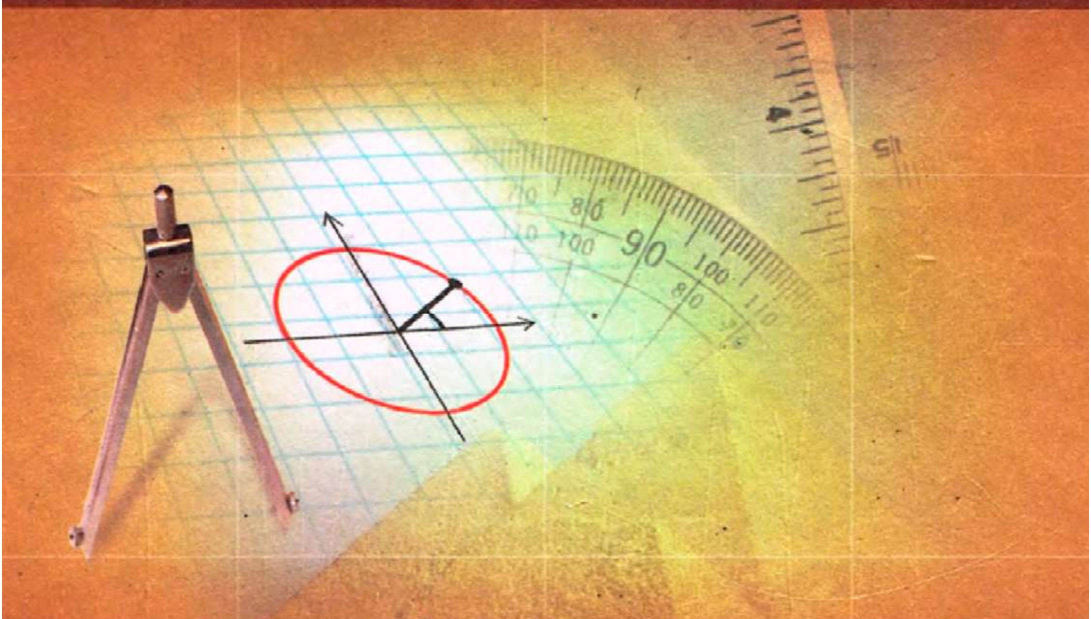
А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов

# Геометрія 9 клас



ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

• загальноосвітня програма
• допрофільна підготовка

УДК 371.388:514.11
ББК 22.151.0+я72
Є80

**Підручник виданий за рахунок державних коштів. Продаж заборонено**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 02.02.2009 р. № 56)

Відповідальна за підготовку до видання підручника
*Н. С. Прокопенко*, головний спеціаліст МОН України

Незалежні експерти:
*О. В. Горелова*, вчитель математики ЗОШ № 10 м. Ізмаїл, учитель-методист;
*К. М. Петечук*, методист Закарпатського ІППО, учитель-методист;
*О. М. Сінюкова*, викл. каф. геометрії ПУДПУ ім. К. Д. Ушинського, канд. фіз.-мат. наук, доц.;
*В. В. Шарко*, зав. від. топології Інституту математики НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.;
*Т. М. Хмара*, пров. наук. співробітник лаб. математичної і фізичної освіти Інституту педагогіки АПН України, канд. пед. наук

Рецензенти:
*О. І. Бормотова*, методист ІПО СМГУ, вчитель математики ЗОШ № 14, учитель-методист;
*А. Б. Велиховська*, зав. наук.-метод. лаб. з проблем інноваційного розвитку освіти Миколаївського ОІППО, учитель-методист;
*І. Б. Гарус*, зав. від. природн.-мат. дисциплін Полтавського ОІППО, учитель-методист;
*В. В. Гринчук*, зав. наук.-метод. лаб. математики та інформатики Одеського ОІУВ;
*І. С. Маркова*, учитель математики вищої категорії гімназії № 46 м. Харкова, учитель-методист, гол. редактор наук.-метод. журналу «Математика в школах України»;
*П. Я. Пасіхов*, учитель математики вищої категорії ФМГ № 17 м. Вінниця, учитель-методист;
*О. М. Роганін*, учитель математики вищої категорії Песочинського колегіуму Харківської райради Харківської області, учитель-методист

Науковий редактор
*Є. П. Нелін*, зав. каф. тестових технологій та моніторингу якості освіти ХНПУ ім. Г. С. Сковороди, канд. пед. наук

**Єршова А. П.**
Є80 Геометрія. 9 клас: Підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. — Х.: Вид-во «Ранок», 2009. — 256 с.: іл.

ISBN 978-966-672-867-1

Підручник містить обов'язковий обсяг навчального матеріалу, необхідні теоретичні відомості й поняття, велику кількість задач, які полегшують роботу вчителів та учнів. Наприкінці кожного розділу підбиваються підсумки, які надано у вигляді зручних таблиць. Для закріплення теоретичного матеріалу запропоновано низку практичних завдань — від простих до більш складних.
Підручник призначений для учнів 9 класів, учителів математики і методистів.

**УДК 371.388:514.11**
**ББК 22.151.0+я72**



ISBN 978-966-672-867-1

## Дорогі друзі!

У цьому навчальному році завершується вивчення планіметрії — геометрії на площині. Радимо ще перед початком занять пригадати основні поняття й теореми, що вивчалися в 7—8 класах. Усі вони відомі з часів Давньої Греції і належать до елементарної (евклідової) геометрії. Але в дев'ятому класі ви познайомитеся з геометричними методами, які було винайдено значно пізніше, в XIV—XX ст.,— координатним, векторним і методом геометричних перетворень. Вони набули широкого застосування в техніці й природничих науках, насамперед у фізиці, тому, вивчаючи їх, ви краще зрозумієте деякі фізичні закони. Узагалі геометрію 9 класу можна без перебільшення назвати *геометрією методів.*

Наприкінці навчального року на вас чекає знайомство зі стереометрією — розділом геометрії, який вивчає фігури в просторі. Ґрунтовне знання планіметрії стане для вас ключем, який відчиняє двері у «третій вимір», дозволяє розв'язати будь-яку просторову задачу, розбиваючи її на декілька планіметричних. А курс геометрії 9 класу — чудова можливість удосконалити й поглибити уявлення про фігури на площині.

Отже, скарби геометрії чекають на вдумливих і спостережливих шукачів, які зможуть не тільки віднайти, але й оцінити справжню красу й витонченість геометричних знань. Ми дуже сподіваємось, що такими винахідниками станете саме ви.

Бажаємо вам успіхів!

## Як користуватися підручником

Підручник має шість розділів, кожний із яких складається з параграфів, а параграфи — з пунктів. У тексті міститься як теоретичний матеріал, так і приклади розв'язування задач. Найважливіші поняття і факти виділені **напівжирним шрифтом**.

Вправи і задачі, які подано в підручнику, поділяються на декілька груп. ***Усні вправи*** допоможуть вам зрозуміти, наскільки успішно ви засвоїли теоретичний матеріал. Ці вправи не обов'язково виконувати подумки — для їх розв'язування ви можете використати рисунки; провести необхідні міркування в чернетці. Після них можна переходити до ***графічних вправ***, які виконуються в зошиті або на комп'ютері. Далі йдуть ***письмові задачі***. Спочатку перевірте свої знання, виконуючи завдання ***рівня А***. Більш складними є задачі ***рівня Б***. Якщо ви добре опанували матеріал і бажаєте виявити свої творчі здібності, на вас чекають задачі ***рівня В***. І нарешті, після кожного параграфа у рубриці ***Повторення*** зазначено, які саме поняття й факти слід пригадати для успішного вивчення нового матеріалу (поруч у стрілках зазначено відповідні параграфи у підручниках для 7 і 8 класів*), та наведено задачі, які підготують вас до сприйняття наступної теми. Більшість задач підручника супроводжуються відповідями, які наведені після Додатків. Розв'язувати всі задачі кожної рубрики не обов'язково. Зверніть увагу: параграфи, позначені знаком «*», містять навчальний матеріал, що не є обов'язковим для вивчення.

Наприкінці кожного розділу розміщено ***контрольні запитання*** і ***задачі для підготовки до контрольних робіт***, завдяки яким ви зможете краще підготуватися до тематичного оцінювання. ***Додаткові задачі*** до розділів допоможуть вам узагальнити вивчене, а ***задачі підвищеної складності*** відкриють нові грані геометрії, красу нестандартного мислення і подарують вам радість наукових відкриттів. Зверніть увагу також на ***задачі для повторення курсу геометрії 7—9 класів***, подані після останнього розділу, — вони допоможуть вам краще підготуватися до підсумкової атестації.

***Підсумкові огляди*** наприкінці кожного розділу — своєрідний геометричний компас, за допомогою якого ви зможете орієнтуватися у вивченому матеріалі. ***Додатки***, наведені в кінці підручника, сприятимуть поглибленню відомостей з окремих тем, що вивчаються, а ***історичні довідки*** до розділів познайомлять із деякими цікавими сторінками розвитку геометрії і діяльністю видатних учених-геометрів.

## Умовні позначення

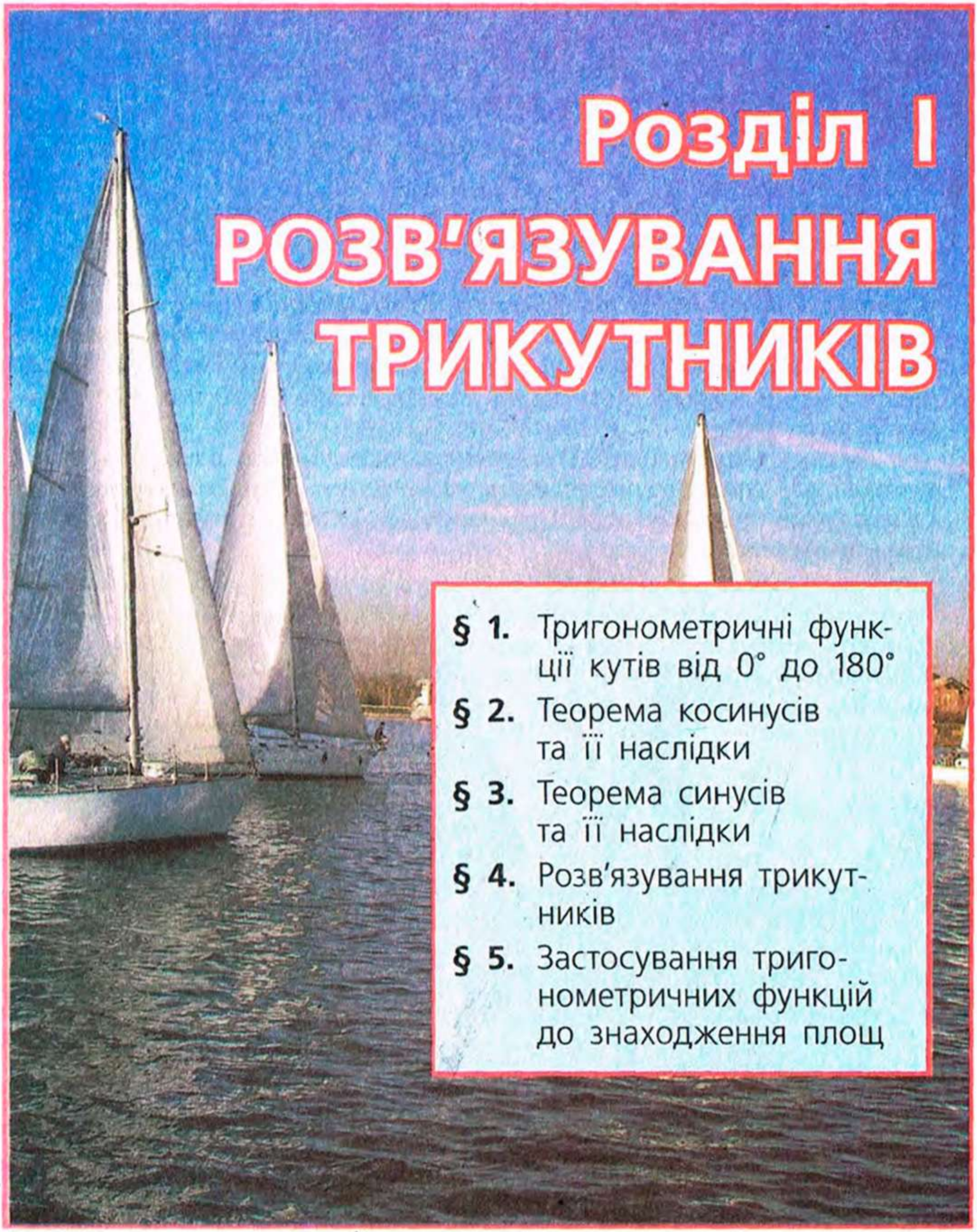
→ — задачі, призначені для виконання вдома

□ — початок доведення теореми

■ — кінець доведення теореми

---

* Єршова, А. П. Геометрія. 7 клас: Пробн. підруч. [Текст] / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський. — Х. : Видавництво «Ранок». — 2007. — 224 с. : іл.; Єршова, А. П. Геометрія. 8 клас: Підруч. для загальноосвіт. навч. закл. [Текст] / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. — Х. : АН ГРО ПЛЮС, 2008. — 256 с. : іл.



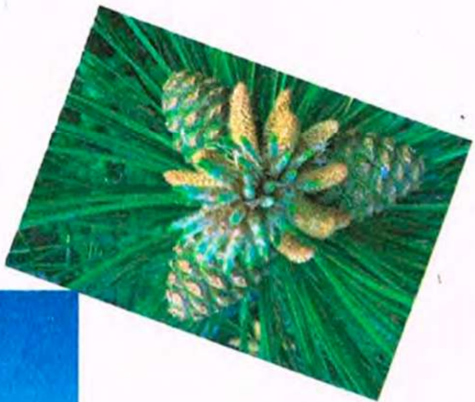
# Розділ I
# РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

Трикутник є першою фігурою, яка не може розкластися в інший вигляд більш простої фігури... і тому є першим фундаментом будь-якої речі, яка має границю й форму.

*Джордано Бруно, італійський учений*

У восьмому класі ви навчилися розв'язувати прямокутні трикутники, тобто знаходити їх невідомі елементи за відомими. Теоретичним підґрунтям для розв'язування прямокутних трикутників були теорема Піфагора й властивості ***тригонометричних функцій*** гострого кута прямокутного трикутника — синуса, косинуса, тангенса й котангенса. За допомогою теорем і співвідношень, які розглядатимуться в цьому розділі, можна розв'язати не тільки прямокутний, але й узагалі будь-який трикутник.

Застосування тригонометричних функцій дозволяє отримати нові формули для знаходження окремих елементів та площ многокутників і значно розширює можливості використання алгебри в процесі розв'язування геометричних задач.



# § 1. Тригонометричні функції кутів від 0° до 180°

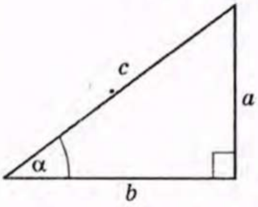



**Рис. 1.** До означення тригонометричних функцій гострого кута прямокутного трикутника

## 1.1. Означення тригонометричних функцій на колі

Нагадаємо, що в прямокутному трикутнику з катетами $a$ і $b$, гіпотенузою $c$ та гострим кутом $\alpha$ (рис. 1) за раніше даним означенням

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Дамо означення тригонометричних функцій для будь-якого кута від 0° до 180°. Для цього в прямокутній системі координат, з якою ви добре знайомі, побудуємо коло радіуса 1 з центром у початку координат (рис. 2). Таке коло називається ***тригонометричним***. Від додатної півосі осі $Ox$ відкладемо у напрямі проти ходу годинникової стрілки гострий кут $\alpha$. Нехай $M(x;\ y)$ — точка, у якій сторона цього кута перетинає дане коло (рис. 2, *а*). Опустимо перпендикуляр $MN$ до осі $Ox$. Утворився прямокутний трикутник $OMN$ з гострим кутом $\alpha$, гіпотенузою $OM = 1$ і катетами, довжини яких дорівнюють координатам точки $M$: $ON = x$, $MN = y$. Із трикутника $OMN$ маємо:

$$\sin\alpha = \frac{MN}{OM} = \frac{y}{1} = y,\ \cos\alpha = \frac{ON}{OM} = \frac{x}{1} = x,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MN}{ON} = \frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{ON}{MN} = \frac{x}{y}.$$

Отже, в тригонометричному колі синус і косинус гострого кута дорівнюють відповідно ординаті й абсцисі точки, у якій сторона даного кута перетинає коло, а тангенс і котангенс цього кута дорівнюють відношенням ординати до абсциси й абсциси до ординати відповідно:

$$\sin\alpha = y,\ \cos\alpha = x,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

Оскільки значення тригонометричних функцій залежать лише від градусної міри кута (тобто не залежать від вибору радіуса кола), використаємо отримані рівності для означення тригонометричних функцій будь-якого кута від 0° до 180°.

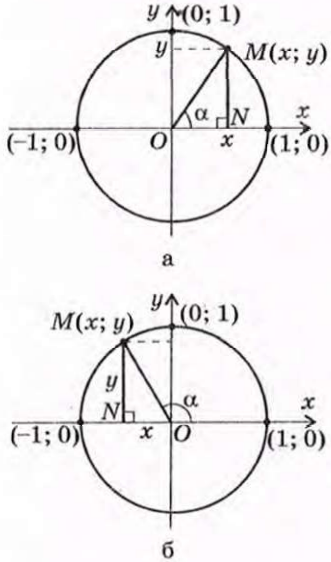



**Рис. 2.** До означення тригонометричних функцій кутів від 0° до 180° [Див. також с. 8]

**Означення**

Для будь-якого кута $\alpha$ з проміжку $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$
$\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ $(\alpha \neq 90°)$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ $(\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 180°)$,
де $x$, $y$ — координати відповідної точки $M$ тригонометричного кола (рис. 2).

Отже, якщо кут $\alpha$ тупий ($90° < \alpha < 180°$, рис. 2, *б*), то ордината точки $M$ додатна (тобто $\sin\alpha > 0$), а абсциса від'ємна (тобто $\cos\alpha < 0$). Очевидно, що відношення координат у цьому випадку також від'ємні, тобто $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha < 0$. Узагалі, ***косинуси, тангенси й котангенси тупих кутів є від'ємними числами.*** І навпаки, ***якщо косинус, тангенс або котангенс кута $\alpha$ ($\alpha < 180°$) від'ємні, то кут $\alpha$ тупий.***

Визначимо значення тригонометричних функцій кутів 0°, 90°, 180° (рис. 2, *в*). Якщо $\alpha = 0°$, то точка $M_1$ має координати (1; 0). Звідси $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{ctg} 0°$ не існує.

Якщо $\alpha = 90°$, то точка $M_2$ має координати (0; 1). Звідси $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{ctg} 90° = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{tg} 90°$ не існує.

І, нарешті, якщо $\alpha = 180°$, то точка $M_3$ має координати (–1; 0). Звідси $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 180° = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{ctg} 180°$ не існує.

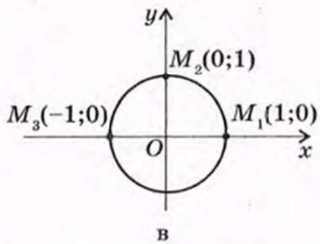



**Рис. 2.** [Закінчення]

Зауважимо також, що абсциси точок $M$ для кутів від 0° до 180° змінюються в межах від –1 до 1, тобто $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, а ординати — в межах від 0 до 1, тобто $0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$.

## 1.2. Тригонометричні тотожності


Нагадаємо, що для будь-якого гострого кута $\alpha$ прямокутного трикутника було доведено основну тригонометричну тотожність $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Покажемо, що це співвідношення справджується для будь-якого кута від 0° до 180°.

Справді, якщо кут $\alpha$ тупий (див. рис. 2, *б*), то з прямокутного трикутника $OMN$ ($\angle N = 90°$, $ON = |x|$, $MN = y$, $OM = 1$) за теоремою Піфагора маємо $MN^2 + ON^2 = OM^2$, тобто $x^2 + y^2 = 1$, і, з урахуванням означень синуса й косинуса, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. У випадку, коли кут $\alpha$ дорівнює 0°, 90° або 180°, цю тотожність легко перевірити безпосередньою підстановкою значень синуса й косинуса відповідного кута (зробіть це самостійно).

Отже, **для будь-якого кута $\alpha$ з проміжку $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$**

$$\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}.$$

З основної тригонометричної тотожності з урахуванням знаків тригонометричних функцій для кутів від 0° до 180° випливає, що

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Знак $\cos\alpha$ обирається в залежності від того, чи є кут $\alpha$ гострим (знак «+») або тупим (знак «−»).

Безпосередньо з означень тригонометричних функцій випливають такі тотожності:

$$\mathbf{tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (\alpha \neq 90°), \quad ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (0° < \alpha < 180°),}$$

$$\mathbf{tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1\ (\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 90°,\ \alpha \neq 180°).}$$

У восьмому класі для гострого кута $\alpha$ було доведено формули доповнення, які виражають функції кута $90° - \alpha$ через функції кута $\alpha$:

$$\mathbf{\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha,}$$

$$\mathbf{tg(90° - \alpha) = ctg\,\alpha, \quad ctg(90° - \alpha) = tg\,\alpha.}$$

Доведемо формули, які дозволяють звести розгляд тригонометричних функцій кутів $180° - \alpha$ до розгляду функцій кута $\alpha$.

**Теорема** (формули зведення для кутів $180° - \alpha$)

**Для будь-якого кута $\alpha$ з проміжку $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$**

$$\mathbf{\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.}$$

**Доведення**

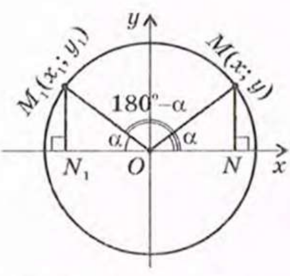



**Рис. 3.** До доведення формул зведення для кутів від 0° до 180°

□ Нехай від додатної півосі осі $Ox$ відкладено кути $\alpha$ і $180° - \alpha$, причому сторони цих кутів перетинають тригонометричне коло в точках $M$ і $M_1$ відповідно (рис. 3). Розглянемо випадок, коли кут $\alpha$ гострий (для тупих кутів доведення аналогічне). Проведемо з точок $M$ і $M_1$ перпендикуляри $MN$ і $M_1N_1$ до осі $Ox$. Оскільки кут $N_1OM_1$ доповнює кут $180° - \alpha$ до розгорнутого, то $\angle N_1OM_1 = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$, а прямокутні трикутники $OMN$ і $OM_1N_1$ рівні за гіпотенузою і гострим кутом. Із рівності катетів $MN$ і $M_1N_1$ випливає, що точки $M$ і $M_1$ мають однакові ординати, тобто

$$\sin(180° - \alpha) = y_1 = y = \sin\alpha.$$

Крім того, з рівності катетів $ON$ і $ON_1$ випливає, що абсциси точок $M$ і $M_1$ протилежні, тобто

$$\cos(180° - \alpha) = x_1 = -x = -\cos\alpha.$$

Для випадків, коли кут $\alpha$ дорівнює 0°, 90° і 180°, перевірте формули, що доводяться, самостійно. ■

**Наслідок**

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \ (0° \leqslant \alpha \leqslant 180°,\ \alpha \neq 90°),$$
$$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \ (0° < \alpha < 180°).$$

**Задача**

*Обчисліть значення тригонометричних функцій кута 150°.*

**Розв'язання**

$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} 150° = \operatorname{tg}(180° - 30°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 150° = \operatorname{ctg}(180° - 30°) = -\operatorname{ctg} 30° = -\sqrt{3}$.

**Відповідь:** $\sin 150° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 150° = -\sqrt{3}$.

Наведемо значення тригонометричних функцій деяких кутів у вигляді таблиці.

| $\alpha$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | −1 |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | — | $-\sqrt{3}$ | −1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | — | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | −1 | $-\sqrt{3}$ | — |

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**1.** Сторона кута $\alpha$, відкладеного від додатної півосі осі $Ox$ у напрямі проти годинникової стрілки, перетинає тригонометричне коло в точці $M$.

а) Назвіть координати точки $M$, якщо $\alpha = 90°$.

б) Визначте величину кута, якщо $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

**2.** Визначте, чи є кут $\alpha$ ($0° < \alpha < 180°$) гострим, прямим або тупим, якщо:
а) $\cos\alpha = 0$; б) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha < 0$; в) $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

**3.** Чи може косинус тупого кута дорівнювати 0,01; –0,8; –3? Чи може косинус тупого кута дорівнювати синусу того самого кута?

**4.** Дано гострий кут $\beta$, причому $\sin\beta = n$, $\cos\beta = m$. Знайдіть синус і косинус кута $180° - \beta$.

**5.** Чи правильно, що:
а) синуси суміжних кутів є протилежними числами;
б) тангенси суміжних кутів є протилежними числами?

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**6.** У прямокутній системі координат на тригонометричному колі позначте точку $M$, яка відповідає куту 120°.
а) Проведіть із точки $M$ перпендикуляри до осей координат. Визначте координати основ цих перпендикулярів.
б) Позначте на тригонометричному колі точку $M_1$, що відповідає гострому куту, синус якого дорівнює синусу 120°. Виміряйте цей гострий кут і обґрунтуйте отриманий результат.

**7.** У прямокутній системі координат на тригонометричному колі позначте точку $M$, яка відповідає куту 150°.
а) Визначте координати $x$ і $y$ точки $M$. Яка з координат більша?
б) Обчисліть значення виразу $x^2 + y^2$. Обґрунтуйте отриманий результат.

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**8.** За допомогою формул зведення для кутів $180° - \alpha$ обчисліть синус, косинус і тангенс кутів 120° і 135°.

**9.** За допомогою формул зведення і тригонометричних таблиць (калькулятора) обчисліть:
а) $\sin 160°$; б) $\cos 115°$; в) $\operatorname{tg} 95°$.

**10.** Визначте всі значення $\alpha$ від 0° до 180°, для яких справджується рівність:
а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\alpha = -0{,}5$; в) $\operatorname{tg}\alpha = -1$.

**11.** За допомогою формул зведення і таблиць значень тригонометричних функцій (див. Додаток 4) знайдіть:
а) $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\alpha = 170°$;
б) гострий і тупий кути, синуси яких дорівнюють 0,643.

**12.** Знайдіть:

а) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0{,}8$;

б) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = -1$.

**13.** Знайдіть $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}6$ і кут $\alpha$ тупий.

**14.** Порівняйте:

а) $\cos 65^\circ$ і $\cos 115^\circ$; б) $\operatorname{tg} 48^\circ$ і $\operatorname{tg} 148^\circ$;

в) $\sin 35^\circ$ і $\sin 145^\circ$.

**15.** Доведіть тотожність:

а) $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$; б) $\frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = -1$;

в) $-\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)\cdot\cos\alpha = \sin\alpha$; г) $\cos^2\alpha + \sin\alpha\sin(180^\circ - \alpha) = 1$.

**16.** Доведіть тотожність:

а) $\frac{-\sin\alpha}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$; б) $1 - \cos^2\alpha = \sin\alpha\sin(180^\circ - \alpha)$;

в) $\frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin\alpha} = 1$.

## Рівень Б

**17.** Знайдіть тангенс і котангенс кута $\alpha$, якщо:

а) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$; б) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

в) $\sin\alpha = -\cos\alpha$.

**18.** Знайдіть:

а) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0{,}28$;

б) $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ і кут $\alpha$ тупий.

**19 (опорна).** Доведіть, що:

а) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $(0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ,\ \alpha \neq 90^\circ)$,

б) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$.

**20.** Спростіть вираз:

а) $1 - \sin(180^\circ - \alpha)\cos(180^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$; б) $\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)}\cdot\operatorname{ctg}\alpha$;

в) $1 - \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)\operatorname{tg}\alpha$.

**21.** Спростіть вираз:

а) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha\cos(180°-\alpha)$; б) $\frac{\cos(90°-\alpha)}{\sin(180°-\alpha)}+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$;

в) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-2\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cos^2\alpha$.

**22.** Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}75$. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.

**23.** Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha=-2{,}4$.

**24.** Доведіть, що синуси будь-яких двох кутів паралелограма рівні.

**25.** Доведіть, що сума косинусів усіх кутів трапеції дорівнює нулю.

**26.** Побудуйте кут $\alpha$, якщо:

а) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ і кут $\alpha$ гострий; б) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

**27.** Побудуйте кут $\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{3}$.

## Рівень В

**28.** Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=-2{,}5$. Скільки розв'язків має задача?

**29.** Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0{,}5$. Скільки розв'язків має задача?

**30.** Розташуйте кути 50°, 120°, 170° у порядку зростання значень їх тригонометричних функцій:

а) косинусів; б) синусів; в) тангенсів.

**31.** Відомо, що $\alpha$ і $\beta$ — тупі кути, причому $\cos\alpha>\cos\beta$. Порівняйте:

а) $\sin\alpha$ і $\sin\beta$; б) $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\beta$.

# ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 2

### Теоретичний матеріал

- розв'язування прямокутних трикутників; 8 клас, § 19—21
- теорема Піфагора. 8 клас, § 13

### Задачі

**32.** У прямокутному трикутнику з гострим кутом 30° гіпотенуза дорівнює 6 см. Знайдіть катети трикутника.

**33.** Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону ромба на відрізки завдовжки 8 см і 9 см. Знайдіть площу ромба. Скільки розв'язків має задача?

# § 2. Теорема косинусів та її наслідки

## 2.1. Теорема косинусів

Під час розв'язування задач часто виникає необхідність обчислити невідому сторону трикутника за двома відомими сторонами й кутом між ними. Теорема Піфагора дозволяє зробити це у випадку, коли даний кут прямий. Наступна теорема є узагальненням теореми Піфагора і дозволяє знаходити невідому сторону в довільному трикутнику.

**Теорема (косинусів)**

**Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

**де $a$, $b$, $c$ — сторони трикутника, $\angle C$ — кут між сторонами $a$ і $b$.**

**Доведення**

□ Нехай у трикутнику $ABC$ $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Розглянемо випадок, коли кут $C$ гострий (рис. 4, *а*). Проведемо висоту $BD$. Із прямокутного трикутника $BDC$ маємо:

$$BD = a\sin C,\ CD = a\cos C.$$

Тоді $AD = b - a\cos C$. Із прямокутного трикутника $ABD$ за теоремою Піфагора

$$AB^2 = BD^2 + AD^2,\ c^2 = (a\sin C)^2 + (b - a\cos C)^2,$$

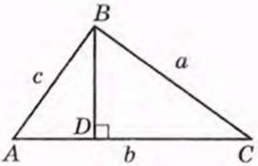
$$c^2 = a^2\sin^2 C + b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos^2 C,$$

$$c^2 = a^2(\sin^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab\cos C,$$

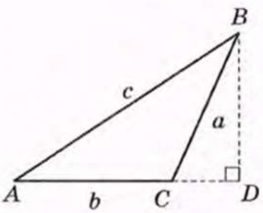
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

У випадку, коли кут $C$ прямий, маємо $\cos C = \cos 90° = 0$. Тоді твердження теореми набуває вигляду $c^2 = a^2 + b^2$, тобто збігається з твердженням вже доведеної теореми Піфагора.

Доведення для випадку, коли кут $C$ тупий (рис. 4, *б*), проведіть самостійно. ■




а




б

Рис. 4. До доведення теореми косинусів

### Задача

Знайдіть сторони паралелограма, якщо його діагоналі завдовжки 10 см і 16 см перетинаються під кутом 60°.

### Розв'язання

Нехай діагоналі паралелограма ABCD перетинаються в точці O, $AC = 16$ см, $BD = 10$ см, $\angle AOB = 60^\circ$ (рис. 5). Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то $AO = OC = 8$ см, $BO = OD = 5$ см. За теоремою косинусів із трикутника AOB маємо:

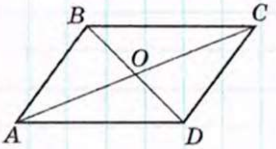



**Рис. 5**

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB\cos\angle AOB$,

$AB^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5\cos 60^\circ$.

Оскільки $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, то $AB^2 = 49$, $AB = 7$ (см).

Оскільки $\angle AOD = 120^\circ$ як суміжний з кутом AOB, то з трикутника AOD за теоремою косинусів маємо:

$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \cdot OD\cos\angle AOD$,

$AD^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5\cos 120^\circ$.

Оскільки $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$, то $AD^2 = 129$, $AD = \sqrt{129}$ (см).

**Відповідь:** 7 см і $\sqrt{129}$ см.

## 2.2. Наслідки теореми косинусів

Завдяки своїм наслідкам теорема косинусів дає можливість не тільки знаходити невідому сторону трикутника, але й визначати кути трикутника за відомими сторонами (див. рис. 4).

**Наслідок 1**

У трикутнику $ABC$ $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

**Наслідок 2**

Якщо в трикутнику зі сторонами $a$, $b$, $c$ справджується нерівність $a^2 + b^2 > c^2$, то кут, протилежний стороні $c$, гострий; якщо $a^2 + b^2 < c^2$, то кут, протилежний стороні $c$, тупий.

Нагадаємо, що у випадку, коли $a^2 + b^2 = c^2$, за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, кут, протилежний стороні $c$, прямий.

Таким чином, за допомогою теореми косинусів можна однозначно встановити, чи є трикутник із заданими сторонами гострокутним, прямокутним або тупокутним.

Наслідком теореми косинусів можна вважати також наступну властивість паралелограма.

### Опорна задача (про співвідношення діагоналей і сторін паралелограма)

**Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін:**

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right),$$

**де $d_1$ і $d_2$ — діагоналі паралелограма, $a$ і $b$ — сусідні сторони паралелограма.**

Доведіть.

#### Розв'язання

Нехай у паралелограмі $ABCD$ $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$, $\angle BAD = \gamma$ (рис. 6). Оскільки сума сусідніх кутів паралелограма дорівнює $180°$, то $\angle ABC = 180° - \gamma$. Виразимо квадрати діагоналей паралелограма за допомогою теореми косинусів.

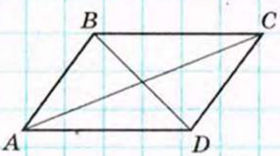



**Рис. 6**

Із трикутника $ABD$ маємо:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos\gamma$,

$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Із трикутника $ABC$ маємо:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos(180° - \gamma)$,

або, враховуючи, що $\cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$,

$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma$.

Додаючи праві й ліві частини отриманих рівностей, дістанемо

$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$,

що й треба було довести.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**34.** У трикутнику зі сторонами $a$, $b$, $c$ визначте, чи є кут, протилежний стороні $a$, гострим, прямим або тупим, якщо:

а) $a^2 > b^2 + c^2$; б) $a^2 < b^2 + c^2$;
в) $a^2 = b^2 + c^2$.

**35.** Чи можуть два кути трикутника мати від'ємні косинуси?

**36.** Назвіть найбільший кут трикутника $ABC$, якщо $AB^2 > BC^2 + AC^2$.

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**37.** Накресліть трикутник зі сторонами 3 см і 5 см та кутом між ними 120°. За теоремою косинусів обчисліть довжину найбільшої сторони трикутника. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

→ **38.** Накресліть різносторонній трикутник і виміряйте його сторони.

а) Обчисліть значення виразу $a^2 + b^2 - c^2$, де $a$, $b$, $c$ — довжини сторін трикутника, причому $a < b < c$.

б) За результатом обчислення визначте, чи є найбільший кут трикутника гострим, прямим або тупим. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**39.** Знайдіть невідому сторону трикутника, якщо дві його сторони і кут між ними дорівнюють відповідно:

а) $3\sqrt{3}$ см, 11 см і 30°; б) 8 см, 15 см і 60°;
в) 5 см, 16 см і 120°.

→ **40.** Знайдіть периметр трикутника, якщо його сторони завдовжки 7 см і 15 см утворюють кут 60°.

**41.** Сторони трикутника дорівнюють $3\sqrt{2}$, 1 і 5. Визначте градусну міру найбільшого кута трикутника.

**42.** Доведіть, що рівнобедрений трикутник з основою 7 см і бічною стороною 4 см є тупокутним.

**43.** Дві сторони трикутника дорівнюють 4 і 8. Яке найменше ціле значення повинна мати довжина третьої сторони, щоб кут між двома даними сторонами був тупим?

**44.** Дві сторони трикутника дорівнюють $4\sqrt{2}$ см і 1 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

**45.** У трикутнику $ABC$ $AB = 6$ см, $BC = 5$ см, а косинус зовнішнього кута при вершині $B$ дорівнює $-0,2$. Знайдіть сторону $AC$.

## Рівень Б

**46.** У паралелограмі знайдіть довжини:

а) сторін, якщо діагоналі завдовжки $6\sqrt{2}$ см і 14 см перетинаються під кутом 45°;

б) діагоналей, якщо сторони дорівнюють 10 см і 16 см, а один із кутів паралелограма вдвічі більший за інший.

**47.** Знайдіть діагоналі ромба з периметром $4a$ і гострим кутом $\alpha$. Розв'яжіть задачу двома способами.

**48.** Діагональ паралелограма дорівнює 6 см і утворює зі стороною завдовжки 8 см кут 60°. Знайдіть невідому сторону й невідому діагональ паралелограма.

**49.** Не обчислюючи кути трикутника, визначте його вид (за величиною кутів), якщо сторони трикутника дорівнюють:

а) 2, 3 і 4; б) 7, 24 і 25;

в) 6, 10 і 11.

**50.** Сторони трикутника дорівнюють 5 м, 6 м і 7 м. Знайдіть косинуси кутів трикутника і визначте його вид (за величиною кутів).

**51.** У паралелограмі знайдіть:

а) периметр, якщо діагоналі дорівнюють 11 см і 17 см, а одна зі сторін — 13 см;

б) діагоналі, якщо їхні довжини відносяться як 4 : 7, а сторони дорівнюють 7 см і 9 см.

**52.** Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 34 см, а діагоналі 11 см і 13 см.

## Рівень В

**53.** У трикутнику $ABC$ $\angle A = 90°$, $AC = 4$ см, $BC = 8$ см. На катеті $AC$ зовні даного трикутника побудовано рівносторонній трикутник $ACD$. Знайдіть довжину відрізка $BD$.

**54.** У паралелограмі $ABCD$ $\angle A = 60°$, $AB = 2$, $BC = 4$. Точки $M$ і $N$ — середини сторін $BC$ і $CD$ відповідно. Знайдіть косинус кута $MAN$.

**55.** Сторони трикутника завдовжки 10 см і 42 см утворюють кут 120°. Знайдіть довжину медіани, проведеної з вершини даного кута.

**56 (опорна).** **У трикутнику зі сторонами $a$, $b$, $c$ медіана, проведена до сторони $c$, обчислюється за формулою $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$. Доведіть.**

**57.** Якщо для медіан трикутника $m_a$, $m_b$ і $m_c$ справджується рівність $m_a{}^2 + m_b{}^2 = 5m_c{}^2$, то даний трикутник прямокутний із гіпотенузою $c$. Доведіть. Чи справджується обернене твердження?

**58.** У трапеції $ABCD$ $AB \parallel CD$, $AB = 8$ см, $CD = 4\sqrt{3}$ см. Коло, яке проходить через точки $A$, $B$ і $C$, перетинає відрізок $AD$ в точці $K$, причому $\angle AKB = 60°$. Знайдіть $BK$.

## ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 3

### Теоретичний матеріал

- пропорції; — 6 клас
- розв'язування прямокутних трикутників; — 8 клас, § 19—21
- коло, описане навколо трикутника. — 7 клас, п. 23.1

### Задачі

**59.** У трикутнику $ABC$ $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$, $BD = 4$ см — висота трикутника. Знайдіть довжини сторін $AB$ і $BC$.

**60.** На колі позначено точки $A$, $B$, $C$ і $D$ так, що кут $ABC$ утричі менший, ніж кут $ADC$. Знайдіть градусні міри цих кутів.

# § 3. Теорема синусів та її наслідки

## 3.1. Теорема синусів

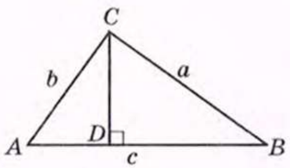
Розглянемо ще одну теорему, за допомогою якої можна знаходити невідомі сторони й кути трикутника.

**Теорема (синусів)**

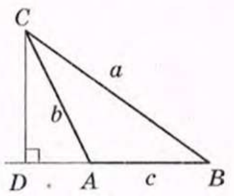
**Сторони трикутника пропорційні до синусів протилежних кутів:**

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

**де $a$, $b$, $c$ — сторони трикутника, протилежні кутам $A$, $B$, $C$ відповідно.**




а




б

Рис. 7. До доведення теореми синусів

**Доведення**

□ Нехай у трикутнику $ABC$ $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Проведемо висоту $CD$.

Якщо кут $A$ гострий (рис. 7, *а*), то з прямокутного трикутника $ACD$ маємо $CD=b\sin A$; якщо кут $A$ тупий (рис. 7, *б*), то $CD=b\sin(180°-A)=b\sin A$. Аналогічно з трикутника $BCD$ маємо $CD=a\sin B$. Прирівняємо отримані вирази:

$$b\sin A=a\sin B, \text{ або } \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

Аналогічно доводиться рівність $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. У випадку, коли кут $A$ прямий, твердження теореми випливає з означення синусів кутів трикутника $ABC$ (обґрунтуйте це самостійно). ■

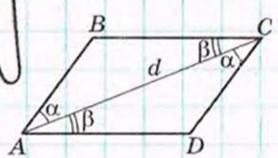



Рис. 8

**Задача**

Діагональ паралелограма дорівнює d і утворює зі сторонами паралелограма кути $\alpha$ і $\beta$. Знайдіть сторони паралелограма.

**Розв'язання**

Нехай у паралелограмі $ABCD$ $AC=d$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle CAD=\beta$ (рис. 8). Знайдемо сторони паралелограма. Кути

CAD і ACB — внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AC, тому $\angle ACB = \beta$.

Тоді в трикутнику ABC $\angle B = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Застосувавши теорему синусів для цього трикутника, дістанемо:

$$\frac{AC}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))} = \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha}, \text{ або } \frac{d}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha}.$$

Звідси $AB = \dfrac{d\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$, $BC = \dfrac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$.

**Відповідь:** $\dfrac{d\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$, $\dfrac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$.

## 3.2. Зв'язок між пропорційними відношеннями теореми синусів і діаметром описаного кола

### Опорна задача
### (повне формулювання теореми синусів)

**Відношення сторони трикутника до синуса протилежного кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо трикутника:**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

**де a, b, c — сторони трикутника, протилежні кутам A, B, C відповідно, R — радіус описаного кола.** Доведіть.

### Розв'язання

Нехай навколо трикутника ABC ($BC = a$) описано коло радіуса R. Враховуючи наявні пропорційні співвідношення теореми синусів, достатньо довести, що $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$, або $a = 2R\sin A$.

1) Нехай $\angle A = 90^\circ$ (рис. 9, а). Тоді вписаний кут A спирається на півколо, тобто $a = BC = 2R = 2R \cdot 1 = 2R\sin 90^\circ = 2R\sin A$.

2) Нехай $\angle A < 90^\circ$ (рис. 9, б). Проведемо діаметр $BA_1$ і розглянемо трикутник $A_1BC$.

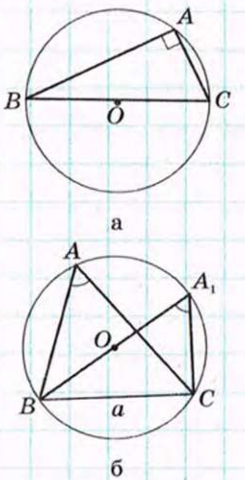



Рис. 9. [Див. також с. 22]

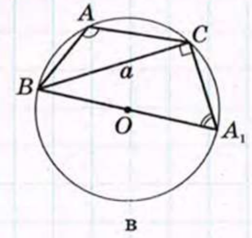



Рис. 9. [Закінчення]

У цьому трикутнику $\angle BCA_1 = 90^\circ$ як кут, що спирається на півколо, тобто $BC = BA_1 \sin A_1$. Оскільки вписані кути $A$ і $A_1$ спираються на ту саму дугу, то $\angle A = \angle A_1$. Тоді $BC = BA_1 \sin A = 2R \sin A$, або $a = 2R \sin A$.

3) Нехай $\angle A > 90^\circ$ (рис. 9, в). Проведемо діаметр $BA_1$. Тоді $\angle A + \angle A_1 = 180^\circ$, звідки $\sin A_1 = \sin(180^\circ - A) = \sin A$. Отже, $BC = BA_1 \sin A$, або $a = 2R \sin A$, що й треба було довести.

**Задача**

Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреної трапеції з основами 1 і 3 і бічною стороною 2.

**Розв'язання**

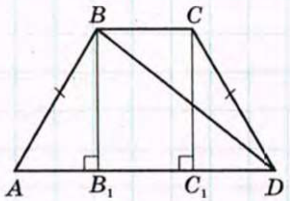



Рис. 10

Нехай у трапеції $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AD = 3$, $BC = 1$, $AB = CD = 2$ (рис. 10). Проведемо з вершин тупих кутів трапеції висоти $BB_1$ і $CC_1$. Тоді $AB_1 = B_1C_1 = C_1D = 1$ (доведіть це самостійно).

З прямокутного трикутника $ABB_1$ $\cos A = \frac{AB_1}{AB}$, $\cos A = \frac{1}{2}$, звідки $\angle A = 60^\circ$, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Із трикутника $ABD$ за теоремою косинусів маємо:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A$, $BD^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$, $BD^2 = 7$, $BD = \sqrt{7}$.

Коло, описане навколо трапеції, є також описаним навколо трикутника $ABD$. За щойно доведеним $\frac{BD}{\sin A} = 2R$, отже, $R = \frac{BD}{2 \sin A}$, $R = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

**Відповідь:** $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**61.** За допомогою теореми синусів відновіть відношення синусів кутів трикутника $ABC$ у правій частині рівності $BC : AC : AB = \dots$ .

**62.** Назвіть найбільшу та найменшу сторони трикутника $ABC$, якщо $\sin B > \sin A > \sin C$.

**63.** У трикутнику $ABC$ $\sin A = \sin C$. Чи може один з кутів $A$ і $C$ бути тупим? Чи має даний трикутник рівні сторони?

**64.** У трикутнику $ABC$ $AB = 6$, $BC = 3$. Чи може $\sin A$ дорівнювати одиниці?

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**65.** Накресліть рівнобедрений трикутник із кутом при основі 30°. Виміряйте довжини сторін трикутника й обчисліть їх відношення до синусів протилежних кутів. Порівняйте отримані результати.

→ **66.** Накресліть коло радіуса 2 см і впишіть у нього трикутник із кутом 30°. Виміряйте сторону, протилежну до цього кута, і порівняйте її довжину з радіусом кола. Поясніть отриманий результат.

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**67.** У трикутнику $ABC$ знайдіть відношення сторін $AB : AC$ і $BC : AC$, якщо $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$.

**68.** У трикутнику $ABC$ знайдіть:

а) сторону $BC$, якщо $AB = 2\sqrt{2}$ см, $\angle B = 105°$, $\angle C = 30°$;

б) кут $A$, якщо $AB = 4\sqrt{2}$ см, $BC = 4$ см, $\angle C = 45°$.

→ **69.** У трикутнику $ABC$ знайдіть:

а) сторону $AC$, якщо $AB = 6\sqrt{2}$ см, $\angle B = 30°$, $\angle C = 45°$;

б) кут $B$, якщо $AB = \sqrt{3}$ см, $AC = \sqrt{2}$ см, $\angle C = 60°$.

**70.** У трикутнику $MNK$ сторона $MN$ удвічі менша, ніж $NK$, $\sin K = \frac{1}{4}$. Знайдіть кут $M$. Скільки розв'язків має задача?

→ **71.** У трикутнику $MNK$ $\sin N : \sin K = 1 : 3$. Знайдіть сторону $MN$, якщо $MK = 3$ м.

**72.** За допомогою теореми синусів знайдіть відношення основи рівнобедреного прямокутного трикутника до бічної сторони.

→ **73.** За допомогою теореми синусів доведіть, що в прямокутному трикутнику катет, протилежний куту 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

### Рівень Б

**74.** У прямокутному трикутнику $ABC$ з гіпотенузою $AC$ знайдіть бісектрису $BD$, якщо $\angle C = 30°$, $CD = 8\sqrt{2}$ см.

**75.** Знайдіть сторони трикутника $ABC$, якщо $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$, а висота $AD$ дорівнює 6 м.

**76.** У трикутнику $ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle B = 75°$, $CD$ — бісектриса. Знайдіть $AD$, якщо $AC = 2\sqrt{3}$.

**77.** Одна зі сторін трикутника дорівнює $a$, а кути, прилеглі до цієї сторони, дорівнюють $\alpha$ і $\beta$. Знайдіть довжини бісектрис цих кутів.

**78.** Діагональ паралелограма утворює з його сторонами кути $\alpha$ і $\beta$. Знайдіть цю діагональ, якщо сторона, прилегла до кута $\alpha$, дорівнює $a$.

**79.** Радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з кутом 120°, дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторони трикутника.

**80.** Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 4 см. Знайдіть кути трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 4 см і $4\sqrt{3}$ см. Скільки розв'язків має задача?

## Рівень В

**81.** Знайдіть довжини двох сторін трикутника, які лежать проти кутів 60° і 45°, якщо різниця цих довжин складає $m$.

**82.** Знайдіть сторони трикутника, периметр якого дорівнює $P$, а два кути $\alpha$ і $\beta$.

**83.** Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а висота 8 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

**84.** Доведіть, що коло, описане навколо трикутника, і коло, яке проходить через ортоцентр і дві вершини цього трикутника, мають рівні радіуси.

## ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 4

### Теоретичний матеріал

- розв'язування прямокутних трикутників;
- означення тригонометричних функцій.

8 клас, § 19—21

9 клас, п. 1.1

### Задачі

**85.** Знайдіть кути ромба, діагоналі якого дорівнюють 4 і $4\sqrt{3}$.

**86.** У трикутнику $ABC$ $\angle C = 90°$, $CD$ — висота. Порівняйте відрізки $AD$ і $DB$, якщо $\sin A < \sin B$.

# § 4. Розв'язування трикутників

## 4.1. Основні задачі на розв'язування трикутників

За допомогою теорем косинусів і синусів можна розв'язати довільний трикутник за трьома основними елементами, якщо хоча б один із них є стороною трикутника. Розглянемо чотири основні задачі на розв'язування трикутників.

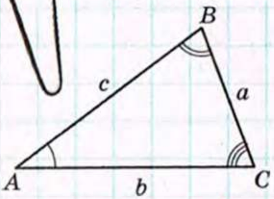



**Рис. 11.** До задач на розв'язування трикутників

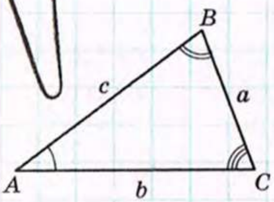
### Задача 1 (розв'язування трикутника за стороною та двома кутами)

Дано: $a$, $\angle B$, $\angle C$ (рис. 11). Знайти: $b$, $c$, $\angle A$.

**Розв'язання**

1) За теоремою про суму кутів трикутника $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$.

2) За теоремою синусів $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, звідки $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.




[Рис. 11]

### Задача 2 (розв'язування трикутника за двома сторонами й кутом між ними)

Дано: $a$, $b$, $\angle C$. Знайти: $c$, $\angle A$, $\angle B$.

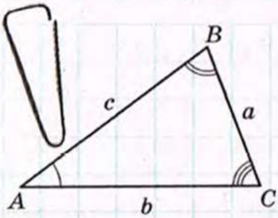
**Розв'язання**

1) За теоремою косинусів $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$.

2) За наслідком теореми косинусів $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

За допомогою калькулятора або таблиць знаходимо кут $A$.

3) За теоремою про суму кутів трикутника $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$.




[Рис. 11]

### Задача 3 (розв'язування трикутника за трьома сторонами)

Дано: $a$, $b$, $c$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

**Розв'язання**

1) За наслідком теореми косинусів $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

За допомогою калькулятора або таблиць знаходимо кут A.

2) Аналогічно $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

За допомогою калькулятора або таблиць знаходимо кут B.

3) За теоремою про суму кутів трикутника $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.

Зауважимо, що для знаходження кутів у задачах 2 і 3 можна скористатися також теоремою синусів. Але при цьому слід пам'ятати, що будь-якому значенню $\sin A$, меншому за одиницю, відповідатимуть два кути — гострий і тупий. Щоб уникнути помилки, рекомендується позначити через $a$ найменшу з даних сторін. У такому випадку кут $A$, протилежний стороні $a$, обов'язково має бути гострим (обґрунтуйте це самостійно).

**Задача 4 (розв'язування трикутника за двома сторонами й кутом, протилежним одній із них)**

Дано: a, b, $\angle A$. Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$.

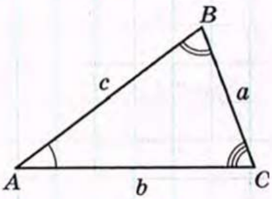
**Розв'язання**

1) За теоремою синусів $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$, звідки $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$.

За допомогою калькулятора або таблиць знаходимо кут B, враховуючи, що проти більшої сторони трикутника лежить більший кут (якщо $a > b$, то кут B гострий).

2) За теоремою про суму кутів трикутника $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.

3) За теоремою синусів $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$, звідки $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$.



[Рис. 11]

Задачу 4 можна розв'язати і в інший спосіб, склавши квадратне рівняння відносно змінної $c$ на підставі теореми косинусів: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Це рівняння може мати один або два корені чи не мати жодного. Тому задача 4 залежно від значень $a$, $b$ і $\angle A$ може мати один або два розв'язки чи не мати жодного.

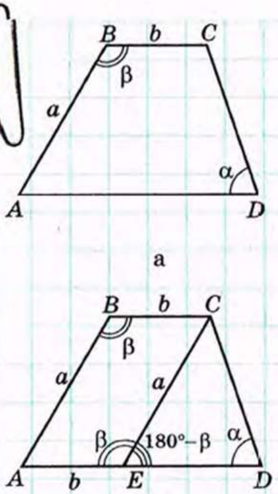
Звернемо увагу, що задачі 1—3 завжди мають не більше одного розв'язку. Подумайте, як це пов'язано з ознаками рівності трикутників.

Домовимося під час розв'язування трикутників округляти довжини сторін до сотих, а градусні міри кутів — до одиниць.

## 4.2. Застосування розв'язування трикутників у задачах

Щойно розглянуті задачі на розв'язування трикутників часто є окремими фрагментами більш складних геометричних задач. У цих випадках варто дотримуватись такого плану.

1. Визначити елемент даної фігури (відрізок або кут), який необхідно знайти.
2. Виділити на рисунку допоміжний трикутник, який містить шуканий елемент і може бути розв'язаний за наявними даними задачі.
   Якщо на рисунку такого трикутника немає, його можна отримати, провівши додаткові побудови. Іноді для пошуку необхідного відрізка або кута треба послідовно розв'язати декілька допоміжних трикутників зі спільними елементами.
3. Розв'язавши допоміжний трикутник (або трикутники), знайти шуканий елемент і використати його для подальшого розв'язування початкової задачі.



а

б

**Рис. 12**

### Задача

За даними рис. 12, а знайдіть середню лінію трапеції $ABCD$.

### Розв'язання

Нехай у трапеції $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AB = a$, $BC = b$, $\angle B = \beta$, $\angle D = \alpha$ (рис. 12, а). Знайдемо середню лінію трапеції.

Проведемо через вершину $C$ пряму, паралельну стороні $AB$. Нехай вона перетинає основу $AD$ в точці $E$ (рис. 12, б). Тоді $ABCE$ — паралелограм, $CE = AB = a$, $AE = BC = b$, $\angle AEC = \angle B = \beta$. Звідси в трикутнику $ECD$ $\angle CED = 180° - \beta$ як суміжний із кутом $\beta$ паралелограма. Із трикутника $ECD$ за теоремою синусів $\frac{EC}{\sin \angle D} = \frac{ED}{\sin \angle ECD}$, тобто $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{ED}{\sin(\beta - \alpha)}$.

Звідси $ED = \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$. Тоді у даній трапеції $AD = b + \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$. Оскільки середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ, то вона має довжину $\frac{1}{2}\left(b + b + \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}\right)$, тобто $b + \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha}$.

**Відповідь:** $b + \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha}$.

Зауважимо, що цю задачу можна розв'язати і без застосування теореми синусів, провівши висоти трапеції з вершин $B$ і $C$. Спробуйте самостійно розв'язати задачу цим способом і зробити висновок про те, який зі способів більш зручний.

Розв'язування трикутників широко застосовується на практиці, зокрема під час проведення вимірювань на місцевості. Нехай, наприклад, необхідно виміряти відстань від точки $A$ до деякої недосяжної точки $B$ (рис. 13). Оберемо на місцевості точку $C$, прохід від якої до точки $A$ можливий, і виміряємо відстань $AC$. Потім за допомогою спеціальних приладів для вимірювання кутів на місцевості визначимо градусні міри кутів $BAC$ і $BCA$. Отже, нехай $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. Ці дані дозволяють знайти шукану відстань $AB$ (див. задачу 1, пункт 4.1):

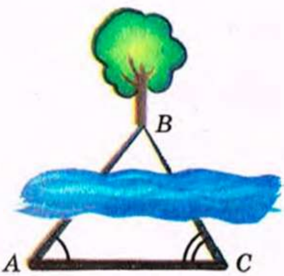


Рис. 13

за теоремою про суму кутів трикутника

$$\angle B = 180° - (\alpha + \gamma);$$

за теоремою синусів $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$, тобто

$$\frac{b}{\sin(180° - (\alpha+\gamma))} = \frac{AB}{\sin\gamma},$$

звідки $AB = \frac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**87.** За якою теоремою можна знайти невідому сторону трикутника, у якому задано:

а) дві сторони й кут між ними;

б) дві сторони й кут, протилежний одній із них;

в) сторону й прилеглі до неї кути?

**88.** Чи можна знайти:

а) кути трикутника, в якому задано три сторони;

б) сторони трикутника, в якому задано три кути?

**89.** Скільки розв'язків може мати задача на розв'язування трикутника:

а) за трьома сторонами;

б) за двома сторонами й кутом, протилежним одній із них;

в) за стороною та двома кутами?

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**90.** Накресліть трикутник $ABC$, у якому $\angle A = 20°$, $\angle B = 100°$, $\angle C = 60°$. Знайдіть на стороні $AC$ точку $C_1$ таку, щоб трикутники $ABC$ і $ABC_1$ були двома розв'язками задачі на розв'язування трикутника за двома сторонами й кутом 20°, протилежним одній із них. Сполучіть точки $B$ і $C_1$ та виміряйте кут $AC_1B$.

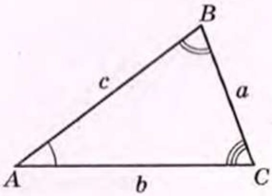
→ **91.** Накресліть трикутник зі стороною 4 см і прилеглими до неї кутами 45° і 60°. Обчисліть довжини сторін трикутника, протилежних заданим кутам. Перевірте отримані результати вимірюванням.

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**92.** Розв'яжіть рівнобедрений трикутник за основою 6 см і кутом при основі 15°.

**93.** Розв'яжіть трикутник за стороною 10 см і прилеглими до неї кутами 30° і 60°.



[Рис. 11]

**94.** Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11) за стороною та двома кутами:

а) $a = 10$, $\beta = 45°$, $\gamma = 30°$;

б) $b = 6$, $\alpha = 100°$, $\beta = 50°$.

**95.** Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11) за двома сторонами й кутом між ними:

а) $a = 5$, $b = 21$, $\gamma = 60°$;

б) $b = 7$, $c = 8$, $\alpha = 120°$.

**96.** Дороги між селищами Азарове, Веселе і Семенівка вирішили заасфальтувати. Відстань між Азаровим і Веселим дорівнює 1 км, між Веселим і Семенівкою — 4,2 км, а відрізок дороги між Азаровим і Семенівкою видно з Веселого під кутом 60°. Бригада ремонтників асфальтує за день 0,5 км дороги. Чи встигнуть ремонтники впоратися до приїзду губернатора, якщо роботи розпочато 21 червня, а губернатор приїздить 7 липня?

**97.** Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11), якщо:

а) $a = 12$, $\alpha = 40°$, $\beta = 64°$; б) $a = 3\sqrt{2}$, $b = 7$, $\gamma = 135°$.

**98.** Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11) за трьома сторонами:

а) $a = 3\sqrt{3}$, $b = 2$, $c = 7$; б) $a = 8$, $b = 15$, $c = 17$.

**99.** Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11) за двома сторонами й кутом, протилежним одній із них:

а) $a = 12$, $b = 5$, $\alpha = 120°$; б) $b = 2$, $c = 10$, $\beta = 6°$;

в) $a = 1$, $c = 2$, $\alpha = 45°$.

**100.** Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11), якщо:

а) $a = 5$, $b = 21$, $c = 19$; б) $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 22°$.

## Рівень Б

**101.** Розв'яжіть трикутник* (див. рис. 11), якщо:

а) $c = 3$, $\gamma = 30°$, $h_b = 2$; б) $a = 17$, $b = 5\sqrt{2}$, $h_a = 5$.

**102.** У трикутнику $ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $BC = 2$ см, $AD$ — бісектриса. Розв'яжіть трикутник $ABD$.

**103.** Який вид (за величиною кутів) може мати трикутник $ABC$, якщо:

а) $BC = 8$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 60°$;

б) $BC = 8$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 60°$;

в) $BC = 8$ см, $AC = 9$ см, $\angle A = 60°$.

* Тут і далі медіану, бісектрису й висоту трикутника, проведені до сторони $a$, позначатимемо $m_a$, $l_a$ і $h_a$ відповідно.

**104.** За даними рис. 14 знайдіть $AD$.

**105.** За даними рис. 15 знайдіть $\sin D$.

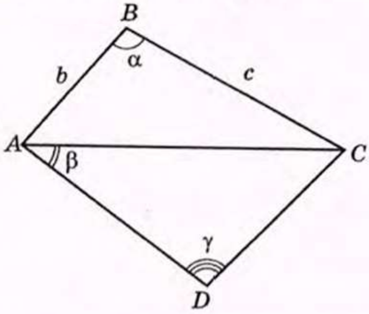



Рис. 14

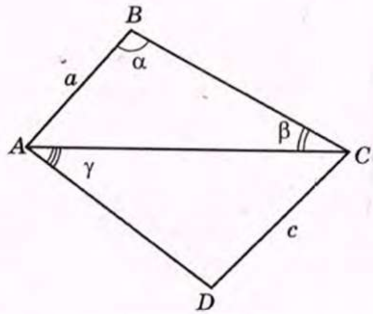



Рис. 15

**106.** На горі, схил якої знижується під кутом $\alpha$ до горизонту, росте дерево (рис. 16). Його тінь завдовжки $l$ падає вниз по схилу при куті сонця над горизонтом $\beta$. Знайдіть висоту дерева.

**107.** Вершину пагорба з точки $A$ видно під кутом $\alpha$, а при наближенні до пагорба на відстань $a$ — під кутом $\beta$. Знайдіть висоту пагорба.

**108.** Спостережна вишка заввишки 100 м розташована на горі (рис. 17). Об'єкт спостереження $A$ видно з вершини вишки під кутом 60°, а від основи вишки — під кутом 30° до горизонту. Знайдіть висоту гори.

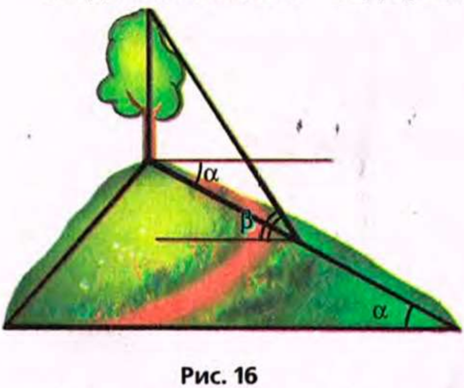



Рис. 16

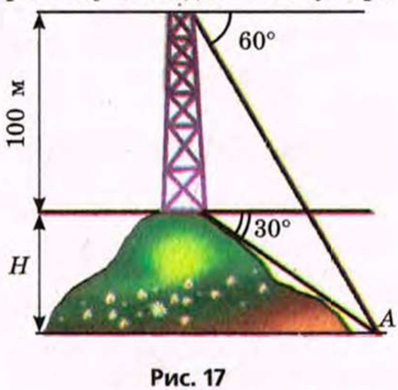



Рис. 17

**109.** Більша основа рівнобедреної трапеції дорівнює 10 см, а менша основа дорівнює бічній стороні. Знайдіть периметр трапеції, якщо один із її кутів дорівнює 110°. Відповідь округліть до сантиметрів.

**110.** Більша основа й бічні сторони рівнобедреної трапеції дорівнюють 10 см, а діагональ трапеції утворює з основою кут 50°. Знайдіть середню лінію трапеції.

## Рівень В

**111.** Дослідіть залежність кількості розв'язків задачі розв'язування трикутника за двома сторонами $a$ і $b$ та кутом $\alpha$, протилежним одній із них, від значень $a$, $b$ і $\alpha$.

**112.** Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11), якщо:
а) $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $a + b = 24{,}14$;
б) $b = 9$, $c = 19$, $m_a = 11$.

**113.** Знайдіть сторони трикутника (див. рис. 11), якщо:
а) $\alpha = 47°$, $\beta = 120°$, $a - c = 11$;
б) $m_a = 12$, $m_b = 15$, $m_c = 9$.

**114.** За даними рис. 18 знайдіть сторони трикутника $AOB$.

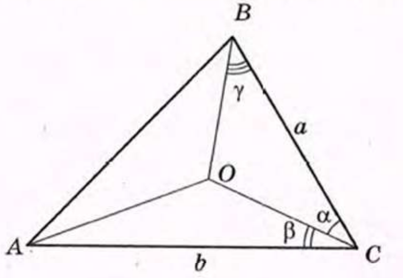



**Рис. 18**

**115.** Сторони трикутника завдовжки $a$ і $b$ утворюють кут 120°. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини цього кута.

## ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 5

### Теоретичний матеріал

- площа паралелограма; 8 клас, п. 16.1
- площа трикутника; 8 клас, п. 17.1
- вписане й описане кола трикутника. 7 клас, § 23

### Задачі

**116.** Дві сторони трикутника дорівнюють 10 см і 12 см, а кут між ними 30°. Знайдіть площу трикутника.

**117.** Знайдіть площу паралелограма з висотами $6\sqrt{2}$ см і 8 см та гострим кутом 45°.

# § 5. Застосування тригонометричних функцій до знаходження площ

## 5.1. Площі трикутника і чотирикутника

До цього часу у формулах площ многокутників використовувалися лише довжини їх лінійних елементів (сторін, висот, діагоналей). Тригонометричні функції дозволяють задіяти для знаходження площі многокутника величини його кутів.

**Теорема (формула обчислення площі трикутника за двома сторонами й кутом між ними)**

**Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторін на синус кута між ними:**

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

**де $a$ і $b$ — сторони трикутника, $\gamma$ — кут між ними.**

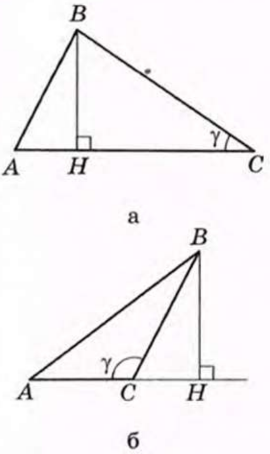



**Рис. 19.** До доведення формули площі трикутника

**Доведення**

□ Нехай у трикутнику $ABC$ $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle C = \gamma$. Проведемо висоту $BH$. За відомою формулою площі трикутника $S = \frac{1}{2}AC \cdot BH$. Однак із прямокутного трикутника $BCH$ ($\angle H = 90°$) маємо $BH = BC\sin\angle BCH$. При цьому у випадку, коли кут $\gamma$ гострий (рис. 19, *а*), $\angle BCH = \gamma$, а коли кут $\gamma$ тупий (рис. 19, *б*), $\angle BCH = 180° - \gamma$, $\sin\angle BCH = \sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$. Отже, $BH = BC\sin\gamma$. Тоді

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Випадок, коли кут $\gamma$ прямий, розгляньте самостійно. ■

**Наслідок**

Площа паралелограма дорівнює добутку його сторін на синус кута між ними:

$$S = ab\sin\gamma,$$

де $a$ і $b$ — сторони паралелограма, $\gamma$ — кут між ними.

### Задача

Знайдіть найменшу сторону трикутника, площа якого дорівнює $8\sqrt{3}$ см$^2$, найбільша сторона — 8 см, а один із кутів — 30°.

### Розв'язання

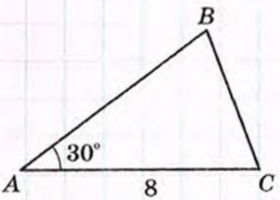


Рис. 20

Нехай дано трикутник $ABC$, $AC = 8$ см, $S_{ABC} = 8\sqrt{3}$ см$^2$ (рис. 20). Із теореми про суму кутів трикутника випливає, що кут 30° не може бути найбільшим кутом, отже, він не є протилежним даній стороні.

Нехай $\angle A = 30°$. За формулою площі трикутника

$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$, тобто $8\sqrt{3} = \frac{1}{2} AB \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$, звідки

$AB = 4\sqrt{3}$ (см).

За теоремою косинусів $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos A$,

$BC^2 = 48 + 64 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, звідки $BC = 4$ (см).

Отже, $BC$ — найменша сторона даного трикутника.

**Відповідь:** 4 см.

Формула площі трикутника застосовується і для доведення формули площі чотирикутника із заданими діагоналями й кутом між ними.

### Опорна задача (формула площі чотирикутника)

**Площа опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку діагоналей на синус кута між ними:**

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\gamma,$$

**де $d_1$, $d_2$ — діагоналі чотирикутника, $\gamma$ — кут між ними.**

Доведіть.

### Розв'язання

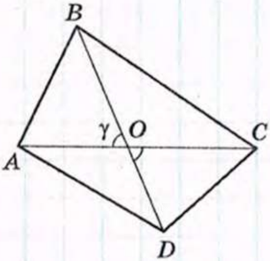


**Рис. 21.** До доведення формули площі чотирикутника

Нехай діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці $O$ під кутом $\gamma$ (рис. 21). Площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює сумі площ чотирьох трикутників:

$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin\gamma$, $S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin(180° - \gamma)$,

$S_{COD} = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin\gamma$, $S_{AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin(180° - \gamma)$.

Враховуючи, що $\sin(180°-\gamma)=\sin\gamma$, маємо

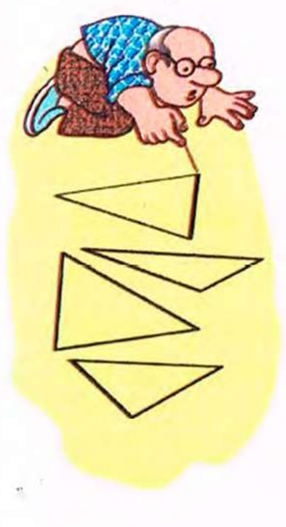
$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\sin\gamma\,(BO\cdot(AO+OC)+OD\cdot(AO+OC))=\frac{1}{2}\sin\gamma\cdot AC\cdot BD=\frac{1}{2}d_1d_2\,\sin\gamma.$$

**Наслідок**

Площа прямокутника обчислюється за формулою $S=\frac{1}{2}d^2\sin\gamma$, де $d$ — діагональ прямокутника, $\gamma$ — кут між діагоналями. Зокрема, площа квадрата з діагоналлю $d$ обчислюється за формулою $S=\frac{d^2}{2}$.

Нагадаємо також, що площа ромба з діагоналями $d_1$ і $d_2$ обчислюється за формулою $S=\frac{d_1d_2}{2}$.

## 5.2. Формула Герона



Ще одна формула площі трикутника, для доведення якої можна використати тригонометричні функції, була наведена давньогрецьким математиком Героном Александрійським (прибл. I ст. до н. е.) і отримала його ім'я. Тільки у XX ст. з'ясувалося, що раніше за Герона цю формулу винайшов Архімед.

**Теорема (формула Герона)**

**Площа трикутника обчислюється за формулою**

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

**де $a$, $b$, $c$ — сторони трикутника, $p=\frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр.**

**Доведення**

☐ За щойно доведеною формулою площі трикутника $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, де $\gamma$ — кут, протилежний стороні $c$. Крім того, за наслідком теореми косинусів $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Знайдемо синус кута $\gamma$ за допомогою основної тригонометричної тотожності:

$$\sin^2\gamma = 1-\cos^2\gamma = (1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) = \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab} =$$
$$= \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).$$

Зауважимо, що $a+b+c=2p$, $c-a+b=2p-2a$, $c+a-b=2p-2b$, $a+b-c=2p-2c$. Тоді $\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Підставивши цей вираз у формулу площі трикутника, маємо: $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Теорему доведено. ■

**Задача**

Знайдіть найбільшу висоту трикутника зі сторонами 12, 39 і 45.

**Розв'язання**

*Оскільки найбільша висота трикутника перпендикулярна до його найменшої сторони, знайдемо висоту, проведену до сторони $a=12$. Скористаємось методом площ. За формулою Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. У нашому випадку $p=\frac{12+39+45}{2}=48$, $S=\sqrt{48(48-12)(48-39)(48-45)}=216$.*

*З іншого боку, $S=\frac{1}{2}ah_a$, тобто $216=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot h_a$, звідки $h_a=36$.*

**Відповідь**: 36.

## 5.3. Формули радіусів вписаного й описаного кіл трикутника

**Теорема (формули радіусів вписаного й описаного кіл трикутника)**

**Радіуси вписаного й описаного кіл трикутника обчислюються за формулами**

$$r=\frac{S}{p}=\frac{2S}{a+b+c},\quad R=\frac{abc}{4S},$$

**де $r$ — радіус вписаного кола, $R$ — радіус описаного кола, $S$ — площа трикутника, $a$, $b$, $c$ — сторони трикутника, $p=\frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр.**

**Доведення**

□ Доведемо спочатку формулу для обчислення $r$. Нехай у трикутнику $ABC$ зі сторонами $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ точка $O$ — центр

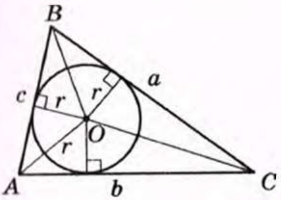



**Рис. 22.** До доведення формули радіуса вписаного кола

вписаного кола (рис. 22). Тоді площа даного трикутника дорівнює сумі площ трикутників $BOC$, $AOC$ і $AOB$:

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r = pr.$$

Звідси $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{2S}{a+b+c}$.

Для доведення формули $R$ скористаємось повним формулюванням теореми синусів, згідно з яким $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$, звідки $R = \dfrac{a}{2\sin A}$. Оскільки $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$, то $\sin A = \dfrac{2S}{bc}$. Підставивши цей вираз у формулу $R$, маємо $R = \dfrac{abc}{4S}$. Теорему доведено. ■

Нагадаємо:

1) для прямокутного трикутника з катетами $a$ і $b$ та гіпотенузою $c$ часто застосовують раніше отримані формули $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ і $R = \dfrac{c}{2}$;
2) центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину бісектрис трикутника; центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника;
3) для обчислення радіуса описаного кола в трикутнику зі стороною $a$ і протилежним кутом $\alpha$ можна скористатися формулою $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

### Задача

Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см, а проведена до неї висота — 32 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

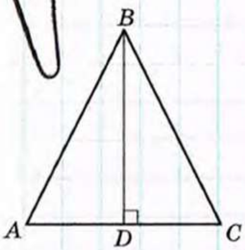



**Рис. 23**

### Розв'язання

Нехай у трикутнику $ABC$ $AB = BC$, $AC = 48$ см, $BD = 32$ см — висота (рис. 23). Оскільки висота $BD$ є також медіаною трикутника $ABC$, то $AD = DC = 24$ см. Із трикутника $ABD$ ($\angle D = 90°$) за теоремою Піфагора $AB = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$ (см).

За формулою радіуса описаного кола

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{AB^2 \cdot AC}{4 \cdot 0{,}5AC \cdot BD} = \frac{AB^2}{2BD}, \quad R = \frac{40^2}{2 \cdot 32} = 25 \text{ (см)}.$$

**Відповідь**: 25 см.

Зазначимо, що цю задачу можна розв'язати і без застосування формули радіуса описаного кола. Але такий спосіб може виявитися більш складним, особливо тоді, коли він потребує обґрунтування розміщення центра описаного кола в даному трикутнику.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**118.** Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 6 см. Чи може площа цього трикутника дорівнювати 10 см$^2$; 15 см$^2$; 30 см$^2$?

**119.** Серед усіх паралелограмів із заданими сторонами $a$ і $b$ визначте той, площа якого найбільша. Відповідь обґрунтуйте.

**120.** Два трикутники описані навколо одного кола. Відомо, що периметр першого трикутника менший, ніж периметр другого. Який із цих трикутників має більшу площу?

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**121.** Накресліть паралелограм із кутом 30° і виміряйте його сторони.
а) Обчисліть площу побудованого паралелограма.
б) Накресліть прямокутник, сторони якого дорівнюють сторонам побудованого паралелограма. У скільки разів площа прямокутника більша за площу паралелограма?

→ **122.** Накресліть гострокутний трикутник, площа якого дорівнює 12 см$^2$. Накресліть тупокутний трикутник, рівновеликий побудованому гострокутному, так, щоби побудовані трикутники мали спільну сторону.

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**123.** Знайдіть площу трикутника $ABC$, якщо:
а) $AB = 10$, $BC = 12$, $\angle B = 30°$; б) $AB = AC = 6$, $\angle A = 120°$;
в) $AC = 5\sqrt{2}$, $BC = 8$, $\angle A = 100°$, $\angle B = 35°$.

**124.** Знайдіть площу:

а) прямокутного трикутника з катетом $6\sqrt{3}$ см і прилеглим кутом 60°;

б) паралелограма зі сторонами 4 см і $4\sqrt{3}$ см та кутом 60°;

в) прямокутника з діагоналлю 12 см і кутом між діагоналями 30°.

→ **125.** Знайдіть площу:

а) рівнобедреного трикутника з бічною стороною 10 см і кутом при основі 75°;

б) ромба з периметром $16\sqrt{2}$ см і кутом 135°;

в) квадрата з діагоналлю 6 см.

**126.** Площа трикутника $ABC$ дорівнює 20 см². Знайдіть сторону $BC$, якщо $AC = 5\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$.

**127.** Знайдіть кути паралелограма зі сторонами 3 см і 12 см, якщо його площа дорівнює 18 см².

→ **128.** Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 30°. Знайдіть бічну сторону трикутника, якщо його площа дорівнює 36 м².

**129.** Знайдіть площу трикутника зі сторонами:

а) 13, 14 і 15;

б) 15, 26 і 37;

в) 8, 29 і 35;

г) 17, 25 і 26.

**130.** Сторони паралелограма дорівнюють 25 см і 29 см, а одна з діагоналей — 36 см. Знайдіть площу паралелограма.

→ **131.** Знайдіть площу трикутника зі сторонами 5, 5 і 6 двома способами.

**132.** Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл:

а) рівнобедреного трикутника з основою 12 см, якщо медіана, проведена до основи, дорівнює 8 см;

б) трикутника зі сторонами 7 см, 15 см і 20 см.

→ **133.** Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл трикутника зі сторонами 16, 25 і 39.

## Рівень Б

**134.** Знайдіть площу трикутника $ABC$, якщо:

а) $\angle A = \alpha$, а висоти, проведені з вершин $B$ і $C$, відповідно дорівнюють $h_b$ і $h_c$;

б) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а висота, проведена з вершини $B$, дорівнює $h_b$.

**135.** Знайдіть площу:

а) рівнобедреного трикутника з основою $8\sqrt{3}$ см, найменший зовнішній кут якого дорівнює $60°$;

б) паралелограма з кутом $30°$, якщо бісектриса цього кута ділить сторону на відрізки завдовжки 11 см і 5 см, починаючи від вершини протилежного кута;

в) прямокутника, діагональ якого дорівнює 10 см і утворює зі стороною кут $75°$.

→ **136.** Знайдіть площу:

а) ромба з периметром 80 см і відношенням кутів $1:5$;

б) трикутника зі сторонами $6\sqrt{3}$ см, 4 см і 14 см.

**137.** Знайдіть периметр трикутника з площею $6\sqrt{3}$ см² і кутом $60°$, якщо сторони, прилеглі до даного кута, відносяться як $3:8$.

→ **138.** Площа прямокутника з діагоналлю 6 см дорівнює $9\sqrt{3}$ см². Знайдіть сторони прямокутника.

**139.** Чи може в формулі Герона хоча б одна з різниць: $p-a$, $p-b$ або $p-c$ — бути від'ємною? Відповідь обґрунтуйте.

**140.** Знайдіть найбільшу висоту і радіус вписаного кола для трикутника зі сторонами:

а) 4, 13 і 15; б) 9, 10 і 17; в) 16, 25 і 39.

→ **141.** Знайдіть найменшу висоту і радіус описаного кола для трикутника зі сторонами:

а) 10, 17 і 21; б) 20, 34 і 42.

**142 (опорна). Площа описаного многокутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола.** Доведіть.

**143.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 64 см, а бічна сторона відноситься до основи як $5:6$. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл трикутника.

→ **144.** Висота трикутника дорівнює 12 см і ділить його сторону на відрізки завдовжки 5 см і 9 см. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл трикутника.

## Рівень В

**145.** Основи трапеції дорівнюють 3 см і 11 см, а діагоналі — 13 см і 15 см. Знайдіть площу трапеції.

→ **146.** Паралельні сторони трапеції дорівнюють 2 см і 6 см, а непаралельні — 13 см і 15 см. Знайдіть площу трапеції.

**147.** Точка дотику вписаного кола ділить бічну сторону рівнобедреної трапеції на відрізки завдовжки 9 см і 16 см. Знайдіть радіус кола і площу трапеції.

→ **148.** Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції, у якій бічна сторона дорівнює 40 см, основа — 13 см, а діагональ — 51 см.

# ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 6

## Теоретичний матеріал

- вписане й описане кола трикутника; 7 клас, § 23
- вписані й описані многокутники; 8 клас, п. 15.1
- вписані кути. 8 клас, § 7

## Задачі

**149.** Точка $O$ — центр кола, описаного навколо рівностороннього трикутника $ABC$. Знайдіть:

а) кути $AOB$, $BOC$ і $AOC$; = 30°

б) радіус кола, якщо сторона трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

**150.** Точка $O$ — центр кола, вписаного в рівносторонній трикутник $ABC$. Знайдіть:

а) кути між радіусами, проведеними в точки дотику;

б) радіус кола, якщо сторона трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

## Задачі для підготовки до контрольної роботи № 1

**1.** У трикутнику $ABC$ $AB = 8$ м, $BC = 15$ м, $\angle B = 60°$. Знайдіть периметр і площу трикутника.

**2.** У трикутнику $DEF$ $DE = 4$ см, $\angle D = 30°$, $\angle E = 120°$. Знайдіть невідомі сторони трикутника і радіус кола, описаного навколо нього.

**3.** Дано трикутник зі сторонами 13, 20 і 21.

а) Доведіть, що даний трикутник гострокутний.

б) Знайдіть площу трикутника.

в) Знайдіть найменшу висоту трикутника.

**4.** Сторони паралелограма дорівнюють $8\sqrt{2}$ см і 2 см та утворюють кут 45°. Знайдіть меншу діагональ і площу паралелограма.

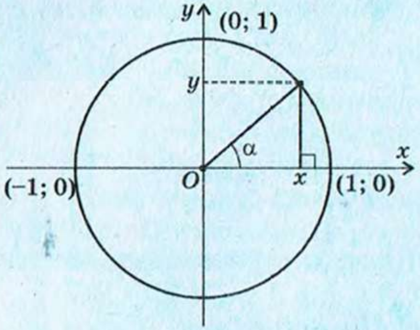
**5.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а проведена до неї висота — 16 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

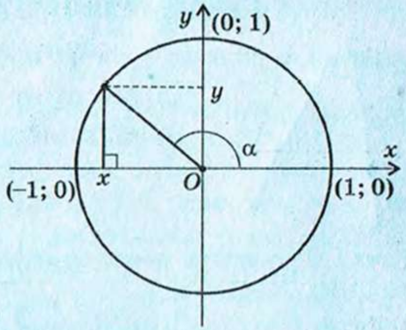
**6.** Діагональ, бічна сторона і більша основа рівнобедреної трапеції дорівнюють відповідно 40 см, 13 см і 51 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

# Підсумки розділу I

## ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ I

### Тригонометричні функції




$\sin\alpha = y$

$\cos\alpha = x$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$

### Тригонометричні тотожності

***Тригонометричні тотожності***

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad (\alpha \neq 90^\circ)$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad (\alpha \neq 0^\circ,\ \alpha \neq 180^\circ)$

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1\ (\alpha \neq 0^\circ,\ \alpha \neq 90^\circ,\ \alpha \neq 180^\circ)$

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\quad (\alpha \neq 90^\circ)$

$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\quad (\alpha \neq 0^\circ,\ \alpha \neq 180^\circ)$

***Формули зведення***

Для $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

Для $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$

$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

Для $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

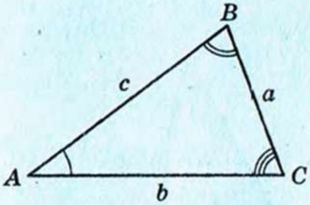
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha\quad (\alpha \neq 90^\circ)$

$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

$(\alpha \neq 0^\circ,\ \alpha \neq 180^\circ)$

## Теорема косинусів та її наслідки

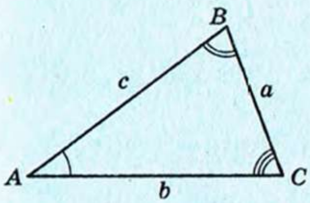



Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

| ***Наслідок 1*** | ***Наслідок 2*** |
|---|---|
| У трикутнику $ABC$ зі сторонами $a$, $b$, $c$ і кутом $C$ між сторонами $a$ і $b$ $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ | Якщо в трикутнику зі сторонами $a$, $b$, $c$ справджується нерівність $a^2 + b^2 > c^2$, то кут $C$ гострий; якщо $a^2 + b^2 < c^2$, то кут $C$ тупий; якщо $a^2 + b^2 = c^2$, то кут $C$ прямий |

## Теорема синусів

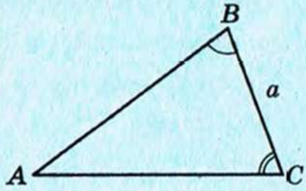
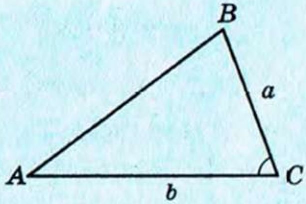
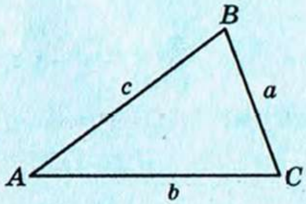
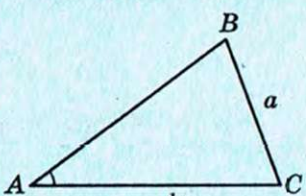



Сторони трикутника пропорційні до синусів протилежних кутів:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

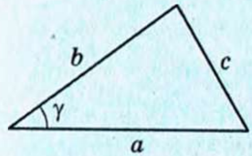
де $R$ — радіус кола, описаного навколо трикутника

## Основні задачі на розв'язування трикутників

| *Задача* | *Умова* | *Схема розв'язування* |
|---|---|---|
| **Задача 1**<br>За стороною та двома кутами | Дано: $a$, $\angle B$, $\angle C$.<br>Знайти: $b$, $c$, $\angle A$<br><br> | 1. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$.<br>2. $b = \frac{a\sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$ |
| **Задача 2**<br>За двома сторонами й кутом між ними | Дано: $a$, $b$, $\angle C$.<br>Знайти: $c$, $\angle A$, $\angle B$<br><br> | 1. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$.<br>2. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.<br>3. $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$ |
| **Задача 3**<br>За трьома сторонами | Дано: $a$, $b$, $c$.<br>Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$<br><br> | 1. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.<br>2. $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.<br>3. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$ |
| **Задача 4**<br>За двома сторонами й кутом, протилежним одній із них | Дано: $a$, $b$, $\angle A$.<br>Знайти: $c$, $\angle B$, $\angle C$<br><br> | 1. $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$.<br>2. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.<br>3. $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$ |

# Формули площ

### *Площа трикутника*




$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

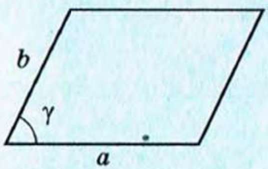
де $a$ і $b$ — сторони трикутника,
$\gamma$ — кут між ними

*формула Герона*

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де $a$, $b$, $c$ — сторони трикутника,
$p=\frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр

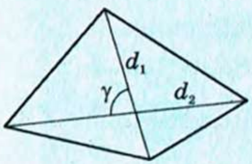
### *Площа паралелограма*




$$S=ab\sin\gamma,$$

де $a$ і $b$ — сторони паралелограма,
$\gamma$ — кут між ними

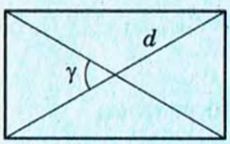
### *Площа опуклого чотирикутника*




$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma,$$

де $d_1$, $d_2$ — діагоналі чотирикутника,
$\gamma$ — кут між ними

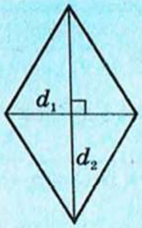
### *Площа прямокутника*




$$S=\frac{d^2}{2}\sin\gamma,$$

де $d$ — діагональ прямокутника,
$\gamma$ — кут між діагоналями

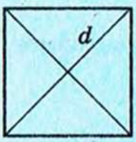
*Закінчення таблиці*




***Площа ромба***

$$S = \frac{d_1 d_2}{2},$$

де $d_1$ і $d_1$ — діагоналі ромба

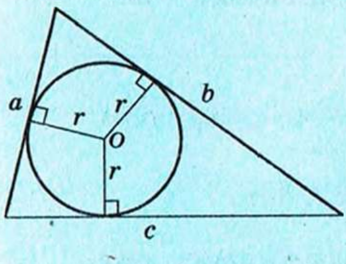



***Площа квадрата***

$$S = \frac{d^2}{2},$$

де $d$ — діагональ квадрата

## Формули радіусів



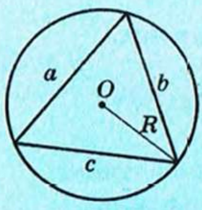

***Радіус вписаного кола трикутника***

$$r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{a+b+c},$$

де $S$ — площа трикутника,

$a, b, c$ — сторони трикутника,

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — півпериметр




***Радіус описаного кола трикутника***

$$R = \frac{abc}{4S},$$

де $S$ — площа трикутника,

$a, b, c$ — сторони трикутника

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ I

1. Дайте означення синуса, косинуса й тангенса кутів від $0°$ до $180°$.
2. Запишіть формули зведення для кутів $90° - \alpha$ і $180° - \alpha$.
3. Сформулюйте і доведіть теорему косинусів.
4. Сформулюйте наслідки теореми косинусів.
5. Сформулюйте і доведіть теорему синусів.
6. Опишіть основні алгоритми розв'язування трикутників.
7. Запишіть формули площі довільного трикутника.
8. Запишіть формули площі довільного паралелограма.
9. Запишіть формули радіусів вписаного й описаного кіл трикутника.

## ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ I

**151.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а медіана, проведена до бічної сторони, дорівнює 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

**152.** Знайдіть діагоналі паралелограма, площа якого дорівнює $14\sqrt{3}$ м$^2$, а сторони — 4 м і 7 м.

**153.** Точка $D$ лежить на основі $AC$ рівнобедреного трикутника $ABC$. Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників $ABD$ і $DBC$, рівні.

**154.** Доведіть теорему синусів методом площ.

**155.** Доведіть за допомогою теореми синусів теорему про властивість бісектриси трикутника.

**156.** Розв'яжіть трикутник $ABC$, якщо $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює $R$.

**157 (опорна). Якщо два трикутники мають по рівному куту, то відношення площ цих трикутників дорівнює відношенню добутків сторін, що утворюють рівні кути.** Доведіть.

**158.** Знайдіть площу трикутника, в якому бісектриса кута, що дорівнює $120°$, ділить протилежну сторону на відрізки завдовжки 21 см і 35 см.

**159.** Дві сторони трикутника дорівнюють $8\sqrt{2}$ см і 7 см, а його площа — 28 см$^2$. Знайдіть третю сторону.

**160.** До якої з вершин різностороннього трикутника центр вписаного кола є найближчим? Відповідь обґрунтуйте.

**161.** Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 192 $см^2$, а радіус вписаного кола — 6 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його основа на 4 см більша за бічну сторону.

**162.** Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють 22 см і 42 см, а бічна сторона — 26 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

## Задачі підвищеної складності

**163.** Медіани $AN$ і $BM$ трикутника $ABC$ перетинаються в точці $O$, причому $AN = 6$, $BM = 9$, $\angle AOB = 30°$. Знайдіть площу трикутника $ABC$.

**164.** У трикутнику $ABC$ $\angle A = 75°$, $AB = 1$, $AC = \sqrt{6}$. На стороні $BC$ позначено точку $M$ так, що $\angle BAM = 30°$. Пряма $AM$ перетинає коло, описане навколо трикутника $ABC$, в точці $N$, яка не збігається з точкою $A$. Знайдіть $AN$.

**165 (опорна). Довжина бісектриси трикутника обчислюється за формулою $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$, де $l_a$ — бісектриса, проведена до сторони $a$, $\alpha$ — кут між сторонами $b$ і $c$.** Доведіть.

**166.** У трикутнику зі стороною 26 см медіани, проведені до двох інших сторін, дорівнюють 15 см і 30 см. Знайдіть довжину третьої медіани.

**167.** Сторони опуклого чотирикутника з площею $S$ послідовно дорівнюють $a$, $b$, $c$ і $d$. Доведіть, що $S \leqslant \dfrac{1}{2}(ab + cd)$.

**168.** Доведіть формулу площі вписаного чотирикутника (формулу Брахмагупти) $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, де $a$, $b$, $c$ і $d$ — сторони чотирикутника, $p$ — його півпериметр.

**169.** Доведіть, що для висот трикутника $h_a$, $h_b$ і $h_c$ та радіуса вписаного кола $r$ справджується співвідношення $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

**170.** Центр кола, вписаного в прямокутний трикутник, віддалений від кінців гіпотенузи на 7 см і $5\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус вписаного кола.

**171.** Довжини двох сторін трикутника дорівнюють $a$ і $b$. Бісектриси кутів при третій стороні в результаті перетину утворюють кут 165°. Знайдіть площу трикутника.

**172.** У трапеції з основами $a$ і $b$ $(a < b)$ діагоналі взаємно перпендикулярні, а кут між продовженнями бічних сторін дорівнює 45°. Знайдіть висоту трапеції.

# ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Приблизно до XVII ст. тригонометрія як розділ геометрії вивчала майже виключно одну проблему — розв'язування трикутників. І це не дивно, адже потреби архітектури й астрономії, геодезії і мореплавання висували проблему пошуку невідомих сторін і кутів трикутника на чільне місце в процесі розв'язування практичних задач.

Теорема косинусів фактично була доведена вже в другій книзі «Начал» Евкліда, де узагальнюється теорема Піфагора і наводяться формули для обчислення квадрата сторони довільного трикутника. Математики Александрії, Давньої Індії, країн Ближнього та Середнього Сходу також використовували подібні формули. Однак перше чітке формулювання теореми косинусів навів у 1579 р. французький математик Франсуа Вієт (1540–1603). Сучасного вигляду ця теорема набула в 1801 р. в роботі іншого французького вченого — Лазара Карно (1753–1823).

Значно пізніше за теорему косинусів було винайдено теорему синусів. Справа в тому, що стародавні математики зводили розв'язування довільних трикутників до розв'язування прямокутних трикутників, тому теорема синусів їм не була потрібна. Цю теорему довів лише в XI ст. астроном із Хорезма Аль-Беруні. Починаючи з XVI ст. теорему синусів використовують і європейські геометри, а в 1801 р. французький математик Ж. Л. Лагранж (1736—1813) вивів її з теореми косинусів.

Цікава історія виникнення формули Герона. Про життя й діяльність Герона Александрійського відомо вкрай мало — навіть роки його життя достеменно не встановлені (одні історики вважають, що він жив у III ст. до н. е., а інші — в I ст. до н. е.). Герон досяг визначних результатів у прикладних науках — геодезії та механіці (його навіть називали Герон-механік). Він виклав правила вимірювання земельних ділянок і описав деякі вимірювальні прилади, зокрема «діоптри» — прилади для побудови й вимірювання кутів на місцевості. У своєму найважливішому геометричному творі «Метрика» Герон навів доведення формули площі трикутника, нині відомої як формула Герона. Але пізніше з'ясувалося, що першим цю формулу в III ст. до н. е. вивів славнозвісний Архімед.

Франсуа Вієт

Ж. Л. Лагранж

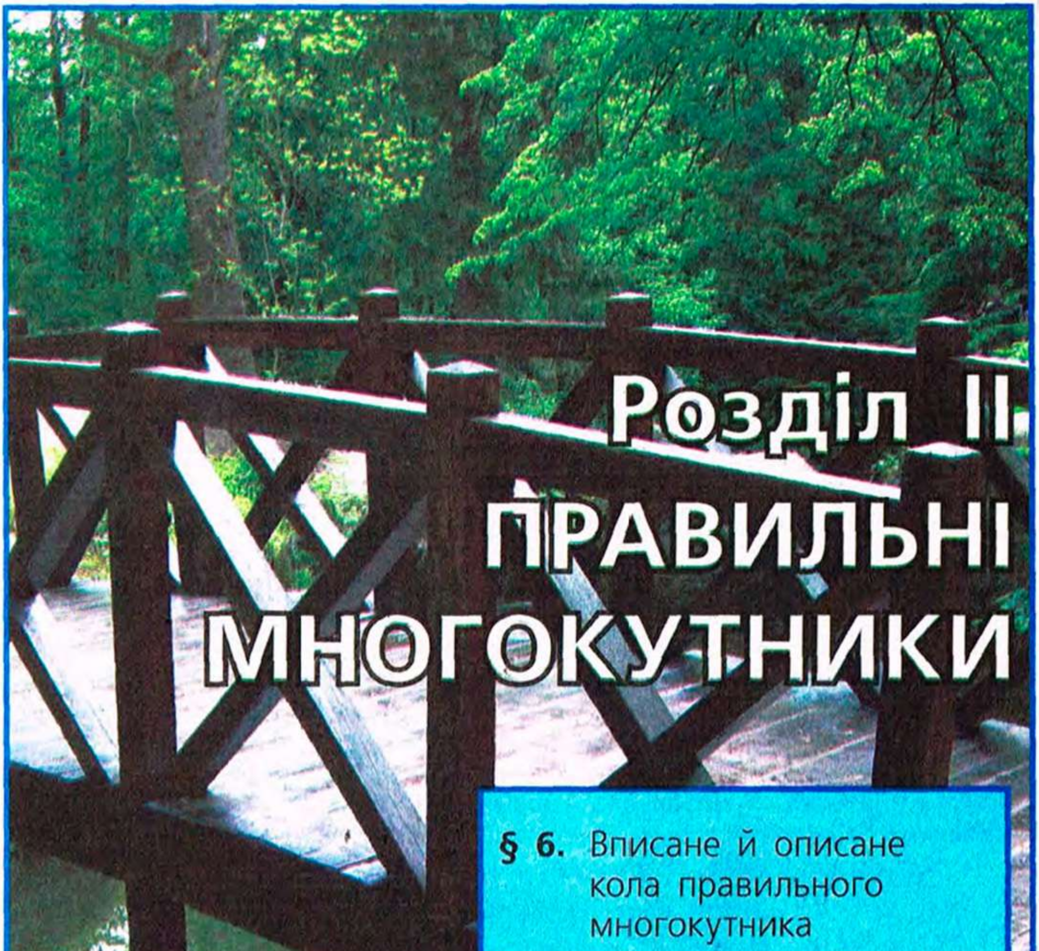
Герон

## ТЕМАТИКА ПОВІДОМЛЕНЬ І РЕФЕРАТІВ ДО РОЗДІЛУ І

1. Метричні співвідношення в довільному трикутнику.
2. Метричні співвідношення в довільному чотирикутнику (теорема косинусів, співвідношення Бретшнайдера). Площі чотирикутників.
3. Теорема Птолемея. Перші тригонометричні таблиці.
4. Практичні задачі на розв'язування трикутників.

## РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ


1. Глейзер, Г. И. История математики в школе. VII—VIII классы: Пособие для учителей [Текст] / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1982. — 240 с.
2. Конфорович, А. Г. Визначні математичні задачі [Текст] / А. Г. Конфорович. — К. : Факт, 2000. — 189 с.
3. Кушнір, І. А. Повернення втраченої геометрії [Текст] / І. А. Кушнір. — К. : Факт, 2000. — 280 с. (Серія «Математичні обрії України»).
4. Математична хрестоматія для 6—8 класів. Т. 1 [Текст]. — К. : Рад. шк., 1968. — 320 с.
5. Математична хрестоматія для старших класів. Геометрія. Т. 2 [Текст] / упоряд. Л. В. Кованцова. — К. : Рад. шк., 1969. — 383 с.
6. Перельман, Я. И. Занимательная геометрия [Текст] / Я. И. Перельман ; под ред. Б. А. Кордемского. — М. : Физматгиз, 1959. — 302 с.
7. Понарин, Я. П. Планиметрия, преобразования плоскости. Т. 1 [Текст] / Я. П. Понарин. — М. : МЦНМО, 2004.
8. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 1 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 320 с. — (Б-ка мат. кружка).
9. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 2 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 240 с. — (Б-ка мат. кружка).
10. Інтернет-бібліотека МЦНМО. http://ilib.mirror0.mccme.ru/
11. Сайт видавництва «Ранок». http://www.ranok.com.ua



# Розділ II
# ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

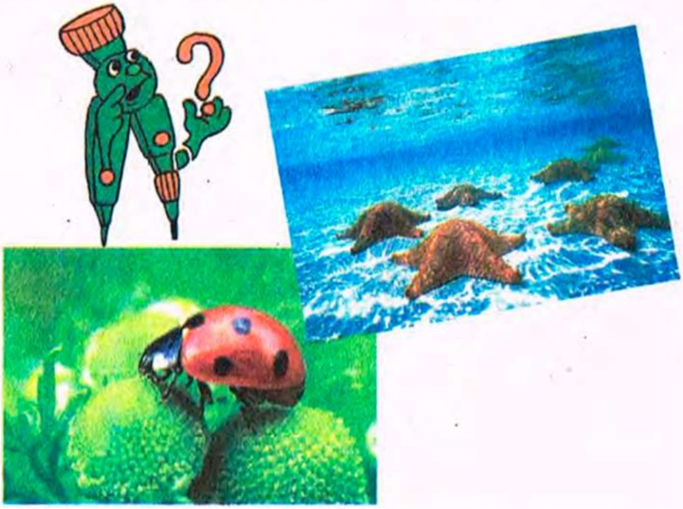
Геометрія — наше велике творіння, яке нас самих захоплює.

*Ле Корбюзьє, французький архітектор*

Фігури, що мають рівні сторони та кути, здавна зачаровували людину досконалістю форми і таємничістю, яка завжди супроводжує досконалість. Такі фігури обожнювали, приписуючи їм магічні та навіть цілющі властивості. Многокутники з рівними сторонами й кутами прикрашали фамільні герби середньовічних можновладців, обиралися символами таємних товариств, а дослідженню властивостей цих многокутників присвячували свої роботи найвидатніші математики минулих часів.

Вивчення правильних многокутників нерозривно пов'язане зі знаходженням довжини кола й площі круга. Недарма однією з класичних задач геометрії вважається задача про квадратуру круга — побудова квадрата, площа якого дорівнює площі даного круга. І хоча неможливість такої побудови за допомогою циркуля й лінійки вже давно доведено, вираз «квадратура круга» і сьогодні вживається для характеристики вкрай складних задач, що не мають розв'язку.

У процесі подальшого вивчення геометрії властивості правильних многокутників допоможуть розкрити секрети одного з найцікавіших геометричних перетворень — симетрії. А згодом, розглядаючи фігури в просторі, ви познайомитеся з тривимірним аналогом правильних многокутників — правильними многогранниками.



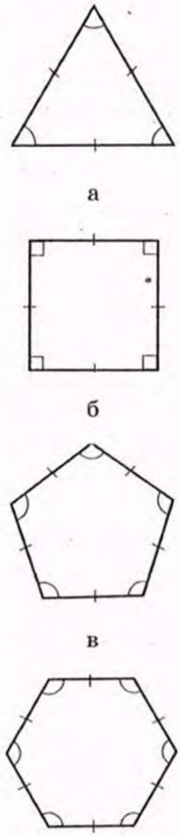
# § 6. Вписане й описане кола правильного многокутника

## 6.1. Означення правильного многокутника. Існування вписаного й описаного кіл

Ви вже неодноразово зустрічалися з многокутниками, в яких усі сторони рівні, і з многокутниками, в яких усі кути рівні. Якщо обидві ці властивості у многокутнику наявні одночасно, такий многокутник є правильним.

**Означення**

**Правильним многокутником** називається опуклий многокутник, у якому всі сторони рівні й усі кути рівні.



а

б

в

г

**Рис. 24.** Правильні многокутники

Уже відомими вам видами правильних многокутників є рівносторонній трикутник (рис. 24, *а*) і квадрат (рис. 24, *б*). На рис. 24 зображено також правильний п'ятикутник (рис. 24, *в*) і правильний шестикутник (рис. 24, *г*).

Оскільки сума кутів опуклого $n$-кутника дорівнює $180°(n-2)$, **величина кута $\alpha_n$ правильного $n$-кутника обчислюється за формулою:**

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°.$$

Нагадаємо, що многокутник є вписаним у коло, якщо всі його вершини лежать на цьому колі; многокутник є описаним навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до цього кола.

**Теорема (про вписане й описане кола правильного многокутника)**

**Навколо будь-якого правильного многокутника можна описати коло, і в будь-який правильний многокутник можна вписати коло, причому центри описаного і вписаного кіл збігаються.**

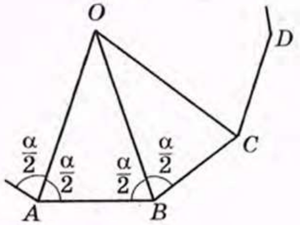



**Рис. 25.** До доведення теореми про вписане й описане кола правильного многокутника

### Доведення

□ Нехай $A$, $B$, $C$ і $D$ — послідовні вершини правильного многокутника (рис. 25). Проведемо бісектриси кутів $A$ і $B$. Вони перетинаються в деякій точці $O$ (поясніть чому). Трикутник $AOB$ є рівнобедреним з основою $AB$, оскільки $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\alpha}{2}$, де $\alpha$ — кут даного многокутника. Сполучимо точки $O$ і $C$. Трикутники $AOB$ і $COB$ рівні за першою ознакою: у них сторона $OB$ спільна, $AB = CB$ як сторони правильного многокутника, $\angle OBC = \angle OBA = \frac{\alpha}{2}$, оскільки $BO$ — бісектриса кута $ABC$. Отже, трикутник $COB$ рівнобедрений з основою $CB$, $\angle OCB = \angle OBC = \frac{\alpha}{2}$, тобто $CO$ — бісектриса кута $BCD$.

Продовжуючи цей процес далі, легко переконатися, що всі трикутники з вершиною $O$, основами яких є сторони даного правильного многокутника, рівнобедрені й рівні. Звідси випливає, що всі вершини даного многокутника лежать на колі з центром $O$, радіус якого дорівнює бічним сторонам цих трикутників. Крім того, всі сторони даного многокутника дотикаються до іншого кола з центром $O$, радіус якого дорівнює висотам цих трикутників, проведеним із вершини $O$. Теорему доведено. ■

Неважко переконатися, що будь-який правильний многокутник має єдине вписане і єдине описане кола (доведіть це самостійно). Точку, яка є спільним центром цих кіл, називають **центром правильного многокутника.**

### Означення

**Центральним кутом правильного многокутника** називається кут, під яким сторону многокутника видно з центра цього многокутника.

Так, на рис. 25 кути $AOB$, $BOC$, $COD$... — центральні кути правильного многокутника. Очевидно, що **центральний кут правильного $n$-кутника дорівнює $\frac{360^\circ}{n}$.**

## 6.2. Формули радіусів вписаного й описаного кіл правильного многокутника

Радіуси вписаного й описаного кіл правильного $n$-кутника можна знайти, знаючи довжину його сторони і число $n$.

**Теорема (формули радіусів вписаного й описаного кіл правильного $n$-кутника)**

**Для правильного $n$-кутника радіуси вписаного й описаного кіл обчислюються за формулами**

$$r = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}, \quad R = \frac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}},$$

**де $r$ — радіус вписаного кола; $R$ — радіус описаного кола; $a_n$ — сторона $n$-кутника.**

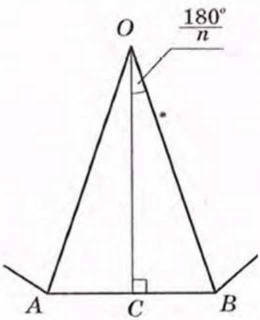



**Рис. 26.** До доведення формул радіусів вписаного й описаного кіл правильного $n$-кутника

**Доведення**

□ Нехай $O$ — центр правильного $n$-кутника зі стороною $a_n$, $A$ і $B$ — сусідні вершини цього $n$-кутника (рис. 26). Тоді в рівнобедреному трикутнику $AOB$ бічні сторони $OA$ і $OB$ — радіуси описаного кола, а висота $OC$ — радіус вписаного кола даного $n$-кутника.

Оскільки висота є також бісектрисою і медіаною трикутника $AOB$ і центральний кут $AOB$ дорівнює $\frac{360^\circ}{n}$, то в трикутнику $OCB$ $\angle C = 90^\circ$,

$$CB = \frac{1}{2}AB = \frac{a_n}{2}, \angle COB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{180^\circ}{n}.$$

Звідси

$$r = OC = \frac{CB}{\operatorname{tg}\angle COB} = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}},$$

$$R = OB = \frac{CB}{\sin\angle COB} = \frac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}.$$

Теорему доведено. ■

### Наслідок

Для правильного $n$-кутника зі стороною $a_n$ при $n = 3$, 4, 6 радіуси вписаного й описаного кіл обчислюються за такими формулами:

| $n$ | $r$ | $R$ |
|---|---|---|
| 3 | $\frac{a_3}{2\sqrt{3}}$ | $\frac{a_3}{\sqrt{3}}$ |
| 4 | $\frac{a_4}{2}$ | $\frac{a_4}{\sqrt{2}}$ |
| 6 | $\frac{a_6\sqrt{3}}{2}$ | $a_6$ |

Справді, для правильного (рівностороннього) трикутника ($n = 3$):

$$r = \frac{a_3}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{3}} = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}, \quad R = \frac{a_3}{2\sin\frac{180°}{3}} = \frac{a_3}{\sqrt{3}};$$

для правильного чотирикутника (квадрата) ($n = 4$):

$$r = \frac{a_4}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{4}} = \frac{a_4}{2}, \quad R = \frac{a_4}{2\sin\frac{180°}{4}} = \frac{a_4}{\sqrt{2}};$$

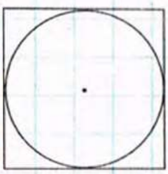
для правильного шестикутника ($n = 6$):

$$r = \frac{a_6}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{6}} = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}, \quad R = \frac{a_6}{2\sin\frac{180°}{6}} = a_6.$$

### Задача

Площа квадрата, описаного навколо кола, дорівнює 48 см$^2$. Знайдіть площу рівностороннього трикутника, вписаного в те саме коло.

### Розв'язання

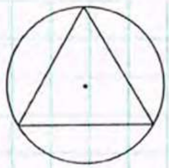


а

Рис. 27 [Див. також с. 57]

Нехай навколо кола описано квадрат з площею $S =$ $= 48$ см$^2$ (рис. 27, а). Тоді сторона квадрата $a_n = \sqrt{48} =$ $= 4\sqrt{3}$ (см). Із формули $r = \frac{a_4}{2}$ маємо $r = 2\sqrt{3}$ (см).

Знайдений радіус r є радіусом описаного кола R для рівностороннього трикутника (рис. 27, б), площу якого



б

**Рис. 27** [Закінчення]

необхідно знайти. Оскільки $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$, то $a_3 = R\sqrt{3}$, отже, $a_3 = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$ (см).

За формулою площі рівностороннього трикутника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ маємо $S = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ (см²).

**Відповідь:** $9\sqrt{3}$ см².

Зауважимо, що у випадку, коли в задачі йдеться про вписаний і описаний правильні *n*-кутники, з метою уникнення непорозумінь із застосуванням формул сторони цих *n*-кутників можна позначати $a_n$ і $b_n$ відповідно.

## 6.3. Побудова правильних многокутників

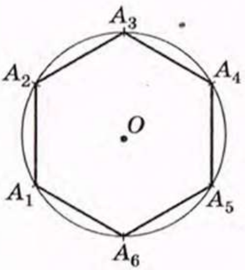



**Рис. 28.** Побудова правильного шестикутника

Розглянемо способи побудови деяких правильних многокутників за допомогою циркуля і лінійки. Ви вже вмієте будувати правильний (рівносторонній) трикутник і квадрат. Для побудови інших видів правильних многокутників часто використовують описане коло.

Побудуємо правильний шестикутник зі стороною $a$. Оскільки сторона такого шестикутника дорівнює радіусу описаного кола, побудуємо спочатку коло радіуса $a$ і позначимо на ньому довільну точку $A_1$ (рис. 28). Далі з неї як із центра тим самим радіусом $a$ проведемо дугу і на її перетині з побудованим колом позначимо точку $A_2$. Послідовно відкладаючи такі дуги, отримуємо точки $A_3$, $A_4$, $A_5$ та $A_6$ і послідовно сполучимо їх відрізками.

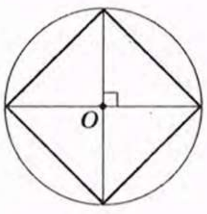
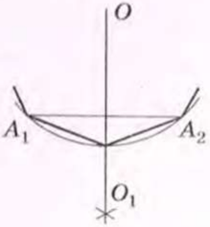



**Рис. 29.** Побудова вписаного квадрата

Узагалі, для побудови правильного вписаного многокутника достатньо побудувати його центральний кут. Наприклад, для квадрата він дорівнює 90°, отже, якщо провести через центр кола дві взаємно перпендикулярні прямі, то вони перетнуть дане коло у вершинах вписаного квадрата (рис. 29).




а


б

**Рис. 30.** Побудова правильного вписаного $2n$-кутника

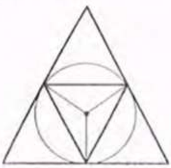


**Рис. 31.** Побудова правильного описаного трикутника

Якщо в коло вписано правильний $n$-кутник $A_1A_2...A_n$, то неважко побудувати правильний вписаний $2n$-кутник. Для цього достатньо розділити хорди $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_nA_1$ (а отже, і відповідні дуги) навпіл (рис. 30, *а*). На рис. 30, *б* показано, як, маючи вписаний квадрат, побудувати правильний вписаний восьмикутник. Застосовуючи цей спосіб, можна далі побудувати правильний 16-кутник, 32-кутник і взагалі правильний $2^k$-кутник, де $k$ — будь-яке натуральне число, більше за 2.

Для побудови правильного описаного $n$-кутника достатньо провести дотичні до кола у вершинах правильного вписаного $n$-кутника. На рис. 31 показано, як у такий спосіб побудувати правильний описаний трикутник.

Наведені приклади показують, що багато видів правильних многокутників можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Однак не всі правильні многокутники допускають таку побудову. Наприклад, доведено, що за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати правильний 17-кутник, але не можна побудувати правильний семикутник.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**173.** Чи є правильним многокутником рівнобедрений прямокутний трикутник; ромб із кутом 60°; прямокутник із нерівними сторонами? Чому?

**174.** Чи правильно, що:

а) коли в трикутнику всі кути рівні, то він є правильним;

б) коли в чотирикутнику всі кути рівні, то він є правильним?

**175.** Сума кутів правильного многокутника дорівнює 180°. Яка градусна міра кута цього многокутника?

**176.** Чи можуть бісектриси кутів правильного многокутника і серединні перпендикуляри до його сторін перетинатися у двох різних точках? Чому?

**177.** Скільки кутів має правильний многокутник, у якому:
а) радіус описаного кола вдвічі більший за радіус вписаного кола;
б) радіус описаного кола дорівнює стороні?

**178.** Опишіть, як, маючи зображення правильного 18-кутника, побудувати правильний дев'ятикутник; правильний 36-кутник.

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**179.** Побудуйте правильний шестикутник $ABCDEF$.
а) Проведіть діагональ $AD$. Визначте вид чотирикутників, на які вона ділить даний шестикутник.
б) Проведіть діагоналі $AC$ і $AE$. Визначте вид трикутників, що утворилися.

→ **180.** Побудуйте правильний трикутник і виріжте його з паперу. Зріжте кути трикутника так, щоб отримати правильний шестикутник. У якому відношенні точки зрізу ділять сторони трикутника?

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**181.** Визначте кількість сторін правильного многокутника, центральний кут якого дорівнює:
а) 90°; б) 72°; в) 20°.

**182.** Знайдіть кути правильного $n$-кутника, якщо:
а) $n = 5$; б) $n = 6$; в) $n = 10$.

→ **183.** Визначте кількість сторін правильного многокутника, в якому:
а) центральний кут дорівнює 30°;
б) сума кутів дорівнює 1800°.

**184.** Доведіть, що діагональ правильного п'ятикутника паралельна одній із його сторін.

→ **185.** Доведіть, що найбільша діагональ правильного шестикутника ділить його на дві трапеції.

**186.** Знайдіть радіус кола:
а) вписаного в правильний трикутник зі стороною $8\sqrt{3}$ см;
б) описаного навколо квадрата з площею 16 см$^2$;
в) вписаного в правильний шестикутник з периметром $36\sqrt{3}$ см.

**187.** Знайдіть:

а) площу рівностороннього трикутника, навколо якого описано коло радіуса 2 см;

б) діагональ квадрата, в який вписано коло радіуса $\sqrt{2}$ см;

в) периметр правильного шестикутника, навколо якого описано коло діаметром 8 см.

**188.** Заповніть таблицю формул для обчислення сторони $a_n$, радіуса $R$ описаного кола і радіуса $r$ вписаного кола для правильного $n$-кутника.

| $n$ | $R$ через $a_n$ | $r$ через $a_n$ | $a_n$ через $R$ | $a_n$ через $r$ | $R$ через $r$ | $r$ через $R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

**189.** Переріз терпуга має форму правильного трикутника зі стороною 3 см. Яким має бути мінімальний діаметр круглого металічного стрижня, з якого виготовляють терпуг?

**190.** Поперечний переріз дерев'яного бруска є квадратом з діагоналлю $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть найбільший діаметр круглого стрижня, який можна виточити з такого бруска.

**191.** Побудуйте правильний шестикутник із периметром 12 см. Обчисліть площу побудованого шестикутника.

**192.** Впишіть квадрат у коло радіуса 3 см. За допомогою вписаного квадрата побудуйте правильний восьмикутник, вписаний у дане коло.

## Рівень Б

**193.** Доведіть, що зовнішній кут правильного многокутника дорівнює його центральному куту.

**194.** Визначте кількість сторін правильного многокутника, кути якого дорівнюють:

а) $120°$; б) $108°$; в) $150°$.

**195.** Знайдіть:

а) периметр правильного многокутника зі стороною 5 см і внутрішнім кутом $144°$;

б) сторону правильного многокутника, периметр якого дорівнює 48 см, а внутрішній кут утричі більший, ніж зовнішній.

**196.** Доведіть, що середини сторін правильного $n$-кутника є вершинами іншого правильного $n$-кутника.

**197.** Доведіть, що вершини правильного $2n$-кутника, взяті через одну, є вершинами правильного $n$-кутника.

**198.** Знайдіть:

а) площу правильного шестикутника, вписаного в коло, якщо площа квадрата, описаного навколо цього кола, дорівнює 64 см$^2$;

б) площу квадрата, описаного навколо кола, якщо площа правильного трикутника, вписаного в це коло, дорівнює $9\sqrt{3}$ см$^2$;

в) радіус кола, описаного навколо правильного шестикутника, якщо радіус кола, вписаного в цей шестикутник, дорівнює $8\sqrt{3}$ см.

**199.** Знайдіть:

а) площу квадрата, вписаного в коло, якщо площа правильного шестикутника, вписаного в це коло, дорівнює $6\sqrt{3}$ см$^2$;

б) площу правильного трикутника, описаного навколо кола, якщо площа квадрата, описаного навколо цього кола, дорівнює 36 см$^2$;

в) радіуси описаного і вписаного кіл рівностороннього трикутника, якщо різниця цих радіусів складає 3 см.

**200.** Заповніть таблицю формул для обчислення площі $S$ правильного $n$-кутника зі стороною $a_n$, радіусом $R$ описаного кола і радіусом $r$ вписаного кола.

| $n$ | $S$ через $a_n$ | $S$ через $R$ | $S$ через $r$ |
|---|---|---|---|
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 6 | | | |

**201.** Доведіть, що серединні перпендикуляри до будь-яких двох сторін правильного многокутника перетинаються або збігаються.

**202.** Доведіть, що прямі, на яких лежать бісектриси будь-яких двох кутів правильного многокутника, перетинаються або збігаються.

**203.** Побудуйте коло радіуса 3 см. Для даного кола побудуйте правильні вписаний і описаний шестикутники та обчисліть відношення їх площ. Чи залежить воно від довжини радіуса даного кола?

**204.** Впишіть у коло правильний восьмикутник. Обчисліть його площу, якщо радіус кола дорівнює $R$.

## Рівень В

**205.** Різниця зовнішніх кутів двох правильних многокутників становить 24°, а різниця сум усіх внутрішніх кутів цих многокутників становить 720°. Визначте кількість сторін кожного многокутника.

**206.** Визначте кількість сторін правильного многокутника, якщо:

а) сума чотирьох його внутрішніх кутів на 240° більша за суму решти кутів;

б) сума чотирьох внутрішніх і двох зовнішніх його кутів дорівнює 576°.

**207.** Правильний трикутник, квадрат і правильний шестикутник мають однакові периметри. Знайдіть відношення їх площ.

**208.** Правильний трикутник, квадрат і правильний шестикутник вписані в одне коло. Знайдіть відношення їх площ.

**209.** Доведіть формулу залежності сторони $a_{2n}$ правильного вписаного $2n$-кутника від радіуса $R$ описаного кола і сторони $a_n$ правильного вписаного $n$-кутника (*формулу подвоєння числа сторін правильного вписаного многокутника*):

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Користуючись цією формулою, виразіть через $R$ сторони правильного вписаного восьмикутника та дванадцятикутника.

**210.** Впишіть у коло даного радіуса $R$ правильний десятикутник.

а) Доведіть, що сторона $a_{10}$ побудованого десятикутника і радіус $R$ кола відносяться в «золотому перерізі».

б) Впишіть у дане коло правильний п'ятикутник.

## ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 7

### Теоретичний матеріал

- коло і круг;
- вписані кути;
- поняття площ.

7 клас, § 19

8 клас, § 7, 16

### Задачі

**211.** Два кути трикутника дорівнюють 15° і 85°. Знайдіть центральні кути, під якими сторони даного трикутника видно з центра описаного кола.

**212.** Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 8 см, а його площа 24 см². Знайдіть радіуси описаного і вписаного кіл трикутника.

# § 7. Довжина кола і площа круга

## 7.1. Довжина кола і дуги кола

Отримати наочне уявлення про довжину кола досить просто — для цього достатньо, наприклад, уявити, що коло є металевим обручем, який можна розрізати в довільній точці $A$ і розпрямити (рис. 32). Отримаємо відрізок $AA_1$, довжина якого і є довжиною кола.

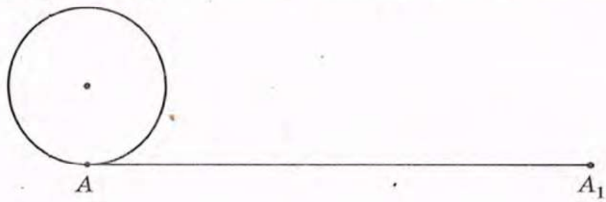



**Рис. 32.** Наочне уявлення про довжину кола

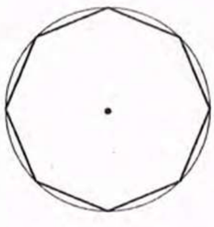


**Рис. 33.** До означення довжини кола

Сформулювати строге означення довжини кола значно складніше. Розглянемо послідовність вписаних у коло правильних $n$-кутників. Периметр будь-якого з них може вважатися наближеним значенням довжини кола (рис. 33). При необмеженому зростанні числа $n$ такі $n$-кутники все ближче «прилягають» до кола, а їхні периметри все менше відрізняються від довжини кола.

Отже, визначимо ***довжину кола*** як величину, до якої прямують периметри правильних $n$-кутників, вписаних у дане коло, при необмеженому зростанні числа $n$.

Перш ніж подати формулу довжини кола, сформулюємо важливу допоміжну теорему.

**Теорема (про відношення довжини кола до його діаметра)**

**Відношення довжини кола до його діаметра не залежить від кола, тобто те саме для будь-яких двох кіл.**

Доведення цієї теореми виходить за межі шкільного курсу геометрії. Тому наведемо лише загальну схему міркувань, на яких воно ґрунтується (повне доведення подається в Додатку 1).

Розглянемо два кола з радіусами $R'$ і $R''$ та вписані в них правильні $n$-кутники з периметрами $P_n'$ і $P_n''$. Оскільки

$$P_n = na_n = n \cdot 2R\sin\frac{180^\circ}{n}, \quad \text{то} \quad \frac{P_n'}{P_n''} = \frac{n \cdot 2R'\sin\frac{180^\circ}{n}}{n \cdot 2R''\sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{R'}{R''}, \text{ звідки } \frac{P_n'}{R'} = \frac{P_n''}{R''}.$$

При необмеженому зростанні $n$ периметри $n$-кутників за означенням прямують до довжин відповідних кіл $C'$ і $C''$, отже, помноживши обидві частини останньої рівності на $\frac{1}{2}$, маємо $\frac{C'}{2R'} = \frac{C''}{2R''}$, що й стверджується теоремою.

Таким чином, для всіх кіл відношення довжини кола до діаметра є сталим числом. Це число прийнято позначати грецькою буквою $\pi$ (читається «пі»):

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

Доведено, що $\pi$ — ірраціональне число, значення якого дорівнює 3,1415... . Великий грецький учений Архімед у III ст. до н. е. встановив, що раціональне число $\frac{22}{7}$ є наближеним значенням числа $\pi$ з точністю до сотих. Для практичних обчислень зазвичай використовують значення $\pi \approx 3{,}14$.

Отже, **довжина кола радіуса $R$ обчислюється за формулою $C = 2\pi R$.**

Визначимо довжину $l$ дуги кола з градусною мірою $\alpha$ (рис. 34). Оскільки довжина кола дорівнює $2\pi R$, то довжина дуги з градусною мірою $1^\circ$ становить $\frac{2\pi R}{360}$, тобто $\frac{\pi R}{180}$.

**Тому довжина дуги кола з градусною мірою $\alpha$ обчислюється за формулою**

$$l_\alpha = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha.$$

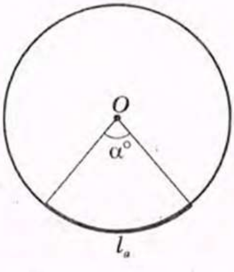



Рис. 34. Дуга кола з градусною мірою $\alpha$

## 7.2. Площа круга та його частин

Нагадаємо, що поняття площі було визначено у 8 класі лише для многокутників. Для визначення площі круга скористаємось міркуваннями, аналогічними до тих, за якими визначалася довжина кола.

Отже, ***площею круга***, обмеженого даним колом, будемо вважати величину, до якої прямує площа правильного $n$-кутника, вписаного в дане коло, при необмеженому зростанні числа $n$.

**Теорема (формула площі круга)**

**Площа круга радіуса $R$ обчислюється за формулою $S = \pi R^2$.**

Як і у випадку довжини кола, доведення цієї теореми виходить за межі шкільного курсу геометрії, тому знову наведемо лише загальну схему міркувань (повне доведення подається в Додатку 1).

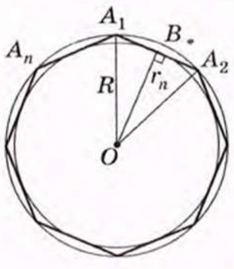



**Рис. 35.** До обґрунтування формули площі круга

Впишемо в дане коло радіуса $R$ правильний $n$-кутник $A_1A_2 \ldots A_n$ зі стороною $a_n$, і в цей $n$-кутник впишемо ще одне коло радіуса $r_n$ (рис. 35).

Тоді

$$S_{\triangle A_1OA_2} = \frac{1}{2} a_n r_n,$$

$$S_{A_1A_2 \ldots A_n} = nS_{\triangle A_1OA_2} = n \cdot \frac{1}{2} a_n r_n = \frac{1}{2} P_n r_n,$$

де $P_n$ — периметр $n$-кутника.

Із прямокутного трикутника $A_1OB$ маємо $r_n = R\cos\frac{180°}{n}$. При необмеженому зростанні $n$ дріб $\frac{180}{n}$ прямує до нуля, отже, значення $\cos\frac{180°}{n}$ прямує до $\cos 0°$, який дорівнює одиниці. З іншого боку, при зростанні $n$ вписане коло «наближується» до описаного, $r_n$ — до $R$, а периметр вписаного $n$-кутника — до довжини даного кола $C$. Отже, при необмеженому зростанні $n$ маємо

$$S = \frac{1}{2} CR = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

### Задача

Довжина кола дорівнює $12\pi$ см. Знайдіть площу круга, обмеженого даним колом.

### Розв'язання

Оскільки довжина кола дорівнює $2\pi R$, то за умовою $2\pi R = 12\pi$, звідки $R = 6$ см — радіус даного кола. Отже, за формулою $S = \pi R^2$ маємо:

$$S = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

**Відповідь**: $36\pi$ см$^2$.

### Задача

Якою має бути довжина дроту, щоб зробити з нього коло, яке обмежує площу 154 см$^2$?

### Розв'язання

Оскільки площа круга дорівнює $\pi R^2$, то за умовою $\pi R^2 = 154$. Враховуючи, що $\pi \approx \frac{22}{7}$, маємо $R = \sqrt{\frac{154}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{154 \cdot 7}{22}} = 7$ (см) — радіус даного кола.

Знайдемо довжину дроту за формулою $C = 2\pi R$:

$$C \approx \frac{2 \cdot 22 \cdot 7}{7} = 44 \text{ (см)}.$$

**Відповідь**: $\approx 44$ см.

Зауважимо, що в суто геометричних задачах відповідь можна подавати у вигляді буквеного виразу, який містить $\pi$, а в прикладних задачах бажано число $\pi$ замінювати його наближеним значенням.

**Сектор** — від латинського «сектор» — різець.
**Сегмент** — від латинського «сегментум» — відрізок

**Означення**

**Круговим сектором** називається частина круга, яка лежить усередині відповідного центрального кута.

На рис. 36 заштриховано круговий сектор, який відповідає меншому центральному куту $AOB$ (або спирається на дугу $AMB$).

Оскільки площа круга дорівнює $\pi R^2$, то площа кругового сектора, що спирається на дугу $1°$, дорівнює $\frac{\pi R^2}{360}$. Отже, **площа кругового сектора, що спирається на дугу з градусною мірою $\alpha$, обчислюється за формулою**

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha.$$

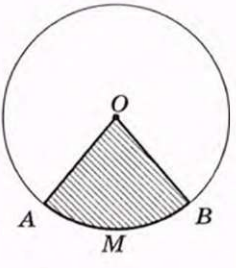
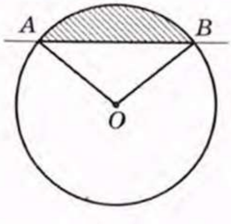
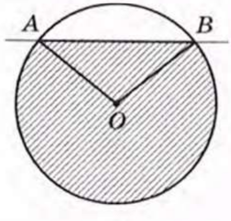



**Рис. 36.** Круговий сектор



а



б

**Рис. 37.** Круговий сегмент

**Означення**

**Круговим сегментом** називається частина круга, яка лежить по один бік від прямої, що перетинає даний круг.

Унаслідок перетину круга з прямою $AB$ утворюються два кругові сегменти: на рис. 37, *а* заштриховано менший круговий сегмент, а на рис. 37, *б* — більший круговий сегмент.

**Площа сегмента, який не дорівнює півкругу, обчислюється за формулою**

$$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha \pm S_{\triangle},$$

**де** $\alpha$ **— градусна міра дуги, що обмежує даний сегмент,** $S_{\triangle}$ **— площа трикутника з вершинами в центрі круга і на кінцях цієї дуги.**

При цьому знак «+» треба обирати, коли $\alpha > 180°$, а знак «−» — коли $\alpha < 180°$. У випадку $\alpha = 180°$ сегмент є півкругом, площа якого дорівнює $\frac{\pi R^2}{2}$.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**213.** Визначте, як зміняться довжина кола і площа відповідного круга, якщо:

а) радіус кола збільшити втричі;

б) діаметр кола зменшити в 5 разів.

**214.** Чи правильно, що довжина кола більша за його потрійний діаметр?

**215.** Чи може площа правильного многокутника, вписаного в коло, бути більшою, ніж площа круга, обмеженого даним колом?

**216.** Круговий сектор спирається на дугу $\alpha$. Визначте, чи є кут $\alpha$ гострим, прямим або тупим, якщо:

а) довжина дуги, яка обмежує сектор, становить чверть довжини кола;

б) площа сектора становить третину площі круга.

**217.** Із круга радіуса 4 вирізано сегмент. Визначте, чи є даний сегмент більшим або меншим за півкруг, якщо:

а) площа сегмента дорівнює $9\pi$;

б) площа сегмента становить половину площі частини круга, що лишилася.

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**218.** Впишіть у круг рівносторонній трикутник. Виділіть кольором сегменти, що утворилися. Яка градусна міра їхніх дуг?

→ **219.** Накресліть два круга зі спільним центром і радіусами 2 см і 3 см. Порівняйте на око площу меншого круга з площею кільця, що утворилося. Перевірте правильність порівняння шляхом обчислень.

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**220.** Знайдіть:

а) довжину кола, радіус якого дорівнює 6 см;

б) радіус кола, довжина якого дорівнює 12,56 см.

**221.** Знайдіть довжину кола:

а) вписаного у квадрат з площею 144 $см^2$;

б) описаного навколо рівностороннього трикутника зі стороною $4\sqrt{3}$ см;

в) описаного навколо правильного шестикутника з периметром 30 см.

→ **222.** Знайдіть довжину кола:

а) вписаного в рівносторонній трикутник з площею $3\sqrt{3}$ $см^2$;

б) описаного навколо квадрата з діагоналлю 8 см.

**223.** На відстані 219,8 м колесо електровоза робить 50 обертів. Знайдіть діаметр колеса.

→ **224.** Обчисліть довжину кругової орбіти штучного супутника Землі, якщо він обертається на відстані 330 км від земної поверхні, а радіус Землі дорівнює 6370 км.

**225.** Знайдіть довжину дуги кола радіуса $R$, якщо її градусна міра дорівнює:

а) $90°$; б) $135°$; в) $340°$.

**226.** Довжина маятника настінного годинника дорівнює 60 см, а кут його коливань — $30°$. Знайдіть довжину дуги, яку описує кінець маятника.

→ **227.** Знайдіть діаметр кола, якщо його дуга завдовжки 12,56 см має градусну міру $240°$.

**228.** Довжина кола циркової арени дорівнює 75,36 м. Знайдіть площу арени.

**229.** Знайдіть площу круга, обмеженого колом:

а) вписаним в правильний шестикутник зі стороною $8\sqrt{3}$ см;

б) описаним навколо квадрата з периметром $12\sqrt{2}$ см.

→ **230.** Знайдіть площу круга, обмеженого колом:

а) описаним навколо рівностороннього трикутника з висотою 6 см;

б) вписаним у квадрат з діагоналлю $14\sqrt{2}$ см.

**231.** Радіуси кіл стрілецької мішені дорівнюють 1, 2, 3 і 4 (рис. 38). Знайдіть площу кожного з трьох кілець мішені.

→ **232.** Дві труби водогону, внутрішні діаметри яких дорівнюють 10 см і 24 см, необхідно замінити однією, не змінюючи пропускної спроможності. Яким має бути внутрішній діаметр нової труби?

**233.** Знайдіть площу кругового сектора з радіусом $R$ і дугою $\alpha$, якщо:

а) $R=9$, $\alpha=120°$; б) $R=8$, $\alpha=225°$; в) $R=12$, $\alpha=15°$.

→ **234.** Знайдіть площу більшого і меншого кругових сегментів, на які круг радіуса 1 ділиться хордою, що дорівнює радіусу.

## Рівень Б

**235.** Знайдіть довжину кола:

а) вписаного в трикутник зі сторонами 8 см, 26 см і 30 см;

б) описаного навколо прямокутника зі сторонами 6 см і 8 см;

в) вписаного в правильний шестикутник з площею $6\sqrt{3}$ см$^2$.

**236.** Довжина кола, вписаного в рівнобедрену трапецію, дорівнює $12\pi$ см. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 13 см.

→ **237.** Знайдіть довжину кола:

а) вписаного в ромб із діагоналями 30 см і 40 см;

б) описаного навколо прямокутного трикутника з катетами 14 см і 48 см.

**238.** На рис. 39 на сітці з одиничних квадратів зображено фігури, що складаються з дуг кіл із заданими центрами. Знайдіть:

а) периметр зображеної фігури (рис. 39, *а*);

б) площу зафарбованої частини круга (рис. 39, *б*).

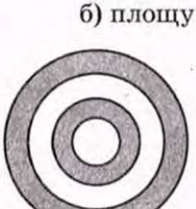


Рис. 38

а б

Рис. 39

**239.** На рис. 40 на сітці з одиничних квадратів зображено фігури, що складаються з дуг кіл із заданими центрами. Знайдіть:

а) периметр зображеної фігури (рис. 40, *а*);

б) площу зафарбованої частини круга (рис. 40, *б*).

**240.** Визначте довжини дуг, які описують протягом 2 годин кінці стрілок годинника на будівлі Харківського університету, якщо годинникова стрілка має довжину 2,4 м, а хвилинна — 3,2 м.

**241.** Зі шматка металевого дроту, який має форму дуги кола радіуса 3 м, необхідно зварити кільце. Знайдіть радіус цього кільця, якщо градусна міра дуги складає 120°.

**242.** Знайдіть площу круга, обмеженого колом:

а) описаним навколо рівнобедреного трикутника з основою 48 см і проведеною до неї медіаною 32 см;

б) вписаним в ромб з периметром 48 см і кутом 120°.

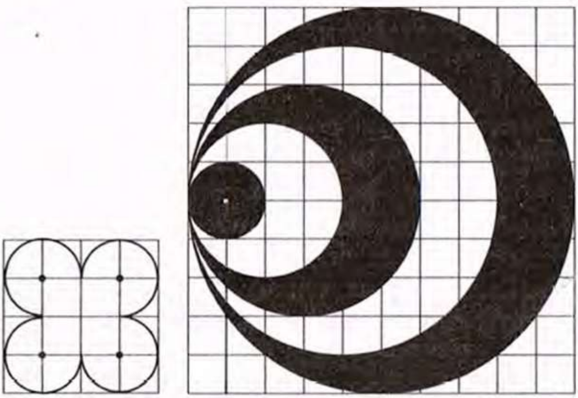
**243.** Знайдіть площу круга, обмеженого колом:

а) описаним навколо прямокутника з меншою стороною 4 см і кутом між діагоналями 60°;

б) вписаним в трикутник зі сторонами 11 см, 13 см і 20 см.

**244.** Два кола мають спільний центр $O$ (рис. 41). Доведіть, що площа утвореного кільця дорівнює добутку ширини кільця $AB$ на довжину кола з тим самим центром і радіусом $OC$ ($C$ — середина $AB$).

**245.** Площа сектора з дугою 108° дорівнює $S$. Знайдіть радіус сектора.



а б

**Рис. 40**

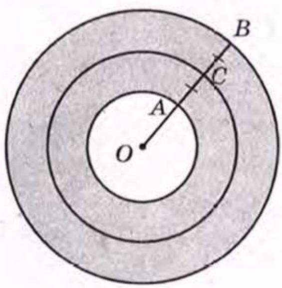
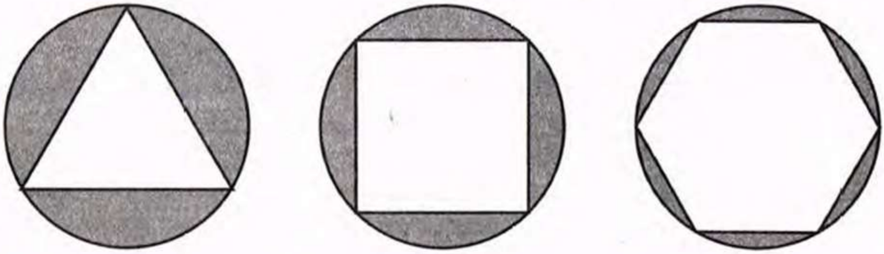



**Рис. 41**

**246.** Знайдіть площу кожного із сегментів, що лежать поза вписаним у коло радіуса $R$ правильним $n$-кутником, якщо:

а) $n = 3$ (рис. 42, *а*); б) $n = 4$ (рис. 42, *б*); в) $n = 6$ (рис. 42, *в*).



а б в

**Рис. 42**

**247.** Радіус круга дорівнює $R$. Знайдіть площу кругового сегмента, дуга якого дорівнює:

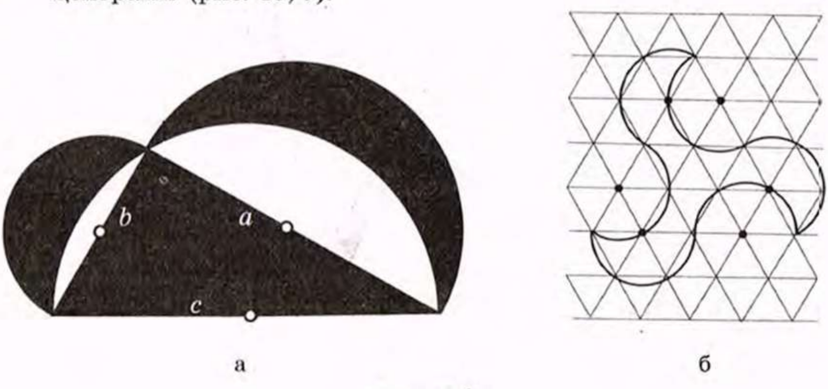
а) $60°$; б) $240°$.

## Рівень В

**248.** За даними рис. 43:

а) доведіть, що площа зафарбованого трикутника дорівнює сумі площ зафарбованих серпиків (рис. 43, *а*);

б) знайдіть периметр фігури, яка зображена на сітці з правильних трикутників зі стороною 1, і складається з дуг кіл із заданими центрами (рис. 43, *б*).



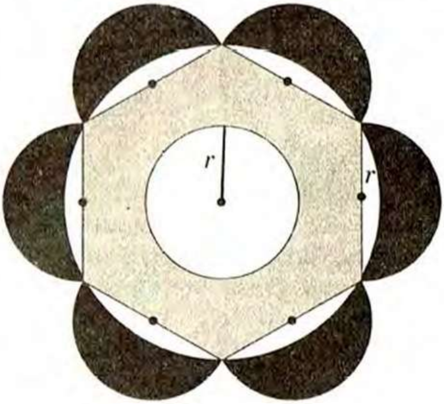

а б

**Рис. 43**

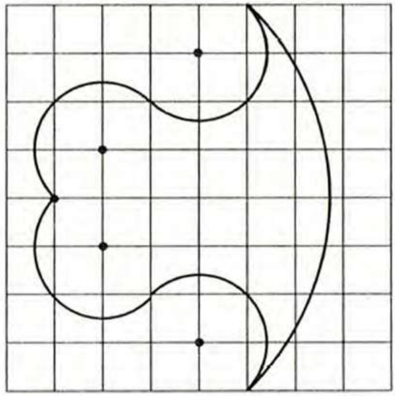
**249.** За даними рис. 44:

а) доведіть, що площа зафарбованої фігури дорівнює сумі площ шести зафарбованих серпиків (рис. 44, *а*);

б) знайдіть периметр фігури, яка нарисована на сітці з одиничних квадратів і складається з дуг кіл із заданими центрами (рис. 44, *б*).




а



б

**Рис. 44**

**250.** Площа кругового сектора дорівнює $6\pi$ см$^2$, а довжина його дуги — $2\pi$ см. Знайдіть площу круга, вписаного в цей сектор (рис. 45).

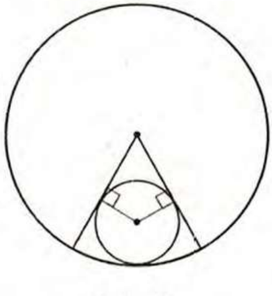


**Рис. 45**

**251.** Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 25 см і 28 см. Коло з центром на найбільшій стороні трикутника дотикається до двох інших сторін. Знайдіть площу круга, обмеженого цим колом.

**252.** Коло ділить кожну сторону рівностороннього трикутника на три рівні частини завдовжки 2 см. Знайдіть площу частини трикутника, що лежить усередині кола.

# ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 8

### Теоретичний матеріал

- теорема Фалеса; середні лінії трикутника і трапеції;
- теорема Піфагора.

8 клас, § 6
8 клас, § 13

### Задачі

**253.** Відстані від кінців відрізка $AB$ до прямої $l$ дорівнюють 10 см і 28 см (точки $A$ і $B$ лежать по один бік від прямої). Знайдіть відстань від середини відрізка $AB$ до прямої $l$.

**254.** Відрізки $AA_1 = 10$ см і $BB_1 = 28$ см — відстані від точок $A$ і $B$ до прямої $l$ (точки $A$ і $B$ лежать по один бік від прямої). Знайдіть відстань між точками $A$ і $B$, якщо $A_1B_1 = 24$ см.

## Задачі для підготовки до контрольної роботи № 2

**1.** Знайдіть внутрішній і центральний кути правильного дванадцятикутника.

**2.** Площа круга, вписаного у квадрат, дорівнює $16\pi$ см$^2$. Знайдіть площу квадрата.

**3.** Знайдіть довжину кола, описаного навколо правильного шестикутника, найбільша діагональ якого дорівнює 14 см.

**4.** Правильний трикутник $ABC$ вписано в коло. Знайдіть площу трикутника, якщо довжина дуги $CAB$ складає $8\pi$ см.

**5.** Визначте кількість сторін правильного вписаного многокутника, якщо кожна сторона стягує дугу $3\pi$ см, а радіус описаного кола дорівнює 12 см.

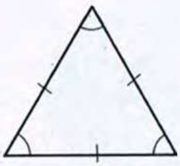
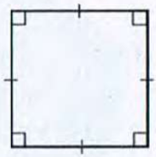
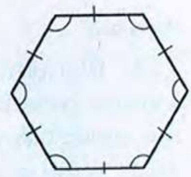
**6.** Прямокутний трикутник з гіпотенузою 12 і гострим кутом $30°$ вписано в круг. Знайдіть площу кожного з сегментів, які відтинають сторони трикутника.

# Підсумки розділу II

## ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ II

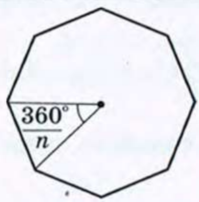
### Правильні многокутники

***Правильним многокутником*** називається опуклий многокутник, у якому всі сторони рівні й усі кути рівні

| Правильний трикутник | Правильний чотирикутник (квадрат) | Правильний шестикутник |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\alpha_3 = 60°$ | $\alpha_4 = 90°$ | $\alpha_6 = 120°$ |

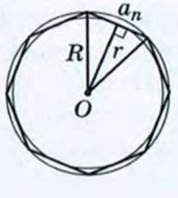
Формула для обчислення кута $\alpha_n$ правильного $n$-кутника:

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$$




Центральним кутом правильного многокутника називається кут, під яким сторону многокутника видно з центра цього многокутника. Центральний кут правильного $n$-кутника дорівнює $\frac{360°}{n}$

### Вписане й описане кола правильного многокутника




***Теорема про вписане й описане кола правильного многокутника***

Навколо будь-якого правильного многокутника можна описати коло, і в будь-який правильний многокутник можна вписати коло, причому центри описаного і вписаного кіл збігаються.

Правильний многокутник має єдине вписане і єдине описане кола

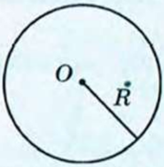
## Формули радіусів вписаного й описаного кіл

| *Для правильного n-кутника* | *Для правильного трикутника* | *Для квадрата* | *Для правильного шестикутника* |
|---|---|---|---|
| $r = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$ <br> $R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$ | $r = \dfrac{a_3}{2\sqrt{3}}$ <br> $R = \dfrac{a_3}{\sqrt{3}}$ | $r = \dfrac{a_4}{2}$ <br> $R = \dfrac{a_4}{\sqrt{2}}$ | $r = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$ <br> $R = a_6$ |

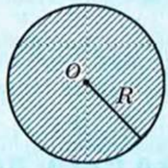
## Формули для кола і круга та їх частин

***Теорема про відношення довжини кола до його діаметра***

Відношення довжини кола до його діаметра не залежить від кола, тобто те саме для будь-яких двох кіл: $\dfrac{C}{2R} = \pi \approx 3{,}14$.

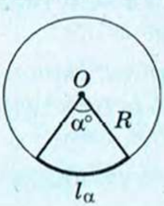



Довжина кола
$C = 2\pi R$



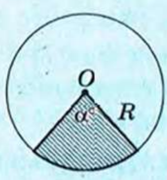

Площа круга
$S = \pi R^2$

***Круговим сектором*** називається частина круга, яка лежить усередині відповідного центрального кута




Довжина дуги

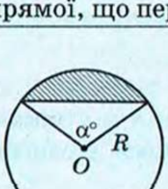
$$l_\alpha = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$$




Площа кругового сектора

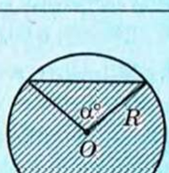
$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$$

***Круговим сегментом*** називається частина круга, яка лежить по один бік від прямої, що перетинає даний круг




Площа сегмента, меншого за півкруг

$$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha - S_\triangle$$




Площа сегмента, більшого за півкруг

$$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha + S_\triangle$$

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ II

**1.** Дайте означення правильного многокутника.

**2.** Доведіть формули радіусів вписаного і описаного кіл для правильного $n$-кутника.

**3.** Виразіть радіуси вписаного й описаного кіл:

а) правильного трикутника зі стороною $a$;

б) квадрата зі стороною $a$;

в) правильного шестикутника зі стороною $a$.

**4.** Опишіть побудову правильного трикутника, квадрата, правильного шестикутника.

**5.** Сформулюйте теорему про відношення довжини кола до його діаметра. Назвіть наближене числове значення цього відношення. Як воно позначається?

**6.** Запишіть формули довжини кола і довжини дуги кола.

**7.** Запишіть формулу площі круга.

**8.** Опишіть круговий сектор. Запишіть формулу площі кругового сектора.

**9.** Опишіть круговий сегмент. Запишіть формулу площі кругового сегмента.

## ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ II

**255.** Сума внутрішніх кутів правильного многокутника вдвічі більша за суму його зовнішніх кутів. Знайдіть площу цього многокутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює $R$.

**256.** У прямий кут вписано коло радіуса 4 см. Знайдіть периметр фігури, обмеженої сторонами кута і меншою дугою кола, що міститься між точками дотику.

**257.** Визначте, чи буде правильним рівносторонній многокутник, якщо він є:

а) описаним навколо кола; б) вписаним у коло.

**258.** У коло вписані квадрат і правильний трикутник. Знайдіть площу трикутника, якщо площа квадрата дорівнює $S$.

**259.** Центри двох кіл, що перетинаються, лежать по різні боки від їх спільної хорди завдовжки $a$. Ця хорда в одному з кіл є стороною вписаного квадрата, а в іншому — стороною правильного вписаного шестикутника. Знайдіть відстань між центрами кіл.

**260.** У сегмент, дуга якого дорівнює $120°$ і має довжину $l$, вписано коло найбільшого радіуса (рис. 46). Знайдіть довжину цього кола.

**261.** Два кола мають спільний центр. Знайдіть площу утвореного кільця, якщо хорда більшого кола, яка дотикається до меншого, має довжину $2a$.

## Задачі підвищеної складності

**262.** Відрізки, що сполучають середини кожної зі сторін квадрата з кінцями протилежної сторони, обмежують опуклий восьмикутник (рис. 47). Чи є він правильним?

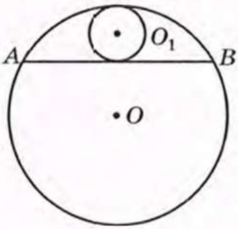



**Рис. 46**

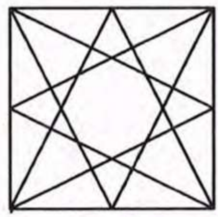


**Рис. 47**

**263.** Доведіть, що площа правильного шестикутника дорівнює $\frac{3}{4}$ добутку двох його нерівних діагоналей.

**264.** Сторона квадрата дорівнює $a$. Знайдіть довжину кола, яке проходить через кінці однієї сторони і дотикається до протилежної.

**265.** Сторона квадрата дорівнює $a$. Кожна вершина квадрата є центром кола радіуса $a$ (рис. 48). Знайдіть периметр криволінійного чотирикутника $ABCD$.

**266.** Два кола з радіусами 3 см і 9 см дотикаються зовні в точці $A$. Деяка пряма дотикається до даних кіл у точках $B$ і $C$ (рис. 49). Знайдіть площу криволінійного трикутника $ABC$ і радіус кола, вписаного в нього.

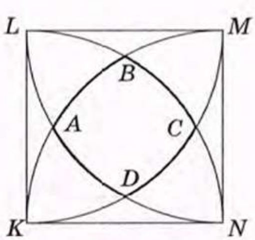



**Рис. 48**

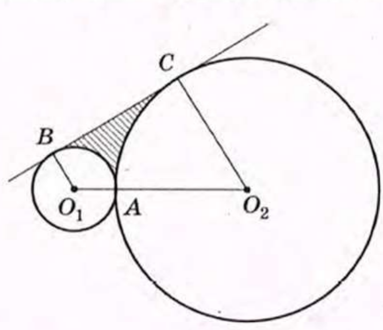



**Рис. 49**

## ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Інтерес людини до правильних многокутників виявлявся з прадавніх часів. Правильні чотирикутники, шестикутники і восьмикутники зустрічаються в культурах Давнього Єгипту і Вавилону у вигляді настінних зображень і прикрас із каменю. Давніх греків цікавила проблема поділу дуги кола на деяку кількість рівних частин для побудови правильних вписаних многокутників. Дослідження піфагорійців із цього питання були систематизовані Евклідом, який у четвертій книзі «Начал» описує побудову правильного 15-кутника циркулем і лінійкою. Однак, побудувавши правильні n-кутники при $n = 3$, 4, 5, 6, учені довго не могли довести можливість побудови правильного семикутника і дев'ятикутника. У загальному вигляді для простих чисел $n$ цю задачу розв'язав у 19-річному віці знаменитий німецький математик Карл Гаусс (1777—1855): він довів, що для будь-якого $n = 2^{2^k} + 1$, де $k$ — натуральне число або нуль, задачу поділу дуги кола на $n$ рівних частин можна розв'язати циркулем і лінійкою, а для інших простих чисел $n$ така побудова неможлива.


Карл Гаусс

За відсутності точних математичних розрахунків у минулі часи широко використовувалися приблизні обчислення і побудови. Але найбільш широко наближені обчислення застосовувалися в задачах на знаходження довжини кола й площі круга. Ще в папірусі Ринда (XVII ст. до н. е.) вказувалося, що за площу круга слід приймати площу квадрата зі стороною, що дорівнює $\frac{8}{9}$ діаметра: $S=\left(\frac{8}{9}\cdot 2R\right)^2=\frac{256}{81}R^2$, тобто для числа $\pi$ обиралося наближення $\frac{256}{81}\approx 3{,}1605...$ . В інших єгипетських та вавилонських текстах зустрічається наближення $\pi \approx 3$, яке цілком влаштовувало тогочасних землемірів. Давні римляни за допомогою прямого вимірювання довжини кола мотузкою отримали наближення $\pi \approx 3{,}12$. Але перша спроба визначення числа $\pi$ на підставі теоретичних міркувань була здійснена в III ст. до н. е. славетним давньогрецьким ученим Архімедом. У своїй роботі «Про вимірювання круга» на підставі вимірювання периметрів описаних і вписаних многокутників він довів, що $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Наближене значення $\pi = \frac{22}{7} \approx 3{,}14$, запропоноване Архімедом, використовується, як вам відомо, і в наш час.

З появою нових методів обчислень дослідження числа $\pi$ продовжувалися. У 1736 р. Леонард Ейлер обчислив $\pi$ з точністю до 153-го десяткового знака. Саме він ввів у обіг позначення $\pi$ (від першої букви грецького слова «периферія» – коло). У наші часи значення $\pi$ обчислене з точністю до кількох сотень тисяч знаків, і в пресі щоразу з'являються повідомлення про нові «рекорди» точності цих обчислень. Але ці досягнення цікавлять хіба що книгу рекордів Гіннеса, адже ніякого практичного значення така точність не має – вона лише демонструє переваги сучасних засобів і методів обчислень.

Дослідження Архімеда і його послідовників започаткували напрям геометрії, який сьогодні часто виділяють в окремий розділ – геометрію кіл.

**Леонард Ейлер**

**Олександро-Невська Лавра, де поховано Леонарда Ейлера**

## ТЕМАТИКА ПОВІДОМЛЕНЬ І РЕФЕРАТІВ ДО РОЗДІЛУ ІІ

1. Ізопериметрична задача. Ізопериметричні властивості правильних многокутників.
2. Екстремальні властивості вписаних і описаних правильних многокутників.
3. Історія дослідження числа π.
4. Архімед і давньогрецька математика.
5. Геометрія кіл в оптиці: лінзи й серпики.
6. Задачі про кола, що дотикаються. Арбелос (шевський ніж).

## РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

1. Математична хрестоматія для 6—8 класів. Т. 1 [Текст]. — К. : Рад. шк., 1968. — 320 с.
2. Математична хрестоматія для старших класів. Геометрія. Т. 2 [Текст] / упоряд. Л. В. Кованцова. — К. : Рад. шк., 1969. — 383 с.
3. Глейзер, Г. И. История математики в школе. VII—VIII классы: Пособие для учителей [Текст] / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1982. — 240 с.
4. Білецький, Ю. О. Фігури на піску [Текст] / Ю. О. Білецький, Г. Б. Філіповський. — Х. : Вид. група «Основа», 2003. — 96 с. — (Б-ка журн. «Математика в школах України»).
5. Бевз, Г. П. Геометрія кіл [Текст] / Г. П. Бевз. — Х. : Вид. група «Основа», 2004. — 112 с. — (Б-ка журн. «Математика в школах України).
6. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 1 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 320 с. — (Б-ка мат. кружка).
7. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 2 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. — 320 с. — (Б-ка мат. кружка).
8. Понарин, Я. П. Планиметрия, преобразования плоскости. Т. 1. [Текст] / Я. П. Понарин. — М. : МЦНМО, 2004.
9. Шарыгин, И. Ф. Геометрия. 7—9 классы: От учебной задачи к творческой: Учеб. пособие [Текст] / И. Ф. Шарыгин. — М. : Дрофа, 2002. — (Задачники «Дрофы»).
10. Інтернет-бібліотека МЦНМО. http://ilib.mirror0.mccme.ru/
11. Сайт видавництва «Ранок». http://www.ranok.com.ua

# Розділ III
# ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

Мислю, — отже, існую.

*Рене Декарт, французький учений*

Координатний метод, біля витоків виникнення якого стояв великий французький математик і філософ XVII ст. Рене Декарт, став справжнім переворотом у геометрії та математиці в цілому. Завдяки координатам учені отримали універсальний спосіб поставити у відповідність геометричним об'єктам алгебраїчні вирази і співвідношення. Взагалі, вміння перейти в процесі розв'язування задачі до іншої пошукової області завжди вважалося «вищим пілотажем» математики. Відкриття Декарта дало науці можливість створити своєрідний словник для перекладу геометричних задач мовою алгебри з подальшою можливістю використовувати рівняння і тотожні перетворення виразів для розв'язування суто геометричних проблем.

У наш час жодну природничу науку або технічну галузь неможливо уявити на сучасному рівні розвитку без застосування координат. Більш того, доведення багатьох уже відомих вам геометричних тверджень завдяки координатному методу значно спрощуються. І хоча на перший погляд теореми й задачі цього розділу здаватимуться вам дещо незвичними для геометрії, але можливості, які відкриває метод координат, варті зусиль, витрачених на його засвоєння.

# § 8. Найпростіші задачі в координатах

## 8.1. Прямокутна система координат на площині (повторення)

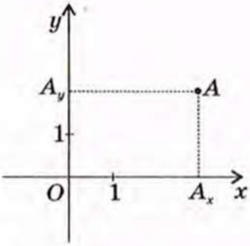



**Рис. 50.** Прямокутна система координат на площині

Нагадаємо, що для введення системи координат на площині через деяку точку $O$ необхідно провести дві взаємно перпендикулярні прямі $Ox$ і $Oy$, вибрати на кожній із них напрям (його позначають стрілкою) і одиничний відрізок (рис. 50).

Точку $O$ називають ***початком координат***, площину, на якій проведені прямі, — ***координатною площиною***, а самі прямі $Ox$ і $Oy$ — ***координатними осями*** (або ***осями координат***). Початок координат ділить кожну з осей на дві ***півосі***: ***додатну*** (на ній позначається стрілка) і ***від'ємну***.

Тепер будь-якій точці $A$ даної площини можна однозначно поставити у відповідність впорядковану пару чисел — **координати** цієї точки. Для цього з точки $A$ проведемо перпендикуляри $AA_x \perp Ox$ і $AA_y \perp Oy$. Перша координата точки $A$ — ***абсциса*** (позначається буквою $x$) — є додатним числом, якщо точка $A_x$ лежить на додатній півосі осі $Ox$, або від'ємним числом, якщо точка $A_x$ лежить на від'ємній півосі осі $Ox$. При цьому модуль числа $x$ дорівнює довжині відрізка $OA_x$. Аналогічно визначається друга координата точки $A$ — ***ордината*** (позначається буквою $y$): це додатне число, якщо точка $A_y$ лежить на додатній півосі осі $Oy$, або від'ємне число, якщо точка $A_y$ лежить на від'ємній півосі осі $Oy$, а модуль числа $y$ дорівнює довжині відрізка $OA_y$. Координати точки $A$ записують так: $A(x; y)$. При цьому абсцису точки вказують першою, а ординату — другою.

Зауважимо, що ординати точок осі $Ox$ дорівнюють нулю, абсциси точок осі $Oy$ також дорівнюють нулю, а початок координат має координати $O(0; 0)$.

**Абсциса** — від латинського «абсцисум» — відрізаний, відсічений.

**Ордината** — від латинського «ординатус» — впорядкований. Від цього кореня походить і слово «координата»

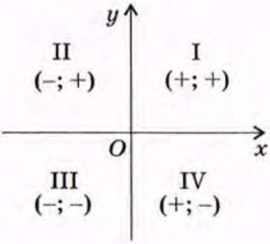



**Рис. 51.** Знаки координат точок у різних координатних чвертях

Вісь $Ox$ (зазвичай вона горизонтальна) називають ***віссю абсцис***, вісь $Oy$ — ***віссю ординат***, а введену таким способом систему координат — ***прямокутною декартовою*** на честь Рене Декарта, який першим застосував її у своїх дослідженнях.

Осі координат ділять площину на чотири частини (***координатні чверті***). У межах однієї чверті знаки координат точок зберігаються такими, які вказані на рис. 51.

Розглянемо основні випадки застосування координат для вивчення геометричних фігур та їх властивостей.

## 8.2. Координати середини відрізка

**Теорема (формули координат середини відрізка)**

**Координати середини відрізка обчислюються за формулами**

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

**де $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ — кінці відрізка, $C(x; y)$ — середина відрізка.**

**Доведення**

□ Нехай відрізок $AB$ не перетинає вісь $Ox$. Розглянемо випадок, коли $x_1 < x_2$ (рис. 52). Проведемо перпендикуляри $AA_0$, $BB_0$ і $CC_0$ до осі $Ox$. Очевидно, що $AA_0 \parallel BB_0 \parallel CC_0$ і основи перпендикулярів мають координати $A_0(x_1; 0)$, $B_0(x_2; 0)$ і $C_0(x; 0)$. Оскільки точка $C$ — середина відрізка $AB$, то за теоремою Фалеса точка $C_1$ — середина відрізка $A_0B_0$. Це означає, що $A_0C_0 = C_0B_0$, тобто $x_2 - x = x - x_1$, звідки $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

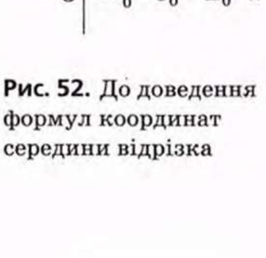



**Рис. 52.** До доведення формул координат середини відрізка

Той самий результат дістанемо і у випадку $x_1 > x_2$ (перевірте це самостійно). У випадку $x_1 = x_2$ точки $A_0$, $B_0$ і $C_0$ збігаються, тобто $x_1 = x = x_2$, і формула знову справджується.

Випадок, коли відрізок $AB$ перетинає вісь $Ox$, зводиться до щойно розглянутого.

Рівність $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ доводимо аналогічно. ■

**Задача**

Вершини чотирикутника ABCD мають координати A(–2; 1), B(0; 4), C(4; 1), D(2; –2). Доведіть, що ABCD — паралелограм.

**Розв'язання (1-й спосіб)**

Як відомо, за ознакою паралелограма чотирикутник, діагоналі якого точкою перетину діляться навпіл, є паралелограмом. Знайдемо координати середин діагоналей AC і BD даного чотирикутника ABCD. Середина відрізка AC має координати

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1,\ y = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Середина відрізка BD має координати

$$x = \frac{0+2}{2} = 1,\ y = \frac{4+(-2)}{2} = 1.$$

Отже, відрізки AC і BD мають спільну середину (1; 1), тобто чотирикутник ABCD — паралелограм за ознакою.

Інший спосіб розв'язування цієї задачі розглянемо далі.

## 8.3. Відстань між точками

**Теорема (формула відстані між двома точками)**

**Відстань між точками $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ обчислюється за формулою:**

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

**Доведення**

□ Розглянемо спочатку випадок, коли $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$ (рис. 53). Проведемо через дані точки $A$ і $B$ прямі, перпендикулярні до осей координат, і позначимо точку їх перетину $C$. Відстань між точками $A$ і $C$ дорівнює $|x_1 - x_2|$, а відстань між точками $B$ і $C$ дорівнює $|y_1 - y_2|$. Отже, з прямокутного трикутника $ABC$ за теоремою Піфагора маємо:

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \text{ або } AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

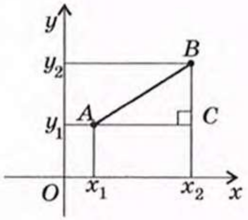



**Рис. 53.** До доведення формули відстані між точками

У випадку, коли $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, відстань між точками $A$ і $B$ дорівнює $|y_1 - y_2|$. Той самий результат дає і щойно доведена формула. Аналогічно у випадку $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$ маємо $AB = |x_1 - x_2|$. Якщо точки $A$ і $B$ збігаються, відстань між ними за доведеною формулою дорівнює нулю. ■

Як приклад застосування доведеної формули розглянемо другий спосіб розв'язування задачі з п. 8.2.

**Задача**

Вершини чотирикутника ABCD мають координати A(-2; 1), B(0; 4), C(4; 1), D(2; -2). Доведіть, що ABCD — паралелограм.

**Розв'язання (2-й спосіб)**

Як відомо, за ознакою паралелограма чотирикутник, протилежні сторони якого попарно рівні, є паралелограмом. Знайдемо довжини сторін чотирикутника ABCD:

$$AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{13},\ BC = \sqrt{(0-4)^2 + (4-1)^2} = 5,$$

$$CD = \sqrt{(4-2)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{13},\ AD = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-(-2))^2} = 5.$$

Отже, $AB = CD$, $BC = AD$, тобто чотирикутник ABCD — паралелограм за ознакою.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**267.** Із точки $A(3; -5)$ проведено перпендикуляри до осей координат. Назвіть координати основ цих перпендикулярів.

**268.** Визначте, у якій координатній чверті лежить точка $A(x; y)$, якщо:

а) $x = -4$, $y = -9$;

б) $x > 0$, $y < 0$;

в) точка $A$ лежить вище осі абсцис і ліворуч від осі ординат.

**269.** Визначте, які з координатних осей перетинає відрізок $CD$, якщо:

а) $C(3; -2)$, $D(8; 1)$; б) $C(-4; -5)$, $D(2; -3)$; в) $C(1; -6)$, $D(-7; 2)$.

**270.** Середина відрізка $AB$ лежить на осі ординат. Назвіть абсцису точки $A$, якщо абсциса точки $B$ дорівнює 12.

**271.** Точка $C$ — середина відрізка $AB$. Визначте:
а) ординату точки $B$, якщо $A(x_1;\ 3)$, $C(x_2;\ 3)$;
б) абсцису точки $A$, якщо $C(-1;\ y_1)$ і $B(-1;\ y_2)$.
Якій із координатних осей паралельний відрізок $AB$ у кожному з випадків?

**272.** Довжина відрізка $AB$ дорівнює 5. Чи можуть:
а) абсциси точок $A$ і $B$ відрізнятися на 7;
б) ординати точок $A$ і $B$ відрізнятися на 5?

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**273.** Зобразіть на координатній площині геометричне місце точок $M(x;\ y)$, які задовольняють умови:

а) $x \geqslant -3$; б) $y \leqslant 1$; в) $\begin{cases} x = y, \\ |x| < 2. \end{cases}$

**274.** Через точку $C(-3;\ 4)$ проведіть прямі, паралельні осям координат. Опишіть за допомогою нерівностей умови, що їх задовольняють усі внутрішні точки прямокутника, утвореного цими прямими та осями координат.

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**275.** Знайдіть координати середини відрізка $AB$, якщо:
а) $A(-12;\ -3)$, $B(-8;\ 1)$; б) $A(4;\ -11)$, $B(-4;\ 0)$;
в) $A(-2;\ 9)$, $B(-2;\ -7)$.

**276.** Точка $C$ — середина відрізка $AB$. Знайдіть координати:
а) точки $B$, якщо $A(2;\ -3)$, $C(0{,}5;\ 1)$;
б) точки $A$, якщо $C(0;\ -1)$, $B(3;\ -3)$.

**277.** Точка $E$ — середина відрізка $CD$. Знайдіть координати:
а) точки $E$, якщо $C(18;\ -2)$, $D(6;\ 4)$;
б) точки $D$, якщо $C(-5;\ 21)$, $E(0;\ 1)$.

**278.** Знайдіть координати четвертої вершини паралелограма $ABCD$, якщо:

а) $A(2;\ 6)$, $B(4;\ 7)$, $C(8;\ 10)$;
б) $B(-1;\ 4)$, $C(3;\ 5)$, $D(1;\ 3)$.

**279.** Дано точки $A(-4;\ 0)$, $B(-2;\ -2)$, $C(0;\ -6)$, $D(-2;\ -4)$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

**280.** Знайдіть довжину відрізка $AB$, якщо:

а) $A(-3;\ 8)$, $B(5;\ 2)$; б) $A(2;\ -1)$, $B(-7;\ 0)$;

в) $A(5;\ 0)$, $B(0;\ -12)$.

**281.** Знайдіть $x$, якщо:

а) відстань між точками $M(2;\ 1)$ і $N(x;\ -2)$ дорівнює 5;

б) відстань між точками $M(x;\ 0)$ і $N(2;\ -1)$ дорівнює 1.

**282.** Знайдіть периметр трикутника $ABC$, якщо $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 6)$, $C(5;\ 2)$.

**283.** Доведіть, що в трикутнику з вершинами $A(-6;\ 5)$, $B(2;\ -10)$, $C(-13;\ -18)$ кути $A$ і $C$ рівні.

**284.** Доведіть, що трикутник з вершинами $A(1;\ 0)$, $B\left(2;\sqrt{3}\right)$, $C(3;\ 0)$ рівносторонній.

## Рівень Б

**285.** Дано точку $A(-4;\ 3)$. Знайдіть точку $B$ таку, щоб відрізок $AB$ був паралельним одній із координатних осей, а його середина лежала:

а) на осі абсцис; б) на осі ординат.

**286.** Точка $C(x;\ y)$ — середина відрізка з кінцями $A(-y;\ -4)$ і $B(3;\ x)$. Знайдіть $x$ і $y$.

**287.** Точка $C$ — середина відрізка $AB$, точка $D$ — середина відрізка $BC$. Знайдіть координати точки $D$, якщо:

а) $A(-3;\ 3)$, $B(5;\ -1)$; б) $A(-2;\ -1)$, $C(2;\ 3)$.

**288.** На відрізку $AD$ позначено точки $B$ і $C$ так, що $AB = BC = CD$. Знайдіть координати точки $D$, якщо $A(5;\ 2)$, $B(3;\ 1)$.

**289.** За допомогою формули відстані між точками доведіть, що точки $K(5;\ -3)$, $M(2;\ 1)$ і $N(-1;\ 5)$ лежать на одній прямій. Яка з цих точок лежить між двома іншими?

**290.** Знайдіть точку, яка рівновіддалена від точок $(2;\ 3)$ і $(6;\ -1)$ та лежить:

а) на осі абсцис; б) на осі ординат.

**291.** Доведіть, що трикутник з вершинами $A(4;\ 1)$, $B(6;\ 2)$, $C(8;\ -2)$ прямокутний, і визначте його гіпотенузу.

**292.** Знайдіть довжину медіани $AM$ трикутника $ABC$, якщо $A(-6;\ -3)$, $B(-4;\ 3)$, $C(-2;\ -1)$.

**293.** У трикутнику $ABC$ знайдіть довжину середньої лінії, паралельної стороні $AC$, якщо $A(-2;\ 1)$, $B(-2;\ 7)$, $C(2;\ 5)$. Розв'яжіть задачу двома способами.

**294.** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник, якщо $A(-2;\ -1)$, $B(-4;\ 1)$, $C(-1;\ 4)$, $D(1;\ 2)$.

**295.** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — ромб, якщо $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 3)$, $C(3;\ 6)$, $D(0;\ 5)$.

## Рівень В

**296.** Середини сторін трикутника мають координати $(-2;\ 2)$, $(0;\ 7)$ і $(4;\ -1)$. Знайдіть координати вершин трикутника.

**297 (опорна). Точка $C$, яка ділить відрізок з кінцями $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ у відношенні $AC : CB = m : n$, має координати $x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$, $y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n}$. Доведіть.**

**298.** Знайдіть координати точки перетину медіан трикутника з вершинами $(1;\ 2)$, $(0;\ 7)$ і $(5;\ 6)$.

**299.** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — квадрат, якщо $A(-5;\ 0)$, $B(-2;\ 1)$, $C(-1;\ -2)$, $D(-4;\ -3)$.

**300.** Знайдіть площу трикутника $ABC$, якщо $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ 4)$, $C(4;\ -2)$.

**301.** Знайдіть периметр і площу трикутника, серединами сторін якого є точки $(-3;\ -1)$, $(1;\ -1)$ і $(1;\ 2)$.

## ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 9

### Теоретичний матеріал

- геометричні місця точок;
- лінійна функція та її графік.

7 клас, § 22

алгебра, 7 клас

### Задачі

**302.** Зобразіть на координатній площині геометричне місце точок:
а) віддалених від початку координат на 4;
б) рівновіддалених від точок $A(-1;\ 3)$ і $B(5;\ -1)$.

**303.** Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від вершин рівнобедреного прямокутного трикутника.

# § 9. Рівняння кола і прямої

## 9.1. Рівняння фігури на площині

На уроках алгебри ви розглядали функції і будували їхні графіки у прямокутній системі координат. Так, наприклад, графіком функції $y = x$ є пряма $l$, яка проходить через початок координат $O$ (рис. 54). Це означає, що координати будь-якої точки прямої $l$ задовольняють рівняння $y = x$ (тобто є рівними), а координати будь-якої точки, що не належить прямій $l$, не задовольняють це рівняння (тобто не рівні). Рівняння $y = x$ є *рівнянням прямої* $l$. За допомогою рівнянь можна описувати й інші фігури на площині.

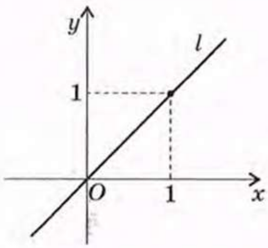


**Рис. 54.** Пряма $l$ — графік функції $y = x$

**Означення**

Рівняння з двома змінними $x$ і $y$ називається **рівнянням фігури** $F$ у прямокутній системі координат, якщо:
1) координати будь-якої точки фігури $F$ задовольняють це рівняння;
2) будь-які два числа, що задовольняють це рівняння, є координатами деякої точки фігури $F$.

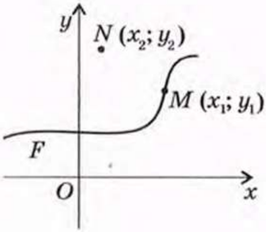


**Рис. 55.** До означення рівняння фігури

Так, на рис. 55 координати точки $M$ — числа $x_1$ і $y_1$ — задовольняють рівняння фігури $F$, а координати точки $N$ — числа $x_2$ і $y_2$ — не задовольняють.

Зазвичай у процесі вивчення фігур на координатній площині виникають дві взаємно обернені задачі: побудова фігури за даним рівнянням і знаходження рівняння фігури за її властивостями. Перший вид задач ви неодноразово розв'язували в курсі алгебри, будуючи графіки функцій та рівнянь. Розглянемо другий вид задач щодо кола і прямої.

## 9.2. Рівняння кола

**Теорема (про рівняння кола)**

**У прямокутній системі координат рівняння кола радіуса $R$ із центром у точці $C(a; b)$ має вигляд**

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

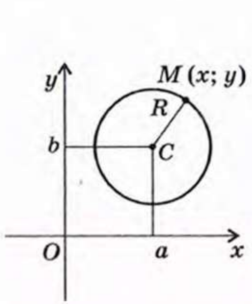



**Рис. 56.** До доведення теореми про рівняння кола

### Доведення

□ Нехай у прямокутній системі координат задано коло радіуса $R$ ($R > 0$) із центром у точці $C(a;\ b)$ (рис. 56). Оберемо довільну точку кола $M(x;\ y)$. За означенням кола відстань від центра до довільної точки кола дорівнює $R$, тобто $CM = R$, отже, $CM^2 = R^2$. Записавши цю рівність у координатах, маємо:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Оскільки $M$ — довільна точка кола, то це рівняння задовольняють координати будь-якої точки кола.

Згідно з означенням рівняння фігури, доведемо обернене твердження. Нехай числа $x_0$ і $y_0$ задовольняють наше рівняння, тобто $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2$, або $\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}=R$. За формулою відстані між точками це означає, що відстань між точками $M_0(x_0;\ y_0)$ і $C(a;\ b)$ дорівнює $R$. Отже, точка $M_0(x_0;\ y_0)$ є точкою кола радіуса $R$ із центром $C$. •

Таким чином, обидві вимоги до рівняння фігури справджуються. Теорему доведено. ■

### Наслідок

**Коло радіуса $R$ із центром у початку координат задається рівнянням вигляду**

$$x^2+y^2=R^2.$$

Узагалі, будь-яке рівняння вигляду

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \text{ де } R>0,$$

описує коло радіуса $R$ із центром $C(a;\ b)$.

### Задача

Визначте центр і радіус кола, заданого рівнянням $x^2-4x+y^2+2y-11=0$.

### Розв'язання

Зведемо дане рівняння до вигляду $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Маємо:
$x^2-4x+y^2+2y=11$.

Додамо до обох частин цієї рівності числа так, щоб виділити квадрати двочленів $(x-a)$ і $(y-b)$: $(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=11+4+1$,
$(x-2)^2+(y+1)^2=4^2$. Отже, дане коло має радіус 4 і центр $(2;\ -1)$.

**Відповідь**: $(2;\ -1)$, $R=4$.

## 9.3. Рівняння прямої

Для виведення рівняння кола ми скористалися тим, що коло є геометричним місцем точок, віддалених від даної точки на задану відстань. Нагадаємо, що за теоремою про серединний перпендикуляр пряму можна описати як геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців відрізка. Застосуємо цей факт для доведення такої теореми.

**Теорема (про рівняння прямої)**

**У прямокутній системі координат рівняння прямої має вигляд**

$$ax + by + c = 0, \text{ де } a, b, c \text{ — деякі числа.}$$

**Доведення**

□ Нехай у прямокутній системі координат задано пряму $l$ (рис. 57). Позначимо точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ так, щоб дана пряма була серединним перпендикуляром до відрізка $AB$. Довільна точка $M(x;\ y)$, яка лежить на прямій $l$, рівновіддалена від точок $A$ і $B$, тобто $MA = MB$, звідки $MA^2 = MB^2$. Записавши цю рівність у координатах, маємо:

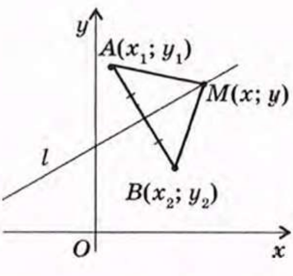



**Рис. 57.** До доведення теореми про рівняння прямої

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2.$$

Звівши подібні доданки в цьому виразі, дістанемо:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1{}^2 + y_1{}^2 - x_2{}^2 - y_2{}^2) = 0.$$

Оскільки $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ — деякі числа, то, позначивши $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $x_1{}^2 + y_1{}^2 - x_2{}^2 - y_2{}^2 = c$, маємо рівняння $ax + by + c = 0$, де $a$, $b$, $c$ — деякі числа.

Оскільки $M$ — довільна точка прямої $l$, то це рівняння задовольняють координати будь-якої точки даної прямої.

Нехай тепер числа $x_0$ і $y_0$ — координати деякої точки $M_0$ — задовольняють наше рівняння. У цьому випадку $M_0A = M_0B$, тобто точка $M_0$ рівновіддалена від точок $A$ і $B$, отже, належить серединному перпендикуляру до відрізка $AB$ — прямій $l$.

На завершення доведення зауважимо, що, оскільки $A$ і $B$ — дві різні точки, то хоча б одна з різниць $(x_2 - x_1)$ або $(y_2 - y_1)$ не дорівнює нулю, тобто хоча б одне з чисел $a$ або $b$ обов'язково відмінне від нуля. ■

Узагалі, **будь-яке рівняння вигляду $ax + by + c = 0$, де $a$ і $b$ не дорівнюють нулю одночасно, описує деяку пряму.**

Виділимо три окремі випадки розміщення прямої в прямокутній системі координат.

1) $a = 0$, $b \neq 0$. У цьому випадку рівняння прямої набуває вигляду $by + c = 0$, або $y = y_0$, де $y_0 = -\frac{c}{b}$ — деяке число. Пряма $y = y_0$ паралельна осі абсцис (рис. 58, *а*) або збігається з нею (рівняння осі абсцис має вигляд $y = 0$).

2) $a \neq 0$, $b = 0$. У цьому випадку рівняння прямої набуває вигляду $ax + c = 0$, або $x = x_0$, де $x_0 = -\frac{c}{a}$ — деяке число. Пряма $x = x_0$ паралельна осі ординат (рис. 58, *б*) або збігається з нею (рівняння осі ординат має вигляд $x = 0$).

3) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. У цьому випадку рівняння прямої набуває вигляду $ax + by = 0$, або $y = kx$, де $k = -\frac{a}{b}$ — деяке число. Пряма $y = kx$ проходить через початок координат (рис. 58, *в*).

Зазначимо також, що для прямих, не паралельних осі ординат, рівняння $ax + by + c = 0$ можна подати у вигляді $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, або $y = kx + m$, де $k$ і $m$ — деякі числа (***рівняння невертикальної прямої***) (рис. 58, *г*). Саме такий вигляд рівняння прямої зручно використовувати для розв'язування деяких, зокрема алгебраїчних, задач.

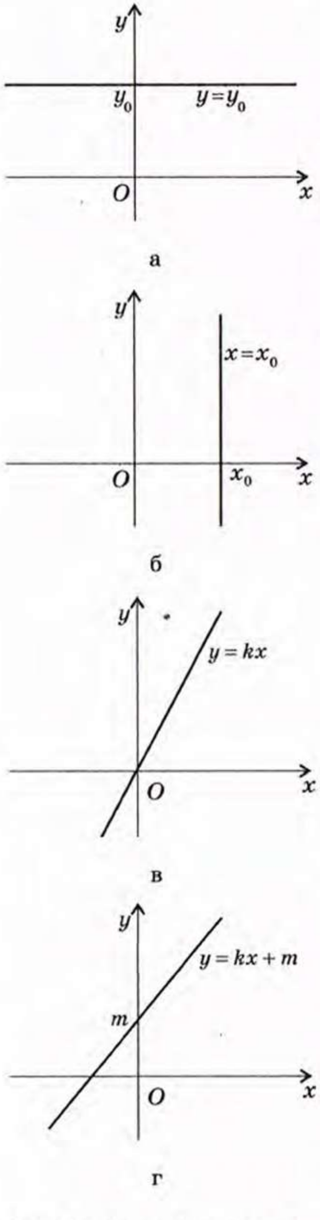



**Рис. 58.** Окремі випадки розміщення прямої в системі координат

**Задача**

Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки A(–6; –1) і B(3; 2).

**Розв'язання**

Оскільки абсциси точок A і B не рівні, пряма AB не паралельна осі ординат. Отже, будемо шукати її рівняння у вигляді $y = kx + m$.

За умовою задачі координати точок A і B задовольняють шукане рівняння, тобто $\begin{cases} -1 = -6k + m, \\ 2 = 3k + m. \end{cases}$

Розв'язком системи цих рівнянь буде пара $k = \frac{1}{3}$, $m = 1$. Таким чином, $y = \frac{1}{3}x + 1$ — шукане рівняння.

Зведемо його до вигляду $ax + by + c = 0$: $3y = x + 3$, $x - 3y + 3 = 0$.

**Відповідь**: $x - 3y + 3 = 0$.

Зауважимо, що правильною відповіддю в цій задачі є також будь-яке рівняння, яке можна отримати з наведеного множенням обох частин на число, відмінне від нуля.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**304.** Назвіть центр і радіус кола, заданого рівнянням:

а) $x^2 + y^2 = 25$;

б) $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 100$;

в) $x^2 + (y + 3)^2 = 2$.

**305.** Центром кола радіуса $R$ є початок координат. Скільки точок перетину має це коло з осями координат? Назвіть координати цих точок.

**306.** Коло задане рівнянням $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$. Чи перетинає це коло вісь абсцис; вісь ординат?

**307.** Серед прямих $2x - 3y = 0$, $4y - 8 = 0$, $3x + y + 9 = 0$, $5 - 10x = 0$ оберіть прямі, які:

а) паралельні осі абсцис;

б) паралельні осі ординат;

в) проходять через початок координат.

**308.** Пряма проходить через точки $A(4; 0)$ і $B(4; 3)$. Чи проходить вона через точки $C(4; -1)$ і $D(0; 4)$?

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**309.** Побудуйте в прямокутній системі координат коло, задане рівнянням $(x-4)^2+(y+1)^2=9$, і пряму $x-y+2=0$. Позначте на рисунку:

а) дві точки з цілочисельними координатами, які лежать на даному колі й не лежать на даній прямій;

б) дві точки з цілочисельними координатами, які лежать на даній прямій і не лежать на даному колі;

в) точки перетину кола і прямої.

→ **310.** Побудуйте в прямокутній системі координат коло, задане рівнянням $(x+4)^2+(y+4)^2=25$, і пряму, яка проходить через центр цього кола і початок координат.

а) Запишіть рівняння побудованої прямої.

б) Визначте за рисунком координати точок перетину кола з осями координат. Перевірте отримані результати підстановкою в рівняння кола.

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**311.** Визначте, які з точок $A(-1; 5)$, $B(-4; 0)$, $C(5; -3)$, $D(-3; 1)$, $E(2; 1)$ лежать на колі, заданому рівнянням $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

**312.** Складіть рівняння кола:

а) радіуса 3 з центром $(-2; 1)$;

б) з центром у початку координат, яке проходить через точку $(-4; -3)$;

в) з діаметром $AB$, якщо $A(-2; 1)$, $B(2; 1)$.

→ **313.** Складіть рівняння кола з центром $A$ і радіусом $AB$, якщо $A(1; 1)$, $B(-3; -2)$. Які з точок $C(4; 5)$, $D(-4; 1)$, $E(1; 4)$ лежать на цьому колі?

**314.** На колі, заданому рівнянням $x^2+y^2=100$, знайдіть точки:

а) з абсцисою 8;

б) з ординатою $-6$.

**315.** Визначте, чи має коло, задане рівнянням $(x+2)^2+(y-1)^2=5$, спільні точки з осями координат. Знайдіть координати цих точок.

**316.** Коло задане рівнянням $x^2+(y-1)^2=4$. Знайдіть точки перетину цього кола з осями координат.

**317.** Визначте, які з точок $A(3; -1)$, $B(-3; 0)$, $C(12; 5)$, $D(1; 0)$, $E(-9; -2)$ лежать на прямій, заданій рівнянням $x-3y+3=0$.

**318.** Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $(-6; 2)$ і:
а) паралельна осі ординат;
б) паралельна осі абсцис;
в) проходить через початок координат.

**319.** Складіть рівняння прямої, яка проходить через початок координат і центр кола, заданого рівнянням $(x+3)^2+(y-3)^2=1$. Визначте, які з точок $A(-1; -1)$, $B(-8; 8)$, $C(12; 12)$ лежать на цій прямій.

**320.** Знайдіть точки перетину:
а) прямих $2x-5y+1=0$ і $y=3$;
б) прямої $3x+y+6=0$ з осями координат;
в) прямої $x-y=0$ і кола $x^2+y^2=8$.

**321.** Доведіть, що коло $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ дотикається до осі ординат. Знайдіть координати точки дотику.

**322.** Знайдіть точку перетину прямих $2x-y-9=0$ і $y=-x$.

## Рівень Б

**323.** Визначте центр і радіус кола, заданого рівнянням:
а) $x^2-6x+y^2+2y-6=0$;
б) $x^2+y^2+10y+24=0$.

**324.** Складіть рівняння кола:
а) з діаметром $AB$, якщо $A(-1; 5)$, $B(5; -3)$;
б) описаного навколо правильного трикутника з точкою перетину медіан $(-4; 9)$ і периметром $6\sqrt{3}$;
в) вписаного у квадрат $ABCD$, якщо $A(-1; -3)$, $B(-1; -1)$, $C(1; -1)$, $D(1; -3)$.

**325.** Складіть рівняння кола:
а) вписаного в ромб, діагоналі якого дорівнюють 15 і 20 і лежать на осях координат;
б) описаного навколо прямокутного трикутника $ABC$, якщо $\angle A=90^\circ$, $B(4; 0)$, $C(-2; -8)$.

**326.** Коло з центром $C(-4; 5)$ дотикається до осі абсцис. Складіть рівняння цього кола і знайдіть точки його перетину з віссю ординат.

**327.** Складіть рівняння кіл радіуса 2, які мають центр на осі абсцис і дотикаються до осі ординат.

**328.** Складіть рівняння прямої, яка:

а) проходить через точки $(-1; -6)$ і $(1; 2)$;

б) проходить через початок координат і центр кола $x^2 + 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$;

в) перетинає осі координат в точках $(-3; 0)$ і $(0; -3)$.

**329.** Складіть рівняння прямих, що містять сторони трикутника $ABC$, якщо $A(-1; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 2)$.

**330.** Знайдіть точку перетину прямих:

а) $3x + y + 5 = 0$ і $x - 2y - 3 = 0$;

б) $x - y + 1 = 0$ і $2x - 5y + 5 = 0$;

в) дотичних до кола $x^2 + y^2 = 4$ в точках $(2; 0)$ і $(0; -2)$.

**331.** Знайдіть точки перетину:

а) прямої $x - 3y + 6 = 0$ і кола $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$;

б) кіл $(x-2)^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = 5$.

**332.** Дано коло $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$ і прямі $x - y + 3 = 0$ та $x + y - 9 = 0$. Знайдіть точку перетину даних прямих і спільні точки кожної з них і кола.

## Рівень В

**333.** Складіть рівняння кола:

а) яке має центр на осі ординат і проходить через точки $(-5; 1)$ і $(3; 5)$;

б) яке має радіус $2\sqrt{2}$ і проходить через точки $(1; 4)$ і $(5; 4)$.

**334.** Складіть рівняння кола радіуса 5 з центром на осі абсцис, якщо воно проходить через точку $(1; -3)$. Скільки розв'язків має задача?

**335 (опорна). Рівняння прямої, яка перетинає осі координат у точках $(a; 0)$ і $(0; b)$, де $a \neq 0$ і $b \neq 0$, має вигляд $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (*рівняння прямої у відрізках*).** Доведіть.

**336.** Доведіть, що прямі $x + y - 5 = 0$, $2x - y - 4 = 0$ і $x - 3y + 3 = 0$ перетинаються в одній точці.

**337.** Знайдіть довжину хорди, яка утворюється в результаті перетину кола $(x+4)^2+(y-3)^2=4$ прямою $x-y+9=0$.

**338.** Знайдіть периметр трикутника, обмеженого прямими $4x-3y+3=0$, $y=1$, $x=3$. Складіть рівняння прямої, що містить медіану трикутника, проведену до середньої за довжиною сторони.

## ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 10

### Теоретичний матеріал

- властивості й ознаки;
- взаємне розміщення графіків лінійних функцій;
- види чотирикутників.

7 клас, п. 13.2

алгебра, 7 клас

8 клас, § 4, 5

### Задачі

**339.** Сформулюйте і доведіть три ознаки квадрата.

**340.** Два трикутники вписані в одне коло. Сторони одного з них дорівнюють 7 см, 15 см і 20 см. Знайдіть сторони другого трикутника, якщо він є єгипетським.*

* Нагадаємо, що єгипетським трикутником називається прямокутний трикутник, сторони якого відносяться як $3:4:5$.

# § 10*. Метод координат

## 10.1. Розв'язування задач методом координат

Формули й рівняння, отримані в цьому розділі, дають можливість вивчати геометричні фігури та їхні властивості за допомогою рівнянь та нерівностей, тобто використовувати в геометрії засоби алгебри. Такий метод дослідження геометричних фігур називають ***методом координат***, а відповідний розділ геометрії — *аналітичною геометрією*.

**Задача**

Доведіть, що сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів бічних сторін, доданій до подвоєного добутку основ.

**Розв'язання**

Сформулюємо дану задачу в координатах. Для цього розмістимо дану трапецію $ABCD$ у системі координат так, щоб її вершини мали координати $A(0; 0)$, $B(a; b)$, $C(c; b)$, $D(d; 0)$ (рис. 59).

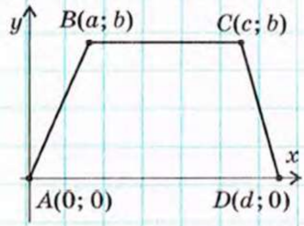



Рис. 59

Виразимо суму квадратів діагоналей трапеції через координати її вершин:

$AC^2 + BD^2 = c^2 + b^2 + (a - d)^2 + b^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2 - 2ad.$

Обчислимо довжини основ трапеції:

$$AD = d,\ BC = c - a.$$

Виразимо в координатах суму квадратів бічних сторін:

$AB^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + (c - d)^2 + b^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2 - 2cd.$

Додаючи до цього виразу подвоєний добуток основ, маємо:

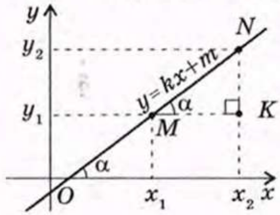
$$AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC = a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2 - 2cd + 2cd - 2ad =$$
$$= a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2 - 2ad,$$

що й треба було довести.

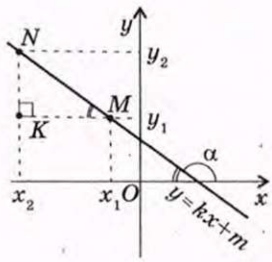
Отже, розв'язування геометричної задачі методом координат складається з трьох основних етапів:

1) сформулювати дану задачу мовою координат;
2) перетворити алгебраїчні вирази, користуючись відомими співвідношеннями та формулами;
3) перекласти отриманий результат мовою геометрії.

На першому етапі розв'язування часто необхідно задати на площині систему координат. Зазвичай її вибирають так, щоб якнайбільше координат вершин фігури, що розглядається, дорівнювали нулю або одному й тому самому числу — це дозволяє максимально спростити подальші алгебраїчні перетворення.




а




б

Рис. 60. Визначення кутового коефіцієнта прямої

## 10.2. Взаємне розміщення прямих у системі координат

Як відомо з курсу алгебри, у рівнянні невертикальної прямої $y = kx + m$ число $k$ називають ***кутовим коефіцієнтом прямої***. Нехай пряма проходить через точки $M(x_1;\, y_1)$ і $N(x_2;\, y_2)$ і утворює з додатною піввіссю осі абсцис гострий кут $\alpha$ (рис. 60, *а*). Виразимо з прямокутного трикутника $MNK$ тангенс кута $\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\angle NMK = \frac{NK}{MK},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(kx_2 + m) - (kx_1 + m)}{x_2 - x_1} = \frac{k(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = k.$$

У випадку, коли кут $\alpha$ тупий (рис. 60, *б*):

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle NMK) = -\operatorname{tg}\angle NMK,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k.$$

Отже, **кутовий коефіцієнт прямої $k$ дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатної півосі осі абсцис.**

Геометричний зміст чисел $k$ і $m$ у рівнянні $y = kx + m$ унаочнено на рис. 61.

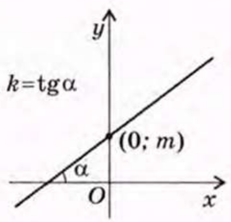



Рис. 61. Геометричний зміст $k$ і $m$ у рівнянні прямої

**Теорема (критерій паралельності прямих у системі координат)**

**Прямі $l_1$ і $l_2$, задані рівняннями $y = k_1x + m_1$ і $y = k_2x + m_2$ відповідно, паралельні тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $m_1 \neq m_2$.**

**Доведення**

□ 1) *Властивість.*

Нехай $l_1 \parallel l_2$. У випадку, коли обидві ці прямі паралельні осі абсцис, $k_1 = k_2 = 0$ і твердження теореми очевидне. В противному випадку (рис. 62) $\alpha_1 = \alpha_2$ як відповідні кути при паралельних прямих $l_1$ і $l_2$ та січній $Ox$. Отже, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$, тобто $k_1 = k_2$. Очевидно, що $m_1 \neq m_2$, оскільки в іншому випадку дані прямі збігаються.

2) *Ознака.*

Якщо $k_1 = k_2 = 0$, твердження теореми очевидне. Проведемо доведення для випадку, коли дані прямі утворюють з додатною піввіссю осі абсцис гострі кути (інший випадок розгляньте самостійно). Нехай $k_1 = k_2$ і $m_1 \neq m_2$, звідки $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Оскільки різним гострим кутам $\alpha$ відповідають різні тангенси, то $\alpha_1 = \alpha_2$, отже, за ознакою паралельності прямих $l_1 \parallel l_2$. Теорему доведено повністю. ■

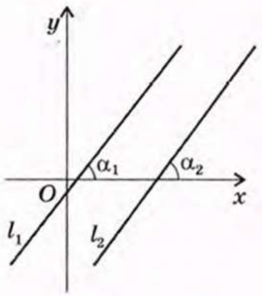



**Рис. 62.** До доведення властивості й ознаки паралельності прямих

**Теорема (критерій перпендикулярності прямих у системі координат)**

**Прямі $l_1$ і $l_2$, задані рівняннями $y = k_1x + m_1$ і $y = k_2x + m_2$ відповідно, перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $k_1 \cdot k_2 = -1$.**

**Доведення**

□ 1) *Властивість.*

Нехай $l_1 \perp l_2$ (рис. 63). Із прямокутного трикутника $ABC$ ($\angle C = 90°$) маємо:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\angle CAB = \frac{BC}{AC} = \operatorname{ctg}\angle CBA = \frac{1}{\operatorname{tg}\angle CBA} =$$
$$= \frac{1}{\operatorname{tg}(180° - \alpha_2)} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Отже, $\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 = k_1 \cdot k_2 = -1$.

2) *Ознака.*

Нехай $k_1 \cdot k_2 = -1$, тобто $k_1 = -\frac{1}{k_2}$. Оскільки $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ (див. рис. 63), то

$$\operatorname{tg}\angle CAB = -\frac{1}{\operatorname{tg}(180° - \angle CBA)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\angle CBA} = \operatorname{ctg}\angle CBA.$$

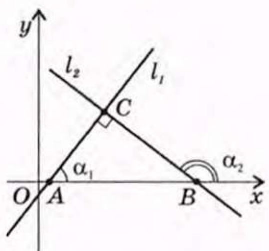



**Рис. 63.** До доведення властивості й ознаки перпендикулярності прямих

Враховуючи, що $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$, маємо $\operatorname{tg}\angle CAB = \operatorname{tg}(90^\circ - \angle CBA)$. Оскільки кут $CBA$ гострий, то кут $90^\circ - \angle CBA$ також гострий, отже, $\angle CAB = 90^\circ - \angle CBA$. Тоді $\angle CAB + \angle CBA = 90^\circ$, тобто $\angle C = 90^\circ$. Теорему доведено повністю. ■

**Задача**

Визначте, чи є серед прямих $x - 3y - 3 = 0$, $3x + y - 9 = 0$ і $x - 3y + 12 = 0$ паралельні або перпендикулярні.

**Розв'язання**

Подамо рівняння даних прямих у вигляді $y = kx + m$:

$$y = \frac{1}{3}x - 1, \quad y = -3x + 9, \quad y = \frac{1}{3}x + 4.$$

Отже, оскільки $\frac{1}{3}\cdot(-3) = -1$, прямі $y = \frac{1}{3}x - 1$ і $y = \frac{1}{3}x + 4$ перпендикулярні до прямої $y = -3x + 9$. Оскільки $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ і $-1 \neq 4$, то прямі $y = \frac{1}{3}x - 1$ і $y = \frac{1}{3}x + 4$ паралельні.

## 10.3. Застосування координат до розв'язування задач на відшукання ГМТ

Розв'язування задач на відшукання ГМТ за допомогою методу координат передбачає два основні етапи:

1) складання рівняння з двома невідомими $x$ і $y$, яке задовольняють координати будь-якої точки шуканого ГМТ. На цьому етапі обґрунтовується пряме твердження: якщо точка $M(x;\ y)$ — довільна точка шуканого ГМТ, то її координати задовольняють знайдене рівняння;

2) доведення оберненого твердження: будь-яка точка, координати якої задовольняють знайдене рівняння, належить шуканому ГМТ.

**Задача**

Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок площини, для яких різниця $MA^2 - MB^2$ стала.

**Розв'язання**

Виберемо систему координат так, щоб точки A і B лежали на осі абсцис, а середина відрізка AB збігалася з початком координат (рис. 64). Нехай $AB = a$, тоді дані точки матимуть координати $A\left(-\frac{a}{2};0\right)$ і $B\left(\frac{a}{2};0\right)$.

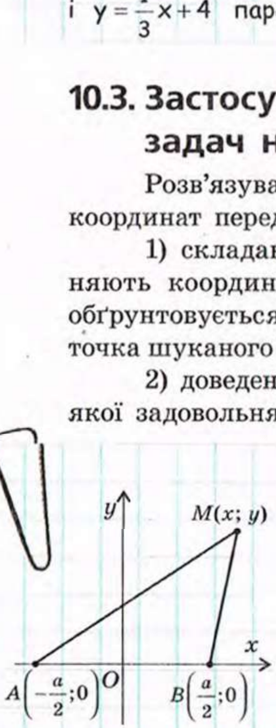


Рис. 64

Для довільної точки $M(x; y)$ за умовою задачі $MA^2 - MB^2 = k$. Записавши цю умову в координатах, маємо: $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 - y^2 = k$.

Спрощуючи цей вираз, дістанемо $2ax = k$, тобто $x = \frac{k}{2a}$.

Отже, кожна точка шуканого ГМТ належить прямій $x = \frac{k}{2a}$, яка паралельна осі ординат (тобто перпендикулярна до прямої $AB$) і проходить через точку $\left(\frac{k}{2a}; 0\right)$. І навпаки: якщо точка $M(x; y)$ лежить на прямій $x = \frac{k}{2a}$, то її координати задовольняють рівняння $MA^2 - MB^2 = k$, отже, точка $M$ належить шуканому ГМТ.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**341.** Квадрат зі стороною 1 розміщений у системі координат так, що три його вершини лежать на осях координат, а четверта — в першій координатній чверті. Назвіть координати вершин квадрата.

**342.** Ромб із діагоналями 6 і 8 розміщений у системі координат так, що його діагоналі лежать на осях координат, причому більша діагональ — на осі абсцис. Назвіть координати вершин ромба.

**343.** Назвіть кутовий коефіцієнт прямої, яка:

а) паралельна прямій $y = -0,5x + 7$;

б) перпендикулярна до прямої $y = -0,5x + 7$.

**344.** Одна з основ трапеції лежить на осі абсцис. Яким рівнянням задається пряма, що містить другу основу, якщо висота трапеції дорівнює 8? Скільки розв'язків має задача?

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**345.** Розмістіть у системі координат рівнобедрений трикутник з основою 6 і бічною стороною 5 так, щоб основа і вершина, протилежна основі трикутника, лежали на осях координат. Визначте координати вершин трикутника.

**346.** Розмістіть у системі координат прямокутну трапецію з основами $a$ і $b$ $(a < b)$ і висотою $h$ так, щоб дві сторони трапеції лежали на осях координат. Визначте координати вершин трапеції.

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**347.** Складіть рівняння прямої, яка:

а) паралельна прямій $2x + 3y + 1 = 0$ і проходить через точку $(1; 1)$;

б) паралельна прямій $x + y - 14 = 0$ і проходить через початок координат.

**348.** Дано пряму $2x - y + 4 = 0$ і точку $A(1; 1)$. Через точку $A$ проведено пряму, паралельну даній, і пряму, перпендикулярну до даної. Складіть рівняння цих прямих.

**349.** Доведіть методом координат, що паралелограм, який має рівні діагоналі, є прямокутником.

**350.** Доведіть методом координат, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

**351.** Доведіть методом координат, що середня лінія трапеції паралельна її основам.

**352.** Складіть рівняння ГМТ:

а) рівновіддалених від початку координат і точки $(-4; 2)$;

б) сума квадратів відстаней від яких до точок $(-1; 0)$ і $(1; 0)$ дорівнює 12.

**353.** Складіть рівняння ГМТ, різниця квадратів відстаней від яких до точок $(1; 0)$ і $(-1; 2)$ дорівнює 1.

## Рівень Б

**354.** Складіть рівняння прямої, яка:

а) нахилена до додатної півосі осі абсцис під кутом 60° і проходить через точку (0; 1);

б) нахилена до додатної півосі осі абсцис під кутом 135° і проходить через точку (0; –1).

**355.** Складіть рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 = 25$ у точках (3; 4) і (–3; –4). Доведіть, що ці дотичні паралельні.

**356.** Три сторони квадрата лежать на прямих $3x + y + 1 = 0$, $3x + y - 9 = 0$, $x - 3y - 3 = 0$. Складіть рівняння прямої, на якій лежить четверта сторона. Скільки розв'язків має задача?

**357.** Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний її основам і дорівнює їх піврізниці.

**358.** Пряма віддалена від центра кола радіуса $R$ на відстань $d$. Дослідіть взаємне розміщення кола і прямої в залежності від значень $d$ і $R$.

**359.** Відстань між центрами кіл з радіусами $R$ і $r$ дорівнює $d$. Дослідіть взаємне розміщення кіл у залежності від значень $d$, $R$ і $r$.

## Рівень В

**360 (опорна). Рівняння прямої, що проходить через точки $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$, має вигляд $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.** Доведіть.

**361 (опорна). Прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.** Доведіть.

**362.** Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнюють відповідно $a\sqrt{2}$ і $a\sqrt{3}$. Доведіть, що медіани, проведені до цих сторін, взаємно перпендикулярні.

**363.** У прямокутнику $ABCD$ $AB = 2a$, $AD = 5a$. На стороні $AD$ позначено точку $K$ так, що $AK = a$. Доведіть, що $BK \perp KC$.

**364.** На колі радіуса $R$ позначено точку $A$. Знайдіть геометричне місце середин усіх хорд даного кола, які виходять із точки $A$.

**365.** У прямокутному трикутнику $ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть геометричне місце точок $M$ таких, що $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$.

# ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 11

## Теоретичний матеріал

- аксіома вимірювання відрізків; 7 клас, п. 2.2
- рівні фігури. 7 клас, п. 7.2

## Задачі

**366.** Діагоналі рівнобедреної трапеції $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ перетинаються в точці $O$. Доведіть рівність трикутників $AOB$ і $DOC$.

**367.** Вершини трикутника $ABC$ мають координати $A(-2;\ 1)$, $B(-1;\ 4)$, $C(1;\ 4)$. Знайдіть на координатній площині точку $D$ таку, що:

а) $\triangle ABC = \triangle ADC$; б) $\triangle ABC = \triangle CDA$.

## Задачі для підготовки до контрольної роботи № 3

**1.** Відрізок $BD$ — медіана трикутника $ABC$. Знайдіть координати вершини $C$, якщо $A(-1;\ 7)$, $D(3;\ 1)$.

**2.** Точки $A(-3;\ -1)$ і $B(5;\ 5)$ — кінці діаметра кола. Знайдіть радіус цього кола.

**3.** Складіть рівняння кола з центром $(3;\ -4)$, яке проходить через початок координат.

**4.** Знайдіть точки перетину прямої $2x - 5y + 20 = 0$ з осями координат.

**5.** Визначте, чи є відрізок $AB$ діаметром кола $x^2 + 6x + y^2 = 0$, якщо $A\left(-1; \sqrt{5}\right)$, $B\left(-5; -\sqrt{5}\right)$.

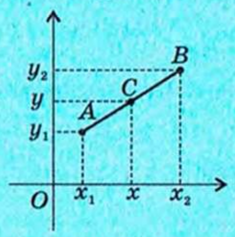
**6.** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник, якщо $A(-2;\ 0)$, $B(4;\ 3)$, $C(5;\ 1)$, $D(-1;\ -2)$.

# Підсумки розділу III

## ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ III

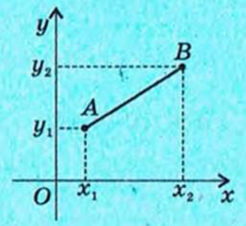
### Найпростіші задачі й рівняння фігур у координатах

***Координати середини відрізка***



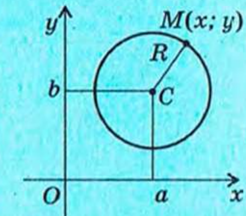

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

***Відстань між точками***



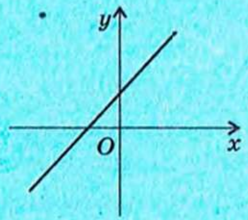

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

***Рівняння кола***




$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

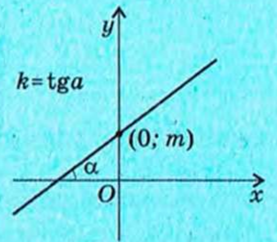
***Рівняння прямої***




$$ax + by + c = 0$$

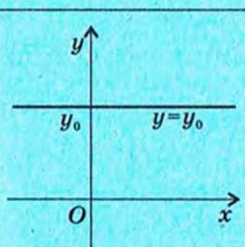
($a$ і $b$ не дорівнюють нулю одночасно)

***Рівняння невертикальної прямої***

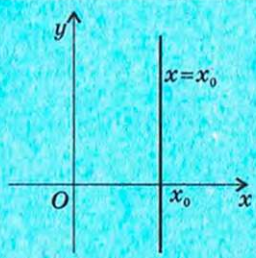
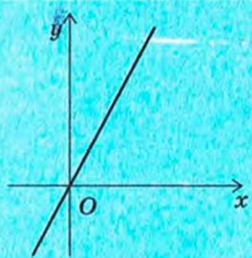



$$y = kx + m,\ k = \text{tg}\,\alpha$$

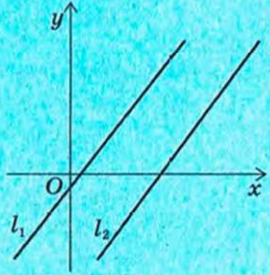
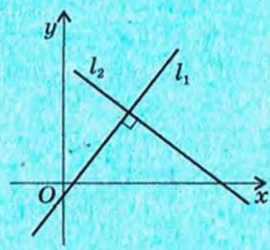
### Окремі випадки розміщення прямої в системі координат

| *Графічне подання* | *Значення коефіцієнтів та вигляд рівняння* | *Особливості розміщення* |
|---|---|---|
|  | $a = 0,\ b \neq 0.$<br>$by + c = 0$ або $y = y_0$,<br>де $y_0 = -\frac{c}{b}$ —<br>деяке число | Пряма паралельна осі абсцис або збігається з нею.<br>***Рівняння осі абсцис***<br>$y = 0$ |

*Закінчення таблиці*

| *Графічне подання* | *Значення коефіцієнтів та вигляд рівняння* | *Особливості розміщення* |
|---|---|---|
|  | $a \neq 0$, $b = 0$.<br>$ax + c = 0$ або $x = x_0$,<br>де $x_0 = -\frac{c}{a}$ —<br>деяке число | Пряма паралельна осі ординат або збігається з нею.<br>***Рівняння осі ординат***<br>$x = 0$ |
|  | $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$.<br>$ax + by = 0$ або $y = kx$,<br>де $k = -\frac{a}{b}$ —<br>деяке число | Пряма проходить через початок координат |

## Взаємне розміщення прямих у системі координат

| *Критерій паралельності прямих у системі координат* | *Критерій перпендикулярності прямих у системі координат* |
|---|---|
| Прямі $l_1$ і $l_2$, задані рівняннями $y = k_1x + m_1$ і $y = k_2x + m_2$ відповідно, паралельні тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $m_1 \neq m_2$<br> | Прямі $l_1$ і $l_2$, задані рівняннями $y = k_1x + m_1$ і $y = k_2x + m_2$ відповідно, перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $k_1 \cdot k_2 = -1$<br> |

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ III

1. Опишіть прямокутну систему координат на площині.
2. Доведіть формули координат середини відрізка.
3. Доведіть формулу відстані між двома точками.
4. Запишіть рівняння кола у прямокутній системі координат.
5. Запишіть рівняння прямої у прямокутній системі координат.

## ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ III

**368.** Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці $O$, причому $A(-3; -1)$, $B(0; 4)$, $O(2; 1)$. Знайдіть координати вершин $C$ і $D$.

**369.** Доведіть, що:

а) сума абсцис середин сторін трикутника дорівнює сумі абсцис його вершин;

б) точка перетину медіан трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника, збігається з точкою перетину медіан даного трикутника.

**370.** На осі ординат знайдіть точку, відстань від якої до точки $A(1; 3)$ удвічі менша, ніж до точки $B(2; -3)$.

**371.** Дано точки $A(-3; 1)$ і $B(7; 1)$. Складіть рівняння геометричного місця точок $C$ таких, що трикутник $ABC$:

а) прямокутний з гіпотенузою $AB$;

б) прямокутний з катетом $AB$.

**372.** Коло дотикається до осей координат, а його центр лежить у другій координатній чверті й віддалений від початку координат на $2\sqrt{2}$. Складіть рівняння цього кола.

**373.** Вершини трикутника $ABC$ мають координати $A(2; -6)$, $B(4; 2)$, $C(0; -4)$. Складіть рівняння прямої, яка містить середню лінію трикутника, паралельну стороні $AC$.

**374.** Доведіть, що прямі $ax + 2y - 6 = 0$ і $bx - y + 5 = 0$ перетинаються за умови $a + 2b \neq 0$.

**375.** Складіть рівняння прямої, яка перетинає коло $x^2 + y^2 = 25$ в точках з абсцисами $-4$ і $3$ і вісь $Oy$ у точці з найбільшою ординатою.

## Задачі підвищеної складності

**376.** Складіть рівняння кола, яке проходить через точки (3; 0) і (–1; 2), якщо центр кола лежить на прямій $x - y + 2 = 0$.

**377.** Знайдіть відстань від початку координат до прямої $3x + 2y - 13 = 0$.

**378.** Складіть рівняння кола, описаного навколо трикутника з вершинами (3; –7), (8; –2) і (6; 2).

**379.** Доведіть формулу відстані від точки $M(x_0; y_0)$ до прямої $ax + by + c = 0$: $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

**380.** Знайдіть усі значення $k$, при яких пряма $y = kx + 5$ віддалена від початку координат на 3 одиниці.

**381.** Точка $M$ — точка перетину медіан трикутника $ABC$, причому $A(-1; 2)$, $B(2; 3)$, $M(1; 2)$. Знайдіть координати вершини $C$.

**382.** Навколо рівностороннього трикутника зі стороною $a$ описано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин трикутника дорівнює $2a^2$.

**383.** На площині позначено точки $A$ і $B$. Доведіть, що геометричним місцем точок $M$, для яких $\dfrac{MA}{MB} = k$ $(k > 0,\ k \neq 1)$, є коло з центром на прямій $AB$ (*коло Аполлонія*).

## ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Розвиток торгівлі й мореплавання, зростання промисловості й техніки, якими ознаменувалося XVII ст., сприяли виникненню нових математичних ідей і методів, які відповідали б вимогам часу. Одним із провідників цих ідей був Рене Декарт (1596–1650) – видатний французький учений і філософ. Широта інтересів цієї людини вражає: окрім математики, він збагатив своїми відкриттями астрономію, фізику, біологію, медицину. Але універсальною наукою, здатною пояснити всі явища реального світу, Декарт вважав філософію. Він став основоположником власного філософського вчення – картезіанства (Картезій – латинізоване прізвище Декарта), у якому викладено погляд на розвиток природничих наукових теорій.

Рене Декарт

Біографія Декарта є взірцем самовідданого служіння науці й боротьби за свободу думки. Зазнавши утисків на батьківщині, у 1629 р. Декарт змушений був переїхати до Голландії. Саме там у 1637 р. вперше побачив світ його головний твір – «Міркування про метод, що дозволяє направляти розум і відшукувати істину в науках». У цій роботі Декарт виклав чотири основні принципи наукового пізнання: 1) ніколи не сприймати за істину те, що є недостатньо обґрунтованим; 2) ділити кожну проблему на частини, щоб розв'язувати її послідовно; 3) рухатися в процесі пізнання від найпростішого до більш складного; 4) супроводжувати дослідження переліками й оглядами, щоб нічого не пропустити.

«Міркування про метод...» мало три додатки: «Діоптрика», «Метеори» та «Геометрія». Саме в останньому викладено метод координат, який пізніше склав основу аналітичної геометрії. Цікаво, що в цій роботі Декарт вперше запропонував сучасні позначення змінних і степенів, а також першим став подавати рівняння у вигляді, коли в правій частині стоїть нуль. «Геометрія» ще за життя автора витримала чотири перевидання і стала настільною книгою математиків того часу.

## ТЕМАТИКА ПОВІДОМЛЕНЬ І РЕФЕРАТІВ ДО РОЗДІЛУ III

1. Рене Декарт: особистість, відкриття, ідеї.
2. Полярні координати на площині.
3. Задачі оптимізації. Застосування методу координат в економіці.
4. Дослідження кривих методом координат. Парабола, гіпербола й еліпс.
5. Доведення геометричних теорем методом координат.

## РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

1. Математична хрестоматія для 6—8 класів. Т. 1 [Текст]. — К. : Рад. шк., 1968. — 320 с.
2. Математична хрестоматія для старших класів. Геометрія. Т. 2 [Текст] / упоряд. Л. В. Кованцова. — К. : Рад. шк., 1969. — 383 с.
3. Глейзер, Г. И. История математики в школе. VII—VIII классы: Пособие для учителей [Текст] / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1982. — 240 с.
4. Фишер, К. История новой философии. Рене Декарт [Текст] / К. Фишер. — М. : АСТ, 2004. — (Серия «Philosophi»).
5. Декарт, Р. Разыскание истины [Текст] / Р. Декарт. — СПб.: Азбука, 2004. — (Серия «Азбука-классика» (poket-book)).
6. Понтрягин, Л. С. Метод координат [Текст] / Л. С. Понтрягин. — М. : Наука, 1981.
7. Кушнір, І. А. Методи розв'язування задач з геометрії [Текст] / І. А. Кушнір. — К. : Абрис, 1994.
8. Кушнир, И. А. Координатный и векторный методы решения задач [Текст] / И. А. Кушнир. — К. : Астарта, 1996.
9. Інтернет-бібліотека МЦНМО. http://ilib.mirror0.mccme.ru/
10. Сайт видавництва «Ранок». http://www.ranok.com.ua

# Розділ IV
# ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

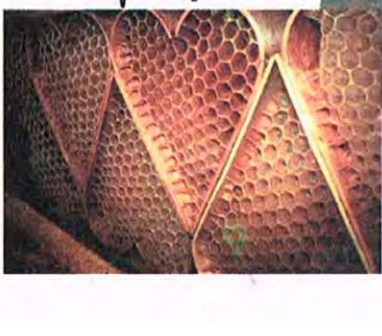
Геометрія є прообразом краси світу.

*Йоганн Кеплер, німецький астроном*
*і математик*

Уявіть собі, що ви жбурляєте камінець у гладінь тихого ставка і по воді колами розбігаються брижі, причому центр кожного кола розміщений саме там, де камінець торкнувся води. А тепер підніміть переднє колесо велосипеда і покрутіть його — колесо не зрушить із місця, але його спиці закружляють у шаленому танці. Станьте перед дзеркалом, тримаючи в правій руці олівець — і дзеркало «перетворить» вас на лівшу, адже ваш двійник триматиме олівець у лівій руці. У шухляді вашого столу лежить косинець: ви трохи висунули шухляду — і косинець перемістився разом із нею. Так чи інакше, в кожному з цих випадків фігури, про які йдеться, зазнають певних змін, перетворень.

Ідея перетворень є однією з провідних ідей сучасної математики. За її допомогою з успіхом доводять складні твердження з різних розділів геометрії, які виходять далеко за межі шкільного курсу. За допомогою геометричних перетворень і комп'ютерної графіки кінематографісти бентежать уяву глядача дивовижними образами і незвичайними перевтіленнями на екрані. Перетворення допомагають художникам правильно будувати композиції картин, а хімікам — досліджувати структуру кристалів.

У цьому розділі ми розглянемо основні види геометричних перетворень на площині.



# § 11. Переміщення

## 11.1. Поняття про геометричне перетворення

Будь-яку геометричну фігуру можна розглядати як множину точок: наприклад, на площині коло є множиною всіх точок, рівновіддалених від даної точки. Крім того, між точками двох геометричних фігур можна встановлювати відповідності.

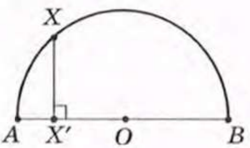



**Рис. 65.** Відповідність між точками півкола і діаметра

Розглянемо півколо з центром $O$ і діаметром $AB$ (рис. 65). З довільної точки півкола опустимо перпендикуляр на пряму $AB$ і вважатимемо, що кожній точці півкола $X$ відповідає точка $X'$ — основа перпендикуляра, опущеного з точки $X$ на пряму $AB$. У силу теореми про існування і єдиність перпендикуляра до прямої кожній точці півкола в такому разі відповідатиме єдина точка діаметра $AB$, і навпаки: кожній точці діаметра поставлена у відповідність єдина точка півкола. Крім того, різним точкам півкола відповідають різні точки діаметра $AB$ (точки $A$ і $B$, які відповідають самі собі, належать як півколу, так і діаметру). У такому випадку кажуть, що встановлена відповідність є ***перетворенням*** півкола на діаметр.

**Означення**

**Перетворенням** фігури $F$ у фігуру $F'$ називається така відповідність, при якій:
1) кожній точці фігури $F$ відповідає єдина точка фігури $F'$;
2) кожній точці фігури $F'$ відповідає деяка точка фігури $F$;
3) різним точкам фігури $F$ відповідають різні точки фігури $F'$.

Фігура $F'$ називається ***образом*** фігури $F$ для даного перетворення.

У шкільному курсі геометрії розглядатимуться геометричні перетворення, які не змінюють форми даної фігури. В окремий вид виділяються перетворення, які залишають незмінними і розміри фігури.

## 11.2. Переміщення та його властивості

### Означення

**Переміщенням** (або **рухом**) називається перетворення фігури, внаслідок якого зберігаються відстані між точками даної фігури.

Це означає: якщо $F'$ є образом фігури $F$, отриманим унаслідок переміщення, то будь-які дві точки $X$ і $Y$ фігури $F$ переходять у точки $X'$ і $Y'$ фігури $F'$ так, що $XY = X'Y'$ (рис. 66).

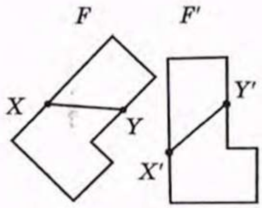



**Рис. 66.** До означення переміщення

Зауважимо, що поняття переміщення (руху) зустрічається і у фізиці, але там воно має інший зміст. Фізичний рух характеризується траєкторією, швидкістю тощо. Натомість у геометрії мають значення лише початкове й кінцеве положення фігури.

Сформулюємо деякі властивості переміщення.

Очевидно, що коли фігура $F'$ отримана деяким переміщенням фігури $F$, а фігура $F''$ — іншим переміщенням фігури $F'$, то відстані між відповідними точками фігур $F$, $F'$ і $F''$ рівні, тобто ***два послідовні переміщення знову дають переміщення***.

Якщо деяке перетворення переводить фігуру $F$ у фігуру $F'$, то існує перетворення, яке переводить фігуру $F'$ у фігуру $F$. Таке перетворення називають ***оберненим*** до даного. Якщо дане перетворення зберігає відстань між точками, то обернене також має цю властивість. Це означає, що ***перетворення, обернене до переміщення, також є переміщенням***.

Доведемо основну властивість переміщення.

### Теорема (основна властивість переміщення)

**Унаслідок переміщення точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і порядок їх взаємного розміщення зберігається.**

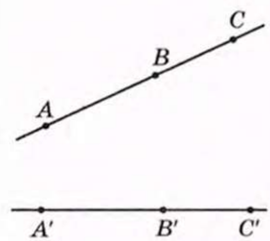



**Рис. 67.** До доведення основної властивості переміщення

### Доведення

□ Нехай на прямій $AC$ точка $B$ лежить між точками $A$ і $C$, а точки $A'$, $B'$ і $C'$ — образи точок $A$, $B$ і $C$, отримані в результаті переміщення (рис. 67). Доведемо, що точка $B'$ лежить на прямій $A'C'$ між точками $A'$ і $C'$.

Якщо точка $B$ лежить між точками $A$ і $C$, то за аксіомою вимірювання відрізків $AC = AB + BC$. За означенням переміщення $AC = A'C'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, отже, $A'C' = A'B' + B'C'$. За наслідком нерівності трикутника це означає, що точка $B'$ лежить на прямій $A'C'$ між точками $A'$ і $C'$, тобто точки $A'$, $B'$ і $C'$ лежать на одній прямій. Теорему доведено. ■

### Наслідок 1

**Унаслідок переміщення прямі переходять у прямі, промені — в промені, відрізки — у відрізки.**

### Наслідок 2

**Унаслідок переміщення зберігаються кути між променями.**

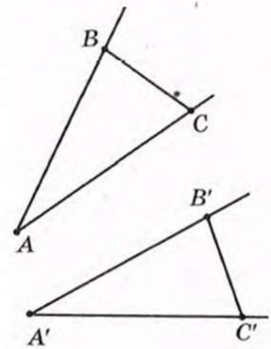



**Рис. 68**

Справді, нехай промені $AB$ і $AC$, що не лежать на одній прямій, внаслідок переміщення переходять у промені $A'B'$ і $A'C'$ відповідно (рис. 68). Оскільки відстані між точками внаслідок переміщення зберігаються, то $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ за трьома сторонами. Отже, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, тобто градусні міри кутів унаслідок переміщення зберігаються.

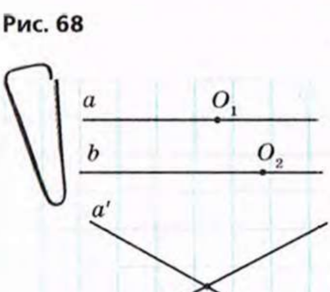



**Рис. 69**

#### Задача

Доведіть, що внаслідок переміщення паралельні прямі переходять у паралельні прямі.

#### Розв'язання

Нехай унаслідок переміщення паралельні прямі $a$ і $b$ переходять у прямі $a'$ і $b'$ відповідно. Доведемо від супротивного, що $a' \parallel b'$.

Нехай прямі $a'$ і $b'$ перетинаються в деякій точці $O'$ (рис. 69). На прямій $a$ існує точка $O_1$, а на прямій $b$ —

точка $O_2$, такі, що внаслідок переміщення обидві ці точки переходять у точку $O'$. Оскільки точки $O_1$ і $O_2$ лежать на паралельних прямих, то відстань між ними не дорівнює нулю. Але відстань між їх образами дорівнює нулю, що суперечить означенню переміщення. Отже, наше припущення хибне, тобто $a' \parallel b'$.

Нагадаємо, що дві фігури ми називали рівними, якщо вони суміщаються накладанням, причому поняття накладання вводилося на наочних прикладах.

Введення геометричних перетворень, зокрема переміщення, дозволяє ототожнити накладання фігури $F$ на фігуру $F'$ з переміщенням, під час якого фігура $F$ переходить у фігуру $F'$.

**Теорема (про зв'язок переміщення і накладання)**

**Будь-яке накладання є переміщенням,** і навпаки: **будь-яке переміщення є накладанням.**

Обґрунтування цих тверджень подаються в Додатку 3.

**Наслідок**

**Рівні фігури переводяться одна в одну переміщенням,** і навпаки: **під час переміщення будь-яка фігура переходить у рівну їй фігуру.**

Таким чином, можна дати таке означення рівних фігур.

**Означення**

Дві фігури називаються **рівними**, якщо вони суміщаються переміщенням.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**384.** Чи може переміщення переводити:

а) сторону паралелограма в протилежну сторону;

б) одну з основ трапеції в іншу;

в) один із кутів при основі рівнобедреного трикутника в інший;

г) один із кутів різностороннього трикутника в інший?

**385.** Відрізок $AC$ і його середина $B$ внаслідок переміщення переходять у відрізок $A'C'$ і точку $B'$ відповідно. Знайдіть довжину відрізка $A'C'$, якщо $AB = 20$ см.

**386.** Під час переміщення чотирикутника $ABCD$ отримали квадрат $A'B'C'D'$. Визначте довжину діагоналі $BD$, якщо $A'C' = 4$ см.

**387.** Трикутник $A'B'C'$ є образом рівностороннього трикутника $ABC$, отриманим у результаті переміщення. Визначте кути трикутника $A'B'C'$.

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**388.** Накресліть два кола зі спільним центром $O$. Опишіть геометричне перетворення, яке переводить менше коло в більше. Чи є таке перетворення переміщенням?

→ **389.** Накресліть прямокутник $ABCD$ і позначте точку перетину його діагоналей $O$. Опишіть геометричне перетворення, яке переводить трикутник $AOB$ у трикутник $DOC$. Чи є таке перетворення переміщенням?

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**390.** Точки $A$, $B$ і $C$ не лежать на одній прямій і під час переміщення переходять у точки $A'$, $B'$ і $C'$ відповідно. Доведіть рівність трикутників $ABC$ і $A'B'C'$.

**391.** Доведіть, що внаслідок переміщення суміжні кути переходять у суміжні кути.

→ **392.** Доведіть, що під час переміщення вертикальні кути переходять у вертикальні кути.

**393.** Унаслідок переміщення різносторонній трикутник $ABC$ переходить у трикутник $MNK$, причому $\angle A = \angle N$, $\angle B = 70°$, $\angle M = 20°$. Знайдіть кути $N$ і $K$.

→ **394.** Трикутник $MNK$ — образ трикутника $ABC$, отриманий у результаті переміщення. Знайдіть кути трикутника $ABC$, якщо $AB = BC$, а найбільший кут трикутника $MNK$ дорівнює $100°$.

### Рівень Б

**395.** Доведіть, що внаслідок переміщення подібні трикутники переходять у подібні трикутники.

**396.** Доведіть, що коли образом даного чотирикутника, отриманим внаслідок переміщення, є трапеція, то даний чотирикутник також є трапецією.

**397.** Доведіть, що внаслідок переміщення паралелограм переходить у паралелограм.

**398.** Унаслідок переміщення ромб $ABCD$ переходить у чотирикутник $A'B'C'D'$. Знайдіть кути отриманого чотирикутника, якщо $AB = AC$.

**399.** Унаслідок переміщення чотирикутник $ABCD$ переходить у чотирикутник $A'B'C'D'$. Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$, якщо $A'D' \parallel B'C'$, $A'B' = C'D'$, $\angle B' = 140°$ (розгляньте два випадки).

## Рівень В

**400.** Унаслідок переміщення фігури $F_1$ і $F_2$ та їхня спільна точка $O$ переходять у фігури $F_1'$ і $F_2'$ та точку $O'$ відповідно. Доведіть, що точка $O'$ — спільна точка фігур $F_1'$ і $F_2'$.

**401.** Доведіть, що внаслідок переміщення коло переходить у коло з тим самим радіусом.

**402.** Доведіть ознаку рівності паралелограмів за двома діагоналями і кутом між ними.

**403.** Сформулюйте і доведіть будь-яку ознаку рівності ромбів.

## ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 12

### Теоретичний матеріал

- паралелограм та його властивості; — 8 клас, § 2
- види трикутників; — 7 клас, § 16
- види чотирикутників. — 8 клас, § 4, 5

### Задачі

**404.** Доведіть, що відрізок, який має кінці на сторонах правильного шестикутника і проходить через його центр, ділиться цією точкою навпіл.

**405.** Відрізок із кінцями на бічних сторонах рівнобедреного трикутника, перпендикулярний до висоти, проведеної до основи, ділиться цією висотою навпіл. Доведіть.

# § 12. Центральна та осьова симетрії

**Симетрія** — від грецького «симетрія» — узгодженість розмірів, однаковість у розміщенні частин

## 12.1. Симетрія відносно точки

Нехай $O$ — фіксована точка, $X$ — довільна точка площини (рис. 70). Відкладемо на промені $XO$ відрізок $OX'$, який дорівнює $XO$. Ми отримали точку $X'$, симетричну точці $X$ відносно точки $O$.

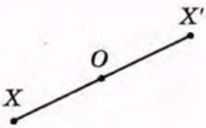


**Рис. 70.** Точки $X$ і $X'$ симетричні відносно точки $O$

**Означення**

Точки $X$ і $X'$ називаються **симетричними відносно точки** $O$, якщо точка $O$ — середина відрізка $XX'$.

Очевидно, що точкою, симетричною точці $X'$ відносно точки $O$, є точка $X$. Точка $O$ вважається симетричною самій собі і називається ***центром симетрії.***

***Перетворенням симетрії (симетрією) відносно точки O*** називают таке перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$, унаслідок якого кожна точка $X$ фігури $F$ переходить у точку $X'$ фігури $F'$, симетричну точці $X$ відносно точки $O$ (рис. 71). При цьому фігури $F$ і $F'$ називають ***симетричними відносно точки O.***

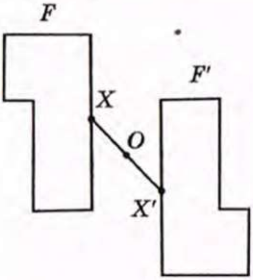


**Рис. 71.** Фігури $F$ і $F'$ симетричні відносно точки $O$

Симетрію відносно точки називають також ***центральною симетрією.***

Якщо перетворення симетрії відносно точки $O$ переводить фігуру $F$ у себе, то така фігура називається ***центрально-симетричною, а точка O — центром симетрії фігури F.***

Наприклад, точка перетину діагоналей паралелограма є центром симетрії паралелограма (рис. 72), оскільки центральна симетрія відносно цієї точки переводить паралелограм у себе (відповідна опорна задача розглядалася у 8 класі).

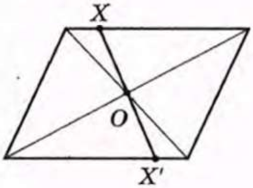


**Рис. 72.** Точка перетину діагоналей — центр симетрії паралелограма

**Теорема (основна властивість центральної симетрії)**

**Центральна симетрія є переміщенням.**

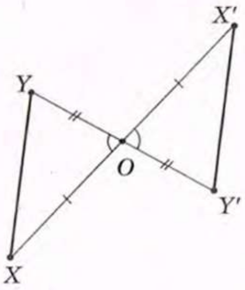



**Рис. 73.** До доведення основної властивості центральної симетрії

**Доведення**

□ Нехай унаслідок центральної симетрії відносно точки $O$ точки $X$ і $Y$ переходять у точки $X'$ і $Y'$ відповідно. Розглянемо загальний випадок (рис. 73), коли точки $O$, $X$ і $Y$ не лежать на одній прямій (інший випадок розгляньте самостійно). Трикутники $XOY$ і $X'OY'$ рівні за першою ознакою ($XO = X'O$ і $YO = Y'O$ за означенням центральної симетрії, $\angle XOY = \angle X'OY'$ як вертикальні), отже, $XY = X'Y'$. Таким чином, центральна симетрія зберігає відстань між точками, отже, є переміщенням. ■

Із доведеної теореми випливає, що центральна симетрія має всі властивості переміщення.

**Задача**

Доведіть, що центральна симетрія переводить пряму в паралельну пряму або в себе.

**Розв'язання**

Нехай дано точку $O$ і пряму $a$. Розглянемо спочатку випадок, коли точка $O$ не лежить на даній прямій (рис. 74, *а*). Оскільки центральна симетрія є переміщенням, то за основною властивістю переміщення центральна симетрія відносно точки $O$ переводить пряму $a$ в деяку пряму $a'$. Нехай точки $X'$ і $Y'$ прямої $a'$ — образи точок $X$ і $Y$ прямої $a$. Тоді $\triangle XOY = \triangle X'OY'$ за першою ознакою, звідки $\angle OXY = \angle OX'Y'$. Ці кути є внутрішніми різносторонніми при прямих $a$ і $a'$ та січній $XX'$. Отже, за ознакою паралельності прямих $a \parallel a'$.

У випадку, коли точка $O$ лежить на прямій $a$ (рис. 74, *б*), симетрія відносно цієї точки переводить довільну точку $X$ у точку $X'$ прямої $a$, а саму точку $O$ — в себе. Отже, пряма $a'$ — образ прямої $a$ — проходить через точки $O$ і $X'$. А оскільки через дві точки можна провести лише одну пряму, то пряма $a'$ збігається з прямою $a$. Таким чином, симетрія відносно точки $O$ переводить пряму $a$ в себе.

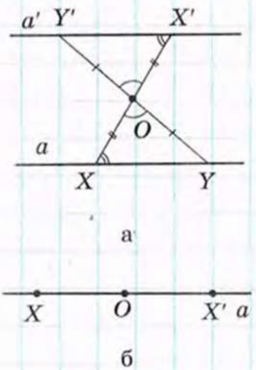



**Рис. 74**

Цікаво, що пряма є центрально-симетричною фігурою, причому центром симетрії прямої є будь-яка її точка (доведіть це самостійно). Як правило, геометричні фігури мають не більше одного центра симетрії.

## 12.2. Симетрія відносно прямої

Нехай на площині зафіксовано пряму $l$ і позначено довільну точку $X$ (рис. 75). Опустимо з точки $X$ перпендикуляр $XO$ до прямої $l$ і відкладемо на промені $XO$ відрізок $OX'$, який дорівнює $XO$. Ми отримали точку $X'$, симетричну точці $X$ відносно прямої $l$.

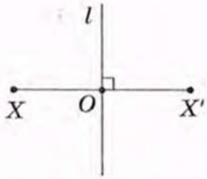



**Рис. 75.** Точки $X$ і $X'$ симетричні відносно прямої $l$

**Означення**

Точки $X$ і $X'$ називаються **симетричними відносно прямої** $l$, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка $XX'$ і проходить через його середину.

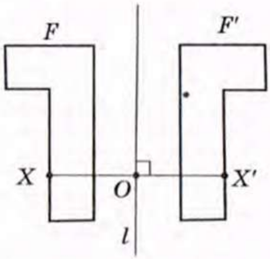



**Рис. 76.** Фігури $F$ і $F'$ симетричні відносно прямої $l$

Очевидно, що точкою, симетричною точці $X'$ відносно прямої $l$, є точка $X$. Точки прямої $l$ вважаються симетричними самі собі. Пряма $l$ є серединним перпендикуляром до відрізка $XX'$ і називається ***віссю симетрії.***

***Перетворенням симетрії (симетрією) відносно прямої*** $l$ називають таке перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$, унаслідок якого кожна точка $X$ фігури $F$ переходить у точку $X'$ фігури $F'$, симетричну $X$ відносно прямої $l$ (рис. 76). При цьому фігури $F$ і $F'$ називають ***симетричними відносно прямої*** $l$.

Симетрію відносно прямої називають також ***осьовою симетрією.***

Якщо перетворення симетрії відносно прямої $l$ переводить фігуру $F$ у себе, то така фігура називається ***симетричною відносно прямої*** $l$, а сама пряма $l$ — ***віссю симетрії фігури*** $F$.

Наприклад, віссю симетрії рівнобедреного трикутника $ABC$ є пряма, що проходить через вершину $B$ перпендикулярно до основи $AC$ (рис. 77), оскільки симетрія відносно цієї прямої переводить даний трикутник у себе (доведіть це самостійно).

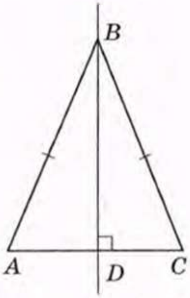



**Рис. 77.** Пряма $BD$ — вісь симетрії рівнобедреного трикутника $ABC$

**Теорема (основна властивість осьової симетрії)**

**Осьова симетрія є переміщенням.**

**Доведення**

□ Нехай унаслідок осьової симетрії відносно прямої $l$ точки $X$ і $Y$ переходять у точки $X'$ і $Y'$ відповідно. Введемо систему координат так, щоб пряма $l$ збіглася з віссю $Oy$ (рис. 78). Тоді внаслідок симетрії відносно цієї прямої точки $X(x_1;\ y_1)$ і $Y(x_2;\ y_2)$ перейдуть у точки $X'\ (-x_1;\ y_1)$ і $Y'(-x_2;\ y_2)$ відповідно. За формулою відстані між точками маємо:

$$XY = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ ,$$

$$X'Y' = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ ,$$

отже, $XY = X'Y'$.

Таким чином, осьова симетрія зберігає відстань між точками, тобто є переміщенням. Теорему доведено. ■

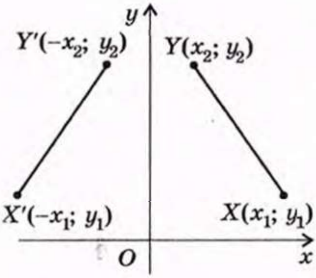



**Рис. 78.** До доведення основної властивості осьової симетрії

Із доведеної теореми випливає, що осьова симетрія має всі властивості переміщення.

### Задача

*Доведіть, що пряма, яка містить бісектрису кута, є віссю його симетрії.*

### Розв'язання

*Нехай пряма $l$ містить бісектрису даного кута $BAC$ (рис. 79). Позначимо на стороні $AB$ цього кута довільну точку $X$. Оскільки осьова симетрія є переміщенням, вона переводить промінь $AB$ у деякий промінь $AB'$, а точку $X$ — у точку $X'$ променя $AB'$. Нехай $O$ — точка перетину відрізка $XX'$ з прямою $l$. Прямокутні трикутники $AOX$ і $AOX'$ рівні за двома катетами, звідки $\angle OAX = \angle OAX'$. Але за аксіомою відкладання кутів кут $OAX'$ має збігатися з кутом $OAC$, отже, промінь $AB'$ збігатиметься з променем $AC$. Оскільки $X$ — довільна точка прямої $AB$, то під час симетрії відносно прямої $l$ промінь $AB$ переходить у промінь $AC$. Таким чином, пряма $l$ — вісь симетрії кута $BAC$.*

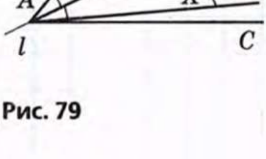



**Рис. 79**

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

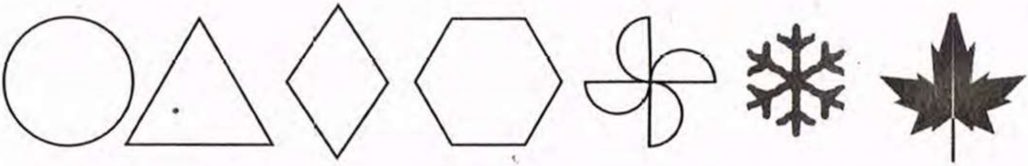
**406.** Симетрія відносно точки $O$ переводить точку $A$ в точку $B$. Де розміщена точка $O$?

**407.** Унаслідок симетрії відносно точки $O$ точки $A$ і $B$ переходять у точки $A'$ і $B'$ відповідно. Серед рівностей *а—г* виберіть рівність, яка не обов'язково справджується:

а) $AB = A'B'$; б) $AO = A'O$;
в) $AO = BO$; г) $BO = B'O$.

**408.** Які прямі під час центральної симетрії переходять самі в себе?

**409.** Які з фігур на рис. 80 мають центр симетрії? Де він розміщений?



а б в г д е є

Рис. 80

**410.** Симетрія відносно прямої $l$ переводить точку $A$ в точку $B$. Як розміщені прямі $l$ і $AB$?

**411.** Унаслідок симетрії відносно прямої $l$ відрізок $AB$, кінці якого не лежать на прямій $l$, переходить у відрізок $A'B'$. Серед тверджень *а—г* оберіть твердження, яке не обов'язково справджується:

а) $AB = A'B'$; б) $AA' \perp l$;
в) $AA' \parallel BB'$; г) $AB \parallel A'B'$.

**412.** Скільки осей симетрії має відрізок; пряма? Для кожної з цих фігур опишіть взаємне розміщення осей симетрії.

**413.** Які із фігур на рис. 80 мають осі симетрії? Скільки осей симетрії має кожна фігура? Як вони розміщені?

**414.** Наведіть приклад фігури, яка:

а) не має ані центра, ані осей симетрії;
б) має центр симетрії, але не має осей симетрії;
в) не має центра симетрії, але має вісь симетрії;
г) має центр симетрії і декілька (безліч) осей симетрії.

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**415.** Накресліть трикутник $ABC$. Побудуйте трикутник $AB'C'$, симетричний трикутнику $ABC$ відносно точки $A$. Визначте вид чотирикутника $CBC'B'$.

→ **416.** Накресліть квадрат $ABCD$. Побудуйте квадрат, симетричний даному квадрату відносно середини сторони $CD$. Скільки вершин даного квадрата є також вершинами його образу?

**417.** Накресліть прямокутник $ABCD$ і позначте центр його симетрії $O$. Укажіть фігуру, симетричну трикутнику $ABD$ відносно точки $O$.

→ **418.** Впишіть у коло рівносторонній трикутник. Побудуйте трикутник, симетричний даному відносно центра симетрії кола. Визначте вид многокутника, який утворюється при послідовному сполученні вершин побудованих трикутників.

**419.** Накресліть рівнобедрений трикутник $ABC$ з основою $AC$. Побудуйте трикутник $AB'C$, симетричний трикутнику $ABC$ відносно прямої $AC$. Знайдіть точку $O$, при симетрії відносно якої трикутник $ABC$ переходить у трикутник $AB'C$.

→ **420.** Накресліть гострий кут $ABC$. Побудуйте кут $ABC'$, симетричний куту $ABC$ відносно прямої $AB$. У якому відношенні промінь $AB$ ділить кут $C'AC$?

**421.** Накресліть прямокутник $ABCD$ і проведіть осі його симетрії. Сполучіть послідовно точки перетину цих осей зі сторонами прямокутника. Яку фігуру ви отримали? Чи є осі симетрії прямокутника осями симетрії отриманої фігури?

→ **422.** Накресліть правильний шестикутник $ABCDEF$ і проведіть усі осі його симетрії. Чи є серед них вісь симетрії трапеції $ABCD$?

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**423.** Знайдіть точку, симетричну:

а) точці (2; 9) відносно початку координат;

б) точці (2; –7) відносно точки (1; 1);

в) початку координат відносно точки перетину прямих $x = -2$ і $y = 3$.

**424.** Знайдіть точку, симетричну:

а) точці (2; 9) відносно точки (–1; 3);

б) точці ($a$; $b$) відносно початку координат.

**425.** Доведіть, що центр рівностороннього трикутника не є центром його симетрії. Чи може промінь мати центр симетрії? Відповідь обґрунтуйте.

**426.** Доведіть, що центр кола є центром його симетрії.

**427.** Знайдіть точку, симетричну:

а) точці (–3; 9) відносно осі ординат;

б) точці (–2; –5) відносно осі абсцис;

в) початку координат відносно прямої $x = 4$.

**428.** Знайдіть точку, симетричну точці ($a$; $b$) відносно:

а) осі абсцис;

б) осі ординат.

**429.** Складіть рівняння прямої, симетричної прямій $y = x$ відносно:

а) осі абсцис;

б) осі ординат;

в) початку координат.

**430.** Знайдіть у підручниках із різних навчальних дисциплін (або в мережі Інтернет) зображення предметів, що мають центр симетрії, вісь симетрії, декілька осей симетрії.

## Рівень Б

**431.** Коло задане рівнянням $(x-4)^2+(y-3)^2=25$. Складіть рівняння кола, симетричного даному колу відносно:

а) початку координат; б) точки (–1; 4).

**432.** Складіть рівняння прямої, симетричної:

а) прямій $y = 8$ відносно точки (1; 3);

б) прямій $y = -x + 1$ відносно початку координат.

**433.** Доведіть, що:

а) жоден трикутник не має центра симетрії;

б) трикутник, який має вісь симетрії, рівнобедрений.

**434.** Доведіть, що чотирикутник, який має центр симетрії, є паралелограмом.

**435.** Складіть рівняння:

а) кола, симетричного колу $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ відносно прямої $x = -6$;

б) прямої, симетричної прямій $y = -2$ відносно прямої $y = x$.

**436.** Складіть рівняння:

а) кола, симетричного колу $x^2 + y^2 = 4$ відносно прямої $y = 3$;

б) прямої, симетричної осі абсцис відносно прямої $y = x$.

**437.** Доведіть, що прямі, які містять діагоналі ромба, є осями його симетрії.

**438.** Доведіть, що прямі, які проходять через середини протилежних сторін прямокутника, є осями його симетрії.

## Рівень В

**439.** Доведіть, що жодна фігура не може мати рівно два центри симетрії.

**440.** Доведіть, що точка, симетрична точці $(a; b)$ відносно прямої $y = x$, має координати $(b; a)$.

**441.** Доведіть, що трапеція, яка має вісь симетрії, рівнобедрена. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.

**442.** Доведіть, що точки, симетричні ортоцентру гострокутного трикутника відносно його сторін, лежать на колі, описаному навколо трикутника.

**443.** Доведіть, що фігура, яка має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії, має центр симетрії.

# ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 13

### Теоретичний матеріал

- аксіоми відкладання відрізків і кутів; — 7 клас, § 2, 3
- ознаки паралелограма; — 8 клас, § 3
- центр правильного многокутника. — 9 клас, п. 6.1

### Задачі

**444.** Точка $O$ — центр правильного трикутника $ABC$. Доведіть рівність кутів $AOB$, $BOC$ і $AOC$.

**445.** Дві вершини прямокутника лежать на осі абсцис, третя вершина має координати $(-4; -4)$, а точка $(0; -2)$ — точка перетину діагоналей прямокутника. Знайдіть координати решти вершин.

# § 13. Поворот і паралельне перенесення

## 13.1. Поворот

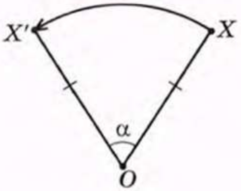



**Рис. 81.** Поворот точки $X$ навколо точки $O$ на кут $\alpha$ проти годинникової стрілки

Зафіксуємо на площині точку $O$ й оберемо довільну точку $X$ (рис. 81). Відкладемо від променя $OX$ у заданому напрямі кут із заданою градусною мірою $\alpha$ і позначимо на другій стороні кута точку $X'$ так, що $OX' = OX$. Такий перехід точки $X$ у точку $X'$ є ***поворотом*** навколо точки $O$ на кут $\alpha$.

**Означення**

**Поворотом** фігури $F$ навколо точки $O$ на кут $\alpha$ називається перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$, унаслідок якого кожна точка $X$ фігури $F$ переходить у точку $X'$ фігури $F'$ так, що $OX' = OX$ і $\angle XOX' = \alpha$.

Точку $O$ називають ***центром повороту***, а кут $\alpha$ — ***кутом повороту****. Окрім центра й кута, поворот задається також напрямом — за годинниковою стрілкою або проти годинникової стрілки.

Унаслідок повороту фігури $F$ навколо точки $O$ на кут $\alpha$ кожна точка $X$ даної фігури зміщується по дузі кола з центром $O$ і радіусом $OX$ (рис. 82). Очевидно, що внаслідок будь-якого повороту положення центра повороту не змінюється.

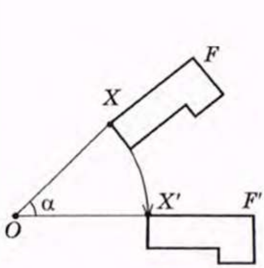



**Рис. 82.** Поворот фігури $F$ навколо точки $O$ на кут $\alpha$ за годинниковою стрілкою

**Теорема (основна властивість повороту)**

**Поворот є переміщенням.**

**Доведення**

□ Розглянемо випадок, коли кут повороту менше 180°. Нехай унаслідок повороту навколо точки $O$ на кут $\alpha$ точки $X$ і $Y$ переходять у точки $X'$ і $Y'$

* У шкільному курсі геометрії розглядатимуться кути повороту в межах від 0° до 360°.

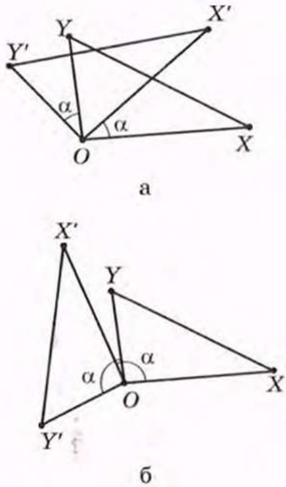



**Рис. 83.** До доведення основної властивості повороту

відповідно. Розглянемо загальний випадок (рис. 83), коли точки $O$, $X$ і $Y$ не лежать на одній прямій (інший випадок розгляньте самостійно).

Трикутники $XOY$ і $X'OY'$ рівні за першою ознакою: $OX = OX'$ і $OY = OY'$ за означенням повороту, $\angle XOY = \angle X'OY'$ (у випадку, поданому на рис. 83, кожен із цих кутів дорівнює сумі (рис. 83, *а*) або різниці (рис. 83, *б*) кута повороту $\alpha$ і кута $X'OY$). Із рівності трикутників випливає, що $XY = X'Y'$. Отже, поворот зберігає відстань між точками, тобто є переміщенням. Випадки, коли $180° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, розгляньте самостійно. ■

З перетворенням повороту також пов'язаний певний вид симетрії. Якщо внаслідок повороту навколо деякої точки $O$ на кут $\alpha$ ($0° < \alpha \leqslant 180°$) фігура $F$ переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має ***поворотну симетрію*** (або ***симетрію обертання***). Наприклад, поворотну симетрію має правильний трикутник: справді, він переходить у себе внаслідок повороту на кут 120° навколо точки $O$ — центра даного трикутника (рис. 84).

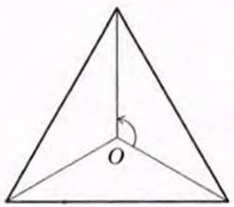



**Рис. 84.** Поворотна симетрія правильного трикутника

## 13.2. Співнапрямлені промені. Паралельне перенесення

Про потяги або автомобілі, які рухаються один за одним або паралельними шляхами, наприклад, з Харкова до Києва, кажуть, що вони йдуть в одному напрямі. Геометричний відповідник цієї побутової ситуації дає поняття співнапрямленості.

**Означення**

Два промені називаються **співнапрямленими** (або **однаково напрямленими**), якщо виконується одна з двох умов:
1) дані промені паралельні й лежать по один бік від прямої, що проходить через їх початкові точки;
2) дані промені лежать на одній прямій, причому один із них є частиною іншого.

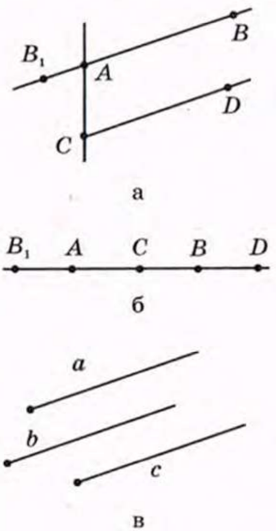



**Рис. 85.** Співнапрямлені і протилежно напрямлені промені

На рис. 85, *а* промені $AB$ і $CD$ паралельні і лежать по один бік від прямої $AC$; на рис. 85, *б* промінь $CD$ є частиною променя $AB$. В обох цих випадках промені $AB$ і $CD$ співнапрямлені. Зауважимо, що два промені $a$ і $b$, співнапрямлені з тим самим променем $c$, також співнапрямлені (рис. 85, *в*).

### Означення

Два промені називаються **протилежно напрямленими**, якщо один із них співнапрямлений з променем, доповняльним до іншого.

На рис. 85, *а*, *б* промені $AB_1$ і $CD$ є протилежно напрямленими.

Нехай на площині задано промінь $OA$, причому довжина відрізка $OA$ дорівнює $a$ (рис. 86). Виберемо довільну точку $X$ і побудуємо точку $X'$ так, щоб промені $XX'$ і $OA$ були співнапрямлені і відрізок $XX'$ дорівнював $a$. Таке перетворення точки $X$ у точку $X'$ є паралельним перенесенням в напрямі променя $OA$ на відстань $a$.

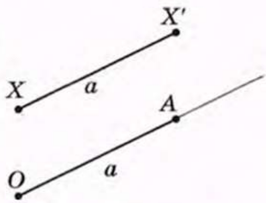



**Рис. 86.** Паралельне перенесення точки $X$ у напрямі променя $OA$ на відстань $a$

### Означення

**Паралельним перенесенням** фігури $F$ у напрямі променя $OA$ на відстань $a$ називається перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$, унаслідок якого кожна точка $X$ фігури $F$ переходить у точку $X'$ фігури $F'$ так, що промені $XX'$ і $OA$ співнапрямлені і $XX' = a$.

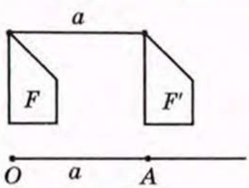



**Рис. 87.** Паралельне перенесення фігури $F$ в напрямі променя $OA$ на відстань $a$

На рис. 87 фігура $F'$ отримана з фігури $F$ унаслідок паралельного перенесення в напрямі променя $OA$ на відстань $a$.

Для будь-яких двох точок $A$ і $B$ існує паралельне перенесення, яке переводить точку $A$ в точку $B$, і тільки одне. Справді, за аксіомою відкладання відрізків на промені $AB$ від точки $A$ можна відкласти єдиний відрізок завдовжки $AB$, тобто шукане паралельне перенесення задається променем $AB$ і довжиною відрізка $AB$.

**Теорема (основна властивість паралельного перенесення)**

**Паралельне перенесення є переміщенням.**

**Доведення**

□ Нехай унаслідок паралельного перенесення в напрямі променя $OA$ на відстань $a$ точки $X$ і $Y$ переходять у точки $X'$ і $Y'$ відповідно. Розглянемо загальний випадок (рис. 88), коли відрізок $XY$ не паралельний променю $OA$ і не лежить на ньому (інші випадки розгляньте самостійно).

За означенням паралельного перенесення $XX' \parallel YY'$, $XX' = YY' = a$. Таким чином, чотирикутник $XX'Y'Y$, дві сторони якого паралельні й рівні, — паралелограм, звідки $XY = X'Y'$. Отже, паралельне перенесення зберігає відстань між точками, тобто є переміщенням. Теорему доведено. ■

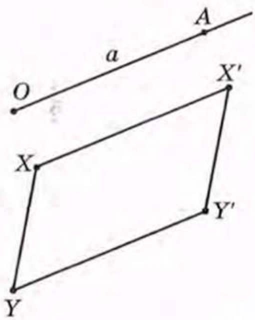



**Рис. 88.** До доведення основної властивості паралельного перенесення

Якщо внаслідок деякого паралельного перенесення фігура $F$ переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має ***переносну симетрію***. Серед фігур, які вивчаються в шкільному курсі планіметрії, таку властивість має лише пряма. Але приклади переносної симетрії можна знайти в інших науках, мистецтві і повсякденному житті. На рис. 89 подано ескіз графіка функції $y = \sin x$, яка вивчатиметься в курсі алгебри; цей графік має переносну симетрію в напрямі осі абсцис.

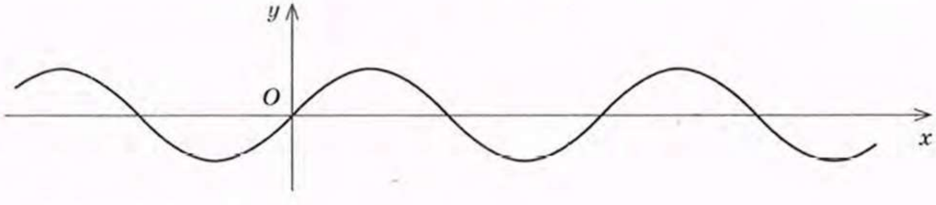



**Рис. 89.** Ескіз графіка функції $y = \sin x$

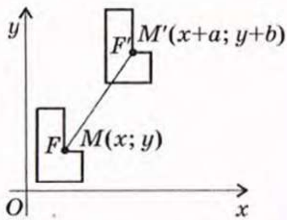



**Рис. 90.** Паралельне перенесення в прямокутній системі координат

**У прямокутній системі координат паралельне перенесення, яке переводить точку $(x;\, y)$ у точку $(x';\, y')$, задається формулами**

$$x' = x + a,\; y' = y + b,$$

де $a$ і $b$ — деякі числа, одні й ті самі для всіх точок площини (рис. 90). Обґрунтування цього факту подається в Додатку 2.

**Задача**

Унаслідок паралельного перенесення точка $(-2;\, 1)$ переходить у точку $(3;\, -6)$. У яку точку внаслідок такого перенесення переходить початок координат?

**Розв'язання**

Нехай паралельне перенесення задано формулами $x' = x + a$, $y' = y + b$. Оскільки точка $(-2;\, 1)$ переходить у точку $(3;\, -6)$, то $3 = -2 + a$, $-6 = 1 + b$. Звідси $a = 5$, $b = -7$, тобто дане паралельне перенесення має формули $x' = x + 5$, $y' = y - 7$. Підставивши в ці формули координати початку координат $x = 0$, $y = 0$, маємо $x' = 0 + 5 = 5$, $y' = 0 - 7 = -7$. Отже, початок координат переходить у точку $(5;\, -7)$.

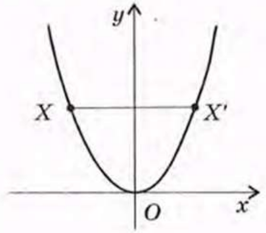
**Відповідь:** $(5;\, -7)$.

**Рис. 91.** Маріїнський палац у Києві

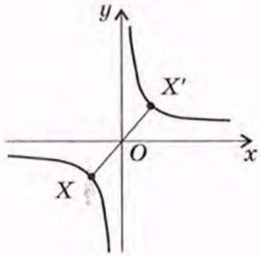
**Рис. 92.** Софійський собор у Києві

## 13.3. Симетрія в природі, науці й мистецтві

У процесі вивчення многокутників ми щоразу виділяли з певного класу фігур ті, що мають елементи симетрії: серед трикутників — рівнобедрені й рівносторонні, серед паралелограмів — прямокутники, ромби й квадрати, серед $n$-кутників — правильні тощо. І це не випадково, адже світ, який нас оточує, проникнений симетрією: симетричними є квіти і листя, тіла тварин і комах, сніжинки й кристали природних мінералів. Те, що створено людиною, також здебільшого симетричне — архітектурні споруди (рис. 91, 92), меблі, посуд, автомобілі,

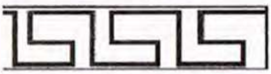



а

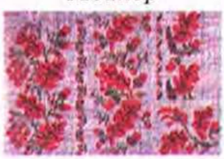



б

**Рис. 93.** СиметріяСиметрія графіків елементарних функцій



*Меандр*



*Вишиванка*

*Буковинський рушник*

*Татарський орнамент*

**Рис. 94.** Орнаменти

літаки тощо. Ми знаходимо симетрію в музичних і літературних творах, спортивних іграх. Німецький математик Г. Вейль (1885—1955) стверджував, що «краса нерозривно пов'язана з симетрією».

Симетрія проявляється в різних розділах математики, зокрема в алгебрі. Наприклад, многочлени виду $2x^2 + 5xy + 2y^2$, які не змінюють значення від переміни місць змінних $x$ і $y$, називають симетричними — для таких многочленів існують спеціальні способи розкладання на множники. Наочним прикладом симетрії в алгебрі є графіки елементарних функцій: так, парабола $y = x^2$ симетрична відносно осі ординат (рис. 93, *а*), а гіпербола $y = \dfrac{1}{x}$ — відносно початку координат (рис. 93, *б*).

Біологи дійшли висновку, що будь-який живий організм «спроектовано» за чіткою геометричною схемою, і виділяють окремі види просторової симетрії, характерні для рослин і тварин.

З курсу хімії вам відомо, що чимало природних речовин складається з кристалів, які являють собою многогранники (з ними ви докладніше познайомитесь у розділі VI цього підручника і на уроках геометрії в старших класах). Хіміки встановили, що існує 32 види симетрії кристалів.

У царині мистецтв найбільш наочно симетрія проявляється в архітектурі. За переконанням давньогрецьких архітекторів, симетрія уособлює закономірність, доцільність і гармонію. Фасади багатьох історичних і сучасних будівель мають елементи симетрії. Мотиви симетрії переважали в образотворчому мистецтві Давнього Єгипту, Греції і Риму. На особливу увагу заслуговує використання симетрії в декоративно-прикладному мистецтві: структура і розміщення орнаментів на українських рушниках і вишиванках — яскраве свідчення проникнення симетрії в народну творчість (рис. 94).

Поетичні рими та розміри — типові прояви симетрії в літературі. Увагу мовознавців здавна привертають паліндроми («перевертні») — «симетричні» слова, фрази або вірші, що однаково читаються й зліва направо й справа наліво: «око», «зараз», «радар»; найвідоміший з українських паліндромів «І що сало — ласощі» придумав поет О. Ірванець.

Невичерпні можливості симетрії і сьогодні приваблюють учених і митців, надихаючи їх до нових злетів творчої думки.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**446.** Чи існує поворот, унаслідок якого:

а) сторона прямокутника, що не є квадратом, переходить у сусідню сторону;

б) одна діагональ прямокутника переходить в іншу;

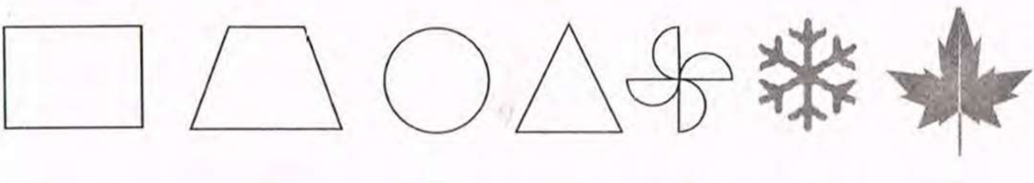
в) один із внутрішніх різносторонніх кутів при паралельних прямих і січній переходить в інший;

г) один із відповідних кутів при паралельних прямих і січній переходить в інший?

**447.** Точка $O$ лежить на прямій $l$. На який кут треба повернути пряму $l$ навколо точки $O$, щоб отримати пряму, яка збігається з $l$?

**448.** Точка $O$ не лежить на прямій $l$. На який кут треба повернути пряму $l$ навколо точки $O$, щоб отримати пряму, паралельну $l$?

**449.** Які із фігур на рис. 95 мають симетрію обертання?



а б в г д е є

**Рис. 95**

**450.** Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці $O$ (рис. 96). Назвіть промінь:

а) співнапрямлений з променем $AB$;
б) протилежно напрямлений з променем $CB$;
в) співнапрямлений з променем $AO$;
г) протилежно напрямлений з променем $OD$.

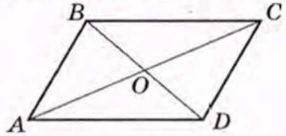


**Рис. 96**

**451.** Промені $AB$ і $CD$ співнапрямлені. Чи співнапрямлені промені $AB$ і $EF$, якщо:

а) промені $CD$ і $EF$ співнапрямлені;
б) промені $CD$ і $EF$ протилежно напрямлені?

**452.** Чи існує паралельне перенесення, внаслідок якого:

а) одна сторона прямокутника переходить в іншу;
б) одна діагональ прямокутника переходить в іншу;
в) один із внутрішніх різносторонніх кутів при паралельних прямих і січній переходить в інший;
г) один із відповідних кутів при паралельних прямих і січній переходить в інший?

**453.** Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці $O$ (рис. 96). Визначте образ точки $A$ при паралельному перенесенні, внаслідок якого:

а) точка $D$ переходить у точку $C$;
б) точка $O$ переходить у точку $C$.

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**454.** Накресліть відрізок $AB$. Позначте на прямій $AB$ точку $O$, що не лежить на відрізку $AB$, і точку $C$ — середину відрізка $AB$. Побудуйте фігуру, в яку переходить відрізок $AB$ внаслідок повороту:

а) на $60°$ проти годинникової стрілки навколо точки $O$;
б) на $90°$ за годинниковою стрілкою навколо точки $C$.

**455.** Побудуйте фігуру, в яку переходить рівносторонній трикутник $ABC$ внаслідок повороту:

а) на $60°$ проти годинникової стрілки навколо точки $C$;
б) на $180°$ навколо точки $B$.

**456.** Побудуйте фігуру, в яку переходить квадрат $ABCD$ внаслідок повороту:

а) на $90^\circ$ за годинниковою стрілкою навколо точки $D$;

б) на $90^\circ$ проти годинникової стрілки навколо точки перетину діагоналей.

**457.** Накресліть гострий кут $ABC$. Побудуйте кут, у який переходить даний кут внаслідок паралельного перенесення в напрямі променя $BC$ на 2 см.

**458.** Побудуйте паралелограм $ABCD$, у якому $AB = 2$ см, $BC = 4$ см. Побудуйте фігуру, в яку переходить цей паралелограм внаслідок паралельного перенесення:

а) в напрямі променя $DC$ на 2 см;

б) в напрямі променя $AD$ на 2 см.

**459.** Побудуйте фігуру, в яку переходить рівносторонній трикутник $ABC$ внаслідок паралельного перенесення в напрямі променя $CB$ на відстань, що дорівнює третині периметра трикутника.

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**460.** Унаслідок деякого повороту даний прямий кут переходить у кут, суміжний з даним. Визначте центр і кут повороту.

**461.** Визначте, чи мають поворотну симетрію відрізок, квадрат, правильний шестикутник. У разі ствердної відповіді визначте центр і найменший кут обертання, внаслідок якого дана фігура переходить у себе.

**462.** Точка $O$ лежить на прямій $l$. Унаслідок повороту навколо точки $O$ дана пряма переходить у себе. Визначте кут повороту.

**463.** Паралельне перенесення задано формулами $x' = x - 1$, $y' = y + 2$. Знайдіть координати:

а) точки, в яку переходить точка $(-3; -1)$;

б) точки, образом якої є точка $(4; -2)$.

**464.** Паралельне перенесення задано формулами $x' = x + 4$, $y' = y$. Визначте напрям і відстань, якими задається це перенесення.

**465.** Паралельне перенесення задано формулами $x' = x - 2$, $y' = y + 7$. Знайдіть координати:

а) точки, в яку переходить центр кола $(x + 1)^2 + y^2 = 9$;

б) точки, образом якої є точка перетину прямих $y = 2x$ і $x = 3$.

**466.** Чи існує паралельне перенесення, внаслідок якого:

а) точка (–2; 3) переходить у точку (1; –1), а точка (0; –1) — у точку (3; 3);

б) точка (1; –4) переходить у початок координат, а початок координат — у точку (–1; 4)?

→ **467.** Задайте формулами паралельне перенесення, внаслідок якого точка (8; 3) переходить у середину відрізка з кінцями (–2; 0) і (0; 16).

## Рівень Б

**468.** Доведіть, що поворот навколо точки $O$ на 180° є центральною симетрією відносно точки $O$.

→ **469.** Унаслідок повороту навколо точки $O$ на кут $\alpha$ $(0° < \alpha < 180°)$ точка $A$ переходить у точку $A'$. Доведіть, що точки $A$ і $A'$ симетричні відносно прямої, що містить бісектрису кута $AOA'$.

**470.** Доведіть, що внаслідок повороту навколо центра описаного кола на кут $\frac{360°}{n}$ правильний $n$-кутник переходить у себе.

**471.** Кінцями діаметра кола є точки (2; 1) і (–4; 9). Складіть формули паралельного перенесення, внаслідок якого дане коло переходить у коло $(x-3)^2+y^2=25$.

→ **472.** Унаслідок паралельного перенесення точка кола $x^2+y^2=36$, яка має найменшу ординату, переходить у центр цього кола. Складіть рівняння образу даного кола.

**473.** Вершини трикутника $ABC$ мають координати $A(-3; -3)$, $B(-2; -1)$, $C(0; -2)$. Унаслідок паралельного перенесення точка $B$ переходить у точку $B'$, симетричну точці $A$ відносно початку координат. У які точки внаслідок такого перенесення переходять вершини $A$ і $C$?

## Рівень В

**474.** Фігура $F$ має *симетрію обертання порядку* $n$ ($n \in N$, $n \geqslant 2$), якщо вона переходить у себе внаслідок повороту на кут $\frac{360°}{n}$.

а) Доведіть, що правильний $n$-кутник має симетрію обертання порядку $n$.

б) Визначте порядок симетрії обертання паралелограма навколо точки перетину діагоналей.

**475.** Дано рівні відрізки $AB$ і $A'B'$ (рис. 97). Побудуйте центр повороту, внаслідок якого один із цих відрізків переходить у інший.

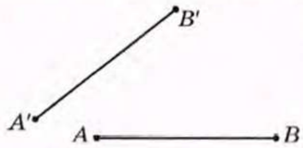


Рис. 97

**476.** Два гравці по черзі кладуть на круглий стіл п'ятикопієчні монети так, щоб вони не накладалися одна на одну. Виграє той гравець, який покладе монету останнім. Як має діяти перший гравець, щоб гарантовано виграти?

**477.** Є дві коробки цукерок, причому кількість цукерок у коробках однакова. Кожен із двох гравців за один хід має право взяти довільну кількість цукерок, але лише з однієї коробки. Виграє той, хто візьме останню цукерку. Як має діяти другий гравець, щоб гарантовано виграти?

**478.** Прямі $a$ і $b$ перетинаються в точці $O$ під кутом $\alpha$. Доведіть, що послідовні симетрії відносно цих прямих дають поворот навколо точки $O$ на кут $2\alpha$.

# ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 14

## Теоретичний матеріал

- подібні трикутники; 8 клас, § 10—12
- площі подібних трикутників. 8 клас, п. 18.1

## Задачі

**479.** Точка $E$ — середина сторони $BC$ паралелограма $ABCD$. Доведіть, що пряма $AE$ ділить діагональ $BD$ у відношенні $1 : 2$.

**480.** Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть площу трикутника, подібного даному, якщо його найменша сторона дорівнює 39 см.

# § 14. Подібність фігур

## 14.1. Перетворення подібності. Гомотетія

Чотири види геометричних перетворень, які розглядалися в попередніх параграфах, були різновидами переміщення, тобто зберігали відстані між точками. Розглянемо тепер геометричне перетворення, яке може змінювати відстані між точками, — перетворення подібності. Поняття подібності для трикутників вже знайоме вам з курсу 8 класу. Введемо означення подібності для довільних фігур.

### Означення

**Перетворенням подібності** (**подібністю**) називається таке перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$, унаслідок якого відстань між точками змінюється в тому самому відношенні $k$ ($k > 0$).

Це означає, що коли довільні точки $X$ і $Y$ фігури $F$ внаслідок перетворення подібності переходять у точки $X'$ і $Y'$ фігури $F'$, то $X'Y' = kXY$ (рис. 98).


**Рис. 98.** Перетворення подібності переводить фігуру $F$ у фігуру $F'$

Число $k > 0$ називають **коефіцієнтом подібності**. Очевидно, що при $k = 1$ маємо $X'Y' = XY$, тобто відстані між точками фігури зберігаються. Це означає, що ***переміщення є окремим випадком подібності при*** $k = 1$.

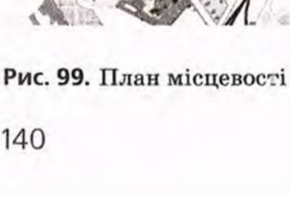


**Рис. 99.** План місцевості

Наочне уявлення про перетворення подібності дає зображення ділянки місцевості на плані, виконане в масштабі (рис. 99). Масштаб у цьому випадку є коефіцієнтом подібності і вказує, у скільки разів реальні відстані між об'єктами відрізняються від відстаней на плані.

Як і у випадку переміщення, неважко довести, що внаслідок перетворення подібності точки, які лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і порядок їх взаємного розміщення

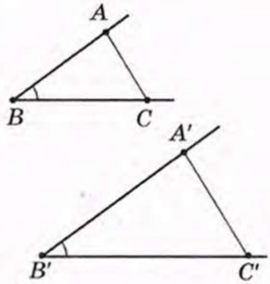



**Рис. 100.** Перетворення подібності зберігає кути між променями

зберігається. Із цього випливає, що ***перетворення подібності переводить прямі в прямі, промені — в промені, відрізки — у відрізки.***

Так само, як і переміщення, ***перетворення подібності зберігає кути між променями.*** Справді, якщо внаслідок перетворення подібності кут $ABC$ переходить у кут $A'B'C'$ (рис. 100), то $A'B' = kAB$, $B'C' = kBC$, $A'C' = kAC$. Отже, трикутники $ABC$ і $A'B'C'$ подібні за трьома пропорційними сторонами, звідки $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

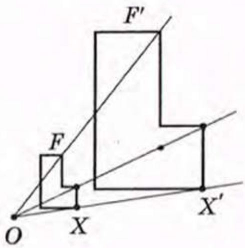



**Рис. 101.** Гомотетія з центром $O$

Нехай на площині зафіксовано точку $O$, точка $X$ — довільна точка фігури $F$ (рис. 101). Відкладемо на промені $OX$ відрізок $OX'$, що дорівнює $kOX$ ($k$ — фіксоване додатне число). Провівши такі побудови для кожної точки фігури $F$, дістанемо фігуру $F'$, яка є образом фігури $F$, отриманим унаслідок перетворення, що називається гомотетією.

## Означення

**Гомотетією** з центром $O$ називається таке перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$, унаслідок якого кожна точка $X$ фігури $F$ переходить у точку $X'$ фігури $F'$ так, що точка $X'$ лежить на промені $OX$ і $OX' = kOX$ ($k$ — фіксоване додатне* число).

Число $k$ називають ***коефіцієнтом гомотетії***, а самі фігури $F$ і $F'$ — ***гомотетичними.***

## Теорема (основна властивість гомотетії)

**Гомотетія є перетворенням подібності.**

## Доведення

☐ Розглянемо випадок, коли точки $O$, $X$ і $Y$ не лежать на одній прямій (інший випадок розгляньте самостійно).

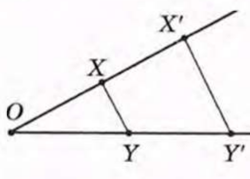



**Рис. 102.** До доведення основної властивості гомотетії

Нехай унаслідок гомотетії з центром $O$ точки $X$ і $Y$ переходять у точки $X'$ і $Y'$ відповідно (рис. 102). За означенням гомотетії $OX' = kOX$,

* Дане означення можна розширити, ввівши до розгляду від'ємні значення $k$. Але в шкільному курсі розглядатимемо лише гомотетію з додатним коефіцієнтом.

$OY' = kOY$. Отже, трикутники $OXY$ і $OX'Y'$ подібні за двома пропорційними сторонами й кутом між ними. Звідси випливає, що $X'Y' = kXY$, тобто гомотетія є перетворенням подібності. ■

## 14.2. Властивості подібних фігур

**Означення**

Дві фігури називаються **подібними**, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.

В силу властивостей перетворення подібності це означення узгоджується з означенням подібних трикутників, даним у 8 класі. Подібність довільних фігур $F$ і $F'$ позначається так само, як і подібність трикутників: $F \backsim F'$.

Сформулюємо декілька властивостей подібних фігур, які безпосередньо випливають з означення і властивостей перетворення подібності.

**1) Будь-яка фігура подібна самій собі: $F \backsim F$.**

Справді, в цьому випадку коефіцієнт подібності можна вважати таким, що дорівнює 1.

**2) Якщо $F_1 \backsim F_2$, то $F_2 \backsim F_1$.**

Справді, якщо $F_1 \backsim F_2$ з коефіцієнтом $k$, то $X_2Y_2 = kX_1Y_1$, де $X_1$, $Y_1$ — точки фігури $F_1$, $X_2$, $Y_2$ — відповідні точки фігури $F_2$. Тоді $X_1Y_1 = \frac{1}{k}X_2Y_2$, тобто $F_2 \backsim F_1$ з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$.

**3) Якщо $F_1 \backsim F_2$, а $F_2 \backsim F_3$, то $F_1 \backsim F_3$.**

Справді, нехай $X_1$, $Y_1$ — точки фігури $F_1$. Перетворення подібності з коефіцієнтом $k$, яке переводить фігуру $F_1$ у фігуру $F_2$, переводить ці точки в точки $X_2$, $Y_2$ фігури $F_2$, причому $X_2Y_2 = kX_1Y_1$. Аналогічно, якщо $m$ — коефіцієнт подібності, яка переводить фігуру $F_2$ у фігуру $F_3$, то $X_3Y_3 = mX_2Y_2$, де $X_3$, $Y_3$ — відповідні точки фігури $F_3$. Таким чином, $X_3Y_3 = mX_2Y_2 = mkX_1Y_1$, тобто $F_1 \backsim F_3$ з коефіцієнтом $km$.

**4) Відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності: якщо $F \backsim F'$ з коефіцієнтом $k$, то $\frac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.**

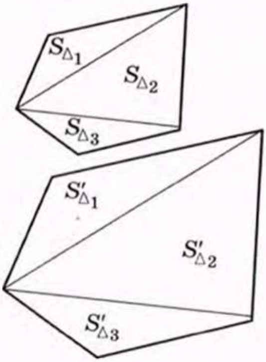



Рис. 103

Для трикутників таке твердження було доведене у 8 класі. Якщо $F$ і $F'$ — опуклі $n$-кутники*, то, провівши в кожному з них діагоналі з відповідних вершин (рис. 103), дістанемо $n-2$ пари подібних трикутників (обґрунтуйте це самостійно). Тоді

$$S'_F = S'_{\triangle_1} + S'_{\triangle_2} + \ldots + S'_{\triangle_{n-2}} = k^2 S_{\triangle_1} + k^2 S_{\triangle_2} + \ldots + k^2 S_{\triangle_{n-2}} =$$
$$= k^2\left(S_{\triangle_1} + S_{\triangle_2} + \ldots + S_{\triangle_{n-2}}\right) = k^2 S_F,$$

тобто $\dfrac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.

### Задача

Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють 8 см і 20 см, а бічна сторона 10 см. Знайдіть площу трапеції, яка подібна до даної і має висоту 12 см.

### Розв'язання

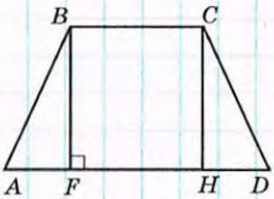



Рис. 104

Нехай у трапеції $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AB = CD = 10$ см, $AD = 20$ см, $BC = 8$ см (рис. 104). Проведемо висоти $BF$ і $CH$. Оскільки $\triangle ABF = \triangle DCH$ за гіпотенузою та гострим кутом, то $AF = DH = (20-8):2 = 6$ (см). Із прямокутного трикутника $ABF$ за теоремою Піфагора $BF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см). Нехай $A'B'C'D'$ — трапеція, подібна даній. Відрізок $B'F'$ — образ висоти $BF$ — є висотою трапеції $A'B'C'D'$, отже, $B'F' = 12$ см. Оскільки $B'F' = kBF$, то $k = \dfrac{B'F'}{BF}$, тобто $k = \dfrac{12}{8} = 1{,}5$.

Знайдемо площу трапеції $ABCD$: $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BF$, $S_{ABCD} = \dfrac{20+8}{2} \cdot 8 = 112$ (см²). За властивістю площ подібних фігур $S_{A'B'C'D'} = k^2 S_{ABCD}$, $S_{A'B'C'D'} = (1{,}5)^2 \cdot 112 = 252$ (см²).

**Відповідь**: 252 см².

* У випадку довільних фігур доведення виходить за межі шкільного курсу.

## 14.3*. Властивості відношень

Поняття подібності, паралельності, співнапрямленості тощо дозволяють встановити відповідності між певними об'єктами (геометричними фігурами). Такі відповідності називають ***відношеннями*** (точніше, бінарними відношеннями).

Відношення зустрічаються не тільки в геометрії, але в багатьох інших науках і в повсякденному житті. Наприклад, між числами можна встановити відношення «більше», «менше», «дорівнює», між іменниками української мови — «мати однакові закінчення», між людьми — «бути родичем» тощо.

Відношення, як і геометричні фігури, мають певні властивості. Розглянемо деякі з цих властивостей на прикладах.

**Рефлексивність** — від латинського «рефлексіо» — відображення

1) ***Рефлексивність.*** Така властивість означає, що об'єкт перебуває в даному відношенні з самим собою: $F \backsim F$, тобто будь-яка фігура подібна самій собі.

Рефлексивними також є відношення рівності геометричних фігур (будь-яка фігура дорівнює самій собі), подільності натуральних чисел (будь-яке натуральне число ділиться на себе). Не є рефлексивним відношення паралельності прямих (пряма не паралельна самій собі).

2) ***Симетричність.*** Ця властивість означає, що коли певний об'єкт перебуває в даному відношенні з другим об'єктом, то другий об'єкт перебуває в тому самому відношенні з першим: якщо $F_1 \backsim F_2$, то $F_2 \backsim F_1$.

Симетричними є рівність чисел (якщо $a = b$, то $b = a$) і родинні відносини між людьми (якщо А — родич В, то В — родич А). Не симетричне відношення «більше» для чисел (твердження «якщо $a > b$, то $b > a$» хибне для будь-яких $a$ і $b$).

**Транзитивність** — від латинського «транзитус» — перехід

3) ***Транзитивність.*** Цю властивість можна описати так: якщо у даному відношенні перебувають об'єкти 1 і 2, а також об'єкти 2 і 3, то об'єкти 1 і 3 також перебувають у цьому відношенні; наприклад, якщо $F_1 \backsim F_2$, а $F_2 \backsim F_3$, то $F_1 \backsim F_3$.

Транзитивною є паралельність прямих (відому теорему «якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$» часто називають властивістю транзитивності паралельних прямих). А ось відношення перпендикулярності прямих не транзитивне: твердження «якщо $a \perp b$ і $b \perp c$, то $a \perp c$» хибне.

Приклади рефлексивних, симетричних і транзитивних відношень з інших наук спробуйте знайти самостійно.

Отже, відношення та їх властивості, що вивчаються в геометрії, мають досить широке узагальнення, а вміння знаходити спільні риси між поняттями і міркуваннями в різних галузях людської діяльності допомагає краще розумітися на кожній із них.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**481.** Чи правильно, що:

а) будь-які дві гомотетичні фігури подібні;

б) будь-які дві подібні фігури гомотетичні?

**482.** Чи можна вважати рівні фігури подібними? А навпаки?

**483.** На рис. 105 відрізок $DE$ — середня лінія трикутника $ABC$. Назвіть гомотетичні відрізки на цьому рисунку. Укажіть центр і коефіцієнт гомотетії.

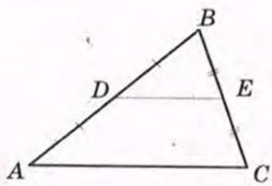



Рис. 105

**484.** Чи подібні:

а) паралелограм із кутом 40° і паралелограм із кутом 135°;

б) ромб із кутом 120° і ромб з діагоналлю, що дорівнює стороні;

в) будь-які два квадрати?

**485.** Площі двох подібних чотирикутників дорівнюють 2 см² і 18 см². Чому дорівнює коефіцієнт подібності?

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**486.** Накресліть правильний трикутник $ABC$ з центром $O$. Побудуйте трикутник, у який переходить трикутник $ABC$ внаслідок гомотетії:

а) з центром $A$ і коефіцієнтом 3;

б) з центром $O$ і коефіцієнтом 2.

**487.** Накресліть квадрат і здійсніть його гомотетію:

а) з центром в одній із вершин і коефіцієнтом 0,5;

б) з центром у точці перетину діагоналей і коефіцієнтом 3.

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**488.** Унаслідок гомотетії з центром $O$ і коефіцієнтом 4 точка $A$ переходить в точку $A_1$. Знайдіть довжину відрізка:

а) $OA_1$, якщо $OA = 3$ см;

б) $AA_1$, якщо $OA_1 = 24$ см.

**489.** Унаслідок гомотетії з центром $A$ трикутник $ABC$ переходить у трикутник $AB_1C_1$. Знайдіть коефіцієнт гомотетії, якщо $AB = 8$ см, $AB_1 = 2$ см.

**490.** Опуклі многокутники з площами $S_1$ і $S_2$ подібні, причому сторона першого многокутника в $k$ разів більша, ніж сторона другого. Знайдіть:

а) $k$, якщо $S_1 = 75$ см$^2$, $S_2 = 3$ см$^2$;

б) $S_1$, якщо $S_2 = 4$ см$^2$, $k = 2$.

**491.** Сторони двох квадратів відносяться як $3 : 2$. Знайдіть площу більшого квадрата, якщо площа меншого дорівнює 8 см$^2$.

**492.** На мапі, зробленій у масштабі $1 : 400$, площа земельної ділянки складає 20 см$^2$. Яку площу має ділянка на місцевості?

**493.** Під будівництво відведено ділянку площею 40 а. Знайдіть площу цієї ділянки на плані в масштабі $1 : 1000$.

### Рівень Б

**494.** Дано точки $A$ і $B$. Побудуйте центр гомотетії, внаслідок якої точка $A$ переходить у точку $B$, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює 3.

**495.** Побудуйте центр гомотетії, внаслідок якої одна з основ трапеції переходить в іншу.

**496.** Доведіть, що будь-які два правильні $n$-кутники подібні.

**497.** Доведіть, що фігура, подібна колу, є колом.

**498.** Унаслідок гомотетії з центром $(2; -1)$ точка $A(8; 7)$ переходить у точку $A'$. Знайдіть коефіцієнт гомотетії, якщо:

а) $A'(5; 3)$;

б) $A'(14; 15)$.

**499.** Унаслідок гомотетії з центром у початку координат і коефіцієнтом $k$ точка $A$ переходить у точку $A'$. Знайдіть координати:

а) точки $A$, якщо $A'(-3;\ 15)$, $k=3$;

б) точки $A'$, якщо $A(2;\ 8)$, $k=0{,}5$.

**500.** Сторона і діагональ прямокутника дорівнюють відповідно 5 см і 13 см. Знайдіть площу подібного йому прямокутника, периметр якого дорівнює 170 см.

**501.** Знайдіть площу ромба з периметром 20 см, якщо він подібний ромбу з діагоналями 30 см і 40 см.

**502.** Площа правильного шестикутника, вписаного в коло, дорівнює 36 см$^2$. Знайдіть площу правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

**503.** Доведіть, що площа правильного трикутника, описаного навколо кола, вчетверо більша, ніж площа правильного трикутника, вписаного в те саме коло.

## Рівень В

**504.** Дано дві подібні фігури. Доведіть, що одна з них може бути перетворена в другу за допомогою гомотетії і переміщення.

**505.** Пряма ділить паралелограм на дві рівні частини, подібні даному паралелограму. Знайдіть відношення його сторін.

**506.** Установіть і доведіть ознаки подібності паралелограмів, прямокутників, ромбів, рівнобедрених трапецій. Результати узагальніть у вигляді дослідження.

## ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 15

### Теоретичний матеріал

- види переміщень;
- метод подібності.

9 клас, § 12, 13

8 клас, п. 14.3

### Задачі

**507.** Два рівні кола мають спільну хорду $AB$. Доведіть, що дані кола симетричні відносно прямої $AB$.

**508.** Побудуйте трикутник за двома кутами і найбільшою висотою.

# § 15*. Метод геометричних перетворень

## 15.1. Розв'язування задач методом геометричних перетворень. Метод симетрії

Суть методу геометричних перетворень полягає в розгляді поряд з даними фігурами їхніх образів, отриманих за допомогою певного перетворення.

Залежно від того, яке перетворення застосовується, розрізняють метод симетрії, повороту, паралельного перенесення і подібності (для трикутників він розглядався у 8 класі).

***Метод симетрії*** передбачає заміну даної в умові фігури або її елементів симетричними їм відносно деякої точки або прямої.

**Задача**

У прямокутному трикутнику медіана, проведена до меншого катета, дорівнює $m$ і утворює з більшим катетом кут 15°. Знайдіть площу трикутника.

**Розв'язання**

Нехай у трикутнику $ABC$ $\angle B = 90°$, $BC < AB$, $AM = m$ — медіана (рис. 106). Побудуємо точку $M_1$, симетричну точці $M$ відносно прямої $AB$. Тоді трикутники $MAC$ і $M_1AB$ рівновеликі, оскільки мають спільну висоту $AB$, а $M_1B = BM = MC$ за побудовою. Отже,

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{MAC} = S_{ABM} + S_{M_1AB} = S_{M_1AM}.$$

За побудовою трикутник $M_1AM$ рівнобедрений з бічною стороною $m$ і кутом між бічними сторонами 30°. Таким чином,

$$S_{M_1AM} = \frac{1}{2}m^2 \cdot \sin 30° = \frac{m^2}{4}.$$

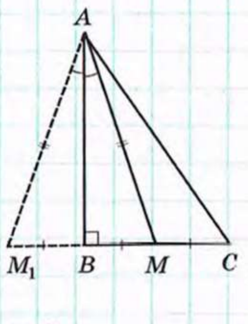


Рис. 106

**Відповідь:** $\frac{m^2}{4}$.

Метод симетрії часто використовується в задачах на знаходження найменших значень певних величин.

### Задача

Точка $O$ лежить усередині гострого кута $ABC$. Знайдіть на сторонах кута точки $X$ і $У$ так, щоб периметр трикутника $OXУ$ був найменшим.

### Розв'язання

**Аналіз**

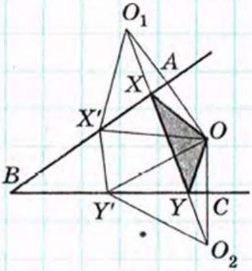


Рис. 107

Припустимо, що трикутник $OX'У'$ шуканий (рис. 107). Вершини $X'$ і $У'$, які необхідно побудувати, мають лежати на сторонах $BA$ і $BC$ кута $ABC$. Побудуємо точки $O_1$ і $O_2$, симетричні точці $O$ відносно цих сторін. Тоді за побудовою $OX' = O_1X'$, $OУ' = O_2У'$. Знайдемо периметр шуканого трикутника:

$$P_{OX'У'} = OX' + X'У' + У'O = O_1X' + X'У' + У'O_2,$$

тобто периметр дорівнює $O_1X' + X'У' + У'O_2$.

Ця сума буде найменшою, якщо точки $O_1$, $X'$, $У'$ і $O_2$ лежатимуть на одній прямій. Отже, шукані точки $X'$ і $У'$ мають лежати на прямій $O_1O_2$, тобто на перетині цієї прямої зі сторонами кута $ABC$.

**Побудова**

1. Побудуємо точки $O_1$ і $O_2$, симетричні точці $O$ щодо прямих $BA$ і $BC$ відповідно.
2. Побудуємо пряму $O_1O_2$ і позначимо точки $X$ і $У$ — точки перетину цієї прямої зі сторонами кута $ABC$.
3. Сполучимо точки $X$ і $У$ з точкою $O$. Трикутник $OXУ$ — шуканий.

Спираючись на властивості геометричних перетворень, використаних у процесі побудови, легко довести, що побудовані точки шукані й визначаються однозначно.

## 15.2. Методи повороту і паралельного перенесення

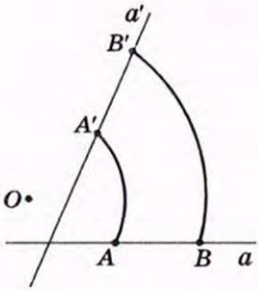



Рис. 108

***Метод повороту*** доцільно використовувати в задачах, у яких задано фігури з рівними сторонами й відомими кутами — рівносторонні й рівнобедрені прямокутні трикутники, квадрати тощо. На практиці для повороту прямої $a$ навколо точки $O$ на даній прямій обирають дві точки і здійснюють їх поворот навколо точки $O$ (рис. 108).

### Задача

Побудуйте рівносторонній трикутник, вершини якого лежать на трьох даних паралельних прямих.

### Розв'язання

**Аналіз**

Нехай рівносторонній трикутник $ABC$, вершини якого лежать на даних паралельних прямих $a$, $b$ і $c$, побудовано (рис. 109). Розглянемо поворот прямої $a$ навколо вершини $B$ на $60°$ проти годинникової стрілки. Унаслідок такого повороту точка $A$ переходить у точку $C$, а пряма $a$ — в деяку пряму $a'$. Оскільки точка $A$ лежить на прямій $a$, то її образ — точка $C$ — має лежати на прямій $a'$. Таким чином, точка $C$ може бути знайдена як точка перетину прямих $c$ і $a'$. Аналогічно завдяки повороту прямої $c$ навколо точки $B$ на $60°$ за годинниковою стрілкою можна визначити положення точки $A$ — образу точки $C$ при такому повороті.

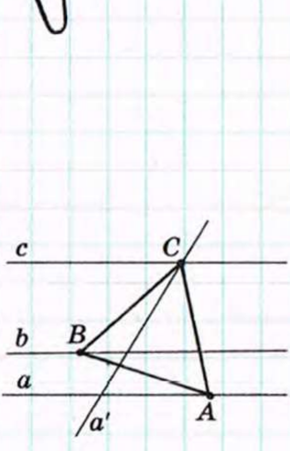



Рис. 109

**Побудова**

1. Позначимо на прямій $b$ довільну точку $B$.
2. Виконаємо поворот прямої $a$ навколо точки $B$ на $60°$ проти годинникової стрілки. Нехай $C$ — точка перетину прямих $c$ і $a'$.

3. Виконаємо поворот прямої $c$ навколо точки $B$ на $60°$ за годинниковою стрілкою. Нехай $A$ — точка перетину прямої $a$ і прямої $c'$, отриманої внаслідок цього повороту.
4. Сполучимо точки $A$, $B$ і $C$. Трикутник $ABC$ шуканий (це легко обґрунтувати, спираючись на властивості геометричних перетворень).

***Метод паралельного перенесення*** особливо ефективний у випадках, коли елементи даної фігури (фігур) віддалені один від одного, внаслідок чого важко відобразити на рисунку дані умови. Зближення елементів зручно проводити шляхом паралельного перенесення.

**Задача**

Дано два кола, які мають зовнішній дотик, і пряму $m$. Побудуйте пряму, паралельну $m$, на якій дані кола відтинають рівні хорди.

**Розв'язання (скорочений план)**

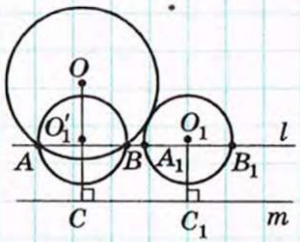


Рис. 110

Нехай дано кола з центрами $O$ і $O_1$, які дотикаються зовні, і пряму $m$ (рис. 110). Опустимо з центрів даних кіл перпендикуляри $OC$ і $O_1C_1$ на пряму $m$ і виконаємо паралельне перенесення кола з центром $O_1$ в напрямі променя $C_1C$ на відстань $C_1C$. Отримане коло з центром $O'_1$ перетинає дане коло з центром $O$ в точках $A$ і $B$. Тоді пряма $l$, яка проходить через ці точки, паралельна прямій $m$ і перетинає друге дане коло в точках $A_1$ і $B_1$, причому $A_1B_1 = AB$ (доведіть це самостійно).

## 15.3. Гіпотеза в геометричних задачах

У деяких геометричних задачах знайти шлях до розв'язання допомагає припущення про існування деякої фігури або деякого співвідношення, яке на момент початку розв'язування не є доведеним і не випливає безпосередньо з даних задачі. Так, у попередніх задачах ми припускали існування шуканої фігури і на підставі подальшого аналізу визначали спосіб її побудови.

**Гіпотеза** — від грецького «гіпотеза» — підстава, припущення

Подібні припущення в науці називаються ***гіпотезами***.

Зазвичай гіпотези в геометрії використовуються саме на етапі аналізу умов задачі й визначення плану її розв'язування. Вони можуть стосуватися як однієї, так і декількох фігур, що розглядаються, — це, насамперед, припущення про рівність фігур або їх окремих елементів, про подібність фігур, паралельність або перетин прямих, належність точок одній прямій тощо. Найпоширенішими гіпотезами в задачах на побудову є припущення про існування шуканої фігури. Досить часто знайти необхідну гіпотезу допомагає аналогія з раніше розв'язаними задачами. Дуже важливо, щоб у процесі подальших міркувань висунута гіпотеза була доведена (або спростована).


Гіпотези відіграють важливу роль у науці. Відомий російський учений М. В. Ломоносов вважав гіпотезу «єдиним шляхом, яким визначні люди дійшли до відкриття найважливіших істин». Дійсно, деякі гіпотези докорінно змінювали цілі науки. Класичним прикладом таких революційних змін є Періодична таблиця хімічних елементів Д. І. Менделєєва. У ній видатний учений висловив гіпотезу про існування багатьох не відкритих на той час хімічних елементів. Однак не всі гіпотези завжди знаходили підтвердження. Так, вивчаючи процеси харчування коней, мавп, вовків, учені Середньовіччя висловили гіпотезу, що в усіх тварин під час жування рухається лише нижня щелепа. Але подальші дослідження виявили, що, наприклад, крокодил жує верхньою щелепою.

Знайдіть самостійно приклади гіпотез (не лише підтверджених, але й спростованих) з історії розвитку біології, фізики, хімії. Їх різноманітність і наукове значення стануть найпереконливішим аргументом на користь важливості гіпотез у процесі пізнання і навчання.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**509.** За допомогою геометричних перетворень необхідно перевести один із кутів паралелограма у протилежний кут. Які перетворення можна для цього використати?

**510.** За допомогою геометричних перетворень необхідно отримати коло, яке дорівнює даному колу і дотикається до нього. Які перетворення можна для цього використати?

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**511.** Відрізки $AC$ і $BD$ перетинаються в точці $O$, яка є серединою кожного з них. Точки $M$ і $N$ — середини відрізків $AB$ і $CD$. За допомогою центральної симетрії доведіть, що точка $O$ — середина відрізка $MN$.

→ **512.** За допомогою осьової симетрії доведіть, що медіани рівнобедреного трикутника, проведені до бічних сторін, рівні.

**513.** За допомогою паралельного перенесення доведіть, що коли одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до третьої прямої, то друга також перпендикулярна до цієї прямої.

→ **514.** За допомогою повороту доведіть, що рівні хорди кола стягують відповідно рівні дуги.

### Рівень Б

**515.** Побудуйте відрізок із серединою в даній точці й кінцями на двох даних прямих.

→ **516.** Точки $A$ і $B$ лежать по різні сторони від прямої $l$. Побудуйте кут $AOB$ так, щоб його бісектриса лежала на прямій $l$.

**517.** Точка $D$ лежить усередині гострого кута $ABC$. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник $DEF$ так, щоб вершини його гострих кутів $E$ і $F$ лежали на сторонах кута $ABC$.

→ **518.** Дано два рівні кола з центрами $O$ і $O_1$, які не мають спільних точок, $OO_1 = 10$ см. Пряма $l$ паралельна $OO_1$ і перетинає ці кола послідовно в точках $A$, $B$, $C$ і $D$. Знайдіть довжину відрізка $AC$.

## Рівень В

**519.** Побудуйте трикутник за двома сторонами й різницею кутів, протилежних цим сторонам.

**520.** Дано два кола зі спільним центром. Побудуйте пряму, на якій ці кола відтинають три рівні відрізки.

**521.** На стороні $CD$ квадрата $ABCD$ позначено точку $E$. Бісектриса кута $BAE$ перетинає сторону $BC$ в точці $F$. Доведіть, що $AE = ED + BF$.

**522.** Побудуйте трапецію за діагоналями, середньою лінією і кутом при основі.

## ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 16

### Теоретичний матеріал

- паралельне перенесення; 9 клас, п. 13.2
- формула відстані між точками. 9 клас, п. 8.3

### Задачі

**523.** Чи лежить точка $A(3; -5)$ на відрізку $BC$, якщо $B(1; -2)$, $C(5; -8)$?

**524.** Три вершини паралелограма $ABCD$ мають координати $A(-1; 1)$, $B(2; 4)$, $C(5; 4)$. Складіть формули паралельного перенесення, яке переводить сторону $BC$ в сторону $AD$, і знайдіть координати точки $D$.

## Задачі для підготовки до контрольної роботи № 4

**1.** Дано прямокутний трикутник $ABC$ з гіпотенузою $AC$. Побудуйте:
а) відрізок, симетричний катету $AB$ відносно точки $C$;
б) кут, симетричний куту $ABC$ відносно прямої $AC$.

**2.** Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(-3; 1)$ відносно:
а) початку координат; б) осі абсцис.

**3.** Виконайте поворот рівнобедреного прямокутного трикутника $ABC$ з гіпотенузою $AC$ навколо вершини $B$ на $90°$ проти годинникової стрілки. Назвіть сторони трикутника, які переходять одна в одну.

**4.** Складіть формули паралельного перенесення, яке переводить центр кола $(x+1)^2 + (y-7)^2 = 4$ в початок координат.

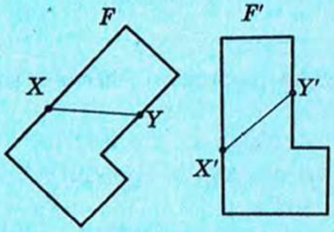
**5.** Відповідні сторони двох подібних прямокутників відносяться як $3 : 5$. Знайдіть площу більшого прямокутника, якщо площа меншого дорівнює 36 см$^2$.

**6.** Два кола мають внутрішній дотик у точці $A$, причому менше коло проходить через центр більшого. Доведіть, що будь-яка хорда більшого кола, яка виходить із точки $A$, ділиться меншим колом навпіл.

# Підсумки розділу IV

## ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ IV

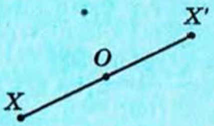
### Переміщення



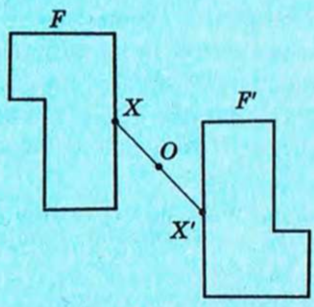

***Переміщенням*** (або ***рухом***) називається перетворення фігури, внаслідок якого зберігаються відстані між точками даної фігури.

Дві фігури називаються ***рівними***, якщо вони суміщаються переміщенням

### Симетрія відносно точки

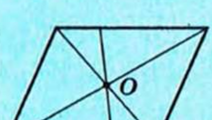



Точки $X$ і $X'$ називаються ***симетричними відносно точки*** $O$, якщо точка $O$ — середина відрізка $XX'$



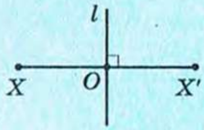

***Перетворенням симетрії*** (***центральною симетрією***) ***відносно точки*** $O$ називається таке перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$, унаслідок якого кожна точка $X$ фігури $F$ переходить у точку $X'$ фігури $F'$, симетричну $X$ відносно точки $O$.

***Основна властивість симетрії відносно точки:***
центральна симетрія є переміщенням

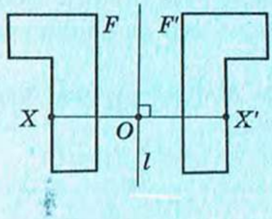



Якщо перетворення симетрії відносно точки $O$ переводить фігуру $F$ у себе, то така фігура називається ***центрально-симетричною***, а точка $O$ — ***центром симетрії фігури*** $F$

## Симетрія відносно прямої

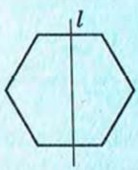



Точки $X$ і $X'$ називаються ***симетричними відносно прямої*** $l$, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка $XX'$ і проходить через його середину



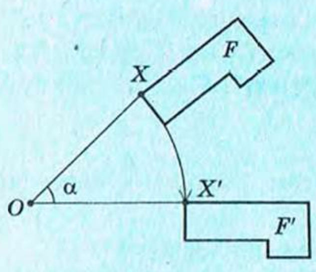

***Перетворенням симетрії*** **(*осьовою симетрією*)** ***відносно прямої*** $l$ називається таке перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$, унаслідок якого кожна точка $X$ фігури $F$ переходить у точку $X'$ фігури $F'$, симетричну $X$ відносно прямої $l$.

***Основна властивість осьової симетрії:***
осьова симетрія є переміщенням



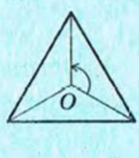

Якщо перетворення симетрії відносно прямої $l$ переводить фігуру $F$ у себе, то така фігура називається ***симетричною відносно прямої*** $l$, а сама пряма $l$ — ***віссю симетрії фігури*** $F$

## Поворот



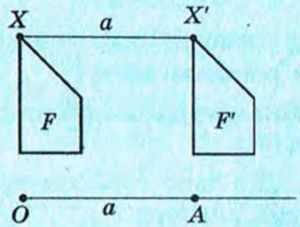

***Поворотом*** фігури $F$ навколо точки $O$ на кут $\alpha$ називається перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$, унаслідок якого кожна точка $X$ фігури $F$ переходить у точку $X'$ фігури $F'$ так, що $OX' = OX$ і $\angle XOX' = \alpha$.

Точку $O$ називають ***центром повороту***, а кут $\alpha$ — ***кутом повороту***.
***Основна властивість повороту:***
поворот є переміщенням



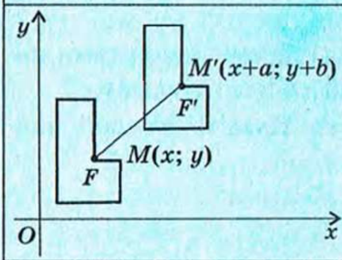

Якщо внаслідок повороту навколо деякої точки $O$ фігура $F$ переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має ***поворотну симетрію*** (або ***симетрію обертання***)

## Паралельне перенесення




***Паралельним перенесенням*** фігури $F$ у напрямі променя $OA$ на відстань $a$ називається перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$, унаслідок якого кожна точка $X$ фігури $F$ переходить у точку $X'$ фігури $F'$ так, що промені $XX'$ і $OA$ співнапрямлені і $XX' = a$.

***Основна властивість паралельного перенесення***: паралельне перенесення є переміщенням

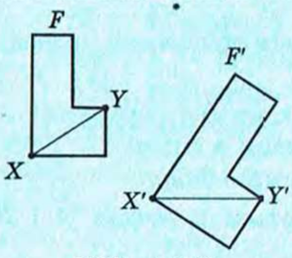



У прямокутній системі координат паралельне перенесення, яке переводить точку $(x; y)$ у точку $(x'; y')$, задається формулами

$$x' = x + a,\ y' = y + b,$$

де $a$ і $b$ — деякі числа, одні й ті самі для всіх точок площини

## Перетворення подібності. Гомотетія

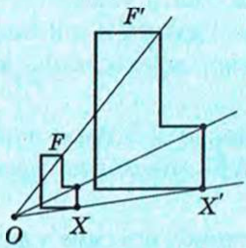



$X'Y' = kXY$

***Перетворенням подібності*** (***подібністю***) називається таке перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$, унаслідок якого відстань між точками змінюється в тому самому відношенні $k$ ($k > 0$).

Число $k > 0$ називають ***коефіцієнтом подібності***.

Дві фігури називаються ***подібними***, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності




***Гомотетією*** з центром $O$ називається таке перетворення фігури $F$ у фігуру $F'$, унаслідок якого кожна точка $X$ фігури $F$ переходить у точку $X'$ фігури $F'$ так, що точка $X'$ лежить на промені $OX$ і $OX' = kOX$ ($k$ — фіксоване додатне число).

Число $k$ називають ***коефіцієнтом гомотетії***, а самі фігури $F$ і $F'$ — ***гомотетичними***.

***Основна властивість гомотетії***: гомотетія є перетворенням подібності

***Відношення площ подібних фігур***

Якщо $F \backsim F'$ з коефіцієнтом $k$, то $\dfrac{S_{F'}}{S_F} = k^2$

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ IV

**1.** Дайте означення переміщення. Назвіть основні властивості переміщення. Який зв'язок переміщення має з рівністю фігур?

**2.** Дайте означення симетрії відносно точки. Які фігури називаються центрально-симетричними? Наведіть приклади.

**3.** Дайте означення симетрії відносно прямої. Що таке вісь симетрії фігури? Наведіть приклади фігур, які мають вісь симетрії.

**4.** Дайте означення повороту.

**5.** Дайте означення паралельного перенесення. Якими формулами паралельне перенесення задається в прямокутній системі координат?

**6.** Дайте означення перетворення подібності. Назвіть основні властивості подібних фігур.

**7.** Опишіть перетворення гомотетії.

## ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ IV

**525.** Доведіть, що внаслідок переміщення медіана трикутника переходить у відповідну медіану трикутника-образу.

**526.** Визначте переміщення, за допомогою яких можна перевести:
а) одну з бічних сторін рівнобедреної трапеції в іншу;
б) одну з протилежних сторін паралелограма в іншу.

**527.** Рівні кола з центрами $O$ і $O_1$ перетинаються в точках $A$ і $B$. Назвіть:
а) центр симетрії, яка переводить одне з даних кіл в інше;
б) вісь симетрії, яка переводить одне з даних кіл в інше;
в) центр і кут повороту, який переводить одне з даних кіл в інше;
г) промінь і відстань, що задають паралельне перенесення, яке переводить одне з даних кіл в інше.

**528.** Унаслідок деякого переміщення кожна з точок $A$ і $B$ переходить у себе. Доведіть, що будь-яка точка прямої $AB$ внаслідок цього переміщення також переходить у себе.

**529.** *Дельтоїдом* називається опуклий чотирикутник, що має єдину вісь симетрії, яка містить його діагональ. Побудуйте дельтоїд і опишіть його властивості.

**530.** Дано коло і точку $A$ на ньому. Точка $B$ рухається по даному колу. Яку лінію описує під час такого руху середина відрізка $AB$?

**531.** У даний трикутник впишіть ромб так, щоб він мав із даним трикутником спільний кут.

**532.** Доведіть подібність двох ромбів із відповідно пропорційними діагоналями.

**533.** Два кола розміщені по різні сторони від прямої $l$. Побудуйте відрізок із кінцями на даних колах, для якого пряма $l$ є віссю симетрії.

## Задачі підвищеної складності

**534.** Два рівні кола мають зовнішній дотик. В одне з кіл вписано трикутник. Доведіть, що трикутник, симетричний даному відносно точки дотику, є вписаним у друге коло.

**535.** Кола, симетричні описаному навколо трикутника колу відносно сторін трикутника, проходять через ортоцентр цього трикутника. Доведіть.

**536.** Побудуйте квадрат, три вершини якого лежать на трьох даних паралельних прямих.

**537.** Впишіть у даний трикутник $ABC$ квадрат, дві вершини якого лежать на стороні $AC$, а дві інші — на сторонах $AB$ і $BC$ відповідно.

**538.** Побудуйте коло, яке вписане в даний кут і проходить через дану точку всередині цього кута.

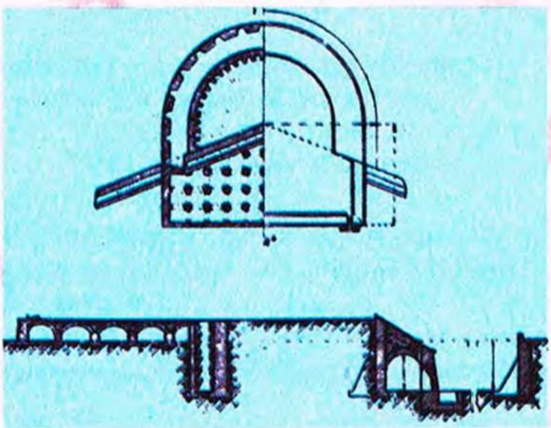
# ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Зразок наскельного живопису

Теорія геометричних перетворень виникла у зв'язку з пізнанням законів зображення предметів на площині. Спроби правильно відобразити на плоскому рисунку природні форми предметів здійснювалися задовго до виникнення писемності — люди малювали на стінах печер, скелях, посуді різноманітні рослини, тварин тощо. Тривала практика підказувала митцям, як передати на рисунку зображуваний предмет — так зароджувалося вчення про відповідності й перетворення. Раніше за інші були встановлені й вивчені закони перспективи. Стародавні греки дотримувалися їх уже в V—IV ст. до н. е.

В Епоху Відродження з'явилися перші фундаментальні дослідження з теорії перспективи, зокрема роботи видатних художників Леонардо да Вінчі (1452—1519) і Альбрехта Дюрера (1471—1528). Розробником математичних основ теорії проективних перетворень (теорії перспективи) став французький інженер і архітектор Жерар Дезарг (1593—1662).

Нарис Леонардо да Вінчі



Бастеї Дюрера

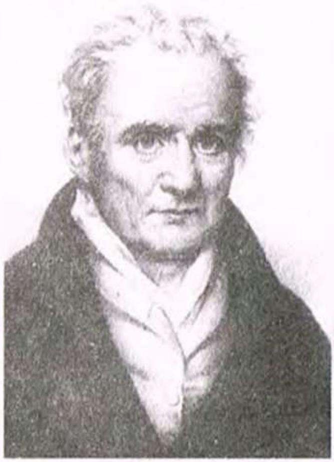
**Леонардо да Вінчі**

**Альбрехт Дюрер**

**Мішель Шаль**

Завдяки теорії перспективи вдалося досягнути достатньої наочності зображень, однак технічний прогрес вимагав точного відтворення об'єктів із дотриманням розмірів. Багато талановитих учених доклали зусиль до створення теорії взаємно однозначних відповідностей на площині й у просторі. Серед них був, зокрема, французький математик Мішель Шаль (1793–1880), який довів фундаментальну теорему про геометричні перетворення (нині відому як теорема Шаля). Підсумував наукові пошуки в галузі геометричних перетворень французький геометр Гаспар Монж (1746–1818), створивши новий розділ геометрії — нарисну геометрію.

Пізніше на основі розподілу геометричних перетворень на групи було виділено ще декілька розділів геометрії — афінна, проективна та інші. Здобутки вчених у вивченні перетворень склали математичну основу для розвитку багатьох галузей сучасної техніки.



**Гаспар Монж**

## ТЕМАТИКА ПОВІДОМЛЕНЬ І РЕФЕРАТІВ ДО РОЗДІЛУ IV

1. Координатні формули геометричних переміщень. Композиції переміщень.
2. Інверсія відносно кола. Застосування інверсії для розв'язування задач.
3. Теорія перспективи в мистецтві й комп'ютерній графіці.
4. Переносна симетрія. Паркети і бордюри. Геометричні ідеї в живопису (М. Ешер, В. Вазарелі).
5. Застосування гомотетії для дослідження кола дев'яти точок.

## РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

1. Математична хрестоматія для 6—8 класів. Т. 1 [Текст]. — К. : Рад. шк., 1968. — 320 с.
2. Математична хрестоматія для старших класів. Геометрія. Т. 2 [Текст] / упоряд. Л. В. Кованцова. — К. : Рад. шк., 1969. — 383 с.
3. Глейзер, Г. И. История математики в школе. VII—VIII классы: Пособие для учителей [Текст] / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1982. — 240 с.
4. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 1 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 320 с. — (Б-ка мат. кружка).
5. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 2 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. — 320 с. — (Б-ка мат. кружка).
6. Вейль, Г. Симметрия / Пер. с англ. [Текст] / Г. Вейль. — М. : Наука, 1968.
7. Тарасова, Л. Этот удивительный симметричный мир [Текст] / Л. Тарасова. — М. : Просвещение, 1992.
8. Полонський, В. Б. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії [Текст] / В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. — Тернопіль : Підручники й посібники, 2002.
9. Інтернет-бібліотека МЦНМО. http://ilib.mirror0.mccme.ru/
10. Сайт видавництва «Ранок». http://www.ranok.com.ua

# Розділ V
# ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

> Доступ до більш глибоких принципових проблем у фізиці вимагає найвитонченіших математичних методів.
>
> *Альберт Ейнштейн, німецький фізик*

Як відомо з курсу фізики, деякі величини, наприклад сила, швидкість, прискорення тощо, характеризуються не тільки числовим значенням, але й напрямом. Необхідність математичного моделювання таких величин зумовила створення теорії векторів.

У сучасній математиці один із розділів, у якому вивчають дії з векторами, не випадково називають векторною алгеброю, адже операції над векторами мають багато спільного з алгебраїчними діями. Вектори, як і координати, значно розширюють арсенал способів геометричних доведень та обчислень і спрощують деякі з них.

Векторні співвідношення широко застосовуються в природничих науках і багатьох галузях техніки. Завдяки вивченню векторів ви зможете краще опанувати методи розв'язування не лише геометричних, але й фізичних задач.

# § 16. Початкові відомості про вектори

## 16.1. Означення вектора. Модуль і напрям вектора

У природничих науках зустрічаються величини, які повністю характеризуються числовим значенням, — довжина, площа, температура, маса тощо (такі величини називають скалярними). Але чимало величин задаються не тільки числовим значенням, але й напрямом. Наприклад, для розв'язування задачі про рух автомобіля недостатньо знати його швидкість — треба уточнити, в якому напрямі він рухається. У такому випадку швидкість автомобіля розглядається як векторна величина. Отже, векторна величина характеризується числовим значенням і напрямом.

**Вектор** — від латинського «вектор» — той, що несе.

У геометрії векторні величини зображають за допомогою напрямлених відрізків.

**Означення**

**Вектором** називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано, який із його кінців є початком, а який — кінцем.

Зазвичай вектор зображають відрізком зі стрілкою, яка вказує напрям вектора. Для позначення векторів використовують малі латинські букви ($a$, $b$, $c$...) або дві великі латинські букви, перша з яких позначає початок вектора, а друга — кінець вектора. Замість слова «вектор» над позначенням вектора ставлять стрілку. Так, вектор з початком $A$ і кінцем $B$ (рис. 111) позначають $\vec{a}$ або $\overrightarrow{AB}$.

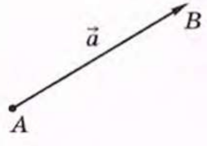



Рис. 111. Вектор

**Означення**

**Довжиною** (або **модулем**) **вектора** $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка $AB$, що зображає вектор.

Довжина вектора $\overrightarrow{AB}$ позначається так: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

**Означення**

**Нульовим вектором** називається вектор, початок і кінець якого збігаються.

Таким чином, будь-яку точку $A$ площини можна вважати нульовим вектором $\overrightarrow{AA}$. Нульовий вектор позначають так: $\vec{0}$. Напряму він не має, а його довжина дорівнює нулю: $\left|\vec{0}\right| = 0$.

**Колінеарний** — від латинського «ко-» — з, разом і «лінеаріс» — лінійний

**Означення**

Ненульові вектори називаються **колінеарними**, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

На рис. 112 вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{EF}$ колінеарні. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

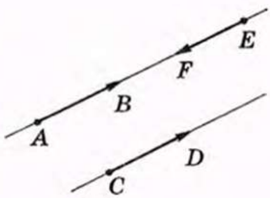



**Рис. 112.** Колінеарні вектори

**Означення**

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються **співнапрямленими** (або **однаково напрямленими**), якщо промені $AB$ і $CD$ співнапрямлені.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються **протилежно напрямленими**, якщо промені $AB$ і $CD$ протилежно напрямлені.

На рис. 112 вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ співнапрямлені (коротко це позначають так: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), а вектори $\overrightarrow{EF}$ і $\overrightarrow{CD}$ протилежно напрямлені (коротко це позначають так: $\overrightarrow{EF} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$).

Зазначимо, що завдяки щойно введеним поняттям можна спростити означення паралельного перенесення. Тепер замість паралельного перенесення в напрямі променя $AB$ на відстань $AB$ можна розглядати ***паралельне перенесення на вектор*** $\overrightarrow{AB}$.

## 16.2. Рівні вектори

**Означення**

Два вектори називаються **рівними**, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням.

Це означає, що існує паралельне перенесення, внаслідок якого початок і кінець одного вектора переходять відповідно в початок і кінець другого. На рис. 113 зображено рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$. Їх рівність позначають так: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

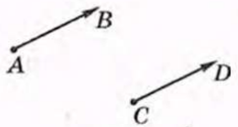



**Рис. 113.** Рівні вектори

Обґрунтуємо основні властивості й ознаки рівних векторів.

**1) Рівні вектори співнапрямлені та мають рівні довжини.**

Ця властивість випливає безпосередньо з означення рівних векторів і властивостей паралельного перенесення.

**2) Якщо вектори співнапрямлені і мають рівні довжини, то вони рівні.**

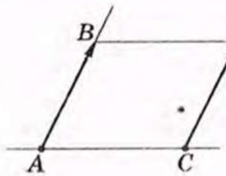



**Рис. 114.** До обґрунтування ознаки рівних векторів

Справді, нехай вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ співнапрямлені та мають рівні довжини (рис. 114). Паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{AC}$ переводить промінь $AB$ у співнапрямлений промінь $CD$. Оскільки відрізки $AB$ і $CD$ рівні, то внаслідок такого паралельного перенесення точка $A$ переходить у точку $C$, а точка $B$ — в точку $D$. Отже, вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ суміщаються паралельним перенесенням, тобто рівні за означенням.

**3) Від будь-якої точки можна відкласти вектор, що дорівнює даному, і притому тільки один.**

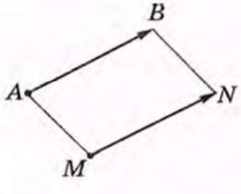



**Рис. 115.** Відкладання вектора, що дорівнює даному

Справді, нехай дано вектор $\overrightarrow{AB}$ і точку $M$ (рис. 115). Існує єдине паралельне перенесення, внаслідок якого точка $A$ переходить у точку $M$ — паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{AM}$. Під час такого перенесення вектор $\overrightarrow{AB}$ переходить у вектор $\overrightarrow{MN}$, який за означенням дорівнює $\overrightarrow{AB}$.

Для практичного відкладання від заданої точки вектора, що дорівнює даному, варто зазначити, що у випадку, коли точка $M$ не лежить на прямій $AB$, чотирикутник $ABNM$ — паралелограм.

Зауважимо також, що рівні вектори, відкладені від різних точок, часто позначають тією


самою буквою. Про такі вектори кажуть, що це той самий вектор, відкладений від різних точок. Такий підхід є цілком природним: справді, розглядаючи декілька зображень Вінні-Пуха, ми кажемо: «Це — Вінні-Пух», а не «Це — різні зображення Вінні-Пуха».

## 16.3. Координати вектора

До цього часу, кажучи про координати, ми мали на увазі координати точки, які однозначно задають її розміщення у системі координат. Виявляється, що за допомогою координат можна описувати і вектори.

**Означення**

**Координатами вектора** з початком $A(x_1;\ y_1)$ і кінцем $B(x_2;\ y_2)$ називають числа $a_1 = x_2 - x_1$ і $a_2 = y_2 - y_1$.

Інакше кажучи, ***кожна координата вектора дорівнює різниці відповідних координат його кінця і початку.***

Координати вектора записують у дужках поряд із його буквеним позначенням: $\overrightarrow{AB}(a_1; a_2)$. Іноді для позначення вектора з координатами $a_1$ і $a_2$ використовують запис $\overrightarrow{(a_1; a_2)}$. Очевидно, що нульовий вектор має нульові координати: $\vec{0}(0; 0)$. Із формули відстані між точками маємо:

**довжина вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ обчислюється за формулою $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$.**

**Теорема (властивість і ознака координат рівних векторів)**

**Рівні вектори мають рівні координати,** і навпаки: **якщо у векторів відповідні координати рівні, то ці вектори рівні.**

**Доведення**

☐ 1) *Властивість.*

Нехай $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ — початок і кінець даного вектора $\vec{a}$. Вектор $\vec{a'}$, що дорівнює $\vec{a}$, можна дістати з вектора $\vec{a}$ паралельним перенесенням. Нехай це перенесення задається формулами $x' = x + c$, $y' = y + d$. Тоді $\vec{a'} = \overrightarrow{A'B'}$, де $A'(x_1 + c; y_1 + d)$, $B'(x_2 + c; y_2 + d)$. Очевидно, що обидва вектори $\vec{a}$ і $\vec{a'}$ мають координати $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$, що й треба було довести.

2) *Ознака.*

Нехай тепер вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{A'B'}$ мають рівні координати. Якщо початком і кінцем другого вектора є точки $A'(x'_1;\ y'_1)$ і $B'(x'_2;\ y'_2)$, то за умовою $x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$, $y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1$. Звідси $x'_2 = x_2 - x_1 + x'_1$, $y'_2 = y_2 - y_1 + y'_1$. Паралельне перенесення, задане формулами $x' = x - x_1 + x'_1$, $y' = y - y_1 + y'_1$, переводить точку $A$ в точку $A'$, а точку $B$ — в точку $B'$, тобто суміщає вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{A'B'}$, що й треба було довести.

Теорему доведено повністю. ■

Таким чином, координати вектора не фіксують напрямлений відрізок, а лише задають його довжину і напрям.

Як приклад застосування рівності координат векторів наведемо ще один спосіб розв'язування відомої задачі про пошук четвертої вершини паралелограма.

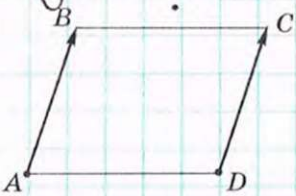


Рис. 116

**Задача**

Знайдіть координати четвертої вершини паралелограма $ABCD$, якщо $A(-2;\ 1)$, $B(0;\ 4)$, $C(4;\ 1)$.

**Розв'язання**

Якщо чотирикутник $ABCD$ — паралелограм (рис. 116), то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Нехай шукана вершина — $D(x;\ y)$. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(0-(-2);\ 4-1)} = \overrightarrow{(2;\ 3)},\quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{(4-x;\ 1-y)}.$$

Отже, $4 - x = 2$, $1 - y = 3$, звідки $x = 2$, $y = -2$.

**Відповідь:** $(2;\ -2)$.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**539.** На площині позначені точки $A$ і $B$. Чи правильно, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$:

а) мають однакові довжини; б) співнапрямлені;
в) рівні?

**540.** Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ колінеарні. Чи лежить точка $B$ на прямій $AC$; на відрізку $AC$?

**541.** Точка $C$ — середина відрізка $AB$. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$? Чи рівні вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$?

**542.** У паралелограмі $ABCD$ (рис. 117) назвіть вектори:

а) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{DC}$;

б) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{AO}$;

в) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{AD}$;

г) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{BD}$;

д) що дорівнюють вектору $\overrightarrow{AB}$;

е) що дорівнюють вектору $\overrightarrow{OC}$;

є) що дорівнюють вектору $\overrightarrow{BB}$.

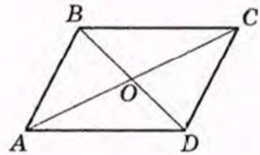


**Рис. 117**

**543.** Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

**544.** Дано рівнобедрений трикутник $ABC$ з основою $AC$. Чи правильно, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$? Чи правильно, що $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$?

**545.** Відомо, що $\vec{a} = \vec{b}$. Чи правильно, що:

а) дані вектори мають відповідно рівні координати;

б) відрізки, що зображають дані вектори, обов'язково збігаються;

в) при відкладанні від однієї точки відрізки, що зображають дані вектори, обов'язково збігаються?

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**546.** Накресліть паралельні прямі $a$ і $b$. Позначте на прямій $a$ точки $A$ і $B$, а на прямій $b$ — точку $C$.

а) Відкладіть від точки $C$ вектор $\overrightarrow{CD}$, співнапрямлений з $\overrightarrow{AB}$.

б) Відкладіть від точки $C$ вектор $\overrightarrow{CE}$, протилежно напрямлений з $\overrightarrow{AB}$.

в) Відкладіть від точки $B$ вектор $\overrightarrow{BF}$, що дорівнює вектору $\overrightarrow{AB}$. Чи співнапрямлені вектори $\overrightarrow{BF}$ і $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BF}$ і $\overrightarrow{ED}$?

→ **547.** Накресліть ромб $ABCD$.

а) Відкладіть від точки $B$ вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{CD}$.

б) Відкладіть від точки $B$ вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{AC}$.

в) Виконайте паралельне перенесення даного ромба на вектор $\overrightarrow{BD}$.

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**548.** У прямокутникv $ABCD$ $AB = 5$, $BC = 12$, точка $E$ — середина сторони $BC$. Знайдіть довжини векторів $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$.

→ **549.** У ромбі $ABCD$ $AC = 8$, $BD = 6$, $O$ — точка перетину діагоналей. Знайдіть довжини векторів $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{AB}$.

**550.** Доведіть, що в паралелограмі $ABCD$ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

→ **551.** Точка $O$ — середина відрізка $AB$. Назвіть пари рівних векторів із кінцями в даних точках і доведіть їх рівність.

**552.** Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

а) $A(-1;\ 4)$, $B(3;\ 9)$; б) $A(2;\ -5)$, $B(-1;\ -1)$; в) $A(3;\ 2)$, $B(3;\ -2)$.

**553.** Відомо, що $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\vec{a}(2;\ -1)$, $O$ — початок координат. Знайдіть координати точки $A$.

**554.** Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

а) $\overrightarrow{AB}\ (7;\ 24)$; б) $A(0;\ -1)$, $B(3;\ -5)$; в) $A(2;\ -4)$, $B(2;\ -1)$.

→ **555.** Знайдіть координати і довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:
а) $A(-3;\ 1)$, $B(5;\ -5)$; б) $A(12;\ 0)$, $B(0;\ -5)$.

**556.** Відкладіть від точки $D(1;\ 3)$ вектори $\vec{a}(2;\ -1)$ і $\vec{b}(-3;\ 4)$. Знайдіть координати кінців цих векторів.

→ **557.** Кінцем вектора $\vec{a}(-3;\ 7)$ є точка $(0;\ -2)$. Знайдіть координати початку вектора і відкладіть його в прямокутній системі координат.

**558.** За допомогою векторів доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо $A(-2;\ -1)$, $B(1;\ 2)$, $C(2;\ 2)$, $D(-1;\ -1)$.

→ **559.** Знайдіть координати четвертої вершини паралелограма $ABCD$, якщо $B(3;\ 1)$, $C(5;\ 0)$, $D(2;\ -3)$.

## Рівень Б

**560.** У прямокутній трапеції $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AB=4$, $AD=7$, $\angle D=45°$. Знайдіть довжини векторів $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{BD}$.

→ **561.** У паралелограмі $ABCD$ $AB=4$, $BC=7$, діагональ $AC$ більша за діагональ $BD$ на 2. Знайдіть довжини векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{DB}$.

**562.** Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо:

а) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ і $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|$;

б) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ і $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$;

в) $\overrightarrow{BC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AD}$, а вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ не колінеарні.

**563.** Якщо $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то середини відрізків $AD$ і $BC$ збігаються. Доведіть.

→ **564.** Сформулюйте і доведіть твердження, обернене до твердження попередньої задачі.

**565.** Довжина вектора $\vec{a}(m-3;\ m-1)$ дорівнює 10. Знайдіть $m$.

**566.** Довжина вектора $\overrightarrow{AB}$ дорівнює 5. Знайдіть координати точки $B$, якщо $A(4; -2)$, а точка $B$ лежить на прямій $y = 2x$.

**567.** Довжина вектора $\vec{a}(m; 15)$ дорівнює 17. Знайдіть $m$.

**568.** Відкладіть від початку координат вектори $\vec{a}(-2; 1)$ і $\vec{b}(1; 2)$. Знайдіть координати і довжину вектора, початком якого є кінець вектора $\vec{a}$, а кінцем — кінець вектора $\vec{b}$.

**569.** Відкладіть від точки (1; 3) вектори $\vec{a}(2; -1)$ і $\vec{b}(-4; 2)$. Чи колінеарні ці вектори?

## Рівень В

**570.** Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні. Чи означає це, що $ABCD$ — трапеція? Відповідь обґрунтуйте.

**571.** Дано паралелограми $ABCD$ і $A_1BC_1D$. Доведіть, що $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{C_1C}$.

**572.** Від точки $M$, яка лежить поза рівностороннім трикутником $ABC$, відкладено вектори $\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{ME}$ і $\overrightarrow{MD}$, що дорівнюють відповідно векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$. Доведіть, що $MFED$ — ромб.

**573.** У колі проведено діаметр $AC$ і хорду $AB$. Від точки $M$, що лежить усередині кола, відкладено вектори $\overrightarrow{MD}$ і $\overrightarrow{ME}$, які дорівнюють відповідно векторам $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Знайдіть кут $MDE$.

# ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 17

### Теоретичний матеріал

- нерівність трикутника; 7 клас, п. 18.2
- найпростіші задачі в координатах. 9 клас, § 8

### Задачі

**574.** Доведіть, що точки $A$, $B$ і $C$ лежать на одній прямій, якщо $AB = 8{,}3$ см, $BC = 10{,}1$ см, $AC = 1{,}8$ см. Яка з цих точок лежить між двома іншими?

**575.** Чи лежать на одній прямій точки $A(-2; -2)$, $B(-3; -4)$, $C(0; 2)$? Розв'яжіть задачу двома способами.

# § 17. Додавання і віднімання векторів

## 17.1. Додавання векторів

Для векторів, як і для чисел, визначаються операції додавання і віднімання, причому результатами цих дій також є вектори.

**Означення**

**Сумою векторів** $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ і $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ називається вектор $\vec{c}(c_1;\ c_2)$ з координатами $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$.

Таким чином, $\overrightarrow{(a_1;\ a_2)} + \overrightarrow{(b_1;\ b_2)} = \overrightarrow{(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)}$.

Сформулюємо властивості додавання векторів.

**Для будь-яких векторів** $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$, $\vec{b}\,(b_1;\ b_2)$, $\vec{c}\,(c_1;\ c_2)$:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$;
3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Для доведення цих властивостей достатньо порівняти координати векторів у правій і лівій частинах кожної рівності. Очевидно, що ці координати рівні, отже, рівні й самі вектори.

У який спосіб можна побудувати зображення вектора-суми за зображеннями векторів-доданків? Для відповіді на це питання доведемо наступну теорему.

**Теорема** **(про додавання векторів)**

**Для будь-яких точок $A$, $B$ і $C$ справджується векторна рівність**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

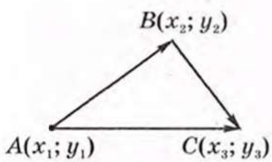



**Рис. 118.** До доведення теореми про додавання векторів

**Доведення**

□ Нехай дано точки $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ і $C(x_3;\ y_3)$ (рис. 118). Виразивши координати векторів-доданків, маємо $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$, $\overrightarrow{BC}(x_3 - x_2;\ y_3 - y_2)$. За означенням суми векторів для визначення координат вектора-суми додамо відповідні координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$:

$$x_2 - x_1 + x_3 - x_2 = x_3 - x_1,$$

$$y_2 - y_1 + y_3 - y_2 = y_3 - y_1.$$

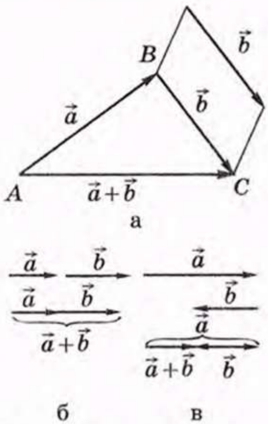



**Рис. 119.** Побудова суми векторів за правилом трикутника

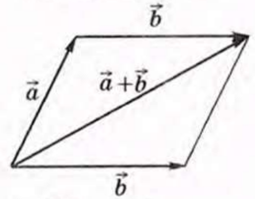



**Рис. 120.** Побудова суми векторів за правилом паралелограма

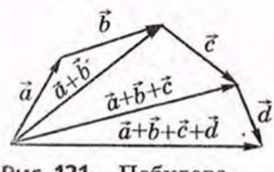



**Рис. 121.** Побудова суми векторів за правилом многокутника

Отже, координати вектора-суми збігаються з координатами вектора $\overrightarrow{AC}$, тобто вектори $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ рівні. Теорему доведено. ■

Наслідками цієї теореми є такі способи побудови суми векторів.

**1) Правило трикутника.** Нехай дано ненульові неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 119, *а*). Відкладемо від кінця вектора $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ вектор $\overrightarrow{BC}$, що дорівнює вектору $\vec{b}$. Тоді за доведеною теоремою вектор $\overrightarrow{AC}$, початок якого збігається з початком вектора $\overrightarrow{AB}$, а кінець — з кінцем вектора $\overrightarrow{BC}$, є вектором-сумою $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$. Побудову вектора $\vec{a}+\vec{b}$ у випадку, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, показано на рис. **119, *б*, *в*.**

**2) Правило паралелограма.** Для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зі спільним початком вектор-сума $\vec{a}+\vec{b}$ зображається діагоналлю паралелограма, побудованого на даних векторах, причому початок вектора $\vec{a}+\vec{b}$ збігається зі спільним початком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 120). Справді, якщо відкласти від кінця вектора $\vec{a}$ вектор, що дорівнює $\vec{b}$, ця побудова зводиться до попередньої.

**3) Правило многокутника.** Якщо декілька векторів-доданків відкладено так, що початок другого вектора збігається з кінцем першого, початок третього — з кінцем другого і т. д., то початок вектора-суми є початком першого вектора, а кінець — кінцем останнього:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}.$$

На рис. 121 показано застосування правила многокутника для складання векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$.

### Задача

Дано вектори $\vec{a}(2;\ 3)$ і $\vec{b}(-4;\ 5)$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, такого, що $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

### Розв'язання

Якщо $\vec{c}(c_1;\ c_2)$ — шуканий вектор, то $-4+c_1=2$, $5+c_2=3$. Отже, $c_1=6$, $c_2=-2$.

**Відповідь:** $\vec{c}(6;\ -2)$.

## 17.2. Віднімання векторів

Вектор $\vec{c}$, знайдений у попередній задачі, можна означити як різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

**Означення**

**Різницею векторів** $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ і $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ називається такий вектор $\vec{c}(c_1;\ c_2)$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$:

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}.$$

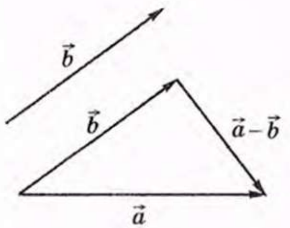



**Рис. 122.** Побудова різниці векторів

Із даного означення знаходимо координати вектора $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$:

$$c_1=a_1-b_1,\ c_2=a_2-b_2.$$

Для побудови вектора-різниці скористаємося правилом трикутника і рівністю $\vec{b}+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}$. Відкладемо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від однієї точки (рис. 122). Тоді початок вектора-різниці є кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець — кінцем вектора $\vec{a}$, тобто ***вектор-різниця сполучає кінці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та напрямлений у бік зменшуваного.***

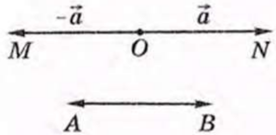



**Рис. 123.** Протилежні вектори

**Означення**

**Протилежними векторами** називаються два протилежно напрямлені вектори однакової довжини.

На рис. 123 вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$, а також вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ протилежні. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають $-\vec{a}$. Очевидно, що $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$.

Покажемо, що $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$. Справді, за означенням різниці векторів $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{b}=\vec{a}$. Додавши до обох частин цієї рівності вектор $-\vec{b}$, маємо:

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{b}+\left(-\vec{b}\right)=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right),\ \left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{0}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right),$$

тобто $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

Щойно обґрунтована формула вказує, що для отримання різниці $\vec{a}-\vec{b}$ можна додати до вектора $\vec{a}$ вектор, протилежний вектору $\vec{b}$ (рис. 124).

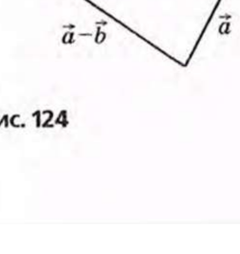



**Рис. 124**

Операції додавання і віднімання векторів широко застосовуються у фізиці для додавання сил. На рис. 125 проілюстровано фізичний зміст відомої байки Л. Глібова «Лебідь, Щука і Рак»: для визначення напрямку руху хури необхідно знайти рівнодійну сил Лебедя, Щуки й Рака, тобто суму векторів $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Як відомо з байки, «хура й досі там», тобто $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

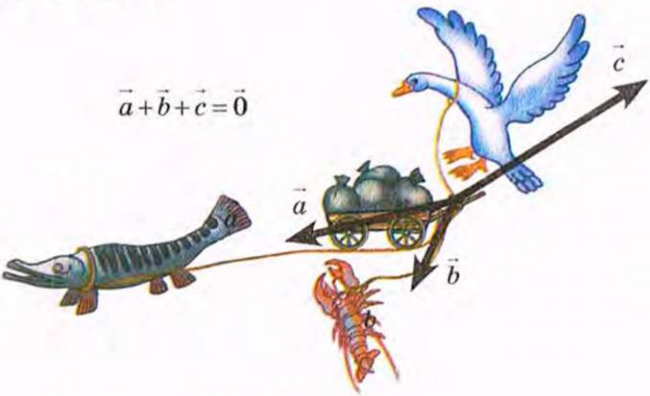



Рис. 125

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**576.** Чи може сума двох векторів дорівнювати:
а) нулю; б) нульовому вектору; в) одному з векторів-доданків?

**577.** Чи може довжина вектора-суми дорівнювати сумі довжин векторів-доданків? У якому випадку?

**578.** У паралелограмі $ABCD$ (рис. 126) назвіть вектор-суму:
а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$;
в) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$; г) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{DO}$.

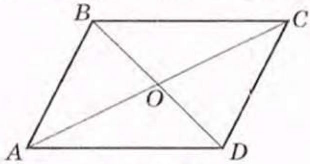



Рис. 126

**579.** Чи може різниця двох векторів дорівнювати їх сумі? У якому випадку?

**580.** У паралелограмі $ABCD$ (рис. 126) назвіть вектор, протилежний:
а) вектору $\overrightarrow{BC}$; б) вектору $\overrightarrow{OA}$.

**581.** У паралелограмі $ABCD$ (рис. 126) назвіть вектор-різницю:
а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$.

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**582.** Перекресліть вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (рис. 127) у зошит. Побудуйте вектори $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}-\vec{d}$, $\vec{b}+\vec{d}$, $\vec{d}-\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{b}-\vec{d}$. Чи є серед побудованих векторів протилежні?

**583.** Перекресліть вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (рис. 128) у зошит. Побудуйте вектори:

а) $\vec{b}+\vec{d}$, $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{d}$ за правилами трикутника й паралелограма та за допомогою координат;

б) $\vec{b}-\vec{d}$, $\vec{a}-\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$ трьома способами.

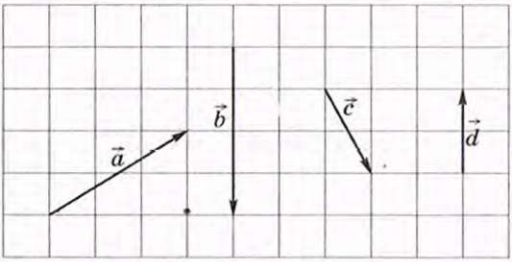



Рис. 127

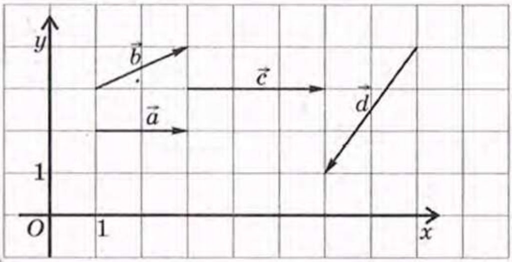



Рис. 128

**584.** Накресліть довільний трикутник $ABC$.

а) Побудуйте вектор $\overrightarrow{AD}$, що дорівнює сумі $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Знайдіть суму векторів $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

б) Побудуйте вектор $\overrightarrow{AE}$, що дорівнює різниці $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AE}$ і $\overrightarrow{BC}$?

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**585.** Знайдіть координати і довжину вектора $\vec{c}$, який дорівнює $\vec{a}+\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}(2;\ -9)$, $\vec{b}(6;\ 3)$; б) $\vec{a}(0;\ 4)$, $\vec{b}(-3;\ 0)$; в) $\vec{a}(-1;\ 5)$, $\vec{b}(1;\ -5)$.

**586.** Знайдіть координати і довжину вектора $\vec{c}$, який дорівнює $\vec{a}-\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}(-4;\ 7)$, $\vec{b}(8;\ 2)$; б) $\vec{a}(2;\ -2)$, $\vec{b}(-3;\ 3)$; в) $\vec{a}(0;\ 1)$, $\vec{b}(0;\ -2)$.

**587.** Знайдіть вектор-суму $\vec{a}+\vec{b}$ і вектор-різницю $\vec{a}-\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}(-3;\ -1)$, $\vec{b}(-1;\ 2)$; б) $\vec{a}(2;\ -7)$, $\vec{b}(2;\ 3)$.

**588.** Сторона рівностороннього трикутника $ABC$ дорівнює $a$. Знайдіть:

а) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$; в) $|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|$; г) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|$.

→ **589.** У трикутнику $ABC$ $\angle A=30°$, $\angle B=90°$, $AC=a$. Знайдіть:

а) $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}|$; б) $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$; в) $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}|$; г) $|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}|$.

**590.** Доведіть, що в чотирикутнику $ABCD$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.

→ **591.** Доведіть, що в трикутнику $ABC$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

**592.** Точки $M$ і $N$ — середини сторін $AB$ і $AC$ трикутника $ABC$. Виразіть через вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$ вектори:

а) $\overrightarrow{MB}$; б) $\overrightarrow{CN}$; в) $\overrightarrow{MN}$.

→ **593.** Дано трикутник $ABC$. Виразіть через вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ вектори:

а) $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CB}$.

## Рівень Б

**594.** Дано точки $A(-1;\ 4)$, $B(0;\ -2)$, $C(3;\ 5)$. Знайдіть координати вектора:

а) $\overrightarrow{AB}+\vec{a}$, де $\vec{a}(0;\ -2)$; б) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$.

**595.** Дано точки $A(0;\ -1)$ і $C(3;\ 5)$ та вектор $\overrightarrow{AB}$ $(1;\ 2)$. Знайдіть координати вектора:

а) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

→ **596.** Дано точки $O(0;\ 0)$, $A(1;\ -4)$, $B(8;\ 3)$. Знайдіть координати векторів:

а) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BA}$.

**597.** У прямокутнику $ABCD$ $AB=3$, $BC=4$, $O$ — точка перетину діагоналей. Знайдіть:

а) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|$; б) $|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}|$; в) $|\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BC}|$.

→ **598.** У ромбі $ABCD$ $AC=10$, $BD=24$, $O$ — точка перетину діагоналей. Знайдіть:

а) $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}|$; б) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}|$; в) $|\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{BA}|$.

**599.** Точка $O$ — центр правильного трикутника $ABC$. Доведіть, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

→ **600.** Доведіть, що в чотирикутнику $ABCD$ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$.

**601.** У паралелограмі $ABCD$ виразіть вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$; б) $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$; в) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DA}$.

→ **602.** Відрізок $BD$ — медіана трикутника $ABC$. Виразіть вектор $\overrightarrow{BD}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$; б) $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

## Рівень В

**603 (опорна).** Доведіть нерівність трикутника для векторів: **для будь-яких векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ справджується нерівність $|\vec{x}+\vec{y}|\leqslant|\vec{x}|+|\vec{y}|$.**

**604.** Чи може дорівнювати нульовому вектору сума трьох векторів, довжини яких дорівнюють:

а) 1, 2 і 9; б) 3, 5 і 8; в) 3, 4 і 5?

→ **605.** Доведіть, що для будь-яких неколінеарних векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ справджується нерівність $|\vec{x}-\vec{y}|<|\vec{x}|+|\vec{y}|$. У якому випадку $|\vec{x}-\vec{y}|=|\vec{x}|+|\vec{y}|$? У якому випадку $|\vec{x}-\vec{y}|=|\vec{x}|-|\vec{y}|$?

**606.** Якщо точка $O$ — точка перетину медіан трикутника $ABC$, то $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Доведіть.

→ **607.** Дано паралелограм $ABCD$ і довільну точку $M$. Доведіть, що $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

# ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 18

### Теоретичний матеріал

- теорема косинусів;
- рівняння прямої.

9 клас, § 2

9 клас, § 9

### Задачі

**608.** Складіть рівняння прямої, яка проходить через початок координат і точку $A(-4;\ 2)$.

**609.** Дано точки $A(1;\ 5)$, $B(3;\ 1)$, $C(5;\ 2)$. Знайдіть кут $ABC$.

# § 18. Множення вектора на число. Скалярний добуток векторів

## 18.1. Множення вектора на число

Як відомо з курсу алгебри, суму $n$ доданків, кожний із яких дорівнює $a$, можна подати у вигляді добутку $na$. Аналогічне подання для векторів можливе завдяки операції множення вектора на число.

**Означення**

**Добутком вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ на число** $k$ (або добутком числа $k$ на вектор $\vec{a}$) називається вектор $k\vec{a} = \overrightarrow{(ka_1; ka_2)}$.

Це означає, що $k\overrightarrow{(a_1; a_2)} = \overrightarrow{(ka_1; ka_2)}$.

Сформулюємо властивості множення вектора на число.

**Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та чисел $k$, $m$:**

1) $k\vec{a} = \vec{a}k$;
2) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$;
3) $k\vec{0} = \vec{0}$;
4) $0\vec{a} = \vec{0}$;
5) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$;
6) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Ці властивості легко довести, порівнявши координати векторів у правій і лівій частинах кожної рівності (зробіть це самостійно).

Спосіб побудови вектора $k\vec{a}$ за даними числом $k$ і вектором $\vec{a}$ випливає з такої теореми.

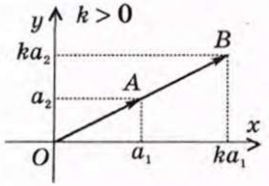
**Теорема (про довжину і напрям вектора $k\vec{a}$)**

**Довжина вектора $k\vec{a}$ дорівнює $|k||\vec{a}|$. Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$, то вектор $k\vec{a}$ співнапрямлений з вектором $\vec{a}$ за умови $k > 0$ і протилежно напрямлений з вектором $\vec{a}$ за умови $k < 0$.**

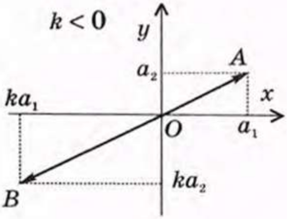
**Доведення**

□ Відкладемо вектори $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ і $k\vec{a} = \overrightarrow{OB}$ від початку координат $O$. Якщо $\vec{a}(a_1; a_2)$, то $k\vec{a}(ka_1; ka_2)$, тобто $A(a_1;\ a_2)$, $B(ka_1;\ ka_2)$.

Рівняння прямої $OA$ має вигляд $ax + by = 0$. Оскільки це рівняння задовольняють координати $x = a_1$ та $y = a_2$, то його задовольняють і координати $x = ka_1$ та $y = ka_2$, тобто точка $B$ лежить на прямій $OA$. Зауважимо, що координати будь-якої точки променя $OA$ мають ті самі знаки, що й координати точки $A$, а координати будь-якої точки променя, доповняльного до $OA$, — знаки, протилежні знакам координат точки $A$.




а




б

**Рис. 129.** Побудова вектора $k\vec{a}$

Тому за умови $k > 0$ точка $B$ лежить на промені $OA$ (рис. 129, *а*), тобто $\vec{a} \uparrow\uparrow k\vec{a}$, а за умови $k < 0$ точка $B$ лежить на промені, доповняльному до $OA$ (рис. 129, *б*), тобто $\vec{a} \uparrow\downarrow k\vec{a}$.

І нарешті, обчислимо довжину вектора $k\vec{a}$:

$$\left|k\vec{a}\right| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = \sqrt{k^2\left(a_1{}^2 + a_2{}^2\right)} =$$

$$= |k|\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2} = |k|\left|\vec{a}\right|.$$

Теорему доведено. ■

### Наслідок (властивість і ознака колінеарних векторів)

**Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — ненульові колінеарні вектори, то існує число $k$ таке, що $\vec{b} = k\vec{a}$,** і навпаки: **якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{b} = k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.**

Ознаку колінеарних векторів обґрунтовано в щойно доведеній теоремі. Обґрунтуємо властивість колінеарних векторів. Якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, виберемо $k = \dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$. Очевидно, що $k > 0$, тому вектори $\vec{b}$ і $k\vec{a}$ співнапрямлені і мають одну й ту саму довжину: $\left|k\vec{a}\right| = \dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|} \cdot \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$.

Це означає, що $\vec{b} = k\vec{a}$. Аналогічно у випадку $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ слід вибрати $k = -\dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$.

Щойно обґрунтований наслідок можна сформулювати інакше:

**у колінеарних векторів відповідні координати пропорційні,** і навпаки: **якщо у двох векторів відповідні координати пропорційні, то ці вектори колінеарні.**

Узагалі, повертаючись до тлумачення поняття «векторна величина», слід зазначити, що, крім наявності числового значення й напряму, векторні величини характеризуються обов'язковою визначеністю для них операцій додавання і множення на число. Тому, наприклад, швидкість руху автомобіля є векторною величиною, а потік машин на вулиці міста (який також можна охарактеризувати числовим значенням і напрямом) — не векторна величина.

**Задача**

Доведіть, що точки $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 4)$ і $C(-3;\ -6)$ лежать на одній прямій.

**Розв'язання**

Визначимо координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$: $\overline{AB}(1;\ 2)$, $\overline{AC}(-4;\ -8)$.
Зауважимо, що $\overline{(-4;-8)} = -4\cdot\overline{(1;2)}$, тобто $\overline{AC} = -4\overline{AB}$. Це означає, що вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ колінеарні, тобто мають лежати на одній прямій або на паралельних прямих. Але прямі $AB$ і $AC$ мають спільну точку $A$, тобто точки $A$, $B$ і $C$ лежать на одній прямій.

## 18.2. Скалярний добуток векторів

**Означення**

**Скалярним добутком** векторів $\vec{a}(a_1;a_2)$ і $\vec{b}(b_1;b_2)$ називається число $a_1b_1 + a_2b_2$.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1;a_2)$ і $\vec{b}(b_1;b_2)$ позначають $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$.

Отже, $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Сформулюємо властивості скалярного множення векторів.

**Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ та числа $k$:**

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$; 3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$.

Доведіть ці рівності самостійно на підставі означення скалярного добутку.

Скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$ називають ***скалярним квадратом*** вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}^2$. Очевидно, що $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 = \left|\vec{a}\right|^2$.

**Означення**

**Кутом між ненульовими векторами** $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ називається кут $BAC$.

**Кутом між довільними ненульовими векторами** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається кут між векторами, що дорівнюють даним векторам і мають спільний початок.

Побудову кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ показано на рис. 130. Цей кут позначають $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Очевидно, що коли $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0°$, а коли $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, то $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180°$. Якщо $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90°$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають ***перпендикулярними*** (пишуть так: $\vec{a}\perp\vec{b}$).

Якщо кут між двома векторами відомий, то їх скалярний добуток можна виразити через довжини цих векторів.

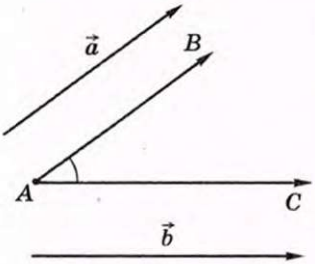



**Рис. 130.** Кут між векторами

**Скалярний** — від латинського «скалар» — число

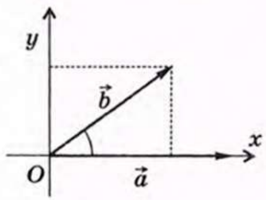



**Рис. 131.** До доведення теореми про скалярний добуток векторів

### Теорема (про скалярний добуток векторів)

**Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними:**

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

### Доведення

□ Покажемо, що скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не залежить від вибору системи координат. Справді,

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}+\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=$$

$$=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2,$$

тобто $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$. Звідси

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right).$$

Таким чином, скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виражається через довжини векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{a}+\vec{b}$, отже, не залежить від вибору системи координат.

Виберемо систему координат так, як показано на рис. 131. У такому випадку вектор $\vec{a}$ матиме координати $\left|\vec{a}\right|$ і 0, а вектор $\vec{b}$ — координати $\left|\vec{b}\right|\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ і $\left|\vec{b}\right|\sin\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Виразимо скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)+0\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

Теорему доведено. ■

### Наслідок 1

**Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — ненульові вектори, то** $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$.

### Наслідок 2 (властивість і ознака перпендикулярних векторів)

**Якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,** і навпаки: **якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$.**

Для обґрунтування цього наслідку достатньо зауважити, що $\cos 90^\circ=0$.

**Задача**

При якому значенні x вектори $\vec{a}(2; -1)$ і $\vec{b}(3; x)$ перпендикулярні?

**Розв'язання**

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні за умови $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Записавши цю умову в координатах, маємо: $2\cdot 3+(-1)\cdot x=0$, $6-x=0$, $x=6$.

**Відповідь**: 6.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**610.** У скільки разів довжина вектора $-3\vec{a}$ більша, ніж довжина вектора $\vec{a}$? Чи правильно, що довжина вектора $k\vec{a}$ у $k$ разів більша, ніж довжина вектора $\vec{a}$?

**611.** Дано ненульовий вектор $\vec{a}$. Визначте знак числа $k$, якщо:

а) вектори $\vec{a}$ і $k\vec{a}$ співнапрямлені;

б) вектори $-2\vec{a}$ і $k\vec{a}$ співнапрямлені;

в) вектори $k\vec{a}$ і $k^2\vec{a}$ протилежно напрямлені.

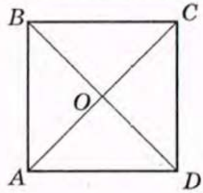


**Рис. 132**

**612.** Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці $O$ (рис. 132). Знайдіть кут між векторами:

а) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$; в) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CD}$;

г) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{DA}$; д) $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{AC}$; е) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

**613.** Чи може скалярний добуток двох векторів дорівнювати нульовому вектору? Чи може скалярний квадрат ненульового вектора дорівнювати нулю?

**614.** Визначте, чи є кут між неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ гострим, прямим або тупим, якщо:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$; б) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; в) $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$.

**615.** Чи може скалярний добуток векторів дорівнювати добутку їх довжин? У якому випадку?

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**616.** Накресліть вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (рис. 133) у зошиті.

а) Побудуйте вектори $-2\vec{a}$, $3\vec{c}$, $0,25\vec{d}$.

б) Побудуйте вектори $0,5\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{c}+\vec{d}$, $2\vec{d}+3\vec{b}$.

в) Побудуйте вектори $2\vec{c}-\vec{a}$, $2\vec{a}-0,5\vec{d}$, $\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{d}$.

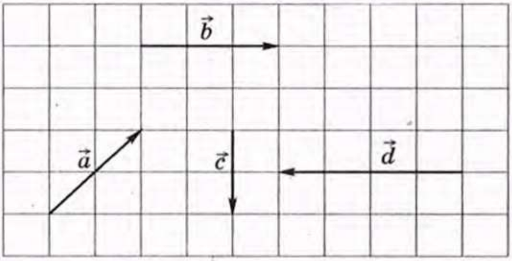



Рис. 133

**617.** Накресліть рівносторонній трикутник $ABC$.

а) Побудуйте кут між векторами $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$. Яка його градусна міра?

б) Побудуйте вектор $\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Який кут він утворює з вектором $\overrightarrow{BC}$?

в) Побудуйте вектор $\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$.

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**618.** Знайдіть координати і довжину вектора $k\vec{a}$, якщо:

а) $\vec{a}(6;\ -8)$, $k=0{,}5$; б) $\vec{a}(5;\ 12)$, $k=3$; в) $\vec{a}(-1;\ -2)$, $k=-1$.

**619.** Довжина вектора $k\vec{a}$ дорівнює 10. Знайдіть $k$, якщо:

а) $\vec{a}(3;\ -4)$; б) $\vec{a}(18;\ 24)$.

**620.** Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{b}=k\vec{a}$, $k=-2$, $\vec{a}(-0{,}5;\ 3)$;

б) $\vec{a}=k\vec{b}$, $k=\frac{1}{3}$, $\vec{a}$ $(-6;\ -9)$.

**621.** Доведіть, що для будь-якого вектора $\vec{a}$ справджується рівність $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.

**622.** На рис. 134 $AB=BC=CD=DE$. Виразіть через вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ вектори $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{CA}$.

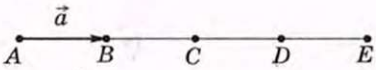



Рис. 134

**623.** Точка $M$ — середина відрізка $AB$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BM}$, якщо $\overrightarrow{AM}(2;\ -3)$.

**624.** Серед векторів $\vec{a}(-2; 3)$, $\vec{b}(8; 18)$, $\vec{c}(-4; -9)$ і $\vec{d}(-4; 6)$ назвіть пари колінеарних векторів. Які з даних векторів співнапрямлені, а які — протилежно напрямлені?

→ **625.** Вектори $\vec{a}(14; -8)$ і $\vec{b}(-7; x)$ колінеарні. Знайдіть $x$. Чи співнапрямлені дані вектори?

**626.** Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}(7; -4)$, $\vec{b}(2; 3)$;   б) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5\sqrt{3}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$.

**627.** Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 1. Знайдіть скалярний добуток векторів:

а) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$;   б) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$.

→ **628.** Знайдіть скалярний добуток векторів:

а) $\vec{a}(0; 4)$ і $\vec{b}(6; -2)$;

б) $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$;

в) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо трикутник $ABC$ рівносторонній зі стороною 6.

**629.** Знайдіть кут між векторами:

а) $\vec{a}(2; -1)$ і $\vec{b}(-4; -8)$;   б) $\vec{a}(2; 1)$ і $\vec{b}(1; 3)$.

**630.** Доведіть, що ненульові вектори $\vec{a}(x; y)$ і $\vec{b}(y; -x)$ перпендикулярні.

→ **631.** При якому значенні $x$ вектори $\vec{a}(x; 4)$ і $\vec{b}(-2; 3)$ перпендикулярні?

## Рівень Б

**632.** Дано вектори $\vec{a}(3; -1)$ і $\vec{b}(-4; 10)$. Знайдіть координати і довжину вектора $\vec{c}$, якщо:

а) $\vec{c} = 2\vec{a} + 0{,}5\vec{b}$;   б) $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$.

→ **633.** Дано вектори $\vec{a}(0; -3)$, $\vec{b}(-2; 1)$, $\vec{c} = k\vec{a} + 2\vec{b}$. Знайдіть $k$, якщо $\vec{c}(-4; 11)$.

**634 (опорна).** **Якщо відрізок $BM$ — медіана трикутника $ABC$, то $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$.** Доведіть.

→ **635 (опорна).** **Якщо точки $M$ і $N$ — середини відрізків $AB$ і $CD$, то $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.** Доведіть.

**636.** Відрізок $BM$ — медіана трикутника $ABC$. Виразіть через вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{BM}$ вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CB}$.

**637.** У ромбі $ABCD$ виразіть через вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{BD}$ вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{DC}$.

**638.** Доведіть, що точки $A(-3;\ 1)$, $B(3;\ 4)$, $C(1;\ 3)$ лежать на одній прямій. Яка з цих точок лежить між двома іншими?

**639.** Дано точки $A(2;\ 3)$, $B(4;\ 6)$, $C(7;\ 8)$, $D(11;\ x)$. Знайдіть значення $x$, при якому вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні. Чи співнапрямлені ці вектори?

**640.** При яких значеннях $x$ вектори $\vec{a}(4;\ x)$ і $\vec{b}(x;\ 9)$ колінеарні? У кожному з випадків визначте, чи співнапрямлені дані вектори.

**641.** Знайдіть кути трикутника з вершинами $A\left(-1;\ \sqrt{3}\right)$, $B\left(1;\ -\sqrt{3}\right)$, $C\left(0{,}5;\ \sqrt{3}\right)$.

**642.** Знайдіть кути трикутника $ABC$, якщо $A(-5;\ 2)$, $B(-2;\ 1)$, $C(-1;\ 4)$.

**643.** Якщо неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають рівні довжини, то вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярні. Доведіть.

**644.** Дано вектори $\vec{a}(1;\ 0)$ і $\vec{b}(1;\ 1)$. Знайдіть значення $k$, при якому вектори $\vec{a}+k\vec{b}$ і $\vec{a}$ перпендикулярні.

**645.** Дано вектори $\vec{a}(1;\ 8)$ і $\vec{b}(-3;\ 2)$. Знайдіть значення $k$, при якому вектори $\vec{a}+k\vec{b}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні.

## Рівень В

**646 (опорна).**

а) **Якщо точка $C$ ділить відрізок $AB$ у відношенні $AC : CB = m : n$, то $\overrightarrow{OC}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$, де $O$ — деяка точка площини.**

б) **Якщо точка $C$ лежить на прямій $AB$, то $\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}+(1-p)\overrightarrow{OB}$, де $O$ — деяка точка площини, $p$ — число.**

Доведіть дані твердження. Сформулюйте і доведіть обернені твердження.

**647 (опорна). Відрізки $AA_1$, $BB_1$ і $CC_1$ — медіани трикутника $ABC$, які перетинаються в точці $M$. Доведіть, що:**

а) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$;

б) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$;

в) **з відрізків $AA_1$, $BB_1$ і $CC_1$ можна скласти трикутник.**

**648 (опорна).** Якщо точка $M$ — точка перетину медіан трикутника $ABC$, то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, де $O$ — деяка точка площини. Доведіть.

**649.** Точка $M$ — точка перетину медіан трикутника $ABC$. Виразіть через вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ вектори $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{MA}$.

**650.** Точка $M$ ділить сторону $BC$ паралелограма $ABCD$ у відношенні $BM : MC = 1 : 3$. Виразіть через вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MD}$.

**651.** Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, а вектори $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $5\vec{a} - 4\vec{b}$ перпендикулярні.

**652.** Дано вектори $\vec{a}(2; -1)$ і $\vec{b}(4; 3)$. Знайдіть значення $k$, при якому вектори $\vec{a} + k\vec{b}$ і $\vec{b} - \vec{a}$ перпендикулярні.

**653.** Знайдіть:

а) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$;

б) $\vec{a}\vec{b}$, якщо $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 4$, $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 2$;

в) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \angle(\vec{a}, \vec{c}) = 120°$.

**654.** Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = 56$.

## ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 19

### Теоретичний матеріал

- середні лінії трикутника і трапеції; 8 клас, § 6
- властивості паралелограмів. 8 клас, § 2, 4

### Задачі

**655.** Середня лінія трапеції дорівнює 33 см. Знайдіть основи трапеції, якщо їх довжини відносяться як $3 : 8$.

**656.** Діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 24 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершини якого є серединами сторін ромба, і визначте його вид.

# § 19*. Векторний метод

## 19.1. Розв'язування геометричних задач векторним методом

Використання векторів і векторних співвідношень під час розв'язування задач у деяких випадках дозволяє значно спростити міркування і розрахунки.

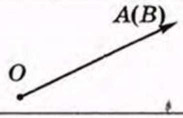
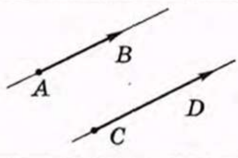
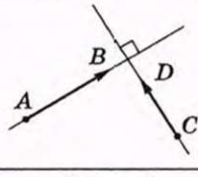
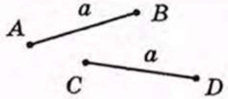
Застосування векторного методу передбачає три основні етапи.

1) Сформулювати задачу мовою векторів. Для цього необхідно розглянути деякі з даних відрізків як вектори і скласти відповідні до умови задачі векторні рівності.

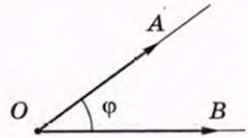
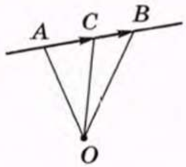
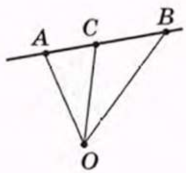
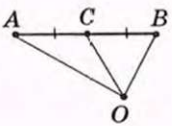
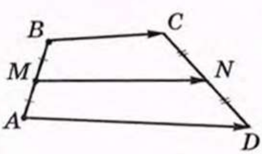
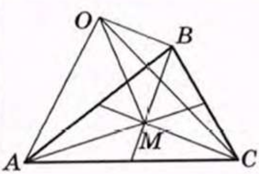
2) Перетворити складені рівності на підставі відомих векторних співвідношень.

3) Перекласти отримані результати мовою геометрії.

Для подання геометричних співвідношень мовою векторів і навпаки зручно користуватися такою таблицею.

| № з/п | Рисунок | Твердження мовою геометрії | Твердження мовою векторів |
|---|---|---|---|
| 1 |   | Точки $A$ і $B$ збігаються | $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ або $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$, де $O$ — деяка точка площини |
| 2 |   | $AB \parallel CD$ | $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$, $k \neq 0$ (прямі $AB$ і $CD$ не збігаються) |
| 3 |   | $AB \perp CD$ | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ |
| 4 |   | $AB=CD=a$ | $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{CD}^2=a^2$ |

*Закінчення таблиці*

| № з/п | Рисунок | Твердження мовою геометрії | Твердження мовою векторів |
|---|---|---|---|
| 5 |  | $\angle AOB = \varphi$ | $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\lvert\overrightarrow{OA}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{OB}\rvert}$ |
| 6 |  | Точка $C$ лежить на прямій $AB$ | $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ або $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + (1-p)\overrightarrow{OB}$, де $O$ — деяка точка площини |
| 7 |  | $C \in AB$, $AC : CB = m : n$ | $\overrightarrow{AC} = \dfrac{m}{n}\overrightarrow{CB}$ або $\overrightarrow{OC} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$, де $O$ — деяка точка площини |
| 8 |  | $C$ — середина $AB$ | $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ або $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$, де $O$ — деяка точка площини |
| 9 |  | $M$ — середина $AB$, $N$ — середина $CD$ | $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$ |
| 10 |  | $M$ — точка перетину медіан (центроїд) трикутника $ABC$ | $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, де $O$ — деяка точка площини |

Іноді векторний метод використовують у поєднанні з методом координат. У цих випадках подані векторні співвідношення доцільно записувати в координатній формі.

## 19.2. Розкладання вектора за двома неколінеарними векторами

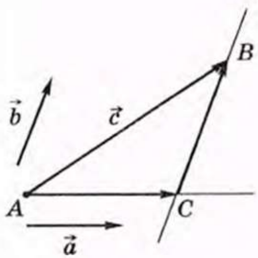
У деяких задачах доцільно вибрати на площині неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та виразити через них інші вектори, що розглядаються. Доведемо існування і єдиність такого подання.

**Теорема (про розкладання вектора за двома неколінеарними векторами)**

**Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — неколінеарні вектори, то для будь-якого вектора $\vec{c}$ існує розкладання $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$, де $m$, $n$ — деякі числа, причому таке розкладання єдине.**

**Доведення**

□ Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — дані вектори, $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$ (рис. 135, *а*). Проведемо через точки $A$ і $B$ прямі, паралельні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно. Оскільки дані вектори неколінеарні, то ці прямі перетинаються в деякій точці $C$, причому $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.



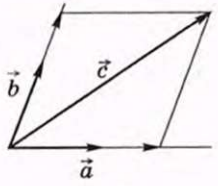

а

**Рис. 135.** Розкладання вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$
[Див. також с. 192]

Оскільки за побудовою вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$ колінеарні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно, то існують числа $m$ і $n$ такі, що $\overrightarrow{AC}=m\vec{a}$ і $\overrightarrow{CB}=n\vec{b}$. Отже, $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

Доведемо від супротивного єдиність такого розкладання. Нехай існує розкладання $\vec{c}=m_1\vec{a}+n_1\vec{b}$, причому справджується хоча б одна з умов $m_1\neq m$ або $n_1\neq n$. Припустимо, наприклад, що $m_1\neq m$. Прирівнюючи два розкладання вектора $\vec{c}$, маємо:

$$m\vec{a}+n\vec{b}=m_1\vec{a}+n_1\vec{b},\quad (m-m_1)\vec{a}=(n_1-n)\vec{b}.$$




б

**Рис. 135.** [Закінчення]

Оскільки $m_1 \neq m$, то $\vec{a} = \frac{n_1 - n}{m - m_1}\vec{b}$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, що суперечить умові теореми. Отже, розкладання $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ єдине. ■

На практиці для розкладання вектора за двома неколінеарними векторами можна використовувати також правило паралелограма. Для цього дані вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ відкладають від однієї точки (рис. 135, *б*) і проводять через кінець вектора $\vec{c}$ прямі, паралельні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

### Задача

Точка перетину відрізків, що сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, збігається з точкою перетину його діагоналей. Доведіть, що даний чотирикутник — паралелограм.

### Розв'язання

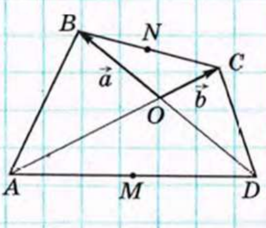



**Рис. 136**

Нехай діагоналі чотирикутника ABCD перетинаються в точці O, точки M і N — середини сторін AD і BC відповідно (рис. 136). Позначимо $\vec{a} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OC}$. Тоді $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Оскільки $\overrightarrow{OD} \uparrow\downarrow \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\overrightarrow{OD} = m\vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = n\vec{b}$, отже, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(m\vec{a} + n\vec{b})$, де m і n — деякі числа.

За умовою задачі вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$ колінеарні, отже, $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{ON}$, або $\frac{1}{2}(m\vec{a} + n\vec{b}) = \frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Звідси $(k - m)\vec{a} = (k - n)\vec{b}$. Але оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, рівність можлива лише за умови $k = m = n$. Отже, $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = k(\vec{b} - \vec{a})$, тобто вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ колінеарні, звідки $BC \parallel AD$. Аналогічно можна довести, що $AB \parallel CD$. Таким чином, ABCD — паралелограм.

У прямокутній системі координат особливу роль відіграє розкладання вектора за векторами $\vec{e_1}$ (1; 0) і $\vec{e_2}$ (0; 1) — векторами одиничної довжини, співнапрямленими з осями координат (рис. 137). Такі вектори називають ***координатними векторами***, або ***ортами***. Коефіцієнти розкладання вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ за векторами $\vec{e_1}$ і $\vec{e_2}$ дорівнюють координатам вектора $\vec{a}$. Справді,

$$\vec{a}\cdot\vec{e_1} = a_1\cdot 1 + a_2\cdot 0 = a_1, \quad \vec{a}\cdot\vec{e_2} = a_1\cdot 0 + a_2\cdot 1 = a_2.$$

Отже, $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$.

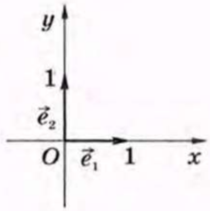



**Рис. 137**

Іноді, зокрема у фізичних задачах, розглядають поняття ***проекції вектора на вісь***. Для побудови ***векторної проекції*** вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $l$ через кінці даного вектора проводять перпендикуляри $AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$ (рис. 138). Тоді вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ є проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $l$. ***Скалярною проекцією*** вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $l$ є число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow l$ (рис. 138, *а*), або число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow l$ (рис. 138, *б*).

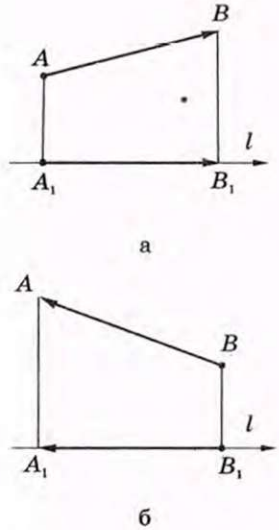



**Рис. 138.** Проекція вектора на вісь

## 19.3. Застосування колінеарності векторів

Властивості й ознаки колінеарних векторів під час розв'язування задач найчастіше використовуються в таких випадках:

1) для доведення паралельності прямих (променів, відрізків) — у цьому випадку треба довести, що вектори, які лежать на даних прямих, колінеарні, і ці прямі не мають спільних точок;

2) для доведення належності трьох точок одній прямій — у цьому випадку користуються тим, що належність точки $C$ прямій $AB$ випливає з колінеарності векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;

3) для доведення того, що деяка точка ділить даний відрізок у заданому відношенні (зокрема, є його серединою) — у цьому випадку застосовують відповідні векторні рівності.

### Задача

Доведіть, що точка перетину продовжень бічних сторін трапеції і середини її основ лежать на одній прямій.

### Розв'язання

Нехай у трапеції ABCD точки K і L — середини основ BC і AD відповідно, S — точка перетину прямих AB і CD (рис. 139). Доведемо, що вектори $\overrightarrow{SK}$ і $\overrightarrow{SL}$ колінеарні.

Нехай $\vec{a}=\overrightarrow{SB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{SC}$. Тоді $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$. Оскільки $AD \parallel BC$, то $\triangle SAD \backsim \triangle SBC$ за двома кутами, отже, $\frac{SA}{SB}=\frac{SD}{SC}=k$, звідки $\overrightarrow{SA}=k\vec{a}$, $\overrightarrow{SD}=k\vec{b}$. Маємо

$$\overrightarrow{SL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB})=\frac{1}{2}(k\vec{a}+k\vec{b})=k\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=k\overrightarrow{SK},$$

тобто вектори $\overrightarrow{SK}$ і $\overrightarrow{SL}$ колінеарні. Це означає, що точки S, K і L лежать на одній прямій.

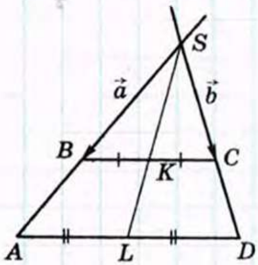


Рис. 139

## 19.4. Застосування скалярного добутку векторів

Скалярний добуток векторів доцільно використовувати в таких випадках:

1) для доведення перпендикулярності прямих (променів, відрізків) — у цьому випадку достатньо показати, що скалярний добуток відповідних векторів дорівнює нулю;

2) для знаходження довжини відрізка — для цього вектор $\vec{c}$, який зображається шуканим відрізком, розкладають за двома неколінеарними

векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (при цьому $\left|\vec{a}\right|$, $\left|\vec{b}\right|$ і $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ мають бути відомі) і знаходять $\vec{c}^{\,2}=\left|\vec{c}\right|^2$;

3) для знаходження величини кута — у цьому випадку вектори, якими задано шуканий або даний кут, розкладають за двома неколінеарними векторами, довжини або відношення довжин яких відомі, і обчислюють косинус шуканого кута.

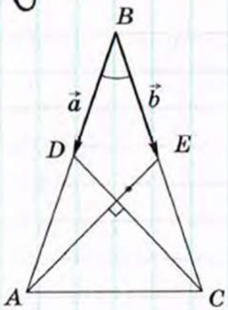


Рис. 140

### Задача

Знайдіть кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника, якщо медіани, проведені до бічних сторін, взаємно перпендикулярні.

### Розв'язання

Нехай дано рівнобедрений трикутник ABC з основою AC, AE і CD — медіани, $AE\perp CD$ (рис. 140). Нехай $\vec{a}=\overrightarrow{BD}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{BE}$. Тоді $\overrightarrow{CD}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{b}-2\vec{a}$. Оскільки за умовою $AE\perp CD$, то $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=0$, тобто $\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)=0$.

Враховуючи, що $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$ і $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos B$ маємо:

$\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}^{\,2}-2\vec{b}^{\,2}+4\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $5\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}^{\,2}-2\vec{b}^{\,2}=0$,

$5\left|\vec{a}\right|^2\cos B-4\left|\vec{a}\right|^2=0$, $\cos B=\frac{4}{5}$.

Отже, $\angle B\approx 37^\circ$.

**Відповідь**: $\approx 37^\circ$.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**657.** Дано неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Чи рівні вектори $3\vec{a}+7\vec{b}$ і $7\vec{b}+3\vec{a}$; $\vec{a}-2\vec{b}$ і $2\vec{b}-\vec{a}$? Чи є серед даних векторів колінеарні?

**658.** Назвіть:

а) координати вектора $\vec{a}$, якщо $\vec{a}=-3\vec{e_1}+8\vec{e_2}$;

б) коефіцієнти $m$ і $n$ розкладання $\vec{a}=m\vec{e_1}+n\vec{e_2}$, якщо $\vec{a}\,(1;\ -2)$.

# ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

## Рівень А

**659.** Доведіть векторним методом властивості середньої лінії трапеції.

**660.** Доведіть векторним методом властивості середньої лінії трикутника.

**661.** Доведіть векторним методом, що діагоналі ромба перпендикулярні.

**662.** Доведіть векторним методом, що діагоналі прямокутника рівні.

## Рівень Б

**663.** Доведіть векторним методом, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

**664.** Доведіть векторним методом, що коли дві медіани трикутника рівні, то цей трикутник рівнобедрений.

**665.** На стороні $AD$ і діагоналі $AC$ паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки $M$ і $N$ так, що $AM = \frac{1}{6}AD$, $AN = \frac{1}{7}AC$. Доведіть, що точки $M$, $N$ і $B$ лежать на одній прямій.

**666.** У прямокутному трикутнику $ABC$ ($\angle B = 90°$) на катеті $BC$ позначено точку $K$ так, що $CK : KB = 2 : 1$. Доведіть, що середина медіани $BM$ лежить на відрізку $AK$.

## Рівень В

**667.** У трикутнику $ABC$ (рис. 141) $AB = BC$, $BD$ — висота, $DK \perp BC$, $DM = MK$. Доведіть, що $BM \perp AK$.

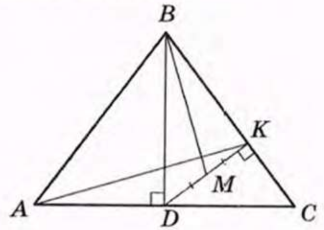



Рис. 141

**668.** Доведіть, що середини основ трапеції і точка перетину її діагоналей лежать на одній прямій.

**669.** Відрізок $BD$ — медіана трикутника $ABC$, $\angle DBC = 90°$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Знайдіть кут $ABD$.

**670.** Знайдіть довжину медіани $AM$ трикутника $ABC$, якщо $AB = 10$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60°$.

## ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 20

### Теоретичний матеріал

- основні геометричні фігури на площині; (7 клас, § 1)
- паралельні прямі; (7 клас, § 4)
- перпендикуляр до прямої. (7 клас, § 9)

### Задачі

**671.** У результаті перетину трьох прямих утворилися прямі кути. Визначте їх найбільшу кількість, якщо дані прямі перетинаються в одній точці; в трьох точках.

**672.** Перпендикуляри, проведені з точок $A$ і $B$ до прямої $a$, дорівнюють відповідно 4 см і 6 см. Чи можуть прямі $a$ і $AB$ бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.

## Задачі для підготовки до контрольної роботи № 5

**1.** Дано точки $A(2; -5)$ і $B(8; 3)$. Знайдіть координати і довжину вектора $\overrightarrow{AB}$.

**2.** Дано вектори $\vec{a}(0; 4)$ і $\vec{b}(-3; -2)$. Знайдіть вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

**3.** У прямокутнику $ABCD$ виразіть вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ через вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.

**4.** Знайдіть значення $x$, при якому вектори $\vec{a}(x; 2)$ і $\vec{b}(-3; 6)$:

а) колінеарні; б) перпендикулярні.

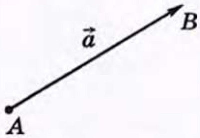
**5.** У рівносторонньому трикутнику $ABC$ проведено медіани $AM$ і $BN$. Побудуйте вектори $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AN} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

**6.** Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(0; -2)$, $B(0; 1)$, $C(2; 2)$, $D(4; 0)$.

# Підсумки розділу V

## ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ V

### Вектори




$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

***Вектором*** називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано, який із його кінців є початком, а який — кінцем.

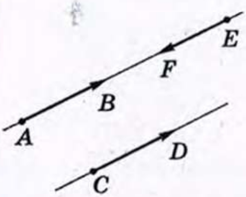
***Координатами вектора*** з початком $A(x_1;\ y_1)$ і кінцем $B(x_2;\ y_2)$ називають числа $a_1 = x_2 - x_1$ і $a_2 = y_2 - y_1$:

$$\vec{a}(a_1;a_2).$$

Довжина вектора $\vec{a}(a_1;a_2)$ обчислюється за формулою

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

---



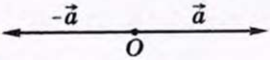

$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EF}$

Ненульові вектори називаються ***колінеарними***, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються ***співнапрямленими*** (або ***однаково напрямленими***), якщо промені $AB$ і $CD$ співнапрямлені.

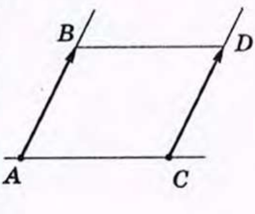
Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{EF}$ називаються ***протилежно напрямленими***, якщо промені $AB$ і $EF$ протилежно напрямлені

---




***Протилежними векторами*** називаються два протилежно напрямлені вектори однакової довжини

---




Два вектори називаються ***рівними***, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням.

***Властивості й ознаки рівних векторів:***

- Рівні вектори співнапрямлені та мають рівні довжини.
- Якщо вектори співнапрямлені і мають рівні довжини, то вони рівні.
- Від будь-якої точки можна відкласти вектор, що дорівнює даному, і притому тільки один.
- Рівні вектори мають рівні координати, і навпаки: якщо у векторів відповідні координати рівні, то ці вектори рівні

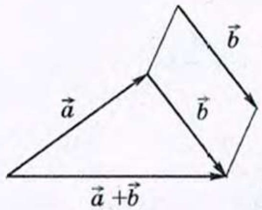
# Дії з векторами

### *Додавання векторів*

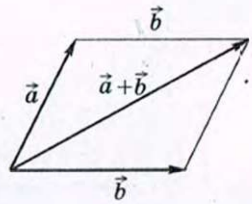
***Сумою векторів*** $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ і $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ називається вектор $\vec{c}(c_1;\ c_2)$ з координатами $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$, тобто

$$\overrightarrow{(a_1;\ a_2)} + \overrightarrow{(b_1;\ b_2)} = \overrightarrow{(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)}$$

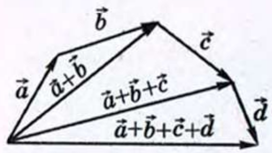
### *Побудова суми векторів*




Правило трикутника




Правило паралелограма



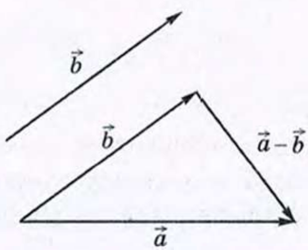

Правило многокутника

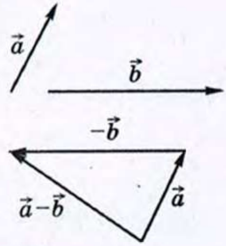
### *Віднімання векторів*

***Різницею векторів*** $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ і $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ називається такий вектор $\vec{c}(c_1;\ c_2)$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$, тобто $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$:

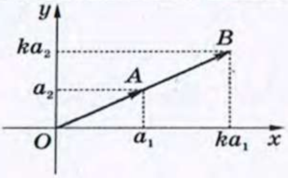
$$\overrightarrow{c(c_1;\ c_2)} = \overrightarrow{(a_1;\ a_2)} - \overrightarrow{(b_1;\ b_2)} = \overrightarrow{(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2)}$$

### *Побудова різниці векторів*

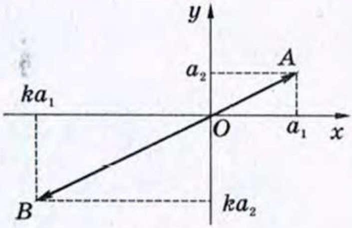


### *Множення вектора на число*




якщо $k > 0$, то
вектор $k\vec{a}$ співнапрямлений
з вектором $\vec{a}$




якщо $k < 0$, то
вектор $k\vec{a}$ протилежно
напрямлений з вектором $\vec{a}$

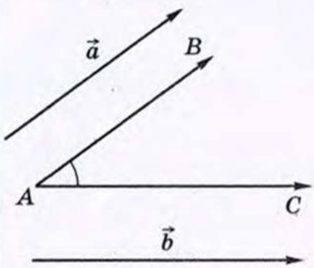
***Добутком вектора*** $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ ***на число*** $k$ (або добутком числа $k$ на вектор $\vec{a}$) називається вектор $k\vec{a} = \overrightarrow{(ka_1;\ ka_2)}$:

$$k\overrightarrow{(a_1;\ a_2)} = \overrightarrow{(ka_1;\ ka_2)}, \quad \left|k\vec{a}\right| = |k|\left|\vec{a}\right|$$

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні вектори, то існує число $k$ таке, що $\vec{b} = k\vec{a}$, і навпаки: якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{b} = k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні

У колінеарних векторів відповідні координати пропорційні, і навпаки: якщо у двох векторів відповідні координати пропорційні, то ці вектори колінеарні

### *Скалярний добуток векторів*




$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \angle BAC$

***Скалярним добутком*** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторів $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ і $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ називається число $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$ називають ***скалярним квадратом***: $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 = \left|\vec{a}\right|^2$.

- Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними:
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$
- Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — ненульові вектори, то
$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}.$$
- ***Властивість і ознака перпендикулярних векторів***: якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, і навпаки: якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ V

**1.** Дайте означення вектора. Як зображають вектори?

**2.** Що таке довжина вектора? Який вектор називають нульовим?

**3.** Які вектори називають співнапрямленими; протилежно напрямленими; колінеарними?

**4.** Дайте означення рівних векторів.

**5.** Як визначити координати вектора? Як пов'язані координати рівних векторів?

**6.** Дайте означення суми двох векторів. Опишіть способи побудови вектора-суми.

**7.** Дайте означення різниці двох векторів. Опишіть способи побудови вектора-різниці.

**8.** Дайте означення добутку вектора на число. Сформулюйте теорему про довжину і напрям вектора $k\vec{a}$.

**9.** Дайте означення скалярного добутку векторів. Як визначається кут між векторами?

**10.** Сформулюйте теорему про скалярний добуток векторів. Сформулюйте властивість і ознаку перпендикулярних векторів.

## ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ V

**673.** Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці $O$, причому $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$. Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.

**674.** У прямокутнику $ABCD$ $AB=8$ см, $BC=15$ см, $O$ — точка перетину діагоналей. Знайдіть $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{OD}\right|$.

**675.** Доведіть, що в паралелограмі $ABCD$ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$.

**676.** Доведіть, що точки $A(8;\ 0)$, $B(4;\ 1)$, $C(0;\ 2)$ лежать на одній прямій. Яка з цих точок лежить між двома іншими?

**677.** Дано вектор $\vec{a}(1;\ -2)$. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=10$, а вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

**678.** Дано вектори $\vec{a}(-1;\ -2)$ і $\vec{b}(-2;\ 1)$. Які кути утворюють ці вектори з вектором $\vec{a}+\vec{b}$?

**679.** У ромбі $ABCD$ $AB=6$ см, $\angle A=120°$. Знайдіть скалярні добутки $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

**680.** Визначте, чи є кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ гострим, прямим або тупим, якщо $\left|\vec{b}\right|>\left|\vec{a}\right|$, а вектори $\vec{a}-2\vec{b}$ і $\vec{a}+\vec{b}$ перпендикулярні.

**681.** Доведіть векторну нерівність $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\geqslant\left|\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|\right|$. У якому випадку має місце рівність?

### Задачі підвищеної складності

**682.** Дано довільний трикутник $ABC$. Доведіть, що вектор $\frac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\cdot\overrightarrow{AB}+$ $+\frac{1}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\cdot\overrightarrow{AC}$ напрямлений уздовж бісектриси кута $A$.

**683.** Дано правильний $n$-кутник. Доведіть, що сума $n$ векторів із початком у центрі цього $n$-кутника і кінцями в його вершинах дорівнює нульовому вектору.

**684.** Точка $O$ — центр кола, описаного навколо трикутника $ABC$, а точка $H$ задовольняє векторну рівність $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Доведіть, що $H$ — ортоцентр трикутника $ABC$. Сформулюйте і доведіть обернене твердження (*формулу Гамільтона*).

**685.** Доведіть, що в трикутнику $ABC$ ортоцентр $H$, центроїд $M$ і центр описаного кола $O$ лежать на одній прямій (*пряма Ейлера*), причому $MH=2OM$.

**686.** Точки $A$, $B$ і $C$ задовольняють рівність $AC^2+BC^2=\frac{1}{2}AB^2$. Доведіть, що $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

**687.** Знайдіть кути між радіусами кола $OA$, $OB$ і $OC$, якщо $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

**688.** Доведіть векторним методом, що сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів бічних сторін, доданій до подвоєного добутку основ.

**689.** Точки $M$, $N$ і $K$ лежать на сторонах $AB$, $BC$ і $AC$ трикутника $ABC$ відповідно. Доведіть, що прямі $AN$, $BK$ і $CM$ перетинаються в одній точці тоді й тільки тоді, коли $AM\cdot BN\cdot CK=BM\cdot CN\cdot AK$ (*теорема Чеви*).

**690.** Доведіть, що кут між прямими $l_1$ і $l_2$, заданими рівняннями $a_1x+b_1y+c_1=0$ і $a_2x+b_2y+c_2=0$ відповідно, визначається із формули

$$\cos\angle(l_1,l_2)=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

## ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Інтерес до векторів і векторного методу виник у математиків у XIX ст. у зв'язку з потребами фізики й механіки. Але витоки числення з напрямленими відрізками знаходимо ще в далекій давнині, в роботах піфагорійців і геометричній теорії відношень Евдокса (408—355 рр. до н. е.). У геометричному численні, що його виклав Евклід, додавання і віднімання чисел зводилося до відповідних операцій з відрізками, а множення — до побудови прямокутника зі сторонами, довжини яких дорівнюють множникам.

Евдокс

У XIV—XVI ст. геометрична алгебра через обмеженість засобів дослідження майже не розвивалася. Однак у 1587 р. фламандський учений Симон Стевін (1548—1620), розглядаючи додавання двох сил у роботі «Початки статики», дійшов висновку, що для визначення рівнодійної слід скористатися так званим «паралелограмом сил». Для позначення сил Стевін першим увів відрізки зі стрілками. Значно пізніше, у 1803 р., французький математик Луї Пуансо (1777—1859) розробив загальну теорію векторів, узагальнивши дослідження попередників.

Симон Стевін

Подальший розвиток векторного методу пов'язаний зі становленням аналітичної геометрії і теорії геометричних перетворень. Вектор $\overline{AB}$ стали розглядати як паралельне перенесення, яке задано початковою точкою $A$ та її образом $B$. Згодом відповідний розділ математики отримав назву «векторна алгебра».

## ТЕМАТИКА ПОВІДОМЛЕНЬ І РЕФЕРАТІВ ДО РОЗДІЛУ V

1. Векторний добуток векторів.
2. Векторні означення геометричних перетворень на площині.
3. Радіус-вектор точки. Проекція вектора на вісь та її застосування.
4. Застосування векторів у природничих науках.

## РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ


1. Атанасян, Л. С. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класса [Текст] / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутусов, С. Б. Кадомцев, С. А. Шестаков, И. И. Юдина — М. : Витапресс, 2002.
2. Бурда, М. І. Геометрія. 8—9 класи: Підручник для загальноосвіт. навч. закл. [Текст] / М. І. Бурда, Л. М. Савченко. — К. : Освіта, 1996.
3. Кушнир, И. А. Координатный и векторный методы решения задач [Текст] / И. А. Кушнир. — К. : Астарта, 1996.
4. Кушнир, И. А. Векторные методы решения задач [Текст] / И. А. Кушнир. — К. : Оберіг, 1994.
5. Математична хрестоматія для 6—8 класів. Т. 1 [Текст]. — К. : Рад. шк., 1968. — 320 с.
6. Математична хрестоматія для старших класів. Геометрія. Т. 2 [Текст] / упоряд. Л. В. Кованцова. — К. : Рад. шк., 1969. — 383 с.
7. Понарин, Я. П. Планиметрия, преобразования плоскости. Т. 1 [Текст] / Я. П. Понарин. — М. : МЦНМО, 2004.
8. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 1 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 320 с. — (Б-ка мат. кружка).
9. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 2 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. — 320 с. — (Б-ка мат. кружка).
10. Інтернет-бібліотека МЦНМО. http://ilib.mirror0.mccme.ru/
11. Сайт видавництва «Ранок». http://www.ranok.com.ua

# Розділ VI
# ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Геометрія кладе в основу чисте споглядання простору.

*Іммануїл Кант, німецький філософ*

Протягом усього часу вивчення геометрії предметом розгляду нашого курсу були фігури однієї площини. У старших класах ви ґрунтовно вивчатимете ***стереометрію*** — розділ геометрії, у якому розглядаються фігури в просторі.

Чимало властивостей геометричних фігур, відомих вам із курсу планіметрії, зберігаються також і в просторі. Тому знайомство зі стереометрією допоможе вам краще узагальнити вивчений матеріал з планіметрії. До того ж, повторення курсу 7—9 класів стане в пригоді напередодні підсумкової атестації.

Зрозуміло, що в повному обсязі вивчити весь курс стереометрії за декілька уроків неможливо. Тому останній розділ підручника принципово відрізняється від попередніх — він являє собою своєрідний стислий огляд курсу геометрії 10—12 класів. Через це більшість тверджень у цьому розділі розглядатимуться без доведень і докладних обґрунтувань, а основні поняття вводитимуться наочно, без строгих означень.

Світ просторових фігур неодмінно зацікавить вас, здивує несподіваним поєднанням нового і добре відомого — адже він є відтворенням навколишнього світу, в якому ми живемо.

# § 20. Прямі і площини в просторі

## 20.1. Основні геометричні фігури в просторі

Рис. 142. Озеро

Як відомо, основними фігурами на площині є точка і пряма. У просторі як основна фігура розглядається також *площина*. Площина в стереометрії мислиться як необмежена, ідеально плоска поверхня — наочне уявлення про неї дають поверхня озера (рис. 142), столу, дзеркала тощо. На рисунках будемо зображати лише частину площини у вигляді паралелограма (рис. 143). Площини зазвичай позначаються малими грецькими буквами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ і т. д.

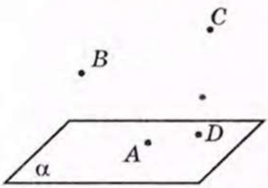



Рис. 143. Площина $\alpha$

Отже, ***основними фігурами в просторі є точка, пряма і площина***. Розширення переліку основних фігур потребує введення нових аксіом і доведення теорем щодо належності точок і прямих площині.

Зокрема, ***яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй***. Так, на рис. 143 точки $A$ і $D$ ***належать площині*** $\alpha$, а точки $B$ і $C$ ***не належать площині*** $\alpha$.

Належність точки $A$ площині $\alpha$ позначають так: $A \in \alpha$.

**Стереометрія** — від грецького «стерео» — тіло і «метрео» — вимірюю — вимірювання тіл

Якщо кожна точка прямої $a$ належить площині $\alpha$, то кажуть, що ***пряма а лежить у площині*** $\alpha$ (або ***належить площині*** $\alpha$). При цьому ***якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма належить цій площині*** (рис. 144).

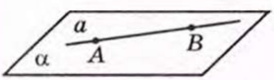



Рис. 144. Пряма $a$ лежить у площині $\alpha$

Належність прямої $a$ площині $\alpha$ позначають так: $a \subset \alpha$.

Зауважимо, що дві прямі в просторі називаються ***паралельними***, якщо вони лежать в одній площині й не перетинаються.

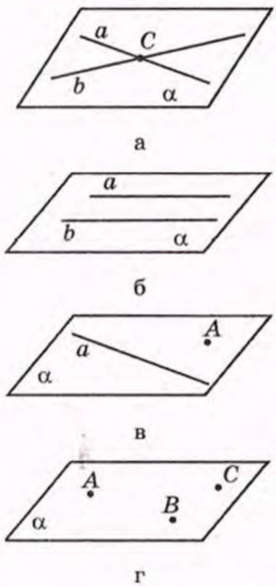



Рис. 145. Фігури в просторі, що визначають єдину площину

**Єдину площину можна провести:**

- **через дві прямі, що перетинаються** (рис. 145, *а*);
- **через дві паралельні прямі** (рис. 145, *б*);
- **через пряму і точку, яка не належить цій прямій** (рис. 145, *в*);
- **через три точки, що не лежать на одній прямій** (рис. 145, *г*).

У будь-якій площині для точок, прямих, відрізків, кутів тощо справджуються всі аксіоми і теореми планіметрії. Крім того, означення рівності й подібності, а також геометричних перетворень (переміщення, симетрії, паралельного перенесення) для фігур у просторі вводяться так само, як і на площині, а відповідні властивості зберігаються.

## 20.2. Взаємне розміщення прямої і площини

У випадку, коли дві точки прямої лежать у даній площині, усі інші точки прямої також лежать у цій площині. Існує ще два випадки взаємного розміщення прямої і площини: перетин (пряма і площина мають єдину спільну точку) і паралельність (пряма і площина не мають спільних точок).

Таким чином, ***пряма і площина або паралельні, або перетинаються, або пряма лежить у площині.***

Усі випадки взаємного розміщення прямої і площини представлені на рис. 146.

Паралельність прямої $a$ і площини $\alpha$ позначають так: $a \parallel \alpha$.

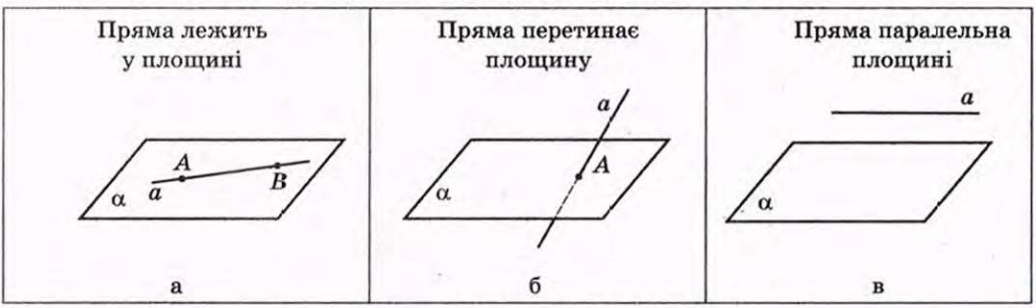



Рис. 146. Взаємне розміщення прямої і площини в просторі

Розглянемо окремий випадок перетину прямої $a$ з площиною $\alpha$, коли пряма $a$ перпендикулярна до будь-якої прямої площини $\alpha$, що проходить через точку перетину $A$ прямої $a$ і площини $\alpha$ (рис. 147). У такому випадку кажуть, що ***пряма a перпендикулярна до площини*** $\alpha$ (пишуть так: $a \perp \alpha$).

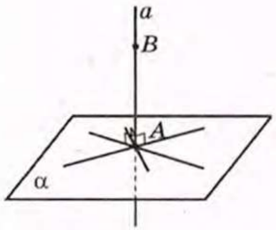



**Рис. 147.** Пряма $a$ перпендикулярна до площини $\alpha$

Відрізок $BA$ прямої $a$, одним із кінців якого є точка перетину $a$ і $\alpha$, називають ***перпендикуляром, проведеним із точки B до площини*** $\alpha$, а довжину цього перпендикуляра — ***відстанню від точки B до площини*** $\alpha$.

Зауважимо, що під час побудови прямих і площин, що перетинаються, ми вважаємо площини непрозорими, тобто використовуємо для зображення невидимих частин цих фігур штрихові лінії. Так, на рис. 147 невидимою є частина прямої $a$.

## 20.3. Взаємне розміщення прямих у просторі

Як відомо, дві прямі на площині або перетинаються, або паралельні. У просторі можливий ще один випадок взаємного розміщення прямих. Нехай пряма $b$ лежить у площині $\alpha$, а пряма $a$ перетинає цю площину в точці $A$, яка не належить прямій $b$ (рис. 148). Таким чином, прямі $a$ і $b$ не мають спільних точок, але не є паралельними, оскільки не лежать в одній площині (тобто неможливо провести площину, яка містила б обидві ці прямі). У такому випадку прямі $a$ і $b$, які не перетинаються і не лежать в одній площині, називають ***мимобіжними***.

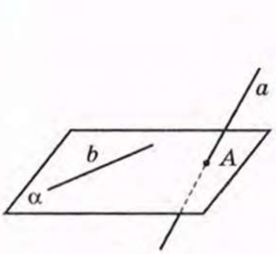
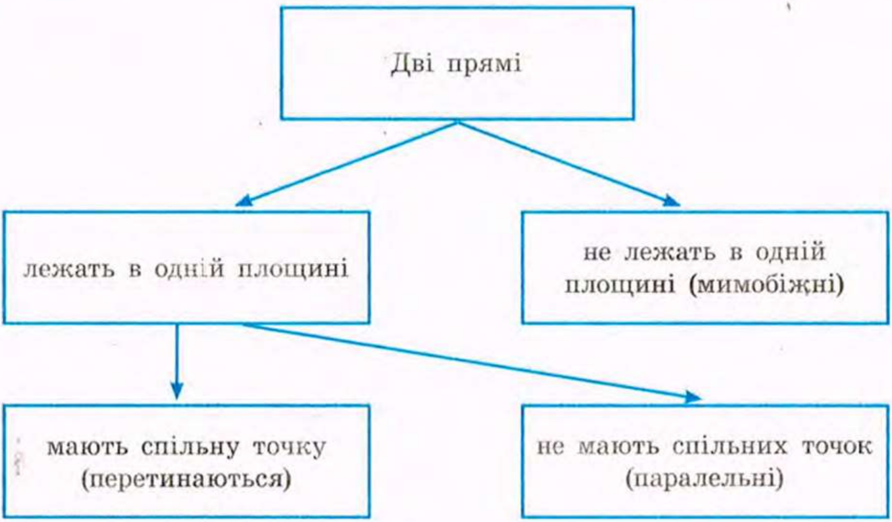



**Рис. 148.** Прямі $a$ і $b$ мимобіжні

Таким чином, ***дві прямі в просторі або перетинаються, або паралельні, або мимобіжні***. Усі випадки взаємного розміщення прямих у просторі можна подати у вигляді такої схеми.



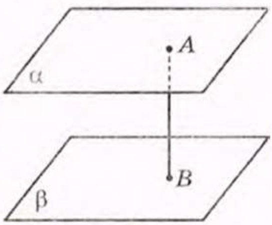




**Рис. 149.** Відрізок $AB$ — відстань між паралельними площинами $\alpha$ і $\beta$

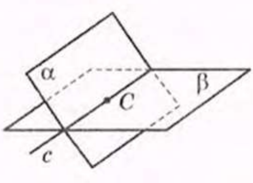



**Рис. 150.** Площини $\alpha$ і $\beta$ перетинаються по прямій $c$

## 20.4. Взаємне розміщення площин

Розглянемо площини $\alpha$ і $\beta$, які не мають спільних точок (рис. 149). Такі площини називають ***паралельними*** (пишуть так: $\alpha \parallel \beta$). Перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї з цих площин до іншої, є ***відстанню між паралельними площинами.***

Розглянемо тепер випадок, коли площини $\alpha$ і $\beta$ мають спільну точку $C$ (рис. 150). Наочне уявлення про таке розміщення площин можна отримати, якщо замість площин $\alpha$ і $\beta$ розглянути дві сторінки зошита або книги. Як бачимо, спільна точка двох площин не є єдиною — площини $\alpha$ і $\beta$ мають спільну пряму $c$, що проходить через точку $C$. Інакше кажуть: ***площини*** $\alpha$ ***і*** $\beta$ ***перетинаються по прямій*** $c$ (позначають так: $\alpha \cap \beta = c$). Отже, ***якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.***

Таким чином, ***дві площини в просторі або паралельні, або перетинаються по прямій.***

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**691.** Чи правильно, що:

а) будь-які три точки простору лежать в одній площині;

б) будь-які чотири точки простору лежать в одній площині?

**692.** Скільки площин можна провести в просторі:

а) через довільну пряму;

б) через пряму і точку, що не лежить на цій прямій;

в) через дві паралельні прямі;

г) через дві мимобіжні прямі?

**693.** Визначте, чи лежить трикутник $ABC$ у площині $\alpha$, якщо:

а) усі вершини трикутника лежать у площині $\alpha$;

б) сторона $AB$ лежить у площині $\alpha$;

в) медіана $AD$ лежить у площині $\alpha$;

г) медіана $AD$ і вершина $C$ лежать у площині $\alpha$.

**694.** Одна з двох мимобіжних прямих лежить у площині $\alpha$. Чи може друга пряма також лежати в даній площині? Чому?

**695.** Чи можуть дві площини мати лише одну спільну точку; лише дві спільні точки?

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**696.** Накресліть площини $\alpha$ і $\beta$, які перетинаються по прямій $c$.

а) Проведіть пряму $l$, яка перетинає площини $\alpha$ і $\beta$, але не перетинає пряму $c$. Визначте взаємне розміщення прямих $l$ і $c$.

б) Проведіть пряму $a$, яка лежить у площині $\alpha$ і паралельна прямій $c$. Як розміщена пряма $a$ відносно площини $\beta$?

→ **697.** Накресліть трикутник $ABC$ і позначте точку $D$, яка не лежить у площині цього трикутника.

а) Як розміщена пряма $DA$ відносно площини трикутника $ABC$?

б) Як розміщені прямі $DA$ і $BC$?

# ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

## Рівень А

**698.** Точка $A$ не належить прямій $a$. Чи будуть усі прямі, які проходять через точку $A$ і перетинають пряму $a$, лежати в одній площині? Відповідь обґрунтуйте.

→ **699.** Прямі $a$ і $b$ паралельні. Чи будуть усі прямі, які перетинають обидві дані прямі, лежати в одній площині? Відповідь обґрунтуйте.

**700.** Точка $O$ є спільною точкою прямих $a$, $b$ і $c$. Чи означає це, що прямі $a$, $b$ і $c$ лежать в одній площині? Зробіть рисунок.

→ **701.** Через точки $A$, $B$ і $C$ проходять дві різні площини. Чи лежить точка $C$ на прямій $AB$? Відповідь обґрунтуйте.

**702.** Катет $BC$ прямокутного трикутника $ABC$ ($\angle B = 90°$) лежить у площині $\alpha$. Чи означає це, що катет $AB$ є перпендикуляром до площини $\alpha$? Зробіть рисунок.

**703.** Відрізок $AB$ — перпендикуляр до площини $\alpha$ (точка $B$ — основа перпендикуляра), а точка $C$ лежить у площині $\alpha$. Знайдіть відстань від точки $A$ до площини $\alpha$, якщо $AC = 25$ см, $BC = 7$ см.

→ **704.** Пряма $a$ перпендикулярна до площини $\alpha$ і перетинає її в точці $O$. Точка $A$ лежить на даній прямій і віддалена від площини $\alpha$ на 32 см, а від точки $B$ цієї площини — на 40 см. Знайдіть $OB$.

**705.** Пряма $b$ паралельна площині $\alpha$, а пряма $a$ лежить у площині $\alpha$. Чи можуть прямі $a$ і $b$ бути паралельними; перетинатися; бути мимобіжними? Зробіть рисунки.

→ **706.** Пряма $b$ паралельна площині $\alpha$, а пряма $a$ перпендикулярна до площини $\alpha$. Чи можуть прямі $a$ і $b$ бути паралельними; перетинатися; бути мимобіжними? Зробіть рисунки.

**707.** Чи правильно, що три площини, які мають спільну точку, мають спільну пряму? Зробіть рисунки.

**708.** Пряма $a$ лежить у площині $\alpha$, а пряма $b$ — у площині $\beta$, паралельній $\alpha$. Чи можуть прямі $a$ і $b$ бути паралельними; перетинатися; бути мимобіжними? Зробіть рисунки.

→ **709.** Площини $\alpha$ і $\beta$ перетинаються по прямій $c$. Пряма $a$ лежить у площині $\alpha$. Чи можуть прямі $a$ і $c$ бути паралельними; перетинатися; бути мимобіжними? Зробіть рисунки.

## Рівень Б

**710.** Точки $A$, $B$, $C$ і $D$ не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі $AB$ і $CD$ не перетинаються.

→ **711.** Чотири точки не лежать в одній площині. Чи можуть які-небудь три з них лежати на одній прямій? Відповідь обґрунтуйте.

**712.** Пряма $b$ лежить у площині $\beta$, а пряма $c$ паралельна площині $\beta$. Доведіть, що прямі $b$ і $c$ не перетинаються.

→ **713.** Доведіть, що через точку поза даною площиною проходить не більше однієї прямої, перпендикулярної до даної площини.

**714.** Пряма $a$ перпендикулярна до площини $\alpha$ і рівновіддалена від точок $B$ і $C$, які лежать у цій площині, причому прямі $a$ і $BC$ перетинаються. Знайдіть відстань між точками $B$ і $C$, якщо точка $A$ прямої $a$ віддалена від цих точок на 13 см, а від площини $\alpha$ — на 12 см.

→ **715.** Відрізок $AB$ — перпендикуляр, проведений із точки $A$ до площини $\alpha$, точки $C$ і $D$ лежать у площині $\alpha$. Чи лежать точки $B$, $C$ і $D$ на одній прямій, якщо $AC = 25$ см, $AD = 17$ см, $AB = 15$ см, $CD = 28$ см?

**716.** Прямі $a$ і $b$ перетинаються, а прямі $b$ і $c$ паралельні. Чи можуть прямі $a$ і $c$ бути паралельними; перетинатися; бути мимобіжними? Зробіть рисунки.

→ **717.** Прямі $AB$ і $CD$ мимобіжні. Доведіть, що прямі $AC$ і $BD$ також мимобіжні.

**718.** Площини $\alpha$ і $\beta$ паралельні. Доведіть, що будь-яка площина, не паралельна даним, перетинає їх по паралельних прямих.

→ **719.** Доведіть, що паралельні площини відтинають на паралельних прямих, які їх перетинають, рівні відрізки.

## Рівень В

**720.** Площини $\alpha$ і $\beta$ перетинаються по прямій $AB$, а площини $\beta$ і $\gamma$ — по прямій $BC$. Чи лежить точка $B$ на прямій $AC$? Зробіть рисунки.

**721.** Площини $\alpha$ і $\beta$ перетинаються по прямій $c$. Площина $\gamma$ перетинає ці площини по прямих $a$ і $b$ відповідно. Доведіть, що коли $a \parallel b$, то кожна з цих прямих паралельна прямій $c$.

## ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 21

### Теоретичний матеріал

- прямокутний паралелепіпед та його об'єм; — 5 клас
- поняття площі; — 8 клас, § 16
- площі многокутників. — 8 клас, § 16, 17

### Задачі

**722.** Знайдіть площу прямокутного трикутника з гіпотенузою 12 см і гострим кутом 30°.

**723.** Площа прямокутної трапеції дорівнює 24 см². Більша основа дорівнює 8 см, а менша основа дорівнює меншій бічній стороні. Знайдіть гострий кут трапеції.

# § 21. Многогранники

Призма — від грецького «призма» — розпиляна

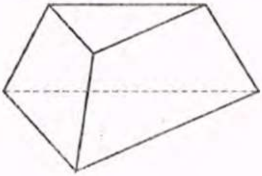


Рис. 151. Многогранник

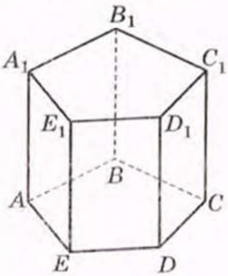



Рис. 152. Призма

Рис. 153

## 21.1. Поняття многогранника. Призма

Серед просторових фігур, які вивчаються в стереометрії, окрему групу складають ***геометричні тіла***. Наочно геометричне тіло можна уявити як частину простору, обмежену деякою поверхнею.

Розгляд геометричних тіл почнемо з ***многогранників*** — тіл, поверхня яких складається зі скінченної кількості плоских многокутників, тобто многокутників з їх внутрішніми областями (рис. 151). Ці плоскі многокутники називають ***гранями многогранника***, їх сторони — ***ребрами многогранника***, а вершини — ***вершинами многогранника***. Наприклад, многогранник на рис. 151 має 5 граней, 9 ребер і 6 вершин.

Розглянемо многогранник, поверхня якого складається з двох плоских многокутників, що лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих многокутників (рис. 152). Такий многогранник називають ***призмою***. Дані плоскі многокутники називають ***основами призми***, інші грані — ***бічними гранями призми***, а ребра призми, що сполучають відповідні вершини основ, — ***бічними ребрами призми***.

Перпендикуляр, проведений із довільної точки однієї основи призми до площини іншої основи, називається ***висотою призми***, а відрізок, що сполучає дві вершини, які не належать одній грані, — ***діагоналлю призми***. На рис. 152 зображено призму $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

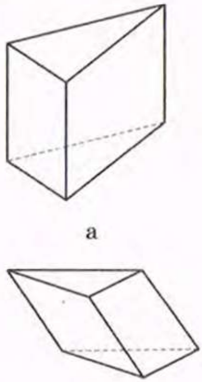
Наочне уявлення про призму дає, наприклад, багатоповерховий будинок (рис. 153).

Із властивостей паралельного перенесення випливають такі властивості призми:

1) **основи призми рівні і лежать у паралельних площинах;**
2) **бічні ребра призми паралельні й рівні;**
3) **бічні грані призми — паралелограми.**

Призма називається ***прямою***, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площин основ (рис. 154, *а*); в іншому випадку призма називається ***похилою*** (рис. 154, *б*). Очевидно, що бічні грані прямої призми — прямокутники, а висота дорівнює бічному ребру.

Пряму призму, основами якої є правильні многокутники, називають ***правильною призмою***. Бічні грані правильної призми — рівні прямокутники.



а

б

**Рис. 154.** Пряма і похила призми

Серед усіх призм до окремого виду виділяють ті, основи яких є паралелограмами, — такі призми називають ***паралелепіпедами*** (рис. 155). Усі грані паралелепіпеда є паралелограмами, причому протилежні грані — рівні паралелограми, що лежать у паралельних площинах.

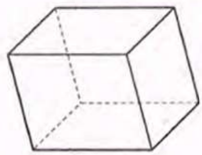
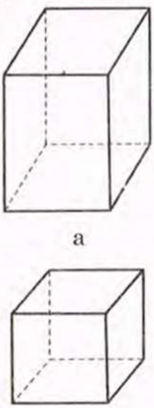


**Рис. 155.** Паралелепіпед

Паралелепіпед називається ***прямокутним***, якщо всі його грані — прямокутники (рис. 156, *а*). Сторони основи і бічне ребро прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї точки, називають його вимірами та позначать відповідно $a$, $b$ і $c$. Якщо всі ребра прямокутного паралелепіпеда рівні (тобто всі грані є квадратами), такий паралелепіпед називається ***кубом*** (рис. 156, *б*).



а

б

**Рис. 156.** Прямокутний паралелепіпед. Куб

***Площею бічної поверхні призми*** (позначається $S_{\text{бічн}}$) називають суму площ усіх її бічних граней, а ***площею повної поверхні*** (позначається $S_{\text{повн}}$) — суму площ усіх її граней: $S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}}$, де $S_{\text{осн}}$ — площа основи призми.

### Теорема (формула площі бічної поверхні прямої призми)

**Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на довжину бічного ребра:**

$$S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot H,$$

**де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи призми, $H$ — бічне ребро.**

**Паралелепіпед** — від грецького «паралелепіпедон» — паралельна площина

**Доведення**

□ Нехай $a_1, a_2, ..., a_n$ — сторони основи прямої призми з бічним ребром $H$. Оскільки її бічні грані є прямокутниками, то $S_{\text{бічн}} = a_1H + a_2H + ... + a_nH = (a_1 + a_2 + ... + a_n) \cdot H = P_{\text{осн}} \cdot H$. ■

**Задача**

Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, діагональ якої дорівнює d і утворює з бічним ребром кут $\alpha$.

**Розв'язання**

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — дана призма (рис. 157), $B_1D = d$ — її діагональ, $\angle BB_1D = \alpha$. Знайдемо площу бічної поверхні призми.

Із трикутника $BB_1D$ ($\angle B = 90°$, $\angle B_1 = \alpha$, $B_1D = d$) $BB_1 = d\cos\alpha$, $BD = d\sin\alpha$.

Оскільки дана призма правильна, то $ABCD$ — квадрат, тобто з рівнобедреного прямокутного трикутника $ABD$

$AB = BD\cos 45°$, $AB = \dfrac{\sqrt{2}}{2} d\sin\alpha$.

Тоді $P_{\text{осн}} = 4AB = 2\sqrt{2}d\sin\alpha$, $S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot BB_1$,

$$S_{\text{бічн}} = 2\sqrt{2}d\sin\alpha \cdot d\cos\alpha = 2\sqrt{2}d^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

**Відповідь:** $2\sqrt{2}d^2\sin\alpha\cos\alpha$.

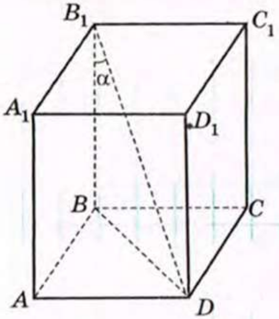



**Рис. 157**

## 21.2. Піраміда

Розглянемо довільний плоский многокутник і точку $P$, яка не лежить у площині цього многокутника (рис. 158). Послідовно сполучивши точку $P$ з усіма точками многокутника, дістанемо ***піраміду***. При цьому даний многокутник є ***основою піраміди***, точка $P$ — ***вершиною піраміди***, а відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами її основи, — ***бічними ребрами піраміди***. Якщо основа піраміди — $n$-кутник, то ***площа*** її ***бічної***

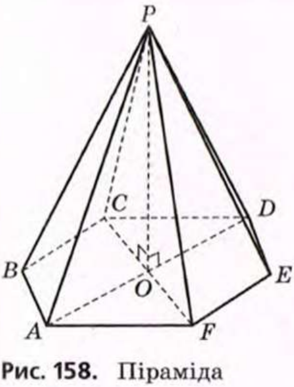



**Рис. 158.** Піраміда

***поверхні*** є сумою площ $n$ трикутників зі спільною вершиною $P$ — ***бічних граней піраміди.*** Перпендикуляр, проведений із вершини піраміди до площини її основи, є ***висотою*** піраміди. Зокрема, піраміда на рис. 158 має висоту $PO$, яка перпендикулярна до площини $ABC$.

Слово «піраміда» має грецьке походження, а спорудженням величних пірамід уславилися давні єгиптяни (рис. 159).

**Рис. 159.** Єгипетські піраміди

Піраміда називається ***правильною,*** якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника. На рис. 160 зображено правильну чотирикутну піраміду $PABCD$: її основа — квадрат $ABCD$, а основа її висоти точка $O$ — точка перетину діагоналей цього квадрата.

Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, всі бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники. Висоту бічної грані правильної піраміди, проведену з її вершини, називають ***апофемою.*** Так, на рис. 160 відрізок $PM$ — апофема правильної піраміди $PABCD$. Очевидно, що всі апофеми правильної піраміди рівні.

**Апофема** — від грецького «апофема» — та, що відкладена

**Теорема (формула площі бічної поверхні правильної піраміди)**

**Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему:**

$$S_{\text{бічн}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l,$$

**де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи піраміди, $l$ — апофема.**

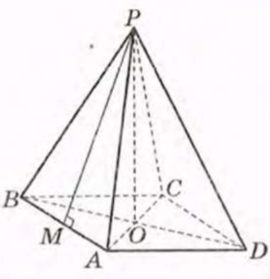



**Рис. 160.** Правильна чотирикутна піраміда

**Доведення**

□ Нехай основа правильної піраміди — правильний $n$-кутник зі стороною $a$. Оскільки всі бічні грані піраміди рівні і мають площу $\frac{1}{2}al$, то $S_{\text{бічн}} = n \cdot \frac{1}{2}al = \frac{1}{2}an \cdot l = \frac{1}{2}P_{\text{осн}} \cdot l$. ■

Площа повної поверхні піраміди дорівнює сумі площ її бічної поверхні та основи:

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}}.$$

### Задача

Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди з апофемою $4\sqrt{3}$ см і плоским кутом при вершині $\alpha$.

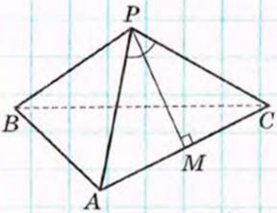



Рис. 161

### Розв'язання

Нехай $PABC$ — правильна трикутна піраміда з основою $ABC$ (рис. 161). Розглянемо бічну грань $APC$ і проведемо апофему $PM$. За умовою задачі $\angle APC = \alpha$, $PM = 4\sqrt{3}$ см. Оскільки трикутник $APC$ рівнобедрений з основою $AC$, то висота $PM$ є також його медіаною і бісектрисою. Отже, з трикутника $APM$ ($\angle M = 90°$, $\angle APM = \frac{\alpha}{2}$, $PM = 4\sqrt{3}$ см) маємо $AM = PM \operatorname{tg} \angle APM$,

$AM = 4\sqrt{3} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 4\sqrt{3} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (см).

Оскільки $AC = 2AM$, то $AC = 2 \cdot 4\sqrt{3} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 8\sqrt{3} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (см).

Знайдемо бічну поверхню піраміди:

$$S_{\text{бічн}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8\sqrt{3} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 144 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

**Відповідь:** $144 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ см$^2$.

## 21.3. Об'єми призми і піраміди

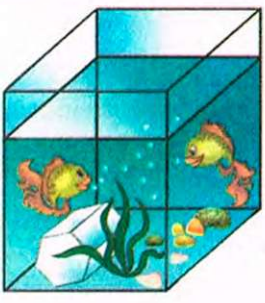


Рис. 162

Ви вже знайомі з поняттям площі як числової характеристики фігури на площині. Аналогічною характеристикою в просторі є *об'єм* — додатна величина, яка ставиться у відповідність геометричному тілу. За одиницю вимірювання об'ємів приймають об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини. Зазвичай об'єм позначають буквою $V$.

Уявімо собі, що многогранник занурено в посудину із рідиною (рис. 162). При цьому рівень рідини в посудині збільшиться. Об'єм рідини, витісненої тілом, можна виміряти, причому він дорівнюватиме об'єму многогранника. На підставі такого наочного уявлення розглянемо об'єми призми та піраміди.

Як відомо з курсу математики 5 класу, об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів:

$$V = abc.$$

Оскільки $ab$ — площа основи паралелепіпеда, то можна стверджувати, що об'єм паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту.

Виявляється, що така закономірність зберігається для будь-якої призми. Отже, ***об'єм призми дорівнює добутку площі її основи на висоту***:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H.$$

Експериментально можна встановити (а в старших класах це буде доведено), що коли призма і піраміда мають рівні основи й однакові висоти, то об'єм піраміди утричі менший, ніж об'єм призми. Отже, ***об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту***:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

Строгі обґрунтування щойно наведених формул подаються в курсі геометрії старших класів.

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**724.** Визначте вид многокутника, який є основою призми, якщо дана призма має 8 граней; 15 граней; $n$ граней.

**725.** Чи існує призма, яка має 9 ребер; 15 ребер; 100 ребер; 150 ребер? Визначте закономірність.

**726.** Чим відрізняються:

а) пряма чотирикутна призма і прямий паралелепіпед;

б) правильна чотирикутна призма і прямокутний паралелепіпед;

в) прямий і прямокутний паралелепіпед;

г) правильна чотирикутна призма і куб?

**727.** У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 163) визначте взаємне розміщення:

а) прямих $BC$ і $DD_1$; $A_1B$ і $CD_1$; $A_1C$ і $B_1D$;

б) площин $B_1BC$ і $A_1AD$; $A_1AC$ і $B_1BD$.

**728.** Визначте вид многокутника, який є основою піраміди, якщо дана піраміда має 4 грані; 11 граней; $n$ граней.

**729.** Чи існує піраміда, яка має 16 ребер; 25 ребер; 100 ребер; 101 ребро? Визначте закономірність.

**730.** Точка $O$ — основа висоти $PO$ трикутної піраміди $PABC$. Чи є дана піраміда правильною, якщо:

а) точка $O$ — центр кола, описаного навколо трикутника $ABC$;

б) трикутник $ABC$ — рівносторонній;

в) точка $O$ — центр правильного трикутника $ABC$?

**731.** У піраміді $PABC$ (рис. 164) визначте взаємне розміщення прямих:

а) $AC$ і $PB$; б) $PA$ і $BC$; в) $AB$ і $PA$.

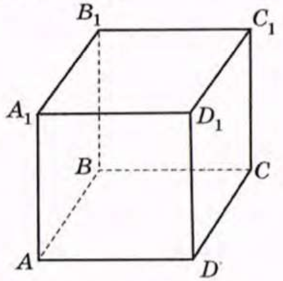


**Рис. 163**

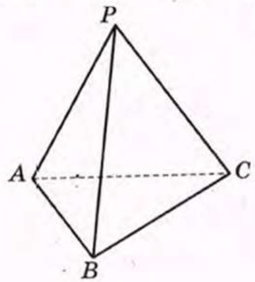


**Рис. 164**

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**732.** Зобразіть правильну чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведіть діагоналі граней $BD$, $BC_1$ і $DC_1$. Визначте вид многогранника $BC_1DC$.

→ **733.** Зобразіть правильну трикутну піраміду $PABC$ і проведіть її висоту $PO$. Сполучіть точку $O$ з вершинами основи $A$, $B$ і $C$. Чи рівні кути $POA$, $POB$ і $POC$?

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**734.** Знайдіть площу:

а) бічної поверхні правильної шестикутної призми зі стороною основи 6 см і бічним ребром 5 см;

б) повної поверхні правильної чотирикутної призми з площею основи 36 см$^2$ і висотою 10 см;

в) бічної поверхні прямої призми, основа якої — прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см, а найбільша бічна грань — квадрат.

**735.** Знайдіть площу:
а) бічної поверхні правильної трикутної призми з площею основи $4\sqrt{3}$ см$^2$ і висотою 6 см;
б) повної поверхні прямої призми, основа якої — прямокутник, а висота і діагоналі бічних граней дорівнюють відповідно 8 см, 10 см і 17 см.

**736.** Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює 90 см$^2$, а висота 5 см. Знайдіть площу основи призми.

**737.** Знайдіть площу повної поверхні:
а) правильної чотирикутної призми з висотою 10 см і площею бічної грані 30 см$^2$;
б) прямокутного паралелепіпеда із вимірами 3 см, 4 см і 5 см.

**738.** Знайдіть площу:
а) повної поверхні правильної трикутної піраміди, всі ребра якої дорівнюють $a$;
б) бічної поверхні правильної п'ятикутної піраміди зі стороною основи 2 см і апофемою 4 см.

**739.** Знайдіть площу:
а) бічної поверхні правильної трикутної піраміди з бічним ребром 5 см і апофемою 4 см;
б) повної поверхні правильної чотирикутної піраміди з площею основи 25 см$^2$ і апофемою 8 см.

**740.** Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 10 м, а площа бічної поверхні 150 м$^2$. Знайдіть кут між бічними ребрами піраміди.

**741.** Площа повної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнює 108 см$^2$, причому площа бічної поверхні вдвічі більша, ніж площа основи. Знайдіть сторону основи й апофему.

**742.** Знайдіть об'єм:
а) прямої призми з площею основи 24 см$^2$ і бічним ребром 5 см;
б) прямого паралелепіпеда, якщо сторони його основи дорівнюють $2\sqrt{2}$ см і 4 см, кут між ними 45°, а висота паралелепіпеда 8 см;
в) правильної трикутної піраміди зі стороною основи 2 см і висотою $6\sqrt{3}$ см.

**743.** Об'єм правильної чотирикутної піраміди дорівнює 36 см$^3$. Знайдіть висоту піраміди, якщо периметр її основи дорівнює 24 см.

**744.** Знайдіть:

а) виміри прямокутного паралелепіпеда, об'єм якого дорівнює 126 см$^3$, а площі двох граней 18 см$^2$ і 42 см$^2$;

б) об'єм правильної чотирикутної піраміди з діагоналлю основи $4\sqrt{2}$ см і бічним ребром $\sqrt{17}$ см.

## Рівень Б

**745.** Знайдіть площу:

а) бічної поверхні прямої призми з висотою 10 см, основою якої є трикутник зі сторонами 5 см і 8 см та кутом між ними 60°;

б) повної поверхні правильної чотирикутної призми зі стороною основи 4 см і діагоналлю 9 см.

**746.** Знайдіть площу повної поверхні прямої трикутної призми, основою якої є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см, а діагональ найбільшої бічної грані дорівнює 26 см.

**747.** Знайдіть площу бічної поверхні:

а) правильної шестикутної піраміди з бічним ребром 4 см і плоским кутом при вершині 30°;

б) правильної трикутної піраміди з площею основи $9\sqrt{3}$ см$^2$ і бічним ребром 5 см.

**748.** Площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнює $S$. Знайдіть площу основи піраміди, якщо її апофема дорівнює $l$.

**749.** Знайдіть об'єм:

а) прямої призми, основою якої є рівнобедрена трапеція з основами 4 см і 10 см та гострим кутом 45°, а найбільша бічна грань — квадрат;

б) правильної трикутної піраміди з висотою 6 см і бічним ребром 10 см;

в) куба, повна поверхня якого має площу 54 см$^2$.

**750.** Об'єм правильної трикутної призми дорівнює $54\sqrt{3}$ см$^3$, а висота 6 см. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, основа якої дорівнює основі призми, а всі ребра рівні.

**751.** Знайдіть об'єм:

а) піраміди, основою якої є трикутник зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см, а висота піраміди дорівнює найбільшій висоті цього трикутника;

б) прямокутного паралелепіпеда, площі трьох граней якого дорівнюють 15 см$^2$, 18 см$^2$ і 30 см$^2$.

## Рівень В

**752.** Діагоналі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 10 см, 17 см і $3\sqrt{29}$ см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

→ **753.** Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$, якщо площа трикутника $AB_1C$ дорівнює $12\sqrt{91}$ см², а його висота, проведена до сторони $AC$, — $2\sqrt{91}$ см.

**754.** Доведіть, що всі грані трикутної піраміди $PABC$ рівні, якщо:
а) $PA = BC$, $PB = AC$, $PC = AB$;
б) $\angle ABP = \angle BPC$, $\angle APB = \angle CBP$, $\angle APC = \angle BAP$.

**755.** Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди $PABCD$ з основою $ABCD$, бічне ребро якої дорівнює $m$, а $\angle APC = 60°$.

→ **756.** Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми, найбільша діагональ якої дорівнює $d$ і утворює з бічним ребром кут $\alpha$.

## ПОВТОРЕННЯ ПЕРЕД ВИВЧЕННЯМ § 22

### Теоретичний матеріал

- довжина кола і площа круга; 9 клас, § 7
- розв'язування прямокутних трикутників. 8 клас, § 21

### Задачі

**757.** Дві взаємно перпендикулярні хорди кола завдовжки 10 см і 24 см мають спільний кінець. Знайдіть довжину кола.

**758.** У гострокутному трикутнику $ABC$ $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, $BH$ — висота, $AH = m$. Знайдіть сторону $AC$.

# § 22. Тіла обертання

Рис. 165

## 22.1. Циліндр

Окрему групу просторових геометричних об'єктів складають тіла, які утворюються внаслідок обертання плоских фігур навколо прямої.

Форму тіл обертання мають предмети, які часто зустрічаються в повсякденному житті, — олівці, пляшки, деякі види головних уборів тощо (рис. 165).

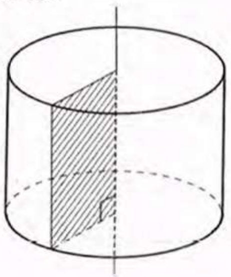


**Рис. 166.** Обертання прямокутника навколо прямої, що містить його сторону

Розглянемо обертання плоского прямокутника навколо прямої, що містить одну з його сторін (рис. 166). Під час обертання дві сторони прямокутника описують круги, а ще одна сторона — деяку поверхню.

Тіло, яке утворюється внаслідок такого обертання прямокутника, називається ***циліндром***. Отже, циліндр складається з двох кругів, які лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням (їх називають ***основами циліндра***, а радіус кожного з них — ***радіусом циліндра***), і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки основ. Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл основ, називаються ***твірними циліндра*** і утворюють ***бічну поверхню циліндра***. Очевидно, що основи циліндра рівні, а твірні паралельні й рівні.

**Циліндр** — від грецького «кіліндро» — катаю, обертаю

Пряма, що проходить через центри основ, є ***віссю циліндра***. ***Висотою циліндра*** називають відстань між площинами його основ. На рис. 167 пряма $OO_1$ — вісь циліндра, відрізок $AB$ — твірна. Очевидно, що твірні і вісь циліндра перпендикулярні до площин його основ, отже, будь-яка твірна, так само, як і відрізок $OO_1$, дорівнює висоті циліндра.

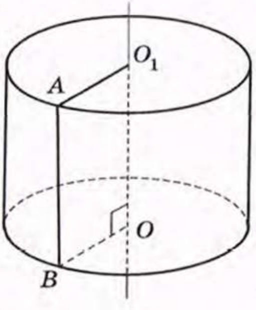



**Рис. 167.** Циліндр

Якщо бічну поверхню циліндра розрізати по одній із твірних і розгорнути на площину,

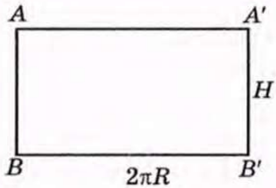



**Рис. 168.** Розгортка бічної поверхні циліндра

дістанемо ***розгортку бічної поверхні циліндра*** (рис. 168). Вона являє собою прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює висоті циліндра, а інша — довжині кола основи. Отже, ***площа бічної поверхні циліндра обчислюється за формулою***

$$S_{\text{бічн}} = 2\pi RH,$$

***де R — радіус циліндра, H — висота.***

Площа повної поверхні циліндра є сумою площі бічної поверхні і площ основ:

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}},$$

тобто $S_{\text{повн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2$, або $S_{\text{повн}} = 2\pi R(R + H)$.

## 22.2. Конус

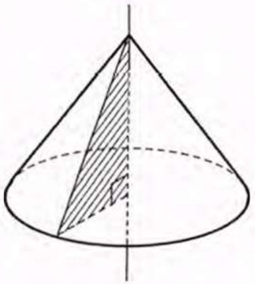


**Рис. 169.** Обертання прямокутного трикутника навколо прямої, що містить його катет

Тіло, утворене обертанням плоского прямокутного трикутника навколо прямої, що містить один із його катетів, називається ***конусом*** (рис. 169). Поверхня конуса складається з круга (***основи конуса***), що його описує під час обертання другий катет, і деякої поверхні, яку описує гіпотенуза. Ця поверхня є ***бічною поверхнею конуса*** і складається з усіх відрізків, що сполучають точку, яка не лежить у площині основи (***вершину конуса***), з точками кола основи. Кожний із цих відрізків є ***твірною конуса***, а пряма, яка проходить через вершину конуса і центр основи, — ***віссю конуса***. Відрізок осі, що сполучає вершину конуса з центром основи, перпендикулярний до площини основи. Він є ***висотою конуса***. На рис. 170 точка $P$ — вершина конуса, пряма $PO$ — його вісь, відрізок $PO$ — висота конуса, відрізок $PA$ — твірна. Очевидно, що всі твірні конуса рівні.

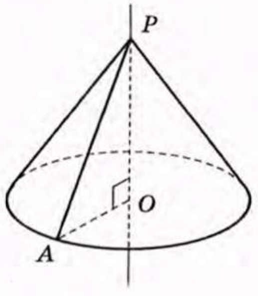



**Рис. 170**

Якщо розрізати бічну поверхню конуса по твірній і розгорнути її на площину, дістанемо ***розгортку бічної поверхні конуса*** (рис. 171). Вона є круговим сектором круга, радіус якого дорівнює твірній конуса $l$, а довжина дуги — довжині кола

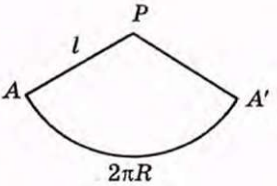



**Рис. 171.** Розгортка бічної поверхні конуса

основи. Тоді відношення площі цього сектора до площі круга радіуса $l$ дорівнює відношенню довжини дуги $AA'$ до довжини кола радіуса $l$: $\frac{S_{\text{бічн}}}{\pi l^2} = \frac{2\pi R}{2\pi l}$.

Звідси випливає, що, ***площа бічної поверхні конуса обчислюється за формулою***

$$S_{\text{бічн}} = \pi R l,$$

***де R — радіус основи конуса, l — твірна.***

Площа повної поверхні циліндра є сумою площі бічної поверхні і площі основи:

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}},$$

тобто $S_{\text{повн}} = \pi Rl + \pi R^2$, або $S_{\text{повн}} = \pi R(l + R)$.


**Рис. 172.** Обертання півкруга навколо прямої, що містить діаметр

## 22.3. Куля. Об'єми тіл обертання

Унаслідок обертання півкруга навколо прямої, що містить його діаметр (рис. 172), утворюється ***куля***. Куля є геометричним місцем точок простору, віддалених від даної точки $O$ (***центра кулі***) на відстань, яка не перевищує $R$ (***радіус кулі***).

Поверхня кулі називається ***сферою***. Сферу не можна розгорнути на площину, тому для отримання формули її площі використовують більш складні міркування. Доведено, що площа сфери учетверо більша за площу круга того самого радіуса, тобто ***площа сфери обчислюється за формулою***

$$S = 4\pi R^2,$$

***де R — радіус сфери.***

**Сфера** — від грецького «сфайра» — куля

Отже, циліндр, конус і куля є основними тілами обертання. Для наочного уявлення про їхні об'єми можна скористатися тими самими міркуваннями, що і для многогранників. Однак можна розмірковувати інакше — наприклад, уявити циліндр як склянку з ідеально тонкими стінками, яку необхідно заповнити рідиною. Об'єм цієї рідини можна прийняти за об'єм циліндра.

а

б

**Рис. 173.** Знаходження об'ємів*

Впишемо в циліндр правильну $n$-кутну призму й опишемо навколо нього правильну $n$-кутну призму (рис. 173, *а*). При збільшенні $n$ площі основ цих призм прямуватимуть до площі основи циліндра, а об'єми призм — до об'єму циліндра. Враховуючи, що висоти призм і циліндра рівні, маємо

$$V_{\text{цил}} = \pi R^2 H,$$

***де R — радіус циліндра, H — висота.***

Застосовуючи аналогічні міркування для конуса і правильних $n$-кутних пірамід (рис. 173, *б*), маємо

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

***де R — радіус основи конуса, H — висота.***

Формула об'єму кулі є наслідком більш складних міркувань, тому наводимо її без наочного пояснення:

$$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

***де R — радіус кулі.***

### Задача

Знайдіть площу бічної поверхні та об'єм конуса, твірна якого дорівнює $l$ і утворює з висотою конуса кут $\alpha$.

### Розв'язання

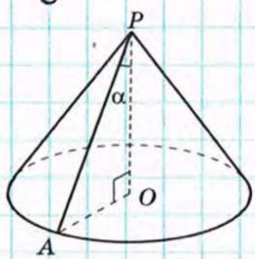



**Рис. 174**

Нехай дано конус із висотою $PO$ (рис. 174).

Із прямокутного трикутника $APO$ ($\angle O = 90°$, $\angle APO = \alpha$, $PA = l$)

$$AO = l\sin\alpha,\ PO = l\cos\alpha.$$

За формулою площі бічної поверхні конуса

$$S_{\text{бічн}} = \pi Rl = \pi \cdot AO \cdot AP, \qquad S_{\text{бічн}} = \pi l^2 \sin\alpha.$$

За формулою об'єму конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot AO^2 \cdot PO, \qquad V = \frac{1}{3}\pi l^3 \sin^2\alpha\cos\alpha.$$

**Відповідь**: $\pi l^2 \sin\alpha$, $\frac{1}{3}\pi l^3 \sin^2\alpha\cos\alpha$.

* На даному рисунку геометричні тіла зображено без штрихових ліній (тобто прозорими).

# Запитання і задачі

## УСНІ ВПРАВИ

**759.** Чи правильно, що:

а) твірна циліндра більша, ніж його висота;

б) твірна конуса більша, ніж його висота?

**760.** Чи існує паралельне перенесення, внаслідок якого:

а) одна з основ циліндра переходить в іншу;

б) одна з твірних конуса переходить в іншу?

**761.** Чи може площа бічної поверхні конуса дорівнювати площі його основи?

**762.** Радіус однієї кулі дорівнює діаметру іншої. У скільки разів площа поверхні першої кулі більша за площу поверхні другої? У скільки разів об'єм першої кулі більший за об'єм другої?

**763.** Циліндр і конус мають рівні радіуси основ та рівні висоти. Яке з цих тіл має більший об'єм? У скільки разів об'єм більшого тіла перевищує об'єм меншого?

## ГРАФІЧНІ ВПРАВИ

**764.** Зобразіть циліндр. Проведіть діаметр $AB$ однієї з його основ. Проведіть із точок $A$ і $B$ перпендикуляри $AA_1$ і $BB_1$ до площини іншої основи. Визначте вид чотирикутника $AA_1B_1B$.

→ **765.** Зобразіть конус із вершиною $P$. Проведіть діаметри основи $AB$ і $CD$. Визначте вид трикутника $APB$. Чи рівні трикутники $APC$ і $BPD$?

## ПИСЬМОВІ ВПРАВИ

### Рівень А

**766.** Висота циліндра дорівнює 24 см. Знайдіть площу основи циліндра, якщо відрізок, який сполучає центр основи з точкою кола іншої основи, дорівнює 25 см.

**767.** Знайдіть площу:

а) повної поверхні циліндра з радіусом 4 см і висотою 6 см;

б) бічної поверхні циліндра з площею основи $25\pi$ см$^2$ і твірною 10 см.

→ **768.** Знайдіть площу:

а) бічної поверхні циліндра з радіусом 4 см, якщо розгорткою бічної поверхні циліндра є квадрат;

б) повної поверхні циліндра, утвореного обертанням квадрата з діагоналлю $3\sqrt{2}$ см навколо сторони.

**769.** Прямокутний трикутник із гіпотенузою 6 см і гострим кутом 30° обертається навколо більшого катета. Знайдіть радіус основи і висоту утвореного конуса.

**770.** Знайдіть площу:

а) бічної поверхні конуса з твірною 13 см і висотою 12 см;

б) повної поверхні конуса, твірна якого дорівнює 10 см і утворює з висотою кут 30°.

→ **771.** Знайдіть площу повної поверхні конуса, площа основи якого дорівнює $9\pi$ см$^2$, а висота 4 см.

**772.** Знайдіть площу сфери з радіусом 2 см.

**773.** Знайдіть об'єм:

а) циліндра, утвореного обертанням прямокутника зі сторонами 3 см і 5 см навколо більшої сторони;

б) конуса з висотою 6 см і твірною $3\sqrt{5}$ см;

в) кулі, площа поверхні якої дорівнює $36\pi$ см$^2$.

→ **774.** Знайдіть об'єм:

а) циліндра з площею основи $16\pi$ см$^2$ і висотою 5 см;

б) конуса, утвореного обертанням рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою $3\sqrt{2}$ см навколо катета;

в) кулі з радіусом 9 см.

## Рівень Б

**775.** Знайдіть площу:

а) бічної поверхні циліндра, якщо відрізок, який сполучає центр основи з точкою кола іншої основи, дорівнює $a$ і утворює з віссю циліндра кут $\alpha$;

б) повної поверхні циліндра, утвореного обертанням прямокутника з діагоналлю 17 см і стороною 15 см навколо даної сторони.

→ **776.** Знайдіть площу повної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює $9\pi$ см$^2$, а середина твірної віддалена від центра основи на 5 см.

**777.** Знайдіть площу повної поверхні конуса, висота якого дорівнює 20 см, а основа висоти віддалена від твірної на 12 см.

**778.** Бічна поверхня конуса має площу $32\pi$ см$^2$. Знайдіть площу основи конуса, якщо його твірна дорівнює діаметру основи.

→ **779.** Знайдіть площу повної поверхні конуса, в якому кут між твірною і висотою дорівнює 30°, а відстань від основи висоти до середини твірної складає 8 см.

**780.** Об'єм кулі дорівнює $36\pi$ см$^3$. Знайдіть площу сфери, яка обмежує дану кулю.

**781.** Знайдіть об'єм:

а) циліндра з висотою $H$, якщо хорда основи завдовжки $H$ стягує дугу $\alpha$;

б) конуса з вершиною $P$ і діаметром основи $AB$, якщо трикутник $PAB$ прямокутний і має площу 9 см$^2$.

→ **782.** Знайдіть об'єм конуса, твірна якого дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні дорівнює площі бічної поверхні циліндра з діаметром 5 см і твірною 12 см.

## Рівень В

**783.** Прямокутник із площею $S$ обертається навколо сторони. Знайдіть площу бічної поверхні утвореного циліндра.

→ **784.** Твірна конуса складає з його висотою кут $\alpha$. Знайдіть площу основи конуса, якщо площа його бічної поверхні дорівнює $Q$.

**785.** Знайдіть об'єм циліндра з площею основи $Q$ і площею бічної поверхні $S$.

→ **786.** Твірна конуса дорівнює діаметру його основи. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо його висота дорівнює $H$.

### Задачі для підготовки до контрольної роботи № 6

**1.** Прямі $a$ і $b$ перетинаються в точці $O$. Чи будуть усі прямі, які перетинають обидві дані прямі і не проходять через точку $O$, лежати в одній площині? Відповідь обґрунтуйте.

**2.** Дано правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 175). Визначте взаємне розміщення прямих:

а) $BB_1$ і $CC_1$;

б) $AC$ і $BB_1$;

в) $BC_1$ і $AC_1$.

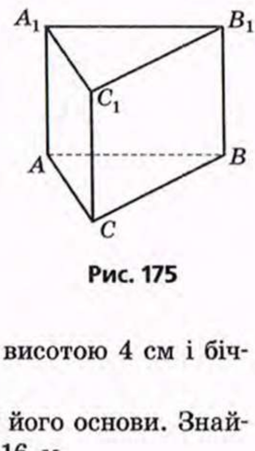


Рис. 175

**3.** Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм зі сторонами 8 см і 10 см та гострим кутом 30°. Висота паралелепіпеда дорівнює меншій висоті цього паралелограма. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

**4.** Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди з висотою 4 см і бічним ребром 5 см.

**5.** Площа бічної поверхні циліндра дорівнює площі його основи. Знайдіть твірну циліндра, якщо його діаметр дорівнює 16 м.

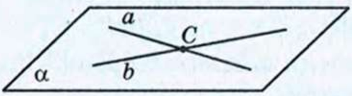
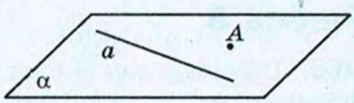
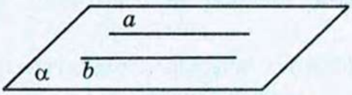
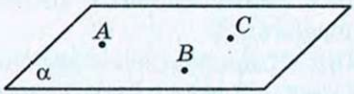
**6.** Знайдіть об'єм конуса, якщо кут між його твірною і висотою дорівнює $\alpha$, а середина твірної віддалена від осі на відстань $a$.

# Підсумки розділу VI

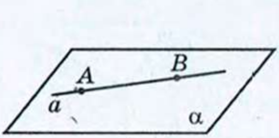
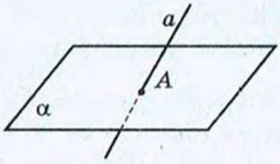
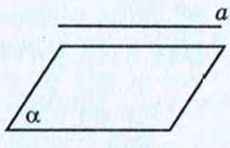
## ПІДСУМКОВИЙ ОГЛЯД РОЗДІЛУ VI

### Прямі і площини в просторі

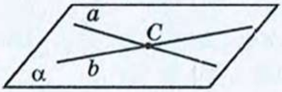
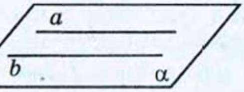
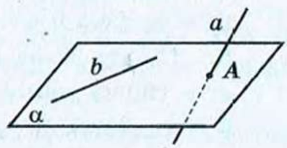
***Способи проведення площини в просторі***

<table>
<tr>
<td>Через дві прямі,<br>що перетинаються<br></td>
<td>Через пряму і точку,<br>яка не належить цій прямій<br></td>
</tr>
<tr>
<td>Через дві паралельні прямі<br></td>
<td>Через три точки, що не лежать<br>на одній прямій<br></td>
</tr>
</table>

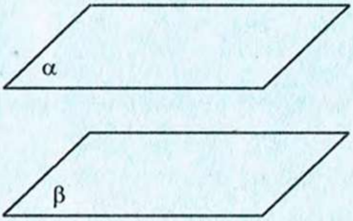
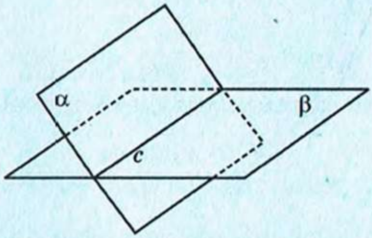
***Взаємне розміщення прямої і площини в просторі***

<table>
<tr>
<td>Пряма лежить<br>у площині<br></td>
<td>Пряма перетинає<br>площину<br></td>
<td>Пряма паралельна<br>площині<br></td>
</tr>
</table>

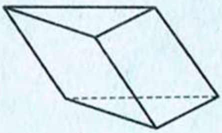
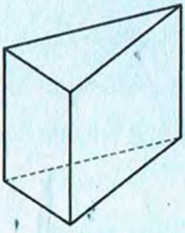
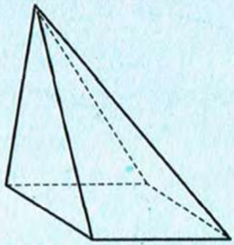
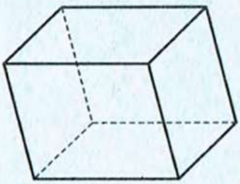
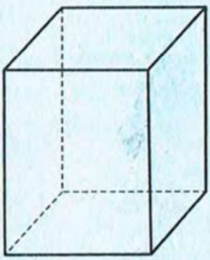
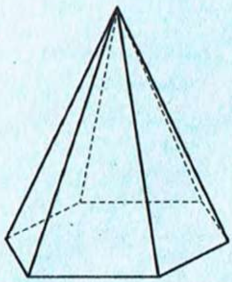
***Взаємне розміщення прямих у просторі***

<table>
<tr>
<td>Дві прямі<br>перетинаються<br></td>
<td>Дві прямі<br>паралельні<br></td>
<td>Дві прямі<br>мимобіжні<br></td>
</tr>
</table>

## *Взаємне розміщення площин у просторі*

| Дві площини паралельні | Дві площини перетинаються по прямій |
|---|---|
|   |   |

## Многогранники

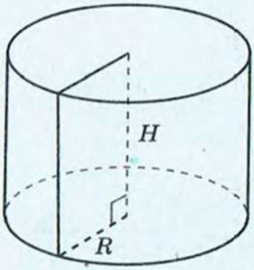
| Призма | | Піраміда |
|---|---|---|
| Похила | Пряма | |
|  |  |  |
| **Паралелепіпед** | **Прямокутний паралелепіпед** | **Правильна піраміда** |
|  |  |  |

## Основні формули для пірамід і призм

| Площа бічної поверхні прямої призми | Площа бічної поверхні правильної піраміди |
|---|---|
| $S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot H,$<br>де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи,<br>$H$ — бічне ребро прямої призми | $S_{\text{бічн}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l,$<br>де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи,<br>$l$ — апофема правильної піраміди |
| ***Об'єм призми*** | ***Об'єм піраміди*** |
| $V = S_{\text{осн}} \cdot H,$<br>де $S_{\text{осн}}$ — площа основи,<br>$H$ — висота призми | $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H,$<br>де $S_{\text{осн}}$ — площа основи,<br>$H$ — висота піраміди |

## Тіла обертання

### Циліндр




***Площа бічної поверхні***

$$S_{\text{бічн}} = 2\pi RH$$

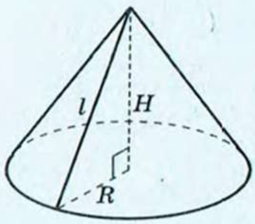
***Площа повної поверхні***

$$S_{\text{повн}} = 2\pi R(R+H)$$

***Об'єм***

$$V_{\text{цил}} = \pi R^2 H$$

### Конус




***Площа бічної поверхні***

$$S_{\text{бічн}} = \pi Rl$$

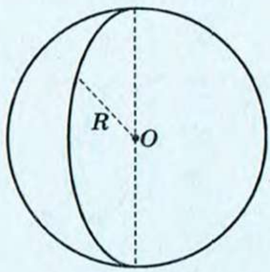
***Площа повної поверхні***

$$S_{\text{повн}} = \pi R(l+R)$$

***Об'єм***

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

### Куля




***Площа сфери***

$$S = 4\pi R^2$$

***Об'єм кулі***

$$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ VI

1. Опишіть взаємне розміщення у просторі двох прямих; прямої і площини; двох площин.
2. Опишіть призму. Яка призма називається прямою; правильною?
3. Опишіть паралелепіпед. Який паралелепіпед називається прямим; прямокутним?
4. Запишіть формули площ бічної та повної поверхонь прямої призми.
5. Опишіть піраміду. Яка піраміда називається правильною?
6. Що таке апофема правильної піраміди? Запишіть формулу площі бічної поверхні правильної піраміди.
7. Запишіть формули об'ємів прямої призми та піраміди.
8. Опишіть циліндр та його елементи.
9. Запишіть формули площ бічної та повної поверхонь циліндра.
10. Опишіть конус та його елементи.
11. Запишіть формули площ бічної та повної поверхонь конуса.
12. Опишіть кулю і запишіть формулу площі сфери.
13. Запишіть формули об'ємів циліндра, конуса, кулі.

## ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Стереометрія як розділ геометрії зароджувалася і розвивалася одночасно з планіметрією. Майже всі твердження про паралельність і перпендикулярність прямих і площин у просторі були відомі в Давній Греції, чимало з них викладені у «Началах» Евкліда.

Властивості многогранників і тіл обертання першими систематично виклали давньогрецькі математики. Окрім Евкліда, слід особливо виділити Архімеда, який у двох своїх працях дослідив властивості тіл обертання. Одним із засновників теорії конічних поверхонь вважається давньогрецький геометр Аполлоній Пергський (бл. 262 – бл. 190 р.р. до н. е.). Робота Аполлонія «Конічні перерізи» розглядає перерізи поверхонь, утворених обертанням однієї з двох прямих, що перетинаються, навколо іншої. Ця праця справила вплив на розвиток механіки, оптики й астрономії.

Важливі дослідження в галузі геометрії многогранників належать усесвітньо відомому українському математикові Георгію Феодосійовичу Вороному (1868–1908). Зокрема, він дослідив проблему заповнення простору рівними опуклими многогранниками.

Об'єми деяких многогранників уміли обчислювати ще в Стародавньому Єгипті. Значною мірою сприяли вдосконаленню методів обчислень об'ємів роботи італійського математика Бонавентури Кавальєрі (1598–1647), який установив ознаку тіл, що мають рівні об'єми, нині відому як принцип Кавальєрі. Але строга сучасна теорія об'ємів, заснована на методах математичного аналізу, з'явилася значно пізніше.

Аполлоній Пергський

Г. Ф. Вороний

## ТЕМАТИКА ПОВІДОМЛЕНЬ І РЕФЕРАТІВ ДО РОЗДІЛУ VI

1. Правильні та напівправильні многогранники.
2. Зірчасті многогранники.
3. Кристали як природні многогранники.
4. Орієнтація поверхні. Листок Мебіуса.

## РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

1. Математична хрестоматія для 6—8 класів. Т. 1 [Текст]. — К. : Рад. шк., 1968. — 320 с.
2. Математична хрестоматія для старших класів. Геометрія. Т. 2 [Текст] / упоряд. Л. В. Кованцова. — К. : Рад. шк., 1969. — 383 с.
3. Понарин, Я. П. Стереометрия, преобразования плоскости. Т. 2 [Текст] / Я. П. Понарин. — М. : МЦНМО, 2004.
4. Прасолов, В. В. Задачи по стереометрии [Текст] / В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. — М. : Наука : Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. — 288 с. — (Б-ка мат. кружка).
5. Смирнова, И. М. В мире многогранников [Текст] / И. М. Смирнова. — М.: Просвещение, 1995.
6. Шаскольская, М. П. Кристаллы [Текст] / М. П. Шаскольская. — М. : Наука, 1985.
7. Інтернет-бібліотека МЦНМО. http://ilib.mirror0.mccme.ru/
8. Сайт видавництва «Ранок». http://www.ranok.com.ua

## ЗАДАЧІ НА ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7—9 КЛАСІВ

**787.** Точки $B$ і $C$ лежать на відрізку $AD$ завдовжки 24 см. Знайдіть довжину відрізка $BC$, якщо $AB = 7$ см, $AC : CD = 3 : 1$.

**788.** Сума трьох кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, дорівнює 220°. Знайдіть кут між даними прямими.

**789.** У рівнобедреному трикутнику $ABC$ з основою $AC$ проведено медіани $AN$ і $CM$. Доведіть рівність трикутників:

а) $ANM$ і $CMN$; б) $ABN$ і $CBM$.

**790.** У трикутнику $ABC$ бісектриса зовнішнього кута при вершині $B$ паралельна стороні $AC$. Доведіть, що $AB = BC$.

**791.** Доведіть рівність трикутників $ABC$ і $A_1B_1C_1$, якщо $BC = B_1C_1$, $\angle A = 80°$, $\angle B = \angle B_1 = 55°$, $\angle C_1 = 45°$.

**792.** У прямокутному трикутнику $ABC$ серединний перпендикуляр до гіпотенузи $BC$ перетинає катет $AB$ в точці $M$. Знайдіть гострі кути трикутника, якщо $\angle AMC = 50°$.

**793.** У прямокутному трикутнику $ABC$ з гіпотенузою $BC$ проведено бісектрису $CM$. Відрізок $MK$ — висота трикутника $CMB$. Знайдіть гострі кути трикутника $ABC$, якщо $\angle AMK = 140°$.

**794.** Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. У яких межах може змінюватися довжина третьої сторони, якщо кут між даними сторонами тупий?

**795.** Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.

**796.** Коло дотикається до сторін кута $A$ в точках $B$ і $C$. Бісектриса кута $A$ перетинає дане коло в точках $M$ і $N$. Доведіть рівність трикутників $MBN$ і $MCN$.

**797.** На сторонах $AD$ і $BC$ паралелограма $ABCD$ позначено точки $M$ і $N$ відповідно, причому $AM = CN = AB$. Доведіть, що чотирикутник $MBND$ — паралелограм, і знайдіть його кути, якщо $\angle A = 80°$.

**798.** Діагоналі рівнобедреної трапеції взаємно перпендикулярні. Доведіть, що середини сторін трапеції є вершинами квадрата.

**799.** Основу рівнобедреного трикутника видно з центра описаного кола під кутом 140°. Знайдіть кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?

**800.** Пряма, паралельна основі рівнобедреного трикутника, ділить бічні сторони у відношенні 3 : 5, починаючи від основи. Знайдіть довжину відрізка прямої, який міститься всередині трикутника, якщо середня лінія, що сполучає середини бічних сторін, дорівнює 8 см.

**801.** Бісектриса прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 100 см і 75 см. Знайдіть довжини відрізків, на які ділить гіпотенузу висота трикутника.

**802.** Знайдіть периметр і площу трикутника зі сторонами 8 см і 15 см та кутом між ними 60°.

**803.** У трикутник зі сторонами 11 см, 25 см і 30 см вписано коло. Знайдіть площу правильного трикутника, вписаного в те саме коло.

**804.** Площа паралелограма дорівнює 21 см$^2$, а одна з його висот 3 см. Знайдіть меншу діагональ паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 45°.

**805.** Радіус кола, вписаного в рівнобедрену трапецію, дорівнює 6 см, а різниця основ 10 см. Знайдіть площу трапеції.

**806.** Знайдіть площу круга, в який вписано прямокутний трикутник із катетами 18 см і 24 см.

**807.** У трикутнику $ABC$ $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Знайдіть висоту $BD$.

**808.** Трикутник $ABC$ задано координатами вершин $A(-6;\ 1)$, $B(3;\ 0)$, $C(4;\ 5)$. Знайдіть довжину медіани, проведеної з вершини $B$.

**809.** Дано точку $A(1;\ 2)$. Задайте:

а) центральну симетрію, внаслідок якої дана точка переходить у точку $B(-5;\ 4)$;

б) осьову симетрію, внаслідок якої дана точка переходить у точку $C(-1;\ 2)$;

в) паралельне перенесення, внаслідок якого дана точка переходить у точку $D(-4;\ -1)$;

г) поворот навколо початку координат, внаслідок якої дана точка переходить у точку $E(-2;\ 1)$;

д) гомотетію з центром у початку координат, внаслідок якої дана точка переходить у точку $F(3;\ 6)$.

**810.** Дано паралелограм $ABCD$. Знайдіть $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{AD}$.

**811.** Знайдіть кути трикутника $ABC$, якщо $\overrightarrow{AB}\ (-4;\ 3)$, $\overrightarrow{BC}\,(7;\ 1)$.

# ДОДАТКИ

## Додаток 1. **Довжина кола та площа круга**

Розглянемо криву лінію $L$, що сполучає точки $A$ та $B$. Розіб'ємо її точками $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ на $n$ частин і розглянемо фігуру, що складається з відрізків $AA_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_{n-1}B$ — ламану $AA_1A_2 \ldots A_{n-1}B$ (рис. 176). Назвемо таку ламану вписаною в криву $L$.

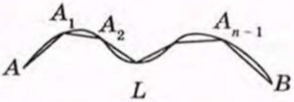



**Рис. 176.** Довжина кривої

Довжиною кривої $L$ називається границя, до якої прямує довжина вписаної в неї ламаної, коли число ланок необмежено зростає, а їх довжина наближається до нуля.

Таке саме означення можна застосувати і для визначення довжини кола. При цьому ламана буде многокутником, вписаним у дане коло (рис. 177).

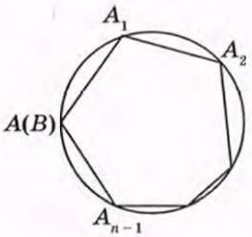



**Рис. 177.** Означення довжини кола

Однак для коректності такого означення потрібно довести, що вказана границя існує. Це доволі складна проблема, яка розв'язується засобами іншої математичної науки — математичного аналізу. Тому визначимо довжину кола таким чином*.

Розглянемо послідовність $P_{2^k}$ периметрів вписаних у дане коло правильних $2^k$-кутників. Доведемо, що при необмеженому зростанні $k$ ці периметри наближаються до деякої границі $C$. Тоді число $C$ ми називатимемо довжиною даного кола.

Доведемо спочатку допоміжне твердження (лему).

### Лема (про периметри опуклих многокутників)

**Якщо один опуклий многокутник міститься всередині другого опуклого многокутника, то периметр першого менший, ніж периметр другого.**

### Доведення

☐ Із вершин внутрішнього многокутника проведемо промені, які перпендикулярні до його відповідних сторін та перетинають сторони зовнішнього многокутника (рис. 178).

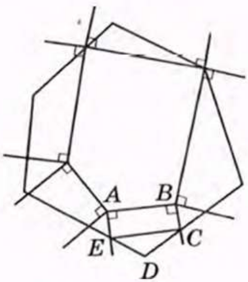



**Рис. 178.** До доведення леми про периметри опуклих многокутників

* Можна довести, що таке означення буде рівносильним до попереднього.

Тоді за нерівністю трикутника $AB \leqslant CE < < CD + DE$, і т.д.

Отже, периметр внутрішнього многокутника менший за периметр зовнішнього. ■

Із доведеної леми випливають такі наслідки.

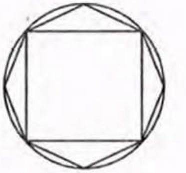


Рис. 179

1) Периметр правильного $2^k$-кутника, вписаного у дане коло, менший за периметр правильного $2^{k+1}$-кутника, вписаного у те саме коло (рис. 179).

2) Периметр будь-якого правильного вписаного в коло многокутника менший за периметр будь-якого правильного многокутника, описаного навколо того самого кола (рис. 180).

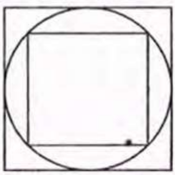


Рис. 180

Отже, послідовність $P_{2^k}$ зростає зі зростанням $k$ і обмежена зверху периметром квадрата, описаного навколо даного кола: $P_{2^k} < P_{2^{k+1}}$, $P_{2^k} < 8R$. Тоді, за теоремою з курсу математичного аналізу, існує границя $C$, до якої наближається $P_{2^k}$ зі зростанням $k$, тобто довжина кола.

Аналогічними міркуваннями можна показати, що периметри $Q_{2^k}$ правильних $2^k$-кутників, описаних навколо кола, також прямують до того самого $C$.

Тепер нескладно отримати формулу довжини кола.

Доведемо, що відношення довжини кола до його діаметра є числом, сталим для всіх кіл (позначається $\pi$).

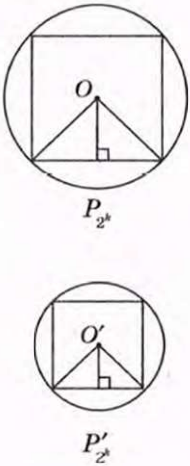



Рис. 181. До обґрунтування формули довжини кола

Впишемо в кожне з двох довільних кіл радіусів $R$ та $R'$ правильні $2^k$-кутники (рис. 181).

Тоді $P_{2^k} = 2^k \cdot 2 \cdot R \sin \dfrac{180°}{2^k}$, $P'_{2^k} = 2^k \cdot 2 \cdot R' \sin \dfrac{180°}{2^k}$.

Отже, $\dfrac{P_{2^k}}{P'_{2^k}} = \dfrac{2R}{2R'}$.

Звідси при необмеженому зростанні $k$ маємо $\dfrac{C}{C'} = \dfrac{d}{d'}$, що й треба було довести.

Отже, $C = \pi d = 2\pi R$.

Перейдемо тепер до розгляду площі круга.

Назвемо простою фігурою фігуру, яку можна розбити на скінченну кількість трикутників. За означенням, дана фігура має площу $S$, якщо існують прості фігури, які містяться в даній, і прості фігури, що містять дану, площі яких як завгодно мало відрізняються від $S$.

Розглянемо площу круга, ґрунтуючись на цьому означенні.

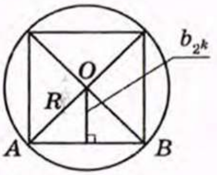


Рис. 182

Очевидно, що площі $S_{2^k}$ правильних вписаних у дане коло $2^k$-кутників (рис. 182) дорівнюють $S_{2^k} = 2^k \cdot S_{\triangle AOB} = 2^k \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot b_{2^k} = \frac{1}{2} P_{2^k} \cdot R \cdot \cos\frac{180^\circ}{2^k}$.

Отже, при необмеженому зростанні $k$ маємо: $S_{2^k} \to \frac{1}{2} CR = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$.

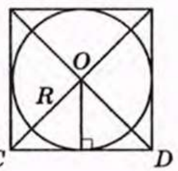


Рис. 183

Аналогічно, площі $S'_{2^k}$ правильних $2^k$-кутників, описаних навколо даного кола (рис. 183), дорівнюють $S'_{2^k} = 2^k \cdot S_{\triangle COD} = 2^k \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot CD = \frac{1}{2} P'_{2^k} \cdot R$. При необмеженому зростанні $k$ маємо:

$S'_{2^k} \to \frac{1}{2} CR = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$. Отже, $S_{2^k}$ та $S'_{2^k}$ при необмеженому зростанні $k$ як завгодно мало будуть відрізнятися від числа $\pi R^2$, тобто $S_{\text{круга}} = \pi R^2$ за означенням.

## Додаток 2. **Паралельне перенесення в декартовій системі координат**

Застосування паралельного перенесення в геометрії часто пов'язане з декартовою системою координат. Доведемо відповідні формули паралельного перенесення у два етапи.

Обґрунтуємо спочатку, що ***для будь-яких точок $A$ і $B$ існує паралельне перенесення, яке переводить точку $A$ в точку $B$, і притому єдине.***

Очевидно, що таке паралельне перенесення $f$ існує — в напрямі променя $AB$ на відстань $AB$.

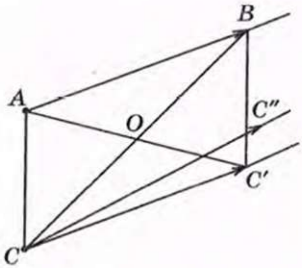



**Рис. 184.** До обґрунтування єдиності паралельного перенесення

Доведемо, що будь-яке паралельне перенесення $g$, яке переводить точку $A$ в точку $B$, збігається з $f$.

Нехай $C$ — довільна точка площини. Розглянемо випадок, коли $C$ не лежить на прямій $AB$ (рис. 184). Нехай точка $C'$ — образ точки $C$ при паралельному перенесенні $f$, а точка $C''$ — образ точки $C$ при паралельному перенесенні $g$.

Оскільки $AB = CC'$, а промені $AB$ і $CC'$ співнапрямлені, то $ABC'C$ — паралелограм за ознакою. Отже, точка $O$ — середина відрізка $CB$ — є серединою відрізка $AC'$. Аналогічно доводимо, що точка $O$ є серединою відрізка $AC''$. Звідси випливає, що точки $C'$ та $C''$ збігаються. Нескладно доводиться їх збіг і у випадку, коли $C$ лежить на прямій $AB$ (зробіть це самостійно).

Отже, оскільки точка $C$ довільна, паралельні перенесення $f$ і $g$ збігаються, що й треба було довести.

Доведемо тепер теорему про задання паралельного перенесення формулами в декартовій системі координат.

**Теорема (формули паралельного перенесення в прямокутній системі координат)**

**У прямокутній декартовій системі координат паралельне перенесення, яке переводить точку $(x; y)$ фігури $F$ в точку $(x'; y')$ фігури $F'$, задається формулами: $x' = x + a$, $y' = y + b$, де $a$ і $b$ — числа, ті самі для всіх точок фігури $F$.**

**Доведення**

☐ Доведемо спочатку, що перетворення будь-якої точки $(x; y)$ у точку $(x'; y')$, де $x' = x + a$, $y' = y + b$, $a$ і $b$ — сталі, є паралельним перенесенням.

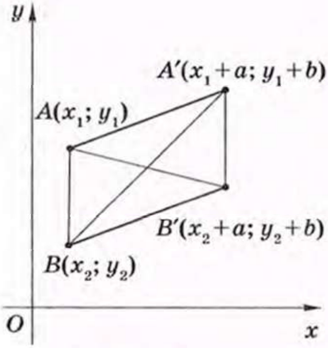



**Рис. 185.** До доведення формул паралельного перенесення

Розглянемо довільні точки $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$, що переходять у точки $A'(x_1 + a; y_1 + b)$, $B'(x_2 + a; y_2 + b)$ відповідно. Нехай точка $B$ не належить прямій $AA'$ (рис. 185). Тоді середини відрізків $AB'$ та $BA'$ мають координати $\left(\frac{x_1 + x_2 + a}{2}; \frac{y_1 + y_2 + b}{2}\right)$, тобто збігаються.

Отже, чотирикутник $AA'B'B$ — паралелограм за ознакою. Тому промені $AA'$ та $BB'$ співнапрямлені, а довжини відрізків $AA'$ та $BB'$ рівні. Такий саме висновок легко обґрунтувати й у випадку, коли точка $B$ належить прямій $AA'$.

Оскільки, за доведеним, паралельне перенесення, яке переводить точку $A$ в точку $A'$, єдине, а дане перетворення $x' = x + a$, $y' = y + b$ є саме таким перенесенням, то паралельне перенесення в прямокутній декартовій системі координат задається формулами $x' = x + a$, $y' = y + b$. Теорему доведено. ■

Зазначимо, що коли задано точку $A(x; y)$ і точку $A'(x'; y')$, у яку переходить точка $A$ при паралельному перенесенні, то числа, що визначають це перенесення, легко знайти за формулами $a = x' - x$, $b = y' - y$.

## Додаток 3. **Накладання, переміщення, подібність**

На початку вивчення курсу геометрії ми визначили, що рівними фігурами називаються ті, що суміщаються накладанням. Але поняття накладання було введено наочно, тому ми не розглядали докладно його властивості.

Під час вивчення теми «Переміщення» ми визначили рівні фігури як такі, що суміщаються переміщенням, тобто перетворенням, що зберігає відстані між точками. Можна встановити, що будь-яке переміщення на площині є накладанням, і навпаки, накладання на площині є переміщенням. Деталізуємо ці твердження для трикутників.

**Теорема (про тотожність накладання і переміщення трикутників)**

**Два трикутники суміщаються накладанням тоді й тільки тоді, коли існує переміщення, що переводить один із них в інший.**

**Доведення**

□ 1) Нехай існує переміщення $f$, що переводить трикутник $ABC$ у трикутник $A'B'C'$, зокрема точку $A$ в $A'$, $B$ — в $B'$, $C$ — в $C'$. Тоді, за властивостями переміщення, відрізок $AB$ накладається на відрізок $A'B'$, $BC$ — на $B'C'$, $AC$ — на $A'C'$; отже, трикутник $ABC$ накладається на трикутник $A'B'C'$.

2) Нехай тепер трикутник $ABC$ накладається на трикутник $A'B'C'$, зокрема, відповідні сторони й кути цих трикутників рівні. Доведемо існування переміщення, що переводить трикутник $ABC$ у трикутник $A'B'C'$.

Розглянемо симетрію $f_1$ відносно прямої $l_1$ — серединного перпендикуляра до відрізка $AA'$ (рис. 186). При такому переміщенні трикутник $ABC$ переходить у трикутник $A_1B_1C_1$, причому точки $A_1$ та $A'$ збігаються. Розглянемо

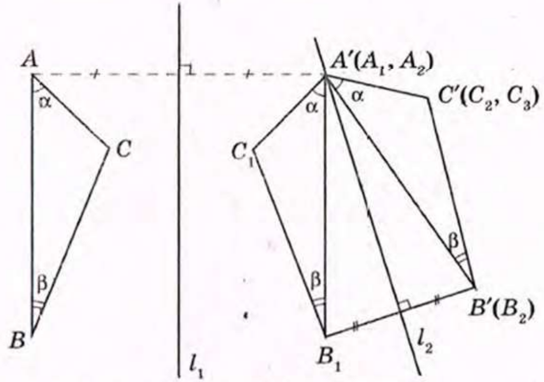



**Рис. 186.** До доведення теореми про тотожність накладання і переміщення трикутників

тепер симетрію $f_2$ відносно прямої $l_2$ — серединного перпендикуляра до відрізка $B_1B'$ (якщо його кінці не збігаються). Тоді трикутник $A_1B_1C_1$ переходить у трикутник $A_2B_2C_2$, причому точки $A_1$, $A_2$ та $A'$ збігаються, так само, як і точки $B_2$ та $B'$. За властивістю переміщення, $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1 = \angle C_2A_2B_2 = \alpha$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2 = \beta$. Оскільки в результаті послідовного застосування переміщень $f_1$ та $f_2$ точка $A$ переходить в $A_2$ ($A'$), $B$ — в $B_2$ ($B'$), то відрізок $AB$ суміщається з $A'B'$.

За умовою, $\angle CAB = \angle C'A'B' = \alpha$, $\angle ABC = \angle A'B'C' = \beta$. Якщо точки $C_2$ та $C'$ лежать по один бік від прямої $A'B'$, то з наведених рівностей кутів випливає збіг променів $A'C'$ та $A_2C_2$, $B'C'$ та $B_2C_2$; отже, точки $C_2$ та $C'$ також збігаються. Тому трикутник $ABC$ переходить у трикутник $A'B'C'$ в результаті послідовного виконання переміщень $f_1$ та $f_2$. Якщо ж $C_2$ та $C'$ лежать по різні боки від прямої $A'B'$, то під час симетрії $f_3$ відносно прямої $A'B'$ точка $C_2$ перейде в точку $C_3$, що збігається з $C'$, і далі доведення є аналогічним до попереднього. Теорему доведено. ■

У процесі доведення другої частини теореми ми задали деяке переміщення, що переводить трикутник $ABC$ у трикутник $A'B'C'$, за допомогою осьових симетрій. Насправді, таке переміщення є єдиним.

### Теорема (про однозначність задання переміщення)

**Якщо під час деякого переміщення трикутник $ABC$ переходить у трикутник $A'B'C'$, причому точка $A$ — в точку $A'$, $B$ — в $B'$, $C$ — в $C'$, то для будь-якої точки площини $M$ її образ $M'$ при такому переміщенні визначається однозначно.**

### Доведення

□ Нехай існують два різних переміщення $f$ та $g$, що переводять точку $A$ — в $A'$, $B$ — в $B'$, $C$ — в $C'$ (рис. 187). Нехай далі деяка точка $M$

під час переміщення $f$ переходить у точку $M_1$, а під час переміщення $g$ — в точку $M_2$, причому точки $M_1$ і $M_2$ не збігаються (рис. 188). Оскільки при переміщенні зберігаються відстані між точками, то $AM = A'M_1 = A'M_2$, $BM = B'M_1 = B'M_2$, $CM = C'M_1 = C'M_2$. Отже, точки $A'$, $B'$ і $C'$ лежать на серединному перпендикулярі до відрізка $M_1M_2$, що суперечить тому, що $A'B'C'$ — трикутник.

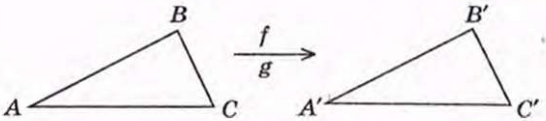



Рис. 187

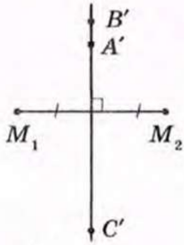



Рис. 188

Отже, переміщення $f$ та $g$ збігаються, що й треба було довести. ■

Аналогічного аналізу потребує і ситуація з подібними трикутниками. Спочатку, у восьмому класі, ми визначили подібні трикутники як такі, в яких відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні. Але у дев'ятому класі, під час вивчення подібності, ми визначили, що дві фігури є подібними, якщо вони суміщаються перетворенням подібності.

Покажемо, що ці означення подібності для трикутників є рівносильними.

1) Якщо трикутник $ABC$ переходить у трикутник $A'B'C'$ при деякому перетворенні подібності $f$ з коефіцієнтом $k$, то $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$, тобто справджуються умови першого означення.

2) Нехай навпаки $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$. Розглянемо гомотетію $f$ з центром у точці $A$ і коефіцієнтом $k$ (рис. 189), яка переводить трикутник $ABC$ у трикутник $A_1B_1C_1$ ($A$ збігається з $A_1$).

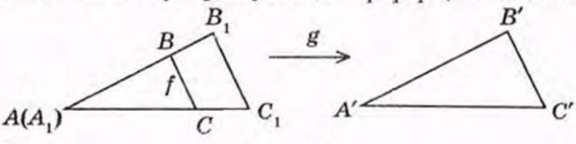



Рис. 189

Тоді $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ за трьома сторонами. Отже, за доведеною теоремою існує переміщення $g$, що суміщає трикутник $A_1B_1C_1$ з трикутником $A'B'C'$. Але тоді послідовне виконання $f$ та $g$ є перетворенням подібності, що суміщає трикутник $ABC$ з трикутником $A'B'C'$, що й треба було довести.

Таким чином, означення рівних (подібних) трикутників, які зустрічались під час вивчення різних розділів геометрії, рівносильні.

## Додаток 4. **Таблиця значень тригонометричних функцій**

| Градуси | $\sin\alpha$ ($0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$) | $\mathrm{tg}\,\alpha$ ($0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$) | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ ($0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$) | $\cos\alpha$ ($0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$) | Градуси |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,000 | 0,000 | — | 1,000 | 90 |
| 1 | 0,017 | 0,017 | 57,290 | 1,000 | 89 |
| 2 | 0,035 | 0,035 | 28,636 | 0,999 | 88 |
| 3 | 0,052 | 0,052 | 19,081 | 0,999 | 87 |
| 4 | 0,070 | 0,070 | 14,301 | 0,998 | 86 |
| 5 | 0,087 | 0,087 | 11,430 | 0,996 | 85 |
| 6 | 0,105 | 0,105 | 9,514 | 0,995 | 84 |
| 7 | 0,122 | 0,123 | 8,144 | 0,993 | 83 |
| 8 | 0,139 | 0,141 | 7,115 | 0,990 | 82 |
| 9 | 0,156 | 0,158 | 6,314 | 0,988 | 81 |
| 10 | 0,174 | 0,176 | 5,671 | 0,985 | 80 |
| 11 | 0,191 | 0,194 | 5,145 | 0,982 | 79 |
| 12 | 0,208 | 0,213 | 4,705 | 0,978 | 78 |
| 13 | 0,225 | 0,231 | 4,331 | 0,974 | 77 |
| 14 | 0,242 | 0,249 | 4,011 | 0,970 | 76 |
| 15 | 0,259 | 0,268 | 3,732 | 0,966 | 75 |
| 16 | 0,276 | 0,287 | 3,487 | 0,961 | 74 |
| 17 | 0,292 | 0,306 | 3,271 | 0,956 | 73 |
| 18 | 0,309 | 0,335 | 3,078 | 0,951 | 72 |
| 19 | 0,326 | 0,344 | 2,904 | 0,946 | 71 |
| 20 | 0,342 | 0,364 | 2,747 | 0,940 | 70 |
| 21 | 0,358 | 0,384 | 2,605 | 0,934 | 69 |
| 22 | 0,375 | 0,404 | 2,475 | 0,927 | 68 |
| 23 | 0,391 | 0,424 | 2,356 | 0,921 | 67 |
| 24 | 0,407 | 0,445 | 2,246 | 0,914 | 66 |
| 25 | 0,423 | 0,466 | 2,145 | 0,906 | 65 |
| 26 | 0,438 | 0,488 | 2,050 | 0,899 | 64 |
| 27 | 0,454 | 0,510 | 1,963 | 0,891 | 63 |
| 28 | 0,469 | 0,532 | 1,881 | 0,883 | 62 |
| 29 | 0,485 | 0,554 | 1,804 | 0,875 | 61 |
| 30 | 0,500 | 0,577 | 1,732 | 0,866 | 60 |
| 31 | 0,515 | 0,601 | 1,664 | 0,857 | 59 |
| 32 | 0,530 | 0,625 | 1,600 | 0,848 | 58 |
| 33 | 0,545 | 0,649 | 1,540 | 0,839 | 57 |
| 34 | 0,559 | 0,675 | 1,483 | 0,829 | 56 |
| 35 | 0,574 | 0,700 | 1,428 | 0,819 | 55 |
| 36 | 0,588 | 0,727 | 1,376 | 0,809 | 54 |
| 37 | 0,602 | 0,754 | 1,327 | 0,799 | 53 |
| 38 | 0,616 | 0,781 | 1,280 | 0,788 | 52 |
| 39 | 0,629 | 0,810 | 1,235 | 0,777 | 51 |
| 40 | 0,643 | 0,839 | 1,192 | 0,766 | 50 |
| 41 | 0,656 | 0,869 | 1,150 | 0,755 | 49 |
| 42 | 0,669 | 0,900 | 1,111 | 0,743 | 48 |
| 43 | 0,682 | 0,933 | 1,072 | 0,731 | 47 |
| 44 | 0,695 | 0,966 | 1,036 | 0,719 | 46 |
| 45 | 0,707 | 1,000 | 1,000 | 0,707 | 45 |
| Градуси | $\cos\alpha$ ($45° \leqslant \alpha \leqslant 90°$) | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ ($45° \leqslant \alpha \leqslant 90°$) | $\mathrm{tg}\,\alpha$ ($45° \leqslant \alpha \leqslant 90°$) | $\sin\alpha$ ($45° \leqslant \alpha \leqslant 90°$) | Градуси |

# ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

## Розділ І. Розв'язування трикутників

**10.** а) 60° і 120°; б) 120°; в) 135°. **11.** а) ≈0,174 і ≈−0,176; б) ≈40° і ≈140°. **12.** а) 0,6; б) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$; в) 0. **13.** −0,8 і −0,75. **17.** а) $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{5}{12}$; б) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{15}{8}$; в) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha=-1$. **18.** а) $-\frac{24}{7}$; б) $-\frac{5}{12}$. **20.** а) $\cos^2\alpha$; б) −1; в) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **21.** а) $\sin^2\alpha$; б) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; в) 1. **22.** 0,6 і −0,8. **23.** $\frac{5}{13}$ і $-\frac{12}{13}$. **28.** $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ або $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. **29.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ або $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. *Вказівка.* Складіть праві й ліві частини заданої рівності й основної тригонометричної тотожності. **30.** а) 170°, 120°, 50°; б) 170°, 50°, 120°; в) 120°, 170°, 50°. **31.** а) $\sin\alpha>\sin\beta$; б) $\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}\beta$; в) $\operatorname{ctg}\alpha>\operatorname{ctg}\beta$. **32.** 3 см і $3\sqrt{3}$ см. **33.** 255 см² або $68\sqrt{13}$ см². **39.** а) 7 см; б) 13 см; в) 19 см. **40.** 35 см. **41.** 135°. **43.** 9. **44.** 5 см або $\sqrt{41}$ см. **45.** 7 см. **46.** а) 5 см і $\sqrt{109}$ см; б) 14 см і $2\sqrt{129}$ см. **47.** $a\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$ і $a\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$, або, за умови розв'язування без теореми косинусів, $2a\cos\frac{\alpha}{2}$ і $2a\sin\frac{\alpha}{2}$. **48.** $2\sqrt{13}$ см і 14 см. **49.** а) Тупокутний; б) прямокутний; в) гострокутний. **50.** $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{19}{35}$; гострокутний. **51.** а) 38 см; б) 8 см і 14 см. **52.** 8 см і 9 см. **53.** $4\sqrt{7}$ см. **54.** $\frac{5\sqrt{7}}{14}$. **55.** 19 см. **58.** 4 см. *Вказівка.* Доведіть, що *ABCK* — рівнобедрена трапеція, і застосуйте теорему косинусів у трикутнику *ACD*. **59.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см, $4\sqrt{2}$ см. **60.** 45° і 135°. **67.** 1 і $\sqrt{3}$. **68.** а) 4 см; б) 30°. **69.** а) 6 см; б) 45°. **70.** 30° або 150°. **71.** 9 м. **72.** $\sqrt{2}$. **74.** 8 см. **75.** $AC=12$ м, $AB\approx6{,}21$ м, $BC\approx8{,}78$ м. **76.** $2\sqrt{2}$. **77.** $\frac{a\sin\beta}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$, $\frac{a\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}$. **78.** $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$. **79.** 24 см, $8\sqrt{3}$ см, $8\sqrt{3}$ см. **80.** 30°, 60°, 90° або 30°, 120°, 30°. **81.** $m(3+\sqrt{6})$, $m(2+\sqrt{6})$. **82.** $\frac{P\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{P\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{P\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$. **83.** 10,625 см. **84.** *Вказівка.* Якщо $H$ — ортоцентр трикутника $ABC$, то $\angle AHB=180°-\angle C$. **85.** 60° і 120°. **86.** $AD>DB$. **92.** 150°, ≈3,11 см, ≈3,11 см. **93.** 90°, 5 см, $5\sqrt{3}$ см. **94.** а) $\alpha=105°$, $b\approx7{,}32$, $c\approx5{,}18$; б) $\gamma=30°$, $a\approx7{,}71$, $c\approx3{,}92$. **95.** а) $c=19$, $\alpha\approx13°$, $\beta\approx107°$; б) $a=13$, $\beta\approx28°$, $\gamma\approx32°$. **96.** Не встигнуть. **97.** а) $\gamma=76°$, $b\approx16{,}78$, $c\approx18{,}11$; б) $c=13$, $\alpha\approx23°$, $\beta\approx22°$. **98.** а) $\alpha\approx22°$, $\beta\approx8°$, $\gamma=150°$; б) $\alpha\approx28°$, $\beta\approx62°$, $\gamma=90°$. **99.** а) $\beta\approx21°$, $\gamma\approx39°$, $c\approx8{,}69$; б) $\gamma\approx32°$, $\alpha\approx142°$, $a\approx11{,}65$ або $\gamma\approx148°$, $\alpha\approx26°$, $a\approx8{,}24$; в) розв'язків немає. **100.** а) $\alpha\approx13°$, $\beta\approx107°$, $\gamma=60°$; б) $\beta\approx30°$, $\gamma\approx128°$, $c\approx12{,}62$ або $\beta\approx150°$, $\gamma\approx8°$, $c\approx2{,}22$. **101.** а) $a=4$, $\alpha\approx42°$, $\beta\approx108°$, $b\approx5{,}70$ або $a=4$, $\alpha\approx138°$, $\beta\approx12°$, $b\approx1{,}23$; б) $\gamma=45°$, $c=13$, $\alpha\approx112°$, $\beta\approx23°$ або $\gamma=135°$, $c\approx22{,}56$, $\alpha\approx32°$, $\beta\approx13°$. **102.** $\angle BAD=15°$, $\angle ABD=60°$, $\angle ADB=105°$, $AB=4$ см, $AD\approx3{,}59$ см, $BD\approx1{,}07$ см. **103.** а) Гострокутний; б) тупокутний; в) гострокутний або тупокутний. **104.** $\frac{\sin(\beta+\gamma)\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}{\sin\gamma}$. **105.** $\frac{a\sin\alpha\sin\gamma}{c\sin\beta}$. **106.** $\frac{l\sin(\beta-\alpha)}{\cos\beta}$. **107.** $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$. **108.** 50 м. **109.** ≈28 см.

*Вказівка.* Доведіть, що діагональ трапеції є бісектрисою кута при більшій основі. **110.** $\approx 8{,}26$ см. *Вказівка.* Доведіть, що діагональ трапеції є бісектрисою кута при меншій основі. **111.** Якщо $a \geqslant b$ — один розв'язок; якщо $a<b$, то при $a > b\sin\alpha$ — два розв'язки, при $a = b\sin\alpha$ — один розв'язок, при $a < b\sin\alpha$ — розв'язків немає. **112.** а) $a \approx 10$, $b \approx 14{,}14$, $c \approx 19{,}32$; б) $a = 20$, $\alpha \approx 83°$, $\beta \approx 27°$, $\gamma \approx 70°$. **113.** а) $a \approx 16$, $b \approx 19$, $c \approx 5$; б) $a = 4\sqrt{13}$, $b = 10$, $c = 2\sqrt{73}$. **114.** $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha+\beta)}$, $BO = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}$, $AO = \sqrt{b^2 + \dfrac{a^2\sin^2\gamma}{\sin^2(\alpha+\gamma)} - \dfrac{2ab\sin\gamma\cos\beta}{\sin(\alpha+\gamma)}}$. **115.** $\dfrac{ab}{a+b}$. **116.** 30 см$^2$. **117.** 96 см$^2$. **123.** а) 30; б) $9\sqrt{3}$; в) 20. **124.** а) $54\sqrt{3}$ см$^2$; б) 24 см$^2$; в) 36 см$^2$. **125.** а) 25 см$^2$; б) $16\sqrt{2}$ см$^2$; в) 18 см$^2$. **126.** 8 см. **127.** 30° і 150°. **128.** 12 м. **129.** а) 84; б) 156; в) 84; г) 204. **130.** 720 см$^2$. **131.** 12. **132.** а) 3 см і 6,25 см; б) 2 см і 12,5 см. **133**. 3 і 32,5. **134.** а) $\dfrac{h_b h_c}{2\sin\alpha}$; б) $\dfrac{h_b{}^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$. **135.** а) $16\sqrt{3}$ см$^2$; б) 40 см$^2$; в) 25 см$^2$. **136.** а) 200 см$^2$; б) $6\sqrt{3}$ см$^2$. *Вказівка.* Знайдіть найбільший кут трикутника. **137.** 18 см. **138.** 3 см і $3\sqrt{3}$ см. **140.** а) 12 і 1,5; б) 8 і 2; в) 15 і 3. **141.** а) 8 і 10,625; б) 16 і 21,25. **143.** 6 см і 12,5 см. **144.** 4 см і 8,125 см. **145.** 84 см$^2$. *Вказівка.* Проведіть через вершину тупого кута пряму, паралельну діагоналі трапеції. **146.** 48 см$^2$. *Вказівка.* Проведіть через вершину тупого кута пряму, паралельну бічній стороні трапеції. **147.** 12 см, 600 см$^2$. **148.** 42,5 см. **149.** а) 120°; б) 4 см. **150.** а) 120°; б) 2 см. **151.** 6 см. **152.** $\sqrt{37}$ м і $\sqrt{93}$ м. **156.** $\angle C = 180° - (\alpha+\beta)$, $AB = 2R\sin(\alpha+\beta)$, $BC = 2R\sin\alpha$, $AC = 2R\sin\beta$. **158.** $240\sqrt{3}$ см$^2$. **159.** $\sqrt{65}$ см або 17 см. **160.** До вершини найбільшого кута. **161.** 24 см, 20 см, 20 см. **162.** $21\dfrac{2}{3}$ см. **163.** 18. *Вказівка.* Три медіани трикутника при перетині ділять даний трикутник на шість рівновеликих трикутників. **164.** 2. *Вказівка.* Нехай $R$ — радіус описаного кола. Виразіть через $R$ довжини відрізків $BN$ і $CN$ та запишіть теорему косинусів у трикутниках $ABN$ і $ACN$. **166.** 27 см. **167.** *Вказівка.* Проведіть діагональ, що виходить зі спільного кінця сторін $a$ і $d$, і виразіть площі отриманих трикутників. **168.** *Вказівка.* За допомогою теореми косинусів доведіть, що синус кута між сторонами $a$ і $b$ дорівнює $\dfrac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd}$. **170.** $2\dfrac{9}{13}$ см. *Вказівка.* Якщо $AC$ — гіпотенуза трикутника, $O$ — центр вписаного кола, то $\angle AOC = 135°$. Скористайтеся методом площ у трикутнику $AOC$. **171.** $\dfrac{ab}{4}$. **172.** $\dfrac{ab}{b-a}$. *Вказівка.* Проведіть через вершину меншої основи пряму, паралельну бічній стороні, і застосуйте до отриманого трикутника теорему косинусів, враховуючи, що сума квадратів бічних сторін трапеції дорівнює $a^2 + b^2$.

## Розділ II. Правильні многокутники

**181.** а) 4; б) 5; в) 18. **182.** а) 108°; б) 120°; в) 144°. **183.** а) 12; б) 12. **186.** а) 4 см; б) $2\sqrt{2}$ см; в) 9 см. **187.** а) $3\sqrt{3}$ см$^2$; б) 4 см; в) 24 см. **189.** $2\sqrt{3}$ см. **190.** 4 см. **191.** $6\sqrt{3}$ см$^2$. **194.** а) 6; б) 5; в) 12. **195.** а) 50 см; б) 6 см. **198.** а) $24\sqrt{3}$ см$^2$; б) 48 см$^2$; в) 16 см. **199.** а) 8 см$^2$; б) $27\sqrt{3}$ см$^2$; в) 6 см і 3 см. **203.** 3:4. **204.** $2\sqrt{2}R^2$. **205.** 6 і 10. **206.** а) 6; б) 5. **207.** $4:3\sqrt{3}:6$. **208.** $9:8\sqrt{3}:18$. **209.** $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **211.** 30°, 170° і 160°. **212.** 5 см і 2 см. **220.** а) $12\pi$ см; б) 2 см. **221.** а) $12\pi$ см; б) $8\pi$ см; в) $10\pi$ см. **222.** а) $2\pi$ см; б) $8\pi$ см. **223.** $\approx 1{,}4$ м. **224.** $\approx 42097$ км. **225.** а) $\dfrac{\pi R}{2}$; б) $\dfrac{3\pi R}{4}$; в) $\dfrac{17\pi R}{9}$. **226.** $10\pi$ см. **227.** $\approx 6$ см. **228.** $\approx 452$ м$^2$. **229.** а) $144\pi$ см$^2$;

б) $9\pi$ см$^2$. **230.** а) $16\pi$ см$^2$; б) $49\pi$ см$^2$. **231.** $3\pi$, $5\pi$ і $7\pi$. **232.** 26 см. **233.** а) $27\pi$; б) $40\pi$; в) $6\pi$. **234.** $\frac{1}{12}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)$, $\frac{1}{12}\left(10\pi+3\sqrt{3}\right)$. **235.** а) $6\pi$ см; б) $10\pi$ см; в) $2\sqrt{3}\pi$ см. **236.** 156 см$^2$. **237.** а) $24\pi$ см; б) $50\pi$ см. **238.** а) $3\sqrt{2}\pi$; б) $5\pi$. **239.** а) $6\pi$; б) $15\pi$. **240.** $\approx 2{,}5$ м і $\approx 40$ м. **241.** 1 м. **242.** а) $625\pi$ см$^2$; б) $27\pi$ см$^2$. **243.** а) $16\pi$ см$^2$; б) $9\pi$ см$^2$. **245.** $\sqrt{\frac{10S}{3\pi}}$. **246.** а) $\frac{R^2}{12}\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)$; б) $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$; в) $\frac{R^2}{12}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)$. **247.** а) $\frac{R^2}{12}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)$; б) $\frac{R^2}{12}\left(8\pi+3\sqrt{3}\right)$. **248.** б) $6\pi$. **249.** б) $12\pi$. **250.** $4\pi$ см$^2$. **251.** $100\pi$ см$^2$. **252.** $\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$ см$^2$. **253.** 19 см. **254.** 30 см. **255.** $1{,}5\sqrt{3}R^2$. **256.** $(2\pi+8)$ см. **257.** а) Ні (контрприклад — ромб); б) так. **258.** $\frac{3\sqrt{3}S}{8}$. **259.** $\frac{a}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$. **260.** $0{,}75l$. **261.** $\pi a^2$. **262.** Ні: його кути рівні через один. **264.** $1{,}25\pi a$. *Вказівка.* Дане коло є описаним навколо рівнобедреного трикутника з основою $a$ і бічною стороною $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **265.** $\frac{2\pi a}{3}$. *Вказівка.* Доведіть, що трикутники $NAM$, $KBN$, $LCK$ і $LDM$ рівносторонні. **266.** $\left(36\sqrt{3}-16{,}5\pi\right)$ см, $4{,}5\left(2-\sqrt{3}\right)$ см. *Вказівка.* Обчисліть площу трапеції $O_1BCO_2$ і відніміть від неї площі двох секторів.

## Розділ III. Декартові координати на площині

**276.** а) $B(-1; 5)$; б) $A(-3; 1)$. **277.** а) $E(12; 1)$; б) $D(5; -19)$. **278.** а) $D(6; 9)$; б) $A(-3; 2)$. **280.** а) 10; б) $\sqrt{82}$; в) 13. **281.** а) $-2$ або 6; б) 2. **282.** 16. **285.** а) $B(-4; -3)$; б) $B(4; 3)$. **286.** $x = 2$, $y = -1$. **287.** а) $D(3; 0)$; б) $D(4; 5)$. **288.** $D(-1; -1)$. **289.** $M$. **290.** а) $(3; 0)$; б) $(0; -3)$. **291.** $AC$. **292.** 5. **293.** $2\sqrt{2}$. **296.** $(2; -6)$, $(6; 4)$, $(-6; 10)$. *Вказівка.* Дані точки разом із кожною із шуканих вершин утворюють паралелограм. **298.** $(2; 5)$. **300.** 10. *Вказівка.* Доведіть, що даний трикутник прямокутний. **301.** $P = 24$, $S = 24$. **303.** Середина гіпотенузи. **311.** $A$, $C$, $D$. **312.** а) $(x+2)^2+(y-1)^2=9$; б) $x^2+y^2=25$; в) $x^2+(y-1)^2=4$. **313.** $(x-1)^2+(y-1)^2=25$; $C$, $D$. **314.** а) $(8; 6)$, $(8; -6)$; б) $(-8; -6)$, $(8; -6)$. **315.** $(-4; 0)$, $(0; 0)$, $(0; 2)$. **316.** $(0; 3)$, $(0; -1)$, $\left(\sqrt{3}; 0\right)$, $\left(-\sqrt{3}; 0\right)$. **317.** $B$, $C$, $E$. **318.** а) $x=-6$; б) $y=2$; в) $x+3y=0$. **319.** $x+y=0$; $B$. **320.** а) $(7; 3)$; б) $(-2; 0)$ і $(0; -6)$; в) $(2; 2)$ і $(-2; -2)$. **321.** $(0; -3)$. **322.** $(3; -3)$. **323.** а) $(3; -1)$, $R=4$; б) $(0; -5)$, $R=1$. **324.** а) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$; б) $(x+4)^2+(y-9)^2=4$; в) $x^2+(y+2)^2=1$. **325.** а) $x^2+y^2=36$; б) $(x-1)^2+(y+4)^2=25$. **326.** $(x+4)^2+(y-5)^2=25$; $(0; 2)$ і $(0; 8)$. **327.** $(x-2)^2+y^2=4$; $(x+2)^2+y^2=4$. **328.** а) $4x-y-2=0$; б) $x+2y=0$; в) $x+y+3=0$. **329.** $x=-1$, $x-y=0$, $x+3y-8=0$. **330.** а) $(-1; -2)$; б) $(0; 1)$; в) $(2; -2)$. **331.** а) $(-3; 1)$ і $(6; 4)$; б) $(2; 1)$ і $(2; -1)$. **332.** $(3; 6)$; $(1; 4)$; $(5; 4)$. **333.** а) $x^2+(y-1)^2=25$; б) $(x-3)^2+(y-2)^2=8$ або $(x-3)^2+(y-6)^2=8$. **334.** $(x+3)^2+y^2=25$ або $(x-5)^2+y^2=25$. **337.** $2\sqrt{2}$. **338.** 12; $2x-3y+3=0$. **340.** 15 см, 20 см, 25 см. **347.** а) $2x+3y-5=0$; б) $x+y=0$. **348.** $2x-y-1=0$ і $x+2y-3=0$. **352.** а) $2x-y+5=0$; б) $x^2+y^2=5$. **353.** $4x-4y+5=0$. **354.** а) $y=\sqrt{3}x+1$; б) $y=-x-1$. **355.** $3x+4y-25=0$, $3x+4y+25=0$. **356.** $x-3y+7=0$ або $x-3y-13=0$. **364.** Коло радіуса $0{,}5R$, яке дотикається до даного кола внутрішньо в точці $A$, окрім цієї точки. *Вказівка.* Виберіть систему координат так, що $O(0; 0)$ — центр даного кола, $A(R; 0)$. **365.** Пряма $ax+by-\frac{a^2+b^2}{2}=0$, де $a$ і $b$ — довжини катетів трикутника. **367.** а) $D(1; 2)$; б) $D(0; 1)$. **368.** $C(7; 3)$, $D(4; -2)$. **370.** $(0; 1)$ або $(0; 9)$. **371.** а) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$, $x\neq-3$, $x\neq7$; б) $x=-3$ або $x=7$, $y\neq1$. **372.** $(x+2)^2+(y-2)^2=4$. **373.** $x+y-1=0$. **375.** $x-7y+25=0$. **376.** $(x-3)^2+(y-5)^2=25$. **377.** $\sqrt{13}$. **378.** $(x-3)^2+(y+2)^2=25$. **380.** $k=\pm\frac{4}{3}$. **381.** $C(2; 1)$.

## Розділ IV. Геометричні перетворення

**393.** $\angle K = 70°$, $\angle N = 90°$. **394.** $\angle A = \angle C = 40°$, $\angle B = 100°$. **398.** 60° і 120°. **399.** $\angle A = \angle D = 40°$, $\angle B = \angle C = 140°$. **423.** а) (8; –1); б) (0; 9); в) (–4; 6). **424.** а) (–4; –3); б) $(-a; -b)$. **427.** а) (3; 9); б) (–2; 5); в) (8; 0). **428.** а) $(a; -b)$; б) $(-a; b)$. **429.** а) $y = -x$; б) $y = -x$; в) $y = x$. **431.** а) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$; б) $(x + 6)^2 + (y - 5)^2 = 25$. **432.** а) $y = -2$; б) $y = -x - 1$. **435.** а) $(x + 16)^2 + (y - 3)^2 = 25$; б) $x = -2$. **436.** а) $x^2 + (y - 6)^2 = 4$; б) $x = 0$. **445.** (–4; 0), (4; 0), (4; –4). **463.** а) (–4; 1); б) (5; –4). **464.** У напрямі додатної півосі осі $Ox$ на 4 одиниці. **465.** а) (–3; 7); б) (5; –1). **466.** а) Ні; б) так. **467.** $x' = x - 9$, $y' = y + 5$. **471.** $x' = x + 4$, $y' = y - 5$. **472.** $x^2 + (y - 6)^2 = 36$. **473.** $A'(2; 1)$, $C'(5; 2)$. **475.** Точка перетину серединних перпендикулярів до відрізків $AA'$ і $BB'$. **476.** Покласти першу монету в центр столу, а решту монет — симетрично відносно центра столу до ходів суперника. **477.** Брати стільки ж цукерок, скільки взяв перший гравець, але з іншої коробки (тобто робити ходи, симетричні ходам першого гравця). **480.** 756 см$^2$. **488.** а) 12 см; б) 18 см. **489.** 0,25. **490.** а) 5; б) 16 см$^2$. **491.** 18 см$^2$. **492.** 320 м$^2$. **493.** 40 см$^2$. **495.** Точка перетину продовжень бічних сторін. **498.** а) 0,5; б) 2. **499.** а) (–1; 5); б) (1; 4). **500.** 1500 см$^2$. **501.** 24 см$^2$. **502.** 48 см$^2$. **505.** $\sqrt{2}:2$. **515.** *Вказівка.* Застосуйте симетрію відносно даної точки. **516.** *Вказівка.* Застосуйте симетрію відносно прямої $l$. **517.** *Вказівка.* Застосуйте поворот на 90° навколо точки $D$. **518.** 10 см. *Вказівка.* Застосуйте паралельне перенесення в напрямі променя $OO_1$ на 10 см. **519.** *Вказівка.* Застосуйте симетрію відносно серединного перпендикуляра до третьої сторони. **520.** *Вказівка.* Відобразіть менше коло симетрично відносно будь-якої його точки $A$. Шукана пряма проходить через точку $A$ і точку перетину образу меншого кола з більшим. **521.** *Вказівка.* Застосуйте поворот навколо точки $A$ на 90°, внаслідок якого точка $D$ переходить у точку $B$. **522.** *Вказівка.* Нехай $ABCD$ ($AD \parallel BC$) — шукана трапеція. Застосуйте паралельне перенесення діагоналі $BD$ в напрямі променя $AD$ на відстань $BC$. **523.** Так. **524.** $x' = x - 3$, $y' = y - 3$; $D(2; 1)$. **527.** а) Середина відрізка $OO_1$; б) пряма $AB$; в) довільна точка $X$ прямої $AB$, $\angle OXO_1$; г) промінь $OO_1$ (або $O_1O$), відстань $OO_1$. **530.** Коло, гомотетичне даному відносно його центра з коефіцієнтом 0,5. **533.** *Вказівка.* Застосуйте симетрію одного з даних кіл відносно прямої $l$. **537.** *Вказівка.* Застосуйте гомотетію з центром $A$. **538.** *Вказівка.* Застосуйте гомотетію з центром у вершині даного кута.

## Розділ V. Вектори на площині

**552.** а) $\overline{(4; 5)}$; б) $\overline{(-3; 4)}$; в) $\overline{(0; -4)}$. **554.** а) 25; б) 5; в) 3. **555.** а) $\overline{AB}$ (8; –6), $|\overline{AB}| = 10$; б) $\overline{AB}$ (–12; –5), $|\overline{AB}| = 13$. **556.** (3; 2), (–2; 7). **557.** (3; –9). **558.** $A(0; -2)$. **560.** 3, $4\sqrt{2}$, $\sqrt{65}$. **561.** 9 і 7. **562.** а) Ромб; б) прямокутник; в) трапеція. **565.** 9 або –5. **566.** (1; 2) або (–1; –2). **567.** 8 або –8. **568.** (3; 1), $\sqrt{10}$. **569.** Так. **570.** Ні. **573.** 90°. **587.** а) $\overline{(-4; 1)}$ і $\overline{(-2; -3)}$; б) $\overline{(4; -4)}$ і $\overline{(0; -10)}$. **588.** а) $a$; б) $a\sqrt{3}$; в) $a$; г) $a\sqrt{3}$. **589.** а) $0{,}5a$; б) $a$; в) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; г) $a$. **592.** а) $\vec{a}$; б) $-\vec{b}$; в) $\vec{b} - \vec{a}$. **593.** а) $-\vec{a}$; б) $\vec{b} - \vec{a}$; в) $\vec{a} - \vec{b}$. **594.** а) $\overline{(1; -8)}$; б) $\overline{(3; 7)}$; в) $\overline{(-2; -13)}$. **595.** а) $\overline{(1; 2)}$; б) $\overline{(3; 6)}$; в) $\overline{(2; 4)}$. **596** а) $\overline{(9; -1)}$; б) $\overline{(-8; -3)}$; в) $\overline{(8; 3)}$. **597.** а) 5; б) 5; в) 2,5. **598.** а) 13; б) 10; в) 12. **601.** а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $-\vec{a} - \vec{b}$; в) $\vec{a} - \vec{b}$. **602.** а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $-\vec{a} - \vec{b}$. **604.** а) Ні; б) так; в) так. **608.** $x + 2y = 0$. **609.** 90°. **619.** а) –2 або 2; б) $-\dfrac{1}{3}$ або $\dfrac{1}{3}$. **620.** а) $\vec{b}(1; -6)$; б) $\vec{b}(-18; -27)$. **623.** $\overline{AB}$ (4; –6), $\overline{BM}$ (–2; 3). **625.** 4; ні. **626.** а) 2; б) 30. **627.** а) 0; б) 1. **628.** а) –8; б) –2; в) 18. **629.** а) 90°; б) 45°. **631.** 6.

**632.** а) $\vec{c}(4; 3)$, $|\vec{c}|=5$; б) $\vec{c}(13; -13)$, $|\vec{c}|=13\sqrt{2}$. **633.** –3. **636.** $\overrightarrow{AB}=0{,}5\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CB}=-0{,}5\vec{a}-\vec{b}$. **637.** $\overrightarrow{AD}=0{,}5(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{CD}=-0{,}5(\vec{a}-\vec{b})$. **639.** 14; так. **640.** 6, так, або –6, ні. **641.** $\angle A=60°$, $\angle B\approx 22°$, $\angle C\approx 98°$. **642.** $\angle A=\angle C=45°$, $\angle B=90°$. **644.** –1. **645.** –1. **649.** $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$. **650.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{MD}=\frac{3}{4}\vec{b}-\vec{a}$. **651.** 60°. **652.** 0. **653.** а) $2\sqrt{10}$; б) 1,5; в) $\sqrt{\frac{3}{2}}$. *Вказівка.* Знайдіть скалярний квадрат шуканого вектора. **654.** 120°. **655.** 18 см і 48 см. **656.** 34 см; прямокутник. **667.** *Вказівка.* Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DM}$ і $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CK}$. **669.** 30°. **670.** 7. **671.** 4; 4. **674.** 8,5 см. **676.** *C*. **677.** $\vec{b}(2; -4)$. **678.** 45°. **679.** –18; 18; 0. **680.** Тупий. **682.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що вектори-доданки мають рівні довжини і співнапрямлені з векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ відповідно. **683.** *Вказівка.* Доведіть, що під час повороту на центральний кут даного *n*-кутника вказаний вектор-сума не змінюється, тобто є нульовим вектором. **684.** *Вказівка.* Спочатку доведіть, що $AH \perp BC$. Для цього покажіть, що $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. **685.** *Вказівка.* Застосуйте формулу Гамільтона з попередньої задачі і формулу $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$. **687.** 120°. **689.** *Вказівка.* Розкладіть вектори $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BK}$ і $\overrightarrow{CM}$ за двома неколінеарними векторами і доведіть, що точки попарного перетину вказаних прямих збігаються.

## Розділ VI. Початкові відомості зі стереометрії

**700.** Ні. **701.** Так. **703.** 24 см. **704.** 24 см. **714.** 10 см. **715.** Так. **722.** $18\sqrt{3}$ см². **723.** 45°. **734.** а) 180 см²; б) 312 см²; в) 60 см². **735.** а) 72 см²; б) 516 см². **736.** $9\sqrt{3}$ см². **737.** а) 138 см²; б) 94 см². **738.** а) $a^2\sqrt{3}$; б) 20 см². **739.** а) 36 см²; б) 105 см². **740.** 90°. **741.** 6 см, 6 см. **742.** а) 120 см³; б) 64 см³; в) 6 см³. **743.** 3 см. **744.** а) 3 см, 6 см і 7 см; б) 16 см³. **745.** а) 200 см²; б) 144 см². **746.** 624 см². **747.** а) 24 см²; б) 36 см². **748.** $\frac{S^2}{4l^2}$. **749.** а) 210 см³; б) $96\sqrt{3}$ см³; в) 27 см³. **750.** $18\sqrt{2}$ см³. **751.** а) 96 см³; б) 90 см³. **752.** 516 см². **753.** 576 см². **755.** $\frac{m^3\sqrt{3}}{12}$. **756.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}d^3\sin^2\alpha\cos\alpha$. **757.** 26π см. **758.** $m(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma)$. **766.** 49π см². **767.** а) 80π см²; б) 100π см². **768.** а) 64π² см²; б) 36π см². **769.** 3 см, $3\sqrt{3}$ см. **770.** а) 65π см²; б) 75π см². **771.** 24π см². **772.** 16π см². **773.** а) 45π см³; б) 18π см³; в) 36π см³. **774.** а) 80π см³; б) 9π см³; в) 972π см³. **775.** а) $2\pi a^2\sin\alpha\cos\alpha$; б) 368π см². **776.** 66π см². **777.** 600π см². **778.** 16π см². **779.** 192π см². **780.** 36π см². **781.** а) $\frac{\pi H^3}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; б) 9π см³. **782.** 96π см³. **783.** $2\pi S$. **784.** $Q\sin\alpha$. **785.** $\frac{S}{2}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$. **786.** $\frac{2}{3}\pi H^2$.

## Задачі на повторення курсу геометрії 7–9 класів

**787.** 11 см. **788.** 40°. **792.** 25°, 65°. **793.** 40°, 50°. **794.** Більше за 13 см, але менше за 17 см. **797.** 50° і 130°. **799.** 70°, 55°, 55° або 110°, 35°, 35°. **800.** 10 см. **801.** 112 см і 63 см. **802.** 36 см, $30\sqrt{3}$ см². **803.** $12\sqrt{3}$ см². **804.** 5 см. **805.** 156 см². **806.** 225π см². **807.** $\frac{b\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin\beta}$. **808.** 5. **810.** $\vec{0}$. **811.** 45°, 45°, 90°.

# ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

# ЗМІСТ

Навчальне видання

*ЄРШОВА Алла Петрівна,*
*ГОЛОБОРОДЬКО Вадим Володимирович,*
*КРИЖАНОВСЬКИЙ Олександр Феліксович,*
*ЄРШОВ Сергій Володимирович*

**ГЕОМЕТРІЯ. 9 клас**
**Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів**

Фаховий редактор *Г. Ю. Вепрік*. Редактор *І. Л. Морева*.
Технічний редактор *А. П. Твердохліб*. Коректор *Н. В. Красна*

Підписано до друку 30.05.09. Формат 70×90/16. Папір офсетний. Гарнітура Шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 18,72. Обл.-вид. арк. 22,09.
Наклад 118 546 прим. (2-й завод 50 001 – 118 546 прим.) Зам. 5807-09

ТОВ Видавництво «Ранок». Свідоцтво ДК № 3322 від 26.11.2008.
61071 Харків, вул. Кібальчича, 27, к. 135.
Адреса редакції: 61145 Харків, вул. Космічна, 21а.
Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.
Для листів: 61045 Харків, а/с 3355.
E-mail: office@ranok.kharkov.ua
**www.ranok.com.ua**

Надруковано у друкарні ПП «Тріада+». м. Харків, вул. Киргизька, 19.
Тел. 757-98-16, 703-12-21. Зам.