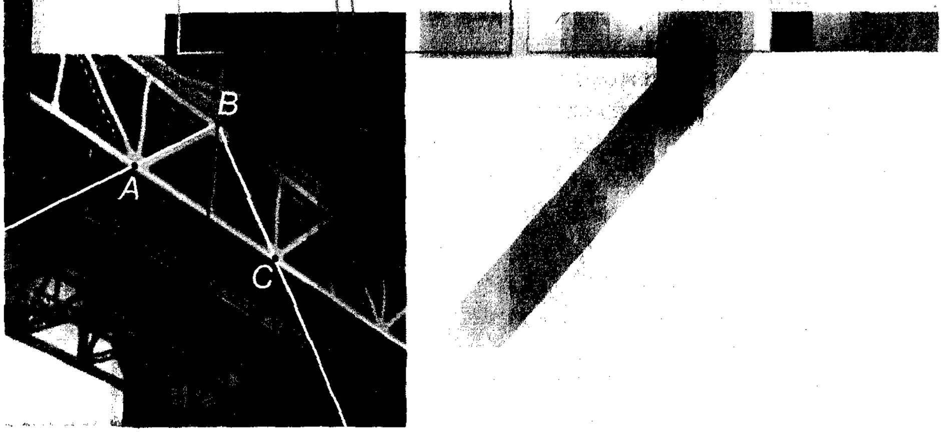
Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владимирова

ГЕОМЕТРИЯ

7 класс

Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владимирова

ГЕОМЕТРИЯ



Учебник
для 7 класса
общеобразовательных
учебных заведений

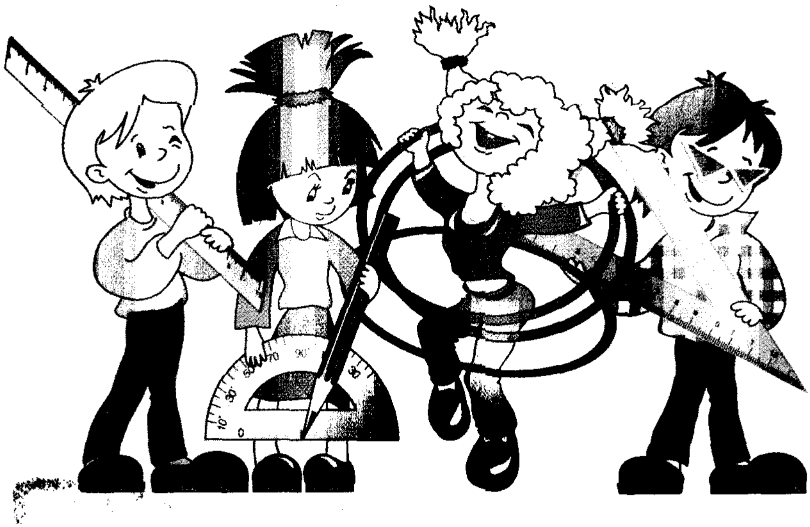
Рекомендовано
Министерством
образования
и науки Украины

Киев
«Вежа»
2007

ББК 22.151я72
Б 36

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(рішення колегії від 12.04.2007 р. № 5/1-19)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено.



Бевз Г. П. та ін.

Б 36 **Геометрія**: Підручник для 7 кл. середніх загальноосвітніх закладів/ Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова: Пер. з укр. — К.: Вежа, 2007. — 208 с.: іл. — Мова рос.

ISBN 966-7091-62-7.

ISBN 966-7091-62-7 (рос.)
ISBN 966-7091-60-0 (укр.)

Юные друзья!

Приглашаем вас в мир Геометрии. Это удивительный мир: щедрый, совершенный, тесно связанный с мирами Труда, Разума, Искусства.

Геометрия возникла как наука об измерении земли. Греческое слово *гео* означает «земля», а *метрео* — «меряю». Египетские и греческие землемеры еще 3000 лет тому назад измеряли расстояния, углы, определяли площади земельных участков. Аналогичные знания и умения использовали строители, мореплаватели, астрономы, военные, художники.

Геометрия нужна не только инженерам, архитекторам, конструкторам, художникам, чертежникам, но и столярам, слесарям, токарям, строителям, плотникам... Нужна она и ученикам: без знания геометрии невозможно учиться ни в старших классах, ни во многих высших учебных заведениях.

Некоторые геометрические знания вы получили в предыдущих классах. Вы уже знаете, что такое отрезок, угол, треугольник, многоугольник, окружность, умеете находить площади и объемы некоторых геометрических фигур.

Теперь вы начинаете изучать *систематический курс геометрии*. Вы сможете углубить и расширить свои геометрические знания, развить логическое мышление и пространственное воображение. А поможет вам в изучении геометрии этот учебник.

В каждом параграфе учебника есть теория и задачи. Читая теорию, основное внимание уделяйте словам, напечатанным *курсивом* и **жирным шрифтом**.

Курсивом выделены геометрические термины, названия понятий. Необходимо уметь объяснять их содержание, приводить соответствующие примеры. **Жирным шрифтом** напечатаны важные геометрические утверждения. Следует научиться понимать их, доказывать и использовать для решения задач. Окончание доказательства теоремы помечено значком $\square$.

В каждом параграфе есть рубрика «Для любознательных». В ней дается дополнительный и познавательный материал, который поможет вам заинтересоваться геометрией.

Чтобы проверить, как вы усвоили и запомнили новый теоретический материал, попробуйте ответить на вопросы и выполнить задания из рубрики «Вопросы и задания для самоконтроля», которые есть в каждом параграфе и повторяются после разделов.

Чтобы усвоить курс геометрии, необходимо научиться решать задачи. С разными способами решения задач знакомит рубрика «Решаем вместе». Прежде чем приступать к выполнению домашних заданий, следует рассмотреть задачи этой рубрики. Номера задач, рекомендованных для домашних работ, выделены .

Задачи и упражнения в учебнике поделены на четыре группы: «Решите устно», группа А, группа Б и «Упражнения для повторения». Номера трудных задач помечены звездочками*. В некоторых задачах выделены жирным шрифтом важные утверждения, их полезно запомнить.

Для обобщения и систематизации изученного материала внимательно прочитайте «Главное в разделе».

Хорошо подготовиться к тематическому оцениванию вы сможете, решая задачи и выполняя задания из рубрик «Самостоятельная работа», «Тестовые задания» и «Типовые задачи для контрольной работы».

В разделах есть задачи по готовым рисункам (как на с. 26). Условия таких задач заданы рисунками и краткими записями над горизонтальной чертой. Под чертой указаны величины, значения которых необходимо найти. Самые простые из этих задач можно решать устно.

В конце учебника отдельно даны «Задачи повышенной сложности». Они предлагаются тем сообразительным ученикам, которые любят математику.

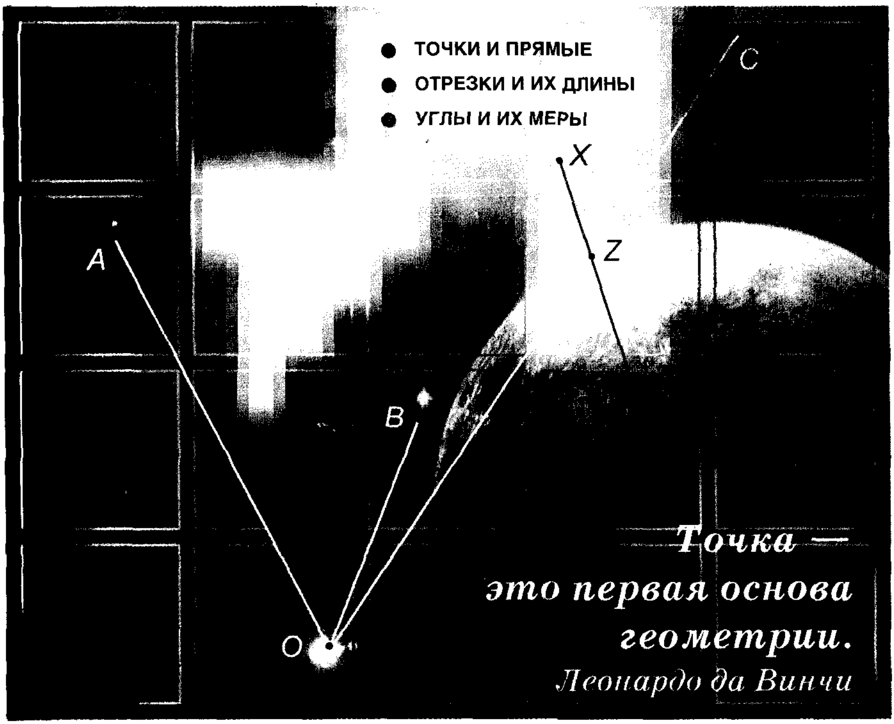
В огромном саду Геометрии каждый может выбрать для себя букет по вкусу. Выбирайте и вы — что кому нравится.

Желаем всем успехов!

Авторы

Раздел 1 ПРОСТЕЙШИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА

В этом разделе вы повторите и углубите свои знания о самых простых и важных геометрических фигурах: **точках**, **прямых**, **лучах**, **отрезках**, **углах**. Узнаете, как измеряют отрезки и углы, ознакомитесь с наиболее *распространенными чертежными* и измерительными инструментами.



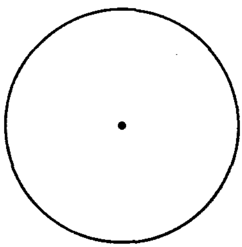
- ТОЧКИ И ПРЯМЫЕ
- ОТРЕЗКИ И ИХ ДЛИНЫ
- УГЛЫ И ИХ МЕРЫ

Точка — это первая основа геометрии.

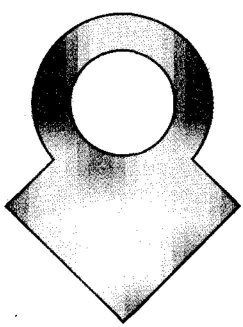
Леонардо да Винчи

§ 1 Точки и прямые

Геометрия — это наука о геометрических фигурах и их свойствах. Самая простая геометрическая фигура — *точка*. Любая другая геометрическая фигура состоит из точек. Например, *окружность* — это фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (рис. 1). *Отрезок* также состоит из точек. Любое *множество точек является геометрической фигурой*. Часть геометрической фигуры или объединение нескольких фигур — тоже геометрическая фигура (рис. 2).



■ Рис. 1



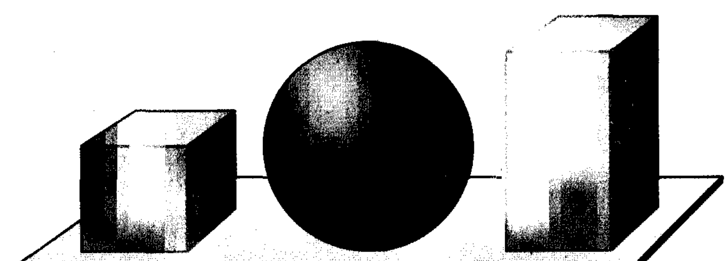
■ Рис. 2

Одна из геометрических фигур — *плоскость*. Представление о части плоскости дает поверхность стола, потолка, пола. В геометрии плоскость считается неограниченной, идеально ровной и гладкой.

Фигуры, расположенные на одной плоскости, называют *плоскими*. Все вышеназванные геометрические фигуры — плоские. А куб, шар, прямоугольный параллелепипед — *неплоские фигуры* (рис. 3). Раздел геометрии, в котором изучаются фигуры на одной плоскости, называется *планиметрией* (латинское *planum* — плоскость).

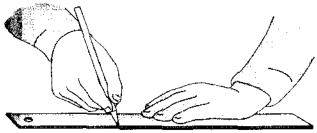
Мы начинаем изучать планиметрию.

Прежде всего рассмотрим, как могут быть расположены на плоскости точки и прямые.



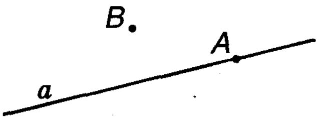
■ Рис. 3

Вы уже знаете, как с помощью линейки проводят прямые (рис. 4).



■ Рис. 4

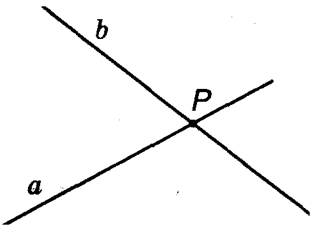
Прямая в геометрии — идеально ровная и бесконечная в обе стороны. Как и любая другая фигура, прямая состоит из точек. Если точка A лежит на прямой a, говорят, что *прямая a проходит через точку A*. Записывают так: $A \in a$. Если *точка B не лежит на прямой a*, пишут: $B \notin a$ (рис. 5).



■ Рис. 5

Какой бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, ей не принадлежащие.

Через одну точку можно провести много прямых. На рисунке 6 вы видите прямые a и b, проходящие через точку P. Это их общая точка, других общих точек прямые a и b не имеют. Если две прямые имеют только одну общую точку, говорят, что они *пересекаются* в этой точке. Прямые a и b пересекаются в точке P.

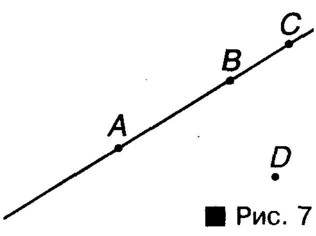


■ Рис. 6

Если прямой принадлежат точки A и B, говорят, что эта прямая проходит через точки A и B. Обозначают ее так: AB.

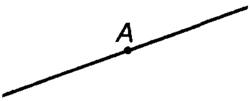
Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

Можно ли провести прямую через три точки? Не всегда. Если точки A, B и C расположены, как показано на рисунке 7, через них прямую провести можно. А через точки A, B и D — нельзя. Говорят, что *точки A, B и D не лежат на одной прямой. Точки A, B, C лежат на одной прямой*, причем B — между A и C.



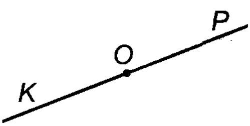
■ Рис. 7

Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.



■ Рис. 8

■ Рис. 9



■ Рис. 10

Если точка B лежит между A и C, говорят, что точки A и C лежат по разные стороны от B, а точки A и B — по одну сторону от C.

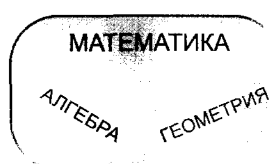
Напечатанные выше жирным шрифтом три предложения со значком ! — это *основные свойства расположения точек на прямой*.

Любая точка A прямой делит эту прямую на две части (рис. 8). Каждую из частей прямой вместе с точкой A называют *лучом*, выходящим из точки A. Точку A называют *началом луча*. Если говорят «луч AB», то имеют в виду, что начало луча находится в точке A (рис. 9).

Два луча, имеющие общее начало и дополняющие друг друга до прямой, называются *дополнительными*. На рисунке 10 вы видите луч OK — дополнительный для луча OP и луч OP — дополнительный для OK.

Для любознательных

Геометрия — часть математики (рис. 11). Геометрическая наука богата содержанием и методами исследования. Она включает элементарную геометрию, высшую геометрию, неевклидовы геометрии, топологию и др. В школе изучают только *элементарную геометрию*.

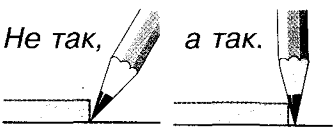


■ Рис. 11

Геометрия тесно связана со многими другими науками, прежде всего с физикой. Но физика занимается изучением материальных тел (имеющих массу, температуру, цвет и т. п.), а в геометрии абстрагируются от всего материального. *Абстрагироваться* — означает мысленно отвлечься от конкретных объектов, окружающих нас. Абстрагируясь от материальных вещей, мы в воображении создаем идеальные объекты по сходным свойствам. Конец иголки, натянутая струна — это материальные объекты. Они имеют определенную толщину, длину, массу. Абстрагируясь от таких физических свойств, человеческое воображение создало абстрактные геометрические понятия *точка*, *прямая*. В природе абстрактной прямой нет, но это понятие существует в человеческом воображении. И очень полезное понятие, поскольку все свойства прямой и ее частей, выявленные в геометрии, переносятся на миллионы и миллиарды всех натянутых струн, прямолинейных рельсов, труб, лент и т. п. Не существует в природе и *плоскость* без толщины, идеально ровная и гладкая, бесконечная в каждом ее направлении. Но для науки это идеальное понятие очень важно, поскольку свойства, установленные в геометрии для плоскости и ее частей, можно переносить на свойства миллиардов конкретных стен, оконных стекол и других предметов, имеющих плоские поверхности.

Чертите красиво

Проводя отрезок, острием карандаша не следует касаться нижнего ребра линейки, а нужно немного отступить от него.



Геометрический отрезок не имеет толщины. Но для того чтобы сделать рисунок понятнее и красивее, чертежники иногда изображают его утолщенной линией, иногда — штриховой линией или же другим цветом.

тонкая линия

утолщенная линия

штриховая линия

? Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое геометрия? Что такое планиметрия?
2. Приведите примеры плоских и неплоских фигур.
3. Что означают записи $A \in a$, $B \notin b$?
4. Опишите понятия *точка, прямая, плоскость*.
5. Приведите примеры материальных объектов, моделями которых являются точка, прямая, плоскость.
6. Сформулируйте основные свойства расположения точек на прямой.
7. Что означает выражение «точка B лежит между A и C»?
8. Что такое луч? Как обозначают лучи?
9. Какие лучи называют дополнительными?

● ***Решаем вместе***

На сколько частей могут разбивать плоскость три ее прямые?

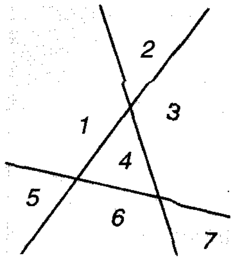


Рис. 12

Если прямые расположены, как показано на рисунке 12, то они разбивают плоскость на 7 частей. Если они расположены, как показано на рисунке 13, то они разбивают плоскость на 4 или 6 частей.

Ответ. Три прямые разбивают плоскость, которой они принадлежат, на 4, 6 или 7 частей.

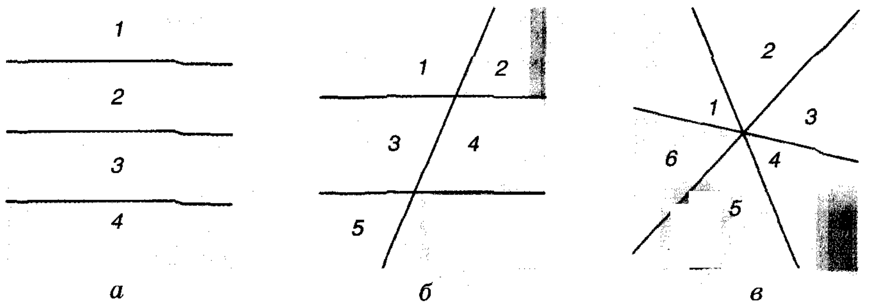


Рис. 13

● ***ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ***

РЕШИТЕ УСТНО

1. Через каждые ли две точки можно провести прямую? Существуют ли две точки, через которые можно провести прямую?
2. Через каждые ли три точки можно провести прямую? Существуют ли три точки, через которые можно провести прямую?
3. Просклоняйте слова: а) *точка*; б) *прямая*; в) *плоскость*.
4. Опишите, как взаимно расположены точки и прямые на рисунке 14.
5. На сколько частей делит прямую ее точка? А две точки?
6. Можно ли считать дополнительными лучи PK и KP (см. рис. 10)? А лучи OP и KP? Почему?

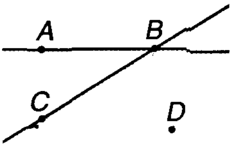


Рис. 14

А

7. Отметьте в тетради точки A и B и проведите через них прямую. Назовите эту прямую.

8. Проведите прямую. Отметьте несколько точек, принадлежащих этой прямой, и несколько точек, ей не принадлежащих.

9. Дана точка A. Проведите через нее три прямые. Можно ли через точку A провести десять прямых? А миллион прямых?

10. Прямая a и точки A, B такие, что $A \in a$ и $B \notin a$. Изобразите это на рисунке.

11. Прямые k и p пересекаются в точке X. Изобразите это на рисунке. Верно ли, что $X \in k$ и $X \in p$?

12. Прямая AB пересекает прямую AC в точке A, а прямую BC — в точке B. Принадлежит ли точка C прямой AB?

13. Отметьте точки K, P и T так, чтобы через них можно было провести прямую. Как можно назвать эту прямую?

14. Отметьте на прямой точки A, B, C так, чтобы A и B лежали по одну сторону от C, а A и C — по одну сторону от B.

15. Дана прямая a. Отметьте точки A, B и C так, чтобы прямые AB и a пересекались в точке C, лежащей между A и B.

16. Прямые a и b пересекаются в точке P. Сколько лучей получилось?

17. На сколько частей делит плоскость ее прямая? А две прямые? Рассмотрите все случаи.

Б

18. Отметьте точки A, B, C и D так, чтобы прямые AB и CD пересекались, а лучи AB и CD не пересекались.

19. Можно ли расположить точки A, B, C и D так, чтобы лучи AB и CD пересекались, а лучи AC и BD не пересекались?

20. Начертите три прямые AB, BC и AC. На сколько частей разбивают эти прямые плоскость?

21*. Отметьте четыре точки так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой (рис. 15). Сколько существует прямых, проходящих через любые две из этих точек? На сколько частей разбивают эти прямые плоскость?

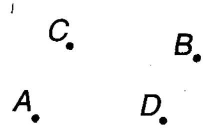


Рис. 15

22. Ученик провел сначала одну прямую, а потом, перевернув линейку, — другую, и получились линии, пересекающиеся в двух точках (рис. 16). Что можно сказать о его линейке? Почему?

23. Чтобы проверить линейку, следует смотреть вдоль ее ребра (рис. 17). Что видно, если линейка искривлена?

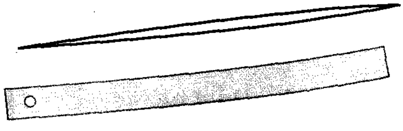


Рис. 16

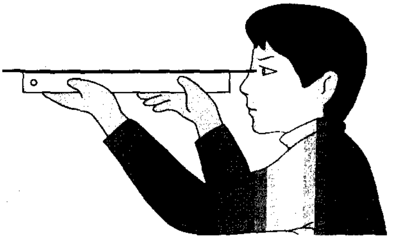


Рис. 17

Практическое задание

24. Покажите, как, согнув лист бумаги, можно получить линейку для проведения прямых.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

25. Назовите и изобразите геометрические фигуры, которые вы изучали в предыдущих классах.

26. Начертите отрезок длиной 4 см и отрезок вдвое длиннее.

27. Начертите углы: острый, прямой, тупой, развернутый. Закрасьте их внутренние области.

28. Найдите периметр треугольника, стороны которого равны 5 см, 7 см и 8,5 см.

29. Найдите периметр квадрата, если он больше длины одной из сторон на 6 см.

30. Перерисуйте в тетрадь часть древнегреческого орнамента (рис. 18). Сделайте ленту с ним вдвое длиннее.

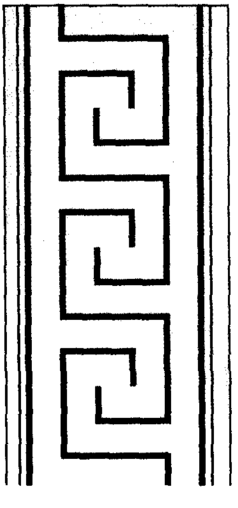


Рис. 18

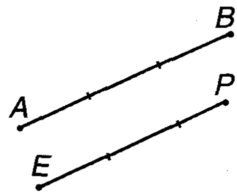
§ 2 *Отрезки и их длины*

Две точки прямой делят эту прямую на три части: два луча и отрезок.

Отрезком AB называется та часть прямой, которая состоит из точек A и B и всех точек, лежащих между ними. Точки A и B называют *концами отрезка AB*. Все другие точки этого отрезка — его *внутренние точки*.

■ Рис. 19

■ Рис. 20



■ Рис. 21

На рисунке 19 изображен отрезок AB. Точки A и B — его концы, а любая точка, лежащая между A и B, — внутренняя точка отрезка AB.

Два отрезка *пересекаются*, если они имеют только одну общую внутреннюю точку.

Чтобы измерять отрезки, нужно иметь *единичный отрезок* (единицу измерения). Отрезок, показанный на рисунке 20, будем считать единичным. Его длина равна 1 см. Если на отрезке AB единичный отрезок откладывается ровно 3 раза, то это значит, что длина отрезка AB равна 3 см (рис. 21). Если на отрезке EP единичный отрезок откладывается два раза с остатком, а в остатке десятая часть единичного отрезка — 7 раз, то длина отрезка EP равна 2,7 см. Записывают так: $AB = 3$ см, $EP = 2{,}7$ см.

За единичный отрезок можно брать отрезки длиной 1 м, 1 км, 1 фут, 1 дюйм и т. д.

! **Каждый отрезок имеет определенную длину.**

Два отрезка называются *равными*, если длины их равны. Из двух отрезков *большим* считается тот, длина которого больше.

В сантиметрах измеряют сравнительно небольшие отрезки. Большие отрезки измеряют в дециметрах, метрах, километрах; меньшие — в миллиметрах. Напомним, что

1 км = 1000 м, 1 м = 10 дм = 100 см = 1000 мм.

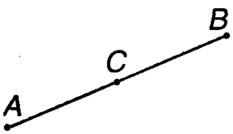
Длину отрезка называют также *расстоянием* между его концами. Если $XY = 18$ см, то это означает, что *расстояние между точками* X и Y равно 18 см. Расстояние между X и Y всегда равно расстоянию между Y и X.

■ Рис. 22

Если точка C отрезка AB разбивает его на две части, длины которых равны, например 2 см и 1,2 см, то длина отрезка AB равна 3,2 см (рис. 22).

! Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

Напечатанные выше жирным шрифтом два предложения со значком ! — это *основные свойства измерения отрезков.*



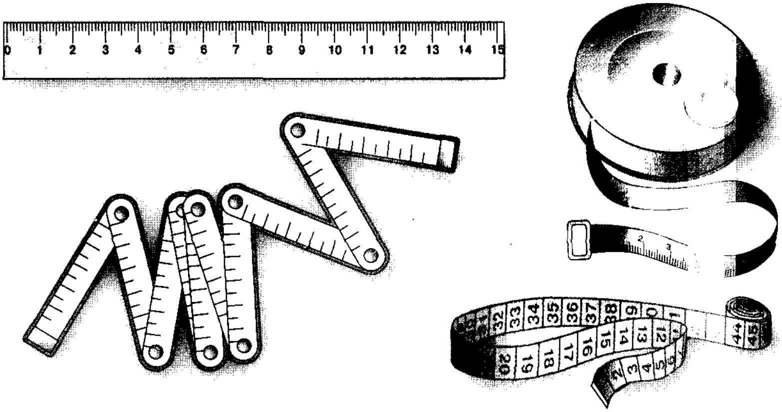
■ Рис. 23

Серединой отрезка называется его внутренняя точка, разбивающая этот отрезок на две равные части.

Если точка C — середина отрезка AB, то $AC = CB$ (рис. 23).

Если точка C не принадлежит отрезку AB, то сумма длин отрезков AC и CB больше длины AB. Таким образом, для любых трех точек A, B и C всегда $AB + BC \geqslant AC$.

Измерять длины отрезков приходится многим специалистам. Чертежники измеряют их масштабными линейками, столяры — складными метрами, портные — клеенчатыми сантиметрами, строители — рулетками (рис. 24).



■ Рис. 24

Для любознательных

Измерительные приборы обеспечивают ту или иную точность. Расстояние между городами обычно определяют с точностью до километра, между берегами реки — с точностью до метра, длину карандаша — с точностью до миллиметра, диаметр детали ручных часов — с точностью до десятой, а то и сотой части миллиметра. Разумеется, для измерений разных длин и расстояний используют соответствующие измерительные приборы: кроме уже названных, циркули, кронциркули, штангенциркули, дальномеры и др. С некоторыми из них вы познакомитесь позже. Единицы длины бывают разные. В англоязычных странах чаще всего используют следующие: *фут, дюйм, миля*. Подробнее о них — дальше.

На практике для различных расстояний существуют разные названия: *длина, ширина, высота, глубина, дистанция, интервал* (рис. 25).

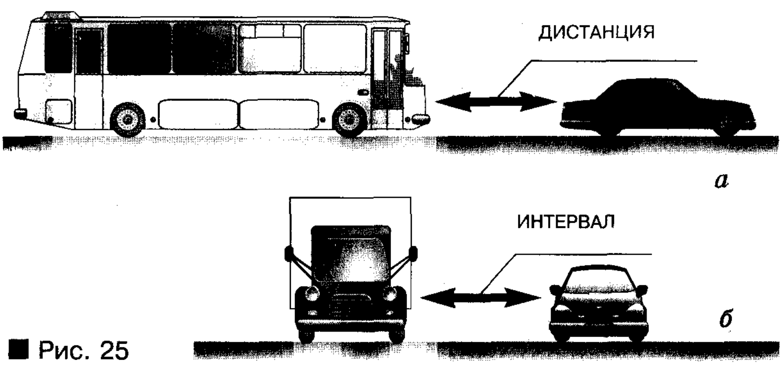


Рис. 25

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое отрезок? Что такое концы отрезка?
2. Что такое расстояние между двумя точками?
3. Что означает выражение «два отрезка пересекаются»?
4. Сформулируйте основные свойства измерения отрезков.
5. Какие отрезки называются равными?
6. Что такое середина отрезка?
7. Какое неравенство выполняется для любых трех точек?

• *Решаем вместе*

1 Луч — часть прямой. Можно ли утверждать, что луч короче прямой?

■ Прямая и луч не имеют длины, поэтому сравнивать их длины нет смысла.

Ответ. Нет.

2 Точки K, P и T лежат на одной прямой. Найдите расстояние между P и T, если $KP = 1{,}7$ м, $KT = 4{,}8$ м. Сколько решений имеет задача?

■ Отметим точки K и T так, что $KT = 4{,}8$ м. Точка P прямой KT находится на расстоянии 1,7 м от K. Возможны два случая (рис. 26):

а) K лежит между P и T: $PT = 1{,}7$ м + 4,8 м = 6,5 м;
б) P лежит между K и T: $PT = 4{,}8$ м − 1,7 м = 3,1 м.

■ Рис. 26

Ответ. Задача имеет два решения: 6,5 м; 3,1 м.

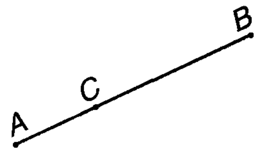
• ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

31. Найдите длину отрезка AB, если точка C — его середина и $CB = 5$ дм.

32. Найдите длину отрезка, который длиннее своей половины на 35 см.

33. Точка C делит отрезок AB в отношении 1 : 2 (рис. 27).



■ Рис. 27

Найдите: 1) CB, если AC равна 1 см; 3 дм; 10 км;
2) AB, если AC равна 2 см; 5 дм; 30 м;
3) AB, если CB равна 2 см; 6 м; 12 км.

34. Найдите длину отрезка, если точки K и P делят его на три равные части и $KP = 7$ см.

35. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой a. Пересекает ли отрезок AB прямую a?

36. Точки K и P лежат по одну сторону от прямой c. Пересекает ли отрезок KP прямую c? А прямая c пересекает прямую KP?

37. Точка A лежит между B и C. Является ли точка B внутренней точкой отрезка AC?

А

38. Отметьте на прямой точки A и B. Какой отрезок образовался? Покажите его середину.

39. Отметьте точки A, B, C, D так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой. Постройте отрезки AB, AC, AD, BC, BD, CD.

40. Отметьте на прямой точки A, B, C, D так, чтобы отрезки AC и BD не имели общих точек и чтобы точки C и B лежали между A и D. Найдите общую часть отрезков AB и CD.

41. Прямые AB и CD пересекаются, C — внутренняя точка отрезка AB. Пересекаются ли отрезки AB и CD?

42. Отрезок AB пересекает прямую a, а отрезок BC не пересекает ее, причем $C \notin a$. Пересекает ли прямую a отрезок AC?

43. Начертите отрезки AB, AC, AD, CB, CD, BD такие, чтобы точка C лежала между A и B, а точка B — между C и D. Сколько общих точек имеют отрезки AC и BD, AC и CB, AB и CD?

44. Точка X лежит между A и B. Найдите длину отрезка AB, если:

а) $AX = 2{,}5$ см, $XB = 3{,}4$ см;
б) $AX = 5{,}3$ м, $XB = 4{,}2$ м;
в) $AX = 2\frac{1}{3}$ дм, $XB = 6\frac{2}{3}$ дм.

45. Точка M лежит между K и P. Найдите расстояние между M и P, если:

а) $KP = 0{,}9$ дм, $KM = 0{,}3$ дм;
б) $KP = 2{,}6$ дм, $KM = 1{,}4$ дм;
в) $KP = 2\frac{5}{6}$ дм, $KM = \frac{1}{6}$ дм.

46. Точка C лежит между A и B. $AC = 5$ см, расстояние BC на 3 см больше. Найдите AB.

47. Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если:

а) $AB = 2{,}5$ см, $BC = 3{,}8$ см, $AC = 1{,}3$ см;
б) $AB = 1{,}9$ дм, $BC = 2{,}9$ дм, $AC = 4{,}9$ дм?

48. Точки A, B, C, K лежат на одной прямой. $AB = BC = CK$. Найдите CK, если $AC = 12$ см.

49. Можно ли расположить точки A, B и C так, чтобы выполнялись равенства:

а) $AB = 2{,}3$ см, $BC = 3{,}5$ см, $AC = 6{,}3$ см;
б) $AB = 5{,}1$ см, $BC = 3{,}5$ см, $AC = 6{,}8$ см;
в) $AB = 3{,}1$ см, $BC = 7{,}2$ см, $AC = 10{,}3$ см?

Б

50. *Может ли отрезок BC лежать на луче AB, если:*

а) $AB = 9{,}2$ см, $BC = 3{,}8$ см, $AC = 13$ см;
б) $AB = 9{,}2$ см, $BC = 3{,}8$ см, $AC = 5{,}4$ см;
в) $AB = 9{,}2$ см, $BC = 13{,}8$ см, $AC = 4{,}6$ см?

51. На отрезке XY длиной 4,8 дм лежит точка C. Найдите расстояния XC и CY, если:

а) $XC - CY = 1{,}3$ дм; б) $CY = 2XC$; в) $XC : CY = 1 : 5$.

52. Точки A, B и C лежат на одной прямой, $AB = 10$ дм, $BC = 3$ дм. Найдите AC. Рассмотрите все возможные варианты.

53. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой, B – середина AC, $BC = 7$ м, $CD = 10$ м. Найдите AD.

54. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Найдите CD, если $AB = 10$ см, $AC = 3$ см, $BD = 4$ см. Рассмотрите все возможные варианты.

55. Дан отрезок AB. Постройте отрезок KP:

а) в три раза длиннее AB;
б) в два раза короче AB;
в) $KP = 2{,}5\,AB$.

56. Как с помощью полуметровой линейки построить двухметровый отрезок?

57. Объясните, как *провешивают прямые* с помощью вех (рис. 28).

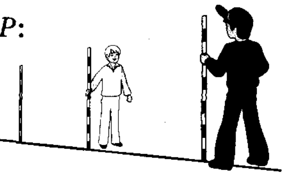


Рис. 28

Практическое задание

58. Измерьте длину и ширину своей парты.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

59. Начертите окружность радиуса 4 см. Разделите ее на четыре равные дуги и найдите длину одной из них.

60. На сколько частей разделят плоскость две окружности, расположенные на ней?

61. Найдите длину ребра куба, если сумма длин всех его ребер равна 6 м.

62. Перерисуйте в тетрадь фигуру, изображенную на рисунке 29. Найдите ее площадь, если площадь одной клеточки равна 0,25 см².

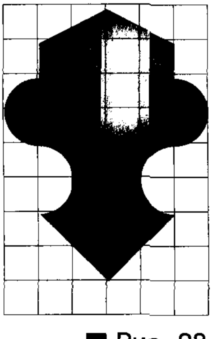


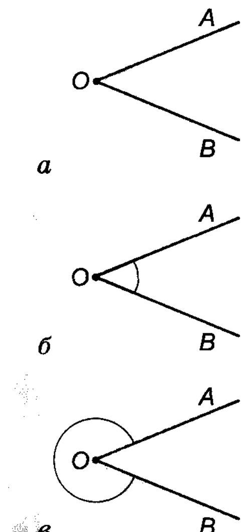
Рис. 28

§ 3 Углы и их меры

Два луча, имеющих общее начало, разделяют плоскость на две части.

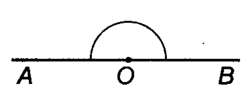
Часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом, называется *углом*.

Лучи, ограничивающие угол, называются *сторонами*, а их общее начало – *вершиной угла* (рис. 30, *а*). Такой угол называют углом AOB, или углом BOA, или углом O и записывают соответственно: $\angle AOB$, или $\angle BOA$, или $\angle O$. Все точки угла, не принадлежащие его сторонам, образуют *внутреннюю область* этого угла. Внутренняя область угла на рисунке 30, *а* закрашена. Иногда внутреннюю область угла обозначают дугой, иногда никак не обозначают, а только представляют себе. На рисунке 30, *б*, *в* вы видите углы с вершиной O и сторонами OA и OB.



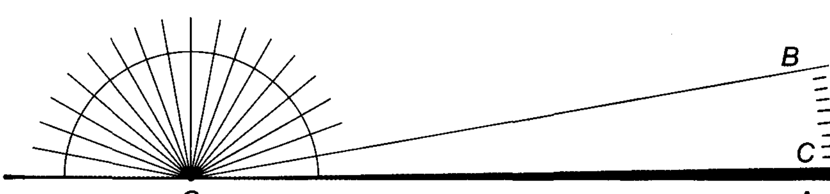
■ Рис. 30

Угол, стороны которого — дополнительные лучи, называют *развернутым углом* (рис. 31).



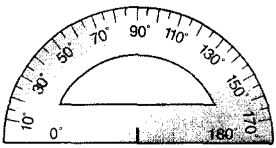
■ Рис. 31

Чтобы измерять углы, необходимо иметь единицу измерения. Такой единицей принято считать угол в 1 *градус* (сокращенно: 1°). В развернутом угле он вмещается 180 раз. Представим полуокружность, разделенную на 18 равных дуг (рис. 32). Если из ее центра O через все точки деления и концы полуокружности провести лучи, они разделят развернутый угол на 18 углов по 10°. Один из таких углов (AOB) делим на 10°. Мера угла AOC равна 1°.

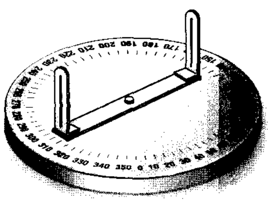


■ Рис. 32

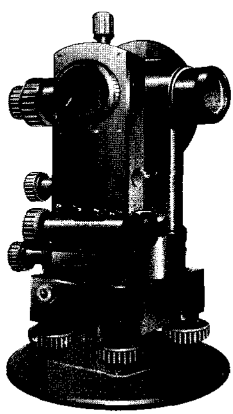
! Каждый угол имеет определенную меру.



■ Рис. 33



■ Рис. 34



■ Рис. 35

Мера развернутого угла равна 180°.

Меру угла обозначают так же, как и угол. Например, если мера угла ABC равна 60 градусам, пишут: $\angle ABC = 60°$. Очень маленькие углы измеряют в минутах и секундах.

Минутой называют $\frac{1}{60}$ часть градуса, а *секундой* — $\frac{1}{60}$ часть минуты.

Записывают так: $1° = 60'$, $1' = 60''$.

Углы в тетради и на классной доске измеряют *транспортиром* (рис. 33), а на местности — *астролябией* (рис. 34), *теодолитом* (рис. 35) или другими угломерными приборами.

Два угла называются *равными*, если их меры равны.

Из двух углов большим считается тот, мера которого больше.

Угол называется *прямым*, если его мера равна 90°, *острым* — если он меньше прямого, *тупым* — если он больше прямого, но меньше развернутого (рис. 36).

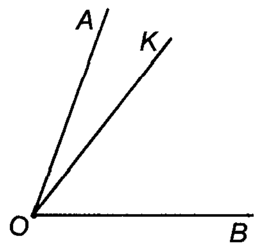
Прямые углы на рисунках чаще обозначают не дугами, а квадратиками.

Углы больше развернутого (см. рис. 30, *в*) пока рассматривать не будем.

Луч, который исходит из вершины угла и лежит в его внутренней области,

■ Рис. 36

называют *внутренним лучом угла*. Внутренний луч делит данный угол на два меньших угла. Например, внутренний луч OK угла AOB делит этот угол на углы AOK и KOB (рис. 37). При этом $\angle AOK + \angle KOB = \angle AOB$. Говорят, что угол AOB равен сумме углов AOK и KOB.

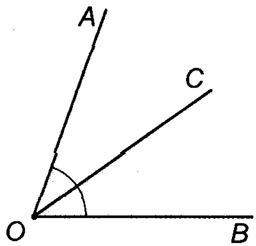


■ Рис. 37

! Мера угла равна сумме мер углов, на которые данный угол делится его внутренним лучом.

Два выделенных выше предложения со значком ! — это *основные свойства измерения углов*.

Внутренний луч, который делит угол на два равных угла, называется *биссектрисой* этого угла. На рисунке 38 луч OC — биссектриса угла AOB.

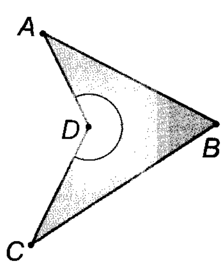


■ Рис. 38

Для любознательных

Углом часто называют также фигуру, составленную из двух лучей, имеющих общее начало, то есть углом называют и некую линию. Но разделить подобный угол на два или более равных углов нельзя. Таким образом, когда говорят о сложении, вычитании или делении углов, то угол рассматривают вместе с его внутренней областью.

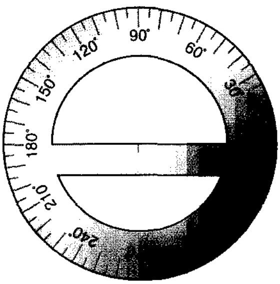
И хотя далее мы будем рассматривать в основном углы меньше развернутого, необходимо помнить, что бывают углы и больше развернутого, то есть больше 180°. Таким, например, является угол D четырехугольника $ABCD$ (рис. 39). Существуют и специальные транспортиры, которыми измеряют углы больше развернутого (рис. 40). Понятие угла часто используют также для характеристики *поворотов*. Например, велосипедное колесо можно повернуть на 100°, можно на 300°. А если колесо сделало полтора



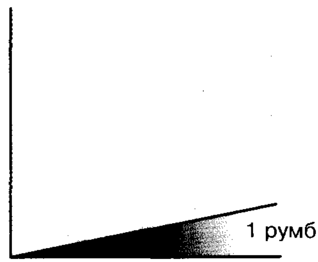
■ Рис. 39

оборота? Считают, что оно повернулось на 360° и еще на 180°, всего — на 540°.

Кроме градусов, минут и секунд, существуют и другие меры углов. Моряки измеряют углы в *румбах*. Румбом называют одну восьмую часть прямого угла, 1 румб = 11,25° (рис. 41). Научные работники чаще всего измеряют углы в *радианах*. Что это такое, вы узнаете в старших классах.



■ Рис. 40



■ Рис. 41

? Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какая фигура называется углом? Как обозначают углы?
2. Какой угол называют:
   а) острым;
   б) тупым;
   в) прямым;
   г) развернутым?
3. Какими приборами и в каких единицах измеряют углы?
4. Что такое внутренняя область угла? Внутренний луч угла?
5. Что такое биссектриса угла?
6. Какие углы называют равными?
7. Сформулируйте основные свойства измерения углов.

Решаем вместе

1 Найдите меру угла AOB, если лучи OC и OK делят его на три равных угла и $\angle COK = 40°$.

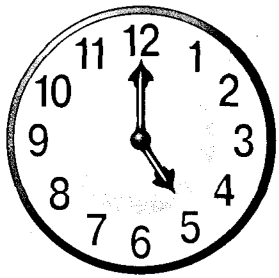
■ Угол COK — третья часть угла AOB. Поэтому $\angle COK = 40° \cdot 3 = 120°$.

Ответ. 120°.

2 Найдите меры углов, образованных стрелками часов: в 3 часа; в 5 часов (рис. 42).

■ На циферблате часов полуокружность соответствует 6 часам. Поэтому одному часу соответствует 1/6 часть развернутого угла, то есть 30°. Когда часы показывают 3 часа, угол между часовой и минутной стрелками равен $30° \cdot 3 = 90°$. Когда часы показывают 5 часов, угол между стрелками равен $30° \cdot 5 = 150°$.

Ответ. 90°; 150°.



■ Рис. 42

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

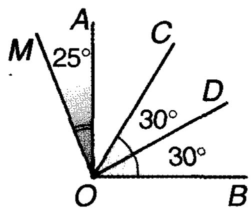
РЕШИТЕ УСТНО

63. Сколько минут в 2°? А в полтора градусах?

64. 1) Назовите все углы, изображенные на рисунке 43. Какие из них острые, прямые, тупые?

2) Пусть $\angle MOA = 25°$, $\angle COD = \angle DOB = 30°$, $\angle AOB$ = прямой. Найдите $\angle MOB$ и $\angle AOC$.

3) Сравните углы MOC и AOD, AOD и COB.



■ Рис. 43

65. Найдите угол между лучами, которые делят прямой угол на 3 равные части.

66. Лучи, проведенные из центра окружности, делят ее на 4 равные части. Найдите угол между двумя соседними лучами.

А

67. Начертите острый угол. Обозначьте буквами его вершину и стороны. Заштрихуйте его внутреннюю область.

68. Начертите тупой угол. Обозначьте его стороны буквами, а внутреннюю область — дугой.

69. Начертите развернутый угол KPT. Назовите его вершину и стороны. Отметьте внутреннюю область угла дугой.

70. Отметьте три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Постройте угол ABC. Может ли этот угол быть развернутым?

71. Пользуясь транспортиром, постройте углы, меры которых равны $50°$, $90°$, $120°$.

72. Постройте на глаз углы, меры которых $30°$, $45°$, $60°$. Проверьте точность построения транспортиром.

73. Определите в градусах и минутах меры углов: $135'$; $5000'$.

74. Определите в минутах: $6°15'$; $2°$; $11{,}5°$.

75. Выполните действия: а) $5°48' + 7°35'$; б) $32°17' - 8°45'$.

76. Выполните действия: а) $33°33' + 15°15'$; б) $145°54' - 41°41'$; в) $123°45' + 54°32'$; г) $44°14' - 14°44'$.

77. Заполните таблицу, в которой A — мера данного угла, B — мера угла между его биссектрисой и стороной.

A	10°	100°	60°	90°	100°	180°
B	5°	50°	30°	45°	50°	90°

78. Найдите меру угла AOB, если OC — его внутренний луч и $\angle AOC = 60°$, $\angle COB = 30°$.

79. Является ли луч PM внутренним лучом угла KPT, если $\angle KPT = 70°$, $\angle KPM = 80°$? А если $\angle KPM = 20°$?

Б

80. На какой угол повернется часовая стрелка за 20 мин; за 30 мин?

81. На какой угол повернется часовая стрелка за полчаса; за пять минут?

82. Найдите угол MOB, если $\angle AOM = 25°$ и $\angle AOM : \angle MOB = 4 : 5$.

83. Найдите угол AOB, если $\angle AOM = 30°$, $\angle MOB = 60°$ и все эти углы расположены в одной плоскости.

84. Даны углы AOB и MOB соответственно 120° и 60°, расположенные в одной плоскости. Найдите меру угла AOM. Рассмотрите два варианта.

85. Начертите угол AOB и его внутренние лучи OK и OM так, чтобы $\angle AOB = 90°$, $\angle AOK = 40°$, $\angle MOB = 30°$. Найдите $\angle KOM$.

86. OM – биссектриса угла AOB, OK — биссектриса угла AOM. Во сколько раз $\angle KOM$ меньше $\angle AOB$?

87. OM — биссектриса прямого угла AOB; OK и OP — биссектрисы углов AOM и MOB. Найдите меру угла KOP.

82. $\angle AOM = 30°$, а $\angle BOM$ на 20° больше. Найдите угол AOB. Рассмотрите все возможные варианты.

83. OM и OK — внутренние лучи угла AOB, OK — биссектриса угла MOB, $\angle AOB = 150°$, $\angle KOB$ на 40° меньше $\angle MOB$. Найдите $\angle AOM$ и $\angle MOK$.

Практическое задание

90. а) Вырежьте из бумаги острый, прямой и тупой углы. Измерьте их транспортиром.

б) Сгибая листы бумаги, сделайте модели углов, меры которых равны 180°, 90°, 45°, 30°, 60°.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

91. Площадь квадрата равна 16 см². Найдите его периметр.

92. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 40 см², а одна из сторон 5 см.

93. На одной ли прямой расположены точки A, B и C, если:

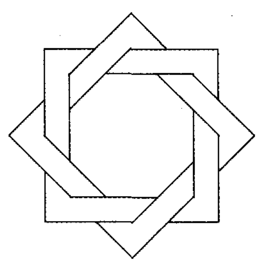
а) $AB = 5$ дм, $BC = 7$ дм, $AC = 10$ дм;

б) $AB = 35$ см, $BC = 45$ см, $AC = 1$ дм;

в) $AB = \frac{3}{4}$ дюйма, $BC = \frac{2}{3}$ дюйма, $AC = \frac{1}{12}$ дюйма?

94. Как найти площадь прямоугольного треугольника, стороны которого равны 3, 4 и 5 см?

95. Перерисуйте в тетрадь фигуру, изображенную на рисунке 44. Раскрасьте ее в два цвета.



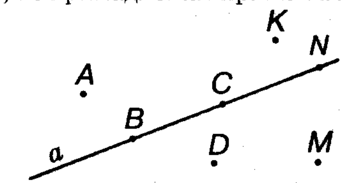
■ Рис. 44

• Задачи по готовым рисункам

А | **Б**

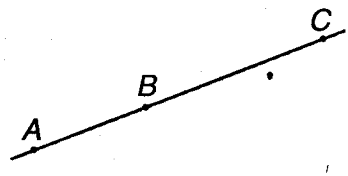
1

А. Какие из точек:
а) принадлежат прямой a;
б) не принадлежат прямой a?



Б. $AC = 10$, $AB : BC = 2 : 3$.

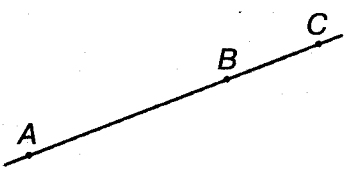
$, BC$



2

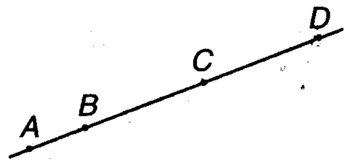
А. $AB = \frac{2}{3} AC$, $BC = 5$.

AB, AC



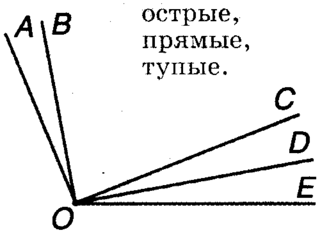
Б. $AD = 20$, $BC = CD = 2AB$.

AB, BC, CD, BD



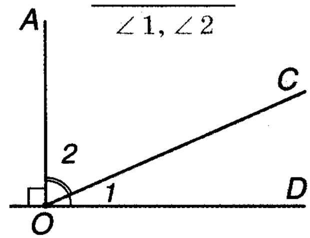
3

А. Укажите углы:
острые,
прямые,
тупые.



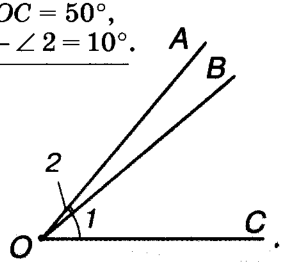
Б. $\angle 2 = 2\angle 1$.

$\angle 1$, $\angle 2$



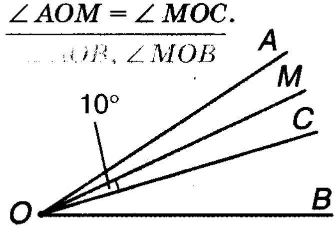
4

А. $\angle AOC = 50°$,
$\angle 1 - \angle 2 = 10°$.



Б. OC — биссектриса $\angle AOB$,
$\angle AOM = \angle MOC$.

$\angle AOB$, $\angle MOB$



Вариант 1

1°. C — внутренняя точка отрезка AB, $AC = 6$ см, BC на 2 см меньше AC. Найдите длину отрезка AB.
2°. $\angle AOB = 130°$, OC — его биссектриса. Найдите $\angle BOC$.
3*. Точки A, B и C лежат на одной прямой. $AB = 9$ см, $BC = 4$ см. Найдите длину отрезка AC. Рассмотрите два случая.
4*. Луч OC делит $\angle AOB = 80°$ на два угла так, что один из них в 3 раза больше другого. Найдите $\angle AOC$ и $\angle BOC$.

Вариант 2

1°. C — внутренняя точка отрезка AB, $BC = 4$ см, AC в 2 раза больше BC. Найдите длину отрезка AB.
2°. OC — биссектриса $\angle AOB$. $\angle AOC = 50°$. Найдите $\angle AOB$.
3*. Точки M, N и K лежат на одной прямой. $MN = 6$ см, $NK = 10$ см. Найдите длину отрезка MK. Рассмотрите два случая.
4*. Луч OC делит $\angle AOB = 80°$ на два угла так, что один из них на $20°$ больше другого. Найдите $\angle AOC$ и $\angle BOC$.

Вариант 3

1°. C — внутренняя точка отрезка AB, $AC = 4$ см, BC на 3 см больше AC. Найдите длину отрезка AB.
2°. $\angle AOB = 60°$, OC — его биссектриса. Найдите $\angle AOC$.
3*. Точки E, F и P лежат на одной прямой. $EF = 7$ см, $FP = 3$ см. Найдите длину отрезка EP. Рассмотрите два случая.
4*. Луч OC делит $\angle AOB = 100°$ на два угла так, что $\angle AOC : \angle BOC = 2 : 3$. Найдите $\angle AOC$ и $\angle BOC$.

Вариант 4

1°. C — внутренняя точка отрезка AB, $AC = 9$ см, BC в 3 раза меньше AC. Найдите длину отрезка AB.
2°. OC — биссектриса $\angle AOB$. $\angle BOC = 40°$. Найдите $\angle AOB$.
3*. Точки K, P и T лежат на одной прямой. $KP = 12$ см, $PT = 5$ см. Найдите длину отрезка KT. Рассмотрите два случая.
4*. Луч OC делит $\angle AOB = 120°$ на два угла так, что один из них на $30°$ меньше другого. Найдите $\angle AOC$ и $\angle BOC$.

• *Тестовые задания 1*

1.	Прямые a и b пересекаются в точке O. Какой прямой принадлежит точка O?	а) a; б) b; в) a и b; г) не принадлежит ни одной.
2.	На сколько частей делят плоскость две пересекающиеся прямые?	а) на 2; б) на 3; в) на 4; г) на 6.
3.	Какая из трех точек лежит между двумя другими, если $XY = 3$, $YZ = 7$, $XZ = 4$?	а) X; б) Y; в) Z; г) ни одна.
4.	M — середина отрезка AB, $AM = 7$ см. Найдите длину AB.	а) 14 см; б) 21 см; в) 3,5 см; г) 7 см.
5.	K — внутренняя точка отрезка AB, $AK = 3$ см, $AB = 10$ см. Найдите длину KB.	а) 13 см; б) 7 см; в) 30 см; г) 8 см.
6.	Найдите меру угла, если его биссектриса образует со стороной угол 20°.	а) 20°; б) 10°; в) 30°; г) 40°.
7.	$\angle AOB = 110°$, OM — его внутренний луч, $\angle BOM = 60°$. Найдите $\angle AOM$.	а) 50°; б) 170°; в) 90°; г) 70°.
8.	OM — внутренний луч $\angle AOB$, $\angle AOM = 40°$, $\angle BOM$ на 10° больше. Найдите AOB.	а) 70°; б) 50°; в) 90°; г) 44°.
9.	Точки A, B и C лежат на одной прямой. $AB = 5$ см, $BC = 12$ см. Найдите AC.	а) 17 см; б) 7 см; в) 17 см или 7 см; г) 18 см или 8 см.
10.	$\angle AOB = 50°$, $\angle BOC = 20°$. Найдите $\angle AOC$.	а) 70°; б) 30° или 70°; в) 30°; г) 70° или 40°.

• *Вопросы и задания для самоконтроля*

1. Что такое геометрия?
2. Что такое планиметрия?
3. Приведите примеры плоских и неплоских фигур.
4. Опишите понятие *точка*.
5. Опишите понятие *прямая*.
6. Опишите понятие *плоскость*.
7. Приведите примеры материальных объектов, моделями которых являются точка, прямая, плоскость.
8. Что означают записи $A \in a$, $A \notin b$?
9. Что означает выражение «точка B лежит между A и C»?
10. Сформулируйте основные свойства расположения точки на прямой.
11. Что такое луч?
12. Как обозначаются лучи?
13. Какие лучи называют дополнительными?
14. Что такое отрезок?
15. Что такое концы отрезка?
16. В каких единицах измеряют отрезки?
17. Сформулируйте основные свойства измерения отрезков.
18. Что такое середина отрезка?
19. Какое неравенство выполняется для любых трех точек?
20. Что такое расстояние между двумя точками?
21. Какая фигура называется углом?
22. Как обозначают углы?
23. Какой угол называют острым?
24. Какой угол называют тупым?
25. Какой угол называют прямым?
26. Какой угол называют развернутым?
27. В каких единицах измеряют углы?
28. Что такое внутренняя область угла?
29. Что такое внутренний луч угла?
30. Сформулируйте основные свойства измерения углов.
31. Что такое биссектриса угла?
32. Какие углы называют равными?

Главное в разделе 1

Геометрия — наука о геометрических фигурах и их свойствах. Самая простая геометрическая фигура — *точка*. Каждая другая геометрическая фигура состоит из точек, то есть является некоторым множеством точек. Другие фигуры — *прямая*, *плоскость*. Их содержание раскрывают не определениями, а описывая их основные свойства. Фигуры, расположенные на одной плоскости, называют *плоскими*. Раздел геометрии, в котором изучаются фигуры на одной плоскости, называется *планиметрией*.

Основные свойства расположения точек на прямой:

- **Какой бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, ей не принадлежащие.**
- **Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.**
- **Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.**

Части прямой — *отрезок* и *луч*. Отрезок AB — это часть прямой, содержащая точки A, B и все точки, лежащие между ними. Каждому отрезку соответствует его длина. Длина отрезка — расстояние между его концами. Расстояние и длину измеряют метрами, сантиметрами, миллиметрами, километрами, футами, дюймами и другими единичными отрезками.

Основные свойства измерения отрезков:

- **Каждый отрезок имеет определенную длину.**
- **Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.**

Часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом, называется *углом*. Углы бывают острые, прямые, тупые, развернутые и больше развернутого. *Меры углов* определяют в градусах, минутах, секундах, румбах и некоторых других единицах измерения.

Основные свойства измерения углов:

- **Каждый угол имеет определенную меру.**
- **Мера угла равна сумме мер углов, на которые данный угол делится его внутренним лучом.**

Биссектриса угла — внутренний луч, разбивающий данный угол на два равных угла.

Раздел 2

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

В этом разделе учебника вы расширите и углубите свои знания о прямых и лучах одной плоскости, усвоите очень важные понятия: **смежные углы**, **вертикальные углы**, **перпендикулярные прямые**, **параллельные прямые** и т. д., а также важные общематематические понятия: **аксиома**, **теорема**, **следствие**, **доказательство**, **признак**, **определение**.

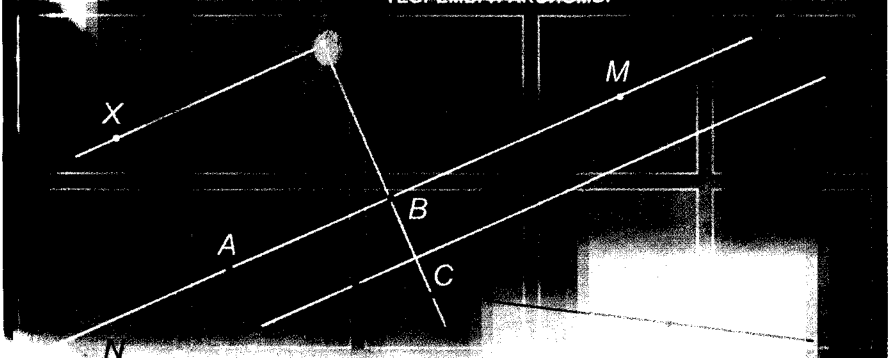
СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

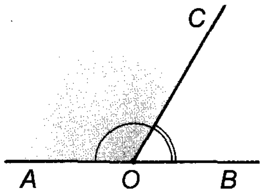
ТЕОРЕМЫ И АКСИОМЫ



Основная идея, которой проникнута вся математика, — это идея равенства.

Г. Спенсер

§ 4 Смежные и вертикальные углы



■ Рис. 45

Два угла, на которые делится развернутый угол его внутренним лучом, называют *смежными*.

Одна сторона у смежных углов общая, а две другие — дополнительные лучи. Если точки A, O, B лежат на одной прямой, а C — произвольная точка, не принадлежащая прямой AB, то углы AOC и COB — смежные (рис. 45).

Свойство смежных углов сформулируем в виде *теоремы*.

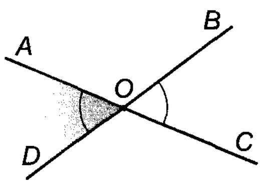
В математике **теоремой** называют каждое утверждение, истинность которого устанавливается путем логических рассуждений. Цепочку таких рассуждений называют *доказательством*.

В нашем учебнике теоремы напечатаны **жирным шрифтом** и пронумерованы.

! ТЕОРЕМА 1 **Сумма мер двух смежных углов равна 180°.**

■ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Объединение двух смежных углов является развернутым углом. Мера развернутого угла равна 180°. Значит, какими бы ни были смежные углы, сумма их мер равна 180°.□



■ Рис. 46

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного являются дополнительными лучами сторон другого. Например, если прямые AC и BD пересекаются в точке O, то углы AOD и BOC — вертикальные (рис. 46). Каждый из них — смежный с углом AOB. Углы AOB и COD — тоже вертикальные.

! ТЕОРЕМА 2 **Вертикальные углы равны.**

■ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть AOD и BOC — любые вертикальные углы (см. рис. 46). Каждый из них смежный с углом AOB. По теореме о сумме смежных углов

$$\angle AOD + \angle AOB = 180° \text{ и } \angle BOC + \angle AOB = 180°,$$

отсюда

$$\angle AOD = 180° - \angle AOB \text{ и } \angle BOC = 180° - \angle AOB.$$

Правые части этих равенств одинаковые, поэтому $\angle AOD = \angle BOC$. Что и следовало доказать.□

Для любознательных

Слово *смежные* употребляют не только применительно к углам. *Смежный* — это имеющий общую границу с чем-то или прилегающий к чему-то, соседний. Можно говорить о смежных комнатах, смежных полях и т. п. Относительно углов это понятие имеет особый смысл. Не каждые два угла с общей стороной называют смежными. Например, на рисунке 47 углы AOB и BOC имеют общую сторону OB, но не являются смежными.

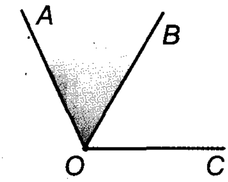


Рис. 47

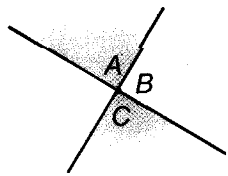


Рис. 48

Смежные углы — это два угла, состоящие в определенном отношении. Один угол не может быть смежным. Когда говорим, что какой-то угол смежный, то обязательно должны уточнить: смежный с каким углом? Отношение смежности углов имеет такое свойство: **если угол *A* смежный с углом *B*, то и угол *B* смежный с углом *A*.**

Пусть угол *A* смежный с углом *B*, а угол *B* смежный с углом *C*. Что можно сказать об углах *A* и *C*? Они либо вертикальные, либо угол *C* — это тот же угол *A* (рис. 48).

Слово *вертикальные* также относится не только к углам. В основном вертикально расположенным считают продолговатый предмет, расположенный в направлении отвеса (перпендикулярно к горизонту).

Всегда верно свойство: **если угол *A* вертикальный углу *B*, то и угол *B* вертикальный углу *A*.**

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какие углы называют смежными?
2. Сформулируйте и докажите свойство смежных углов.
3. Какие углы называют вертикальными?
4. Сформулируйте и докажите свойство вертикальных углов.

Решаем вместе

1 Найдите меры смежных углов, если один из них на 50° больше другого.

■ Пусть мера меньшего из смежных углов равна x, тогда мера большего угла $x + 50°$. По свойству смежных углов $x + x + 50° = 180°$, откуда $x = 65°$, а $x + 50° = 115°$.

Ответ. 65° и 115°.

2 Один из четырех углов, образованных пересечением двух прямых, вдвое больше другого. Найдите меру каждого из полученных углов.

■ При пересечении двух прямых образуются вертикальные и смежные углы. Поскольку вертикальные углы равны, то они условие задачи не удовлетворяют. Делаем вывод: один из смежных углов вдвое больше другого, их меры x и $2x$. По свойству смежных углов $x + 2x = 180°$, откуда $x = 60°$, а $2x = 120°$. Соответствующие им вертикальные углы равны 60° и 120°.

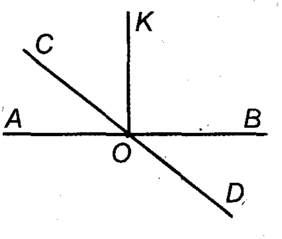
Ответ. 60°, 120°, 60°, 120°.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

96. Назовите пары смежных углов, изображенных на рисунке 49.

97. Можно ли считать смежными углы KOB и KOA (рис. 49)? А углы AOC и AOD?



■ Рис. 49

98. Дан острый угол A. Может ли быть острым смежный с ним угол? А прямым?

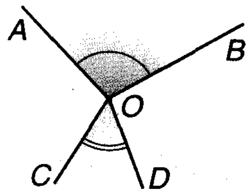
99. Дан тупой угол. Каким будет смежный с ним угол?

100. Сумма углов A и B равна 180°. Смежные ли они?

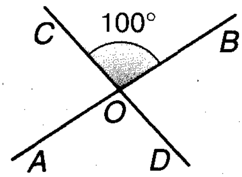
101. Развернутый угол двумя внутренними лучами разбит на три меньших угла. Можно ли считать их смежными углами?

102. Вертикальны ли углы AOB и COD, изображенные на рисунке 50?

103. **Один из углов, образованных пересечением двух прямых, равен 100°. Найдите меры трех других углов (рис. 51).**



■ Рис. 50



■ Рис. 51

A

104. Мера одного из двух смежных углов равна 50°. Найдите меру другого угла. Постройте эти углы.

105. Дан угол, мера которого 160°. Найдите меру смежного угла. Постройте эти углы. Закрасьте их в разные цвета.

106. Найдите меру угла смежного с $\angle ABC$, если:

а) $\angle ABC = 34°$; б) $\angle ABC = 111°$;

в) $\angle ABC = 13°13'$; г) $\angle ABC = 135°47'$.

107. Докажите, что **если смежные углы равны, то они прямые.**

108. Найдите меры смежных углов, если один из них:

а) на 30° больше другого;

б) в два раза меньше другого.

109. Найдите меры смежных углов, которые относятся как:

а) 4 : 5; б) 3 : 2.

110 Начертите угол, равный 45°. Постройте вертикальный ему угол.

111. Сумма мер двух вертикальных углов равна 120°. Найдите меру каждого из этих углов.

112. Найдите меры углов, образованных пересечением двух прямых, если мера одного из них равна:

а) 50°; б) 110°; в) $n°$.

113. Перенесите таблицу в тетрадь и заполните ее.

Данный угол	10°	50°	60°	90°	120°	170°
Вертикальный ему угол						
Смежный с ним угол						

114. Перерисуйте в тетрадь рисунок 46 и данную ниже таблицу. Используя рисунок, заполните пустые клетки таблицы.

∠ AOD	66°					50°5′		
∠ AOB		135°			177°			
∠ BOC				39°			33°33′	
∠ DOC			97°					99°9′

Б

115. Могут ли углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, быть пропорциональны числам:

а) 2, 3, 4 и 5; б) 5, 5, 5 и 8; в) 2, 3, 2 и 3; г) 1, 4, 2 и 8?

116. Докажите, что **углы, смежные с равными углами, равны.**

117. Нарисуйте три прямые так, чтобы они пересекались в одной точке. Сколько пар вертикальных углов получилось?

118. Сколько пар вертикальных углов и сколько пар смежных углов показано на рисунке 52?

119. На рисунке 53 изображены три прямые, пересекающиеся в точке O. Докажите, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

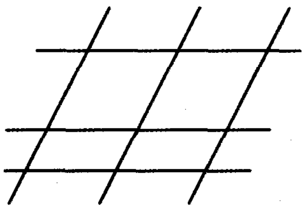


Рис. 52

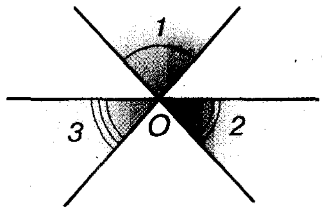


Рис. 53

120. Найдите меры углов, образованных пересечением двух прямых, если:

а) один из них на 20° больше другого;

б) один из них равен половине другого;

в) сумма мер двух из этих углов равна 100°.

121. Угол AOB имеет 180°, луч OM делит его на два угла, один из которых больше другого на 20°. Найдите меры этих двух углов, а также угол между их биссектрисами.

122. Углы AOB и BOC смежные, OM — биссектриса угла BOC. Найдите $\angle AOB$, если:

а) $\angle MOC = 30°$; б) $\angle MOC = 45°$; в) $\angle MOC = 60°$.

123. Начертите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Можно ли считать смежными его углы ABB_1 и BB_1C? Почему? Чему равна мера угла, смежного с углом ABB_1?

124. Найдите меру угла, если сумма двух смежных с ним углов равна $110°$.

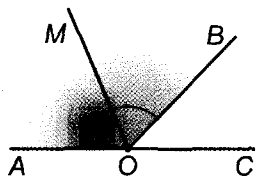
125. Углы AOB и BOC смежные, OM — биссектриса угла AOB (рис. 54). Найдите $\angle MOB$, если:

а) $\angle AOB - \angle BOC = 40°$;

б) $\angle AOB : \angle BOC = 5°$;

в) $\angle AOB : \angle BOC = 5 : 4$;

г) $\angle BOC$ составляет $\frac{2}{5}$ $\angle AOB$.



■ Рис. 54

Практическое задание

126. Сгибая лист бумаги, образуйте пару смежных углов и пару вертикальных углов.

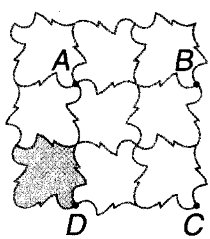
УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

127. Ребра двух кубов относятся как $1 : 2$. Как относятся их объемы? А площади поверхностей?

128. Обозначьте на координатной плоскости точки $A\ (1; -1)$, $B\ (1; 3)$, $C\ (5; 3)$, $D\ (5; -1)$ и соедините последовательно их отрезками. Как называется образованная фигура $ABCD$? Какие из ее сторон параллельны, а какие перпендикулярны?

129. Круг радиуса 3 см разделите радиусами на 6 равных секторов. Найдите площадь одного такого сектора. На сколько она меньше площади всего круга?

130. Фигура, изображенная на рисунке 55, состоит из 9 равных листьев. Найдите площадь одного листа, если A, B, C, D — вершины квадрата площади S.



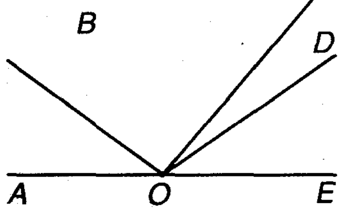
■ Рис. 55

• Задачи по готовым рисункам

1

А

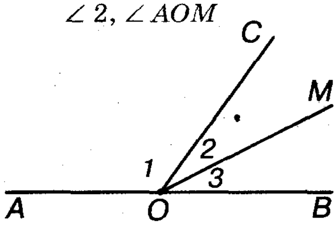
Укажите пары смежных углов.



Б

$\angle 1 = 120°,\ \angle 2 = \angle 3.$

$\angle 2,\ \angle AOM$

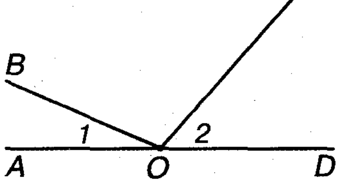


2

А

$\angle 1 = 30°,\ \angle 2 = 45°.$

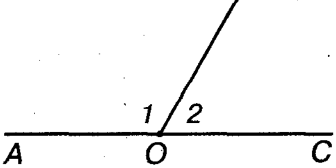
$\angle AOC,\ \angle BOC$



Б

$\angle 1 = 2\angle 2.$

$\angle 1,\ \angle 2$

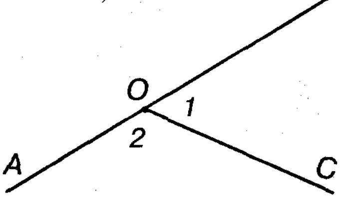


3

А

$\angle 2 - \angle 1 = 40°.$

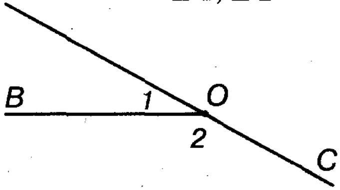
$\angle 1,\ \angle 2$



Б

$\angle 1 : \angle 2 = 2 : 7.$

$\angle 1,\ \angle 2$

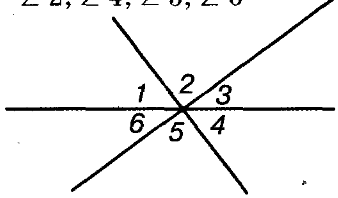


4

А

$\angle 1 = 60°,\ \angle 3 = 40°.$

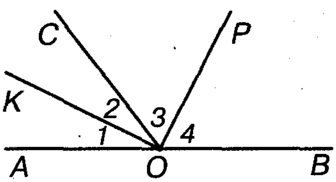
$\angle 2,\ \angle 4,\ \angle 5,\ \angle 6$



Б

$\angle 1 = \angle 2,\ \angle 3 = \angle 4.$

Доказать: $\angle KOP = 90°$.



§ 5 Перпендикулярные и параллельные прямые

Вспомните, как могут располагаться на плоскости две прямые. Если они пересекаются, то образуют четыре угла — две пары вертикальных углов (речь идет об углах меньше развернутого). Меньший из них считается *углом между данными прямыми*. Например, на рисунке 56 прямые AB и CD пересекаются под углом 50°. Говорят также, что угол между прямыми AB и CD равен 50°. Если две прямые, пересекаясь, образуют четыре прямых угла, говорят, что они пересекаются под прямым углом.

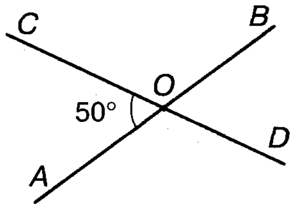


Рис. 56

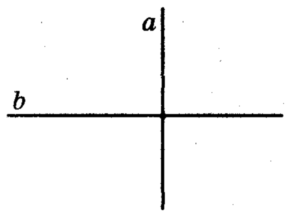


Рис. 57

Две прямые, пересекающиеся под прямым углом, называют *перпендикулярными прямыми*. Прямые a и b на рисунке 57 перпендикулярны одна к другой. Записывают так: $a \perp b$, или $b \perp a$.

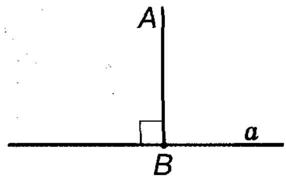


Рис. 58

Отрезки или *лучи* называют *перпендикулярными*, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Если отрезок AB лежит на прямой, перпендикулярной к прямой a, говорят, что *отрезок AB перпендикулярен к прямой a*. Если при этом точка B принадлежит прямой a, то отрезок AB называют *перпендикуляром*, проведенным из точки A к прямой a (рис. 58). Точку B называют *основанием перпендикуляра*, а длину перпендикуляра AB — *расстоянием от точки A до прямой a*.

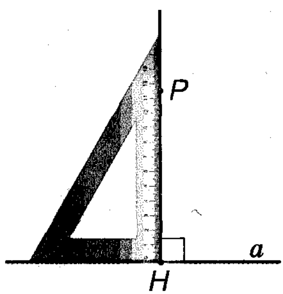
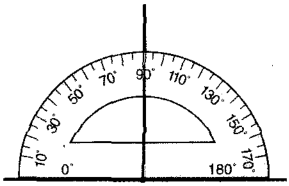
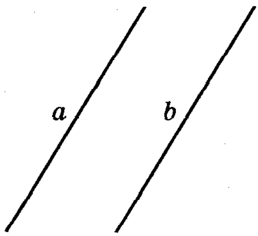


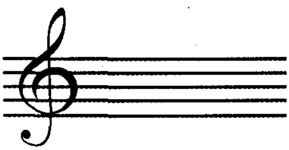
Рис. 59



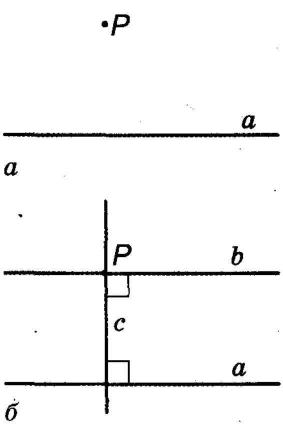
■ Рис. 60



■ Рис. 61



■ Рис. 62



■ Рис. 63

Через произвольную точку P всегда можно провести прямую, перпендикулярную к данной прямой a. Это можно сделать с помощью угольника (рис. 59) или транспортира (рис. 60). Позже вы узнаете, как можно выполнить такое построение с помощью линейки и циркуля. Можно доказать, что **существует только одна прямая, перпендикулярная к данной прямой и проходящая через данную точку.**

Не каждые две прямые пересекаются. Особого внимания заслуживают прямые, которые не пересекаются и лежат в одной плоскости.

Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются (рис. 61). Если прямые a и b параллельные, пишут так: $a \parallel b$.

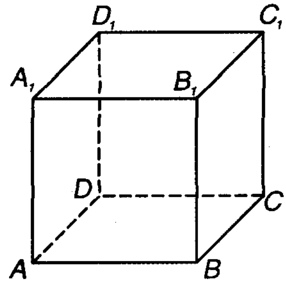
Представление о параллельных прямых дают линии в тетради, линии нотного стана (рис. 62), ребра бруска.

Два *отрезка* или *луча* называют *параллельными*, если они лежат на параллельных прямых. Например, если $ABCD$ — прямоугольник, то $AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$.

Через любую точку P, не лежащую на прямой a, можно провести прямую, параллельную прямой a (рис. 63, *а*). Для этого можно через точку P провести прямую c, перпендикулярную к прямой a, а потом прямую b, перпендикулярную к прямой c (рис. 63, *б*). При таком построении всегда $b \parallel a$. Можно воспользоваться линейкой и угольником.

Как проводить параллельные прямые с помощью линейки и циркуля, вы узнаете позже.

Для любознательных



■ Рис. 64

Можно доказать (попытайтесь!), что две прямые одной плоскости, перпендикулярные к третьей прямой, параллельны. То есть, если $a \perp c$ и $b \perp c$, то $a \parallel b$.

Но если прямые a и b не принадлежат одной плоскости, то такое утверждение ошибочно. Например, если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, то $AB \perp BB_1$ и $B_1C_1 \perp BB_1$, но прямые AB и B_1C_1 не параллельны (рис. 64).

Слово *параллельные* происходит от греческого слова «параллелос», что в переводе означает «идущие рядом». Если говорить, что какая-либо прямая параллельна, то обязательно следует сказать, какой именно прямой она параллельна. Таким образом, параллельность прямых — это своеобразное отношение между двумя прямыми. *Отношение параллельности прямых* имеет такое свойство: если $a \parallel b$, то и $b \parallel a$. Другими отношениями являются перпендикулярность прямых, равенство углов и др. Символы этих отношений: $\parallel$, $\perp$, $=$.

Позже вы узнаете о других отношениях между геометрическими объектами.

? Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое *угол между прямыми*?
2. Сформулируйте определение перпендикулярных прямых.
3. Какие отрезки называются перпендикулярными?
4. Какие две прямые называются параллельными?
5. Какие отрезки называются параллельными?
6. С помощью каких чертежных инструментов можно провести прямую, перпендикулярную к данной прямой? Как это делается?
7. Как можно провести прямую, параллельную данной прямой?

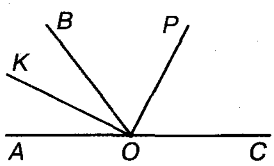
Решаем вместе

1 Докажите, что биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

■ Пусть $\angle AOB$ и $\angle BOC$ — смежные углы, OK и OP — их биссектрисы (рис. 65). $\angle KOP = \angle KOB + \angle BOP$. Поскольку OK и OP — биссектрисы, то $\angle KOB = \frac{1}{2}\angle AOB$, $\angle BOP = \frac{1}{2}\angle BOC$. Тогда

$$\angle KOP = \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle BOC =$$
$$= \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle BOC) = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°.$$

Итак, $OK \perp OP$.



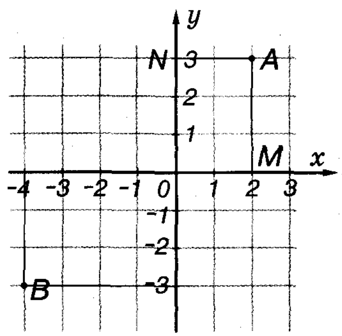
■ Рис. 65

2 Обозначьте на координатной плоскости точки A (2; 3) и B (−4; −3). Найдите расстояния от этих точек до осей координат, если длина единичного отрезка равна 1 см.

■ Из точек A и B опустим перпендикуляры на оси координат (рис. 66). Длина отрезка AM — расстояние от точки A до оси OX, а длина отрезка AN — расстояние от точки A до оси OY. По рисунку видим, что AM = 3 см, а AN = = 2 см.

Аналогично определяем, что расстояние от точки B до осей координат равно 3 см и 4 см.

Ответ. От точки A — 3 см и 2 см; От точки B — 3 см и 4 см.



■ Рис. 66

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

131. *Приведите примеры материальных моделей:*

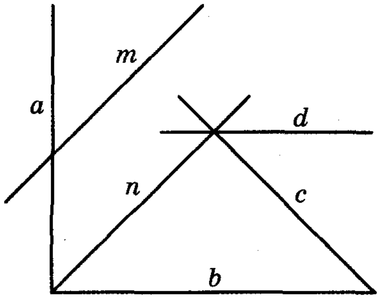
а) перпендикулярных прямых;

б) параллельных прямых.

32. Какие из прямых, показанных на рисунке 67:

а) перпендикулярные;

б) параллельные?



■ Рис. 67

33. Пользуясь клетками тетради (рис. 68), укажите:

1) через какую точку пройдет прямая, что:

а) перпендикулярна к прямой a и проходит через точку A;

б) перпендикулярна к прямой a и проходит через точку D;

в) параллельна прямой a и проходит через точку F;

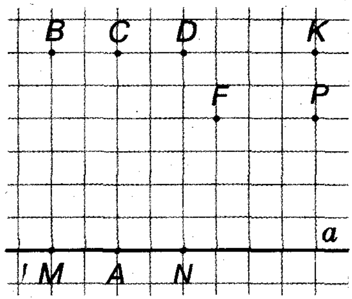
г) параллельна прямой a и проходит через точку K;

2) какое из утверждений верно:

а) $AB \perp a$; б) $BM \perp a$;

в) $KP \perp a$; г) $FK \parallel a$;

д) $BC \parallel a$; е) $KP \parallel a$?



■ Рис. 68

134. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед (рис. 69).

1) Назовите отрезки:

а) параллельны AA_1;

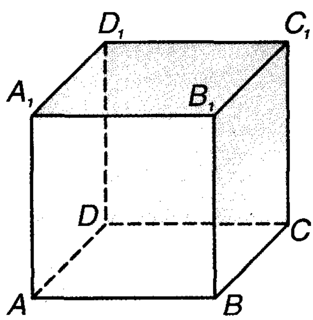
б) параллельны AD;

в) перпендикулярны к AA_1;

г) перпендикулярны к AD.

2) какое из утверждений верно:

$AA_1 \perp AD$; $B_1C_1 \perp A_1B_1$;
$DC \perp AB$; $A_1D_1 \parallel AD$;
$CD \parallel C_1D_1$; $DD_1 \parallel A_1D_1$;
$CD \parallel AB$?



■ Рис. 69

А

135. Проведите прямую a и обозначьте точки M и N такие, что $M \in a$, $N \notin a$. Используя клетки тетради, проведите через точки M и N прямые, перпендикулярные к прямой a.

136. Точки M и N лежат по разные стороны от прямой a. Используя клетки тетради, проведите через точки M и N прямые, параллельные прямой a.

137. Точка A не лежит на прямой c. Сколько прямых, перпендикулярных к c, можно провести через точку A? Почему?

138. Точка K не лежит на прямой a. Пользуясь угольником, проведите перпендикуляр из точки K к прямой a.

139. Назовите десять пар перпендикулярных отрезков, изображенных на рисунке 70. Являются ли перпендикулярами к прямой KP отрезки AH, BH, CH, AB, BC?

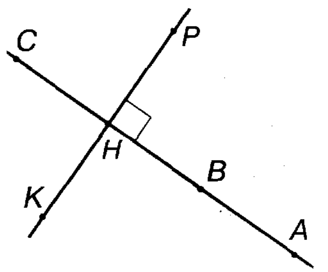


Рис. 70

140. Известно, что $a \parallel b$. Верно ли, что $b \parallel a$?

141. Лучи AB и CD не пересекаются. Можно ли утверждать, что они параллельные?

142. Используя рисунок 67 и символы $\perp$ и $\parallel$, заполните пропуски:

а) $a \dots b$; б) $m \dots n$; в) $n \dots c$;
г) $a \dots d$; д) $m \dots c$; е) $b \dots d$.

143. Перпендикулярные прямые AB и CD пересекаются в точке O. OM — биссектриса $\angle COB$. Найдите $\angle AOM$ и $\angle MOD$.

144. Обозначьте на координатной плоскости точки $A\ (-3;\ 4)$, $B\ (1;\ 8)$, $C\ (4;\ 5)$, $D\ (-2;\ -1)$. Проверьте, перпендикулярны ли прямые AD и DC, AB и BC. Параллельны ли прямые AB и CD, AD и BC?

145. Обозначьте на координатной плоскости точки $A\ (-3;\ -1)$ и $B\ (2;\ 4)$. Через эти точки проведите прямые, перпендикулярные к прямой AB. Найдите координаты точек пересечения построенных прямых с осями координат. Параллельны ли построенные прямые?

146. С помощью транспортира постройте $\angle AOB = 30°$. Обозначьте точку M такую, что $M \in OA$ и $OM = 4$ см. Из точки M опустите перпендикуляр на прямую OB. Измерьте расстояние от точки M до OB.

147. С помощью транспортира постройте $\angle AOB = 130°$. Обозначьте $M \in OA$. Из точки M опустите перпендикуляр на прямую OB. Будет ли находится основание перпендикуляра на луче OB? А на прямой OB?

148. $\angle AOB = 90°$, M — внутренняя точка $\angle AOB$. Через точку M проведите прямые, параллельные сторонам угла. Убедитесь, что построенные прямые перпендикулярны.

149. $\angle AOB = 90°$, M — произвольная точка биссектрисы угла AOB. Измерьте расстояния от точки M до лучей OB и OA.

Б

150. $\angle AOB$ и $\angle BOC$ — смежные углы. OM — внутренний луч $\angle AOB$, $OM \perp AC$. Чему равен $\angle MOB$, если:

а) $\angle BOC = 40°$; б) $\angle AOB - \angle BOC = 30°$;

в) $\angle AOB : \angle BOC = 3 : 2$; г) $\angle BOC = \frac{1}{3} \angle AOB$?

151. Три прямые AB, CD, MN пересекаются в точке O (рис. 71). Докажите, что $CD \perp MN$, если:

а) $\angle AOM = 130°$, $\angle COB = 140°$;

б) $\angle COM = \angle AOC + \angle MOB$;

в) $\angle AOM = 135°$, OB — биссектриса $\angle MOD$.

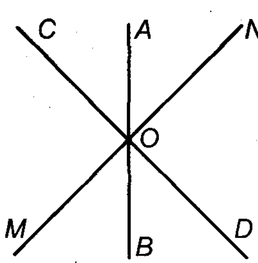


Рис. 71

152. $\angle AOB = 90°$. Постройте точку M, лежащую во внутренней области $\angle AOB$ на расстоянии 2 см от каждой стороны угла.

153. Постройте перпендикулярные прямые a, c и точку M на расстоянии 3 см от прямой a и на расстоянии 1 см от прямой c.

154. С помощью транспортира постройте $\angle AOB = 80°$ и проведите его биссектрису OM. Через произвольную точку K этой биссектрисы проведите прямые, перпендикулярные к сторонам угла. Измерьте расстояния от точки K до сторон угла и сравните их.

155. Решите предыдущую задачу, если $\angle AOB$ равен 60°, 90° и 130°. Сформулируйте предположение о расстоянии от точек биссектрисы до сторон данного угла.

156. С помощью транспортира постройте $\angle AOB = 60°$ и проведите его биссектрису OM. Через произвольную точку K этой биссектрисы проведите прямую EF, перпендикулярную к OM. Сравните длины отрезков , если $E \in OA$, $F \in OB$.

157. Решите предыдущую задачу, если $\angle AOB$ равен 80°, 90° и 120°. Сформулируйте предположение о свойстве прямой, перпендикулярной к биссектрисе угла.

158. Прикладывая угольник то одной, то другой стороной, ученик через точку A провел два перпендикуляра к прямой a (рис. 72). Что можно сказать о таком угольнике?

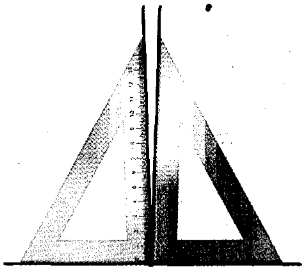


Рис. 72

Практическое задание

159. Сгибая лист бумаги, образуйте модели перпендикулярных и параллельных прямых.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

160. Обозначьте на прямой a точки A, B, C, D, M так, чтобы точка B лежала между точками A и D, точка M — между A и B, а C — между B и D.

161. Принадлежит ли точка K отрезку AB, если $AK = 3$ см, $BK = 5$ см, $AB = 7$см?

162. Найдите меры смежных углов, если они пропорциональны числам:

а) 1 и 2; б) 1 и 4; в) 4 и 5; г) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

163. Периметр четырехугольника равен P. Найдите длины его сторон, если они пропорциональны числам:

а) 1; 2; 3 и 4; б) 3; 5; 3 и 7; в) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ и 1.

§ 6 Признаки параллельности прямых

Важную роль в исследовании параллельных прямых играют понятия секущей и некоторых пар углов.

Пусть a и b – две произвольные прямые плоскости. Прямая c, пересекающая их, называется *секущей* прямых a и b (рис. 73).

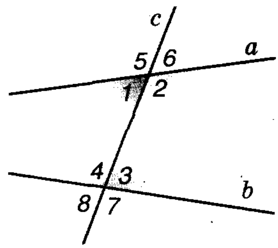


Рис. 73

Прямые a и b с их секущей c образуют 8 углов. На рисунке 73 они пронумерованы. Некоторые пары этих углов имеют специальные названия:

- *внутренние накрест лежащие углы*: 1 и 3, 2 и 4;
- *внутренние односторонние углы*: 1 и 4, 2 и 3;
- *соответственные углы*: 1 и 8, 2 и 7, 3 и 6, 4 и 5.

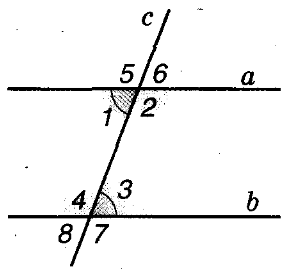


Рис. 74

Обратите внимание! Если два каких-либо внутренних накрест лежащих угла равны, то также равны и внутренние накрест лежащие углы другой пары (рис. 74). Если, например, $\angle 1 = \angle 3$, то и $\angle 2 = \angle 4$, потому что углы, смежные с равными, равны.

Случай, когда внутренние накрест лежащие углы равны, заслуживает особого внимания, поскольку именно при этом условии прямые a и b параллельны.

! ТЕОРЕМА 3 (признак параллельности прямых).

Две прямые параллельны, если они с секущей образуют равные внутренние накрест лежащие углы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть секущая AB пересекает прямые a и b так, что образовавшиеся при этом внутренние накрест лежащие углы 1 и 3 равны. Тогда, как показано выше, углы 2 и 4 тоже равны. Допустим, что при таком условии прямые a и b пересекаются в какой-то отдаленной точке C. В результате образуется

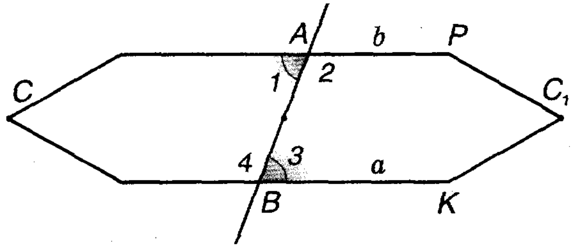


Рис. 75

треугольник ABC (на рисунке 75 он изображен схематически в виде пятиугольника). Представим, что этот треугольник повернули вокруг точки O — середины отрезка AB — так, что отрезок OA занял положение OB. Тогда, поскольку $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$, луч AC совместится с лучом BK, а луч BC — с лучом AP. Так как лучи AC и BC (по предположению) имеют общую точку C, то лучи BK и AP тоже имеют какую-то общую точку C_1. Это значит, что через две точки C и C_1 проведены две разные прямые. А этого не может быть.

Таким образом, если $\angle 1 = \angle 3$, то прямые a и b не могут пересекаться. А поскольку они лежат в одной плоскости и не пересекаются, то они параллельны: $a \parallel b$. Что и требовалось доказать. □

Обратите внимание на способ доказательства теоремы 3. Чтобы доказать, что прямые a и b параллельны, мы показывали, что они не могут пересекаться, то есть допускали противоречащее тому, что требовалось доказать. Такой способ рассуждения называют *методом доказательства от противного.*

На основе доказанной теоремы 3 нетрудно доказать и другие признаки параллельности прямых.

! ТЕОРЕМА 4 **Две прямые параллельны, если при пересечении с секущей они образуют внутренние односторонние углы, сумма которых равна 180°.**

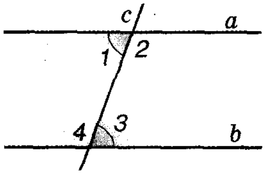


Рис. 76

■ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть, например, на рисунке 76 сумма *внутренних односторонних углов* 1 и 4 равна 180°. Сумма смежных углов 3 и 4 тоже равна 180°. Поэтому $\angle 1 = \angle 3$. Это — внутренние накрест лежащие углы; если они равны, то прямые a и b параллельны. □

ТЕОРЕМА 5 **Две прямые параллельны, если при пересечении с секущей они образуют равные соответственные углы.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть секущая c пересекает прямые a и b так, что образовавшиеся при этом соответственные углы 1 и 8 равны (рис. 77). Углы 8 и 3 равны, поскольку вертикальны. Поэтому если

$\angle 1 = \angle 8$, $\angle 8 = \angle 3$, то и $\angle 1 = \angle 3$, откуда следует, что $a \parallel b$.□

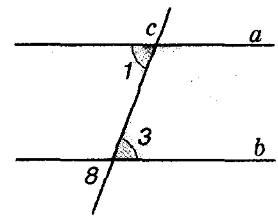


Рис. 77

Заслуживает внимания такое следствие из теоремы 3.

Две прямые, перпендикулярные к третьей прямой, параллельны.

Ведь если каждая из прямых a и b перпендикулярна к c, то образовавшиеся при этом внутренние разносторонние углы равны, поскольку они прямые (рис. 78). Следовательно, a и b параллельны.

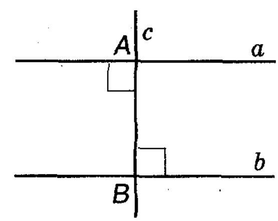


Рис. 78

Для любознательных

Углы 5 и 7 (а также 6 и 8) называют *внешними накрест лежащими*, а углы 5 и 8 (а также 6 и 7) — *внешними односторонними* углами (рис. 79). Используя эти понятия, попробуйте сформулировать и доказать еще два признака параллельности прямых.

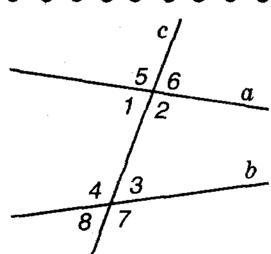


Рис. 79

Полезно также лучше понять сущность метода доказательства от противного.

Если утверждение A противоречит утверждению B, то такие два *утверждения* называют *противоречащими* или *противными* друг другу. Из двух взаимно противоречащих утверждений всегда одно верно, а другое ложно. Поэтому если убедимся, что утверждения *А* и *В* противоречат друг другу и, например, что утверждение *В* ложное, то можем быть уверены, что утверждение *А* верно.

Не следует путать *противоречащие* утверждения с *противоположными*. Например, когда речь идет о числовых выражениях и натуральных числах, то утверждения «выражение *А* положительное» и «выражение *А* отрицательное» или «число *n* простое» и «число *n* сложное» — противоположные, но не противоречащие, ведь каждое из них может быть неправильным. А вот утверждения «выражение *А* положительное» и «выражение *А* неположительное» или «число *n* простое» и «число *n* непростое» — взаимно противоречащие. *Непростое* означает составное или равное 1; *неположительное* — отрицательное или равное нолю.

Доказывая методом от противного, опровергать нужно не противоположное утверждение, а противоречащее данному. *Опровергать* что-либо — означает показать, что оно ошибочно.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте определение параллельных прямых.
2. Что такое секущая двух прямых?
3. Какие углы называют внутренними накрест лежащими? А внутренними односторонними? Покажите на рисунке.
4. Какие углы называют соответственными? Покажите на рисунке.
5. Сформулируйте и докажите признаки параллельности прямых.

● *Решаем вместе*

1 Как построить параллельные прямые, пользуясь только линейкой и транспортиром?

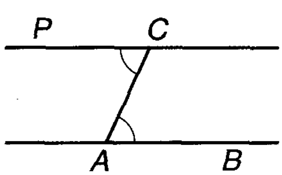
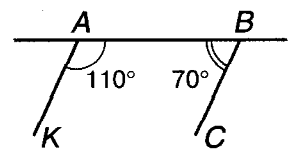


Рис. 80

■ Начертим произвольный луч *AB* и отложим равные углы *BAC* и *ACP*, как показано на рисунке 80. Прямые *AB* и *CP* параллельны, ведь углы *BAC* и *ACP* внутренние накрест лежащие, и по построению они равны.

Через концы отрезка AB с одной стороны от прямой AB проведены лучи AK и BC так, что $\angle KAB = 110°$, а $\angle ABC = 70°$. Параллельны ли эти лучи?

■ Прямую AB можно считать секущей прямых AK и BC (рис. 81). Углы KAB и ABC — внутренние односторонние. Поскольку их сумма $110° + 70°$ равна $180°$, то прямые AK и BC — параллельные (теорема 4). Поэтому и лучи AK и BC — параллельные.



■ Рис. 81

Ответ. Лучи AK и BC параллельны.

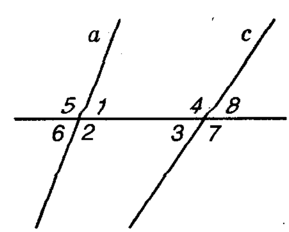
● ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

104. Сколько углов образуется при пересечении двух прямых третьей?

105. Рассмотрите рисунок 82 и назовите пары углов:

а) внутренних накрест лежащих;
б) внутренних односторонних;
в) внешних накрест лежащих;
г) внешних односторонних;
д) соответственных;
е) смежных;
ж) вертикальных.



■ Рис. 82

106. Пользуясь рисунком 82, найдите суммы мер углов:
а) 1, 2, 3 и 4; б) 1, 3, 5 и 7; в) 1, 4, 5 и 8; г) 5, 6, 7 и 8.

107. Параллельны ли прямые a и c на рисунке 82, если:
а) $\angle 6 = \angle 8$; б) $\angle 7 = 101°$ и $\angle 5 = 101°$;
в) $\angle 5 + \angle 8 = 180°$; г) $\angle 1 + \angle 7 = 180°$?

108. Как расположены прямые a и b, если $a \perp c$, $b \perp c$ и все они лежат в одной плоскости?

109. Как могут быть расположены в пространстве прямые a и b, если $a \perp c$, $b \perp c$?

А

170. Запишите названия пар углов, изображенных на рисунке 82:

а) $\angle 1$ и $\angle 5$; б) $\angle 6$ и $\angle 3$; в) $\angle 7$ и $\angle 2$;
г) $\angle 3$ и $\angle 1$; д) $\angle 2$ и $\angle 3$; е) $\angle 8$ и $\angle 5$.

171. Известно,что $\angle 1 = 87°$, $\angle 3 = 78°$ (рис. 82). Вычислите мерь углов 2, 4, 5, 6, 7, 8.

172. Пользуясь рисунком 82, вычислите:

а) меры углов 1, 2, 3, 4, 5, 8, если $\angle 7 = 100°$, $\angle 6 = 90°$;
б) $\angle 1 + \angle 4$ и $\angle 2 + \angle 3$, если $\angle 5 + \angle 8 = 170°$;
в) $\angle 4 - \angle 5$, если $\angle 4 - \angle 2 = 10°$.

173. Параллельны ли прямые a и c (рис. 82), если:

а) $\angle 1 = 50°$, $\angle 7 = 130°$;
б) $\angle 6 = 65°$, $\angle 8 = 115°$;
в) $\angle 1 + \angle 7 = 180°$;
г) $\angle 2 = 140°$, $\angle 3$ на $80°$ меньше $\angle 2$?

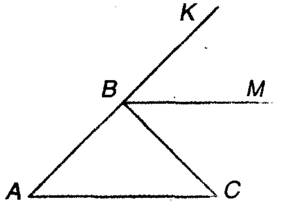


Рис. 83

174. BM — биссектриса $\angle KBC$ (рис.83). Параллельны ли прямые AC и BM, если $\angle A = 50°$ и:

а) $\angle CBM = 50°$;
б) $\angle ABM = 130°$;
в) $\angle BCA = \angle KBM$;
г) $\angle ABM$ на $50°$ больше $\angle CAB$?

175. Прямая KP пересекает прямую AB в точке K, а прямую CD — в точке P. Параллельны ли прямые AB и CD, если $\angle AKP = 90°$ и $\angle KPC = 90°$?

176. Прямая KP пересекает прямую AB в точке K, а прямую CD — в точке P так, что точки B и D лежат по одну сторону от прямой KP. Параллельны ли прямые AB и CD, если $\angle BKP = 89°39'$ и $\angle KPD = 90°21'$?

177. Через концы отрезка AB с одной стороны от него проведены лучи AP и BC. Параллельны ли эти лучи, если:

а) $\angle PAB = 105°$, а $\angle ABC = 75°$;
б) $\angle PAB = 93°$, а $\angle ABC = 87°$?

178. Докажите, что противоположные стороны прямоугольника лежат на параллельных прямых.

179. Прямые a и b с секущей образуют равные острые углы. Следует ли из этого, что $a \parallel b$?

180. Найдите меры углов 1 и 2, изображенных на рисунке 84, если $\angle 1 + \angle 4 = 160°$ и:

а) $\angle 4$ на $20°$ меньше $\angle 1$;

б) $\angle 2$ в два раза больше $\angle 1$;

в) $\angle 4 : \angle 2 = 2 : 3$;

г) $\angle 4$ составляет 60 % угла 2.

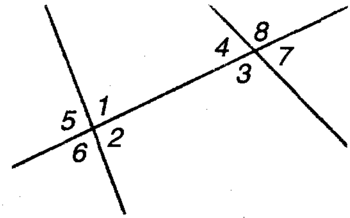


Рис. 84

181. Параллельны ли прямые a и b, показанные на рисунке 85, если:

а) $\angle 4 - \angle 1 = 30°$ и $\angle 3 = 75°$;

б) $\angle 1 = 60°$ и $\angle 2 : \angle 3 = 2 : 1$?

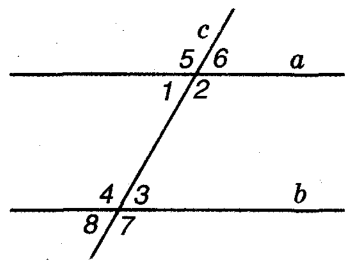


Рис. 85

182. Установите взаимное расположение прямых a, b и c, изображенных на рисунке 86, если:

а) $\angle 3 = \angle 5 = \angle 9$;

б) $\angle 2 = \angle 8$ и $\angle 7 = \angle 9$;

в) $\angle 12 = \angle 8$ и $\angle 6 + \angle 3 = 180°$.

183. Секущая n пересекает прямые a, b и c так, что углы, обозначенные на рисунке 86 числами 2, 8 и 12, равны. Докажите, что прямые a, b и c попарно параллельны.

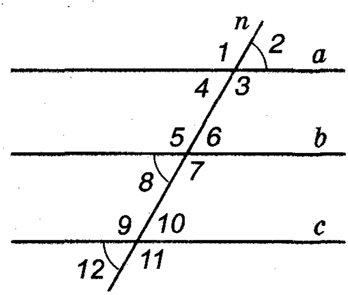
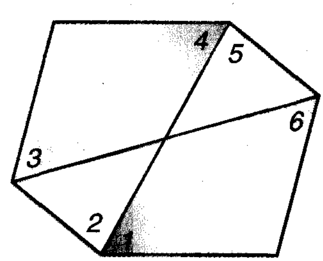


Рис. 86

184. В изображенном на рисунке 87 шестиугольнике $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 5$ и $\angle 3 = \angle 6$. Докажите, что каждая сторона данного шестиугольника параллельна противолежа-



185. Параллельны ли прямые a и b, c и d, если $\angle 1 = 60°$, $\angle 2$ вдвое больше, а $\angle 2 - \angle 3 = 60°$ (рис. 88)?

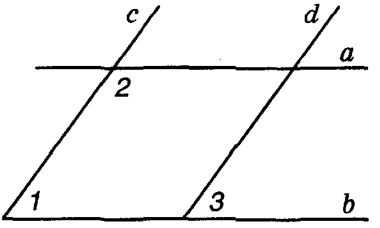


Рис. 88

186. Как можно построить параллельные прямые с помощью угольника?

187. С помощью двух одинаковых угольников параллельные прямые можно провести, как показано на рисунке 89. Аргументируйте такое построение.

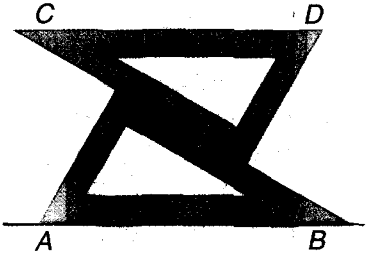


Рис. 89

188. Закончите предложение: «Чтобы узнать, параллельны ли данные прямые, нужно провести их секущую и измерить соответственные углы. Если...»

Практическое задание

189. Сделайте модель для иллюстрации доказательства теоремы 3.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

190. Стороны треугольника равны 12 см, 15 см и 18 см. Во сколько раз уменьшится периметр треугольника, если каждую его сторону уменьшить на 5 см?

191. На сколько частей могут разделить плоскость расположенные на ней прямая и окружность?

192. Прямые AB и CD пересекаются в точке O, OM — биссектриса угла AOB. Найдите меры углов MOB и MOD, если $\angle COB = 70°$.

193. Один из двух углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, на $90°$ больше другого. Во сколько раз он больше другого угла?

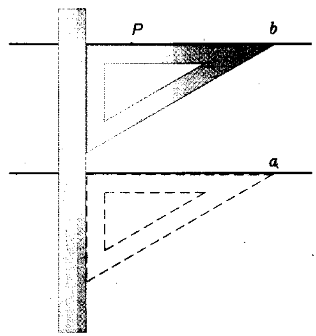
§ 7 Свойства параллельности прямых

■ ***Задача***

Даны прямая a и точка P, не принадлежащая этой прямой. Проведите через точку P прямую, параллельную прямой a.

■ С помощью линейки и угольника построение можно выполнить, как показано на рисунке 90.

Можно ли через точку P провести две разные прямые, параллельные прямой a? Геометры издавна считали истинным такое утверждение:



■ Рис. 90

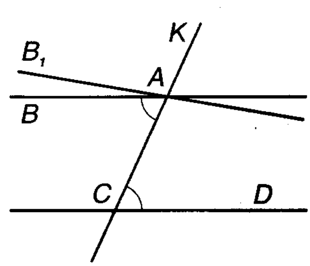
! Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.

Древнегреческий геометр Евклид это утверждение принял без доказательства. Его назвали *аксиомой Евклида*, потому что *все утверждения, принимаемые без доказательств, называют аксиомами*. (Подробнее об аксиомах и теоремах — в следующем параграфе.)

Не все ученые считают аксиому Евклида верной. Геометрию, в которой аксиому Евклида признают верной, называют *евклидовой геометрией*. Вы изучаете евклидову геометрию.

! ТЕОРЕМА 6 (обратная теореме 3).

Если прямые параллельны, то внутренние накрест лежащие углы, образованные ими с секущей, равны.



■ Рис. 91

■ **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Пусть прямые AB и CD параллельны, а KC — их секущая, проходящая через точку A (рис. 91). Докажем, что $\angle CAB = \angle ACD$.

Допустим, что $\angle CAB \neq \angle ACD$. Проведем прямую AB_1 так, чтобы выполнялось равенство $\angle CAB_1 = \angle ACD$. По признаку параллельности прямых $AB_1 \parallel CD$, а по условию $AB \parallel CD$. Получается, что через точку A проведены две разные прямые, параллельные прямой CD. Это противоречит аксиоме Евклида. Таким образом, сделанное нами допущение приводит к противоречию. Поэтому $\angle CAB = \angle ACD$. □

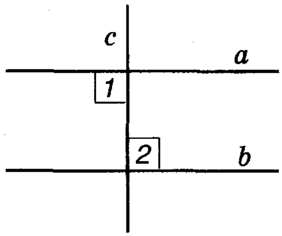


Рис. 92

СЛЕДСТВИЕ.

Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой прямой.

Действительно, если $c \perp a$ и $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 2 = 90°$, то есть $c \perp b$ (рис. 92).

Сформулируйте и докажите теоремы, обратные теоремам 4 и 5.

! ТЕОРЕМА 7 **Две прямые, параллельные третьей, параллельны.**

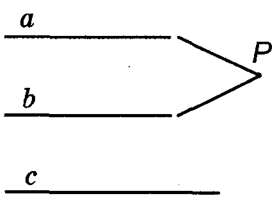


Рис. 93

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть каждая из прямых a и b параллельна прямой c. Докажем, что $a \parallel b$.

Допустим, что прямые a и b не параллельны (рис. 93), а пересекаются в некоторой точке P. Получается, что через точку P проходят две разные прямые a и b, параллельные c. Это противоречит аксиоме Евклида. Поскольку прямые a и b не могут пересекаться, они параллельны. □

ПРИМЕЧАНИЕ.

Доказательство теоремы верно и в случае, если прямая c лежит между a и b.

Для любознательных

Последнюю теорему называют теоремой о *транзитивности параллельности прямых* (лат. *transitivus* — переходной), поскольку она утверждает, что параллельность двух пар параллельных прямых переходит на третью пару:

Чтобы это утверждение было верным всегда, договорились считать, что каждая прямая параллельна сама себе, то есть $a \parallel a$. Ведь если

$$a \parallel b \text{ и } b \parallel a, \text{ то } a \parallel a.$$

Отрезки одной прямой тоже считают параллельными. Например, если A, B, C, K — точки одной прямой, то каждый из отрезков AB, AC, AK, BC, BK, CK параллелен любому из них (рис. 94). В целесообразности такой договоренности вы убедитесь позже, изучая параллельные переносы, параллельное проектирование и т. п. А в седьмом классе основное внимание будет обращаться на параллельность отрезков и лучей, не лежащих на одной прямой.

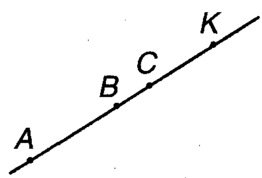


Рис. 94

Существуют геометрии, в которых аксиома Евклида не считается верной. Их называют *неевклидовыми геометриями*. Такова, например, геометрия Лобачевского (см. с. 195).

? Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте аксиому Евклида о параллельности прямых.
2. Что вы знаете о Евклиде, о его «Началах»?
3. Сформулируйте и докажите теорему о внутренних накрест лежащих углах при параллельных прямых и секущей.
4. Сформулируйте и докажите теорему о двух прямых, параллельных третьей.
5. Что такое метод доказательства от противного?

● ***Решаем вместе***

Докажите, что прямые, перпендикулярные к непараллельным прямым, пересекаются.

Пусть *прямые a и b пересекаются*, а прямые m и n перпендикулярны к ним: $m \perp a$, $n \perp b$ (рис. 95). Тогда $\angle 1 = \angle 2 = 90°$. Допустим, что $m \parallel n$, то есть $\angle 1 = \angle 3$. Тогда и $\angle 2 = \angle 3$, откуда следует, что $a \parallel b$. Это противоречит условию задачи. Значит, прямые m и n не могут быть параллельными, они пересекаются.

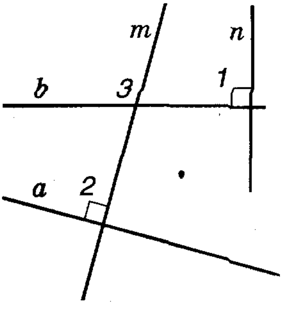


Рис. 95

● ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

194. Сколько пар параллельных прямых вы видите на рисунке 96? А сколько пар непараллельных прямых?

195. Угол между прямыми a и x равен 70°. Найдите углы между всеми парами прямых, имеющимися на рисунке 96.

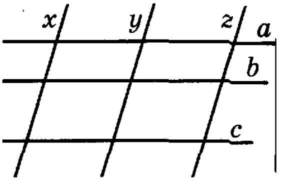


Рис. 96

196. Объясните, как можно проводить параллельные прямые, пользуясь рейсшиной (рис. 97).

197. На рисунке 98 изображен самодельный рейсмус. Как таким рейсмусом можно проводить на брусе прямые, параллельные его ребрам?

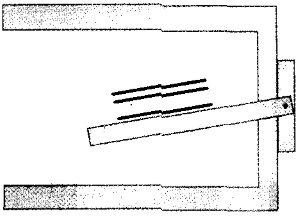


Рис. 97

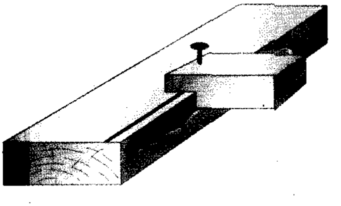


Рис. 98

А

198. Мера одного из углов, образованных двумя параллельными прямыми с их секущей, равна 35°. Найдите меры других углов.

199. На стороне угла ABC взята точка A. Через нее проведена прямая, параллельная BC. Найдите меры углов при вершине A, если $\angle ABC = 50°$.

200. Докажите, что если прямая пересекает две параллельные прямые, то:

а) соответственные углы равны;

б) сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

201. Найдите меры всех углов, изображенных на рисунке 99, если $a \parallel b$ и:

а) $\angle 1 = 60°$;

б) $\angle 5 + \angle 7 = 250°$;

в) $\angle 2 - \angle 1 = 50°$.

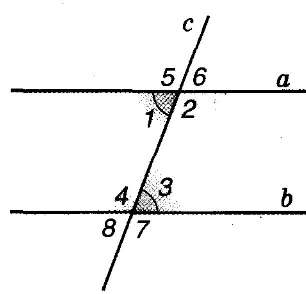


Рис. 99

202. Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.

203. Прямые a и b не параллельны прямой c. Следует ли из этого, что прямые a и b не параллельны?

204. Докажите, что биссектрисы соответственных углов при параллельных прямых параллельны.

205. Докажите, что если одна секущая с двумя прямыми образует равные соответственные углы, то и любая другая секущая с этими прямыми образует равные соответственные углы.

206. Угол между одной из двух параллельных прямых и их секущей равен 80°. Под каким углом биссектриса этого угла пересекает другую прямую?

207. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки K и P такие, что $KP \parallel AC$. Найдите углы четырехугольника $AKPC$, если $\angle BKP = 60°$, $\angle BPK = 80°$.

Б

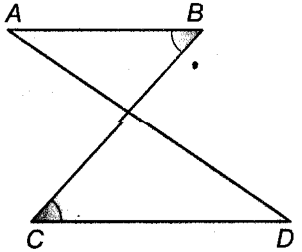
208. Если прямые с секущей образуют неравные соответственные углы, то они пересекаются. Докажите это.

209. Лучи AB, AC и KP разные и такие, что $AB \parallel KP, AC \parallel KP$. Найдите меру угла BAC.

210. С помощью рисунка 99, где $\angle 1 = \angle 3$, вычислите меры углов 3 и 4, если:

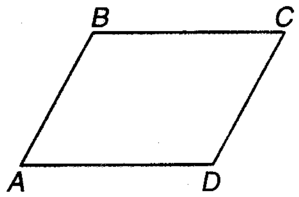
а) $\angle 4 - \angle 1 = 50°$;

б) $\angle 4$ в 3 раза больше $\angle 6$.



■ Рис. 100

211. Стороны AD и BC замкнутой ломаной $ABCDA$ пересекаются и $\angle B = \angle C$ (рис. 100). Докажите, что $\angle A = \angle D$.



■ Рис. 101

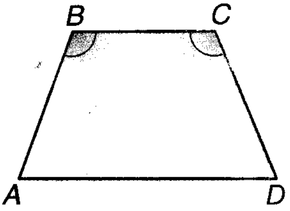
212. Каждая сторона четырехугольника $ABCD$ параллельна противолежащей стороне (рис. 101). Докажите, что:

а) $\angle A + \angle B = 180°$;

б) $\angle B + \angle C = 180°$;

в) $\angle A = \angle C$;

г) $\angle B = \angle D$.



■ Рис. 102

213. В четырехугольнике $ABCD$ $BC \parallel AD$ и $\angle B = \angle C$ (рис. 102). Докажите, что:

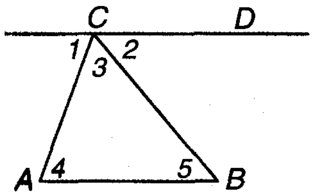
а) $\angle A = \angle D$;

б) $\angle A + \angle C = 180°$.

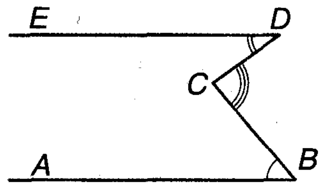
214. Через точку, не лежащую на прямой a, проведены три прямые. Докажите, что по крайней мере две из них пересекают прямую a.

215*. Докажите, что два угла с соответственно параллельными сторонами равны или сумма их мер равна 180°.

216. На рисунке 103 $\angle 1 = 70°$, $\angle 2 = 50°$ и $AB \parallel CD$. Найдите



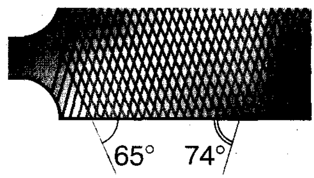
■ Рис. 103



■ Рис. 104

217. На рисунке 104 $\angle ABC = 50°$, $\angle CDE = 36°$, $AB \parallel DE$. Найдите $\angle BCD$.

218. Одна насечка напильника образует с его ребром угол 65°, а другая — 74° (рис. 105). Найдите меру острого угла между насечками.



■ Рис. 105

Практическое задание

219. Измерьте транспортиром угол между прямыми в тетради в косую линейку (см. рис. 52). Определите другие углы.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

220. Найдите диаметр окружности, если он больше радиуса:

а) на 3 см; б) на 3,5 см.

221. Чему равна длина окружности, диаметр которой:

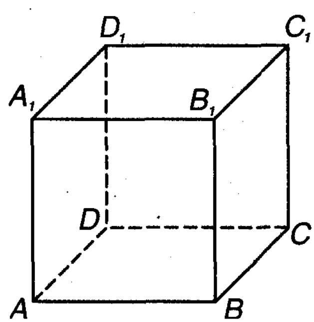
а) 10 см; б) 0,1 м?

222. Сколько общих точек могут иметь:

а) прямая и окружность;
б) прямая и круг;
в) окружность и окружность?

223. Перерисуйте в тетрадь фигуру с рисунка 106. Как называют такую фигуру? Назовите ее вершины, ребра, грани.

224. Сколько разных пар параллельных ребер имеет куб?



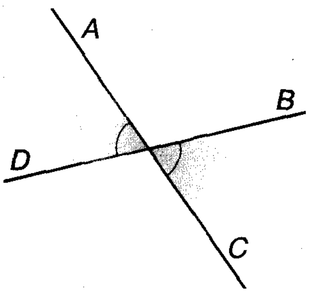
■ Рис. 106

§ 8 Теоремы и аксиомы

Вы уже имеете представление о теоремах. *Теорема* — это утверждение, в истинности которого убеждаются с помощью логических рассуждений, доказательств.

Обычно теорема содержит *условие* (то, что дано) и *заключение* (что требуется доказать). Чтобы вычленить условие и заключение теоремы, ее удобно подать в форме «Если... , то...». Например: «Если углы вертикальные, то они равны». Здесь слова перед запятой содержат условие теоремы, а после запятой — заключение.

Часто условие теоремы записывают после слова «дано», а заключение — после слова «доказать». Например, теорему о вертикальных углах можно оформить так.



■ Рис. 107

Д а н о: $\angle AOD$, $\angle BOC$ — вертикальные углы (рис. 107).

Д о к а з а т ь: $\angle AOD = \angle BOC$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$\angle AOD = 180° - \angle AOB$
($\angle AOD$ и $\angle AOB$ — смежные),
$\angle BOC = 180° - \angle AOB$
($\angle BOC$ и $\angle AOB$ — смежные).
Следовательно, $\angle AOD = \angle BOC$.

Поменяв условие и заключение теоремы местами, получим новое утверждение (истинное или ложное). Если полученное таким способом утверждение истинное, его называют *обратной теоремой*.

■ ***ПРИМЕРЫ***

1. «Если углы вертикальные, то они равны» — данная теорема. «Если углы равны, то они вертикальные» — обратное утверждение (ложное).
2. «Если соответственные углы равны, то прямые параллельные» — данная теорема. «Если прямые параллельные, то соответственные углы равны» — обратная теорема.

Важнейшие теоремы, в которых даются критерии чего-либо, называют *признаками*.

Доказывая теорему, ссылаются на другие истинные утверждения. Но в самом начале изучения геометрии еще никаких «других истинных утверждений» нет. Поэтому некоторые первые утверждения обычно принимают без доказательств. Называют их *аксиомами*.

Некоторые аксиомы вам уже известны. Сформулируем их еще раз.

! **Какой бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, ей не принадлежащие.**

- **Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.**
- **Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.**
- **Каждый отрезок имеет определенную длину.**
- **Каждый угол имеет определенную меру.**
- **Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.**

От теорем и аксиом следует отличать *определения*, в которых раскрывается содержание понятия. Например: «Отрезком называется часть прямой, ограниченная двумя точками» — определение отрезка; «Острым углом называется угол, который меньше прямого» — определение острого угла.

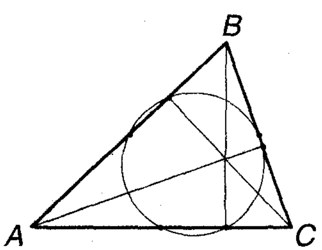
В определениях, аксиомах и теоремах — основное содержание геометрии. Их нужно знать, но формулировать (правильно!) можно и своими словами. Например, определение отрезка можно сформулировать так: «Отрезок — это часть прямой, ограниченная двумя ее точками», или так: «Часть прямой, ограниченная двумя ее точками, называется отрезком».

Для любознательных

Слово *аксиома* греческого происхождения; сначала это слово обозначало: уважение, авторитет, неоспоримость; впоследствии словом «аксиома» начали называть утверждение, принимаемое без доказательства.

Слово *теорема* тоже греческого происхождения. Сначала теоремой называли зрелище, театральное представление. Первым геометрам доказанные ими теоремы казались довольно неожиданными, удивительными, словно интересные зрелища. И в самом деле удивительно: из немногих примитивных утверждений, принимаемых без доказательств, путем одних рассуждений человек может получить миллионы неочевидных следствий. Даже таких, которых в природе нигде не наблюдается. И таких, о существовании которых не догадывался ни один мыслитель.

Чтобы и вы поняли, какое удовлетворение ощущали первые геометры, открывая и доказывая все новые и новые свойства геометрических фигур с помощью одних лишь рассуждений, попробуйте ответить на один из таких вопросов.



■ Рис. 108

Посмотрите на рисунок 108. На нем выделены 6 точек: середины сторон треугольника *ABC* и основания его высот. Кажется, все эти точки лежат на одной окружности. Действительно ли это так? В каждом треугольнике? Кто первым обнаруживал подобные закономерности и обосновывал их, тот испытывал огромное удовлетворение, словно путешественник, пришедший первым туда, где еще никто не бывал, или спортсмен, побивший мировой рекорд.

? Вопросы и задания для самоконтроля

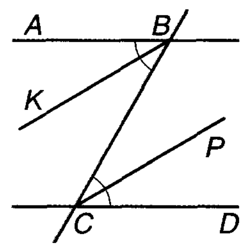
1. Что такое теорема? Приведите примеры теорем.
2. Что такое аксиома? Приведите примеры аксиом.
3. Что такое определение? Приведите примеры определений.
4. Какое утверждение называется обратной теоремой?
5. Что такое признак?

• Решаем вместе

1 Биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных секущей с двумя параллельными прямыми, параллельны. Докажите. Сформулируйте обратное утверждение.

■ Пусть BC — секущая прямых AB и CD, углы ABC и BCD — внутренние накрест лежащие, а BK и CP — их биссектрисы (рис. 109). Покажем, что если $AB \parallel CD$, то $BK \parallel CP$.

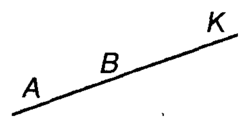
Если $AB \parallel CD$, то $\angle ABC = \angle BCD$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых. Половины равных углов равны, поэтому $\angle KBC = \angle BCP$. Эти углы — внутренние накрест лежащие для прямых KB и CP и секущей BC. Поскольку эти углы равны, то прямые KB и CP параллельны. А это и требовалось доказать.



■ Рис. 109

Обратное утверждение: если биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных двумя прямыми с их секущей, параллельны, то параллельны и данные прямые.

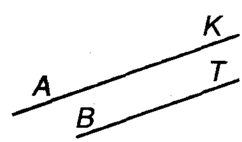
2 Два луча называют сонаправленными, если один из них является частью другого или если они параллельны и расположены по одну сторону от прямой, проходящей через их начала. Приведите примеры.



■ Рис. 110

■ *ПРИМЕРЫ*

Лучи AK и BK (рис. 110), а также лучи AK и BT (рис. 111).



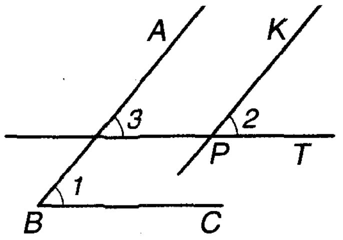
■ Рис. 111

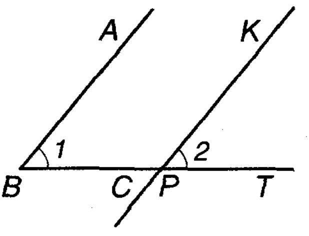
3 Докажите, что **углы с сонаправленными сторонами равны.**

■ Докажем, что если лучи BA и PK, BC и PT сонаправленные, то углы 1 и 2 равны.

Если данные углы расположены, как показано на рисунке 112, то $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 3 = \angle 2$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

Если данные углы расположены, как показано на рисунке 113, то луч PT составляет часть луча BC. В этом случае $\angle 1 = \angle 2$, как соответственные углы при параллельных прямых BA и PK.





■ Рис. 112 ■ Рис. 113

● ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

225. Сформулируйте определения:

а) вертикальных углов; б) смежных углов.

226. Сформулируйте аксиомы о расположении точек на прямой.

227. Сформулируйте аксиомы об измерении отрезков.

228. Сформулируйте аксиому Евклида о параллельности прямых.

229. Можно ли через каждые три точки провести прямую? Существуют ли три точки, через которые можно провести прямую?

230. Существуют ли 4 точки, через которые можно провести прямую?

231. Сформулируйте признак делимости натуральных чисел на 3. Как можно сформулировать его иначе?

232. Какие из утверждений верны:

а) «Если каждое из натуральных чисел делится на 10, то и их сумма делится на 10»;

б) «Если сумма двух натуральных чисел делится на 10, то каждое из них делится на 10»?

А

233. Сформулируйте теорему о смежных углах. Представьте ее в форме «Если... , то...». Укажите ее условие и заключение.

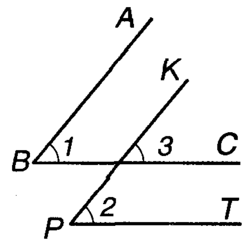
234. Сформулируйте теорему о двух прямых, параллельных третьей. Запишите ее с помощью математических символов.

235. Какие из данных утверждений истинны:

а) «Если углы равны, то они вертикальные»;

б) «Если углы не вертикальные, то они не равны»;

б) «Если углы не равны, то они не вертикальные»?



■ Рис. 114

236. Сформулируйте утверждение, обратное теореме 1. Можно ли считать его теоремой? Почему?

237. Сформулируйте утверждение, обратное теореме 5. Является ли оно теоремой?

238. Рассматривая рисунок 114, ученик рассуждает: «Если $AB \parallel KP$ и $BC \parallel PT$, то $\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$. Следовательно, углы с соответственно параллельными сторонами равны». Верно ли он рассуждает? Рассмотрите другие возможные случаи.

239. Можно ли считать правильными такие определения:

а) «Биссектрисой угла называется прямая, делящая этот угол пополам»;

б) «Биссектрисой угла называется луч, делящий этот угол на равные части»?

240. Прочитайте три первых абзаца § 3 «Углы и их меры». Есть ли в них определения? Сформулируйте одно из них.

Б

241. Сформулируйте определение параллельных прямых. Можно ли слова «на плоскости» опустить? Почему?

242. Какие из утверждений верны:

а) «Если каждое из трех натуральных чисел делится на 5, то и их сумма делится на 5»;

б) «Если сумма трех натуральных чисел делится на 5, то каждое из них делится на 5»?

243. Докажите, что угол между биссектрисами двух вертикальных углов развернутый. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение о биссектрисах двух смежных углов.

244. Сформулируйте словами и докажите утверждения:

а) если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$;

б) если $a \perp b$ и $b \perp c$, то $a \parallel c$.

Верны ли эти утверждения, если прямые a, b и c не лежат в одной плоскости?

245. Докажите, что:

а) если угол A равен углу B, а угол B — углу C, то углы A и C равны;

б) если отрезок AB равен отрезку KP, а KP — отрезку MT, то отрезок AB равен отрезку MT.

246. Верны ли утверждения:

а) «Если угол A смежный с углом B, а угол B — с углом C, то углы A и C смежные»;

б) «Если угол A вертикальный углу B, а угол B — углу C, то углы A и C тоже вертикальные»;

в) «Если прямые a и c лежат в одной плоскости и прямые c и n — в одной плоскости, то прямые a и n тоже лежат в одной плоскости»?

247. Параллельные железнодорожные рельсы, лучи солнца и много других моделей прямых на фотографиях и картинах часто изображают в виде непараллельных прямых (рис. 115). Приведите примеры изображений, на которых непараллельные прямые имеют вид параллельных.

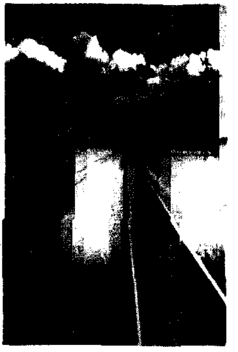


Рис. 115

248. Докажите, что секущая, пересекая параллельные прямые, образует с ними:

а) равные внешние накрест лежащие углы;

б) внешние односторонние углы, сумма которых равна 180°.

249*. Докажите, что **углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны или сумма их составляет 180°.**

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

250. Сколько на прямой может быть точек, которые находятся между ее точками A и B?

251. На какие части делят прямую две ее точки?

252. Сколько разных отрезков показано на рисунке 116? Назовите их.

253. Сколькими разными ломаными можно соединить две данные точки K и P? А сколькими отрезками? Сколькими дугами окружностей?

254. Дюйм — это 2,5 см. Сколько квадратных сантиметров в квадратном дюйме?

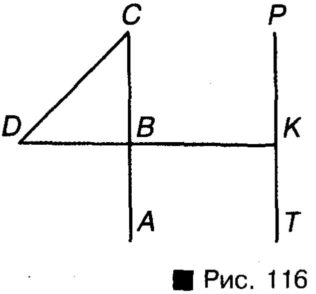


Рис. 116

Типовые задачи для контрольной работы

1°. Точки A, B и C лежат на одной прямой. $AB = 7{,}3$ см, $BC = 3{,}7$ см. Найдите длину отрезка AC.

2°. Внутренний луч OK угла AOB разбивает его на углы AOK и KOB. Найдите меру угла:
а) AOB, если $\angle AOK = 30°$, $\angle KOB = 40°$;
б) KOB, если $\angle AOB = 79°$, $\angle KOA = 53°$.
в) KOA, если он на $20°$ меньше $\angle KOB$ и $\angle AOB = 80°$.

3°. Начертите $\angle ABC = 120°$. Проведите его биссектрису BM и биссектрису BK угла MBC. Найдите меры углов KBC и ABK.

4°. Найдите меры четырех углов, образованных пересечением двух прямых, если один из них $45°$.

5°. Найдите меры смежных углов, если один из них: а) на $25°$ больше другого; б) в 3 раза меньше другого.

6°. С помощью рисунка 117 установите:
а) параллельны ли прямые AB и CD;
б) меру угла KPM.

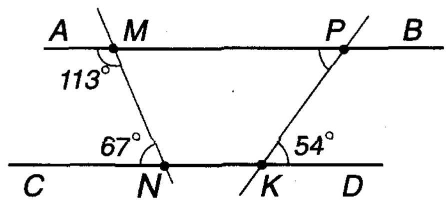


Рис. 117

7°. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой так, что сумма двух из восьми образованных углов равна $240°$. Найдите меры всех образованных углов.

8°. Отрезки AB и KP пересекаются в точке O. Докажите, что когда $\angle AKO = \angle OPB$, то $\angle KAO = \angle OBP$.

9°°. Прямые AB и KP пересекаются в точке O. OM — биссектриса угла AOP. Найдите меру угла KOM, если $\angle AOK - \angle AOM = 36°$.

10°°. Докажите, что биссектрисы соответственных углов при параллельных прямых параллельны.

• Задачи по готовым рисункам

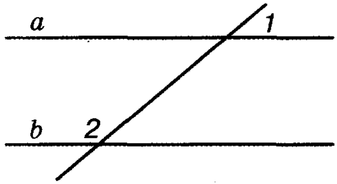
А | **Б**

1

А

$\angle 1 = 50^\circ$, $\angle 2 = 130^\circ$.

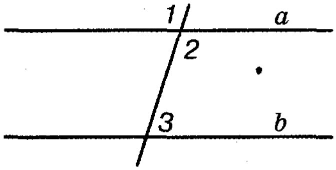
Доказать: $a \parallel b$.



Б

$\angle 1 : \angle 2 = 3 : 2$, $\angle 3 = 72^\circ$.

Доказать: $a \parallel b$.

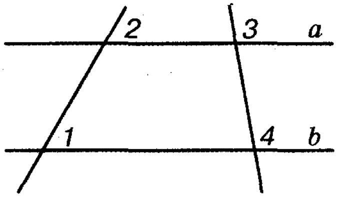


2

А

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = 80^\circ$.

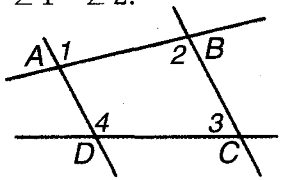
$\angle 4$



Б

$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$.

Доказать:
$\angle 1 = \angle 2$.

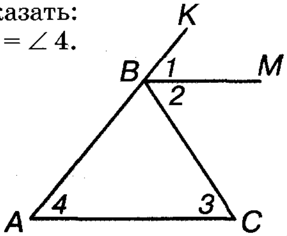


3

А

$\angle 2 = \angle 3$.

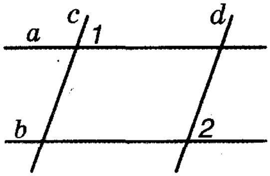
Доказать:
$\angle 1 = \angle 4$.



Б

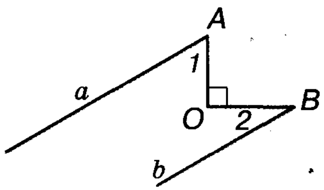
$a \parallel b$, $\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $c \parallel d$.



4

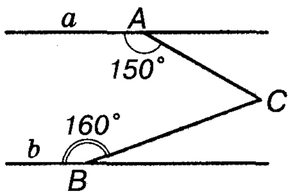
А



Б

$a \parallel b$.

$\angle C$



● Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1°. Отрезки AB и KP пересекаются во внутренней точке O так, что $\angle AOK = 50°$. Найдите меры углов AOP, BOP, BOK.

2°. Один из двух смежных углов больше другого на 18°. Найдите эти углы.

3•. Через концы отрезка AB по одну сторону от прямой AB проведите лучи AK и BC так, чтобы $\angle KAB = 107°$, а $\angle ABC = 73°$. Параллельны ли эти лучи? Почему?

Вариант 2

1°. Отрезки MN и KT пересекаются во внутренней точке X так, что $\angle MXK = 65°$. Найдите меры углов MXT, TXN, KXN.

2°. Найдите меры двух смежных углов, если один из них втрое больше другого.

3•. Через концы отрезка AB по одну сторону от прямой AB проведите лучи AM и BC так, чтобы $\angle MAB = 102°$, а $\angle ABC = 77°$. Параллельны ли эти лучи? Почему?

Вариант 3

1°. Отрезки AC и MP пересекаются во внутренней точке O так, что $\angle MOC = 48°$. Найдите меры углов AOP, AOM и POC.

2°. Найдите меры двух смежных углов, если один из них на 26° больше другого.

3•. Через концы отрезка KP по одну сторону от прямой KP проведите лучи KA и PB так, чтобы $\angle AKP = 97°$, а $\angle KPB = 83°$. Параллельны ли эти лучи? Почему?

Вариант 4

1°. Отрезки AB и CD пересекаются во внутренней точке M так, что $\angle AMC = 35°$. Найдите меры углов AMD, CMB и BMD.

2°. Найдите меры двух смежных углов, если один из них на 15° меньше другого.

3•. Через концы отрезка AB по одну сторону от прямой AB проведите лучи AK и BM так, чтобы $\angle KAB = 58°$, а $\angle ABM = 123°$. Параллельны ли эти лучи? Почему?

• Тестовые задания 2

1. Какова мера угла, смежного с углом 100°?	а) 100°; б) 80°; в) 8°; г) 50°.
2. Каким является угол, смежный с тупым углом?	а) тупой; б) прямой; в) острый; г) развернутый.
3. $\angle AOP$ и $\angle BOC$ — вертикальные углы. Какой знак следует поставить вместо *: $\angle AOP * \angle BOC$?	а) <; б) =; в) >; г) ⩾.
4. Сумма трех углов, полученных при пересечении 2 прямых, равна 280°. Найдите меру четвертого угла.	а) 100°; б) 80°; в) 90°; г) 70°.

Для выполнения заданий 5–10 воспользуйтесь рисунком 118.

5. Какой знак следует поставить вместо *: $CB * LP$?	а) ∥; б) =; в) ∈; г) ⊥.
6. Какие из прямых параллельны?	а) BP и LC; б) CP и AB; в) AB и LP; г) CB и LP.
7. Каким является угол $\angle ABC$?	а) острый; б) тупой; в) прямой; г) развернутый.
8. $\angle ALM = 130°$. Найдите $\angle LAB$.	а) 50°; б) 80°; в) 130°; г) 120°.
9. Найдите $\angle CAB$, если $\angle MLA = 145°$.	а) 145°; б) 45°; в) 25°; г) 35°.

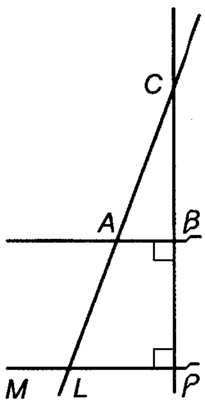


Рис. 118

10. Расстояние от точки C до прямой MP равно 12 см. Найдите расстояние от точки C до прямой AB, если $CB = BP$.	а) 12 см; б) 4 см; в) 6 см; г) 24 см.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какие углы называют смежными?
2. Сформулируйте и докажите свойства смежных углов.
3. Какие углы называют вертикальными?
4. Сформулируйте и докажите свойства вертикальных углов.
5. Что такое угол между прямыми?
6. Сформулируйте определение перпендикулярных прямых.
7. Какие отрезки называются перпендикулярными?
8. Какие две прямые называются параллельными?
9. Какие отрезки называются параллельными?
10. С помощью каких чертежных инструментов можно провести прямую, перпендикулярную к данной прямой? Как это делают?
11. Как можно провести прямую, параллельную данной прямой?
12. Сформулируйте определение параллельных прямых.
13. Что такое секущая двух прямых?
14. Какие углы называют соответственными? Покажите на рисунке.
15. Какие углы называют внутренними накрест лежащими' Внутренними односторонними? Покажите на рисунке.
16. Сформулируйте и докажите признак параллельности прямых.
17. Сформулируйте аксиому Евклида о параллельности прямых.
18. Что вам известно о Евклиде, о его «Началах»?
19. Сформулируйте и докажите теорему о внутренних накрест лежащих углах при параллельных прямых.
20. Сформулируйте и докажите теорему о двух прямых, перпендикулярных к третьей.
21. Что означает слово *транзитивный*? Сформулируйте и докажите теорему о транзитивности параллельных прямых.
22. Что такое теорема? Приведите примеры теорем.
23. Что такое аксиома? Приведите примеры аксиом.
24. Что такое определение? Приведите примеры определений
25. Какое утверждение называется теоремой, обратной данной?
26. Что такое признак?

Главное в разделе 2

Два угла, на которые разбивается развернутый угол ег внутренним лучом, называются *смежными*. Сумма мер дву: смежных углов равна 180°.

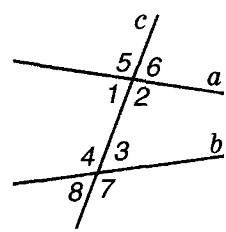
Два угла называются *вертикальными*, если стороны одног угла являются дополнительными лучами сторон другого угла Вертикальные углы равны.

Если две прямые пересекаются, они образуют четыре угла две пары вертикальных углов. Меньший из них — угол межд данными прямыми.

Две прямые называются *перпендикулярными*, если они пере секаются под прямым углом. Отрезки или лучи называют перпен дикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых

Две прямые на плоскости называют *параллельными*, есл: они не пересекаются.

Прямая, пересекающая две другие прямые, называется и: *секущей*. С двумя данными прямыми она образует 8 углов, не которые пары этих углов имеют отдельные названия:



1 и 3, 2 и 4 — внутренние накрест лежащие;
1 и 4, 2 и 3 — внутренние односторонние;
1 и 8, 2 и 7, 3 и 6, 4 и 5 — соответственные;
5 и 7, 6 и 8 — внешние накрест лежащие;
5 и 8, 6 и 7 — внешние односторонние.

Признак параллельности прямых:

- **Две прямые параллельны, если с секущей они образу ют равные внутренние накрест лежащие углы, или рав ные соответственные углы, или такие внутренние одно сторонние углы, сумма которых равна 180°.**

Свойства параллельных прямых:

- **Секущая с двумя параллельными прямыми образуе равные внутренние накрест лежащие углы, равные со ответственные углы, такие внутренние односторонни углы, сумма которых равна 180°.**
- **Две прямые, параллельные третьей, параллельны.**
- **Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллелі ных прямых, то она перпендикулярна и к другой прямої Две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны**

Раздел 3

ТРЕУГОЛЬНИКИ

В этом разделе вы повторите свои знания о треугольниках, полученные в предыдущих классах, и узнаете о многих других их свойствах. Основное в разделе — **три признака равенства треугольников**. Они часто используются в геометрии. От того, насколько хорошо вы изучите эти признаки, будет зависеть усвоение следующих разделов учебника.

ТРЕУГОЛЬНИК И ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

О РАВЕНСТВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

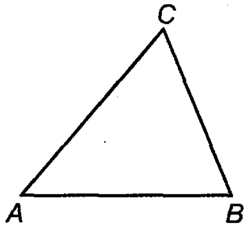
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

НЕРАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКА

Геометрия Евклида является лишь первым шагом к изучению форм реального пространства.

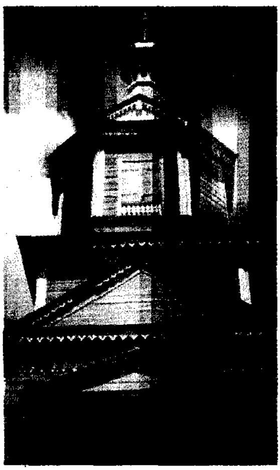
А. Смогоржевский

§ 9 Треугольник и его элементы



■ Рис. 119

Если три точки, не лежащие на одной прямой, соединить отрезками, получится *треугольник*. Другими словами: треугольник — это *замкнутая ломаная из трех звеньев*. На рисунке 119 изображен треугольник ABC (пишут: $\triangle ABC$). Точки A, B, C — *вершины*, отрезки AB, BC и CA — *стороны* этого треугольника. Каждый треугольник имеет три вершины и три стороны.



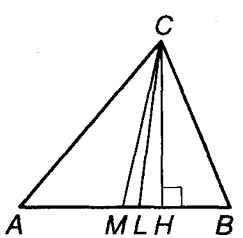
■ Рис. 120

Много разных моделей треугольников можно увидеть в подъемных кранах, заводских конструкциях, различных архитектурных строениях (рис. 120).

Сумму длин всех сторон треугольника называют его *периметром*.

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон. Почему?

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой его противолежащей стороны, — *медиана треугольника*. Отрезок биссектрисы угла треугольника от его вершины до противолежащей стороны — *биссектриса треугольника*. Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, которой принадлежит его противолежащая сторона, — *высота треугольника*. На рисунке 121 изображен $\triangle ABC$, в котором из вершины C проведены: медиана CM, биссектриса CL и высота CH.



■ Рис. 121

Каждый треугольник имеет три медианы, три биссектрисы и три высоты.

Треугольник разделяет плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. Фигура, состоящая из треугольника и его внутренней области, также называется *треугольником*.

***Углами треугольника** ABC* называют углы BAC, ABC и ACB. Их обозначают еще так: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Каждый треугольник имеет три угла.

Если треугольник имеет прямой или тупой угол, его называют соответственно *прямоугольным* или *тупоугольным* треугольником. Треугольник, все углы которого острые, называется *остроугольным*. На рисунке 122 изображены остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники. Их внутренние области закрашены.

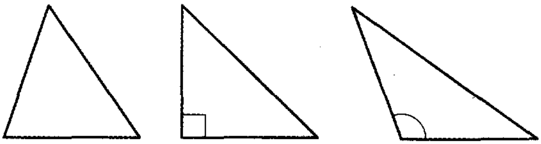


Рис. 122

Для любознательных

Словом *треугольник* геометры называют два разных понятия: и замкнутую ломаную из трех звеньев, и такую ломаную вместе с ограниченной ею внутренней частью плоскости. Подобно тому, как *стороной треугольника* иногда называют отрезок, иногда — длину этого отрезка, *высотой треугольника* называют и определенный отрезок, и его длину.

Так делают для удобства: чтобы каждый раз не говорить, например, «длина высоты треугольника равна 5 см», договорились говорить проще: «высота треугольника равна 5 см».

Каждый многоугольник можно разрезать на несколько треугольников. Поэтому треугольники в геометрии играют такую важную роль, как атомы в физике, как кирпичи в доме. Существует даже отдельная часть геометрии, интересная и содержательная: *геометрия треугольника*.

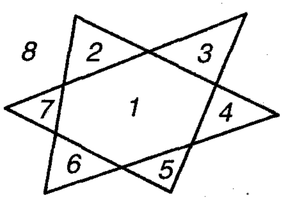
? Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое треугольник?
2. Назовите элементы треугольника.
3. Какими бывают треугольники? Сформулируйте их определения.
4. Что такое биссектриса, медиана и высота треугольника?
5. Чем отличается биссектриса треугольника от биссектрисы угла?

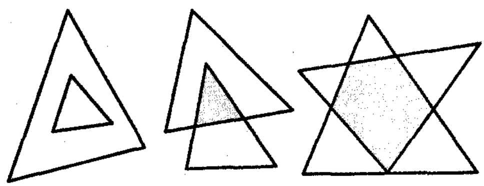
● Решаем вместе

1 На сколько частей могут разбивать плоскость два ее треугольника?

■ Если два треугольника расположены в одной плоскости, то они могут разбить ее максимум на 8 частей (рис. 123). Мысленно передвигая один из двух данных треугольников так, чтобы сначала один из образованных их пересечением треугольник превратился в точку, потом — второй и т. д., убеждаемся, что два треугольника могут разбивать плоскость на 3, 4, 5, 6, 7, 8 частей (рис. 124). Лишь когда два треугольника равны и совмещены друг с другом, они разбивают плоскость на 2 части.



■ Рис. 123



■ Рис. 124

2 Среднее арифметическое всех сторон треугольника равно m. Найдите периметр треугольника.

■ Если a, b, c — стороны треугольника, а P — его периметр, то

$$\frac{a+b+c}{3} = m, \text{ или } \frac{P}{3} = m, \text{ откуда } P = 3\,m.$$

● ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

255. Могут ли две стороны треугольника быть перпендикулярными к третьей его стороне?

256. Сколько высот треугольника могут лежать вне его?

257. Может ли высота треугольника совпадать с его стороной?

258. Найдите периметр $\triangle ABC$, если:

а) $AB = 6$, $BC = 3$, $AC = 7$; б) $AB = 2{,}2$, $BC = 8{,}5$, $AC = 8{,}8$.

259. Существует ли треугольник со сторонами 3 см, 4 см и 8 см?

А

260. Начертите любой треугольник. Обозначьте его вершины буквами K, P, T. Назовите стороны и углы треугольника. Найдите его периметр.

261. Начертите остроугольный треугольник ABC. Проведите из его вершины A медиану, биссектрису и высоту.

262. Постройте произвольный треугольник. Проведите его медианы и высоты.

263. Стороны треугольника 3,8 см, 4,5 см и 7,5 см. Чему равен его периметр?

264. Периметр треугольника равен 12 см. Найдите сторону квадрата, периметр которого вдвое больше периметра треугольника.

265. AM и BN — медианы $\triangle ABC$, $AN = 5$ см, $BM = 7$ см. Найдите периметр $\triangle ABC$, если $AB = 15$ см.

266. Верно ли, что на рисунке 125 отрезки AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC?

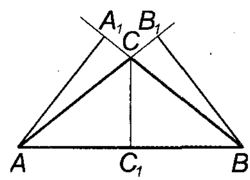


Рис. 125

267. Треугольник делит плоскость на две части: ограниченную и неограниченную. А на сколько частей могут делить плоскость треугольник и прямая, расположенные на ней? А треугольник и окружность?

268. Сколько разных треугольников изображено на рисунке 126?

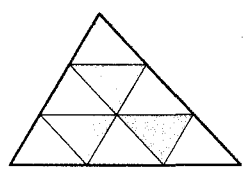


Рис. 126

269. Периметр $\triangle ABC$ равен 26 см. Найдите его стороны, если $AC = 10$ см и:

а) $BC = 3AB$; б) $AB : BC = 3 : 5$;

в) $AB = BC$; г) $BC - AB = 6$ см.

Б

270. Каждый ли треугольник можно разрезать на 2 треугольника? А на произвольное число n треугольников? Какими способами можно разрезать произвольный треугольник на 3 меньших треугольника? А на 4 треугольника?

271. Покажите, как можно разрезать квадрат на 2, 3, 4, 5 треугольников.

272. Найдите стороны треугольника, если одна из них больше второй вдвое, третьей — в полтора раза, а вторая сторона меньше третьей на 2 см.

273. Найдите периметр треугольника, если он больше первой стороны на 7 м, второй — на 8 м и третьей — на 9 м.

274. Среднее арифметическое всех сторон треугольника равно 10 дм. Найдите периметр треугольника.

275. Периметр квадрата равен 4 дм. Можно ли вырезать из него треугольник периметра 3 дм?

276. Существует ли треугольник, периметр которого в 1000 раз больше одной из его сторон? А одной из высот?

277. Стороны треугольника пропорциональны числам 4, 5 и 8. Найдите периметр треугольника, если наибольшая его сторона больше наименьшей на 24 см.

278. Постройте тупоугольный треугольник и проведите его высоты.

279. Найдите высоту BH треугольника ABC, если периметры треугольников ABC, ABH и BHC равны соответственно 26 см, 14 см и 18 см.

280. BM — медиана треугольника ABC, а периметры треугольников ABM и BMC равны. Докажите, что $AB = BC$.

281. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и K такие, что $MK \parallel AC$. Докажите, что углы треугольника MBK равны соответственно углам треугольника ABC.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

282. Вспомните, как определить площадь прямоугольника. А квадрата?

283. Какие единицы площади вы знаете?

284. Сколько квадратных метров в 1 км^2, 1 га, 1 аре?

285. Верно ли, что из двух любых равных прямоугольных треугольников можно сложить один прямоугольник?

286. Как найти площадь прямоугольного треугольника?

287. Поле прямоугольной формы имеет площадь 20 га, а одна его сторона — полкилометра длиной. Найдите длину второй стороны поля.

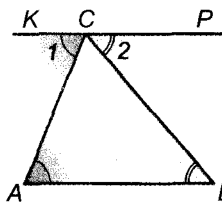
288. Сумма углов AOB и BOC равна 100°. Найдите угол между их биссектрисами, если луч OB для угла AOC — внутренний

§ 10 Сумма углов треугольника

ТЕОРЕМА 8 **Сумма углов треугольника равна 180°.**

■ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть ABC — произвольный треугольник (рис. 127). Через его вершину C проведем прямую KP, параллельную AB.



■ Рис. 127

Полученные углы ACK и BCP обозначим цифрами 1 и 2. Тогда $\angle A = \angle 1$, $\angle B = \angle 2$, как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и KP и секущих AC и BC. Углы 1, 2 и C в сумме равны развернутому углу, то есть 180°. Поэтому

$\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle C = 180°$.

Таким образом, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.□

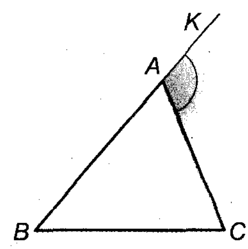
■ *ПРИМЕЧАНИЕ.*

В доказанной теореме 8 речь идет о сумме мер углов треугольника. Но для упрощения формулировок вместо «мера угла» часто употребляют слово «угол».

■ *СЛЕДСТВИЕ.*

Треугольник не может иметь два прямых или два тупых угла. В каждом треугольнике по крайней мере два угла — острые.

Иногда кроме углов треугольника (внутренних) рассматривают также его внешние углы. *Внешним углом треугольника* называют угол, образованный стороной треугольника и продолжением его другой стороны. Например, внешним углом треугольника ABC при вершине A является угол KAC (рис. 128).

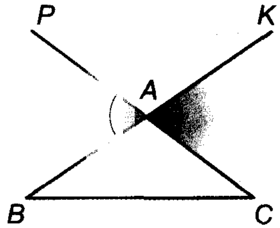


■ Рис. 128

ТЕОРЕМА 9 **Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.**

■ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $\angle KAC$ — внешний угол $\triangle ABC$ (рис. 128). Тогда $\angle KAC = 180° - \angle BAC$ (согласно теореме о смежных углах),



■ Рис. 129

$\angle B + \angle C = 180° - \angle BAC$ (согласно теореме о сумме углов треугольника).

Значит, $\angle KAC = \angle B + \angle C$.□

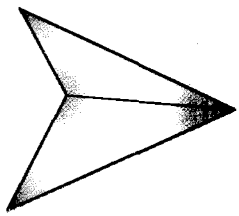
■ *СЛЕДСТВИЕ.*

Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним.

■ ***ВНИМАНИЕ!*** При каждой вершине треугольника можно построить два внешних угла, продлив ту или иную его сторону. Например, каждый из углов KAC и PAB — внешний угол треугольника ABC при вершине A (рис. 129). Такие два внешних угла — вертикальные, поэтому равны друг другу.

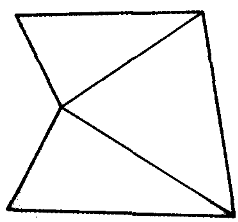
Для любознательных

Теорему о сумме углов треугольника можно обобщить и распространить на произвольные многоугольники.



■ Рис. 130

Каждый четырехугольник можно разрезать на два треугольника, соединив его противолежащие вершины отрезком. (Если один из углов четырехугольника больше развернутого, то именно его вершину следует соединить с противолежащей, как на рисунке 130.) Сумма всех углов четырехугольника равна сумме всех углов двух образованных треугольников, то есть $180° \cdot 2$. Таким образом, **сумма углов любого четырехугольника равна 360°**.



■ Рис. 131

Произвольный пятиугольник можно разрезать на четырехугольник и треугольник или на 3 треугольника (рис. 131). Таким образом, сумма углов пятиугольника равна $180° \cdot 3$, то есть $540°$.

Попробуйте написать формулу, по которой можно вычислить сумму углов произвольного n-угольника.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о сумме углов треугольника.
2. Что такое внешний угол треугольника?
3. Сформулируйте теорему о внешнем угле треугольника.
4. Верно ли, что внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним?
5. Чему равна сумма углов четырехугольника?

• *Решаем вместе*

Чему равна сумма внешних углов треугольника, взятых при каждой вершине по одному?

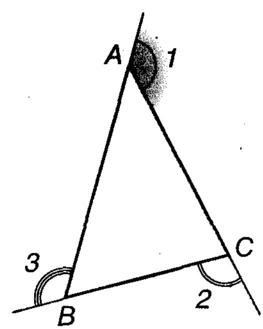


Рис. 132

Пусть ABC — произвольный треугольник. Обозначим его внешние углы 1, 2 и 3 (рис. 132). Согласно теореме о внешнем угле треугольника

$\angle 1 = \angle B + \angle C$,
$\angle 2 = \angle A + \angle B$, $\angle 3 = \angle A + \angle C$.

Сложив отдельно левые и правые части этих равенств, получим:

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 =$
$= 2(\angle A + \angle B + \angle C) = 2 \cdot 180° = 360°$.

Иной способ:

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180° - \angle A + 180° - \angle B + 180° - \angle C =$
$= 540° - (\angle A + \angle B + \angle C) = 540° - 180° = 360°$.

Ответ. 360°.

Докажите, что в каждом треугольнике есть угол не больше 60° и угол не меньше 60°.

Если бы каждый угол треугольника был меньше 60°, то сумма всех его углов составляла бы меньше 180°, а это невозможно. Если бы каждый угол треугольника был больше 60°, то сумма всех его углов была бы больше 180°, что также невозможно.

Следовательно, в каждом треугольнике есть угол не больше 60° и угол не меньше 60°.

• ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

289. Сумма двух углов треугольника равна 80°. Найдите третий угол.

290. Два угла треугольника имеют по 30°. Найдите третий угол.

291. Существует ли треугольник с углами 60°, 70° и 80°?

292. Два угла треугольника 20° и 80°. Найдите третий угол.

293. Найдите углы прямоугольного треугольника, если один из них 30°.

А

294. Найдите углы треугольника, если они пропорциональны числам:

а) 2, 3 и 5; б) 1, 5 и 6; в) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$.

295. Докажите, что **сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.**

296. Заполните пустые клетки таблицы об углах $\triangle ABC$.

A	30°	20°		83°	95°		54°
B	70°		45°		35°	47°	
C	100	100°	45°	17°		67°	54°

297. Найдите углы треугольника, если один из них:

а) равен второму и меньше третьего на 30°;

б) больше второго на 20° и третьего — на 40°;

в) больше второго в 2 раза и третьего — на 10°.

298. В треугольнике ABC углы A и B по 65°. Найдите внешний угол треугольника при вершине C.

299. Может ли каждый внешний угол треугольника быть равным 100°?

300. Углы треугольника пропорциональны числам 1, 2 и 3. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

Б

301. Найдите углы $\triangle ABC$, если $\angle A + \angle B = 100°$ и $\angle B + \angle C = 120°$.

302. $\angle ABC = 30°$. Под каким углом прямая AC пересекает луч BC, если луч BA она пересекает под углом $45°$?

303. CH и CL – высота и биссектриса $\triangle ABC$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 30°$. Найдите $\angle HCL$.

304. CL – биссектриса $\triangle ABC$, $\angle A = 80°$, $\angle B = 40°$. Найдите:

а) $\angle CLA$;

б) под каким углом пересекаются биссектрисы углов A и B?

305. CH – высота $\triangle ABC$. Найдите $\angle ACH$ и $\angle BCH$, если:

а) $\angle A = 30°$ и $\angle B = 60°$;

б) $\angle A = 30°$ и $\angle B = 120°$.

306. Найдите меры внешних углов $\triangle ABC$, если:

а) $\angle A = 40°$, $\angle B = 50°$;

б) $\angle B = 120°$, $\angle C = 40°$;

в) $\angle A + \angle B = 100°$, $\angle B + \angle C = 130°$;

г) $\angle A + \angle C = 95°$, $\angle B + \angle C = 135°$.

307. Углы A и B треугольника ABC равны. Докажите, что биссектриса внешнего угла $\triangle ABC$ при вершине C параллельна стороне AB.

308*. Найдите сумму углов A, B, C, D, E пятиугольной звезды (рис. 133).

309. Треугольник расположен на поверхности куба, как показано на рисунке 134. Найдите сумму углов, обозначенных на рисунке цифрами.

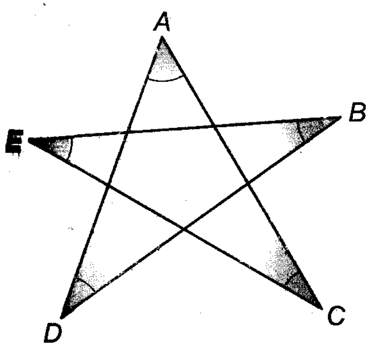


Рис. 133

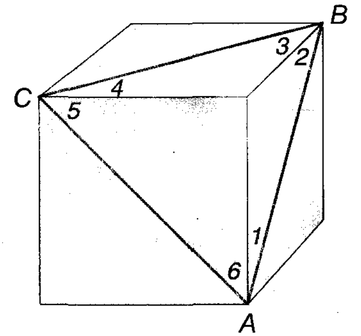
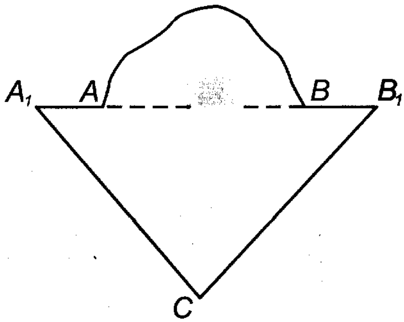


Рис. 134

310. Прямолинейный тоннель AB пробивают с двух сторон горы (рис. 70). Верно ли выбраны направления A_1A и B_1B, если измерения показали, что $\angle A_1 = 50°10'$, $\angle B_1 = 48°20'$ и $\angle C = 80°5'$?



■ Рис. 135

Практическое задание

311. Начертите произвольный треугольник и проведите все его биссектрисы. Что вы заметили? Можно ли утверждать, что все три биссектрисы треугольника проходят через одну точку? А если вместо биссектрис провести медианы треугольника?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

312. Отрезок, длина которого равна a, разделен на два неравных отрезка. Найдите расстояние между серединами полученных отрезков.

313. В $\triangle ABC$ медиана $BM = MC$. Найдите периметр $\triangle ABC$, если периметр $\triangle ABM$ равен 16 см, а $BC = 8$ см.

• **314.** M и N — середины сторон AB и BC $\triangle ABC$. Периметр $\triangle MBN$ в 2 раза меньше периметра $\triangle ABC$. Найдите MN, если $AC = 10$ см.

315. Треугольник с периметром 22 см разделен медианой на два треугольника с периметрами 12 см и 16 см. Найдите длину медианы.

316. Секущая c образует с параллельными прямыми a и b внутренние односторонние углы, которые относятся как 2 : 3. Как относятся углы, образованные биссектрисами этих углов и секущей c?

§ 11 О равенстве геометрических фигур

На рисунке 136 изображены два треугольника. Представьте, что один из них начерчен на бумаге, а второй — на прозрачной пленке. Передвигая пленку, второй треугольник можно совместить с первым. Говорят: если данные треугольники *можно совместить движением*, то они *равны*. Равными друг другу бывают не только треугольники, но и отрезки, углы, окружности и другие фигуры.

Изображенные на рисунке 137 фигуры тоже равны, потому что их можно совместить, согнув лист бумаги по прямой l. А фигуры, изображенные на рисунке 138, не равны, их нельзя совместить.

Для обозначения равных фигур используют знак равенства «=». Например, $AB = KP$, $\angle A = \angle B$, $\triangle ABC = \triangle KPT$.

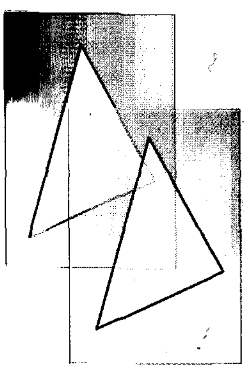


Рис. 136

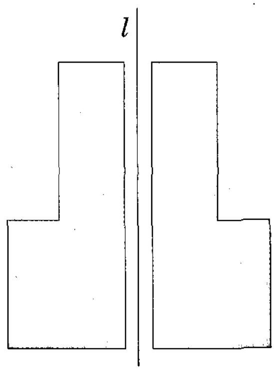


Рис. 137

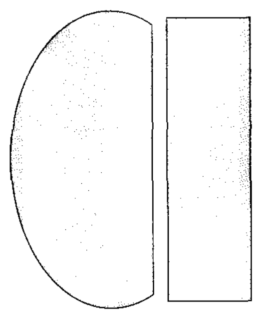


Рис. 138

! **Если каждая из двух фигур равна третьей, то первая и вторая фигуры также равны.**

С равными фигурами часто приходится иметь дело многим специалистам. В форме равных прямоугольников изготовляют листы жести, фанеры, стекла, облицовочную плитку, паркетины и т. д. Равны все листы бумаги из одной пачки, соответствующие детали двух машин одной марки.

Чтобы выяснить, равны ли две фигуры, можно попробовать их совместить. Но на практике это не всегда удается осуществить. Например, таким способом нельзя определить, равны ли два земельных участка. Поэтому приходится искать другие способы, выявлять признаки равенства тех или иных фигур. Например, если радиусы двух окружностей равны, то равны и сами окружности. Это – *признак равенства окружностей*. В следующем параграфе мы рассмотрим признаки равенства треугольников.

ПРИМЕЧАНИЕ.

Треугольник с вершинами A, B и C можно обозначать поразному: $\triangle ABC$, $\triangle BCA$, $\triangle CAB$, $\triangle BAC$ и т. д. Однако для удобства договоримся, что когда пишут $\triangle ABC = \triangle KPT$, то подразумевают, что $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle P$, $\angle C = \angle T$, $AB = KP$, $AC = KT$, $BC = PT$.

Для любознательных

Слово **равенство** в математике и других науках употребляется достаточно часто. Говорят, в частности, о равенстве чисел, равенстве выражений, равенстве значений величин. Равенство геометрических фигур — это **отношение**. Оно имеет следующие свойства:

1) каждая фигура равна самой себе;

2) если фигура *A* равна фигуре *B*, то и фигура *B* равна *A*;

3) если фигура *A* равна *B*, а фигура *B* равна *C*, то фигуры *A* и *C* также равны.

Нередко из равенства одних фигур либо величин следует и равенство других фигур либо величин, но — не всегда. Например, если треугольники равны, то и их периметры равны. Однако если периметры двух треугольников равны, то это еще не значит, что равны и сами треугольники. То же самое: если треугольники равны, то и их площади равны. Но если площади двух треугольников равны, это еще не означает, что и треугольники равны.

Очень часто для обоснования равенства тех или иных фигур необходимо обосновать равенство некоторых треугольников. Вот почему вопросу о равенстве треугольников в геометрии придают такое важное значение: большинство теорем школьной геометрии доказывают, используя признаки равенства треугольников.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какие фигуры называют равными?
2. Каким знаком обозначают равенство фигур?
3. Сформулируйте свойства отношения равенства фигур.
4. Сформулируйте признак равенства двух окружностей.

Решаем вместе

1 Равны ли углы, изображенные на рисунке 139?

■ Стороны угла — лучи. Хотя на рисунке они изображены неравными отрезками, но следует представить их в виде бесконечных лучей. Поскольку каждый из этих углов имеет 35° (проверьте), то они равны.

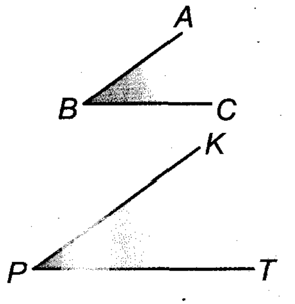


Рис. 139

2 Докажите, что треугольники не могут быть равными, если не равны их наибольшие углы.

■ Пусть у треугольников ABC и KPT $\angle A > \angle B > \angle C$, $\angle K > \angle P > \angle T$. Если бы данные треугольники были равны, их можно было бы совместить. Тогда наибольший угол A треугольника ABC совместился бы с наибольшим углом K треугольника KPT. Это невозможно, поскольку $\angle A \neq \angle K$. Значит, данные треугольники не могут быть равными.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

317. Равны ли две фигуры на рисунке 140?

318. Верно ли, что если данный треугольник прямоугольный, тупоугольный или равносторонний, то и равный ему треугольник тоже соответственно прямоугольный, тупоугольный или равносторонний?

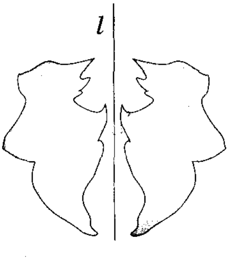


Рис. 140

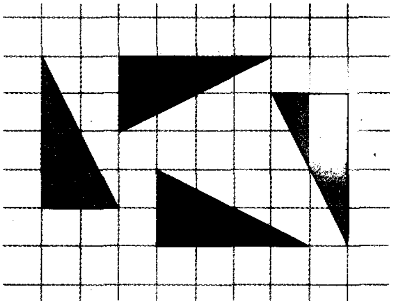


Рис. 141

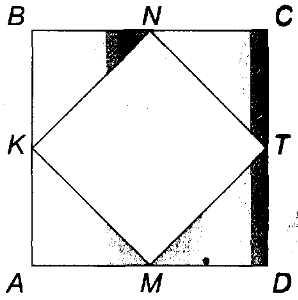


Рис. 142

319. Равны ли треугольники, изображенные на рисунке 141?

320. Середины сторон квадрата $ABCD$ последовательно соединили отрезками так, что образовались 4 треугольника (рис. 142). Верно ли, что каждый из этих треугольников равен другому?

321. Равны ли как геометрические фигуры символы:

~~а) **O** и **O**;~~ б) < и >;

~~г) = и ‖;~~ в) **Г** и **L**?

322. Могут ли быть равными прямоугольный и тупоугольный треугольники? А прямоугольный и остроугольный?

323. Треугольники ABC и KPT равны. Равны ли их периметры?

324. Периметры треугольников ABC и KPT равны. Равны ли сами треугольники?

325. Один из двух смежных углов можно совместить с другим. Какие это углы?

326. Какие из фигур, изображенных на рисунке 143, равны?

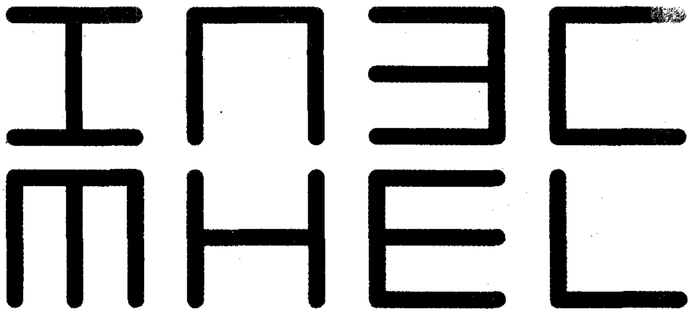


Рис. 143

А

327. Могут ли быть равными треугольники, наименьшие стороны которых не равны?

328. Прямая, проходящая через центр окружности, разбивает ее на две полуокружности. Равны ли они? Как совместить одну полуокружность с другой?

329. Найдите периметр треугольника KPT, если $\triangle KPT = \triangle ABC$, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см и $AC = 5$ см.

330. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ наложили друг на друга так, что совместились вершины A и A_1, B и B_1, C и C_1. Совместятся ли стороны AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1? А медианы AM и A_1M_1?

331. Фигуры $ABCD$ и $HTPK$ равны (рис. 144). Найдите угол T и расстояние KT, если $BD = 3{,}8$ см и $\angle B = 70°$.

332. Найдите углы треугольника ABC, если $\triangle ABC = \triangle KPT$, $\angle K = 60°$ и $\angle P = 60°$.

333. Стороны AB и PT не равны. Могут ли быть равными треугольники ABC и KPT?

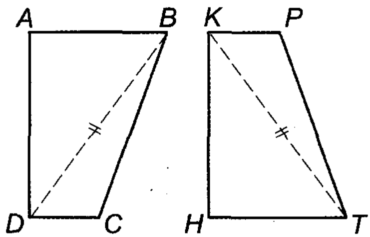


Рис. 144

Б

334. Углы ABC и KPT равны. Сколькими способами один из них можно совместить с другим?

335. $\triangle ABC$ — тупоугольный, а углы $\triangle A_1B_1C_1$ пропорциональны числам 5, 6 и 7. Могут ли быть равными эти треугольники?

336. $\triangle ABC = \triangle MNK$, $\angle N = 2\angle A$. Найдите углы треугольников, если $\angle C = 60°$.

337. $\angle AOB$ и $\angle BOC$ — смежные, $\angle BOC - \angle AOB = 30°$. $\angle MKP$ и $\angle PKN$ — смежные, $\angle MKP : \angle PKN = 7 : 5$. Укажите пары равных углов, если они есть.

338. Периметр каждого из прямоугольников $ABCD$ и $MNPK$ равен 28 см. Постройте эти прямоугольники так, чтобы:

а) они были равны; б) они не были равны.

339. Одна из сторон прямоугольника $ABCD$ на 3 см больше другой, а его периметр равен 34 см. Площадь прямоугольника $MNPK$ равна 70 см². Могут ли быть равными эти прямоугольники? А если площадь прямоугольника $MNPK$ равна 72 см²?

340. На координатной плоскости даны точки A (1; 4), B (2; 7), C (2; 4), D (2; 1), K (4; 1). Равны ли треугольники ABC и ADC? А треугольники ABC и CDK?

341. Прямоугольники $ABCD$ и $KPTM$ равны друг другу и $AB = KP$. Найдите KT, если $AC = 26$ см.

342. Точки A, B, C, D, E делят окружность с центром O на 5 равных дуг. Равны ли отрезки AB и EA? А треугольники OBC и OAE?

343*. Верно ли, что каждая прямая, проведенная через центр O квадрата или прямоугольника (рис. 145), разрезает его на две равные фигуры?

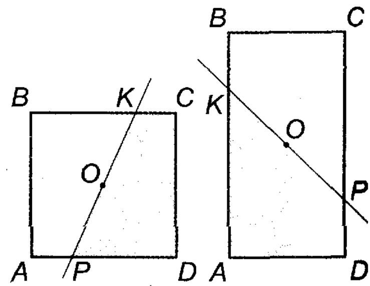


Рис. 145

Практическое задание

344. Начертите $\triangle ABC$ на бумаге и $\triangle A_1B_1C_1$ на прозрачной пленке таким образом, чтобы их можно было совместить.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

345. Начертите круг диаметром 6 см. Чему равны его площадь и длина окружности, ограничивающей его?

346. Начертите круг радиусом 3 см. Разделите его на 5 равных секторов. Закрасьте один сектор и найдите его площадь.

347. На сколько частей могут разрезать плоскость две окружности? А три окружности?

348. Сколько гектаров вмещает круг, диаметр которого равен 1 км?

349. В $\triangle ABC$ угол $A = 70°$, угол B на 20° больше C. Под каким углом пересекаются биссектрисы углов B и C?

350. В $\triangle ABC$ все углы равны. Докажите, что биссектрисы любых двух из них пересекаются под равными углами.

§ 12 Признаки равенства треугольников

Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны друг другу, то их можно совместить. При этом если совместятся вершины A и A_1, B и B_1, C и C_1, то совместятся и стороны: AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 и углы: $\angle A$ и $\angle A_1$, $\angle B$ и $\angle B_1$, $\angle C$ и $\angle C_1$. Значит, если $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Чтобы доказать, что данные треугольники равны, не обязательно убеждаться в истинности всех шести равенств.

ТЕОРЕМА 10 (первый признак равенства треугольников). **Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB = A_1B_1, AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$ (рис. 146). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Наложим $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ таким образом, чтобы вершина A_1 совместилась с A, вершина B_1 — с B, а сторона A_1C_1 наложилась на луч AC. Это можно сделать, потому что по условию $A_1B_1 = AB$ и $\angle A_1 = \angle A$. Поскольку $A_1C_1 = AC$, то при таком наложении точка C_1 совместится с C. В результате все вершины $\triangle A_1B_1C_1$ совместятся с соответствующими вершинами $\triangle ABC$. Итак, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$. □

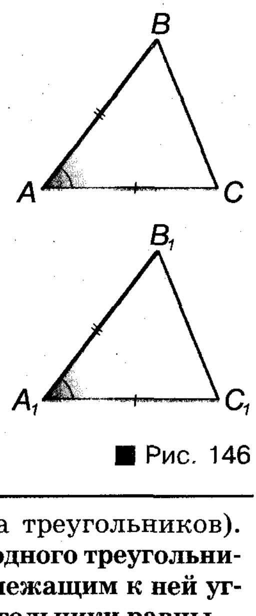
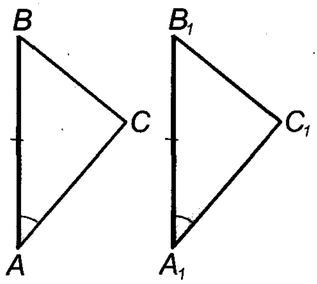


Рис. 146

ТЕОРЕМА 11 (второй признак равенства треугольников). **Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$ (рис. 147). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



■ Рис. 147

Наложим $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ таким образом, чтобы вершина A_1 совместилась с A, вершина B_1 — с B, а сторона A_1C_1 наложилась на AC. Это можно сделать, потому что $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$. Поскольку $\angle B = \angle B_1$, то сторона B_1C_1 наложится на BC. Следовательно, при таком наложении луч A_1C_1 совместится с AC, а луч B_1C_1 — с BC. Точка C_1, в которой пересекаются лучи A_1C_1 и B_1C_1, совместится с точкой C пересечения лучей AC и BC. Как видим, $\triangle A_1B_1C_1$ можно совместить с $\triangle ABC$, а это значит, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. □

Для любознательных

Существуют также и другие признаки равенства треугольников (см. теорему 14).

На признаки равенства треугольников нам придется ссылаться часто. Чтобы не путать, какой из них назвали первым, какой — вторым и т. д., их лучше всего различать по смыслу, говорить о **признаке равенства треугольников**:

1) **по двум сторонам и углу между ними;**
2) **по стороне и двум прилежащим углам,**
3) **по трем сторонам** (его докажем позже).

Эти признаки равенства треугольников называют общими признаками, поскольку они верны для любых треугольников. Кроме них, есть еще признаки равенства прямоугольных треугольников, равнобедренных треугольников и др.

Два равносторонних треугольника равны, если сторона одного из них равна стороне другого.

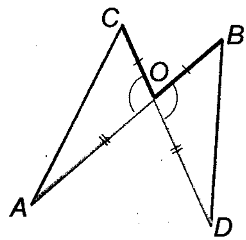
Попробуйте доказать этот признак, воспользовавшись общими признаками.

? Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте первый признак равенства треугольников.
2. Сформулируйте второй признак равенства треугольников.
3. Докажите признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними.
4. Докажите признак равенства треугольников по стороне и прилежащим к ней углам.

● Решаем вместе

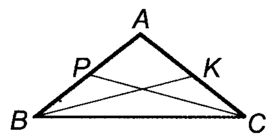
1 Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = OD$ и $CO = OB$. Докажите, что $AC = BD$.



■ Рис. 148

Рассмотрим треугольники ACO и DBO (рис. 148). Их углы при вершине O вертикальные, значит, равны. Соответственные стороны тоже равны: $AO = OD$, $CO = OB$. По первому признаку равенства треугольников $\triangle ACO = \triangle DBO$. Стороны AC и BD этих треугольников соответственные, поскольку лежат против равных углов при вершине O. Следовательно, $AC = BD$.

2 Две стороны треугольника равны. Докажите, что и медианы, проведенные к этим сторонам, также равны.



■ Рис. 149

Пусть у $\triangle ABC$ сторона $AB = AC$, а BK и CP — медианы (рис. 149). $AP = AK$, как половины равных сторон. $\triangle ABK = \triangle ACP$, поскольку $AB = AC$, $AK = AP$ и угол A общий. Следовательно, $BK = CP$.

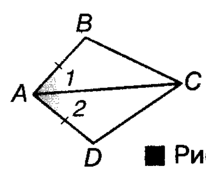
● ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

351. Пользуясь рисунком 150, докажите:

а) если $AB = AD$ и $\angle 1 = \angle 2$, то $\triangle ABC = \triangle ADC$;

б) если $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle B = \angle D$, то $\triangle ABC = \triangle ADC$.



■ Рис. 150

352. На рисунке 151 $AB = CD$, $AB \parallel CD$. Докажите, что $\triangle AOB = \triangle COD$.

353. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$ (рис. 152). Докажите, что $\angle B = \angle D$.

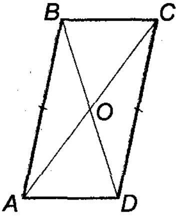


Рис. 151

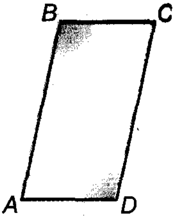


Рис. 152

A

354. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = OB$ и $CO = OD$. Докажите, что $\triangle AOC = \triangle BOD$.

355. Отрезки KP и EF пересекаются в точке M так, что $KM = MP$ и $EM = MF$. Найдите расстояние KE, если $PF = 12$ см.

356. Ученики построили в тетрадях треугольники с двумя сторонами 3 см и 5 см и углом 60° между ними. Равны ли эти треугольники?

357. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$.

358. Пусть AM – медиана треугольника ABC и $MK = MA$ (рис. 153). Докажите, что $\triangle ACM = \triangle KBM$.

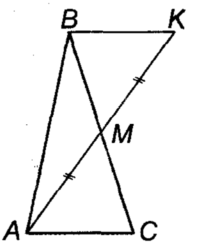


Рис. 153

359. Ученики построили в тетрадях треугольники со стороной 5 см и прилежащими к ней углами 30° и 70°. Равны ли эти треугольники?

360. На биссектрисе угла A обозначена точка D, на сторонах угла — точки B и C такие, что $\angle BDA = \angle ADC$. Докажите, что $BD = CD$.

361. В равностороннем $\triangle ABC$ проведите биссектрису AL и докажите, что:

а) $BL = LC$; б) $AL \perp BC$.

362. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$. Проведите отрезок BD и докажите, что:

а) $AB = CD$; б) $BC = AD$; в) $\angle A = \angle C$.

363. Равны ли друг другу треугольники, изображенные на рисунке 154?

364. Чтобы измерить на местности расстояние между пунктами A и B, между которыми невозможно пройти (рис. 155), выбирают такую точку C, от которой можно пройти к A и B. Потом на прямых AC и BC откладывают отрезки $CT = AC$ и $CP = BC$. Расстояние PT равно AB. Почему?

365. Предыдущую задачу можно решить иным способом (рис. 156). Откладывают $\angle BCM = \angle BCA$ и $CM = CA$. Тогда $AB = BM$. Почему?

366. Через концы отрезка AB проведены параллельные прямые AC и BD, а через середину O отрезка AB — прямая, пересекающая прямые AC и BD в точках C и D. Найдите расстояние AC, если $BD = 8$ см.

367. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $OA = OC$. Докажите, что $\angle ABC = \angle ADC$ и $\angle BAD = \angle BCD$.

368. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Докажите, что $AC \parallel BD$.

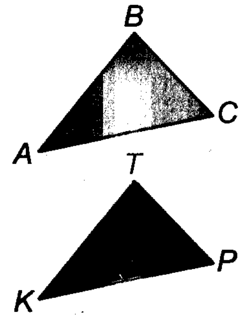


Рис. 154

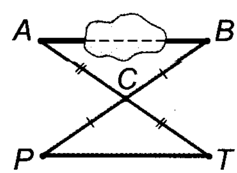


Рис. 155

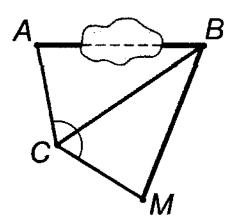


Рис. 156

Б

369. Докажите, что медианы равных треугольников, проведенные к равным сторонам, равны.

370. Докажите, что в равных треугольниках равны соответственные:

а) биссектрисы; б) высоты.

371. Все стороны шестиугольника $ABCDEF$ равны и все углы равны (рис. 157). Докажите, что треугольник ACE равносторонний.

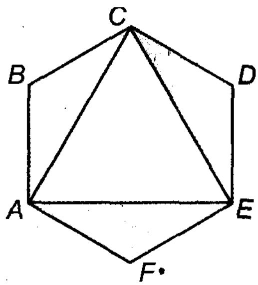


Рис. 157

372. На рисунке 158 $AD = CF$, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle DEF$.

373. Биссектриса AL треугольника ABC перпендикулярна к стороне BC. Докажите, что $AB = AC$.

374. Чтобы найти расстояние между пунктами A и X (рис. 159), на берегу реки отметили точки B и C так, чтобы выполнялись равенства $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Искомое расстояние AX равно AC. Почему?

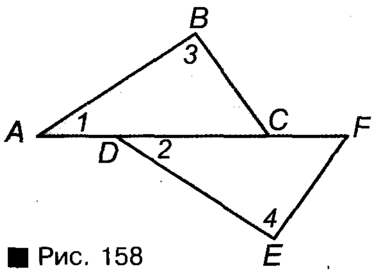


Рис. 158

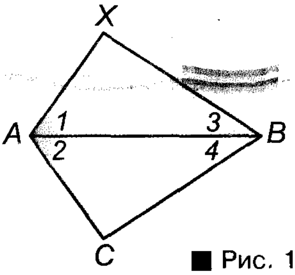


Рис. 159

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

375. Один из углов на 40° больше другого. Найдите эти углы, если смежные с ними углы относятся как 7 : 5.

376. Имеет ли треугольник равные стороны, если две его стороны относятся как 5 : 4, третья на 1 см больше их полусуммы, а периметр треугольника равен 28 см?

377. Чему равен угол между биссектрисами внутреннего и внешнего углов треугольника, взятых при одной вершине?

378. Сколькими способами можно разрезать прямоугольник на два равных прямоугольника? А на две равные фигуры?

379*. Как два равных квадрата разрезать на две равные части и сложить из них один квадрат?

• Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1°. Начертите остроугольный треугольник и проведите его медианы.

2°. Два угла треугольника равны 35° и 68°. Найдите 3-й угол.

3•. Периметр треугольника равен 35 см. Найдите длины его сторон, если одна из них длиннее второй на 3 см и короче третьей на 5 см.

4•. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, а BH — биссектриса. Докажите, что $\triangle ABH = \triangle CBH$.

Вариант 2

1°. Начертите прямоугольный треугольник и проведите его биссектрисы.

2°. Два угла треугольника равны 120° и 57°. Найдите 3-й угол.

3•. Найдите длины сторон треугольника, если одна из них длиннее на 8 м второй и на 5 м третьей, а периметр треугольника равен 50 м.

4•. В треугольнике KPT высота PM одновременно является биссектрисой. Докажите, что $\triangle KPM = \triangle TPM$.

Вариант 3

1°. Начертите тупоугольный треугольник и проведите его медианы.

2°. Два угла треугольника равны 87° и 56°. Найдите 3-й угол.

3•. Периметр треугольника равен 62 см. Найдите длины его сторон, если одна из них длиннее второй в 2 раза, а третьей — на 8 см.

4•. В треугольнике ABC углы A и C равны, а BM – высота. Докажите, что $\triangle ABM = \triangle CBM$.

Вариант 4

1°. Начертите произвольный треугольник и проведите все его высоты.

2°. Два угла треугольника равны 130° и 25°. Найдите 3-й угол.

3•. Периметр треугольника равен 85 м. Найдите длины его сторон, если одна из них короче второй в 2 раза, а третьей — на 1 м.

4•. В треугольнике KPT высота PH одновременно является и медианой. Докажите, что $\triangle KPH = \triangle TPH$.

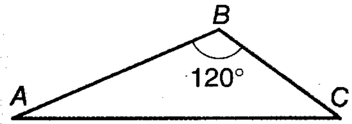
• Задачи по готовым рисункам

А | **Б**

1

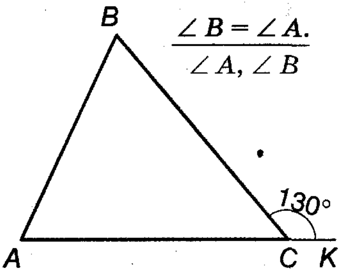
А. $\angle A = \frac{2}{3}\angle C.$

$\angle A,\ \angle C$



Б. $\angle B = \angle A.$

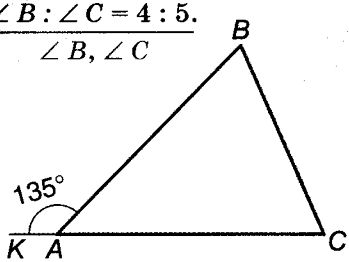
$\angle A,\ \angle B$



2

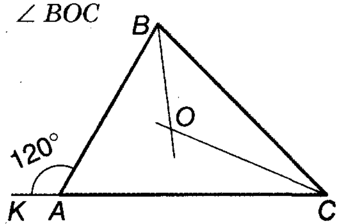
А. $\angle B : \angle C = 4 : 5.$

$\angle B,\ \angle C$



Б. BO, CO — биссектрисы.

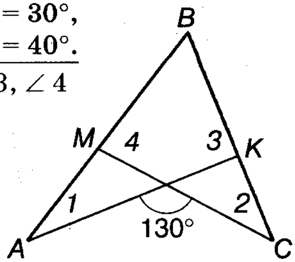
$\angle BOC$



3

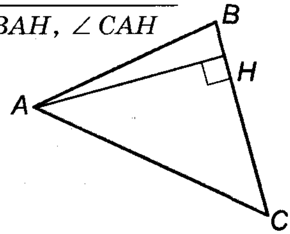
А. $\angle 1 = 30°,$
$\angle 2 = 40°.$

$\angle 3,\ \angle 4$



Б. $\angle CAB = \angle C = 50°.$

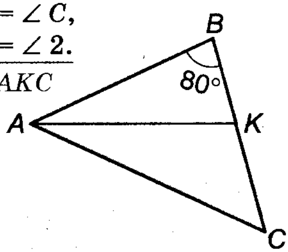
$\angle BAH,\ \angle CAH$



4

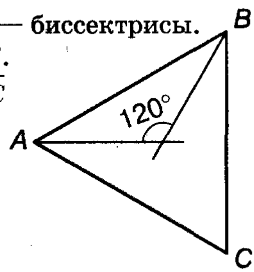
А. $\angle A = \angle C,$
$\angle 1 = \angle 2.$

$\angle AKC$



Б. AO, BO — биссектрисы.
$AB = BC.$

$\angle B,\ \angle C$



• *Вопросы и задания для самоконтроля*

1. Что такое треугольник?
2. Назовите элементы треугольника.
3. Какими бывают треугольники? Сформулируйте их определения.
4. Что такое биссектриса, медиана, высота треугольника?
5. Чем отличается биссектриса треугольника от биссектрисы угла?
6. Сформулируйте теорему о сумме углов треугольника.
7. Что такое внешний угол треугольника?
8. Сформулируйте теорему о внешнем угле треугольника.
9. Верно ли, что внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним?
10. Чему равна сумма углов четырехугольника?
11. Какие фигуры называют равными?
12. Каким знаком отношения обозначают равенство фигур?
13. Сформулируйте свойства равенства фигур.
14. Сформулируйте признак равенства двух окружностей.
15. Сформулируйте первый признак равенства треугольников.
16. Сформулируйте второй признак равенства треугольников.
17. Докажите признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними.
18. Докажите признак равенства треугольников по стороне и прилежащим к ней углам.
19. Сформулируйте признак равенства равносторонних треугольников.

Тестовые задания 3

1. Один из углов треугольника 40°, второй — на 20° больше. Третий угол равен:
а) 100°; б) 80°; в) 60°; г) 120°.

2. Внешние углы треугольника равны 100° и 120°. Найдите внутренний угол при третьей вершине.
а) 60°; б) 90°; в) 40°; г) 80°.

3. Углы треугольника пропорциональны числам 2, 3 и 5. Найдите наименьший угол треугольника.
а) 30°; б) 54°; в) 28°; г) 36°.

4. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Какой знак следует поставить вместо *: $\angle A * \angle A_1$?
а) <; б) =; в) >; г) ≠.

5. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Какой знак следует поставить вместо *: $AB * A_1B_1$?
а) <; б) >; в) =; г) ≠.

6. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 5$ см, $AC = 7$ см. Найдите BC, если периметр $\triangle A_1B_1C_1 = 21$ см.
а) 11 см; б) 19 см; в) 10 см; г) 9 см.

7. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. $\angle A = 70°$, $\angle B = 60°$. Найдите $\angle C_1$.
а) 50°; б) 90°; в) 30°; г) 70°.

Для выполнения заданий 8–10 воспользуйтесь условием: отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = BO$ и $CO = DO$.

8. Какой треугольник равен $\triangle AOC$?
а) ΔAOD; б) ΔBOD; в) ΔCOB; г) ΔCBD.

9. Какому углу равен $\angle OAC$?
а) $\angle ODB$; б) $\angle OBD$; в) $\angle BOD$; г) $\angle AOD$.

10. Какое утверждение ложно?
а) $AC = BD$; б) $AC \parallel BD$; в) $AB \parallel CD$; г) $AO = OB$.

Типовые задачи для контрольной работы

1°. Нарисуйте произвольный треугольник и проведите к его большей стороне медиану, биссектрису и высоту.

2°. Два угла треугольника равны 95° и 43°. Найдите меру третьего угла треугольника.

3°. Найдите углы треугольника ABC, если он равен треугольнику KPT, у которого $\angle K = 70°$, $\angle P = 50°$.

4°. Найдите периметр треугольника KLM, если $\triangle KLM = \triangle ABC$ и $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см.

5•. BK — высота $\triangle ABC$. Найдите AC, если $AK = 5$ см, $KC = 11$ см, $\angle A = 120°$.

6•. Отрезки AB и KP пересекаются в точке O так, что $OA = OB$, $OK = OP$. Докажите, что $\triangle AOP = \triangle BOK$.

7•. Изображенные на рисунке 160 треугольники ABC и AKC такие, что $\angle BAC = \angle KAC$ и $\angle BCA = \angle KCA$. Докажите, что $AB = AK$.

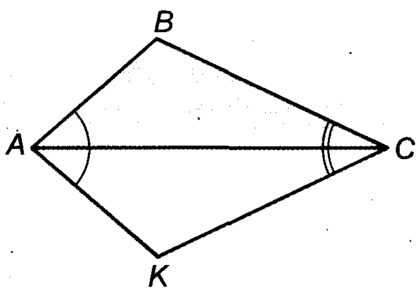


Рис. 160

8•. Найдите углы треугольника, если внешние его углы пропорциональны числам 3, 7 и 8.

9••. В треугольнике ABC проведены высоты AP и BH. Докажите, что $AP = BH$, если $PC = HC$.

10••. В треугольнике ABC проведены медианы AP и BH. Докажите, что $\triangle APC = \triangle BHC$, если $AC = BC$.

§ 13 Равнобедренный треугольник

Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Равные стороны равнобедренного треугольника называют *боковыми сторонами*, а третью его сторону — *основанием*.

Треугольник, не являющийся равнобедренным, называют *разносторонним*. Треугольник, у которого все стороны равны, называют *равносторонним*. Это отдельный вид равнобедренного треугольника (рис. 161).

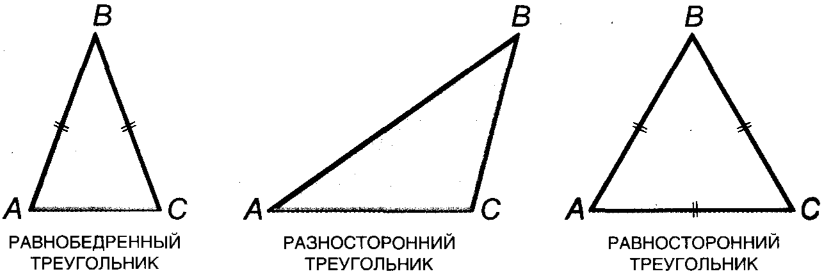


Рис. 161

! ТЕОРЕМА 12 В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, а биссектриса, проведенная к основанию, является и медианой, и высотой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием BC (рис. 162). Биссектриса AL разбивает его на треугольники ABL и ACL. Поскольку $AB = AC$, AL — общая сторона, $\angle BAL = \angle CAL$, то по двум сторонам и углу между ними $\triangle ABL = \triangle ACL$. Из равенства этих треугольников следует:

а) $\angle B = \angle C$, то есть углы при основании $\triangle ABC$ равны;

б) $BL = CL$, то есть AL — медиана $\triangle ABC$;

в) $\angle ALB = \angle ALC = 90°$, то есть AL — высота $\triangle ABC$. □

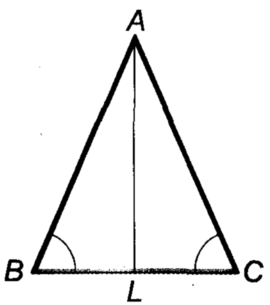


Рис. 162

ТЕОРЕМА 12 **Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть в $\triangle ABC$ $\angle B = \angle C$ (рис. 162). Докажем, что $AB = AC$.

Проведем биссектрису AL. Она делит данный треугольник на два: $\triangle ABL$ и $\triangle ACL$. У них $\angle B = \angle C$ и $\angle BAL = \angle CAL$, поэтому $\angle ALB = \angle ALC$. По стороне AL и прилежащим к ней углам $\triangle BAL = \triangle CAL$. Следовательно, $AB = AC$. □

Из теорем 9 и 10 вытекает такое следствие.

В треугольнике против равных сторон лежат равные углы, а против равных углов — равные стороны.

Для любознательных

Равнобедренный — это имеющий равные бедра. Равные стороны — словно ноги.

Как соотносятся между собой *треугольники* и *равнобедренные треугольники*? Равнобедренные треугольники составляют только часть всех треугольников. Говорят, что объем понятия «треугольники» больше объема понятия «равнобедренные треугольники». Такие соотношения принято наглядно изображать диаграммами Эйлера (рис. 163). Те треугольники, которые не являются равнобедренными, называют *разносторонними* треугольниками. Следовательно, общее понятие «треугольники» можно разделить на два класса: треугольники равнобедренные и треугольники разносторонние (рис. 164):

Рис. 163

Рис. 164

? Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какой треугольник называют равнобедренным?
2. Как называют стороны равнобедренного треугольника?
3. Сформулируйте свойства равнобедренного треугольника.
4. Какой треугольник называют равносторонним?
5. Как соотносятся понятия *треугольники* и *равнобедренные треугольники*?

● *Решаем вместе*

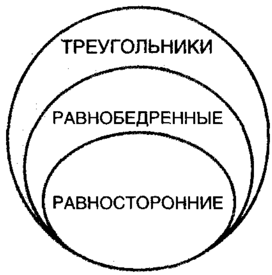
1 Две стороны равнобедренного треугольника равны соответственно 2 см и 6 см. Найдите длину третьей его стороны.

■ Основание данного треугольника не может быть равно 6 см, поскольку 2 см + 2 см < 6 см. Следовательно, речь идет о треугольнике с основанием 2 см и боковыми сторонами по 6 см.

Ответ. 6 см.

2 Покажите на диаграмме соотношения между понятиями: треугольники, равнобедренные треугольники и равносторонние треугольники.

■ Равносторонний треугольник является одновременно и равнобедренным треугольником. Следовательно, соотношения между названными видами треугольников можно изобразить схематически, как на рисунке 165.



■ Рис. 165

● ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

380. Докажите, что угол при основании равнобедренного треугольника не может быть прямым.

381. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°. Найдите угол при основании.

382. Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен углу при основании.

183. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите угол при вершине.

184. Стороны равнобедренного треугольника равны 5 см и 10 см. Какая из них — основание?

185. Найдите периметр равнобедренного треугольника, если его основание равно 10 см, а боковая сторона 20 см.

А

186. Основание равнобедренного треугольника равно 15 см, а боковая сторона 26 см. Найдите периметр треугольника.

187. Периметр равнобедренного треугольника равен 12 см, а боковая сторона 5 см. Найдите основание.

188. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 80°. Найдите углы при основании.

189. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30°. Найдите угол при вершине.

190. Найдите углы равнобедренного треугольника, если:

а) один из них на 30° больше другого;

б) один из них вдвое больше другого.

Рассмотрите два варианта.

191*. Докажите, что если какой-нибудь угол равнобедренного треугольника равен 60°, то этот треугольник равносторонний.

192. Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

193. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 80°. Найдите угол между:

а) основанием и биссектрисой, проведенной к боковой стороне;

б) боковой стороной и биссектрисой, проведенной к ней;

в) основанием и высотой, проведенной к боковой стороне.

194. Периметр равнобедренного треугольника равен 50 см. Найдите его стороны, если они пропорциональны числам:

а) 1, 2 и 2;

б) 3, 3 и 4.

195. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 30°. Найдите угол между высотами, проведенными к боковым сторонам.

396. Если медиана треугольника является его высотой, то такой треугольник равнобедренный. Докажите.

397. Если высота треугольника является его биссектрисой, то такой треугольник равнобедренный. Докажите.

398. В $\triangle ABC$ $AB = BC$, $\angle B = 36°$, AK — биссектриса. Докажите, что $BK = KA = AC$.

Б

399. В $\triangle ABC$ $AB = BC$. Найдите длину медианы BD, если периметры треугольников ABD и ABC равны соответственно 40 см и 50 см.

400. Докажите, что в каждом равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, равны.

401. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке M так, что $AM = MD$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle DCB$.

402. Найдите стороны равнобедренного треугольника, если одна из них меньше периметра на 30 см, а другая — на 40 см.

403. Докажите, что сумма двух неравных углов равнобедренного треугольника превышает 90°.

404. Найдите углы равнобедренного треугольника, если:

а) сумма двух из них равна 60°;
б) сумма двух из них равна 150°;
в) один из его внешних углов равен 15°;
г) один из его внешних углов равен 115°.

405. Сформулируйте и докажите признаки равенства равнобедренных треугольников:

а) по основанию и прилежащему к нему углу;
б) по основанию и противолежащему углу;
в) по боковой стороне и углу при основании.

406. Найдите периметр равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b.

407. а) Найдите основание равнобедренного треугольника, если его периметр $2p$, а боковая сторона b;

б) Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если его периметр $2p$, а основание b.

408. Докажите, что в равностороннем треугольнике:

а) все медианы равны;
б) все высоты равны;
в) все биссектрисы равны.

409. Покажите, что равносторонний треугольник можно разрезать на 4 равных равносторонних треугольника.

410. Как можно разрезать равносторонний треугольник на три равных равнобедренных треугольника?

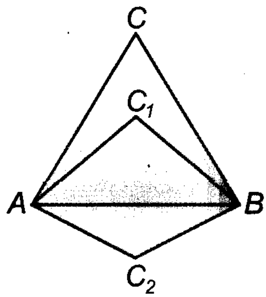


Рис. 166

411. Как расположены вершины всех равнобедренных треугольников, имеющих общее основание (рис. 166)?

412. Приложив друг к другу два равнобедренных треугольника с углом 100°, получили четырехугольник. Определите углы четырехугольника.

Практическое задание

413. Вырежьте из бумаги остроугольный, прямоугольный и тупоугольный равнобедренные треугольники. Сгибая их по биссектрисе угла при вершине, повторите доказательство теоремы 12.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

414. Найдите меру угла, если его биссектриса со стороной образует угол 48°.

415. Найдите меры двух смежных углов, если они пропорциональны числам: а) 1 и 2; б) 2 и 3.

416. Найдите периметр равностороннего треугольника, если он на 4 см больше стороны.

417. Среднее арифметическое всех сторон треугольника равно 10 дм. Чему равен его периметр?

418. Перерисуйте в тетрадь фигуру, изображенную на рисунке 167, и проведите прямую так, чтобы она разрезала закрашенную фигуру на две части равных площадей.

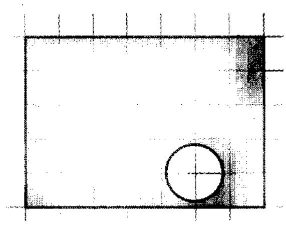


Рис. 167

§ 14 Третий признак равенства треугольников

Вам уже известны два признака равенства треугольников. Зная свойства равнобедренного треугольника, можно доказать еще один признак.

ТЕОРЕМА 14 (третий признак равенства треугольников). **Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.**

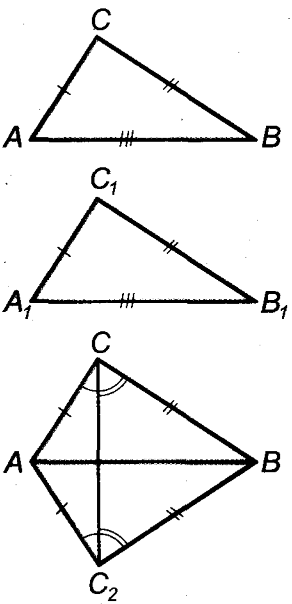


Рис. 168

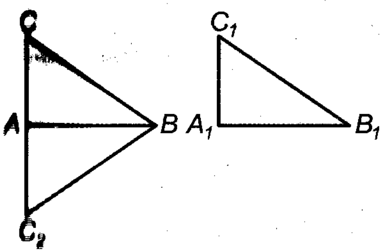
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$ (рис. 168). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

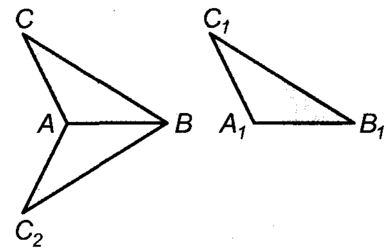
Приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к треугольнику ABC так, чтобы вершина A_1 совпала с A, B_1 — с B, а C_1 и C оказались по разные стороны от прямой AB. Тогда $\triangle A_1B_1C_1$ займет положение $\triangle ABC_2$. Проведя отрезок CC_2, получим равнобедренные треугольники CAC_2 и CBC_2, так как $AC = AC_2$ и $BC = BC_2$. В этих треугольниках углы при основаниях равны: $\angle ACC_2 = \angle AC_2C$, $\angle BCC_2 = \angle BC_2C$. Следовательно, равны также углы ACB и AC_2B. Поэтому по двум сторонам и углу между ними $\triangle ABC = \triangle ABC_2$. По построению $\triangle ABC_2 = \triangle A_1B_1C_1$. Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать. □

ПРИМЕЧАНИЕ.

Мы рассмотрели случай, когда отрезки AB и CC_2 пересекаются. Для случаев, когда эти отрезки не пересекаются, в доказательстве теоремы требуется кое-что изменить. Предлагаем вам рассмотреть эти случаи самостоятельно, используя рисунки 169 и 170.



■ Рис. 169



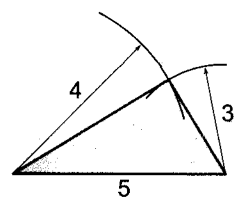
■ Рис. 170

Третий признак равенства треугольников утверждает, что тремя сторонами треугольник задается однозначно. Представим, что каждый семиклассник построил в тетради треугольник, стороны которого равны, например, 3 см, 4 см и 5 см. Один отложил сначала наибольший отрезок, а из его концов провел дуги радиусами 4 см и 5 см (рис. 171). Другой сначала отложил наименьший из данных отрезков и т. д. Хотя строили они разными способами, но в результате получили равные треугольники.

Вспомнив два других признака равенства треугольников, можно сделать такой вывод.

Треугольник определяется (задается) однозначно:

1) *двумя сторонами и углом между ними;*
2) *стороной и двумя прилежащими углами;*
3) *тремя сторонами.*



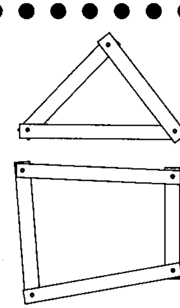
■ Рис. 171

■ *ПРИМЕЧАНИЕ.*

В пункте 2) речь идет об углах, сумма которых меньше 180°, а в пункте 3) — о трех отрезках, каждый из которых меньше суммы двух других.

Для любознательных

Третий признак равенства треугольников свидетельствует о том, что треугольник — *фигура жесткая*. Чтобы лучше понять, о чем идет речь, представьте сбитые гвоздями из отдельных планок треугольник и четырехугольник (рис. 172). Такой четырехугольник нетрудно деформировать: изменить углы, не меняя длин сторон. Треугольник так деформировать нельзя. *Три стороны треугольника*



■ Рис. 172

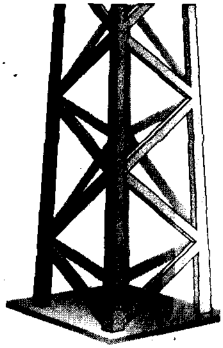


Рис. 173

однозначно определяют его углы! Так же, зная две стороны треугольника и угол между ними, можно однозначно определить третью сторону и два других угла; зная сторону и два прилежащих к ней угла, можно определить две другие стороны и т. д. Как это сделать, узнаете в старших классах.

Зная, что из всех многоугольников только треугольник — фигура жёсткая, ажурные конструкции изготавливают так, чтобы они имели как можно больше треугольников (рис. 173).

? Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте третий признак равенства треугольников.
2. Сформулируйте первый и второй признаки равенства треугольников.
3. Как вы понимаете выражение «треугольник задается тремя его сторонами»?
4. Какими элементами определяется треугольник?
5. Как следует понимать, что *треугольник — фигура жесткая*?

Решаем вместе

1 Докажите, что если в четырехугольнике противоположные стороны равны, то и противолежащие углы равны.

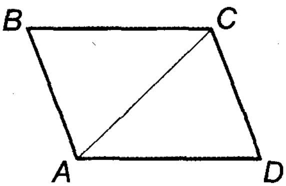
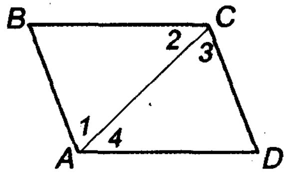


Рис. 174

Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$ и $BC = AD$ (рис. 174). Проведем отрезок AC, в результате образуются два треугольника ABC и CDA. Они равны по трем сторонам, поскольку $AB = CD$ и $BC = AD$, а сторона AC у них общая. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle CDA$. А в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы. Поэтому $\angle B = \angle D$.

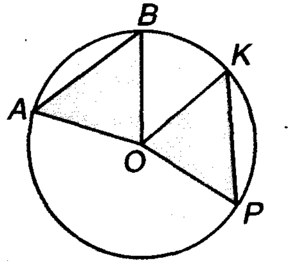
Равенство углов BAD и BCD можно доказать двумя способами: либо показать, что каждый из них состоит из двух равных углов $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$ (рис. 175), либо проведя отрезок BD.



■ Рис. 175

На окружности с центром O обозначены точки A, B, K и P такие, что $AB = KP$ (рис. 176). Докажите, что $\triangle AOB = \triangle KOP$.

■ Проведя в данные точки радиусы, получим треугольники AOB и KOP. Они равны по трем сторонам, поскольку $AB = KP$ по условию и $OA = OB = OK = OP$ — как радиусы. Поэтому $\triangle AOB = \triangle KOP$.



■ Рис. 176

● ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

419. $\triangle ABC = \triangle KPT$. Найдите периметр треугольника KPT, если:

а) каждая сторона $\triangle ABC$ равна 5 см;

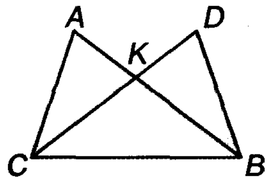
б) $AB = BC = 3$ дм, $AC = 4$ дм.

420. На рисунке 177 $AB = CD$ и $AC = BD$. Докажите, что:

а) $\angle A = \angle D$;

б) $BK = CK$;

в) $\angle ACK = \angle DBK$.



■ Рис. 177

А

421. Точка O равноудалена от вершин A, B и C равностороннего треугольника. Докажите, что:

$\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC$;

$\angle OAB = \angle OBC = \angle OCA$.

422. Если каждая сторона четырехугольника параллельна противоположной стороне, то его противолежащие углы равны. Докажите.

423. Если отрезки AO и OB равны, а точка X равноудалена о A и B, то точка X лежит на прямой, которая делит уго AOB пополам. Докажите.

424. Если M — произвольная точка высоты BH треугольник ABC, в котором $AB = BC$, то: а) $MA = MC$; б) $\triangle ABM = \triangle CBM$; в) $\triangle AMH = \triangle CMH$. Докажите.

425. Прикладывая два равных треугольника с углами 30° и 70 равными сторонами, можно получить несколько разны четырехугольников. Изобразите их на рисунке, опреде лите углы полученных четырехугольников.

426. Докажите, что когда основание и боковая сторона одног равнобедренного треугольника равны соответственн основанию и боковой стороне другого равнобедренного тре угольника, то такие треугольники равны.

427. Докажите, что когда сторона одного равностороннего тре угольника равна стороне другого равностороннего треуголь ника, то такие треугольники равны.

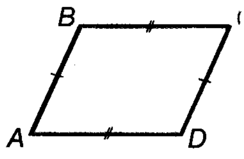
428. На окружности с центром O обозначены точки A, B и такие, что $AB = BC = CA$. Докажите, что:

а) $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCA$;
б) $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$;
в) $\angle OAB = \angle OBC = \angle OCA = 30°$.

Б

429. На окружности с центром O обозначены точки A, B и C такие, что $AB = BC = CA$, а AM — диаметр. Докажите, что:

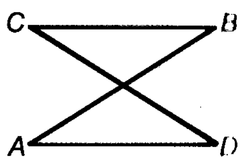
а) $BM = CM$;
б) $\angle OBM = \angle OCM$.



■ Рис. 178

430. Докажите равенство двух треугольников по двум данным сторонам и медиане, проведенной к одной из них.

431. Замкнутая ломаная $ABCDA$ такая, что $AB = CD$ и $AD = BC$. Докажите, что $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$. Рассмотрите два варианта (рис. 178, 179).



■ Рис. 179

432. Попробуйте обобщить задачу 431 для случая, когда данная ломаная не лежит в одной плоскости (рис. 180).

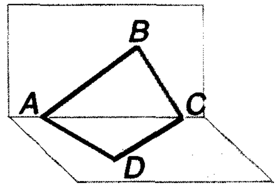


Рис. 180

433. Равнобедренные треугольники APC и ABC имеют общее основание AC. Прямая PB пересекает его в точке O. Докажите, что:

а) $\angle PAB = \angle PCB$;
б) $AO = OC$;
в) $AC \perp BP$.

434. Из каждых ли четырех равных треугольников можно сложить один треугольник? Покажите на рисунке.

435. Равносторонними треугольниками, будто паркетинами, можно выложить всю плоскость (рис. 181). Можно ли выложить плоскость равными неравносторонними треугольниками? Если можно — покажите на рисунке.

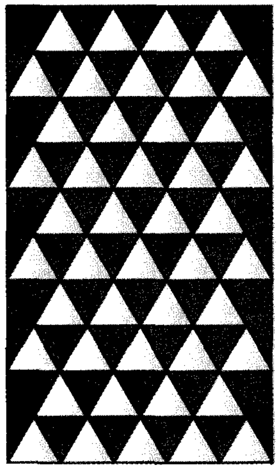


Рис. 181

436. Два равных разносторонних треугольника ABC и KPT можно совместить лишь одним способом. Два равных равнобедренных треугольника — двумя способами, совмещая сторону AB с KP или с TP. Сколькими способами можно совместить два равных равносторонних треугольника?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

437. Найдите углы треугольника, если они пропорциональны числам 2, 3 и 4.

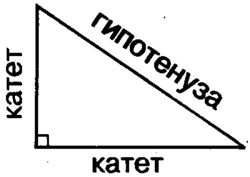
438. Найдите среднее арифметическое углов треугольника.

439. Среднее арифметическое сторон треугольника равно 20 см. Найдите его периметр.

440. Полупериметр треугольника равен p. Найдите среднее арифметическое его сторон.

441. Докажите, что сумма углов четырехугольника равна 360°. Найдите среднее арифметическое его углов.

§ 15 Прямоугольный треугольник



■ Рис. 182

Треугольник называется *прямоугольным*, если один из его углов прямой. Сумма двух других его углов равна 90°, поскольку 180° − 90° = 90°.

Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, — это *гипотенуза*, две другие его стороны — *катеты* (рис. 182). На рисунке прямой угол иногда обозначают квадратиком. В каждом прямоугольном треугольнике гипотенуза больше каждого из катетов.

Позже нам будут необходимы признаки равенства прямоугольных треугольников. Из первого и второго признаков равенства треугольников (§ 12) непосредственно следуют такие признаки.

! **Два прямоугольных треугольника равны, если:**

1) катеты одного из них равны соответственно катетам другого;

2) катет и прилежащий острый угол одного треугольника равны соответственно катету и прилежащему острому углу другого;

3) гипотенуза и прилежащий угол одного треугольника равны соответственно гипотенузе и прилежащему углу другого.

Еще один признак равенства прямоугольных треугольников требует доказательства.

! ТЕОРЕМА 15 **Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника равны соответственно катету и гипотенузе другого, то такие треугольники равны.**

■ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы C и C_1 прямые и $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 183). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Приложим $\triangle A_1B_1C_1$ к $\triangle ABC$ так, чтобы вершина A_1 совместилась с A, C_1 — с C, а $\triangle A_1B_1C_1$ занял положение $\triangle AB_2C$. Поскольку углы C и C_1 прямые, то точки B, C и B_2 расположатся

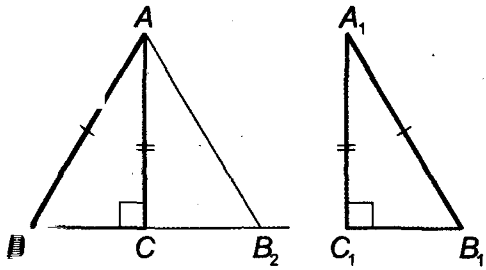


Рис. 183

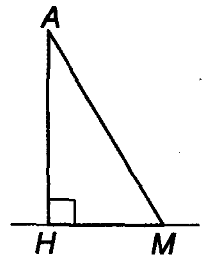


Рис. 184

на одной прямой. $\triangle ABB_2$ — равнобедренный, $\angle B = \angle B_2 = \angle B_1$. Тогда и $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, в данных треугольниках между соответственно равными сторонами $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$ лежат равные углы A и A_1. По первому признаку равенства треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ равны.□

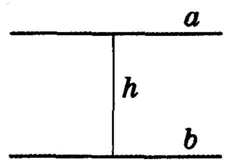


Рис. 185

Введем еще несколько важных понятий, связанных с прямоугольным треугольником. Если AHM — прямоугольный треугольник с прямым углом H, то его катет AH — *перпендикуляр*, проведенный из точки A к прямой HM (рис. 184). Гипотенузу AM называют также *наклонной*, проведенной из точки A к прямой HM, а катет HM — *проекцией* этой наклонной на прямую HM.

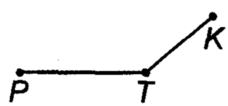


Рис. 186

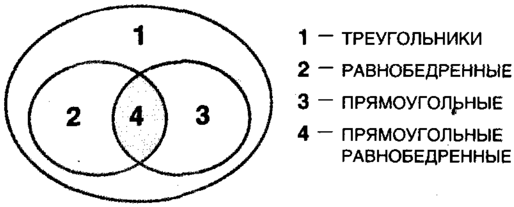
Длину перпендикуляра AH называют также *расстоянием* от точки A до прямой HM. Вообще, расстояние между двумя геометрическими фигурами — это расстояние между их ближайшими точками (если такие точки существуют). Например, расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине перпендикуляра, проведенного из какой-либо точки одной прямой к другой прямой (рис. 185). А расстояние от точки K до отрезка PT (рис. 186) равно KT.

Для любознательных

Прямоугольные треугольники составляют только часть всех треугольников. Если у треугольника нет прямого угла, его называют *непрямоугольным* треугольником. Таким образом, в зависимости от того, есть у треугольника прямой угол или его нет, все треугольники можно разделить на два класса. Схематически это деление можно изобразить рисунком 187.

Если катеты прямоугольного треугольника равны, то он одновременно является и равнобедренным треугольником. Соотношение между такими видами треугольников показано на рисунке 188.

■ Рис. 187



■ Рис. 188

Прямоугольные треугольники в геометрии играют важную роль, поскольку любой треугольник можно разрезать на два прямоугольных треугольника, а для каждого прямоугольного треугольника истинна знаменитая теорема Пифагора: **квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов**. Подробнее о теореме Пифагора, а также о применении свойств прямоугольных треугольников вы узнаете в 8 классе.

? Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте определение прямоугольного треугольника.
2. Как называют стороны прямоугольного треугольника?
3. Сформулируйте и докажите признаки равенства прямоугольных треугольников.
4. Что такое перпендикуляр, наклонная и проекция наклонной?
5. Что такое расстояние от точки до прямой?
6. Что такое расстояние между фигурами?

• *Решаем вместе*

Докажите, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.

■ Пусть в $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$ и $\angle A = 30°$ (рис. 189). Докажем, что $BC = 0{,}5\,AB$.

На прямой BC отложим отрезок CD, равный CB, и проведем отрезок AD. По двум катетам $\triangle BCA = \triangle DCA$. Поскольку $\angle BAD = 60°$, то $\angle B = \angle D = (180° - 60°) : 2 = 60°$. Следовательно, все углы $\triangle ABD$ равны по 60°. Таким свойством обладает только равносторонний треугольник. Поскольку $BD = AB$ и $BC = CD$, то $BC = 0{,}5\,AB$.

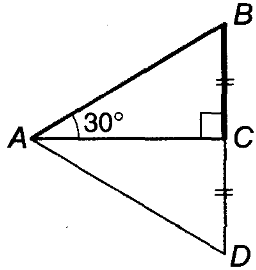


Рис. 189

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

442. Найдите углы прямоугольного треугольника, если один из них равен: а) 30°; б) 45°; в) 70°.

443. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если один из них больше другого: а) вдвое; б) в 9 раз; в) на 30°.

444. Стороны прямоугольного треугольника равны 3 м, 4 м и 5 м. Какая из них является гипотенузой?

445. Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

А

446. Один из острых углов прямоугольного треугольника на 10° больше другого. Найдите эти углы.

447. Углы треугольника пропорциональны числам 3, 5 и 8. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

448. Один из углов треугольника на 30° больше второго и на 30° меньше третьего. Чему равны углы этого треугольника?

449. Докажите, что биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника пересекаются под углом 45°.

450. Найдите углы прямоугольного треугольника, если его высота, проведенная из вершины прямого угла, образует с катетом угол 50°.

451. Из точки D, лежащей на биссектрисе угла B, к сторонам угла проведены перпендикуляры DA и DC. Докажите, что $DA = DC$.

452. Точка B лежит на внутреннем луче угла A; BK и BM — равные перпендикуляры к сторонам угла. Докажите, что AB — биссектриса угла A.

453. Прямая m пересекает отрезок AB в его середине O. Докажите, что точки A и B равноудалены от прямой m.

454. По рисунку 190 объясните, как можно вычислить ширину реки, используя свойства прямоугольного равнобедренного треугольника.

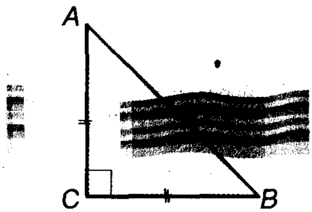


Рис. 190

455. Прямоугольные треугольники ABC и A_1B_1C расположены так, как показано на рисунке 191. Найдите меру угла ACA_1, если $\angle BCB_1 = \alpha$ (греческая буква «альфа»).

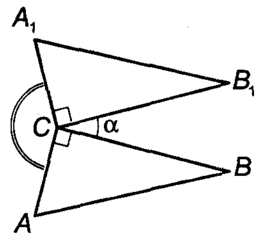


Рис. 191

456. **Если катет и противолежащий угол одного треугольника равны соответственно катету и противолежащему углу другого, то такие треугольники равны.** Докажите.

457. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, $AB = 32$ см. Найдите AC.

Б

458. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное сформулированому в задаче, решенной на с. 118–119.

459. В $\triangle ABC$ $AB = 18$ см, $\angle B = 30°$, $\angle C = 90°$. Найдите:

а) расстояние от точки A до прямой CB;
б) проекцию наклонной AB на прямую AC.

460. В $\triangle ABC$ $\angle A = \angle B = 45°$, $AB = 19$ см. Найдите:

а) расстояние от точки C до прямой AB;
б) проекцию отрезка AC на прямую AB.

461. Найдите расстояние между параллельными прямыми, если от секущей, пересекающей их под углом 30°, прямые отсекают отрезок длиной 54 см.

462. Найдите углы прямоугольного треугольника, если биссектрисы двух его углов пересекаются под углом 70°.

463. Могут ли биссектрисы двух углов прямоугольного треугольника пересекаться под углом 40°?

464. Зная, что все стороны квадрата равны и все углы прямые, докажите, что квадрат $ABCD$ отрезками AC и BD разбивается на 4 равных прямоугольных равнобедренных треугольника.

465. Постройте на координатной плоскости треугольники с вершинами A (0; 1), B (2; 3), C (0; 3) и с вершинами K (1; 0), P (3; 0), T (3; 1). Равны ли эти треугольники?

466. Медиана какого треугольника разбивает его на два меньших треугольника, равных друг другу?

467. CM — высота прямоугольного равнобедренного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе. Найдите AB, если $CM = m$.

468. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 20 см, $\angle B = 30°$, CK — высота. Найдите AK.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

469. Сформулируйте какой-либо признак равенства равнобедренных треугольников и попробуйте его доказать.

470. $\triangle ABC = \triangle MNK$, $\angle A = 70°$, $\angle B = 80°$. Найдите углы $\triangle MNK$.

471. Существует ли треугольник, углы которого равны 91°, 52° и 44°?

472. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = CO$, а углы треугольника AOD пропорциональны числам 2, 3 и 5. Найдите углы треугольника COB.

473. Перерисуйте в тетрадь фигуру с рисунка 192 и проведите прямую так, чтобы она разрезала закрашенную фигуру на две части равных площадей.

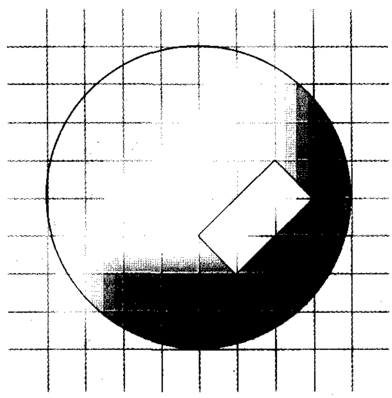


Рис. 192

§ 16 Неравенства треугольника

Вы уже знаете, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон. Чтобы доказать это утверждение как теорему, сначала рассмотрим другую теорему.

ТЕОРЕМА 16 **В каждом треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла — большая сторона.**

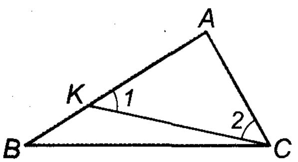


Рис. 193

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше AC. Покажем, что угол C больше угла B (рис. 193). Отложим на стороне AB отрезок AK, равный AC. Поскольку отложенный отрезок короче AB, то точка K лежит между A и B, а $\angle ACK$ является частью угла ACB. Углы AKC и ACK равны, то есть $\angle 1 = \angle 2$, поскольку $\triangle KAC$ равнобедренный. $\angle 1$ больше $\angle B$, поскольку является внешним для треугольника BKC. Следовательно, весь угол C больше $\angle 2$, а $\angle 2$ больше $\angle B$. Этим мы доказали, что если в треугольнике $AB > AC$, то $\angle C > \angle B$.

2) Пусть в $\triangle ABC$ угол C больше угла B.

Докажем, что тогда $AB > AC$.

Стороны AB и AC не могут быть равными, потому что тогда данный треугольник был бы равнобедренным и один из его углов при основании не мог бы быть больше другого.

Не может сторона AB быть и меньше AC, поскольку тогда угол C был бы меньше угла B. А поскольку сторона AB не равна AC и не меньше AC, то она больше AC. □

СЛЕДСТВИЯ.

1. В каждом прямоугольном треугольнике гипотенуза длиннее каждого катета.

2. Перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки к прямой, короче любой наклонной, проведенной из этой же точки к той же прямой.

3. Проекция наклонной всегда меньше наклонной.

ТЕОРЕМА 17 **Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим произвольный $\triangle ABC$ и покажем, что $AB < BC + CA$ (рис. 194).

Для доказательства отложим на продолжении стороны AC отрезок CP, равный BC, и рассмотрим треугольник ABP. Углы CBP и CPB равны, так как $CB = CP$. Угол ABP больше $\angle P$. А поскольку против большего угла лежит большая сторона, то $AB < AP$. Учитывая, что

$$AP = AC + CP = AC + CB, \text{ получим } AB < AC + CB.$$

Так же можно показать, что $BC < CA + AB$, $AC < CB + BA$. □

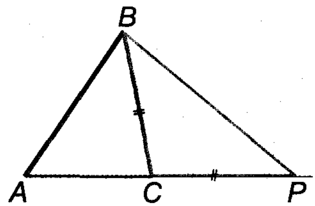


Рис. 194

Из доказанной теоремы следует такое утверждение.

Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то верны неравенства:

$$AB < BC + CA,\ BC < CA + AB,\ AC < CB + BA.$$

Каждое из этих трех неравенств называют *неравенством треугольника*.

Для любознательных

Если точки A, B, C лежат на одной прямой, то одно из приведенных выше неравенств преобразуется в равенство, а два других остаются верными. Например, когда точка C лежит между A и B (рис. 195), то верны такие соотношения:

$$AB = BC + CA,\ BC < CA + AB,\ CA < AB + BC.$$

Учитывая вышеизложенное, можно сделать следующий вывод.

Как бы ни были расположены три точки A, B, C, всегда:

$$AB \le BC + CA,\ BC \le CA + AB,\ CA \le AB + BC.$$

Из трех расстояний между любыми тремя точками каждое не превышает суммы двух других.

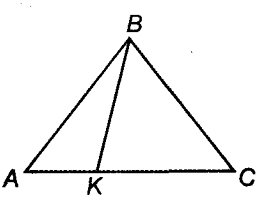
Рис. 195

? Вопросы и задания для самоконтроля

1. Верно ли, что в треугольнике против меньшей стороны лежит меньший угол, а против меньшего угла — меньшая сторона?
2. Сформулируйте неравенства треугольника XYZ.
3. Что означает выражение «точка B лежит между A и C»?
4. Как связаны между собой расстояния между точками A, B и C, если B лежит между A и C?
5. Сформулируйте свойства расстояний между произвольными точками A, B и C.

● *Решаем вместе*

1 Докажите, что отрезок, соединяющий вершину равнобедренного треугольника с произвольной внутренней точкой основания, короче боковой стороны треугольника.

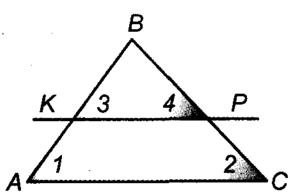


■ Рис. 196

■ Пусть AC — основание произвольного равнобедренного треугольника ABC, а K — произвольная внутренняя точка его основания (рис. 196). Покажем что, $BK < AB$.

Угол AKB — внешний в $\triangle KBC$, поэтому $\angle AKB > \angle C$. Поскольку $\angle C = \angle A$, то $\angle AKB > \angle A$. Следовательно, в $\triangle ABK$ сторона BK лежит против меньшего угла, чем тот, против которого лежит сторона AB. Таким образом, $BK < AB$.

2 Прямая KP, пересекающая $\triangle ABC$, параллельна AC (рис. 197). Какая из сторон, AB или BC, данного треугольника больше, если $BK < BP$?



■ Рис. 197

■ Пронумеруем некоторые углы, как показано на рисунке 197. Соответственные углы при параллельных прямых и секущей равны, поэтому $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$. Поскольку в $\triangle BKP$ $BK < BP$, то $\angle 4 < \angle 3$, тогда и $\angle 2 < \angle 1$.

Следовательно, $AB < BC$.

● ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

474. Посмотрев на рисунок 198, сравните стороны AB и BC треугольника ABC, если:

1) $\angle A < \angle C$; 2) $\angle A > \angle C$;
3) $\angle A = \angle C$; 4) $\angle A \leq \angle C$;
5) $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$;
6) $\angle B = 80°$, $\angle C = 40°$.

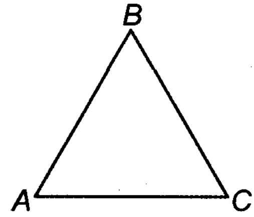


Рис. 198

475. Докажите, что если каждую сторону равнобедренного треугольника увеличить, например, на 1 м, то полученный треугольник тоже будет равнобедренный.

476. Можно ли каждый угол треугольника увеличить, например, на 10°?

А

477. Какая из сторон $\triangle ABC$ наибольшая и какая наименьшая, если:

1) $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$;
2) $\angle A = 50°$, $\angle B = 100°$;
3) $\angle B = 75°$, $\angle C = 90°$?

478. Какой угол $\triangle KPT$ наибольший и какой наименьший, если:

1) $AB = 3$ м, $BC = 4$ м, $AC = 5$ м;
2) $AB - BC = 2$ м, $BC - AC = 1$ м?

479. Может ли основание равнобедренного треугольника быть вдвое длиннее боковой стороны? А вдвое короче?

480. Может ли каждый угол треугольника быть меньше 60°?

481. Существует ли треугольник, каждый угол которого больше 60°?

482. Докажите, что высота треугольника не больше медианы, проведенной из той же вершины.

Б

483. Может ли одна сторона треугольника быть равной половине его периметра?

484. Докажите, что каждая сторона треугольника меньше половины его периметра.

485. Может ли сумма двух сторон треугольника быть равной половине его периметра?

486. Докажите, что каждая сторона треугольника больше половины разности двух других его сторон.

487. Существует ли треугольник, одна сторона которого равна разности двух других?

488. В треугольнике ABC стороны AB и AC равны соответственно 5 см и 8 см. Чему равна сторона BC?

489. Докажите, что каждая сторона четырехугольника меньше суммы трех других сторон.

490. Две стороны треугольника равны 98 см и 28 см. Каким может быть периметр этого треугольника?

491. Сумма двух равных сторон треугольника составляет 0,6 его периметра. Верно ли, что угол между равными сторонами больше 60°?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

492. Найдите меры двух смежных углов, если их разност равна 30°.

493. Сумма двух углов, образованных пересечением двух пря мых, равна 200°. Найдите меры двух других углов.

494. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием A биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Дока жите, что треугольник AOC также равнобедренный.

495. Докажите, что когда биссектриса внешнего угла тре угольника параллельна стороне треугольника, то тако треугольник равнобедренный.

496. Докажите, что прямая, параллельная любой стороне ра нобедренного треугольника, отсекает от него равнобедре ный треугольник.

• Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1°. Сформулируйте определение равнобедренного треугольника.

2°. $\triangle ABC$ — прямоугольный ($\angle C = 90°$). Найдите $\angle A$, если $\angle B = 70°$.

3•. Точки K и P — середины боковых сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC. Докажите, что $\triangle AKC = \triangle APB$.

4•. Найдите углы треугольника, если один из них вдвое больше другого и на $40°$ меньше третьего.

Вариант 2

1°. Сформулируйте определение прямоугольного треугольника.

2°. $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = BC$). Найдите $\angle A$, если $\angle B = 70°$.

3•. Точки K и P — середины боковых сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC. Докажите, что $\triangle KBC = \triangle PCB$.

4•. Найдите углы треугольника, если один из них вдвое меньше другого и на $12°$ больше третьего.

Вариант 3

1°. Сформулируйте свойство углов равнобедренного треугольника.

2°. $\triangle ABC$ — прямоугольный ($\angle C = 90°$) и равнобедренный. Найдите $\angle B$.

3•. Точки K и M лежат на основании AC равнобедренного треугольника ABC. $\angle BKA = \angle BMC$. Докажите, что $BK = BM$.

4•. Найдите углы треугольника, если один из них втрое больше другого и на $40°$ меньше третьего.

Вариант 4

1°. Сформулируйте один из признаков прямоугольного треугольника.

2°. $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = BC$). Найдите $\angle B$, если $\angle C = 50°$.

3•. Точки K и M лежат на основании AC равнобедренного треугольника ABC, $\angle BKA = \angle BMC$. Докажите, что $AK = CM$.

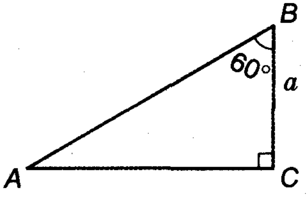
4•. Найдите углы треугольника, если один из них втрое меньше другого и на $5°$ больше третьего.

• Задачи по готовым рисункам

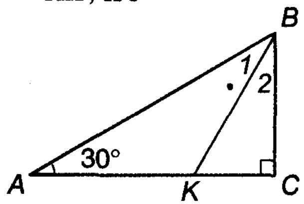
	А	Б

1

А. $BC = a.$ Найти: AB

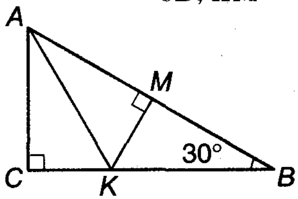


Б. $\angle 1 = \angle 2,\ BK = 10.$ Найти: $AK,\ KC$

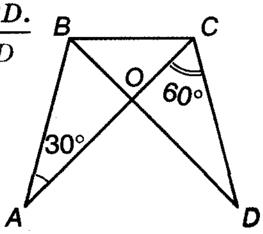


2

А. $AK = KB = 8.$ Найти: $CB,\ KM$

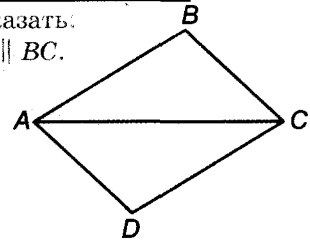


Б. $AB = CD,$ $AC = BD.$ Найти: $\angle AOD$

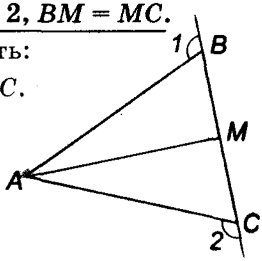


3

А. $AB = CD,\ AD = BC.$
Доказать: $AD \parallel BC.$

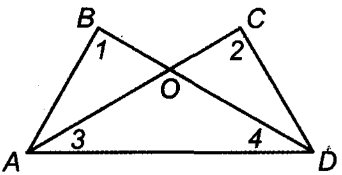


Б. $\angle 1 = \angle 2,\ BM = MC.$
Доказать: $AM \perp BC.$

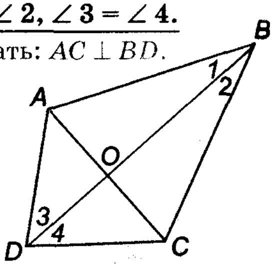


4

А. $\angle 1 = \angle 2,\ \angle 3 = \angle 4.$
Доказать: $\triangle ABO = \triangle DCO.$



Б. $\angle 1 = \angle 2,\ \angle 3 = \angle 4.$
Доказать: $AC \perp BD.$



• *Тестовые задания 4*

1.	Периметр равнобедренного треугольника с основанием 6 см и боковой стороной 5 см равен:	а) 17 см; б) 16 см; в) 11 см; г) 30 см.
2.	Один из углов равнобедренного треугольника равен 100°. Вычислите другие углы треугольника.	а) 100° и 60°; б) 80° и 80°; в) 40° и 40°; г) 100° и 160°.
3.	Угол при вершине *B* равнобедренного $\triangle ABC$ ($AB = BC$) равен 80°. Угол между боковой стороной и медианой, проведенной из вершины *B*:	а) 50°; б) 40°; в) 60°; г) 25°.
4.	Угол при основании равнобедренного прямоугольного $\triangle ABC$ равен:	а) 45°; б) 60°; в) 30°; г) 90°.
5.	Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 20 см, один из углов 30°. Длина меньшего катета равна:	а) 20 см; б) 5 см; в) 10 см; г) 15 см.
6.	Углы треугольника пропорциональны числам 4, 5 и 9. Данный треугольник:	а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный; г) равнобедренный.
7.	Диагональ *AC* прямоугольника *ABCD* разбивает его на два треугольника. Какое из утверждений ложное?	а) $\Delta ABC = \Delta CDA$; б) $\angle BAC = \angle ACD$; в) $\angle ACB = \angle ACD$; г) $\angle ABC = \angle ADC$.
8.	Один из катетов прямоугольного треугольника равен 5 см, а прилежащий угол 60°. Гипотенуза равна:	а) 10 см; б) 5 см; в) 2,5 см; г) 20 см.
9.	В $\triangle ABC$ $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$. Какой знак надо поставить вместо*: $AB * BC$?	а) $<$; б) $=$; в) $\leq$; г) $>$.
10.	Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма наименьшей и наибольшей его сторон равна 6 см. Найдите длину гипотенузы.	а) 7 см; б) 2 см в) 4 см; г) 1 см.

Типовые задачи для контрольной работы

1°. Периметр равнобедренного треугольника равен 112 см, основание 34 см. Найдите боковую сторону.

2°. Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

3°. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 17 см, а периметр 54 см.

4°. Треугольники ABC и KPH равносторонние и $AB = KP$. Найдите KH, если $BC = 5$ см.

5•. Найдите углы равнобедренного треугольника, если его угол при вершине втрое больше угла при основании.

6•. Периметр равнобедренного треугольника равен 73 см. Найдите стороны этого треугольника, если его боковая сторона на 7 см меньше основания.

7•. Докажите, что в равностороннем треугольнике все медианы равны.

8•. Докажите, что два прямоугольных треугольника равны, если катеты одного соответственно равны катетам другого.

9••. BM и B_1M_1 — соответственно медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BM = B_1M_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

10••. Найдите по рисунку 199 меру угла COD, если $AB = CD$, $BD = AC$, $\angle BDA = 35°$.

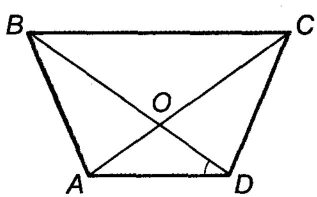


Рис. 199

• *Вопросы и задания для самоконтроля*

1. Какой треугольник называют равнобедренным?
2. Как называют стороны равнобедренного треугольника?
3. Сформулируйте свойства равнобедренного треугольника.
4. Какой треугольник называют равносторонним?
5. Как соотносятся понятия *треугольники* и *равнобедренные треугольники*?
6. Сформулируйте третий признак равенства треугольников.
7. Сформулируйте первый и второй признаки равенства треугольников.
8. Как вы понимаете выражение: *треугольник задается тремя его сторонами*?
9. Какими элементами определяется треугольник?
10. Как следует понимать, что *треугольник — фигура жесткая*?
11. Сформулируйте определение прямоугольного треугольника.
12. Как называют стороны прямоугольного треугольника?
13. Сформулируйте и докажите признаки равенства прямоугольных треугольников.
14. Что такое перпендикуляр, наклонная, проекция наклонной?
15. Что такое расстояние от точки до прямой?
16. Что такое расстояние между фигурами?
17. Верно ли, что в треугольнике против меньшей стороны лежит меньший угол, а против меньшего угла — меньшая сторона?
18. Сформулируйте неравенства треугольника XYZ.
19. Что означает выражение: *точка B лежит между точками A и C*?
20. Как связаны между собой расстояния между точками A, B и C, если B лежит между A и C?
21. Сформулируйте свойства расстояний между произвольными точками A, B и C.

Главное в разделе 3

Треугольник — замкнутая ломаная, состоящая из трех звеньев. Или часть плоскости, ограниченная этой ломаной. У каждого треугольника три стороны, три вершины и три угла. Сумма длин сторон треугольника — его *периметр*.

Сумма углов треугольника равна 180°.

Важную роль в геометрии играют признаки равенства треугольников. Две фигуры называются равными, если их можно совместить. Если $\triangle ABC = \triangle KPT$, то $AB = KP$, $BC = PT$, $CA = TK$, $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle P$, $\angle C = \angle T$.

Три признака равенства треугольников:

- **Два треугольника равны, если: две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника (I); или если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника (II); или если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника (III).**

Треугольник, у которого две стороны равны, называется *равнобедренным*. Равные стороны равнобедренного треугольника называются *боковыми сторонами*, а третья — его *основанием*.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.

Если у треугольника все стороны равны, его называют *равносторонним* треугольником. Каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

В зависимости от углов треугольники делят на *остроугольные*, *прямоугольные* и *тупоугольные*. Сторону прямоугольного треугольника, лежащую против прямого угла, называют *гипотенузой*, а две другие — *катетами*.

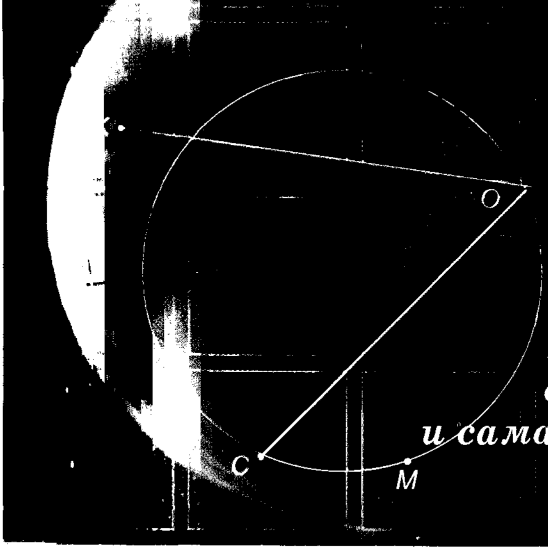
Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон и больше их разности. Какие бы ни были три точки плоскости A, B и C, всегда $AB + BC \geq AC$.

В каждом треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а против большего угла — бóльшая сторона.

Раздел 4 ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

В этом разделе вы расширите и углубите свои знания об окружности и круге, узнаете о взаимном расположении прямой и окружности, двух окружностей, о свойствах **касательной к окружности**, о касающихся окружностях, об **окружностях**, **вписанных** и **описанных около треугольника**. А еще усвоите, что такое **геометрическое место точек**, научитесь выполнять основные геометрические построения и решать более сложные задачи на построение циркулем и линейкой.

ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК
ОКРУЖНОСТЬ И ТРЕУГОЛЬНИК
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ
ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

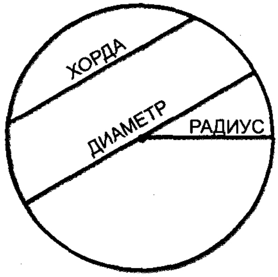


Круг — первая самая простая и самая совершенная фигура.

Прокл

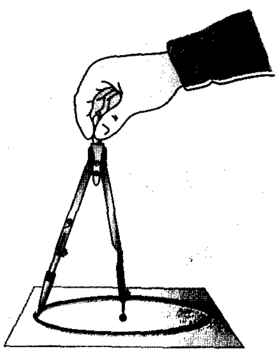
§ 17 Окружность и круг

***О**кружность* — это фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Эту точку называют *центром окружности*.



■ Рис. 200

Отрезок, соединяющий любую точку окружности с ее центром, называют *радиусом*. Отрезок, соединяющий две произвольные точки окружности, — *хорда* окружности. Хорда, проходящая через центр окружности, — *диаметр* (рис. 200). Каждый диаметр окружности состоит из двух радиусов, поэтому его длина вдвое больше длины радиуса. Длина хорды, не проходящей через центр окружности, меньше длины диаметра. (Почему?)

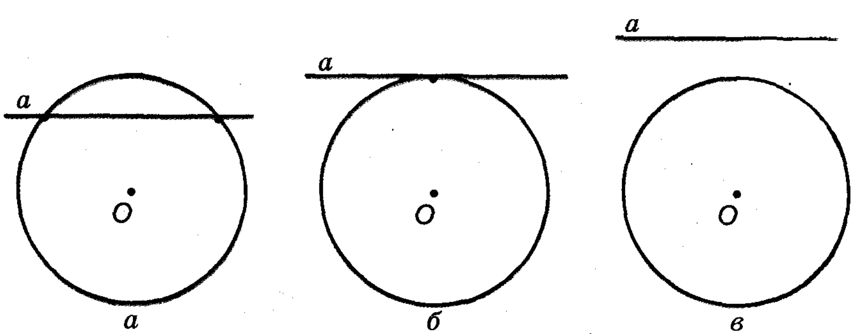


■ Рис. 201

Окружность на бумаге описывают с помощью циркуля. Считается, что из данного центра на плоскости можно описать только одну окружность данного радиуса (рис. 201).

Прямая и окружность могут иметь две общие точки (рис. 202, *а*), одну общую точку (рис. 202, *б*) или не иметь ни одной (рис. 202, *в*).

Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется *секущей*.

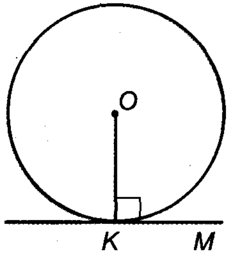


■ Рис. 202

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется *касательной к окружности*. Их общую точку называют *точкой касания*. (Речь идет о фигурах одной плоскости.) Точка касания лежит на окружности, поэтому касательная удалена от центра окружности на расстояние, равное длине радиуса. Все другие точки касательной лежат вне окружности, расстояния от них до центра окружности больше длины радиуса. Отсюда следует, что

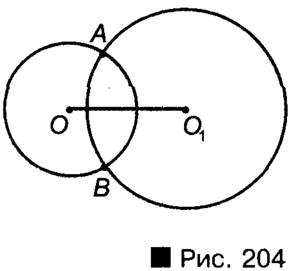
! **касательная к окружности перпендикулярна к ее радиусу, проведенному в точку касания.**

Чтобы через данную на окружности точку K провести касательную к этой окружности, нужно провести радиус OK, потом — прямую KM, перпендикулярную к этому радиусу (рис. 203).



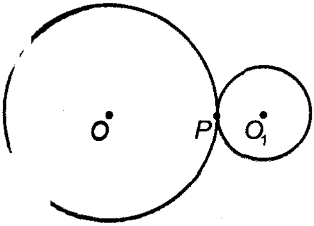
■ Рис. 203

Если две разные окружности имеют две общие точки, то говорят, что данные окружности *пересекаются* в этих точках. Точки пересечения двух окружностей лежат по разные стороны от прямой, проходящей через центры этих окружностей. На рисунке 204 показаны окружности с центрами O и O_1, пересекающиеся в точках A и B.

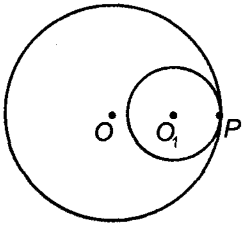


■ Рис. 204

Если две окружности имеют только одну общую точку, говорят, что они *касаются* в этой точке. Касание двух окружностей может быть внешним (рис. 205) и внутренним (рис. 206). В обоих случаях точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.



ис. 205



■ Рис. 206

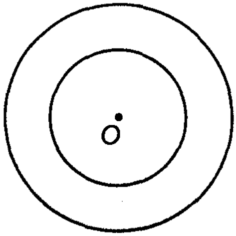


Рис. 207

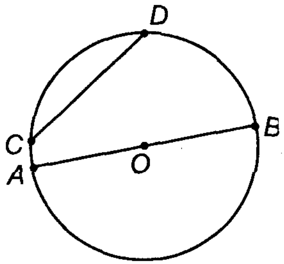


Рис. 208

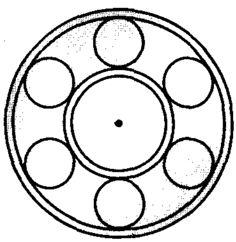


Рис. 209

Две окружности одной плоскости, имеющие общий центр, называют *концентрическими окружностями* (рис. 207).

Обычно окружности чертят, пользуясь циркулем. Но иногда удобнее это делать с помощью специальных шаблонов с вырезанными кругами разных радиусов.

Окружность делит плоскость на две части (области). Объединение окружности с ее внутренней областью называется *кругом*. Граница круга — окружность. Поэтому *центром*, *радиусом*, *диаметром*, *хордой круга* называют соответственно центр, радиус, диаметр, хорду данной окружности (рис. 208).

Форму окружности имеет обруч, форму круга — дно ведра, видимый диск Солнца и др. Колесо на рельсе — материальная модель окружности, касающейся прямой. На схематическом изображении подшипника (рис. 209) видны несколько касающихся окружностей.

Как вам известно из предыдущих классов, длина C окружности и площадь S круга выражаются через радиус r следующими формулами:

$$C = 2\pi r; \qquad S = \pi r^2.$$

Строгие доказательства этих формул будут рассмотрены в старших классах.

Для любознательных

Слово *коло* древнеукраинское и древнерусское. Оно одного корня со словами *кольцо*, *кольцевать*, *колобок*, *кольчуга*, *колесо*, *колея*, *коловорот*, *околица*, *околыш* и др.

До XIX в. в русской научной литературе вместо слова *окружность* писали *округ*, *кружение*, *окружие*, *циркумференция*, *периферия* и даже *периметр*, а всесто *круг* — *циркуль*, *обруч*, *колесо*. Например, в «Арифметике» Л. Магницкого — первой математической книге, напечатанной в России (1703 г.), читаем: «Чрез центр *колесе* линию проведи яже нарицается меридиана», что в современном прочтении означает: «Через центр *круга* проведи отрезок, называемый диаметром».

В давние времена *круг* также называли *колом* (окружностью), часто путая эти понятия. Например, в украинской народной песне поется: «Ой зійди, зійди, ясен місяцю, як млиновеє коло». Хотя и полный месяц, и камень в мельнице, как известно, имеют форму круга, а не окружности. Такая же путаница до сих пор в некоторых названиях: *Полярный круг* (укр. *Полярне коло*); *круг почета* (укр. *коло пошани*) и др., где вместо слова «окружность» употребляется слово «круг».

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое окружность? Центр окружности? Радиус? Диаметр? Хорда?
2. Что такое круг? Чем отличается круг от окружности?
3. Сколько общих точек могут иметь:
   а) прямая и окружность; б) две окружности?
4. Сформулируйте определение касательной к окружности. Какое свойство имеет касательная к окружности?
5. Какие окружности называют касающимися? Что такое точка касания?
6. Как могут касаться две окружности?
7. Какие окружности называют концентрическими?

Решаем вместе

Докажите, что **точки касания окружности к сторонам треугольника равноудалены от его вершины.**

Пусть окружность с центром O касается сторон угла A в точках B и C (рис. 210). Докажем, что $AB = AC$.

Радиусы OB и OC, проведенные в точки касания, перпендикулярны к соответствующим касательным и равны. Поэтому прямоугольные треугольники ABO и ACO равные по катету и гипотенузе. Следовательно, $AB = AC$.

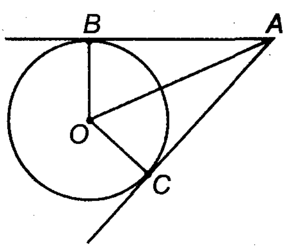
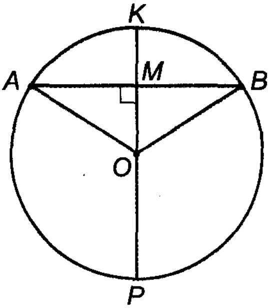
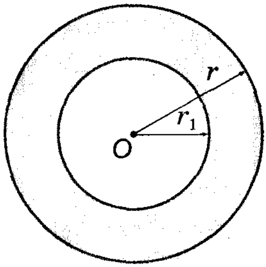


Рис. 210



■ Рис. 211



■ Рис. 212

2 Докажите, что **диаметр окружности, проходящий через середину хорды, отличной от диаметра, перпендикулярен к ней.**

■ Пусть AB — хорда окружности, не проходящая через центр O окружности, а KP — диаметр окружности, проходящий через середину M хорды AB (рис. 211). Треугольник OAB равнобедренный, поскольку $OA = OB$. А медиана OM равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, также является высотой треугольника. Поэтому $OM \perp AB$, а следовательно, и $KP \perp AB$.

3 Найдите площадь кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями радиусов r и r_1 (рис. 212).

■ Площадь S кольца равна разности площадей кругов радиусов r и r_1:

$$S = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi (r^2 - r_1^2).$$

● ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

497. Сколько разных окружностей можно провести через:

а) одну точку; б) две точки; в) три точки?

498. Сколько общих точек могут иметь:

а) окружность и прямая; б) две окружности;
в) окружность и треугольник; г) окружность и плоскость?

499. Дана окружность с центром O. Сколько общих точек имеет окружность с:

а) прямой OA; б) лучом OM?

500. Сколько разных касательных к данной окружности можно провести через данную точку, лежащую:

а) на окружности; б) вне окружности; в) внутри окружности?

501. Сколько пар касающихся окружностей на рисунке 200? А сколько пар концентрических окружностей?

А

602. Начертите окружность. Проведите ее радиус, диаметр, хорду.

603. Докажите, что диаметр — самая большая хорда данной окружности.

604. Даны окружность и отрезок меньше диаметра. Проведите хорду, длина которой равна длине данного отрезка.

605. Найдите расстояние между центрами окружностей радиусов 5 м и 7 м, которые касаются:

а) внешним способом; б) внутренним способом.

606. Имеют ли общие точки две окружности, радиусы которых 3 см и 4 см, если расстояние между их центрами равно 5 см?

607. AB и CD — равные хорды окружности с центром O. Докажите, что $\triangle ABO = \triangle CDO$.

608. Окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках A и B. Докажите, что: 1) $\triangle OAO_1 = \triangle OBO_1$; 2) $\triangle OAB$ и $\triangle O_1AB$ — равнобедренные.

609. Окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках A и B, причем каждая из них проходит через центр другой. Найдите $\angle AOB$ и $\angle OAO_1$.

Б

610. Каждая из трех окружностей проходит через центры двух других. Докажите, что их центры — вершины равностороннего треугольника.

611. Докажите, что **равные хорды равноудалены от центра окружности.**

612*. Как построить касательную к данной окружности:

а) параллельную данной прямой;

б) перпендикулярную к данной прямой?

613. Садовник описывает окружность для клумбы с помощью колышков и веревки (рис. 213). Почему описанная таким способом фигура — окружность? Получится ли окружность, если веревка будет наматываться на колышек?

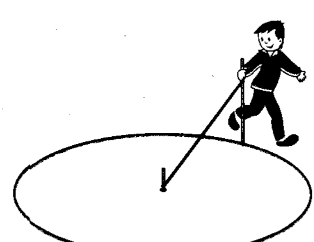


Рис. 213

514. Найдите радиусы двух касающихся окружностей, если они пропорциональны числам 1 и 3, а расстояние между центрами окружностей равно 16 см. Рассмотрите два варианта

515. Из точки A к окружности с центром O проведены касательные AB и AC. Докажите, что AB — биссектриса угла BAC.

516. Из точки A к окружности с центром O проведены две касательные, угол между которыми равен 60°. Найдите радиу окружности, если $OA = 10$ см.

517. Из точки A к окружности проведены две касательные Найдите угол между ними, если расстояние от A до точки касания равно радиусу окружности.

518. Окружность касается сторон угла A в точках B и C так, что $AB = AC$. Найдите меру угла A.

519. Три равные окружности с центрами O_1, O_2, O_3 попарно касаются в точках K, P и T. Докажите, что:
1) $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$; 2) $KP = PT = TK$.

520. Из центра окружности провели три луча, разбившие данную окружность на три дуги, длина каждой из которых равна 3 см. Найдите угол между этими лучами и радиус окружности.

521. Докажите, что площадь кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями радиусов r и r_1, равна среднему арифметическому длин этих окружностей, умноженному на разность радиусов, то есть $S = lm$ (рис. 214).

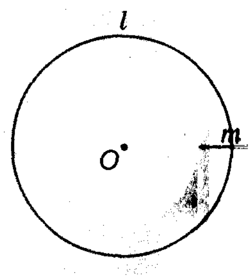


Рис. 21

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

522. Отрезок длиной a разделен на 3 равные части. Какую часть a составляет расстояние между серединами перво и третьей частей?

523. Найдите длину биссектрисы треугольника с периметром 40 см, если она разбивает его на два треугольника с пери метрами 20 см и 30 см.

524. Найдите среднее арифметическое сторон треугольника периметр которого равен 36 см.

525*. Найдите площадь квадрата $ABCD$, если $AC = 10$ см.

§ 18 Геометрическое место точек

Чтобы решать более сложные задачи на построение, следует знать, что такое геометрическое место точек.

Геометрическим местом точек (ГМТ) называется фигура, состоящая из всех точек, имеющих определенное свойство.

Рассмотрим несколько геометрических мест точек плоскости.

Окружность — это геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки.

Круг радиуса r — геометрическое место точек, расстояния от которых до данной точки не превышают r.

ЗАДАЧА 1. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от концов данного отрезка.

РЕШЕНИЕ. Пусть дан отрезок AB. Его середина M равноудалена от A и B (рис. 215, *а*). Проведем прямую MK, перпендикулярную к AB. Каждая ее точка K, отличная от M, также равноудалена от A и B, поскольку $\triangle KAM = \triangle KBM$. Таким образом, $KA = KB$.

Если же точка P не лежит на прямой MK, она не может быть равноудаленной от A и B (рис. 215, *б*). Действительно, из допущения, что $PA = PB$, следует перпендикулярность прямых PM и AB, так как медиана PM равнобедренного треугольника PAB является его высотой. Тогда сумма двух прямых углов PMB и KMA не равнялась бы $180°$, а этого не может быть. Следовательно, вне прямой MK не существует точки, равноудаленной от A и B.

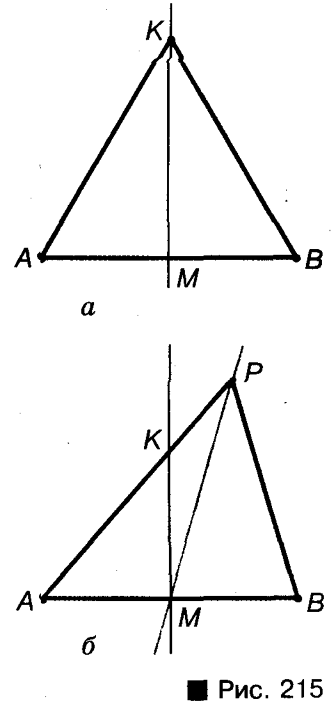
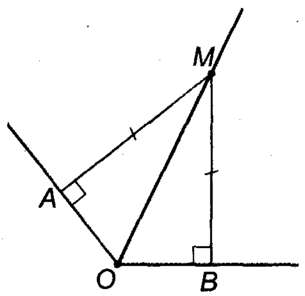


Рис. 215

Таким образом, любая точка прямой MK равноудалена от A и B, а точка, не лежащая на MK, не может быть равноудаленной от A и B.

Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, называют *серединным перпендикуляром* данного отрезка. Из этого следует, что

! геометрическим местом точек, равноудаленных от концов отрезка, является его серединный перпендикуляр.



■ Рис. 216

■ *ЗАДАЧА 2.* Найдите геометрическое место точек, лежащих внутри угла и равноудаленных от его сторон.

■ 1) Пусть M — точка угла, равноудаленная от его сторон OA и OB (рис. 216). Перпендикуляры MA и MB, опущенные из M на стороны угла, равны. Поэтому $\triangle MOA = \triangle MOB$ по катету и гипотенузе. Следовательно, $\angle AOM = \angle BOM$, то есть точка M принадлежит биссектрисе данного угла AOB.

■ 2) Если M — произвольная точка биссектрисы угла AOB, а MA и MB — перпендикуляры на OA и OB (см. рис. 216), то $\triangle OAM = \triangle OBM$ (по гипотенузе и острому углу). Поэтому $MA = MB$, следовательно, точка M равноудалена от сторон данного угла.

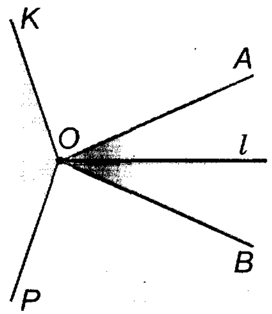
! Геометрическим местом точек угла, равноудаленных от его сторон, является биссектриса этого угла.

■ *ПРИМЕЧАНИЕ.*

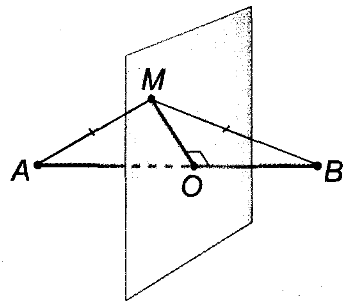
Здесь имеются в виду углы меньше развернутого.

Для любознательных

Верно ли, что геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла, является биссектриса этого угла? Нет. Когда в планиметрии говорят о геометрическом месте точек, не уточняя, о каких именно точках идет речь, то имеют в виду точки плоскости, которой принадлежит данная фигура. При таком условии геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла, является объединение биссектрисы l данного угла и всех точек некоего другого угла, показанного на рисунке 217.



■ Рис. 217



■ Рис. 218

Ведь каждая точка угла *KOP* также равноудалена от сторон данного угла *AOB* (речь идет об углах меньше развернутого).

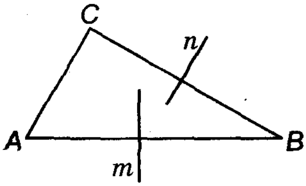
Когда мы говорим, что геометрическим местом точек, равноудаленных от концов отрезка, является серединный перпендикуляр этого отрезка, то мы имеем в виду, что речь идет о геометрическом месте точек **плоскости**, на которой лежит отрезок.

А геометрическим местом точек **пространства**, равноудаленных от концов отрезка, является некая плоскость (мал. 218). Подумайте, как расположена эта плоскость относительно данного отрезка.

Геометрические места точек пространства изучают в старших классах.

? Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое геометрическое место точек? Приведите примеры.
2. Что такое серединный перпендикуляр данного отрезка?
3. Что является геометрическим местом точек, равноудаленных от концов отрезка?
4. Что является геометрическим местом точек угла, равноудаленных от его сторон?



■ Рис. 219

● Решаем вместе

■ Докажите, что серединные перпендикуляры двух сторон треугольника пересекаются.

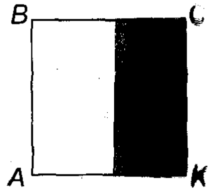
■ Пусть n и m — серединные перпендикуляры сторон BC и AB треугольника (рис. 219). Докажем, что они не могут быть параллельны. Доказывать будем от противного. Допустим, что $n \parallel m$. Тогда прямая, перпендикулярная к n, должна быть перпендикулярной и к m, то есть $BC \perp n$ и $BC \perp m$. Но по условию и $AB \perp m$. А две прямые, перпендикулярные к третьей прямой, параллельны. Таким образом, из допущения, что $n \parallel m$, следует параллельность сторон AB и BC треугольника. А этого не может быть. Поэтому прямые n и m не могут быть параллельными. Они пересекаются.

● ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

526. Верно ли, что каждая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон этого угла?

527. Верно ли, что биссектриса угла является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон этого угла?

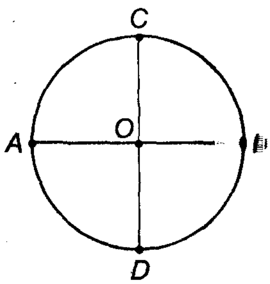


■ Рис. 220

528. Чем является геометрическое место точек, лежащих на расстоянии 2 м от некой точки?

529. Чем является геометрическое место точек, равноудаленных от двух параллельных прямых?

530. $ABCK$ — квадрат (рис. 220). Чем является геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и C? А от точек B и K?



■ Рис

531. AB и CK — перпендикулярные диаметры одной окружности (рис. 221). Чем является серединный перпендикуляр диаметра AB?

532. Серединный перпендикуляр отрезка AB проходит через точку C. Верно ли, что треугольник ABC равнобедренный?

533. Две равные окружности с центрами O и O_1 касаются внешним способом (рис. 222). Верно ли, что их общая касательная, проведенная через точку касания, является серединным перпендикуляром отрезка OO_1?

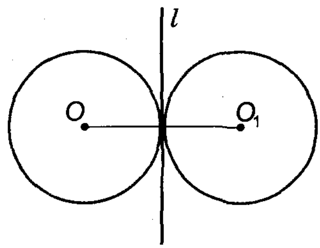


Рис. 222

А

534. Даны точки A и B. Постройте геометрическое место точек, равноудаленных от A и B.

535. Дан прямой угол. Постройте геометрическое место точек, находящихся внутри этого угла и равноудаленных от его сторон.

536. Постройте геометрическое место точек, удаленных от данной точки на данное расстояние a.

537. Чем является геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой?

538. Даны две параллельные прямые. Постройте геометрическое место точек, равноудаленных от этих прямых.

539. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.

540. Найдите геометрическое место центров равных окружностей, касающихся данной прямой.

541. Найдите геометрическое место центров равных окружностей, проходящих через данную точку.

542. Дан острый угол. Постройте геометрическое место центров окружностей, касающихся сторон этого угла.

Б

543. Найдите геометрическое место центров окружностей радиуса $2r$, касающихся окружности радиуса: а) r; б) $3r$.

544. Дана окружность радиуса 6 см. Чем является геометрическое место точек, делящих ее диаметры в отношении $1 : 2$?

545. Чем является геометрическое место вершин прямых углов, обе стороны которых касаются данной окружности?

546. Даны две параллельные прямые a и b. Постройте геометрическое место точек, которые лежат между данными прямыми и расстояния от которых до a и b пропорциональны числам 1 и 2.

547. Даны две параллельные прямые. Чем является геометрическое место точек, расстояния от которых до данных прямых пропорциональны числам 2 и 3?

548. Дан отрезок AB длиной 10 см. Чем является геометрическое место точек, удаленных от одного из концов на расстояние 6 см, а от другого — на 8 см?

549. Дан прямоугольник со сторонами 3 см и 5 см. Чем является геометрическое место точек, удаленных от какой-либо из ближайших сторон на расстояние 1 см и лежащих:

а) во внутренней области прямоугольника;

б) вне прямоугольника?

550. Докажите, что точка пересечения двух биссектрис треугольника равноудалена от всех сторон треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

551. Найдите меру угла, который в 3 раза больше смежного с ним угла.

552. Может ли высота треугольника быть в 100 раз больше суммы двух других его высот? А в 100 раз меньше суммы двух других его высот?

553. В каком треугольнике биссектрисы углов пересекаются под углом 45°?

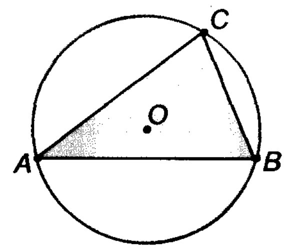
554. Высота какого равнобедренного треугольника делит его на два равнобедренных треугольника?

555. Найдите меры двух равных тупых углов, одна сторона которых общая, а две другие перпендикулярны.

§ 19 Окружность и треугольник

Окружность и треугольник могут не иметь общих точек или иметь 1, 2, 3, 4, 5, 6 общих точек (соответствующие рисунки выполните самостоятельно). Заслуживают внимания случаи, когда окружность проходит через все три вершины треугольника или когда она касается всех сторон треугольника. Рассмотрим такие случаи подробнее.

1. Описанная окружность. Окружность называется *описанной около треугольника*, если она проходит через все вершины треугольника (рис. 223).



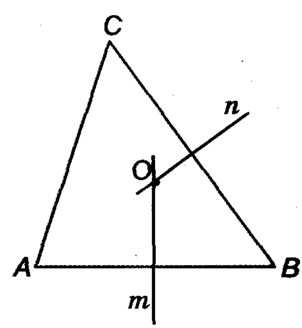
■ Рис. 223

ТЕОРЕМА 18 **Около каждого треугольника можно описать только одну окружность. Ее центром является точка пересечения серединных перпендикуляров двух сторон треугольника.**

Доказательство.

Пусть ABC — произвольный треугольник (рис. 224). Найдем точку, равноудаленную от вершин A, B и C. Геометрическое место точек, равноудаленных от A и B, — серединный перпендикуляр m отрезка AB; геометрическое место точек, равноудаленных от B и C, — серединный перпендикуляр n отрезка BC. Эти два серединных перпендикуляра не могут быть параллельными, они пересекаются в некой точке O. А она равноудалена от A, B и C. Следовательно, $OA = OB = OC$, поэтому O — центр окружности, описанной около ABC.

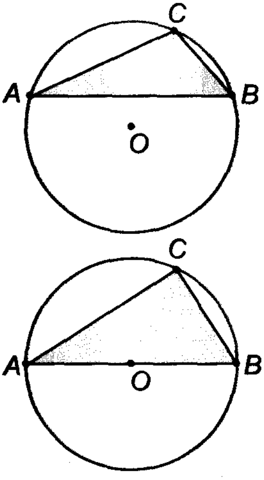
Для каждого отрезка AB существует серединный перпендикуляр m, и только один, а для BC — серединный перпендикуляр и только один. И точка их пересечения существует всегда, только одна. Таким образом, около каждого треугольника можно описать одну окружность, и только одну.□



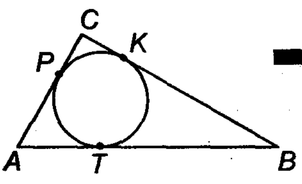
■ Рис. 224

! СЛЕДСТВИЯ.

- **Серединные перпендикуляры всех трех сторон произвольного треугольника проходят через одну и ту же точку.**
- **Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и только одну.**



■ Рис. 225



■ Рис. 226

Из доказанной теоремы следует способ построения окружности, описанной около треугольника. Чтобы описать около треугольника *ABC* окружность, достаточно:

1) построить серединные перпендикуляры двух сторон данного треугольника;

2) определить точку *O*, в которой эти серединные перпендикуляры пересекаются;

3) из центра *O* провести окружность радиуса *OA*.

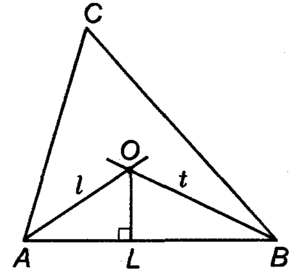
Центр окружности, описанной около треугольника, может лежать во внутренней или внешней области данного треугольника либо на его стороне (рис. 225).

2. Вписанная окружность. Окружность называется *вписанной в треугольник*, если она касается всех сторон треугольника (рис. 226). Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит во внутренней области этого треугольника.

! ТЕОРЕМА 19 В каждый треугольник можно вписать только одну окружность. Ее центром является точка пересечения двух биссектрис треугольника.

■ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть *ABC* — произвольный треугольник. Определим точку *O*, равноудаленную от всех его сторон (рис. 227). Геометрическое место точек, лежащих внутри угла *A* и равноудаленных о сторон AB и AC, — биссектриса l угла A. Геометрическое место точек, равноудаленных от сторон AB и BC и лежащих внутри угла B, — биссектриса t угла B. Эти две биссектрисы обязательно пересекаются (докажите это!). Точка O, в которой пересекаются биссектрисы l и t, равноудалена от всех трех сторон данного треугольника. Следовательно, точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.□



■ Рис. 227

СЛЕДСТВИЕ.

В каждом треугольнике все три биссектрисы пересекаются в одной точке.

Из доказанной теоремы следует способ построения окружности, вписанной в треугольник. Чтобы вписать в данный треугольник окружность, достаточно:

1) провести две его биссектрисы;

2) из точки их пересечения O опустить перпендикуляр OL на произвольную сторону треугольника;

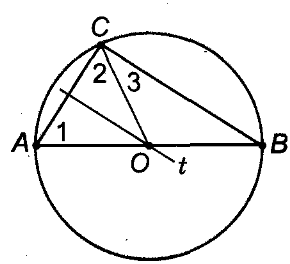
3) из центра O радиуса OL описать окружность. Она касается каждой стороны треугольника, следовательно, является вписанной в данный треугольник.

Для любознательных

ТЕОРЕМА 20 **Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина его гипотенузы.**

Пусть ABC — произвольный треугольник с прямым углом C, t — серединный перпендикуляр катета AC, пересекающий гипотенузу AB в точке O (рис. 228).

Поскольку точка O лежит на серединном перпендикуляре отрезка AC, то $OA = OC$ и $\angle 1 = \angle 2$. Тогда $\angle B = 90° - \angle 1$ и $\angle 3 = 90° - \angle 1$, то есть $\angle B = \angle 3$ и $OB = OC$. $OA = OC = OB$, то есть



■ Рис. 228

точка O — середина гипотенузы AB, равноудаленная от всех вершин треугольника. Таким образом, окружность с центром O и радиусом OA проходит через все вершины данного треугольника.

СЛЕДСТВИЕ.

Диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен его гипотенузе.

ТЕОРЕМА 21 **Из любой точки окружности ее диаметр, не выходящий из этой точки, виден под прямым углом.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть AB — произвольный диаметр окружности с центром O, а C — произвольная точка окружности, отличная от A и B (рис. 229). Покажем, что $\angle ACB = 90°$. Поскольку $OA = OB = OC$, то $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Тогда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$, откуда $\angle C = \angle 2 + \angle 3 = 180° : 2 = 90°$.

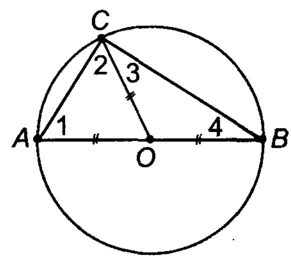


Рис. 229

ИНОГДА ГОВОРЯТ:

Геометрическим местом точек плоскости, из которых отрезок AB виден под прямым углом, является окружность диаметра AB. На самом деле этому ГМТ точки A и B не принадлежат. Подробнее об этом вы узнаете в старших классах.

? Вопросы и задания для самоконтроля

1. Объясните, какую окружность называют описанной около треугольника.
2. Какую окружность называют вписанной в треугольник?
3. Около каждого ли треугольника можно описать окружность?
4. В каждый ли треугольник можно вписать окружность?
5. Где лежит центр окружности, вписанной в треугольник?
6. Где лежит центр окружности, описанной около треугольника? А около прямоугольного треугольника?

Решаем вместе

1 Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника с гипотенузой 6 см.

- Диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является его гипотенузой. Радиус вдвое меньше: 3 см.

2 Докажите, что **диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c, равен $a + b - c$.**

- Пусть в $\triangle ABC$ угол C прямой, а K, P, T — точки касания вписанной в треугольник окружности (рис. 230). Поскольку $AP = AT$ и $BK = BT$, то $AC + BC - AB = PC + CK = 2r$, или $2r = a + b - c$.

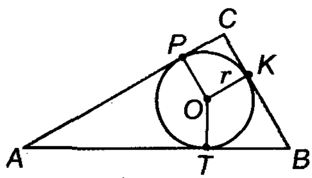


Рис. 230

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

656. Сколько общих точек могут иметь окружность и прямая?

657. Сколько общих точек могут иметь круг и прямая?

658. Сколько общих точек имеют треугольник и описанная около него окружность?

659. Сколько общих точек могут иметь треугольник и окружность?

660. Через любые ли 4 точки можно провести окружность?

661. Можно ли в окружность диаметра 1 м вписать треугольник с периметром 8 м? А треугольник с периметром 8 см?

А

662. Начертите произвольный треугольник и опишите около него окружность.

663. Начертите произвольный треугольник и впишите в него окружность.

564. Каждая из хорд AB и BC равна радиусу окружности. Найдите углы треугольника ABC.

565. Докажите, что не существует окружности, проходящ через три точки одной прямой.

566. Почему две разные окружности не могут иметь три общи точки?

567. Сравните длину окружности и периметр вписанного в н треугольника.

568. Прикиньте, как относятся радиусы окружностей: описан ной около равностороннего треугольника и вписанной него.

569. Могут ли касаться две окружности: вписанная в тр угольник и описанная около того же треугольника?

570. Может ли центр окружности, вписанной в треугольни быть центром окружности, описанной около того же тр угольника?

571. Покажите на рисунке, что центр окружности, описанной около треугольника, может лежать в его внутренней об ласти, либо на его стороне, либо вне треугольника.

572. Около равностороннего треугольника описана окру ность. Под каким углом из центра этой окружности вид сторона треугольника?

573. В равносторонний треугольник вписана окружность. П каким углом из центра этой окружности видна сторо треугольника?

574. Центр окружности O, описанной около треугольника AB соединен отрезками с вершинами треугольника. Докажи те, что треугольники OAB, OBC и OCA равны.

Б

575. Треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см прямоуго ный. Чему равен радиус описанной около него окружно

576. Каждый треугольник, стороны которого пропорциона ны числам 3, 4 и 5, — прямоугольный. Найдите ради окружности, описанной около треугольника со сто нами 15 м, 20 м и 25 м.

577. Одна окружность вписана в равносторонний треуго ник, другая — описана около того же самого треуголь ка. Докажите, что:

а) центры этих окружностей совпадают;

б) радиусы окружностей пропорциональны числам 1 и

678. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон в точках K, P, T (рис. 231). Докажите, что:

1) $AP + CK + BT = AT + BK + CP$;

2) $BK = 0,5\,(AB + BC - AC)$.

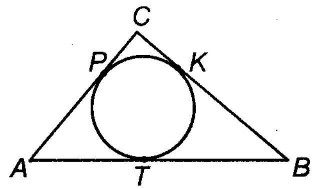


Рис. 231

679. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5.

680. Найдите периметр прямоугольного треугольника, описанного около окружности радиуса r, если его гипотенуза равна c.

681. Вписанная в прямоугольный треугольник ABC окружность касается его катетов AC и CB в точках P и K. Найдите длину ломаной $KBAP$, если $AB = 17$ см.

682. На сторонах угла B, равного 120°, отложены отрезки $AB = BC = 4$ см. Через точки A, B, C проведите окружность и найдите ее радиус.

683. Докажите, что одна из медиан (какая именно?) разбивает прямоугольный треугольник на два равнобедренных треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

684. Найдите длину окружности и площадь круга радиуса 8 см.

685. Найдите площадь прямоугольника, периметр которого равен 200 м, а одна сторона в полтора раза больше другой.

686. $\triangle ABC = \triangle MNK$. Стороны $\triangle ABC$ пропорциональны числам 2, 3 и 4. Найдите стороны $\triangle MNK$, если его периметр 45 см.

687. $\triangle ABC = \triangle MNK$, $AC = 17$ см, $MN - NK = 5$ см. Найдите стороны $\triangle ABC$, если $P_{\triangle ABC} = 38$ см.

688. Стороны треугольника пропорциональны числам 7, 5 и 8. Найдите периметр треугольника, если:

а) сумма наименьшей и наибольшей сторон равна 39 см;

б) разность наибольшей и наименьшей сторон равна 9 см;

в) наименьшая сторона на 12 см короче полупериметра;

г) наибольшая сторона меньше суммы двух других на 8 см.

§ 20 Геометрические построения

Пользуясь линейкой[1] и циркулем, мож-но выполнить много геометрических построений, то есть начер-тить геометрические фигуры. Рассмотрим сначала, как выпол-няются самые простые геометрические построения.

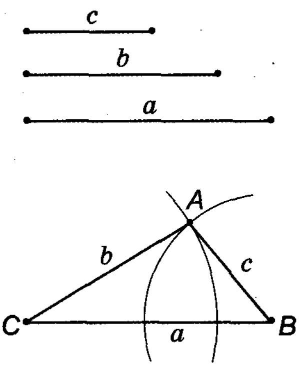


Рис. 232

ЗАДАЧА 1. Постройте треугольник по данным сторонам.

РЕШЕНИЕ. Пусть даны три отрезка: a, b и c (рис. 232). Нужно построить треугольник, стороны которого были бы равны этим отрезкам. С помощью линейки проводим произвольную прямую, обозначаем на ней произвольную точку B и циркулем откладываем на этой прямой отрезок $BC = a$. Раствором циркуля, равным c, описываем дугу окружности с центром B. С той же стороны от прямой CB описываем дугу окружности радиуса b с центром C. Точку пересечения A этих дуг соединяем отрезками с C и B. Треугольник ABC — именно тот, который требовалось построить, так как его стороны BC, AC и AB равны данным отрезкам.

ПРИМЕЧАНИЕ. Если построенные дуги не пересекаются, требуемый треугольник построить невозможно. Это бывает в том случае, когда один из данных отрезков больше суммы двух других или равен их сумме.

ЗАДАЧА 2. Постройте угол, равный данному углу.

РЕШЕНИЕ. Пусть дан угол AOB и требуется построить угол KPT, равный $\angle AOB$ (рис. 233). Проводим луч PT и дуги равных радиусов с центрами O и P. Пусть одна из этих дуг пересекает стороны угла AOB в точках A и B, а другая луч PT в точке T. Дальше раствором циркуля, равным AB, описываем третью дугу с центром T. Если она пересекает другую дугу в точке K, проводим луч PK. Угол KPT — тот

[1] Будем считать, что линейка без делений.

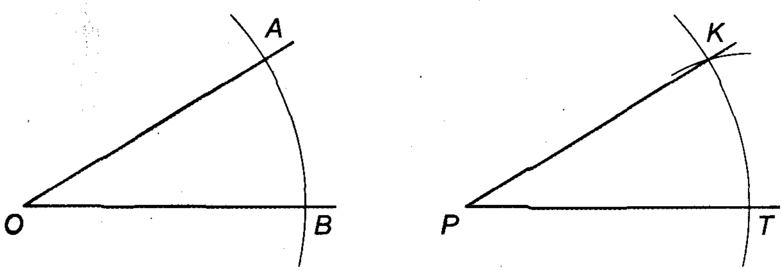


Рис. 233

который требовалось построить. Ведь треугольники KPT и AOB равны (по трем сторонам), поэтому $\angle KPT = \angle AOB$.

ЗАДАЧА 3. Постройте биссектрису данного угла.

РЕШЕНИЕ. Пусть AOB — данный угол (рис. 234). Произвольным раствором циркуля опишем дугу с центром O. Пусть A и B — точки пересечения этой дуги с лучами OA и OB. Из центров A и B опишем дуги такими же радиусами. Если D — точка пересечения этих дуг, то луч OD — биссектриса угла AOB. Действительно, $\triangle AOD = \triangle BOD$ (по трем сторонам). Поэтому $\angle AOD = \angle DOB$.

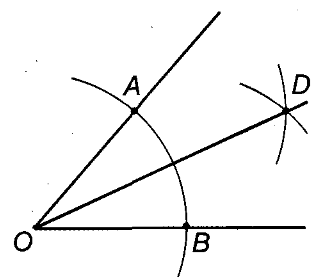


Рис. 234

ЗАДАЧА 4. Разделите данный отрезок пополам.

РЕШЕНИЕ. Пусть AB — данный отрезок (рис. 235). Из точек A и B радиусом AB описываем дуги. Они пересекутся в неких точках C и D. Прямая CD точкой M разделит данный отрезок пополам.

Действительно, по трем сторонам $\triangle ACD = \triangle BCD$, поэтому $\angle ACM = \angle BCM$. По первому признаку равенства треугольников $\triangle ACM = \triangle BCM$. Итак, $AM = BM$.

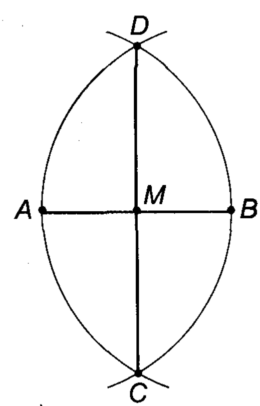


Рис. 235

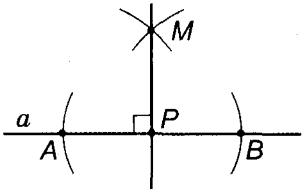


Рис. 236

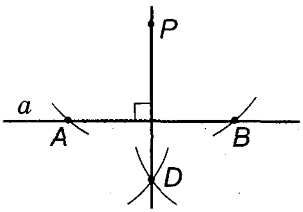


Рис. 237

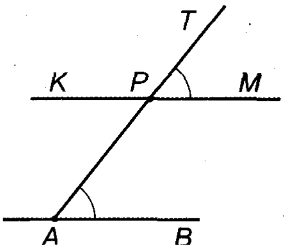


Рис. 238

ЗАДАЧА 5. Через данную точку P проведите прямую, перпендикулярную к данной прямой a.

РЕШЕНИЕ. В зависимости от того, лежит или не лежит точка P на прямой a, задачу можно решить, как показано на рисунках 236 и 237. Опишите и аргументируйте эти построения самостоятельно.

ЗАДАЧА 6. Через точку P, не лежащую на прямой AB, проведите прямую, параллельную прямой AB.

РЕШЕНИЕ. Через точку P и произвольную точку A прямой AB проводим прямую AT (рис. 238). Строим угол TPM, равный углу PAB, так, чтобы эти углы стали соответственными при прямых PK, AB и секущей AP. Построенная таким образом прямая PK удовлетворяет задачу: она проходит через данную точку P и параллельна прямой AB, поскольку $\angle TPM = \angle PAB$.

Для любознательных

Геометрическими построениями часто приходилось заниматься многим людям. Еще в доисторические времена мастера, изготавливающие колеса к колесницам, умели делить окружность на несколько равных частей. В наше время выполнять такие построения приходится специалистам, проектирующим или изготавливающим шестеренки, дисковые пилы (рис. 239), турбины и различные роторные механизмы. Как бы вы разделили окружность, например, на 5, 6 или 7 равных частей?

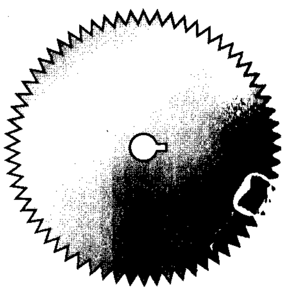


Рис. 239

Основные чертежные инструменты — линейка и циркуль — были известны еще несколько тысячелетий назад.

Слово *линейка* происходит от слова *линия*, которое на латинском языке сначала означало «льняная нитка», «черта, проведенная ниткой, бечевкой» (производное от лат. *linum* — лен). Слово *циркуль* тоже латинского происхождения, первоначально слово *циркулюс* означало «окружность, круг», а потом стало означать инструмент, с помощью которого проводят окружности.

В Древней Греции линейку и циркуль признавали единственными приборами геометрических построений. Задачу на построение считали решенной, если все построения в ней выполнялись только с помощью линейки и циркуля. Сейчас специалисты при выполнении построений пользуются угольником, транспортиром, рейсмусом, рейсшиной и другими чертежными приспособлениями.

? Вопросы и задания для самоконтроля

1. Объясните, как построить треугольник по трем данным сторонам.
2. Как построить угол, равный данному?
3. Как построить биссектрису данного угла?
4. Как разделить данный отрезок пополам?
5. Как через данную точку провести прямую, перпендикулярную к данной прямой?
6. Как через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой?

• Решаем вместе

1 Разделите данную дугу окружности на две равные части.

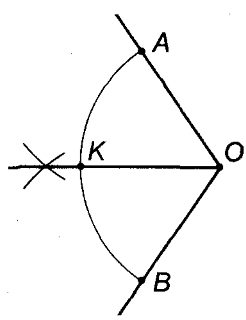
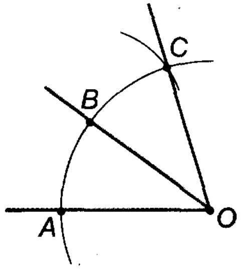


Рис. 240

■ Пусть дана дуга AB окружности с центром O (рис. 240). Представим угол AOB и проведем его биссектрису OK. Треугольники AOK и KOB равны, поэтому и дуги AK и KB равны.



■ Рис. 241

2 Постройте угол вдвое больше данного.

■ Пусть AOB — данный угол (рис. 241). Опишем дугу окружности с центром O. Если она пересечет стороны данного угла в точках A и B, из B как из центра сделаем засечку $BC = BA$ и проведем луч OC. Угол AOC вдвое больше $\angle AOB$, поскольку $\triangle AOB = \triangle BOC$.

● ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

РЕШИТЕ УСТНО

589. Какие из утверждений верны:

а) Чтобы разделить угол на две равные части, нужно провести его биссектрису?

б) Чтобы разделить отрезок на две равные части, нужно провести его серединный перпендикуляр?

в) Чтобы разделить дугу окружности на две равные части, нужно провести серединный перпендикуляр отрезка, соединяющего концы данной дуги?

г) Чтобы найти центр окружности, описанной около треугольника, нужно провести серединные перпендикуляры двух сторон треугольника?

А

590. Разделите данный угол на 4 равные части.

591. Постройте прямой угол.

592. Постройте угол, мера которого: а) 45°; б) 22,5°; в) 60°; г) 30°.

593. Постройте угол втрое больше данного острого угла.

594. Разделите данный отрезок на 4 равные части.

595. Как поделить пополам отрезок, длина которого в несколько раз больше самого большого раствора циркуля?

596. Постройте отрезок в два раза больше данного.

597. Постройте отрезок в 3 раза больше данного отрезка.

598. Разделите данную дугу окружности на четыре равные части.

599. Постройте треугольник, равный данному треугольнику.

600. Постройте равносторонний треугольник по данной его стороне.

601. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и боковой стороне.

602. Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам.

603. Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.

604. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при вершине.

605. Постройте треугольник по стороне и прилежащим углам.

606. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и углу при основании.

Б

607. Постройте треугольник со сторонами 3 см, 4 см и 5 см. Опишите около него окружность.

608. Постройте треугольник и проведите его медианы.

609. Дан треугольник. Постройте его биссектрисы.

610. Дан треугольник. Постройте его высоты. Рассмотрите все возможные варианты.

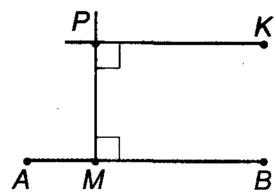


Рис. 242

611. Чтобы через данную точку P провести прямую, параллельную AB, можно сначала провести $PM \perp AB$, а потом $PK \perp PM$ (рис. 242). Аргументируйте это построение.

612*. Через данную точку проведите прямую, пересекающую данную прямую под данным углом.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

613. Найдите меру угла, который в сумме с двумя смежными ему углами образует угол 300°.

614. Докажите, что каждая сторона квадрата $ABCD$ с прямой AC образует углы по 45°.

615. Определите вид треугольника, в котором сумма двух углов меньше третьего.

616. Под каким углом пересекаются две медианы равностороннего треугольника?

617. Постройте равносторонний треугольник ABC, если $AB = 4$ см, и опишите около него окружность.

§ 21 Задачи на построение

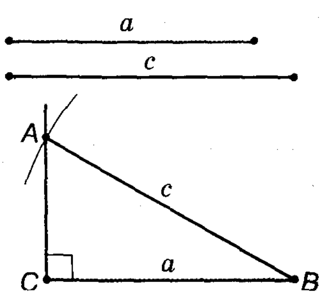
С геометрическими построениями имеют дело различные специалисты. Геометрические построения выполняют чертежники, архитекторы, конструкторы, топографы, геодезисты, штурманы. Разные геометрические фигуры строят также: слесарь — на жести, столяр — на доске, портной — на ткани, садовник — на земле.

В задаче на построение требуется построить геометрическую фигуру, которая должна удовлетворять определенные условия. В геометрии построения выполняют чаще всего с помощью линейки и циркуля. Условимся: если в задаче не сказано, какими инструментами следует выполнить построение, то имеются в виду только линейка (без делений) и циркуль.

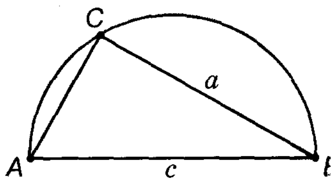
Более сложные задачи на построение часто решают *методом геометрических мест*. Пусть, например, в задаче требуется найти точку X, удовлетворяющую два условия. Если первое условие удовлетворяют точки фигуры K, а второе — точки фигуры P, то X должна принадлежать каждой из этих фигур. То есть X — точка пересечения фигур K и P.

■ ЗАДАЧА. Постройте прямоугольный треугольник по данному катету a и гипотенузе c (рис. 243).

■ РЕШЕНИЕ. Строим прямой угол ACB, на его стороне откладываем отрезок $CB = a$. Точки C и B — две вершины треугольника, который требуется построить. Третья вершина должна лежать, во-первых, на луче CA, во-вторых, на расстоянии c от B, то есть на окружности радиуса c с центром B. Если эту окружность пересекает луч CA в точке A, то треугольник ABC — именно тот, который требовалось построить. Ведь его угол C прямой, $BC = a$, $BA = c$.



■ Рис. 243



■ Рис. 244

- Второй способ (рис. 244). Откладываем отрезок $AB = c$ и проводим окружность диаметра AB — ГМТ, из которых AB виден под прямым углом. Дальше строим полуокружность радиуса a с центром B — ГМТ, удаленных от B на расстояние a и лежащих по одну сторону от прямой AB. Если два ГМТ пересекаются в точке C, то треугольник ABC — именно тот, который требовалось построить.

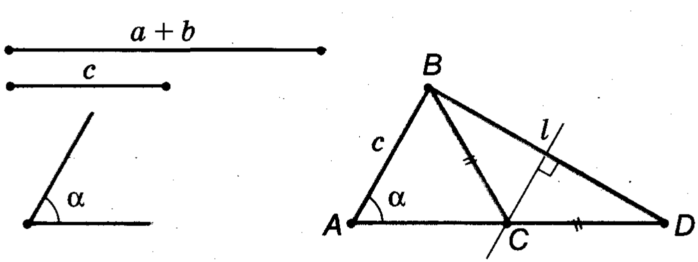
Составные части решения задачи на построение — *анализ*, *построение*, *доказательство* и *исследование*. В анализе ищут способ решения задачи, в построении выполняется само построение, в доказательстве обосновывается правильность выполненного построения, в исследовании выясняется, сколько решений имеет задача.

- ЗАДАЧА. Постройте треугольник по данной стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон (рис. 245).

- РЕШЕНИЕ.

- Анализ. Допустим, что требуемый треугольник ABC построен. Его сторона c и угол $A = \alpha$ — даны. Дан также отрезок, равный сумме сторон a и b. По данным отрезкам c и $a + b$ и углу A между ними можно построить $\triangle ABD$. Вершиной C искомого треугольника будет такая точка отрезка AD, для которой $CD = CB$. Следовательно, точка C должна лежать и на серединном перпендикуляре отрезка BD.

- Построение. По двум данным отрезкам и углу между ними строим $\triangle ABD$, после чего проводим серединный перпендикуляр l отрезка BD. Пусть прямая l пересекает отрезок AD в точке C. Проводим отрезок CB. Треугольник ABC — такой, который требовалось построить.



■ Рис. 245

- Доказательство. В треугольнике ABC $AB = c$ и $\angle A = \alpha$ по построению. $AC + CB = AC + CD = a + b$. Следовательно, $\triangle ABC$ удовлетворяет все условия задачи.
- Исследование. Задача имеет решение только при условии, что $a + b > c$.
- Примечание. Если задача несложная и способ ее решения известен, анализ можно не описывать. А в решении не обязательно выделять анализ, построение, доказательство и исследование.

Для любознательных

В математике чаще всего имеют дело с задачами: на вычисление, на доказательство, на построение, на преобразование и на исследование. Геометрическими задачами на построение активно интересовались античные геометры. Допуская лишь *классические построения* (выполняемые только линейкой и циркулем), они исследовали, какие из построений можно выполнить, а какие невозможно. В частности, выясняли:

1) можно ли любой угол разделить на три равные части;
2) можно ли построить квадрат, площадь которого была бы равна площади данного круга;
3) можно ли построить ребро такого куба, объем которого был бы в 2 раза больше объема данного куба.

Много столетий выдающиеся геометры пытались решить эти задачи и не смогли. Эти *три класические задачи* древности получили специальные названия: 1) *трисекция угла*, 2) *квадратура круга*, 3) *удвоение куба*. Последнюю задачу называют еще делосской задачей, связывая ее с древнегреческой легендой, согласно которой оракул бога Аполлона согласился спасти жителей острова Делос от чумы, если кубический жертовник в делосском храме заменят на жертовник такой же формы, но вдвое большего объема. Только почти через 2000 лет ученые убедились, что ни одну из этих трех задач с помощью лишь линейки и циркуля решить невозможно.

В настоящее время специалисты, которым приходится выполнять геометрические построения, пользуются не только линейкой и циркулем. С точки зрения класических методов такие построения *приближенные*. Но для практических нужд точности, которую обеспечивают приближенные методы, вполне достаточно.

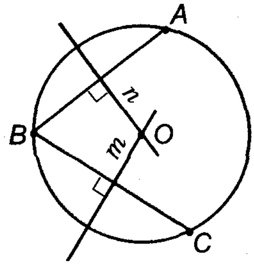
? Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какими инструментами чаще всего выполняют построения в геометрии?
2. Назовите составные части решения задачи на построение.
3. Что такое *трисекция угла, квадратура круга, удвоение куба*?

● Решаем вместе

1 Найдите центр данной окружности.

■ Обозначим на данной окружности три произволные точки A, B и C (рис. 246). Представим хорды AB, BC и проведем их серединные перпендикуляры n и m. Точка O, в которой пересекаются прямые n и m, — центр данной окружности. Ведь $OA = OB = OC$.

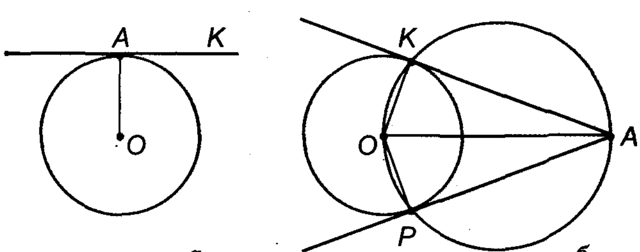


■ Рис. 246

2 Через данную точку проведите касательную к данной окружности.

■ Если данная точка A лежит на окружности центра O (рис. 247, *а*), проводим луч OA, потом — прямую AK, перпендикулярную к OA. Прямая AK — касательная, которую и требовалось построить.

Если точка A лежит вне данной окружности центра O (рис. 247, *б*), то на диаметре OA описываем окружность. Она пересечется с данной окружностью в двух точках K и P. Прямые AK и AP — искомые касательные, поскольку $AK \perp OK$ и $AP \perp OP$. (Из точек K и P вспомогательной окружности ее диаметр OM виден под прямыми углами AKO и APO.) В этом случае задача имеет два решения.



■ Рис. 247

Если точка А лежит внутри окружности, задача не имеет решения, потому что касательную провести нельзя.

● ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

А

618. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и высоте, проведенной к его основанию.

619. Постройте прямоугольный треугольник:
1) по гипотенузе и острому углу;
2) по гипотенузе и катету;
3) по катету и прилежащему к нему острому углу;
4) по катету и противолежащему углу.

620. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из этих сторон.

621. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной: 1) к одной из них; 2) к третьей стороне.

622. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник: 1) по данному катету; 2) по гипотенузе; 3) по медиане, проведенной к гипотенузе.

623. Найдите на данной прямой точку, находящуюся на данном расстоянии от другой данной прямой.

624. Найдите на данной прямой точку, находящуюся на одинаковых расстояниях от двух данных точек.

625. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла, причем одной из них — в данной точке.

626. Постройте прямоугольный треугольник по катету и радиусу описанной окружности.

627. Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности.

628. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и радиусу описанной окружности.

629. Постройте равнобедренный треугольник по радиусу описанной окружности и основанию.

Б

630. Постройте прямоугольный треугольник по радиусу описанной окружности и острому углу.

631. Даны параллельные прямые a и b и точка A между ними (рис. 248). Постройте окружность, которая проходила бы через точку A и касалась прямых a и b.

632*. Постройте равносторонний треугольник по радиусу описанной окружности.

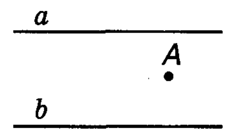


Рис. 248

633. Как построить общую касательную: а) к двум окружностям, радиусы которых одинаковые; б) к двум окружностям, радиусы которых разные?

634. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, проведенной из вершины прямого угла.

635. Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме двух других сторон.

636. Постройте прямоугольный треугольник по катету и радиусу вписанной окружности.

637. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу вписанной окружности.

638*. Постройте геометрическое место точек, из которых данный отрезок a виден под углом 90°.

639. Постройте прямоугольный треугольник по данным медиане и высоте, проведенным к гипотенузе.

640. Покажите, как можно приближенно разделить:

а) окружность на 7 равных частей;

б) произвольный угол на 3 равные части;

в) произвольную дугу окружности на 5 равных частей.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

641. Разделите прямой угол на 3 равные части.

642. Из вершины B $\triangle ABC$ проведены высота BH и медиана BM. $AH = 3$ см, $AC = 10$ см. Найдите HM, если:

1) $\angle A$ — острый; 2) $\angle A$ — тупой.

643. Докажите, что биссектрисы двух вертикальных углов лежат на одной прямой.

644. Точку, равноудаленную от всех вершин равностороннего треугольника, соединили с его вершинами (рис. 249). Докажите, что все три образовавшиеся треугольника равны.

645. Радиусы двух окружностей 3 см и 5 см. Пересекаются ли они, если расстояние между их центрами равно:

а) 1 см; б) 3 см; в) 8 см; г) 10 см?

646. Постройте развернутый угол и разделите его на 4 равные части.

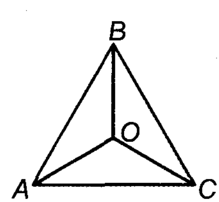


Рис. 249

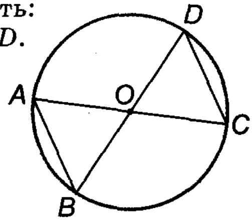
• Задачи по готовым рисункам

А | **Б**

1

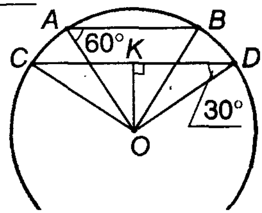
А. AC, BD — диаметры.

Доказать:
$AB \parallel CD$.



Б. $AB = 8$, $\angle A = 60°$,
$\angle D = 30°$.

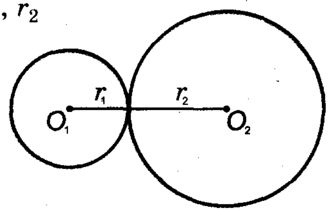
OK



2

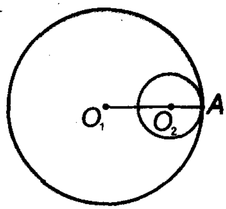
А. $r_1 : r_2 = 2 : 3$, $O_1O_2 = 15$.

r_1, r_2



Б. $O_1A = 3\,O_2A$, $O_1O_2 = 10$.

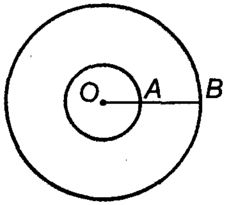
O_1A, O_2A



3

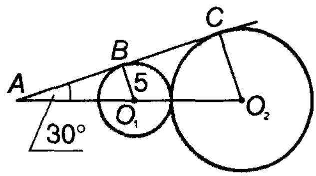
А. $OB = 3\,OA$,
$AB = 18$.

OA, OB



Б. BC — общая касательная.

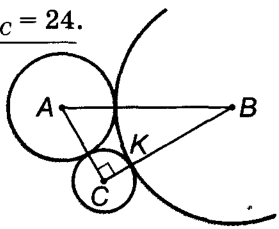
CO_2



4

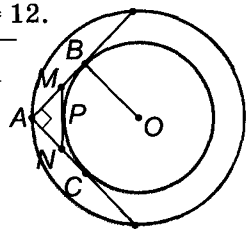
А. $CK = 2$, $KB = 7$,
$P_{\triangle ABC} = 24$.

AB



Б. B, P, C — точки касания,
$P_{\triangle AMN} = 12$.

OB



• Задачи по готовым рисункам

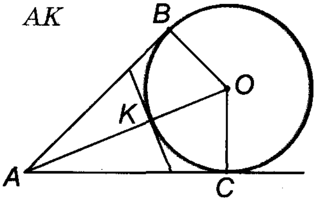
А	Б	

1

А

$\angle A = 60^\circ$,
$OB = 5$.

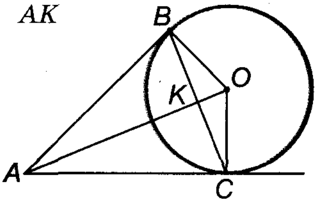
AK



Б

$\angle BAC = 60^\circ$,
$OB = 6$.

AK

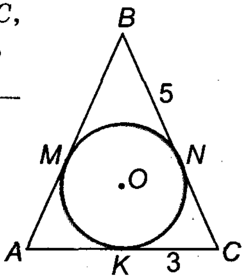


2

А

$AB = BC$,
$BN = 5$,
$KC = 3$.

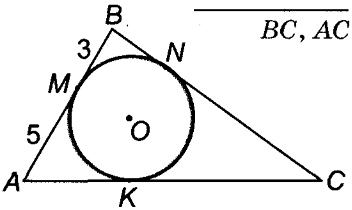
$P_{\triangle ABC}$



Б

$MB = 3, AM = 5$,
$P_{\triangle ABC} = 30$.

BC, AC

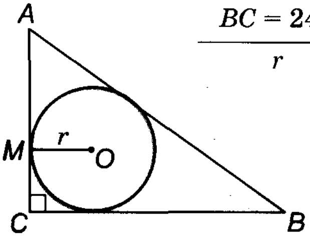


3

А

$AB = 25, AC = 7$,
$BC = 24$.

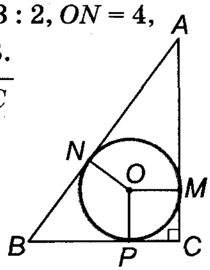
r



Б

$AN : NB = 3 : 2, ON = 4$,
$P_{\triangle ABC} = 48$.

AB, BC, AC

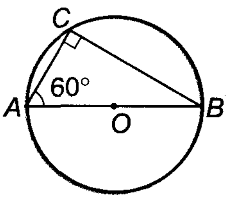


4

А

$AC = 10$.

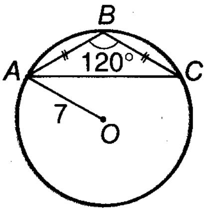
AO



Б

$OA = 7, \angle B = 120^\circ$,
$AB = BC$.

AB



• *Самостоятельная работа 5*

Вариант 1

1°. Найдите длину четверти окружности радиуса 10 см.

2•. Пользуясь циркулем и линейкой с делениями, постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету, длины которых равны 8 см и 4,5 см. Опишите около этого треугольника окружность.

3°. Сформулируйте определение серединного перпендикуляра.

Вариант 2

1°. Найдите площадь четверти круга радиуса 20 см.

2•. Пользуясь циркулем и линейкой с делениями, постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету, длины которых равны 8 см и 4 см. Опишите около этого треугольника окружность.

3°. Сформулируйте определение касательной к окружности.

Вариант 3

1°. Вписанная в прямоугольный треугольник окружность имеет радиус 5 см. На сколько сумма катетов больше гипотенузы?

2•. Пользуясь циркулем и линейкой с делениями, постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету, длины которых равны 8 см и 5 см. Опишите около этого треугольника окружность.

3°. Сформулируйте определение окружности, описанной около треугольника.

Вариант 4

1°. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если радиус окружности, описанной около треугольника, равен r.

2•. Пользуясь циркулем и линейкой с делениями, постройте треугольник по трем сторонам, длины которых равны 3 см, 3,5 см и 4 см. Опишите около этого треугольника окружность.

3°. Сформулируйте определение окружности, вписанной в треугольник.

• *Тестовые задания 5*

1. Диаметр окружности 6 см. Длина окружности равна:	а) 6π см; б) 3π см; в) 9π см; г) 36π см.
2. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит в точке пересечения:	а) биссектрис; б) медиан; в) высот; г) серединных перпендикуляров.
3. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине:	а) медианы; б) катета; в) гипотенузы; г) биссектрисы.
4. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12 см. Радиус описанной окружности:	а) 10 см; б) 6 см; в) 4 см; г) 12 см.
5. Стороны прямоугольного треугольника равны 6 см, 8 см и 10 см. Радиус вписанной окружности:	а) 4 см; б) 8 см; в) 12 см; г) 2 см.
6. Из точки *A* к окружности проведены касательные *AB* и *AC* (*B* и *C* — точки касания). Какое утверждение верно?	а) $AB = AC$; б) $AB < AC$; в) $AB > AC$; г) $AB \neq AC$.
7. Окружности радиусов 3 см и 7 см касаются внешним способом. Расстояние между их центрами:	а) 2 см; б) 4 см; в) 10 см; г) 5 см.
8. Ширина кольца, образованного концентрическими окружностями радиусов 3 см и 5 см, равна:	а) 8 см; б) 2 см; в) 4 см; г) 4π см.
9. Из точки *A* к окружности с центром *O* проведена касательная *AB* (*B* — точка касания). $\angle ABO$:	а) острый; б) прямой; в) тупой; г) развернутый.
10. Геометрическим местом точек плоскости, равноудаленных от данной точки, является:	а) окружность; б) квадрат; в) круг; г) куб.

Типовые задачи для контрольной работы

1°. Начертите окружность диаметра 5 см. Чему равен ее радиус?

2°. Имеют ли общие точки две окружности, радиусы которых 2 см и 5 см, а расстояние между их центрами 8 см?

3°. Найдите меру угла, под которым из центра окружности видна сторона вписанного равностороннего треугольника.

4°. Постройте отрезок втрое больше данного.

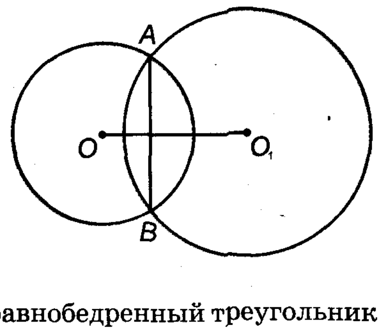
5•. Угол между двумя радиусами окружности равен 130°. Найдите угол между касательными, проведенными через концы этих радиусов.

6•. Две окружности имеют внешнее касание, а расстояние между их центрами равно 16 см. Найдите радиусы этих окружностей, если они пропорциональны числам 3 и 5.

7•. Около треугольника ABC с углами $\angle A = 30°$ и $\angle B = 60°$ описана окружность. Найдите ее радиус, если $AB = 10$ см.

8•. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе $AC = 5$ см и катету $AB = 3$ см. Опишите около него окружность.

9••. Докажите, что если две окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках A и B, то $AB \perp OO_1$.



10••. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне (6 см) и проведенной к ней медиане (5 см).

Главное в разделе 4

Окружность — фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. *Круг* — часть плоскости, ограниченная окружностью. Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку и лежащая в плоскости окружности, называется *касательной* к окружности. *Хорда* окружности — отрезок, концы которого принадлежат данной окружности. Самая большая хорда окружности — ее *диаметр*.

Диаметр окружности, проведенный через середину хорды, отличной от диаметра, перпендикулярен к ней.

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

Окружность, проходящая через все вершины треугольника, называется *описанной около данного треугольника*. Окружность, которая касается всех сторон треугольника, называется *вписанной в данный треугольник*. Около каждого треугольника можно описать окружность и в каждый треугольник можно вписать окружность. Центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения биссектрис треугольника. Центр окружности, описанной около треугольника, — точка пересечения серединных перпендикуляров сторон данного треугольника.

Серединный перпендикуляр отрезка — прямая, перпендикулярная к данному отрезку и проходящая через его середину.

Пользуясь только линейкой и циркулем, можно: строить треугольник по трем данным сторонам и угол, равный данному; проводить биссектрису угла; делить отрезок пополам; строить прямую, перпендикулярную к данной прямой, и т. п.

Один из самых важных видов геометрических задач — *задачи на построение*. Их чаще всего решают *методом геометрических мест*.

Геометрическое место точек — это множество точек, имеющих определенное свойство.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от концов отрезка, является серединный перпендикуляр этого отрезка. Речь идет о фигурах одной плоскости.

Геометрическое место точек угла, равноудаленных от его сторон, — биссектриса этого угла.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

К § 1

647. Пользуясь рисунком 250, скажите:

а) в какой точке пересекаются прямые a и b;

б) какие точки принадлежат прямой a, прямой b;

в) какие точки не принадлежат ни одной из прямых a и b;

г) принадлежит ли точка O прямой a, прямой b?

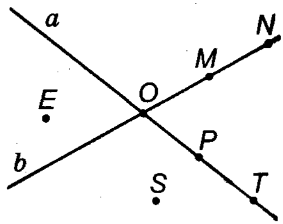


Рис. 250

648. Точки A, B и C лежат на прямой A. Точки M, N, K не принадлежат прямой a. Изобразите это на рисунке.

649. $M \in a$, $N \notin a$, $K \notin a$, причем N и K лежат по разные стороны от a. Изобразите это на рисунке.

650. На прямой a даны точки A и B. Изобразите точки M и N так, чтобы M лежала между A и B, а B — между M и N.

651. Изобразите на рисунке:

а) три прямые, пересекающиеся в одной точке;

б) три прямые, две из которых не пересекаются;

в) три прямые, попарно пересекающиеся в трех точках.

На сколько частей в каждом случае прямые разбивают плоскость?

К § 2

652. M — внутренняя точка отрезка AB. Найдите длину AB, если $BM = 5$ см и:

а) AM на 2 см больше BM;

б) AM в 3 раза больше BM;

в) $AM : BM = 3 : 2$;

г) $AB = 3\,AM$.

653. Точки A, B и C лежат на одной прямой, причем отрезок AB в 3 раза меньше BC. Найдите AB и BC, если $AC = 8$ см. Сколько решений имеет задача?

654. Точки A, B, C и D лежат на одной прямой, причем отрезок $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $CD = 7$ см. Чему равен отрезок AD? Рассмотрите все возможные случаи.

655. Точка C — середина отрезка AB, D — середина отрезка AC. Найдите отношения $AD : AB$, $AD : BC$, $BC : CD$.

656. Точка C — середина отрезка AB, D — середина CB. Найдите AB, если:

а) $CD = 2$ см; б) $BC - CD = 3$ см; в) $AC - DC = 4$ см.

657. M — внутренняя точка отрезка AB. K и P — середины отрезков AM и MB соответственно. Найдите KP, если $AB = 10$ см.

658. Точка M — середина отрезка AB, а точка K делит отрезок AM в отношении $AK : KM = 1 : 2$. Найдите MK, если:

а) $AB = 12$ см; б) $BM = 9$ см; в) $MB - AK = 10$ см.

659. На прямой a лежат точки A, B и C, причем отрезок $AB = 12$ см, $AC + CB = 15$ см. Найдите длины отрезков AB и BC.

660. Точки A, B и C лежат на одной прямой. $BC = 6$ см, $AB + AC = 10$ см. Найдите AB и AC.

661. $AB = 10$ см. C — середина AB. На прямой AB найдите все такие точки D, что $DA + DB + DC = 12$ см. Изобразите эти точки на рисунке.

662. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой a, точка $M \in a$. $AM = 10$ см, $BM = 15$ см, $AB = 23$ см. Является ли точка M точкой пересечения прямых AB и a?

663. Имеется линейка с делениями 3 см и 7 см. Как с помощью этой линейки построить отрезок длиной 4 см? 11 см?

К § 3

664. OM — внутренний луч $\angle AOB$. Найдите $\angle AOM$ и $\angle BOM$, если $\angle AOB = 80°$ и:

а) $\angle AOM$ в 3 раза меньше $\angle MOB$;
б) $\angle BOM$ на 20° больше $\angle AOM$;
в) $\angle AOM : \angle BOM = 1 : 3$;
г) $\angle BOM = \angle AOM$.

665. Прямой угол разбили двумя внутренними лучами на углы, один из которых на 20° больше другого и на 20° меньше третьего. Найдите эти углы.

666. OC — биссектриса $\angle AOB$, OM — биссектриса $\angle AOC$. Найдите $\angle AOB$, если $\angle MOC = 20°$.

667. $\angle AOB = 80°$, $\angle BOC = 20°$. OM — биссектриса $\angle AOC$. Найдите $\angle MOC$. Рассмотрите все возможные случаи.

668. OC — биссектриса $\angle AOB$, OM — внутренний луч $\angle AOC$. $\angle AOM : \angle MOC = 1 : 3$. Найдите $\angle AOM$ и $\angle AOB$, если $\angle MOC = 60°$.

669. Развернутый угол разделен лучом на два угла так, что половина одного из них равна трети другого. Найдите эти углы.

670*. OC — биссектриса $\angle AOB$, M — внутренняя точка $\angle AOC$. Докажите, что $\angle MOC$ равен полуразности углов BOM и AOM.

671*. OC — биссектриса $\angle AOB$, OA — биссектриса $\angle MOC$. Докажите, что $\angle MOC$ равен полусумме углов AOM и BOM.

672. Имеется угольник с углом 50°. Как с его помощью построить углы 100°; 80°; 160°?

К § 4

673. $\angle AOM$ и $\angle BOM$ — смежные углы. Определите $\angle AOB$, если:

а) $\angle BOC = 50°$;
б) $\angle BOC$ больше $\angle AOB$ на 20°;
в) $\angle BOC$ меньше $\angle AOB$ в 4 раза;
г) $\angle AOB : \angle BOC = 3 : 2$;
д) $\angle AOB - \angle BOC = 30°$.

674. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, равен 35°25′. Вычислите другие углы.

675. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, в 2 раза больше другого. Определите меры полученных углов.

676. Прямые AB и CD пересекаются в точке O, причем $\angle AOC = 130°$. Найдите угол между биссектрисами:
а) $\angle COB$ и $\angle BOD$; б) $\angle COB$ и $\angle AOD$.

677. Прямые AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что биссектрисы углов BOC и AOC перпендикулярны.

678. Прямые AB и CD пересекаются в точке O, OE — биссектриса $\angle BOD$, $\angle DOE = 55°$. Найдите $\angle AOC$ и $\angle COB$.

679. $\angle AOB$ и $\angle BOC$ — смежные углы, OE — биссектриса $\angle BOC$, $\angle EOC = 45°$. Докажите, что $OB \perp AC$.

680. Один из углов, полученных при пересечении двух прямых, в 9 раз меньше суммы трех других углов. Найдите эти углы.

681. Один из углов, полученных при пересечении двух прямых, в 4 раза больше суммы двух смежных с ним углов. Вычислите эти углы.

К § 5

682. С помощью транспортира постройте $\angle AOB = 70°$. M — внутренняя точка $\angle AOB$. Через точку M проведите прямые, перпендикулярные к сторонам угла.

683. С помощью транспортира постройте $\angle AOB = 120°$. M — внутренняя точка $\angle AOB$. Через точку M проведите прямые, параллельные сторонам угла.

684. Площадь квадрата $ABCD$ равна 16 см². Найдите расстояние от точки A до сторон BC и CD.

685. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 20 см. AB меньше BC на 2 см. Постройте данный прямоугольник и найдите расстояние от точки A до сторон BC и CD.

686. Пусть $\angle AOB$ и $\angle BOC$ — смежные углы. Перпендикулярны ли лучи OM и ON (M — внутренняя точка $\angle AOB$, а N — $\angle BOC$), если:

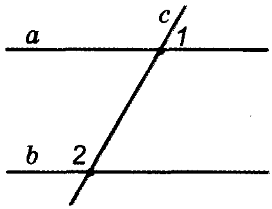
а) $\angle BOC = 50°$, ON — биссектриса $\angle BOC$, $\angle AOM = 70°$;

б) $\angle AOB : \angle BOC = 2 : 1$, $\angle MOB = \frac{1}{3}\angle AOB$, $\angle CON = 10°$;

в) $\angle AOB - \angle BOC = 20°$, $\angle MOB = \angle NOC = 40°$;

г) $\angle DOC = \frac{2}{3}\ \angle AOB$, $\angle NOC : \angle NOB = 1 : 2$, $\angle AOM - \angle BOM = 24°$?

К § 6



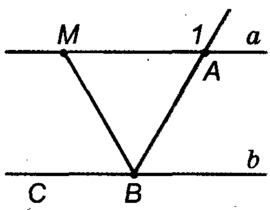
■ Рис. 251

687. Параллельны ли прямые a и b (рис. 251), если:

а) $\angle 1 = 40°$, $\angle 2 = 140°$;

б) $\angle 1$ в 3 раза меньше $\angle 2$, $\angle 2$ на 90° больше $\angle 1$;

в) $\angle 1 : \angle 2 = 1 : 4$, $\angle 1$ на 108° меньше $\angle 2$?



■ Рис. 252

688. BM — биссектриса $\angle ABC$ (рис. 252). Параллельны ли прямые a и b, если:

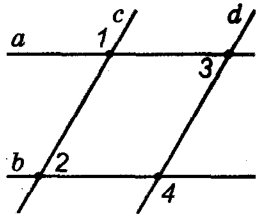
а) $\angle 1 = 160°$, $\angle ABM = 80°$;

б) $\angle CBM = 50°$, $\angle 1 = 120°$;

в) $\angle ABM$ в 2 раза меньше $\angle 1$?

689. Запишите пары параллельных прямых (рис. 253), если:

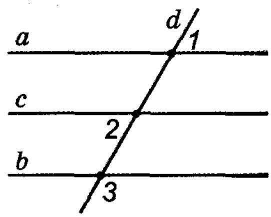
а) $\angle 1 = 120°$, $\angle 2 = 70°$, $\angle 3 = 60°$;
б) $\angle 1 = 120°$, $\angle 3 = 80°$, $\angle 4 = 100°$;
в) $\angle 2 = 60°$, $\angle 3 = 80°$, $\angle 4 = 120°$;
г) $\angle 3 = \angle 2 = 60°$, $\angle 4 = 120°$.



■ Рис. 253

690. Докажите, что противоположные стороны квадрата лежат на параллельных прямых.

691. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAD$ в 2 раза меньше $\angle ABC$, а $\angle ABC$ на 60° больше $\angle BAD$. Докажите, что $BC \parallel AD$.



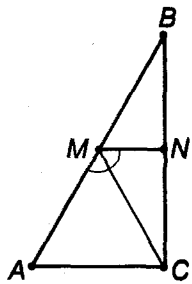
■ Рис. 254

692. В четырехугольнике $ABCD$ прямая BD делит пополам $\angle ABC$ и $\angle ADC$. Параллельны ли противоположные стороны четырехугольника, если:

а) $\angle ABC = 140°$, $\angle BDC = 70°$;
б) $\angle ABC = \angle ADC$?

693. Запишите пары параллельных прямых (рис. 254), если:

а) $\angle 1 = 70°$, $\angle 2 = 80°$, $\angle 3 = 110°$;
б) $\angle 1 = 60°$, $\angle 2 = 60°$, $\angle 3 = 100°$;
в) $\angle 1 = 50°$, $\angle 2 = 80°$, $\angle 3 = 100°$;
г) $\angle 1 = \angle 2 = 40°$, $\angle 3 = 140°$.



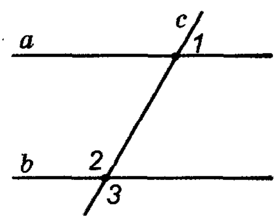
■ Рис. 255

694. На сторонах AB и BC $\triangle ABC$ (рис. 255) взяты точки M и N так, что MC — биссектриса $\angle AMN$, $\angle ACM = 50°$. Докажите, что: $MN \parallel AC$, если $\angle BMN = 80°$.

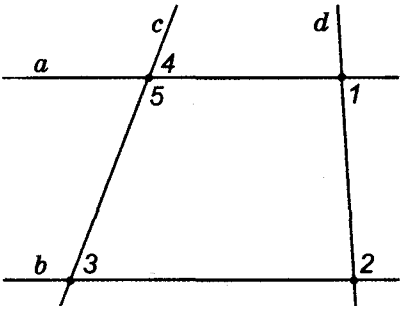
К § 7

695. Прямые a и b параллельны (рис. 256). Найдите $\angle 3$, если:

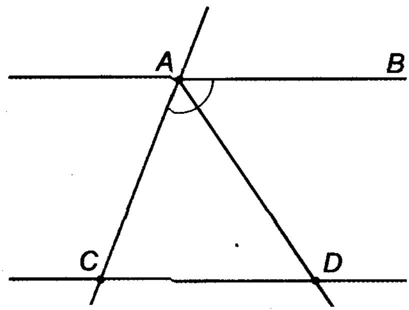
а) $\angle 1 = 70°$;
б) $\angle 1$ на 30° меньше $\angle 2$;
в) $\angle 1 : \angle 2 = 4 : 5$;
г) $\angle 1$ составляет $\frac{3}{5}$ $\angle 2$.



■ Рис. 256



■ Рис. 257



■ Рис. 258

696. Решите задачи, пользуясь рисунком 257:

а) $\angle 1 = 80°$, $\angle 2 = 100°$, $\angle 3 = 60°$. Найдите $\angle 4$;

б) $\angle 4 = \angle 3$, $\angle 2 = 2\angle 1$. Найдите $\angle 1$ и $\angle 2$;

в) $\angle 1 = 55°$, $\angle 2 = 125°$, $\angle 5 : \angle 3 = 3 : 1$. Найдите $\angle 4$;

г) $\angle 3 = 70°$, $\angle 5 = 110°$, $\angle 2 - \angle 1 = 70°$. Найдите $\angle 1$ и $\angle 2$.

697. $AB \parallel CD$, AD — биссектриса $\angle CAB$ (рис. 258). $\angle ADC = 50°$. Найдите $\angle ACD$.

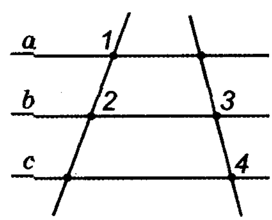
698. На сторонах AB и BC $\triangle ABC$ взяты точки M и N так, что $MN \parallel AC$ (см. рис. 255). $\angle ACM = 65°$. MC — биссектриса $\angle AMN$. Найдите $\angle BMN$ и $\angle BAC$.

699. Параллельны ли прямые a и c (рис. 259), если:

а) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 3 = \angle 4$;

б) $\angle 2 = 50°$, $\angle 3 = 100°$, $\angle 4 = 100°$, $\angle 1 - \angle 4 = 30°$;

в) $\angle 2 : \angle 3 = 1 : 2$, $\angle 3 - \angle 2 = 60°$, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 4 = 130°$?



■ Рис. 259

К § 8

700. Докажите, что углы, полученные при пересечении двух перпендикулярных прямых, равны.

701. Докажите, что внешние накрест лежащие углы, образованные секущей с параллельными прямыми, равны.

702. Докажите, что сумма внешних односторонних углов, образованных секущей с параллельными прямыми, равна 180°.

703. Докажите, что противоположные стороны прямоугольника параллельны.

704. Докажите, что биссектрисы внешних накрест лежащих углов, образованных секущей с параллельными прямыми, параллельны.

705. Прямая, параллельная стороне BC равностороннего $\triangle ABC$, пересекает его стороны AB и AC в точках K и P. Докажите, что $AK = KP = PA$.

706. В четырехугольнике $ABCD$ $BC \parallel AD$. Докажите, что сумма углов A и B данного четырехугольника равна сумме углов C и D.

707. В $\triangle ABC$ $P \in AB$, $K \in BC$, $PK \parallel AC$. Докажите, что углы $\triangle ABC$ равны углам $\triangle PBK$.

708. Через точку на плоскости проведены 4 прямые. Докажите, что по крайней мере один из полученных углов меньше 47°.

К § 9

709. Найдите периметр треугольника, если одна из его сторон равна 5 см, вторая на 3 см больше, а третья на 3 см меньше суммы двух первых.

710. Существует ли треугольник, у которого одна сторона в 2 раза больше второй, третья на 3 см меньше второй, а периметр равен 11 см?

711. Две стороны треугольника равны 2 см и 3 см. Какому целому числу сантиметров может быть равна третья сторона треугольника?

712. Из вершины B $\triangle ABC$ проведена высота BK. Найдите KC, если $AC = 10$ см, $AK = 3$ см. Рассмотрите случаи, когда:
а) $\angle A$ — острый; б) $\angle A$ — тупой.

713. В $\triangle ABC$ проведена высота BK. $AK : KC = 3 : 5$, $AC = 16$ см. Найдите AK и KC, если: а) $\angle A$ — острый; б) $\angle A$ — тупой.

714. Высота и медиана прямоугольного треугольника, проведенные из вершины прямого угла, делят угол на три равные части. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенной из этой вершины.

715. Из вершины тупого угла B $\triangle ABC$ проведены высота, биссектриса и медиана. Угол между биссектрисой и высотой в 2 раза меньше угла между биссектрисой и медианой. Найдите эти углы, если угол между высотой и медианой равен 60°.

К § 10

716. Найдите углы треугольника, если они пропорциональны числам 2, 3 и 7.

717. Найдите внутренние углы треугольника, если один из них в 3 раза больше другого, а внешний угол при третьей вершине равен 100°.

718. Найдите внутренние углы треугольника, если внешние углы пропорциональны числам 3, 4 и 5.

719. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла, равен 20°.

720. В прямоугольном $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) проведена высота CH. Докажите, что $\angle HCB = \angle CAB$.

721. Найдите углы $\triangle ABC$, если $\angle B = 100°$; а биссектриса B является одновременно и высотой.

722. Один из углов треугольника на 20° больше второго и на 50° меньше третьего. Найдите угол между биссектрисами меньших углов треугольника.

723. В $\triangle ABC$ $\angle A = 70°$, $\angle B = 30°$. Найдите угол между:

а) биссектрисами, проведенными из вершин A и C;

б) высотами, проведенными из вершин A и C.

724*. Докажите, что угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины неравнобедренного $\triangle ABC$, равен полуразности углов A и C.

К § 11

725. Точка M делит отрезок AB на два отрезка, длины которых 5 см и 7 см. На какие отрезки разделит точка N отрезок CD, если $CD = AB$ и $CN : ND = 1 : 5$?

726. $\angle AOB = \angle COD$, OM — внутренний луч угла COD, $\angle COM : \angle MOD = 2 : 3$, а $\angle MOD - \angle COM = 30°$. Найдите $\angle AOB$.

727. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. $\angle A = 70°$, $\angle B = 50°$. Найдите $\angle C$.

728. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. $AC = 7$ см, $AB - BC = 2$ см. Найдите стороны $\triangle A_1B_1C_1$, если его периметр равен 21 см.

729. Равны ли углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если $\angle A = 70°$, $\angle C = 80°$, а углы $\triangle A_1B_1C_1$ пропорциональны числам 7, 5 и 8?

730. Равны ли квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, если периметр квадрата $ABCD$ равен 20 см, а площадь квадрата $A_1B_1C_1D_1$ равна:

а) 36 см^2; б) 25 см^2?

731. Радиус одной из окружностей 5 см, а длина другой 10π см. Равны ли эти окружности?

732. Длина одной из двух окружностей 14π см, а площадь круга, ограниченного второй окружностью 64π см^2. Равны ли эти окружности?

К § 12

733. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. $AD \parallel CB$ и $AD = CB$. Докажите, что $\triangle AOD = \triangle COB$.

734. Равные отрезки AB и CD пересекаются так, что $\angle ABC = \angle BCD$. Докажите, что $AC = BD$.

735. Даны отрезок AB и точки C и D такие, что $\angle ACB = \angle ADB$ и $\angle CAB = \angle ABD$. Докажите, что $AC = BD$. Рассмотрите случаи, когда точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB и в разных полуплоскостях.

736. На параллельных прямых a и b взяты точки A, B, C и D, как показано на рисунке 260, и $AB = CD$. Докажите, что $AC \parallel BD$.

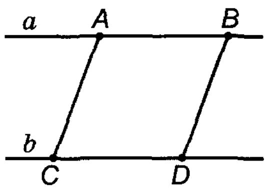


Рис. 260

737. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. $AO = CO$, $BO = DO$. Докажите, что $\angle OBD = \angle ODB$.

738. В окружности с центром O проведены диаметры AB и CD. Докажите, что $AC = BD$ и $AC \parallel BD$.

739. На окружности с центром O по одну сторону от диаметра взяты точки B и C такие, что $\angle AOB = \angle COD$. Докажите, что $BD = AC$.

740. CD — медиана $\triangle ABC$, C_1D_1 — медиана $\triangle A_1B_1C_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$.

741. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Докажите, что биссектрисы, проведенные из вершин B и B_1, равны.

742. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Докажите, что высоты, проведенные из вершин A и A_1, равны.

743. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Докажите, что медианы, проведенные из вершин B и B_1, равны.

К § 13

744. Один из углов равнобедренного треугольника равен 110°. Вычислите другие углы треугольника.

745. Один из углов равнобедренного треугольника равен 80°. Вычислите другие углы треугольника. Сколько решений имеет задача?

746. Одна из сторон равнобедренного треугольника на 3 см больше другой. Найдите стороны треугольника, если его периметр 21 см. Рассмотрите все возможные случаи.

747. На основании AC равнобедренного $\triangle ABC$ взяты точки M и N такие, что $AM = CN$. Докажите, что $\triangle DKB$ — равнобедренный.

748. Один из углов равнобедренного треугольника равен 100°. Под каким углом пересекаются:

а) равные биссектрисы треугольника;

б) продолжения равных высот треугольника?

749. В $\triangle ABC$ медиана AM перпендикулярна к биссектрисе BK. Найдите BC, если $AB = 10$ см.

750. Докажите, что медианы, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.

751. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. $AO = CO$, $BO = DO$, $AO \neq BO$. K — точка пересечения прямых AD и BC. Докажите, что $\triangle DKB$ — равнобедренный. Рассмотрите случаи:

а) $AO < BO$; б) $AO > BO$.

752. Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол между биссектрисами, проведенными к боковым сторонам, в 2 раза больше угла при вершине.

753. Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен углу между биссектрисами, проведенными к основанию и к боковой стороне.

754. В равнобедренном $\triangle ABC$ угол при вершине B в 2 раза меньше угла при основании, AD — биссектриса, $D \in BC$. Докажите, что $\triangle CAD$ и $\triangle ADB$ равнобедренные.

К § 14

755. Даны отрезок AB и точки C и D вне прямой AB такие, что $AC = BD$ и $AD = BC$. Докажите, что $\triangle ACB = \triangle BDA$. Рассмотрите разные случаи расположения точек C и D.

756. Противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ попарно равны. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

757. Противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ попарно равны. Докажите, что они параллельны.

758. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. $AO = CO$, $BO = DO$. Докажите, что $\triangle ADC = \triangle CBD$.

759. Внутри равнобедренного $\triangle ABC$ с основанием AC взята точка D такая, что $AD = CD$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CDB$.

760. Точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB, $AC = AD$ и $BC = BD$. Докажите, что AB — биссектриса $\angle CAD$.

761. Треугольники ACB и ADB имеют общее основание AB. $AC = AD$, $BC = BD$. Докажите, что $AB \perp CD$.

762. Точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB, $AC = BD$ и $AD = CB$. Докажите, что $\triangle AOB$ — равнобедренный, где O — точка пересечения отрезков AD и BC.

763. Точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB, $AC = BD$ и $AD = CB$. Докажите, что $\triangle AKB$ — равнобедренный, где K — точка пересечения отрезков AC и BD.

К § 15

764. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если один из них в 4 раза больше другого.

765. Углы треугольника пропорциональны числам 1, 2 и 3. Докажите, что треугольник прямоугольный.

766. Один из углов треугольника равен сумме двух других. Докажите, что треугольник прямоугольный.

767. Один из катетов прямоугольного треугольника больше другого на 7 см и меньше гипотенузы на 1 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр 30 см.

768. Медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Докажите, что треугольник прямоугольный.

769. Найдите меньший катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 10 см, а один из углов 30°.

770. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12 см, а один из углов 30°. Найдите отрезки, на которые высота, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу.

771. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$, BP — биссектриса, $BP = 5$ см. Найдите AC.

772. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CK \perp AB$, $K \in AB$. Найдите расстояние от точки K до BC, если $AC = 8$ см.

773. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 10 см. Найдите длину высоты, проведенной из вершины прямого угла.

774. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны по 10 см. CK — высота, проведенная из вершины прямого угла. Найдите расстояние от точки K до катетов.

775. M, N, P и K — середины сторон квадрата $ABCD$. Докажите, что $MNPK$ — квадрат.

К § 16

776. В $\triangle ABC$ $\angle A = 70°$, $\angle B = 80°$. Укажите наибольшую и наименьшую стороны треугольника.

777. В $\triangle ABC$ $AB : 2 = BC : 3 = AC : 7$. Укажите наибольший и наименьший углы треугольника.

778. Докажите, что наибольшая сторона треугольника лежит против наименьшего внешнего угла.

779. В $\triangle ABC$ на стороне AC взята точка K такая, что $AB = KB$. Докажите, что $\angle A > \angle C$.

780. Высота BK $\triangle ABC$ делит сторону AC в отношении $AK : KC = 1 : 3$. Сравните углы A и C.

781. Две стороны равнобедренного прямоугольного треугольника равны 3 см и 6 см. Определите третью сторону треугольника.

782. Одна сторона равнобедренного треугольника равна 39 см, периметр треугольника — 157 см. Найдите другие стороны треугольника.

783. Две стороны треугольника равны 3 см и 10 см. Каким натуральным числом может быть выражена длина третьей стороны?

784. Одна сторона треугольника равна 0,6 см, другая — в 3 раза больше. Найдите периметр треугольника, если длина третьей стороны — натуральное число.

785. Две стороны равнобедренного треугольника равны 5 см и 2 см. Может ли длина высоты, проведенной к основанию, быть выражена натуральным числом?

786. Боковая сторона и основание равнобедренного треугольника равны соответственно 5 см и 6 см. Найдите длину высоты, проведенной к основанию, воспользовавшись теоремой Пифагора (см. с. 118).

К § 17

787. Хорда AB окружности с центром O равна радиусу этой окружности. Найдите $\angle AOB$.

788. Найдите расстояние от центра O окружности радиуса r до хорды AB, если $\angle AOB = 120°$.

789. Диаметры AB и CD окружности с центром O перпендикулярны. Докажите, что $\angle ACB = 90°$.

790. В окружности с центром O проведены хорды AB и CD. $\angle AOB = 90°$, $\angle COD = 120°$. Какая из хорд лежит от центра окружности дальше и почему?

791. Хорды AB и CD параллельны и лежат на одинаковом расстоянии от центра окружности. Докажите, что $AB = CD$.

792. Даны две окружности с радиусами 3 см и 5 см. Как расположены эти окружности, если расстояние между их центрами равно:

а) 6 см; б) 8 см; в) 10 см?

793. Две окружности касаются внешним способом. Расстояние между их центрами равно 12 см. Найдите радиусы окружностей, если один из них больше другого на 2 см.

794. Две окружности имеют внутреннее касание. Расстояние между их центрами равно 8 см. Найдите радиусы окружностей, если один из них в 3 раза меньше другого.

795. Три окружности с центрами O_1, O_2 и O_3 попарно касаются внешним способом. Найдите их радиусы, если они пропорциональны числам 2, 3 и 4, а периметр $\triangle\ O_1O_2O_3$ равен 36 см.

796. Из точки A к окружности проведены касательные AB и AC, прямая PK касается окружности в точке M (рис. 261). Найдите AB и AC, если периметр $\triangle\ AKP = 36$ см.

797. Из точки A к окружности с центром O проведены касательные AB и AC. $\angle\ BOC = 120°$, $AB = 7$ см. Найдите периметр $\triangle\ ABC$.

798. Найдите AB — ширину кольца, образованного концентрическими окружностями радиусов 10 см и 7 см.

799. Найдите радиусы двух концентрических окружностей, если они относятся как 2 : 5, а ширина кольца равна 9 см.

800. Даны две концентрические окружности. Из точки A окружности радиуса 10 см к окружности меньшего радиуса проведены касательные AB и AC (рис. 261). Найдите радиус меньшей окружности, если $\angle\ BAC = 60°$.

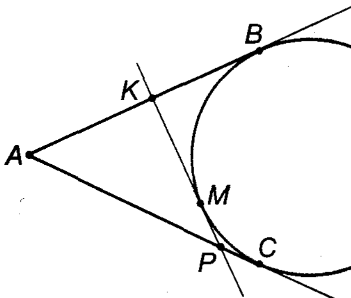


Рис. 261

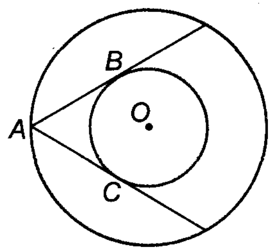


Рис. 262

К § 18

801. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от концов хорды AB окружности с центром O.

802. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от концов основания равнобедренного треугольника.

803. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от вершин равностороннего треугольника.

804. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от сторон равностороннего треугольника.

805. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых.

806. Найдите геометрическое место центров окружностей, которые касаются двух параллельных прямых.

807. Дана окружность с центром O радиуса r. Найдите геометрическое место точек, лежащих на расстоянии $2r$ от точки O.

808. Дана окружность радиуса 10 см. Найдите геометрическое место центров окружностей радиуса 3 см, которые касаются данной окружности:

а) внешним способом; б) внутренним способом.

809. Даны две окружности равных радиусов, касающиеся внешним способом. Докажите, что геометрическим местом точек, равноудаленных от центров окружностей, является общая касательная этих окружностей, проходящая через точку касания.

К § 19

810. Угол B прямоугольного $\triangle ABC$ равен $60°$, катет $BC = 5$ см. Найдите радиус описанной окружности.

811. Стороны прямоугольного $\triangle ABC$ равны 9 см, 12 см и 15 см. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей.

812. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 20 см вписана окружность радиуса 3 см. Найдите периметр данного треугольника.

813. Точка касания окружности, вписанной в треугольник, делит одну из сторон на отрезки 5 см и 7 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 44 см.

814. В $\triangle ABC$ сторона $AC = 15$ см. Точка касания вписанной в треугольник окружности делит сторону AB пропорционально числам 2 и 1, начиная от вершины A. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 42 см.

815. Стороны треугольника равны 5 см, 7 см и 10 см. Найдите отрезки, на которые точка касания вписанной окружности делит наибольшую сторону.

816. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 8 см. Найдите радиус описанной окружности.

817. В треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают. Найдите углы треугольника.

818. В $\triangle ABC$ вписана окружность, $BC = a$. Докажите, что расстояние от точки A до ближайшей точки касания равно $p - a$, где p — полупериметр.

819. В прямоугольный треугольник со сторонами $AB = 10$ см, $AC = 8$ см и $BC = 6$ см вписана окружность. MN — касательная к окружности, проведенная параллельно BC ($M \in AB$, $N \in BC$). Найдите периметр $\triangle AMN$.

820. Дан $\triangle ABC$ со сторонами 7 см, 9 см и 10 см. На его меньших сторонах AB и BC взяты точки P и K такие, что прямая PK касается окружности, вписанной в треугольник. Найдите периметр $\triangle PBK$.

К § 20

821. Разделите данный отрезок в отношении 1 : 3.

822. Постройте прямой угол и проведите его биссектрису.

823. Постройте прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см.

824. Постройте треугольник со сторонами 5 см, 7 см и 9 см.

825. Постройте равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b.

826. Постройте равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α.

827. Постройте остроугольный и тупоугольный треугольники и впишите в них окружности.

828. Постройте прямоугольный треугольник с катетами a и b и опишите около него окружность.

829. Постройте треугольник со сторонами a и b и углом между ними 120°. Найдите центр описанной окружности и опишите эту окружность.

830. Постройте треугольник по двум сторонам и внешнему углу при их общей вершине.

831. Начертите две параллельные прямые, расстояние между которыми равно данному отрезку.

К § 21

832. Постройте треугольник, периметр которого равен 18 см, а стороны пропорциональны числам 2, 3 и 4.

833. Постройте прямоугольник, периметр которого равен 20 см, а неравные стороны пропорциональны числам 2 и 3.

834. Даны пересекающиеся прямые a и c и отрезок KP. На прямой a укажите точку, удаленную от прямой c на расстояние KP.

835. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из этих сторон.

836. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный:

а) 30°; б) 60°; в) 15°; г) 120°; д) 150°; е) 75°.

837. Постройте треугольник по двум его внешним углам и стороне, соединяющей вершины этих углов.

838. Опишите около данной окружности:

а) квадрат; б) равносторонний треугольник.

839. Впишите в данную окружность:

а) квадрат; б) равносторонний треугольник.

840. Дана окружность радиуса r. Постройте геометрическое место середин его хорд длины r.

841. Даны точки A, B, C. Проведите через точку A прямую, равноудаленную от B и C.

842. Около данной окружности опишите треугольник, два угла которого даны.

843. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся обеих сторон данного угла.

844. Постройте такую окружность данного радиуса, чтобы она касалась одной стороны данного угла, а ее центр находился на другой его стороне.

845. Постройте окружность данного радиуса, которая касалась бы данной прямой в данной ее точке.

846. Постройте геометрическое место точек, из которых данная окружность видна под:

а) прямым углом; б) углом 60°.

847. Постройте окружность, касающуюся каждой из двух данных концентрических окружностей.

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

848. Расстояние от Земли до Солнца равно приблизительно 149 500 тыс. км, а от Земли до Луны — 400 тыс. км. Найдите расстояние от Луны до Солнца во время:

а) солнечного затмения;

б) лунного затмения.

849. Точки A, B, C лежат на одной прямой; точки K, P, T — середины отрезков AB, AC и BC. Докажите, что $KP = BT$.

850. Точка C — середина отрезка AB. Найдите на отрезке AB такую точку X, чтобы выполнялось равенство $XA = 1{,}5\,(XB + XC)$.

851. Один из смежных углов в три раза больше их разности. Найдите меры этих углов.

852. Точки A, B, C, D расположены на плоскости так, что $AB = BC = CA$ и $DA = DB = DC$. Найдите меру угла ADB.

853. Найдите сумму углов A, B, C, D, E, F, K семиугольной звезды (рис. 263).

854. Внутри треугольника ABC обозначена произвольная точка X. Докажите, что угол AXC больше угла ABC.

855. Постройте угол на 25% больше данного острого угла.

856. Могут ли две высоты треугольника точкой пересечения делиться пополам?

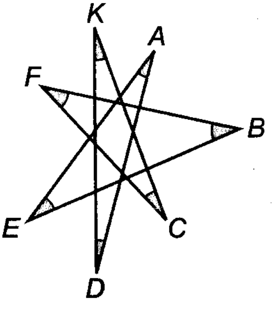


Рис. 263

857. Найдите периметр треугольника, если он больше одной стороны треугольника на a, второй — на b, третьей — на c.

858. Докажите, что сумма медиан треугольника меньше его периметра, но больше полупериметра.

859. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на несколько равнобедренных треугольников.

860. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $AC = AO = BO = BD$. Докажите, что $OC = OD$.

861. Отрезок BB_1 — биссектриса $\triangle$ ABC. Докажите, что $AB > AB_1$ и $BC > B_1C$.

862. Докажите, что сумма расстояний от любой точки основания остроугольного равнобедренного треугольника до его боковых сторон является постоянной.

863. В $\triangle$ ABC $AB = BC$, $\angle B = 20°$. На стороне AB обозначена такая точка M, что $BM = AC$. Найдите угол ACM.

864. Острые углы прямоугольного треугольника пропорциональны числам 1 и 3. Докажите, что биссектриса его прямого угла равна одному из катетов.

865. Один из острых углов прямоугольного треугольника на $n°$ больше другого. Найдите угол между медианой и высотой треугольника, проведенными из вершины прямого угла.

866. Высота и медиана, проведенные из вершины треугольника, делят его угол на три равные части. Найдите углы этого треугольника.

867. Докажите, что каждая сторона треугольника из центра вписанной в него окружности видна под тупым углом.

868. Около равностороннего треугольника ABC описана окружность. Точка K окружности лежит внутри угла C. Докажите, что $KA + KB = KC$.

869. Гипотенуза прямоугольного треугольника в 4 раза длиннее проведенной к ней высоты. Найдите меры острых углов треугольника.

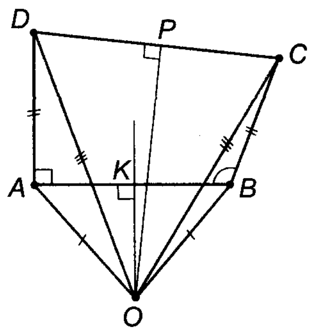


Рис. 264

870. Найдите ошибку в рассуждениях.

Докажем, что прямой угол равен тупому. Пусть угол ABC тупой, а DAB прямой (рис. 264). Отложим $AD = BC$, проведем отрезок DC и серединные перпендикуляры KO и PO отрезков AB и CD. Они пересекутся в некоторой точке O, поскольку прямые AB и CD не параллельны. Соединив точку O с A, B, C и D, получим равные треугольники OAD и OBC (по трем сторонам). Следовательно, $\angle OAD = \angle OBC$. Углы OAB и OBA тоже равны. Поэтому $\angle DAB = \angle ABC$, то есть прямой угол равен тупому.

871. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза — c. Найдите диаметр вписанной окружности.

872. Постройте прямоугольный треугольник:

1) по катету и разности двух других его сторон;

2) по гипотенузе и разности катетов.

873. Все всадники на лошадях, изображенные на рисунке 265, — равные фигуры. Найдите площадь одной фигуры, если точки A, B, C, D — вершины четырехугольника площадью S.

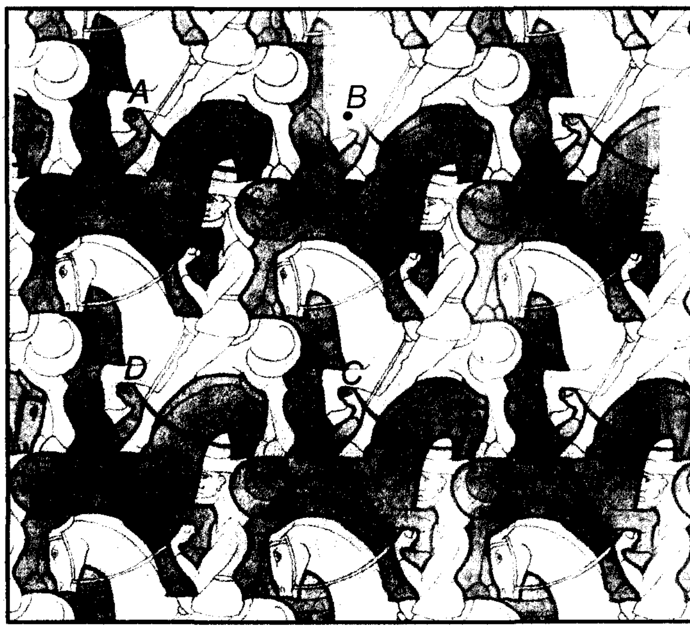


Рис. 265

874. Постройте треугольник по двум углам и разности противолежащих им сторон.

875. Дан тупоугольный треугольник. Проведите прямую, чтобы она отсекала от него такой треугольник, две стороны и угол которого были бы равны двум сторонам и углу данного треугольника.

876. Проведите часть биссектрисы угла, вершина которого недоступна (лежит за пределами тетради).

877. Постройте треугольник по периметру и двум углам.

878. Решите кроссворд (рис. 266).

П о г о р и з о н т а л и: **1.** Наибольшая хорда окружности. **5.** Определенный промежуток времени в школьных занятиях. **7.** Инструмент для вычерчивания окружностей. **8.** Геодезический прибор для построения прямых углов на местности. **9.** Часть прямой. **10.** Замкнутая ломаная из трех звеньев. **11.** Латинская буква. **12.** Западное направление. **13.** Прибор для измерения длины и расстояний на местности. **14.** Территория, пространство в определенных границах. **15.** Доказываемое утверждение.

П о в е р т и к а л и: **2.** Инструмент для измерения очень малых линейных размеров. **3.** Сумма трех одночленов. **4.** Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. **6.** Меньшая сторона прямоугольного треугольника. **8.** Предварительный набросок рисунка.

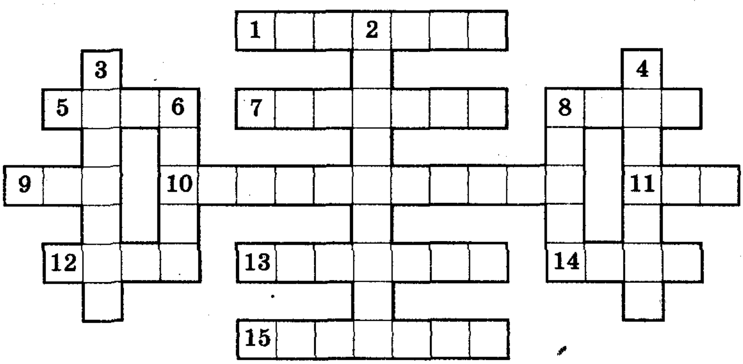


Рис. 266

Из истории геометрии

Геометрия — наука древняя. Один греческий историк еще в V веке до н. э. писал: «Геометрия, по свидетельству очень многих, была открыта египтянами и возникла при измерениях земли. Эти измерения были необходимы им, поскольку, разливаясь, Нил постоянно смывал границы. Ничего удивительного нет в том, что эта наука, как и другие, возникла из потребностей человека».

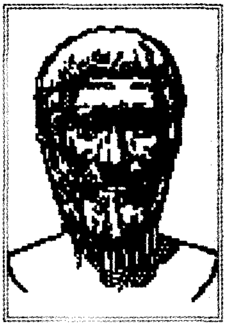
Из Египта геометрические сведения перешли в Грецию. Здесь появилось и название науки (от греческих слов γῆ — «земля» и μετρέω — «меряю»), то есть сначала геометрией называли землемерие.

Позже содержание геометрии расширилось. Нужны были люди, которые умели измерять не только земельные участки. Строителям надо было откладывать прямые углы, проводить прямые линии, чертить окружности. Мореплавателям, чтобы ориентироваться по звездному небу, часто приходилось измерять углы. Для этого еще задолго до начала нашей эры была создана астролябия.

Сначала свойства геометрических фигур устанавливали опытным путем. Только в первом тысячелетии до нашей эры их начали доказывать как теоремы.

Фалес

Одним из первых творцов геометрической науки был древнегреческий ученый **Фалес** (VI в. до н. э.). Он доказал теоремы о равенстве вертикальных углов, о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, о вписанном угле, опирающемся на диаметр окружности. Знал Фалес и второй признак равенства треугольников, и свойство прямоугольного треугольника с углом 45°. На основании последнего свойства он вычислил высоту египетской пирамиды. Пользуясь астролябией, Фалес предсказал солнечное затмение 28 мая 585 г. до н. э.



Пифагор

Евклид

Пифагор (VI в. до н. э.) — древнегреческий философ и математик. Со своими учениками он исследовал свойства чисел, геометрических фигур, небесных светил. В его школе открыто и доказано несколько геометрических теорем, в частности о том, что в каждом прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Эту теорему теперь называют теоремой Пифагора.

Как наука геометрия впервые сформировалась в Древней Греции, когда геометрические закономерности и зависимости, найденные сначала опытным путем, были приведены в систему. Один из математических трудов того далекого времени дошел и до нас. Это — «Начала» древнегреческого математика **Евклида** (III в. до н. э.). Они состоят из тринадцати книг-сувоев; первые шесть посвящены планиметрии. Работа Евклида интересна не только своим богатым содержанием, но и формой изложения. В ней сначала сформулированы определения и аксиомы, а все последующие утверждения доказаны как теоремы.

Евклид не сам открыл и доказал все изложенные им теоремы. Многое сделали его предшественники. Но Евклид настолько удачно систематизировал известные ему математические знания, что его «Начала» были основным учебником по математике в течение 2000 лет!

Интересный факт из биографии Евклида. Однажды царь спросил математика, нет ли в геометрии короче пути, чем тот, который предлагает Евклид в своих книгах. На что Евклид ответил: «Нет, в математике даже для царей нет других путей!..»

После Евклида много сделали для развития геометрии **Архимед**, **Аполлоний** и другие древнегреческие математики.

Следующие полторы тысячи лет геометрия в Европе почти не развивалась. Только в эпоху Ренессанса она начала возрождаться.

Когда Правобережная Украина входила в состав Польши, юноши из многих украинских городов, учась в высшей школе, изучали геометрию по латинскому переводу «Начал» Евклида, а позже — по польскому учебнику С. Гжепского, напечатанному в Кракове в 1565 г. На титульной странице было написано: «*Геометрия, то есть Землемерная Наука, кратко изложенная на польском языке по греческим и латинским книгам. В ней найдешь ты также, как наши землемеры измеряли нивы волоками или ланами. Здесь также о том, сколько вмещает югер. А еще — как измерить башни или что-либо иное высокое...*»

Студентов Киево-Могилянской академии геометрии учили не всегда, а когда учили, то на латыни. Сохранился конспект лекций по геометрии, прочитанных в 1707–1708 гг. известным украинским философом и церковным деятелем Феофаном Прокоповичем. В нем объяснялось: «*Геометрия делится на общую и специальную... Специальная геометрия иначе называется геодезией*». Лекцию о геодезии Прокопович начинал так: «*Специальная геометрия, которую иногда называют практической геометрией, а иногда геодезией, есть одна из самых благородных, самых полезных и самых интересных областей математики*».

Особенно значительны вклады в геометрию Р. Декарта, Л. Эйлера, Н. И. Лобачевского.

Вам уже известна аксиома Евклида о параллельных прямых. Более 2000 лет сотни геометров стремились доказать утверждение, которое Евклид принял без доказательства. Много времени потрачено, много бумаги исписано... Но настоящего доказательства так никто и не нашел.

Николай Иванович Лобачевский (1792– 1856) положил конец этим бесплодным занятиям. Он установил, что утверждение Евклида нельзя доказать как теорему, и создал новую геометрию, которую теперь называют *геометрией Лобачевского*. То, что сделал Лобачевский в геометрии, специалисты сравнивают с революционным переворотом Коперника в астрономии.

Н. Лобачевский

Лобачевский родился в России, а его род происходил из Волыни.

Из украинских математиков наибольший вклад в развитие геометрии внесли Г. Ф. Вороной, М. Е. Ващенко-Захарченко, А. С. Смогоржевский.

Георгий Феодосиевич Вороной (1868–1908) родился в селе Журавка Черниговской области. Был профессором Петербургского и Варшавского университетов.

Г. Вороной

Исследовал вопросы о заполнении плоскости и пространства равными фигурами. Является творцом геометрической теории чисел.

Михаил Егорович Ващенко-Захарченко (1825–1912) родился в селе Макеевка на Полтавщине. Учился в Киеве и Париже, был профессором Киевского университета. Исследовал вопросы истории развития геометрии, напечатал несколько пособий по геометрии, перевел на русский язык «Начала» Евклида.

Александр Степанович Смогоржевский (1896–1969) родился в селе Лесовое (сейчас в Винницкой обл.). Учился в Немирове и Киеве, был профессором Киевского политехнического института. Исследовал вопросы, связанные с геометрическими построениями, напечатал несколько пособий и учебников, в частности учебник по основам геометрии для студентов университетов. Его работы переведены на английский, болгарский, чешский, японский и другие языки.

Развивается геометрическая наука и сейчас. Геометрия продолжает служить людям. Вот что писал один из самых известных архитекторов XX века Ле Корбюзье: «Никогда еще до настоящего времени мы не жили в такой геометрический период... Окружающий нас мир — это мир геометрии, чистый, истинный, безупречный в наших глазах. Всё вокруг — геометрия».

Предметный указатель

Об авторах эпиграфов

Леонардо да Винчи (1452–1519) — итальянский архитектор, скульптор, художник, изобретатель.

Спенсер Герберт (1820–1903) — английский философ социолог, психолог.

Александр Степанович Смогоржевский (1896–1969) – украинский математик.

Прокл Диадох (410–485) — греческий философ.

Краткий толковый словарь

Аксиома — утверждение, принимаемое без доказательства.

Биссектриса треугольника — часть биссектрисы угла треугольника, лежащая в его внутренней области.

Биссектриса угла — внутренний луч угла, делящий угол на две равные части.

Высота треугольника — перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника на противолежащую сторону или на ее продолжение.

Геометрическая фигура — произвольное множество точек.

Геометрическое место точек — множество всех точек, удовлетворяющих определенные условия.

Геометрия — часть математики, в которой исследуются свойства геометрических фигур.

Гипотенуза — сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу.

Градус — $\frac{1}{180}$ часть развернутого угла.

Диаметр окружности — хорда окружности, проходящая через ее центр.

Доказательство — обоснование истинности утверждения.

Касательная к окружности — прямая, лежащая в плоскости данной окружности и имеющая с ней только одну общую точку.

Катет — сторона прямоугольного треугольника, противолежащая острому углу.

Круг — конечная часть плоскости, ограниченная окружностью.

Луч — бесконечная часть прямой, лежащая по одну сторону от некоторой точки этой прямой.

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

Окружность — множество всех точек плоскости, равноудаленных от некоторой ее точки.

Отрезок — часть прямой, лежащей между двумя ее точками.

Параллельные прямые — две прямые одной плоскости, которые не пересекаются.

Периметр треугольника — сумма длин всех сторон треугольника.

Перпендикулярные прямые — две прямые, пересекающиеся под прямым углом.

Прямая — геометрическая фигура (неопределяемое понятие, содержание которого раскрывается системой аксиом).

Прямоугольный треугольник — треугольник, один из углов которого прямой.

Равнобедренный треугольник — треугольник с двумя равными сторонами.

Равносторонний треугольник — треугольник, у которого все стороны равны.

Равные фигуры — две геометрические фигуры, которые можно совместить наложением.

Радиус окружности — отрезок, соединяющий произвольную точку окружности с ее центром.

Расстояние от A до B — длина отрезка AB.

Теорема — утверждение, истинность которого устанавливается доказательством.

Точка — простейшая геометрическая фигура (ее смысл определяется системой аксиом).

Треугольник — замкнутая ломаная из трех звеньев или конечная часть плоскости, ограниченная такой ломаной.

Углы вертикальные — два угла, стороны которых образуют две пересекающиеся прямые.

Углы смежные — два угла, у которых одна сторона общая, а две другие — дополнительные лучи.

Угол — часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом.

Хорда окружности — отрезок, соединяющий две произвольные точки окружности.

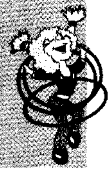
Ответы и указания

7. *AB*. **11.** Да. **12.** Не принадлежит. **13.** *KP*, *PT*, *KT*, *PK*, *TP*, *TK*. **16.** 4. **19.** Можно. **21.** 6. На 16, 17 или 18 частей. **28.** 20,5 см. **29.** 8 см. **31.** 10 дм. **33.** 1) 2 см; 6 дм; 20 км. **34.** 21 см. **42.** Да. **44.** а) 5,9 см. **45.** а) 0,6 дм. **46.** 13 см. **48.** 6 см. **50.** а) и б) да. **52.** 13 см и 7 см. **54.** 3 см, 9 см, 11 см, 17 см. **61.** 0,5 м. **65.** 30°. **70.** Нет. **73.** 2° 15′; 83° 20′. **78.** 90°. **79.** Нет; может быть. **81.** 15°; 2,5°. **82.** 31° 15′. **83.** 90° или 30°. **84.** 180°; 60°. **85.** 20°. **86.** В 4 раза. **87.** 45°. **89.** 70° и 40°. **102.** Нет. **104.** 130°. **105.** 20°. **106.** а) 146°; г) 44° 13′. **108.** а) 75° и 105°. **109.** б) 72° и 108°. **111.** 60°. **120.** в) 50°, 130°, 50° и 130°. **121.** 80°; 100°; 90°. **122.** а) 120°. **124.** 130°. **125.** а) 55°. **127.** Как 1 : 8; как 1 : 4. **140.** Верно. **143.** 135° и 135°. **145.** (0; 6), (6; 0), (0; −4), (−4; 0). Да. **150.** а) 50°. **161.** Нет. **162.** а) 60° и 120°; г) 108° и 72°. **163.** а) 0,1 *P*, 0,2 *P*, 0,3 *P*, 0,4 *P*. **172.** 90°, 90°, 80°, 100°, 90°, 80°. **173.** а) да. **174.** а) да. **175.** Да. **176.** Да. **177.** а) да. **180.** а) 90° и 90°; в) 120° и 60°. **181.** а) да. **182.** а) $a \parallel b \parallel c$; в) $a \parallel b \parallel c$. **185.** Да. **198.** 145°, 35° и 145°. **199.** 50°, 130°. **206.** 40°. **209.** 180°. **210.** а) 65° и 115°. **216.** 50°, 70° и 60°. **217.** 86°. **218.** 71°. **220.** а) 6 см; б) 7 см. **222.** б) ни одной; одну; множество. **235.** Утверждение в). **238.** Углы с соответственно параллельными сторонами не всегда равны. **239.** а) нет; б) нет. **242.** Утверждение а). **246.** а) нет; б) нет; в) нет. **263.** 15,8 см. **264.** 6 см. **265.** 39 см. **266.** Да. **269.** а) 4 см и 12 см; б) 6 см и 10 см; в) 8 см и 8 см; г) 5 см и 11 см. **272.** 12 см, 6 см, 8 см. **273.** 12 см. **274.** 30 см. **275.** Да. **276.** Да. **277.** 102 см. **279.** 3 см. **287.** 20 м. **288.** 50°. **294.** а) 36°, 54°, 90°; б) 15°, 75°, 90°; в) 54°, 54°, 72°. **297.** а) 50°, 50°, 80°; б) 80°, 60°, 40°; в) 76°, 38°, 66°. **298.** 130°. **299.** Нет. **301.** 60°, 40° и 80°. **302.** 75° или 15°. **303.** 15°. **304.** а) 70°; б) 60°. **305.** а) 60°, 30°; б) 60°, 30°. **306.** а) 140°, 130°, 90°; в) 130°, 130°, 100°.

308. 180°. **309.** 270°. **310.** Нет. **312.** 0,5 a. **313.** 24 см. **314.** 5 см. **315.** 3 см. **316.** 2 : 3. **327.** Нет. **329.** 12 см. **330.** Да. **331.** 70°, 3,8 см. **332.** 60°, 60°, 60°. **333.** Да. **340.** Да. Нет. **341.** 26 см. **345.** 9π см^2; 6π см. **346.** $1{,}8\pi$ см^2. **348.** 25π га. **349.** 55°. **355.** 12 см. **356.** Да. **359.** Да. **364.** Потому что $\triangle CTP = \triangle CAB$. **366.** 8 см. **369.** Пусть BM и B_1M_1 — медианы равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$. **375.** 40°, 80°. **376.** Да. **377.** 90°. **386.** 67 см. **387.** 2 см. **388.** 50°. **389.** 120°. **390.** а) 50°, 50°, 80° или 40°, 70°, 70°; б) 36°, 72°, 72° или 90°, 45°, 45°. **393.** а) 25°; б) 75°; в) 40°. **394.** а) 10 см, 20 см и 20 см; б) 15 см, 15 см и 20 см. **395.** 30°. **398.** $\angle A$. **399.** 15 см. **402.** 20 см, 20 см и 10 см или 15 см, 15 см и 25 см. **404.** а) 120°, 30°, 30°; б) 30°, 75°, 75° или 120°, 30°, 30°; в) 165°, 7,5°, 7,5°; г) 50°, 65°, 65°. **406.** $2a + b$. **407.** а) $2p - 2b$. б) $p - \frac{a}{2}$. **411.** Лежат на прямой, перпендикулярной к AB и проходящей через ее середину. **412.** 80°, 80°, 100°, 100°. **414.** 96°. **415.** а) 60° и 120°; б) 72° и 108°. **416.** 6 см. **417.** 30 дм. **421.** Докажите равенство треугольников AOB, BOC и AOC. **429.** а) Докажите сначала, что $\triangle AOB = \triangle AOC$, а затем докажите равенство треугольников ABM и ACM. б) Докажите равенство треугольников OBM и OCM. **431.** 1) Проведите диагональ BD и докажите, что $\triangle ABD = \triangle CDB$; 2) Проведите отрезок AC и докажите, что $\triangle ACB = \triangle CAD$. **433.** а) Докажите равенство треугольников APB и CPB. **437.** 40°, 60°, 80°. **438.** 60°. **439.** 60 см. **440.** $\frac{2}{3}p$. **441.** 90°. **446.** 40° и 50°. **448.** 30°, 60°, 90°. **450.** 40° и 50°. **454.** $AC = BC$. **455.** $180° - \alpha$. **457.** 16 см. **459.** а) 9 см; б) 9 см. **460.** а) 9,5 см; б) 9,5 см. **461.** 27 см. **462.** 50° и 40°. **463.** Нет. **465.** Нет. **467.** $2m$. **468.** 5 см. **470.** 70°, 80°, 30°. **471.** Нет. **472.** 36°, 54°, 90°. **477.** а) AC — наибольшая, BC — наименьшая. **478.** $\angle B$ — наибольший, $\angle C$ — наименьший. **479.** Нет; да. **480.** Нет. **481.** Нет. **483.** Нет. **485.** Нет. **487.** Нет. **488.** 3 см $< BC <$ 13 см. **490.** 70 см $< P <$ 126 см. **491.** Да. **492.** 75° и 105°. **493.** 80° и 80°. **498.** а) 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6; г) 0, 1, 2 или множество. **505.** а) 12 м; б) 2 м. **506.** Да. **509.** 120°, 60°. **511.** Если O — центр окружности, то $\triangle ABO = \triangle CDO$ (по трем сторонам). А в равных треугольниках соответствующие высоты равны. **512.** а) Из центра данной окружности проведите прямую c, перпендикулярную к данной прямой. Если прямая c пересекает окружность в точках A и B, то проведите касательные в этих точках. **514.** 4 см и 12 см или 8 см и 24 см. **515.** Прямоугольные треугольники AOB и AOC равны. **516.** 5 см, поскольку катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы. **517.** 90°. **518.** 60°. **519.** Каждая из сторон O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 равна сумме двух равных радиусов. Поэтому $\triangle KPT$ равносторонний. **520.** 120°, $\approx$ 1,4 см. **521.** $S = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi(r^2 - r_1^2) = \pi(r - r_1)(r + r_1) = mn(r + r_1) = ml$. **522.** $\frac{2}{3}a$. **523.** 5 см. **524.** 12 см. **525.** Разрежьте мысленно квадрат на 4 равных прямоугольных треугольника и сложите из них один прямоугольник. **527.** Нет, поскольку пропущено слово «угла». **529.** Прямая, параллельная данным прямым и равноудаленная от них. **530.** Прямая BK, прямая BC. **531.** Прямая CK. **532.** Да, если точка C — не середина AB. **533.** Да. **537.** Две прямые, параллельные данной прямой. **540.** Две прямые, параллельные данной прямой и равноудаленные от нее. **541.** Окружность. **543.** а) Данная окружность и концентрическая ей окружность радиуса $3r$. **544.** Окружность, концентрическая данной; ее диаметр равен трети диаметра данной окружности. **545.** Окружность, концентрическая данной. **547.** 4 прямые, параллельные данным прямым. **548.** 4 точки. **551.** 135°. **557.** 0, 1 или бесконечное множество. **559.** 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6. **561.** Нет. С периметром 8 см — можно. **564.** 30°, 30° и 120°. **567.** Длина окружности больше. **569.** Нет. **572.** 120°. **574.** 30°, 30° и 120°. **575.** 5 см. **576.** 12,5 см. **577.** Пусть O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Треугольники OAB, OBC и OCA равные равнобедренные, поскольку в них углы при основаниях — по 30°. Следовательно, $OA = OB = OC$ — радиусы описанной окружности. Если вписанная окружность касается к AB в точке H, то $OH = 0{,}5\,OB$ — как катет против угла 30°. **578.** Точки касания окружности к сторонам угла равноудалены от его вершины. **579.** 1. **580.** $2(c + r)$. **581.** 34 см. **582.** 4 см. **583.** Медиана, проведенная из вершины прямого угла. **590.** Проведите биссектрису данного угла и биссектрису его половины. **595.** От обоих концов данного отрезка отложите равные отрезки, а средний отрезок поделите пополам. **600.** Постройте треугольник по трем данным равным отрезкам. **611.** Секущая PM с данной и построенной прямыми образует равные внутренние накрест лежащие углы. **612.** Если данный угол не прямой, задача имеет два решения. **613.** 60°. **614.** Треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle BAC = \angle BCA = 45°$. **615.** Треугольник тупоугольный. **616.** 60°. **618.** Постройте прямой угол и на одной его стороне от вершины отложите половину основания, а на другой — высоту. **619.** 1) Постройте сначала данный угол, на его стороне от вершины отложите отрезок, равный гипотенузе. Постройте окружность, диаметром которой является этот отрезок. **620.** Постройте вспомогательный треугольник по трем известным отрезкам: медиане, данной стороне и половине другой стороны. **621.** 1) Проведите две параллельные прямые, расстояние между которыми равно данной высоте, и на одной из них отложите одну из данных сторон. Задача может иметь 0, 1 или 2 решения. **623.** Воспользуйтесь методом ГМТ. Если данные прямые не параллельны, задача имеет 2 решения. **624.** Проведите серединный перпендикуляр отрезка, концами которого являются данные точки. **625.** Через данную на стороне угла точку проведите прямую, перпендикулярную к этой стороне. Эта прямая пересекает биссектрису данного угла в точке, являющейся центром окружности, которую нужно построить. **626.** Гипотенуза треугольника вдвое длиннее данного радиуса окружности. **627.** Сначала проведите окружность данного радиуса, а из какой-нибудь ее точки — две хорды данных длин. Задача может иметь 0, 1 или 2 решения. **628.** Проведите сначала окружность данного радиуса, а в ней — хорду данной длины. **629.** Проведите окружность данного радиуса и хорду, равную данному основанию треугольника. Серединный перпендикуляр этой хорды пересечет окружность в вершинах треугольников, которые нужно построить. **630.** Проведите окружность данного радиуса и ее диаметр. В конце диаметра отложите данный острый угол. **631.** Проведите прямую, равноудаленную от данных параллельных прямых. Из данной точки A как из центра опишите дугу радиусом, равным половине расстояния между данными прямыми. Задача имеет 2 решения. **632.** Проведите окружность данного радиуса и в ней хорды $AB = BC = DE = EF = r$. Треугольники OAB, OBC, ..., OEF равные равносторонние, все их углы — по $60°$. Поэтому $\angle FOA = 60°$ и $\triangle OFA$ тоже равносторонний. Следовательно, $\triangle ACE$ — тот, который требовалось построить. 2-й способ. Постройте $\triangle AOC$ по данным сторонам $OA = OC = r$ и углу между ними $\angle AOC = 120°$. AC — сторона равностороннего треугольника, который требуется построить. **634.** На данной гипотенузе AB, как на диаметре, постройте полуокружность. Найдите точки пересечения полуокружности с прямой, параллельной AB и удаленной от нее на расстояние, равное данной высоте. **635.** Если даны катет a и противолежащий ему угол A, то можно построить треугольник по данной стороне и прилежащим к ней углам $90°$ и $90° - \angle A$. **636.** Впишите в прямой угол окружность данного радиуса, отложите на одной стороне угла данный катет, а из его конца проведите касательную к окружности. **639.** Постройте по катету и гипотенузе вспомогательный прямоугольный треугольник CHM, где CH — высота, CM — медиана. На прямой HM отложите отрезки $MA = MB = MC$. Треугольник ACB — искомый. **651.** а), б) 6 частей; в) 7 частей. **652.** а) 12 см; б) 20 см; в) 12,5 см; г) 7, 5 см. **653.** 2 см и 6 см или 4 см и 12 см. **654.** 4 случая: 1 см, 5 см, 9 см, 12 см. **655.** 1 : 4; 1 : 2; 2 : 1. **656.** а) 8 см; б) 12 см; в) 16 см. **657.** 5 см. **658.** а) 4 см; б) 6 см; в) 10 см. **659.** $AC = 13{,}5$ см, $BC = 1{,}5$ см или $AC = 1{,}5$ см, $BC = 13{,}5$ см. **660.** $AB = 2$ см, $AC = 8$ см или $AC = 2$ см, $AB = 8$ см. **662.** Нет. **664.** а) 20° и 60°; б) 30° и 50°; в) 20° и 60°; г) 40° и 40°. **665.** 10°, 30°, 50°. **666.** 80°. **667.** 50° или 30°. **668.** 20°, 160°. **669.** 72°, 108°. **673.** а) 130°; б) 80°; в) 144°; г) 108°; д) 105°. **674.** 35°25′; 144°35′; 144°35′. **675.** 60°; 120°; 60°; 120°. **676.** 90°; 180°. **678.** 110°; 70°. **680.** 144°; 36°; 144°; 36°. **681.** 20°; 160°; 20°; 160°. **684.** 4 см. **686.** а) нет; б) да; в) нет; г) да. **687.** а) да; б) да; в) да. **688.** а) да; б) нет; в) да. **689.** а) $c \parallel d$; б) $a \parallel b$; в) $c \parallel d$; г) $c \parallel d$; $a \parallel b$. **692.** а) да; б) да. **693.** а) $a \parallel c$; б) $a \parallel b$; в) $b \parallel c$; г) $a \parallel b \parallel c$. **695.** а) 70°; б) 75°; в) 80°; г) 67°30′. **697.** 80°. **698.** 50°; 50°. **699.** а) да; б) да; в) нет. **709.** 23 см. **710.** Нет. **711.** 2 см; 3 см или 4 см. **712.** а) 7 см; б) 13 см. **713.** а) 6 см и 10 см; б) 24 см и 40 см. **714.** 15°. **715.** 40° и 20°. **717.** 25°, 75°, 80°. **718.** 30°, 60°, 90°. **719.** 25°, 65°. **722.** 40°. **723.** 75°; 30°. **725.** 2 см и 10 см. **726.** 150°. **728.** 7 см, 8 см, 6 см. **729.** Нет. **730.** а) нет; б) да. **731.** Да. **732.** Нет. **745.** 50°, 50°, 80° или 80°, 80°, 20°. **746.** 5 см, 8 см, 8 см или 6 см, 6 см, 9 см. **748.** а) 40°; б) 80°. **749.** 20 см. **752.** 36°, 72°, 72°. **753.** 60°, 60°, 60°. **764.** 18° и 72°. **767.** 5 см, 12 см, 13 см. **770.** 3 см и 9 см. **771.** 7,5 см. **772.** 2 см. **773.** 5 см. **774.** 5 см. **777.** $\angle C$ — наименьший, $\angle B$ — наибольший. **780.** $\angle A > \angle C$. **781.** 6 см. **782.** 59 см и 59 см. **783.** 8 см, 9 см, 10 см, 11 см, 12 см. **784.** 4,4 см. **785.** Нет. **786.** 4 см. **787.** 60°. **788.** $\frac{1}{2}r$. **790.** AB. **793.** 5 см и 7 см. **794.** 4 см и 12 см. **795.** 4 см, 6 см, 8 см. **797.** 21 см. **798.** 3 см. **799.** 6 см и 15 см. **800.** 5 см. **805.** Биссектрисы образованных углов. **807.** Окружность с центром O радиуса $2r$. **808.** а) Окружность с центром O радиуса 13 см; б) окружность с центром O радиуса 7 см. **810.** 5 см. **811.** 7,5 см и 3 см. **812.** 46 см. **813.** 12 см, 15 см, 17 см. **814.** 9 см и 18 см. **815.** 4 см и 6 см. **816.** 8 см. **819.** 12 см. **820.** 6 см. **848.** а) 149 100 тыс. км; б) 149 900 тыс. км. **850.** X — середина отрезка CB. **851.** 108° и 72°. **852.** 120°. **853.** 180°. **854.** Если луч BX пересекает AC в точке K, то $\angle AXK > \angle ABK$ и $\angle CXK > \angle CBK$. **855.** Разделите данный угол на 4 равные части и достройте к данному углу одну из таких частей. **856.** Не могут. Если высоты AH и CE $\triangle ABC$ пересекаются в точке O, то $\triangle AOE = \triangle COH$, $AO = OE$, что невозможно. **857.** $\frac{1}{2}$ $(a + b + c)$. **859.** Каждый треугольник можно разрезать на два прямоугольных треугольника, а медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два равнобедренных треугольника. **860.** Докажите, что треугольники AOC и BOD равнобедренные и равные. **861.** Пусть $\angle ABB_1 = \angle B_1BC = \alpha$. Докажите, что каждый из углов AB_1B и BB_1C больше α. Для этого через вершину B проведите прямую, параллельную AC. **862.** Пусть на основании равнобедренного треугольника ABC лежит точка M. Проведите отрезок $MD \parallel AB$, $D \in BC$ и докажите, что $MD = DC$. **863.** 70°. Обозначьте внутри $\triangle ABC$ такую точку K, что $AK = KC = AC$. Тогда $\triangle BMC = \triangle AKB$, $\angle BCM = 10°$. **866.** 90°, 30° и 60°. Пусть CH, CM — высота и медиана $\triangle ABC$, $\angle ACH = \angle HCM = \angle MCB = \alpha$, а прямая CM пересекает описанную окружность в точке K. Тогда $\angle CKB = \angle CAB$ и $\angle CBK = \angle CHA = 90°$. CK — диаметр описанной окружности, а поскольку $AM = MB$, то и AB — диаметр. **867.** Эти углы: $90° + 0{,}5 \angle A$, $90° + 0{,}5 \angle B$, $90° + 0{,}5 \angle C$. **869.** 15° и 75°. **871.** $a + b - c$. **872.** 1) Пусть ABC — треугольник, который нужно построить, и K — такая точка гипотенузы AB, что $AK = AC$. Отрезки CB и KB даны. На луче AC отложите $CB_1 = KB$. Треугольники ACK и AB_1B — равнобедренные. Постройте $\triangle CBB_1$ и проведите серединный перпендикуляр отрезка BB_1. **874.** Пусть ABC — треугольник, который нужно построить, и на его стороне AB такая точка K, что $AK = AC$. Найдите угол CKB, постройте $\triangle BKC$ и проведите серединный перпендикуляр отрезка CK. **875.** Пусть в $\triangle ABC$ угол C тупой и K — такая точка стороны AB, что $AK = CB$. Прямая CK такая, какую требовалось провести. **877.** Постройте сначала треугольник по данному отрезку и прилежащим к нему половинам данных углов. Потом проведите серединные перпендикуляры двух сторон построенного треугольника.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 4. ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ



Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено.

Переклад з української. Мова російська

Редактори *А. О. Литвиненко, С. А. Попадюк*
Художнє оформлення *О. В. Коваль*
Комп'ютерна верстка *А. О. Литвиненко*
Коректор *Г. В. Брезницька*

Підписано до друку 15.06.2007. Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Папір офсетний.
Гарнітура шкільна. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 13,41. Обл.-вид. арк. 14,26.
Наклад 140 600 пр. Вид. № 88.

«Вежа». 02125, Київ, вул. Старосільська, 2. тел. 512-25-09, 510-59-03.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного
реєстру видавців ДК №362 від 15.03.2001 р.

Віддруковано у ТОВ «Фактор-Друк». 61030, м. Харків, вул. Саратовська, 51.
Тел.:(057) 717-51-85, 717-53-55. Наклад 140600 прим. Замовлення № 3892

Газетно-видавнича корпорація «Новая печать». 83000, Донецьк, вул. Постишева, 117.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру України
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 1498 від 17.09.2003 р.