrac{S}{p}$

Опорна задача

Площа описаного чотирикутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного в нього кола.



Дано: K_1, K_2, K_3, K_4 – *точки дотику.*

Довести: $S = pr$.

---

1) $S = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle DOA}$.

2) K_1, K_2, K_3, K_4 – точки дотику, тоді $OK_1 \perp AB$, $OK_2 \perp BC$, $OK_3 \perp CD$, $OK_4 \perp AD$ і $OK_1 = OK_2 = OK_3 = OK_4 = r$.

3) $S = \dfrac{1}{2}ar + \dfrac{1}{2}br + \dfrac{1}{2}cr + \dfrac{1}{2}dr = \dfrac{1}{2}r(a+b+c+d) = pr$.

Щ. в. д.

Практична робота 12

1. Накресліть коло. Позначте на колі чотири точки і сполучіть їх послідовно відрізками.
2. Виміряйте транспортиром кути утвореного чотирикутника і обчисліть суми градусних мір його протилежних кутів. Зробіть висновок.
3. Накресліть коло. Користуючись косинцем і лінійкою, проведіть 4 дотичні до кола, щоб утворився описаний чотирикутник.
4. Виміряйте протилежні сторони утвореного чотирикутника. Обчисліть суми довжин його протилежних сторін. Зробіть висновок.

Практична робота 13

1. Зробіть схематичний малюнок чотирикутника, вписаного в коло, в якого:
   а) два кути, прилеглі до однієї зі сторін, рівні;
   б) два протилежні кути рівні;
   в) дві протилежні сторони паралельні;
   г) протилежні сторони рівні.
2. Зробіть схематичний малюнок чотирикутника, описаного навколо кола, в якого:
   а) два кути, прилеглі до однієї зі сторін, рівні;
   б) дві протилежні сторони рівні;
   в) діагоналі утворюють з однією зі сторін рівні кути;
   г) діагоналі утворюють з двома протилежними сторонами прямі кути.

Завдання 11

1^o. За малюнками 2.44–2.46 знайдіть кути чотирикутників.

Мал. 2.44

Мал. 2.45

Мал. 2.46

2°. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, якщо його кути, розташовані послідовно, дорівнюють:

а) 72°, 105°, 108°, 75°;

б) 138°, 44°, 52°, 126°;

в) 56°, 112°, 124°, 82°?

3. Чи можна описати коло навколо довільного:

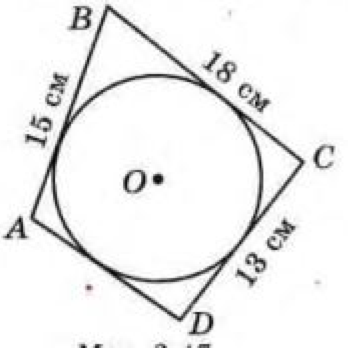
а) прямокутника;

б) квадрата?

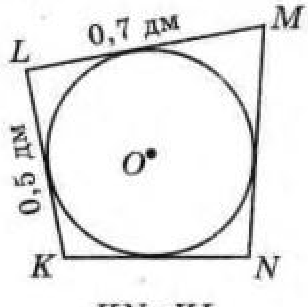
4. AC і BD – діаметри кола з центром у точці O. Доведіть, що $ABCD$ – прямокутник.

5. У чотирикутника $ABCD$ $\angle ABD = \angle ACD$. Чи можна його вписати в коло?

6°. За малюнками 2.47 і 2.48 знайдіть невідомі сторони чотирикутників.



Мал. 2.47



Мал. 2.48

7°. Сума двох протилежних сторін описаного чотирикутника дорівнює 15 см. Знайдіть периметр цього чотирикутника.

8. Чи можна вписати коло у довільний: а) прямокутник; б) квадрат; в) ромб?

9. Довжини трьох сторін AB, BC і CD описаного чотирикутника, периметр якого дорівнює 96 см, відносяться як 1 : 2 : 3. Знайдіть довжину кожної сторони чотирикутника.

Для допитливих

Казка від Реймонда М. Смалліана «Принцеса або тигр»

У деякому королівстві правив король-логік. Якось він захопив у полон багато принців, принцес та тигрів і вирішив запровадити такі змагання.

1. Перший день. Король сповістив полоненому принцу, що в кожній з двох кімнат сидять або тигр, або принцеса, а може бути й таке, що в обох кімнатах розміщено тигрів або там сидять принцеси. «А що мені робити, якщо в обох кімнатах тигри?» – запитав полонений. – «Вважай, що не повезло!» – відповів король. – «А якщо там дві принцеси?» – поцікавився принц. – «Вважай, що повезло, – сказав король і додав: – Читай таблички на дверях. **На якійсь із них правда, а на іншій брехня**». На дверях кімнат було зроблено такі написи:

I. *У цій кімнаті принцеса, а в іншій – тигр.*	II. *В одній із цих кімнат принцеса; окрім того, в одній із цих кімнат сидить тигр.*

А які двері відчинили б ви, якби були на місці полоненого?

2. Другий день. Для наступного полоненого король запропонував такі написи на дверях кімнат.

I. *Хоча б в одній із цих кімнат знаходиться принцеса.*	II. *Тигр сидить в іншій кімнаті.*

При цьому король сповістив: **або обидва твердження правильні, або обидва – хибні**. Яку з кімнат обрати принцу?

10°. Чи можна вписати коло в чотирикутник, довжини послідовних сторін якого дорівнюють:
а) 7 см, 3 см, 5 см, 9 см;
б) 12 дм, 10 дм, 8 дм, 7 дм;
в) 3 м, 20 м, 5 м, 7 м?

11. Чи можна вписати коло в чотирикутник, довжини послідовних сторін якого відносяться як: а) 1 : 2 : 5 : 4; б) 2 : 7 : 5 : 1; в) 3 : 5 : 4 : 2; г) 12 : 4 : 3 : 2?

12*. Знайдіть площу описаного чотирикутника, якщо довжини його сторін дорівнюють 2 см, 1 см, 3 см і 4 см, а радіус вписаного кола – 1,3 см.

13*. Точка O – центр вписаного у чотирикутник $ABCD$ кола. Знайдіть площу цього чотирикутника, якщо: а) його периметр дорівнює 10 см, а радіус вписаного кола – 2 см; б) площі трикутників ABO і CDO дорівнюють 14 см^2 і 12 см^2.

14. Доведіть, що у вписаному чотирикутнику $ABCD$: а) $\angle ABD = \angle ACD$; б) $\angle CAD = \angle CBD$; в) $\angle BCA = \angle BDA$; г) $\angle BAC = \angle BDC$.

15*. Доведіть, що бісектриси кутів трапеції, перетинаючись, утворюють чотирикутник, навколо якого можна описати коло.

16*. Доведіть, що внутрішній кут A вписаного чотирикутника $ABCD$ дорівнює його зовнішньому куту при вершині C.

17.** У коло вписано чотирикутник $ABCD$. Бісектриси кутів A і C перетинають коло в точках E і P. Доведіть, що пряма EP проходить через центр кола.

18.** Доведіть, що у вписаному чотирикутнику бісектриса внутрішнього кута при певній вершині перетинає бісектрису зовнішнього кута при протилежній вершині у точці, яка лежить на колі, описаному навколо чотирикутника.

19.** Доведіть, що бісектриси зовнішніх кутів будь-якого опуклого чотирикутника обмежують чотирикутник, в який можна вписати коло.

20.** У коло вписано чотирикутник $ABCD$. Продовження сторін AB і CD перетинаються в точці M, а продовження сторін AD і BC – у точці P. Доведіть, що бісектриси кутів AMD та CPD взаємно перпендикулярні.

21.** Діагоналі AC і BH вписаного чотирикутника $ABCH$ взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці M. Доведіть, що:
а) пряма, проведена через точку M і середину сторони AH, перпендикулярна до сторони BC;
б) середини сторін AH і BC та основи перпендикулярів, проведених з точки M на ці сторони, лежать на одному колі.

22.** Діагоналі чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло з центром O, – взаємно перпендикулярні. Доведіть, що:
а) з відрізків AB, CD і діаметра кола можна побудувати прямокутний трикутник;
б) пряма, проведена з точки перетину діагоналей перпендикулярно до BC, ділить AD навпіл;
в) відстань від точки O до сторони AB дорівнює половині сторони CD.

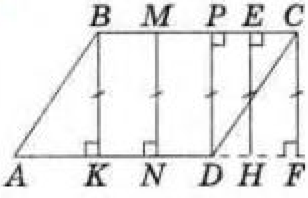
23.** Діагоналі чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло з центром O, взаємно перпендикулярні. Через точки A, B, C і D проведені дотичні до кола. Доведіть, що утворений ними чотирикутник є також вписаним.

Для допитливих

Доведіть, якщо для вписаного чотирикутника $ABCD$ виконується рівність $CD = AD + BC$, то точка перетину бісектрис кутів A і B лежить на стороні CD. (Порада. Відкладіть на стороні BC відрізок $DK = AD$.)

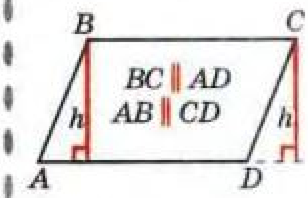
§ 12. Паралелограм

Нагадаємо: ***паралелограм – це чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.***



Мал. 2.49

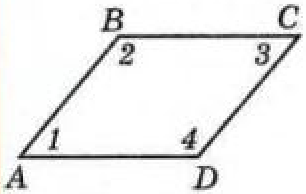
Висотою паралелограма називається перпендикуляр, проведений до сторони паралелограма (або її продовження) з точки, що належить протилежній його стороні. Довжина цього відрізка є відстанню між його паралельними сторонами. На малюнку 2.49 – це відрізки BK, MN, PD, EH і CF.



h – висота

ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛОГРАМА

1. Теорема. **У будь-якому паралелограмі протилежні кути рівні, а сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°.**



Мал. 2.50

Нехай маємо паралелограм $ABCD$ (мал. 2.50). Треба довести: $\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$; $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 1 = 180°$.

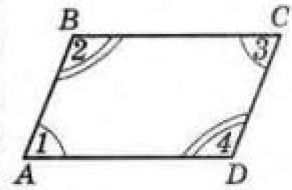
Доведення

1) $BC \parallel AD$, AB і CD – січні, тоді $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ і $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ (як внутрішні односторонні).

2) $AB \parallel CD$, AD і BC – січні, тоді $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ і $\angle 4 + \angle 1 = 180°$ (як внутрішні односторонні).

3) $\angle 1 + \angle 2 = 180° = \angle 2 + \angle 3$ і $\angle 2 + \angle 3 = 180° = \angle 3 + \angle 4$, тоді $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$. Щ. в. д.

ВЛАСТИВОСТІ:



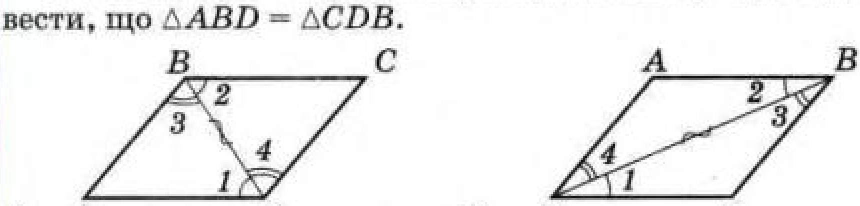
ABCD – паралелограм

⇓

$\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$;
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$;
$\angle 3 + \angle 4 = 180°$;
$\angle 1 + \angle 4 = 180°$;
$\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

2. Теорема. **Діагональ паралелограма ділить його на два рівні трикутники.**

Нехай $ABCD$ – паралелограм (мал. 2.51). Треба довести, що $\triangle ABD = \triangle CDB$.



Мал. 2.51

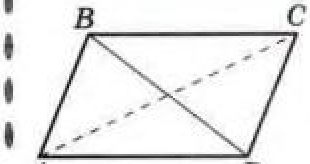
Доведення

1) $\angle 1 = \angle 2$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AD і BC та січній BD.

2) $\angle 3 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і DC та січній BD.

3) BD – спільна сторона трикутників ABD і CDB.

Тоді, за другою ознакою рівності трикутників, $\triangle ABD = \triangle CDB$. Щ. в. д.

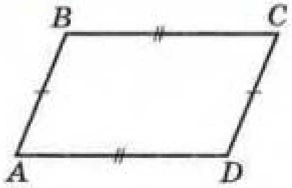


ABCD – паралелограм

⇓

$\triangle ABD = \triangle CDB$;
$\triangle ABC = \triangle CDA$.

ВЛАСТИВОСТІ:

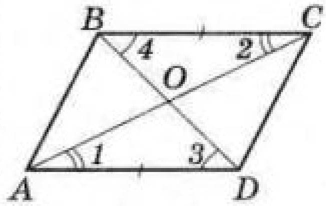


ABCD – паралелограм:

$AB = CD;\ AD = BC$

3. **Н** Наслідок. **Протилежні сторони паралелограма рівні.**

4. **Т** Теорема. **Діагоналі паралелограма діляться точкою їх перетину навпіл.**



Мал. 2.52

Нехай у паралелограмі $ABCD$ (мал. 2.52) діагоналі перетинаються в точці O. Треба довести, що $BO = OD$ і $AO = OC$.

Доведення

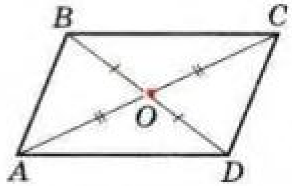
1) $\angle 1 = \angle 2$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AD і BC та січній AC.

2) $\angle 3 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AD та січній BD.

3) $AD = BC$ як протилежні сторони паралелограма.

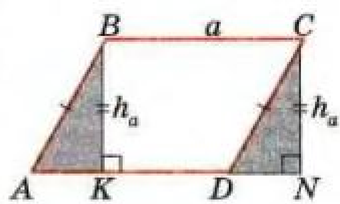
Тоді, за другою ознакою рівності трикутників, $\triangle AOD = \triangle COB$. У рівних трикутниках проти рівних кутів лежать рівні сторони.

Теорему доведено.



$AO = OC;\ BO = OD$

5. **Т** Теорема. **Площа паралелограма дорівнює $S = ah_a$, де a – довжина сторони паралелограма, h_a – довжина висоти, проведеної до цієї сторони.**



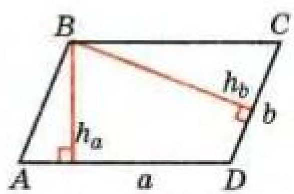
Мал. 2.53

Доведення

У паралелограмі $ABCD$ сторони AB і DC – рівні, BK і CN – рівні висоти (мал. 2.53). Тоді з рівності трикутників ABK і DCN маємо, що площа паралелограма $ABCD$ дорівнює площі прямокутника $KBCN$, тобто

$$S = BC \cdot BK = ah_a.$$

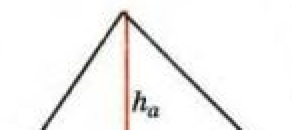
Теорему доведено.



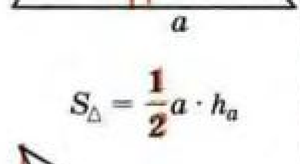
$S = ah_a = bh_b$

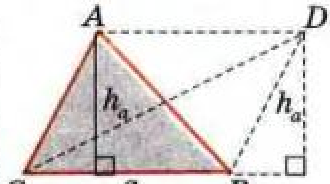
Н Наслідок. З цієї теореми і властивості 2 випливає уже відома вам формула для площі трикутника.

Площа трикутника дорівнює $S = \frac{1}{2}ah_a$, де a – довжина сторони трикутника, h_a – довжина висоти, проведеної до цієї сторони.



$S_\triangle = \frac{1}{2}a \cdot h_a$





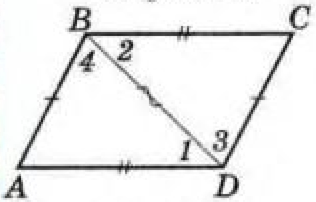
Мал. 2.54

Доведення

Добудуємо трикутник ABC до паралелограма $ACBD$ (мал. 2.54). Відомо, що діагональ паралелограма ділить його на два рівні трикутники. Тоді площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма $ACBD$, тобто $S = (a \cdot h_a) : 2$. Зауважимо, що у випадку, коли відповідна висота h_a міститься поза трикутником, доведення буде аналогічним (див. $\triangle CBD$ на мал. 2.54).

ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛОГРАМА

Теорема 1. Якщо протилежні сторони чотирикутника рівні, то такий чотирикутник є паралелограмом.



Мал. 2.55

Нехай у чотирикутнику $ABCD$ (мал. 2.55) $AB = CD$ і $AD = BC$. Треба довести, що $ABCD$ – паралелограм.

Доведення

1) $AB = CD$, $AD = BC$ за умовою; BD – спільна сторона трикутників ABD і DCB. Тоді, за третьою ознакою рівності трикутників, $\triangle ABD = \triangle DCB$ і $\angle 3 = \angle 4$ (як кути рівних трикутників, які лежать проти рівних сторін).

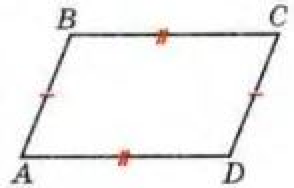
2) $\angle 3$ і $\angle 4$ – внутрішні різносторонні кути при перетині прямих AB і CD січною BD; $\angle 3 = \angle 4$. Тоді $AB \parallel CD$.

3) $\angle 1$ і $\angle 2$ – внутрішні різносторонні кути при перетині прямих BC і AD січною BD; $\angle 1 = \angle 2$. Тоді $BC \parallel AD$.

4) $BC \parallel AD$ і $AB \parallel CD$. Отже, чотирикутник $ABCD$ – паралелограм.

Теорему доведено.

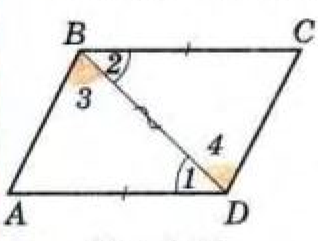
ОЗНАКИ:



$AB = CD$
$BC = AD$
$\Downarrow$
ABCD – паралелограм

Теорема 2. Якщо дві протилежні сторони чотирикутника рівні і паралельні, то такий чотирикутник є паралелограмом.

Нехай у чотирикутнику $ABCD$ (мал. 2.56) $BC = AD$ і $BC \parallel AD$. Треба довести, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 2.56

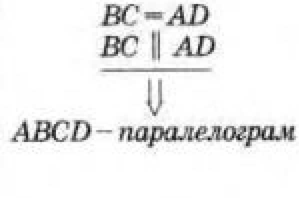
Доведення

1) $\angle 1 = \angle 2$ як внутрішні різносторонні кути при $BC \parallel AD$ і січній BD; $BC = AD$ за умовою. BD – спільна сторона трикутників ABD і CDB. Тоді, за першою ознакою рівності трикутників, $\triangle ABD = \triangle CDB$ і $\angle 3 = \angle 4$ (як кути рівних трикутників, що лежать проти рівних сторін).

2) $\angle 3$ і $\angle 4$ – внутрішні різносторонні при перетині прямих AB і CD січною BD; $\angle 3 = \angle 4$. Тоді $AB \parallel CD$.

3) $BC \parallel AD$ і $AB \parallel CD$, тоді чотирикутник $ABCD$ – паралелограм.

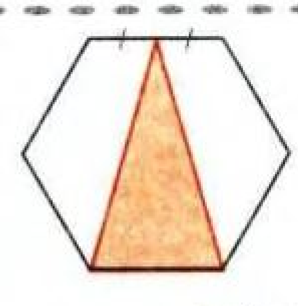
Теорему доведено.



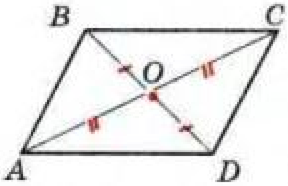
$BC = AD$
$BC \parallel AD$
$\Downarrow$
ABCD – паралелограм

Для допитливих

Кінці однієї зі сторін правильного шестикутника сполучили із серединою протилежної сторони (див. мал.). Яку частину площі даного шестикутника становить площа утвореного трикутника?

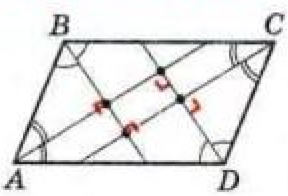


ОЗНАКА



$$\frac{\begin{matrix}AO = OC\\ BO = OD\end{matrix}}{}$$
$\Downarrow$

ABCD – паралелограм



ABCD – паралелограм

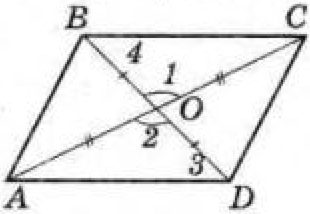
$\Downarrow$

$l_A \perp l_B;\ l_A \perp l_D;$
$l_B \perp l_C;\ l_C \perp l_D.$

Нагадаємо позначення:

≡ – «збігається» або «тотожна рівність».

Теорема 3. **Якщо діагоналі чотирикутника точкою їх перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник є паралелограмом.**



Мал. 2.57

Нехай у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD діляться точкою їх перетину O навпіл (мал. 2.57). Треба довести, що $ABCD$ – паралелограм.

Доведення

1) У трикутниках OBC і ODA: $OB = OD$, $AO = OC$ за умовою; $\angle 1 = \angle 2$ як вертикальні. Тоді, за першою ознакою рівності трикутників, $\triangle AOD = \triangle COB$ і $BC = AD$, $\angle 3 = \angle 4$.

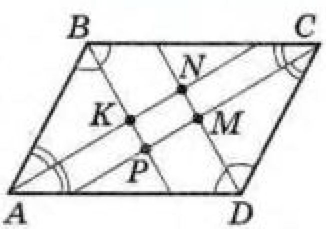
2) $\angle 3$ і $\angle 4$ – внутрішні різносторонні кути при перетині прямих BC і AD січною BD; $\angle 3 = \angle 4$. Тому $BC \parallel AD$.

3) У чотирикутнику $ABCD$: $BC = AD$ і $BC \parallel AD$. Тоді $ABCD$ – паралелограм за доведеною вище ознакою.

Теорему доведено.

Опорна задача

Бісектриси кутів паралелограма обмежують прямокутник.



Дано: *$ABCD$ – паралелограм,*
$AK \equiv l_A$; $BP \equiv l_B$; $CM \equiv l_C$; $DN \equiv l_D$.
Довести: *$KNMP$ – прямокутник.*

1) $ABCD$ – паралелограм $\rightarrow \angle A + \angle B = 180^\circ$.

2) $AK \equiv l_A \rightarrow \angle BAK = \angle A : 2$; $BP \equiv l_B \rightarrow \angle ABK = \angle B : 2$.

3) У $\triangle ABK$: $\angle AKB = 180^\circ - (\angle A : 2 + \angle B : 2) = 180^\circ - (\angle A + \angle B) : 2 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

4) $\angle PKN = \angle AKB$ як вертикальні, тоді $\angle PKN = 90^\circ$.

5) Аналогічно: $\angle KNM = \angle NMP = \angle MPK = 90^\circ$. Щ. в. д.

Чи можуть точки K, N, M, Pсуміститися?

Для допитливих

1. Зазвичай кози з'їдають усе, до чого можуть дотягнутися. Якщо прив'язати козу на мотузку довжиною 10 м, то вона з'їсть усю траву в колі з радіусом 10 м. А якщо прив'язати козу інакше, наприклад натягнути дріт між двома кілочками, за нього зачепити мотузку так, щоб вона мала змогу ковзати вздовж дроту, а другий кінець цієї мотузки закріпити на ошийник кози? Яку саме форму в цьому випадку буде мати ділянка лугу, на якій коза виїсть траву? (Вважаємо, що коза вміє плигати через дріт.)

2. Спробуйте «обмежити» козу паралелограмом. (Іншими словами, за допомогою кілочків і мотузки прив'яжіть козу так, щоб вона мала змогу їсти траву тільки всередині заданого вами паралелограма.)

3. «Обмежте» її трикутником.

4. Як «обмежити» козу півколом, прив'язавши до її ошийника не більш як дві мотузки?

§ 13. Про деякі властивості площ трикутника і паралелограма та опорні факти, що з них випливають

У цьому параграфі розглянемо кілька опорних задач, пов'язаних з поняттям площі, які часто використовують при розв'язуванні геометричних задач.

Нагадаємо, що дві фігури називаються *рівновеликими*, якщо площі цих фігур рівні.

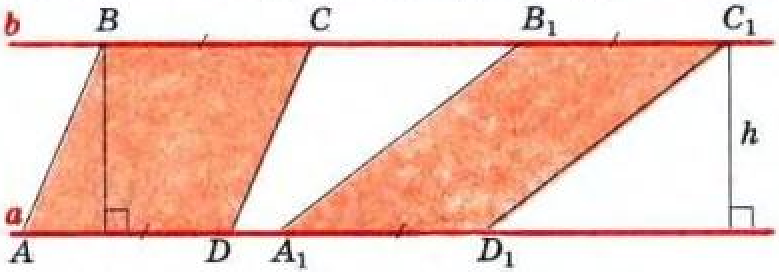
$a \parallel b$, $AB \parallel CD$, $AK \parallel DM$

$\Downarrow$

$S_{ABCD} = S_{AKMD}$

Опорна задача 1

Паралелограми, які мають дві рівні сторони, що належать спільним паралельним прямим, рівновеликі.



Дано: $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ – *паралелограми*;
$(AD) \equiv (A_1D_1)$; $(BC) \equiv (B_1C_1)$;
$|AD| = |A_1D_1|$.

Довести: $S_{ABCD} = S_{A_1B_1C_1D_1}$.

Позначимо: $(AD) \equiv (A_1D_1) \triangleq a$, $(BC) \equiv (B_1C_1) \triangleq b$.

Довжини сторін AD та A_1D_1 заданих паралелограмів однакові, а висоти, проведені до цих сторін, є відстанню між паралельними прямими a і b. Тоді:

$$S_{ABCD} = |AD| \cdot d\,(a; b) = |A_1D_1| \cdot d\,(a; b) = S_{A_1B_1C_1D_1}.$$

Щ. в. д.

Нагадаємо позначення:

$\equiv$ – «збігається» або «тотожна рівність»;

$|AD|$ – довжина відрізка AD;

(AD) – пряма AD;

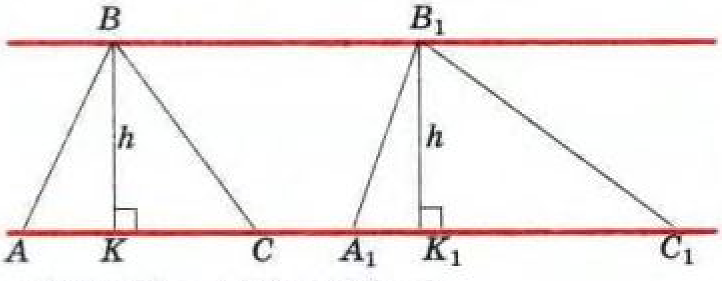
$d\,(a;\, b)$ – відстань між прямими a і b;

$d\,(B;\, AC)$ – відстань від точки B до прямої AC;

$\triangleq$ – «позначили як».

Опорна задача 2

Площі трикутників, які мають рівні висоти, відносяться як довжини їхніх сторін, до яких ці висоти проведено.

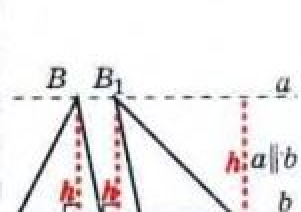


Дано: $d\,(B; AC) = d\,(B_1; A_1C_1) = h$.

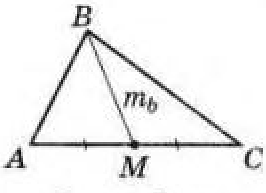
Довести: $S : S_1 = AC : A_1C_1$.

$S = \dfrac{1}{2}\,h \cdot AC$, $S_1 = \dfrac{1}{2}\,h \cdot A_1C_1$, тоді $S : S_1 = AC : A_1C_1$.

Щ. в. д.

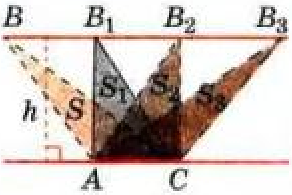


$S : S_1 = a : a_1$



$S_{ABM} = S_{MBC}$

Зауваження. З останньої опорної задачі випливає:
- *медіана поділяє трикутник на два рівновеликі трикутники;*
- *якщо трикутники мають спільні (або рівні) основи, а їхні вершини лежать на паралельній цій основі прямій, то вони мають рівні площі, тобто є рівновеликими.*



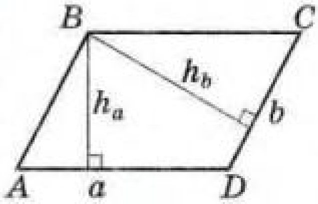
$AC \parallel BB_3$

$\Downarrow$

$S = S_1 = S_2 = S_3$

Опорна задача 3

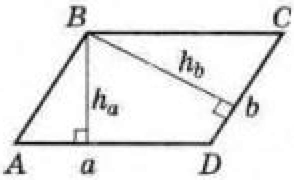
Висоти паралелограма обернено пропорційні довжинам сторін, до яких їх проведено.



Дано: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $h_a \perp a$, $h_b \perp b$.

Довести: $h_b : h_a = a : b$.

$ABCD$ – паралелограм. Його площа $S = ah_a = bh_b$, звідси маємо шукане твердження.



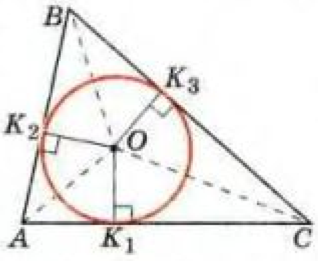
ABCD – паралелограм

$\Downarrow$

$h_b : h_b = a : b$

Опорна задача 4

Для довільного трикутника, площа якого S, зі сторонами a, b, c, півпериметром p і радіусом вписаного кола r, виконуються співвідношення:



$$S = pr;\ \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Дано: K_1, K_2, K_3 – *точки дотику.*

Довести: $S = pr;\ \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}.$

---

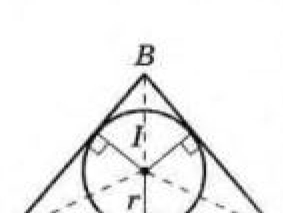
1) $S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}$;

2) K_1, K_2, K_3 – точки дотику, тоді $OK_1 \perp AC$, $OK_2 \perp AB$, $OK_3 \perp BC$ і $OK_1 = OK_2 = OK_3 = r$;

3) $S = \dfrac{1}{2}ar + \dfrac{1}{2}br + \dfrac{1}{2}cr = \dfrac{1}{2}r(a+b+c) = pr$;

4) $\dfrac{1}{r} = \dfrac{a}{2S} + \dfrac{b}{2S} + \dfrac{c}{2S}$. Враховуючи, що $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$, маємо: $\dfrac{1}{r} = \dfrac{a}{ah_a} + \dfrac{b}{bh_b} + \dfrac{c}{ch_c} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

Щ. в. д.



$S_{ABC} = r \cdot p$

$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$

Для допитливих

1. У трикутник вписано півколо з радіусом R, яке дотикається до двох сторін трикутника, довжини яких дорівнюють a і b, а центр міститься на третій стороні. Знайдіть площу цього трикутника.

2. Точка M лежить усередині рівностороннього трикутника. Доведіть, що сума відстаней від M до сторін трикутника не залежить від положення цієї точки.

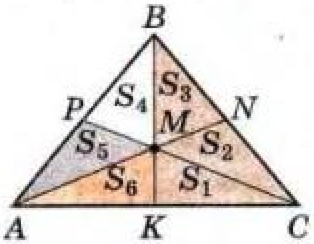
3. Усередині рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) міститься точка M. Доведіть, що площі трикутників ABM і CBM рівні тоді і тільки тоді, коли точка M лежить на медіані BK цього трикутника.

4. Розв'яжіть попередню задачу для довільного трикутника.

Опорна задача 5

Площа трикутника дорівнює S. Знайдіть площі трикутників, на які поділяють даний трикутник його медіани.

> *Нагадаємо позначення:*
> $\equiv$ – «збігається» або «тотожна рівність».



Дано: $S_{ABC} = S$, $AN \equiv m_a$, $BK \equiv m_b$, $CP \equiv m_c$.

Знайти: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6.

1) <u>У $\triangle ABC$</u> $BK \equiv m_b \to S_{KBC} = S_{KBA} = \frac{1}{2}S$;

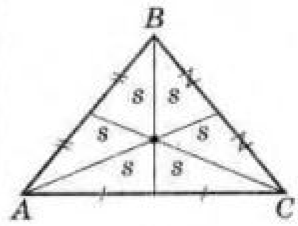
2) M – центроїд $\to BM : MK = 2 : 1$;

3) <u>у $\triangle AMB$ і $\triangle AMK$</u> $BM : MK = 2 : 1$; висота, проведена до цих сторін, спільна. Тоді $S_{AMB} = 2S_6$; $S_6 = \frac{1}{2}S : 3$;

4) <u>у $\triangle ABM$ PM</u> – медіана $\to S_{AMP} = S_{BMP}$ і $S_5 = S_4 = 2S_6 : 2 = S_6 = \frac{1}{6}S$.

Аналогічно: $S_3 = S_2 = S_1 = \frac{1}{6}S$.

Відповідь: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \frac{1}{6}S$.



$s = \frac{1}{6}S$

Зауваження. Використаний нами *«метод площ»* застосовувався стародавніми математиками. Зокрема, італійський вчений Джовані Чева (1648–1734) довів за допомогою цього методу дуже корисну теорему, відому сьогодні як *теорема Чеви*. З доведенням цієї теореми і наслідками з неї ви маєте змогу ознайомитися у додатку 4.

Практична робота 14

1. Проведіть дві прямі m і n, що перетинаються.
2. Через точку, що не належить жодній із цих прямих, проведіть дві прямі, паралельні до прямих m і n. Яка фігура утворилася?
3. Виміряйте кути утвореного чотирикутника. Порівняйте градусні міри протилежних кутів. Обчисліть суми градусних мір кутів, прилеглих до однієї сторони. Зробіть висновки.
4. В утвореному чотирикутнику проведіть діагоналі. Виміряйте довжини частин діагоналей, на які вони діляться точкою перетину.
5. Проведіть дві прямі, що перетинаються у точці O. На кожній із прямих від точки O відкладіть по два рівні відрізки $OA = OC$ і $OB = OD$ відповідно.
6. Сполучіть точки A, B, C і D відрізками так, щоб утворився чотирикутник.
7. Виміряйте сторони і кути цього чотирикутника. Зробіть висновок.

Практична робота 15

1. Побудуйте довільний трикутник ABC. У трикутнику ABC на стороні BC позначте точку G. Через цю точку паралельно двом сторонам трикутника проведіть прямі, що перетинають AB і AC у точках F і D відповідно. Визначте вид чотирикутника $AFGD$.
2. Побудуйте довільний рівнобедрений трикутник KLM. Через вершини K і L при основі цього трикутника проведіть прямі, паралельні протилежним сторонам. Точку їхнього перетину позначте літерою D. Якою фігурою є чотирикутник $KMLD$?

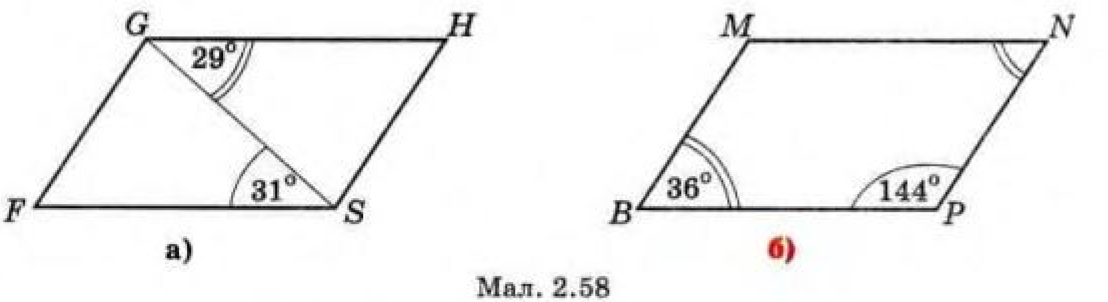
3. Побудуйте довільний прямокутний трикутник ABC. Через вершини A і B гострих кутів цього трикутника проведіть прямі, паралельні катетам. Точку їх перетину позначте літерою D. Якою фігурою є чотирикутник $ACBD$, якщо: **а)** катети AC і BC рівні; **б)** катети AC і BC не рівні?
4. Побудуйте довільний трикутник FGH. У цьому трикутнику сторони FG і GH продовжіть за точку G. На продовженні сторони FG відкладіть відрізок GB, що дорівнює FG, а на продовженні сторони GH – відрізок GD, що дорівнює GH. Якого виду чотирикутник $DBHF$?

Практична робота 16

1. Накресліть довільний трикутник ABC. Через точку C за допомогою циркуля і лінійки проведіть пряму $n \parallel AB$.
2. Позначте на прямій n кілька точок C_1, C_2 ... і сполучіть їх із точками A і B.
3. З точок C, C_1, C_2... опустіть перпендикуляри CH, C_1H_1, C_2H_2... на пряму AB.
4. Виміряйте довжини відрізків AB і C_1H_1, C_2H_2... Обчисліть площі трикутників ABC, ABC_1, ABC_2 ... Зробіть висновок.
5. Проведіть дві паралельні прямі $n \parallel m$. Побудуйте кілька паралелограмів зі спільною стороною на прямій n і протилежними сторонами на прямій m. Обчисліть площі цих паралелограмів. Зробіть висновок.

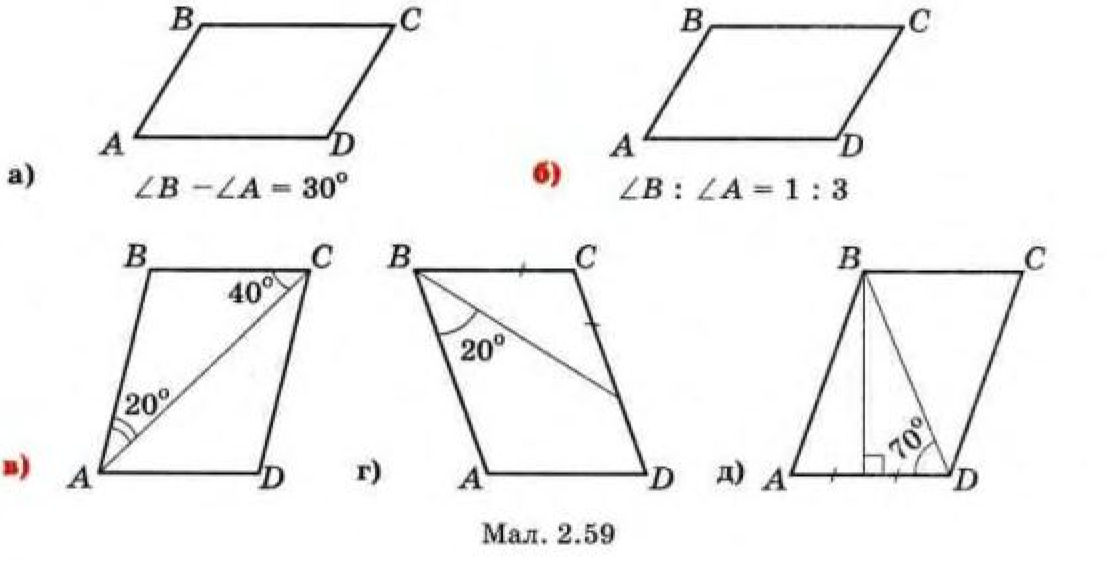
Завдання 12

1°. Чи є чотирикутники на малюнку 2.58 паралелограмами?



Мал. 2.58

2°. Знайдіть кути паралелограма $ABCD$ (мал. 2.59).



Мал. 2.59

3°. Знайдіть кути паралелограма $KLMN$, якщо: а) $\angle K = 84°$; б) $\angle K - \angle L = 55°$; в) $\angle K + \angle M = 142°$; г) $\angle K = 2\angle L$.

4. Знайдіть кути паралелограма, якщо: а) один із його кутів утричі менший за другий; б) сума двох кутів дорівнює $130°$; в) один із кутів на $40°$ менший за другий; г) градусні міри двох його кутів відносяться як $2 : 3$; д) один із його кутів становить 20 % від другого.

5. Чи може паралелограм: а) мати всі кути гострі; б) мати лише один кут гострий; в) мати три рівні кути?

6. Доведіть, що коли навколо паралелограма можна описати коло, то цей паралелограм – прямокутник.

7*. Знайдіть кути паралелограма, якщо більша діагональ утворює зі сторонами кути: а) втричі менші за тупий кут; б) $16°$ і $37°$; в) α і β.

8*. На малюнку 2.60 зображені паралелограми. Знайдіть кут x.

Мал. 2.60

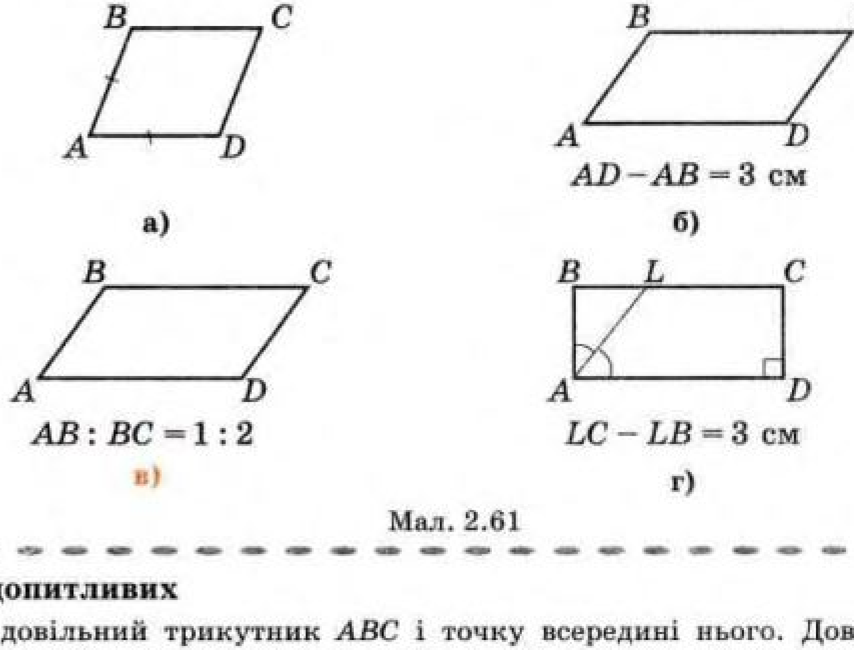
9*. Знайдіть кути паралелограма, якщо: а) бісектриса його кута перетинає протилежну сторону під кутом $50°$; б) бісектриса кута паралелограма перетинає протилежну сторону під кутом, який дорівнює одному з кутів паралелограма.

10*. Знайдіть кути паралелограма, якщо: а) кут між двома висотами паралелограма, проведеними з однієї вершини, дорівнює $50°$; б) висота, проведена з однієї вершини, утворює з прилеглою стороною кут $50°$.

11. Чи може паралелограм мати тільки три рівні сторони?

12. Сторони паралелограма дорівнюють 3 см і 5 см. Чи може його більша діагональ дорівнювати 10 см?

13. За малюнком 2.61 знайдіть сторони паралелограма $ABCD$, якщо його периметр дорівнює 24 см.



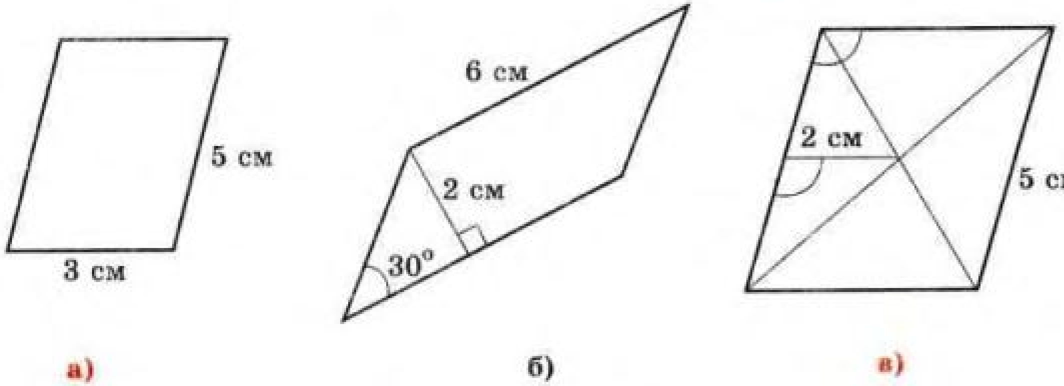
Мал. 2.61

Для допитливих

Дано довільний трикутник ABC і точку всередині нього. Доведіть, що $(d_a : h_a) + (d_b : h_b) + (d_c : h_c) = 1$, де d_a, d_b і d_c – відстані від заданої точки до сторін a, b і c трикутника ABC відповідно, а h_a, h_b і h_c – його висоти.

14. Периметр паралелограма дорівнює 48 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо: **а)** довжини сторін відносяться як 5 : 7; **б)** різниця довжин двох сторін дорівнює 7 см; **в)** одна із сторін удвічі більша за другу.

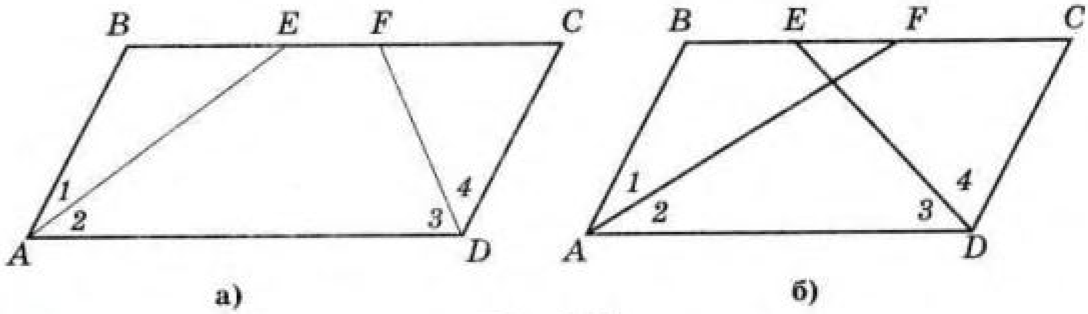
15. Знайдіть периметри паралелограмів (мал. 2.62).



Мал. 2.62

16*. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см. З довільної точки основи трикутника провели прямі паралельно його бічним сторонам. Знайдіть периметр утвореного паралелограма.

17. У паралелограмі $ABCD$: $AD = 12$ см; $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$. Знайдіть EF, якщо: **а)** $AB = 3{,}5$ см (мал. 2.63-а); **б)** $AB = 8$ см (мал. 2.63-б).



Мал. 2.63

18*. Знайдіть периметр паралелограма, якщо бісектриса одного з його кутів ділить сторону паралелограма на відрізки завдовжки 4 см і 6 см. Розгляньте два випадки.

19°. Сторона паралелограма – a, висота, проведена до цієї сторони, – h, площа паралелограма – S. Знайдіть: **а)** S, якщо $a = 12$ см, $h = 8$ см, **б)** a, якщо $S = 34$ см^2, $h = 8{,}5$ см; **в)** a, якщо $S = 162$ см^2, $h = 0{,}3$ м.

20°. Діагональ паралелограма дорівнює 11 см і перпендикулярна до сторони паралелограма, яка дорівнює 12 см. Обчисліть площу паралелограма.

21. Дві сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 10 см, а його гострий кут дорівнює 30°. Знайдіть площу паралелограма.

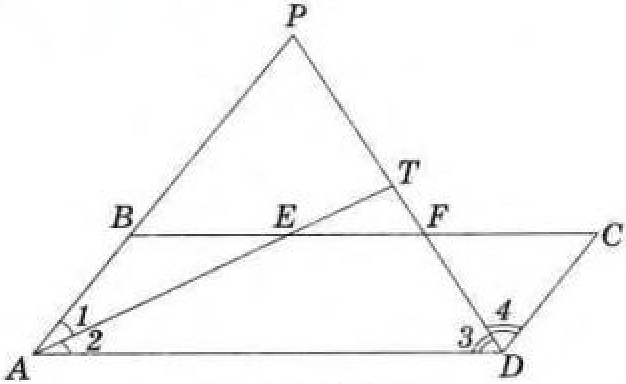
22. Гострий кут паралелограма дорівнює 30°, а висоти, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 4 см і 6 см. Обчисліть площу паралелограма.

23. Площа паралелограма дорівнює 72 см^2, а його висоти – 6 см і 8 см. Знайдіть периметр паралелограма.

24*. Периметр паралелограма дорівнює 48 см, його площа – 56 см^2, а одна висота дорівнює 4 см. Знайдіть сторони паралелограма і другу висоту.

25*. Периметр паралелограма дорівнює 48 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його висоти відносяться як 5 : 7.

26.** У паралелограмі $ABCD$ сторони AB і AD дорівнюють 3,5 см і 12 см відповідно; AE і DF – бісектриси; P – точка перетину прямих AB і DF; T – точка перетину прямих DF і AE (мал. 2.64). Довжина відрізка DP дорівнює 10 см. Знайдіть: **а)** довжину відрізка PT; **б)** периметр трикутника ADP; **в)** довжину відрізка EF.



Мал. 2.64

27.** Сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 10 см. Знайдіть: **а)** відрізки, на які бісектриса кута паралелограма ділить більшу сторону; **б)** відрізок між точками перетину бісектрис кутів, прилеглих до більшої сторони, з протилежною стороною; **в)** відрізок між точками перетину бісектрис, прилеглих до меншої сторони, і прямої, що містить протилежну меншу сторону.

28*. Доведіть, що бісектриси двох протилежних кутів паралелограма паралельні або лежать на одній прямій.

29*. Доведіть, що бісектриси двох кутів, прилеглих до однієї сторони паралелограма, взаємно перпендикулярні.

30.** Доведіть, що бісектриси внутрішніх кутів паралелограма при перетині утворюють прямокутник, діагоналі якого паралельні сторонам паралелограма і дорівнюють різниці двох нерівних сторін.

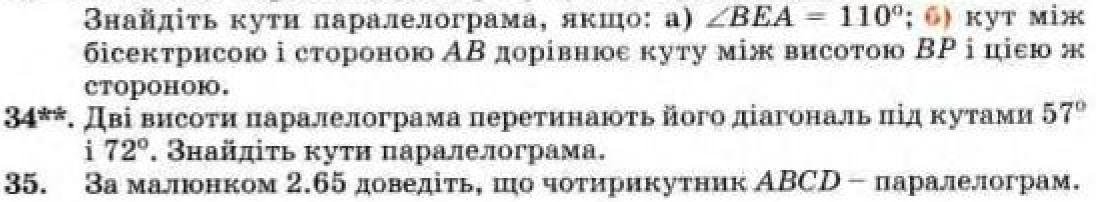
31.** Доведіть, що бісектриси зовнішніх кутів паралелограма при перетині утворюють прямокутник. Що можна сказати про діагоналі цього прямокутника?

32.** Бісектриси кутів B і C паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці E. Кут між бісектрисою EC і діагоналлю BD дорівнює 80°, а кут BDC дорівнює 60°. Знайдіть кути паралелограма.

33.** Висота BP перетинає бісектрису кута A паралелограма $ABCD$ в точці E. Знайдіть кути паралелограма, якщо: **а)** $\angle BEA = 110^\circ$; **б)** кут між бісектрисою і стороною AB дорівнює куту між висотою BP і цією ж стороною.

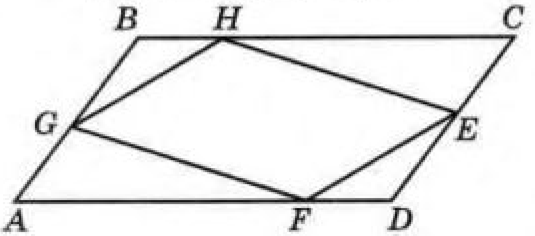
34.** Дві висоти паралелограма перетинають його діагональ під кутами 57° і 72°. Знайдіть кути паралелограма.

35. За малюнком 2.65 доведіть, що чотирикутник $ABCD$ – паралелограм.

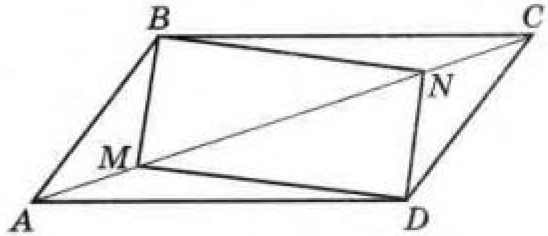


Мал. 2.65

36. $ABCD$ – паралелограм; $BH = DF$; $CE = AG$ (мал. 2.66). Доведіть, що $EFGH$ – паралелограм.



Мал. 2.66



Мал. 2.67

37*. На сторонах AB, BC, CD і DA паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки K, P, M і E так, що: а) $AK = BP = CM = DE$; б) $AK = AE = CP = CM$. Доведіть, що чотирикутник $KPME$ – паралелограм.

38*. Чотирикутник $ABCD$ – паралелограм. Доведіть, що $MBND$ – паралелограм, якщо: а) $AM = CN$; б) $AN = CM$ (мал. 2.67).

39**. На продовженнях сторін AB, BC, CD і DA паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки K, P, M і E так, що: а) $AK = BP = CM = DE$; б) $AK = AE = CP = CM$. Доведіть, що чотирикутник $KPME$ – паралелограм.

40*. На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначили точки K і M так, що $\angle AKB = \angle CMD$. Доведіть, що $KBMD$ – паралелограм.

41*. У кожному з двох концентричних кіл проведені діаметри AC і BD відповідно. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ – паралелограм.

42*. Через точку перетину діагоналей паралелограма провели пряму. Доведіть, що її відрізок, який міститься між сторонами паралелограма, ділиться цією точкою навпіл.

43*. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки всередині паралелограма до сторін є величиною сталою.

44**. Як побудувати точку перетину діагоналей паралелограма, якщо його вершини недоступні?

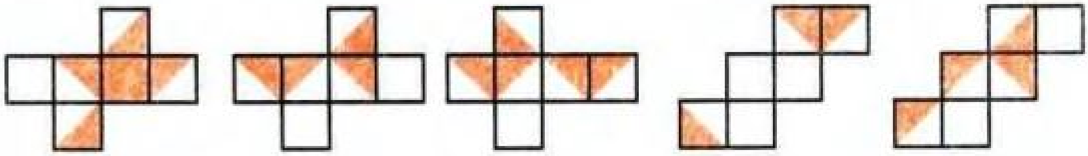
45*. Побудуйте паралелограм за: а) двома суміжними сторонами і кутом між ними; б) двома діагоналями і кутом між ними; в) двома нерівними сторонами і діагоналлю.

46**. Побудуйте паралелограм за: а) висотою і сторонами; б) висотою і діагоналями; в) кутом, висотою і периметром; г) кутом, висотою та різницею двох сторін; д) кутом, протилежною йому діагоналлю та висотою.

Для допитливих

1. Кожну грань кубика поділили на чотири квадрати і кожний квадрат розфарбували в один із трьох кольорів: синій, жовтий або червоний так, що квадрати, які мають спільну сторону, розфарбовані у різні кольори. Скільки при цьому утворилося синіх, жовтих і червоних квадратів?

2. З яких із наведених двоколірних розгорток можна утворити куб, у якого кожне ребро оточене одноколірною областю?

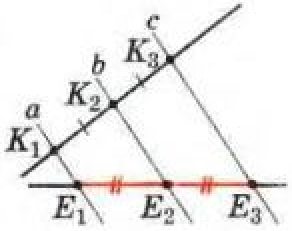


а) б) в) г) д)

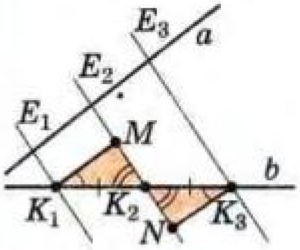
§ 14. Теорема Фалеса. Середня лінія трикутника

Теорема Фалеса. **Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні два рівні відрізки, то вони відтинають два рівні між собою відрізки і на іншій стороні кута.**

Теорема Фалеса



$a \parallel b \parallel c$
$K_1K_2 = K_2K_3$
$\Downarrow$
$E_1E_2 = E_2E_3$



Мал. 2.68

Нехай паралельні прямі перетинають сторони кута в точках K_1, K_2, K_3 і E_1, E_2, E_3 відповідно (мал. 2.68) і $K_1K_2 = K_2K_3$. Треба довести, що $E_1E_2 = E_2E_3$.

Доведення

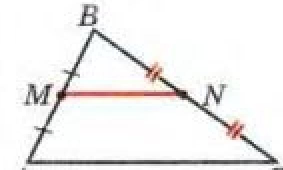
1) Проведемо допоміжні відрізки K_1M і K_3N, паралельні a. Тоді чотирикутники $K_1E_1E_2M$ і $NE_2E_3K_3$ – паралелограми.

2) $K_1M \parallel a$ і $K_3N \parallel a$, тоді $K_1M \parallel K_3N$.

3) $K_1K_2 = K_2K_3$, $\angle MK_1K_2 = \angle NK_3K_2$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих), $\angle MK_2K_1 = \angle NK_2K_3$ (як вертикальні кути). Тоді $\triangle MK_2K_1 = \triangle NK_2K_3$ (за другою ознакою рівності трикутників) і $K_1M = NK_3$.

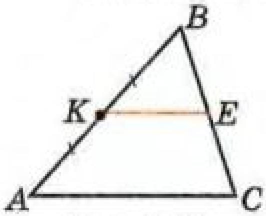
4) $K_1E_1E_2M$ і $NE_2E_3K_3$ – паралелограми, $K_1M = NK_3$, тоді $E_1E_2 = K_1M = NK_3 = E_2E_3$.

Теорему доведено.



$MN \parallel AC$
$AM = MB$
$\Downarrow$
$BN = NC$

Наслідок 1. **Пряма, проведена через середину однієї зі сторін трикутника паралельно його другій стороні, поділяє третю сторону цього трикутника навпіл.**



Мал. 2.69

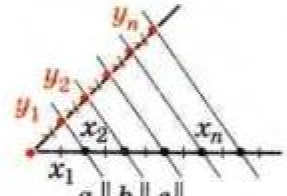
Нехай у трикутнику ABC $AK = KB$ і $KE \parallel AC$ (мал. 2.69).

Маємо: на стороні AB кута ABC відклали $AK = KB$ і провели $KE \parallel AC$. Тоді, за теоремою Фалеса, $BE = EC$.

Твердження доведено.

Для допитливих

Давньогрецький учений **Фалес** (VI ст. до н. е.) був перший із «семи наймудріших», які за суттю були не тільки вченими, а ще й державними діячами, законодавцями і моралістами. Їм приписують різні вислови, подібні до славнозвісного «пізнай самого себе». Фалес Мілетський вважається творцем ідеї математичного доведення. Про це розповідають математики, які жили пізніше від Фалеса на 300 і більше років. Через них ми знайомимося з відомостями про Фалеса і його математичними та іншими досягненнями. Геродот розповідав, що Фалес провіщав сонячне затемнення (585 р. до н. е.). Памфіла, письменниця епохи Нерона (римського імператора I ст.), за словами Діогена, говорила, що Фалес першим описав коло навколо прямокутного трикутника і що на честь цього відкриття він приніс у жертву бика.

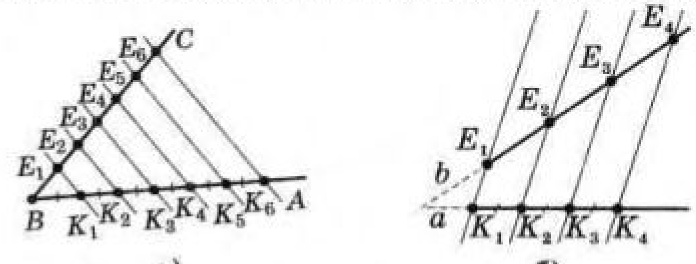


$a \parallel b \parallel c \parallel$

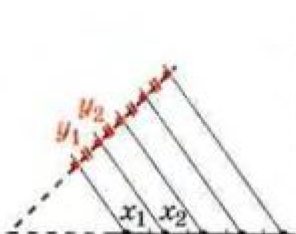
$$\frac{x_1 = x_2 = \ldots = x_n}{\Downarrow}$$
$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n$$

Наслідок 2. Якщо на одній стороні кута відкласти рівні між собою відрізки і через їхні кінці провести паралельні прямі, то вони відтинають на другій стороні кута рівні між собою відрізки.

Наприклад, якщо на одній стороні кута позначити точки K_1, K_2, ... так, щоб утворилися рівні відрізки (мал. 2.70), і через ці точки провести паралельні прямі, то на іншій стороні кута отримаємо точки E_1, E_2, ..., які також будуть кінцями рівних між собою відрізків. Зауважимо, що (за теоремою) рівні відрізки не обов'язково відкладати від вершини кута (мал. 2.70-а, б).



Мал. 2.70



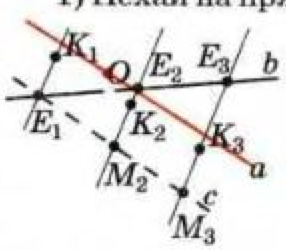
$a \parallel b \parallel c \parallel$

$$\frac{x_1 = x_2 = \ldots}{\Downarrow}$$
$$y_1 = y_2 = \ldots$$

Наслідок 3. Якщо рівні відрізки відкладаються на прямій, що перетинає іншу пряму, і точка перетину належить одному з цих відрізків, то паралельні прямі, проведені через кінці даних відрізків, відтинатимуть на другій прямій рівні між собою відрізки.

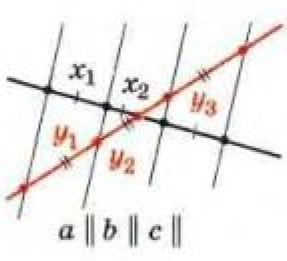
Маємо прямі a і b, які перетинаються в точці O.

1) Нехай на прямій a маємо тільки два відрізки $K_1K_2 = K_2K_3$, точка O лежить на відрізку K_1K_2 (мал. 2.71). Через точки K_1, K_2 і K_3 проведемо паралельні прямі, які перетинають пряму b в точках E_1, E_2 і E_3 відповідно. Доведемо, що $E_1E_2 = E_2E_3$.



Мал. 2.71

Через точку E_1 проведемо допоміжну пряму $c \parallel a$. В утворених паралелограмах $E_1K_1K_2M_2$ і $M_2K_2K_3M_3$ протилежні сторони рівні. Тоді на стороні E_1M_3 кута $E_3E_1M_3$ маємо $E_1M_2 = M_2M_3$ і за теоремою Фалеса виконується рівність $E_1E_2 = E_2E_3$.



$a \parallel b \parallel c \parallel$

$$\frac{x_1 = x_2 = \ldots}{\Downarrow}$$
$$y_1 = y_2 = \ldots$$

2) Якщо тепер на стороні OK_3 кута E_3OK_3 відкласти рівні K_2K_3 відрізки $K_3K_4 = K_4K_5 = \ldots$ і провести паралельно K_3E_3 прямі $K_4E_4 \parallel K_5E_5 \parallel \ldots$, то на прямій b отримаємо рівні відрізки $E_1E_2 = E_2E_3 = E_3E_4 = E_4E_5 = \ldots$

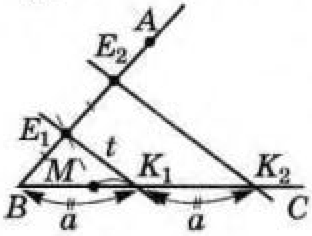
Твердження доведено.

Для допитливих

Розгляньте випадок, коли рівні відрізки відкладають на одній з двох паралельних прямих і через їхні кінці проводять паралельні прямі. Чи можна тепер теорему Фалеса сформулювати так: якщо дві прямі перетнуто паралельними прямими, то на заданих прямих відтинаються пропорційні відрізки?

Т Теорема (обернена до теореми Фалеса). **Якщо прямі відтинають на одній стороні кута рівні між собою відрізки і на другій стороні кута рівні між собою відрізки, то такі прямі паралельні.**

Обернена теорема до теореми Фалеса



Мал. 2.72

На сторонах BA і BC кута ABC відклали відрізки: $BE_1 = E_1E_2$ і $BK_1 = K_1K_2$. Треба довести, що $E_1K_1 \parallel E_2K_2$.

Доведення

Доведемо твердження теореми від супротивного. Нехай $BE_1 = E_1E_2$ і $BK_1 = K_1K_2$ (мал. 2.72), а $E_1K_1 \nparallel E_2K_2$.

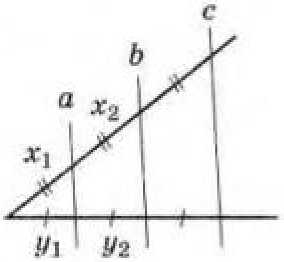
Проведемо через точку E_1 пряму, паралельну E_2K_2, яка перетинає сторону кута BC у точці M.

1) Нехай $BM < BK_1$. Позначимо різницю довжин цих відрізків через t, а довжину відрізків BK_1 і K_1K_2 – через a. За теоремою Фалеса $BM = MK_2$, тобто $a - t = a + t$, чого бути не може.

2) Нехай $BM > BK_1$. Аналогічно попередньому випадку прийдемо до протиріччя.

Наше припущення неправильне, і $E_1K_1 \parallel E_2K_2$.

Теорему доведено.



$\Uparrow$

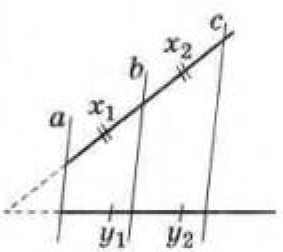
$x_1 = x_2 = \ldots$

$y_1 = y_2 = \ldots$

$\Downarrow$

$a \parallel b \parallel \ldots$

$\Downarrow$

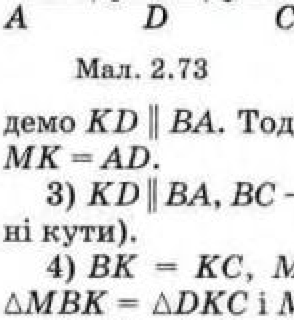


СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА

Середньою лінією трикутника називається відрізок, який сполучає середини двох сторін цього трикутника.

Доведемо такі *властивості* середньої лінії трикутника.

Т Теорема. **Середня лінія трикутника паралельна стороні трикутника, яку вона не перетинає, і дорівнює половині цієї сторони.**



Мал. 2.73

Нехай MK – середня лінія трикутника ABC (мал. 2.73). Треба довести, що $MK \parallel AC$ і $MK = \frac{1}{2}AC$.

Доведення

1) На сторонах кута ABC маємо відрізки $BM = MA$ і $BK = KC$. Тоді, за оберненою теоремою до теореми Фалеса, маємо, що $MK \parallel AC$.

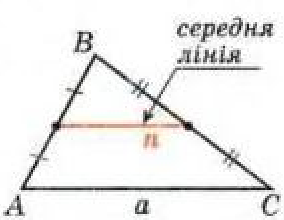
2) $MK \parallel AC$ за доведеним. Проведемо $KD \parallel BA$. Тоді $AMKD$ – паралелограм і $AM = DK$, $MK = AD$.

3) $KD \parallel BA$, BC – січна. Тоді $\angle B = \angle DKC$ (як відповідні кути).

4) $BK = KC$, $MB = AM = DK$, $\angle B = \angle DKC$. Тоді $\triangle MBK = \triangle DKC$ і $MK = DC$.

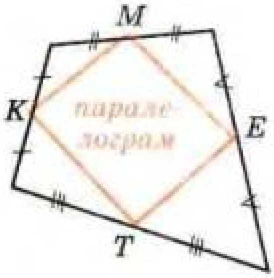
5) $AD = MK = DC$. Тоді $MK = \frac{1}{2}AC$.

Теорему доведено.



$n \parallel a$

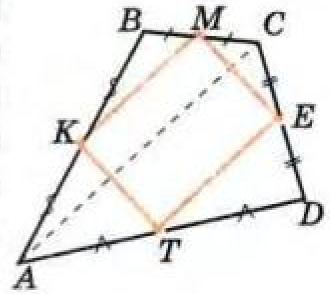
$n = \frac{1}{2}a$



KMET – паралелограм Варіньйона

Опорна задача 1

Доведіть, що середини сторін довільного чотирикутника є вершинами паралелограма.



Дано: $AK = KB$; $BM = MC$; $CE = ED$; $DT = TA$.

Довести: *KMET – паралелограм.*

Доведення

Проведемо діагональ AC.

1) KM – середня лінія в $\triangle ABC \to KM = \frac{1}{2}AC$, $KM \parallel AC$.

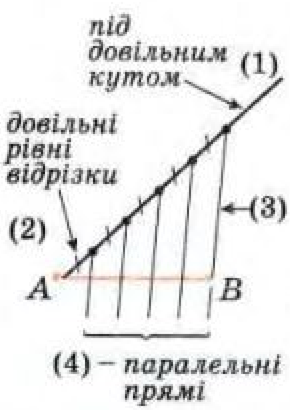
2) TE – середня лінія в $\triangle ADC \to TE = \frac{1}{2}AC$, $TE \parallel AC$.

3) $KM \parallel AC$, $TE \parallel AC \to KM \parallel TE$.

4) $KM = \frac{1}{2}AC = TE$, $KM \parallel TE \to KMET$ – паралелограм.

Щ. в. д.

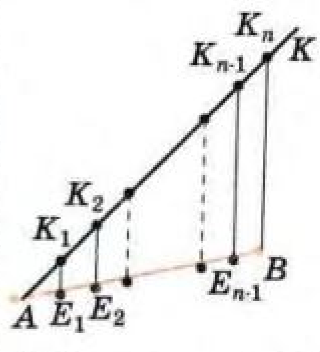
Зауваження. Такий паралелограм називають *паралелограмом Варіньйона*.



> *Нагадаємо позначення:*
>
> $[AB)$ – промінь AB з початком у точці A;
>
> $[AB]$ – відрізок AB;
>
> $|AB|$ – довжина відрізка AB;
>
> (AB) – пряма AB.

Опорна задача 2

Поділіть заданий відрізок на задану кількість рівних частин.



Дано: $[AB]$.

Побудувати: *відрізок, довжина якого* $|AB| : n$.

План побудови

1) Проведемо $[AK)$ під довільним гострим кутом до $[AB)$.

2) Довільним розхилом циркуля відкладемо на $[AK)$ відрізки $AK_1 = K_1K_2 = K_2K_3 = \ldots = K_{n-1}K_n$.

3) Проведемо (K_nB);

4) Через точки K_1, K_2, K_3 … K_{n-1} проведемо прямі паралельно (K_nB).

Ці прямі відтинають на $[AB)$ відрізки шуканої довжини.

Доведення

Маємо за побудовою: $AK_1 = K_1K_2 = K_2K_3 = \ldots = K_{n-1}K_n$; $K_1E_1 \parallel K_2E_2 \parallel \ldots \parallel K_nB$.

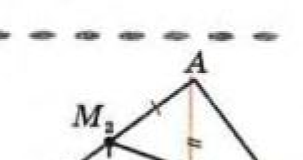
Тоді за теоремою Фалеса $AE_1 = E_1E_2 = E_2E_3 = \ldots = E_{n-1}B_n$.

Щ. в. д.

Для допитливих

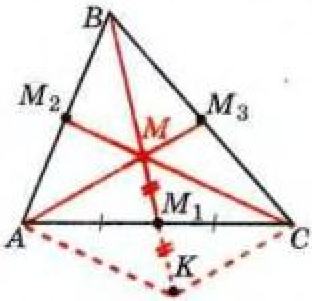
Розв'язати наступну задачу вам допоможуть теорема Фалеса і малюнок.

У трикутнику ABC висота AH_1 дорівнює медіані BM_2. Знайдіть кут CBM_2.



Опорна задача 3

Побудуйте довільний трикутник за його трьома медіанами.



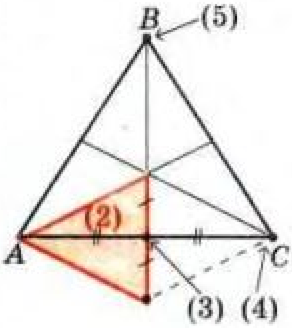
Дано: *відрізки k, n, p.*
Побудувати: *$\triangle ABC$, в якого:*
(1) $m_a = k$; (2) $m_b = n$; (3) $m_c = p$.

Аналіз

Точка перетину медіан трикутника M (центроїд) поділяє ці медіани у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершин. Продовжимо медіану m_b на відрізок $KM_1 = \frac{m_b}{3}$. Тоді $AM_1 = M_1C$, $MM_1 = M_1K$ і $AMCK$ – паралелограм.

$\frac{m_a,\ m_b,\ m_c}{}$
$\Downarrow$
Будуємо $\triangle ABC$:

(1) $m_a \to m_a : 3$,
$m_b \to m_b : 3$,
$m_c \to m_c : 3$



План побудови

1) $k, n, p \to \frac{k}{3}, \frac{n}{3}, \frac{p}{3}$;
2) $\frac{2k}{3}, \frac{2n}{3}, \frac{2p}{3} \to \triangle AMK$ $\left(AM = \frac{2k}{3}, MK = \frac{2n}{3}, AK = \frac{2p}{3}\right)$;
3) $[MK] \to MM_1 = M_1K$ ($M_1 \in KM$);
4) $[AM_1] \to M_1C = AM_1$ (продовженням);
5) $[MK] \to BM = MK$ (продовженням);
$\triangle ABC$ – шуканий.

Доведення

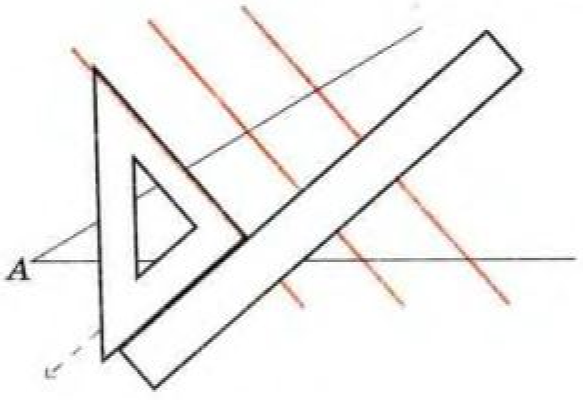
Маємо за побудовою: $\left(AM = \frac{2k}{3}, MK = \frac{2n}{3}, AK = \frac{2p}{3}\right)$, $MM_1 = M_1K$, $AM_1 = M_1C$, $MK = BM$.
Довести: (*1*) – (*3*).

1) *За побудовою виконується:* $BM_1 \equiv m_b$;
2) $MM_1 = M_1K$, $AM_1 = M_1C \to AMCK$ – паралелограм і $MC = AK = \frac{2p}{3}$;
3) $\left.\begin{array}{l} BM = MK \\ MM_1 = M_1K \\ BM_1 \equiv m_b \\ MK = \frac{2n}{3} \end{array}\right| \to$ M – центроїд, $m_b = \frac{2n}{3} + \frac{n}{3} = n$, і (*2*) виконується;
4) $\left.\begin{array}{l} M \text{ – центроїд} \\ AM = \frac{2}{3}k \\ CM = \frac{2}{3}p \end{array}\right| \to$ $AM_3 \equiv m_a$, $AM_3 = k$, $CM_2 \equiv m_c$, $CM_2 = p$, і (*1*) та (*3*) виконуються.

Щ. в. д.

Практична робота 17

1. Накресліть довільний гострий кут з вершиною в точці A.
2. На одній із сторін кута за допомогою циркуля відкладіть від вершини послідовно кілька рівних між собою відрізків.
3. За допомогою косинця і лінійки (мал. 2.74) через кінці відрізків проведіть паралельні прямі так, щоб вони перетнули другу сторону кута.
4. За допомогою циркуля порівняйте довжини відрізків, утворених паралельними прямими на другій стороні кута. Зробіть висновок.



Мал. 2.74

Практична робота 18

1. Накресліть довільний кут з вершиною в точці O.
2. На одній із його сторін відкладіть від вершини O послідовно три рівні відрізки завдовжки 2 см кожний. Утворені точки позначте відповідно A, B і C.
3. На другій стороні кута таким самим способом відкладіть три рівні між собою відрізки завдовжки 3 см кожний. Утворені точки позначте відповідно A_1, B_1 і C_1.
4. Проведіть відрізки AA_1, BB_1, CC_1. За допомогою лінійки і косинця переконайтеся, що ці відрізки лежать на паралельних прямих. Зробіть висновок.

Практична робота 19

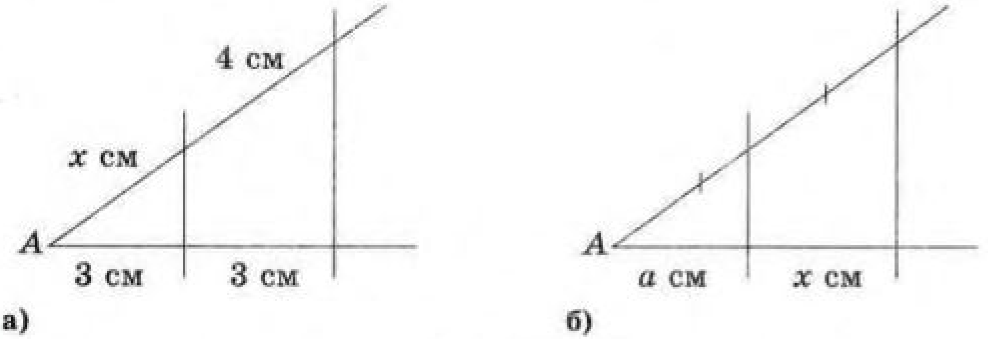
1. Побудуйте довільний трикутник ABC. Знайдіть середини сторін AB і BC. Позначте їх літерами M і K відповідно і сполучіть відрізком.
2. Порівняйте довжини відрізків AC і MK. Зробіть висновок.
3. Побудуйте довільний прямокутник $ABCD$. Середини його сторін позначте літерами M, N, P і Q. Виміряйте сторони і кути чотирикутника $MNPQ$. Якою фігурою є цей чотирикутник?
4. Побудуйте довільний ромб $ABCD$. Середини його сторін позначте літерами M, N, P і Q. Виміряйте сторони і кути чотирикутника $MNPQ$. В якому випадку чотирикутник $MNPQ$ буде квадратом?

Для допитливих

У паралелограмі $ABCD$ через точку перетину його діагоналей O провели пряму, що перетинає відрізки BC і AD в точках M і N відповідно. Знайдіть кут MBN, якщо $BO = ON$.

Завдання 13

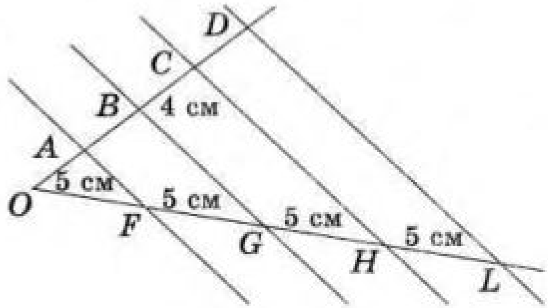
1°. Знайдіть x за малюнком 2.75, якщо прямі, які перетинають кут A, паралельні між собою.



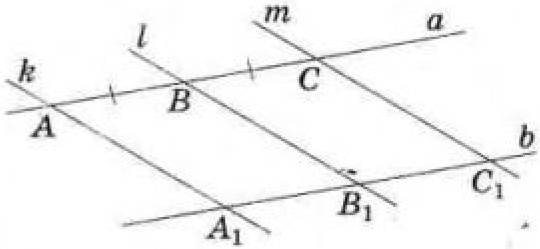
Мал. 2.75

2°. За малюнком 2.76 знайдіть довжини відрізків OA, CD, CA, AD, якщо $AF \parallel BG \parallel CH \parallel DL$.

3°. Дві паралельні прямі a і b перетнуті паралельними прямими k, l і m так, що $AB = BC$ (мал. 2.77). Доведіть, що $A_1B_1 = BC$.



Мал. 2.76



Мал. 2.77

4°. Непаралельні прямі a і b перетинаються паралельними прямими k, l і m в точках A, B, C і A_1, B_1, C_1. Доведіть, що $A_1B_1 = 2B_1C_1$, якщо $AB = 2BC$.

5. Даний відрізок поділіть: **а)** на 5 рівних частин; **б*)** на дві частини так, щоб одна була вдвічі довша за іншу; **в**)** на два відрізки, довжини яких відносяться як 2 : 3.

Для допитливих

1. Побудуйте паралелограм $ABCD$, якщо дано пряму BD і основи висот, проведених з вершини B.

2. Побудуйте паралелограм $ABCD$ за положенням вершин A і B та відстанями від даної точки M до вершин C і D.

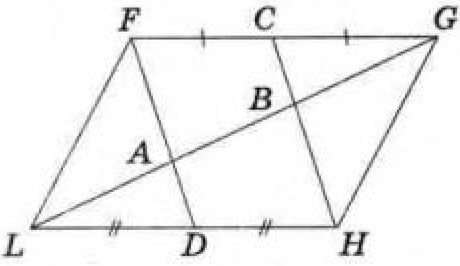
3. Через точку, позначену на діагоналі AC паралелограма $ABCD$, провели прямі паралельно його сторонам. Даний паралелограм поділено цими прямими на чотири паралелограми. Два з них перетинає діагональ AC. Доведіть, що два інші рівновеликі.

4. Точки M_1, M_2, M_3 – середини сторін BC, AC і AB трикутника ABC відповідно. Знайдіть кут C нерівнобедреного трикутника ABC, якщо центр кола, описаного навколо трикутника $M_1M_2M_3$, належить бісектрисі цього кута.

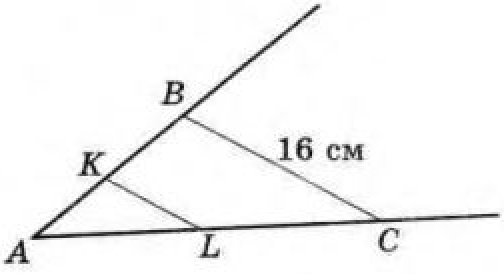
5. Кожна діагональ чотирикутника поділяє його на рівновеликі трикутники. Доведіть, що цей чотирикутник є паралелограмом.

6*. $LFGH$ – паралелограм. $FC = CG$, $LD = DH$ (мал. 2.78). Доведіть, що $LA = AB = BG$.

7°. За малюнком 2.79 обчисліть довжину відрізка KL, якщо $AK = KB$, $AL = LC$, а $BC = 16$ см.



Мал. 2.78



Мал. 2.79

8°. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 6 см, 3 см. Знайдіть середні лінії трикутника.

9. Який вид має трикутник, в якого: **а)** дві середні лінії рівні між собою; б) три середні лінії рівні між собою; в) дві середні лінії взаємно перпендикулярні?

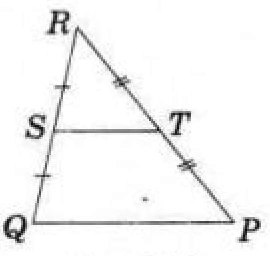
10. Знайдіть відношення периметрів даного трикутника і трикутника, утвореного його середніми лініями.

11. У чотирикутнику $ABCD$ точки K, L, M і N – середини сторін AB, BC, CD і AD відповідно. Доведіть, що середини відрізків KM і LN збігаються.

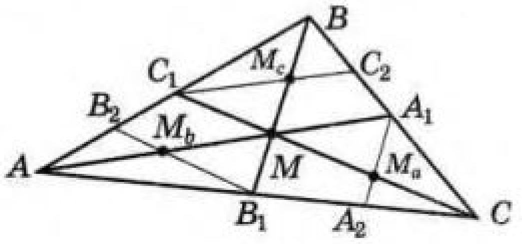
12. У трикутнику QRP середини сторін QR і RP позначені точками S і T відповідно (мал. 2.80). Знайдіть периметр чотирикутника $QSTP$, якщо $QR = 8$ см, $RP = 16$ см, $QP = 12$ см.

13. Сума діагоналей чотирикутника дорівнює 12 м. Знайдіть периметр чотирикутника з вершинами в серединах сторін заданого чотирикутника.

14**. Дано медіани трикутника ABC: CC_1, BB_1, AA_1, $A_1A_2 \parallel BB_1$, $B_1B_2 \parallel CC_1$, $C_1C_2 \parallel AA_1$ (мал. 2.81). Доведіть, що $BM_c = M_cM = MB_1$, $AM_b = M_bM = MA_1$, $CM_a = M_aM = MC_1$.



Мал. 2.80



Мал. 2.81

Для допитливих

1. Вершина C трикутника ABC не вміщується на малюнку. Проведіть пряму CM, де M – середина сторони AB.

2. M_1 і M_2 – середини двох сторін BC і AC трикутника ABC, а H_3 – основа висоти, проведеної до його третьої сторони. Доведіть, що відрізок M_1M_2 належить бісектрисі кута CM_1H_3.

3. У трикутнику ABC точки M_2 – середина сторони CB, E_1 і E_2 – середини відрізків CH і AH відповідно, H – ортоцентр трикутника. Доведіть, що $M_2E_1 \perp E_1E_2$.

4. Доведіть, що в опуклому чотирикутнику середини діагоналей і точка перетину прямих, що сполучають середини протилежних сторін, лежать на одній прямій.

15.** Дві медіани трикутника рівні між собою. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

16*. У трикутнику ABC позначили середини сторін AB, BC і CA відповідно як M_1, M_2 і M_3, а основи висот відповідно як H_1, H_2 і H_3. Доведіть, що: **а)** $M_1M_2 = H_1M_3$; **б)** $M_1H_2 + M_2M_3 = AB$; **в)** $H_1M_2 = H_3M_2 = M_1M_3$.

17*. Точки A і B знаходяться на відстанях 6 см і 24 см від прямої n відповідно. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до прямої n, якщо точки знаходяться: **а)** в одній півплощині відносно прямої n; **б)** у різних півплощинах відносно прямої n.

18*. Доведіть, що середня лінія трикутника менша за півсуму двох його сторін, які вона перетинає, але більша за їх піврізницю.

19*. Доведіть, що середня лінія трикутника ділить навпіл будь-який відрізок, що з'єднує точку на стороні трикутника, якій паралельна середня лінія, з протилежною вершиною трикутника.

20.** З однієї точки до прямої проведено похилі. Знайдіть геометричне місце точок середин цих похилих.

21.** Висота рівностороннього трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть проекцію даної висоти на іншу висоту.

22.** Побудуйте трикутник за його: **а)** двома медіанами і кутом між ними; **б)** стороною і медіанами, проведеними до двох інших сторін; **в)** медіаною, проведеною до однієї сторони, та висотами, проведеними до інших сторін; **г)** серединами двох сторін та основою висоти, опущеної на третю сторону.

23.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за: **а)** двома його нерівними висотами; **б)** висотою, проведеною до основи, і медіаною бічної сторони.

24.** Побудуйте прямокутний трикутник за: **а)** гіпотенузою і медіаною одного катета; **б)** трьома точками – вершиною прямого кута та проекціями середин катетів на гіпотенузу.

25.** Доведіть, що в опуклому чотирикутнику середини діагоналей і середини двох протилежних сторін є вершинами паралелограма.

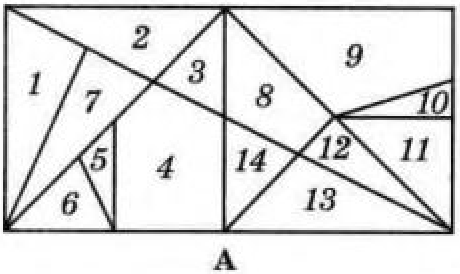
26.** Доведіть, що відстань від вершини трикутника до точки перетину висот удвічі більша за відстань від центра описаного навколо трикутника кола до протилежної даній вершині сторони.

Для допитливих

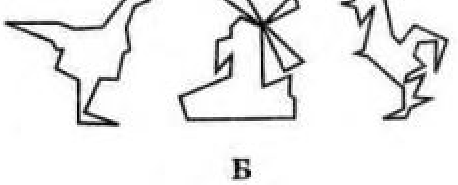
Стомахіон Архімеда. Переказують, що цю гру придумав Архімед.

Прямокутник, сторони якого відносяться як 1 : 2, розрізали на 14 частин (мал. **А**). Складіть із цих частин силует курки, вітряка, півня (мал. **Б**). Частини прямокутника можна класти на стіл будь-яким боком. Щільне прилягання їх, згідно з вказівкою Архімеда, не обов'язкове. Але при зображенні кожної фігури всі 14 елементів стомахіона мають бути використані.

«Стомахіон» у перекладі з грецької мови означає «те, що викликає злість». Спробуйте свої сили в цій грі, і ви переконаєтесь, що така назва виправдана. Гра повна несподіванок, вона розвиває винахідливість, загострює розум, тренує зір у сприйнятті ліній і форм. Стомахіон – патріарх серед ігор-головоломок. Він витримав 2000-річне випробування і не застарів, як не застаріли теореми і закони Архімеда.



А



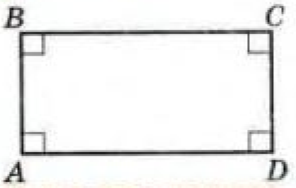
Б

ВЛАСТИВОСТІ:

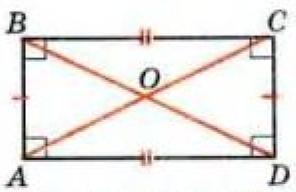
ABCD – прямокутник

⇓

1.

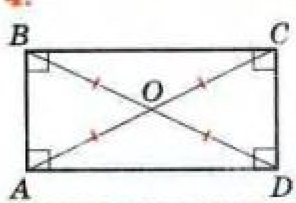


2.

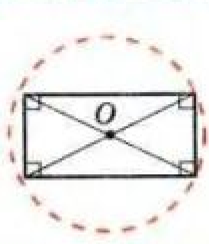


3. $AC = BD$

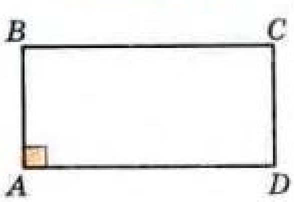
4.



5.



ОЗНАКА



ABCD – паралелограм
і $\angle A = 90°$

⇓

ABCD – прямокутник

§ 15. Окремі види паралелограмів – прямокутник, ромб, квадрат

ВЛАСТИВОСТІ ПРЯМОКУТНИКА

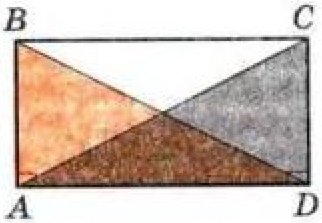
Прямокутник має всі властивості паралелограма, тобто в нього:

– *протилежні сторони рівні*;
– *діагоналі в точці перетину діляться навпіл*;
– *діагоналі ділять прямокутник на два рівні трикутники.*

До цього треба додати, що *площа прямокутника дорівнює добутку двох його нерівних сторін.*

Доведемо ще дві властивості прямокутника.

Т Теорема 1. **Діагоналі прямокутника рівні.**



Мал. 2.82

Нехай AC і BD – діагоналі прямокутника $ABCD$ (мал. 2.82). Треба довести, що $AC = BD$.

Доведення

У прямокутних трикутниках ABD і DCA катети $AB = CD$, а катет AD – спільний. Тоді $\triangle ABD = \triangle DCA$ і $AC = BD$.

Теорему доведено.

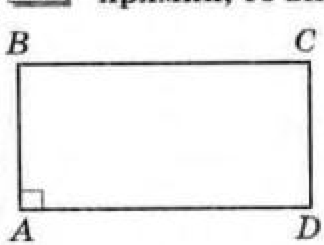
Н Наслідок. **Діагоналі прямокутника ділять його на чотири рівнобедрені трикутники.**

Т Теорема 2. **Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло, при цьому центром кола буде точка перетину діагоналей прямокутника.**

Доведення цієї властивості пропонуємо учням провести самостійно.

ОЗНАКИ ПРЯМОКУТНИКА

Т Теорема 3. **Якщо в паралелограма один кут прямий, то він – прямокутник.**



Мал. 2.83

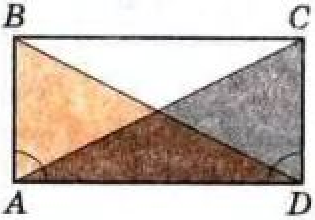
Нехай $ABCD$ – паралелограм, в якого $\angle A = 90°$ (мал. 2.83). Треба довести, що $ABCD$ – прямокутник.

Доведення

$ABCD$ – паралелограм, тоді
$\angle C = \angle A = 90°$;
$\angle B = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$;
$\angle D = \angle B = 90°$ і $ABCD$ – прямокутник.

Теорему доведено.

Теорема 4. Якщо діагоналі паралелограма рівні, то він – прямокутник.



Мал. 2.84

Нехай $ABCD$ – паралелограм (мал. 2.84), в якого $AC = BD$. Треба довести, що $ABCD$ – прямокутник.

Доведення

1) $\triangle ABD = \triangle DCA$ за трьома сторонами. Тоді $\angle A = \angle D$.

2) $ABCD$ – паралелограм, тоді $\angle A + \angle D = 180°$.

3) $\angle A = \angle D = 180° : 2 = 90°$, і за попередньою теоремою $ABCD$ – прямокутник.

Теорему доведено.

Теорема 5. Якщо навколо паралелограма можна описати коло, то він – прямокутник.

Доведення цієї ознаки пропонуємо учням провести самостійно.

ВЛАСТИВОСТІ РОМБА

Ромб має всі властивості паралелограма, а саме:

– *протилежні кути рівні;*

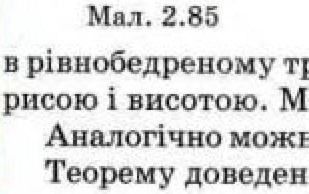
– *сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°;*

– *діагоналі в точці перетину діляться навпіл;*

– *площа дорівнює добутку сторони і висоти, проведеної до цієї сторони.*

Доведемо ще дві властивості ромба.

Теорема 6. У ромбі діагоналі взаємно перпендикулярні і є бісектрисами його кутів.



Мал. 2.85

Нехай $ABCD$ – ромб. Треба довести, що $BD \perp AC$, $AC \equiv l_A$; $AC \equiv l_C$; $DB \equiv l_B$; $DB \equiv l_D$.

Доведення

1) $ABCD$ – ромб, тоді $AB = BC$ і трикутник ABC рівнобедрений.

2) $ABCD$ – ромб, тоді $AO = OC$ і в рівнобедреному трикутнику ABC медіана BO є бісектрисою і висотою. Маємо, що $BD \perp AC$ і $DB \equiv l_B$.

Аналогічно можна довести, що $AC \equiv l_A$; $AC \equiv l_C$; $DB \equiv l_D$.

Теорему доведено.

Теорема 7. У будь-який ромб можна вписати коло, діаметр якого дорівнює висоті ромба.

Доведення цієї теореми пропонуємо учням провести самостійно.

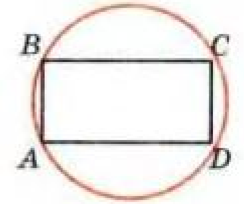
ОЗНАКИ:

ABCD – паралелограм

і AC = BD

⇓

ABCD – прямокутник



ABCD – паралелограм

і ABCD – вписаний

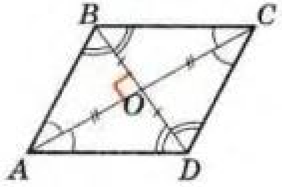
⇓

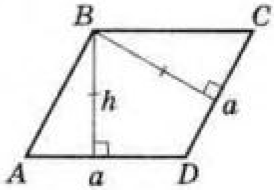
ABCD – прямокутник

ВЛАСТИВОСТІ:

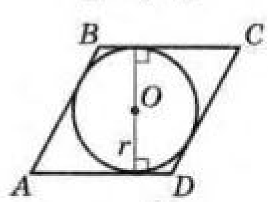
ABCD – ромб

⇓



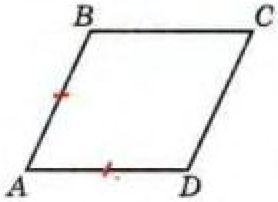


$S = a \cdot h$



$r = \dfrac{h}{2}$

ОЗНАКИ:

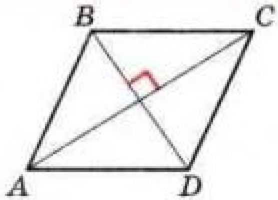


ABCD – паралелограм

і AB = AD

⇓

ABCD – ромб



ABCD – паралелограм

і $AC \perp BD$

⇓

ABCD – ромб

ABCD – паралелограм

і $BD \equiv l_B$

⇓

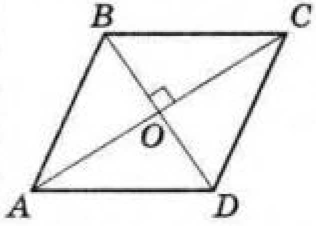
ABCD – ромб

ОЗНАКИ РОМБА

Теорема 8. **Паралелограм, у якого дві сусідні сторони рівні, – ромб.**

Пропонуємо цю ознаку довести самостійно.

Теорема 9. **Паралелограм, діагоналі якого перетинаються під прямим кутом, – ромб.**



Мал. 2.86

Нехай у паралелограма $ABCD$ (мал. 2.86) $AC \perp BD$. Треба довести, що $ABCD$ – ромб.

Доведення

1) $ABCD$ – паралелограм, тоді $AO = OC$.

2) $AO = OC$ і $BO \perp AC$, тоді $BC = AB$ і за попередньою ознакою $ABCD$ – ромб. Теорему доведено.

Теорема 10. **Паралелограм, діагональ якого є бісектрисою кута, – ромб.**

Доведення, аналогічне доведенню теореми 6, пропонуємо провести самостійно.

Теорема 11. **Паралелограм, у який можна вписати коло, – ромб.**

Доведення цієї ознаки пропонуємо учням провести самостійно.

ВЛАСТИВОСТІ КВАДРАТА

Квадрат є одночасно і прямокутником, і ромбом. Тому він має всі властивості прямокутника і ромба, а саме:
- *діагоналі в точці перетину діляться навпіл;*
- *діагоналі перетинаються під прямим кутом;*
- *діагоналі є бісектрисами кутів квадрата;*
- *площа дорівнює добутку двох його сторін;*
- *навколо квадрата завжди можна описати коло.*

ОЗНАКИ КВАДРАТА

Неважко довести такі ознаки квадрата:
- *прямокутник, в якого діагоналі перетинаються під прямим кутом;*
- *прямокутник, в якого діагональ є бісектрисою кута;*
- *ромб, в якого один кут прямий;*
- *ромб, в якого діагоналі рівні.*

Пропонуємо ці ознаки квадрата довести самостійно.

Спробуйте сформулювати і довести ще кілька ознак квадрата.

Для допитливих

Периметр квадрата дорівнює 4 м. Знайдіть на площині всі точки, для яких сума відстаней до сторін квадрата або їх продовження дорівнює 6 м.

Практична робота 20

1. Проведіть дві взаємно перпендикулярні прямі m і n.
2. Через точку, що не належить жодній із цих прямих, проведіть прямі, паралельні прямим m і n. Виміряйте кути утвореного чотирикутника. Який вид утвореного чотирикутника?
3. В утвореному чотирикутнику проведіть діагоналі. Виміряйте довжини діагоналей і частин, на які вони діляться точкою перетину. Зробіть висновок.

4*. Накресліть дві прямі, які перетинаються в точці O. На кожній із цих прямих від точки O відкладіть чотири рівні відрізки $OA = OC = OB = OD$. Сполучіть точки A, B, C і D відрізками так, щоб утворився чотирикутник. Який чотирикутник ви отримали? Відповідь обґрунтуйте.

Практична робота 21

1. Накресліть дві прямі, які перетинаються в точці A.
2. На кожній із цих прямих на однаковій відстані від точки A позначте дві точки B і D.
3. Через точки B і D проведіть прямі, паралельні накресленим раніше прямим. Точку їх перетину позначте літерою C.
4. Виміряйте сторони утвореного чотирикутника $ABCD$. Зробіть висновок.
5. У чотирикутнику $ABCD$ проведіть діагоналі та виміряйте кут між ними. Запишіть висновок.

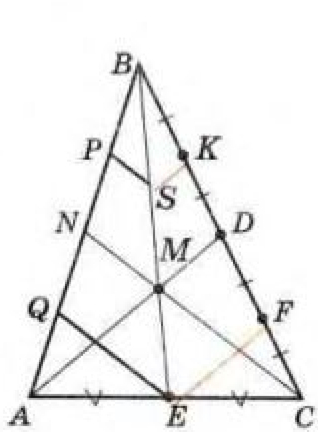
Практична робота 22

1. Проведіть дві взаємно перпендикулярні прямі, які перетинаються в точці O.
2. На кожній із прямих на однаковій відстані від точки O позначте дві точки K і D.
3. Через точки K і D проведіть прямі, паралельні накресленим раніше прямим. Точку їх перетину позначте літерою C.
4. Виміряйте сторони і кути утвореного чотирикутника $OKCD$. Зробіть висновок.
5. В утвореному чотирикутнику проведіть діагоналі. Виміряйте довжини діагоналей і частин, на які вони поділяються точкою перетину. Зробіть висновок.

Для допитливих

За теоремою Фалеса легко довести, що три медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться цією точкою у відношенні 2 : 1 (рахуючи від вершини).

Дано: $AE = EC$; $BD = DC$.
Довести: $AN = BN$; $BM : ME = 2 : 1$.



Позначимо через K середину відрізка BD і проведемо SK і EF паралельно AD, а PS і EQ паралельно NC.

1) Маємо: $AE = EC$, $EF \parallel AD$. Тоді $DF = FC$ (кут DAC).

2) Маємо: $DF = FC = 1/2\, DC = KD = BK$; $SK \parallel AD \parallel EF$.

Тоді $BS = SM = ME$ (кут EBC), і $BM : ME = 2 : 1$.

3) Маємо: $BS = SM = ME$; $PS \parallel NC \parallel EQ$. Тоді $BP = PN = NQ$ (кут ABE).

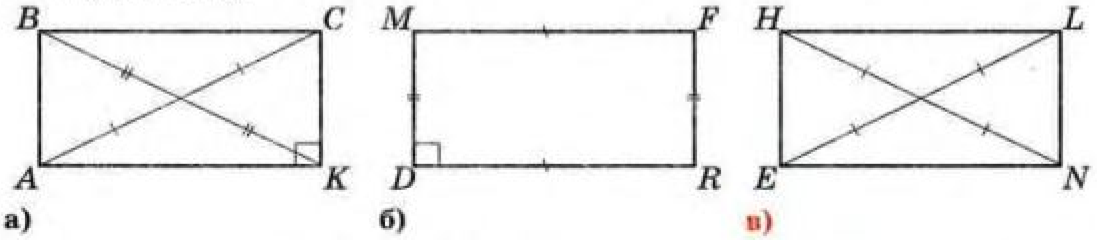
4) Маємо: $AE = EC$; $EQ \parallel NC$. Тоді $AQ = QN$ (кут ACN).

5) Маємо: $AQ = QN = PN = PB$. Тоді $AN = NB$.

Щ. в. д.

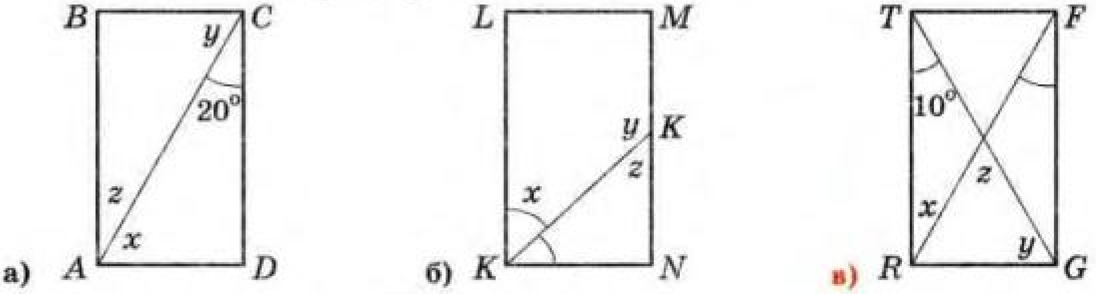
Завдання 14

1°. На малюнку 2.87 зображено чотирикутники. Чи є вони прямокутниками? Чому?



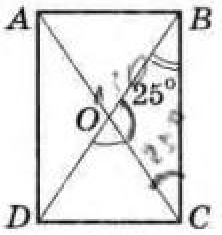
Мал. 2.87

2°. На малюнку 2.88 знайдіть усі невідомі кути x, y, z, якщо $ABCD$, $KLMN$, $RTFG$ – прямокутники.

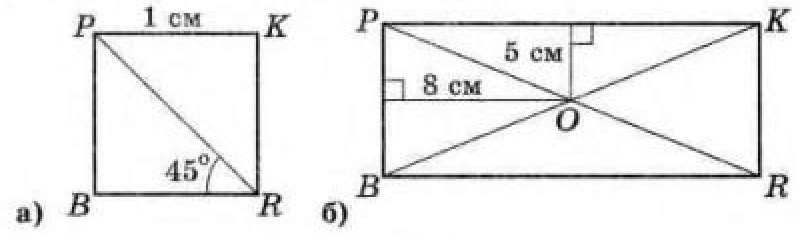


Мал. 2.88

3°. На малюнку 2.89 $ABCD$ – прямокутник. Знайдіть кут DOC.



Мал. 2.89



Мал. 2.90

4. У прямокутнику діагональ утворює з більшою стороною кут, що дорівнює 28°. Знайдіть кут між діагоналями, який лежить проти більшої сторони прямокутника.

5. Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 72°. Який кут утворює діагональ з меншою стороною? Який з більшою?

6*. Чи існує такий прямокутник, у якого тупий кут між діагоналями на 30° більший, ніж кут між діагоналлю і більшою стороною цього прямокутника?

7*. З вершини прямокутника проведено перпендикуляр до його діагоналі. Цей перпендикуляр поділяє прямий кут у відношенні 3 : 1. Знайдіть кут між цим перпендикуляром і другою діагоналлю.

8°. Знайдіть периметри прямокутників $PBRK$ (мал. 2.90).

Для допитливих

Марійка має 16 карток: 4 сині (с), 4 червоні (ч), 4 зелені (з) і 4 жовті (ж). Вона хоче розкласти їх у квадрат так, щоб у кожному стовпчику і рядку були картки різних кольорів. Картки скількох різних кольорів можна покласти на позначену клітинку?

с		?	
ч	с		
	з		
	ж		

9°. Знайдіть периметр прямокутника, якщо: а) довжина однієї сторони дорівнює 2 см, а другої втричі більша; б) одна сторона становить 2 см, а його діагональ утворює з другою стороною кут $45°$.

10°. Периметр прямокутника дорівнює 36 см. Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них на 6 см більша за іншу.

11. Периметр прямокутника дорівнює 48 см. Знайдіть сторони прямокутника, якщо: а) одна сторона на 4 см більша за другу; б) одна сторона втричі довша за другу; в) дві сторони його відносяться як $2 : 3$; г) відстань між серединами двох протилежних сторін дорівнює 10 см.

12. Знайдіть периметр прямокутника, якщо: а) точка перетину його діагоналей віддалена від його сторін на 4 см і на 9 см; б) менша сторона прямокутника – 4 см, а бісектриса ділить протилежну сторону на два рівні відрізки.

13*. Точка перетину діагоналей прямокутника лежить на відстані від більшої сторони на 5 см ближче, ніж від меншої. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 44 см.

14. Суміжні сторони прямокутника – a і b, площа прямокутника – S. Обчисліть: а) S, якщо $a = 8{,}7$ см, $b = 3{,}5$ см; б) b, якщо $a = 24$ см, $S = 340{,}8$ см^2; в) a, якщо $b = 4{,}7$ см, $S = 27{,}73$ см^2.

15. Обчисліть сторони прямокутника, якщо вони відносяться як $4 : 9$, а площа його дорівнює 144 см^2.

16*. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо кожну з його сторін збільшити вдвічі?

17. Доведіть, що будь-який паралелограм, вписаний у коло, – прямокутник.

18. Доведіть, що діагоналі вписаного прямокутника є діаметрами кола.

19. Доведіть, що чотирикутник є прямокутником, якщо: а) у нього всі кути прямі; б) два протилежні кути прямі і дві протилежні сторони рівні; в) дві протилежні сторони рівні і перпендикулярні до третьої сторони; г) два протилежні кути прямі, а діагональ, що сполучає вершини цих кутів, утворює з двома протилежними сторонами рівні кути.

20*. У прямокутнику $ABCD$ на його діагоналях від кожної з вершин відкладені рівні відрізки $AM = BN = CK = DL$. Доведіть, що чотирикутник $MNKL$ – прямокутник.

21*. Доведіть, що: а) бісектриси внутрішніх кутів прямокутника при перетині утворюють квадрат; б) бісектриси зовнішніх кутів прямокутника при перетині утворюють квадрат.

22*. Доведіть, що перпендикуляри, опущені на діагоналі прямокутника з його вершин, рівні.

23*. Через середину діагоналі KM прямокутника $KLMN$ проведено перпендикулярну до неї пряму, яка перетинає сторони KL і MN у точках A і B відповідно. Відомо, що $AB = BM = 6$ см. Знайдіть довжину KL.

24*. Через середину діагоналі прямокутника проведено до неї перпендикулярну пряму, яка перетинає більшу сторону під кутом $60°$. Відрізок цієї прямої, що міститься всередині прямокутника, дорівнює 10 см. Знайдіть більшу сторону прямокутника.

25.** Серединний перпендикуляр до діагоналі прямокутника ділить його сторону на частини, одна з яких удвічі більша за другу. Знайдіть, на які частини діагональ ділить кут прямокутника.

26.** Серединний перпендикуляр до діагоналі прямокутника ділить його сторону на відрізки, один з яких дорівнює меншій стороні прямокутника. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.

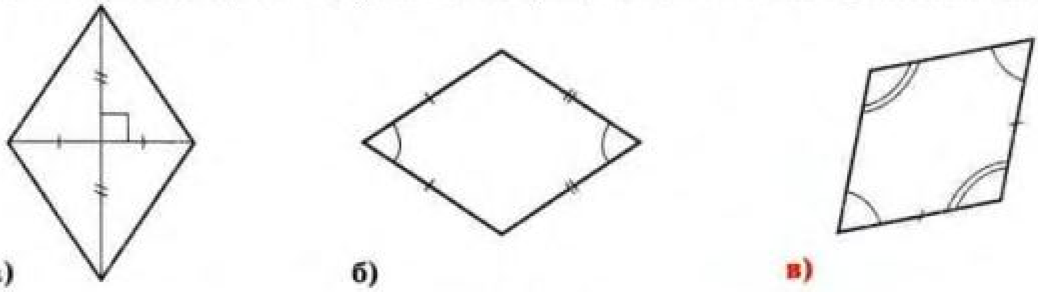
27.** На стороні BC прямокутника $ABCD$ є така точка K, що $\angle AKB = \angle AKD$. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо $AD = 2AB$.

28. Побудуйте прямокутник за: а) двома нерівними сторонами; б) стороною і діагоналлю; в) діагоналями і кутом між ними; г) стороною і радіусом описаного кола; д) стороною і сумою діагоналей.

29*. Прямокутна ділянка так заросла травою, що вільними залишилися лише одна її сторона і вершина протилежного цій стороні кута. Як знайти на цій ділянці точку, рівновіддалену від усіх її вершин?

30.** Побудуйте прямокутник за діагоналлю і сумою двох нерівних сторін.

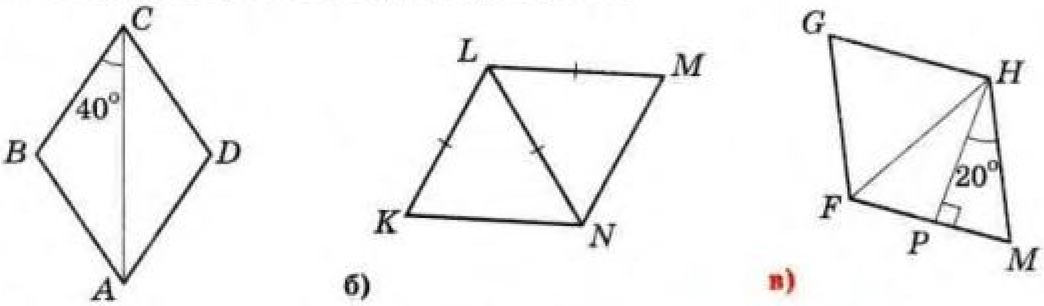
31°. На малюнку 2.91 зображено чотирикутники. Чи є вони ромбами? Чому?



а) б) в)

Мал. 2.91

32°. За малюнком 2.92 знайдіть кути ромбів.



а) б) в)

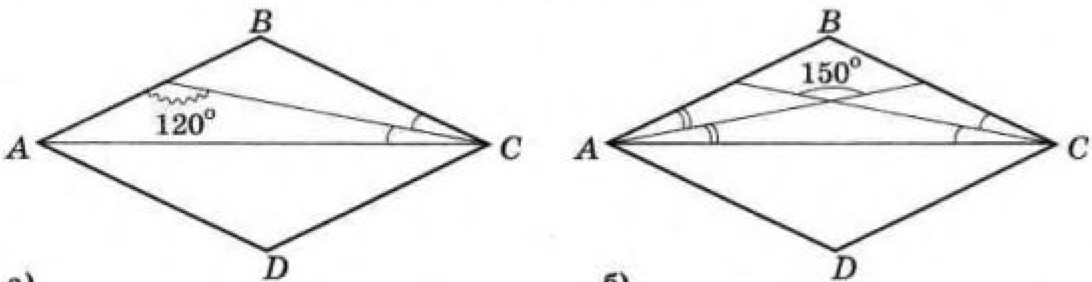
Мал. 2.92

33°. Знайдіть кути ромба, якщо: а) кут, утворений діагоналлю ромба з однією із його сторін, дорівнює 30°; б) кут між однією з діагоналей і стороною дорівнює 75°.

34. Знайдіть кути, утворені діагоналями ромба з його сторонами, якщо: а) один з кутів ромба дорівнює 45°; б) одна з діагоналей дорівнює стороні ромба.

35*. Знайдіть кути ромба, якщо: а) кут між двома висотами, проведеними з тупого кута, дорівнює 70°; б) кути, утворені діагоналями ромба з однією з його сторін, відносяться як 4 : 5.

36*. Знайдіть кути ромба $ABCD$ за малюнком 2.93.



а) б)

Мал. 2.93

37°. Знайдіть периметр ромба, якщо: а) довжина його сторони на 6 см менша за периметр; б) його діагональ дорівнює 5 см і утворює зі стороною кут 60°.

38. У ромбі висота, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону ромба навпіл. Знайдіть кути ромба і його периметр, якщо менша з його діагоналей дорівнює 10 см.

39. Знайдіть площу ромба, якщо: **а)** його висота дорівнює 2 см, а периметр – 16 см; **б)** його діагоналі дорівнюють 10 см і 12 см.

40. Як зміниться площа ромба, якщо і висоту, і сторону зменшити у чотири рази?

41. Обчисліть площу ромба, якщо: **а)** його сторона дорівнює 10 см, а один з кутів – 150°; **б)** радіус вписаного в ромб кола дорівнює 5 см, а один з кутів – 30°.

42*. Квадрат і ромб, який не є квадратом, мають однакові периметри. Порівняйте площі цих фігур.

43*. Обчисліть сторону квадрата, площа якого дорівнює площі прямокутника зі сторонами 50 см і 18 см.

44. Доведіть, що у ромба висоти рівні.

45*. Доведіть, що паралелограм, в якого висоти, проведені з однієї вершини, рівні, є ромбом.

46. Доведіть, що: **а)** чотирикутник, вершини якого є серединами сторін ромба, – прямокутник; **б)** чотирикутник, вершини якого є серединами сторін прямокутника, – ромб.

47. Від двох протилежних вершин ромба на його сторонах відкладено рівні відрізки. Доведіть, що кінці цих відрізків є вершинами прямокутника.

48*. З точки перетину діагоналей ромба опущені перпендикуляри на сторони ромба. Доведіть, що основи цих перпендикулярів є вершинами прямокутника.

49*. Діагоналі ромба відносяться як 4 : 3. Знайдіть діагоналі ромба, якщо його площа дорівнює 600 см^2.

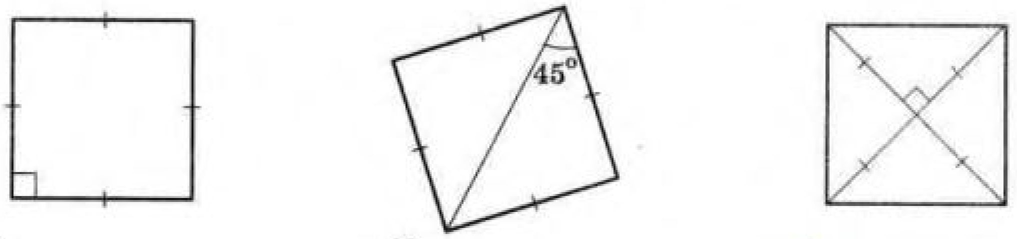
50*. Доведіть, що будь-який вписаний у коло ромб – квадрат.

51*. Побудуйте ромб за: **а)** стороною і кутом; **б)** стороною і діагоналлю; **в)** двома діагоналями.

52.** Побудуйте ромб за: **а)** радіусом вписаного в нього кола і стороною; **б)** діагоналлю і висотою; **в)** висотою і кутом.

53.** У заданий трикутник впишіть ромб так, щоб він мав з трикутником спільний кут, а протилежна вершина ромба лежала на стороні трикутника.

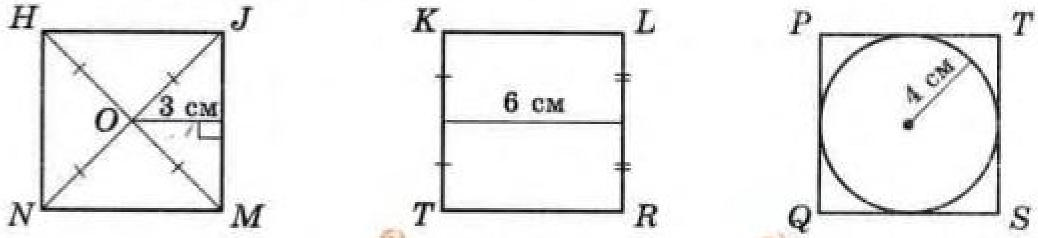
54°. Доведіть, що всі чотирикутники на малюнку 2.94 – квадрати.



а) б) в)

Мал. 2.94

55. Знайдіть периметри квадратів (мал. 2.95).



а) б) в)

Мал. 2.95

56. Діагональ квадрата дорівнює 8 м. Знайдіть його площу.

57. Периметр квадрата дорівнює 36 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей до його сторін.

58. Діагональ квадрата ділить його на два трикутники. Визначте вид цих трикутників.

59*. На сторонах квадрата $ABCD$ послідовно відклали рівні відрізки AM, BP, CK і DE. Доведіть, що $\angle PME = \angle PKE$.

60*. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат, дві вершини якого лежать на катетах, а протилежна їм сторона – на гіпотенузі. Знайдіть периметр квадрата, якщо довжина гіпотенузи дорівнює 9 см.

61*. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат так, що одна його вершина збігається з вершиною прямого кута трикутника, а протилежна вершина квадрата лежить на гіпотенузі. Знайдіть периметр квадрата, якщо катет трикутника дорівнює a.

62*. Діагональ квадрата дорівнює 5 см. Його сторона є діагоналлю другого квадрата. Знайдіть периметр другого квадрата.

63*. На сторонах квадрата від двох протилежних вершин відклали 4 рівні відрізки. Доведіть, що кінці цих відрізків є вершинами прямокутника, і знайдіть його периметр, якщо діагональ квадрата дорівнює 5 см.

64. Середини сторін квадрата є вершинами квадрата. Доведіть це.

65*. На сторонах AB, BC, CD і DA квадрата $ABCD$ позначено відповідно точки K, P, M і E так, що: **а)** $AK = BP = CM = DE$; **б)** точки K, P, M і E ділять сторони в одному і тому самому відношенні (при обході за годинниковою стрілкою). Доведіть, що чотирикутник $KPME$ – квадрат.

66*. На продовженнях сторін AB, BC, CD і DA квадрата $ABCD$ позначено відповідно точки K, P, M і E так, що $AK = BP = CM = DE$. Доведіть, що чотирикутник $KPME$ – квадрат.

67*. Через точку перетину діагоналей квадрата проведено дві взаємно перпендикулярні прямі. Доведіть, що точки перетину цих прямих зі сторонами квадрата є вершинами іншого квадрата.

68*. З однієї точки кола провели дві взаємно перпендикулярні хорди, які віддалені від центра кола на 2 см і 3 см. Знайдіть довжини цих хорд.

69**. Побудуйте квадрат за: **а)** його центром і двома точками на протилежних сторонах; **б)** сумою сторони і діагоналі.

Для допитливих

1. Одна сторона прямокутника містить a цілих одиниць, а друга – b. Через кінці одиничних відрізків провели прямі, паралельні відповідним сторонам прямокутника. Таким чином, даний прямокутник поділили на ab одиничних квадратів. А скільки всього утворилося квадратів двома системами паралельних відрізків?

2. AH – висота гострокутного $\triangle ABC$, O – центр квадрата, побудованого на відрізку AB зовні трикутника, K – центр квадрата, побудованого на відрізку AC в одній півплощині з точкою B (див. мал.). Чи лежать точки K, H і O на одній прямій?

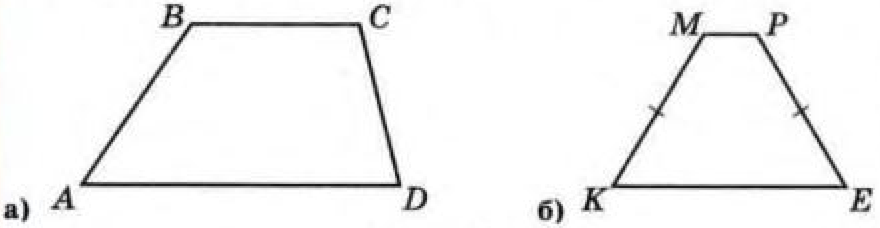
3. Побудуйте ромб $ABCD$ за положенням вершин A і B та відстанню від даної точки M до середини BC.

4. Зовні ромба $ABCD$ побудували правильний трикутник AMB. Знайдіть градусну міру кута CMD.

5. Розв'яжіть попередню задачу для випадку, коли точка M міститься всередині ромба.

§ 16. Трапеція

Дві сторони трапеції паралельні за означенням. Ці сторони називаються *основами* трапеції, а дві інші – *бічними сторонами* трапеції. Наприклад, на малюнку 2.96-а зображено трапецію $ABCD$, в якої $BC \parallel AD$. Тоді відрізки BC і AD є її основами, а AB і CD – бічними сторонами.



Мал. 2.96

Рівнобічною називається трапеція, бічні сторони якої рівні між собою (мал. 2.96-б).

Прямокутною називається трапеція, один з кутів якої прямий.

Висотою трапеції називається перпендикуляр, проведений до однієї з основ трапеції з точки іншої основи, або її продовження. Довжина цього перпендикуляра є відстанню між паралельними сторонами трапеції.

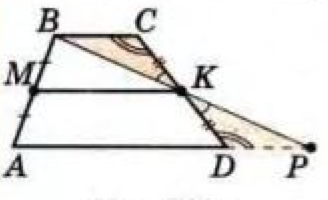
Середньою лінією трапеції називається відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

ВЛАСТИВОСТІ ТРАПЕЦІЇ

1. Сума кутів, прилеглих до однієї бічної сторони, дорівнює 180°.

Ця властивість випливає з властивості паралельних прямих.

2. Т Теорема. **Середня лінія трапеції паралельна її основам і дорівнює півсумі цих основ.**



Мал. 2.97

У трапеції $ABCD$ сполучили середини її бічних сторін – M і K (мал. 2.97). Треба довести, що

$$MK = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Доведення

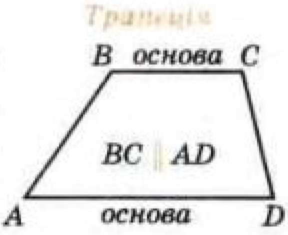
Через точки B і K проведемо пряму до її перетину в точці P з продовженням основи AD.

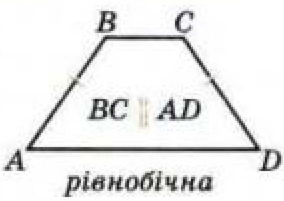
1) $BC \parallel AD$, CD – січна, тоді $\angle BCD = \angle KDP$ (як внутрішні різносторонні).

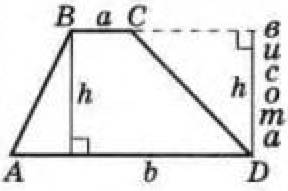
2) $\angle BKC = \angle DKP$ (як вертикальні), $\angle BCK = \angle PDK$, $CK = KD$. Тоді $\triangle BKC = \triangle PKD$ і $BK = KP$, $DP = BC$.

3) $AM = MB$, $BK = KP$. Тоді у трикутнику ABP відрізок MK є середньою лінією і $MK = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2} = (AD + BC)$.

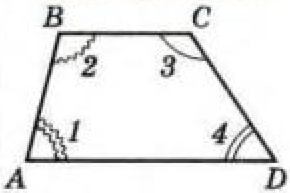
Теорему доведено.







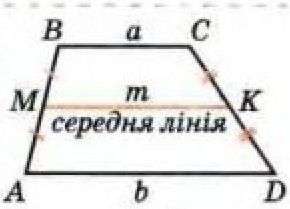
ВЛАСТИВОСТІ:



$ABCD$ – трапеція

$\Downarrow$

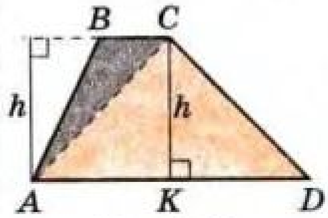
$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ = \angle 3 + \angle 4$



$m \parallel a \parallel b$

$m = \frac{a+b}{2}$

3. Теорема. **Площа трапеції дорівнює добутку висоти і середньої лінії.**



Мал. 2.98

Позначимо відстань між основами AD і BC трапеції $ABCD$ через h (мал. 2.98). Треба довести, що площа трапеції S дорівнює

$$\frac{1}{2}h(AD + BC).$$

Доведення

Діагональ AC ділить трапецію $ABCD$ на два трикутники ABC і ACD. Висотами цих трикутників, проведеними до сторін BC і AD відповідно, буде відстань між паралельними прямими BC і AD. Тоді:

$$S = \frac{1}{2}\ h \cdot BC + \frac{1}{2}\ h \cdot AD = \frac{1}{2}\ h(AD + BC).$$

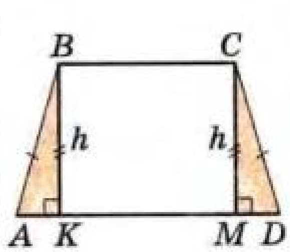
Теорему доведено.

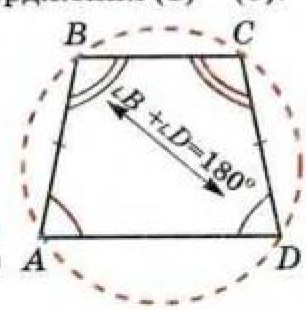
ВЛАСТИВОСТІ РІВНОБІЧНОЇ ТРАПЕЦІЇ

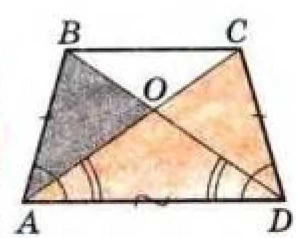
Теорема. **У рівнобічній трапеції:**

– **(1) кути, прилеглі до однієї основи, рівні;**
– **(2) сума протилежних кутів дорівнює 180°;**
– **(3) діагоналі рівні;**
– **(4) відрізки діагоналей трапеції, що сполучають точку їх перетину з кінцями однієї основи, рівні між собою;**
– **(5) навколо рівнобічної трапеції завжди можна описати коло.**

Нехай у трапеції $ABCD$: AD і BC – основи; $AB = CD$. Треба довести твердження (1) – (5).







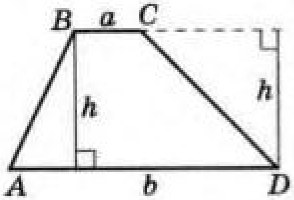
Мал. 2.99 Мал. 2.100 Мал. 2.101

Доведення

1) У рівнобічній трапеції $ABCD$ проведемо висоти BK і CM (мал. 2.99). Тоді прямокутні трикутники ABK і DCM рівні (за гіпотенузою та катетом) і $\angle A = \angle D$. Твердження (1) доведено.

2) За властивістю трапеції $\angle A + \angle B = 180°$, за доведеним $\angle A = \angle D$. Тоді $\angle D + \angle B = 180°$. Твердження (2) доведено.

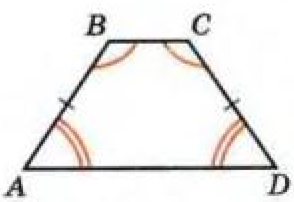
3) За доведеним $\angle D + \angle B = 180°$, тоді чотирикутник $ABCD$ – вписаний (мал. 2.100). Твердження (5) доведено.



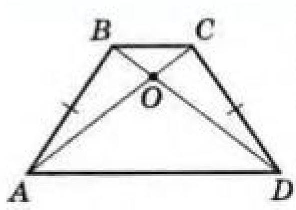
ABCD – трапеція

$$S = h \cdot \frac{a+b}{2}$$

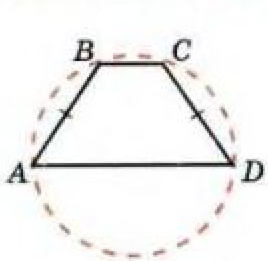
ВЛАСТИВОСТІ РІВНОБІЧНОЇ ТРАПЕЦІЇ:



$\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle C$
$\angle A + \angle C = 180°$
$\angle B + \angle D = 180°$



$AC = BD$,
$BO = OC$, $AO = OD$



$$\frac{BC \parallel AD \quad AB = CD}{\Downarrow}$$
ABCD – вписана

4) Проведемо діагоналі AC і BD трапеції $ABCD$ (мал. 2.101). За першою ознакою $\triangle ABD = \triangle DCA$ ($\angle A = \angle D$, $AB = CD$, AD – спільна). Тоді $AC = BD$ і твердження (3) доведено.

5) $\triangle ABD = \triangle DCA$, тоді $\angle BDA = \angle CAD$ і трикутник AOD – рівнобедрений, $AO = OD$. $AC = BD$ і $AO = OD$, тоді $OB = OC$. Твердження (4) доведено.

Теорему доведено.

ОЗНАКИ РІВНОБІЧНОЇ ТРАПЕЦІЇ

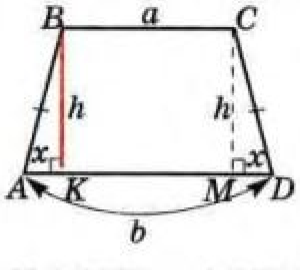
Т Теорема. **Якщо в трапеції виконується одне з таких тверджень:**
- кути, прилеглі до однієї основи, рівні, або
- сума протилежних кутів дорівнює 180°, або
- діагоналі рівні, або
- трапеція – вписана,

то ця трапеція є рівнобічною.

Доведення цієї теореми пропонується провести самостійно, спираючись на малюнки 2.99–2.101.

Опорна задача 1

У рівнобічній трапеції висота, проведена з кінця меншої основи, ділить більшу основу на відрізки, довжини яких дорівнюють піврізниці та півсумі довжин основ.



Дано: $BC \parallel AD$, $BC = a$, $AD = b$, $AB = CD$, $BK \perp AD$.

Довести: $AK = \frac{1}{2}(b - a)$, $KD = \frac{1}{2}(a + b)$.

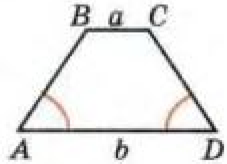
Проведемо $CM \perp AD$.

1) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (за гіпотенузою і катетом) і $AK = MD \triangleq x$.
2) $BK \parallel CM$, $BK = CM = h \to KBCM$ – прямокутник і $KM = BC = a$.
3) $AK + MD = 2x = b - a \to x = \frac{1}{2}(b - a)$;

$$KD = KM + MD = a + x = a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b).$$

Щ. в. д.

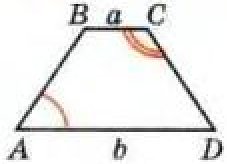
ОЗНАКИ:



$a \parallel b$ і $\angle A = \angle D$

$\Downarrow$

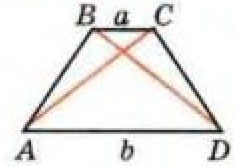
ABCD – рівнобічна



$a \parallel b$ і $\angle A + \angle C = 180^\circ$

$\Downarrow$

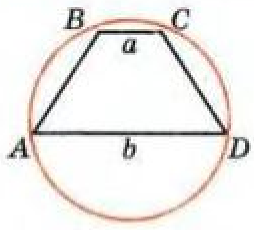
ABCD – рівнобічна



$a \parallel b$ і $AC = BD$

$\Downarrow$

ABCD – рівнобічна



$a \parallel b$ і *ABCD – вписана*

$\Downarrow$

ABCD – рівнобічна

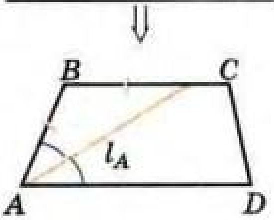
Для допитливих

Кришки столів для дитячого садка мають форму рівнобічної трапеції. Завдяки цьому їх можна приставити один до одного і утворити кільце (мал. А). Проте якщо кожний другий з цих столів повернути на 180°, утвориться суцільний ряд (мал. Б). Визначте, чи будуть в останньому випадку паралельними крайні (вільні) сторони кришок столів.


А

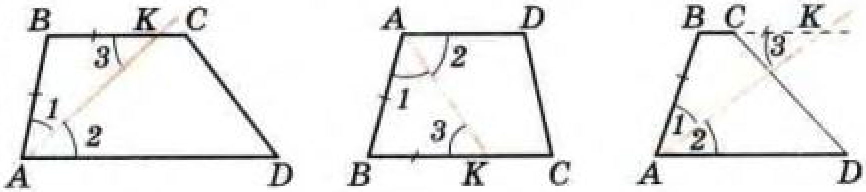

Б

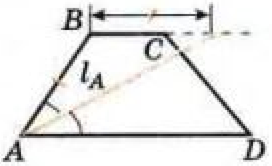
ABCD – трапеція



Опорна задача 2

Бісектриса кута трапеції відтинає від основи цієї трапеції (або її продовження) відрізок, рівний бічній стороні трапеції, прилеглій до цього кута.

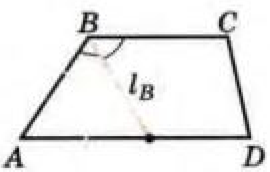




Дано: $BC \parallel AD$, $\angle 1 = \angle 2$.
Довести: $BK = AB$.

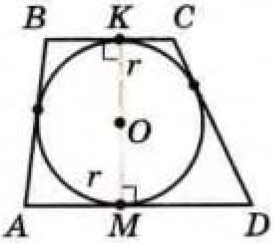
1) $BC \parallel AD \rightarrow \angle 2 = \angle 3$ (як внутрішні різносторонні);
2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 \rightarrow AB = BK$.

Щ. в. д.



Опорна задача 3

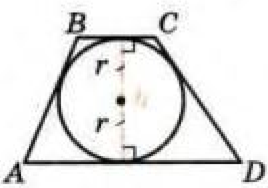
Висота трапеції дорівнює діаметру вписаного в неї кола.



Дано: $BC \parallel AD$, *ABCD – описана.*
Довести: $h = 2r$.

1) M і K – точки дотику, O – центр вписаного кола $\rightarrow OM \equiv r$, $OK \equiv r$, $OM \perp AD$, $OK \perp BC$;
2) $BC \parallel AD$, $(OK) \perp BC \rightarrow (OK) \perp AD$. Тоді $(OK) \equiv (OM)$, адже з однієї точки можна провести тільки один перпендикуляр до прямої. Маємо $KM \equiv h = 2r$.

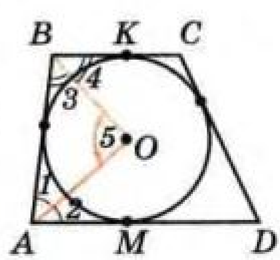
Щ. в. д.



$h = 2r$

Опорна задача 4

З центра вписаного в трапецію кола її бічну сторону видно під прямим кутом.

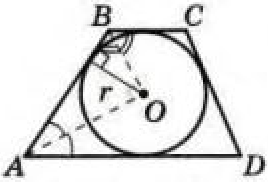


Дано: $BC \parallel AD$, *ABCD – описана.*
Довести: $\angle AOB = 90^\circ$.

1) $ABCD$ – описана $\rightarrow AO \equiv l_A$, $BO \equiv l_B$ і $\angle 1 = \angle 2 = \dfrac{1}{2}\angle A$, $\angle 3 = \angle 4 = \dfrac{1}{2}\angle B$;
2) $ABCD$ – трапеція $\rightarrow \angle A + \angle B = 180^\circ$;

3) $\triangle AOB$: $\angle 5 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3) = 180^\circ - \dfrac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 90^\circ$.

Щ. в. д.



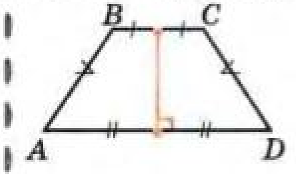
$\angle AOB = 90^\circ$

Нагадаємо позначення:
(OK) – пряма OK;
$\equiv$ – «збігається» або «тотожна рівність».

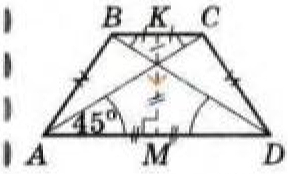
Наступні опорні задачі пропонуються для самостійного доведення.

Опорна задача 5. Якщо трапеція рівнобічна, то відрізок, що сполучає середини її основ, є висотою цієї трапеції. Правильним є й обернене твердження.

ABCD – трапеція



Опорна задача 6. Якщо діагоналі рівнобічної трапеції перетинаються під прямим кутом, то відрізок, що сполучає середини основ трапеції, дорівнює її середній лінії. Правильним є й обернене твердження.



$$KM = \frac{BC + AD}{2}$$

Опорна задача 7. Якщо прямі, що містять бічні сторони рівнобічної трапеції, перетинаються під прямим кутом, то відрізок, що сполучає середини основ цієї трапеції, дорівнює піврізниці цих основ. Правильним є й обернене твердження.

Практична робота 23

1. Побудуйте довільний рівнобедрений трикутник ABC з основою AC. Паралельно його основі проведіть пряму так, щоб вона перетнула бічні сторони трикутника. Точки перетину позначте літерами K і L так, щоб утворився чотирикутник $AKLC$. Який вид трапеції $AKLC$?
2. Побудуйте довільний прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою BC. Паралельно його стороні AC проведіть пряму так, щоб вона перетнула інші сторони трикутника. Точки перетину позначте літерами K і L так, щоб утворився чотирикутник $AKLC$. Який вид трапеції $AKLC$? Проведіть висоти і середню лінію утвореної трапеції.
3. Спробуйте зробити схематичні малюнки трапецій, в яких: **а)** два протилежні кути рівні; **б)** два протилежні кути тупі. Чи існують такі трапеції?

Завдання 15

1°. Кути при одній з основ трапеції дорівнюють 68° і 74°. Обчисліть інші кути трапеції.

2°. Один із кутів трапеції дорівнює 57°. Знайдіть інші кути трапеції, якщо: **а)** трапеція рівнобічна; **б)** трапеція прямокутна.

3. Кути при одній бічній стороні трапеції відносяться як 1 : 2, а при другій бічній стороні – як 1 : 3. Знайдіть кути трапеції, якщо: **а)** до більшої основи прилягають гострі кути; **б)** до більшої основи прилягають гострий і тупий кути.

4. Трапецію вписано в коло. Знайдіть її кути, якщо один з кутів дорівнює 54°.

5. Чи існує трапеція з кутами: **а)** 136°, 34°, 60°, 130°; **б)** 136°, 44°, 92°, 88°?

6. Чи можуть градусні міри кутів трапеції бути пропорційні числам: **а)** 6, 3, 4, 2; **б)** 8, 7, 13, 12?

7. Знайдіть кути трапеції $ABCD$ за малюнком 2.102.

а) б) в)

Мал. 2.102

8*. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть кути трапеції.

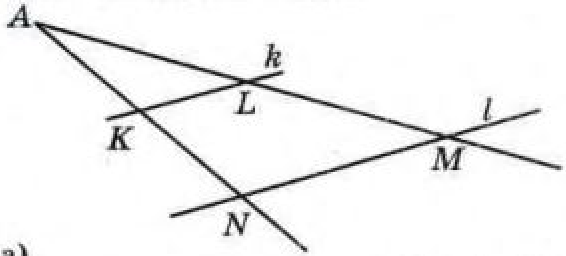
9*. Висота рівнобічної трапеції вдвічі менша за її бічну сторону. Знайдіть кути трапеції.

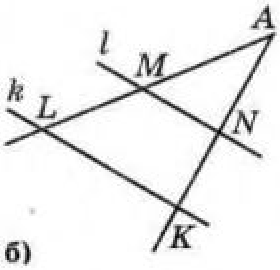
10*. Верхня основа прямокутної трапеції дорівнює меншій бічній стороні і вдвічі менша за нижню основу. Знайдіть кут між більшою бічною стороною і меншою діагоналлю трапеції.

11*. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, якщо основи дорівнюють 10 см і 4 см, а один з кутів дорівнює 135°.

12*. У прямокутній трапеції один з кутів дорівнює 120°, довжини основ – 4 см і 8 см. Знайдіть довжину меншої діагоналі.

13*. На малюнку 2.103 сторони кута A перетинають прямі k і l. Якою фігурою є чотирикутник $KLMN$, якщо: а) $AK = KN$, $AL = LM$; б) $AK = 2KN$, $AL = 2LM$? Обчисліть його периметр, якщо $AN = 10$ см, $AM = 12$ см, $MN = 8$ см.





Мал. 2.103

14°. Знайдіть довжину середньої лінії трапеції, якщо її основи дорівнюють: а) 2 см і 6 см; б) 12 см і 18 см.

15. Знайдіть невідому основу трапеції, якщо: а) середня лінія трапеції дорівнює 5 см, а одна з основ трапеції – 2 см; б) одна з основ трапеції дорівнює 4 см, а середня лінія на 1 см менша за неї.

16. Знайдіть основи трапеції, якщо: а) основи трапеції відносяться як 1 : 3, а середня лінія дорівнює 10 см; б) основи трапеції відносяться як 3 : 5, а їхня різниця дорівнює 4 см.

17. Основи трапеції дорівнюють 10 см і 4 см. Знайдіть довжини відрізків, на які діагоналі точками перетину поділяють середню лінію.

18*. Периметр описаної трапеції дорівнює 28 см, а відрізок середньої лінії трапеції, що міститься між її діагоналями, дорівнює 3 см. Знайдіть основи трапеції.

19*. Знайдіть відношення довжин основ трапеції, якщо діагоналі поділили середню лінію: а) на три рівні відрізки; б) у відношенні 2 : 1 : 2.

20. **а*)** Кожну бічну сторону трапеції поділили на чотири рівні частини і відповідні точки поділу сполучили відрізками прямих. Знайдіть довжини цих відрізків, якщо основи трапеції дорівнюють 2 см і 8 см. **б**)** Кожну бічну сторону трапеції поділили на три рівні частини і відповідні точки поділу сполучили відрізками прямих. Знайдіть довжини цих відрізків, якщо основи трапеції дорівнюють 2 см і 8 см.

21*. Обчисліть периметр рівнобічної трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 60°, а основи дорівнюють 15 см і 49 см.

22. Знайдіть периметр описаної рівнобічної трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 7 см.

23*. Довжини сторін трапеції дорівнюють 2 см, 2 см, 2 см і 4 см. Знайдіть радіус описаного навколо неї кола.

24. Бічна сторона описаної рівнобічної трапеції дорівнює 7см. Знайдіть середню лінію трапеції.

25*. У рівнобічній трапеції один з кутів дорівнює 60°, бічна сторона – 24 см, а сума основ – 44 см. Обчисліть довжини основ трапеції.

лкм.

26*. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 10 см і 4 см. Знайдіть її висоту, якщо діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні.

27*. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 8 см і 16 см. Знайдіть площу трапеції, якщо: **а)** менша діагональ є бісектрисою прямого кута; **б)** більша діагональ є бісектрисою прямого кута.

28.** Тупий кут прямокутної трапеції дорівнює 120°, а менша діагональ і більша бічна сторона – 12 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

29.** Середня лінія рівнобічної трапеції дорівнює 5 см, а відрізок середньої лінії трапеції, що міститься між її діагоналями, дорівнює 3 см. Знайдіть площу трапеції, якщо: **а)** прямі, що містять бічні сторони, взаємно перпендикулярні; **б)** діагоналі взаємно перпендикулярні.

30.** Середня лінія трапеції дорівнює 5 см, а відрізок, що сполучає середини основ, – 3 см. Кути при більшій основі дорівнюють 30° і 60°. Знайдіть основи та меншу бічну сторону трапеції.

31.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b, її діагоналі взаємно перпендикулярні. Знайдіть висоту трапеції та її площу.

32.** Основа трапеції дорівнює бічній стороні і вдвічі менша за другу основу. Доведіть, що друга бічна сторона перпендикулярна до однієї з діагоналей трапеції.

33.** Доведіть, що відрізок середньої лінії трапеції, що міститься між її діагоналями, дорівнює піврізниці основ трапеції.

34.** Доведіть, що в рівнобічній трапеції $ABCD$: **а)** висоти BK і CL відтинають на основі AD рівні відрізки AK і LD; **б)** середини сторін є вершинами ромба, периметр якого дорівнює сумі діагоналей; **в)** середини основ і діагоналей є вершинами ромба, периметр якого дорівнює сумі бічних сторін; **г)** діагоналі утворюють з бічними сторонами рівні кути.

35.** Сума кутів при більшій основі трапеції дорівнює 90°. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини основ трапеції, дорівнює їх піврізниці.

36.** Діагоналі трапеції перетинаються під прямим кутом. Висота трапеції дорівнює її середній лінії. Доведіть, що трапеція – рівнобічна.

37.** Доведіть, що точка перетину бісектрис двох кутів, прилеглих до однієї бічної сторони трапеції, лежить на середній лінії.

38.** Дано трапецію, в яку можна вписати коло. Доведіть, що кола, побудовані на бічних сторонах, як на діаметрах, дотикаються.

39.** Одна з бічних сторін трапеції дорівнює сумі основ. Доведіть, що бісектриси кутів при цій стороні перетинаються на другій бічній стороні.

40.** Побудуйте трапецію: **а)** за чотирма сторонами; **б)** за її основами, висотою і діагоналлю; **в)** за її основами, бічною стороною і діагоналлю; **г)** за трьома сторонами і діагоналлю; **д)** за висотою, бічними сторонами і однією діагоналлю; **е)** за висотою, середньою лінією та бічними сторонами.

Для допитливих

Як із прямокутника вирізати ромб найбільшої площі?

Розв'яжіть кілька задач відомого українського математика М. В. Остроградського (1801–1862).

1. У дане коло впишіть трикутник, кожна сторона якого (або їх продовження) проходить через одну із заданих трьох точок.

2. У дане коло впишіть трикутник, дві сторони якого проходять через задані дві точки, а третя сторона паралельна даній прямій.

3. У дане коло впишіть чотирикутник, кожна сторона якого (або їх продовження) проходить через одну із заданих чотирьох точок.

4. У дане коло впишіть трапецію, яка має дану висоту і дану площу.

Завдання для повторення розділу II

1°. Яка фігура називається чотирикутником? Які відрізки називаються діагоналями чотирикутника? Чому дорівнює сума внутрішніх кутів чотирикутника?

2°. Який чотирикутник називається вписаним? Чому дорівнює сума протилежних кутів вписаного чотирикутника?

3°. Який чотирикутник називається описаним? Сформулюйте теорему про властивість сторін описаного чотирикутника.

4°. Який чотирикутник називається паралелограмом? Який відрізок називається висотою паралелограма?

5°. Який паралелограм називається ромбом? Прямокутником? Квадратом?

6. Сформулюйте властивості: **а)** паралелограма; **б)** прямокутника; **в)** ромба; **г)** квадрата. Доведіть їх.

7. Сформулюйте ознаки: **а)** паралелограма; **б)** прямокутника; **в)** ромба; **г)** квадрата. Доведіть їх.

8°. Сформулюйте теорему Фалеса та наслідки з неї.

9°. Який відрізок у трикутнику називається середньою лінією. Сформулюйте теорему про середню лінію трикутника.

10°. Який чотирикутник називається трапецією? Яка трапеція називається рівнобічною? Яка трапеція називається прямокутною?

11°. Сформулюйте: **а)** властивості рівнобічної трапеції; **б)** ознаки рівнобічної трапеції.

12*. Придумайте і доведіть ознаки, відмінні від ознак, наведених у підручнику: **а)** паралелограма; **б)** ромба; **в)** квадрата; **г)** прямокутника; **д)** трапеції; **е)** рівнобічної трапеції.

13. Чи правда, що серед кутів опуклого чотирикутника завжди знайдеться хоча б один прямий або тупий кут?

14. Три кути чотирикутника дорівнюють $28°$, $62°$, $70°$. Чи може він бути опуклим?

15*. Три кути опуклого чотирикутника гострі. Доведіть, що серед них є кут, більший за $60°$.

16.** У чотирикутнику $ABCD$: $\angle A = \angle B = 100°$, $\angle ABD = 40°$, $\angle CAD = 60°$. Знайдіть кут ACD.

17. Чи існує чотирикутник, сторони якого дорівнюють 1 см, 2 см, 3 см і 6 см?

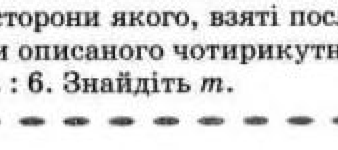
18. Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого, взяті послідовно, дорівнюють: **а)** 5 см, 6 см, 7 см і 8 см; **б)** 11 см, 7 см, 6 см і 10 см?

19*. **а)** Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого, взяті послідовно, відносяться як $3 : 4 : 5 : 6$? **б)** Сторони описаного чотирикутника, взяті послідовно, відносяться як $3 : 4 : m : 6$. Знайдіть m.

Для допитливих

1. Дано три точки A, B і C – вершини рівнобічної трапеції (мал. **А**). Побудуйте трапецію.

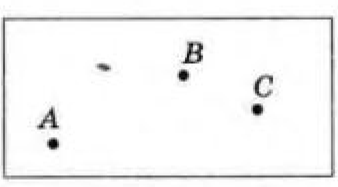
Зауваження. Задача настільки елементарна, що ви, мабуть, не стали її розв'язувати. Цікаво, чи подумали ви про те, що задача має три розв'язки?



А

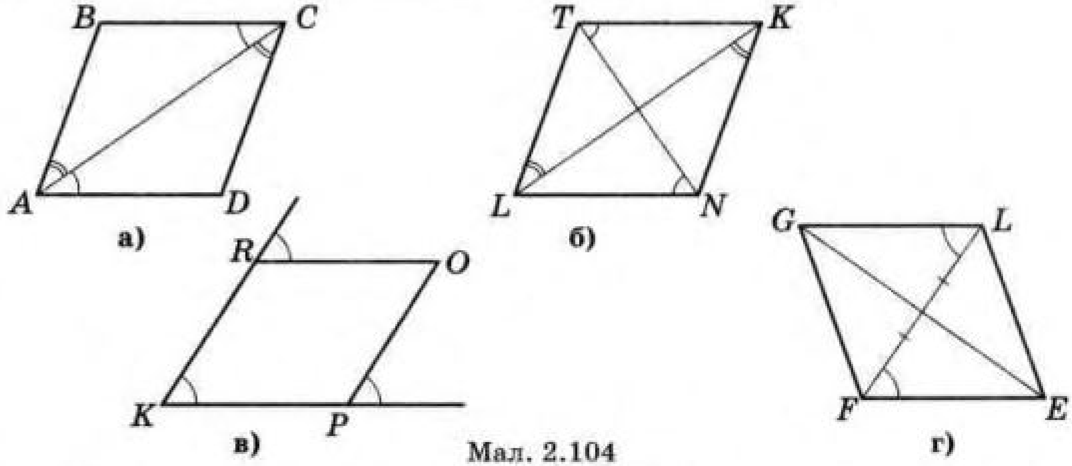
2. Дано три точки D_1, D_2 і D_3 (мал. **Б**) – вершини трьох рівнобічних трапецій. Відомо, що інші три вершини цих трапецій – спільні (A, B і C). Побудуйте ці трапеції.

Скільки розв'язків має задача?



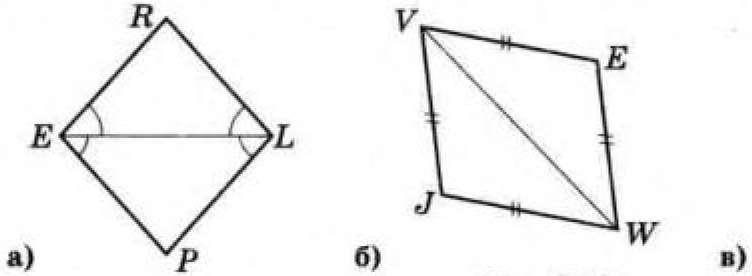
Б

20. Доведіть, що на малюнку 2.104 зображено паралелограми.



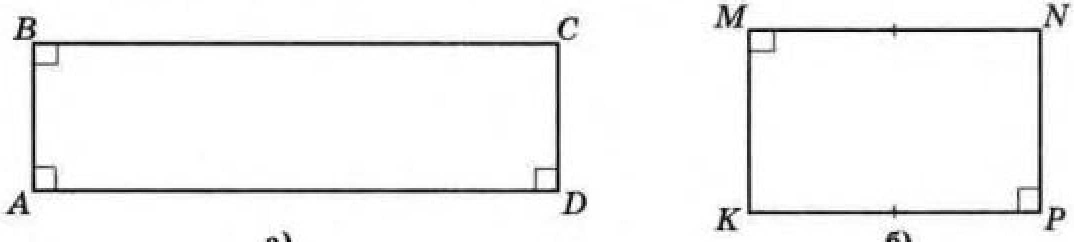
Мал. 2.104

21. Доведіть, що на малюнку 2.105 зображено ромби.



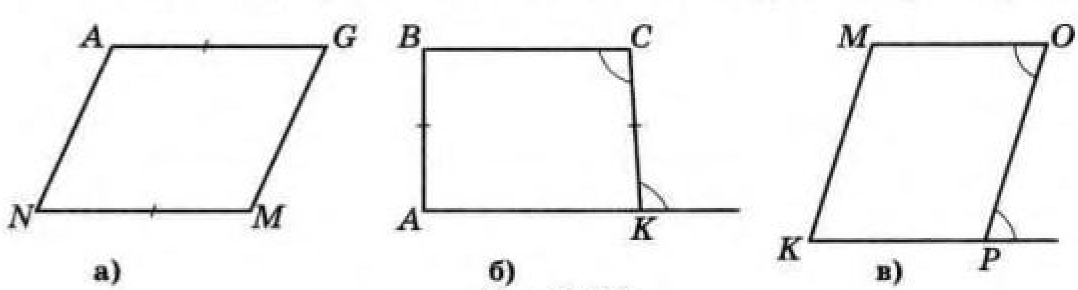
Мал. 2.105

22. Доведіть, що на малюнку 2.106 зображено прямокутники.



Мал. 2.106

23. Чи можна стверджувати, що на малюнку 2.107 зображено паралелограми?

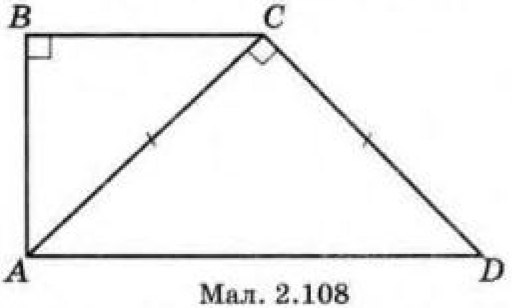


Мал. 2.107

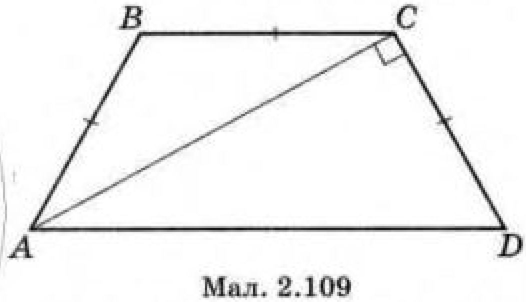
Для допитливих

Згинанням паперу виділіть з прямокутного трикутника квадрат так, щоб один з його кутів суміщався з прямим кутом даного трикутника, а вершина протилежного кута квадрата лежала на гіпотенузі трикутника.

24. Знайдіть кути паралелограма, якщо: а) один з його кутів дорівнює 27°; б) градусні міри двох його кутів відносяться як 2 : 3.
25. Знайдіть кути паралелограма, якщо кут між висотами, проведеними з однієї вершини, дорівнює 40°.
26. Бісектриса кута паралелограма перетинає його протилежну сторону під кутом 37°. Знайдіть кути паралелограма.
27. Знайдіть сторони паралелограма, периметр якого дорівнює 28 см, якщо: а) одна сторона більша за другу на 4 см; б) одна сторона у 2,5 раза довша за другу; в) сторони відносяться як 2 : 3.
28*. У паралелограмі $ABCD$ проведено бісектриси кутів A і B, які перетинаються в точці F. Доведіть, що трикутник ABF прямокутний.
29. Периметр трикутника, утвореного середніми лініями трикутника ABC, дорівнює 12 см. Знайдіть периметр трикутника ABC.
30. Знайдіть: а) висоту ромба зі стороною 10 см і тупим кутом 150°; б) площу прямокутника, якщо бісектриси двох кутів, прилеглих до однієї сторони, ділять протилежну сторону на відрізки 3 см, 5 см і 3 см; в) діагоналі чотирикутника, утвореного бісектрисами кутів прямокутника зі сторонами 3 см і 6 см.
31*. Периметр паралелограма дорівнює 48 см. Бісектриса одного з його кутів поділяє паралелограм на дві частини, різниця периметрів яких становить 6 см. Знайдіть довжини сторін паралелограма.
32. Два кути трапеції дорівнюють: а) 74° і 74°; б) 45° і 120°. Знайдіть інші кути.
33. Знайдіть кути трапеції, якщо: а) один кут дорівнює 100°, а трапеція прямокутна; б) один кут трапеції дорівнює 45°, а трапеція рівнобічна.
34. У прямокутній трапеції $ABCD$ (мал. 2.108) діагональ $AC \perp CD$ і $AC = CD$. Знайдіть $\angle BCD$.
35*. У трапеції $ABCD$ (мал. 2.109) $AB = BC = CD$ і $AC \perp CD$. Знайдіть $\angle B$ і $\angle D$.



Мал. 2.108



Мал. 2.109

36*. У трапеції бічні сторони дорівнюють меншій основі, а кут між діагоналлю і основою становить 30°. Знайдіть кути трапеції.

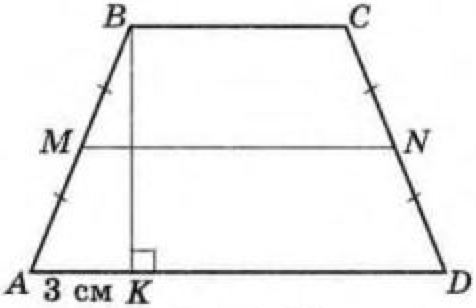
Для допитливих

1. Всередині заданого гострого кута через задану точку проведіть пряму так, щоб її відрізок, що міститься всередині кута, ділився даною точкою навпіл.
2. Всередині гострого кута дано дві точки M і P. Побудуйте на сторонах кута точки A і B так, щоб периметр чотирикутника з вершинами в цих точках був найменшим.
3. Діагоналі вписаного чотирикутника взаємно перпендикулярні. З точки їх перетину провели перпендикуляри до всіх сторін чотирикутника. Доведіть, що основи цих перпендикулярів та середини сторін чотирикутника належать одному колу.
4. Якщо відрізок, що сполучає середини двох протилежних сторін опуклого чотирикутника, дорівнює півсумі двох інших сторін, то такий чотирикутник є паралелограмом або трапецією. Доведіть це.

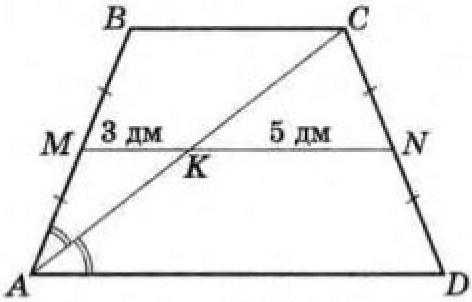
37. Бічна сторона рівнобічної трапеції, яка описана навколо кола, дорівнює 2 см. Знайдіть периметр трапеції.

38. У трапеції $ABCD$ (мал. 2.110) $AM = MB = CN = ND$ і $BK \perp AD$, $AK = 3$ см, $DA = 7$ см. Знайдіть MN.

39*. У трапеції $ABCD$ (мал. 2.111) $AM = MB = CN = ND$, $\angle BAC = \angle CAD$, $MK = 3$ дм, $KN = 5$ дм. Знайдіть периметр трапеції.

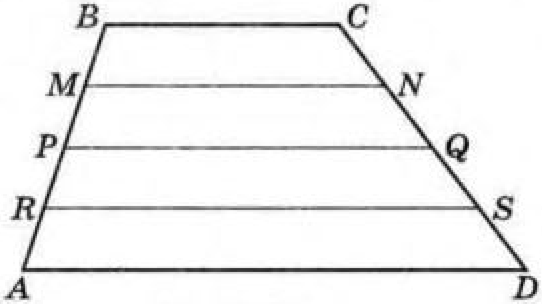


Мал. 2.110



Мал. 2.111

40*. Бічну сторону трапеції поділили на рівні відрізки: $BM = MP = PR = RA$; прямі $MN \parallel PQ \parallel RS \parallel AD$; $BC = 15$ см; $AD = 23$ см (мал. 2.112). Знайдіть MN, PQ і RS.



Мал. 2.112

41*. Середня лінія описаної трапеції ділиться діагоналями на три рівні відрізки завдовжки 1,5 см кожний. Знайдіть основи і периметр трапеції.

42*. У рівнобічній трапеції $ABCD$ проведено діагоналі AC і BD. Доведіть, що $\angle ABD = \angle ACD$.

43*. Діагоналі рівнобічної трапеції ділять її на чотири трикутники. Доведіть, що трикутники, які прилягають до бічних сторін, рівні.

44*. Середня лінія MN трапеції $ABCD$ перетинає діагональ AC в точці P і діагональ BD в точці Q. Доведіть, що $MP = NQ$.

45.** Побудуйте чотирикутник $ABCK$ за кутами A і B, сторонами AB і AK та сумою двох інших сторін.

46.** Точка перетину діагоналей чотирикутника рівновіддалена від усіх його сторін. Визначте вид чотирикутника.

Для допитливих

Через точку всередині квадрата провели прямі паралельно його сторонам і діагоналям (див. мал.). Доведіть, що сума площ незафарбованих частин квадрата дорівнює сумі площ зафарбованих частин квадрата.

У перекладі з латинської «квадрат» означає чотирикутний.

Готуємося до тематичного оцінювання № 2

Варіант I

1. (2 б.) Знайдіть кути паралелограма, якщо один з його кутів дорівнює 57°.
2. (2 б.) Одна із сторін прямокутника на 4 см менша від іншої. Знайдіть площу цього прямокутника, якщо його периметр дорівнює 16 см.
3. (2 б.) Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 3 см, а її середня лінія – 5 см. Знайдіть периметр цієї трапеції.
4. (3 б.) Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 8 см і 6 см, а два його кути відносяться як 1 : 5.
5. (3 б.) У прямокутній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута, а її довжина вдвічі більша за меншу основу. Знайдіть кути трапеції.

Варіант II

1. (2 б.) Два кути трапеції дорівнюють 32° і 116°. Знайдіть два інші її кути.
2. (2 б.) Периметр квадрата дорівнює 28 см. Знайдіть його площу.
3. (2 б.) Середня лінія рівностороннього трикутника дорівнює 45 мм. Знайдіть периметр цього трикутника.
4. (3 б.) Знайдіть площу прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 4 см і 6 см, а один із кутів дорівнює 135°.
5. (3 б.) У паралелограмі $ABCD$ $\angle B = 120^\circ$. Бісектриса кута ABD ділить сторону AD на дві рівні частини. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $BD = 5$ см.

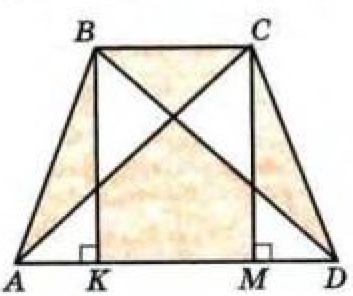
Для допитливих

1. Діагоналі трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перетинаються в точці O. Доведіть, що трикутники ABO і CDO – рівновеликі.

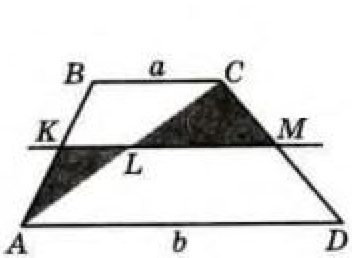
2. У рівнобічній трапеції провели діагоналі і висоти з вершин верхньої основи (мал. **А**). Доведіть, що сума площ незафарбованих частин трапеції дорівнює сумі площ зафарбованих її частин.

3. У трапеції $ABCD$: $BC \parallel AD$, $BC = a$, $AD = b$ (мал. **Б**). На якій відстані від AD треба провести пряму паралельно основам трапеції, щоб сума площ трикутників AKL і LMC була найменшою (K, L і M – точки перетину прямої з відрізками AB, AC і CD відповідно)?

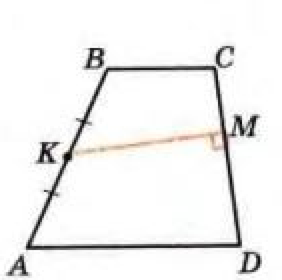
4. З середини однієї бічної сторони трапеції до другої її бічної сторони провели перпендикуляр (мал. **В**). Доведіть, що площа трапеції дорівнює добутку довжини цього перпендикуляра на довжину бічної сторони трапеції, до якої проведено цей перпендикуляр.



А



Б



В

Всесвітньо відомий геній Альберт Ейнштейн, якого в дитинстві вчителі вважали тупоголовою, хоча й наполегливою дитиною, зумів у своїй теорії відносності поєднати геометрію, оптику, механіку і електромагнітні сили.

Розділ III
ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

Основна мета розділу – вивчення властивостей подібних фігур. З проявами подібності ми часто стикаємося в житті, наприклад, коли розглядаємо на полиці магазину машину-іграшку, подібну до справжньої, або взуття одного фасону, але різних розмірів. Проте перевести наші життєві уявлення про подібність фігур на чітку математичну мову, мову геометрії не надто легко. Тому ми почнемо вивчення властивостей подібності з основної геометричної фігури – з трикутника. Допоможе нам у цьому теорема про пропорційні відрізки.

§ 17. Пропорційні відрізки

Розглянемо дві пари чисел a і b, c і d. Будемо казати, що ці пари *пропорційні*, якщо їх відношення рівні, тобто має місце рівність $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Така рівність називається *пропорцією*.

Пропорціями користувалися для розв'язування різних задач ще в стародавні та середні віки. Певні типи задач легко розв'язуються і сьогодні за допомогою пропорцій.

Пропорції і пропорційність застосовували і застосовують не лише в математиці, а ще й, наприклад, в хімії, архітектурі, мистецтві тощо. Пропорційність є умовою правильної і красивої побудови зображення.

Пропорція

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\Downarrow$$

$$a\cdot d=b\cdot c$$

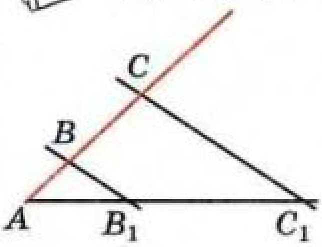
$$\frac{a\cdot d}{b}=c$$

$$a=\frac{c\cdot b}{d}$$

Для допитливих

Слово «пропорція» походить від латинського *proportio*, що означає співвимірність, певне співвідношення частин між собою.

Теорема (узагальнена теорема Фалеса, або теорема про пропорційні відрізки). **Паралельні прямі, що перетинають кут, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки.**



Мал. 3.1

Нехай маємо кут A і дві паралельні прямі, які перетинають одну сторону цього кута в точках B і C, а другу – B_1 і C_1 (мал. 3.1). Треба довести, що:

$$BC : AB = B_1C_1 : AB_1.$$

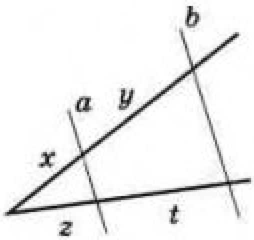
Доведення

Застосуємо метод «від супротивного». Нехай $(BC : AB) \neq (B_1C_1 : AB_1)$.

ВИПАДОК 1. <u>Нехай $(BC : AB) < (B_1C_1 : AB_1)$.</u>

Позначимо на стороні AC кута A точку M так, щоб $BM : AB = B_1C_1 : AB_1$ (мал. 3.2).

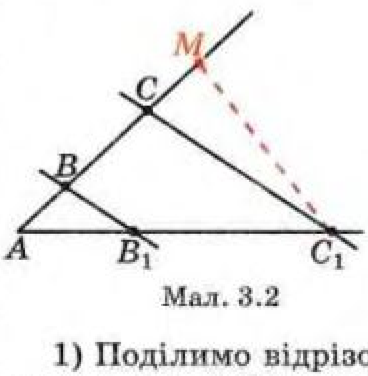
Узагальнена теорема Фалеса



$a \parallel b$

$\Downarrow$

$\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$



Мал. 3.2

Мал. 3.3

1) Поділимо відрізок AB на рівні частини так, щоб довжина однієї частини a була менша за довжину відрізка CM.

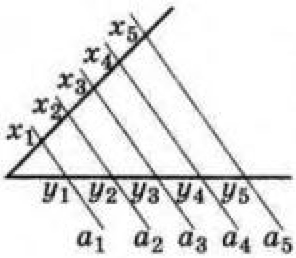
2) На промені BM (від точки B) будемо відкладати відрізки, рівні a, доти, доки кінець K одного з побудованих відрізків не опиниться на відрізку CM (мал. 3.3). Відрізок AK містить n таких відрізків. Їхні праві кінці позначимо як $K_1 \dots K_n$ ($K_m \equiv B$, $K_n \equiv K$).

3) Через точки $K_1 \dots K_n$ проведемо прямі, паралельно BB_1. Ці прямі перетнуть другу сторону кута A у точках $E_1, \dots E_n$ (мал. 3.3). За теоремою Фалеса $AE_1 = E_1E_2 = \dots = E_{n-1}E_n \triangleq b$.

4) Відрізок AB містить m відрізків a, тому:
$AB = m \cdot a$ і $AB_1 = m \cdot b$;
$BK_n = (n - m) \cdot a$ і $B_1E_n = (n - m) \cdot b$.

5) Тоді: $\frac{BK_n}{AB} = \frac{n-m}{m} = \frac{B_1E_n}{AB_1}$,

але $\frac{BK_n}{AB} < \frac{BM}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} < \frac{B_1E_n}{AB_1}$. Маємо протиріччя.



$a_1 \parallel a_2 \parallel a_3 \parallel \dots \parallel a_n$

$\Downarrow$

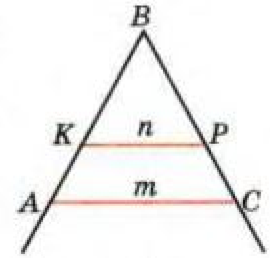
$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$

Нагадаємо позначення:
$\triangleq$ – «позначили як»,
$\equiv$ – «збігається» або «тотожна рівність».

ВИПАДОК 2. $(BC : AB) > (B_1C_1 : AB_1)$.

У цьому разі змінимо позначення точки B на B_1, точки C на C_1 і маємо перший випадок.

Висновок: наше припущення було хибним, і твердження теореми виконується.



$$n \parallel m \quad \Downarrow \quad \frac{KB}{AB} = \frac{BP}{BC}$$

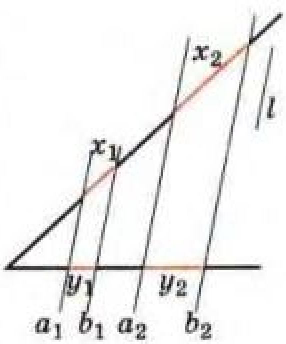
Н Наслідок 1. **Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від нього трикутники. Сторони цих трикутників, що містять заданий кут, пропорційні.**

На малюнку 3.4 $KP \parallel AC$. За теоремою маємо, що

$$\frac{AK}{KB} = \frac{CP}{PB}.$$

Якщо додати до обох частин цієї рівності по 1, отримаємо

$$\frac{AK + KB}{KB} = \frac{CP + PB}{PB}, \text{ тобто } \frac{AB}{KB} = \frac{CB}{BP}.$$

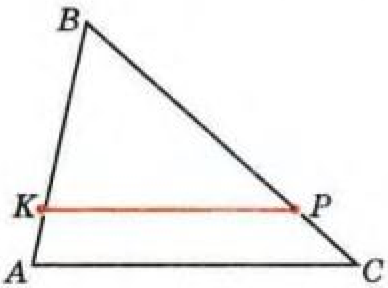


$$\frac{a_1 \parallel l \parallel b_1 \quad a_2 \parallel l \parallel b_2}{\Downarrow} \qquad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \text{const}$$

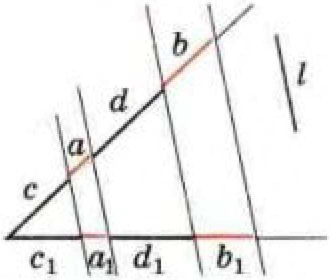
Н Наслідок 2. **Якщо задано кут і деяку пряму l, то будь-які дві прямі, паралельні l, що перетинають цей кут, відтинають на його сторонах відрізки, відношення яких є сталим (для заданого кута і заданої прямої l).**

Наприклад, на малюнку 3.5 проведено прямі, паралельні l.

За теоремою маємо, що $\frac{c}{c_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{b}{b_1}$, тобто $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$.



Мал. 3.4



Мал. 3.5

Для допитливих

До XVI ст. пропорції записували словами повністю або скорочено. Робилися спроби спеціального позначення для пропорцій.

Наприклад, в одному рукописі XII ст., знайденому в Індії, пропорцію 10 : (163/60) = 4 : (163/150) записано так, як показано на малюнку **А**.

10	163	4	163
1	60	1	150

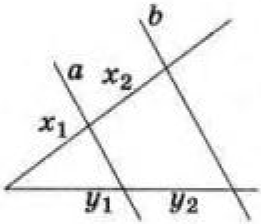
А

У середні віки математики країн ісламу, які писали арабською мовою справа наліво, застосовували для запису пропорції три крапки, наприклад, сучасний запис пропорції 7 : 12 = 84 : 144 тоді мав вигляд, який ви бачите на малюнку **Б**.

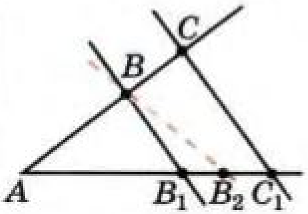
144 ∴ 84 ∴ 12 ∴ 7

Б

Теорема (обернена до узагальненої теореми Фалеса). **Якщо на сторонах кута від його вершини відкласти пропорційні відрізки і через їхні кінці провести прямі, то ці прямі будуть паралельними одна одній.**



$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$$
$$\Downarrow$$
$$a \parallel b$$



Мал. 3.6

На сторонах кута A відкладено відрізки, довжини яких задовольняють співвідношення

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB_1}{AC_1} \text{ (мал. 3.6).}$$

Треба довести, що $BB_1 \parallel CC_1$.

Доведення

Доведемо теорему від супротивного. Нехай $BB_1 \nparallel CC_1$. Через точку B проведемо пряму, паралельну CC_1, яка перетне промінь AC_1 у точці $B_2 \neq B_1$.

1) $BB_2 \parallel CC_1$, тоді $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB_2}{AC_1}$.

2) $\dfrac{AB_2}{AC_1}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB_1}{AC_1}$, звідси $AB_2 = AB_1$, чого бути не може.

Припущення хибне, і $BB_1 \parallel CC_1$.

Теорему доведено.

Нагадаємо позначення:
$\neq$ – «не збігається».

Видатний давньогрецький математик Фалес (VI ст. до н.е.) мав славу людини, що надала геометрії логіки, ввівши в неї доведення. Якщо раніше геометрів задовольняла відповідь на запитання «як», то Фалес ставив запитання «чому».

Відрізок x називається четвертим пропорційним трьох даних відрізків a, b і c, якщо виконується співвідношення $a : b = c : x$.

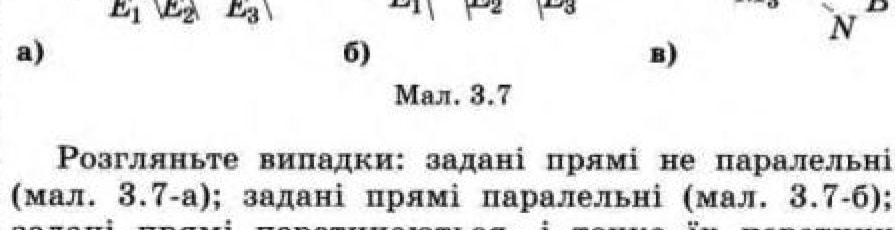
$a : b = c : x$

Четвертий пропорційний

Опорна задача 1

Доведіть самостійно такий наслідок з узагальненої теореми Фалеса.

Якщо дві прямі перетнуто паралельними прямими, то на заданих прямих відтинаються пропорційні відрізки.



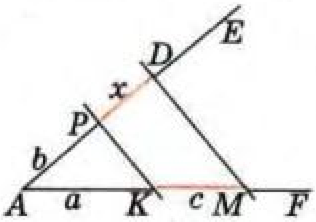
Мал. 3.7

Розгляньте випадки: задані прямі не паралельні (мал. 3.7-а); задані прямі паралельні (мал. 3.7-б); задані прямі перетинаються, і точка їх перетину лежить між паралельними прямими (мал. 3.7-в).

Опорна задача 2

ПОБУДОВА ЧЕТВЕРТОГО ПРОПОРЦІЙНОГО ВІДРІЗКА

За даними відрізками a, b, c побудувати відрізок x, довжина якого дорівнює $x = \dfrac{cb}{a}$.



Дано: a, b і c.

Побудувати: $x = \dfrac{cb}{a}$.

План побудови

1) $\angle FAE$ – довільний;
2) на $[AF)$ відкладаємо $AK = a$, $KM = c$;
3) на $[AE)$ відкладаємо $AP = b$;
4) будуємо $MD \parallel KP$; $x = PD$ – шуканий.

Доведення

Маємо за побудовою: $AK = a$; $KM = c$; $AP = b$; $MD \parallel KP$.

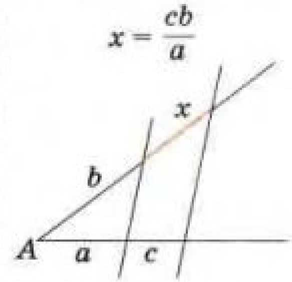
Тоді за узагальненою теоремою Фалеса:

$$a : b = c : x \text{ і } x = \frac{cb}{a}.$$

Щ. в. д.

ЧЕТВЕРТИЙ ПРОПОРЦІЙНИЙ:

$$x = \frac{cb}{a}$$

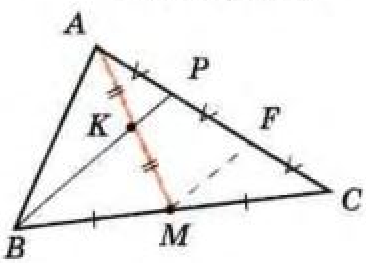


$\angle A$ – довільний

Нагадаємо позначення:
$B \equiv A$ – точка B «збігається» з точкою A,
$B \not\equiv A$ – точка B «не збігається» з точкою A,
$[AE)$ – промінь з початком у точці A,
(KP) – пряма KP.

Опорна задача 3

Точка K ділить медіану AM трикутника ABC навпіл. У якому відношенні пряма BK ділить сторону AC?



Дано: $BM = MC$, $AK = KM$.

Знайти: $AP : PC$.

Проведемо $MF \parallel BP$.

1) Розглянемо $\angle MAC$:
$$\left.\begin{array}{r} AK = KM \\ KP \parallel MF \end{array}\right| \to AP = PF$$
(за теоремою Фалеса).

2) Розглянемо $\angle ACB$:
$$\left.\begin{array}{r} BM = MC \\ BP \parallel MF \end{array}\right| \to PF = FC.$$

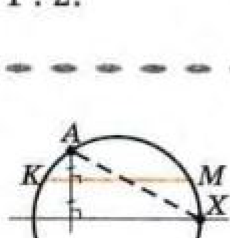
Маємо $AP = PF = FC$. Тоді $AP : PC = 1 : 2$.

Відповідь: $AP : PC = 1 : 2$.

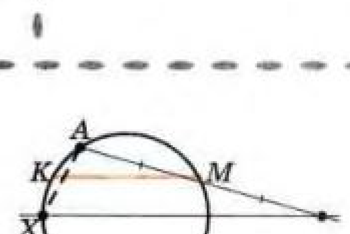
Для допитливих

Точка A лежить на колі, MK – хорда цього кола. Знайдіть на колі таку точку X, щоб хорда MK поділяла хорду AX навпіл.

Розв'язати цю задачу двома способами вам допоможуть малюнки **А** і **Б** відповідно.



А



Б

Практична робота 24

1. Накресліть гострий кут з вершиною в точці A.
2. На одній із сторін кута відкладіть від вершини послідовно відрізки: $AB = 2$ см, $BC = 4$ см.
3. За допомогою косинця і лінійки (див. практичну роботу 17) через кінці відрізків проведіть паралельні прямі так, щоб вони перетнули другу сторону кута в точках B_1 і C_1.
4. Виміряйте лінійкою відрізки AB_1, AC_1, B_1C_1, BB_1, CC_1.
5. Порівняйте відношення: а) $\frac{AB}{AC}$, $\frac{AB_1}{AC_1}$ і $\frac{BB_1}{CC_1}$; б) $\frac{AB}{AB_1}$ і $\frac{BC}{B_1C_1}$. Зробіть висновки.

Завдання 16

1°. Знайдіть відношення відрізків AB і CD, якщо їх довжини дорівнюють відповідно 18 см і 24 см. Чи зміниться це відношення, якщо довжини відрізків виразити в дециметрах?

2°. Знайдіть x із пропорції:

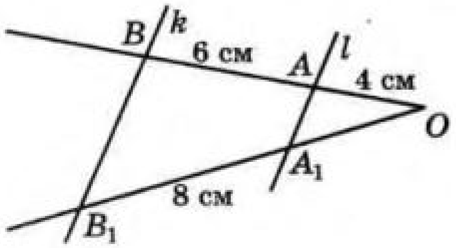
а) $\frac{x}{75}=\frac{7}{3}$; б) $\frac{21}{x}=\frac{3}{2}$; в) $2\frac{1}{2}:0{,}6x-1{,}1:0{,}5$; г) $4\frac{1}{3}:0{,}2x=1{,}3:0{,}3$.

3°. Точка M поділяє відрізок AB на два такі відрізки, що $AM : MB = 1 : 2$. Знайдіть $AM : AB$ і $MB : AB$.

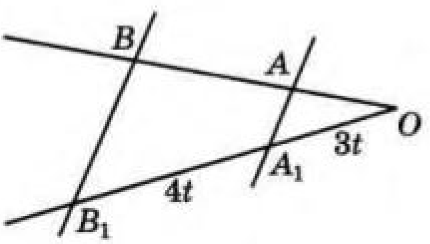
4. Точки C і D поділяють відрізок AB на три такі відрізки, що $AC : CD : DB = 2 : 3 : 1$. Знайдіть: а) $AD : DB$; б) $CD : DB$; в) $CB : AC$; г) $AB : CD$.

5°. Паралельні прямі k і l перетинають сторони кута BOB_1 (мал. 3.8). Знайдіть довжину відрізка OA_1, якщо $AO = 4$ см, $AB = 6$ см, $A_1B_1 = 8$ см.

6°. За малюнком 3.9 знайдіть відношення: а) $OA : AB$; б) $OA : OB$; в) $OB : AB$, якщо прямі, що перетинають сторони кута, паралельні.



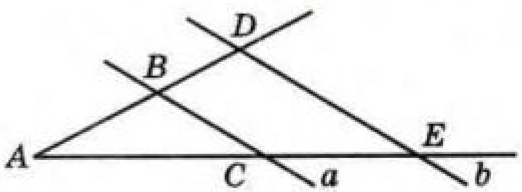
Мал. 3.8



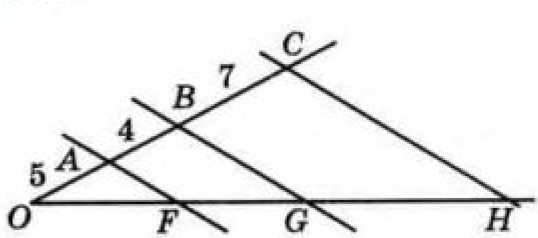
Мал. 3.9

7°. Сторони кута A перетнули паралельними прямими a і b (мал. 3.10). Знайдіть довжину відрізка BC, якщо $AD = 8$ см, $ED = 6$ см, $AB = 4$ см.

8. На малюнку 3.11 $AF \parallel BG \parallel CH$. Знайдіть відношення відрізків: а) $OF : FG : GH$; б) $OF : FH$; в) $OG : GH$.



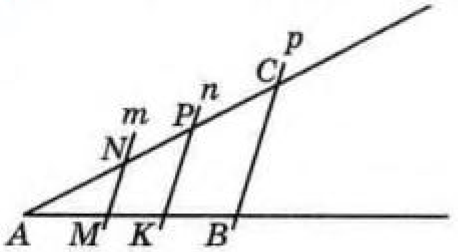
Мал. 3.10



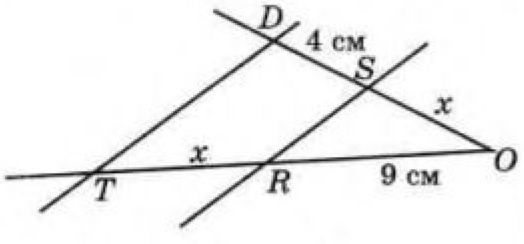
Мал. 3.11

9. Прямі m, n, p – паралельні між собою (мал. 3.12). Знайдіть довжини відрізків KM і PC, якщо $AM = 2$ см, $AN = 3$ см, $NP = BK = 6$ см.

10. За малюнком 3.13 знайдіть x.



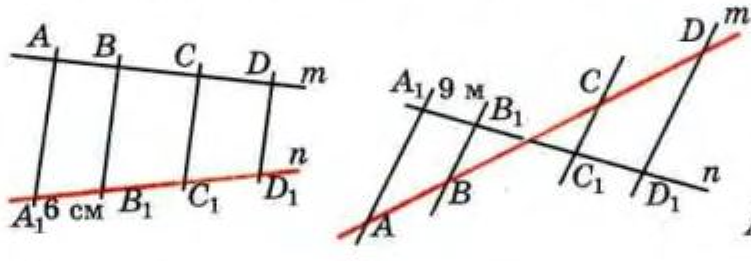
Мал. 3.12



Мал. 3.13

11*. Прямі m і n перетнули паралельними прямими (мал. 3.14). Знайдіть довжини відрізків B_1C_1 і C_1D_1, якщо $AB : BC : CD = 3 : 6 : 5$.

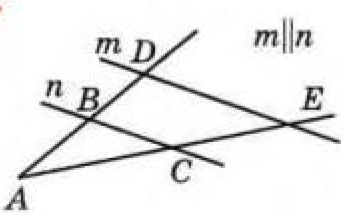
12**. Знайдіть довжину відрізка DE (мал. 3.15), якщо: а) $AB = 2$ см, $BD = 1$ см, $BC = 1$ см; б) $AB = 6$ см, $BD = 4$ см, $DE - BC = 2$ см. (Порада. Через точку C проведіть допоміжну пряму, паралельну AD.)



а)

б)

Мал. 3.14



Мал. 3.15

13**. На сторонах AB і AC трикутника ABC взято відповідно точки M і P такі, що $AM : AB = 3 : 4$ і $AP : AC = 3 : 4$. Знайдіть довжину відрізка MP, якщо $BC = 10$ см.

14**. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято такі точки M і N, що $BM : BA = BN : BC = 1 : 3$. Точки D і E ділять сторону AC на три рівні частини ($AD = DE = EC$). Доведіть, що $MD = NE$.

15**. Точка M ділить медіану AA_1 трикутника ABC так, що $MA_1 = 2AM$. У якому відношенні пряма BM ділить сторону AC?

16**. Пряма BB_1 ділить сторону AC трикутника ABC у відношенні $1 : 3$, рахуючи від вершини C. В якому відношенні вона ділить медіану AA_1?

17**. Медіана BM ділить висоту AH трикутника ABC у відношенні $3 : 1$, рахуючи від вершини. В якому відношенні ця висота ділить медіану?

18**. За даними відрізками побудуйте відрізок, рівний: а) $a^2 : b$; б) $abc : de$.

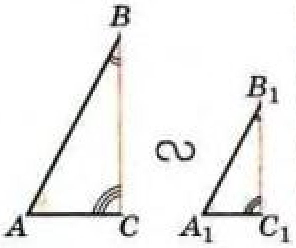
Для допитливих

1. Дано пряму l і три точки поза нею, що не лежать на одній прямій. Проведіть (побудовою) через дані точки паралельні між собою прямі, що відтинають на заданій прямій l рівні відрізки.

2. Побудуйте паралелограм $ABCD$ за серединою сторони AD і серединами висот, проведених з вершини B.

3. Вершина A трикутника ABC переміщується так, що довжина медіани CK не змінюється. Яку лінію при цьому описує вершина A?

§ 18. Подібність трикутників



$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

якщо:

$\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1$

$\angle C = \angle C_1$

і

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$$

Відповідні:

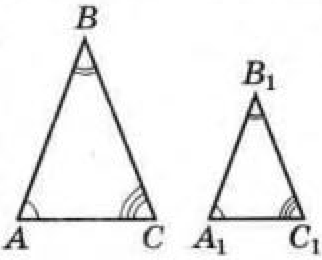
AB і A_1B_1,

AC і A_1C_1,

BC і B_1C_1.

Два трикутники називаються подібними, якщо в них рівні кути, а проти рівних кутів лежать пропорційні сторони.

Дві сторони подібних трикутників, які лежать проти рівних кутів, називаються *відповідними сторонами*. Вершини подібних трикутників, які є вершинами рівних кутів, називаються *відповідними вершинами*. Рівні кути подібних трикутників називаються *відповідними кутами*.



Мал. 3.16

На малюнку 3.16 трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ – подібні. При цьому відповідними вершинами є вершини A і A_1, B і B_1, C і C_1. Відповідні кути цих трикутників рівні: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Відповідні сторони цих трикутників пропорційні:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}.$$

Позначимо відношення відповідних сторін цього трикутника через k. Його називають *коефіцієнтом подібності* трикутника $A_1B_1C_1$ відносно трикутника ABC.

Подібність трикутників прийнято позначати символом $\backsim$. У нашому випадку $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$ (мал. 3.16).

Ми щойно дали означення подібних трикутників. А те, що такі трикутники справді існують, стверджує наступна теорема – основна теорема в геометрії подібних трикутників.

Для допитливих

Лема Архімеда про перпендикуляри на січну

Коло і перпендикуляри, проведені з кінців діаметра на січну, відтинають на ній рівні відрізки.

Доведення

Можливі два випадки: діаметр і січна перетинаються всередині кола; січна перетинає не діаметр, а його продовження.

ВИПАДОК 1.

Нехай діаметр AB і січна CD перетинаються всередині кола (мал. **А**), O – діаметр кола.

1) Проведемо $OT \perp CD$, $AK \perp CD$, $BM \perp CD$. Тоді $CT = TD$.

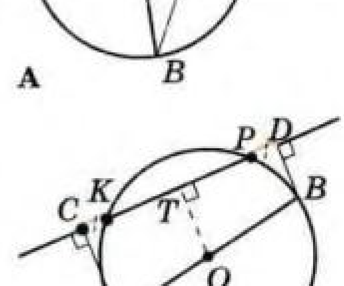
2) $AK \parallel OT \parallel MB$ і $KT : TM = AO : OB$.

3) $AO = OB$ як радіуси. Тоді $KT = TM$ (див. с. 80).

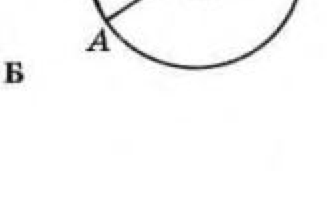
4) $CK = CT - KT = TD - TM = MD$.

ВИПАДОК 2.

У випадку, коли січна перетинає не діаметр, а його продовження (мал. **Б**), рівність $CK = PD$ доводиться аналогічно. Переконайтеся в цьому самостійно.

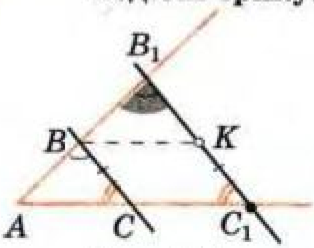


А



Б

Т Теорема (*основна теорема подібності трикутників*). **Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, обмежують разом з його сторонами подібні трикутники.**



Мал. 3.17

На малюнку 3.17 кут A перетинають дві паралельні прямі: $BC \parallel B_1C_1$. Треба довести, що кути цих трикутників рівні, а відповідні сторони пропорційні.

Доведення

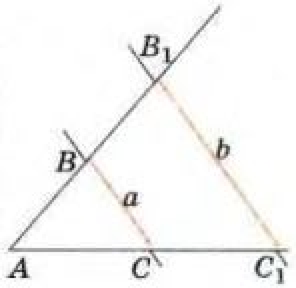
1) Рівність кутів випливає з властивості паралельних прямих.

2) $BC \parallel B_1C_1$, тоді за наслідком з узагальненої теореми Фалеса маємо: $AB_1 : AB = AC_1 : AC$.

3) Через точку B проведемо $BK \parallel AC_1$ (мал. 3.17). Тоді $BC = KC_1$, оскільки $CBKC_1$ – паралелограм.

4) Кут AB_1C_1 перетинають паралельні прямі BK і AC_1. Тоді $B_1C_1 : KC_1 = AB_1 : AB$ і, враховуючи п п. 2 і 3, маємо: $B_1C_1 : BC = AB_1 : AB = AC_1 : AC$.

Теорему доведено.



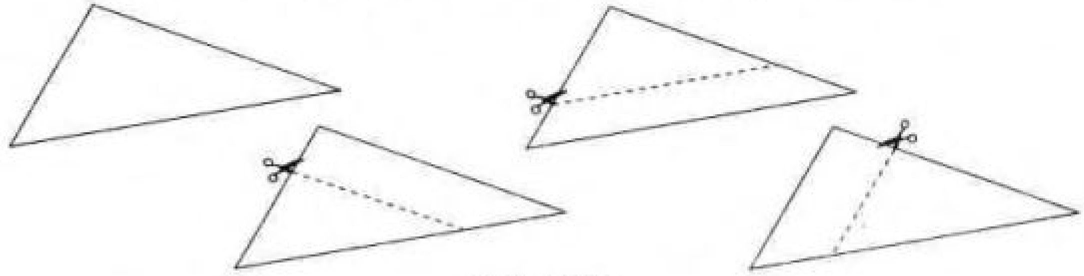
$a \parallel b$

$\Downarrow$

$\triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1$

Практична робота 25

1. Виріжте з паперу чотири рівні трикутники.
2. Один з них залиште без змін, а від інших відріжте частини, що відтинаються прямими, паралельними кожній зі сторін (мал. 3.18).


Мал. 3.18

3. Порівняйте кути трьох отриманих трикутників із кутами першого трикутника. Зробіть висновок.
4. Виміряйте довжини сторін двох утворених трикутників. Порівняйте відношення довжин їх відповідних сторін. Зробіть висновок.

Для допитливих

Спираючись на лему Архімеда про перпендикуляри на січну, розв'яжіть такі задачі.

1. Одна з діагоналей чотирикутника є діаметром кола, описаного навколо цього чотирикутника. Доведіть, що проекції протилежних сторін цього чотирикутника на другу діагональ, що не є діаметром кола, рівні між собою.

2. Навколо трикутника описано коло. Доведіть, що проекція діаметра, перпендикулярного до однієї зі сторін трикутника, на другу сторону цього трикутника дорівнює третій його стороні.

3. Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається до сторони BC трикутника в точці K. Зовнівписане коло дотикається до сторони BC трикутника ABC в точці T. Доведіть, що $CT = BK$.

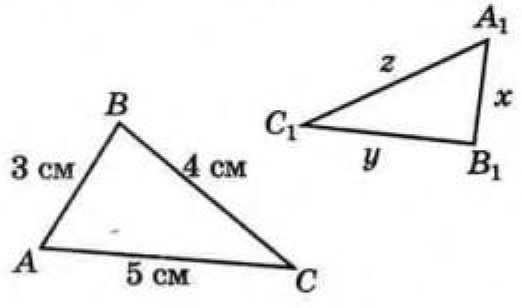
Завдання 17

1°. Чи подібні трикутники ABC і EDF, якщо $\angle A = 106^\circ$, $\angle B = 34^\circ$, $\angle E = 106^\circ$, $\angle F = 40^\circ$, $AC = 4{,}4$ см, $AB = 5{,}2$ см, $BC = 7{,}6$ см, $DE = 15{,}6$ см, $DF = 22{,}8$ см, $EF = 13{,}2$ см?

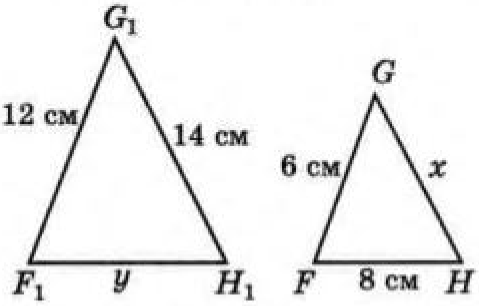
2°. На малюнку 3.19 $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ – подібні, $A_1B_1 : AB = 1 : 2$. Знайдіть: x, y, z.

3°. На малюнку 3.20 $\triangle FGH$ і $\triangle F_1G_1H_1$ подібні. Знайдіть x, y.

4. Трикутники KLM і $K_1L_1M_1$ – подібні. $KL = 6$ см, $L_1M_1 = 21$ см, $K_1M_1 = 24$ см. $K_1L_1 : KL = 3 : 1$. Знайдіть сторони трикутника KLM.



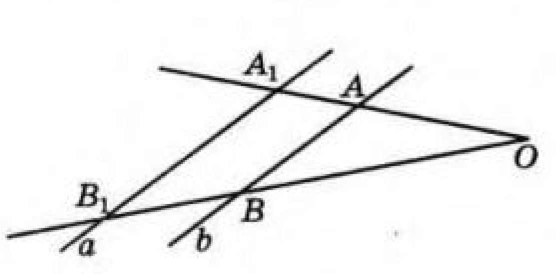
Мал. 3.19



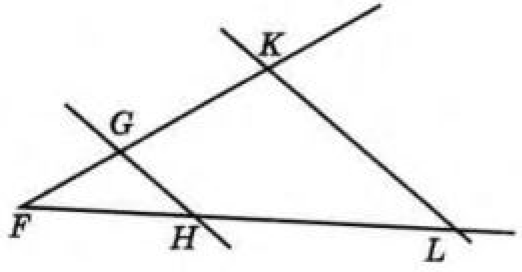
Мал. 3.20

5°. Сторони кута O перетнули паралельними прямими a і b (мал. 3.21). Знайдіть сторони трикутника AOB, якщо $OA = 4$ см, $OA_1 = 6$ см, $OB_1 = 8$ см, $A_1B_1 = 5$ см.

6. Прямі GH і KL паралельні (мал. 3.22). Сторона GH трикутника FGH дорівнює 18 см. Знайдіть сторону KL трикутника FKL, якщо:
а) $FG : FK = 2 : 3$; б) $FG : GK = 2 : 3$.



Мал. 3.21

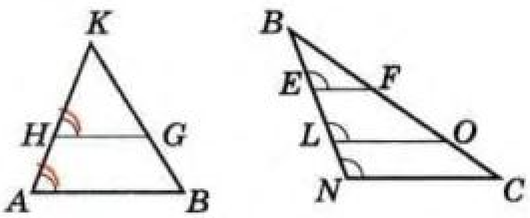


Мал. 3.22

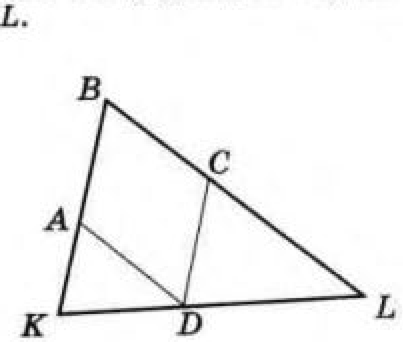
7. Сторони одного трикутника дорівнюють 2 см, 4 см і 5 см, а найменша середня лінія подібного до нього трикутника дорівнює 3 см. Обчисліть сторони подібного трикутника.

8. На малюнку 3.23 знайдіть подібні трикутники і пари відповідних сторін.

9. У трикутник BKL вписано ромб $ABCD$ (мал. 3.24). Доведіть подібність трикутників: а) AKD і BKL; б) CDL і BKL.



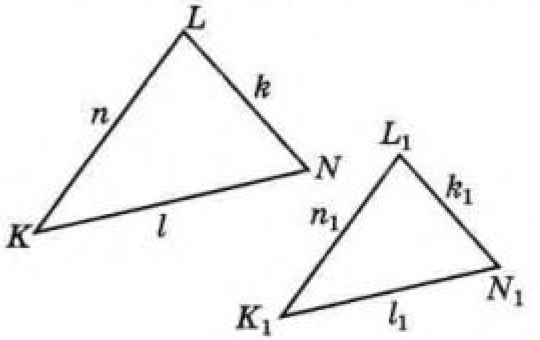
Мал. 3.23



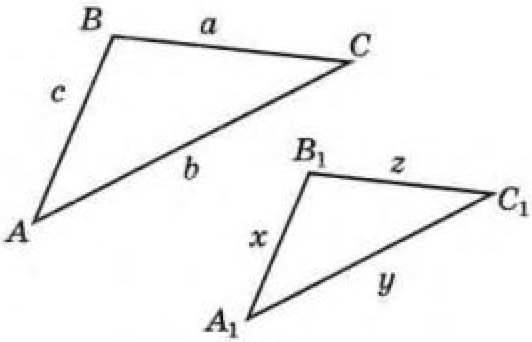
Мал. 3.24

10. На малюнку 3.25 трикутники KLN і $K_1L_1N_1$ – подібні, $n : k : l = 6 : 7 : 8$, $k_1 - n_1 = 4$ см. Знайдіть k_1, n_1, l_1.

11. На малюнку 3.26 трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ – подібні, $c : a : b = 6 : 7 : 8$, $x + y = 70$ м. Знайдіть x, y, z.



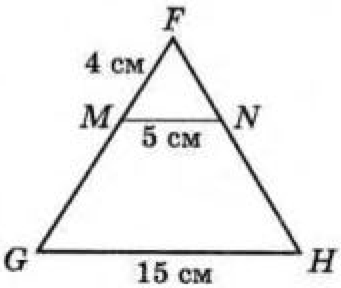
Мал. 3.25



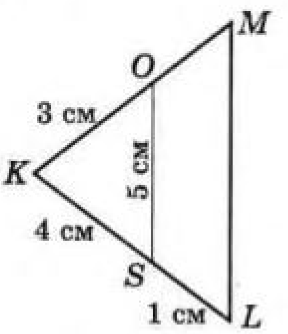
Мал. 3.26

12. На малюнку 3.27 $MN \parallel GH$. Знайдіть FG.

13. На малюнку 3.28 $OS \parallel LM$. Знайдіть LM, OM.



Мал. 3.27

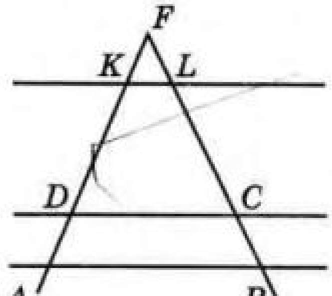


Мал. 3.28

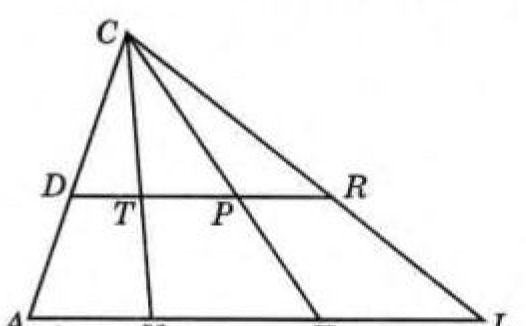
14*. Дано трикутник ABC. Точка M лежить на відрізку AB, точка N лежить на відрізку BC. $MN \parallel AC$, $BN = 3$ см, $MA = 3$ см, $NC = 2$ см, $AC = 10$ см. Знайдіть MN і MB.

15*. Прямі $AB \parallel DC \parallel KL$, $FK : FD : FA = 1 : 4 : 5$, $AB = 30$ см, $FC = 40$ см, $FK = 10$ см (мал. 3.29). Знайдіть периметр чотирикутника $KLCD$.

16*. Скільки пар подібних трикутників є на малюнку 3.30, якщо $AL \parallel DR$?



Мал. 3.29



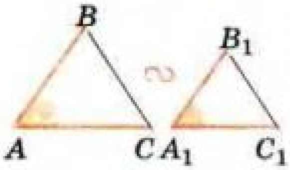
Мал. 3.30

17*. Точки K і M належать сторонам AB і AC трикутника ABC відповідно. Прямі KM і BC паралельні. Доведіть, що медіана, яка проведена до сторони BC, ділить навпіл відрізок KM.

§ 19. Ознаки подібності трикутників

ПЕРША ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

I ОЗНАКА



$\angle A = \angle A_1$

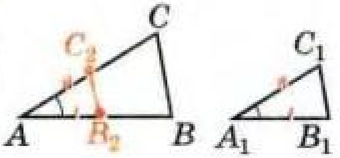
$\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$

$\Downarrow$

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

Т Теорема 1. **Якщо кут одного трикутника дорівнює куту другого, а сторони, що утворюють цей кут в одному трикутнику, пропорційні відповідним сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.**

Розглянемо два трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 3.31), в яких кути при вершинах A і A_1 рівні, $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$. Треба довести, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні.



Мал. 3.31

Доведення

1) Від точки A на сторонах AB і AC трикутника ABC відкладемо відрізки $AB_2 = A_1B_1$ і $AC_2 = A_1C_1$ відповідно. Тоді $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників.

2) $\dfrac{AB_2}{AB} = \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{AC_2}{AC}$, тоді за оберненою теоремою до узагальненої теореми Фалеса $B_2C_2 \parallel BC$.

3) $B_2C_2 \parallel BC$, тоді за основною теоремою подібності трикутників $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

Теорему доведено.

ДРУГА ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

II ОЗНАКА

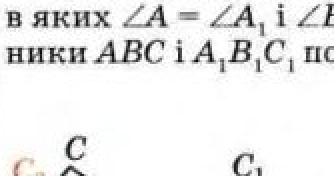
$\angle A = \angle A_1; \angle C = \angle C_1$

$\Downarrow$

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

Т Теорема 2. **Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.**

Розглянемо два трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 3.32), в яких $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$. Треба довести, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні.



Мал. 3.32

Доведення

1) Від точки A на сторонах AB і AC трикутника ABC відкладемо відрізки $AB_2 = A_1B_1$ і $AC_2 = A_1C_1$ відповідно. Тоді $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників.

2) $\angle B = \angle B_1 = \angle B_2$, тоді $B_2C_2 \parallel BC$ (кути B_2 і B – відповідні при прямих B_2C_2 і BC та січній AB).

3) $B_2C_2 \parallel BC$, тоді за основною теоремою подібності трикутників $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

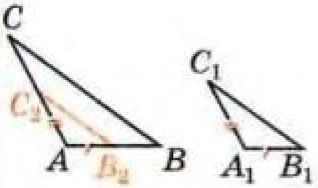
Теорему доведено.

ТРЕТЯ ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Теорема 2. **Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.**

Розглянемо два трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 3.33), в яких $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} \triangleq k$.

Треба довести, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні.



Мал. 3.33

Доведення

Позначимо задане відношення сторін трикутників через k.

1) Від точки A на сторонах AB і AC трикутника ABC відкладемо відрізки $AB_2 = A_1B_1$ і $AC_2 = A_1C_1$ відповідно. Тоді $\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$ за першою ознакою подібності трикутників.

2) $\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$, тоді

$$\frac{B_2C_2}{BC} = \frac{AB_2}{AB} = \frac{A_1B_1}{AB} = k.$$

3) $\frac{B_2C_2}{BC} = k = \frac{B_1C_1}{BC}$, звідси: $B_2C_2 = B_1C_1$.

Тоді трикутники AB_2C_2 і $A_1B_1C_1$ рівні (за трьома сторонами).

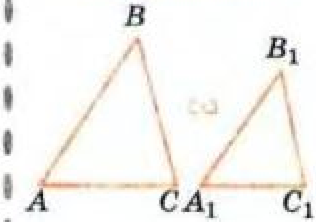
4) $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

Теорему доведено.

Нагадаємо позначення:

$\triangleq$ — «позначили як».

III ОЗНАКА



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$$

Зауваження. Корисно звернути увагу на те, що спосіб доведення трьох ознак подібності трикутників один і той самий: відклавши на двох сторонах більшого трикутника відрізки, які дорівнюють відповідним сторонам меншого трикутника, маємо допоміжний трикутник, подібний до більшого з даних трикутників, і доводимо його рівність меншому трикутнику.

Для допитливих

1. Дано пряму l і точки A, B, C, що лежать на іншій прямій ($[AB] \neq [BC]$). Побудуйте паралельні прямі, які проходять через ці точки і на заданій прямій l відтинають відрізки: **а)** сума яких дорівнює заданому відрізку b; **б)** різниця яких дорівнює заданому відрізку b.

2. Через точку P медіани CC_1 трикутника ABC і вершини B та A проведено прямі до перетину з протилежними сторонами у точках A_1 та B_1. Доведіть, що: **а)** A_1B_1 і AB паралельні; **б)** медіана CC_1 ділить відрізок A_1B_1 навпіл.

3. Через точку P на продовженні медіани CC_1 трикутника ABC і вершини B та A проведено прямі до перетину з продовженнями протилежних сторін у точках A_1 та B_1. Доведіть, що: **а)** A_1B_1 і AB паралельні; **б)** продовження медіани CC_1 ділить відрізок A_1B_1 навпіл.

4. Пряма, що сполучає точку перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$ з точкою перетину сторін AB і CD, ділить сторону AD навпіл. Доведіть, що вона ділить навпіл і сторону BC.

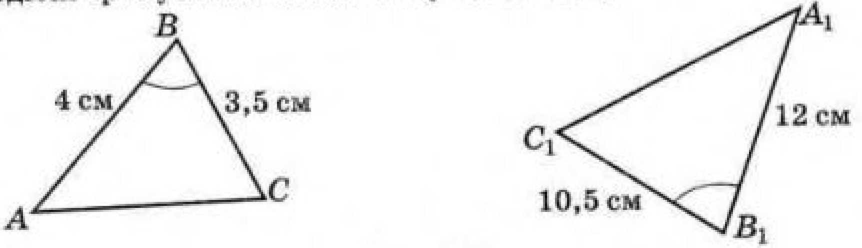
Практична робота 26

1. Побудуйте два рівні кути B і B_1.
2. На сторонах кутів B і B_1 відкладіть відрізки BA, BC і B_1A_1, B_1C_1 відповідно так, щоб $B_1A_1 = 1,5\ BA$, $B_1C_1 = 1,5\ BC$.
3. Сполучіть точки A і C, A_1 і C_1. Виміряйте відрізки AC і A_1C_1. Обчисліть відношення $A_1C_1 : AC$ та виміряйте кути BAC і $B_1A_1C_1$. Зробіть висновок.

Завдання 18

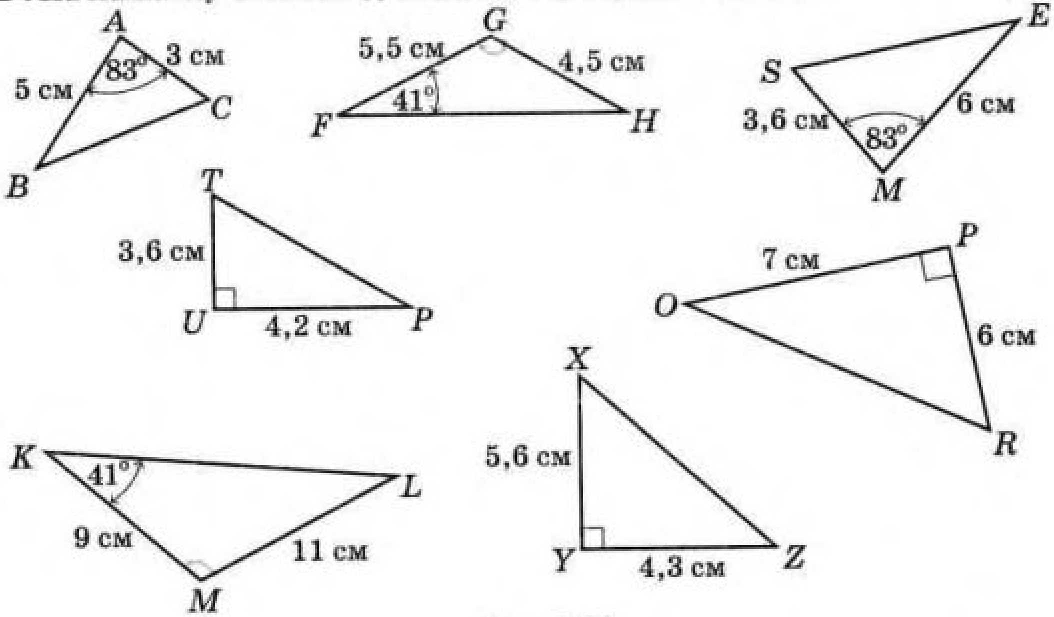
ПЕРША ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

1°. Чи подібні трикутники на малюнку 3.34? Чому?



Мал. 3.34

2°. На малюнку 3.35 знайдіть подібні трикутники. Поясніть свій вибір.



Мал. 3.35

Для допитливих

1. Доведіть подібність довільного трикутника і трикутника, утвореного прямими, що проходять через вершини цього трикутника, паралельно його сторонам. Знайдіть відношення радіусів кіл, описаних навколо цих трикутників.

2. Знайдіть відношення радіусів вписаних кіл у довільний трикутник і трикутник з вершинами на серединах його сторін.

3. Пряма CE перетинає сторону AB трикутника ABC у точці M і ділить медіану AK цього трикутника навпіл у точці E. Знайдіть відношення площ трикутників CEK і CMB.

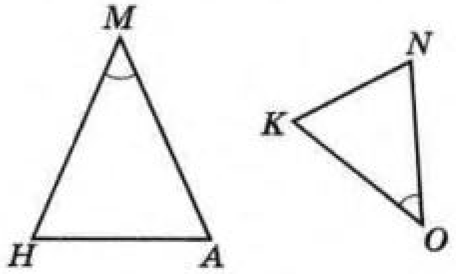
4. Доведіть, що в гострокутному трикутнику точка перетину висот є центром кола, вписаного в трикутник, вершинами якого є основи висот даного трикутника. А що буде у випадку тупокутного трикутника?

3°. Дано, що $\angle O = \angle M$, $\frac{MH}{ON} = \frac{MA}{OK} = 2{,}5$; $AH = 12$ см (мал. 3.36).

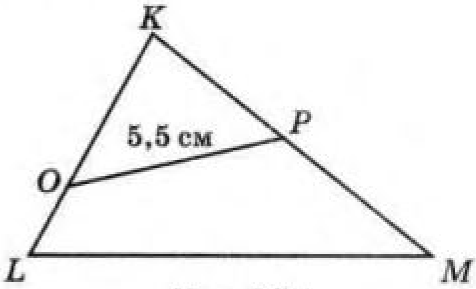
Знайдіть довжину відрізка KN.

4. Два рівнобедрені трикутники мають рівні кути при вершинах. Бічна сторона і основа одного з трикутників відповідно дорівнюють 56 см і 30 см. Основа другого трикутника дорівнює 45 см. Знайдіть інші сторони цього трикутника.

5*. За малюнком 3.37 знайдіть LM, якщо $\frac{KL}{PK} = \frac{KM}{OK} = 2$.

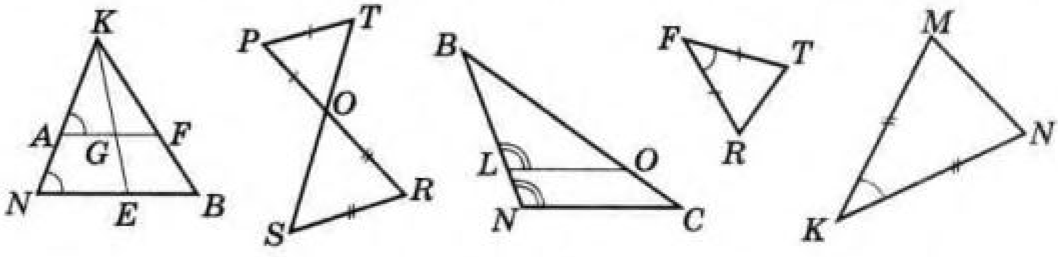


Мал. 3.36



Мал. 3.37

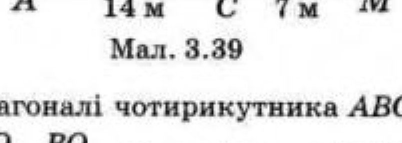
6*. Знайдіть подібні трикутники і доведіть їх подібність (мал. 3.38).



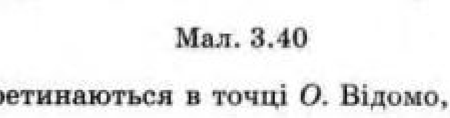
Мал. 3.38

7. За малюнком 3.39 визначте, чи подібні трикутники AHM і ABC.

8. Дано, що $\triangle KON \backsim \triangle COB$ (мал. 3.40). Доведіть, що $KN \parallel BC$.



Мал. 3.39



Мал. 3.40

9*. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Відомо, що $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$. Доведіть, що $ABCD$ – трапеція або паралелограм.

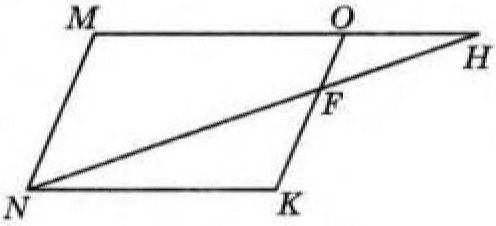
Для допитливих

1. Чи обов'язково два подібні трикутники рівні, якщо рівні дві їхні сторони?
2. Відновіть паралелограм за однією з його сторін, висотою, що проведена до цієї сторони, і кутом між діагоналями.

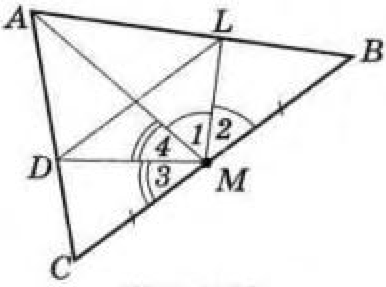
10*. Дано паралелограм $MOKN$ (мал. 3.41). Доведіть, що $\triangle OFH \sim \triangle KFN$.

11*. У паралелограмі $MOKN$ точка F належить стороні OK і $OF : FK = 1 : 3$. Знайдіть: а) $OH : HM$; б) $OH : OM$ (мал. 3.41).

12.** У трикутнику ABC проведено медіану AM (мал. 3.42). $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $\triangle ALD \sim \triangle ABC$.



Мал. 3.41



Мал. 3.42

13.** В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомо, що площа трикутника CDO (O – точка перетину діагоналей) є середнє пропорційне між площами трикутників BOC і AOD. Доведіть, що $ABCD$ – трапеція або паралелограм.

Практична робота 27

1. Накресліть два відрізки AB і A_1B_1 так, щоб $AB = 2A_1B_1$, і два гострі кути α і β.
2. Побудуйте трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ за двома кутами ($\angle A = \angle A_1 = \alpha$; $\angle B = \angle B_1 = \beta$) і стороною ($AB$ і A_1B_1) – див. малюнок 3.43.

Мал. 3.43

3. Виміряйте відрізки AC, A_1C_1, BC і B_1C_1.
4. Обчисліть відношення $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$. Зробіть висновок.

Для допитливих

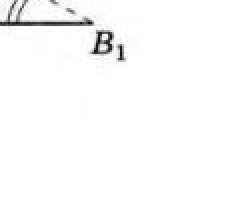
Розгадайте софізм: **частина відрізка дорівнює всьому відрізку.**

Перетнемо довільну пряму в точках A і B прямими a і b, перпендикулярними до цієї прямої (див. мал.). Проведемо пряму ED, яка перетинає пряму a в точці E, пряму AB – у точці C, пряму b – у точці D.

1) $\triangle CBD \sim \triangle CAE$. Тоді $BD : AE = CB : AC$, $BD : AE = (AB - AC) : AC$.

2) $FH \parallel AB$ за побудовою. Тоді $\triangle CBD \sim \triangle FHD$.

Звідси: $BD : HD = BC : FH$, $BD : HD = (AB - CA) : FH$.



3) З отриманих співвідношень знаходимо BD:

$BD = (AE \cdot (AB - AC)) : AC = (HD \cdot (AB - CA)) : FH$;

$AE \cdot FH \cdot AB - AE \cdot FH \cdot AC = AC \cdot HD \cdot AB - AC^2 \cdot HD$.

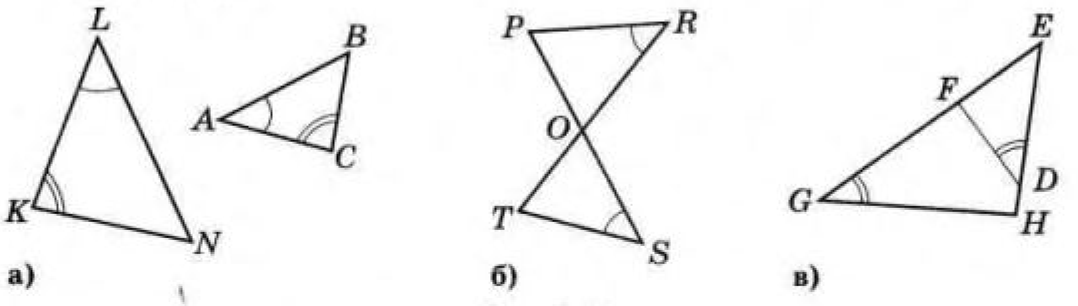
4) Додамо до обох частин останньої рівності різницю $AE \cdot FH \cdot AC - HD \cdot AB \cdot AC$, зведемо подібні доданки і винесемо за дужки спільні множники: $AB\,(AE \cdot FH - AC \cdot HD) = AC\,(AE \cdot FH - AC \cdot HD)$.

Звідси: $AB = AC$?!

Завдання 19

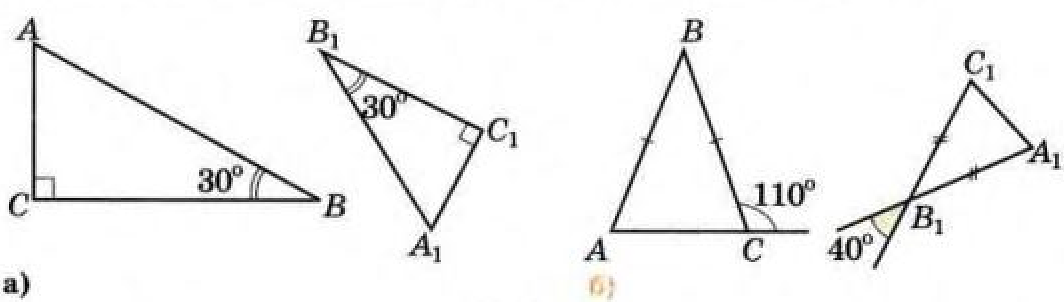
ДРУГА ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

1°. Чи подібні трикутники на малюнку 3.44? Знайдіть відповідні сторони трикутників.



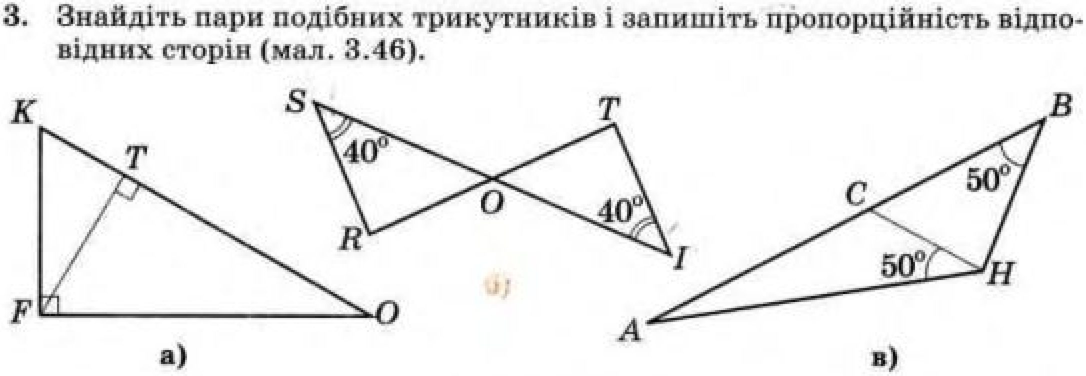
Мал. 3.44

2°. Доведіть, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ – подібні (мал. 3.45).



Мал. 3.45

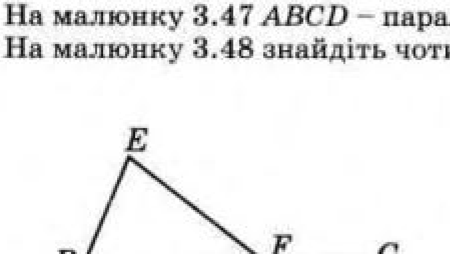
3. Знайдіть пари подібних трикутників і запишіть пропорційність відповідних сторін (мал. 3.46).



Мал. 3.46

4. На малюнку 3.47 $ABCD$ – паралелограм. Доведіть, що $\triangle BEF \backsim \triangle DLK$.

5. На малюнку 3.48 знайдіть чотири подібні трикутники.



Мал. 3.47

Мал. 3.48

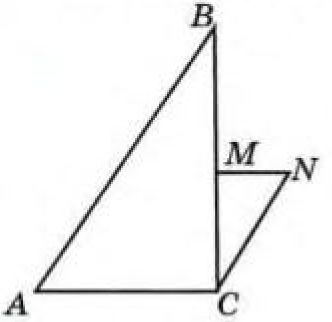
6*. Точки A і B віддалені на 2 см і 6 см від прямої l. Точка M належить відрізку і $AM : MB = 2 : 3$. Знайдіть відстань від точки M до прямої l, якщо: а) пряма l перетинає відрізок AB; б) пряма l не перетинає відрізок AB.

7. На малюнку 3.49 $MN \perp BC$, $NC \parallel AB$. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle MCN$.

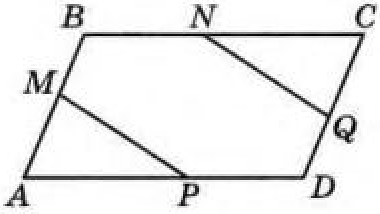
8*. $ABCD$ – паралелограм, $MP \parallel NQ$ (мал. 3.50). Доведіть, що $\triangle APM \sim \triangle CNQ$.

9.** Точки M і N лежать відповідно на сторонах AB і AD паралелограма $ABCD$, при цьому $AM : MB = 1 : 2$ і $AN : ND = 3 : 2$. Відрізки DM і CN перетинаються в точці K. Знайдіть відношення $DK : KM$.

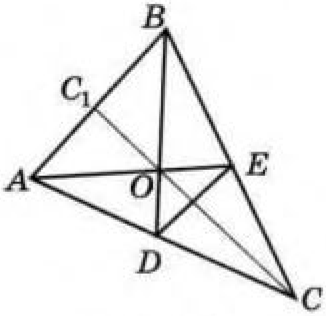
10.** На малюнку 3.51 $AD = DC$, $BE = EC$. Доведіть, що CC_1 – медіана.



Мал. 3.49



Мал. 3.50



Мал. 3.51

11. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AH і BP. Доведіть подібність трикутників BCP і ACH.

12.** У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AH і BP. Доведіть подібність трикутників HPC і ABC.

13*. Точка M – середина сторони BC паралелограма $ABCD$. Знайдіть, у якому відношенні: а) AM ділить діагональ BD; б) BD ділить AM.

14*. Точка P належить діагоналі BD паралелограма $ABCD$, $BP : PD = 1 : 4$. У якому відношенні пряма AP ділить сторону BC?

15.** Два кола дотикаються зовнішньо. Пряма, що проходить через точку дотику, утворює в колах хорди, які відносяться як 13 : 5. Знайдіть радіуси кіл, якщо відстань між їх центрами дорівнює 36 см.

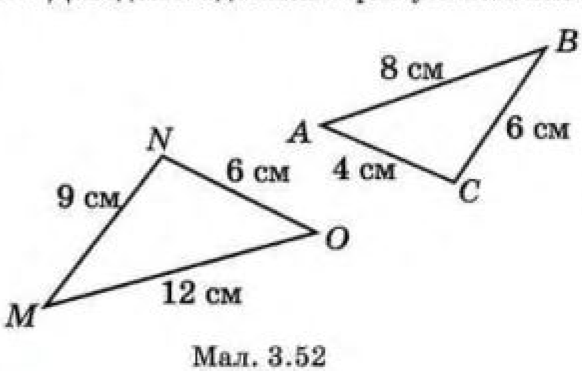
Практична робота 28

1. Побудуйте трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ за трьома сторонами так, щоб $AB = 2{,}5A_1B_1$, $BC = 2{,}5B_1C_1$, $AC = 2{,}5A_1C_1$.
2. Виміряйте кути трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Зробіть висновок.

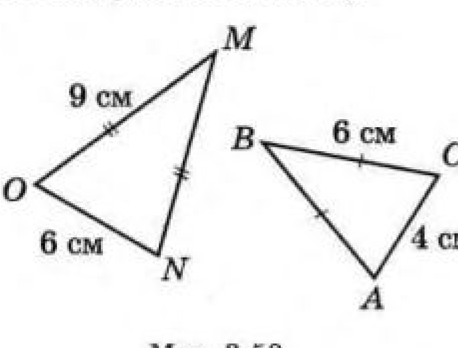
Завдання 20

ТРЕТЯ ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

1°. Доведіть подібність трикутників MNO і BCA (мал. 3.52 і 3.53).

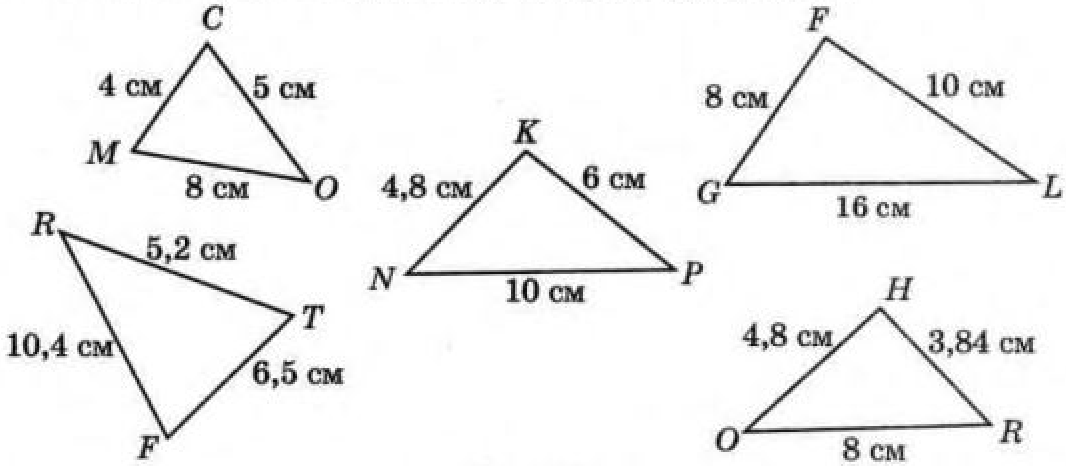


Мал. 3.52



Мал. 3.53

2°. На малюнку 3.54 знайдіть пари подібних трикутників.



Мал. 3.54

3. Чи подібні трикутники KLM і OPR? Для подібних трикутників знайдіть коефіцієнт подібності:

а) $KL = 3{,}1$ см, $LM = 2{,}8$ см, $KM = 5{,}4$ см,
$OP = 4{,}65$ см, $PR = 8{,}1$ см, $OR = 4{,}2$ см;

б) $KL = 3{,}78$ м, $LM = 5{,}04$ м, $KM = 7{,}4$ м,
$OP = 2{,}4$ м, $PR = 1{,}8$ м, $OR = 3{,}5$ м.

4. Сторони трикутника пропорційні числам 3, 4, 6. Знайдіть довжини сторін подібного до нього трикутника, якщо найменша його сторона дорівнює 18 см.

5. Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:

а) $AB : BC : AC = 4 : 5 : 8$, а $A_1B_1 = 20$ см, $B_1C_1 = 25$ см, $A_1C_1 = 40$ см.

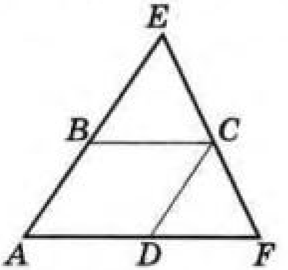
б) $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$, а $A_1B_1 = 5$ м, $B_1C_1 = 7{,}5$ м, $A_1C_1 = 12$ м.

6.** Доведіть подібність трикутників $A_1B_1C_1$ і ABC, якщо $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1 = AM : A_1M_1$, де A_1M_1 і AM – медіани цих трикутників.

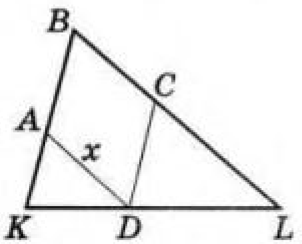
7*. Доведіть подібність трикутників, утворених: а) середніми лініями подібних трикутників; б) із медіан подібних трикутників.

8.** На малюнку 3.55 $AB = BC = CD = AD$, $BE = m$, $DF = n$. Знайдіть AB.

9.** $ABCD$ – ромб, $BL = 66$ мм, $BK = 33$ мм (мал. 3.56). Знайдіть x.



Мал. 3.55



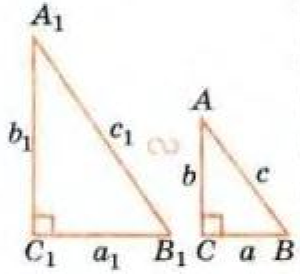
Мал. 3.56

Для допитливих

1. Побудуйте трикутник за двома кутами і сумою радіусів вписаного і описаного кіл. Порада: побудуйте два довільні подібні трикутники (за двома кутами), побудуйте в них центри описаного і вписаного кіл і отримайте відрізки, рівні радіусам цих кіл, і ви матимете два відповідні відрізки – суми радіусів вписаного й описаного кіл двох подібних трикутників. Порівняйте відношення їх довжин із відношенням довжин відповідних сторін цих трикутників. Як ви думаєте, який сенс у цій пораді?

2. З точки поза колом проведіть січну так, щоб коло поділяло її навпіл.

§ 20. Ознаки подібності прямокутних трикутників



⇓

якщо

$\frac{b_1}{b} = \frac{a_1}{a}$,

або

$\angle A_1 = \angle A$,

або

$\frac{a_1}{a} = \frac{c_1}{c}$.

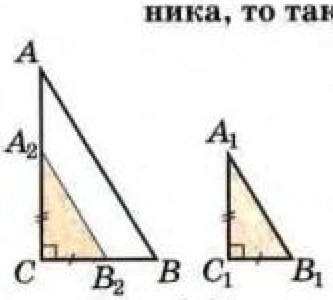
Спираючись на три ознаки подібності трикутників, можна відразу сформулювати дві ознаки подібності прямокутних трикутників.

1. *Якщо катети одного прямокутного трикутника пропорційні катетам другого прямокутного трикутника, то такі трикутники подібні.*

2. *Якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники подібні.*

Третя ознака подібності прямокутних трикутників потребує окремого доведення.

3. Т Теорема. **Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника пропорційні гіпотенузі і катету другого прямокутного трикутника, то такі трикутники подібні.**



Мал. 3.57

Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ – два трикутники, в яких кути C і C_1 – прямі і $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1B_1}{CB}$ (мал. 3.57). Треба довести, що ці трикутники подібні.

Доведення

Позначимо задане відношення сторін трикутників через k.

1) Від точки C на сторонах CB і CA трикутника ABC відкладемо відрізки $CB_2 = C_1B_1$ і $CA_2 = C_1A_1$ відповідно. Тоді $\triangle A_2B_2C \backsim \triangle ABC$ (за першою ознакою подібності трикутників).

2) $\triangle A_2B_2C \backsim \triangle ABC$, тоді $\frac{A_2B_2}{AB} = \frac{CB_2}{CB} = \frac{C_1B_1}{CB} = k$.

3) $\frac{A_2B_2}{AB} = k = \frac{A_1B_1}{AB}$, звідси $A_2B_2 = A_1B_1$.

Тоді трикутники A_2B_2C і $A_1B_1C_1$ рівні (за гіпотенузою і катетом).

4) $\triangle ABC \backsim \triangle A_2B_2C = \triangle A_1B_1C_1$.

Теорему доведено.

Для допитливих

1. На сторонах AB і AC гострокутного трикутника ABC позначено відповідно точки D і E так, що DE паралельна прямій, проведеній через основи двох висот заданого трикутника. Знайдіть довжину відрізка BD, якщо $AD = 6$ см, $AE = 5$ см, $EC = 7$ см.

2. Доведіть, що для гострокутного трикутника ABC (H – ортоцентр цього трикутника, R – радіус описаного навколо нього кола, а S – його площа) виконується співвідношення:

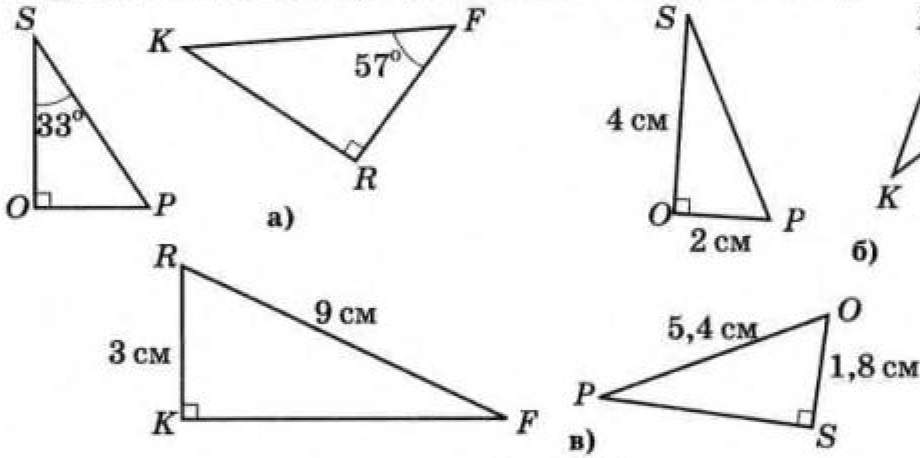
а) $AH^2 = 4R^2 - BC^2$; б) $BC \cdot AH + AC \cdot BH + AB \cdot CH = 4S$.

Практична робота 29

1. Накресліть прямокутний трикутник.
2. З довільної точки гіпотенузи трикутника проведіть перпендикуляри до його катетів. Виміряйте довжини сторін утворених трикутників і порівняйте їх із довжинами сторін заданого вами трикутника. Зробіть висновок.
3. З довільної точки одного з катетів заданого трикутника проведіть перпендикуляр до його гіпотенузи. Виміряйте довжини сторін утворених трикутників і порівняйте їх із довжинами сторін заданого вами трикутника. Зробіть висновок.

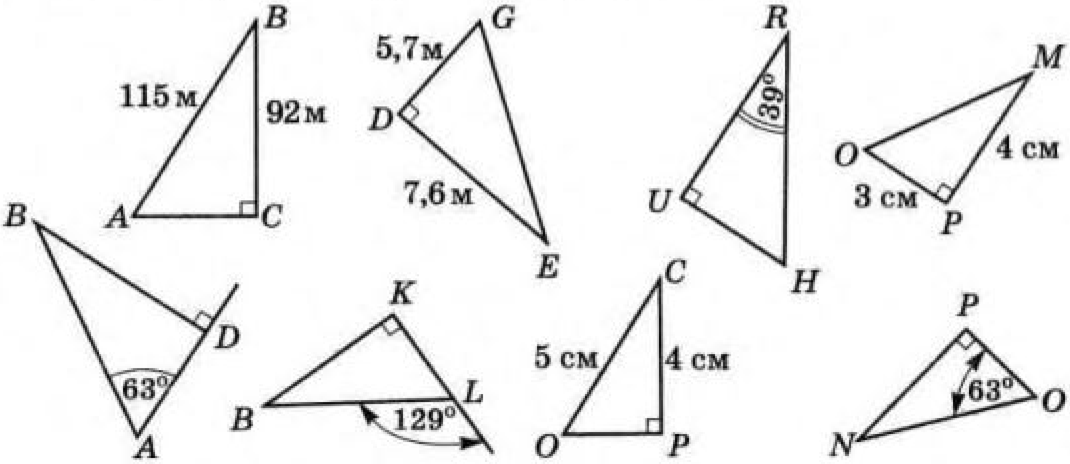
Завдання 21

1°. Доведіть подібність трикутників *SOP* і *KRF* (мал. 3.58).



Мал. 3.58

2°. На малюнку 3.59 знайдіть подібні трикутники.



Мал. 3.59

Для допитливих

Відомий швейцарський математик **Якоб Штейнер** (1796–1863) 14 років викладав математику в школі. Він приділяв багато часу обдарованим учням, складав для них цікаві геометричні задачі. Штейнер стверджував, що саме геометрія поглиблює і відточує мислення. Спробуйте розв'язати одну з його задач.

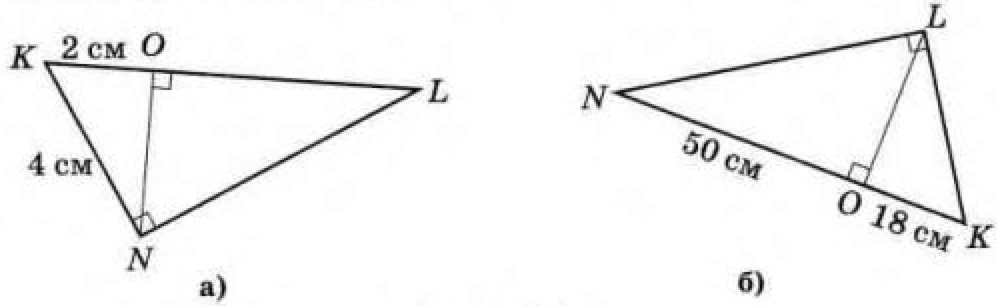
Дано коло і пряма, що містить діаметр цього кола. За допомогою лише лінійки проведіть із даної поза колом точки перпендикуляр до заданої прямої.

3. У прямокутному трикутнику проведено висоту з вершини прямого кута. Скільки подібних трикутників утворилося на малюнку?

4. Розріжте прямокутний трикутник на три подібні трикутники.

5. Розріжте прямокутник на чотири подібні трикутники.

6. За малюнком 3.60 знайдіть OL.



Мал. 3.60

7*. У прямокутному трикутнику ABC з вершини прямого кута проведено висоту CH. Знайдіть: **а)** CH, BC і AC, якщо $HA = 25$ см, $BH = 16$ см; **б)** BH, BA і BC, якщо $AC = 12$ м, $HA = 6$ м; **в)** HA, AB і AC, якщо $BC = 8$ мм, $BH = 4$ мм.

8**. Доведіть, що квадрати катетів прямокутного трикутника відносяться як їх проекції на гіпотенузу.

9**. Катети прямокутного трикутника відносяться як 3 : 4, а гіпотенуза дорівнює 5 см. Знайдіть відрізки, на які висота, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу.

10**. Катети прямокутного трикутника відносяться як 3 : 2. Висота, опущена на гіпотенузу, дорівнює 12 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до гіпотенузи.

11*. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки, один з яких на 11 см більший, ніж другий. Знайдіть гіпотенузу, якщо катети трикутника відносяться як 6 : 5.

12*. У прямокутному трикутнику, сторони якого дорівнюють 5 см, 12 см і 13 см, із середини більшого катета опущено перпендикуляр на гіпотенузу. Знайдіть сторони трикутника, який утворився.

13**. У паралелограмі $ABCD$: $FN \perp AD$, $AB = 2$ см, $BF = 5$ см, $BC = 9$ см (мал. 3.61). Знайдіть BK.

14*. У паралелограмі $AMHR$: $P_{AMHR} = 45$ дм, $\frac{HP}{HO} = \frac{2}{3}$ (мал. 3.62). Знайдіть AM і AR.

Для допитливих

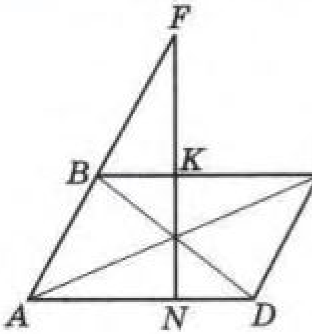
Чи вмієте ви міркувати логічно?

1. Уздовж вулиці побудовано 100 будинків. Майстра попросили виготовити всі номери будинків, від 1 до 100. Без олівця і паперу підрахуйте, скільки цифр «9» йому треба виготовити.

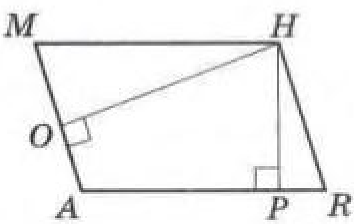
2. Нехай і у вас, і у мене однакова кількість грошей. Скільки грошей я повинен вам дати, щоб у вас було на 10 грн. більше, ніж у мене?

3. У шафі лежать кілька синіх і кілька червоних шкарпеток. Відомо, що мінімальне число шкарпеток, яке треба взяти з шафи (із заплющеними очима), щоб з них обов'язково можна було скласти хоча б одну пару шкарпеток однакового кольору, збігається з мінімальною кількістю шкарпеток, яку треба взяти з шафи (із заплющеними очима), щоб з них обов'язково можна було скласти хоча б одну пару шкарпеток різного кольору. Скільки пар шкарпеток у шафі?

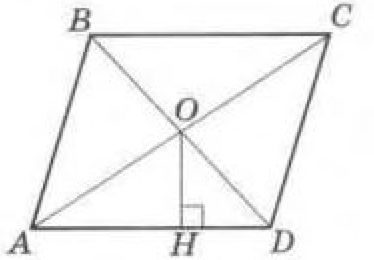
15*. На малюнку 3.63 $ABCD$ – ромб, $OH \perp AD$, $AH = 24$ см, $HD = 6$ см. Знайдіть відношення AC і BD.



Мал. 3.61



Мал. 3.62

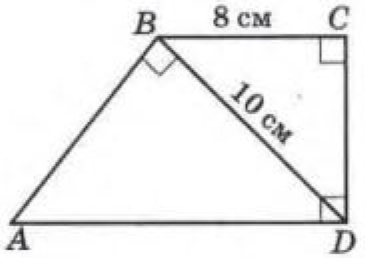


Мал. 3.63

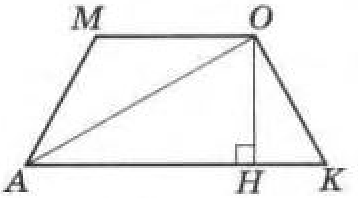
16. За малюнком 3.64 знайдіть AD.

17*. Дано, що $AMOK$ – трапеція, $AM = OK$, $AO \perp OK$, $AH = 8$ см, $HO = 4$ см (мал. 3.65). Знайдіть MO і AK.

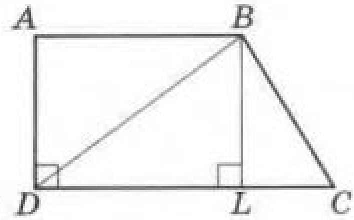
18*. На малюнку 3.66 $ABCD$ – трапеція, $BD \perp BC$, $AD = 12$ см, $LC = 4$ см. Знайдіть AB і CD.



Мал. 3.64



Мал. 3.65



Мал. 3.66

19.** Доведіть, що діаметр кола, вписаного у рівнобічну трапецію, є середнє пропорційне його основ.

20.** Побудуйте два відрізки: а) квадрати яких відносяться як 3 : 2; б) квадрати яких відносяться як квадрати довжин двох заданих відрізків.

Для допитливих

Американський професор **Реймонд М. Смалліан** пропонує задачі, в яких персонажі деякої країни поділяє на такі групи: *лицарів*, які завжди кажуть лише правду; *брехунів*, які завжди кажуть неправду; *перевертнів*, які інколи бувають лицарями, а інколи брехунами.

1. Ви зустріли трьох мешканців цієї країни: A, B і C. Відомо, що серед них є тільки один перевертень. У бесіді з вами вони сказали таке.

***A*:** Я – перевертень.

***B*:** Я – перевертень.

***C*:** Серед нас не більше як один лицар.

Проведіть повну класифікацію A, B і C.

2. На цей раз A і B заявили таке.

***A*:** Хоча б один з нас брехун.

***B*:** C – лицар.

Відомо, що тільки один з них перевертень. Хто це?

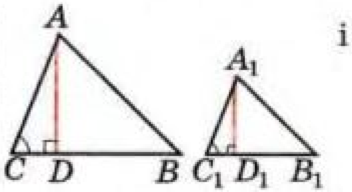
3. Нехай якась дівчина мріє взяти за чоловіка лише багатого лицаря. Як багатому лицарю лише однією фразою переконати дівчину в тому, що він є багатим лицарем?

§ 21. Властивості подібних трикутників

1. Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту їх подібності.

Справді, якщо $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, то довжину кожної зі сторін одного трикутника можна записати як добуток довжини відповідної сторони другого трикутника і коефіцієнта подібності трикутників. Звідси маємо вказану властивість.

2. Т Теорема. **У подібних трикутниках відношення висот дорівнює коефіцієнту їх подібності.**



Мал. 3.67

Нехай $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $AD \perp CB$ і $A_1D_1 \perp C_1B_1$ (мал. 3.67).

Треба довести, що $\dfrac{AD}{A_1D_1} = \dfrac{CB}{C_1B_1}$.

Доведення

1) $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, тоді $\angle C = \angle C_1$.

2) $\angle D = \angle D_1 = 90^\circ$ і $\angle C = \angle C_1$, тоді трикутники CAD і $C_1A_1D_1$ подібні.

3) $\triangle CAD \backsim \triangle C_1A_1D_1$, тоді $\dfrac{AD}{A_1D_1} = \dfrac{CA}{C_1A_1} = \dfrac{CB}{C_1B_1}$.

Теорему доведено.

3. Н Наслідок. **Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності цих трикутників.**

З теореми маємо, що $\dfrac{AD}{A_1D_1} = \dfrac{CB}{C_1B_1} = k$, де k – коефіцієнт подібності цих трикутників. Тоді відношення площ трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ дорівнює

$$\left(\frac{1}{2}AD \cdot CB\right) : \left(\frac{1}{2}A_1D_1 \cdot C_1B_1\right) = k \cdot k = k^2.$$

4. У подібних трикутниках усі відповідні лінійні елементи пропорційні і їх відношення дорівнює коефіцієнту подібності трикутників.

Неважко довести, що в подібних трикутниках відношення бісектрис відповідних кутів, відношення медіан відповідних сторін, відношення радіусів вписаних кіл, відношення радіусів описаних кіл є величиною сталою і дорівнює коефіцієнту подібності трикутників. Ці доведення пропонуємо виконати самостійно.

Зауваження. У 9-му класі ми доведемо, що довільні відповідні елементи подібних трикутників пропорційні.

ВЛАСТИВОСТІ:

$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$

$\Downarrow$

1) $P_1 = kP$

$h_{a_1} = k h_a$

$m_{a_1} = k m_a$

$l_{a_1} = k l_a$

...

$\uparrow$

усі

відповідні лінійні елементи – пропорційні, а

2) $S_1 = k^2 S$

Для допитливих

1. Які трикутники можна розрізати на два подібних між собою трикутники?

2. Побудуйте трикутник за двома кутами і сумою медіан.

Практична робота 30

1. Накресліть гострокутний трикутник ABC. Побудуйте його бісектрису BL, висоти AH і BK та медіану CM та виміряйте їх довжини.
2. Побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, подібний до трикутника ABC. Як ви це зробили? За якою ознакою подібні ваші трикутники? Знайдіть коефіцієнт подібності цих трикутників.
3. Побудуйте в трикутнику $A_1B_1C_1$ бісектрису B_1L_1, висоти A_1H_1 і B_1K_1 та медіану C_1M_1 і виміряйте їхні довжини.
4. Знайдіть відношення відповідних бісектрис, висот і медіан подібних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Порівняйте значення отриманих відношень з коефіцієнтом подібності трикутників. Зробіть висновок.
5. Обчисліть площі трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, знайдіть відношення цих площ. Зробіть висновок.

6*. Накресліть тупокутний трикутник і подібний до нього. Проведіть у цих трикутниках відповідні висоти і виконайте практичну роботу, аналогічну п. 5.

Практична робота 31

1. Накресліть трикутник ABC. Визначте положення центрів його описаного і вписаного кіл. Як ви це зробили?
2. Побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, подібний до трикутника ABC. За якою ознакою подібні ваші трикутники? Визначте їхній коефіцієнт подібності.
3. Визначте положення центрів описаного і вписаного кіл трикутника $A_1B_1C_1$.
4. Знайдіть довжини радіусів вписаних і описаних кіл трикутників. Як ви це зробили?
5. Обчисліть відношення радіусів відповідних кіл подібних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Порівняйте їх зі значенням коефіцієнта подібності. Зробіть висновок.

Для допитливих

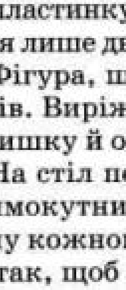
1. Чотири однакові гральні кубики розміщені так, як показано на малюнку **А**. Скільки очок є на грані, що розміщена внизу цієї фігури?

2. Кожну грань кубика поділили на чотири квадрати і кожний квадрат пофарбували в один з трьох кольорів: синій, жовтий або червоний так, що квадрати, які мають спільну сторону, пофарбовані у різні кольори. Скільки при цьому утворилося синіх, жовтих і червоних квадратів?

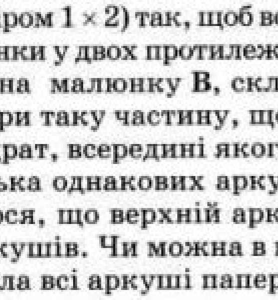
3. Чи можна розмістити на шаховій дошці (розмір однієї її клітинки 1×1) 31 пластинку доміно (розміром 1×2) так, щоб вони не перекривалися і залишилися лише дві вільні клітинки у двох протилежних кутах дошки (див. мал. **Б**)?

4. Фігура, що зображена на малюнку **В**, складається з трьох рівних квадратів. Виріжте з цієї фігури таку частину, щоб її можна було прикласти до залишку й отримати квадрат, всередині якого міститься квадратний отвір.

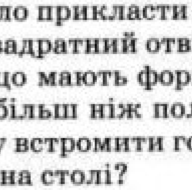
5. На стіл поклали декілька однакових аркушів паперу, що мають форму прямокутника. З'ясувалося, що верхній аркуш закриває більш ніж половину кожного з інших аркушів. Чи можна в цьому випадку встромити голку так, щоб вона проколола всі аркуші паперу, що лежать на столі?



А



Б



В

Практична робота 32

1. Накресліть трикутник ABC. Проведіть його середні лінії.
2. Побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, сторонами якого є відрізки, довжини яких дорівнюють середнім лініям трикутника ABC.
3. З'ясуйте, чи подібні ці трикутники. Як ви це зробили? Якщо ваші трикутники подібні, визначте їхній коефіцієнт подібності.
4. Проведіть прямі через вершини трикутника ABC паралельно їхнім протилежним сторонам. Точки перетину цих прямих позначте як A_2, B_2 і C_2.
5. З'ясуйте, чи подібні ці трикутники. Як ви це зробили? Якщо ваші трикутники подібні, визначте їхній коефіцієнт подібності.
6. З'ясуйте, чи трикутник $A_1B_1C_1$ подібний до трикутника $A_2B_2C_2$. Як ви це встановили? Якщо ці трикутники подібні, визначте їхній коефіцієнт подібності.
7. Знайдіть довжини радіусів кіл, описаних навколо цих трикутників, обчисліть їх відношення. Порівняйте значення цих відношень із коефіцієнтом подібності.

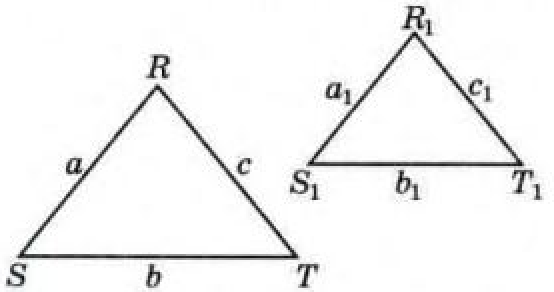
Завдання 22

1°. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні. Сторони AB і A_1B_1 відповідно дорівнюють 2,4 м і 72 см. Знайдіть відношення периметрів трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

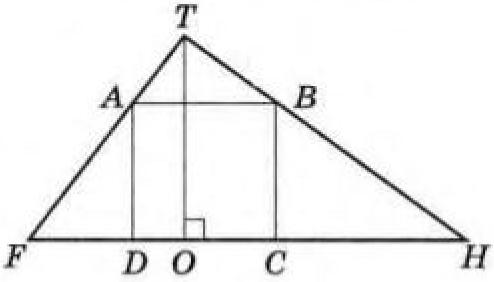
2°. Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 18 см і 20 см. Знайдіть сторони подібного до нього трикутника, якщо його периметр дорівнює 20 см.

3. Трикутники SRT і $S_1R_1T_1$ – подібні, $c : a : b = 6 : 7 : 8$, периметр трикутника $S_1R_1T_1$ дорівнює 42 см (мал. 3.68). Знайдіть a_1, c_1, b_1.

4*. На малюнку 3.69 $ABCD$ – квадрат, $FH = 5$ см, $TO = 3$ см. Знайдіть BC.



Мал. 3.68



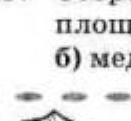
Мал. 3.69

5*. У трапеції $ABCD$ через точку перетину її діагоналей E проведено висоту MN. Знайдіть відношення, в якому точка E ділить висоту MN, якщо основи трапеції відповідно дорівнюють 7,1 см і 13,49 см.

6°. Площі двох подібних трикутників дорівнюють 75 см^2 і 375 см^2. Одна зі сторін другого трикутника дорівнює 9 см. Знайдіть відповідну сторону першого трикутника.

7°. AB і FG – відповідні сторони подібних трикутників ABC і FGH. $AB = 3$ см, $FG = 9$ см. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо HN – висота трикутника FGH – дорівнює 4,5 см.

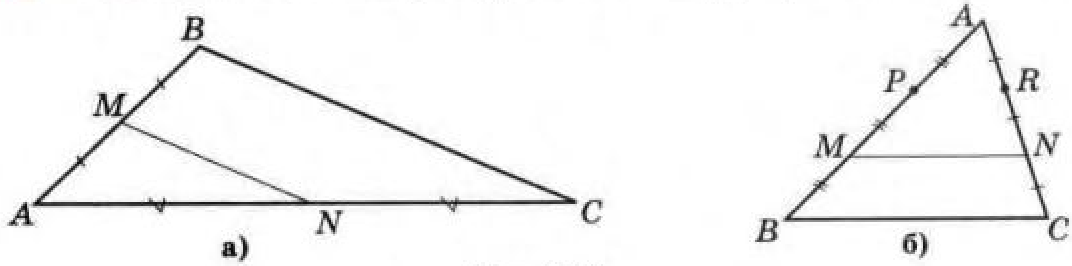
8. Сторони AB і AC відповідно дорівнюють 3 см і 4 см. Як відносяться площі трикутників, на які: а) бісектриса кута A ділить трикутник ABC; б) медіана сторони BC ділить трикутник?



...Принципи геометрії – це принципи всієї математики.

О. Хайям, XII ст.

9*. За малюнком 3.70 знайдіть відношення площ трикутників ABC і ANM.



Мал. 3.70

10. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні, а їх відповідні сторони відносяться як 3 : 4. Площа трикутника ABC більша за площу трикутника $A_1B_1C_1$ на 14 см^2. Знайдіть площі трикутників.

11.** Через середину сторони BC (точку M) паралелограма $ABCD$, площа якого дорівнює 1 см^2, і вершину A проведено пряму, яка перетинає діагональ BD у точці O. Знайдіть площу чотирикутника $OMCD$.

12.** На сторонах AB і AD паралелограма $ABCD$ взято точки M і N так, що прямі MC і NC ділять паралелограм на три рівновеликі частини. Знайдіть MN, якщо $BD = a$.

13.** Прямі, паралельні основі трикутника, ділять його бічну сторону на три рівні частини. Знайдіть площу трикутника, якщо площа середньої частини дорівнює S.

14.** Точки K і M лежать на сторонах AB і BC трикутника ABC, $AK : BK = 3 : 2$, $BM : MC = 3 : 1$. Через точку B проведено пряму l, паралельну AC. Пряма KM перетинає пряму l у точці P, а пряму AC – у точці N. Знайдіть BP і CN, якщо $AC = a$.

15.** На стороні BC трикутника ABC взято точку D таку, що $BD : AB = DC : AC$. Доведіть, що AD – бісектриса трикутника ABC.

16.** Площі трикутників, утворених відрізками діагоналей трапеції та її основами, дорівнюють S_1 і S_2. Знайдіть площу трапеції.

17.** Через точку всередині трикутника проведено три прямі, паралельні його сторонам. Ці прямі розбивають трикутник на 6 частин, три з яких – трикутники, що мають площі S_1, S_2 і S_3. Знайдіть площу заданого трикутника.

Для допитливих

Продовження казки «Принцеса або тигр» (див. с. 65).

1. На третій день король сповістив, що твердження на обох табличках одночасно або правильні, або хибні. Написи були такі:

I. Або у цій кімнаті сидить тигр, або принцеса у другій кімнаті.	II. Принцеса в іншій кімнаті.

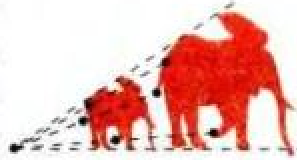
Двері якої кімнати повинен відчинити полонений принц?

2. День четвертий. «До цього дня всі принци викрутилися! – сказав король. – Але сьогодні я придумав дещо більш цікаве. Якщо у кімнаті I сховали принцесу, то твердження на дверях цієї кімнати буде правильним, а якщо тигра, то – хибним. Із кімнатою II все навпаки: твердження на її дверях хибне, якщо в ній сидить принцеса, і правильне, якщо там тигр». Повідомивши ці правила черговому принцу, король вказав на два нових написи:

I. В обох кімнатах знаходяться принцеси.	II. В обох кімнатах знаходяться принцеси.

Яку з кімнат ви порадили б обрати принцу?

§ 22. Практичні задачі на застосування подібності



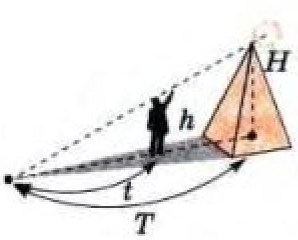
Мал. 3.71

Майже всі діти користуються властивістю подібності, коли змальовують певну картинку зі збільшенням (мал. 3.71). Пропорційність сторін подібних трикутників використовують у фізиці, астрономії, мореплавстві, архітектурі, картографії тощо.

Вимірювальні роботи на місцевості

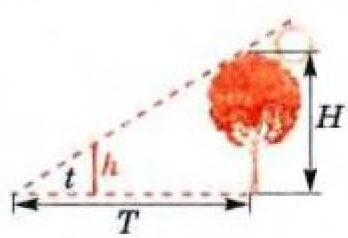
Пропорційність сторін подібних трикутників для вимірювання недоступної відстані, мабуть, першим застосував *Фалес Мілетський* (бл. 624–548 рр. до н. е.), коли виміряв висоту єгипетської піраміди за довжиною власної тіні.

І сьогодні ми, спираючись на властивість подібності, можемо визначати *недоступні відстані*, зокрема висоти. Наприклад, якщо треба обчислити висоту дерева, то не обов'язково лізти на нього з рулеткою. Справді, якщо тінь від дерева (невідомої висоти H) дорівнює T, а тінь від палиці завдовжки h дорівнює t, то з подібності трикутників (мал. 3.72) маємо: $\frac{H}{h}=\frac{T}{t}$ і $H=h\cdot\frac{T}{t}$.

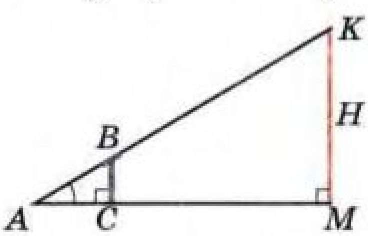


$$\frac{H}{h}=\frac{T}{t}$$

$$H=\frac{hT}{t}$$



Мал. 3.72



Мал. 3.73

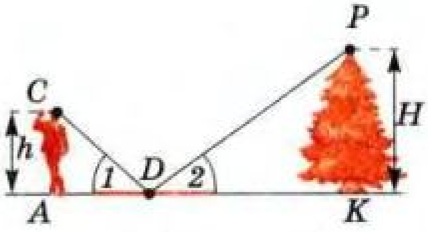
Щоб не залежати від погоди і мати можливість вимірювати висоти предметів і в похмурий день, можна скористатися кілком із планкою, яка повертається (мал. 3.73). (Планка допомагає зафіксувати напрям променя BK.) З подібності трикутників ABC і AKM маємо, що

$$\frac{H}{BC}=\frac{AM}{AC} \text{ і } H=BC\cdot\frac{AM}{AC}.$$

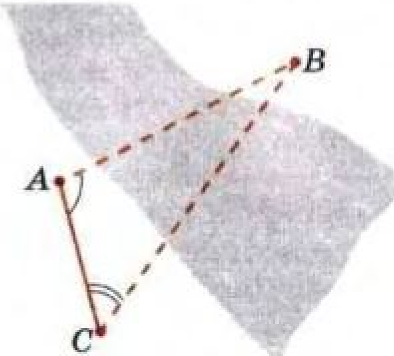
Наприклад, якщо на малюнку 3.73 довжина палиці $BC = 1$ м, відстань $AC = 3{,}2$ м, а $AM = 6{,}4$ м, то шукана висота $H = 1\cdot 6{,}4 : 3{,}2$ м ≈ 2 м.

Якщо ви знаєте свій зріст h, то визначити висоту H стовпа або дерева можна, скориставшись дзеркалом (мал. 3.74). Відомо, що при відбиванні променя світла кут падіння *2* дорівнює куту відбивання *1*, тому трикутники ACD та KPD подібні і $\frac{H}{h}=\frac{DK}{AD}$. Звідси: $H=h\frac{DK}{AD}$.

Таке вимірювання не буде дуже точним. (Чому – спробуйте з'ясувати самі, скориставшись малюнком 3.74.)



Мал. 3.74



Мал. 3.75

Геометрія – це мистецтво добре вимірювати.

П. Раме, XVI ст.

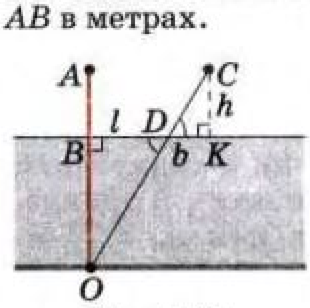
Тепер ми можемо знайти відстань до недоступної точки B (мал. 3.75). Для цього на місцевості відмічаємо відрізок AC і виміряємо кути BCA і BAC. На аркуші паперу будуємо трикутник $A_1B_1C_1$ ($\angle A = A_1$; $\angle B = B_1$). Маємо:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \; AB = AC \cdot \frac{A_1B_1}{A_1C_1}.$$

Для спрощення обчислень зручно будувати подібний трикутник $A_1B_1C_1$ у масштабі 1 : 1000. Тоді $AB = A_1B_1 \cdot \dfrac{AC}{A_1C_1} = A_1B_1 \cdot 1000$, тобто вимірявши довжину відрізка A_1B_1 в міліметрах, ми відразу отримаємо відстань AB в метрах.

Жодна наука, яка існує для того, щоб полегшити або прикрасити життя людини, без допомоги геометрії не могла б не тільки розвиватися та вдосконалюватися, але навіть і виникнути.

Феофан Прокопович, XVIII ст.



Мал. 3.76

Скориставшись властивістю подібних трикутників, можна виміряти глибину ставка за допомогою очеретини. Нехай у ставку росте очеретина AO (мал. 3.76). Відхилимо її вздовж поверхні води на l см і виміряємо відстань від кінця очеретини до поверхні води h та довжину проекції відрізка очеретини, що міститься над водою, на поверхню води b. Прямокутні трикутники DBO і DKC подібні.

Тоді $\dfrac{OB}{CK} = \dfrac{BD}{DK}$, $\dfrac{OB}{h} = \dfrac{l}{b}$.

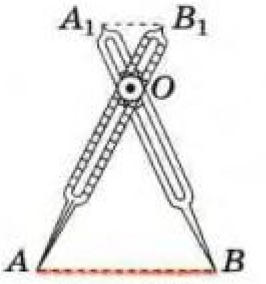
Звідси шукана глибина ставка OB дорівнює $\dfrac{lh}{b}$.

Ділильний циркуль

На подібності трикутників ґрунтується застосування ділильного циркуля, за допомогою якого можна швидко поділити даний невеликий відрізок на кілька рівних частин.

Геометрія – володарка розумових пошуків.

М. В. Ломоносов, XVIII ст.



Мал. 3.77

Цей прилад складається з двох однакових ніжок (мал. 3.77) AB_1 і BA_1, кінці яких загострені. Уздовж ніжок зроблено прорізи, в яких можна пересувати рухомий гвинт і закріплювати його в тому чи іншому місці ніжок. Ніжки можна розсувати й зближувати, обертаючи їх навколо гвинта.

Припустимо, треба поділити відрізок AB на три рівні частини. Для цього закріпимо гвинт у такій точці O, щоб відстань AO була втричі більша за відстань OB_1 (це легко зробити за допомогою поділок, нанесених по краю прорізу). Потім розхиляємо циркуль і ставимо його так, як зображено на малюнку. Тоді, з подібності трикутників AOB і A_1OB_1 маємо: $A_1B_1 : AB = OB_1 : OA = 1 : 3$.

Лишається повернути циркуль і відкласти на AB тричі відрізок A_1B_1.

Поперечний масштаб

Властивостями подібності ми користуємося, коли визначаємо відстань між точками на місцевості за картою, враховуючи її масштаб.

Для точніших вимірювань відстаней між точками за картою або планом використовують спосіб, який називається *поперечним масштабом*.

Серед рівних розумом – за інших рівних умов – переважає той, хто знає геометрію.

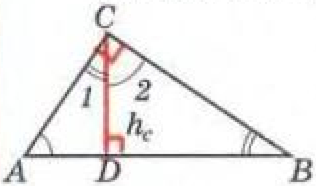
Блез Паскаль, XVII ст.

Сторони квадрата $AOKD$ (мал. 3.78-а) містять по 10 відрізків, прийнятих за одиницю виміру (наприклад, довжиною 0,5 см). Через точки поділу на стороні AD проведені прямі, паралельні другій стороні. Кожна поділка на стороні DK сполучена з поділками на стороні AO із зсувом на 1 поділку (мал. 3.78-а). У трикутнику EKO відрізки, паралельні EO, відтинають 9 трикутників, подібних до трикутника EKO (мал. 3.78-б): $\triangle O_1E_1K$, $\triangle O_2E_2K$, ..., $\triangle O_9E_9K$. Зрозуміло, що довжини відрізків E_1O_1, E_2O_2, ..., E_9O_9 дорівнюють відповідно 1 : 10, 2 : 10, ..., 9 : 10 одиниці виміру. Тепер можна використати циркуль або прозорий папір з відповідними позначками і зробити виміри на карті або плані з точністю до 0,1 одиниці виміру (у нас – до 0,05 см).

Мал. 3.78

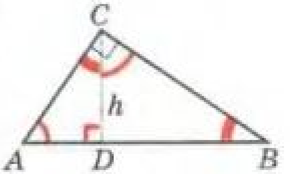
§ 23. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику. Теорема Піфагора

Т **Теорема. Висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, ділить його на два подібні трикутники. Кожний з цих трикутників подібний до заданого прямокутного трикутника.**



Мал. 3.79

Розглянемо прямокутний трикутник ABC, в якого кут C – прямий, а CD – висота (мал. 3.79). Треба довести: (1) $\triangle ADC \sim \triangle ACB$; (2) $\triangle CDB \sim \triangle ACB$; (3) $\triangle ADC \sim \triangle CDB$.



$\triangle ADC \sim \triangle ACB$
$\triangle CDB \sim \triangle ACB$
$\triangle ADC \sim \triangle CDB$

Доведення

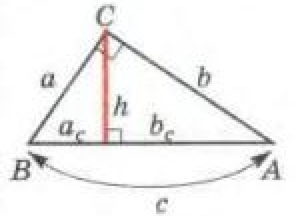
1) У прямокутних трикутниках ADC і ACB кут A – спільний, тоді $\triangle ADC \sim \triangle ACB$. Твердження (1) доведено.

2) У прямокутних трикутниках CDB і ACB кут B – спільний, тоді $\triangle CDB \sim \triangle ACB$. Твердження (2) доведено.

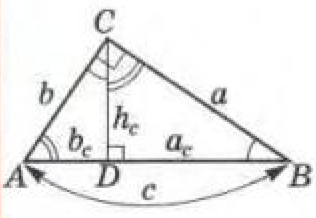
3) У трикутнику ACB $\angle A + \angle B = 90°$; у трикутнику ADC $\angle A + \angle 1 = 90°$; у трикутнику BDC $\angle 2 + \angle B = 90°$. Якщо додати останні дві рівності, отримаємо: $\angle 1 = \angle B$, $\angle 2 = \angle A$.

4) У прямокутних трикутниках ADC і CDB $\angle 1 = \angle B$, тоді $\triangle ADC \sim \triangle CDB$. Твердження (3) доведено.

Теорему доведено.



Н **Наслідок 1. У прямокутному трикутнику виконуються такі співвідношення: (1) $b^2 = b_c c$; (2) $a^2 = a_c c$; (3) $h_c^2 = a_c b_c$, де a_c і b_c – проекції катетів a і b на гіпотенузу c** (мал. 3.80).



Мал. 3.80

Наведені співвідношення інколи формулюють ще й так:

• *висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, є середнім пропорційним між відрізками гіпотенузи, на які вона поділяється цією висотою;*

• *катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу.*

$h = \sqrt{a_c \cdot b_c}$

$a = \sqrt{a_c \cdot c}$

$b = \sqrt{b_c \cdot c}$

$\Uparrow$

середнє геометричне, або середнє пропорційне

Для допитливих

Пригадайте практичну роботу № 30 зі с. 133 і розв'яжіть такі задачі.

1. Дві висоти трикутника ABC дорівнюють n і m. Довжини двох сторін трикутника, подібного до трикутника ABC, також дорівнюють n і m. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо площа подібного до нього трикутника дорівнює S.

2. Чи буде подібним даному трикутник, побудований: а) з медіан; б) з висот заданого трикутника?

3. Побудуйте трикутник за трьома його висотами. (Не забудьте довести, що побудований вами трикутник є шуканим.)

Геометрія має два скарби: один з них – це Піфагорова теорема, а другий – поділ відрізка в середньому і крайньому відношенні... Перший можна порівняти з мірою золота, а другий схожий на коштовний камінь.

Й. Кеплер, XVI–XVII ст.

Усі три співвідношення безпосередньо випливають з подібності трикутників, що вказується в теоремі.

1) Трикутники ADC і ACB подібні. Тоді проти їхніх рівних кутів лежать пропорційні сторони:

$$\frac{b}{c}=\frac{b_c}{b}.$$

Звідси маємо співвідношення (1).

2) Трикутники CDB і ACB подібні. Тоді проти їхніх рівних кутів лежать пропорційні сторони:

$$\frac{a}{c}=\frac{a_c}{a}.$$

Звідси маємо співвідношення (2).

3) Трикутники ADC і CDB подібні, проти їхніх рівних кутів лежать пропорційні сторони:

$$\frac{b_c}{h_c}=\frac{h_c}{a_c}.$$

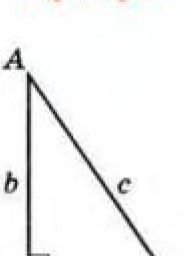
Звідси маємо співвідношення (3).

Н Наслідок 2. **ТЕОРЕМА ПІФАГОРА. У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів: $c^2 = a^2 + b^2$.**

З попереднього маємо:

$$a^2 + b^2 = a_c c + b_c c = (a_c + b_c)\, c = c^2.$$

Теорема Піфагора



$c^2 = a^2 + b^2$

Зауваження. Ми довели славнозвісну теорему Піфагора! Ви, мабуть, дивуєтесь, що доведення теореми, яку доводили різні геометри впродовж двох тисячоліть, теореми, яка вважається пам'ятником культури людства, зайняло в підручнику лише два рядочки. Проблеми, які виникали під час доведення цієї теореми у стародавніх геометрів, пояснюються відсутністю в них алгебраїчного апарату. Вони чітко розуміли відношення відрізків, але добуток відрізків для них не мав геометричного змісту. Перехід від рівності відношення до рівності добутків (властивість пропорції), який сьогодні робить кожен учень у школі, був неможливим для стародавніх геометрів. Теорему Піфагора вони формулювали як рівність площ.

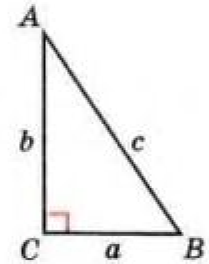
Для допитливих

1. Доведіть *узагальнену теорему Піфагора*. Якщо в прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) провести висоту CD, то для трьох довільних відповідних лінійних елементів трикутників ABC, ACD і CBD (l_c, l_b і l_a) виконується рівність $l_c^2 = l_b^2 + l_a^2$.

2. У прямокутному трикутнику провели висоту до його гіпотенузи. У два трикутники, на які ця висота поділила заданий трикутник, вписали кола, радіуси яких дорівнюють r_1 і r_2. Знайдіть радіус кола, вписаного в заданий прямокутний трикутник.

3. Числа h_1, h_2 і h_3 – довжини висот трикутника. Доведіть, якщо виконується рівність $(h_1 : h_2)^2 + (h_1 : h_3)^2 = 1$, то цей трикутник прямокутний.

Теорема (обернена до теореми Піфагора). **Якщо в трикутнику зі сторонами a, b і c виконується рівність $c^2 = a^2 + b^2$, то такий трикутник прямокутний, при цьому прямий кут лежить проти сторони c.**



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$\Downarrow$$
$$\angle C = 90^\circ$$

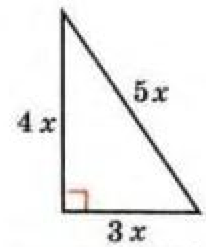
Доведення

Розглянемо прямокутний трикутник, в якого катети дорівнюють a і b. Тоді за теоремою Піфагора квадрат його гіпотенузи дорівнює $a^2 + b^2$, тобто гіпотенуза цього прямокутного трикутника дорівнює c.

За третьою ознакою рівності трикутників цей прямокутний трикутник дорівнює заданому. Тоді відповідний кут заданого трикутника дорівнює 90°.

Теорему доведено.

Наслідок 1. **Трикутник зі сторонами, довжини яких дорівнюють 3, 4 і 5 одиниць виміру, – прямокутний.** (Його називають єгипетським.)



єгипетський

Зауваження. Одиниці виміру можуть бути довільними.

Наслідок 2. **Трикутники зі сторонами, довжини яких пропорційні трійкам чисел {3; 4; 5}, {5; 12; 13}, {8; 15; 17}, {7; 24; 25}..., – прямокутні.** (Як продовжити цей ряд див. у додатку 2.)

ОПОРНІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

Опорна задача 1

Дано два відрізки a і b. Побудуйте відрізки:

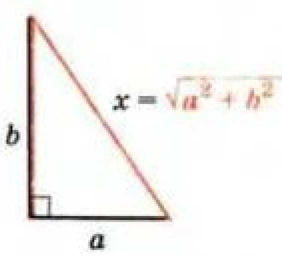
а) $x=\sqrt{a^2+b^2}$; б) $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

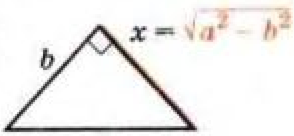
Розв'язання

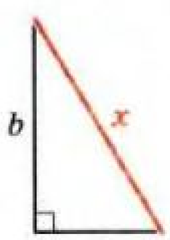
Побудови ґрунтуються на теоремі Піфагора:

а) x – гіпотенуза прямокутного трикутника з катетами a і b.

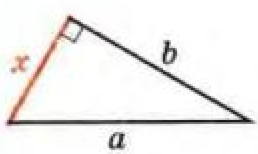
б) x – катет прямокутного трикутника, в якого другий катет дорівнює b, а гіпотенуза дорівнює a.







а)



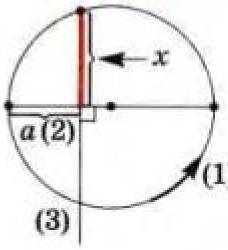
б)

Для допитливих

Діаметр AB кола дорівнює 1. На ньому відклали відрізок AC, довжина якого дорівнює $a < 1$, і провели хорду AD, довжина якої b. Через точку C провели перпендикулярну до AB пряму, яка перетинає AD в точці E, а з точки D – перпендикуляр DF до AB. З'ясувалося, що $AE = AF$. Доведіть, що $a = b^3$.

БУДУЄМО:

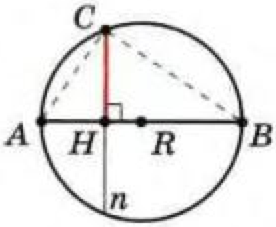
$x = \sqrt{a \cdot b}$



$R = \frac{a+b}{2}$

Опорна задача 2

Побудова середнього геометричного двох заданих відрізків.



Дано два відрізки a і b. Побудуйте відрізок $x = \sqrt{ab}$.

Аналіз

Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює середньому геометричному відрізків, на які вона ділить гіпотенузу. Отже, треба побудувати прямокутний трикутник з гіпотенузою $a + b$.

План побудови

1) $a, b \to$ відрізок $a + b$;
2) $a + b \to$ відрізок $(a + b) : 2$;
3) коло з радіусом $R = (a + b) : 2$ і позначаємо AB – діаметр;
4) на AB відкладаємо $AH = a$;
5) пряму $n \perp AB$ у точці H, n перетинає коло в точці C. Відрізок CH – шуканий.

Доведення

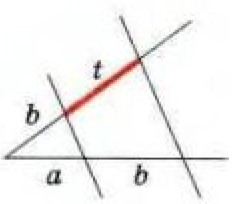
Маємо за побудовою: $R = (a + b) : 2$, $AB = 2R$, $AH = a$, $CH \perp AB$.

Довести: $CH = \sqrt{ab}$.

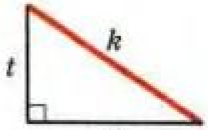
1) $AB = 2R \to \angle ACB = 90°$;
2) $AB = 2R$, $R = (a + b) : 2$, $AH = a \to HB = (a + b) - a = b$;
3) у прямокутному трикутнику ACB: $CH \perp AB$, $AH = a$, $HB = b \to CH = \sqrt{ab}$. Щ. в. д.

БУДУЄМО x:

$x^2 = \sqrt{a^4 + b^4}$



(1)



(2)

$x = \sqrt{a \cdot k}$ (3)

Опорна задача 3

Дано два відрізки a і b. Побудуйте відрізок x такий, щоб $x^2 = \sqrt{a^4 + b^4}$.

Аналіз $a^4 + b^4 = a^2\left(a^2 + \frac{b^4}{a^2}\right)$; $x^2 = a\sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2}$.

План побудови

1) $a; b \to t = \frac{b^2}{a}$ (див. опорну задачу побудови четвертого пропорційного на с. 113);

2) $a; t \to k = \sqrt{a^2 + t^2}$; 3) $a; k \to x = \sqrt{ak}$.

Доведення проведіть самостійно.

Для допитливих

1. Дано відрізок, довжина якого дорівнює 1. Побудуйте відрізки завдовжки $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ і $\sqrt{7}$. Вкажіть спосіб побудови відрізка $\sqrt{n}$.

2. Дано відрізки a, b, c, d. Побудуйте двома способами відрізок x:

а) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$; б) $x = \sqrt{a^2 - 2b^2}$; в) $x = \sqrt[4]{abcd}$; г) $x = \sqrt[4]{a^4 + 3b^4}$.

Завдання 23

1°. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: **а)** 6 см і 8 см; **б)** 4 см і 7 см; **в)** $5a$ і $12a$.

2°. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза та другий катет відповідно дорівнюють : **а)** 15 см і 9 см; **б)** 8 см і 4 см; **в)** c і a.

3°. Знайдіть: **а)** діагоналі прямокутника зі сторонами 5 см і 12 см; **б)** сторону ромба з діагоналями 4 м і 3 м; **в)** висоту рівностороннього трикутника зі стороною 12 см; **г)** діагональ квадрата зі стороною 6 см; **д)** висоту трикутника зі сторонами 10 см, 13 см і 13 см.

4°. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 60 см, а висота, опущена на бічну сторону, – 72 см. Знайдіть периметр трикутника.

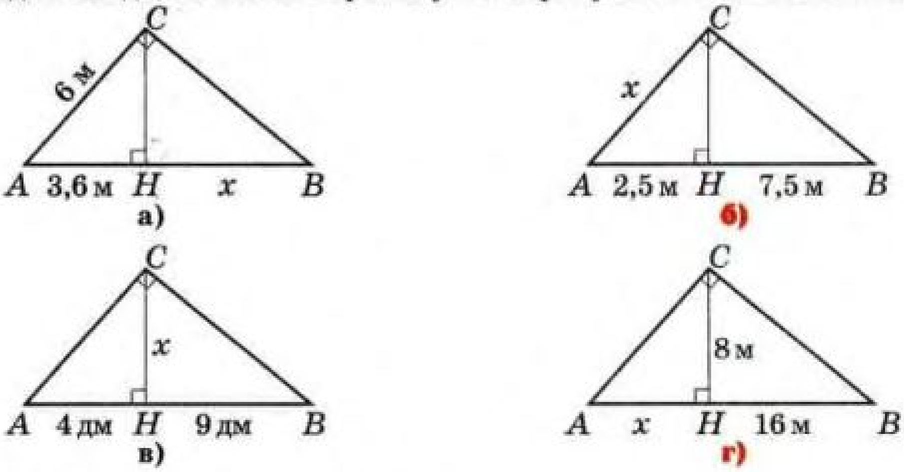
5. Знайдіть висоту і радіуси вписаного та описаного кіл рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює a.

6. Більша діагональ і більша основа прямокутної трапеції дорівнюють відповідно 13 см і 12 см. Знайдіть висоту трапеції.

7. Знайдіть висоту трапеції зі сторонами 10 см, 10 см, 10 см і 26 см.

8. У ромб, діагональ якого ділить його на два рівносторонні трикутники, вписано коло з радіусом $\sqrt{3}$ м. Знайдіть сторону ромба.

9. Знайдіть невідомий елемент прямокутного трикутника за малюнком 3.81.



Мал. 3.81

10. Знайдіть висоту, опущену на гіпотенузу трикутника з катетами 5 см і 12 см.

11. Висота прямокутного трикутника дорівнює $3\sqrt{3}$ см і ділить гіпотенузу на відрізки, один з яких на 6 см більший за другий. Знайдіть катети трикутника.

12. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 20 м, а висота, проведена до неї, – 9,6 м. Знайдіть катети.

13. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо: **а)** один з катетів дорівнює 4 см, а проекція другого катета на гіпотенузу – 1,8 см; **б)** один з катетів дорівнює 15 см, а проекція другого катета на гіпотенузу дорівнює 16 см.

14. Медіана прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи, дорівнює 12 см і утворює з одним катетом кут удвічі менший, ніж з другим. Знайдіть катети трикутника.

15. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 6 см і 8 см. Один з кутів трапеції дорівнює $120°$. Знайдіть діагоналі трапеції.

16.** Основа висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, віддалена від катетів на 3 см і 4 см. Знайдіть довжину гіпотенузи.

17*. У рівнобічну трапецію вписано коло з радіусом 2 см. Знайдіть сторони трапеції, якщо її площа дорівнює 20 см^2.

18*. Знайдіть найменшу висоту трикутника зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см.

19*. Знайдіть висоту трапеції з основами 4 дм і 14 дм та бічними сторонами 6 дм і 8 дм.

20.** У прямокутному трикутнику висота і медіана, проведені з вершини прямого кута, відносяться як 40 : 41. Знайдіть відношення його катетів.

21*. Медіани, проведені до катетів, дорівнюють a і b. Знайдіть гіпотенузу.

22.** Медіана, проведена до гіпотенузи, є середньою пропорційною величиною між його катетами. Знайдіть кути трикутника.

23*. Доведіть, що радіус кола, вписаного у прямокутний трикутник, дорівнює піврізниці між сумою катетів і гіпотенузою.

24*. Знайдіть катети прямокутного трикутника, довжини яких відносяться як 20 : 21, а різниця між радіусами описаного і вписаного кіл становить 17 см.

25*. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює 5 см, а площа трикутника – 24 см^2. Знайдіть радіус кола, вписаного у цей трикутник.

26*. Кінці більшої бічної сторони прямокутної трапеції віддалені від центра вписаного у неї кола на 15 см і 20 см. Обчисліть периметр трапеції.

27.** Центр вписаного у рівнобічну трапецію кола віддалений від вершини на 6 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо точка дотику кола ділить бічну сторону у відношенні 9 : 16.

28.** У прямокутному трикутнику ABC з вершини прямого кута проведено медіану CM і висоту CH. Знайдіть гіпотенузу, якщо $CM : CH = 5 : 4$, а $MH = 3$ см.

29.** Два кола з радіусами R і r дотикаються зовнішньо у точці A. До них проведено спільну зовнішню дотичну, яка дотикається до кіл у точках B і C. Знайдіть: **а)** BC; **б)** відстань від точки A до прямої BC.

30.** Радіуси двох кіл, що перетинаються, дорівнюють 13 см і 15 см, а спільна хорда дорівнює 24 см. Знайдіть відстань між центрами кіл.

31.** Діагоналі трапеції дорівнюють 4 см і 3 см, а відрізок, що сполучає середини основ, – 2,5 см. Знайдіть площу трапеції.

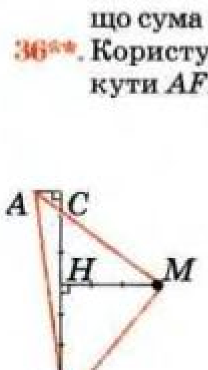
32.** Діагоналі вписаного чотирикутника взаємно перпендикулярні. Доведіть, що півсума квадратів його сторін дорівнює квадрату діаметра кола.

33.** У трикутнику ABC катет $AC = 1$ см, $BC = 7$ см. У трикутнику BMH $BH = 4$ см, $HM = 3$ см. Знайдіть кут ABM (мал. 3.82).

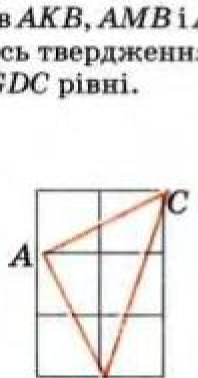
34.** На малюнку 3.83 зображено прямокутник, який розбито на 6 рівних квадратів. Знайдіть кут ABC.

35.** У прямокутному трикутнику ABC (мал. 3.84) катет AC у 3 рази довший за катет AB. Точками K і M катет AC поділено на три рівні частини. Доведіть, що сума кутів AKB, AMB і ACB дорівнює половині розгорнутого кута.

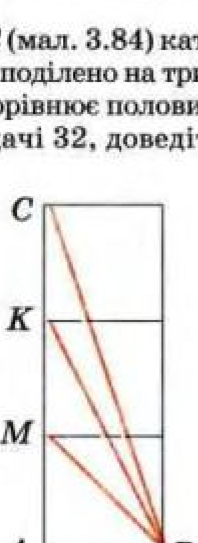
36.** Користуючись твердженням задачі 32, доведіть, що на малюнку 3.85 кути AFE і GDC рівні.



Мал. 3.82



Мал. 3.83



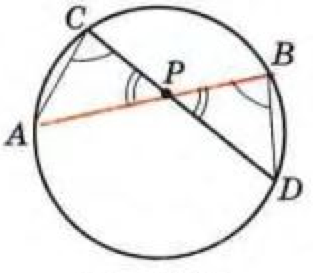
Мал. 3.84

Мал. 3.85

§ 24. Метод подібності і метричні співвідношення в колі. Властивості бісектриси трикутника

Метод подібності – використання подібності трикутників, утворених додатковими побудовами

Т Теорема 1. **Якщо через точку всередині кола провести хорди, то добуток відрізків хорди, на які вона ділиться заданою точкою, є величина стала для даного кола.**



Мал. 3.86

Всередині кола візьмемо точку P і проведемо через неї хорди AB і CD (мал. 3.86). Треба довести, що $CP \cdot PD = AP \cdot PB$.

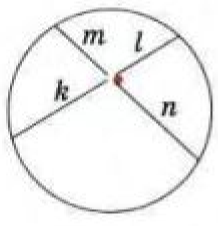
Доведення

1) На дугу AD спираються вписані кути ACD і ABD, тоді вони рівні.

2) $\angle CPA = \angle BPD$ як вертикальні, $\angle ACD = \angle ABD$ за доведеним. Тоді трикутники ACP і DBP подібні.

3) Трикутники ACP і DBP подібні, тоді їхні відповідні сторони пропорційні: $\frac{CP}{PB} = \frac{AP}{PD}$. Звідси: $CP \cdot PD = AP \cdot PB$.

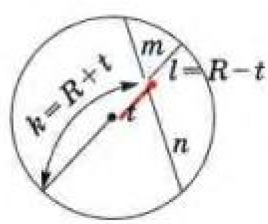
Теорему доведено.



$m \cdot n = k \cdot l$

Н Наслідок. **Якщо через точку всередині кола провести діаметр і хорду, то квадрат відстані від цієї точки до центра кола дорівнює $R^2 - m \cdot n$** (R – радіус кола, m і n – відрізки хорди, на які її поділяє задана точка).

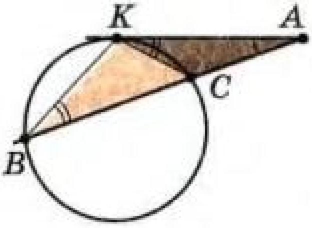
$(R + t)(R - t) = mn$, $t^2 = R^2 - mn$ (див. мал. на полі).



$m \cdot n = R^2 - t^2$

$t^2 = R^2 - m \cdot n$

Т Теорема 2. **Якщо з точки поза колом проведено до нього січну й дотичну, то добуток січної на її зовнішню частину дорівнює квадрату дотичної.**



Мал. 3.87

Нехай з точки A провели до кола січну AB і дотичну AK (мал. 3.87). Треба довести, що $AB \cdot AC = AK^2$.

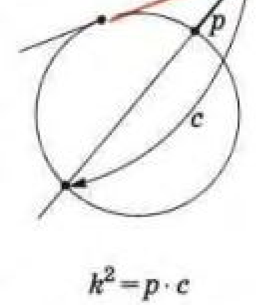
Доведення

1) Кут KBC дорівнює половині дуги KC, на яку він спирається. Кут AKC дорівнює половині дуги, що стягується хордою KC (як кут між дотичною і хордою, проведеною в точку дотику – див. с. 30). Тоді $\angle KBC = \angle AKC$.

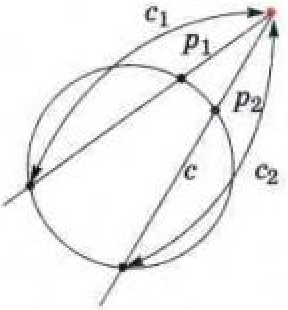
2) У трикутниках BKA і KCA кут A спільний, кути KBC і AKC – рівні. Тоді ці трикутники подібні.

3) Трикутники BKA і KCA подібні, отже їхні відповідні сторони пропорційні: $\frac{AC}{AK} = \frac{AK}{AB}$. Звідси: $AB \cdot AC = AK^2$.

Теорему доведено.



$k^2 = p \cdot c$

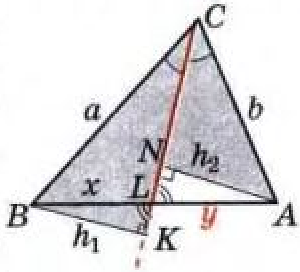


$p_1 \cdot c_1 = p_2 \cdot c_2$

Нагадаємо позначення:
$\triangleq$ – «позначили як».

Н Наслідок. **Для січних, проведених з однієї точки до кола, добуток січної на її зовнішню частину є величиною сталою для даного кола.**

Т Теорема 3. **Бісектриса трикутника ділить сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.**



Мал. 3.88

У трикутнику ABC проведемо до прямої, що містить бісектрису кута C, перпендикуляри з вершин A і B (мал. 3.88). Треба довести, що

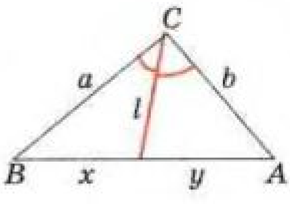
$$\frac{BL}{LA} = \frac{BC}{AC}.$$

Доведення

1) Кути BLK і NLA рівні (як вертикальні), тоді прямокутні трикутники BKL і ANL подібні і $\frac{h_1}{h_2} = \frac{x}{y}$ $(x \triangleq BL,\ y \triangleq LA)$.

2) Кути BCL і NCA рівні (за умовою), тоді прямокутні трикутники BCK і ACN подібні і $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$.

3) $\frac{x}{y} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b}$. Теорему доведено.

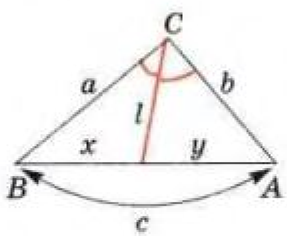


$x : y = a : b$

Н Наслідок 1. **Бісектриса кута C трикутника ABC ділить його сторону c на відрізки, довжини яких дорівнюють:**

$x = \frac{ac}{a+b}$ **– прилеглий до сторони a;**

$y = \frac{bc}{a+b}$ **– прилеглий до сторони b** (мал. 3.89).



$x = \frac{ac}{a+b}$

$y = \frac{bc}{a+b}$

За теоремою з трикутника ABC маємо:

$$\frac{x}{c-x} = \frac{a}{b}.\ \text{Звідси: } x = \frac{ac}{a+b} \text{ і } y = c - x = \frac{bc}{a+b}.$$

Для допитливих

1. У трикутнику ABC: AL_1 – бісектриса, I – інцентр. Порівняйте відрізки AI та IL_1.

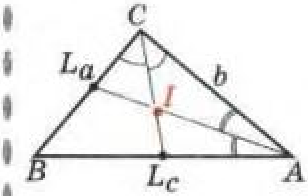
2. Доведіть, якщо бісектриси трикутника точкою свого перетину поділяються в одному відношенні, то цей трикутник рівносторонній.

3. Вписане в трикутник ABC коло дотикається до сторони BC у точці K. Доведіть, що відрізок AK більший за діаметр цього кола.

4. Доведіть, що висота трикутника більша за діаметр вписаного в цей трикутник кола.

5. Побудуйте прямокутний трикутник, в якого інцентр поділяє бісектрису прямого кута у відношенні 2 : 1, за його гіпотенузою.

Н Наслідок 2. **У трикутнику ABC інцентр I ділить бісектрису CL_c у відношенні $CI : IL_c = (a + b) : c$ (мал. 3.89).**

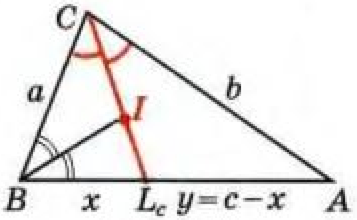


$$\frac{CI}{IL_c}=\frac{a+b}{c}$$

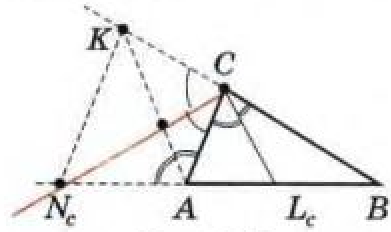
$$\frac{AI}{IL_a}=\frac{c+b}{a}$$

За теоремою з $\triangle CBL_c$ (мал. 3.89) маємо:

$$\frac{CI}{IL_c}=\frac{a}{x}=a:\frac{ac}{a+b}=\frac{a+b}{c}.$$



Мал. 3.89



Мал. 3.90

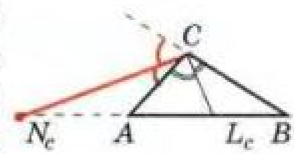
Нагадаємо позначення:

$[OK)$ – промінь з початком у точці O.

Н Наслідок 3. **Бісектриса CN_c зовнішнього кута ΔABC відтинає на промені $[BN_c)$ відрізки BN_c і AN_c, пропорційні сторонам BC і AC відповідно (мал. 3.90).**

Тобто $BN_c : AN_c = BC : AC = BL_c : AL_c$.

Доведіть це самостійно. (Розгляньте властивість бісектриси KA у ΔN_cKB і врахуйте, що $\Delta KBL \sim \Delta CBA$.)



$$\frac{BN_c}{AN_c}=\frac{BC}{AC}=\frac{BL_c}{AL_c}$$

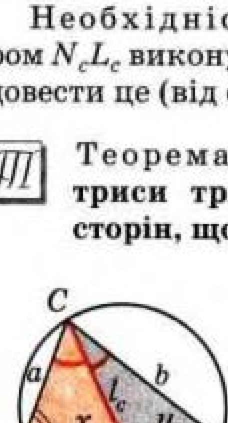
Н Наслідок 4. **Геометричним місцем точок C, для яких $BC : AC = k$ (стала $k \neq 1$, A, B – фіксовані точки), є коло з центром на прямій AB.** Це коло називається ***колом Аполлонія*** на честь Аполлонія Пергського (див. с. 40).

Коло Аполлонія – ГМТ, для яких $BC : AC = \text{const} \neq 1$, де A і B – фіксовані. Центр $O \in (AB)$.

Достатність випливає безпосередньо з наслідка 3: точки N_c і L_c не змінюють положення для довільної точки C, що задовольняє умову. При цьому $\angle N_cCL_c = 90°$ (як кут між бісектрисами суміжних кутів), тобто точка C належить колу з діаметром N_cL_c.

Необхідність: для довільної точки C кола з діаметром N_cL_c виконується рівність $BC : AC = k$. Пропонуємо довести це (від супротивного) самостійно.

Т Теорема 4 (формула Лагранжа). **Квадрат бісектриси трикутника дорівнює різниці добутку сторін, що утворюють відповідний кут трикутника, і добутку частин, на які вона ділить третю сторону трикутника.**

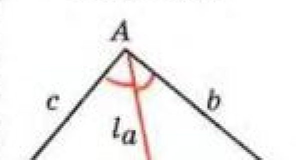


Мал. 3.91

Застосуємо *метод допоміжного кола*. Опишемо навколо $\triangle ABC$ коло і продовжимо бісектрису CL кута C до перетину з ним у точці W (мал. 3.91). Доведемо:

$l_c^2 = ab - xy$ (у позначеннях, вказаних на малюнку 3.91).

Формула Лагранжа



$$l_a^2 = bc - x_ay_a$$

$$l_c^2 = ab - x_cy_c$$

$$l_b^2 = ac - x_by_b$$

Доведення

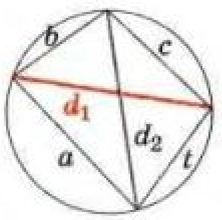
1) Кути CBA і CWA спираються на одну дугу CA, тому вони рівні.

2) $\angle BCL = \angle WCA$, $\angle CBL = \angle CWA$, тоді $\triangle CBL \sim \triangle CWA$ і

$$\frac{l_c + z}{a} = \frac{b}{l_c}.$$

3) Маємо $l_c^2 + l_c z = ab$. За властивістю хорд кола (див. с. 145) $l_c z = xy$. Теорему доведено.

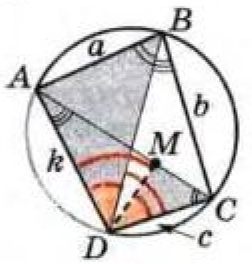
Теорема Птолемея



$d_1 \cdot d_2 = b \cdot t + a \cdot c$

Теорема 5 (теорема Птолемея). **У будь-якому вписаному в коло чотирикутнику добуток діагоналей дорівнює сумі добутків протилежних сторін.**

У вписаному чотирикутнику $ABCD$ (мал. 3.92) проведемо діагоналі AC і BD. Треба довести, що $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$.



Мал. 3.92

Доведення

Відкладемо від DC кут CDM, рівний куту ADB ($M \in AC$).

1) $\angle ABD = \angle ACD$ ($\smile AD$ – спільна), $\angle ADB = \angle CDM$.

Тоді $\triangle ADB \sim \triangle CDM$ і $\dfrac{CM}{c} = \dfrac{a}{DB}$.

2) $\angle DAC = \angle DBC$ ($\smile DC$ – спільна), $\angle ADM = \angle BDC$ (до рівних кутів CDM і ADB додали один і той самий кут BDM). Тоді $\triangle ADM \sim \triangle BDC$ і $\dfrac{AM}{k} = \dfrac{b}{DB}$.

3) $AC = CM + AM = \dfrac{ac + kb}{DB}$ і $AC \cdot BD = ac + kb$. Щ. в. д.

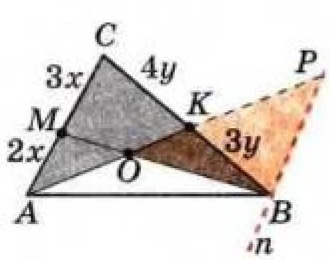
Нагадаємо позначення:
$\in$ – «належить»,
$\cap$ – «перетинає».

Опорна задача 1

На стороні AC трикутника ABC взято точку M, а на стороні BC – точку K так, що $AM : MC = 2 : 3$, $BK : KC = 3 : 4$. В якому відношенні AK поділяє відрізок BM?

Натхнення потрібне в поезії, як і в геометрії.

О. С. Пушкін



Дано: $AM : MC = 2 : 3$,
$BK : CK = 3 : 4$.

Знайти: $BO : OM$.

Проведемо $n \parallel AC$ ($B \in n$), $n \cap AK = P$.

1) $AM : MC = 2 : 3$, $AM = \dfrac{2}{5} AC$;

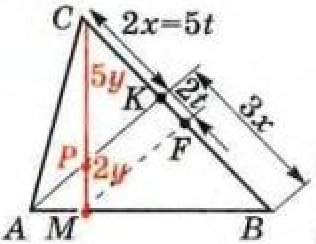
2) $\triangle BKP \sim \triangle CKA$ (за двома кутами), тоді $\dfrac{BP}{AC} = \dfrac{BK}{KC} = \dfrac{3}{4}$ і $BP = \dfrac{3}{4} AC$;

3) $\triangle BPO \sim \triangle MOA$, тоді $\dfrac{BO}{OM} = \dfrac{BP}{AM} = \dfrac{\frac{3}{4} AC}{\frac{2}{5} AC} = \dfrac{15}{8}$.

Відповідь: 15 : 8.

Опорна задача 2

На стороні AB трикутника ABC взято точку M, а на стороні BC – точку K так, що $CK : KB = 2 : 3$, а точка перетину відрізків AK і CM поділяє CM у відношенні $5 : 2$, рахуючи від вершини. В якому відношенні точка M поділяє сторону AB?



Дано: $CK : KB = 2 : 3$;
$CP : PM = 5 : 2$.
Знайти: $AM : MB$

Проведемо $MF \parallel AK$.

1) $CK : KB = 2 : 3$, $CK \triangleq 2x$, тоді $KB = 3x$.

2) $\underline{\angle MCB}$ $(PK \parallel MF)$: $CK : KF = CP : PM = 5 : 2$; $CK = 5t$, $KF = 2t$.

3) $CK = 2x = 5t \to x = 2{,}5t$ і $FB = 3x - 2t = 3 \cdot 2{,}5t - 2t = 5{,}5t$.

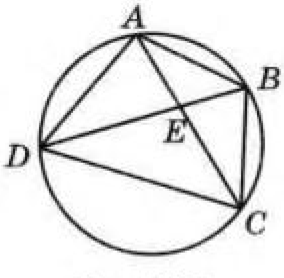
4) $\underline{\angle ABC}$ $(MF \parallel AK)$: $AM : MB = KF : FB = 2 : 5{,}5 = 4 : 11$.

Відповідь: $4 : 11$.

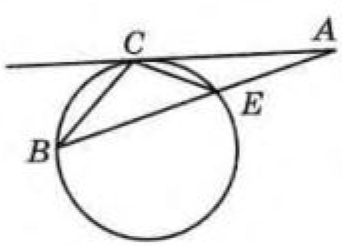
Корисно пам'ятати: при пошуку відношення відрізків у трикутнику *можуть допомогти* прямі, паралельні відрізкам, що розглядаються.

Завдання 24

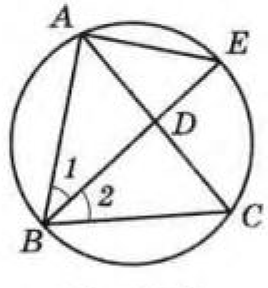
1. Знайдіть на малюнку 3.93 подібні трикутники. Відповідь обґрунтуйте.
2. З точки A до кола проведено січну AB і дотичну AC (мал. 3.94). Які з утворених трикутників подібні? Відповідь обґрунтуйте.
3. На малюнку 3.95 знайдіть подібні трикутники.



Мал. 3.93



Мал. 3.94



Мал. 3.95

4. Дві хорди перетинаються у колі. Відрізки однієї хорди дорівнюють 24 см і 14 см. Один з відрізків другої хорди дорівнює 28 см. Знайдіть довжину цієї хорди.
5. З точки кола провели перпендикуляр на діаметр. Визначте довжину перпендикуляра, якщо відрізки діаметра дорівнюють 12 см і 3 см.

Для допитливих

1. У колі з радіусом R дано дві взаємно перпендикулярні хорди AB і CP. Доведіть, що $AC^2 + BP^2 = 4R^2$.

2. На бічних сторонах трапеції як на діаметрах побудовані кола. Доведіть, що відрізки дотичних, проведених із точки перетину діагоналей трапеції до вказаних кіл, рівні між собою.

3. На продовженні хорди KL кола з центром O взято точку A, з якої до нього проведено дві дотичні AP і AQ; M – середина відрізка PQ. Доведіть, що $\angle MKO = \angle MLO$.

4. Побудуйте коло, яке проходить через дві задані точки і дотикається: **а)** до заданого кола; **б)** до заданої прямої (*це задачі Аполлонія Пергського*, див. с. 40).

6. Діагоналі AC і BD вписаного чотирикутника $ABCD$ взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці M. $AM = 3$ дм, $BM = 4$ дм, $CM = 6$ дм. Знайдіть MD і площу чотирикутника $ABCD$.

7*. У коло з радіусом r вписано рівнобедрений трикутник, у якого сума довжин висоти, проведеної до основи, і основи дорівнює діаметру. Знайдіть висоту.

8*. Діагональ AC вписаного чотирикутника $ABCD$ є бісектрисою кута BAD. Знайдіть BC, якщо BD ділить AC на відрізки 16 см і 4 см.

9*. Точка M лежить усередині кола з радіусом R і віддалена від його центра на відстань d. Хорда AB проходить через точку M. Знайдіть добуток $AM \cdot BM$.

10*. Точка P віддалена від центра кола на 7 см. Радіус кола дорівнює 11 см. Через точку P проведено хорду завдовжки 18 см. Знайдіть відрізки, на які точка P поділяє хорду.

11**. Точка M лежить поза колом радіуса R і віддалена від його центра на відстань d. Через точки A і B кола та точку M проведено січну. Знайдіть добуток $AM \cdot BM$.

12*. Із зовнішньої точки кола проведено січну завдовжки 12 см і дотичну, яка становить $\frac{2}{3}$ внутрішнього відрізка січної. Знайдіть довжину дотичної.

13*. З точки A проведено дві січні, що перетинають коло: одна у точках B і C, друга – в D і E. Відомо, що $AB = 7$ см, $BC = 7$ см, $AD = 10$ см. Знайдіть DE.

14*. Дотична до кола дорівнює 20 см, а найбільша січна, проведена з тієї самої точки, дорівнює 50 см. Визначте радіус кола.

15**. У квадрат $ABCD$ зі стороною $2\sqrt{5}$ см вписано коло, що дотикається до сторони CD в точці E. Знайдіть хорду, яка належить прямій AE.

16**. Два кола перетинаються в точках A і B. Хорди AC і AD проведені у колах так, що хорда одного кола дотикається до другого кола. Знайдіть AB, якщо $CB = a$, $BD = b$.

17**. Доведіть, що пряма, яка проходить через точки перетину двох кіл, ділить навпіл їх спільну дотичну.

18*. Хорди AB і CD перетинаються в точці M. Бісектриса кута BMD перетинає хорду BD у точці K. Знайдіть відрізки BK і KD, якщо $BD = 3$ см, а площі трикутників BCM і AMD відносяться як $1 : 4$.

19*. У трикутнику бісектриса кута між сторонами з довжинами 9 см і 6 см поділила третю сторону на два відрізки, один з яких – 6 см. Знайдіть: а) довжину третьої сторони; б) довжину бісектриси.

Для допитливих

Головоломки Реймонда М. Смалліана.

1. Людина дивиться на портрет. Її запитують: «Чий це портрет Ви роздивляєтесь?». Людина відповідає: «У сім'ї я зростав один як перст. Проте батько того, хто на портреті, – син мого батька!». Про чий портрет іде мова? (Увага! Відповідь, що на портреті зображено саме ту людину, яка на нього дивиться, є хибною.)

2. Припустимо, що в першій задачі людина, яка роздивлялася портрет, дала таку відповідь: «У сім'ї я зростав один як перст. Проте син того, хто на портреті, – син мого батька!». Про чий портрет іде мова?

3. Про населення деякого міста відомо таке.

1) Серед його мешканців немає двох осіб з однаковою кількістю волосин на голові.

2) У жодного мешканця цього міста не росте на голові рівно 518 волосин.

3) Мешканців у цьому місті більше, ніж волосин на голові будь-кого з них. Якою може бути найбільша чисельність населення цього міста?

20.** Катети трикутника дорівнюють 15 см і 20 см. З вершини прямого кута провели бісектрису і висоту. На які відрізки розділилась гіпотенуза?

21*. Знайдіть довжину бісектриси прямокутного трикутника з катетами 4 см і 6 см, проведеної з вершини прямого кута.

22.** Доведіть, якщо дві бісектриси внутрішніх кутів трикутника рівні, то він рівнобедрений.

23.** Доведіть, якщо для деякої точки E на стороні BC трикутника ABC має місце рівність $BE : CE = AB : AC$, то AE – бісектриса трикутника.

24.** Точка M лежить на стороні AB трикутника ABC ($AB : AC = 3 : 1$) і поділяє її у відношенні $AM : MB = 7 : 2$. У якому відношенні відрізок CM поділяє бісектрису AH цього трикутника?

25.** У рівнобедреному трикутнику бісектриса кута при основі поділяє висоту, проведену до основи, у відношенні 3 : 2. Знайдіть периметр цього трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює $4\sqrt{5}$ мм.

26.** Точки K, P і M, H належать сторонам AB і AC трикутника ABC відповідно. Прямі KM, PH і BC паралельні. З вершини кута A проведено бісектрису. Доведіть, що вона поділяє відрізки KM і PH в однаковому відношенні.

27.** У прямокутному трикутнику бісектриса поділяє гіпотенузу у відношенні 7 : 9. У якому відношенні поділяє гіпотенузу висота?

28.** У прямокутному трикутнику ABC з катетом $BC = 6$ см і гіпотенузою $AB = 10$ см проведені бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині B, які перетинають відповідно катет і його продовження в точках D і E. Знайдіть довжину DE.

29.** Точки A_1 і B_1 належать відповідно сторонам OA і OB кута AOB (градусна міра кута AOB не дорівнює $180°$), і виконується рівність: $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$. Доведіть, що точки A, A_1, B, B_1 належать одному колу.

30.** Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці M. Доведіть, що коли виконується рівність $AM \cdot CM = BM \cdot DM$, то чотирикутник вписаний.

31.** Точка M лежить на продовженні хорди AB. Доведіть, що коли для деякої точки кола C виконується рівність $MC^2 = MA \cdot MB$, то MC – дотична до кола.

Для допитливих

1. Доведіть *лему Архімеда про перпендикулярні хорди*.

Якщо дві хорди кола взаємно перпендикулярні і поділяються точкою перетину на відрізки *a* і *b*, *c* і *d* відповідно, то сума квадратів цих відрізків дорівнює квадрату діаметра кола.

Скільки способів доведення ви можете запропонувати?

2. У колі з радіусом R проведено дві хорди, що перетинаються під прямим кутом у точці M. Знайдіть суму квадратів хорд, якщо відстань від точки M до центра кола дорівнює n.

3. Доведіть, якщо два відрізки AB і CD поділяються точкою їхнього перетину K так, що $AK \cdot KB = CK \cdot KD$, то через точки A, B, C і D можна провести коло.

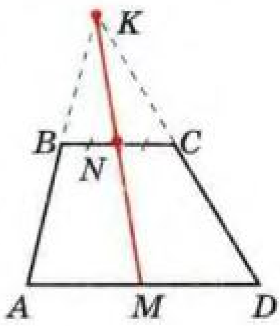
4. У центрі квадратного пирога міститься родзинка. Від пирога можна відрізати трикутний шматок по прямій, що перетинає дві його сусідні сторони в точках, які не є вершинами; від залишку пирога можна відрізати таким самим чином наступний шматок і т. д.

Чи можна відрізати шматок пирога з родзинкою?

§ 25. Метод подібності в опорних задачах трапеції

Опорна задача 1

Доведіть, що точки перетину продовження бічних сторін трапеції та середини її основ лежать на одній прямій.



Дано: $BC \parallel AD$; $BN = NC$;
$KN \cap AD = M$.
Довести: $AM = MD$.

1) $\underline{\angle AKM}$ і $\underline{\angle MKD}$: $BC \parallel AD$, тоді $\triangle BKN \sim \triangle AKM$ і $\triangle NKC \sim \triangle MKD$ і

$$\frac{BN}{AM} = \frac{KN}{KM} = \frac{NC}{MD};$$

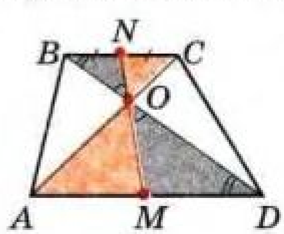
2) $\dfrac{BN}{AM} = \dfrac{NC}{MD}$, $BN = NC \to AM = MD$.

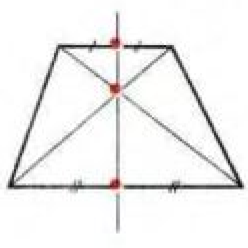
Щ. в. д.

три точки лежать на одній прямій

Опорна задача 2

Доведіть, що точки перетину діагоналей трапеції та середини її основ лежать на одній прямій.





Дано: $BC \parallel AD$; $BN = NC$;
$NO \cap AD = M$.
Довести: $AM = MD$.

1) $BC \parallel AD$, BD – січна $\to \angle NBO = \angle ODA$;

2) $\angle NBO = \angle ODA$; $\angle NOB = \angle DOM$ (вертикальні) $\to \triangle NBO \sim \triangle MDO$;

3) аналогічно: $\triangle NOC \sim \triangle MOA$;

4) $\triangle NBO \sim \triangle MDO$ і $\triangle NOC \sim \triangle MOA \to \dfrac{BN}{MD} = \dfrac{NO}{OM} = \dfrac{NC}{AM}$;

5) $\dfrac{BN}{MD} = \dfrac{NC}{AM}$, $BN = NC \to AM = MD$.

Щ. в. д.

Нагадаємо позначення: $\cap$ – «перетинає».

Для допитливих

1. Діаметр кола з радіусом R поділено на 4 рівні частини. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки цього кола до даних точок поділу (враховуючи і кінці діаметра) є величиною сталою для цього кола.

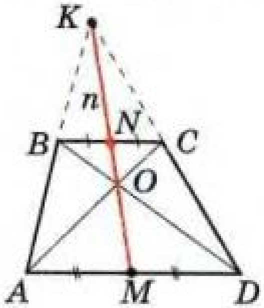
2. Діаметр кола з радіусом R поділено на n рівних частин. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки цього кола до даних точок поділу (враховуючи і кінці діаметра) є величиною сталою для цього кола.

3. Два кола з радіусами r_1 і r_2 дотикаються одне до одного зовнішньо. Знайдіть довжину їхньої спільної дотичної і радіус кола, що дотикається до неї і до двох заданих кіл.

4. Три кола попарно дотикаються одне до одного в точках A, B і C (A – точка дотику першого та другого кіл). Доведіть, що точки перетину прямих AB та AC з третім колом і центр третього кола належать одній прямій.

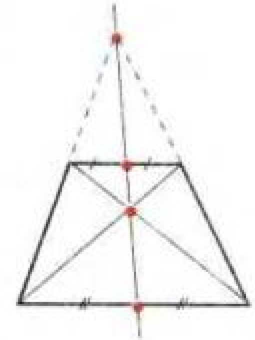
Опорна задача 3

Доведіть, що точки перетину діагоналей трапеції, точки перетину продовження бічних сторін трапеції та середини її основ лежать на одній прямій.



Дано: $BC \parallel AD$; $BN = NC$; $AM = MD$.
Довести: $\{K; N; O; M\} \in n$.

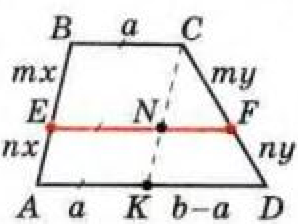
Позначимо пряму KN через n.
1) $\{K; N\} \in n \rightarrow \{K; N; M\} \in n$ – за опорною задачею 1;
2) $\{K; N\} \in n \rightarrow \{N; O; M\} \in n$ – за опорною задачею 2.
Тоді $\{K; N; O; M\} \in n$. Щ. в. д.



чотири точки лежать на одній прямій

Опорна задача 4

Відрізок, паралельний основам трапеції, кінці якого лежать на бічних сторонах цієї трапеції, ділить одну з цих сторін у відношенні $m : n$ (якщо рахувати від меншої основи). Знайдіть довжину цього відрізка, якщо довжини основ трапеції дорівнюють a і b ($a < b$).



Дано: $EF \parallel BC \parallel AD$; $BC = a$; $AD = b$; $BE : EA = m : n$.
Знайти: EF.

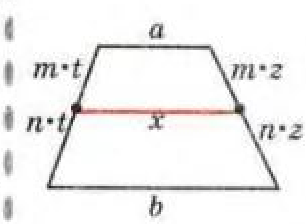
---

1) $\angle(AB; CD)$: $EF \parallel BC \parallel AD \rightarrow BE : EA = CF : FD = m : n$;
2) $CK \parallel AB$ за побудовою, $BC \parallel AD \rightarrow BC = EN = AK = a$, $KD = b - a$;

3) $CK \parallel AB$, $EF \parallel AD \rightarrow \triangle CNF \sim \triangle CKD$ з $k = \dfrac{m}{n+m}$;

4) $\triangle CNF \sim \triangle CKD \rightarrow NF : KD = \dfrac{m}{n+m}$ і $NF = KD\,\dfrac{m}{n+m}$;

5) $EF = EN + NF = a + \dfrac{(b-a)m}{n+m} = \dfrac{an+bm}{n+m}$. Щ. в. д.



$$\frac{x \parallel a}{\Downarrow}$$

$$x = \frac{an+bm}{m+n}$$

Для допитливих

Вашій увазі пропонуються задачі на побудову **Якоба Штейнера** (див. с. 129), які він пропонував студентам Берлінського університету під час своїх лекцій. У цих задачах **побудови виконуються тільки за допомогою *однієї лінійки***. Спробуйте їх розв'язати і не забудьте довести, що ви побудували саме ту фігуру, яка вимагалася за умовою задачі.

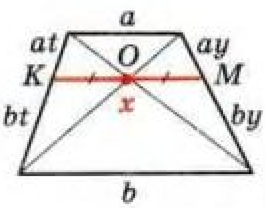
1. На прямій дано три точки A, B і C, з яких B знаходиться посередині між A і C. Через довільну точку K ($K \notin (AC)$) проведіть пряму, паралельну (AC).

2. Дано два паралельні відрізки AC і KE. Поділіть якийсь із цих відрізків, наприклад AC, навпіл.

3. Дано дві паралельні прямі. Проведіть через дану точку, яка не лежить на цих прямих, третю пряму, паралельну даним.

4. Дано допоміжне коло і довільну пряму AB. Проведіть пряму, яка проходить через задану точку і паралельна (AB).

$x \parallel a$



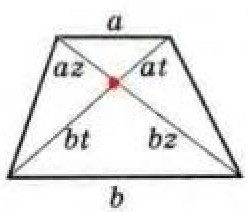
$KO = OM$

$x = \dfrac{2ab}{a+b}$

↑

в будь-якій трапеції

↓



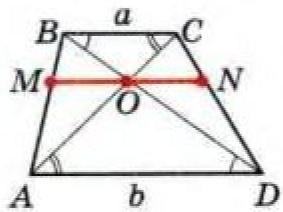
Опорна задача 5

Відрізок, паралельний основам трапеції, кінці якого належать бічним сторонам трапеції, проходить через точку перетину діагоналей цієї трапеції. Доведіть, що цей відрізок:

а) точкою перетину діагоналей трапеції ділиться навпіл;

б) бічну сторону трапеції і кожну діагональ трапеції ділить на відрізки, пропорційні прилеглим основам;

в) має довжину, що дорівнює відношенню подвоєного добутку довжин основ трапеції до суми цих основ.



Дано: $MN \parallel BC \parallel AD$; $BC = a$; $AD = b$.

Довести: $MO = ON$ (1);

$BO : OD = OC : OA = a : b$ (2); $BM : MA = CN : ND = a : b$ (3);

$MN = \dfrac{2ab}{a+b}$ (4).

1) $MN \parallel BC$, тоді $\triangle ABC \backsim \triangle AMO$, $\triangle DBC \backsim \triangle DON$.

2) $\triangle ABC \backsim \triangle AMO$: $\dfrac{MO}{a} = \dfrac{AM}{AB}$;

$\triangle DBC \backsim \triangle DON$: $\dfrac{ON}{a} = \dfrac{ND}{CD}$.

3) $MA : AB = ND : DC$ (за узагальненою теоремою Фалеса), тоді

$$\frac{MO}{a} = \frac{ON}{a} \text{ і } MO = ON, \text{ тобто (1) доведено.}$$

4) $BC \parallel AD$, тоді $\triangle BOC \backsim \triangle DOA$ і

$$\frac{BO}{OD} = \frac{a}{b} = \frac{OC}{AO} \text{ – (2) доведено.}$$

5) $MN \parallel BC \parallel AD$, тоді, за узагальненою теоремою Фалеса:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{ND} = \frac{OC}{OA} = \frac{a}{b} \text{ – (3) доведено.}$$

6) $MN \parallel BC \parallel AD$, $BM : MA = a : b$, тоді, за опорною задачею 4, маємо:

$$MN = \frac{ab + ba}{a+b} = \frac{2ab}{a+b} \text{ – (4) доведено.}$$

Щ. в. д.

Для допитливих

У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$) через вершину B провели пряму $BK \parallel CD$ ($K \in AC$). Доведіть, що трикутники ABC і KCD рівновеликі.

Завдання 25

1. Основи трапеції дорівнюють a і b ($a < b$). Знайдіть відношення, в якому діагоналі цієї трапеції поділяють відрізок з кінцями у серединах її основ.
2. Основи трапеції дорівнюють 3 см і 6 см. Пряма, паралельна основам трапеції, проходить через точку перетину діагоналей трапеції. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої всередині трапеції.
3. У рівнобічній трапеції довжини основ дорівнюють 4 см і 6 см. Знайдіть довжину відрізка з кінцями в точках дотику до бічних сторін кола, що вписане в цю трапецію.
4. Одна з діагоналей трапеції поділяється їхньою точкою перетину на відрізки 2 см і 4 см. Менша з основ трапеції дорівнює 4 см. Знайдіть більшу основу трапеції.
5. Непаралельні сторони трапеції продовжили до їх перетину і через отриману точку провели пряму паралельно основам трапеції. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, обмеженого продовженням діагоналей трапеції, якщо довжини її основ дорівнюють a і b ($a < b$).
6. Площа трапеції дорівнює 27 м^2, основи – 8 м і 16 м. Знайдіть площі трикутників, на які трапецію поділяють її діагоналі.
7. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точки M і N – середини основ, пряма MN утворює рівні кути з прямими AB і CD. Доведіть, що ця трапеція рівнобічна.
8. Довжини основ трапеції відносяться як 2 : 5. Паралельно основам трапеції провели пряму, яка поділяє бічну сторону трапеції у відношенні 1 : 2. Знайдіть відношення площ двох частин трапеції, на які пряма поділила трапецію.
9. Основи трапеції дорівнюють 2 см і 4 см. Знайдіть довжину відрізка, паралельного основам, який поділяє дану трапецію на дві рівновеликі частини.
10. Паралельно основам трапеції проведіть пряму так, щоб її відрізок, який міститься всередині трапеції, поділявся її діагоналями на три рівні частини.
11. Дано дві паралельні прямі. За допомогою лише лінійки (без позначок) поділіть навпіл відрізок, який міститься на одній з цих прямих.

Для допитливих

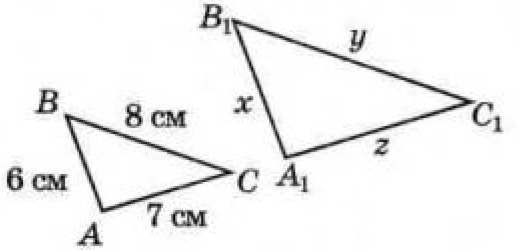
Про поїздку відомого французького енциклопедиста **Дідро** до Росії на запрошення Катерини II розповідають таке.

Дідро був атеїстом, не приховував своїх переконань і наполегливо їх пропагував. Імператриця вважала його висловлювання дотепними, проте один з її вельмож порадив припинити атеїстичні виступи Дідро. Знайти спосіб, як запобігти філософським промовам Дідро, попрохали знаменитого математика **Леонарда Ейлера**. Леонард Ейлер, геній, який відкрив людству нові напрямки математики, був людиною глибоко релігійною і мав неабияке почуття гумору. Ейлер сповістив Дідро, що йому вдалося знайти доведення існування Бога і з цим доведенням він із задоволенням ознайомить Дідро в присутності всього імператорського двору. Дідро погодився на диспут.

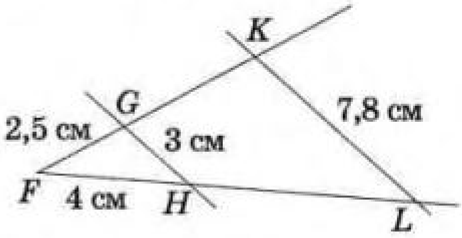
І от наступного дня найповажніші вельможі на запрошення Катерини II зібрались за величезним столом. Ейлер, користуючись тим, що Дідро зовсім не розумівся на математиці, підвівся і, дивлячись у вічі своєму опоненту, замогильним голосом сповістив: «**А** в квадраті мінус **В** в квадраті дорівнює **А** мінус **В**, помножене на **А** плюс **В**. Звідси випливає, що Бог існує. Ви згодні?». Залунав загальний сміх, а Дідро розгубився. Тут же він попросив імператрицю дозволити повернутися до Франції.

Завдання для повторення розділу III

1. Сформулюйте узагальнену теорему Фалеса.
2. Сформулюйте обернену теорему Фалеса.
3°. Які трикутники називаються подібними?
4°. Сформулюйте основну теорему подібності трикутників.
5°. Сформулюйте ознаки подібності трикутників.
6. Доведіть основну теорему подібності.
7°. Сформулюйте ознаки подібності прямокутних трикутників.
8°. Сформулюйте властивості подібних трикутників.
9. Сформулюйте і доведіть теорему про властивість висоти прямокутного трикутника.
10. Сформулюйте наслідки з теореми про висоту прямокутного трикутника. Який з них називається теоремою Піфагора?
11°. Трикутники RTF і $R_1T_1F_1$ – подібні. $RT = 8$ см, $R_1T_1 = 16$ см, $T_1F_1 = 18$ см, $R_1F_1 = 20$ см. Знайдіть TF і RF.
12. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ – подібні (мал. 3.96). Периметр трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 105 см. Знайдіть x, y, z.
13. За малюнком 3.97 знайдіть периметр трикутника FKL.

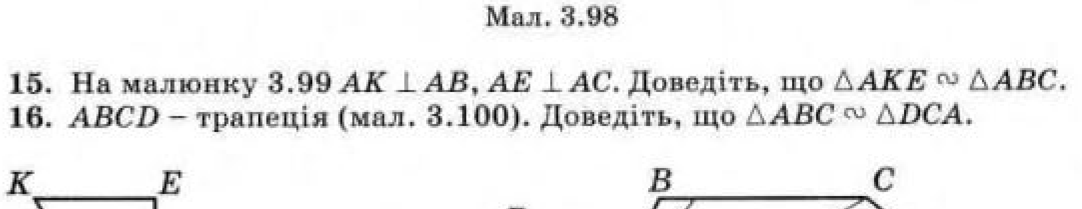


Мал. 3.96



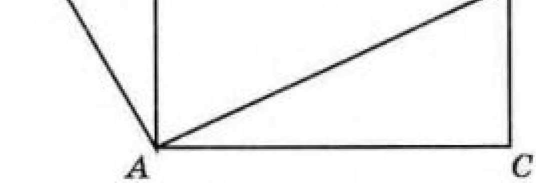
Мал. 3.97

14°. На малюнку 3.98 знайдіть подібні трикутники. Обчисліть невідомі сторони трикутників.



Мал. 3.98

15. На малюнку 3.99 $AK \perp AB$, $AE \perp AC$. Доведіть, що $\triangle AKE \sim \triangle ABC$.
16. $ABCD$ – трапеція (мал. 3.100). Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle DCA$.

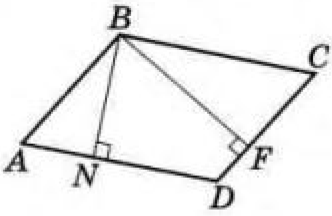


Мал. 3.99

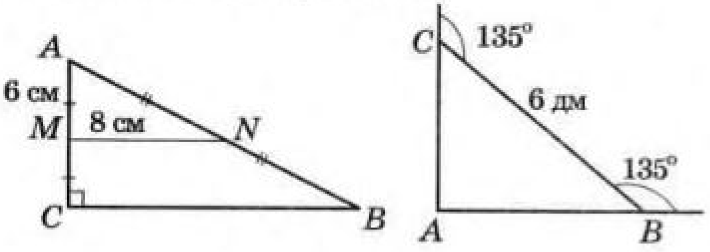
Мал. 3.100

17. На малюнку 3.101 $ABCD$ – паралелограм. 1) Доведіть, що $\triangle ABN \sim \triangle CBF$. 2) Знайдіть відношення $AN : FC$ і $AD : AB$, якщо $BN : BF = 2 : 3$.

18. За малюнком 3.102 знайдіть довжину відрізка AB.



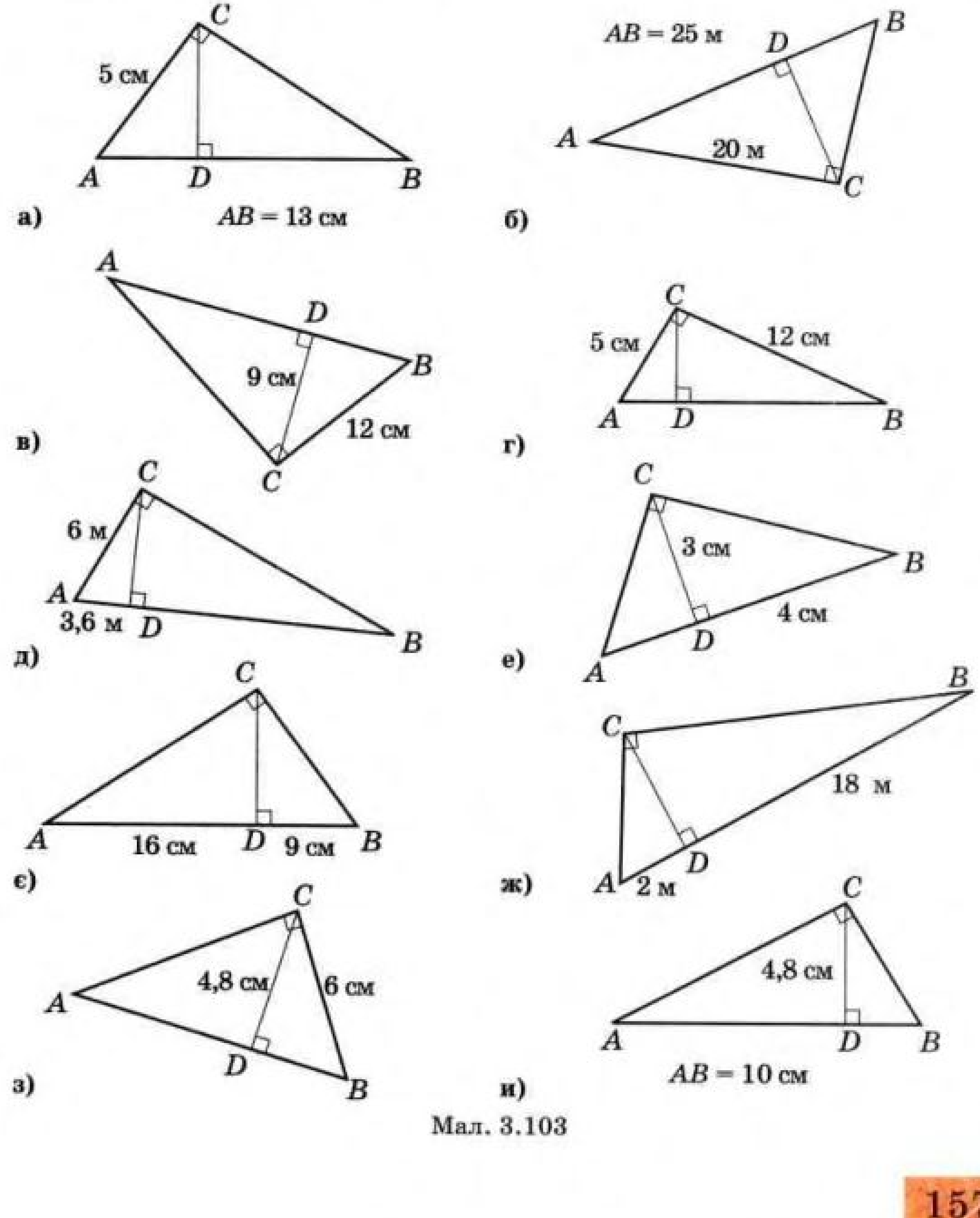
Мал. 3.101



а) б)

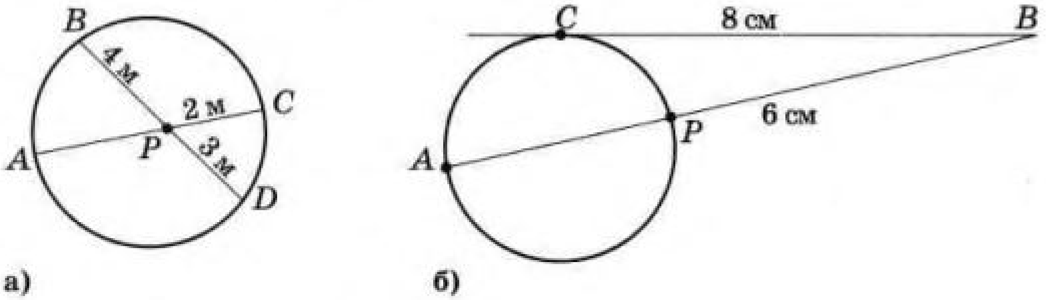
Мал. 3.102

19°. Знайдіть невідомі елементи прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) (мал 3.103).



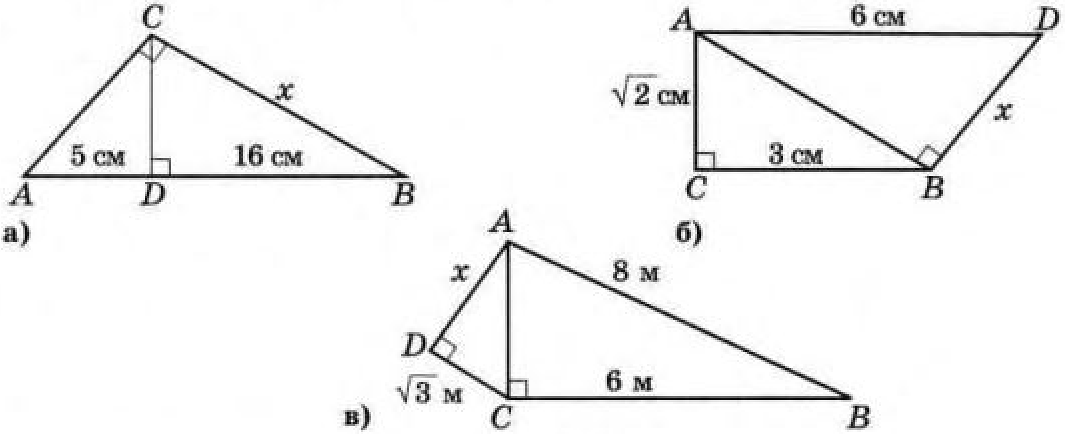
Мал. 3.103

20°. Знайдіть довжину відрізка AP за малюнком 3.104.



Мал. 3.104

21. Трикутник ABC прямокутний (мал. 3.105), $\angle C = 90°$. Знайдіть x.



Мал. 3.105

22. Периметр прямокутника дорівнює 56 см. Одна з його сторін дорівнює 16 см. Обчисліть довжину діагоналей прямокутника.

23*. У прямокутному трикутнику бісектриса гострого кута ділить катет на відрізки 4 см і 5 см. Знайдіть сторони трикутника.

24*. Проекції катетів прямокутного трикутника на його гіпотенузу дорівнюють 2 см і 4 см. Знайдіть довжини сторін цього трикутника.

25*. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а медіана бічної сторони – 19,5 см. Знайдіть довжини бічних сторін трикутника.

26*. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, якщо радіус кола, вписаного у цей трикутник, дорівнює 3 см, а один з катетів – 10 см.

27*. Коло, центр якого лежить на основі рівнобедреного трикутника, дотикається до бічних сторін цього трикутника. Знайдіть радіус цього кола, якщо довжина основи трикутника дорівнює 8 см, а висота, проведена до його основи, – 3 см.

28*. Знайдіть площу квадрата, вписаного в правильний трикутник зі стороною a (всі вершини квадрата належать сторонам трикутника).

29*. Всередині круга, радіус якого дорівнює 15 см, позначили точку M на відстані 13 см від центра. Через точку M провели хорду завдовжки 18 см. Знайдіть довжини відрізків, на які точка M ділить цю хорду.

30*. З точки поза заданим колом провели до нього січну і дотичну. Відстань від точки A до точки дотику дорівнює 16 см, а до однієї з точок перетину січної з колом – 32 см. Знайдіть радіус кола, якщо січна віддалена від його центра на 5 см.

31*. З точки поза колом провели дотичну і січну цього кола. Довжина дотичної на 8 см більша від внутрішнього відрізка січної і на 20 см менша від зовнішнього. Знайдіть довжину дотичної.

32*. Діагональ прямокутної трапеції і її бічна сторона рівні між собою. Знайдіть довжину середньої лінії трапеції, якщо довжини бічних сторін дорівнюють 2 см і 4 см.

33*. Знайдіть довжину діагоналі і бічної сторони рівнобічної трапеції з основами 20 см і 12 см, якщо центр описаного навколо цієї трапеції кола лежить на її основі.

34.** Хорда кола дорівнює 10 см. Через один її кінець провели дотичну до кола, а через другий – січну, паралельну дотичній. Знайдіть радіус кола, якщо довжина внутрішнього відрізка січної дорівнює 12 см.

35.** У прямокутному трикутнику провели бісектрису гострого кута. Відрізок, що сполучає її основу з точкою перетину медіан, перпендикулярний до катета. Знайдіть кути трикутника.

36.** До кола, вписаного в рівнобедрений трикутник з основою 12 см і висотою 8 см, провели дотичну паралельно основі трикутника. Знайдіть довжину відрізка дотичної, яка міститься всередині трикутника.

37.** Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, поділяє гіпотенузу на відрізки, довжини яких m і n. Доведіть, що площа заданого прямокутного трикутника дорівнює mn.

38.** У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює c, а сума квадратів бісектрис гострих кутів дорівнює m^2. Знайдіть відстань між кінцями бісектрис, що лежать на катетах.

39.** У прямокутний трикутник вписано півколо, центр якого лежить на гіпотенузі й поділяє її на відрізки довжиною 15 см і 20 см. Знайдіть радіус цього кола і площу трикутника.

40.** На кожній медіані трикутника взято точку, що ділить медіану у відношенні 3 : 1, якщо рахувати від вершини. У скільки разів площа трикутника з вершинами у цих точках менша за площу заданого трикутника?

41.** Точки дотику вписаного у трапецію кола ділять одну бічну сторону на відрізки 9 см і 16 см, а другу – у відношенні 4 : 9. Знайдіть основи трапеції.

42.** Площа рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 8 см^2. Визначте периметр трапеції, якщо кут при її основі дорівнює $30°$.

43.** У рівнобічну трапецію вписано коло радіуса R. Одна основа трапеції менша за її висоту в два рази. Знайдіть площу трапеції.

Готуємося до тематичного оцінювання № 3

Варіант I

1. (2 б.) Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні. $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 4$ см. Знайдіть периметр трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $A_1B_1 = 11{,}2$ см.
2. (1 б.) Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють 6 см і 5 см.
3. (2 б.) Діагональ прямокутника більша за одну з його сторін на 1 см. Знайдіть цю діагональ, якщо периметр прямокутника дорівнює 34 см.
4. (3 б.) Знайдіть бічну сторону рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 14 см і 18 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.
5. (4 б.) Точки дотику вписаного у рівнобічну трапецію кола ділять бічну сторону на відрізки 3 см і 12 см. Знайдіть площу трапеції.

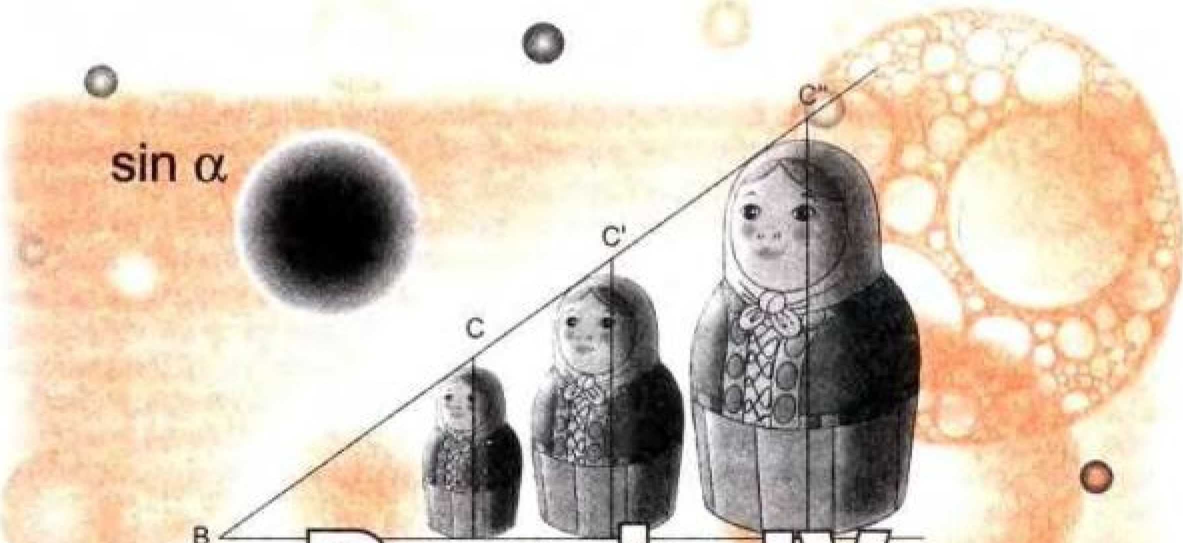
Варіант II

1. (2 б.) Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні. $A_1B_1 = 3$ см, $B_1C_1 = 5$ см, $A_1C_1 = 7$ см. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $BC = 13$ см.

2. (1 б.) Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза та другий катет відповідно дорівнюють 9 см і 5 см.
3. (2 б.) Діагональ прямокутника більша за одну з його сторін на 4 м. Знайдіть цю діагональ, якщо периметр прямокутника дорівнює 28 м.
4. (3 б.) Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 5 см і 13 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.
5. (4 б.) Середня лінія описаної рівнобічної трапеції дорівнює 20 см. Відстань від центра вписаного кола до вершини, що лежить на меншій основі, дорівнює 10 см. Знайдіть радіус вписаного кола в дану трапецію.

Для допитливих

1. У трикутнику ABC зі сторонами a, b і c через точку перетину бісектрис I проведено прямі паралельно сторонам цього трикутника. Знайдіть довжини відрізків цих прямих, що відтинаються сторонами трикутника.
2. Бісектриса AL перетинає вписане в трикутник ABC коло в точках K і P (рахуючи від вершини A). Який з відрізків довший: AK чи PL?
3. Бісектриси AK і BP трикутника ABC перетинаються в точці I і діляться нею у відношенні $AI : IK = 3 : 2$ і $BI : IP = 5 : 3$. Знайдіть відношення сторін трикутника ABC.
4. Бісектриса трикутника ділить сторону трикутника на відрізки 8 см і 10 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо центр вписаного кола ділить цю бісектрису у відношенні 3 : 2, якщо рахувати від вершини трикутника.
5. У рівнобедреному трикутнику ABC висота AK вдвічі менша за його бісектрису CL. Знайдіть кути трикутника ABC.
6. У трикутнику ABC через середину M_1 сторони BC та інцентр I провели пряму, яка перетинає висоту AH_1 у точці E. Доведіть, що відрізок AE дорівнює радіусу кола, вписаного в трикутник ABC.
7. Доведіть, що для довільного трикутника ABC виконується співвідношення: $AI \cdot IW = 2Rr$, де R і r – радіуси описаного і вписаного кіл, точка I – інцентр трикутника, а W – точка перетину кола, описаного навколо трикутника ABC, з прямою AI.
8. На стороні BC квадрата $ABCD$ позначили точку K. Бісектриса кута ADK перетинає сторону AB у точці M. Доведіть, що $DK = KC + AM$.
9. На стороні BC правильного трикутника ABC позначили точку D і на відрізку CD, як на стороні, побудували рівносторонній трикутник CDE (зовні трикутника ABC). Точки K і M – середини відрізків AD і BE, відповідно. Доведіть, що трикутник CKM – правильний.
10. Впишіть у задане коло два рівних трикутники із взаємно перпендикулярними сторонами.
11. Всередині кута ABC позначили точку M. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник із вершиною прямого кута в точці M і двома іншими вершинами на сторонах кута ABC.
12. Пряма l дотикається до кола, описаного навколо трикутника ABC, в точці A. На сторонах AB і AC позначили точки D і E так, що $AD = 6$ см, $EC = 7$ см, $AE = 5$ см, $DE \parallel l$. Знайдіть довжину BD.
13. Через точку M, яку позначено на продовженні діагоналі трапеції, і середину кожної з її основ провели дві прямі, що перетинають бічні сторони трапеції в точках H і K. Доведіть, що відрізок HK паралельний основам трапеції.
14. На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено точки M і P відповідно. Кожна з цих точок ділить відповідну сторону у відношенні 1 : 2008, якщо рахувати від вершини A. У якому відношенні точка перетину відрізків CM і BP ділить кожен з цих відрізків?
15. Доведіть, що в довільному трикутнику ABC виконується нерівність $AI + BI + CI \geqslant 6r$, де I – інцентр трикутника, а r – радіус кола, вписаного в цей трикутник.

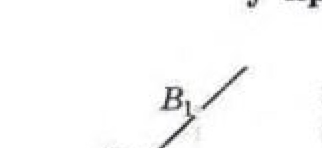


Розділ IV

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ГОСТРОГО КУТА. ОБЧИСЛЕННЯ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

З рівності й подібності трикутників і за допомогою теореми Піфагора можна визначати відстані між точками, навіть не вимірюючи їх. Математична наука має у своєму розпорядженні такі прийоми, які дають змогу визначати за довжиною тих чи інших відрізків міри кутів і використовувати це для знаходження довжин невідомих відрізків. Опанування таких прийомів пов'язане з вивченням тригонометричних функцій. До ознайомлення з деякими з них і запрошує цей розділ.

§ 26. Відповідність між відношеннями сторін і мірою гострих кутів у прямокутному трикутнику



Мал. 4.1

Позначимо на одній із сторін гострого кута A дві точки B і B_1 (мал. 4.1). З точок B і B_1 опустимо перпендикуляри BC і B_1C_1 на другу сторону кута. Дістанемо два прямокутні трикутники ABC і AB_1C_1.

Ці прямокутні трикутники подібні, бо в них гострий кут A – спільний. Тоді $\frac{AC}{AB}=\frac{AC_1}{AB_1}$, тобто відношення катета, прилеглого до кута A, до гіпотенузи у цих двох трикутниках збігається. Воно не залежить від місця розташування точок B і B_1 на стороні кута. Якщо міру кута змінити, то зміниться і відповідне

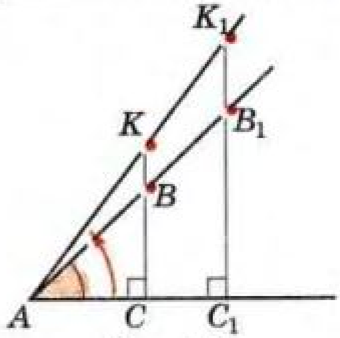
пряма (AB)

$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B}{BC_1}=\dots$
↑
залежить тільки від міри кута

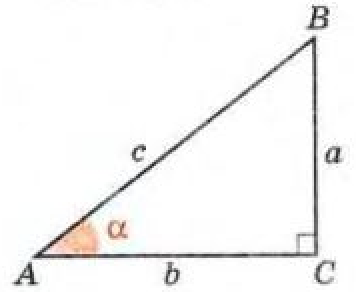
відношення катета до гіпотенузи в таких трикутниках (мал. 4.2). Тоді розглянуте нами відношення залежить тільки від міри кута A.

Аналогічно можна розглянути й інші відношення сторін у подібних прямокутних трикутниках. Таким чином, маємо, що *кожній мірі гострого кута відповідає певне значення відношення сторін у прямокутному трикутнику*. Тоді їх можна визначити один раз для якогось прямокутного трикутника, а потім використовувати для обчислень в інших прямокутних трикутниках, які мають такий самий гострий кут.

Позначення сторін і вершин прямокутного трикутника відповідно як a, b, c і A, B, C (причому літера C позначає вершину прямого кута, а c – гіпотенузу) застосовував ще Евклід у своїх «Началах».



Мал. 4.2



Мал. 4.3

Домовилися називати і позначати ці відношення так.

Синусом кута А називається відношення катета, протилежного цьому куту, до гіпотенузи (мал. 4.3):

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

Косинусом кута А називається відношення катета, прилеглого до цього кута, до гіпотенузи:

$$\cos A = \frac{b}{c}.$$

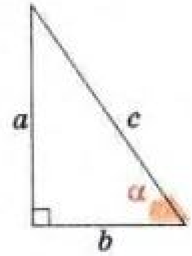
Тангенсом кута А називається відношення катета, протилежного цьому куту, до прилеглого катета:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}.$$

Котангенсом кута А називається відношення катета, прилеглого до цього кута, до протилежного катета:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

Ці відношення назвали *тригонометричними функціями*, обчислили їх значення для гострих кутів (із кроком, меншим за 1°) і склали *таблиці значень тригонометричних функцій*. Першу таблицю синусів було складено ще в Стародавній Греції у II ст. до н. е. Сьогодні обчислити значення тригонометричних функцій і знайти градусну міру кута за значенням його тригонометричної функції можна не лише за тригонометричними таблицями, а й за допомогою калькуляторів і комп'ютерів.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\frac{\text{протилежний катет}}{\text{гіпотенуза}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\frac{\text{прилеглий катет}}{\text{гіпотенуза}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\text{протилежний катет}}{\text{прилеглий катет}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\text{прилеглий катет}}{\text{протилежний катет}}$$

Ще в V ст. індійські математики застосовували тригонометрію для обчислень невідомих елементів трикутника. Сьогодні тригонометрія використовується не лише для розв'язування трикутників, а й дає змогу, наприклад, вивчати електромагнітні хвилі. На теорії поширення цих хвиль ґрунтується робота багатьох приладів, якими ми користуємося кожного дня, зокрема радіо, телевізорів, телефонів тощо.

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$

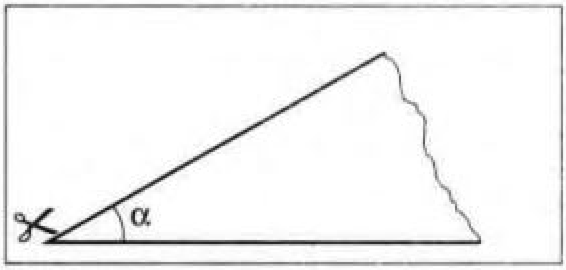
$0 < \sin\alpha < 1$

$0 < \cos\alpha < 1$

Важливе зауваження. *Синус і косинус кута не можуть бути більшими за одиницю*, бо гіпотенуза прямокутного трикутника завжди більша за його катет.

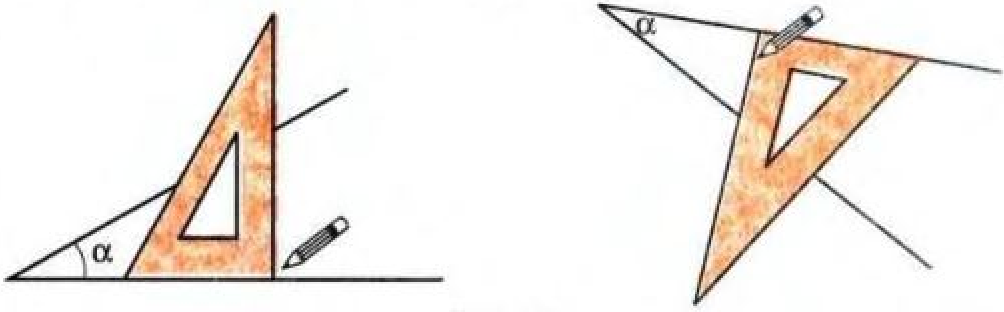
Практична робота 33

1. На аркуші паперу накресліть гострий кут α. Виріжте шаблон цього кута (мал. 4.4).



Мал. 4.4

2. За допомогою виготовленого шаблона і косинця накресліть у зошиті кілька подібних прямокутних трикутників (мал. 4.5).



Мал. 4.5

3. Виміряйте сторони трикутників і обчисліть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ і $\mathrm{ctg}\,\alpha$ для кожного з трикутників.
4. Порівняйте значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ і $\mathrm{ctg}\,\alpha$ для кожного з трикутників. Зробіть висновок.

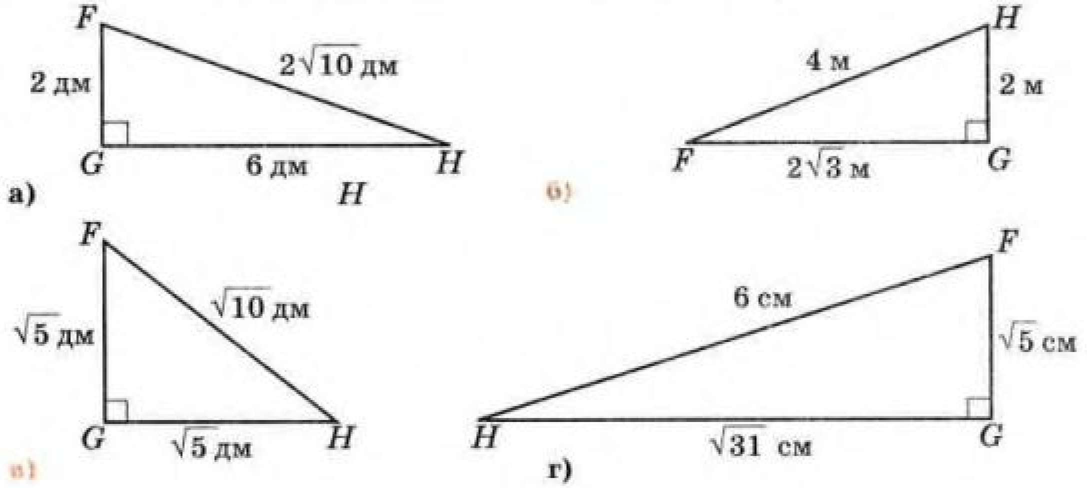
Для допитливих

Тригонометрія як розділ елементарної математики про застосування тригонометричних функцій до розв'язування трикутників отримав свою назву від грецьких слів «тригон» – *трикутник* і «метрео» – *міряю, вимірюю.* Перші тригонометричні таблиці склав грецький математик Гіпарх (II ст. до н. е.). Вони містили значення синусів кутів від 0° до 90° через кожну чверть градуса. Ці таблиці до нас не дійшли.

Перші тригонометричні таблиці, які дійшли до нас, вміщені у творі «Альмагес» александрійського вченого **Клавдія Птолемея** (II ст.).

Завдання 26

1°. За малюнком 4.6 знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кута F прямокутного трикутника FGH з прямим кутом G.



Мал. 4.6

2°. Знайдіть синус кута A трикутника ABC з прямим кутом C, якщо: **а)** $BC = 4{,}5$ см, $AB = 15$ см; **б)** $BC = 5{,}4$ см, $AB = 18$ см; **в)** $BC = 6$ см, $AB = 19$ см; **г)** $BC = 2{,}52$ см, $AB = 8{,}4$ см.

3°. Знайдіть косинус кута A трикутника ABC з прямим кутом C, якщо: **а)** $AC = 10{,}32$ мм, $AB = 17{,}2$ мм; **б)** $AC = 10{,}32$ см, $AB = 17{,}2$ см; **в)** $AC = 10$ см, $AB = 17$ см; **г)** $AC = 6{,}192$ м, $AB = 10{,}32$ м.

4°. Знайдіть тангенс і котангенс кутів A і B трикутника ABC з прямим кутом C, якщо: **а)** $BC = 4{,}3$ см, $AC = 10{,}75$ см; **б)** $BC = 21{,}5$ дм, $AC = 53{,}75$ дм; **в)** $BC = 10{,}75$ м, $AC = 4{,}3$ м.

5. У трикутнику ABC кут C прямий. Знайдіть: **а)** AC, якщо $AB = 4$ см, $\cos A = 0{,}4$; **б)** BC, якщо $AC = 24$ мм, $\operatorname{tg} A = 0{,}5$; **в)** AB, якщо $AC = 9$ мм, $\sin B = \frac{3}{4}$; **г)** AC, якщо $BC = 2$ м, $\operatorname{ctg} B = 4$.

6. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 3 см і 5 см. Знайдіть: **а)** синус гострого кута, що лежить проти більшого катета; **б)** косинус гострого кута, прилеглого до меншого катета; **в)** тангенс гострого кута, що лежить проти більшого катета.

7. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 8 см і 15 см. Знайдіть: **а)** тангенс гострого кута, що лежить проти більшого катета; **б)** косинус гострого кута, прилеглого до меншого катета; **в)** синус гострого кута, прилеглого до більшого катета.

8. Чи існує кут: **а)** синус якого дорівнює: 0,5; 0,004; 1,5; **б)** косинус якого дорівнює: 5,009; 0,4; 0,007; **в)** тангенс якого дорівнює: 0,9; 5,2; 23; **г)** котангенс якого дорівнює: 9; 0,52; 2,3?

9. У прямокутному трикутнику ABC кут C прямий. Знайдіть відношення катетів AC і BC, якщо: **а)** $\operatorname{tg} A = 3$; **б)** $\operatorname{ctg} A = 1{,}5$.

10. У прямокутному трикутнику ABC кут C прямий. Знайдіть відношення катета BC до гіпотенузи AB, якщо: **а)** $2\sin A = 1$; **б)** $3\cos B = 1$.

11*. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) виконується рівність $2\sin A = 3\sin B$. Порівняйте довжини катетів.

12*. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) виконується рівність $3\sin A = 4\sin B$. Знайдіть відношення катета AC до катета CB.

13.** Знайдіть гіпотенузу AB трикутника ABC, якщо: **а)** катет $AC = 6$ см і $3\sin A = 4\sin B$; **б)** катет $AC = 16$ см і $3\cos A = 4\cos B$.

§ 27. Побудова кута за його тригонометричними функціями. Зміна значень тригонометричних функцій на інтервалі $[0°; 90°]$

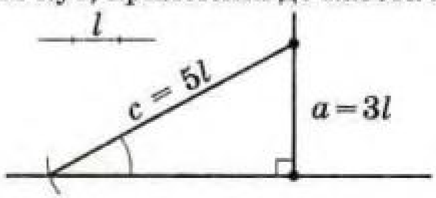
Розглянемо побудову кута за значеннями його тригонометричних функцій на конкретних прикладах.

Приклад 1. Побудувати кут, синус якого дорівнює $\frac{3}{5}$.

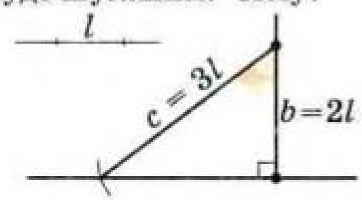
За допомогою довільного розхилу циркуля l побудуємо два відрізки: $a = 3l$ і $c = 5l$. Якщо тепер побудувати прямокутний трикутник за катетом a і гіпотенузою c (мал. 4.7), то кут, протилежний катету a, буде шуканим. Чому?

Приклад 2. Побудувати кут, косинус якого дорівнює $\frac{2}{3}$.

За допомогою довільного розхилу циркуля l побудуємо два відрізки: $b = 2l$ і $c = 3l$. Якщо тепер побудувати прямокутний трикутник за катетом b і гіпотенузою c (мал. 4.8), то кут, прилеглий до катета b, буде шуканим. Чому?



Мал. 4.7



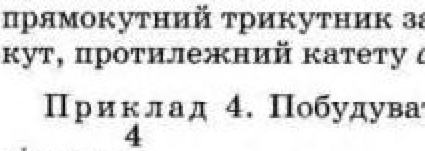
Мал. 4.8

Приклад 3. Побудувати кут, тангенс якого дорівнює $\frac{5}{4}$.

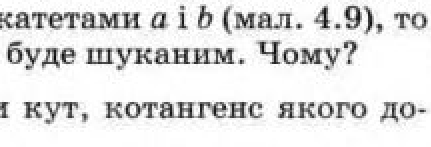
За допомогою довільного розхилу циркуля l побудуємо два відрізки: $a = 5l$ і $b = 4l$. Якщо тепер побудувати прямокутний трикутник за катетами a і b (мал. 4.9), то кут, протилежний катету a, буде шуканим. Чому?

Приклад 4. Побудувати кут, котангенс якого дорівнює $\frac{4}{7}$.

За допомогою довільного розхилу циркуля l побудуємо два відрізки: $a = 4l$ і $b = 7l$. Якщо тепер побудувати прямокутний трикутник за катетами a і b (мал. 4.10), то кут, протилежний катету b, буде шуканим. Чому?



Мал. 4.9

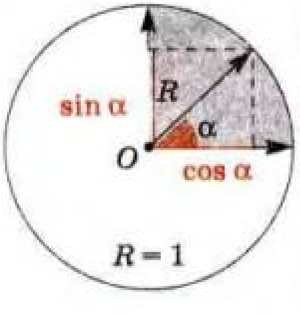


Мал. 4.10

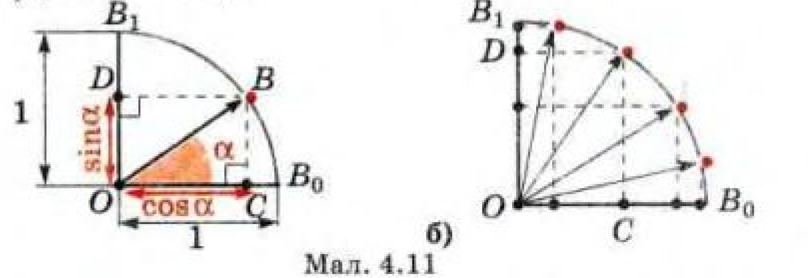
Знаменитий давньогрецький астроном Клавдій Птолемей (II ст.) склав таблицю значень тригонометричних функцій. Він використовував її при обчисленні траєкторій руху небесних тіл. Його «Математична побудова» містила математичну модель руху небесних тіл – відому Птолемеєву геоцентричну систему світу (центр Всесвіту – Земля, а зорі і планети рухаються навколо неї).

Математичну думку породила потреба розуму побудувати модель навколишнього світу.

Р. Том



Розглянемо тепер чверть одиничного кола, обмеженого *ОДИНИЧНИМИ радіусами* OB_0 та OB_1 і дугою B_0BB_1 (мал. 4.11-а).



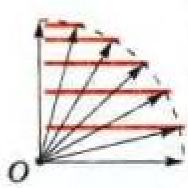
Мал. 4.11

$0 < \alpha < 90°$:

З точки B цієї дуги проведемо перпендикуляри BC і BD на радіуси OB_0 і OB_1 відповідно. Кут, який утворюють одиничні радіуси OB і OB_0, позначимо через α. Тоді $\cos \alpha = OC : 1 = OC$ і $\sin \alpha = OD : 1 = OD$, тобто значення cos α і sin α *ЧИСЕЛЬНО дорівнюють проекціям точки* B на граничні радіуси OB_0 і OB_1 відповідно.

при α↑ *sin* α↑
від 0 *до* 1;

Уявімо, що точка B рухається дугою чверті кола від положення B_0 до положення B_1 (мал. 4.11-б). Зі збільшенням кута зменшується горизонтальна проекція OC і збільшується вертикальна проекція OD. Тоді зі збільшенням кута α від 0° до 90° cos α зменшується, а sin α збільшується.



при α↑ *cos* α↓
від 1 *до* 0.

Якщо кут α дуже маленький, то OB майже збігається з OB_0, тобто значення довжини горизонтальної проекції OC, а отже, і cos α близькі до одиниці, а вертикальної проекції OD і sin α – близькі до нуля.

Якщо кут α дуже близький до 90°, то OB майже збігається з OB_1, тобто значення довжини вертикальної проекції OD, а отже, і sin α близькі до одиниці, а горизонтальної проекції OC і cos α – до нуля.

Хоча при значеннях $\alpha = 0°$ і $\alpha = 90°$ прямокутного трикутника не існує, зрозуміло, що при $\alpha = 0°$ ми повинні вважати, що $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, а при $\alpha = 90°$ – навпаки, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$.

$\sin 0° = 0$
$\cos 0° = 1$

$\sin 90° = 1$
$\cos 90° = 0$

Тоді маємо, що **при зростанні кута від 0° до 90° синус цього кута зростає від 0 до 1, а косинус спадає від 1 до 0.**

Практична робота 34

1. Побудуйте півколо з діаметром AC. На півколі позначте точки B і P та сполучіть їх з кінцями діаметра. Чи є утворені трикутники прямокутними? Чому?
2. Виміряйте сторони трикутників та обчисліть синуси й косинуси кутів BAC і PAC.
3. Порівняйте: а) кути BAC і PAC; б) значення синусів цих кутів. Зробіть висновок.
4. Порівняйте значення косинусів цих кутів. Зробіть висновок.

Для допитливих

Знаки позначення тригонометричних функцій «sin», «cos» і «tg» ввів Леонард Ейлер (у 1748 р. – «sin» і «cos»; у 1753 р. – «tg»).

Практична робота 35

1. Побудуйте прямий кут O. На одній з його сторін позначте точки B і C. На іншій позначте точку A. Сполучіть точки B і C з точкою A.
2. Виміряйте катети цих трикутників та обчисліть для кутів BAO і CAO значення тангенсів та котангенсів.
3. Порівняйте: а) кути BAO і CAO; б) значення їхніх тангенсів. Зробіть висновок.
4. Порівняйте значення котангенсів цих кутів. Зробіть висновок.

Практична робота 36*

1. Побудуйте півколо діаметром ET. Користуючись транспортиром, поділіть його на 6 рівних дуг і сполучіть точки поділу з кінцями діаметра. Чи є утворені трикутники прямокутними? Чому?
2. Виміряйте сторони кожного з утворених трикутників і обчисліть (з точністю до сотих) синуси, косинуси, тангенси та котангенси кутів з вершинами в точці T. Заповніть таблицю значень тригонометричних функцій кутів від 15° до 75°.

	15°	30°	45°	60°	75°
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\operatorname{tg}\alpha$					
$\operatorname{ctg}\alpha$					

Завдання 27

1. Побудуйте кут α, якщо його синус дорівнює: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{5}$; в) 0,3.
2. Побудуйте кут α, якщо його косинус дорівнює: а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{4}$; в) 0,5.
3. Побудуйте кут α, якщо його тангенс дорівнює: а) 2; б) 0,9; в) $\frac{4}{7}$.
4. Побудуйте кут α, якщо його котангенс дорівнює: а) $\frac{3}{5}$; б) 3; в) 0,4.

5**. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $3\sin A = 4\sin B$. Побудуйте трикутник, подібний до трикутника ABC.

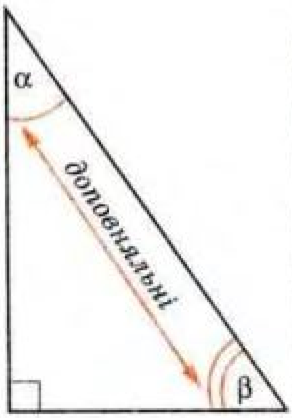
6*. Порівняйте: а) $\sin 12^\circ$ і $\sin 34^\circ$; б) $\sin 56^\circ$ і $\sin 1^\circ$; в) $\cos 8{,}9^\circ$ і $\cos 89^\circ$; г) $\cos 90^\circ$ і $\cos 0{,}9^\circ$; д) $\sin 0^\circ$ і $\cos 0^\circ$; е) $\sin 90^\circ$ і $\cos 90^\circ$; є) $\sin 0^\circ$ і $\cos 90^\circ$; ж) $\sin 90^\circ$ і $\cos 0^\circ$.

7**. Порівняйте: а) $\operatorname{tg} 32^\circ$ і $\operatorname{tg} 64^\circ$; б) $\operatorname{tg} 76^\circ$ і $\operatorname{tg} 81^\circ$; в) $\operatorname{ctg} 9{,}3^\circ$ і $\operatorname{ctg} 33^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 40^\circ$ і $\operatorname{ctg} 49^\circ$.

8*. Порівняйте гострі кути α і β, якщо: а) $\sin\alpha > \sin\beta$; б) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\sin\beta = \frac{3}{4}$; в) $\sin\alpha = 0{,}63$, $\sin\beta = 0{,}63$; г) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\beta = \frac{2}{5}$; д) $\cos\alpha = 0{,}5$, $\cos\beta = 0{,}3$; е) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$.

9**. Порівняйте гострі кути α і β, якщо: а) $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$; б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{2}$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 3{,}4$, $\operatorname{tg}\beta = 3{,}4$; г) $\operatorname{ctg}\alpha < \operatorname{ctg}\beta$; д) $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}4$, $\operatorname{ctg}\beta = 0{,}7$; е) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$, $\operatorname{ctg}\beta = 1$.

§ 28. Тригонометричні функції доповняльних кутів

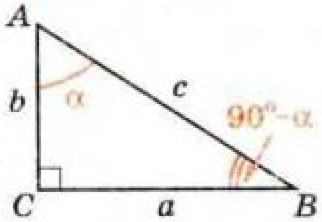


$\alpha + \beta = 90^\circ$

доповняльні

$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$
$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$
$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$
$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$

Доповняльними називаються кути, які в сумі становлять 90°.



Мал. 4.12

Такими кутами, наприклад, є гострі кути прямокутного трикутника. У трикутнику ABC (мал. 4.12) кути A і B є доповняльними:

$$\angle A + \angle B = 90^\circ.$$

Позначимо кут A через α, тоді $\angle B = 90^\circ - \alpha$. Запишемо тригонометричні функції кутів A і B:

1) $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \cos B = \cos(90^\circ - \alpha)$ – **синус даного кута дорівнює косинусу доповняльного кута;**

2) $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \sin B = \sin(90^\circ - \alpha)$ – **косинус даного кута дорівнює синусу доповняльного кута;**

3) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} = \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$ – **тангенс даного кута дорівнює котангенсу доповняльного кута;**

4) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a} = \operatorname{tg} B = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$ – **котангенс даного кута дорівнює тангенсу доповняльного кута.**

Завдання 28

1°. Кути α і β – гострі кути прямокутного трикутника. Знайдіть значення: **а)** $\sin\alpha$, якщо $\cos\beta = \dfrac{5}{13}$; б) $\cos\alpha$, якщо $\sin\beta = 0{,}8$; в) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\beta = 0{,}7$.

2. Спростіть вираз: **а)** $2\sin(90^\circ - \alpha) - \cos\alpha$; б) $\cos(90^\circ - \alpha) + \sin\alpha$; в) $\operatorname{tg}(90^\circ - \beta) + 3\operatorname{ctg}\beta$; **г)** $\operatorname{ctg}(90^\circ - \beta) - \operatorname{tg}\beta$.

3. Спростіть вираз: **а)** $2\sin(90^\circ - \beta) - \sin\beta + \cos\beta + \cos(90^\circ - \beta)$; б) $\cos(90^\circ - \alpha) + \cos\alpha + \sin\alpha - \sin(90^\circ - \alpha)$; **в)** $\operatorname{tg}(90^\circ - \beta) + 3\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) + 2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)$.

4*. Для двох гострих кутів α і β виконується рівність: **а)** $\sin(90^\circ - \beta) = \sin(90^\circ - \alpha)$; б) $\cos(90^\circ - \beta) = \sin\alpha$; в) $\operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \operatorname{ctg}\alpha$; **г)** $\operatorname{ctg}(90^\circ - \beta) = \operatorname{tg}\alpha$. Чи рівні кути α і β?

5*. Знайдіть суму двох гострих кутів α і β, для яких виконується рівність: **а)** $\sin(90^\circ - \beta) = \sin\alpha$; б) $\cos\beta = \sin\alpha$; **в)** $\operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$.

6*. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений, якщо для двох його гострих кутів α і β виконується рівність: **а)** $\cos\beta = \sin(90^\circ - \alpha)$; б) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \beta)$.

7.** У трикутнику ABC кути α і β – гострі. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний, якщо: **а)** $\cos\beta = \sin\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$.

Для допитливих

У гострокутному трикутнику ABC відрізки AH_1, BH_2 і CH_3 є висотами. Знайдіть довжину висоти AH_1, якщо площа трикутника AH_2H_3 дорівнює S, $H_2H_3 = a$, $\angle A = \alpha$.

§ 29. Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого кута

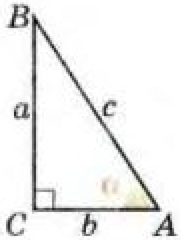
Розглянемо прямокутний трикутник ABC зі сторонами a, b, c і кутом A, який позначено як α (мал. 4.13). Запишемо значення тригонометричних функцій кута A через довжини сторін трикутника ABC:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$$



Мал. 4.13

Поділимо чисельник і знаменник останніх двох дробів на c:

$$\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c};\ \frac{b}{a} = \frac{b:c}{a:c}.$$

З наведеного запису маємо такі співвідношення:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\ \alpha = 1.$$

За теоремою Піфагора виконується співвідношення $a^2 + b^2 = c^2$. Якщо поділити його на c^2, то отримаємо:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,\ \text{або}\ (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

Остання рівність – це *тригонометричний еквівалент теореми Піфагора*, вона є *основною тригонометричною тотожністю.* На ній базується вся тригонометрія.

Можна сказати, що **вся тригонометрія має своїм витоком теорему Піфагора.**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Якщо поділити рівність $a^2 + b^2 = c^2$ на b^2, то отримаємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2,\ \text{або}\ (\operatorname{tg}\alpha)^2 + 1 = \frac{1}{(\cos\alpha)^2}.$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Якщо поділити рівність $a^2 + b^2 = c^2$ на a^2, то отримаємо:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2,\ \text{або}\ (\operatorname{ctg}\alpha)^2 + 1 = \frac{1}{(\sin\alpha)^2}.$$

Для допитливих

1. У колі провели діаметр і перпендикулярну до нього хорду. Доведіть, що один з відрізків, на які хорда поділяє діаметр, буде більшим за половину хорди, а другий – меншим.

2. Паралелограм, один з гострих кутів якого дорівнює α, описаний навколо кола радіуса r. Знайдіть площу цього паралелограма. При якому значенні кута α ця площа буде найменшою?

Завдання 29

1. Обчисліть значення $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо: а) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$; б) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$; в) $\cos\alpha=0{,}8$; г) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; д) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$; е) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

2. Обчисліть значення $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо: а) $\sin\alpha=0{,}8$; б) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$; в) $\sin\alpha=\frac{1}{4}$; г) $\sin\alpha=\frac{8}{17}$; д) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; е) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

3*. Обчисліть значення $\operatorname{ctg}\alpha$, $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$, якщо: а) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; б) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$; в) $\operatorname{tg}\alpha=1$; г) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$; д) $\operatorname{tg}\alpha=2$.

4*. Обчисліть значення $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо: а) $\operatorname{ctg}\alpha=1$; б) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{12}{5}$; в) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{8}{15}$; д) $\operatorname{ctg}\alpha=3$.

5*. Спростіть вираз: а) $1-\cos^2\alpha$; б) $1-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$; в) $(1-\sin\alpha)\times(1+\sin\alpha)$; г) $(\operatorname{tg}^2\alpha+1)\cos^2\alpha$.

6*. Спростіть вираз: а) $\cos\alpha-\cos\alpha\sin^2\alpha$; б) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha$; в) $\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$; г) $\frac{1}{\sin^2\alpha}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$; д) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

7**. Спростіть вираз: а) $1-\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$; б) $1-\operatorname{ctg}^2\alpha(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$; в) $1-(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)$; г) $\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

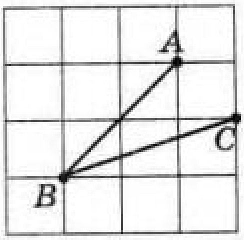
8**. Спростіть вирази: а) $\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)-\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$;

б) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha}$; в) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2-(1-\operatorname{tg}\alpha)^2}$.

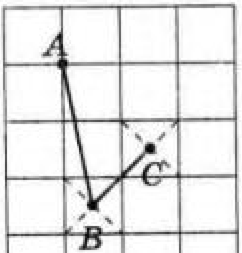
Для допитливих

Знайдіть значення тригонометричних функцій кута ABC за малюнком:

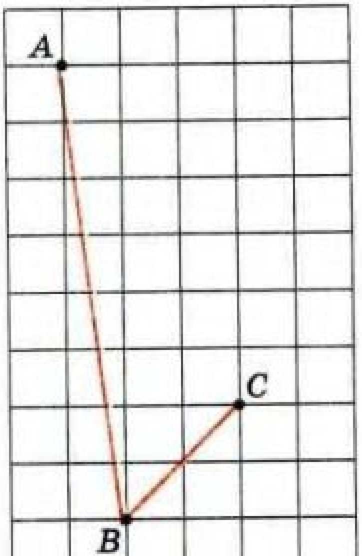
а)



б)



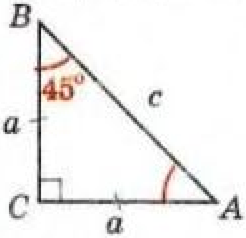
в)



§ 30. Значення тригонометричних функцій деяких кутів

Знайдемо значення тригонометричних функцій для кутів 30°, 45° і 60°.

1. Для кута 45°.

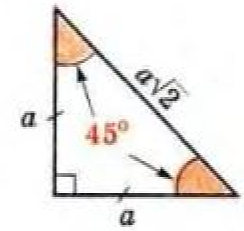


Мал. 4.14

Побудуємо рівнобедрений прямокутний трикутник ABC, катети якого дорівнюють a (мал. 4.14). Його гострі кути однакові і дорівнюють 45°.

За теоремою Піфагора квадрат гіпотенузи цього трикутника $c^2 = 2a^2$. Тоді

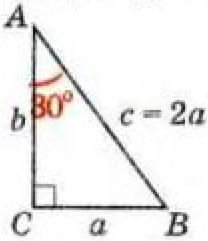
$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ а } \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$



$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$

2. Для кутів 30° і 60°.



Мал. 4.15

Розглянемо прямокутний трикутник ABC з гострим кутом A, який дорівнює 30° (мал. 4.15). Його другий гострий кут є доповняльним і дорівнює 60°.

Катет, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи:

$$a = \frac{c}{2}.$$

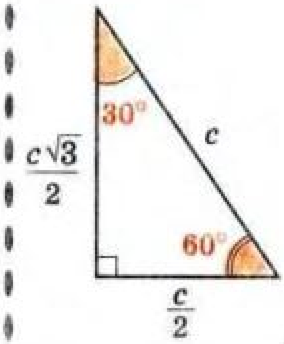
Другий катет знайдемо за теоремою Піфагора:

$$b = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

Тоді: $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{2}c : c = \dfrac{1}{2};$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{c\sqrt{3}}{2} : c = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \ \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$$



$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

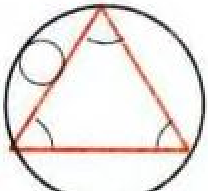
$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$

Для допитливих

1. На сторонах прямокутного трикутника побудовано квадрати. Їхні вершини сполучили так, як показано на малюнку **А**. Доведіть, що площі зафарбованих на малюнку трикутників рівні.

2. Трикутник на малюнку **Б** є правильним. Знайдіть відношення радіусів зображених на малюнку кіл.

А



Б

корінь квадратний з номера стовпчика поділити на 2

Складемо таблицю значень тригонометричних функцій для кутів 30°, 45° і 60°.

Функція	**Кут**		
	30°	45°	60°
Синус	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Косинус	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Тангенс	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
Котангенс	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}=0{,}5$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}71$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}87$

$\sqrt{3}\approx 1{,}73$

$\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}58$

З а у в а ж е н н я. Головне – запам'ятати перший рядок таблиці. Другий рядок легко заповнити значеннями тригонометричних функцій доповняльних кутів (числа першого і третього стовпчиків міняються місцями, а в другому стовпчику – однакові).

Щоб отримати значення тангенса, треба поділити числа першого рядка на відповідні числа другого рядка. Щоб отримати значення котангенса, треба записати числа, обернені до чисел попереднього рядка (рядка тангенсів).

А перший рядок можна запам'ятати за таким «правилом»: треба корінь квадратний із номера стовпчика поділити на 2.

Значення синуса 18°

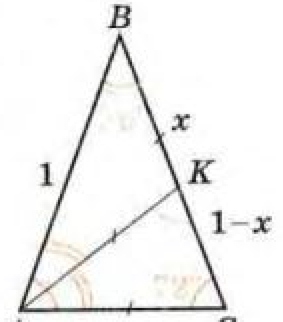
Розглянемо рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$) з кутом при основі 72° (мал. 4.16).

1) Проведемо бісектрису AK кута A. Маємо:

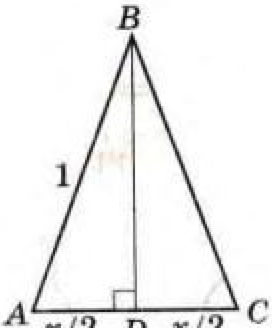
$$\angle KAC = \angle BAK = 72^\circ : 2 = 36^\circ = \angle B;$$
$$\angle AKC = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ = \angle C.$$

2) Приймемо довжину сторони AB за 1 і позначимо довжину відрізка BK через x. Тоді з рівнобедрених трикутників KAC ($\angle AKC = \angle C$) і ABK ($\angle BAK = \angle B$) маємо: $AC = AK = BK = x$.

$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}31$



Мал. 4.16



Мал. 4.17

3) AK – бісектриса трикутника ABC, тоді $\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}$. Маємо квадратне рівняння $x^2 + x - 1 = 0$.

Звідси: $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (бо $x > 0$).

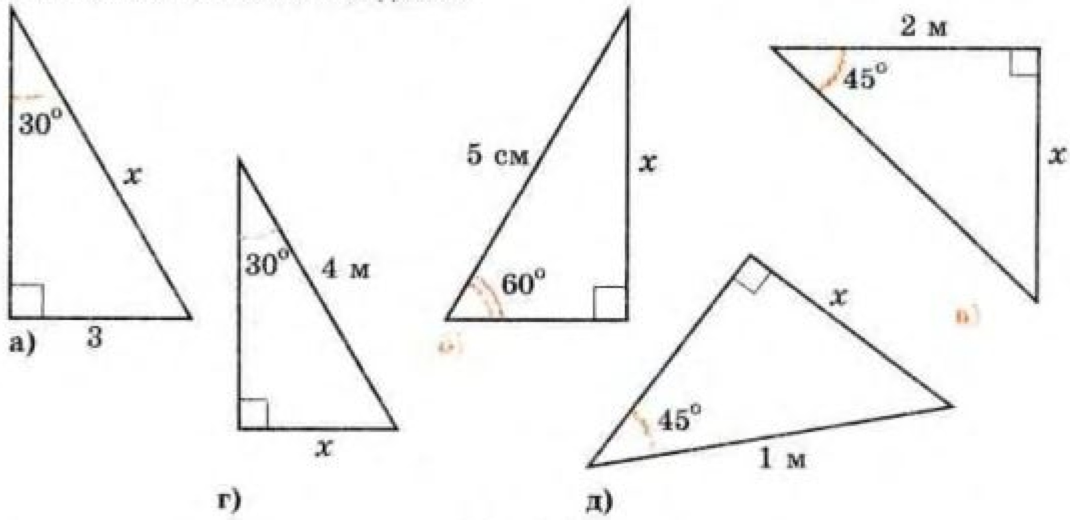
4) Проведемо висоту BD (мал. 4.17). У рівнобедреному трикутнику ABC вона буде і бісектрисою, і медіаною, тобто $\angle ABD = 18^\circ$, $AD = DC = \frac{x}{2}$.

Тоді $\sin 18^\circ = \frac{x}{2}:1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\approx 0{,}3090$.

В «Альмагесі» Птолемея (II ст.), що містить тригонометричні таблиці, вперше трапляються знаки для позначення мінут (′) і секунд (″). Знак градуса (°) з'явився пізніше – у XVI ст.

Завдання 30

1°. За малюнком 4.18 знайдіть x.



Мал. 4.18

2. Знайдіть значення виразу: а) $2\cos 60^\circ + \sqrt{3}\cos 30^\circ$; б) $5\sin 30^\circ - \text{ctg}\, 45^\circ$; в) $3\text{tg}\, 45^\circ \cdot \text{tg}\, 60^\circ$; г) $12\sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ$.

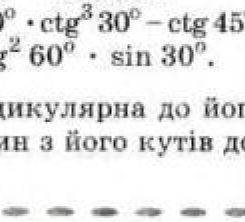
3*. Знайдіть значення виразу: а) $\text{tg}\, 60^\circ + 2\cos 30^\circ$; б) $\cos 30^\circ \cdot \text{ctg}\, 30^\circ - \text{ctg}\, 45^\circ$; в) $3\cos 60^\circ \cdot \text{tg}\, 45^\circ \cdot \text{tg}\, 60^\circ$; г) $\text{tg}\, 60^\circ \cdot \sin 60^\circ - \text{ctg}\, 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$.

4*. Знайдіть значення виразу: а) $2\text{tg}^2 60^\circ + 4\cos^2 30^\circ$; б) $\cos 30^\circ \cdot \text{ctg}^3 30^\circ - \text{ctg}\, 45^\circ$; в) $3\cos^2 60^\circ \cdot \text{tg}\, 45^\circ \cdot \text{tg}^2 60^\circ$; г) $\text{tg}^3 60^\circ \cdot \sin 60^\circ - \text{ctg}^2 60^\circ \cdot \sin 30^\circ$.

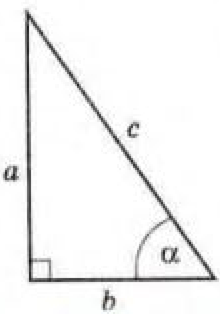
5*. Діагональ паралелограма дорівнює $\sqrt{3}$ см і перпендикулярна до його сторони. Знайдіть сторони паралелограма, якщо один з його кутів дорівнює 60°.

Для допитливих

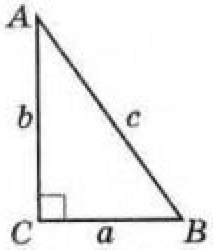
У квадраті $ABCD$ зі стороною 6 см точки K і M лежать на відрізку, який сполучає середини протилежних сторін цього квадрата (див. мал.). Якщо сполучити точки K і M з вершинами B і D, квадрат поділиться на три частини. При якій довжині відрізка KM ці три частини будуть рівновеликими?



§ 31. Розв'язування прямокутних трикутників



$a^2 + b^2 = c^2$



Мал. 4.19

Нехай дано прямокутний трикутник ABC. Позначимо його кути і катети так, як показано на малюнку 4.19.

За означенням тригонометричних функцій маємо:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B; \; \cos A = \frac{b}{c} = \sin B;$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} B; \; \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} B.$$

Звідси:

$$a = c \sin A = c \cos B = b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B;$$

$$b = c \sin B = c \cos A = a \operatorname{tg} B = a \operatorname{ctg} A;$$

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos A}.$$

$a = c \sin A$
$a = c \cos B$
$a = b \operatorname{tg} A$
$a = b \operatorname{ctg} B$

Тобто:

– катет прямокутного трикутника дорівнює гіпотенузі, помноженій на синус протилежного кута або на косинус прилеглого;

– катет прямокутного трикутника дорівнює другому катету, помноженому на тангенс протилежного кута або на котангенс прилеглого;

– гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює катету, поділеному на синус протилежного кута або на косинус прилеглого.

$c = \dfrac{a}{\sin A}$

$c = \dfrac{a}{\cos B}$

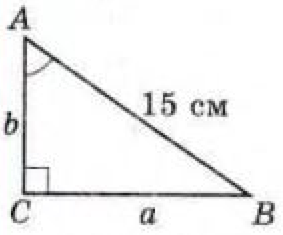
Отримані співвідношення, разом з теоремою Піфагора, дають можливість *розв'язувати прямокутні трикутники*, тобто за деякими елементами трикутника знаходити всі інші.

Зауваження. При розв'язуванні прямокутних трикутників не забувайте про *єгипетський трикутник, сторони якого відносяться як* 3 : 4 : 5.

Для допитливих

1. У кут градусної міри 2α вписали коло радіуса R. До цього кола провели дотичну перпендикулярно до бісектриси кута. Знайдіть периметр утвореного трикутника.
2. До двох кіл, які дотикаються одне до одного зовнішньо, провели дві дотичні, які перетинаються під кутом α. Радіус більшого кола дорівнює R. Знайдіть радіус меншого кола.

Приклад 1. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а синус одного з гострих кутів дорівнює $\frac{4}{5}$ (мал. 4.20). Знайдіть довжину катетів трикутника.



Мал. 4.20

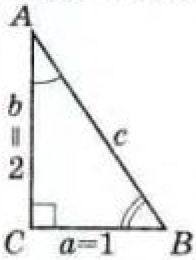
Дано: $\angle C = 90^\circ$; $\sin A = \frac{4}{5}$; $c = 15$ см.
Знайдіть: a і b.

1) $a = c \sin A = 15 \cdot \frac{4}{5} = 12$ (см);
2) $c = 3 \cdot 5$; $a = 3 \cdot 4$, тоді $\triangle ABC$ – єгипетський, і $b = 3 \cdot 3 = 9$ (см).
Відповідь: 12 см і 9 см.

Греки цінували ясність, порядок і точність. І в геометрії вони, як правило, ґрунтували свої побудови на тому самому ідеалі краси й гармонії, що його так строго дотримувалися в образотворчому мистецтві.

Ф. Кимпан

Приклад 2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 2 см і 1 см (мал. 4.21). Знайдіть його гіпотенузу і тангенси гострих кутів.



Мал. 4.21

Дано: $\angle C = 90^\circ$; $a = 1$ см; $b = 2$ см.
Знайдіть: c; $\operatorname{tg} A$; $\operatorname{tg} B$.

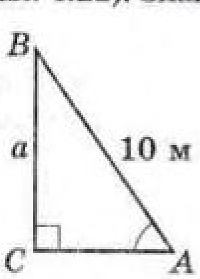
1) $\angle C = 90^\circ$; $a = 1$ см; $b = 2$ см $\rightarrow$
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$ (см);
2) $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} A} = 2$.

Відповідь: гіпотенуза дорівнює $\sqrt{5}$ см, тангенси гострих кутів, протилежних до катетів завдовжки 1 см і 2 см, дорівнюють $\frac{1}{2}$ і 2 відповідно.

Геометр завжди буде художником, який формує остаточний образ будівлі.

М. Жуковський

Приклад 3. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 м, а один з гострих кутів має градусну міру $70^\circ 36'$ (мал. 4.22). Знайдіть катет, що лежить проти цього кута.



Мал. 4.22

Дано: $c = 10$ м; $\angle A = 70^\circ 36'$.
Знайдіть: a.

1) $a = c \sin A = 10 \sin 70^\circ 36'$;
2) для обчислення значення $\sin 70^\circ 36'$ скористаємося фрагментом таблиць **В. М. Брадіса «Чотиризначні математичні таблиці»**.

Для допитливих

1. Відстань між центрами двох кіл, які дотикаються одне до одного внутрішньо, дорівнює d. Дотична, проведена до меншого кола з центра більшого кола, утворює з лінією центрів кут α. Знайдіть радіус більшого кола.
2. Хорда завдовжки a, проведена з кінця діаметра кола, утворює з ним кут α. Через інший кінець хорди провели дотичну до кола і продовжили її до перетину з прямою, що містить діаметр. Знайдіть довжину відрізка дотичної від точки дотику до вказаної точки перетину.

Синуси														
A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
70°	0,9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9144	9449	0,9455	19°	*1*	*2*	*3*
71°	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18°	*1*	*2*	*3*
72°	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9553	9563	17°	*1*	*2*	*3*
73°	9563	9568	9573	9578	9583	9538	9593	9593	9603	9608	9613	16′	*1*	*2*	*2*
74°	9313	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	9659	15′	*1*	*2*	*2*
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	A	1′	2′	3′
Косинуси														

Знаходимо за таблицею sin α :
1) число градусів у лівому стовпчику;
2) число мінут у верхньому рядочку;
3) шукане число – на перетині.

Знаходимо за таблицею cos α :
1) число градусів у правому стовпчику;
2) число мінут у нижньому рядочку;
3) шукане число – на перетині.

Поправки для синусів:
– у верхньому рядочку;
– при $\alpha\uparrow$ $\sin\alpha\uparrow$.

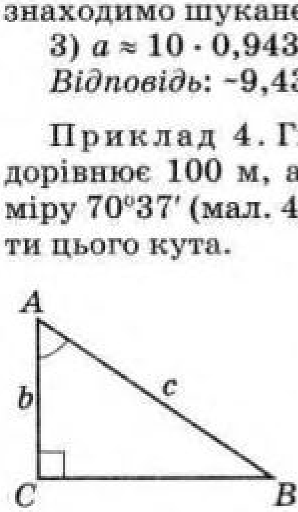
Поправки для косинусів:
– у нижньому рядочку;
– при $\alpha\uparrow$ $\cos\alpha\downarrow$.

Знаходимо число градусів у крайньому лівому стовпчику таблиці, число мінут – у верхньому рядочку таблиці. На перетині відповідних рядка і стовпчика знаходимо шукане число $\sin 70°36' \approx 0{,}9432$.

3) $a \approx 10 \cdot 0{,}9432 \approx 9{,}432$ (м).

Відповідь: ~9,432 м.

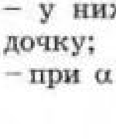
Приклад 4. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 100 м, а один з гострих кутів має градусну міру 70°37′ (мал. 4.23). Знайдіть катет, що лежить проти цього кута.



Мал. 4.23

Дано: $c = 100$ м ; $\angle A = 70°37'$.
Знайдіть: a.

1) $a = c \sin 70°37'$. Для обчислення значення $\sin 70°37'$ скористаємося наведеним вище фрагментом таблиць В. М. Брадіса. Знаходимо за таблицею значення синуса кута, найближчого до заданого: $\sin 70°36' \approx 0{,}9432$ (див. приклад 3). Потім у стовпчику поправок (правий бік таблиці) знаходимо поправку на 1′. Ця поправка дорівнює 0,0001. При зростанні кута від 0° до 90° синус також зростає, тому знайдену поправку треба додати до отриманого значення $\sin 70°36'$. Таким чином маємо:
$\sin 70°37' \approx 0{,}9432 + 0{,}0001 \approx 0{,}9433$.
2) $a = c \sin 70°37' \approx 100 \cdot 0{,}9433 \approx 94{,}33 \approx 94{,}3$ (м).
Відповідь: ~94,33 м.



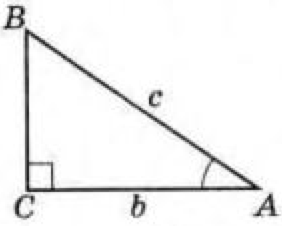
Для допитливих

1. Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник з гострим кутом α, дорівнює r. З центром у вершині кута α побудовано коло, яке дотикається до протилежної сторони трикутника. Знайдіть довжину відрізка, який це коло відтинає від гіпотенузи трикутника.

2. Більша основа трапеції є діаметром описаного навколо неї кола з радіусом R. Один з гострих кутів трапеції дорівнює α. Знайдіть площу трапеції.

3. У рівнобедрений трикутник з кутом α при основі вписали коло. Точки дотику сполучили. Периметр утвореного трикутника дорівнює m. Знайдіть периметр заданого трикутника.

Приклад 5. Катет прямокутного трикутника дорівнює 10 м, а прилеглий до нього кут дорівнює $18°50'$ (мал. 4.24). Знайдіть гіпотенузу.



Мал. 4.24

Дано: $b = 10$ м; $\angle A = 18°50'$.
Знайдіть: c.

---

1) $c = b : \cos 18°50'$. Для обчислення значення $\cos 18°50'$ скористаємося наведеним у прикладі 3 фрагментом таблиць В. М. Брадіса. Спочатку знайдемо значення косинуса кута, найближчого до даного: $\cos 18°48'$. Для цього число градусів шукаємо у правому стовпчику таблиці, число мінут – у нижній частині таблиці. На перетині відповідного стовпчика і рядка знаходимо шукане число: $\cos 18°48' \approx 0{,}9466$. У стовпчику поправок маємо, що поправка на $2'$ дорівнює $0{,}0002$. При зростанні кута від $0°$ до $90°$ косинус спадає, тому знайдену поправку треба відняти від отриманого значення $\cos 18°48'$. Таким чином маємо:
$\cos 18°50' \approx 0{,}9466 - 0{,}0002 \approx 0{,}9464$.
2) $c = 10 : 0{,}9464 \approx 10{,}57 \approx 10{,}6$ (м).
Відповідь: ~10,6 м.

a – точне число:
$a = \underline{3{,}741}$
правильні

a – наближене число:
$a \approx \underline{3{,}74}1$
правильні *сумнівна*

Зауваження. Відповідь до прикладу 5 ми округлили – залишили три значущі цифри. Ми ділили точне число 10 на наближене число 0,9464. Нагадаємо, що при діленні й множенні обчислення проводять до найбільшого числа правильних значущих цифр. У наближеному числі 0,9464 остання цифра – сумнівна, тобто результат треба було округлити до трьох значущих цифр.

Наближені обчислення проводимо:
найменшого з правильних розрядів;
найбільшого числа правильних значущих цифр.

Нагадаємо

ПРАВИЛА РОБОТИ З НАБЛИЖЕНИМИ ЧИСЛАМИ

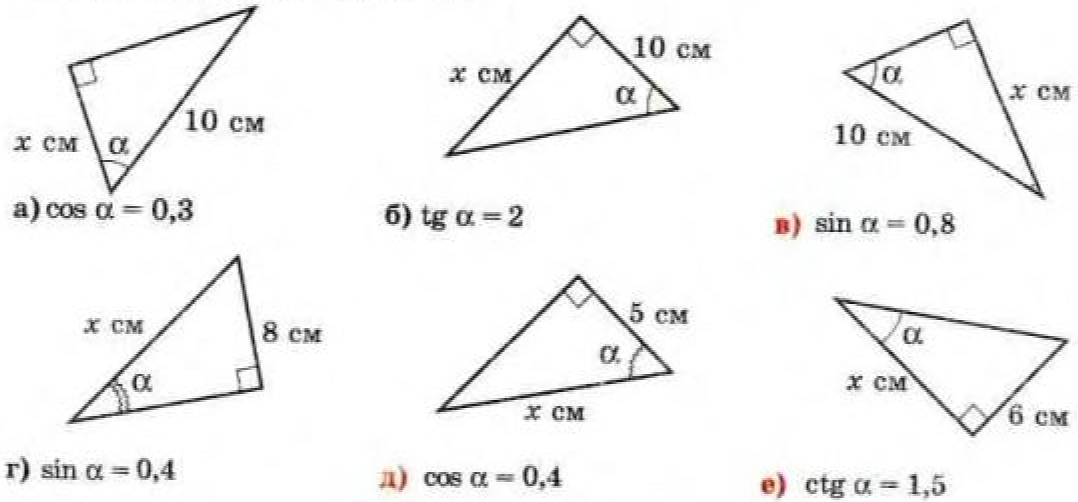
Наближені обчислення виконуємо:
– додавання і віднімання – до найменшого з правильних розрядів;
– множення і ділення – до найбільшого числа правильних значущих цифр;
– у процесі обчислення зберігаємо на один розряд (значущу цифру) більше, ніж вимагається для запису результату.

У процесі обчислення зберігаємо на один розряд (значущу цифру) більше, ніж вимагається для запису результату

Наприклад:
1) якщо $a \approx 2{,}3628$ і $b \approx 17{,}25$ (a і b – наближені), то $a + b \approx 2{,}36 + 17{,}25 \approx 19{,}61 \approx 19{,}6$;
2) якщо $a \approx 2{,}3628$ і $b = 17{,}25$ (a – наближене, b – точне) то $a + b \approx 2{,}3628 + 17{,}25 \approx 19{,}6128 \approx 19{,}612$;
3) якщо $a \approx 0{,}128359$ і $b \approx 2{,}41$ (a і b – наближені), то $a \cdot b \approx 0{,}128 \cdot 2{,}41 \approx 0{,}308 \approx 0{,}31$;
4) якщо $a \approx 0{,}128359$ і $b = 2{,}41$ (a – наближене, b – точне) то $a \cdot b \approx 0{,}128359 \cdot 2{,}41 \approx 0{,}309345 \approx 0{,}30934$.

Завдання 31

1°. За малюнком 4.25 знайдіть x.



а) $\cos\alpha = 0,3$ б) $\operatorname{tg}\alpha = 2$ в) $\sin\alpha = 0,8$

г) $\sin\alpha = 0,4$ д) $\cos\alpha = 0,4$ е) $\operatorname{ctg}\alpha = 1,5$

Мал. 4.25

2°. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо:

а) $AC = 3$ см, $\angle A = 45°$; б) $BC = 5$ см, $\sin A = \dfrac{2}{3}$; в) $AC = 8$ см, $\operatorname{tg} B = \sqrt{3}$;

г) $AB = 12$ см, $\angle B = 30°$; д) $BC = 6$ см, $\cos B = \dfrac{1}{3}$; е) $AB = 8$ см, $\operatorname{tg} B = 1$.

3. У паралелограмі діагональ, що дорівнює 45 см, перпендикулярна до сторони. Обчисліть сторони паралелограма, якщо котангенс його гострого кута дорівнює 1,6.

4°. Чи можуть бути довжинами сторін одного прямокутного трикутника трійки чисел: а) 9; 12; 15; б) 3,75; 5; 6,25? Як називаються такі трикутники?

5°. Знайдіть гіпотенузу і синуси гострих кутів прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: а) 6 см і 8 см; б) 4 см і 7 см.

6°. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза і другий катет відповідно дорівнюють: а) 15 см і 9 см; б) 8 см і 4 см.

7. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 17 см. Один з його катетів на 9 см менший від гіпотенузи. Знайдіть косинус меншого гострого кута.

8. За двома даними елементами прямокутного трикутника KMP ($\angle P = 90°$) знайдіть його інші сторони й кути: а) $MK = 10$ см, $\angle M = 48°$; б) $MP = 5$ см, $\angle M = 54°$; в) $KP = 11$ см, $\angle M = 71°$; г) $KM = 15$ см, $MP = 6$ см; д) $MP = 9$ см, $KP = 12$ см.

Для допитливих

1. У сектор кола з радіусом R і центральним гострим кутом α вписали коло. Знайдіть його радіус.

2. У сегмент кола вписано квадрат, дві вершини якого лежать на дузі сегмента і поділяють її на три рівні частини. Знайдіть градусну міру дуги сегмента.

3. Доведіть геометрично, що: а) $\operatorname{ctg} 30° + \operatorname{tg} 15° = 2$; б) $\operatorname{tg} 15° = 4\sin^2 15°$. (Порада. Розгляньте рівнобедрений трикутник з кутом 30° при вершині і одиничною бічною стороною. Проведіть у цьому трикутнику висоти до основи й однієї з бічних сторін та позначте проекцію однієї бічної сторони на іншу через x.)

9. Більша діагональ і більша основа прямокутної трапеції дорівнюють відповідно 13 см і 12 см. Знайдіть довжину меншої бічної сторони трапеції.

10. Обчисліть довжину висоти рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює 12 см.

11. Сторона квадрата дорівнює 6 см. Знайдіть довжину його діагоналі.

12*. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 8 см. Знайдіть третю сторону трикутника.

13. У трикутнику ABC $\angle B = 90^\circ$, $BD \perp AC$, $AB = 16$ см, $BC = 12$ см. Знайдіть довжину відрізка AD і тангенс кута DBC.

14*. Знайдіть довжину висоти і радіусів вписаного та описаного кіл для рівностороннього трикутника зі стороною a.

15. У рівнобедреному трикутнику ABC сторони $AB = BC = 7$ см, $AC = 6$ см. Знайдіть довжину висоти AD і тангенс кута при основі.

16*. Знайдіть тригонометричні функції кута, який утворює діагональ прямокутника з більшою його стороною, якщо сторони прямокутника дорівнюють 6 см і 4 см.

17**. Периметр прямокутника дорівнює 56 см, а одна з його сторін – 16 см. Знайдіть синус кута між діагоналями.

18*. З однієї точки до прямої проведено дві похилі по 3 см. Кут між похилими – 120°. Знайдіть відстань між основами цих похилих.

19*. Відстань від точки B до прямої a дорівнює 5 см. З точки B до прямої a проведено похилу. Знайдіть довжину похилої, якщо вона утворює з прямою кут: а) 30°; б) 60°; в) 45°; г) α.

20*. З точки A до прямої m проведено дві похилі. Довжина однієї з них дорівнює 15 см, а її проекція – 12 см. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут 45°.

21**. З точки A, що знаходиться на відстані 10 см від прямої, проведено дві похилі AB і AC, довжини яких дорівнюють 26 см і 20 см. Знайдіть відстань між основами похилих. Доведіть, що $\triangle ABC$ – тупокутний.

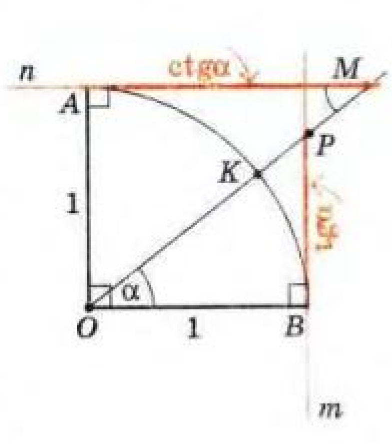
22**. Сторони трикутника ABC дорівнюють 9 см, 11 см, 12 см. Знайдіть проекції двох менших сторін на більшу.

23**. Два кола з рівними радіусами і центрами в точках O і O_1 перетинаються в точках A і B. Одна сторона трикутника AOO_1 дорівнює 13 см, друга – 6 см. Знайдіть відстань між центрами кіл. Розгляньте два випадки.

24**. Два кола з різними радіусами і центрами в точках O і O_1 перетинаються в точках A і B. З центра одного кола, радіус якого дорівнює $\sqrt{2}$, хорду AB видно під прямим кутом, а з центра другого кола – під кутом 120°. Знайдіть радіус другого кола і відстань між центрами кіл. Розгляньте два випадки.

Для допитливих

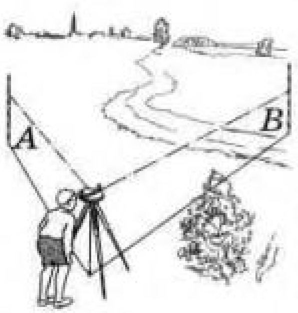
Якщо скористатися чвертю кола одиничного радіуса, то можна на власні очі побачити не тільки відрізки, довжини яких чисельно дорівнюють значенням синуса і косинуса певних кутів (як це ми зробили у § 27), а й тангенса та котангенса. Нехай маємо чверть кола, обмеженого одиничними радіусами OA і OB. Побудуємо перпендикулярні до цих радіусів прямі n і m (див. мал.). Ці прямі і будуть нашими *осями: тангенсів* (m) та *котангенсів* (n).



Нехай $\angle KOB = \alpha$. Тоді і $\angle AMO = \alpha$ (бо $AM \parallel OB$). З трикутників POB і AOM маємо: $\text{tg}\,\alpha = PB : R = PB$ і $\text{ctg}\,\alpha = AM : R = AM$.

§ 32. Практичні задачі із застосуванням тригонометрії

Для вимірювання кутів на місцевості застосовують спеціальний прилад, який називають *астролябією* (мал. на полі).



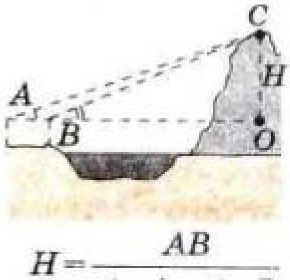
Ми вже мали справу з різними практичними задачами, розв'язування яких спиралося на подібність трикутників (§ 22). Знання тригонометричних функцій дає змогу розв'язувати такі задачі більш досконалими методами і з більшою точністю. Розглянемо кілька прикладів.

Ми тепер можемо визначити висоту предмета H і в тому випадку, коли до його основи не можна підійти.

Наприклад, треба визначити висоту скелі, яка відокремлена від нас річкою (мал. 4.26). Розглянемо два прямокутні трикутники AOC і BOC. Припустимо, що ми виміряли кути A і B і вони дорівнюють $\angle A = 42^\circ$, $\angle B = 47^\circ$. Тоді $AO = H \operatorname{ctg} A$, $BO = H \operatorname{ctg} B$.

Звідси $AB = H(\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B)$ і $H = \dfrac{AB}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B}$. Відстань AB можна виміряти безпосередньо, нехай вона дорівнює 12,00 м. Маємо:

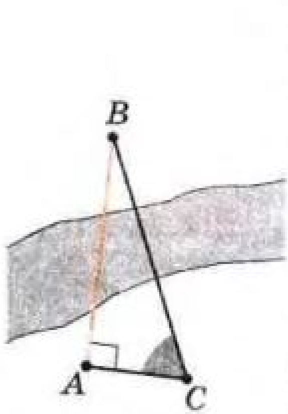
$\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} 42^\circ - \operatorname{ctg} 47^\circ \approx 1{,}1106 - 0{,}9325 \approx 0{,}1781$;
$H \approx 12{,}00 : 0{,}1781 \approx 12{,}00 : 0{,}178 \approx 67{,}38 \approx 67{,}4$ (м).



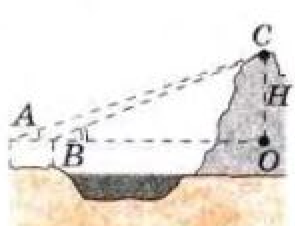
$H = \dfrac{AB}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B}$

Щоб остаточно визначити висоту скелі, треба до знайденого результату ще додати висоту приладу, за допомогою якого визначали кути A і B. Якщо висота приладу, наприклад, становила 1,40 м, то остаточна висота скелі буде $67{,}38 + 1{,}40 \approx 68{,}78 \approx 68{,}8$ (м).

Визначимо відстань між пунктами P_1 і P_2, розділеними перешкодою, наприклад річкою (мал. 4.27). Треба побудувати перпендикуляр CP_1 до прямої P_1P_2 і виміряти кут P_1CP_2 та відстань P_1C. Нехай $\angle C = 44^\circ$, а $P_1C = 120$ м. Тоді шукана відстань $P_1P_2 = P_1C \operatorname{tg} C = 120{,}0 \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \approx 120{,}0 \cdot 0{,}9657 \approx 115{,}8 \approx 116$ (м).

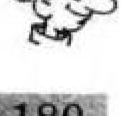


$AB = AC \operatorname{tg} C$



Мал. 4.26

Мал. 4.27



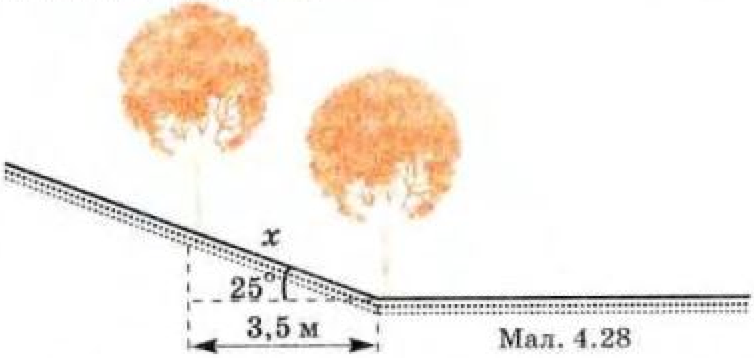
Для допитливих

Доведіть: якщо довжини сторін прямокутного трикутника – цілі числа, то принаймні одне з них парне і хоча б одне ділиться на 3.

Завдання 32

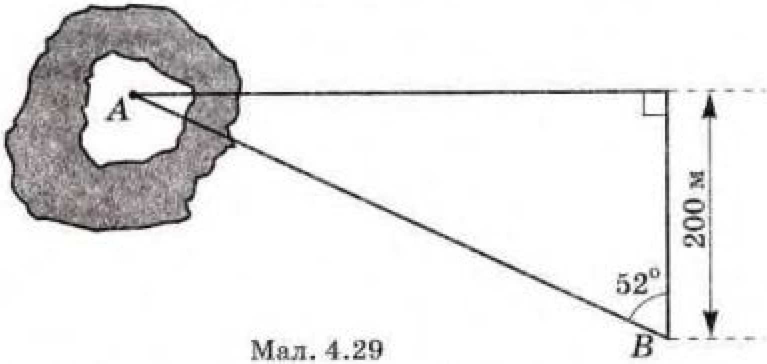
1°. Знайдіть синус кута підйому драбини, якщо на кожний метр довжини вона піднімається на 0,75 м.

2°. За малюнком 4.28 знайдіть x.



Мал. 4.28

3°. За малюнком 4.29 знайдіть відстань від точки B до недоступної точки A.



Мал. 4.29

4°. На прямолінійній частині шляху, що піднімається вгору, є пункти A і B, відстань між якими дорівнює 470 м. Пункт B знаходиться на 8 м вище, ніж пункт A. Знайдіть синус кута підйому шляху на проміжку AB.

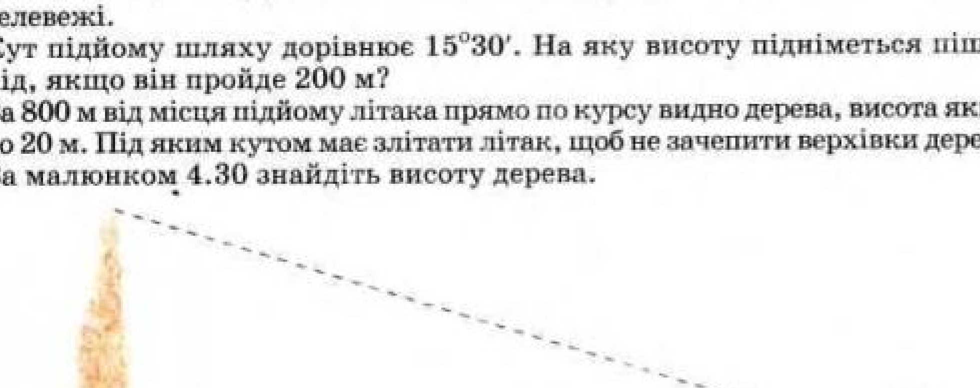
5*. Людина, що йде шляхом, практично не помічає підйому, якщо висота підйому менша ніж $\frac{1}{25}$ пройденого шляху. Чому дорівнює синус кута цього підйому?

6°. Висота Сонця 48°. Довжина тіні телевежі дорівнює 76 м. Знайдіть висоту телевежі.

7°. Кут підйому шляху дорівнює 15°30′. На яку висоту підніметься пішохід, якщо він пройде 200 м?

8. За 800 м від місця підйому літака прямо по курсу видно дерева, висота яких до 20 м. Під яким кутом має злітати літак, щоб не зачепити верхівки дерев?

9°. За малюнком 4.30 знайдіть висоту дерева.



Мал. 4.30

10. Під яким кутом видно телеграфний стовп заввишки 8 м, який знаходиться на відстані 230 м від спостерігача (зростом спостерігача знехтувати)?

11°. Знайдіть ширину річки, якщо верхній край вежі заввишки 14 м, що знаходиться на березі річки, видно з іншого берега під кутом 24° до горизонту.

12. З даху будинку, висота якого становить 12,8 м, дах іншого будинку висотою 10 м видно під кутом 32°. Знайдіть ширину вулиці, якщо будинки розміщені навпроти по різні боки вулиці.

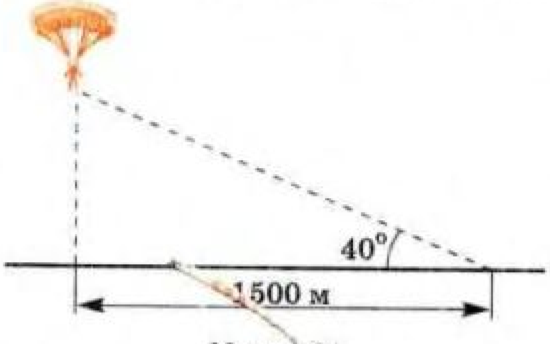
13°. За малюнком 4.31 знайдіть відстань від парашутиста до землі.

14. Літак наближається до аеропорту на висоті 7000 м. Пілот має вказівку знижуватися під кутом 6°. На якій відстані від злітної смуги він має почати зниження?

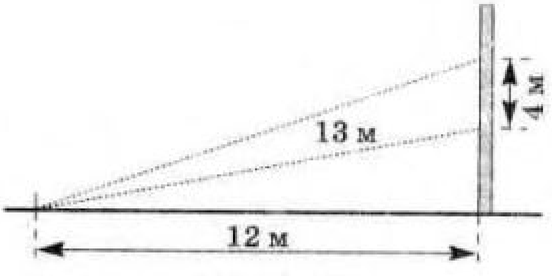
15°. Драбина, довжина якої дорівнює 12,5 м, приставлена до стіни так, що відстань від нижнього краю драбини до стіни дорівнює 3,5 м. На якій відстані від землі знаходиться верхній край драбини.

16*. Висоти двох вертикальних стовпів дорівнюють 5 м і 12,5 м. Відстань між ними – 10 м. Знайдіть відстань між верхівками стовпів.

17*. До вертикального стовпа прикріплено два троси так, як показано на малюнку 4.32. Знайдіть довжину більшого троса.



Мал. 4.31

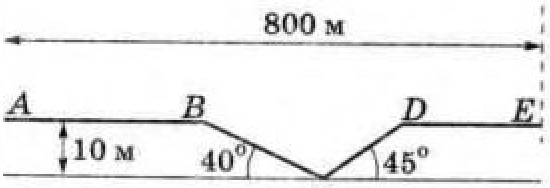


Мал. 4.32

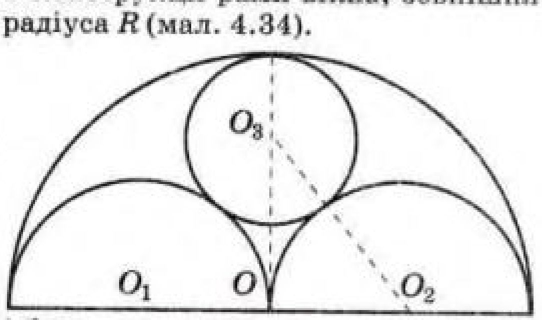
18**. Ескалатор метрополітену містить 170 східців від вестибюля до підлоги підземної станції. Ширина сходинки ескалатора – 40 см, висота – 20 см. Обчисліть: а) глибину станції; б) кут нахилу ескалатора.

19**. Знайдіть довжину газопроводу $ABCDE$, схему якого зображено на малюнку 4.33.

20**. Обчисліть радіус меншого кола в конструкції рами вікна, зовнішня частина якої має форму півкола радіуса R (мал. 4.34).



Мал. 4.33



Мал. 4.34

21**. Доведіть, що відрізок, який сполучає вершину прямого кута прямокутного трикутника з центром квадрата, побудованого на гіпотенузі: а) поділяє прямий кут навпіл; б) дорівнює сумі катетів, помноженій на $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Завдання для повторення розділу IV

1°. Дайте означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута прямокутного трикутника.

2°. Чи залежать синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута від розміщення і розмірів прямокутного трикутника?

3. Доведіть, що синус гострого кута не залежить від розмірів та розташування прямокутного трикутника.

4°. Запишіть співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого кута.

5*. Як змінюються значення синуса та косинуса кутів від 0° до 90°?

6°. Запишіть співвідношення між тригонометричними функціями доповняльних кутів.

7. Складіть табличку значень тригонометричних функцій кутів 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

8°. Знайдіть синуси, косинуси, тангенси і котангенси гострих кутів у прямокутному трикутнику зі сторонами: а) 24 м, 18 м, 30 м; б) 17 см, 15 см, 8 см; в) 1 мм, 3 мм, $\sqrt{10}$ мм.

9.** Порівняйте гострі кути α і β, якщо:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = \frac{1}{3}$; б) $\sin\alpha = 0{,}21$, $\sin\beta = 0{,}33$;

в) $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{2}{5}$; г) $\cos\alpha = 0{,}7$, $\cos\beta = 0{,}3$.

10. Знайдіть значення виразу:

а) $2\sin 30 - \sqrt{3}\cos 30^\circ$; б) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \mathrm{ctg}\, 45^\circ$;
в) $\mathrm{tg}\, 45^\circ \cdot \cos 60^\circ$; г) $2\sin 60^\circ - \mathrm{tg}\, 60^\circ$.

11. Побудуйте гострий кут α, якщо: а) $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$; б) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$.

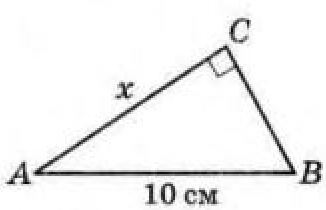
12*. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо: а) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; б) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, в) $\mathrm{ctg}\,\alpha = 2{,}4$.

13*. Знайдіть $\cos\alpha$ і $\mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо: а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; б) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, в) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{20}{21}$.

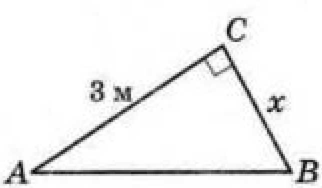
14. Спростіть вираз: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha$.

15. Знайдіть довжини невідомих сторін прямокутного трикутника, у якого: а) катет довжиною 7 см лежить проти кута 30°; б) катет довжиною 10 см лежить проти кута 45°; в) довжина гіпотенузи дорівнює 12 см, а один з гострих кутів дорівнює 60°.

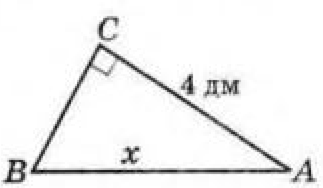
16*. Трикутник ABC прямокутний (мал. 4.35), $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть x.



а) $\cos B = 0{,}6$



б) $\sin A = 0{,}8$



в) $\mathrm{tg}\, A = 0{,}75$

Мал. 4.35

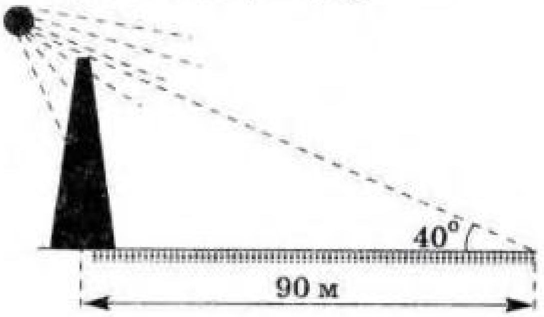
17. Обчисліть площу квадрата, діагональ якого дорівнює 6 см.

18*. Знайдіть висоту ромба, діагоналі якого дорівнюють 140 см і 48 см.

19*. Знайдіть площу і периметр паралелограма $MNKL$, у якого висоти MH і MP відповідно дорівнюють 2 см і 3 см, а $\angle HMN = 45^\circ$.

20*. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 2 см. Знайдіть висоту трапеції, якщо: а) кут між висотою трапеції і бічною стороною дорівнює 30°; б) один з кутів трапеції дорівнює 150°.

21**. За малюнком 4.36 знайдіть висоту вежі. Обрахунки проведіть з точністю до чотирьох значущих цифр.



Мал. 4.36

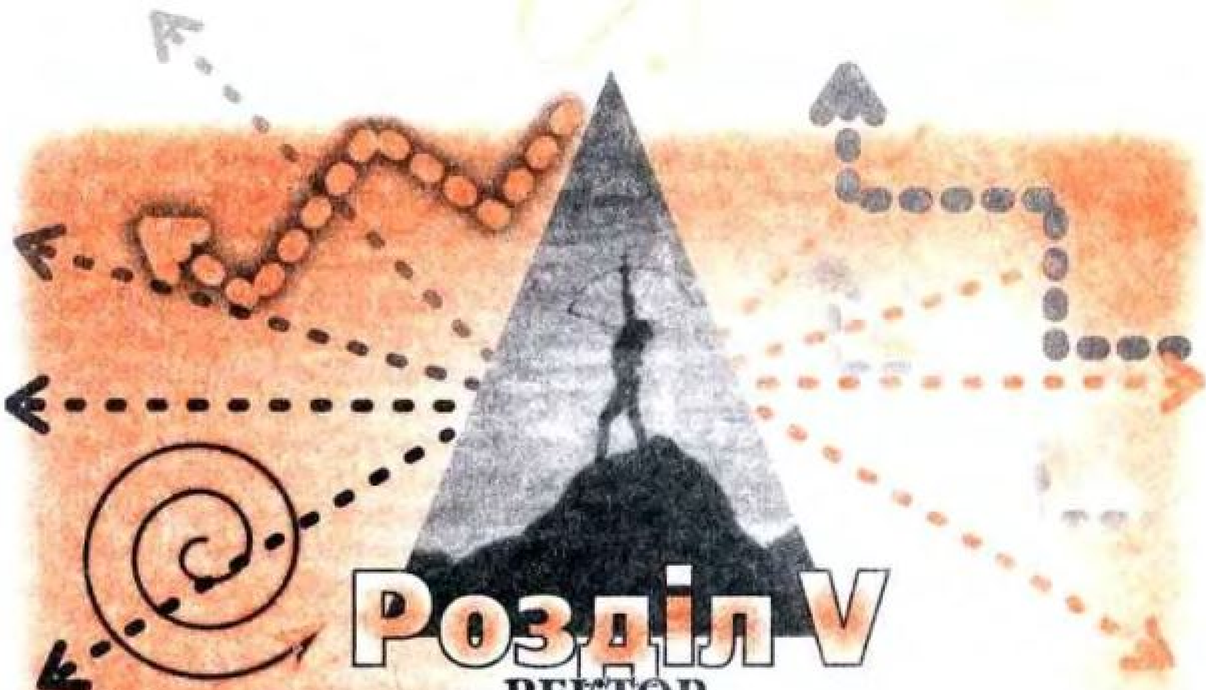
Готуємося до тематичного оцінювання № 4

Варіант I

1. (1 б.) Знайдіть синус кута A трикутника ABC з прямим кутом C, якщо $BC = 4{,}2$ см, $AB = 12$ см.
2. (1 б.) Знайдіть значення синуса кута A прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо $\cos B = \frac{1}{3}$.
3. (1 б.) Знайдіть катет AC прямокутного трикутника ABC, якщо його гіпотенуза $AB = 13$ см, а $\angle A = 45^\circ$.
4. (2 б.) Побудуйте кут α, якщо його синус дорівнює $\frac{3}{4}$.
5. (3 б.) У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза AB дорівнює 10 см, а катет AC дорівнює 5 см. Знайдіть периметр і гострі кути трикутника.
6. (4 б.) У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за один з його катетів на 1 см, а другий катет дорівнює 9 см. Знайдіть тангенс гострого кута, що лежить проти меншого катета.

Варіант II

1. (1 б.) Знайдіть косинус кута A трикутника ABC з прямим кутом C, якщо $AC = 13{,}92$ м, $AB = 24$ м.
2. (1 б.) Знайдіть значення косинуса кута B прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо $\sin A = \frac{2}{5}$.
3. (1 б.) Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника ABC, якщо його катет $AC = 14$ см, а $\angle B = 45^\circ$.
4. (2 б.) Побудуйте кут α, якщо його тангенс дорівнює $\frac{5}{4}$.
5. (3 б.) У рівнобедреному прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 3 см. Знайдіть гострі кути і периметр цього трикутника.
6. (4 б.) Продовження бічних сторін трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перетинаються під прямим кутом. Знайдіть AB, якщо $\angle BAD = 60^\circ$, $BC = 8$ см, $AD = 12$ см.



Розділ V
ВЕКТОР ЯК НАПРЯМЛЕНИЙ ВІДРІЗОК

У цьому розділі ви ознайомитеся з величинами, які, крім числового значення, характеризуються ще й напрямом у просторі, – векторами. Вектори широко використовуються у фізиці й математиці, особливо геометрії. Детальніше цю тему ви будете вивчати в 9-му класі, проте вже зараз ознайомлення з поняттям вектора і діями над векторами (додаванням, відніманням і множенням на число) стане вам у пригоді при вивченні фізики.

§ 33. Поняття вектора

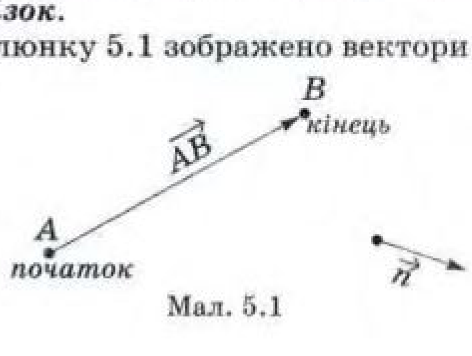
Багато фізичних величин, таких як сила, переміщення матеріальної точки, швидкість, прискорення тощо, характеризуються не лише числовим значенням, а й напрямом у просторі. Такі величини називаються *векторними величинами*, або *векторами*.

Зауважимо, величини, які характеризуються лише своїм числовим значенням – довжина, площа, маса, температура та інші, називаються *скалярними величинами*, або *скалярами*.

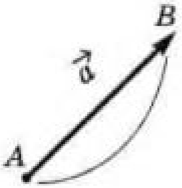
ВЕКТОР – напрямлений відрізок

У математиці ***вектором називається напрямлений відрізок.***

На малюнку 5.1 зображено вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{n}$.



Мал. 5.1



$|\vec{a}| = AB$

Модуль вектора

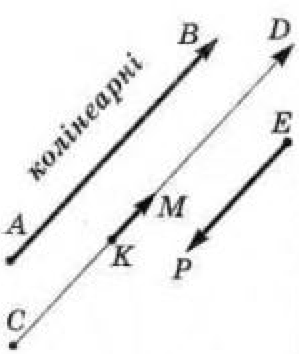
Нульовий вектор $\vec{0}$

не має напряму:

A

$A \equiv B \bullet |\vec{a}| = 0$

B



$AB \parallel CD \parallel PE$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ відрізняється від відрізка AB тим, що точки A і B, які обмежують вектор $\overrightarrow{AB}$, відіграють різну роль: точка A є *початком вектора*, а точка B – його *кінцем*.

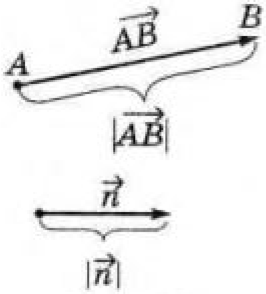
Дві точки площини A і B задають два різні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$. Довжини цих векторів рівні, а напрями – протилежні. Такі вектори називаються *протилежними* і записуються: $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

Модулем вектора називається його довжина. Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ є довжина відрізка AB (мал. 5.2), і позначається вона $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль вектора $\vec{n}$ позначається як $|\vec{n}|$.

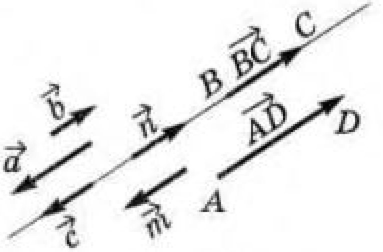
Нульовим вектором називається вектор, довжина якого дорівнює нулю (його початок і кінець збігаються). Його позначають як $\vec{0}$.

Колінеарними називаються два вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Наприклад, усі вектори, зображені на малюнку 5.3, – колінеарні. Колінеарність векторів позначають так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$; $\vec{c} \parallel \vec{m}$ ...



Мал. 5.2



Мал. 5.3

Для допитливих

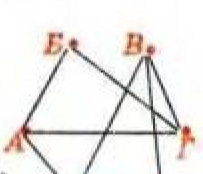
Графічне моделювання дуже часто дає змогу знайти шлях розв'язування задачі. Такий прийом ще називають *«використання графів»*. Точки, які позначають певні об'єкти, називають ***вершинами графа*** (див. с. 187, 191, 193), а відрізки, що їх сполучають, – ***ребрами***. Розглянемо таку задачу.

У першості з настільного тенісу беруть участь 6 учасників: *А, Б, В, Г, Д* і *О*. Першість проводять за круговою системою – кожний учасник грає з іншим лише один раз. Деякі ігри вже проведені: *А* зіграв з *Б, Г* і *О*; *Б* грав з *А* і *Г*; *В* – з *Г, Д* і *О*; *Г* – з *А, В* і *Б*; *Д* – з *В*; *О* – з *А* і *В*. Скільки ігор вже проведено і скільки ще залишилося провести?

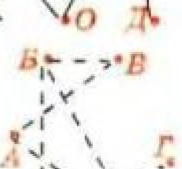
Розв'язання

Учасників турніру будемо зображати точками. Якщо два учасники вже зіграли між собою, сполучимо відповідні точки відрізками. У нас вийде граф з 6 вершинами і 7 ребрами (мал. **А**). Число ігор, які вже було проведено, дорівнює числу ребер. Їх 7.

Щоб знайти число ігор, які залишилося провести, треба намалювати ще один граф з тими самими вершинами, але тепер ребрами будуть відрізки, що з'єднують учасників, які ще не грали один з одним. Цей граф (мал. **Б**) легко побудувати, дивлячись на попередній (мал. **А**). Ребер у цього графа 8. Отже, залишилося провести ще 8 ігор.



А



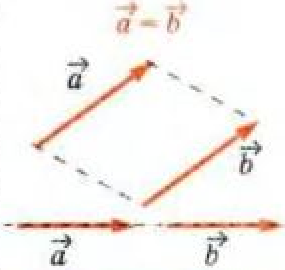
Б

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

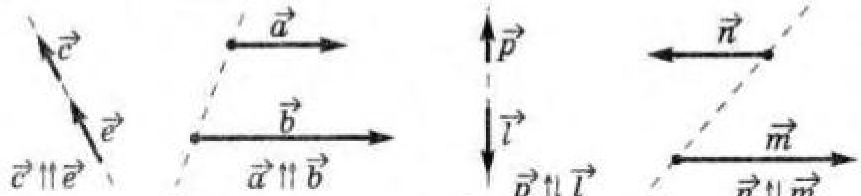
Ненульові колінеарні вектори бувають або *співнапрямлені*, або *протилежно напрямлені* (мал. 5.4 і 5.5).

Колінеарні вектори, які лежать на паралельних прямих, називаються *співнапрямленими*, якщо вони лежать в одній півплощині, обмеженій прямою, що сполучає початок одного і другого векторів (мал. 5.4-б), і *протилежно напрямленими*, якщо в різних (мал. 5.5-б).

Співнапрямленість та протилежну напрямленість векторів будемо позначати так, як показано на малюнках 5.4, 5.5 відповідно.



$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

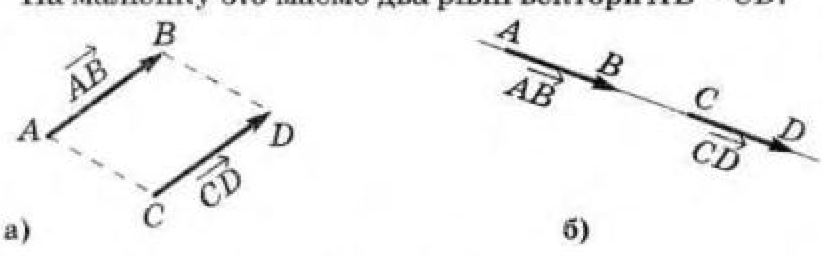


а) б) а) б)

Мал. 5.4 Мал. 5.5

Два ненульові вектори називаються рівними, якщо рівні їхні довжини і вони співнапрямлені.

На малюнку 5.6 маємо два рівні вектори $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



а) б)

Мал. 5.6

ВЛАСТИВОСТІ:

1) $\vec{a} = \vec{a}$

2) $\vec{a} = \vec{b}$ і $\vec{b} = \vec{c}$

$\Downarrow$

$\vec{a} = \vec{c}$

Зрозуміло, що з означення рівності векторів маємо такі *властивості рівності векторів:*

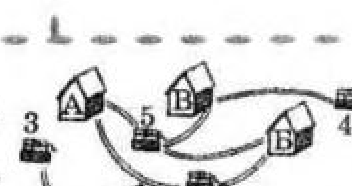
1. Будь-який вектор дорівнює сам собі: $\vec{a} = \vec{a}$.

2. Якщо $\vec{a} = \vec{b}$ і $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.

Для допитливих

Скориставшись мовою графів (с. 186, 191, 193), можна дуже легко розв'язати такі задачі.

1. Мешканці п'яти будинків посварилися один з одним і, щоб не зустрічатися біля криниць, вирішили поділити криниці так, щоб хазяїн кожного будинку ходив до своєї криниці своєю стежкою. Чи вдасться їм це зробити (мал. **А**)?



А

2. У п'яти кошиках лежать яблука п'яти різних сортів (мал. **Б**). Яблука першого сорту лежать у кошиках Г і Д; другого сорту – у кошиках А, Б і Г; у кошиках А, Б і В – п'ятого сорту, у кошику В знаходяться до того ж яблука четвертого сорту, а в кошику Д – третього. Потрібно дати кожному кошику номер, але так, щоб у кошику № 1 були яблука першого сорту (хоча б одне), у кошику № 2 – другого і т. д.

Б

Практична робота 37

1. Позначте на аркуші паперу три точки A, B і C, що не лежать на одній прямій. Накресліть усі вектори, які визначені сторонами трикутника ABC. Запишіть усі отримані вектори та вкажіть початок і кінець кожного вектора.
2. Позначте на аркуші паперу три точки A, B і C, що лежать на одній прямій. Накресліть усі вектори, які визначені відрізками з кінцями в точках A, B і C. Запишіть усі отримані вектори та вкажіть початок і кінець кожного з них.
3. Накресліть два неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Зобразіть кілька векторів: **а)** співнапрямлених з вектором $\vec{a}$; **б)** співнапрямлених з вектором $\vec{b}$; **в)** протилежно напрямлених з вектором $\vec{a}$; **г)** протилежно напрямлених з вектором $\vec{b}$.
4. Накресліть два вектори, які: **а)** мають рівні довжини і неколінеарні; **б)** мають рівні довжини і співнапрямлені; **в)** мають рівні довжини і протилежно напрямлені. Запишіть, які із зображених вами векторів: **а)** рівні; **б)** протилежні.

Практична робота 38

1. Накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP}$ і $\overrightarrow{EK}$ так, щоб: **а)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP}$ і $\overrightarrow{EK}$ були колінеарні та $|\overrightarrow{AB}| = 2$ см, $|\overrightarrow{CP}| = 1$ см, $|\overrightarrow{KE}| = 3{,}5$ см; **б)** $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CP}$ були колінеарні, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{KE}$ не були колінеарні і $|\overrightarrow{AB}| = 1$ см, $|\overrightarrow{CP}| = 2{,}5$ см, $|\overrightarrow{KE}| = 3$ см.
2. За допомогою відповідного масштабу накресліть вектор, який зображає: **а)** переміщення туриста з пункту A на 5 км на південь; **б)** переміщення туриста з пункту A на 10 км на схід; **в)** переміщення туриста з пункту A на $5\sqrt{2}$ км в південно-західному напрямі.
3. За допомогою відповідного масштабу накресліть вектор, який зображає політ літака спочатку на 200 км на схід (з пункту A у пункт B), а потім на 300 км на південь (з пункту B у пункт C). Накресліть вектор, який зображає переміщення літака з початкової точки A у кінцеву точку C.

Практична робота 39

1. Побудуйте паралелограм $ABCD$ і трапецію $QWRF$. Запишіть усі пари колінеарних векторів, які визначені сторонами: **а)** паралелограма $ABCD$; **б)** трапеції $QWRF$.
2. Побудуйте паралелограм $KMPE$ і позначте точку O перетину його діагоналей. Нехай $\overrightarrow{MK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{KP} = \vec{n}$, $\overrightarrow{MO} = \vec{d}$, $\overrightarrow{KO} = \vec{c}$. Випишіть усі вектори з початком або кінцем у точках K, M, P, E і O, які дорівнюють: **а)** вектору $\vec{a}$; **б)** вектору $\vec{n}$; **в)** вектору $\vec{d}$; **г)** вектору $\vec{c}$.
3. Побудуйте ненульовий вектор $\vec{a}$ і позначте три точки A, B і C. Відкладіть вектор $\vec{a}$ від точок A, B і C.
4. Побудуйте прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Позначте середину сторони AB через M. Знайдіть довжини векторів: **а)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA}$; **б)** $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MB}$.

Для допитливих

1. На карті вказано положення трьох маяків: A, B і C. З корабля маяки A і B видно під кутом α, а маяки B і C – під кутом β. Знайдіть на карті місце корабля.

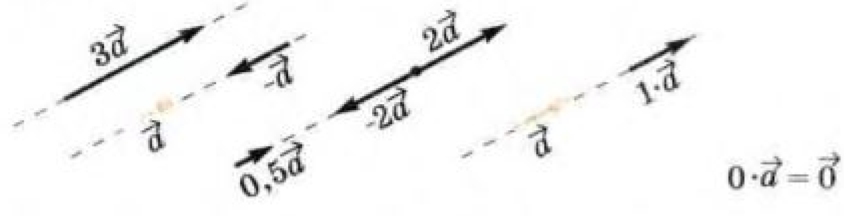
2. Два маяки A і B, позначені на карті, видно з корабля під кутом α. Після того як корабель пройшов деяку відстань прямолінійним курсом, ті самі маяки стало видно з корабля під кутом β. Знайдіть на карті місце корабля, якщо за допомогою інструментів, які є на цьому кораблі, довжина пройденого шляху і його напрям встановлено.

§ 34. Дії над векторами

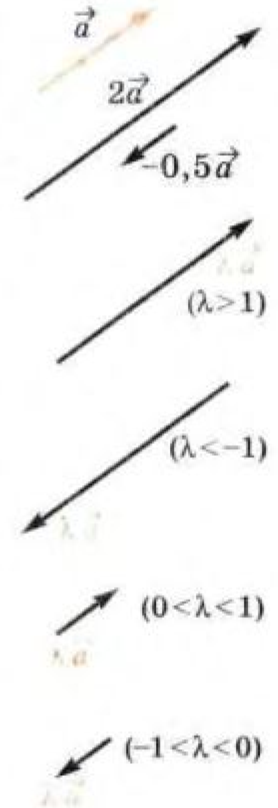
МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Для будь-якого ненульового вектора $\vec{a}$ і довільного числа k добутком $\vec{a}\cdot k \equiv k\cdot\vec{a}$ називається вектор $\vec{b}$, співнапрямлений з $\vec{a}$, якщо $k > 0$, і протилежно напрямлений з $\vec{a}$, якщо $k < 0$, модуль якого $|\vec{b}| = |k|\cdot|\vec{a}|$. При $k = 0$ маємо $\vec{0}$.

На малюнку 5.7 зображено кілька добутків вектора на число.



Мал. 5.7



Якщо $k = 0$, то за добуток матимемо нульовий вектор, тобто точку.

Якщо $k = 1$, то отримаємо вектор $\vec{a}$, тобто вектор рівний даному.

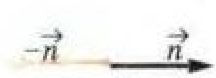
Якщо $k = -1$, то отримаємо вектор $-\vec{a}$, який дорівнює вектору $\vec{a}$ за модулем і протилежно напрямлений, тобто протилежний. Наприклад, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Будь-який вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, можна представити як $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнапрямлені, то вони відрізняються лише довжиною: $|\vec{b}| : |\vec{a}| = k$ і $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$.

Якщо вектори протилежно напрямлені, то аналогічно попередньому розглянемо вектори $-\vec{a}$ і $\vec{b}$. Тоді матимемо, що $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$, але $k < 0$.

Правильним буде і обернене твердження: ***якщо $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$, то вектори $\vec{b}$ і $\vec{a}$ – колінеарні.*** Доведення цього твердження пропонуємо провести самостійно.



$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

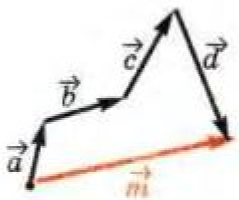
ВЛАСТИВІСТЬ

$\lambda = (\beta\vec{a}) = (\lambda\cdot\beta)\vec{a}$

Мирон Онуфрійович Зарицький народився 21 травня 1889 р. у селі Могильниця Тернопільської області в сім'ї священика. Після закінчення сільської початкової школи він вступає до Тернопільської гімназії. Гімназист Мирон багато читав (але тільки те, що його цікавило) і за рівнем знань значно випереджав своїх товаришів, а інколи і вчителів. З того часто виникали непорозуміння і конфлікти. Після однієї з таких суперечок гімназиста Зарицького було виключено з 5 класу. Він повертається в село, продовжує навчання самостійно і через рік вступає до 7 класу класичної гімназії в Перемишлі. Але непорозуміння продовжуються і тут. Деякі викладачі гімназії сумнівалися, чи доцільно допускати М. О. Зарицького до випускних іспитів. А він склав усі іспити на «відмінно». Зарицький успішно продовжує навчання у Віденському університеті і в 1907 р. повертається в Україну. В умовах австро-угорської монархії роботу у Львівському університеті він отримав лише в 1939 р., а до того Зарицький вчителював у гімназіях Коломиї і Тернополя (див. с. 217).

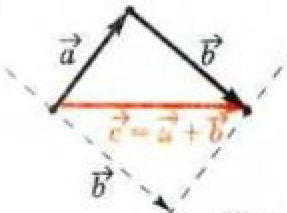
$\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

За правилом багатокутника:



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

За правилами: трикутника

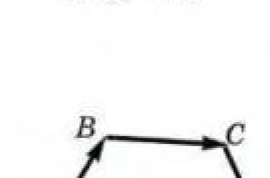


або *паралелограма*

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

$2\vec{a}$

$\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$

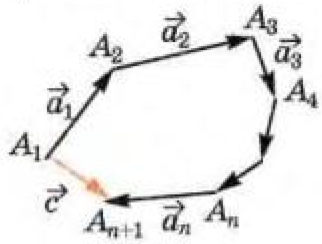


$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AK}$

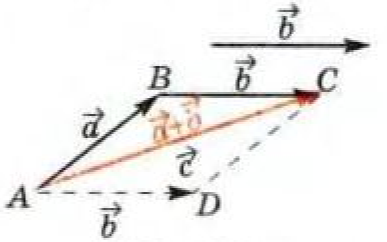
ДОДАВАННЯ ВЕКТОРІВ

Поняття рівності векторів дає змогу відкласти вектор, рівний даному, від довільної точки площини.

Нехай маємо ненульові вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, ... $\vec{a}_n$. ***Відкладемо від довільної точки площини вектор $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}_1$, потім від точки A_2 – вектор $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a}_2$ і т. д.*** (мал. 5.8). ***Нарешті відкладемо від точки A_n вектор $\overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \vec{a}_n$. Сполучимо точки A_1 і A_{n+1}. Вектор $\overrightarrow{A_1A_{n+1}}$ будемо називати сумою заданих векторів: $\overrightarrow{A_1A_{n+1}} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$.***



Мал. 5.8



Мал. 5.9

Такий спосіб знаходження суми векторів називається *правилом багатокутника.*

Суму двох векторів знаходять або *за правилом трикутника*, або *за правилом паралелограма* (мал. 5.9).

Правило трикутника випливає безпосередньо з правила багатокутника, якщо доданків лише два. Наприклад, якщо шукати суму двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то за правилом багатокутника треба від довільної точки A відкласти вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, потім від точки B відкласти $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тоді $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Маємо трикутник ABC і $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. (Зверніть увагу, що літера, яка позначає кінець одного вектора-доданка і початок другого, повторюється і «зникає».)

Тобто знайти вектор $\vec{c}$ – суму двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна за таким правилом.

Правило трикутника. *Розмістити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так, щоб початок вектора $\vec{b}$ збігався з кінцем вектора $\vec{a}$; початком вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ буде початок вектора $\vec{a}$, кінцем вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ буде кінець вектора $\vec{b}$.*

Щоб знайти суму двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за правилом паралелограма, проведемо через точки C і A попереднього випадку прямі, паралельні AB і BC (мал. 5.9), і отримаємо паралелограм $ABCD$. Тоді маємо, що $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, а вектор $\overrightarrow{AC}$ збігається з діагоналлю паралелограма $ABCD$. Тобто знайти вектор $\vec{c}$ – суму двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна за таким правилом.

Правило паралелограма. *Розмістити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так, щоб початки векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ збігалися; через кінці векторів провести прямі, паралельні прямим, які містять дані вектори; початком вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ буде початок векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кінцем вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ буде протилежний цій точці кінець діагоналі утвореного паралелограма.*

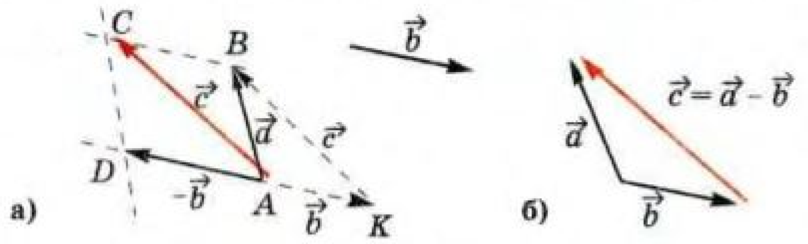
Зрозуміло, що з означення суми векторів випливає:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; 2. $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$;

3. $\vec{a}+(-\vec{a})=0$; 4. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

З останнього співвідношення маємо: ***щоб знайти різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, треба до вектора $\vec{a}$ додати вектор $(-\vec{b})$ – правило паралелограма.***

На малюнку 5.10-а: $\overrightarrow{AK}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=-\vec{b}$, вектор $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$ за правилом паралелограма ($ADCB$ – паралелограм). Сполучимо точки B і K – отримаємо паралелограм $ACBK$ (бо $CB \parallel AK$ і $CB=AK$). Тоді $\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{AC}$ і різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (вектор $\vec{c}$) можна знайти за таким правилом.



Мал. 5.10

Правило трикутника. *Розмістити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так, щоб початки векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ збігалися (мал. 5.10-б); початком вектора $(\vec{a}-\vec{b})$ буде кінець вектора $\vec{b}$, а кінцем вектора $(\vec{a}-\vec{b})$ буде кінець вектора $\vec{a}$.*

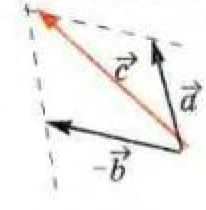
ВЛАСТИВОСТІ:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$;
3. $\vec{a}+(-\vec{a})=0$;
4. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

За правилом трикутника:

$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$

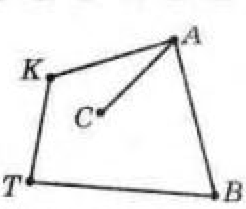
За правилом паралелограма:



$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$

Для допитливих

Кількість ребер графа (див. с. 186, 187, 193), що виходять з даної вершини, називають його ***степенем***.



Наприклад, на малюнку зображено граф, у якого вершина A має степінь 3, вершини B, K і T – степені 2, вершина C – степінь 1. Вершини графа, що мають непарний степінь, називають ***непарними***, а ті, що мають парний степінь, – ***парними***. У наведеному прикладі вершини A і C – непарні, а вершини B, K і T – парні.

1. Намалюйте граф, який має: **а)** три вершини і два ребра; **б)** чотири вершини і чотири ребра; **в)** чотири вершини і шість ребер. Визначте степені його вершин.

2. Доведіть дуже важливу теорему. **Кількість непарних вершин будь-якого графа – число парне.** (Порада. Скористайтеся тим, що сума непарних доданків є числом парним тільки тоді, коли їх кількість – парна.)

3. У класі 30 учнів. Чи може бути так, що 9 з них мають по 3 друга (у цьому класі), 11 – по 4, а 10 – по 5 друзів? (Порада. Уявіть, що це можливо. Тоді існує граф з 30 вершинами, 9 з яких мають степінь 3; 11 – степінь 4; 10 – степінь 5. Такий граф має 9 + 10 = 19 непарних вершин, що суперечить доведеній теоремі.)

4. На теплоході 15 телефонів. Чи можна їх з'єднати проводами так, щоб було 4 телефони, кожний з яких з'єднано з трьома іншими, 8 телефонів, кожний з яких з'єднано з шістьма іншими, 3 телефони, кожний з яких з'єднано з п'ятьма іншими?

5. Чи може в королівстві, у якому з кожного міста виходить 3 дороги, бути рівно 100 доріг?

6. Доведіть, що кількість усіх людей, які коли-небудь жили на Землі і які потиснули руку іншим непарну кількість разів, – число парне.

7. Чи можна намалювати на площині 9 відрізків так, щоб кожний з них перетинав рівно три інші?

Практична робота 40

1. Накресліть ненульовий вектор $\overrightarrow{AB}$ і побудуйте вектори $0 \cdot \overrightarrow{AB}$, $1 \cdot \overrightarrow{AB}$, $-1 \cdot \overrightarrow{AB}$, $(1 : |AB|) \cdot \overrightarrow{AB}$. Виміряйте довжину вектора $(1 : |AB|) \cdot \overrightarrow{AB}$ і переконайтеся, що вона дорівнює одиниці.
2. Накресліть два співнапрямлені вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і за допомогою масштабної лінійки знайдіть $|a|$ і $|b|$. Побудуйте вектор $(|b| : |a|) \cdot \vec{a}$ і переконайтеся в тому, що він дорівнює вектору $\vec{b}$.
3. Накресліть два протилежно напрямлені вектори $\vec{c}$ і $\vec{p}$ так, щоб $|c| = 2$ см, $|p| = 4$ см. Побудуйте вектор $(-|p| : |c|) \cdot \vec{c}$ і переконайтеся, що він дорівнює вектору $\vec{p}$.
4. Накресліть три ненульові вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте вектори: **а)** $-\vec{a}$, $-\vec{b}$, $-\vec{c}$; **б)** $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $0,5\vec{c}$; **в)** виміряйте довжини цих векторів і переконайтеся в тому, що $2\vec{a} = 2|\vec{a}|$.
5. Накресліть ненульовий вектор $\vec{a}$. Побудуйте вектор $\vec{p} = 3\vec{a}$. Побудуйте вектори: $-\vec{a}$, $1,5\vec{a}$, $2\vec{a}$, $6\vec{a}$. Вкажіть, як напрямлений кожний з отриманих векторів відносно вектора $\vec{p}$, і виразіть їхні довжини через $|p|$.

Практична робота 41

1. Накресліть попарно колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$. Побудуйте суми $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$.
2. Накресліть неколінеарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ і $\vec{e}$. За правилом багатокутника побудуйте вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$.
3. Накресліть два неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, початки яких не збігаються: **а)** позначте довільну точку A і за правилом трикутника побудуйте суму $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$; **б)** позначте іншу точку M і за правилом паралелограма побудуйте суму $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{MP}$; **в)** за допомогою креслярських інструментів переконайтеся, що $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MP}$.
4. Накресліть неколінеарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте вектори: **а)** $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$; **б)** переконайтеся, що вектор $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ дорівнює вектору $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Практична робота 42

1. Накресліть два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Доведіть (побудовою), що $|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$.
2. Накресліть два ненульові вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте вектори: **а)** $\vec{m} - \vec{n}$; **б)** $\vec{n} - \vec{m}$. Які вектори ви отримали?
3. Накресліть два ненульові вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$. Побудуйте вектори: **а)** $\vec{x} + 2\vec{y}$; **б)** $0,5\vec{y} + \vec{x}$; **в)** $\vec{y} - 3\vec{x}$; **г)** $-2\vec{y} + \vec{x}$; **д)** $-\vec{y} - \vec{x}$; **е)** $0 \cdot \vec{y} - 2\vec{x}$; **є)** $1,5\vec{y} - 0 \cdot \vec{x}$.

4*. Побудуйте довільний паралелограм $ABCD$. Позначте довільну точку на цьому аркуші паперу через X. Побудуйте вектори $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}$ і $\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$. Переконайтеся, що отримані вектори рівні. Чи зміниться результат, якщо змінити положення точки X? Відповідь обґрунтуйте.

Для допитливих

1. Човен переправляється через річку перпендикулярно до її берегів за 30 хв. Ширина річки 3 км, а швидкість течії 2,1 км/год. Знайдіть власну швидкість човна і кут між напрямом течії і напрямом власної швидкості човна. (Порада. Знайдіть тригонометричну функцію шуканого кута і скористайтесь одиничним колом та транспортиром.)

2. З якої точки земної кулі має вилетіти літак, щоб, після того як він пролетів 100 км уздовж меридіана на південь, потім 100 км уздовж паралелі на схід, потім 100 км уздовж меридіана на північ, знову потрапити в початкову точку?

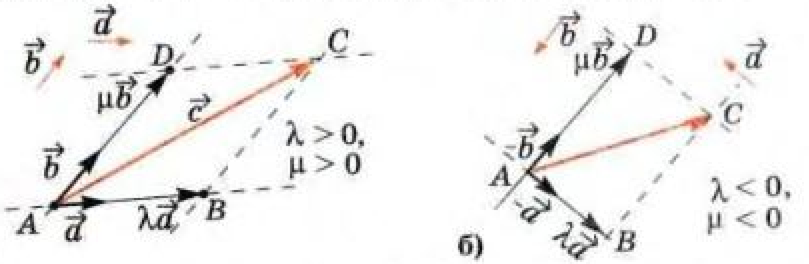
§ 35. Розкладання вектора за двома неколінеарними векторами

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два неколінеарні вектори, то будь-який третій вектор $\vec{c}$ можна представити у вигляді $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, де λ і μ – пара чисел. Тобто **будь-який вектор можна розкласти за двома неколінеарними векторами.**

Будь-який вектор можна розкласти за двома неколінеарними векторами.

Для доведення цього твердження через початок A і кінець C вектора $\vec{c}$ проведемо прямі, паралельно векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 5.11). Ми отримали паралелограм $ABCD$. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{a}$ співнапрямлені і відрізняються лише довжиною. Тоді $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{a}$. Аналогічно $\overrightarrow{AD} = \mu\vec{b}$.

Маємо: $\vec{c} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, що і вимагалося довести.



Мал. 5.11

$\vec{a} \nparallel \vec{b}$

$\Downarrow$

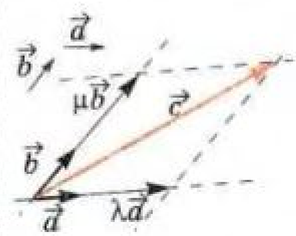
$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, де $\{\lambda; \mu\}$ – єдина пара чисел

Ми довели, що існує шукана пара чисел λ і μ. Доведемо від супротивного, що вона єдино можлива.

Нехай існує інша пара чисел λ_1 і μ_1 таких, що $\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b}$. Тоді маємо:

$$\lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b},\ (\lambda_1 - \lambda)\ \vec{a} = (\mu - \mu_1)\ \vec{b}.$$

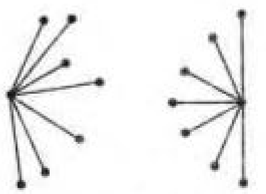
Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за умовою неколінеарні, тоді остання рівність можлива лише за умови, що вектори $(\lambda_1 - \lambda)\ \vec{a}$ і $(\mu - \mu_1)\ \vec{b}$ нульові, тобто при $\lambda_1 = \lambda$ і $\mu_1 = \mu$, що протирічить припущенню. Тоді пара чисел λ і μ – єдина.



$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

Для допитливих

Задача. На деякому острові 15 поселень, кожне з яких з'єднано дорогами не менше, ніж із 7 іншими. Доведіть, що з будь-якого поселення цього острова можна добратися дорогами до будь-якого іншого. (Можна проходити через інші поселення.)



Розв'язання

Нехай існують два такі поселення, що з одного не можна добратися до іншого, якщо йти шляхами цього острова. Тоді відповідний граф має вигляд, який представлено на малюнку. Таким чином, маємо не менш як 16 поселень, що протирічить умові.

Відповідь: Ні.

Завдяки цій задачі ми ознайомилися з класифікацією графів на зв'язані і незв'язані. ***Зв'язаним*** називається граф, якщо, рухаючись уздовж його ребер, можна з будь-якої його вершини потрапити в будь-яку іншу. Зауважимо, що такий замкнений шлях уздовж ребер графа, що починається і завершується в одній вершині, називають ***циклом***. ***Незв'язаний граф*** завжди складається з кількох зв'язаних «шматочків».

Практична робота 43

1. Накресліть три неколінеарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. За допомогою креслярських інструментів розкладіть вектор $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Виміряйте довжини отриманих векторів, визначте відповідні коефіцієнти і запишіть вектор $\vec{c}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
2. Накресліть два ненульові вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$, які лежать на двох взаємно перпендикулярних прямих. Накресліть третій вектор $\vec{l}$. Розкладіть (побудовою) вектор $\vec{l}$ за векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$. Визначте відповідні коефіцієнти і запишіть вектор $\vec{l}$ через вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$.
3. Побудуйте довільний трикутник ABC і проведіть його медіану AM. Розкладіть (побудовою) вектор $\overrightarrow{AM}$ за векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Запишіть відповідний вираз.

Завдання для повторення розділу V

1°. Наведіть приклади векторних і скалярних величин.

2*. Що математики називають вектором і чим їхнє означення вектора відрізняється від поняття вектора у фізиці?

3. Які вектори називають колінеарними?

4°. Що таке модуль вектора?

5. Чи завжди є правильним таке твердження: «Якщо модулі двох векторів рівні, то ці вектори рівні»? Наведіть приклади.

6°. Чим відрізняються протилежно напрямлені вектори? Наведіть приклад.

7°. Наведіть приклад: а) співнапрямлених векторів; б) протилежно напрямлених векторів; в) рівних векторів.

8. Сформулюйте означення рівності векторів.

9**. Сформулюйте два означення рівності векторів. Чи є вони рівносильними? Відповідь обґрунтуйте.

10°. Наведіть приклад множення одного й того самого вектора на число: а) 2; б) −2. Чи будуть рівними модулі цих векторів?

11°. Наведіть приклади додавання двох колінеарних: а) однаково напрямлених векторів; б) протилежно напрямлених векторів.

12°. Наведіть приклади віднімання двох колінеарних: а) однаково напрямлених векторів; б) протилежно напрямлених векторів.

13. Наведіть приклади: а) додавання двох неколінеарних векторів; б) віднімання двох неколінеарних векторів.

14. Дано паралелограм $KMHP$. Знайдіть: а) різницю векторів $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{PH}$; б) суму векторів $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{HP}$.

15. Дано чотирикутник $ABCD$. Знайдіть суму векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.

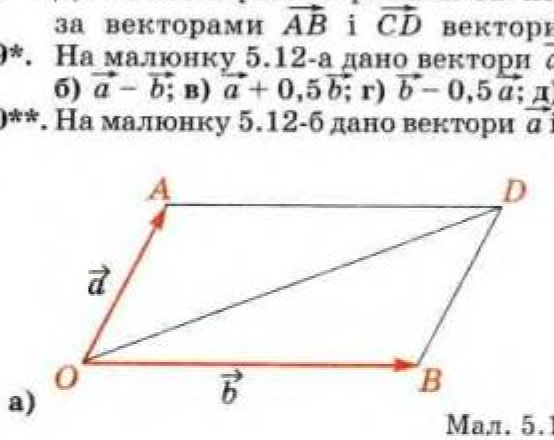
16*. Знайдіть суму векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{MP}$ і $\overrightarrow{BK}$.

17*. Дано паралелограм $CMET$. Розкладіть вектор $\overrightarrow{CE}$ за векторами: а) $\overrightarrow{CM}$ і $\overrightarrow{CT}$; б) $\overrightarrow{MC}$ і $\overrightarrow{TC}$; в) $\overrightarrow{MC}$ і $\overrightarrow{CT}$.

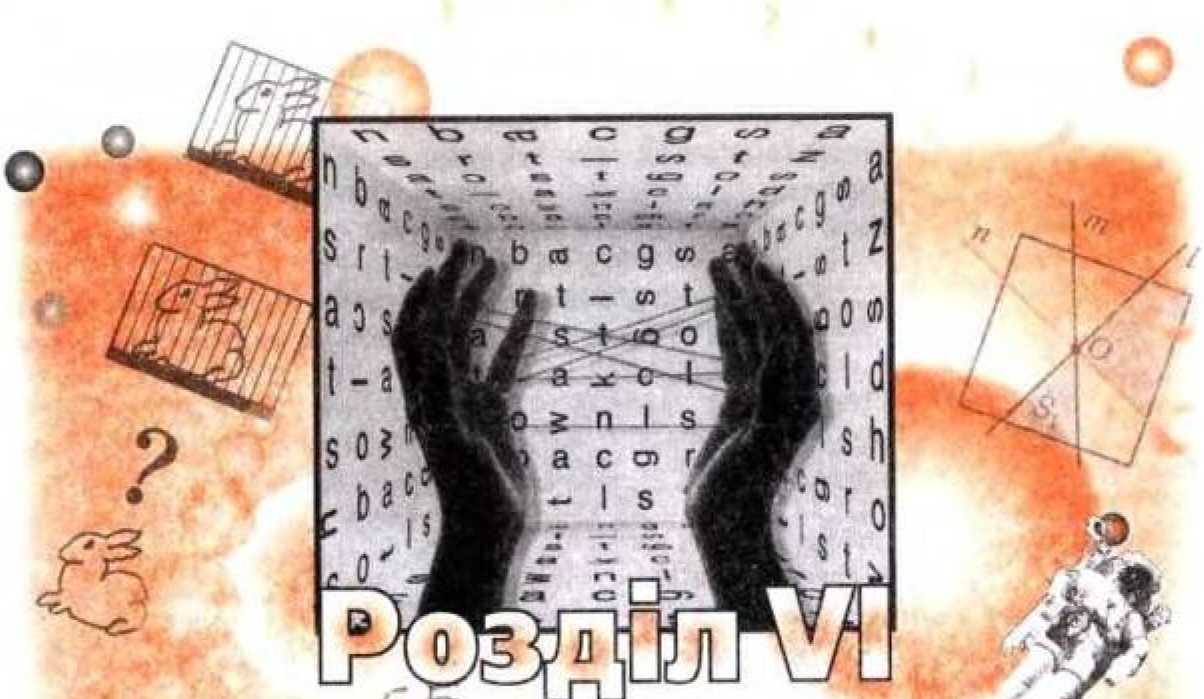
18**. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Розкладіть за векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ вектори: а) $\overrightarrow{OA}$; б) $\overrightarrow{OC}$; в) $\overrightarrow{BD}$; г) $\overrightarrow{OB}$.

19*. На малюнку 5.12-а дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Побудуйте вектори: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $\vec{a}+0,5\vec{b}$; г) $\vec{b}-0,5\vec{a}$; д) $0,5\vec{a}+1/3\,\vec{b}$.

20**. На малюнку 5.12-б дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайдіть вектори: $\vec{c}$, $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$.



Мал. 5.12



Розділ VI
ЦІКАВІ ДОДАТКИ

«Шкільна геометрія» є чудовим полігоном для формування логічного і послідовного мислення. Ця наука є не що інше, як велика гра за певними аксіоматичними правилами, які виробили ще стародавні греки. Причому Евклід та його попередники (як і послідовники) вважали, що ці правила стовідсотково відображають закономірності навколишнього світу.

Гра ця зайшла так далеко, що її можна порівняти, мабуть, лише з шахами. Ця чудова гра настільки розрослася, що сьогодні похвалитися повним знанням усіх її секретів, мабуть, не може ніхто.

У цьому розділі для тих, хто захоплюється такою грою, пропонуємо деякі «дебютні ідеї» геометрії.

Додаток 1

Точки і коло Ейлера, пряма Ейлера

Леонард Ейлер (1707–1783) був не лише одним з найславетніших математиків в історії людства, а й на диво різнобічно обдарованим ученим. У геометрії багато понять названо ім'ям ***Леонарда Ейлера***. Ми розглядатимемо властивості трикутника, знайдені Леонардом Ейлером.

Точками Ейлера називаються середини відрізків висот трикутників від його вершин до ортоцентра.

Пряма, яка проходить через ортоцентр трикутника і центр описаного навколо нього кола, називається *прямою Ейлера*.

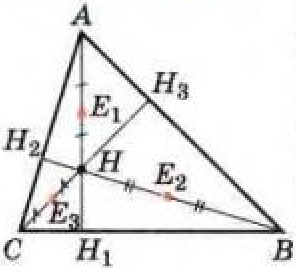
Коло, яке проходить через основи висот трикутника, основи його медіан і точки Ейлера, називається *колом дев'яти точок*, або *колом Ейлера*.

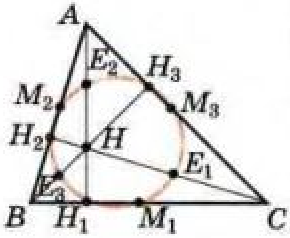
...У величезному саду геометрії кожний може підібрати собі букет за смаком.

Давид Гільберт

Коло дев'яти точок іноді ще називають *колом К. Фейєрбаха* (1800–1834) на честь німецького математика, який відкрив його незалежно від інших математиків.

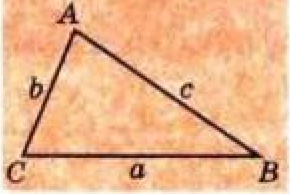
Точки Ейлера





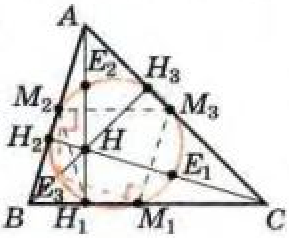
Коло Ейлера, або коло Фейєрбаха (коло дев'яти точок)

Нагадаємо позначення:



Т Теорема 1. **Основи висот трикутника, основи його медіан і точки Ейлера лежать на одному колі (колі Ейлера).**

Нехай M_1, M_2 і M_3 – середини сторін BC, AB і AC трикутника ABC; AH_1, CH_2 і BH_3 – його висоти; H – ортоцентр; E_1, E_2 і E_3 – точки Ейлера (мал. 6.1).



Мал. 6.1

Через точки M_1, M_2 і M_3 проведемо коло і доведемо, що:

точки H_1, H_2, H_3 належать колу (1);

точки E_1, E_2 і E_3 належать колу (2).

Доведення

1) Розглянемо чотирикутник $H_1M_2M_3M_1$.

$H_1M_2 = \dfrac{1}{2}c$ як медіана гіпотенузи трикутника ABH_1;

$M_1M_3 = \dfrac{1}{2}c$, $M_2M_3 \parallel a$ як середні лінії трикутника ABC.

Тоді $H_1M_2M_3M_1$ – рівнобічна трапеція, вписана в коло, яке проходить через три її вершини M_1, M_2, M_3 і через четверту вершину H_1.

Аналогічно доводиться те, що точки H_2 і H_3 також лежать на цьому колі, і (1) доведено.

2) Розглянемо чотирикутник $E_3M_2M_3M_1$.

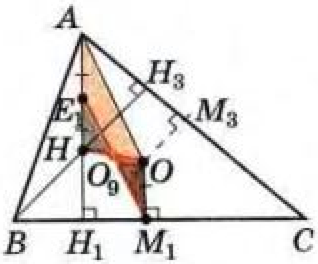
$M_2E_3 \parallel AH_1$, $M_1E_3 \parallel CH_2$ як середні лінії трикутників ABH_1 і CBH_2 відповідно. Тоді $M_2E_3 \perp M_2M_3$ і $M_1E_3 \perp M_1M_3$, і навколо чотирикутника $E_3M_2M_3M_1$ можна описати коло. Але через три точки (M_1, M_2, M_3) можна провести лише одне коло, тому точка E_3 належить цьому колу.

Аналогічно доводиться, що точки E_2 і E_1 лежать на цьому колі, і (2) доведено.

Теорему доведено.

Перший у Східній Європі вищий навчальний заклад – **Києво-Могилянська колегія** – був створений у 1632 р. (з 1701 р. – Києво-Могилянська академія). До 1817 р. це була загальноосвітня вища школа, яка за структурою відрізнялася від тодішніх західноєвропейських університетів. У ній було шість класів з однорічним терміном навчання і один з дворічним (іноді трирічним). Київська академія була створена більш як за 20 років до приєднання України до Росії і за 55 років до того, як почав працювати в Росії (в Москві) аналогічний заклад (Елліно-грецька академія, пізніше – Слов'яно-латинська академія). Києво-Могилянська академія стала популярною. В ній навчалися студенти з різних країн Європи (навіть Греції) та арабського Сходу.

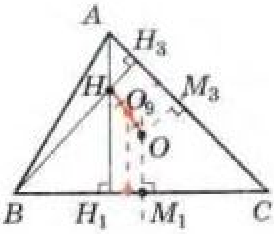
Теорема 2. Центр кола Ейлера лежить на середині відрізка, який сполучає ортоцентр трикутника з центром описаного навколо цього трикутника кола. Радіус кола Ейлера дорівнює половині радіуса кола, описаного навколо трикутника.



Мал. 6.2

Нехай M_1 і M_3 – середини сторін BC і AC трикутника ABC; AH_1 і BH_3 – його висоти; H – ортоцентр; O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC; R – радіус цього кола; O_9 – центр кола Ейлера; R_9 – радіус кола Ейлера; E_1 – середина AH (точка Ейлера) (мал. 6.2).

Треба довести, що: (1) $O_9 \in OH$; (2) $HO_9 = O_9O$; (3) $R_9 = \frac{1}{2}R$.



(OH) – пряма Ейлера

$O_9 \in OH$

$HO_9 = O_9O$

$R_9 = \frac{1}{2}R$

Доведення

1) Розглянемо прямокутні трапеції OHH_3M_3 і OHH_1M_1 ($BH_3 \parallel OM_3$ і $AH_1 \parallel OM_1$). Бічні сторони цих трапецій H_3M_3 і H_1M_1 перпендикулярні до основ трапецій, а інша бічна сторона OH – спільна (мал. 6.2).

Центр кола Ейлера O_9 – точка перетину серединних перпендикулярів до відрізків H_1M_1 і H_3M_3.

Серединні перпендикуляри до бічних сторін H_1M_1 і H_3M_3 трапецій паралельні їх основам і, за теоремою Фалеса, проходять через середину спільної бічної сторони трапецій – *середину відрізка OH*.

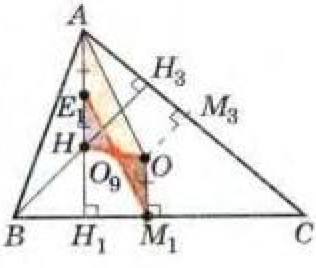
Твердження (1) і (2) доведено.

2) Сполучимо точки A і O, E_1 і M_1. AO – радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

E_1M_1 – діаметр кола Ейлера, бо кут $E_1H_1M_1$ – вписаний кут цього кола і дорівнює 90°. Тоді E_1M_1 перетинає OH у точці O_9 (EM_1 – діаметр кола, а O_9 – його центр і $O_9 \in OH$).

$HO_9 = O_9O$ за доведеним (п. 1), $E_1O_9 = O_9M_1$ як радіуси кола Ейлера, кути E_1O_9H і OO_9M_1 рівні як вертикальні.

Тоді $\triangle HE_1O_9 = \triangle OM_1O_9$, і $OM_1 = HE_1 = AH : 2$.



$AH = 2OM_1$

$OM_1 = HE_1 = E_1A$, $E_1A \parallel OM_1$, тоді E_1AOM_1 – паралелограм і $E_1M_1 = AO$, $2R_9 = R$. Твердження (3) доведено.

Теорему доведено.

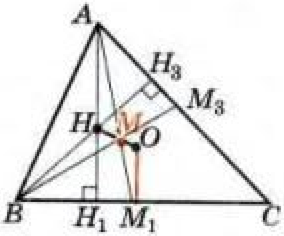
Гіпотеза – наукове припущення, що потребує перевірки та теоретичного обґрунтування, щоб стати вірогідним твердженням.

Інтуїція – здібність переходити до інтелектуального результату (як гіпотези) несвідомо, почуття «безумовної правильності» певного підходу («не знаю, чому..., але впевнений, що...»).

Інсайт (буквально – осяяння) – несподіване розуміння суті проблеми.

Математика – це те, за допомогою чого люди керують природою і собою.

А. М. Колмогоров

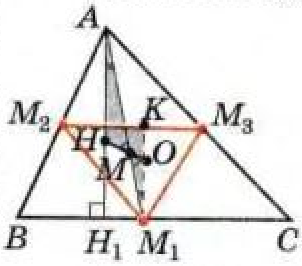


$M \in (OH)$

центроїд *пряма Ейлера*

$OM_1 = \frac{1}{2} AH$

Теорема 3. У будь-якому трикутнику точка перетину медіан, ортоцентр і центр описаного кола лежать на одній прямій – прямій Ейлера.



Мал. 6.3

Нехай M_1, M_2 і M_3 – середини сторін BC, AB і AC трикутника ABC; AH_1, CH_2 і BH_3 – його висоти; H – ортоцентр; O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC; M – точка перетину медіани AM_1 і прямої OH. Треба довести, що M – центроїд (точка перетину медіан) трикутника ABC (мал. 6.3).

Доведення

1) Розглянемо трикутник $M_1M_2M_3$. Його сторони паралельні сторонам трикутника ABC, тоді $\triangle M_1M_2M_3 \backsim \triangle ACB$; коефіцієнт подібності дорівнює $1/2$.

2) Серединні перпендикуляри до сторін трикутника ABC – це висоти трикутника $M_1M_2M_3$, а точка їх перетину O – ортоцентр трикутника $M_1M_2M_3$. Тоді $OM_1 = \frac{1}{2}AH$.

3) Кути AMH і M_1MO рівні як вертикальні, кути HAM і OM_1M рівні, бо $AH \parallel OM_1$. Тоді $\triangle AMH \backsim \triangle M_1MO$; коефіцієнт подібності дорівнює $\frac{1}{2}$ (бо $OM_1 = \frac{1}{2} AH$).

4) З останнього твердження маємо, що $AM : MM_1 = 2 : 1$ і M – центроїд трикутника ABC.

Теорему доведено.

Розглянемо *приклад розв'язання задачі з точками Ейлера без використання властивостей кола Ейлера.*

Задача. В гострокутному трикутнику ABC позначили: середини сторін BC, AB і AC як M_1, M_2 і M_3 відповідно; основи висот – як H_1, H_2 і H_3 відповідно; ортоцентр – як H; середини відрізків AH, CH і BH – як E_1, E_2 і E_3 відповідно. Доведіть, що $E_1E_2 = M_1M_2 = H_1M_3$.

Мал. 6.4

Доведення

1) У $\triangle AHC$ відрізок E_1E_2 – середня лінія, тоді $E_1E_2 = AC : 2$ (мал. 6.4).

2) У прямокутному трикутнику AH_1C відрізок H_1M_3 – медіана гіпотенузи, тоді $H_1M_3 = AB : 2$.

3) У $\triangle ABC$ M_1M_2 – середня лінія, тоді $M_1M_2 = AC : 2$. Маємо: $AB : 2 = E_1E_2 = M_1M_2 = H_1M_3$. Щ. в. д.

Геометрія є прообразом краси світу.

І. Кеплер

А тепер спробуйте **самостійно розв'язати** цю задачу, скориставшись властивістю кола дев'яти точок.

Скориставшись властивостями кола і прямої Ейлера, дотримуючись прийнятих у додатку 1 позначень, **розв'яжіть самостійно** такі задачі.

1. Доведіть, що відрізки M_1E_1, M_2E_2 і M_3E_3 мають спільну середину.
2. Доведіть, що відстань від ортоцентра до якої-небудь вершини трикутника вдвічі більша за відстань від центра описаного кола до протилежної сторони трикутника.
3. Відомо, що $AB = CH$. Знайдіть кут ACB.
4. Доведіть, що у прямокутному трикутнику O_9 збігається з серединою медіани, проведеною до гіпотенузи.
5. Доведіть, що: **а)** $M_1E_1 = M_2E_2 = M_3E_3 = R$; **б)** $\angle AE_1H_3 = \angle BE_3H_1$; **в)** кут між прямими H_3M_2 і H_2E_3 дорівнює куту між прямими H_2M_3 і H_3E_2.
6. Задані коло, точка A на ньому, точка H всередині кола. Знайдіть на колі такі точки B і C, щоб точка H була точкою перетину висот трикутника ABC.
7. Побудуйте трикутник, якщо відомі одна з його вершин, середина протилежної сторони і точка перетину висот.
8. Доведіть, що радіус кола, описаного навколо трикутника дорівнює радіусу кола, що проходить через дві вершини цього трикутника і його ортоцентр.
9. Доведіть рівність трикутників за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони.
10. Відновіть прямокутний трикутник за положенням його двох точок – центра кола Ейлера і серединою гіпотенузи.

Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

1. *Бевз Г. П.* Геометрія кіл. – Харків: Основа, 2004. – 112 с.
2. *Никулин А. В., Кукуш А. Г., Татаренко Ю. С.* Геометрия на плоскости (Планиметрия). – Минск: ООО «Попурри», 1996. – 592 с.
3. *Зеттель С. И.* Новая геометрия треугольника. – М.: Просвещение, 1962. – 152 с.
4. *Кушнір І. А.* Трикутник і тетраедр у задачах. – К.: Рад. шк., 1991. – 208 с.
5. *Кушнір І. А.* Повернення втраченої геометрії. – К.: Факт, 2000. – 280 с.

Прокопович Феофан (1681–1736) – один з найвизначніших викладачів Київської академії (Києво-Могилянська академія). У списку українських математиків-методистів, які залишили помітний слід в історії науки, ім'я Феофана Прокоповича хронологічно посідає перше місце.

Феофан Прокопович народився в Києві і був названий Єлеазаром. Батько й мати його померли дуже рано, сироту взяв під свою опіку його дядько Феофан Прокопович, який славився освіченістю і красномовством. У кінці своєї діяльності він був обраний ректором Києво-Могилянської колегії, проте доживав життя в Києво-Печерській лаврі й помер, коли племіннику було 11 років.

У 1697 р. Єлеазар блискуче закінчив філософське відділення колегіуму, продовжив освіту в Польщі, пішки дістався до Риму, де навчався в колегії Св. Афанасія для слов'ян-католиків. Після закінчення навчання в Римі (є дані, що після захисту магістерської праці він отримав докторський ступінь) протягом трьох років побував у багатьох європейських країнах і в 1704 р. повернувся до Києва, де став викладачем Київської академії. Під час перехрещення в православ'я отримав (за власним бажанням) ім'я свого дядька. В 1707 р. він став префектом (тобто проректором) Київської академії, а пізніше (1711 р.) – її ректором. Він брав участь у створенні Петербурзької академії наук.

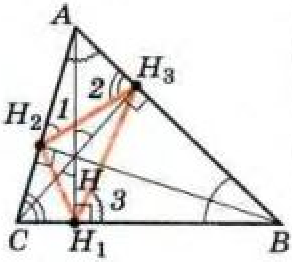
Про деякі види трикутників

Ви вмієте розрізняти трикутники за співвідношеннями між довжинами їхніх сторін (правильні, рівнобедрені, різносторонні), за значеннями кутів (гострокутні, прямокутні, тупокутні.) Проте геометри виділяють не тільки такі види трикутників.

ОРТОЦЕНТРИЧНИЙ ТРИКУТНИК

Ортоцентричним називається трикутник, вершинами якого є основи висот заданого трикутника.

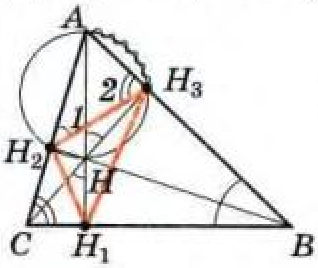
$\triangle H_1H_2H_3$ – ***ортоцентричний*** (для $\triangle ABC$)



$\angle 1 = \angle B$
$\angle 2 = \angle C$
$\angle 3 = \angle A$

Опорна задача

Відрізки AH_1, BH_2 і CH_3 – висоти трикутника ABC. Доведіть, що $\angle AH_2H_3 = \angle B$; $\angle AH_3H_2 = \angle C$ (мал. 6.5).



Мал. 6.5

Дано: $AH_1 \perp CB$; $BH_2 \perp AC$; $CH_3 \perp AB$.
Довести: $\angle 1 = \angle B$; $\angle 2 = \angle C$.

1) $\angle CHH_1 = \angle B$ як кути, що утворені взаємно перпендикулярними сторонами;

2) $\angle AH_2H = 90^\circ = \angle AH_3H$, тоді чотирикутник AH_2HH_3 – вписаний;

3) $\smile AH_3$: $\angle 1 = \angle AHH_3 = \angle CHH_1 = \angle B$.

Аналогічно можна довести, що $\angle 2 = \angle C$.

Доведіть самостійно такі властивості ортоцентричного трикутника.

1. Висоти гострокутного трикутника є бісектрисами кутів його ортоцентричного трикутника.

2. Кути ортоцентричного трикутника, побудованого у трикутнику ABC, дорівнюють $180^\circ - 2\angle A$, $180^\circ - 2\angle B$, $180^\circ - 2\angle C$.

3. У гострокутному трикутнику точка перетину висот є центром кола, вписаного в трикутник, вершинами якого є основи висот даного трикутника.

А що буде у випадку тупокутного трикутника?

4. Вершини A, B і C трикутника ABC є ортоцентрами трикутників HBC, HAC і HAB відповідно.

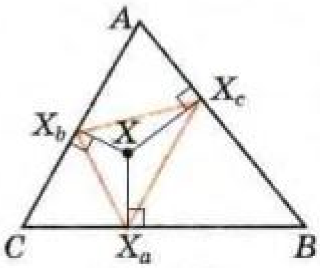
5. Кола, описані навколо чотирьох трикутників з вершинами в точках A, B, C, H, мають рівні радіуси.

Чи можна, спираючись на ці властивості, відновити трикутник за даними трьома точками $H_1H_2H_3$ – основами його висот?

У моральному плані математика навчає нас суворо ставитися до того, що стверджується як істина, що висувається як аргумент чи висловлюється як доведення. Математика вимагає ясності понять та тверджень і не терпить ні туману, ні бездоказових заяв.

О. Д. Александров

ПЕДАЛЬНИЙ ТРИКУТНИК

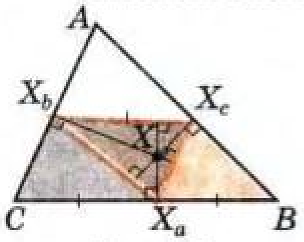


Мал. 6.6

Нехай довільна точка X знаходиться всередині нетупокутного трикутника ABC, а точки X_a, X_b, X_c – проекції точки X на сторони a, b, c цього трикутника відповідно (мал. 6.6). Трикутник з вершинами в точках X_a, X_b, X_c називається *педальним*.

Розглянемо кілька властивостей педальних трикутників.

Теорема 1. **Якщо точка X збігається з ортоцентром трикутника $X_aX_bX_c$, то вона є центром кола, описаного навколо трикутника ABC.**



Мал. 6.7

Доведення

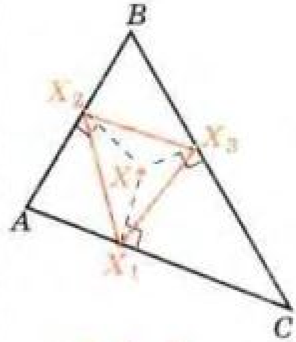
Проведемо відрізки XX_a, XX_b, XX_c до перетину зі сторонами трикутника ABC (мал. 6.7).

1) X – ортоцентр трикутника $X_aX_bX_c$; X_a, X_b, X_c – проекції точки X на сторони трикутника ABC. Тоді $X_aX_b \parallel AB$, $X_bX_c \parallel BC$, $X_aX_c \parallel AC$ і чотирикутники $AX_bX_aX_c$, $BX_aX_bX_c$, $CX_bX_cX_a$ – паралелограми.

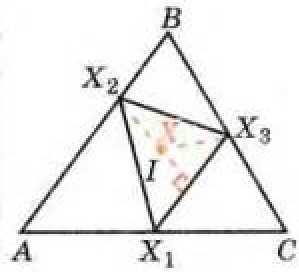
2) $BX_aX_bX_c$, $CX_bX_cX_a$ – паралелограми, тоді $CX_a = X_bX_c = X_aB$ і XX_a – серединний перпендикуляр до відрізка CB. Аналогічно: XX_c і XX_b – серединні перпендикуляри до AB і AC.

3) X – точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника ABC, тоді X – центр кола, описаного навколо цього трикутника.

Щ. в. д.



$\Delta X_1X_2X_3$ – педальний



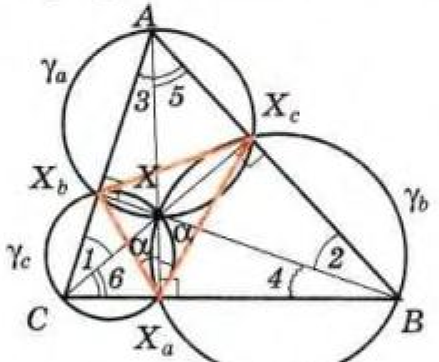
$$\frac{X \equiv H_{X_1X_2X_3}}{\Downarrow} \\ X \equiv O_{ABC}$$

Остроградський Михайло Васильович (1801–1862) народився в с. Пашенній (тепер – Пашенівка) на Полтавщині в сім'ї дрібного поміщика. У 1817 р. вступив на фізико-математичний факультет Харківського університету. Перший рік вчився погано і залишив університет, та через рік повернувся і в 1820 р. закінчив навчання, блискуче склавши всі іспити.

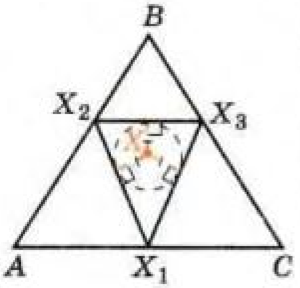
Проте через реакційних викладачів, які звинувачували Михайла Васильовича в антирелігійних настроях, він не одержав документа про закінчення університету. У 1822 р. М. В. Остроградський виїздить до Парижа, де вдосконалює свою математичну освіту.

Повернувшись у 1828 р. на батьківщину, він оселився в Петербурзі. М. В. Остроградський залишив велику наукову спадщину в найрізноманітніших галузях математики. Він особисто був знайомий з Лапласом, Фур'є, Коші та іншими видатними математиками того часу. Характеризуючи науковий доробок М. В. Остроградського, М. Є. Жуковський говорив: «У творах Остроградського нас приваблює загальність аналізу, головна думка – така широка, як простір його рідних полів».

Теорема 2. Якщо точка X збігається з центром кола, вписаного в трикутник $X_aX_bX_c$, то вона є ортоцентром трикутника ABC.



Мал. 6.8



$$\frac{X \equiv I_{X_1X_2X_3}}{\Downarrow \atop X \equiv H_{ABC}}$$

Нехай X – інцентр трикутника $X_aX_bX_c$. Треба довести, що точки A, X, X_a лежать на одній прямій; точки B, X, X_b лежать на одній прямій і точки C, X, X_c лежать на одній прямій.

Доведення

1) Опишемо навколо чотирикутників XX_aBX_c, XX_aCX_b, X_cXX_bA кола γ_b, γ_c, γ_a відповідно (мал. 6.8). $\angle X_bX_aX = \angle XX_aX_c$; позначимо їх α.

2) У колах γ_c і γ_b: $\angle 1 = \alpha$ (спираються на XX_b) і $\angle 2 = \alpha$ (спираються на XX_c), тобто $\angle 1 = \angle 2$. Аналогічно маємо рівність інших кутів, які позначено на малюнку однаково.

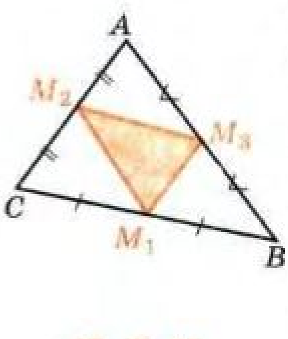
3) У трикутнику ABC: $2\angle 1 + 2\angle 3 + 2\angle 6 = 180^\circ$. Тоді маємо, що $\angle 1 + \angle 6 + \angle 3 = 180^\circ : 2 = 90^\circ$.

4) $\angle AXX_b + \angle X_bXX_a = (90^\circ - \angle 3) + (90^\circ - \angle 1) + (90^\circ - \angle 6) = 3 \cdot 90^\circ - (\angle 3 + \angle 1 + \angle 6) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$, точки A, X, X_a лежать на одній прямій. Аналогічно: точки B, X, X_b лежать на одній прямій і точки C, X, X_c лежать на одній прямій. Щ. в. д.

Доведіть самостійно:

1. Якщо точка X збігається з центром кола, описаного навколо трикутника $X_aX_bX_c$, то вона є центром кола, вписаного в трикутник ABC.
2. Якщо точка X збігається з центроїдом трикутника $X_aX_bX_c$, то виконується співвідношення $XX_a : XX_b : XX_c = a : b : c$.
3. Якщо в прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) точка X збігається з центроїдом трикутника $X_aX_bX_c$, то точки C, X, X_c лежать на одній прямій.

СЕРЕДИННИЙ ТРИКУТНИК



$\triangle M_1M_2M_3$ – *серединний*

Серединним трикутником даного трикутника називають трикутник, вершинами якого є середини сторін заданого трикутника.

Доведіть самостійно такі властивості серединного трикутника.

1. Серединний трикутник подібний до заданого трикутника з коефіцієнтом подібності 2.

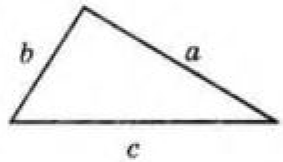
2. Серединний і заданий трикутники мають спільний центроїд (точку перетину медіан).

3. Якщо трикутник ABC має за серединний трикутник $M_1M_2M_3$, то $AH = 2H_0M_1$, де H і H_0 – ортоцентри трикутників ABC і $M_1M_2M_3$ відповідно, а M_1 – середина сторони CB.

РІЗНИЦЕВИЙ ТРИКУТНИК

Трикутник, довжини сторін якого складають арифметичну прогресію, називається *різницевим*.

Різницевий трикутник



$a - b = c - a$

Зауваження для тих, хто ще не вивчав прогресій у курсі алгебри. Арифметичною прогресією називається послідовність (пронумеровані числа), в якій кожний наступний член послідовності відрізняється від попереднього на одне й те саме число (різницю прогресії).

Якщо в такому трикутнику довжини сторін задовольняють нерівності $b < a < c$, то $a - b = c - a$ – різниця арифметичної прогресії $\{a, b, c\}$, тобто $2a = c + b$.

Доведіть самостійно кілька властивостей різницевого трикутника.

1. У різницевому трикутнику ABC ($b < a < c$):

а) півпериметр $p = 3a : 2$;

б) радіус вписаного кола $r = \frac{h_a}{3}$.

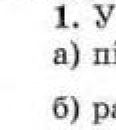
(Порада. Скористайтеся тим, що $r = \frac{S}{p}$, де S – площа заданого трикутника ABC.)

2. Щоб трикутник ABC був різницевим, необхідно і достатньо, щоб $AI = IW_a$, де I – інцентр трикутника, а W_a – точка перетину бісектриси кута A з описаним навколо цього трикутника колом.

3. Щоб трикутник ABC був різницевим, необхідно і достатньо, щоб $W_aL_a = L_aI$, де I – інцентр трикутника, L_a – основа бісектриси кута A, W_a – точка перетину бісектриси кута A з описаним навколо цього трикутника колом.

Найкращий спосіб вивчити що-небудь – це відкрити самому.

Д. Пойя

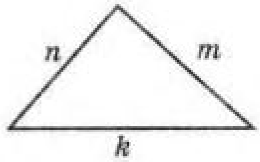


Вороний Георгій Феодосійович (1868–1908) належить до когорти найвідоміших українських математиків минулого. За своє коротке життя він устиг надрукувати лише шість великих праць та шість невеликих заміток. Але всі його праці, багаті новими і глибокими ідеями, мали великий вплив на розвиток математичної науки в галузі теорії чисел.

Родом Г. Вороний із села Журавка, що на Полтавщині. Закінчив Петербурзький університет, працював професором Варшавського університету і Варшавського політехнічного інституту. За заповітом, його було поховано в рідному селі.

ЦІЛОЧИСЛОВІ ТРИКУТНИКИ

Цілочисловий трикутник



$\{n, m, k\} \in N$

Цілочисловим називається трикутник, довжини сторін якого виражаються натуральними числами. Таких трикутників безліч. Усі трійки натуральних чисел, які задовольняють умову нерівності для сторін трикутника, можуть бути довжинами сторін цілочислового трикутника.

Якщо цілочисловий трикутник є прямокутним, то його називають *піфагоровим трикутником*. Наприклад, піфагоровими є єгипетські трикутники, довжини сторін яких пропорційні 3, 4 і 5 одиницям виміру.

Необхідною і достатньою умовою того, щоб цілочисловий трикутник із довжинами сторін x, y, z був піфагоровим, є виконання співвідношення

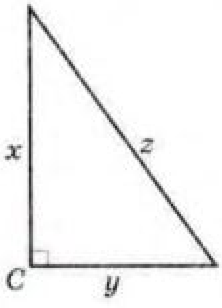
$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Це випливає безпосередньо з теореми Піфагора і оберненої до неї.

Зрозуміло, якщо трійка чисел $\{x, y, z\}$ задовольняє вказане рівняння, то задовольняє його і кожна трійка $\{tx, ty, tz\}$, де t – довільне натуральне число.

Піфагорів трикутник називається *основним*, якщо довжини його сторін x, y, z – числа взаємно прості (тобто не мають спільних множників).

Піфагоровий трикутник



$\{x, y, z\} \in N$

$\angle C = 90°$

Основний піфагоровий трикутник: x, y, z – взаємно прості

Піфагор знайшов, що трійки чисел $\{2n + 1; 2n^2 + 2n; 2n^2 + 2n + 1\}$, $n \in N$, задовольняють рівняння $(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$, тобто визначають піфагоровий трикутник.

Платон знайшов іншу тотожність, за допомогою якої також можна знайти числа, які задовольняють умову існування піфагорового трикутника:

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2.$$

Зауважимо, що останнє співвідношення не містить «єгипетської» трійки $\{3, 4, 5\}$.

Обидві тотожності не дають усіх розв'язків рівняння $x^2 + y^2 = z^2$.

Пізніше було виявлено тотожність

$$(2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2,$$

яка дає можливість знайти усі розв'язки такого рівняння.

Користуючись наведеними тотожностями, **знайдіть самостійно** кілька трійок чисел, які визначають довжини сторін основних піфагорових трикутників. Обрахуйте їх площу, діаметри вписаного і описаного кіл та складіть відповідну таблицю.

Розглянемо *властивості основного піфагорового трикутника.*

1. Довжина одного з катетів завжди є непарним числом, а другого – парним. Довжина гіпотенузи – завжди непарне число.

Справедливість цього твердження випливає безпосередньо з того, що довжини сторін трикутника – взаємно прості числа та умови існування такого трикутника $z^2 = x^2 + y^2$, звідси: $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$; $y^2 = z^2 - x^2$.

Закінчіть доведення самостійно – розгляньте випадки, коли x є числом парним і непарним.

Наступні властивості доведіть самостійно.

2. Один з катетів ділиться на 4.

3. Один з катетів ділиться на 3. (Порада. Припустіть протилежне, що $x = 3k + 1$ або $x = 3m - 1$.)

4. Одне з чисел $\{x, y, z\}$ ділиться на 5.

5. Добуток довжин катетів ділиться на 12.

6. Добуток довжин усіх сторін ділиться на 60.

7. Діаметр описаного кола – число натуральне.

8. Радіус вписаного кола – число натуральне.

У народів, що володіють геометрією, навіть найпростіші речі мають якусь особливу красу.

Ф. Прокопович

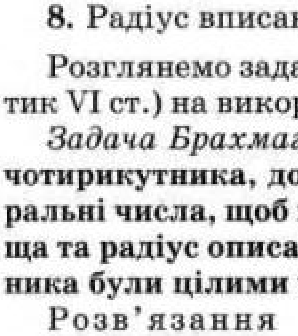
Розглянемо задачу Брахмагупти (індійський математик VI ст.) на використання піфагорових трикутників.

Задача Брахмагупти. **Наведіть приклад вписаного чотирикутника, довжинами сторін якого є різні натуральні числа, щоб при цьому довжини діагоналей, площа та радіус описаного кола навколо цього чотирикутника були цілими числами.**

Розв'язання

Виберемо два довільні піфагорові трикутники, наприклад, зі сторонами $3n$, $4n$, $5n$. Позначимо катети цих трикутників як a_1, b_1 і a_2, b_2 відповідно, а гіпотенузи – c_1 і c_2. Відкладемо відрізок l, довжина якого дорівнює одиниці виміру. Побудуємо як четверте пропорційне (див. с. 113) відрізки:

$$x = a_1a_2 : l,\ y = b_1b_2 : l,\ z = b_1a_2 : l,\ t = a_1b_2 : l.$$



Мал. 6.9

На двох перпендикулярних прямих, від точки їх перетину K відкладемо відрізки x, y, z, t (мал. 6.9).

Довжини діагоналей AB і CD чотирикутника $ACBD$ є цілими числами (за побудовою) і площа цього чотирикутника виражається цілим числом ($AB \perp CD$). Маємо, що $AK \cdot KB = CK \cdot KD$ і навколо чотирикутника $ACBD$ можна описати коло (див. задачу № 3 на с. 151).

Тоді, за лемою Архімеда про перпендикулярні хорди (с. 151), виконується співвідношення:

$$4R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (a_1a_2)^2 + (b_1b_2)^2 + (b_1a_2)^2 + (a_1b_2)^2 =$$
$$= a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2) = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2).$$

Звідси: $4R^2 = c_1^2c_2^2$ і $R = c_1c_2 : 2$.

Якщо c_1 і c_2 – непарні числа, то збільшимо чотирикутник у два рази. Тоді довжина радіуса R буде цілим числом. Задачу розв'язано.

ВЛАСТИВОСТІ ОСНОВНОГО ПІФАГОРОВОГО ТРИКУТНИКА:
(x, y – катети, z – гіпотенуза):

1) $x \vdots 2$ або $y \vdots 2$;
2) $x \vdots 4$ або $y \vdots 4$;
3) $x \vdots 3$ або $y \vdots 3$;
4) $x \vdots 5$ або $y \vdots 5$ або $z \vdots 5$;
5) $x \cdot y \vdots 12$;
6) $x \cdot y \cdot z \vdots 60$;
7) $2R \in n$;
8) $r \in n$.

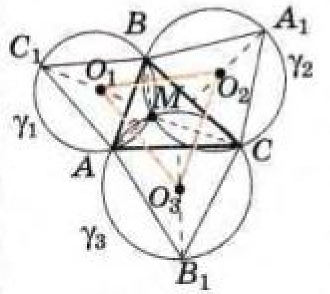
ТРИКУТНИКИ НАПОЛЕОНА І КОЛА ТОРРІЧЕЛЛІ

Відомо, що *Наполеон Бонапарт* захоплювався математикою, найбільше – геометрією. Розповідають, що якось Наполеон, який тоді ще не був правителем Франції, сперечався з відомими математиками Лагранжем і Лапласом. Під час однієї з дискусій Лаплас перервав Наполеона словами: «Менш за все ми бажаємо, щоб ви, генерал, вчили нас геометрії!» У подальшому Лаплас став головним військовим міністром Наполеона.

Якщо на сторонах трикутника побудувати правильні трикутники, то отримаємо конфігурацію з чотирьох трикутників, яку називають *трикутниками Наполеона*.

Кола, описані навколо побудованих правильних трикутників, називають *колами Торрічеллі*.

Вважають, що саме Наполеон Бонапарт (французький імператор) вивчав цю конфігурацію і першим сформулював та довів твердження, яке носить назву *теорема Наполеона*: **«Якщо на сторонах довільного трикутника зовні нього побудовано рівносторонні трикутники, то їхні центри є вершинами рівностороннього трикутника»**.



Мал. 6.10

Доведення

Нехай на сторонах трикутника ABC побудовано рівносторонні трикутники C_1AB, CBA_1 і B_1AC (мал. 6.10); кола γ_1, γ_2 і γ_3 описані навколо цих трикутників (відповідно). Доведемо, що кола γ_1, γ_2 і γ_3 перетинаються в одній точці. (Ця точка називається *точкою Торрічеллі*.) Позначимо точку перетину кіл, описаних навколо трикутників AB_1C і CA_1B, як M. Тоді $\angle AMC = 180° - 60° = \angle BMC$. Звідси маємо: $\angle AMB = 360° - 2 \cdot 120° = 120°$ і точка M лежить на колі, описаному навколо трикутника ABC_1.

Прямі O_1O_3 і O_1O_2 перпендикулярні до спільних хорд AM і BM кіл γ_1 і γ_3 та γ_1 і γ_2 відповідно.

Тоді $\angle O_1 + \angle AMB = 180°$, і $\angle O_1 = 180° - \angle AMB = 60°$. Аналогічно: $\angle O_2 = \angle O_3 = 60°$, і трикутник $O_1O_2O_3$ – правильний. Теорему Наполеона доведено.

Хоч Наполеон і займався геометрією (зокрема відомий його спосіб поділу кола на 4 рівні частини за допомогою лише одного циркуля), чимало спеціалістів не вірять у те, що він міг довести теорему, названу його ім'ям.

Ми будували правильні трикутники зовні заданого трикутника на його сторонах. Їх ще називають *зовнішніми трикутниками Наполеона* для заданого трикутника. За аналогією, якщо правильні трикутники будують на сторонах трикутника в його середину, то їх називають *внутрішніми трикутниками Наполеона* для заданого трикутника. Доведіть самостійно, що трикутник з вершинами у центрах внутрішніх трикутників Наполеона також є правильним.

Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

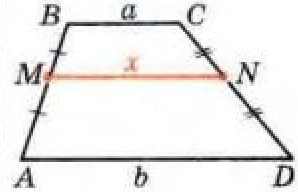
1. *Бевз Г. П.* Геометрія трикутника. – К.: Генеза, 2005. – 120 с.
2. *Зеттель С. И.* Новая геометрия треугольника. – М.: Просвещение, 1962.
3. *Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978. – 224 с.
4. *Никулин А. В., Кукуш А. Г., Татаренко Ю. С.* Геометрия на плоскости (Планиметрия). – Минск: ООО «Попурри», 1996. – 592 с.
5. *Кушнір І. А.* Повернення втраченої геометрії. – К.: Факт, 2000. – 280 с.
6. *Кушнір І. А.* Трикутник і тетраедр у задачах. – К.: Рад. шк., 1991. – 208 с.
7. *Кушнір І. А.* Методи розв'язання задач з геометрії. – К.: Абрис, 1994. – 464 с.

Паралельні відрізки в трапеції. Співвідношення між середніми величинами

Розглянемо трапецію $ABCD$ з основами $AD = b$ і $BC = a$. Ми знаємо, що ДОВЖИНА СЕРЕДНЬОЇ ЛІНІЇ трапеції дорівнює $(a + b)/2$, тобто є *середнім арифметичним* довжин її основ.

Вона ділить бічні сторони трапеції навпіл.

$x \parallel a$



З опорних задач трапеції (§ 25) маємо, що:

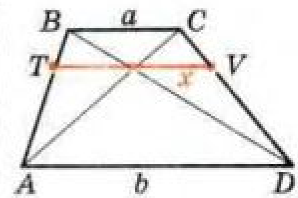
– відрізок, паралельний основам трапеції a і b, кінці якого лежать на бічних сторонах цієї трапеції і ділять ці сторони у відношенні $m : n$ (рахуючи від основи a), дорівнює $\dfrac{an+bm}{m+n}$;

$x = \dfrac{a+b}{2}$

середнє арифметичне

– відрізок, паралельний основам трапеції a і b, кінці якого належать бічним сторонам трапеції і який ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ ПЕРЕТИНУ ДІАГОНАЛЕЙ трапеції, дорівнює $\dfrac{2ab}{a+b}$ і ділить бічні сторони у відношенні $a : b$ (рахуючи від основи a).

$x \parallel a$



Останній вираз можна записати у вигляді $x = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

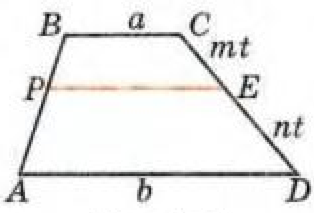
Таке співвідношення між числами a і b називають *середнім гармонійним чисел a і b*.

$x = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

середнє гармонійне

Як відомо (§ 25), цей відрізок ділить бічні сторони трапеції пропорційно прилеглим основам.

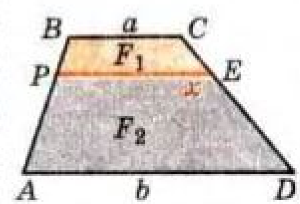
Розглянемо тепер відрізок PE, паралельний основам трапеції a і b, який поділяє її на ДВІ ПОДІБНІ ТРАПЕЦІЇ $PBCE$ і $APED$ (усі кути – попарно рівні, а відповідні сторони – пропорційні) (мал. 6.11).



Мал. 6.11

Тоді $\dfrac{AD}{PE}=\dfrac{PE}{BC}$, $PE^2 = ab$ і $PE = \sqrt{ab}$ (такий вираз називають *середнім геометричним чисел a і b*.)

$x \parallel a$ і $F_1 \sim F_2$



Знайдемо, у якому відношенні цей відрізок ділить бічні сторони трапеції. Маємо:

$$\frac{an+bm}{m+n}=\sqrt{ab},\ \frac{a+b\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+1}=\sqrt{ab},\ a+b\frac{m}{n}=\sqrt{ab}\left(\frac{m}{n}+1\right),$$

$$\frac{m}{n}(b-\sqrt{ab})=\sqrt{ab}-a,\ \frac{m}{n}=\frac{\sqrt{ab}-a}{b-\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

$F_1 \sim F_2$

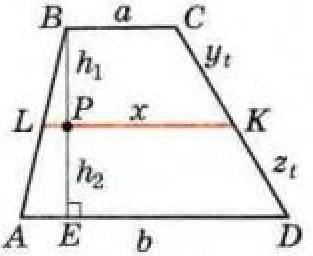
$x = \sqrt{ab}$

середнє геометричне

Таким чином, відрізок PE ділить бічні сторони трапеції у відношенні $\dfrac{m}{n}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}<\dfrac{a}{b}<1.$

Тоді цей відрізок міститься вище від середньої лінії, але нижче від точки перетину діагоналей трапеції.

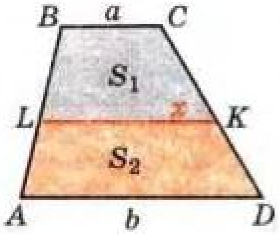
Знайдемо довжину відрізка LK, паралельного основам a і b трапеції з кінцями на бічних сторонах трапеції, який ДІЛИТЬ ПЛОЩУ ТРАПЕЦІЇ НАВПІЛ (мал. 6.12).



Мал. 6.12

Проведемо в трапеції висоту BE, LK ділить її на відрізки BP і PE, які є висотами h_1 і h_2 трапецій $LBCK$ і $ALKD$ відповідно. Позначимо шуканий відрізок LK через x, площу трапецій $ABCD$, $LBCK$ і $ALKD$ – S, S_1 і S_2 відповідно. Тоді:

$x \parallel a$ і $S_1 = S_2$



$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

середнє квадратичне

$$S_1 = \frac{1}{2}(x + a)h_1,\ S_2 = \frac{1}{2}(x + b)h_2,\ S = \frac{1}{2}(a + b)(h_1 + h_2).$$

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x + a)h_1 = (x + b)h_2, \\ 2(x + a)h_1 = (a + b)(h_1 + h_2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_2 = \dfrac{(x+a)h_1}{x+b}, \\ 2(x+a)h_1 = \dfrac{(a+b)h_1(2x+a+b)}{x+b}. \end{cases}$$

Звідси отримаємо:

$$2(x + a)(x + b) = (a + b)(2x + a + b),$$
$$2x^2 = a^2 + b^2,$$
$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Останній вираз називають *середнім квадратичним чисел a і b*.

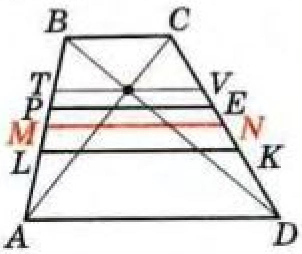
Неважко знайти відношення $\dfrac{CK}{KD}$, в якому відрізок LK ділить бічні сторони трапеції, і переконатися, що це відношення буде більшим за 1. (Зробіть це **самостійно**.) Тоді відрізок LK буде міститись у трапеції нижче від середньої лінії.

Давно підмічено, що геометрія – це чудова логіка. А таки й справді: коли визначення ясні, коли постулати незаперечні, коли властивості фігур випливають з чіткого спостереження за допомогою добре пов'язаного ланцюга послідовностей, а об'єкти весь час перебувають у полі зору, – то таким шляхом набувається звичка міркувати точно, послідовно і методично; ця звичка посилює й загострює розум і стає в нагоді під час пошуків істини в інших галузях.

Дж. Берклі

Наприкінці XIX – на початку XX ст. *формальна логіка* спиралася на природну мову, тому її називали ще *традиційною логікою*. Пізніше в логіку були введені спеціальні позначення – *символи*, і її назвали *математичною*, або *символічною* (*сучасною*) *логікою*.

Ми маємо чотири відрізки, які проведено в трапеції паралельно основам і довжини яких дорівнюють середньому арифметичному її основ (MN), середньому гармонійному її основ (TV), середньому геометричному її основ (PE) і середньому квадратичному її основ (LK). При цьому ми з'ясували, що $TV < PE < MN < LK$ (мал. 6.13).



Мал. 6.13

У випадку, коли $a = b$, усі відрізки будуть рівні між собою.

Ми довели геометрично для додатних чисел a і b такі нерівності:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$

$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

Тобто:

• *середнє квадратичне двох додатних чисел більше або дорівнює їх середньому арифметичному;*

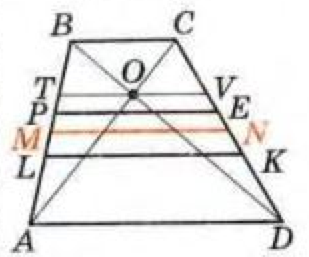
• *середнє арифметичне двох додатних чисел більше або дорівнює їх середньому геометричному (середньому пропорційному);*

• *середнє геометричне двох додатних чисел більше або дорівнює їх середньому гармонійному.*

Причому в кожній з цих нерівностей маємо рівність тільки у випадку, коли $a = b$.

Відрізок, паралельний основам трапеції з кінцями на бічних сторонах	Довжина відповідного відрізка залежно від довжини основ трапеції a і b	Назва відповідної середньої
Середня лінія трапеції	$\frac{a+b}{2}$	середнє арифметичне
Відрізок, який проходить через точку перетину діагоналей	$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$	середнє гармонійне
Відрізок, який ділить трапецію на дві подібні трапеції	$\sqrt{ab}$	середнє геометричне
Відрізок, який ділить площу трапеції на дві рівновеликі частини	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	середнє квадратичне
$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$		

У довільній трапеції:



$O \in TV$

$BCEP \backsim PEDA$;

MN – середня лінія;

$S_{LBCK} = S_{ALKD}$

Середнє квадратичне

$\geqslant$

середнє арифметичне

$\geqslant$

середнє геометричне

$\geqslant$

середнє гармонійне

Середнім арифметичним A_n кількох чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n називається частка від ділення суми цих чисел на їх кількість:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Середнє гармонійне C_n додатних чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n обчислюється за такою формулою:

$$C_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Середнім геометричним G_n додатних чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n називається корінь n-го степеня з добутку цих чисел:

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Середнє квадратичне S_n – це корінь квадратний із середнього арифметичного квадратів даних чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n:

$$S_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Вказані середні величини пов'язані вже відомими нам співвідношеннями:

$$C_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant S_n.$$

Причому, кожна нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$.

Зауваження. Поняття розглянутих нами середніх величин відомі ще зі Стародавньої Греції.

Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

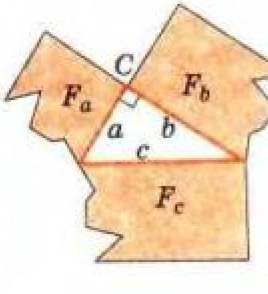
1. *Никулин А. В., Кукуш А. Г., Татаренко Ю. С.* Геометрия на плоскости (Планиметрия). – Минск.: ООО «Попурри», 1996. – 592 с.
2. *Сивашинский И. Х.* Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

У Стародавній Греції говорили, що чотири числа a, b, c, e утворюють *арифметичну пропорцію*, якщо $a - b = c - e$. Пропорція називалася неперервною, якщо $b = c$. У цьому випадку число $b = (a + e) : 2$ називали *середнім арифметичним* чисел a і e. Говорили, що чотири числа a, b, c, e утворюють *геометричну пропорцію*, якщо $a : b = c : e$. Пропорція називалася неперервною, якщо $b = c$. У цьому випадку легко дістати $b = \sqrt{ae}$. Числу b присвоювали назву *середнього геометричного* чисел a і e. Нарешті, говорили, що чотири числа a, b, c, e утворюють гармонійну пропорцію, якщо $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{e}$.

У випадку $b = c$ (*неперервної пропорції*) число $b = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{e}}$ називалося *середнім гармонійним* чисел a і e. Відкриття гармонійної пропорції приписують піфагорійцям.

Визначні теореми давнини

Теорема Евкліда



$\angle C = 90^\circ$

$F_a \backsim F_b \backsim F_c$

$\Downarrow$

$S_a + S_b = S_c$

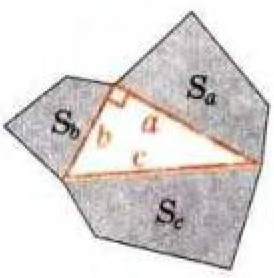
Ви вже знаєте видатного вченого античного світу **Евкліда** (IV ст. до н. е.), автора знаменитих «Начал» – книги, яка на тисячоліття стала зразком викладу наукових теорій і підручником, за яким вивчало геометрію багато поколінь.

Розглянемо одну з теорем книги 6 «Начал» Евкліда, яку можна вважати узагальненням теореми Піфагора. Грецький філософ, коментатор Евкліда, Прокл (410–485) писав, що цій формі теореми Піфагора надавали перевагу перед іншими, як такій, що правильно виражає саме суть цієї теореми.

Т Теорема Евкліда. **Якщо на катетах і гіпотенузі прямокутного трикутника побудувати будь-які подібні фігури *A*, *B* і *C*, у яких катети й гіпотенуза даного трикутника є відповідними сторонами, то $S_a + S_b = S_c$, де S_a, S_b і S_c – площі побудованих фігур** (мал. 6.14).

Подібні багатокутники – такі, що всі їхні сторони пропорційні, а відповідні кути рівні.

Усі їхні *лінійні елементи* мають коефіцієнт пропорційності k, а *площі* відносяться як k^2.



Мал. 6.14

Доведення

За умовою: $\frac{S_a}{S_c} = \frac{a^2}{c^2}$, $\frac{S_b}{S_c} = \frac{b^2}{c^2}$.

Звідси: $S_a \cdot c^2 = S_c \cdot a^2$ і $S_b \cdot c^2 = S_c \cdot b^2$. Додавши почленно останні рівності, дістанемо $c^2(S_a + S_b) = (a^2 + b^2)S_c$.

Але $c^2 = a^2 + b^2$, тому $S_a + S_b = S_c$. Теорему доведено.

Архімед із Сиракуз (бл. 287–212 рр. до н. е.) належить до тих геніїв, творчість яких на багато віків визначила долю науки. Він здійснив видатні відкриття в механіці, оптиці й технічні винаходи, але справою життя Архімеда була математика. Архімед, як і інші давньогрецькі математики, робив геометричні креслення на дошці, посипаній піском, або в ящику з піском. Він відкрив багато залежностей у геометричних фігурах. (У розділі I ми вже розглядали деякі математичні твердження, відкриті Архімедом.)

Багато творів Архімеда втрачено, проте значна кількість збереглася протягом двадцяти двох сторіч! Навіть для сучасних геометрів є цікавою *«Книга лем»* Архімеда.

У більшості трактатів Архімеда йдеться про відкриття, але не наводяться їхні доведення, аби «кожен математик мав задоволення самостійно отримати цей результат». Тому доведення лем Архімеда, які ми будемо розглядати далі (і розглядали у розділі I), були здійснені дещо пізніше арабами, а найчастіше нашими сучасниками.

Шлях, яким доводив сам Архімед відкриті ним твердження, у більшості випадків залишається невідомим, аби, за словами Архімеда, *«кожен математик мав задоволення самостійно отримати цей результат»*.

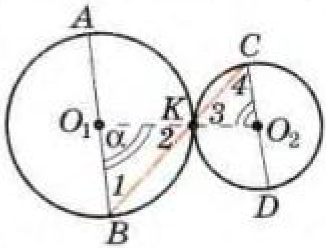
Розглянемо задачу, якою розпочинається «Книга лем» Архімеда.

Лемою математики називають невелику допоміжну теорему, яка зазвичай передує доведенню основної теореми.

Лема про паралельні діаметри. **Якщо два кола дотикаються одне до одного в точці K, а AB і CD – їхні паралельні діаметри, то точки C, K і B лежать на одній прямій** (мал. 6.15).

Доведення

Як відомо, центри кіл O_1 і O_2 та їх точка дотику K лежать на одній прямій (на лінії центрів). Тоді пряма O_1O_2 є січною паралельних прямих AB і CD. Звідси: $\angle O_2O_1B = \angle O_1O_2C$, позначимо його як α.



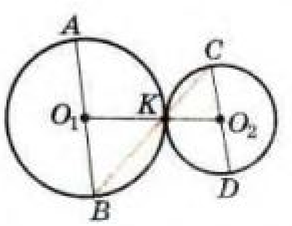
Мал. 6.15

Трикутники BO_1K і KO_2C рівнобедрені. Тоді маємо, що: $\angle 1 = (180^\circ - \alpha) : 2 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.

Маємо, що по різні боки від прямої O_1O_2 з вершиною в точці K відклали два рівні кути O_1KB і CKO_2, тоді точки B, K і C належать одній прямій.

Твердження доведено.

Лема Архімеда про паралельні діаметри і обернена до неї



$$\frac{AB = 2R_1;\, CD = 2R_2 \quad AB \parallel CD}{\Downarrow\Uparrow \quad K \in CB}$$

Аналогічно можна провести доведення у випадку внутрішнього дотику двох кіл. Зробіть це самостійно. Крім того, доведіть самостійно твердження, обернене до цієї леми Архімеда, тобто лему, *обернену до леми Архімеда про паралельні діаметри*: «**Якщо через точку дотику двох кіл провести пряму, яка перетинає ці кола в точках B і C відповідно, то радіуси з кінцями у цих точках паралельні між собою**».

Якщо знати лему Архімеда про паралельні діаметри та обернену до неї, це стане в нагоді при розв'язуванні, наприклад, таких задач (переконайтеся в цьому самостійно).

1. Два кола дотикаються одне до одного зовнішньо у точці K. Через точку K проведено пряму, яка перетинає ці кола в точках A і B. Доведіть, що прямі, дотичні до кіл у точках A і B, – паралельні.

2. Дано коло і пряму поза ним. Побудуйте коло, дотичне до заданого кола і заданої прямої у даній на ній точці. (Не забудьте розглянути випадок внутрішнього дотику кіл.)

3. Через дану точку A проведіть коло, дотичне до заданого кола у даній на ньому точці.

Аналіз – розумовий процес розчленовування цілого на елементи, частини.
Синтез – розумовий процес поєднання різних елементів, частин до цілого.

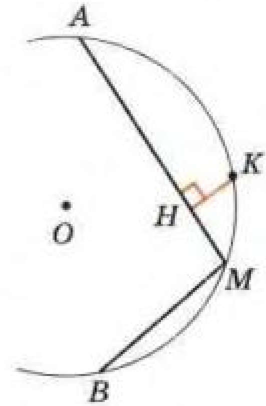
Д. Пойя: «*Метод аналізу* – метод просування від початку до кінця; *метод синтезу* – метод просування від кінця до початку».

Дидактична конструкція – задачі всередині задачі, тобто ланцюжок задач, що йдуть згідно зі ступенем спадання складності, кожна з яких містить у собі одну чи кілька ідей, які потрібні для розв'язування початкової, досить складної задачі.

Доведемо теорему Архімеда, яку арабський математик **Абу Райхан Беруні** (973–1043) вважав дуже важливою, часто використовував і знайшов кілька її доведень.

Теорема Архімеда. **Якщо з середини дуги, описаної навколо ламаної з двох ланок, опустити перпендикуляр на більшу ланку, він розіб'є всю ламану на дві частини однакової довжини.**

Теорема Архімеда



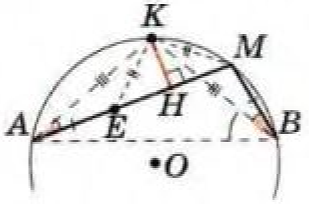
$\smile AK = \smile KB$

$\underline{KH \perp AM}$

$\Downarrow$

$AH = HM + BM$

Нехай маємо дві хорди AM і MB ($AM > MB$). З точки K – середини дуги AMB проведемо $KH \perp AM$ (мал. 6.16). Треба довести, що $AH = HM + MB$.



Мал. 6.16

Доведення

1) $\smile AK = \smile KB$, тоді хорди KA і KB – рівні.

2) Вписані кути KAM і KBM спираються на одну дугу KM.

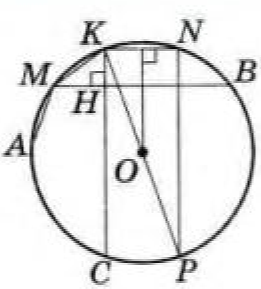
3) Відкладемо на AM відрізок $AE = MB$ (див. мал. 6.16). Трикутники KAE і KBM рівні за двома сторонами і кутом між ними. Тоді $KE = KM$.

4) $\triangle EKM$ – рівнобедрений, $KH \perp EM$. Тоді $EH = HM$.

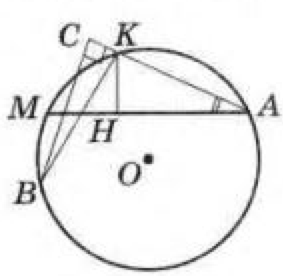
5) $AH = AE + EH = HM + MB$.

Теорему доведено.

Доведіть самостійно теорему Архімеда способами Беруні, користуючись малюнками 6.17 і 6.18.

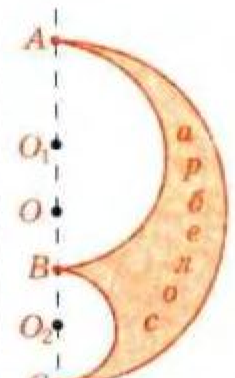


Мал. 6.17



Мал. 6.18

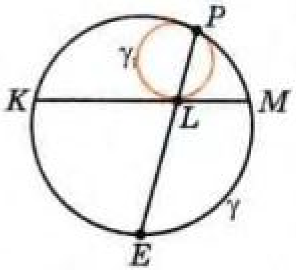
У своїх заняттях геометрією Архімед багато уваги приділяв вивченню властивостей фігури, яка носить назву *арбелос*, або *кушнірський ніж*. Цю назву фігура отримала за те, що схожа на ніж, який використовували кушніри для обробки шкір.



Якщо взяти на прямій три послідовні точки A, B, C і побудувати три півкола з діаметрами AB, BC і AC, то частина площини, яку обмежують ці півкола, і є *арбелосом* (мал. на полі).

З великої кількості властивостей цієї фігури ми розглянемо тільки одну.

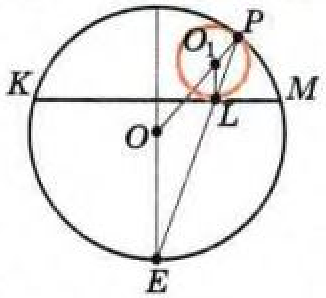
Проведемо в арбелосі через точку B пряму, перпендикулярну до AC, і позначимо точку її перетину з більшим півколом як D. Тоді два кола, вписані в утворені криволінійні трикутники, мають однакові радіуси.



P і L — точки дотику γ_1 і γ
$\Downarrow$
$\smile KE = \smile EM$

Зберeглося доведення самого Архімеда цієї властивості арбелоса. Доведення Архімеда спиралося на таку лему.

Лема Архімеда. **Нехай пряма перетинає задане коло в точках K і M. Розглянемо коло, яке дотикається до заданого кола у точці P, а до прямої KM – у точці L. Тоді пряма PL проходить через середину однієї з двох дуг KM, на які задане коло поділяє задана пряма KM.**



Мал. 6.19

Доведення

Нехай пряма PL перетинає більше коло в точці E (мал. 6.19). За лемою, оберненою до леми Архімеда про паралельні діаметри, радіуси O_1L і OE – паралельні. Але L – точка дотику меншого кола до прямої KM, тоді $O_1L \perp KM$. Звідси $OE \perp KM$, і точка E – середина дуги KM.

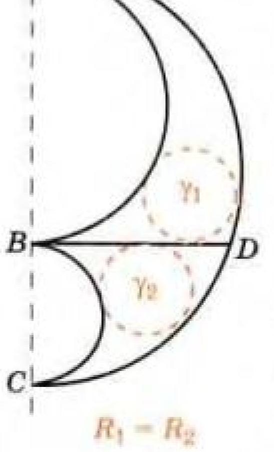
В інших випадках розміщення кіл доведення буде аналогічним. Розгляньте його самостійно.

Якби в математиці не було краси, то, мабуть, не було б і самої математики. Бо яка ж тоді сила притягала б до цієї нелегкої науки найбільших геніїв людства?

М. Чайковський

Розглянемо тепер *доведення зазначеної властивості арбелоса за Архімедом.*

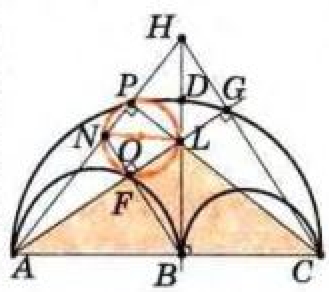
На малюнку 6.20 коло дотикається до прямої BD у точці L, більшого півкола – у точці P, а меншого – у точці F. Доведемо, що радіус цього кола дорівнює радіусу кола, вписаного у другий криволінійний трикутник.



$R_1 = R_2$

Доведення

1) За доведеною лемою пряма PL проходить через точку C, а пряма FL – через точку A.



Мал. 6.20

2) Проведемо у вписаному колі діаметр LN. Тоді кут NPL – прямий. Кут APC також прямий (спирається на діаметр AC). Тоді точки A, N, P лежать на одній прямій.

3) Кути NFL і AFB – прямі (спираються на діаметри NL і AB). Тоді точки N, F, B лежать на одній прямій.

4) Розглянемо трикутник ALC. Його висотами є відрізки LB, AP і CG ($\angle G = 90^\circ$, бо AC – діаметр), а ортоцентром – точка H, точка перетину прямих, що містять ці висоти.

5) За лемою, оберненою до леми про паралельні діаметри, $NL \parallel AB$. Тоді $\triangle HNL \sim \triangle HAB$ і $NL : AB = NH : AH$.

6) $BN \perp AG$ і $CG \perp AG$, тоді $BN \parallel CG$ і $NH : AH = BC : AC$.

7) Тоді $NL : AB = BC : AC$ і $NL = \dfrac{AB \cdot BC}{AC}$.

Зрозуміло, що діаметр другого вписаного кола буде той самий.

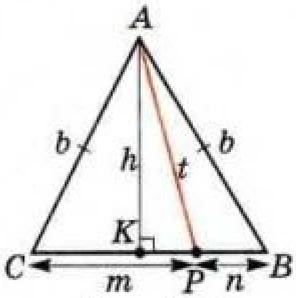
Так доводив цю лему Архімед дві тисячі років тому. А як може розв'язати її сучасний учень, який цікавиться геометрією? **(Спробуйте провести доведення цієї теореми самостійно іншими способами.)**

Математика – це поезія логіки ідей.

А. Ейнштейн

Розглянемо дві формули для рівнобедреного трикутника, відкриття яких також приписують Архімеду.

Формула Архімеда (І). **Квадрат довжини бічної сторони рівнобедреного трикутника дорівнює сумі квадрата довжини відрізка, який сполучає вершину цього трикутника з точкою його основи, і добутку довжин відрізків, на які зазначена точка ділить основу трикутника.**



Мал. 6.21

У рівнобедреному трикутнику ABC ($AC = AB = b$): AK – висота (позначимо як h), точка $P \in [CB]$, $AP = t$, $CP = m$, $PB = n$. Треба довести, що

$$b^2 = t^2 + m \cdot n.$$

Доведення

1) З трикутника ACK ($\angle K = 90^\circ$) маємо:

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{m+n}{2}\right)^2.$$

2) З трикутника AKP ($\angle K = 90^\circ$) маємо:

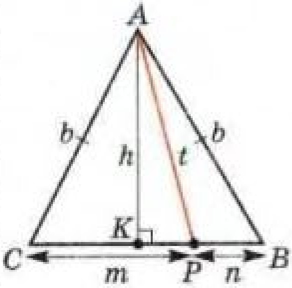
$$t^2 = h^2 + \left(\frac{m-n}{2}\right)^2.$$

3) Якщо відняти від першої рівності другу, отримаємо:

$$b^2 - t^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 = m \cdot n.$$

Щ. в. д.

Формула Архімеда



$AC = AB = b$

$h \perp CB$

$\Downarrow$

$b^2 = t^2 + m \cdot n$

Нагадаємо позначення:

$[CB]$ – відрізок CB,

$\in$ – «належить».

Продемонструємо, як ця формула може полегшити розв'язування задач.

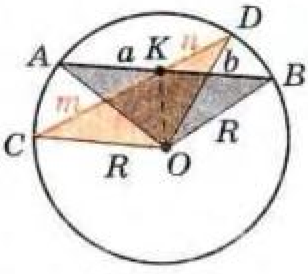
Приклад 1. Доведемо за допомогою цієї формули теорему про перетин хорд кола, яку ми доводили раніше (§ 24), спираючись на властивості подібних трикутників.

Математик **Чарльз Людовидж Доджсон** (1832–1898), професор Оксфордського університету, всесвітньо відомий як дитячий письменник **Льюїс Керрол.** Коли у 1932 році святкували столітній ювілей письменника Льюїса Керрола, рукопис його книги «Аліса в країні чудес» було продано за 30 000 фунтів стерлінгів золотом. На той час то була найбільша сума, коли-небудь сплачена за книгу.

Математика – це велика вигадка без обману!

Містер Доджсон

Теорема. Якщо через точку, взяту всередині кола, провести хорди, то добуток відрізків хорди, на які вона поділяється заданою точкою, є величина стала для даного кола.



Мал. 6.22

Хорди AB і CD перетинаються в точці K і поділяються нею на відрізки a, b і m, n відповідно (мал. 6.22).

Треба довести, що $a \cdot b = m \cdot n$.

Доведення

Сполучимо кінці хорд з центром кола O. Тоді маємо два рівнобедрені трикутники COD і AOB, точка K належить їх основам. За формулою Архімеда маємо: $R^2 - m \cdot n = OK^2 = R^2 - a \cdot b$. Звідси: $a \cdot b = m \cdot n$.

Теорему доведено.

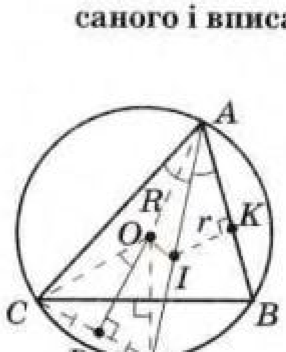
Приклад 2. Доведемо *формулу Ейлера* про відстань між центрами вписаного і описаного кіл трикутника. Існує багато способів доведення цієї формули, проте найпростіший і найкоротший з них спирається на доведену нами формулу Архімеда.

Формула Ейлера

$OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$

Теорема. Відстань між точкою O — центром описаного кола навколо трикутника і точкою I — центром вписаного в цей трикутник кола можна обчислити за формулою $OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$, де R і r — радіуси описаного і вписаного кіл відповідно.

Доведення



Мал. 6.23

Нехай бісектриса кута A трикутника ABC перетинає коло, описане навколо нього, в точці W (мал. 6.23).

З рівнобедреного трикутника WOA маємо (за формулою Архімеда): $OI^2 = R^2 - WI \cdot IA$. Залишилося довести, що $WI \cdot IA = 2Rr$.

За теоремою, яку ми довели в § 6, $WI = WC$. Трикутник WCA вписаний у те саме коло, що й трикутник ABC. Тоді з $\triangle COW$ ($OP \perp CW$, $\angle COP = \angle COW : 2 = \angle A : 2$):

$$WC : 2 = R\sin\frac{A}{2} \quad \text{і} \quad WI = WC = 2R\sin\frac{A}{2}.$$

З $\triangle AIK$ ($\angle K = 90^\circ$) маємо: $IA = \dfrac{r}{\sin\frac{A}{2}}$. Звідси маємо співвідношення:

$WI \cdot IA = WC \cdot IA = 2\,Rr$.

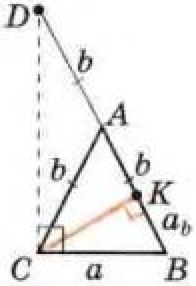
Теорему доведено.

Наступні два приклади пропонуються для самостійного доведення.

Приклад 3. Довільна точка хорди кола поділяє її на відрізки, добуток яких дорівнює різниці квадрата радіуса кола і квадрата відстані від цієї точки до центра кола.

Приклад 4. У рівнобічній трапеції квадрат діагоналі дорівнює сумі добутку її основ і квадрата бічної сторони. (Порада. Через вершину меншої основи трапеції проведіть пряму, паралельну її діагоналі.)

Формула Архімеда (II). **У рівнобедреному трикутнику квадрат основи дорівнює подвоєному добутку бічної сторони і проекції основи на бічну сторону.**



Мал. 6.24

У рівнобедреному трикутнику ABC ($AC = AB$) проведемо висоту CK (мал. 6.24). Треба довести, що $a^2 = 2b \cdot a_b$.

Доведення

Продовжимо сторону AB на відрізок $AD = AB$.

Тоді $\angle DAC = 2\angle B$ (як зовнішній кут трикутника ABC).

$\angle CDA = \angle DCA = (180^\circ - 2\angle B) : 2 = 90^\circ - \angle B$. Звідси $\angle DCB = 90^\circ$.

З прямокутного трикутника DCB ($\angle C = 90^\circ$, $CK \equiv h_c$) маємо:

$a^2 = DB \cdot a_b = 2b \cdot a_b$. Що й вимагалося довести.

Приклади застосування цієї формули пропонуємо довести самостійно.

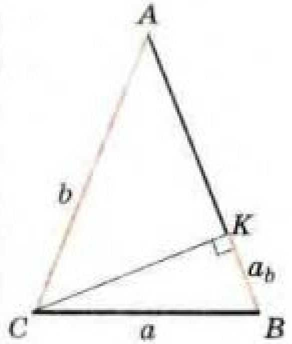
Приклад 5. Основа рівнобедреного трикутника відноситься до його бічної сторони як 4 : 3. В якому відношенні поділяє бічну сторону цього трикутника його висота?

Приклад 6. Висоти рівнобедреного трикутника, проведені до його основи і бічної сторони, дорівнюють 10 см і 12 см відповідно. Знайдіть довжину основи.

Приклад 7. Доведіть геометрично, що:

а) $\operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 75^\circ = 2$; **б)** $\operatorname{tg} 15^\circ = 4 \sin^2 15^\circ$.

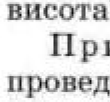
Формула Архімеда



$$\frac{AC = AB = b \quad CK \perp AB}{\Downarrow \quad a^2 = 2ba_b}$$

Нагадаємо позначення:

$\equiv$ – «збігається» або «тотожна рівність».



У травні 1989 р. українська математична спільнота святкувала сторічний ювілей видатного українського математика, професора Львівського державного університету **Мирона Онуфрійовича Зарицького** (див. с. 189) – одного із засновників української математичної культури.

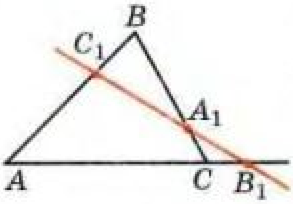
«Кого не приваблює ані краса, ані мистецтво, хто живе убогим духовним життям, – той нічого не дасть математиці. Поезія не різниться від математики вищим польотом уяви, а математик різниться від поета лише тим, що все і скрізь розуміє... Але як у мистецтві, так і в математиці лише твори, що відрізняються красою, переживають сторіччя і виховують покоління», – казав Мирон Зарицький.

Менелай Александрійський (I–II ст.) у книжці «Сферика» дав систематичний виклад сферичної геометрії – першої геометричної системи, відмінної від Евклідової. Наведемо одну з теорем, сформульованих і доведених Менелаєм, яка і сьогодні широко використовується під час розв'язування геометричних задач і носить його ім'я.

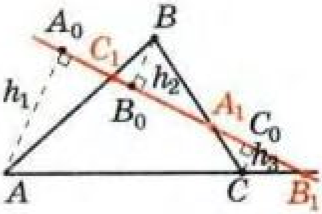
Т Теорема Менелая. **Якщо пряма перетинає сторони AB і BC трикутника ABC у точках C_1 і A_1 відповідно, а продовження сторони AC – у точці B_1, то справджується відношення**

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Теорема Менелая



$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$



Мал. 6.25

Доведення

З вершин трикутника ABC проведемо до заданої прямої перпендикуляри AA_0, BB_0, CC_0 і позначимо їх як h_1, h_2 і h_3 відповідно (мал. 6.25).

Маємо три пари подібних прямокутних трикутників (ознака подібності за гострим кутом):

1) $\triangle AA_0C_1 \sim \triangle BB_0C_1 \to \dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{AC_1}{C_1B}$;

2) $\triangle B_0BA_1 \sim \triangle C_0CA_1 \to \dfrac{h_2}{h_3}=\dfrac{BA_1}{A_1C}$;

3) $\triangle AA_0B_1 \sim \triangle CC_0B_1 \to \dfrac{h_3}{h_1}=\dfrac{CB_1}{B_1A}$.

Тоді $\dfrac{AC_1}{C_1B}\cdot\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{h_1}{h_2}\cdot\dfrac{h_2}{h_3}\cdot\dfrac{h_3}{h_1}=1$.

Теорему доведено.

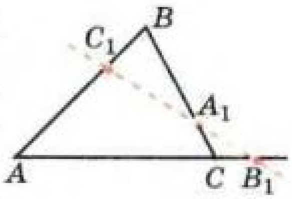
Легко можна довести й обернену теорему.

Академік, професор Київського і Московського університетів, видатний математик і фізик-теоретик **Микола Миколайович Боголюбов** (1909–1992) у 1922 році разом з матір'ю переїхав до Києва. І саме тут у свої лише тринадцять років привернув до себе увагу академіків Д. О. Граве і М. М. Крилова. У 1924 році Боголюбов написав першу наукову працю. П'ятнадцятирічним юнаком спеціальним рішенням РНК УРСР його без диплома про вищу освіту прийняли до аспірантури АН УРСР.

А почалося все, мабуть, через негаразди з арифметикою. Викладач гімназії, де Боголюбов почав навчання, визнав за необхідне повідомити батькам: «Математиком ваш син не стане, це ясно». – І, подумавши, додав: «Проте характер його дає підстави сподіватися, що він усе-таки знайде своє покликання».

До 14 років М. М. Боголюбов самостійно вивчив усю елементарну математику, основи вищої математики і математичний аналіз. Микола Миколайович володів, крім української і російської, ще й польською, англійською, іспанською, італійською, німецькою і французькою мовами. «Те, що подобається, легко запам'ятовується» – так казав Боголюбов.

Теорема, обернена до теореми Менелая

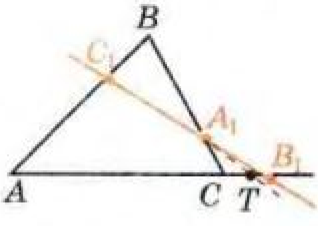


$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$
$$\Downarrow$$
$$A_1\in(C_1B_1)$$

Теорема (обернена до теореми Менелая). **Якщо точки C_1 і A_1 на сторонах AB і BC трикутника ABC і точка B_1 на продовженні сторони AC розташовані так, що справджується співвідношення**

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

то ці точки лежать на одній прямій (мал. 6.26).



Мал. 6.26

Доведення

Нехай точка $B_1 \notin (A_1C_1)$. Позначимо точку перетину цієї прямої з (AC) через T. За теоремою Менелая маємо співвідношення:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CT}{TA}=1.$$

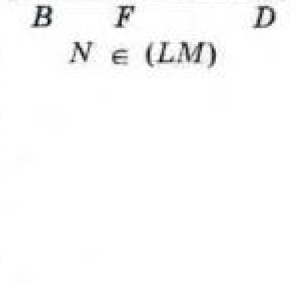
За умовою: $\dfrac{AC_1}{C_1B}\cdot\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=1.$

Тоді $\dfrac{TA}{CT}=\dfrac{B_1A}{CB_1}$ і $\dfrac{AC+CT}{CT}=\dfrac{AC+CB_1}{CB_1}$. Звідси

$$\frac{AC}{CT}+1=\frac{AC}{CB_1}+1,\quad \frac{AC}{CT}=\frac{AC}{C_1B}\text{ і } CB_1=CT,$$

що протирічить припущенню. Теорему доведено.

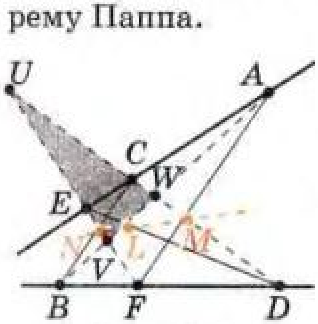
Теорема Паппа



$N \in (LM)$

На початку IV ст. в Александрії працював прекрасний знавець античної математики **Папп**, автор цікавої книжки *«Математичне зібрання»*, в якій сформульовано і доведено низку важливих теорем геометрії.

Спираючись на теорему Менелая, легко довести теорему Паппа.



Мал. 6.27

Теорема Паппа. **Якщо A, C, E – три точки на одній прямій, а B, F, D – на другій і якщо (AB), (CD), (EF) перетинають відповідно (DE), (FA), (BC), то три точки їх перетину L, M, N лежать на одній прямій.**

Доведення

Щоб не розглядати численних можливих варіантів, обмежимося випадком, коли (AB), (CD), (EF) утворюють трикутник UVW (мал. 6.27). Застосувавши до п'яти трійок точок $\{D, L, E\}$, $\{A, M, F\}$, $\{B, N, C\}$, $\{A, C, E\}$, $\{B, F, D\}$ теорему Менелая, дістанемо:

$$1)\ \frac{VL}{LW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UE}{EV}=1;\quad 2)\ \frac{VA}{AW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UF}{FA}=1;$$

$$3)\ \frac{VB}{BW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UN}{NV}=1;\quad 4)\ \frac{VA}{AW}\cdot\frac{WC}{CU}\cdot\frac{UE}{EV}=1;$$

$$5)\ \frac{VB}{BW}\cdot\frac{WD}{DU}\cdot\frac{UF}{FV}=1.$$

Якщо почленно перемножити перші три рівності і поділити отриманий добуток на дві останні, то після відповідного скорочення дістанемо:

$$\frac{VL}{LW}\cdot\frac{WM}{MU}\cdot\frac{UN}{NV}=1.$$

Тоді, за оберненою теоремою Менелая, маємо, що точки L, M, N лежать на одній прямій.

Теорему доведено.

Ця теорема – одна з основних в елементарній і проективній геометрії.

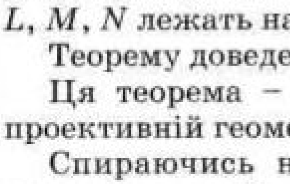
Спираючись на теорему Менелая і властивості вписаних кутів, можна довести ще одне цікаве твердження, *теорему Сімпсона* (**Роберт Сімпсон** – шотландський математик, XVIII ст.).

Теорема Сімпсона

$\{P, T, K\}$ – на прямій

пряма Сімпсона

Т Теорема Сімпсона. **Якщо з довільної точки кола, описаного навколо трикутника, провести перпендикуляри до прямих, що містять сторони цього трикутника, то основи цих перпендикулярів лежать на одній прямій.**



Мал. 6.28

Цю пряму називають *прямою Сімпсона*.

Нехай з точки X кола, описаного навколо трикутника ABC, до прямих AB, BC і CA провели перпендикуляри XP, XK і XT відповідно (мал. 6.28). Треба довести, що точки P, T і K лежать на одній прямій.

Доведення

1) $\underline{\smile XC:}\ \angle CAX = \angle CBX \triangleq \alpha$.

2) $\underline{\smile AX:}\ \angle ABX = \angle ACX \triangleq \beta$.

3) Чотирикутник $ABXC$ – вписаний. Тоді:
$\angle BAX + \angle BCX = 180^\circ$, $\angle BAX = 180^\circ - \angle BCX = \angle XCK \triangleq \gamma$.

4) З прямокутних трикутників, катетами яких є проведені перпендикуляри XP, XK і XT, маємо:
$AP = AX\cos\gamma$, $PB = XB\cos\beta$, $BK = XB\cos\alpha$, $KC = XC\cos\gamma$, $CT = XC\cos\beta$, $TA = AX\cos\alpha$.

5) $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{CT}{TA}\cdot\frac{BK}{KC}=1$, тоді, за оберненою теоремою Менелая, точки P, T і K лежать на одній прямій. Щ. в. д.

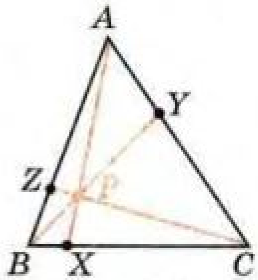
Для тих, хто цікавиться розв'язуванням геометричних задач, пропонується дуже корисна теорема, твердження якої сформулював і довів італійський математик **Джованні Чева** (1648–1734).

Відрізок, який сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні цього трикутника, називають *чевіаною* (на честь Джованні Чеви).

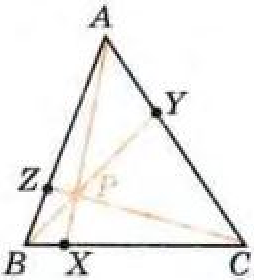
Теорема Чеви

Теорема Чеви. **Нехай X, Y і Z – точки, які лежать відповідно на сторонах BC, AC і AB трикутника ABC** (мал. 6.29). **Для того щоб чевіани AX, BY і CZ перетиналися в одній точці, необхідно і достатньо, щоб**

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$



Мал. 6.29



$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

1) Доведемо необхідність: якщо чевіани AX, BY і CZ перетинаються в одній точці, то виконується співвідношення $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$

У $\triangle ABC$ (мал. 6.29): $BX : XC = S_{ABX} : S_{AXC} = S_{PBX} : S_{PXC} = (S_{ABX} - S_{PBX}) : (S_{AXC} - S_{PXC})$. Тоді $BX : XC = S_{ABP} : S_{CAP}$. Аналогічно: $CY : YA = S_{BCP} : S_{ABP}$ і $AZ : ZB = S_{CAP} : S_{BCP}$.

Перемноживши почленно три здобуті рівності, дістанемо:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{S_{ABP}}{S_{CAP}}\cdot\frac{S_{BCP}}{S_{ABP}}\cdot\frac{S_{CAP}}{S_{BCP}}=1.\text{ Щ. в. д.}$$

AX, BY і CZ – чевіани

2) Доведемо достатність: якщо для чевіан AX, BY і CZ виконується співвідношення $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$, то вони перетинаються в одній точці P.

Нехай $AX \cap BY = P \notin CZ$. Проведемо через точку P чевіану CZ_1, $Z_1 \neq Z$. Тоді, за доведеним:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ_1}{Z_1B}=1=\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}\text{ і }\frac{AZ_1}{Z_1B}=\frac{AZ}{ZB},$$

тобто $Z_1 = Z$, що протирічить припущенню. Щ. в. д.

Із теореми Чеви, як наслідок, дістанемо відомі теореми:

1. Медіани трикутника перетинаються в одній точці.

2. Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

3. Висоти трикутника перетинаються в одній точці.

4. Прямі, які проходять через вершини трикутника і ділять його периметр навпіл, перетинаються в одній точці.

5. Прямі, які сполучають вершини трикутника з точками дотику до протилежних сторін трикутника вписаного в цей трикутник кола, перетинаються в одній точці.

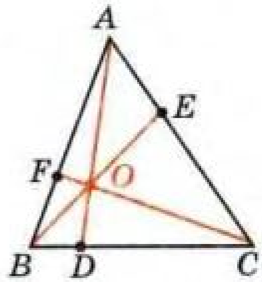
6. Прямі, які сполучають вершини трикутника з точками дотику до протилежних сторін зовнівписаних кіл цього трикутника, перетинаються в одній точці.

Доведення вказаних наслідків пропонуємо провести самостійно.

Французьким математиком **Жергоном** у 1818 р. була доведена така теорема.

Теорема Жергона. **Якщо прямі AD, BE, CF проходять через вершини A, B, C трикутника ABC і перетинаються в точці O всередині трикутника ABC (мал. 6.30), то виконуються співвідношення:**

$$(1)\ \frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1;\quad (2)\ \frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}=2.$$



Мал. 6.30

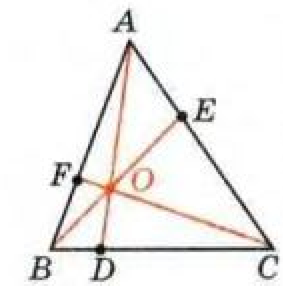
Доведення

Площі трикутників AOC і ABC відносяться як їхні висоти, а останні відносяться як OE до BE (якщо з B і O провести відповідні висоти – отримаємо подібні трикутники). Тоді:

$$\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}=\frac{OE}{BE}.$$

Аналогічно: $\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}=\frac{OD}{AD}$ і $\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{OF}{CF}$.

Теорема Жергона



$$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1,$$
$$\frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}=2$$

...Ранком 9 березня 1942 року на глибину 1,5 м було заховано у вічну мерзлоту тіло в'язня **Михайла Кравчука** – видатного українського математика, академіка, який був учителем легендарного конструктора Сергія Корольова. Так закінчився земний шлях одного з найвидатніших математиків XX сторіччя.

Народився Михайло Кравчук у селі Човниці на Волині. Його батько працював землеміром, а мати вільно володіла кількома європейськими мовами і вчила своїх чотирьох дітей німецькій, французькій і польській. Але головною мовою у сім'ї була українська. Тому не випадково, що академік Кравчук першим розробив в Україні проект алгебраїчної і геометричної термінології. Під його керівництвом у 20-ті роки співробітники Інституту української наукової мови склали математичний словник у трьох томах. А студенти Михайла Пилиповича ще довго після його арешту пригадували красу думки і красу мови, що панували на лекціях. Михайло Кравчук устиг до арешту написати 180 наукових праць (10 з них – монографії з різних галузей математики).

9 березня 1930 року в Харкові розпочався судовий процес над організацією «Спілка визволення України». То був початок погрому української інтелігенції. Дату процесу було обрано не випадково – 9 березня – День народження Тараса Шевченка. Михайлу Кравчуку, всесвітньо відомому вченому, друзями якого були поважні люди – учені, поети, літературознавці, – запропонували виступити на цьому процесі із звинуваченням. Він відмовився... Почалася травля академіка: у газетах друкувалися розгромні статті, такі як «Академік Кравчук рекламує ворогів», а самому Кравчуку погрожували знищити всю сім'ю, якщо він не погодиться взяти на себе злочини, до яких не мав відношення...

Якщо додати отримані рівності, дістанемо:

$$\frac{OE}{BE}+\frac{OD}{AD}+\frac{OF}{CF}=\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1.$$

Перше твердження теореми доведено.

Доведемо другу частину теореми. З рівностей

$$\frac{AO}{AD}=\frac{AD-OD}{AD}=1-\frac{OD}{AD};\ \frac{BO}{BE}=1-\frac{OE}{BE};\ \frac{CO}{CF}=1-\frac{OF}{CF}$$

маємо:

$$\frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}=3-\left(\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}\right)=3-1=2.$$

Теорему доведено.

З а у в а ж е н н я. Теорема Жергона справджується і в випадку, коли точка O лежить на стороні трикутника. Тоді третій доданок перетворюється на нуль і маємо:

$$\frac{OC}{AC}+\frac{OA}{CA}=1,$$

що еквівалентно рівності

$$\frac{CO+AO}{AC}=1,\ \frac{CA}{AC}=1.$$

Люди помиляються саме тому, що їм бракує логіки.

Г. Лейбніц

Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

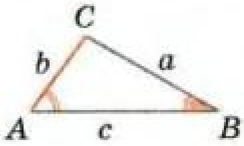
1. *Бевз Г. П.* Геометрія трикутика. – К.: Генеза, 2005. – 120 с.
2. *Бевз Г. П.* Геометрія кіл. – Харків: Основа, 2004. – 112 с.
3. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. – М.: Наука, 1991. – Ч. 1. – 240 с.
4. *Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1973. – 224 с.
5. *Шарыгин И. Ф.* Геометрия. – М.: Дрофа, 2001. – 368 с.
6. *Билецкий Юрий, Филипповский Григорий.* Чертежи на песке. В мире геометрии Архимеда. – К.: Факт, 2000. – 100 с.
7. *Филипповский Г.Б.* Школьная геометрия в миниатюрах. – К.: ГРОТ, 2002. – 240 с.
8. *Конфорович А. Г.* Визначні математичні задачі. – К.: Рад. шк., 1981. – 189 с.

У 1938 р. «За антирадянську націоналістичну діяльність на науково-педагогічному фронті» М. П. Кравчука (див. с. 222) було засуджено як «ворога народу» на 20 років ув'язнення та 5 років заслання. У 60-градусний мороз академік із хворим серцем повинен був виконувати денну норму на копальнях Колими – півтори тонни руди. У хвилини відпочинку каторжник Кравчук писав якісь формули на шматках паперу і кожен вечір здавав свої записи начальнику концтабору – лише за такої умови йому дозволяли займатися математикою. З табору Кравчук писав академіку А. М. Люльке, що здійснив важливе математичне відкриття. Всі записи академіка, на превеликий жаль, було знищено.

Доводимо геометричні нерівності

$a > b$

$\angle A > \angle B$



$a < c + b$

$a > |c - b|$

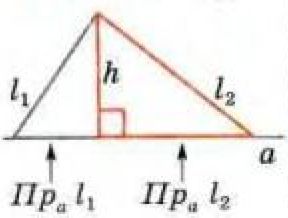
У додатку 3 ми довели алгебраїчні нерівності на порівняння середнього квадратичного, середнього арифметичного, середнього геометричного і середнього гармонійного двох чисел, скориставшись їх геометричною інтерпретацією. Цей додаток пропонує вам зробити перші кроки у доведенні геометричних нерівностей. Ця тема, з одного боку, легка, а з іншого – доведення навіть очевидних нерівностей буває «міцним горішком». Допомагає опанувати цю тему *система опорних задач*.

Наріжними каменями серед цих задач є *нерівності трикутника*, вивчені у 7 класі. Нагадаємо їх.

У довільному трикутнику:

- **проти більшої сторони лежить більший кут;**
- **проти більшого кута лежить більша сторона;**
- **кожна зі сторін менша за суму двох інших;**
- **кожна зі сторін більша за різницю двох інших.**

$h \perp a \Rightarrow h < l_{1,2}$



$l_1 < l_2$

$\Downarrow\Uparrow$

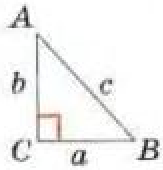
$Пр_a\, l_2 > Пр_a\, l_1$

До опорної групи геометричних нерівностей відносяться й наслідки з наведених вище тверджень стосовно *перпендикуляра і похилих, проведених з однієї точки до прямої*:

- **довжина перпендикуляра менша за довжину будь-якої похилої, проведеної із заданої точки на дану пряму;**
- **з двох похилих, проведених з однієї точки до даної прямої, більша та, що має більшу проекцію;**
- **з двох похилих, проведених з однієї точки до даної прямої, більша похила має більшу проекцію.**

Звідси маємо, що *у довільному прямокутному трикутнику*:

- **кожен з його катетів менший за гіпотенузу;**
- **кути, розміщені проти катетів, – гострі.**



$\angle C = 90^\circ$

$\Downarrow$

$c > b,$

$c > a,$

$\angle A < 90^\circ,$

$\angle B < 90^\circ$

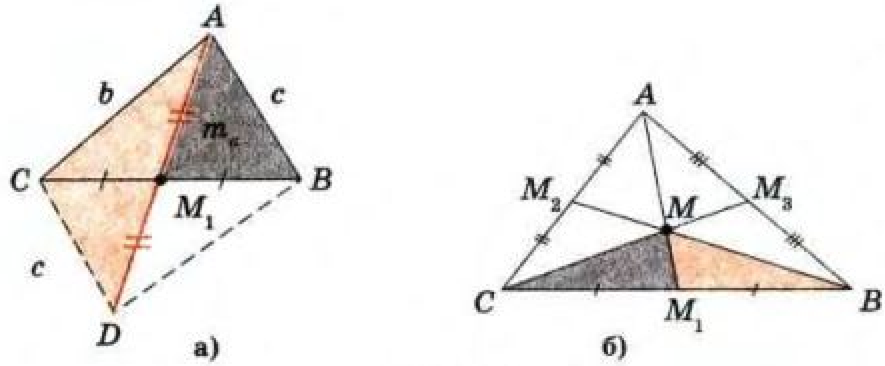
Розглянемо кілька опорних задач.

Опорна задача 1

Доведіть, що для медіан m_a, m_b і m_c трикутника ABC виконуються нерівності: (1) $m_a < \frac{b+c}{2}$; (2) $m_a > c - \frac{a}{2}$; (3) $a < \frac{2}{3}(m_b + m_c)$; (4) $\frac{1}{2}a < \frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_a$ і $\frac{1}{2}a < \frac{2}{3}m_c + \frac{1}{3}m_a$.

1) Подвоїмо медіану m_a (мал. 6.31-а) і отримаємо паралелограм $ABDC$, звідси $CD = c$. Тоді з нерівності для сторін трикутника ACD маємо $b + c > 2m_a$, (1) – доведено.

2) З нерівності для сторін трикутника ABM_1 (мал. 6.31-а) маємо: $m_a > c - \frac{a}{2}$, і (2) виконується.



Мал. 6.31

3) З нерівності для сторін трикутника CMB (мал. 6. 31-б), де M – центроїд трикутника ABC, і з властивості медіан трикутника маємо:

$$a < CM + MB = \frac{2}{3}(m_b + m_c), \text{ і (3) виконується.}$$

4) Аналогічно попередньому, з трикутників BMM_1 і CMM_1 отримаємо твердження (4).

$$m_a < \frac{b+c}{2}$$

$$m_a > c - \frac{a}{2}$$

$$a < \frac{2}{3}(m_b + m_c)$$

$$\frac{1}{2}a < \frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_a$$

$$\frac{1}{2}a < \frac{2}{3}m_c + \frac{1}{3}m_a$$

Опорна задача 2

У трикутнику більшій стороні відповідає менша висота і навпаки.

Проведемо у трикутнику ABC дві висоти – h_a і h_b. Площа цього трикутника дорівнює $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b$. Звідси маємо: $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$. Щ. в. д.

$$a > b$$
$$\Downarrow\Uparrow$$
$$h_a < h_b$$

Розглянемо кілька прикладів розв'язування задач.

Приклад 1. Доведіть, що в довільному прямокутному трикутнику куб гіпотенузи більший за суму кубів його катетів.

Доведення

Нехай катети даного трикутника дорівнюють a і b, а гіпотенуза – c. Тоді $c > a$ і $c > b$. Помножимо ці нерівності на a^2 і b^2 відповідно і додамо. Маємо: $c(a^2 + b^2) > a^3 + b^3$. Враховуючи, що за теоремою Піфагора $(a^2 + b^2) = c^2$, отримаємо $c^3 > a^3 + b^3$. Щ. в. д.

Приклад 2. Доведіть, що для суми медіан довільного $\triangle ABC$ виконуються нерівності $p < m_a + m_b + m_c < 2p$, де p – півпериметр заданого трикутника.

Доведення

1) Запишемо твердження (4) опорної задачі 1 для сторін a, b і c трикутника ABC:

$$\frac{1}{2}a < \frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_a, \quad \frac{1}{2}b < \frac{2}{3}m_c + \frac{1}{3}m_b, \quad \frac{1}{2}c < \frac{2}{3}m_a + \frac{1}{3}m_c.$$

Після додавання цих нерівностей отримаємо: $p < m_a + m_b + m_c$, отже, ліву частину нерівності умови доведено.

2) Запишемо твердження (1) опорної задачі 1 для медіан трикутника ABC:

$$m_a < \frac{b+c}{2},\ \ m_b < \frac{a+c}{2},\ \ m_c < \frac{b+a}{2}.$$

Додавши ці нерівності, отримаємо: $m_a + m_b + m_c < 2p$; праву частину нерівності умови доведено.

Приклад 3. Доведіть, що для сторін a, b, c трикутника ABC виконується нерівність $abc \geqslant (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)$.

Доведення

Запишемо очевидні нерівності: $a^2 \geqslant a^2 - (b - c)^2$, $b^2 \geqslant b^2 - (a - c)^2$, $c^2 \geqslant c^2 - (b - a)^2$.

Обидві частини цих нерівностей невід'ємні (врахуйте нерівність для різниці сторін трикутника). Тоді їх можна перемножити. Отримаємо:

$$a^2b^2c^2 \geqslant (a - b + c)(a + b - c)(b - a + c)(b + a - c)(c - b + a)(c + b - a),$$
$$a^2b^2c^2 \geqslant (a + c - b)^2(a + b - c)^2(b + c - a)^2,$$
$$abc \geqslant |a + c - b| \cdot |a + b - c| \cdot |b + c - a|.$$

Враховуючи нерівність для суми сторін трикутника, маємо, що всі вирази під знаком модуля невід'ємні, отже, шукане співвідношення виконується.

Приклад 4. Доведіть, що для сторін прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) виконується нерівність $a + b < c + h_c$.

Доведення

Із запису теореми Піфагора $a^2 + b^2 = c^2$ та виразів для площі заданого трикутника $4S = 2ab = 2ch_c$ отримаємо:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ch_c = (c + h_c)^2 - h_c^2 < (c + h_c)^2.$$

Тоді $a + b < c + h_c$. Що і вимагалося довести.

Приклад 5. У трикутнику ABC $a > b > c$. Яку з цих сторін бачимо під найбільшим кутом із центра: а) описаного кола; б) вписаного кола?

Розв'язання

1) У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут. За умовою $a > b > c$, тоді $\angle A > \angle B > \angle C$.

2) З центра O кола, описаного навколо даного трикутника, сторони цього трикутника бачимо під кутами:

$$\angle BOC = 2\angle A,\ \angle AOC = 2\angle B,\ \angle AOB = 2\angle C,$$

бо вони є центральними кутами цього кола. Найбільшим з них є кут, якому відповідає вписаний кут A, тобто $\angle BOC$.

3) З центра вписаного кола I, сторони трикутника видно під кутами:

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2},\ \angle AIC = 90^\circ + \frac{\angle B}{2},\ \angle AIB = \frac{\angle C}{2}$$

(див. опорну задачу на с. 252). Найбільшим з них є кут BIC.

Відповідь: Із центра описаного і вписаного кіл під найбільшим кутом бачимо найбільшу сторону.

Приклад 6. Доведіть: якщо a, b, c – сторони деякого трикутника ABC, то існує трикутник, довжини сторін якого дорівнюють числам $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$.

Доведення

Нехай a – найбільша зі сторін трикутника ABC. Тоді $(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 = b + c + 2\sqrt{bc} > b + c > a = (\sqrt{a})^2$. Звідси $\sqrt{b}+\sqrt{c} > \sqrt{a}$, тобто шуканий трикутник існує.

Приклад 7. Доведіть, що для радіусів вписаного r і описаного R кіл прямокутного трикутника і значення площі S цього трикутника виконується співвідношення $R + r \geqslant \sqrt{2S}$.

Доведення

Як відомо, для прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$):

$$R = \frac{c}{2},\ r = \frac{a+b-c}{2},\ S = \frac{1}{2}ab.$$

Скористаємося нерівністю для середнього арифметичного і середнього геометричного (див. с. 209):

$$R + r = \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} = \sqrt{2S}.$$

Що і вимагалося довести.

Нерівність, що порівнює середнє арифметичне із середнім геометричним додатних чисел, називають *нерівністю Коші*. Ця нерівність є правильною не тільки у випадку двох доданків.

Для n додатних чисел за нерівністю Коші виконується співвідношення:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n},$$

при цьому рівність досягається лише у випадку, коли всі n чисел між собою рівні.

Приклад 8. Доведіть, що для висот трикутника ABC виконується нерівність $h_a + h_b + h_c \geqslant 9r$, де r – радіус кола, вписаного в цей трикутник.

Доведення

Запишемо радіус вписаного кола трикутника через його площу S і півпериметр p: $r = \dfrac{S}{p}$. Тоді

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S}.$$

Якщо в знаменники дробів замість S підставити: $\frac{1}{2}a \cdot h_a$, $\frac{1}{2}b \cdot h_b$ і $\frac{1}{2}c \cdot h_c$ відповідно, то отримаємо:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Тоді, скориставшись нерівністю Коші, маємо:

$$(h_a + h_b + h_c) \cdot \frac{1}{r} =$$

$$= (h_a + h_b + h_c)(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}) \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{h_a h_b h_c} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{h_a h_b h_c}} = 9.$$

Що і вимагалося довести.

До одного з найважливіших опорних фактів геометричних нерівностей належить і наслідок з теореми про точку перетину продовження бісектриси трикутника з описаним навколо цього трикутника колом (див. с. 37). З цього наслідку маємо: **бісектриса трикутника не менша за висоту і не перебільшує медіану, які проведено з тієї самої вершини трикутника.**

Приклад 9. Доведіть, що для бісектрис трикутника ABC виконується нерівність $9r \leqslant l_a + l_b + l_c < 2p$, де r – радіус кола, вписаного в цей трикутник, а p – його півпериметр.

Доведення

За наслідком з теореми про точку перетину продовження бісектриси трикутника з описаним навколо цього трикутника колом маємо:

$$h_a + h_b + h_c \leqslant l_a + l_b + l_c \leqslant m_a + m_b + m_c.$$

У прикладах 2 і 8 було доведено, що

$$m_a + m_b + m_c < 2p \text{ і } h_a + h_b + h_c \geqslant 9r.$$

Тоді

$$9r \leqslant h_a + h_b + h_c \leqslant l_a + l_b + l_c \leqslant m_a + m_b + m_c < 2p.$$

Що і вимагалося довести.

Зверніть увагу також на *формулу Ейлера*, доведену в додатку 4 (с. 216). **Відстань між точкою O – центром описаного навколо трикутника кола і точкою I – центром вписаного в цей трикутник кола дорівнює $OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$** (R і r – радіуси описаного і вписаного кіл відповідно).

Приклад 10. Доведіть, що радіус кола, описаного навколо трикутника, не перевищує діаметр кола, вписаного в цей трикутник.

Доведення

Позначимо радіус кола, описаного навколо трикутника, як R, а радіус кола, вписаного в цей трикутник, як r. З формули Ейлера маємо, що $OI^2 = R^2 - 2Rr \geqslant 0$. Звідси $R \geqslant 2r$ (бо $R \neq 0$).

Що і вимагалося довести.

Розв'яжіть самостійно такі задачі.

1. Доведіть, що довжина медіани трикутника менша за суму двох інших медіан і більша за їх різницю.
2. У трикутнику ABC: $a \geqslant b \geqslant c$. Доведіть, що градусні міри кутів трикутника лежать у межах: $60^\circ \leqslant A < 180^\circ$, $0 < B < 90^\circ$, $0 < C \leqslant 60^\circ$.
3. Якщо a, b, c – сторони трикутника, то: **а)** $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3$;

б) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$; **в)** $a + b + c \leqslant 2(ab + ac + bc)$.
(Порада. Скористайтеся нерівністю Коші).

4. У трикутнику ABC: $a > b > c$. Яку з цих сторін бачимо під найбільшим кутом з ортоцентра трикутника, якщо цей трикутник: **а)** гострокутний; **б)** тупокутний?
5. Доведіть, якщо в трикутнику ABC: **а)** $m_a < \frac{a}{2}$, то кут A – тупий; **б)** якщо $m_a > \frac{a}{2}$, то кут A – гострий.
6. Доведіть, що в прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$; r – радіус вписаного кола): **а)** $r < \frac{a}{2}$; **б)** $a + b < + h_c$; **в)** $h_c \leqslant \frac{c}{2}$; **г)** $c < a + b < c\sqrt{2}$.
7. Доведіть, що з відрізків $a + m_a$, $b + m_b$ і $c + m_c$, де a, b, c – сторони, а m_a, m_b, m_c – медіани трикутника ABC, можна побудувати трикутник.
8. На колі, описаному навколо правильного трикутника ABC, взято довільну точку M. Чи можна скласти трикутник з відрізків MA, MB і MC?
9. Доведіть, що в трикутнику ABC виконується нерівність $\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geqslant \frac{9}{4}$.
10. Чи буде правильним твердження, обернене твердженню, доведеному в задачі 6?

Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

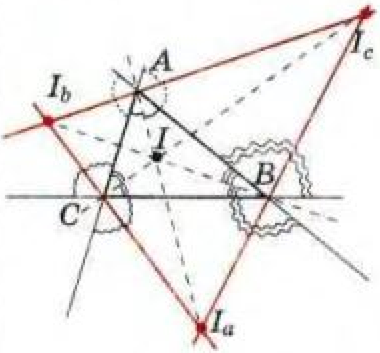
1. *Сивашинский И. Х.* Неравенства в задачах. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. *Билецкий Юрий, Филипповский Григорий.* Чертежи на песке. В мире геометрии Архимеда. – К.: Факт, 2000. – 100 с.
3. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. – М.: Наука, 1991. – Ч. 2. – 288 с.

Зовнівписане коло

Як відомо, три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці – інцентрі трикутника. Ця точка *рівновіддалена від сторін трикутника* і є центром кола, вписаного в даний трикутник. Зауважимо, що інцентр визначає багато цікавих властивостей трикутника (див., наприклад, с. 252, 254), і тому його вважають однією з «чудових точок трикутника».

А якщо шукати точку, *рівновіддалену від* ***прямих***, *що містять сторони трикутника*?

Скористаємося головною властивістю бісектриси кута, як ГМТ, рівновіддалених від сторін кута. Зрозуміло, що інцентр трикутника задовольняє цю умову.



Мал. 6.32

Але, окрім того, ми маємо ще три точки – точки перетину бісектрис зовнішніх кутів трикутника. На малюнку 6.32 їх позначено як I_a, I_b і I_c. Через ці точки проходять і продовження бісектрис внутрішніх кутів трикутника ABC (мал. 6.32) l_a, l_b і l_c відповідно. Доведемо це.

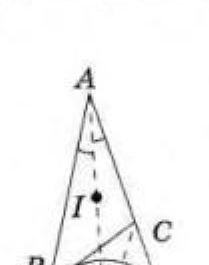
Розглянемо, наприклад, точку I_a – точку перетину бісектрис зовнішніх кутів трикутника ABC з вершинами B і C. За головною властивістю бісектриси кута маємо:

Зовнівписане коло дотикається до a і продовження b і c.

$$\left.\begin{aligned} d(I_a;AC) = d(I_a;CB) \\ d(I_a;CB) = d(I_a;AB) \end{aligned}\right| \Rightarrow d(I_a;AC) = d(I_a;AB).$$

Звідси I_a належить бісектрисі кута CAB, тобто продовженню l_a.

Аналогічно маємо, що I_b і I_c належать продовженню l_b і l_c.

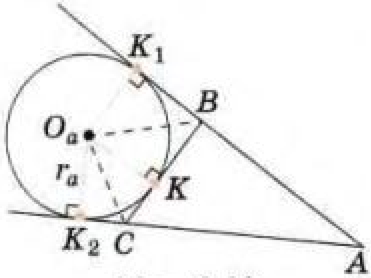


$AK_1 = AK_2 = p$

Ми довели, що точка I_a – рівновіддалена від сторони a трикутника ABC і продовження його сторін b і c. Тоді *I_a – центр кола, що дотикається до сторони a і продовження сторін b і c цього трикутника.* Таке коло називають ***зовнівписаним колом трикутника ABC***. Кожен трикутник має три зовнівписаних кола з центрами в точках I_a, I_b і I_c.

Розглянемо ВЛАСТИВОСТІ зовнівписаного кола.

1. Відстань між вершиною кута трикутника і точками дотику зовнівписаного кола до прямих, що є сторонами цього кута, дорівнює півпериметру даного трикутника.



Мал. 6.33

Нехай маємо трикутник ABC і його зовнівписане коло, що дотикається до сторони a і продовження сторін b і c цього трикутника (мал. 6.33). (Точки дотику позначено як K, K_1 і K_2 відповідно.)

За властивістю відрізків дотичних, проведених до кола з однієї точки, маємо:

$$AK_1 = AK_2,\ BK_1 = BK,\ K_2C = KC.$$

Периметр трикутника дорівнює:

$$2p = AB + BC + AC = AB + (BK + KC) + AC =$$
$$= AB + (BK_1 + K_2C) + AC = AK_1 + AK_2.$$

Враховуючи рівність $AK_1 = AK_2$ маємо, що твердження властивості 1 є правильним.

2. Радіус зовнівписаного кола трикутника ABC, що дотикається до його сторони a, дорівнює $S : (p - a)$, де S – площа трикутника ABC, p – його півпериметр.

$r_a = \dfrac{S}{p-a}$

$r_a = \dfrac{rp}{p-a}$

$r_a = p \cdot \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$

$r_a = (p-b) \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$

На малюнку 6.33 шуканий радіус зовнівписаного кола позначено як r_a.

Сума площ трикутників ABO_a і ACO_a дорівнює сумі площ трикутників ABC і CBO_a. Тоді

$$\frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a = S + \frac{1}{2}ar_a,\ r_a(c + b - a) = 2S.$$

Врахуємо, що $(c + b - a) = 2(p - a)$, тоді

$$r_a = \frac{S}{p-a}.$$

3. Радіус зовнівписаного кола трикутника ABC, що дотикається до його сторони a, можна обчислити за формулами:

а) $r_a = \dfrac{rp}{p-a}$; б) $r_a = p \cdot \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$; в) $r_a(p-b) \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$,

де r – радіус кола, вписаного у трикутник ABC; p – його півпериметр.

Формула Герона
$S_{\triangle ABC} =$
$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Шуканий вираз (а) отримаємо безпосередньо з властивості 2, врахувавши те, що площу трикутника можна обчислити за формулою $S = pr$.

Для доведення формули (б) розглянемо прямокутний трикутник AO_aK_1 (мал. 6.33). За доведеним раніше: $AK_1 = p$, $l_a \in AO_a$. Тоді

$$r_a = AK_1 \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2} = p \cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Для доведення формули (в) розглянемо прямокутний трикутник CO_aK_2 (мал. 6.33):

$$K_2C = K_2A - b = p - b,$$
$$\angle K_2O_aC = 90^\circ - \angle K_2CO_2 = 90^\circ - \frac{180^\circ - \angle C}{2} = \frac{\angle C}{2},$$

$$r_a = K_2C \cdot \operatorname{ctg}(\angle K_aO_2C) = (p-b) \cdot \operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

Що і вимагалося довести.

4. Для трикутника з вершинами в точках I_a, I_b, I_c відрізки I_aA, I_bB, I_cC є висотами, а інцентр I трикутника ABC – ортоцентром (мал. 6.32).

Наведене твердження випливає з того, що бісектриси суміжних кутів утворюють кут $180^\circ : 2 = 90^\circ$, тобто є взаємно перпендикулярними.

За допомогою наведених властивостей зовнівписаного кола можна легко довести *формулу Герона* для обчислення площі трикутника ABC:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Маємо: $r_a = \dfrac{S}{p-a}$, $r_a = (p-b) \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$ – за доведеним вище;

$$r = \frac{S}{p} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2} \text{ – опорна задача (див. с. 254).}$$

Тоді

$$r \cdot r_a = \frac{S^2}{p-a} = (p-b)(p-c),\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Наступні властивості зовнівписаного кола доведіть самостійно.

Нехай у трикутнику ABC: R і r – радіуси описаного і вписаного кіл; p – півпериметр; S – площа цього трикутника; W_a – точка перетину продовження бісектриси l_a трикутника з колом, описаним навколо цього трикутника; O – центр описаного кола. Тоді виконуються твердження.

5. $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

6. $r_ar_br_c = Sp$.

7. $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$.

8. $IW_a = W_aI_a$.

9. $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ (формула Ейлера для зовнівписаного кола).

10. Трикутник ABC є ортоцентричним трикутнику $I_aI_bI_c$.

11. У трикутнику $I_aI_bI_c$ кути дорівнюють $90^\circ - \dfrac{A}{2}$, $90^\circ - \dfrac{B}{2}$, $90^\circ - \dfrac{C}{2}$.

12. Центроїд трикутника $I_aI_bI_c$ належить прямій OI.

13. Трикутники $W_aW_bW_c$ і $I_aI_bI_c$ подібні з коефіцієнтом подібності 2.

Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

1. *Кушнір І. А.* Трикутник і тетраедр у задачах. – К.: Рад. шк., 1991. – 208 с.

2. *Бевз Г. П.* Геометрія трикутника. – К.: Генеза, 2005. – 120 с.

Додаток 7

Кролі, клітки і принцип Діріхле в геометрії

Мабуть, ви вже чули про *принцип Діріхле*. Найчастіше при першому ознайомленні цей принцип пояснюють так.

Якщо в n клітках розмістили $n + 1$ кролів, то хоча б в одній з них сидить не менше як два кролі.

Такий, начебто простий, принцип дає змогу розв'язувати непрості задачі, у тому числі й геометричні. Головне при використанні цього принципу з'ясувати, кого призначати на роль «кроля», а кого – на роль «клітки».

Приклад 1. У лісі росте мільйон ялинок. Відомо, що на кожній з них не більше 600 000 голок. Доведіть, що в цьому лісі знайдеться принаймні дві ялинки з однаковою кількістю голок.

Доведення

Маємо мільйон «кролів»-ялинок і лише 600 001 «клітку» з номерами від 0 до 600 000. Кожного «кроля»-ялинку треба посадити в клітку, на якій зроблено напис про кількість її голок. Якщо посадити «кролів» по одному – матимемо 600 001 «кроля»-ялинку. Всіх інших треба розсаджувати в уже заповнені клітки. Але якщо два «кролі»-ялинки містяться в одній клітці, то вони мають однакову кількість голок.

Твердження доведено.

Інколи зручно використовувати *узагальнений принцип Діріхле.*

Якщо в n клітках сидять $kn + 1$ кролів, то в якійсь із кліток сидить принаймні $k + 1$ кролів.

Тобто ми одного кроля замінили на групу з k кролів.

Приклад 2. У магазин привезли 25 ящиків трьох сортів цукерок (у кожному ящику містяться цукерки лише одного сорту). Доведіть, що серед них є хоча б 9 ящиків із цукерками одного сорту.

Доведення

25 ящиків-«кролів» розсадимо по трьох «клітках»-сортах. Маємо $25 = 3 \cdot 8 + 1$. Тоді за узагальненим принципом Діріхле $n = 3$, $k = 8$ і маємо, що в якійсь «клітці»-сорті міститься не менше $8 + 1 = 9$ ящиків-«кролів».

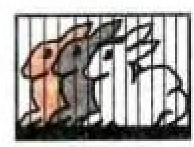
Твердження доведено.

?

n – кліток
$n + 1$ – кролів

⇓

хоча б в одній клітці – 2 кролі.



?

n – кліток
$kn + 1$ – кролів

⇓

хоча б в одній клітці – $k + 1$ кролів.

Під час оформлення запису розв'язування задач роблять посилання на принцип Діріхле без явного присвоєння об'єктам, що досліджуються, назв «кролі» і «клітки». Сформулюємо тепер принцип Діріхле, замінивши клітки множиною A, а кролів – множиною B.

Якщо кожному елементу множини A (з n елементів) поставлено у відповідність елемент множини B (з m елементів) і при цьому $n < m$, то принаймні одному елементу з A відповідає не менше двох елементів з B.

У випадку, **коли $m = kn + p$, де $p \geqslant 1$**, маємо узагальнений принцип Діріхле: **принаймні одному елементу з A відповідає не менше ніж $k + 1$ елементів з B.**

Розглянемо кілька прикладів *застосування принципу Діріхле в геометричних задачах*.

Приклад 3. У квадрат зі стороною 1 м «кинули» 51 точку. Доведіть, що якісь три з них можна накрити квадратом зі стороною 20 см.

Доведення

Поділимо заданий квадрат на квадрати з довжиною сторони 20 см, маємо $5 \times 5 = 25$ таких квадратів. Число $51 = 25 \cdot 2 + 1$. Тоді за принципом Діріхле в якомусь з утворених квадратів міститься $2 + 1 = 3$ точки.

Твердження доведено.

Приклад 4. Усередину квадрата зі стороною 10 см «кинули» 101 точку (жодні три з них не лежать на одній прямій). Доведіть, що серед них є три точки, які утворюють трикутник, площа якого не перевищує 1 см^2.

Доведення

Розіб'ємо квадрат на 50 прямокутників зі сторонами 1 см і 2 см. Тоді за принципом Діріхле хоча б в один з них потрапить не менше трьох точок. Ці точки утворюють трикутник, площа якого не перевищує половини площі прямокутника, в якому міститься цей трикутник.

Твердження доведено.

Приклад 5. Яку найбільшу кількість точок можна розмістити в квадраті зі стороною 1 см так, щоб відстані між довільними двома з них не перебільшували 0,5 см? («У квадраті» означає «всередині квадрата», або «на його межах».)

Розв'язання

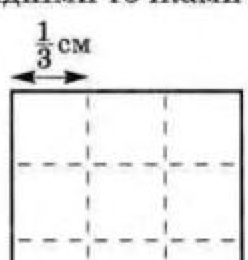
Розіб'ємо квадрат на 9 рівних квадратів зі стороною $\frac{1}{3}$ см (мал. 6.34).

Якщо в цих квадратах розмістити 10 точок, то за принципом Діріхле принаймні 2 з них потраплять до одного квадрата. Відстань між двома такими точками не перевищує діагоналі квадрата, довжина якої

$$\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2}.$$

Тобто 10 точок розмістити так, як вимагається за умовою, неможливо.

Розмістимо 9 точок так, як показано на малюнку 6.35. Відстань між двома сусідніми точками дорівнює 0,5 см.



Мал. 6.34

Мал. 6.35

Тобто ми показали, що 9 точок можна розмістити відповідним чином, і довели, що 10 точок розмістити відповідно до умови задачі неможливо.
Відповідь: 9 точок.

Приклад 6. Доведіть, що в кожному дев'ятикутнику існує пара діагоналей, кут між якими менший за $7°$.

Доведення

Усього в дев'ятикутнику $(9 \cdot 6) : 2 = 27$ діагоналей (врахували, що з кожної вершини можна провести 6 діагоналей і що кожна з діагоналей сполучає дві вершини). Проведемо через довільну точку площини 27 прямих паралельно діагоналям дев'ятикутника. Ці прямі розіб'ють повний кут, градусна міра якого $360°$, на 54 частини. Маємо: $7° \cdot 54 = 368° > 360°$, тобто за принципом Діріхле серед утворених кутів існує кут, менший за $7°$.

Твердження доведено.

Приклад 7. На площині позначили 6 точок, жодні 3 з яких не лежать на одній прямій. Кожні дві точки сполучили відрізком червоного або синього кольору. Доведіть, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, усі сторони якого мають один колір.

Доведення

Позначимо ці точки через A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 і A_6. Із кожної з цих точок виходять 5 відрізків двох кольорів. За принципом Діріхле серед цих відрізків є принаймні 3 відрізки одного кольору. Нехай для точки A_1 це відрізки A_1A_2, A_1A_3 і A_1A_4 червоного кольору. Розглянемо відрізки A_2A_3, A_2A_4 і A_3A_4. Можливі такі випадки.

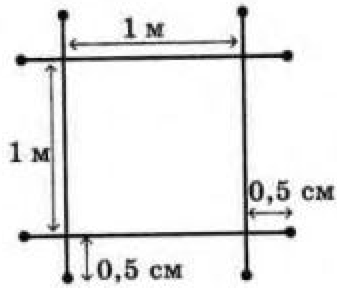
1) Серед цих відрізків є червоний, наприклад A_2A_3. Тоді в трикутнику $A_1A_2A_3$ всі сторони червоні.

2) Серед цих відрізків немає червоного. Тоді в трикутнику $A_2A_3A_4$ всі сторони сині.

Розв'яжіть самостійно такі задачі.

1. Шість школярів з'їли 7 цукерок. Доведіть, що хоча б один з них з'їв 2 цукерки.
2. Чи можна вивезти 50 каменів, маса яких 370 кг, 372 кг, ... 468 кг, на 7 тритонних вантажівках?
3. Кожну сторону квадрата поділили на 8 рівних частин і провели через них прямі, паралельно його сторонам. Яку найбільшу кількість з утворених клітинок можна зафарбувати, щоб у кожному «куточку», утвореному з трьох клітинок, хоча б одна клітинка була не зафарбована? (Порада. Позначте 1/8 довжини сторони квадрата за одиницю виміру і поділіть заданий квадрат на квадрати 2×2. Ці клітинки будуть вашими клітками для «кролів» – зафарбовані маленькі клітинки.)
4. Яку найбільшу кількість королів можна поставити на шахівниці так, щоб жодні два з них не били один одного?
5. Яка найбільша кількість павуків може жити на павутині, яку показано на малюнку 6.36, якщо павук терпить сусіда на відстані, не меншій за 1,1 м?

6. Усередині правильного трикутника зі стороною 1 м позначили 5 точок. Доведіть, що відстань між якимись двома з цих точок менша за 0,5 м. (Порада. Проведіть у заданому трикутнику середні лінії. Вони поділять його на 4 трикутники.)



Мал. 6.36

7. Доведіть, що рівносторонній трикутник не можна закрити двома меншими рівносторонніми трикутниками.
8. На площині дано 7 прямих. Доведіть, що якісь дві з них утворюють кут, менший за 27°.
9. На площині дано 17 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Кожні дві точки сполучено відрізком або червоного, або синього, або зеленого кольору. Доведіть, що знайдеться трикутник з вершинами в даних точках, усі сторони якого мають однаковий колір.
10. На відрізку завдовжки 1 зафарбовано кілька відрізків так, що відстань між довільними двома зафарбованими точками не дорівнює 0,1. Доведіть, що сума довжин усіх зафарбованих відрізків не перевищує 0,5. (Порада. Розбийте відрізок на 10 рівних частин і спроектуйте їх на паралельну їм пряму, причому дві зафарбовані точки не можуть проектуватися в одну.)
11. На площині дано 25 точок, причому серед довільних трьох з них знайдуться дві на відстані, меншій за 1 м. Доведіть, що існує круг з радіусом 1 м, який містить не менше 13 даних точок. (Порада. Розгляньте два круги з радіусами 1 м і центрами в даних точках, відстань між якими не менша за 1 м.)

Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

1. *Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки. – Киров: «АСА», 1994. – 272 с.
2. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. – М.: Наука, 1991. – Ч. 2. – 240 с.
3. *Сарана О. А.* Математичні олімпіади: просте і складне поруч. – К.: «А.С.К.», 2004. – 344 с.
4. *Федак І. В.* Готуємося до олімпіади з математики. – Кам'янець-Поділ.: Абетка, 2006. – 420 с.

ПЕРЕВІР СЕБЕ
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Недостатньо мати хороший розум.
Головне – уміти його використовувати.

Рене Декарт

Пропоновані завдання в тестовій формі дадуть вам змогу швидко отримати інформацію про те, чи дійсно ви засвоїли програму з геометрії для загальноосвітніх навчальних закладів з певної теми та підготуватися до підсумкової атестаційної роботи. Правильність виконання завдань вам допоможе з'ясувати табличка відповідей, наведена в розділі «Відповіді і поради».

ДО ПОВТОРЕННЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ ЗА 7 КЛАС

У завданнях 1–9 треба обрати з пропонованих відповідей одну, яка є, на вашу думку, правильною.

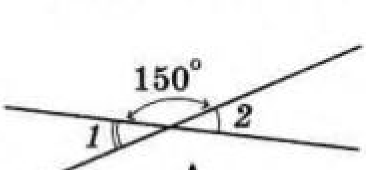
1. Укажіть, скільки серед наведених нижче тверджень є правильними.
1) Точкою, за означенням, є круг дуже малого радіуса.
2) Аксіоми планіметрії – це математичні твердження, які довів Евклід.
3) Якщо два промені мають спільний початок, то вони обмежують розгорнутий кут.
4) Через дві точки можна провести безліч променів, але тільки одну пряму.
5) Якщо два промені належать одній прямій, то вони обмежують розгорнутий кут.

А) Чотири. Б) Три. В) Два. Г) Одне. Д) Інша відповідь.

2. Знайдіть серед наведених тверджень теорему.
А) Точка не має ні довжини, ні ширини, її форму не можна визначити.
Б) Кутом називається частина площини, обмежена двома променями, що виходять з однієї точки.
В) Два трикутники рівні, якщо їх можна сумістити накладанням.
Г) Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести лише одну пряму, паралельну даній.
Д) Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної.

3. На прямій послідовно розміщено точки: A, B, C і M. Відстань між серединами відрізків AB і BC дорівнює 5 см, а між серединами відрізків BC і CM – 6 см. Знайдіть відстань між серединами відрізків AB і CM.
А) Не можна визначити. Б) 22 см. В) 16 см. Г) 11 см.
Д) Інша відповідь.

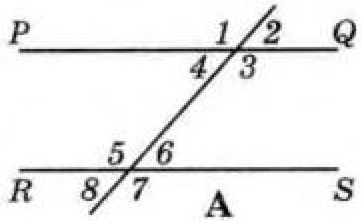
4. Прямий кут поділено на три частини, градусні міри яких відносяться як 2 : 3 : 4. Знайдіть градусні міри цих частин.
А) 40°, 60°, 80°. Б) 10°, 15°, 20°. В) 20°, 30°, 40°. Г) 18°, 27°, 55°. Д) 10°, 30°, 40°.



А

5. На малюнку **А** зображено прямі, що перетинаються. Знайдіть суму кутів $\angle 1 + \angle 2$.
А) 15°. Б) 30°. В) 60°. Г) 180°. Д) 300°.

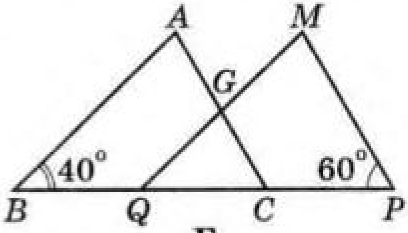
6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, у 5 разів більший за інший. Знайдіть градусні міри всіх утворених кутів.
А) 30° і 150°. Б) 100° і 20°. В) 30°, 30°, 150°. Г) 100°, 20°, 100°, 20°. Д) 30°, 150°, 30°, 150°.



А

7. Прямі PQ і RS паралельні (мал. **А**). Сума яких двох кутів дорівнює 180°?
А) $\angle 5 + \angle 7$. Б) $\angle 3 + \angle 6$. В) $\angle 1 + \angle 5$. Г) $\angle 1 + \angle 7$. Д) $\angle 8 + \angle 2$.

8. Точка P належить заданій прямій. Із неї як центра кола провели дугу, яка перетинає вказану пряму в точці M. Потім з точки M як центра кола провели дугу такого самого радіуса до перетину з першою дугою в точці E. Знайдіть градусну міру кута PEM.
А) 30°. Б) 45°. В) 60°. Г) 75°. Д) 90°.



Б

9. Трикутники ABC і MQP рівні, $BC = PQ$ (мал. **Б**). Знайдіть кут QGC.
А) 20°. Б) 40°. В) 60°. Г) 80°. Д) 100°.

У завданні 10 сформуйте відповідні пари з виразів лівого і правого стовпчиків так, щоб разом з умовою утворилися правильні твердження.

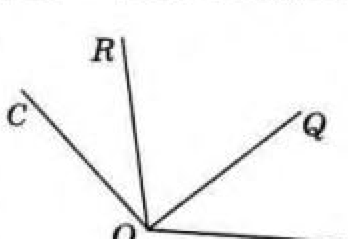
10. Точки O_1 і O_2 – центри двох кіл з радіусами $R_1 = 7$ см і $R_2 = 5$ см відповідно.

А) $O_1O_2 = 12$ см.	1) Кола перетинаються.
Б) $O_1O_2 = 22$ см.	2) Кола дотикаються зовнішньо.
В) $O_1O_2 = 4$ см.	3) Кола дотикаються внутрішньо.
Г) $O_1O_2 = 0$ см.	4) Кола не мають спільних точок, і одне розміщено всередині іншого.
Д) $O_1O_2 = 2$ см.	5) Круги, обмежені колами, не мають спільних точок.
Е) $O_1O_2 = 1$ см.	6) Кола – концентричні.

До завдань 11–16 запишіть тільки відповідь.

11. На малюнку **В** $\angle POR = 110°$, $\angle QOC = 90°$, $\angle POC = 140°$. Знайдіть кут QOR.

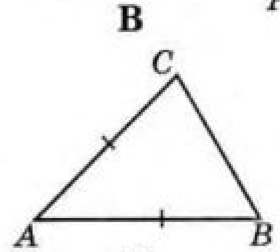
12. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$) кут, зовнішній до кута A, дорівнює 60°. Знайдіть градусну міру найбільшого з кутів трикутника ABC.



В

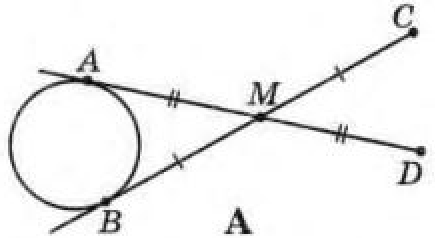
13. Укажіть, як треба провести пряму, щоб вона поділила трикутник ABC (мал. **Г**) на два рівних трикутники.

14. Кут при вершині A трикутника ABC дорівнює 60°. Під яким кутом перетинаються бісектриси кутів B і C даного трикутника?



Г

15. У прямокутник вписано два кола, радіуси яких дорівнюють по 5 см. Кожне з цих кіл дотикається до трьох сторін прямокутника і до іншого кола. Знайдіть площу заданого прямокутника.



16. Прямі AD та BC перетинаються в точці M і дотикаються до кола в точках A і B (мал. **А**). Відомо, що $AM = MD$, $BM = MC$, хорду AB видно з точки M під кутом $20°$. Знайдіть градусну міру кута MCD.

ДО РОЗДІЛУ I

У завданнях 1–2 оберіть правильні, на вашу думку, твердження. Їх МОЖЕ БУТИ КІЛЬКА.

1. Які з таких тверджень є правильними?

А) Центральним кутом називається кут з вершиною всередині кола.
Б) Вписаним кутом називається кут з вершиною на колі.
В) Повний кут – це розгорнутий кут.
Г) Центральним кутом називається кут з вершиною в центрі кола.
Д) Вписаним кутом називається кут, вершина якого належить колу, а його сторони перетинають це коло.

2. Які з таких тверджень є правильними?

А) Градусною мірою дуги кола називається градусна міра відповідного їй вписаного кута.
Б) Міра дуги кола залежить від радіуса кола.
В) В одному колі рівні дуги стягуються рівними хордами.
Г) У різних колах рівні дуги стягуються рівними хордами.
Д) Вписаний кут удвічі менший за відповідний йому центральний кут.

У завданнях 3–7 треба обрати з пропонованих відповідей одну, яка є, на вашу думку, правильною.

3. Чи можна трьома точками поділити коло на дуги, градусні міри яких $156°$, $104°$, $101°$?

А) Так. Б) Ні. В) Не завжди. Г) При певному значенні радіуса кола. Д) Інша відповідь.

4. Радіус кола з центром O дорівнює 5 см. Знайдіть довжину хорди AB, якщо $\angle AOB = 300°$.

А) 5 см. Б) 10 см. В) Не можна визначити. Г) Інша відповідь. Д) 15 см.

5. У коло радіуса $R = 10$ см вписано кут ACB, що дорівнює $30°$. Знайдіть довжину хорди AB.

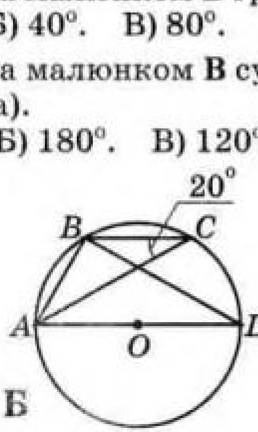
А) 2,5 см. Б) 5 см. В) 10 см. Г) Не можна визначити. Д) Інша відповідь.

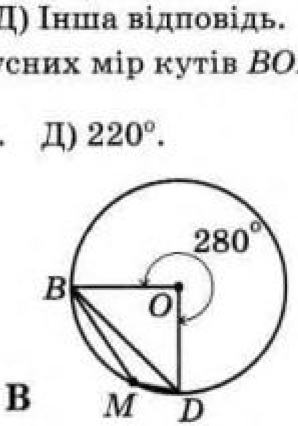
6. Знайдіть за малюнком **Б** градусну міру кута BAD (O – центр кола).

А) $60°$. Б) $40°$. В) $80°$. Г) $70°$. Д) Інша відповідь.

7. Знайдіть за малюнком **В** суму градусних мір кутів BOD і BMD (O – центр кола).

А) $320°$. Б) $180°$. В) $120°$. Г) $90°$. Д) $220°$.





До завдань 8–10 запишіть тільки відповідь.

8. Три точки A, B і C поділяють коло на три дуги, градусні міри яких відносяться як 2 : 3 : 5. Знайдіть найбільший кут трикутника ABC.
9. Через кінці хорди кола провели дві дотичні до цього кола. Знайдіть кут між дотичними, якщо хорда стягує дугу, градусна міра якої 60°.
10. Які можуть бути кути рівнобедреного трикутника, якщо його основу видно з центра описаного навколо нього кола під кутом 60°?

ДО РОЗДІЛУ II

У завданнях 1–2 оберіть правильні, на вашу думку, твердження. Їх МОЖЕ БУТИ КІЛЬКА.

1. Які з таких тверджень є правильними?
   А) Паралелограмом називається чотирикутник, у якого дві сторони паралельні.
   Б) Навколо довільного паралелограма можна описати коло.
   В) У паралелограма всі кути можуть бути гострими.
   Г) Існує паралелограм, у якого лише один кут тупий.
   Д) Паралелограм може мати три рівні кути.

2. Які з таких тверджень є правильними?
   А) Якщо в паралелограма діагоналі рівні, то він є прямокутником.
   Б) Прямокутник, вписаний у коло, є квадратом.
   В) Якщо навколо трапеції можна описати коло, то вона рівнобічна.
   Г) Якщо в ромба діагоналі перетинаються під прямим кутом, то він є квадратом.
   Д) Якщо в трапецію можна вписати коло, то вона рівнобічна.

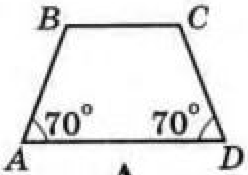
У завданні 3 сформуйте відповідні пари з виразів лівого і правого стовпчиків так, щоб утворилися правильні твердження.

3. Утворіть правильні твердження.

А) У чотирикутнику протилежні сторони рівні.	1) Тоді в нього можна вписати коло.
Б) У чотирикутнику всі сторони рівні.	2) Тоді він є квадратом.
В) У паралелограма діагоналі рівні і є бісектрисами його кутів.	3) Тоді він є паралелограмом.
Г) Суми протилежних сторін чотирикутника рівні.	4) Тоді навколо нього можна описати коло.
Д) Сума протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180°.	5) Тоді він є ромбом.

У завданнях 4–18 треба обрати з пропонованих відповідей одну, яка є, на вашу думку, правильною.

4. Укажіть, навколо якого з чотирикутників можна описати коло, якщо відомо відношення градусних мір внутрішніх кутів кожного з них, узятих послідовно.
   А) 1 : 7 : 4 : 3. Б) 3 : 8 : 4 : 5. В) 2 : 7 : 4 : 1. Г) 3 : 4 : 5 : 4.
   Д) 1 : 5 : 4 : 3.



А

5. Укажіть, у який з чотирикутників можна вписати коло, якщо відомо відношення довжин послідовних сторін кожного з них.
А) 1 : 5 : 4 : 3. Б) 3 : 2 : 7 : 5. В) 2 : 5 : 4 : 1.
Г) 1 : 4 : 5 : 4. Д) 1 : 5 : 4 : 2.

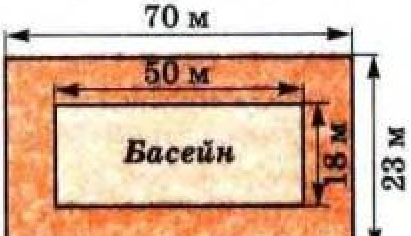
6. $ABCD$ – трапеція (мал. А). Відомо, що є трапеція $KOME$, яка дорівнює трапеції $ABCD$. Кути K і E трапеції $KOME$ дорівнюють по 70°. Яке з наступних тверджень є правильним?
А) $KO = AB$.
Б) Кут O – прямий.
В) Усі сторони трапецій мають однакову довжину.
Г) Периметр трапеції $KOME$ в 3 рази більший за периметр трапеції $ABCD$.
Д) Обидві трапеції є рівнобічними.

7. Діагоналі трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перетинаються в точці O. Яке з наступних тверджень є правильним?
А) $BC < AD$. Б) $S_{ABC} = S_{DBC}$. В) $AO > OC$. Г) $S_{ABC} < S_{DBC}$. Д) $S_{ABC} > S_{DBC}$.

8. Скільки з наведених тверджень є ознаками ромба?
1) Паралелограм, в який можна вписати коло.
2) Чотирикутник, в якого діагоналі взаємно перпендикулярні.
3) Чотирикутник, в якого всі сторони рівні.
4) Паралелограм, в якого всі висоти рівні.
5) Чотирикутник, в якого діагоналі є бісектрисами його кутів.
6) Чотирикутник, вершини якого є серединами сторін прямокутника.
А) П'ять. Б) Два. В) Чотири. Г) Три. Д) Інша відповідь.

9. Бісектриса одного з кутів паралелограма перетинає його протилежну сторону під кутом 30°. Знайдіть більший з кутів паралелограма.
А) 30°. Б) 120°. В) 150°. Г) 90°. Д) Інша відповідь.

10. Один з кутів ромба дорівнює 140°. Який кут утворює зі стороною ромба його діагональ, проведена з вершини гострого кута?
А) 40°. Б) 70°. В) 90°. Г) 10°. Д) 20°.



Б

11. Навколо басейну прямокутної форми зроблено доріжку для прогулянок так, як показано на малюнку **Б**. Знайдіть площу цієї доріжки.
А) 100 м². Б) 161 м².
В) Інша відповідь. Г) 710 м². Д) 1610 м².

12. Протилежні кути рівнобічної трапеції можуть дорівнювати:
А) 155° і 35°. Б) 60° і 30°. В) 60° і 90°. Г) 160° і 30°. Д) 155° і 25°.

13. Точки M, P, H і T – середини сторін трапеції. Встановіть вид чотирикутника $MPHT$.
А) Паралелограм. Б) Рівнобічна трапеція. В) Ромб.
Г) Прямокутник. Д) Квадрат.

14. Діагоналі трапеції поділяють її середню лінію на три рівних відрізки. Знайдіть відношення основ цієї трапеції.
А) 1 : 3. Б) 2 : 3. В) 1 : 1. Г) 1 : 2. Д) Інша відповідь.

15. У рівнобедрений прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 4 см, вписано квадрат, який має спільний кут з трикутником. Знайдіть периметр квадрата.

А) 4 см. Б) 6 см. В) 8 см. Г) 16 см. Д) Інша відповідь.

16. У рівносторонній трикутник вписано ромб, який має спільний кут з трикутником. Знайдіть периметр трикутника, якщо периметр ромба дорівнює a.

А) $2a$. Б) $\frac{3}{2}a$. В) $\frac{3}{4}a$. Г) a. Д) Інша відповідь.

17. Діагоналі рівнобічної трапеції перетинаються під прямим кутом і дорівнюють по 12 см. Знайдіть площу чотирикутника, вершинами якого є середини сторін трапеції.

А) 144 см^2. Б) 16 см^2. В) 72 см^2. Г) Визначити не можна. Д) 36 см^2.

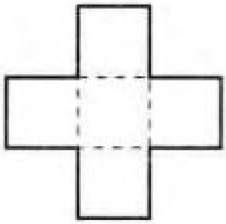
18. Знайдіть площу паралелограма, вписаного у коло радіуса 6 дм, якщо одна з вершин паралелограма віддалена від його діагоналі на 3 дм.

А) 3,6 м^2. Б) 36 дм^2. В) 18 дм^2. Г) 36 дм. Д) Інша відповідь.

До завдань 19–25 запишіть тільки відповідь.

19. Знайдіть площу описаного навколо кола чотирикутника, довжини сторін якого дорівнюють 20 см, 10 см, 30 см і 40 см, а радіус вписаного кола – 13 см. Відповідь запишіть у квадратних метрах.

20. Фігура на малюнку **А** складається з п'яти рівних квадратів. Її площа дорівнює 245 см^2. Знайдіть периметр цієї фігури.



А

21. У квадраті провели діагоналі і послідовно сполучили середини його сторін. Площа найменшого з утворених трикутників дорівнює 1 см^2. Знайдіть сторону даного квадрата.

22. Точку O, в якій перетинаються діагоналі ромба $ABCD$, сполучили з точкою M – серединою сторони BC. Площа трикутника BOM дорівнює 2 см^2. Знайдіть площу ромба.

23. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини меншої її основи, поділяє більшу основу у відношенні 2 : 3. Знайдіть відношення середньої лінії цієї трапеції до її більшої основи.

24. Знайдіть площу описаної рівнобічної трапеції, бічна сторона якої дорівнює 7 дм, а радіус вписаного в неї кола – 5 дм.

25. Радіус кола, вписаного в прямокутну трапецію, дорівнює 5 м, а більша бічна сторона – 18 м. Знайдіть площу трапеції.

ДО РОЗДІЛУ III

Оберіть правильні, на вашу думку, твердження. Їх МОЖЕ БУТИ КІЛЬКА.

1. Які з наступних тверджень є правильними?

А) Паралельні прямі, що перетинають кут, відтинають на його сторонах рівні відрізки.

Б) Паралельні прямі, що перетинають кут, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки.

В) Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники подібні.

Г) Пряма, що перетинає трикутник, відтинає від нього трикутник, подібний даному.

Д) Відношення всіх відповідних лінійних елементів подібних трикутників дорівнює їх коефіцієнту подібності.

У завданні 2 сформуйте відповідні пари з виразів лівого і правого стовпчиків так, щоб утворилися правильні твердження.

2. Утворіть правильні твердження.

А) Подібними є трикутники, в яких усі кути рівні, а відповідні сторони пропорційні.

Б) Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта їх подібності.

В) Подібними є два трикутники, в яких усі сторони пропорційні.

Г) Подібними є трикутники, в яких два кути рівні.

Д) Подібними є два трикутники, в яких дві сторони пропорційні, а кути, утворені цими сторонами, – рівні.

1) Це властивість подібних трикутників.

2) Це друга ознака подібності трикутників.

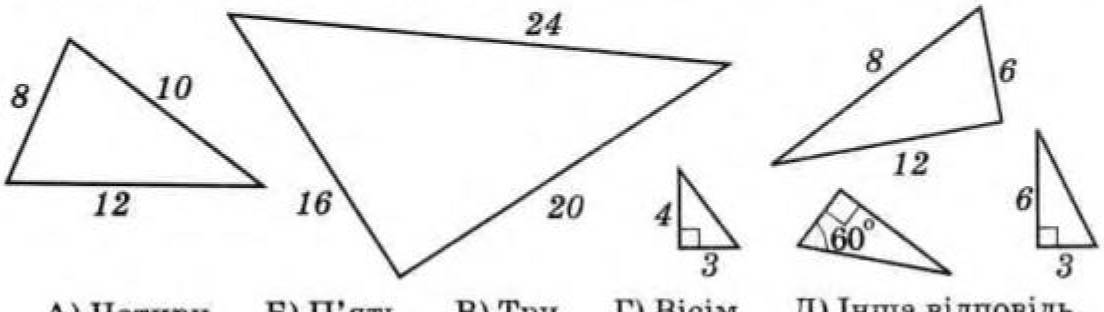
3) Це третя ознака подібності трикутників.

4) Це означення подібності трикутників.

5) Це перша ознака подібності трикутників.

У завданнях 3–9 треба обрати з пропонованих відповідей одну, яка є, на вашу думку, правильною.

3. Скільки пар подібних трикутників серед зображених трикутників?



А) Чотири. Б) П'ять. В) Три. Г) Вісім. Д) Інша відповідь.

4. У трапеції основи відносяться як 2 : 5. У якому відношенні поділяє діагоналі трапеції точка їх перетину?
А) 1 : 5 і 2 : 5. Б) 2 : 3 і 1 : 4. В) 2: 3 і 2 : 3. Г) 2 : 5 і 2 : 5.
Д) Інша відповідь.

5. Периметр трикутника з вершинами у серединах сторін трикутника ABC дорівнює 6 м. Знайдіть периметр трикутника ABC.
А) 24 м. Б) 12 м. В) 3 м. Г) 6 м. Д) Інша відповідь.

6. Трикутники зі сторонами a, b, c і b, c, d подібні. Коефіцієнт подібності цих трикутників може дорівнювати:
А) 1,6. Б) 0,6. В) 2. Г) Довільному числу. Д) Інша відповідь.

7. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ кути A і A_1 рівні, добутки $AB \cdot A_1B_1$ і $AC \cdot A_1C_1$ рівні. Чи подібні дані трикутники?
А) Не завжди. Б) Ні. В) Так. Г) Так, якщо $AB \cdot A_1B_1$ і $AC \cdot A_1C_1$.
Д) Так, якщо $AB = AC$.

8. У прямокутний трикутник ABC вписано квадрат $KMNC$ із стороною 2 см (точка K належить катету AC). Знайдіть добуток довжин відрізків AK і NB.

А) Не можна визначити. Б) 16. В) 4. Г) 8. Д) Інша відповідь.

9. У колі провели дві хорди, що перетинаються. Точка їх перетину ділить одну з хорд на відрізки 2 м і 6 м, а другу – у відношенні 1 : 3. Знайдіть довжину другої хорди.

А) 6 м. Б) 8 м. В) 4 м. Г) Визначити не можна. Д) Інша відповідь.

До завдань 10–15 запишіть тільки відповідь.

10. Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, віддалений від катетів цього трикутника на 3 см і 5 см. Знайдіть катети трикутника.
11. У кут A вписано два кола з центрами O_1 і O_2. Точки дотику кіл до однієї сторони кута позначено як M_1 та M_2 відповідно. Площі трикутників AO_1M_1 і AO_2M_2 відносяться як 1 : 4. Знайдіть відношення радіусів заданих кіл.
12. Середня лінія трапеції перебільшує меншу з основ трапеції на 2 дм. Знайдіть різницю основ трапеції.
13. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона відноситься до основи як 5 : 3. У якому відношенні поділяє висоту трикутника, проведену до його основи, бісектриса кута при основі?
14. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 15 см. Відрізок із кінцями на бічних сторонах трапеції, паралельний її основам, поділяє бічні сторони у відношенні 2 : 3. Знайдіть довжину даного відрізка.
15. Довжини основ трапеції $2a$ і $8a$. Середини кожної з основ сполучили з кінцями іншої основи. Проведені відрізки перетинаються в точках M і N. Знайдіть відстань між цими точками.

ДО РОЗДІЛУ IV

Сформуйте з виразів правого і лівого стовпчиків правильні рівності.

1. У трикутнику ABC проти кутів A, B, C містяться сторони a, b, c; ($\angle C = 90^\circ$).

А) $\sin A =$	1) $b : c$.
Б) $\cos A =$	2) $b : a$.
В) $\operatorname{tg} A =$	3) 1.
Г) $\operatorname{ctg} A =$	4) $a : c$.
Д) $\sin^2 A + \cos^2 A =$	5) $a : b$.

Оберіть правильні, на вашу думку, твердження. Їх МОЖЕ БУТИ КІЛЬКА.

2. Які з наступних тверджень є правильними?

А) Косинус кута залежить тільки від градусної міри кута.
Б) Синус кута залежить від розмірів трикутника.
В) Тангенс кута залежить від розміщення трикутника на площині.
Г) Синус кута не залежить від розмірів трикутника і його розміщення на площині.
Д) Синус кута залежить тільки від градусної міри кута.

3. Заповніть порожні клітинки таблиці.

	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$
$\sin\alpha$			
$\cos\alpha$			
$\operatorname{tg}\alpha$			
$\operatorname{ctg}\alpha$			
$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$			
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$			

У завданнях 4–5 заповніть порожні клітинки так, щоб утворилися правильні твердження.

4. При збільшенні міри кута α від 0° до 90° значення тригонометричних функцій змінюється так:

1) $\sin\alpha$		від		до	
2) $\cos\alpha$		від		до	
3) $\operatorname{tg}\alpha$		від		до	
4) $\operatorname{ctg}\alpha$		від		до	

5. Заповніть порожні клітинки таблиці.

1) Синус даного кута дорівнює		доповняльного кута
2) Косинус даного кута дорівнює		доповняльного кута
3) Тангенс даного кута дорівнює		доповняльного кута
4) Котангенс даного кута дорівнює		доповняльного кута
5) $\operatorname{tg}^2\alpha + 1$	дорівнює	
6) $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1$	дорівнює	

До завдань 6–10 запишіть тільки відповідь.

6. Знайдіть периметр прямокутного трикутника за його гіпотенузою c і гострим кутом α.

7. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а косинус прилеглого до нього кута дорівнює $\frac{1}{4}$. Знайдіть проекцію цього катета на гіпотенузу.

8. Катет прямокутного трикутника дорівнює 2 м, а синус протилежного кута дорівнює $\frac{1}{2}$. Знайдіть довжину другого катета.

9. Проекції катетів прямокутного трикутника на його гіпотенузу дорівнюють 4 дм і 9 дм. Знайдіть катети цього трикутника.

10. У прямокутний трикутник з катетами 6 м і 8 м вписано коло. Знайдіть відстань від центра кола до висоти трикутника, проведеної до його гіпотенузи.

СЛОВНИЧОК

Аксіома – твердження, що приймається без доведення (с. 7, 8).

Арбелос – фігура, схожа на кушнірський ніж, вивченню властивостей якої багато уваги приділяв Архімед (с. 213).

Архімеда

– *леми*, сформульовані Архімедом і відомі під такою назвою (с. 36, 116, 212, 214);

– *теорема* – теорема про властивості вписаної ламаної з двох ланок, яку відкрив і довів Архімед (с. 213);

– *формули* – співвідношення для відрізків у рівнобедреному трикутнику, відкриття яких приписують Архімеду (с. 215, 217).

Астролябія – прилад, за допомогою якого вимірюють кути на місцевості (с. 180).

Багатокутник – частина площини, обмежена замкненою ламаною, яка не перетинає сама себе (с. 41);

– *опуклий* – жодна з його сторін при необмеженому продовженні не перетинає цей багатокутник (с. 41);

– *правильний* – у якого всі сторони рівні і всі кути рівні (с. 42);

– *описаний* – усі сторони дотикаються до кола (с. 42, 44);

– *вписаний* – усі вершини належать колу (с. 42, 44);

– *однойменні* – з однаковим числом вершин (с. 42).

Базовий трикутник – трикутник, який вміємо будувати за даними елементами з множини сторін і кутів трикутника (перелік базових трикутників – перелік опорних задач на побудову трикутника) (с. 251).

Варіньйона паралелограм – паралелограм, який утворюється, якщо послідовно сполучати середини сторін довільного чотирикутника (с. 82).

Вектор – напрямлений відрізок (с. 185);

– *колінеарні* – вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих; поділяються на протилежно напрямлені та співнапрямлені (с. 186);

– *модуль вектора AB* – довжина відрізка AB (с. 186);

– *множення вектора на число* – певне правило утворення вектора колінеарного даному (с. 189);

– *нульовий вектор* – вектор, початок і кінець якого збігаються, його довжина дорівнює нулю (с. 186);

– *протилежні вектори* – вектори, довжини яких рівні, а напрями протилежні (с. 187);

– *рівні вектори* – співнапрямлені вектори, довжини яких рівні (с. 187);

– *різниця двох векторів* – сума першого вектора і протилежного другому (с. 191);

– *розкласти вектор за двома неколінеарними векторами* – представлення вектора у вигляді суми двох векторів (с. 193);

– *сума двох векторів* – вектор, утворений з цих векторів за правилом трикутника або паралелограма (с. 190).

Геометричне місце точок – сукупність (множина) усіх точок, які задовольняють певну умову (с. 11).

Градус – міра кута, що складає $\frac{1}{360}$ частину міри розгорнутого кута (7 кл.).

Градусна міра дуги кола – градусна міра відповідного центрального кута (с. 17).

Градусна міра кута – міра кута, якщо кут вимірюють у градусах, мінутах, секундах (7 кл.).

Граф – графічне моделювання задачі;

– *вершини графа* – точки, що позначають певні об'єкти (с. 186);

– *ребра графа* – відрізки, що сполучають вершини графа (с. 186).

Діагоналі багатокутника – це відрізки, які сполучають дві його протилежні (несусідні) вершини (с. 42).

Ділильний циркуль – прилад, за допомогою якого можна поділити відрізок на кілька рівних частин (с. 137).

Діріхле принцип – принцип, за яким при розміщенні $n + 1$ кролів по n клітках хоча б у одній клітці міститься не менше як два кролі (с. 233).

Доведення – логічне міркування, яке виявляє правдивість певного твердження (с. 8).

Доведення від супротивного – спосіб доведення, коли робиться припущення, супротивне тому, що треба довести, і, спираючись на нього, приходять до логічного протиріччя (с. 10).

Достатня умова – ознака певної множини фігур (с. 11).

Дотична до кола – пряма, що має одну спільну точку з колом (7 кл.).

Дуга кола – частина кола, обмежена двома точками, що належать колу (с. 17).

Евкліда теорема – теорема про співвідношення площ подібних фігур, побудованих на сторонах прямокутного трикутника (с. 211).

Ейлера
– *точки* – середини відрізків висот трикутника, обмежених його вершинами й ортоцентром (с. 196);
– *пряма* – пряма, що проходить через ортоцентр трикутника і центр описаного навколо нього кола (с. 195);
– *коло* (або коло Фейєрбаха) – коло, яке проходить через основи висот і медіан трикутника та точки Ейлера (с. 196);
– *формула* – формула для визначення відстані між центрами вписаного й описаного кіл трикутника через радіуси цих кіл (с. 216).

Єгипетський трикутник – прямокутний трикутник, довжини сторін якого відносяться як 3 : 4 : 5 (с. 141).

Жергона теорема – теорема про співвідношення між довжинами відрізків трьох чевіан, на які вони поділяються спільною точкою свого перетину всередині трикутника (с. 222).

Зовнівписане коло – коло, яке дотикається до однієї сторони трикутника і до продовження двох інших його сторін (с. 230–233).

Зовнішній кут багатокутника – кут, суміжний з його внутрішнім кутом (с. 42).

Інцентр трикутника – точка перетину його бісектрис (с. 253).

Квадрат – прямокутник, у якого всі сторони рівні (с. 57).

Кола, дотичні одне до одного, – кола, які мають одну спільну точку, можливий *зовнішній* і *внутрішній* дотик (7 кл.).

Кола концентричні – кола, які мають спільний центр і різні радіуси (7 кл.).

Кола Торрічеллі – кола, описані навколо трикутників Наполеона (с. 206).

Коло, *вписане* у чотирикутник, – коло, що дотикається до всіх його сторін (с. 62);
– *описане* навколо багатокутника – коло, яке проходить через усі його вершини (с. 61).

Контрприклад – приклад того, що певне твердження не виконується (с. 11).

Кут, *вписаний* у коло, – кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло (с. 21);
– *повний* – кут, градусна міра якого становить 360° (с. 14);
– *центральний* – кут з вершиною у центрі кола (с. 17).

Кути доповняльні – кути, градусні міри яких у сумі становлять 90° (с. 168).

Лагранжа формула – формула для квадрата довжини бісектриси трикутника (с. 147).

Лема – допоміжна теорема (с. 35, 212).

Логічний крок – міркування, що складаються з тверджень-умов і тверджень-висновків, між якими ставлять слово «тоді» (с. 8).

Менелая теорема – теорема про властивість точок перетину прямої з двома сторонами трикутника і продовженням третьої (с. 218).

Метод *допоміжного кола* – використання у розв'язуванні додаткової побудови кола (с. 37);
– *площ* – використання площі як допоміжного елемента (с. 73);
– *подібності* – використання подібності трикутників, утворених додатковими побудовами (с. 145).

Мінута – міра кута, складає одну шістдесяту частину градуса (7 кл.).

Міра дуги кола – міра центрального кута, який спирається на цю дугу (с. 17).

Наполеона трикутники – конфігурація з чотирьох правильних трикутників, побудованих на сторонах деякого трикутника (с. 206).

Наслідок – твердження, що є безпосереднім висновком з теореми або аксіоми (с. 8).

Обернені теореми – теореми, з яких умова однієї є висновком іншої, і навпаки (с. 8).

Ознака – така теорема, яка стверджує, що виконання певних умов забезпечує належність фігури (фігур) зазначеній раніше множині (с. 9).

Означення – твердження, в якому роз'яснюється, які саме об'єкти або властивості підпадають під дану назву (с. 8).

Ортоцентр трикутника – точка перетину його висот (с. 253).

Ортоцентричний трикутник – трикутник, вершинами якого є основи висот заданого трикутника (с. 200).

Основна теорема подібності трикутників – теорема про трикутники, що відтинаються від кута паралельними прямими (с. 117).

Паппа теорема – теорема про властивість двох трійок точок на двох прямих, що перетинаються (с. 219).

Паралелограм – чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні (с. 57);

– *висота* паралелограма – відстань між його паралельними сторонами (с. 67).

Педальний трикутник – трикутник, вершини якого – проекції довільної точки X, що лежить усередині нетупокутного трикутника, на сторони цього трикутника (с. 201).

Піфагора теорема – теорема про суму квадратів катетів; відкрита Піфагором (с. 140).

Піфагорові трикутники – прямокутні цілочислові трикутники (с. 204).

Площа – число, яке ставиться у відповідність фігурі і має певні властивості (с. 47).

Подібні трикутники – трикутники, кути яких рівні, а проти рівних кутів лежать пропорційні сторони (с. 116);

– *відповідні вершини* подібних трикутників – вершини рівних кутів (с. 116);

– *відповідні кути* подібних трикутників – рівні кути цих трикутників;

– *відповідні сторони* подібних трикутників – сторони, які лежать проти рівних кутів (с. 116);

– *коефіцієнт подібності* подібних трикутників – відношення відповідних сторін або інших лінійних елементів цих трикутників (с. 116).

Поперечний масштаб – спосіб вимірювання відстаней між точками за картою або планом (с. 138).

Похила, проведена з даної точки до даної прямої, – відрізок, який сполучає дану точку з будь-якою точкою прямої і який не перпендикулярний до цієї прямої (с. 224).

Правила роботи з наближеними числами – правила додавання, віднімання, множення і ділення наближених чисел (с. 177).

Проекція похилої на пряму – відрізок заданої прямої між основою похилої та проекцією другого кінця похилої на пряму (7 кл.).

Пропорція – рівність двох відношень (с. 109).

Прямокутник – паралелограм, у якого всі кути прямі (с. 57).

Птолемея теорема – теорема про суму добутків протилежних сторін вписаного чотирикутника; відкриття приписують Птолемею (с. 148).

Рівновеликі фігури – фігури, що мають рівні площі (с. 47).

Рівноскладені багатокутники – два багатокутники, один з яких складено з частин іншого, що отримано розрізанням (с. 49).

Різницевий трикутник – трикутник, довжини сторін якого складають арифметичну прогресію (с. 203).

Ромб – паралелограм, у якого всі сторони рівні (с. 57).

Сегмент – частина круга, обмежена дугою кола і хордою, що стягує цю дугу (с. 33).

Сектор – частина центрального кута, яку обмежує відповідна йому дуга кола (7 кл.).

Секунда – міра кута, яка складає одну шістдесяту частину мінути (7 кл.).

Серединний трикутник – трикутник, вершинами якого є середини сторін заданого трикутника (с. 202).

Середнє арифметичне чисел a і b – півсума цих чисел (с. 207, 209, 210).

Середнє гармонійне чисел a і b – співвідношення між цими числами,

що виражається наступним чином:
$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ (с. 207, 209, 210).

Середнє геометричне чисел a і b (середнє пропорційне) – корінь квадратний з добутку цих чисел (с. 139, 142, 207, 209, 210).

Середнє квадратичне чисел a і b – співвідношення між цими числами, що виражається наступним чином:
$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (с. 208–210).

Середня лінія трикутника – відрізок, що сполучає середини двох сторін трикутника (с. 81).

Сімпсона пряма – пряма, що проходить через основи перпендикулярів, проведених з довільної точки кола, описаного навколо трикутника, до прямих, що містять сторони трикутника (с. 220);
– *теорема* про пряму Сімпсона (с. 220).

Софізм – навмисно помилковий умовивід (с. 232).

Твердження – речення, яке є істинним або хибним (с. 6).

Теорема – відоме математичне твердження, правильність якого математики довели певним логічним міркуванням (доведенням) (с. 8).

Трапеція – чотирикутник, в якого дві протилежні сторони паралельні (с. 57);
– *основи* трапеції – її паралельні сторони (с. 97);
– *висота* трапеції – відстань між її основами (с. 97);
– *рівнобічна* – бічні сторони рівні (с. 97);
– *середня лінія* трапеції – відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції (с. 97).

Тригонометричні таблиці – таблиці значень синусів, косинусів, тангенсів і котангенсів кутів (с. 162).

Тригонометричні функції гострого кута
– *косинус* гострого кута прямокутного трикутника – відношення катета, прилеглого до цього кута, до гіпотенузи (с. 162);
– *котангенс* гострого кута прямокутного трикутника – відношення катета, прилеглого до цього кута, до катета, що лежить проти цього кута (с. 162);
– *синус* гострого кута прямокутного трикутника – відношення катета, протилежного до цього кута, до гіпотенузи (с. 162);
– *тангенс* гострого кута прямокутного трикутника – відношення катета, що лежить проти цього кута, до катета, який прилягає до цього кута (с. 162).

Фалеса теорема – теорема про рівні відрізки, що відтинаються на сторонах кута паралельними прямими (с. 79);
– *узагальнена* – теорема про пропорційні відрізки, що відтинаються на сторонах кута паралельними прямими (с. 110).

Центроїд трикутника (центр ваги трикутника) – точка перетину його медіан (с. 91, 253).

Цілочисловий трикутник – трикутник, довжини сторін якого є натуральними числами (с. 204).

Чеви теорема – теорема про перетин трьох чевіан трикутника в одній точці (с. 221).

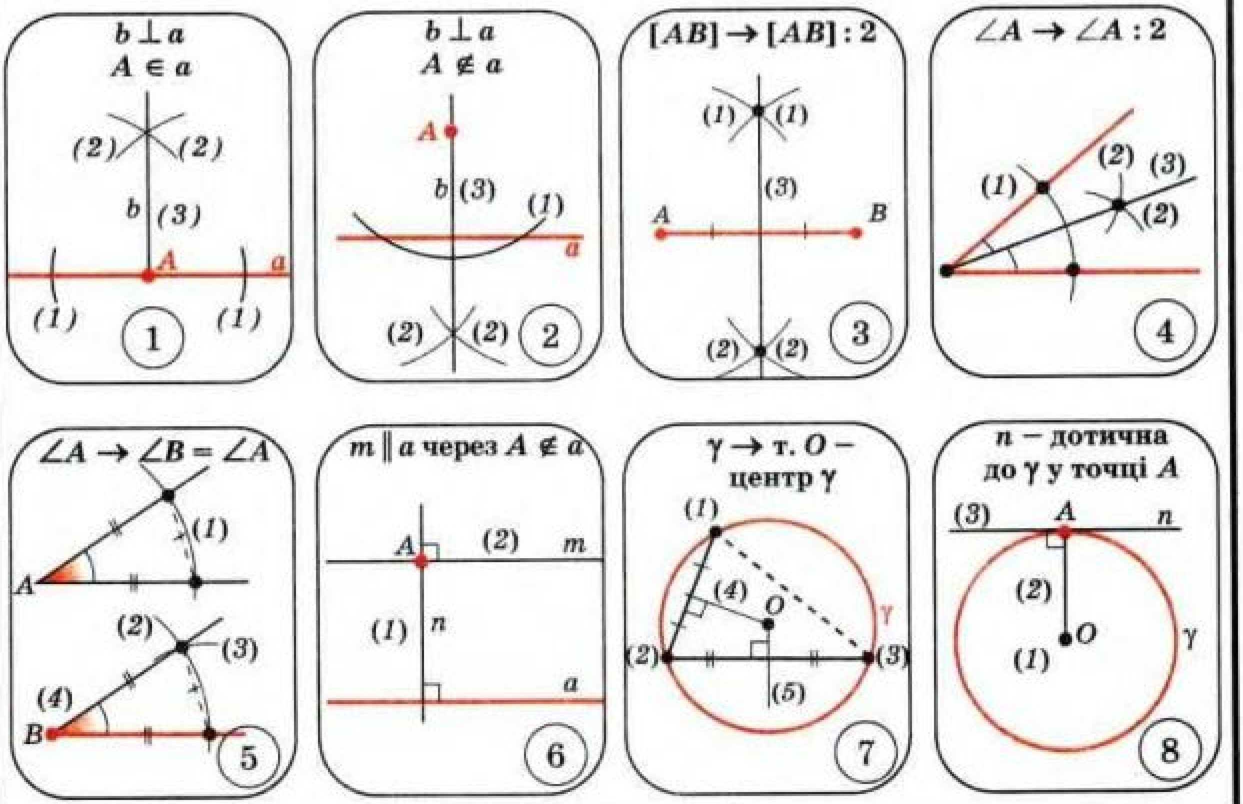
Чевіана – відрізок, який сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні цього трикутника (с. 220).

Четвертий пропорційний трьох даних відрізків a, b і c – відрізок x, якщо $a : b = c : x$ (с. 112).

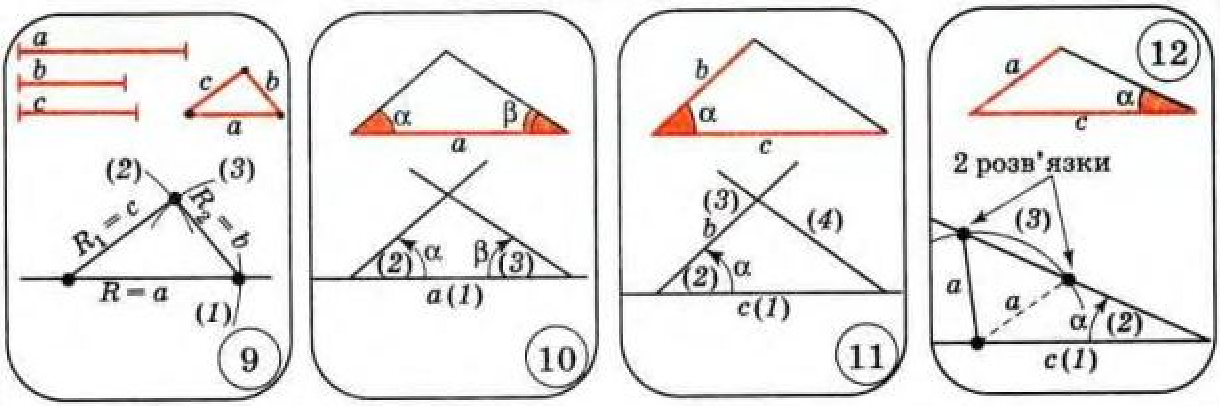
Чотирикутник – багатокутник, що має чотири сторони і чотири кути (с. 55).

Чудові точки трикутника – ортоцентр, центроїд і інцентр трикутника (с. 253).

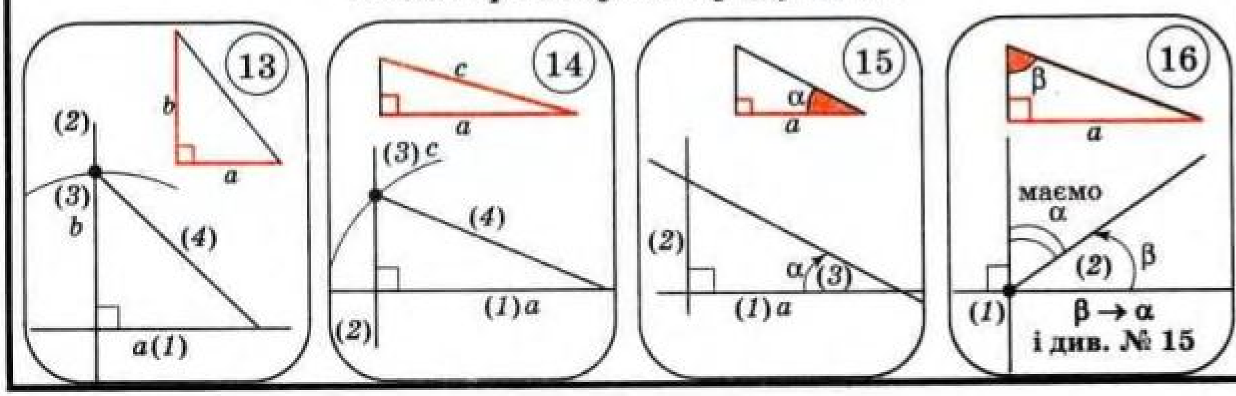
Опорні задачі на побудову (7 клас)



Базові трикутники

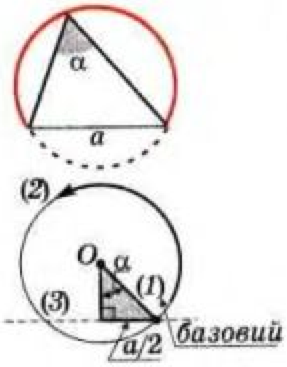


Базові прямокутні трикутники



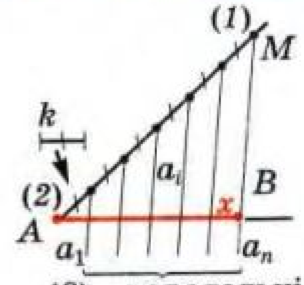
Опорні задачі на побудову (8 клас)

ГМТ, з яких даний відрізок a видно під заданим кутом α – сегмент, що вміщує заданий кут



Ділення заданого відрізка AB на задану кількість рівних частин

[AB], n → x [AB] : n

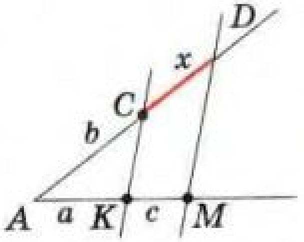


(3) – паралельні

∠A і k – довільні

Побудова четвертого пропорційного відрізка

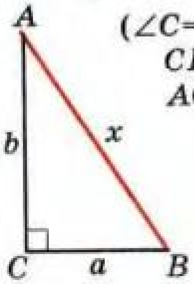
$a, b, c \to x = \frac{c \cdot b}{a}$



∠A – довільний

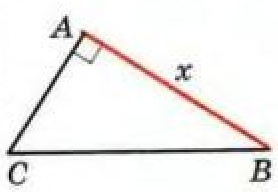
$\boxed{a, b \to x = \sqrt{a^2 + b^2}}$

$a, b \to \triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$, $CB = a$, $AC = b$)



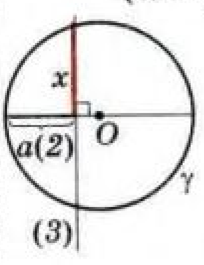
$a, b \to x = \sqrt{a^2 - b^2}$

$a, b \to \angle ABC$ ($\angle A = 90^\circ$, $CB = a$, $AC = b$)



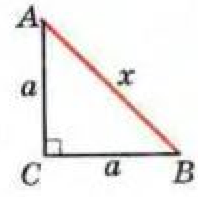
$\boxed{a, b \to x = \sqrt{a\,b}}$

1) $a, b \to \gamma$ $\left(R = \frac{a+b}{2}\right)$



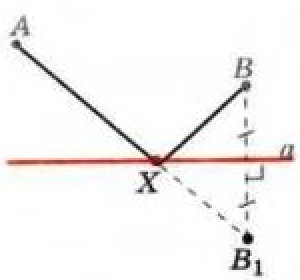
$\boxed{a \to x = a\sqrt{2}}$

$a \to \triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$, $AC = CB = a$)



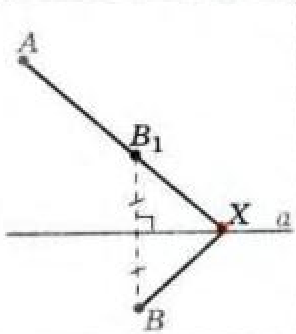
$A, B, a \to X$

$AX + XB$ – *найменша для* $X \in a$

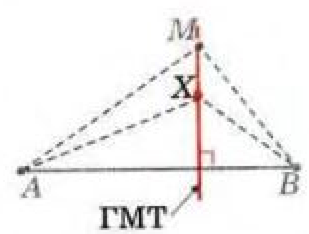


$A, B, a \to X$

$|AX - XB|$ – *найбільша для* $X \in a$



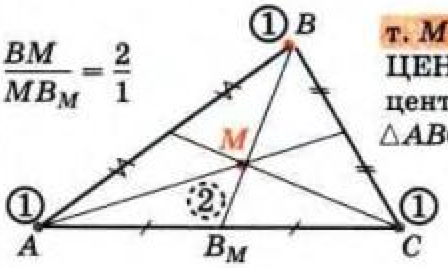
$[AB], M \to X$, для яких $AX^2 - XB^2 = AM^2 - MB^2$



Чудові точки трикутника

ТОЧКА ПЕРЕТИНУ МЕДІАН

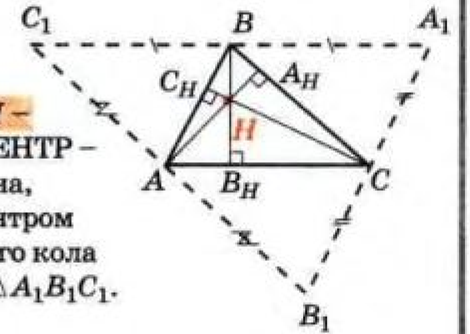
$$\frac{BM}{MB_M} = \frac{2}{1}$$



т. M – ЦЕНТРОЇД – центр ваги $\triangle ABC$.

① – *одиничні маси;*
B_M – *центр ваги* $[AC]$;
M – *центр ваги* $[BB_M]$.

ТОЧКА ПЕРЕТИНУ ВИСОТ



т. H – ОРТОЦЕНТР – єдина, бо є центром описаного кола навколо $\triangle A_1B_1C_1$.

$$\left.\begin{matrix} A_1C_1 \parallel AC \\ B_1C_1 \parallel BC \\ A_1B_1 \parallel AB \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} ABA_1C - \\ \textit{паралелограм} \\ AC_1BC - \\ \textit{паралелограм} \end{matrix}\right| \Rightarrow BA_1 = AC = C_1B$$

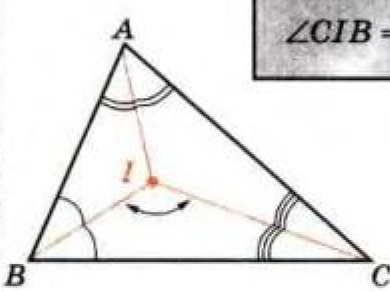
BB_H – *серединний перпендикуляр до* $[C_1A_1]$

ТОЧКА ПЕРЕТИНУ СЕРЕДИННИХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРІВ –

центр описаного кола

т. O – рівновіддалена від вершин $\triangle ABC$.

$$\angle CIB = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$$



$\underline{\triangle CIB}$:

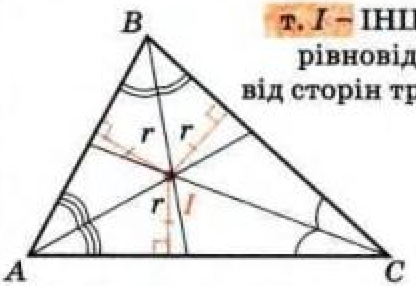
$$\angle CIB = 180^\circ - \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle B}{2} = 180^\circ - \frac{\angle C + \angle B}{2} =$$

$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}.$$ Щ. в. д.

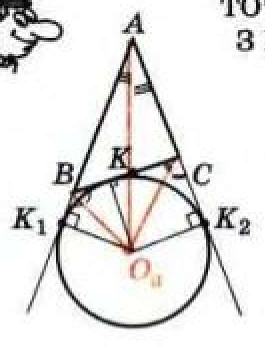
ТОЧКА ПЕРЕТИНУ БІСЕКТРИС –

центр вписаного кола

т. I – ІНЦЕНТР – рівновіддалена від сторін трикутника.



ТОЧКА ПЕРЕТИНУ БІСЕКТРИСИ КУТА ТРИКУТНИКА З БІСЕКТРИСАМИ ЗОВНІШНІХ КУТІВ ТРИКУТНИКА



т. O_a – центр зовнівписаного кола.

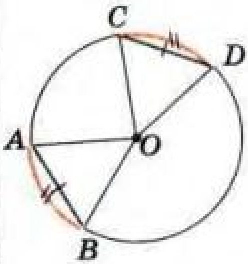
$$\left.\begin{matrix} O_aC \equiv l_{KCK_2} \\ O_aB \equiv l_{KBK_1} \end{matrix}\right| \Rightarrow d(O_a; (AK_2)) = d(O_a; (AK_1))$$

$$\Downarrow$$

$$O_aA \equiv l_A$$

т. O_a – *рівновіддалена від прямих BC, AB і AC.*

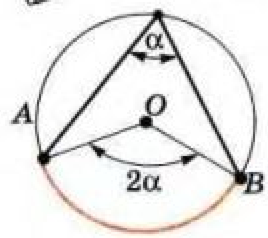
Опорні факти про коло



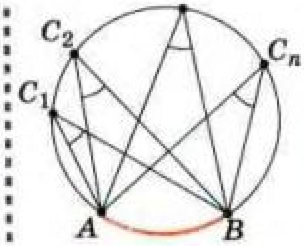
$AB = CD$

$\Updownarrow$

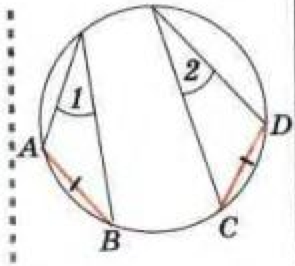
$\smile AB = \smile CD$



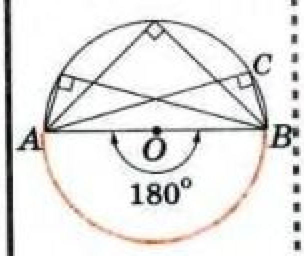
$\alpha = \frac{1}{2}\smile AB$



$\angle AC_1B = \ldots = \angle AC_nB$



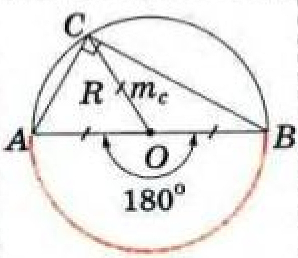
$AB=CD \Leftrightarrow \angle 1=\angle 2$



$AB = 2R$

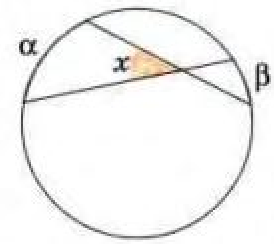
$\Updownarrow$

$\angle ACB = 90^\circ$

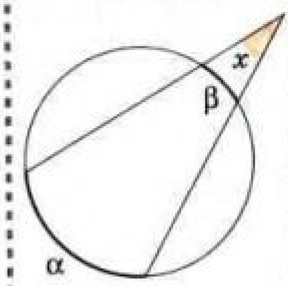


$\angle C = 90^\circ$

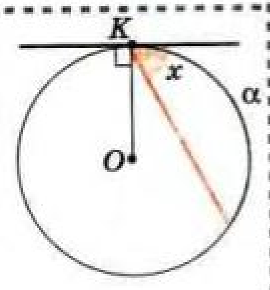
$R = m_c = \frac{c}{2}$



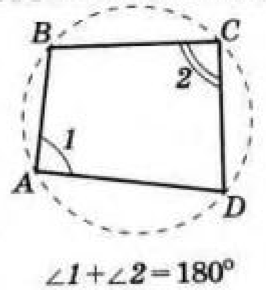
$x = \frac{\alpha+\beta}{2}$



$x = \frac{\alpha-\beta}{2}$



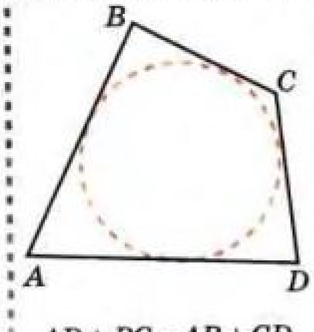
$x = \frac{\alpha}{2}$



$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

$\Updownarrow$

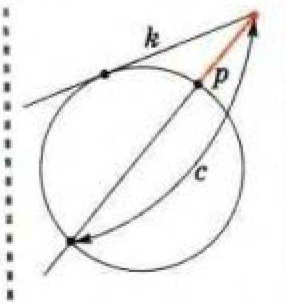
ABCD – вписаний



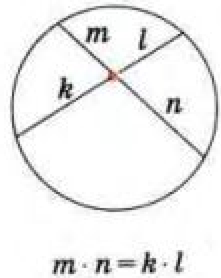
$AD + BC = AB + CD$

$\Updownarrow$

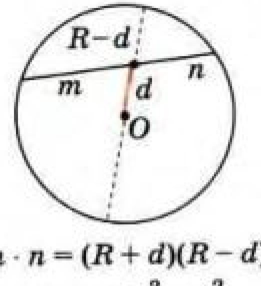
ABCD – описаний



$k^2 = p \cdot c$



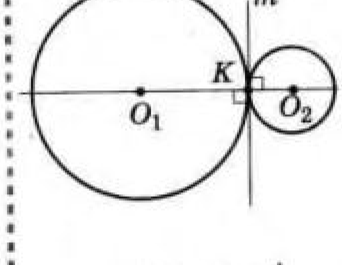
$m \cdot n = k \cdot l$

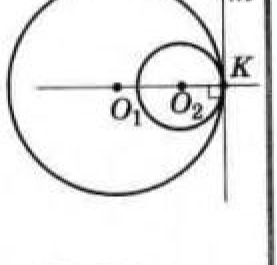


$m \cdot n = (R+d)(R-d)$

$m \cdot n = R^2 - d^2$

$\boxed{d^2 = R^2 - m \cdot n}$

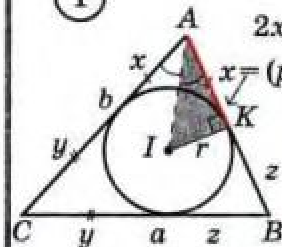




$\left.\begin{array}{l} O_1K \perp m \\ O_2K \perp m \end{array}\right| \Rightarrow K \in (O_1O_2)$

Опорні задачі кола

(1)



$2x+2y+2z=2p$

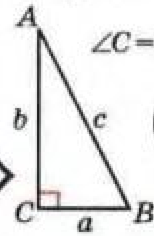
$x=(p-a)$

$x=p-(y+z)$

$r=(p-a)\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$

$p \triangleq \dfrac{P}{2}$

$\Rightarrow$

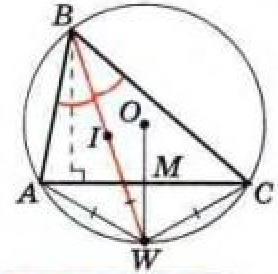


$\angle C=90^\circ \to \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}=1$

$\dfrac{a+b-c}{2}=r$

$2r=a+b-c=a+b-2R$

$r+R=\dfrac{a+b}{2}$



$AW=WI=WC$

$WM\perp AC$

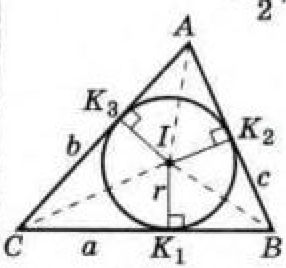
$\Downarrow$

$O\in WM$

(2)

$S=S_1+S_2+S_3=$

$=\dfrac{1}{2}ra+\dfrac{1}{2}rb+\dfrac{1}{2}rc$



$r=\dfrac{S}{p}$

$p\triangleq\dfrac{P}{2}$

$\Rightarrow$

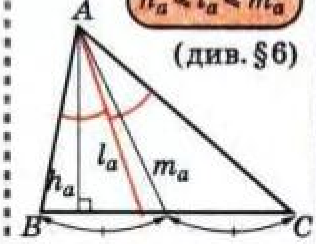
$r=\dfrac{S}{p} \qquad \dfrac{1}{r}=\dfrac{a+b+c}{2S}=$

$=\dfrac{a}{ah_a}+\dfrac{b}{bh_b}+\dfrac{c}{ch_c}$

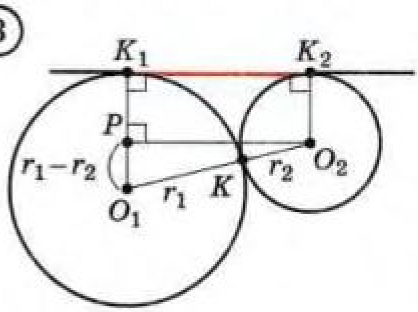
$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$

$h_a\leqslant l_a\leqslant m_a$

(див. §6)



(3)

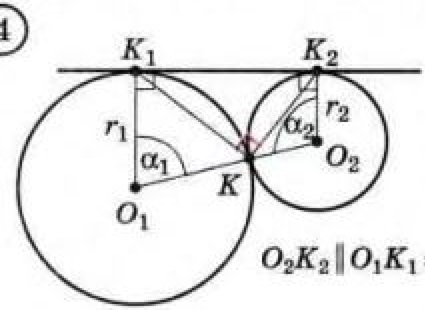


$O_2P\perp O_1K_1 \Rightarrow K_1K_2=O_2P;$

$O_2P=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}$

$K_1K_2=2\cdot\sqrt{r_1\cdot r_2}$

(4)



$O_1K_1\perp K_1K_2$

$O_2K_2\perp K_1K_2$

$\Downarrow$

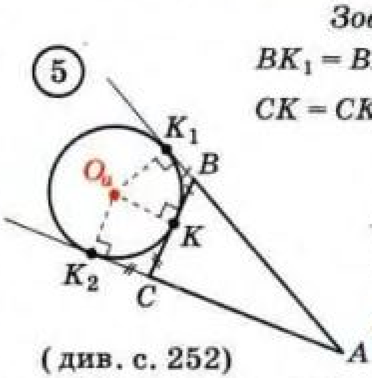
$O_2K_2 \parallel O_1K_1 \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2=180^\circ$

$\left.\begin{aligned}\angle KK_1K_2&=\dfrac{\alpha_1}{2}\\ \angle KK_2K_1&=\dfrac{\alpha_2}{2}\end{aligned}\right| \Rightarrow \angle K_1KK_2=180^\circ-\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$

$\angle K_1KK_2=90^\circ$

Зовнівписане коло (до $\triangle ABC$)

(5)



(див. с. 252)

$\left.\begin{aligned}BK_1&=BK\\ CK&=CK_2\end{aligned}\right| \Rightarrow BC=$

$=K_1B+K_2C$

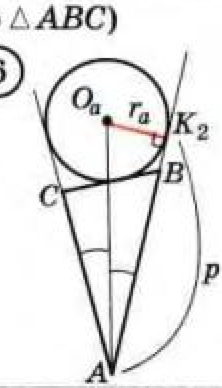
$AK_1=AB+BK_1$

$+\ \parallel$

$AK_2=AC+CK_2$

$AK_1=AK_2=p$

(6)



$r_a=p\cdot\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$

$r=\dfrac{S}{p}=\underline{(p-a)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}}$

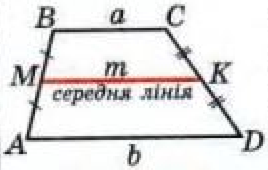
(див. № 1)

$\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{S}{p\cdot(p-a)}$

$r_a=\dfrac{S}{p-a}$

Опорні факти про трапецію

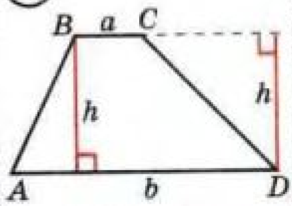
1



$m \parallel a \parallel b$

$m = \dfrac{a+b}{2}$

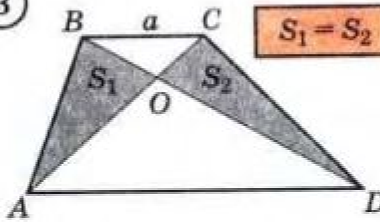
2



$ABCD$ – *трапеція*

$S = h \cdot \dfrac{a+b}{2}$

3

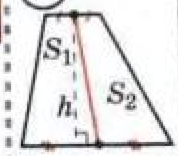


$S_1 = S_2$

$S_1 = S_{ABC} - S_{BOC} = S_{BCD} - S_{BOC}$

рівні

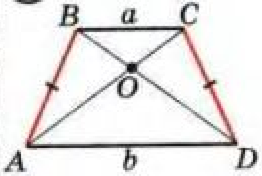
4



$S_1 = S_2$

(*бо* h – *спільна*)

5



$AB = CD$

$\Downarrow \Uparrow$

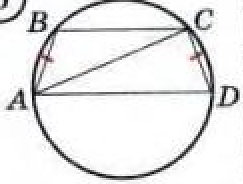
$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle C$

$AC = BD,$
$BO = OC,\ AO = OD$

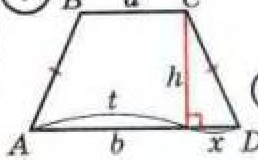
$\angle A + \angle C = 180^\circ$
$\angle B + \angle D = 180^\circ$

6



$AB = CD \iff R_{ABCD} = R_{ACD}$

7

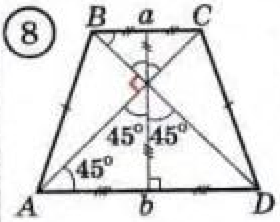


$AB = CD$

$\Downarrow$

$t = \dfrac{a+b}{2} = m$ сер. л.	$x = \dfrac{b-a}{2}$	$S = th$

8



$AB = CD,\ AC \perp BD$

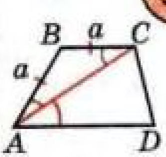
$\Downarrow$

$h = \dfrac{a+b}{2} = m$ сер. л.

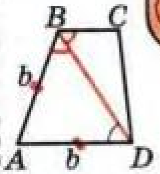
$S = h^2 = m^2$

9

$AC \equiv l_A \iff AB = a$



$BD \equiv l_B \iff AB = b$

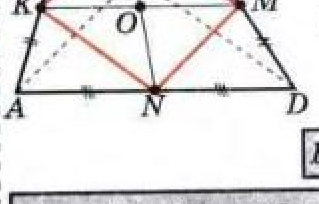


10

Якщо K, L, M, N – *середини сторін*

$\Downarrow$

$KLMN$ – *паралелограм*



(*бо* $LM \parallel BD \parallel KN,$ $KL \parallel AC \parallel NM$)

$KO = OM;\ OL = ON$

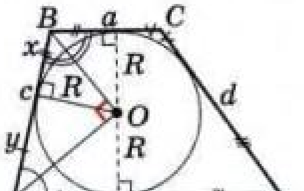
якщо $AB = CD \Rightarrow AC = BD$ *і* $KLMN$ – *ромб*

11

$\angle AOB = 180^\circ - \dfrac{\angle A}{2} - \dfrac{\angle B}{2} =$

$= 180^\circ - \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\underline{\triangle AOB}$: $R^2 = x \cdot y$



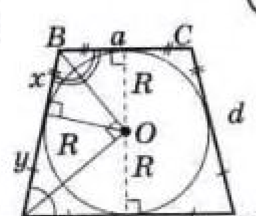
$\angle AOB = 90^\circ$

$R = \sqrt{xy}$

$a + b = d + c$

$h = 2R$

12



$AB = CD$

$\Downarrow$

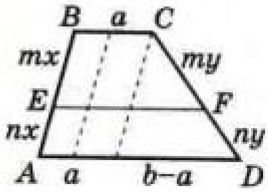
$x = \dfrac{a}{2}$

$y = \dfrac{b}{2}$

$R = \dfrac{\sqrt{ab}}{2}$

$h = \sqrt{ab}$

Опорні факти про трапецію



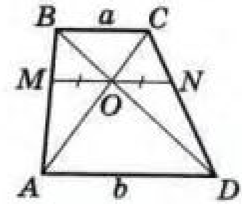
ABCD – трапеція

$EF \parallel AD$

$\Downarrow$

$\boxed{EF = \dfrac{an+bm}{m+n}} \Rightarrow \boxed{MN = \dfrac{2ab}{a+b}}$

(див. с. 153)



ABCD – трапеція

$MN \parallel AD$

$\Downarrow$

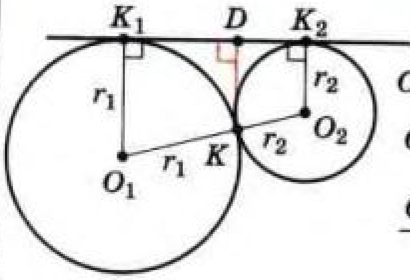
$\boxed{MO = ON}$

$\boxed{\dfrac{BM}{MA} = \dfrac{CN}{ND} = \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{CO}{OA} = \dfrac{a}{b}}$

(див. с. 154)

$\Downarrow$

$\boxed{d(K;\, K_1K_2) = \dfrac{2r_1r_2}{r_1+r_2}}$



$KD \parallel O_1K_1 \parallel O_2K_2$ і

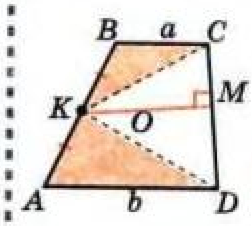
$O_1K_1K_2O_2$ – трапеція;

$O_1K_1 = r_1, O_2K_2 = r_2;$

$O_1K = r_1 \quad KO_2 = r_2$

$\Downarrow$

$$d(K;K_1K_2) = KD = \frac{r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_1}{r_1+r_2} = \frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$$



ABCD – трапеція,

$AK = KB$

$KM \perp CD$

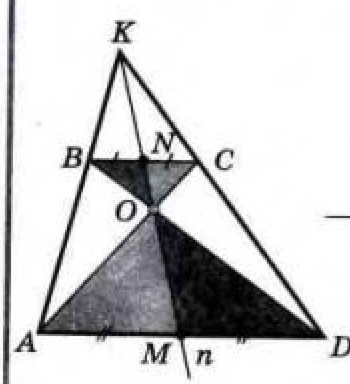
$\Downarrow$

$\boxed{S = KM \cdot CD}$

$$S_{KBC} + S_{AKD} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2}b \cdot \frac{h}{2}$$

$$\frac{1}{2}S \Rightarrow S_{KCD} = \frac{1}{2}S \text{ і } S = 2S_{KCD}$$

ABCD – трапеція



$BN = NC$

$AM = MD$

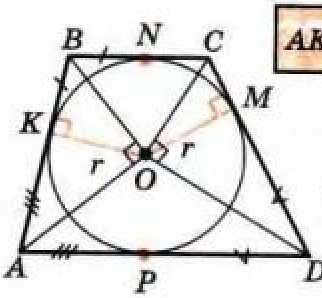
$\Downarrow$

$\boxed{\{K;\, N;\, O;\, M\} \in n}$

(див. с. 152 –153)

ABCD – описана трапеція

$\Downarrow$



$\boxed{AK \cdot KB = CM \cdot MD}$

$\Downarrow$

$AP \cdot BN = NC \cdot PD$

$\boxed{\dfrac{BN}{NC} = \dfrac{PD}{AP}}$

1) $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$; $OK \perp AB$, $OM \perp CD$;

2) $\triangle AOB$ і $\triangle COD$: $KB \cdot AK = r^2 = CM \cdot MD$.

ВІДПОВІДІ І ПОРАДИ

РОЗДІЛ І

Завдання 1

2. 290°. **3. а)** $\angle AOC$; **б)** $\angle BOA$; **в)** 360°. **4. а)** 290°; **б)** 240°. **5.** 141°. **6.** 180°, 180°, 360°. **8. а)** 100°, 120°, 140°; **б)** 60°, 180°, 120°; **в)** 30°, 120°, 210°. **9. а)** На 360°; **б)** на 120°; **в)** на 75°. **10. а)** $22{,}5^\circ$; **б)** 36°; **в)** 111°. **12.** Порада. Використайте те, що **а)** $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$ або $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$; **б)** $285^\circ = 270^\circ + 15^\circ = 180^\circ + 90^\circ + 30^\circ : 2$.

Завдання 2

2. а) 225°; **б)** 189°. **6. а)** На 4°; **б)** на 120°. **9. а)** Ні; **б)** так; **в)** ні. **13. а)** 32 см; **б)** 16 см; **в)** 16 см. **14.** 45°, 45°, 90°. **15.** 60°, 60°, 60°. **18.** 90° і 270°. **19.** 100° і 260°. **20.** 60°, 120° і 180°. **21.** 24 см. **22.** 7 см. **23.** 60°, 60°, 120° і 120°. **24.** Ні. 60°, 150°, 150°. **25.** 40°, 60° і 80° або 20°, 80° і 80°. **26.** 18°, 54° і 108° або $22{,}5^\circ$, 45° і $112{,}5^\circ$. **27.** 40°, 60°, 120° і 140°. **28.** 20°. **29.** 46°, 314°.

Завдання 3

2. а) 55°; **б)** 110°; **в)** 90°; **г)** 96°. **3. а)** 24°; **б)** $71{,}5^\circ$; **в)** 90°; **г)** 161°; **д)** $0{,}5\beta$. **4. а)** 26°; **б)** 180°; **в)** 256°; **г)** 174°; **д)** 2α. **5. а)** 12°; **б)** $28{,}5^\circ$; **в)** 45°; **г)** 63°; **д)** 90°. **6.** $29^\circ30'$, $29^\circ30'$ і 121°. **7. а)** 130°; **б)** $116{,}5^\circ$. **8. а)** 114°; **б)** 124°; 236°. **9.** 60° або 120°. **10. а)** 55°, 60° і 65°; **б)** 20°, 55° і 105°. **11.** Ні. **12. а)** 105°; **б)** 120°; **в)** 80°; **г)** 34°. **13. а)** 105° і 75°. **14.** 104°, 108° і 148°. **15.** 24°, 72° і 84°. **16.** 130°. **17.** 40°. **18.** 45°. **19.** 93°. **20.** 180° і 90°. **21.** 60° або 140°. **22.** 35°. **23.** 110°. **24.** 130°. **25.** 36° або 101°. **26.** 50° і 40°. **27. а)** 122°; **б)** 58°. **28.** 35° і 55°. **31.** 360°. **32.** 360°. **33.** 180°. **34.** 40°, 40°, 100°. **36. а)** 50°; **б)** 50°. **38.** Порада. Розгляньте кути трикутника MBN і можливі випадки розташування точок M, N і A. **40.** За теоремою про міру вписаних кутів маємо: $\angle PEB + \angle BCD = \angle PAD$ і $\angle AEB + \angle ACB = \angle APB + \angle ADB$. Звідси маємо: $\angle PEC + \angle ECD = \angle PEB + \angle AEB + \angle ACB + \angle BCD = \angle PAD + \angle APD + \angle ADP = 180^\circ$.

Завдання 4

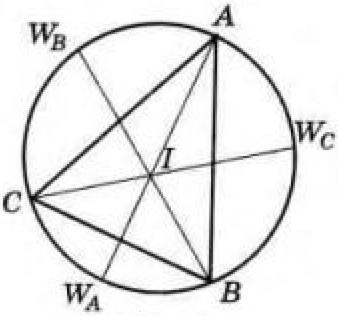
1. а) 45°; **б)** 120°; 55°. **2.** 30°. **3.** 108°. **4.** 158°. **5.** 20°. **6.** 120°. **7.** 30°. **8.** 50°. **10.** 18°. **11.** 45°. **12. а)** 120° і 240°; **б)** $180^\circ - \gamma$ і $180^\circ + \gamma$. **17.** Порада. Доведіть, що $\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC$. **18.** Порада. Доведіть, що PN – медіана прямокутного трикутника APM.

Завдання 5

3. Побудуйте коло, діаметром якого є AB. Точками перетину кола зі сторонами AC і BC є точки A_1 і B_1 (чому?). Кути B_1AB і B_1A_1B спираються на одну хорду, тому їх сума дорівнює 180°, отже $\angle B_1A_1C = \angle B_1AB$. Аналогічно доведіть, що $\angle A_1B_1C = \angle ABC$. **4.** Порада. Застосуйте таку ж додаткову побудову, як і в попередній задачі, та пригадайте властивість серединного перпендикуляра до хорди. **5.** З інцентра трикутника видно його сторону під кутом, який на 90° більший за половину кута, протилежного до цієї сторони. Тому шуканим геометричним місцем точок буде дуга кола, що стягується хордою AB. **9.** Нехай потрібно побудувати трикутник за двома кутами α і β та медіаною m. Побудуйте відрізок $AP = 2m$, середину відрізка позначте точкою K. Побудуйте геометричні місця точок, з яких AK видно під кутом β, а KP – під кутом α, в одній півплощині відносно прямої AP. Точку їх перетину позначте B. Відрізок BK продовжте, щоб $BK = KC$. Трикутник ABC – шуканий. Доведіть це. **10.** Порада.

Див. задачу 5. **11.** Коло, концентричне даному. Радіус цього кола вдвічі більший, ніж даного. Доведіть це. **12.** Проведіть у заданому колі радіус OA і дотичну до кола AK заданої довжини. Шуканим геометричним місцем точок є коло, концентричне даному, радіус якого дорівнює OK. Доведіть це.

Завдання 6



Мал. 1

1. Порада. Опишіть навколо трикутника ABC коло і продовжте бісектрису AK до перетину з колом у точці W_A. **4. в)** За нерівністю трикутника (мал. 1) маємо: $AI + IC > AC$; $CI + IB > BC$; $AI + IB > AB$. Враховуючи, що $W_BI = W_BA = W_BC$; $W_AI = W_AB = W_AC$ і $W_CI = W_CA = W_CB$, маємо ще три нерівності: $2IW_C = AW_C + BW_C > AB$; $2IW_A = BW_A + + CW_A > BC$; $2IW_B = CW_B + AW_B > AC$. Якщо додати всі нерівності, отримаємо: $2AI + 2IW_A + 2BI + 2IW_B + 2CI + + 2IW_C > 2P$, тобто $AW_A + BW_B + CW_C > P$. **5.** Використайте пораду до задачі 1. **7.** Порада. Спочатку побудуйте точку W_A перетину бісектриси кута A з описаним колом, а потім побудуйте діаметр описаного кола, який проходить через точку W_A. **8.** Використайте пораду до задачі 7.

Завдання для повторення розділу I

13. а) 72° і 288°; **б)** 36° і 144°. **14. а)** 120°; **б)** 120°. **15. а)** 30°, 60° і 90°; **б)** 120° і 60°. **16. а)** 110°; **б)** 80°; **в)** 59°; **г)** 35°; **д)** 130°. **17.** 10°, 10°, 160° або 20°, 80°, 80°. **18. а)** 36°, 72° і 72°; **б)** 120°; **в)** 36°; **г)** 90°. **20. а)** Порада. Розгляньте кути ABC і ABD.

Готуємося до тематичного оцінювання № 1

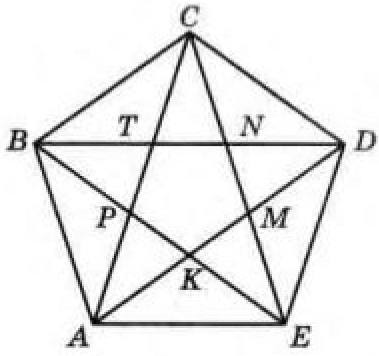
Варіант I. 1. а) 75° і 285°; **б)** 75°; **в)** 37,5° і 142,5°; **г)** 37,5°; 37,5° і 105°. **2.** 56°, 56° і 68°. **3.** Розгляньте можливі випадки розташування точок C і D на колі відносно хорди AB та пригадайте властивість вписаних кутів, що стягують рівні дуги.

Варіант II. 1. а) 144° і 216°; **б)** 144°; **в)** 72° і 108°; **г)** 72°; 72° і 36°. **2.** Розгляньте можливі випадки розміщення точок C і D на дузі AB та властивість кутів, що стягують рівні дуги. **3.** Розгляньте можливі випадки розташування точки M відносно хорди CD на колі та пригадайте властивості діаметра, перпендикулярного до хорди, і властивість бісектриси суміжних кутів.

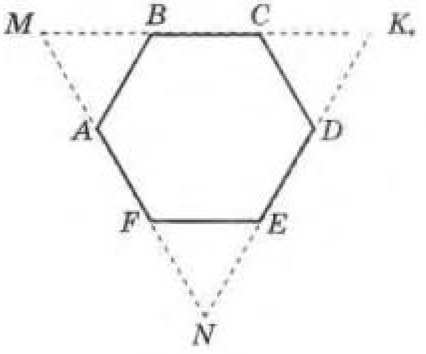
РОЗДІЛ II

Завдання 7

1. а) 1260°. **2. а)** 11. **3. а)** 8. **7. а)** 3; **б)** 4. **9. а)** Так; **б)** так. **10.** 150°, 60°, 150°, 90°, 90°. **12. а)** 11; **б)** 6; **в)** 6; 5; 4; 3; **г)** 6. **14.** Порада. Запишіть п'ять нерівностей для трикутників ABP, BTC, ... і додайте їх (мал. 2). **15.** Порада. Скористайтеся тим, що в довільному трикутнику зі сторонами a, b, c і кутами проти них A, B, C нерівності $a < b < c$ і $A < B < C$ рівносильні, і розгляньте трикутники ABC і ADC, а потім BCD і BAD. **17.** Порада. Продовжте пряму NM до перетину зі сторонами багатокутника в точках M_1 і N_1. Зрозуміло, що $M_1N_1 \geqslant MN$. А далі порівняйте M_1N_1 з відрізками, що сполучають N_1 з вершинами багатокутника, які належать стороні, на якій лежить M_1. **18. а)** Продовжте BC і DE до перетину в точці K (мал. 3). $\angle BKE = 60°$, $\angle KBE + + \angle BEK = 120°$, тому $\angle CBE = \angle BEF$ (враховуючи, що всі кути шестикутника



Мал. 2



Мал. 3

ABCDEF по 120°); **б)** Порада. Продовжте *BC*, *DE*, *AF* до перетину в точках *K*, *M*, *N*. Трикутник *KMN* – рівносторонній.

Завдання 8

5. Порада. Проведіть медіану до гіпотенузи. **8.** Порада. Проведіть перпендикуляр *EP* до сторони *BC*. **9.** Квадрат площею $\frac{Q}{5}$.

Завдання 9

6. 15 см і 4 см. **7.** 100 см^2. **8.** 396 см. **9.** 56,25 см^2. **11.** 432 см^2 або 864 см^2. **12.** 48 см. **15.** 140 см^2. **16. а)** $4r^2$; **б)** $\frac{R^2}{2}$. **17.** 125 з половинками або 130 цілих. **18.** Площа квадрата на 900 м^2 більша. **19.** 31 778,8 м^2. **20.** 125 см^2. **21.** 248 см^2. **22.** 1760 см^2. **23.** 16 м^2. **24.** 2 см^2. **25. а)** 5 : 3; **б)** 5 : 3. **26.** $(a^2 + b^2)$ см^2.

Завдання 10

4. а) 1,8 см, 1,5 см, 1,4 см, 1,3 см; **б)** 15 см, 7 см, 23 см, 21 см. **8. а)** 3; **б)** 3; **в)** 4. **10.** Більша за 60°, але менша за 90°. **11.** 90°. **13. а)** 60°, 60°, 120°, 120°; **б)** 30°, 60°, 120°, 150°. **14. а)** 70°, 105°, 135°, 50°; **б)** 90°, 126°, 63°, 81°. **15.** 60°, 100°, 60°. **16. а)** 83°; **б)** 165°; **в)** 92°. **21.** Порада. **а)** Відрізок, який сполучає дві точки на протилежних сторонах чотирикутника, є стороною обох чотирикутників, на які він розбиває даний чотирикутник. Запишіть нерівності для сторін в обох чотирикутниках і зробіть висновок. **б)** Діагональ чотирикутника є стороною двох трикутників, на які вона розбиває чотирикутник. Запишіть нерівності для сторін обох трикутників і зробіть висновок. **22.** Порада. Розгляньте два трикутники, на які чотирикутник ділиться його діагоналлю, і знайдіть їх площу. **23.** Порада. **а)** Використайте твердження задачі 21 а); **б)** розгляньте два трикутники, сторони яких належать діагоналям і двом протилежним сторонам; **в)** скористайтеся твердженням задач 21 б) і 23 б). **24.** Нехай *M* – точка перетину діагоналей *AC* і *BD*. У трикутниках *AMB* і *AMD* сторона *AM* – спільна, $DM = MB$ і $AB > AD$. Тому $\angle AMB > \angle AMD$. Тоді $\angle CMD > \angle BMC$. Отже, $BC < DC$. **25.** Порада. Побудуйте коло на діагоналі, яка проходить через вершини гострих кутів, як на діаметрі.

Завдання 11

2. а) Так; **б)** ні; **в)** ні. **3. а)** Так; **б)** так. **5.** Так. **9.** 12 см, 24 см, 36 см і 24 см. **10. а)** Так; **б)** ні; **в)** ні. **11. а)** Так; **б)** ні; **в)** так; **г)** ні. **12.** 6,5 см^2. **13. а)** 10 см^2; **б)** 52 см^2. **17.** Порада. Доведіть, що $\smile EB + \smile BP = \smile PD + \smile DE$. **18.** Порада. Використайте твердження задачі 17. **21.** Порада. **а)** Пригадайте властивість медіани прямокутного трикутника; **б)** використайте твердження задачі 21 а). **22.** Порада. **а)** Через вершину C проведіть пряму, паралельну BD, точку перетину її з колом позначте E. Доведіть, що $BE = CD$, і розгляньте трикутник ABE.

Завдання 12

3. а) 84°, 96°, 84°, 96°; **б)** 62,5°, 117,5°, 62,5°, 117,5°; **в)** 71°, 109°, 71°, 109°; **г)** 60°, 120°, 60°, 120°. **4. а)** 45°, 135°, 45°, 135°; **б)** 65°, 125°, 65°, 125°; **в)** 70°, 110°, 70°, 110°; **г)** 72°, 108°, 72°, 108°; **д)** 30°, 150°, 30°, 150°. **5. а)** Ні; **б)** ні; **в)** ні. **7. а)** 72°, 108°, 72°, 108°; **б)** 53°, 127°, 53°, 127°; **в)** $\alpha + \beta$, $180° - \alpha - \beta$, $\alpha + \beta$, $180° - \alpha - \beta$. **8. а)** 20°; **б)** 65°. **9. а)** 100°, 80°, 100°, 80°; **б)** 60°, 120°, 60°, 120°. **10. а)** 50°, 130°, 50°, 130°; **б)** 40°, 140°, 40°, 140°. **11.** Ні. **12.** Ні. **13. а)** 6 см; **б)** 4,5 см, 7,5 см; **в)** 4 см, 8 см; **г)** 3 см, 9 см, 3 см, 9 см. **14. а)** 10 см, 14 см, 10 см, 14 см; **б)** 8,5 см, 15,5 см, 8,5 см, 15,5 см; **в)** 8 см, 16 см, 8 см, 16 см. **15. а)** 16 см; **б)** 20 см; **в)** 18 см. **16.** 20 см. **18.** 28 см або 32 см. **19. а)** 96 см²; **б)** 4 см; **в)** 5,4 см. **20.** 132 см². **21.** 40 см². **22.** 48 см². **23.** 42 см. **24.** Сторони – 14 см і 10 см; висота – 5,6 см. **25.** 10 см і 14 см. **26. а)** 5 см; **б)** 34 см; **в)** 5 см. **27. а)** 8 см і 2 см; **б)** 6 см; **в)** 12 см. **32.** 40° і 140° або 80° і 100°. **33. а)** 40° і 140°; **б)** 60° і 120°. **34.** 51° і 129° або 15° і 165°. **44.** Порада. Побудуйте дві прямі, кожна з яких паралельна двом паралельним сторонам паралелограма і рівновіддалена від них. Точка перетину цих прямих і є точкою перетину діагоналей. Доведіть це.

Завдання 13

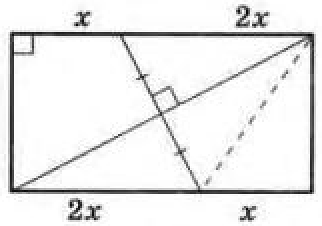
1. а) 4 см; **б)** $x = a$. **2.** 4 см, 4 см, 8 см, 12 см. **7.** 8 см. **8.** 2 см, 3 см і 1,5 см. **9. а)** Рівнобедрений; **б)** рівносторонній; **в)** прямокутний. **10.** 2 : 1. **12.** 30 см. **13.** 12 м. **16.** Порада. Застосуйте властивість медіани прямокутного трикутника. **17. а)** 15 см; **б)** 9 см. **20.** Пряма, яка паралельна заданій прямій і рівновіддалена від заданої точки і прямої. **21.** 3 см. **22. а)** і **б)** Порада. Побудова випливає з властивості медіан трикутника; **в)** Порада. Побудуйте коло, діаметром AM якого є медіана. Побудуйте дві хорди MK і MN, які дорівнюють половинам висот, щоб K і N належали різним півколам. Продовжте хорду KM на відрізок $HM = KM$. Через точку H проведіть пряму, перпендикулярну до KH, до перетину з прямою AN у точці C. Точку перетину прямої CM з AK позначте B. Доведіть, що трикутник ABC – шуканий; **д)** Порада. Див. задачу 20. **25.** Порада. Для доведення застосуйте теорему про середню лінію трикутника.

Завдання 14

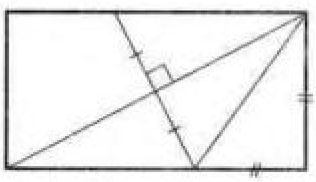
2. а) 70°, 70° і 20°; **б)** 45°, 135° і 45°; **в)** 10°, 80° і 20°. **3.** 50°. **4.** 124°. **5.** 54°, 36°. **7.** 45°. **8. а)** 4 см; **б)** 52 см. **9. а)** 16 см; **б)** 8 см. **10.** 6 см, 12 см, 6 см і 12 см. **11. а)** 10 см, 14 см, 10 см і 14 см; **б)** 6 см, 18 см, 6 см і 18 см; **г)** 10 см, 14 см, 10 см і 14 см. **12. а)** 52 см; **б)** 24 см. **13.** 6 см і 16 см. **15.** 8 см і 18 см. **16.** На 300 %. **23.** 9 см. **24.** 15 см. **25.** 30° і 60°. Підказка на мал. 4. **26.** 45°. Підказка на мал. 5. **27.** 75°. Підказка на мал. 6. **32. а)** 80°, 100°, 80°, 100°; **б)** 60°, 120°, 60°, 120°; **в)** 70°, 110°, 70°, 110°. **34. а)** 22,5° і 67,5°; **б)** 30° і 60°. **35. а)** 70°, 110°, 70°, 110°; **б)** 80°, 100°, 80°, 100°. **36. а)** 80°, 100°, 80°, 100°; **б)** 60°, 120°, 60°, 120°. **37. а)** 8 см; **б)** 20 см. **39. а)** 8 см²; **б)** 60 см². **41. а)** 50 см²; **б)** 200 см². **43.** 30 см. **49.** 40 см і 30 см. **53.** Порада. Використайте те, що діагональ ромба є бісектрисою трикутника. **61.** $2a$. **62.** 10 см. **68.** 4 см і 6 см.

Завдання 15

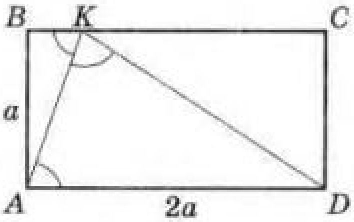
1. 112° і 106°. **2. а)** 57°, 123°, 123°; **б)** 123°, 90°, 90°. **3. а)** 60°, 120°, 45°, 135°; **б)** 120°, 60°, 45°, 135°. **4.** 54°, 54°, 126°, 126°. **5. а)** Не існує; **б)** існує. **6. а)** Не можуть; **б)** можуть. **7. а)** 68°, 112°, 118°, 72°; **б)** 90°, 90°, 135°, 45°;



Мал. 4

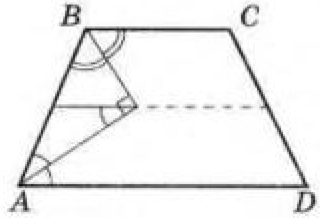


Мал. 5



Мал. 6

в) 120°, 60°, 60°, 120°. **8.** 60°, 120°, 120°, 60°. **9.** 30°, 150°, 150°, 30°. **10.** 90°. **11.** 3 см. **12.** 8 см. **14. а)** 4 см; **б)** 15 см. **15. а)** 8 см; **б)** 2 см. **16. а)** 5 см і 15 см; **б)** 6 см і 10 см. **17.** 2 см, 3 см і 2 см. **18.** 4 см і 10 см. **19. а)** 1 : 2; **б)** 2 : 3. **20. а)** 3,5 см, 5 см, 6,5 см; **б)** 4 см і 6 см. **21.** 132 см. **22.** 28 см. **23.** 2 см. **24.** 7 см. **25.** 10 см і 34 см. **26.** 7 см. **27. а)** 96 см²; **б)** 192 см². **29. а)** 15 см²; **б)** 25 см². **30.** 2 см, 8 см, 3 см. **32.** Порада. Через вершину меншої основи проведіть пряму, паралельну другій бічній стороні. **35.** Порада. Проведіть через середину меншої основи дві прямі, паралельні бічним сторонам, і розгляньте трикутник, обмежений цими прямими і більшою основою. **36.** Нехай BC і AD – основи трапеції, діагоналі AC і BD якої перпендикулярні між собою, середини основ – точки K і M. За опорною задачею 6 відрізок KM дорівнює середній лінії трапеції. Тому KM – висота трапеції (доведіть це). Тоді за опорною задачею 5 трапеція рівнобічна. **37.** Підказка. Доведення на мал. 7. **38.** Порада. Скористайтеся твердженням попередньої задачі та врахуйте, що трапеція описана. **39.** Нехай сторона $AB = BC + AD$. Продовжте бісектрису кута A до перетину з прямою BC в точці E. Нехай O – точка перетину AE і CD. Трикутники ECO і ADO – рівні (доведіть це). Трикутник EBA рівнобедрений, тому його медіана є бісектрисою. Спробуйте провести доведення в інший спосіб, для чого проведіть середню лінію трапеції.



Мал. 7

Завдання для повторення розділу II

13. Так. **14.** Ні. **16.** 40°. **17.** Ні. **18. а)** Ні; **б)** так. **19. а)** Ні; **б)** 7. **24. а)** 27°, 153°, 27°, 153°; **б)** 72°, 108°, 72°, 108°. **25.** 40°, 140°, 40°, 140°. **26.** 74°, 106°, 74°, 106°. **27. а)** 5 см, 9 см, 5 см, 9 см; **б)** 4 см, 10 см, 4 см, 10 см; **в)** 5,6 см, 8,4 см, 5,6 см, 8,4 см. **29.** 24 см. **30. а)** 5 см; **б)** 88 см² або 33 см²; **в)** квадрат з діагоналлю 3 см. **31.** 10,5 см, 13,5 см, 10,5 см, 13,5 см. **32. а)** 106°, 106°; **б)** 60°, 135°. **33. а)** 100°, 90°, 90°, 80°; **б)** 45°, 45°, 135°, 135°. **34.** 135°. **35.** 120° і 60°. **36.** 60°, 60°, 120°, 120°. **37.** 8 см. **38.** 4 см. **39.** 28 см. **40.** 17 см, 19 см, 21 см. **41.** 3 см, 6 см і 18 см.

Готуємося до тематичного оцінювання № 2

Варіант I. 1. 57°, 123°, 57°, 123°. **2.** 12 см². **3.** 16 см. **4.** 24 см². **5.** 90°, 90°, 120° і 60°. **Варіант II. 1.** 158° і 64°. **2.** 49 см². **3.** 27 см. **4.** 10 см². **5.** 20 см.

РОЗДІЛ III

Завдання 16

3. 1 : 3 і 2 : 3. **5.** $5\frac{1}{3}$ см. **6. а)** 3 : 4; **б)** 3 : 7; **в)** 7 : 4. **7.** 3 см. **8. а)** 5 : 4 : 7; **б)** 5 : 11; **в)** 9 : 7. **9.** 4 см і 9 см. **10.** 6 см. **11. а)** 12 см і 10 см; **б)** 18 см і 15 см.

12. а) 1,5 см; б) 5 см. 13. 7,5 см. 14. Порада. Знайдіть відношення $MN : AC$ і доведіть, що $MN \parallel AC$. 15. 1 : 4. Порада. Через точку A_1 проведіть пряму, паралельну BM. 16. 6 : 1. 17. 1 : 1. Порада. Через точку перетину висоти і медіани проведіть пряму, паралельну стороні BC.

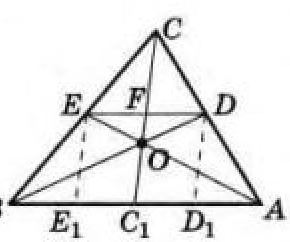
Завдання 17

2. 1,5 см, 2 см, 2,5 см. 3. 7 см, 16 см. 4. 6 см, 7 см і 8 см. 5. 4 см, $3\frac{1}{3}$ см, $5\frac{1}{3}$ см. 6. а) 27 см; б) 45 см. 7. 6 см, 12 см, 15 см. 10. 24 см, 28 см, 32 см. 11. 30 м, 35 м, 40 м. 12. 12 см. 13. 6,25 см, 0,75 см. 14. 6 см, 4,5 см. 15. 90 см.

Завдання 18

3. 4,8 см. 4. 84 см і 84 см. 5. 11 см. 10. За теоремою Фалеса $HO : OM = HF : FN$, кути FNK і OHF рівні (чому?), $NK = OM$ (чому?). Отже, трикутники OHF і KNF подібні за першою ознакою. 11. 1 : 4 і 1 : 3. 12. Продовжте медіану AM на відрізок $MO = MB$. Тоді $\angle MBO = \angle BOM = \angle BML$, тому $AL : AB = AM : AO$. Аналогічно доводимо, що $AD : AC = AM : AO$. Звідси маємо: $AL : AB = AD : AC$. Отже, трикутники подібні за першою ознакою. 13. Порада. Спочатку доведіть, що площі трикутників, які мають спільну висоту, відносяться як сторони, на які опущена ця висота.

Завдання 19



Мал. 8

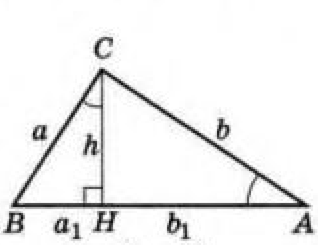
6. а) 1,2 см; б) 3,6 см. 9. 6 : 11. 10. Проведемо $EE_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ (мал. 8). ED – середня лінія $\Rightarrow ED \parallel BA \Rightarrow EF = E_1C_1 = BE_1$ і $FD = C_1D_1 = D_1A$. З подібності трикутників DOF і BOC_1 та трикутників EFO і AC_1O (доведіть подібність трикутників самостійно) маємо: $EF : C_1A = FD : BC_1$, або $\frac{1}{2}BC_1 : C_1A = \frac{1}{2}AC_1 : BC_1 \Rightarrow (BC_1)^2 = (AC_1)^2 \Rightarrow BC_1 = AC_1$ (мал. 8). 13. а) 1 : 2; б) 2 : 1. 14. 1 : 3. 15. 10 см і 26 см.

Завдання 20

3. а) Так, $k=\frac{2}{3}$; б) ні. 4. 18 см, 24 см, 36 см. 5. а) Так; ні. 8. $\sqrt{mn}$. 9. 22 см.

Завдання 21

6. а) 6 см; б) 30 см. 7. а) 20 см; $4\sqrt{41}$ см і $5\sqrt{41}$ см; б) 18 м, 24 м і $12\sqrt{4}$ м; в) 12 мм, 16 мм і $8\sqrt{3}$ мм. 8. $b : a = b_1 : h$ (з подібності трикутників BCA і CAH) (мал. 9), $\frac{b}{a}=\frac{h}{a_1}$ (з подібності трикутників CAB і BCH),



Мал. 9

тому $\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b_1}{h}\cdot\frac{h}{a_1}=\frac{b_1}{a_1}$. 9. 1,8 см і 3,2 см. 10. 13 см. 11. 61 см. 12. $5\frac{7}{13}$ см, $2\frac{4}{13}$ см, 6 см. 13. 3,75 см. 14. 9 дм і 13,5 дм. 15. 2 : 1. 16. 12,5 см. 17. 6 см і 10 см. 18. 36 см і 40 см.

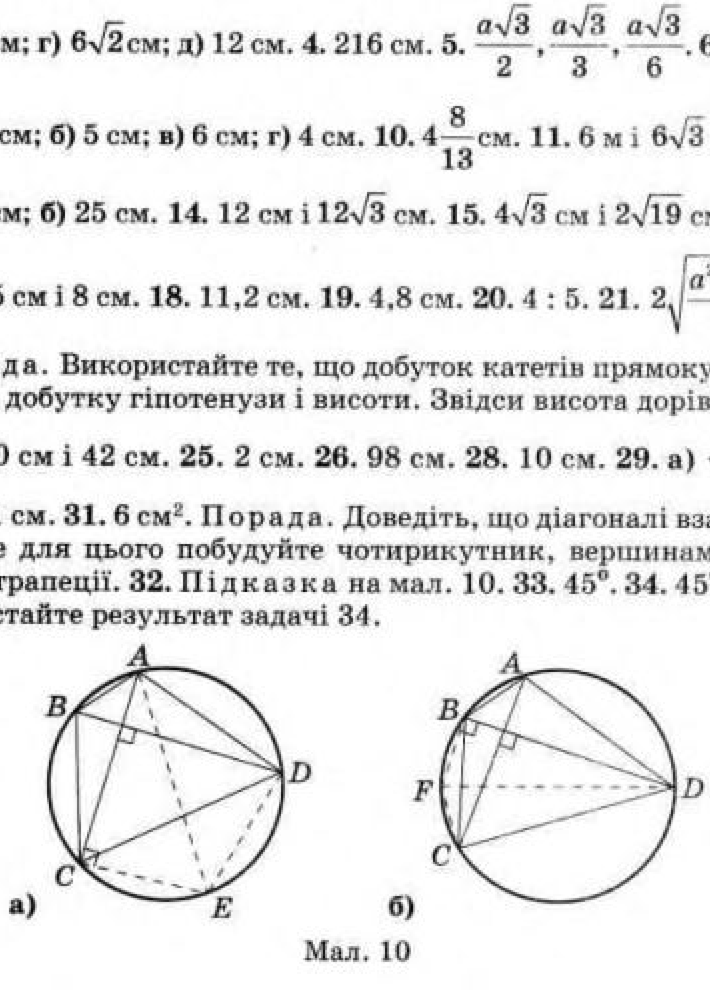
Завдання 22

1. $\frac{10}{3}$. 2. 4,8 см, 7,2 см і 8 см. 3. 12 см, 14 см і 16 см. 4. 1,875 см. 5. 19 : 10. 6. $1{,}8\sqrt{5}$ см. 7. 2,25 см^2. 8 . а) 3 : 4; б) 1 : 1. 9. а) 4 : 1; б) 9 : 4. 10. 32 см^2 і 18 см^2.

11. Проведіть діагональ AC. BD і AM – медіани трикутника ABC, тому площа $\triangle BOM$ дорівнює $\frac{1}{6}$ частині площі $\triangle ABC$, тобто $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ (см^2), отже, площа чотирикутника дорівнює $\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$ (см^2). **12.** $\frac{1}{3}a$. **13.** $3S$. **14.** $\frac{6a}{7};\frac{2a}{7}$. **15.** Порада. Проведіть бісектрису AL та доведіть, що точка L збігається з точкою D. **16.** $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$. Нехай $ABCD$ – трапеція, в якій сторони BC і AD – паралельні, діагоналі перетинаються в точці K, площі трикутників BKC і AKD дорівнюють S_1 і S_2 відповідно. $\triangle BKC \sim \triangle DKA \Rightarrow BK : DK = CK : AK = \sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}$, тому $S_{\triangle CKD}=\sqrt{S_1S_2}$ і $S_{\triangle ABK}=\sqrt{S_1S_2}$ (доведіть це самостійно). Звідси $S_{ABCD}=S_1+S_2+$ $+2\sqrt{S_1S_2}=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$. **17.** $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$. Кожний з утворених трикутників подібний до даного з коефіцієнтами подібності $\sqrt{S_1}:\sqrt{S}, \sqrt{S_2}:\sqrt{S}, \sqrt{S_3}:\sqrt{S}$, де S – шукана площа. Утворені паралелограми мають площі $2\sqrt{S_1S_2}, 2\sqrt{S_1S_3}$, $2\sqrt{S_2S_3}$; тому $S=S_1+S_2+S_3+2\sqrt{S_1S_2}+2\sqrt{S_2S_3}+2\sqrt{S_1S_3}=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$.

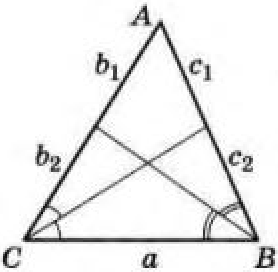
Завдання 23

1. а) 10 см; б) $\sqrt{65}$ см; в) $13a$. **2.** а) 12 см; б) $4\sqrt{3}$ см; в) $\sqrt{c^2-a^2}$. **3.** а) 13 см; б) 5 см; в) $6\sqrt{3}$ см; г) $6\sqrt{2}$ см; д) 12 см. **4.** 216 см. **5.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{a\sqrt{3}}{6}$. **6.** 5 см. **7.** 6 см. **8.** 4 м. **9.** а) 6,4 см; б) 5 см; в) 6 см; г) 4 см. **10.** $4\frac{8}{13}$ см. **11.** 6 м і $6\sqrt{3}$ м. **12.** 12 см і 16 см. **13.** а) 5 см; б) 25 см. **14.** 12 см і $12\sqrt{3}$ см. **15.** $4\sqrt{3}$ см і $2\sqrt{19}$ см. **16.** $10\frac{5}{12}$ см. **17.** 5 см, 2 см, 5 см і 8 см. **18.** 11,2 см. **19.** 4,8 см. **20.** 4 : 5. **21.** $2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$. **22.** 15°, 75°, 90°. Порада. Використайте те, що добуток катетів прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи і висоти. Звідси висота дорівнює половині медіани. **24.** 40 см і 42 см. **25.** 2 см. **26.** 98 см. **28.** 10 см. **29.** а) $\sqrt{Rr}$; б) $\frac{2Rr}{R+r}$. **30.** 11 см або 21 см. **31.** 6 см^2. Порада. Доведіть, що діагоналі взаємно перпендикулярні, але для цього побудуйте чотирикутник, вершинами якого є середини сторін трапеції. **32.** Підказка на мал. 10. **33.** 45°. **34.** 45°. **35.** 90°. Порада. Використайте результат задачі 34.



Мал. 10

Завдання 24


Мал. 11

4. 40 см. **5.** 6 см. **6.** 4,5 дм, 42,75 см^2. **7.** $\frac{2r}{5}$ см. **8.** $4\sqrt{5}$ см або $4\sqrt{5}$ см. **9.** $R^2 - d^2$. **10.** 6 см і 12 см. **11.** $d^2 - R^2$. **12.** 6 см. **13.** 0,2 см. **14.** 21 см. **15.** 4 см. **18.** 1 см і 2 см. **19. а)** 10 см; **б)** $\sqrt{30}$ см. **20.** 9 см, $5\frac{2}{7}$ см, $10\frac{5}{7}$ см. **21.** $2{,}4\sqrt{2}$. **22.** За властивістю бісектриси (мал. 11) маємо: $\frac{c_1}{c_2} = \frac{(b_1 + b_2)}{a} \Leftrightarrow ac_1 = b_1c_2 + b_2c_2$ (1) і $\frac{b_1}{b_2} = \frac{(c_1 + c_2)}{a} \Leftrightarrow ab_1 = b_2c_1 + b_2c_2$ (2). За теоремою Лагранжа маємо: $a(c_1 + c_2) - b_1b_2 = a(b_1 + b_2) - c_1c_2 \Leftrightarrow ac_1 + ac_2 - b_1b_2 - ab_1 - ab_2 + c_1c_2 = 0$. Підставимо (1) і (2) в останню рівність: $b_1c_2 + b_2c_2 + ac_2 - b_1b_2 - b_2c_1 - c_2b_2 - ab_2 + c_1c_2 = 0 \Leftrightarrow (c_2 - b_2)(a + b_1 + c_1) = 0 \Leftrightarrow c_2 = b_2$. Це дає змогу довести, що $\angle ACB = \angle ABC$. **24.** 14 : 1. **25.** 100 мм. **27.** 49 : 81. **28.** 15 см.

Завдання 25

1. $a : b$. **2.** 4 см. **3.** 4,8 см. **4.** 8 см. **5.** $\frac{2ab}{b-a}$. **6.** 3 см^2, 6 см^2, 6 см^2 і 12 см^2. **8.** 5 : 16 або 4 : 3. **9.** $\sqrt{10}$. Нехай O – точка перетину прямих AB і CD, що містять бічні сторони трапеції, $BC = 2$ см, $AD = 4$ см. Позначимо площу трикутника OBC через S, довжину відрізка, який ділить трапецію на дві рівновеликі частини, – через x. Трикутники OAD і OMN подібні до трикутника OBC, тому їх площі відповідно дорівнюють $\frac{x^2}{2^2}S$ і $\frac{4^2}{2^2}S$. Маємо рівняння: $\frac{x^2}{4}S - S = 4S - \frac{x^2}{4}S$. Звідси $x = \sqrt{10}$. **10.** Бічну сторону шукана пряма ділить на відрізки, відношення яких дорівнює $2a : b$, де a – довжина меншої основи трапеції, b – більшої. **11.** Порада. Див. опорну задачу 3.

Завдання для повторення розділу III

11. 9 см і 10 см. **12.** 30 см, 40 см і 35 см. **13.** 24,7 см. **18. а)** 20 см; **б)** $3\sqrt{2}$ см. **20. а)** 6 см; **б)** $4\frac{2}{3}$ см. **21. а)** $4\sqrt{21}$ см, **б)** 5 см; **в)** 5 см. **22.** 20 см. **23.** 9 см, 12 см і 15 см. **24.** $2\sqrt{3}$ см і $2\sqrt{6}$ см. **25.** $3\sqrt{41}$ см. **26.** 7,25 см. **27.** 2,4 см. **28.** $3(7-4\sqrt{3})a^2$. **29.** 4 см і 14 см. **30.** 13 см. **31.** 12 см. **32.** $3\sqrt{3}$ см. **33.** $8\sqrt{5}$ см і $4\sqrt{5}$ см. **34.** 6,25 см. **35.** 30°, 60° і 90°. **36.** 3 см. **38.** $m^2 - c^2$. **39.** 12 см, 294 см^2. **40.** 64. **41.** 17 см і 34 см або 27 см і 24 см. **42.** 16 см. **43.** $5R^2$.

Готуємося до тематичного оцінювання № 3

Варіант І. 1. 30,8 см. **2.** $\sqrt{61}$ см. **3.** 13 см. **4.** 6 см. **5.** 180 см^2.

Варіант ІІ. 1. 39 см. **2.** $\sqrt{106}$ см. **3.** 10 м. **4.** 6 см. **5.** $5\sqrt{3}$ см.

РОЗДІЛ IV

Завдання 26

1. а) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\frac{\sqrt{10}}{10}$, 3, $\frac{1}{3}$; **в)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, 1. **2. а)** 0,3; **в)** $\approx 0{,}32$. **3. а)** 0,6; **в)** $\approx 0{,}59$.

4. а) $\operatorname{tg} A = 0{,}4$, $\operatorname{ctg} A = 2{,}5$, $\operatorname{tg} B = 2{,}5$, $\operatorname{ctg} B = 0{,}4$. **5. а)** 1,6 см; **б)** 12 мм; **в)** 12 мм; **г)** 0,5 м. **6. а)** 0,8; **б)** 0,6; **в)** $\frac{4}{3}$. **7. а)** 1,875; **б)** $\frac{8\sqrt{89}}{89}$; **в)** $\frac{8\sqrt{89}}{89}$. **9. а)** $\frac{1}{3}$; **б)** 1,5. **10. а)** $\frac{1}{2}$; **б)** $\frac{1}{3}$. **11. а)** $BC > AC$. Порада. За даною рівністю порівняйте синуси кутів A і B. **13. а)** 10 см. Порада. З даної рівності знайдіть тангенс кута A, а потім обчисліть катет CB.

Завдання 27

1, 2, 3, 4. Порада. Скористайтеся розв'язаннями прикладів 1, 2, 3, 4 (с. 165). **9. а)** $\alpha < \beta$; **б)** $\alpha > \beta$; **в)** $\alpha = \beta$; **г)** $\alpha > \beta$; **д)** $\alpha < \beta$; **е)** $\alpha = \beta$.

Завдання 28

1. а) $\frac{5}{13}$; **б)** 0,8; **в)** 0,7. **2. а)** $\cos\alpha$; **б)** $2\sin\alpha$; **в)** $4\operatorname{ctg}\beta$; **г)** 0. **3. а)** $3\cos\beta$; **б)** $2\sin\alpha$; **в)** $\operatorname{ctg}\beta + 5\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}\beta$. **4. а)** Так; **в)** так. **5. а)** 90°; **б)** 90°. **7.** Порада. Скористайтеся рівностями 1, 2, 3, 4 (с. 168).

Завдання 29

5. а) $\sin^2\alpha$; **б)** 0; **в)** $\cos^2\alpha$; **г)** 1. **6. а)** $\cos^3\alpha$; **б)** $\cos^2\alpha$; **в)** 1; **г)** 1. **7. а)** $\cos^2\alpha$; **б)** $\sin^2\alpha$; **в)** $2\cos^2\alpha$; **г)** 1. **8. а)** 4; **б)** 0; **в)** $0{,}5\cos^2\alpha$.

Завдання 30

2. а) 2,5; **б)** 1,5; **в)** $3\sqrt{3}$; **г)** $3\sqrt{3}$. **3. а)** $2\sqrt{3}$; **б)** 0,5; **в)** $1{,}5\sqrt{3}$; **г)** 1. **4. а)** 9; **б)** 3,5; **в)** 2,25; **г)** $4\frac{1}{3}$. **5.** 1 см, 2 см, 1 см, 2 см.

Завдання 31

1. а) 3 см; **б)** 20 см; **в)** 8 см; **г)** 20 см; **д)** 6,25 см; **е)** 9 см. **2. а)** $3\sqrt{2}$ см, 3 см; **б)** 7,5 см $\approx$ 6,87 см; **в)** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см, $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см; **г)** 6 см, $\sqrt{3}$ см; **д)** 18 см, $12\sqrt{2}$ см; **е)** $32\sqrt{2}$ см, $32\sqrt{2}$ см. **3.** 72 см, $9\sqrt{89}$ см. **7.** 12 см, 3 см, $\frac{15}{17}$ см. **9.** 5 см. **10.** $6\sqrt{3}$ см. **13.** 12,8 см; 0,75. **18.** $3\sqrt{3}$см. **20.** $9\sqrt{2}$см. **21.** $\left(24+10\sqrt{3}\right)$см або $\left(24-10\sqrt{3}\right)$см. **22.** $\frac{13}{3}, \frac{23}{3}$. **24.** Радіус кола дорівнює $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см; відстань між колами – 0,5 см або 1,5 см.

Завдання 32

1. 0,75. **2.** $\frac{3{,}5}{\cos 25^\circ}$ м $\approx$ 3,87 м. **3.** $\frac{3{,}5}{\cos 52^\circ}$ м $\approx$ 322,58 м. **4.** $\approx$ 0,02. **5.** 0,04. **6.** $76 \operatorname{tg} 48^\circ$ м $\approx$ 84,40 м. **7.** $200 \sin 15^\circ 30'$ м $\approx$ 53,45 м. **8.** Під кутом, тангенс якого дорівнює 0,025 ($\approx 1{,}43^\circ$). **9.** $(1{,}2 + 15 \operatorname{tg} 35^\circ)$ м $\approx$ 11,70 м. **10.** Під кутом, тангенс якого дорівнює $\frac{8}{230}$ ($\approx 1{,}99^\circ$). **11.** $14 \operatorname{tg} 24^\circ$ м $\approx$ 6,23 м. **12.** $2{,}8 \operatorname{ctg} 32^\circ$ м $\approx$ 4,48 м. **13.** $1500 \operatorname{tg} 40^\circ$ м $\approx$ 1258,65 м. **14.** $7000 \operatorname{tg} 6^\circ$ м $\approx$ 735,73 м. **15.** 12 м.

16. 12,5 м. 17. 15 м. 18. а) $\approx 26{,}57^\circ$; б) 34 м. 19. $\approx 806{,}8$ м. Порада. Від відстані між точками A і E відняти відстань між точками B і D та додати відстані BC і CD. 20. $r = \frac{1}{3}R$.

Завдання для повторення розділу IV

10. а) $-0{,}5$; б) 1,75; в) 0,5; г) 0. **12.** а) $\frac{4}{5}$ і $\frac{4}{3}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ і $\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{5}{13}$ і $\frac{5}{12}$. **13.** а) $\frac{4}{5}$ і $\frac{4}{3}$; б) $\frac{\sqrt{8}}{3}$ і $\sqrt{8}$; в) $\frac{21}{29}$ і $\frac{21}{20}$. **14.** 1. **15.** а) 14 см і $7\sqrt{3}$ см; б) $10\sqrt{2}$см і 10 см; в) 6 см і $6\sqrt{3}$ см. **16.** а) 8 см; б) 4 м; в) 5 дм. **17.** 18 см². **18.** $90\frac{30}{37}$ см. **19.** $6\sqrt{2}$ см² і $10\sqrt{2}$ см. **20.** а) $\sqrt{3}$ см; б) 1 см.

Готуємося до тематичного оцінювання № 4

Варіант І. 1. 0,35. 2. $\frac{\sqrt{8}}{3}$. 3. $6{,}5\sqrt{2}$ см. 5. $(15+5\sqrt{3})$ см; 30° і 60°. 6. $\frac{41}{40}$.

Варіант ІІ. 1. 0,58. 2. $\frac{\sqrt{21}}{5}$. 3. $14\sqrt{2}$ см. 5. $(3+3\sqrt{2})$ см; 45° і 45°. 6. 2 см.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

До повторення навчального матеріалу за 7 клас

1. Г. **2.** Д. **3.** Г. **4.** В. **5.** В. **6.** Д. **7.** Б. **8.** В. **9.** Г. **10.** А–2, Б–5, В–1, Г–6, Д–3, Е–4. **11.** 60°. **12.** $\angle A = 120^\circ$. **13.** $AK = h_a$. **14.** 150°. **15.** 200 см². **16.** 80°.

До розділу І

1. Г, Д. **2.** В, Д. **3.** Б. **4.** А. **5.** В. **6.** Г. **7.** Д. **8.** 90°. **9.** 120°. **10.** 30°, 75°, 75° або 150°, 15°, 15°.

До розділу ІІ

1. Б, Д. **2.** А, В. **3.** А–3, Б–5, В–2, Г–4, Д–1. **4.** Г. **5.** В. **6.** А. **7.** Б. **8.** В. **9.** Б. **10.** Д. **11.** Г. **12.** Д. **13.** А. **14.** Г. **15.** В. **16.** Б. **17.** Д. **18.** Б. **19.** 0,13 м². **20.** 84 см. **21.** 4 см. **22.** 16 см². **23.** 3 : 5. **24.** 70 дм². **25.** 140 м².

До розділу ІІІ

1. Б, Д. **2.** А–4, Б–1, В–3, Г–2, Д–5. **3.** А. **4.** Г. **5.** Б. **6.** А. **7.** В. **8.** В. **9.** Б. **10.** 6 см і 10 см. **11.** 1 : 2. **12.** 4 дм. **13.** 10 : 3. **14.** 9,6 см. **15.** 1,6a.

До розділу IV

1. А–4, Б–1, В–5, Г–2, Д–3. **2.** А, Г, Д. **3.** Див. с. 169, 171. **4.** 1) Збільшується від 0 до 1; 2) зменшується від 1 до 0; 3) збільшується від 0 до ∞; 4) зменшується від ∞ до 0. **5.** 1)... косинусу...; 2)...синусу...; 3)...котангенсу...; 4)...тангенсу...; 5) $1/\cos^2\alpha$; 6)$1/\sin^2\alpha$. **6.** $c \cdot (1 + \sin\alpha + \cos\alpha)$. **7.** 3 см. **8.** $2\sqrt{3}$м. **9.** $2\sqrt{13}$дм і $3\sqrt{13}$дм. **10.** 1,6 м.

ЗМІСТ

Навчальне видання

АПОСТОЛОВА Галина Вадимівна

Упорядкування завдань
Вашуленко О. П., Карликової О. А.

ГЕОМЕТРІЯ

Дворівневий підручник для 8 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством
освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Редактори *М. Зубченко, О. Мовчан*
Обкладинка і макет *П. Машкова*
Художнє оформлення *Ю. Ясінської*
Технічні малюнки *В. Марущинця*
Технічний редактор *В. Олійник*
Коректори *Л. Леуська, І. Іванюсь*
Комп'ютерна верстка *Т. Скалиги*

Здано на виробництво і підписано до друку 01.07.2008 р.
Формат 70×100 $^1/_{16}$. Папір офсетний. Друк офсетний.
Гарнітура Шкільна. Умовн. друк. арк. 22,1 + 0,32 форз.
Умовн. фарбо-відб. 88,2. Обл.-вид. арк. 21,63 + 0,49 форз.

Наклад 137 550 прим. Вид. № 847.
Зам. № 250/8 – 2098/289

Видавництво «Генеза»,
04212, м. Київ, вул. Тимошенка, 2-л.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців
серія ДК № 25 від 31.03.2000 р.

Віддруковано з готових позитивів на ТОВ
«Газетно-видавнича корпорація "Новая печать"»,
83000, м. Донецьк, вул. Постишева, 117.
Свідоцтво серія ДК № 1498 від 17.09.2003 р.