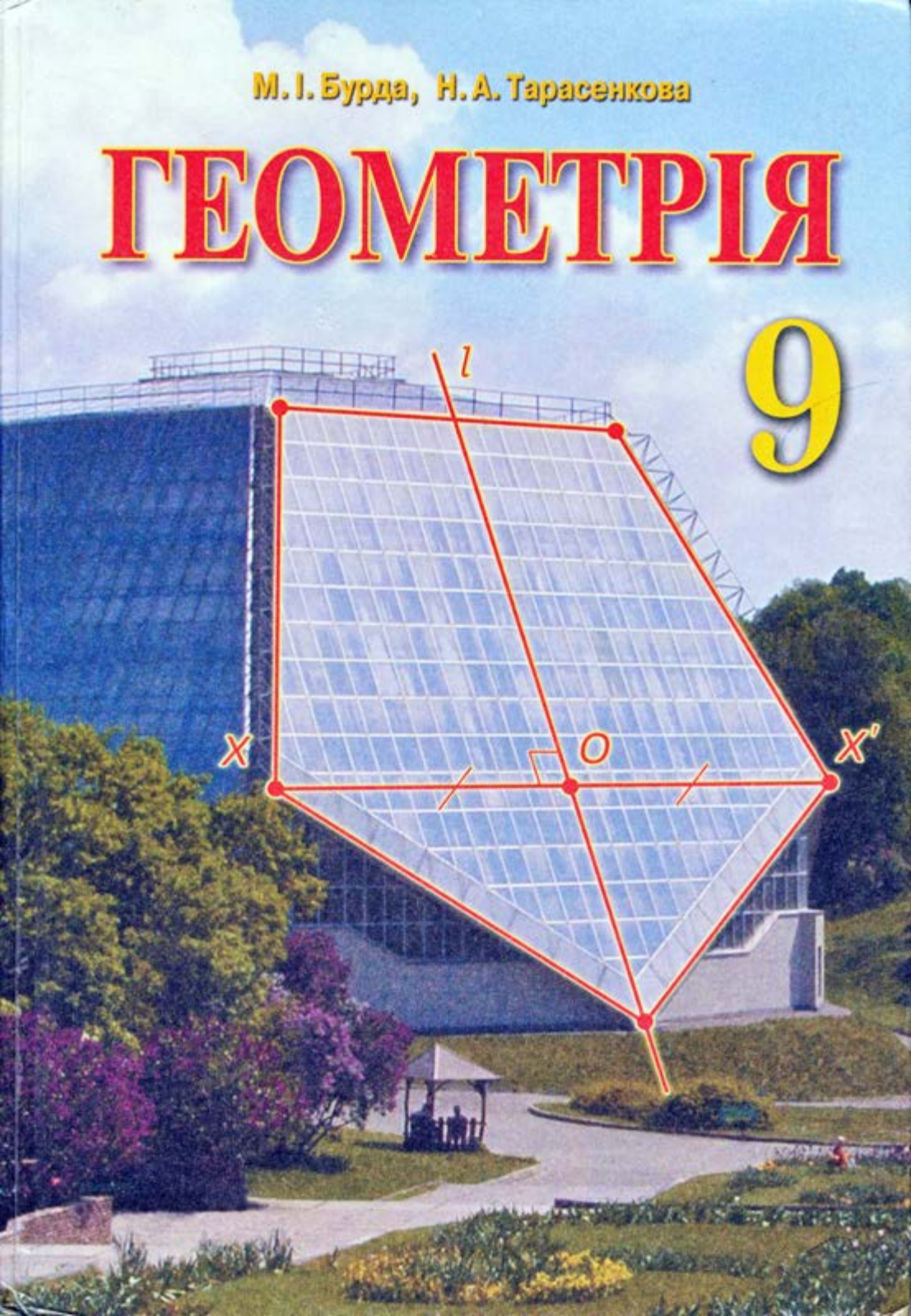
М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова

ГЕОМЕТРІЯ

9

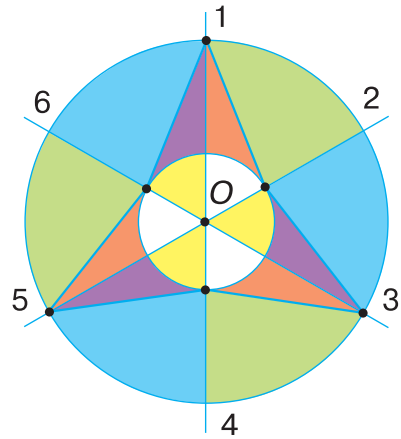


М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України



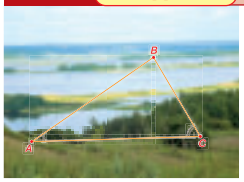
Підручник — переможець
Всеукраїнського конкурсу підручників
для 12-річної школи
Міністерства освіти і науки України в 2009 р.

Київ
«Зодіак-ЕКО»
2009

ЗМІСТ

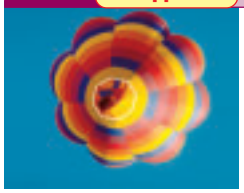
Дорогі учні! 4

Розділ 1. **РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ**



§ 1. Синус, косинус і тангенс кутів від 0° до 180° 8
§ 2. Основні тотожності для sin α , cos α , tg α 13
§ 3. Теорема синусів 18
§ 4. Теорема косинусів 24
§ 5. Розв'язування трикутників 30
§ 6. Формули площі трикутника 39

Розділ 2. **ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ**

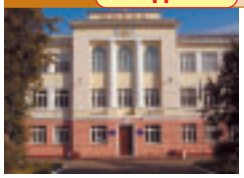


§ 7. Правильні многокутники 50
§ 8. Формули для радіусів описаних і вписаних кіл правильних многокутників 57
§ 9. Побудова правильних многокутників 63
§ 10. Довжина кола. Довжина дуги кола 67
§ 11. Площа круга та його частин 74

Розділ 3. **ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ**

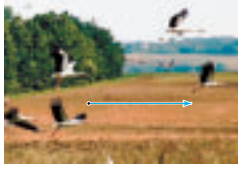
§ 12. Декартові координати на площині 84
§ 13. Координати середини відрізка 90
§ 14. Поняття рівняння фігури. Рівняння кола 95
§ 15. Рівняння прямої 100
§ 16. Метод координат 105

Розділ 4. **ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ**



§ 17. Переміщення 114
§ 18. Симетрія відносно точки і прямої 118
§ 19. Поворот 126
§ 20. Паралельне перенесення 131
§ 21. Перетворення подібності. Гомотетія 136

Розділ 5. **ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ**



§ 22. Поняття вектора 148
§ 23. Дії над векторами 154
§ 24. Координати вектора 163
§ 25. Скалярний добуток векторів 168
§ 26. Векторний метод 174

Розділ 6. **ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ**

§ 27. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі 184
§ 28. Многогранники 191
§ 29. Тіла обертання 199

ПОВТОРЕННЯ ВИВЧЕНОГО 208
ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ 219
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК 238

Дорогі учні!

У 8 класі ви ознайомилися з властивостями й ознаками чотирикутників та подібних трикутників, навчилися знаходити площі трикутників і чотирикутників, ознайомилися з новими способами обчислення сторін і кутів прямокутних трикутників та виробили вміння застосовувати ці способи на практиці.

У цьому році ви дізнаєтеся, як розв'язувати трикутники, використовуючи теореми синусів і косинусів та формули для знаходження площі трикутника. Отримаєте знання про правильні многокутники, геометричні перетворення, вектори на площині, одержите початкові знання зі стереометрії.

Як успішно вивчати геометрію за цим підручником? Увесь матеріал поділено на шість розділів, а розділи – на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, обведений рамкою. Це – найважливіші означення і властивості геометричних фігур. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати і вміти застосовувати під час розв'язування задач. Інші важливі відомості надруковано **жирним** шрифтом. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Згадайте головне», які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання і тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Ознайомтеся з порадами до розв'язування задач, із розв'язаною типовою задачею.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено

штрихом (′). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечком (°) позначають задачі середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати геометрію далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочкою (*) позначено задачі високого рівня. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння і наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Розв'язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити свої знання.

У підручнику використано спеціальні позначки (піктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

Прочитайте

Як записати

Поміркуйте

Як діяти

Запам'ятайте

Типова задача

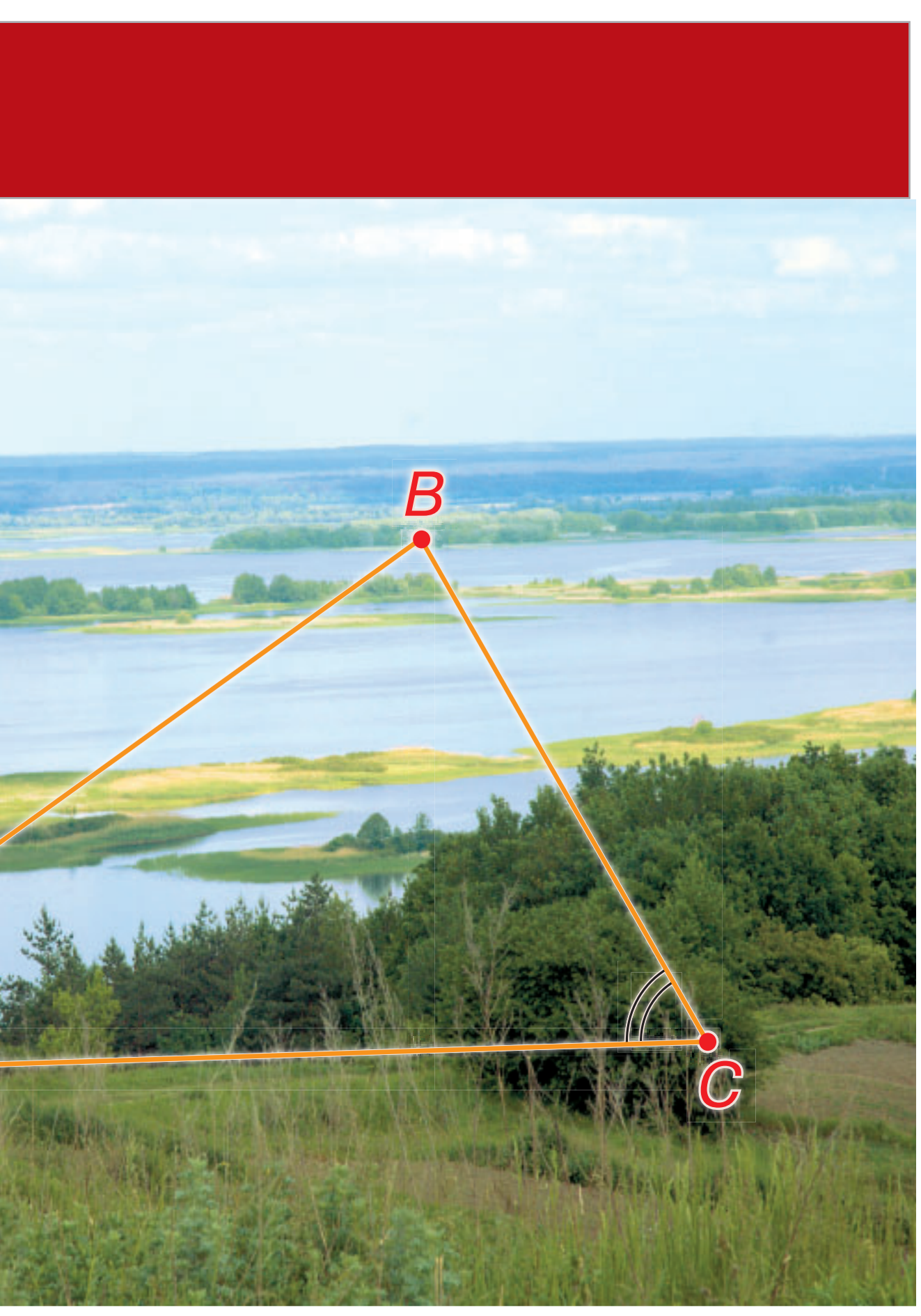
Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового і задоволення від навчання!

РОЗДІЛ 1

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

У розділі дізнаєтесь:

- як визначити синус, косинус і тангенс для будь-якого кута від 0° до 180° та про співвідношення між сторонами і кутами трикутника;
- про алгоритми знаходження невідомих сторін і кутів довільного трикутника за відомими його сторонами і кутами;
- як застосовувати вивчені алгоритми до розв'язування геометричних задач та задач практичного змісту;
- про нові формули для обчислення площі трикутника та як їх використовувати в розв'язуванні задач

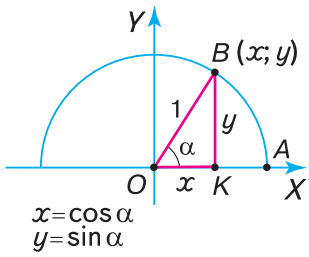

B
C

§1. СИНУС, КОСИНУС І ТАНГЕНС КУТІВ ВІД 0° ДО 180°

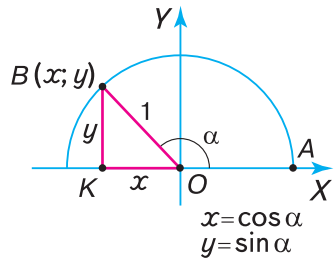
Досі ми розглядали синус, косинус і тангенс гострого кута як відношення відповідних сторін прямокутного трикутника. Дамо означення їх для будь-якого кута від 0° до 180°. Для цього використаємо систему координат XOY. З курсу алгебри ви вже знаєте, як визначають координати точки, які знаки мають координати точок у різних її чвертях.

У I і II чвертях системи координат XOY проведемо півколо з центром у початку координат і радіусом $R = 1$ (мал. 1). Таке півколо називається *одиничним*. Будемо відкладати кути від додатної півосі OX проти руху годинникової стрілки. Нехай $\angle AOB = \alpha$ – гострий і точка B, кінець радіуса OB, має координати x і y. Проведемо $BK \perp OX$ (мал. 1).

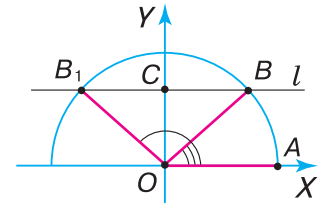
У прямокутному трикутнику OBK гіпотенуза $OB = 1$, а катети дорівнюють координатам x і y точки B. Значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ виразимо через координати точки B: $\sin\alpha = \frac{y}{1} = y$, $\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$. За цими формулами можна визначити синус, косинус і тангенс тупого кута (мал. 2).



Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3

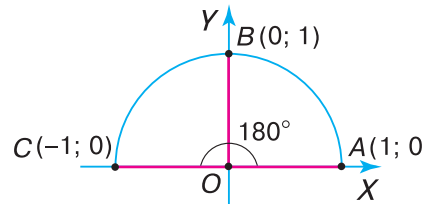
Взагалі, **$\sin\alpha$ дорівнює ординаті кінця радіуса одиничного півкола, який утворює з додатною піввіссю OX кут α, $\cos\alpha$ – абсцисі кінця радіуса, а $\operatorname{tg}\alpha$ – відношенню зазначених ординати й абсциси.**

? Чому синуси тупих кутів додатні, а косинуси і тангенси – від'ємні? Тому що ординати в другій чверті додатні, а абсциси – від'ємні.

Задача. Користуючись одиничним півколом побудуйте кут, синус якого дорівнює $\frac{2}{3}$.

Розв'язання. Проведемо одиничне півколо з центром у початку координат (мал. 3). Позначимо на осі OY точку $C(0; \frac{2}{3})$. Через точку C проведемо пряму $l \parallel OX$. Вона перетне одиничне півколо в точках B і B_1, ординати

яких дорівнюють $\frac{2}{3}$. Сполучивши точки B і B_1 з початком координат, дістанемо два кути, синуси яких дорівнюють $\frac{2}{3}$: гострий $\angle AOB$ і тупий $\angle AOB_1$.



Мал. 4

Знайдемо значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ для кутів 0°, 90° і 180°. Розглянемо радіуси OA, OB і OC, які утворюють ці кути з додатною піввіссю OX (мал. 4). Точки A, B і C мають такі координати: $A(1; 0)$, $B(0; 1)$ і $C(-1; 0)$. Тоді $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$, $\sin 180^\circ = 0$; $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$; $\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0$. Для $\operatorname{tg}\alpha$ кут $\alpha = 90^\circ$ вилучається, оскільки на нуль ділити не можна.

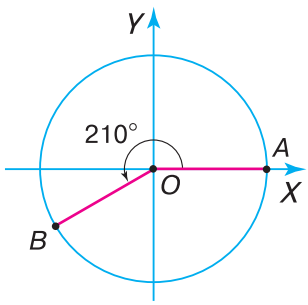
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

У вас може виникнути кілька запитань.

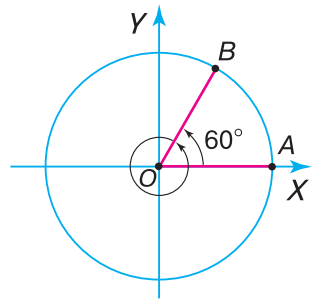
1. *Чи існують значення синуса, косинуса і тангенса кутів від 180° до 360°?* Так. Кут можна розглядати як результат обертання радіуса кола. Нехай коло радіуса $R = 1$ з центром у початку координат перетинає вісь OX у точці A (мал. 5). Вважатимемо, що $\angle AOB = 210^\circ$ утворений обертанням радіуса OB проти руху годинникової стрілки. Точка B має координати $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$. Тоді $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Повний оберт радіуса OB утворить кут 360°.

2. *Чи можуть кути бути більшими за 360°?* Поміркуємо. Нехай радіус OB, що утворює кут 60° (мал. 6), продовжуючи свій рух проти годинникової стрілки, зробив один повний оберт. Тоді $\angle AOB = 360^\circ + 60^\circ = 420^\circ$.

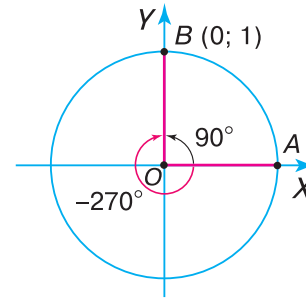
3. *Чи можуть градусні міри кутів бути від'ємними?* Кут вважається від'ємним, якщо він утворений обертанням радіуса кола за годинниковою стрілкою. На малюнку 7 зображено два кути зі спільними початковою стороною OA і кінцевою стороною OB. Один кут дорівнює -270°, а другий дорівнює 90°.



Мал. 5



Мал. 6



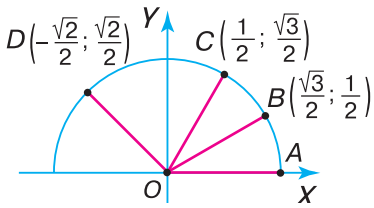
Мал. 7

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Дайте означення синуса, косинуса і тангенса для довільного кута від 0° до 180°.
2. Для якого кута тангенс не існує і чому?
3. Чому синуси тупих кутів додатні, а косинуси і тангенси — від'ємні?
4. Назвіть значення синуса і косинуса для кутів 0°, 90°, 180°.

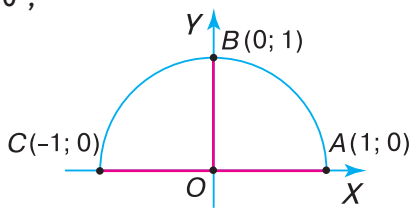
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

1'. На малюнку 8 зображено одиничне півколо.
1) Назвіть абсциси й ординати точок *B*, *C*, *D*.
2) Назвіть кути, які утворюють з додатною піввіссю *OX* радіуси *OB*, *OC* і *OD*.
3) Виразіть значення синуса, косинуса і тангенса цих кутів через координати точок *B*, *C* і *D*.



Мал. 8

2'. 1) Назвіть радіус одиничного півкола (мал. 9), який утворює з додатною піввіссю *OX* кут: 0°, 90°, 180°.
2) Запишіть значення:
а) sin 0°, sin 90°, sin 180°;
б) cos 0°, cos 90°, cos 180°;
в) tg 0°, tg 180°.



Мал. 9

3'. 1) Чи може абсциса точки одиничного півкола дорівнювати: 2; 0,5; – 1?
2) Чи може ордината точки одиничного півкола дорівнювати: 0,8; 1,4; 1?

4°. Накресліть систему координат, узявши за одиницю довжини 10 см. Проведіть у I і II чвертях одиничне півколо з центром у початку координат.
1) За допомогою транспортира позначте на одиничному півколі точки *A*, *B*, *C*, *D*, *E* так, щоб кути між радіусами *OA*, *OB*, *OC*, *OD*, *OE* і додатною піввіссю *OX* дорівнювали відповідно 35°, 70°, 115°, 130°, 165°.
2) За допомогою лінійки знайдіть координати точок *A*, *B*, *C*, *D* і *E*.
3) Знайдіть значення синуса, косинуса і тангенса для кутів 35°, 70°, 115°, 130°, 165°. Заповніть таблицю 1.

Таблиця 1

α	35°	70°	115°	130°	165°
sin α					
cos α					
tg α					

5°. Який знак мають sin α, cos α і tg α, якщо: 1) $0° < \alpha < 90°$; 2) $90° < \alpha < 180°$? Поясніть відповідь.

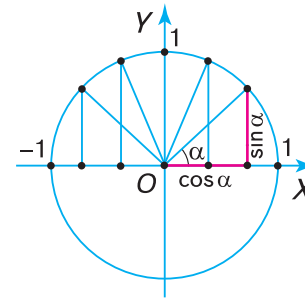
6°. Накресліть у зошиті таблицю 2. У таблиці поставте знак «+», якщо $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ або $\operatorname{tg}\alpha$ додатний, і знак «−», якщо від'ємний.

Таблиця 2

α	$0° < \alpha < 90°$	$90° < \alpha < 180°$
$\sin\alpha$		
$\cos\alpha$		
$\operatorname{tg}\alpha$		

7°. Гострим чи тупим є кут α, якщо:
1) косинус від'ємний; 2) косинус додатний; 3) тангенс від'ємний? Поясніть відповідь.

8°. За малюнком 10 обґрунтуйте твердження:
1) якщо кут α зростає від 0° до 90°, то синус цього кута зростає від 0 до 1, а косинус спадає від 1 до 0;
2) якщо кут α зростає від 90° до 180°, то синус цього кута спадає від 1 до 0, а косинус спадає від 0 до −1.



Мал. 10

9°. Обчисліть:
1) $3\cos 0° - 2\sin 90°$; 2) $4\sin 0° - 5\cos 180°$;
3) $6\sin 90° - 3\operatorname{tg} 180°$; 4) $8\sin 180° + 2\cos 90°$.

10°. Знайдіть $\sin\alpha$, якщо:
1) $\cos\alpha = -1$; 2) $\cos\alpha = 0$; 3) $\cos\alpha = 1$.

11°. Знайдіть $\cos\alpha$, якщо: 1) $\sin\alpha = 1$; 2) $\sin\alpha = 0$.

12. Чи можуть синус або косинус кута дорівнювати: 1) −0,6; 2) 0,8; 3) 3? Поясніть відповідь.

13. Чи може тангенс кута дорівнювати: 1) 8; 2) 0,01; 3) 200? Поясніть відповідь.

14. α — кут трикутника. Які з величин $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ можуть бути від'ємними і коли саме?

15. Якщо α, β, γ — кути трикутника, то який знак має сума:
1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$; 2) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$;
3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$? Поясніть відповідь.

16. Гострий чи тупий кут α, якщо:
1) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha > 0$; 2) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha < 0$; 3) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha < 0$?
Поясніть відповідь.

17. Який із кутів (α чи β) більший, якщо:
1) $\cos\alpha = 0{,}8$, $\cos\beta = 0{,}2$; 2) $\cos\alpha = -0{,}3$, $\cos\beta = -0{,}6$;
3) $\sin\alpha = 0{,}4$, $\sin\beta = 0{,}7$?

18. Яких значень може набувати сума:
1) $\sin\alpha + 1$; 2) $\cos\alpha + 0{,}5$; 3) $\sin\alpha + 0{,}2$?

19. Запишіть у порядку зростання:
1) $\sin 66^\circ$, $\sin 20^\circ$, $\sin 75^\circ$, $\sin 15^\circ$, $\sin 5^\circ$;
2) $\cos 9^\circ$, $\cos 80^\circ$, $\cos 46^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\cos 16^\circ$.

20. Запишіть у порядку спадання:
1) $\sin 176^\circ$, $\sin 92^\circ$, $\sin 101^\circ$, $\sin 125^\circ$, $\sin 150^\circ$;
2) $\cos 97^\circ$, $\cos 175^\circ$, $\cos 165^\circ$, $\cos 102^\circ$, $\cos 91^\circ$.

21. Визначте знак різниці:
1) $\sin 145^\circ - \sin 169^\circ$; 2) $\cos 178^\circ - \cos 153^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 163^\circ - \operatorname{tg} 121^\circ$.

22. Який знак мають добутки:
1) $\cos 10^\circ \cdot \sin 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 105^\circ$; 2) $\sin 40^\circ \cdot \cos 153^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 110^\circ \cdot \operatorname{tg} 160^\circ \cdot \sin 150^\circ$?

23. Обчисліть:
1) $\dfrac{6\sin 90^\circ \sin 30^\circ \cos 0^\circ}{\cos 180^\circ}$; 2) $8\cos 60^\circ + 2\sin 90^\circ - 10\cos 180^\circ$;
3) $a^2 \sin 90^\circ - b^2 \cos 0^\circ - c^2 \cos 180^\circ$, якщо $a = 4$, $b = 3$, $c = -5$.

24. Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha$, якщо: 1) $\cos\alpha = -1$; 2) $\sin\alpha = 1$; 3) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$.

25. Побудуйте кут α, якщо: 1) $\cos\alpha = 0{,}4$; 2) $\cos\alpha = -0{,}5$.

26. **Побудуйте кут α, якщо: 1) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$; 2) $\sin\alpha = 0{,}5$.**
Скільки розв'язків має задача?

27*. Доведіть, що коли $\sin\alpha = \sin\beta$, то або $\alpha = \beta$, або $\alpha = 180^\circ - \beta$.

28*. Чи існує кут α, для якого: 1) $\sin\alpha = \cos\alpha$; 2) $\sin\alpha = -\cos\alpha$?

29*. Користуючись одиничним півколом, доведіть:
1) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$; 2) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.

30*. Доведіть нерівність $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \leqslant 1$.

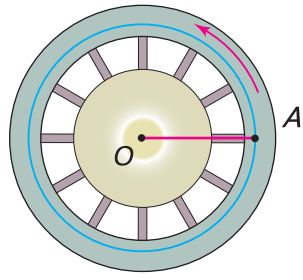
31*. Які з рівностей можливі:
1) $\cos\alpha = m + \dfrac{1}{m}$; 2) $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{mn}}{m+n}$; 3) $\cos\alpha = \dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m}$?

32*. У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза AB дорівнює 1. З вершини C проведено висоту CD. Знайдіть AC, BC, AD, BD і CD, якщо $\angle BAC = \alpha$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

33. Визначте, який кут утворюється внаслідок обертання хвилинної стрілки протягом 25 хв.

34*. Маховик дизеля робить 40 обертів за хвилину. Який кут опише його спиця OA (мал. 11) через 0,5 секунди?



Мал. 11

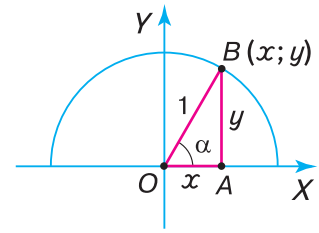
§2. ОСНОВНІ ТОТОЖНОСТІ для $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$

Ви знаєте, що за означенням $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$, а $y = \sin\alpha$, $x = \cos\alpha$.

Звідси одержимо тотожність: $\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$.

Доведемо ще такі тотожності:

$\boldsymbol{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$, $\boldsymbol{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}}$.



Мал. 12

Нехай x і y – координати точки B одиничного півкола (мал. 12). З прямокутного трикутника AOB дістанемо: $y^2 + x^2 = 1$.

Оскільки $y = \sin\alpha$, $x = \cos\alpha$, то $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Поділимо обидві частини тотожності $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на $\cos^2\alpha$.

Дістанемо: $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, або $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

Задача. Обчисліть значення $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ і $90° < \alpha < 180°$.

Розв'язання. Оскільки $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

У формулі для $\cos\alpha$ беремо знак «–», бо за умовою кут α – тупий, а косинуси тупих кутів від'ємні.

Дістанемо: $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{\dfrac{144}{169}} = -\dfrac{12}{13}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{13} : \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{5}{12}.$$

1. Щоб знайти за однією з величин $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ чи $\operatorname{tg}\alpha$ інші дві величини, скористайтеся тотожностями:

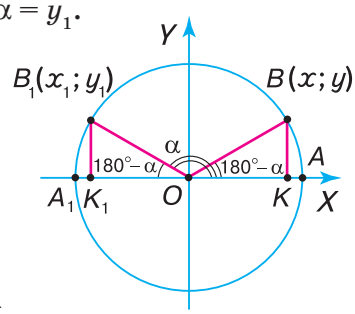
$$\boldsymbol{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}.$$

2. У формулі $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ поставте перед квадратним коренем знак «–», якщо за умовою задачі кут α – тупий.

Доведемо тотожності, які дають змогу синуси, косинуси і тангенси тупих кутів виразити через синуси, косинуси і тангенси гострих кутів.

Подивіться на малюнок 13.

Нехай $\angle AOB_1 = \alpha$ – тупий, тоді $\angle A_1OB_1 = 180^\circ - \alpha$ – гострий. Відкладемо від додатної півосі OX $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = 180^\circ - \alpha$. Проведемо $BK \perp OX$ і $B_1K_1 \perp OX$. Прямокутні трикутники OBK і OB_1K_1 рівні за гіпотенузою і гострим кутом. З рівності трикутників випливає, що $OK = OK_1$, $BK = B_1K_1$, тобто $x = -x_1$, $y = y_1$. Тоді $\sin(180^\circ - \alpha) = y$, $\sin\alpha = y_1$.



Мал. 13

Звідси **$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.** (1)

Оскільки $\cos(180^\circ - \alpha) = x$, $\cos\alpha = x_1$, а $x = -x_1$, то **$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.** (2)

Поділивши почленно рівності (1) і (2), матимемо: **$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.** (3)

Розглянемо приклади.

$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 120^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 135^\circ = -\cos(180^\circ - 135^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg}(180^\circ - 150^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Щоб знайти синус, косинус і тангенс тупого кута, зведіть їх до гострого кута, скориставшись тотожностями:
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

? Як синус і косинус гострого кута, більшого за 45°, виразити через синус і косинус кута, меншого від 45°? Потрібно скористатися відомими вам формулами: **$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.**

Наприклад:

$\sin 80^\circ = \cos(90^\circ - 80^\circ) = \cos 10^\circ$; $\cos 75^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \sin 15^\circ$.

Основні тотожності наведено у таблиці 3.

Таблиця 3

Тотожності	Застосування
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	Знаходимо за однією з величин $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ чи $\operatorname{tg}\alpha$ дві інші величини. Спрощуємо вирази.
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	Знаходимо синус, косинус і тангенс тупого кута. Спрощуємо вирази.
$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	Побудова таблиці синусів і косинусів — значення синусів кутів від 0° до 45° дорівнюють значенням косинусів кутів від 90° до 45°. Спрощуємо вирази.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Крім синуса, косинуса і тангенса кута α, є ще *котангенс* кута α. Позначається: ctg α. Це відношення $\cos\alpha$ до $\sin\alpha$, тобто $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. ctg 0° і ctg 180° не існують, бо $\sin 0° = 0$ і $\sin 180° = 0$, а на нуль ділити не можна.

Вживаються спеціальні назви і позначення для величин, обернених до синуса і косинуса.

Косекансом називають величину, обернену до синуса: $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$,

а *секансом* — величину, обернену до косинуса: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Зрозуміло, що знаки косеканса і секанса збігаються відповідно зі знаками синуса і косинуса. cosec 0° і cosec 180° не існують, бо $\sin 0° = 0$, $\sin 180° = 0$. Так само sec 90° не існує, бо $\cos 90° = 0$.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Доведіть тотожність: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
2. Доведіть, що для будь-якого кута α від 0° до 180° $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.
3. Поясніть, як виразити синус і косинус гострого кута, більшого за 45°, через косинус і синус кута, меншого від 45°.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

35'. Спростіть:

1) а) $\sin^2 9° + \cos^2 9°$; б) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;
в) $1 - \sin^2\alpha$; г) $1 - \cos^2\alpha$;
2) а) $\sin(180° - \alpha)$; б) $\cos(180° - \alpha)$;
в) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$; г) $\cos(180° - \alpha) + \cos\alpha$;
3) а) $\sin(90° - \alpha)$; б) $\cos(90° - \alpha)$;
в) $\cos(90° - \alpha) - \sin\alpha$; г) $\sin(90° - \alpha) + \cos\alpha$.

36°. Спростіть вираз: 1) $1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$; 2) $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;

3) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - 1}$; 4) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha$.

37°. Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha + \sin\alpha = 2\sin\alpha$; 2) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = \sin^2\alpha$;
3) $(1 - \sin^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha = \sin^2\alpha$; 4) $(1 - \cos^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha$.

38°. Виразіть синуси кутів 110°, 125°, 150°, 165°, 176° через синуси гострих кутів.

39°. Виразіть косинуси кутів 105°, 120°, 122°, 145°, 160° через косинуси гострих кутів.

40°. Обчисліть $3\sin(180° - \alpha) + 2\cos(90° - \alpha)$, якщо:

1) $\sin\alpha = 0{,}6$; 2) $\sin\alpha = 0{,}4$; 3) $\sin\alpha = 0{,}2$.

41°. **Обчисліть синус, косинус і тангенс кута: 1) 120°; 2) 135°; 3) 150°.**

42°. Знайдіть значення виразу:

1) $2\sin 30^\circ + \sqrt{3}\cos 150^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 150^\circ$;

3) $2\cos 120^\circ + 2\sin 150^\circ$; 4) $\operatorname{tg} 135^\circ \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos 135^\circ$.

43°. Спростіть вираз:

1) $3\sin(180^\circ - \alpha) - 2\sin(180^\circ - \alpha)$; 2) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$;

3) $\sin(180^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ - \alpha)$; 4) $\sin(90^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha)$.

44°. Доведіть тотожність:

1) $\cos(90^\circ - \alpha) \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \sin^2\alpha$;

2) $\cos(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = -\cos^2\alpha$;

3) $\dfrac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = -\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\dfrac{\cos(90^\circ - \alpha) \cdot \cos\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) \cdot \sin\alpha} = 1$.

45. **При якому значенні α тотожність $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ не справджується?**

Поясніть відповідь.

46. Спростіть вираз:

1) $1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$; 2) $(1 + \sin\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha \cdot (1 - \sin\alpha)$;

3) $\sin\alpha - \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$; 4) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha$;

5) $2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; 6) $\operatorname{tg}^2\alpha \cdot (2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$.

47. Доведіть тотожність:

1) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^4\alpha + \sin^2\alpha = 1$;

2) $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1$;

3) $(\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha) \cdot \cos^2\alpha = 1$;

4) $(\cos\alpha - \sin\alpha) \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$.

48. Чи існує кут α, для якого:

1) $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$ і $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$; 2) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ і $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ і $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$?

49. Обчисліть $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \sin\alpha$, якщо: 1) $\sin\alpha = 0{,}5$; 2) $\sin\alpha = 0{,}1$; 3) $\sin\alpha = 0{,}2$.

50. **Знайдіть $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо:**

1) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ і $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; 2) $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ і $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

3) $\sin\alpha = 0{,}8$ і $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

51. **Знайдіть $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо:**

1) $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha = -0{,}6$.

52. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо: 1) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{11}{60}$.

53. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{2\cos(90^\circ-\alpha)-2\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; 2) $\dfrac{2\sin^2(180^\circ-\alpha)+2\cos(90^\circ-\alpha)\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{\sin^2(90^\circ-\alpha)-\sin(180^\circ-\alpha)\cos(90^\circ-\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}$; 4) $\dfrac{\cos(180^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sin(90^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)}$.

54. Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\sin(90^\circ-\alpha)}{1-\sin\alpha}-\dfrac{\sin(90^\circ-\alpha)}{1+\sin\alpha}=2\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\dfrac{1-\cos^2(90^\circ-\alpha)}{\sin(180^\circ-\alpha)\cos\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha=1$;

3) $\left(\dfrac{1}{\cos^2(90^\circ-\alpha)}-1\right)\cdot\operatorname{tg}^2(180^\circ-\alpha)=1$; 4) $\dfrac{\sin^2\alpha-1}{\sin^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}^2(180^\circ-\alpha)=-1$.

55*. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}^2\alpha$;

3) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2-(1-\operatorname{tg}\alpha)^2}$; 4) $\dfrac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$.

56*. Обчисліть $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, якщо: 1) $\operatorname{tg}\alpha=3$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=2$; 3) $\operatorname{tg}\alpha=0$.

57*. Обчисліть $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, якщо: 1) $\operatorname{tg}\alpha=0$; 2) $\operatorname{tg}\alpha=2$; 3) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{5}{2}$.

58*. Знайдіть $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha+\cos\alpha=m$.

59*. Спростіть вираз:

1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2(180^\circ-\alpha)\sin^2(90^\circ-\alpha)$;

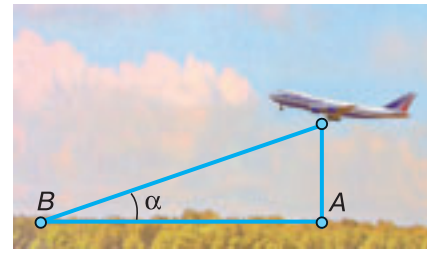
2) $\sin^2\alpha\cdot\sin^2(90^\circ-\alpha)-\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$;

3) $\cos^2\alpha\cdot\cos^2(90^\circ-\alpha)-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

60. Дві прямі дороги перетинаються під кутом 47°. На одній із цих доріг на відстані 6,5 км від перехрестя знаходиться автобусна зупинка. Потрібно прокласти найкоротший шлях від цієї зупинки до другої дороги. Знайдіть довжину цього шляху.

61. Пасажирський літак, який перебуває над пунктом *A* на висоті 400 м, почав посадку на злітну смугу аеродрому (мал. 14). Знайдіть кут α приземлення літака, якщо аеродром знаходиться на відстані 1,2 км від пункту *A*.



Мал. 14

§3. ТЕОРЕМА СИНУСІВ

Ви вже знаєте співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника. Тепер ознайомимось із співвідношенням між сторонами і кутами довільного трикутника.

Позначатимемо сторони трикутника через a, b, c, а протилежні їм кути – через α, β, γ або $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Теорема синусів. Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.

Дано: $\triangle ABC$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Довести: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

Доведення. Опишемо коло радіуса R навколо даного трикутника ABC (мал. 15). Через одну з вершин трикутника, наприклад A, проведемо діаметр AC_1 описаного кола. Трикутник ABC_1 – прямокутний ($\angle B$ – прямий як вписаний, що спирається на діаметр), тому $c = 2R \cdot \sin C_1$ або $\dfrac{c}{\sin C_1} = 2R$.

Якщо кут C – гострий (мал. 15), то $\angle C = \angle C_1$ (як вписані кути, що спираються на одну дугу кола), і $\sin C_1 = \sin C$.

Якщо ж кут C – тупий (мал. 16), то кут C_1 – гострий, оскільки $\angle C + \angle C_1 = 180^\circ$. Звідси $\angle C_1 = 180^\circ - \angle C$. Отже, $\sin C_1 = \sin (180^\circ - C) = \sin C$.

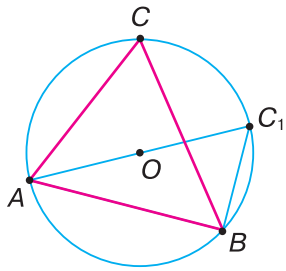
В обох випадках маємо, що $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$. (1)

Якщо кут C – прямий (мал. 17), то $c = 2R$, $\sin C = \sin 90^\circ = 1$ і рівність (1) також має місце.

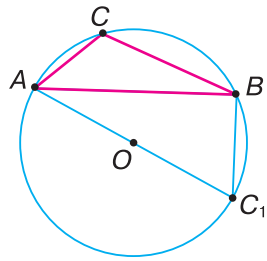
Аналогічні рівності знайдемо для кутів A і B трикутника.

Отже, для будь-якого трикутника ABC:

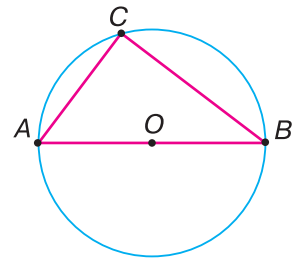
$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$, $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$, $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$, звідки $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.



Мал. 15



Мал. 16



Мал. 17

Наслідок 1. **У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника:** $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

? Чи можна знайти сторону трикутника за радіусом R описаного кола і кутом, що лежить проти цієї сторони? Так. За наслідком 1 з теореми синусів, $\frac{a}{\sin A}=2R$. Звідси $a=2R\sin A$. Так само $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$.

Наслідок 2. **У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона.**

(Спробуйте довести самостійно, розглянувши гострокутний і тупокутний трикутники.)

Задача 1. У трикутнику дано сторону $a=6$ і прилеглі до неї кути: $\angle B=80^\circ$, $\angle C=30^\circ$. Знайдіть сторону b.

Розв'язання. $\angle A=180^\circ-(30^\circ+80^\circ)=70^\circ$.

За теоремою синусів, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

Звідси $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{6\cdot\sin 80^\circ}{\sin 70^\circ}\approx\frac{6\cdot 0{,}9848}{0{,}9397}\approx 6{,}3$.

Задача 2. У трикутнику дано дві сторони: $a=8$, $b=4$ і $\angle A=48^\circ$, що лежить проти сторони a. Знайдіть $\angle B$.

Розв'язання. За теоремою синусів, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

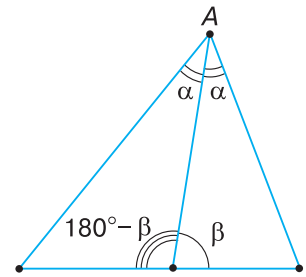
Звідси $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{4\sin 48^\circ}{8}\approx\frac{0{,}7431}{2}\approx 0{,}3716$.

Цьому значенню синуса відповідають два кути: 22° і $180^\circ-22^\circ=158^\circ$.
Оскільки $a>b$, то, за наслідком 2, $\angle A>\angle B$.
Оскільки $\angle A$ — гострий,
то $\angle B$ — гострий: $\angle B\approx 22^\circ$.

Теорема синусів дає можливість за стороною і прилеглими до неї кутами (задача 1) або за двома сторонами і кутом, протилежним одній з них (задача 2), знаходити інші сторони і кути трикутника.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Розв'яжемо задачу.



Мал. 18

Задача. Доведіть, що бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін.

Розв'язання. Нехай AD — бісектриса $\triangle ABC$ (мал. 18). Позначимо $\angle CAD = \angle BAD = \alpha$, $\angle ADB = \beta$, тоді $\angle ADC = 180^\circ - \beta$. Застосуємо теорему синусів до трикутників ABD і ACD:

$$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta}, \quad (1)$$

$$\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - \beta)}.$$

Оскільки $\sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta$, то

$$\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta}. \quad (2)$$

Поділимо почленно рівність (1) на рівність (2), дістанемо:

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$, що й треба було довести.

Поміркуємо. Розв'язуючи задачу, ми ввели допоміжні кути α і β, яких не дано в умові. Використавши теорему синусів, склали рівності (1) і (2). Потім, почленно поділивши ці рівності, позбулися синусів допоміжних кутів α і β і дістали шукану пропорцію. Такий спосіб розв'язування інколи називають *способом введення допоміжного кута*.

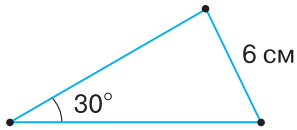
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Сформулюйте і доведіть теорему синусів.
2. Як знайти сторону трикутника за радіусом описаного кола і кутом, що лежить проти цієї сторони?
3. Сформулюйте співвідношення між градусними мірами кутів трикутника та довжинами протилежних сторін.
4. Сформулюйте дві задачі, які можна розв'язати за теоремою синусів.

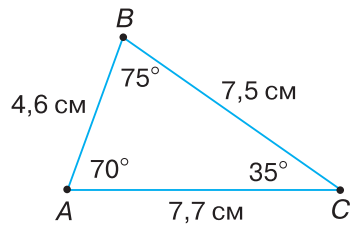
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

62'. Який із записів правильний:

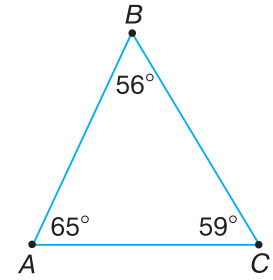
1) $\frac{a}{\sin B} = \frac{b}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$; 2) $\frac{a}{\angle A} = \frac{b}{\angle B} = \frac{c}{\angle C}$; 3) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$?



Мал. 19



Мал. 20

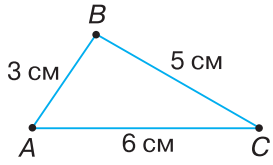


Мал. 21

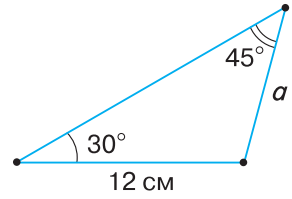
63'. За даними на малюнку 19:
1) запишіть відношення заданої сторони до синуса протилежного кута;
2) знайдіть значення цього відношення.

64'. За даними на малюнку 20:
1) запишіть відношення кожної сторони трикутника до синуса протилежного кута;
2) знайдіть значення синусів цих кутів;
3) обчисліть кожне з відношень сторони трикутника до значення синуса протилежного кута і зробіть висновок.

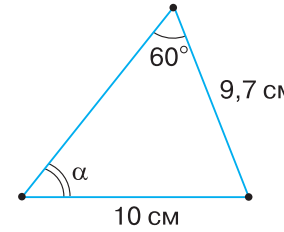
65'. Яка зі сторін трикутника *ABC* (мал. 21) найбільша, а яка — найменша?



Мал. 22



Мал. 23



Мал. 24

66'. Який з кутів трикутника *ABC* (мал. 22) найбільший, а який — найменший?

67°. За даними на малюнках обчисліть:
1) сторону *a* трикутника (мал. 23); 2) кут α трикутника (мал. 24).

68°. Знайдіть сторону *AC* трикутника *ABC*, якщо:
1) $c = 4$ см, $\angle B = 45°$, $\angle C = 30°$;
2) $a = 6$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$;
3) $c = 4$ см, $\angle A = 65°$, $\angle B = 75°$.

69°. Знайдіть кут *A* трикутника *ABC*, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 4$ см, $\angle B = 60°$;
2) $c = 8$ см, $a = 5$ см, $\angle C = 30°$;
3) $b = 6$ см, $a = 4$ см, $\angle B = 45°$.

70°. Який з кутів трикутника *ABC* найбільший, а який — найменший, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 7$ см;
2) $a = b = c$;
3) $a > b > c$?

71°. Яка зі сторін трикутника *ABC* найменша, а яка — найбільша, якщо:
1) $\angle A = 50°$, $\angle B = 20°$;
2) $\angle B = 40°$, $\angle C = 85°$;
3) $\angle A = 105°$, $\angle C = 32°$?

72°. Порівняйте катети *AC* і *BC* прямокутного трикутника *ABC*, якщо:
1) $\angle A = 46°$; 2) $\angle B = 51°$; 3) $\angle A = 65°$.

73°. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 9 см. Чи може кут, протилежний стороні 7 см, бути: 1) тупим; 2) гострим; 3) прямим?

74°. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 5 см, 6 см. Чи може кут, протилежний стороні 4 см, бути: 1) більшим за 60°; 2) рівним 60°; 3) меншим від 60°?

75°. *BC* — найменша сторона трикутника *ABC*. Чи може кут *A* дорівнювати:
1) 61°; 2) 60°; 3) 59°?

76°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо проти сторони 3 см лежить кут: 1) 120°; 2) 30°; 3) 135°.

77°. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 8 см. Знайдіть сторону, яка лежить проти кута: 1) 150°; 2) 45°; 3) 60°.

78. Кути трикутника відносяться, як 1 : 2 : 3. Як відносяться його сторони?

79. У трикутнику *ABC* $a = 12$ см, $b = 5$ см. Чи може $\sin B$ дорівнювати:
1) 0,25; 2) 0,5; 3) 0,75?

80. Знайдіть сторони *a* і *c* трикутника *ABC*, якщо:
1) $b = 5$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 30°$; 2) $b = 1$ см, $\angle A = 100°$, $\angle C = 50°$.

81. Сторона трикутника дорівнює *a*, а прилеглі до неї кути — β і γ. Знайдіть дві інші сторони трикутника.

82. Знайдіть кути *B* і *C* трикутника *ABC*, якщо:
1) $c = 20$ см, $a = 40$ см, $\angle A = 30°$; 2) $c = 30$ см, $a = 40$ см, $\angle A = 45°$.

83. У паралелограмі *ABCD* $AD = 8$ см, $BD = 4$ см, $\angle A = 22°$.
Знайдіть: 1) $\angle BDC$; 2) $\angle DBC$.

84. Діагональ *d* паралелограма ділить його кут на два кути α і β. Знайдіть сторони паралелограма.

85. Обчисліть сторони трикутника *ABC*, якщо $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$, а висота *AD* дорівнює 3 см.

86. Знайдіть сторони *b* і *c* трикутника *ABC*, якщо:
1) $a = 8$ см, $\angle A : \angle B : \angle C = 4 : 2 : 3$;
2) $a = 6$ см, $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 5 : 4$.

87. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює *a*, а кут при основі — α. Знайдіть довжину бісектриси кута при основі, якщо:
1) $a = 6$ см, $\alpha = 30°$; 2) $a = 7$ см, $\alpha = 20°$.

88. У трикутнику *ABC* $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$. Знайдіть сторони *a* і *c*, якщо:
1) $a - c = 5$; 2) $a + c = 4$.

89. Що більше, основа чи бічна сторона рівнобедреного трикутника, якщо:
1) один з його кутів — тупий;
2) прилеглий до основи кут менший від 60°;
3) прилеглий до основи кут більший за 60°?

90. У паралелограмі $ABCD$ діагональ BD утворює зі стороною AB більший кут, ніж зі стороною BC. Доведіть, що $BC > AB$.

91. У трикутнику ABC медіана BM утворює зі стороною AB більший кут, ніж зі стороною BC. Доведіть, що $BC > AB$.

92. У прямокутному трикутнику ABC з вершини прямого кута C проведено медіану CM. $\angle ACM > 45°$. Який катет більший: AC чи BC?

93. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, а бічна сторона — b. Знайдіть радіус R кола, описаного навколо трикутника, якщо: 1) $a = 24$ см, $b = 13$ см; 2) $a = 12$ см, $b = 10$ см.

94. Діагональ трапеції, вписаної в коло, дорівнює 4 см. Знайдіть радіус кола, якщо один з кутів трапеції дорівнює: 1) 135°; 2) 30°; 3) 120°.

95*. У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює бічній стороні, більша основа дорівнює 10 см, а кут при основі — 70°. Знайдіть периметр трапеції.

96*. Знайдіть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють a і b ($a > b$), а прилеглі до основи a кути — α і β.

97*. Доведіть, скориставшись теоремою синусів, що бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін.

98*. Доведіть, що медіана трикутника ділить кут при вершині на частини, синуси яких пропорційні до синусів відповідних кутів при основі.

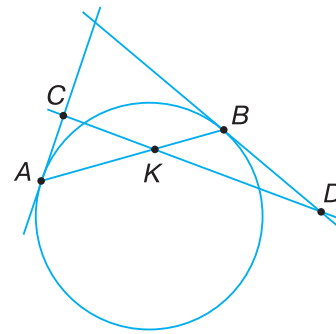
99*. Доведіть, скориставшись теоремою синусів, що медіани AA_1, BB_1 і CC_1 трикутника ABC діляться точкою O їх перетину у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини.

100*. Через точку K хорди AB кола проведено пряму, яка перетинає в точках C і D дотичні до кола, що проходять через точки A і B (мал. 25). Доведіть, що $AC \cdot KD = BD \cdot KC$.

101*. У трапеції $ABCD$ з основами AB і CD кут A більший за кут B. Доведіть, що коли $AB > CD$, то $BC > AD$.

102*. Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) перетинаються в точці O. Доведіть, що коли $AC > BD$, то $AO > BO$ і $CO > DO$.

103*. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, а кут при вершині — α. Знайдіть радіус кола, яке проходить через центр вписаного в цей трикутник кола і кінці основи.



Мал. 25

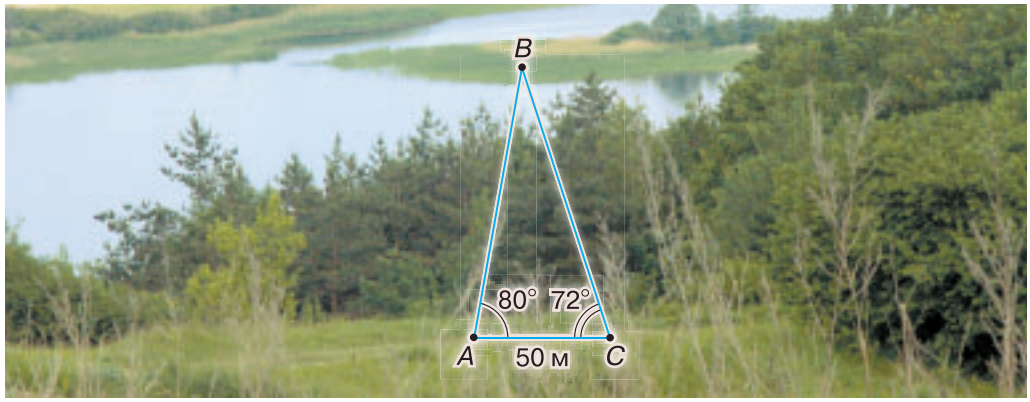
104*. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 1 см і 3 см, а бічна сторона дорівнює 2 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

105*. Точка D лежить на стороні AC трикутника ABC. Доведіть, що відношення радіусів кіл, описаних навколо трикутників ABD і DBC, не залежить від вибору точки D.

106*. O — точка перетину діагоналей описаного чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що сума радіусів кіл, описаних навколо трикутників AOB і COD, дорівнює сумі радіусів кіл, описаних навколо трикутників BOC і AOD.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

107. Знайдіть відстань від точки A до недоступної точки B, якщо $AC = 50$ м, $\angle CAB = 80^\circ$ і $\angle ACB = 72^\circ$ (мал. 26).



Мал. 26

§4. ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ

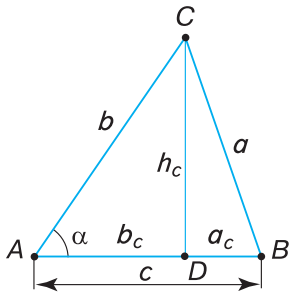
Ознайомимося ще з одним співвідношенням між сторонами і кутами довільного трикутника.

Теорема косинусів.
Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

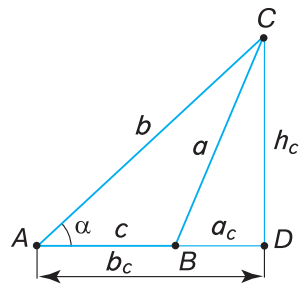
Дано: $\triangle ABC$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Довести: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

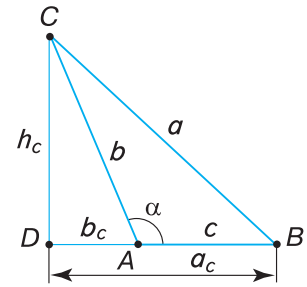
Доведення. Кут A $\triangle ABC$ може бути гострим, тупим або прямим. Розглянемо ці випадки.



Мал. 27



Мал. 28



Мал. 29

1. Кут *A* гострий. Проведемо висоту CD до сторони AB (мал. 27) або до її продовження (мал. 28). Нехай a_c і b_c — проекції сторін BC і AC на пряму AB, h_c — висота CD. З прямокутного $\triangle BCD$: $a^2 = h_c^2 + a_c^2$. (1)
Знайдемо h_c^2 і a_c^2. З прямокутного $\triangle ACD$: $h_c^2 = b^2 - b_c^2$.
Далі, $a_c = c - b_c$ (мал. 27) або $a_c = b_c - c$ (мал. 28).
У кожному з цих випадків $a_c^2 = (c - b_c)^2 = c^2 - 2cb_c + b_c^2$.
Підставивши вирази для h_c^2 і a_c^2 у рівність (1), матимемо:
$a^2 = b^2 - b_c^2 + c^2 - 2cb_c + b_c^2 = b^2 - 2cb_c + c^2$.
З прямокутного $\triangle ACD$: $b_c = b \cos A$. Отже, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

2. Кут *A* тупий (мал. 29). Так само, як і у першому випадку, проводимо висоту CD і з прямокутного $\triangle BCD$ знаходимо: $a^2 = h_c^2 + a_c^2$. (1)
Потім знаходимо h_c^2 і a_c^2. $h_c^2 = b^2 - b_c^2$ (з прямокутного $\triangle ACD$), $a_c^2 = (c + b_c)^2 = c^2 + 2cb_c + b_c^2$. Підставивши вирази для h_c^2 і a_c^2 у рівність (1), дістанемо: $a^2 = b^2 - b_c^2 + c^2 + 2cb_c + b_c^2 = b^2 + 2cb_c + c^2$.
З прямокутного $\triangle ACD$: $b_c = b \cos (180^\circ - \angle A) = -b \cos A$.
Тоді $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

3. Кут *A* прямий.
У цьому випадку $\cos A = \cos 90^\circ = 0$. За теоремою Піфагора, дістанемо: $a^2 = b^2 + c^2$. Тоді $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Задача 1.
У трикутнику дано дві сторони: $a = 5$, $b = 8$ і $\angle C = 60^\circ$ між ними. Знайдіть сторону c.

Розв'язання. За теоремою косинусів:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 0{,}5 = 49$, $c = \sqrt{49} = 7$.

Задача 2.
Дано три сторони трикутника: $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$. Знайдіть $\angle A$.

Розв'язання. З рівності $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ знаходимо:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 49 - 25}{2 \cdot 6 \cdot 7} \approx 0{,}7143.$$

Звідки $\angle A \approx 44^\circ 25'$.

Так само можна обчислити $\angle B$ і $\angle C$.

За теоремою косинусів можна знайти:
1) сторону трикутника за двома його сторонами і кутом між ними (задача 1);
2) кути трикутника за трьома його сторонами (задача 2).

? Чи можна визначити вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний), знаючи лише його сторони? Поміркуємо.

Якщо $\angle A$ – гострий, то $\cos A > 0$ і $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A < b^2 + c^2$.

Якщо $\angle A$ – прямий, то $\cos A = \cos 90^\circ = 0$ і $a^2 = b^2 + c^2$.

Якщо $\angle A$ – тупий, то $\cos A < 0$ і $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A > b^2 + c^2$.

Отже, кут трикутника гострий, прямий або тупий залежно від того, чи буде квадрат протилежної сторони меншим, дорівнювати або більшим за суму квадратів двох інших сторін.

Наприклад, сторони трикутника дорівнюють 2 см, 3 см, 4 см. Прямий або тупий кут може лежати проти більшої сторони. Тому визначимо вид кута, що лежить проти сторони 4 см. $4^2 > 2^2 + 3^2$. Отже, цей кут тупий, а трикутник – тупокутний.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Поміркуємо над рівністю $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

$b \cos A$ дорівнює за модулем проекції b_c сторони AC на сторону AB (мал. 27) або її продовження (мал. 28). Знак $b \cos A$ залежить від кута A: якщо кут A гострий, то беремо «+», якщо тупий, то «−». Звідси маємо **наслідок**: квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін «±» подвоєний добуток однієї з них на проекцію другої. Знак «+» беремо тоді, коли протилежний кут тупий, а знак «−», коли гострий.

2. Теорему косинусів називають іноді *узагальненою теоремою Піфагора*. Така назва пояснюється тим, що теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів. Справді, якщо в трикутнику $\angle A$ – прямий, то $\cos A = \cos 90^\circ = 0$ і з рівності $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ дістанемо: $a^2 = b^2 + c^2$.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

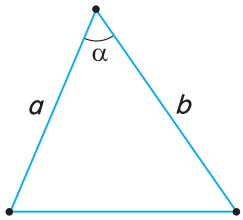
1. Сформулюйте і доведіть теорему косинусів.
2. Сформулюйте дві задачі, які можна розв'язати за теоремою косинусів.
3. Як визначити вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний) за даними його сторонами?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

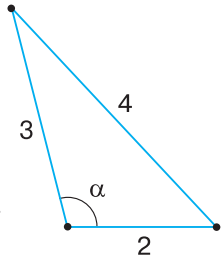
108'. Який із записів правильний:

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos B$; 2) $b^2 = a^2 + c^2 + 2ac \cdot \cos B$;

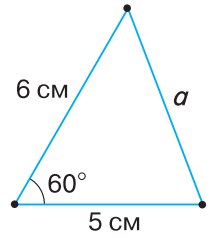
3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$?



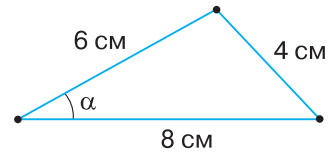
Мал. 30



Мал. 31



Мал. 32



Мал. 33

109'. Запишіть, користуючись теоремою косинусів, квадрат сторони x трикутника (мал. 30).

110'. Знайдіть $\cos B$ із рівності $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$.

111'. За даними на малюнку 31 обчисліть $\cos \alpha$.

112°. a, b, c — сторони трикутника ABC. За теоремою косинусів запишіть квадрат сторони:
1) b, якщо $\angle B = 45°$; 2) c, якщо $\angle C = 60°$; 3) a, якщо $\angle A = 30°$.

113°. За даними на малюнках обчисліть:
1) сторону a трикутника (мал. 32);
2) кут α трикутника (мал. 33).

114°. Знайдіть невідому сторону трикутника ABC, якщо:
1) $b = 3$ см, $c = 4$ см, $\angle A = 60°$;
2) $a = 4$ см, $b = 2\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$;
3) $a = 8\sqrt{3}$ см, $c = 10$ см, $\angle B = 30°$.

115°. Обчисліть косинуси кутів трикутника ABC, якщо його сторони дорівнюють:
1) $a = 8$ см, $b = 9$ см, $c = 10$ см; 2) $a = 3$ см, $b = 7$ см, $c = 8$ см;
3) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 7$ см.

116°. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо його сторони дорівнюють:
1) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 3$ см; 2) $a = 3$ см, $b = 2$ см, $c = 4$ см;
3) $a = 5$ см, $b = 6$ см, $c = 7$ см.

117°. При яких значеннях кута α квадрат сторони трикутника, що лежить проти цього кута: 1) менший від суми квадратів двох інших сторін;
2) дорівнює цій сумі; 3) більший за неї?

118°. Не обчислюючи кутів, встановіть вид трикутника (відносно кутів), якщо його сторони дорівнюють:
1) 11 см, 17 см, 21 см; 2) 8 см, 10 см, 12 см; 3) 0,3 см, 0,5 см, 0,4 см.

119. Знайдіть найбільший кут трикутника ABC, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см; 2) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 6$ см;
3) $a = 40$ см, $b = 13$ см, $c = 37$ см.

120. Обчисліть невідому сторону трикутника ABC, якщо:
1) $a = 7$ см, $b = 10$ см, $\angle C = 120°$; 2) $a = 2$ см, $c = 3\sqrt{3}$ см, $\angle B = 150°$;
3) $b = 8$ см, $c = 12$ см, $\angle A = 115°$.

121. Доведіть, що у прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

122. На сторонах кута A позначено дві точки M і N. Знайдіть відстань MN, якщо:
1) $AM = 17$ см, $AN = 12\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45^\circ$;
2) $AM = 7\sqrt{3}$ см, $AN = 10$ см, $\angle A = 30^\circ$.

123. У паралелограма $ABCD$ $AB = 6$ см, $AD = 10$ см. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо кут A дорівнює: 1) 60°; 2) 48°; 3) 125°.

124. **Сторони паралелограма дорівнюють a і b, а один з кутів — α. Знайдіть діагоналі паралелограма.**

125. Катети прямокутного трикутника ABC дорівнюють: $AC = 4$ см, $BC = 3$ см. На катеті BC побудовано рівносторонній трикутник BCD. Знайдіть відстань AD. (Розгляньте два випадки.)

126. Дві сторони трикутника дорівнюють 8 см і 15 см, а кут між ними 120°. Знайдіть медіану, проведену до третьої сторони трикутника.

127. Знайдіть невідому сторону трикутника ABC, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 7$ см, $\sin C = 0{,}8$; 2) $b = 4$ см, $c = 10$ см, $\sin A = 0{,}6$.
Скільки розв'язків має задача?

128. Користуючись формулою $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$, дослідіть, як змінюється сторона a із зростанням кута α від 0° до 180° (при сталих значеннях b і c).

129. a, b, c — сторони трикутника ABC. Доведіть:
1) якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то $\angle A$ гострий; 2) якщо $a^2 > b^2 + c^2$, то $\angle A$ тупий.

130. **Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.**

131. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо вони відносяться, як 3 : 5, а сторони дорівнюють 13 см і 16 см.

132. Знайдіть сторони паралелограма, якщо вони відносяться, як 1 : 2, а діагоналі дорівнюють 9 см і 13 см.

133. Одна зі сторін паралелограма на 1 см довша за другу, а його діагоналі дорівнюють 7 см і 11 см. Знайдіть сторони паралелограма.

134. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 11 см. Одна з бічних сторін дорівнює 8 см і утворює з основою кут 60°. Знайдіть діагоналі трапеції.

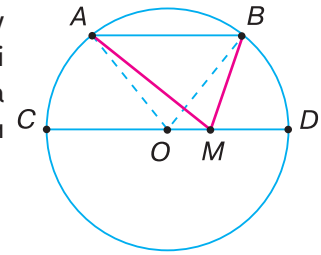
135*. Сторона трикутника дорівнює 26 см, а медіани, проведені до двох інших сторін, дорівнюють 15 см і 30 см. Знайдіть третю медіану.

136*. **Доведіть, що медіана трикутника** $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

137*. Бісектриса кута паралелограма ділить його сторону на відрізки по 5 см. Знайдіть довжину діагоналі, якщо друга діагональ дорівнює 9 см.

138*. До даного кола радіуса R дотикаються два рівні менші кола радіуса r — одне зсередини, друге зовні. Дуга між точками дотику містить 60°. Знайдіть відстань між центрами менших кіл.

139*. У колі з центром O хорда AB паралельна діаметру CD (мал. 34). На діаметрі або його продовженні позначено довільну точку M. Доведіть, що сума $AM^2 + BM^2$ не залежить від положення хорди при заданому положенні точки M.



Мал. 34

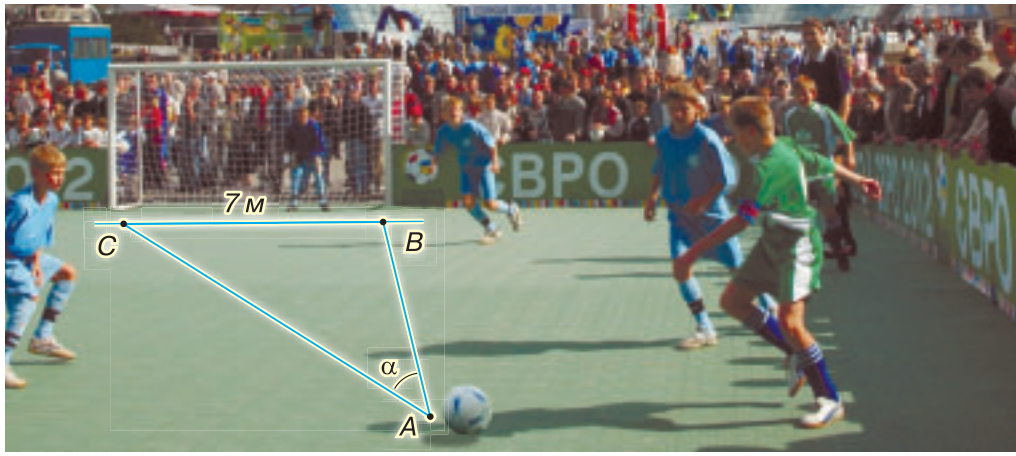
140*. Для сторін трикутника виконується рівність

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}=1.$$

Доведіть, що один з кутів трикутника дорівнює 60°.

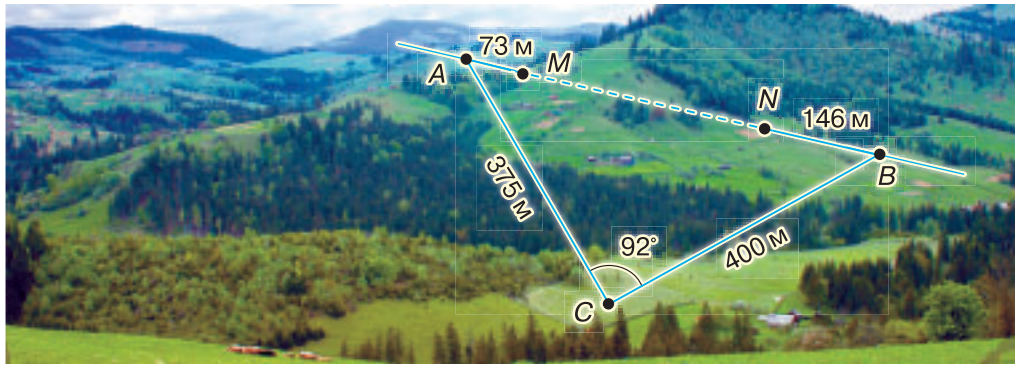
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

141. Футбольний м'яч знаходиться в точці A футбольного поля на відстані 4,5 м і 9,4 м від основ B і C стійок воріт (мал. 35). Футболіст направляє м'яч у ворота. Знайдіть кут α влучення м'яча у ворота, якщо ширина воріт 7 м.



Мал. 35

142*. На будівництві залізниці потрібно на ділянці AB прокласти тунель (мал. 36). За даними на малюнку поясніть, як знайти довжину і напрям тунелю. Обчисліть довжину тунелю.



Мал. 36

§5. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

У 8 класі ви розв'язували задачі на обчислення елементів прямокутного трикутника. Ці задачі є окремим випадком задач, які прийнято називати задачами на розв'язування трикутників.

Розв'язати трикутник означає – знайти невідомі сторони і кути трикутника за відомими його сторонами і кутами.

Можливі такі види задач, у яких вимагається розв'язати трикутник: 1) за двома сторонами і кутом між ними; 2) за стороною і прилеглими до неї кутами; 3) за трьома сторонами; 4) за двома сторонами і кутом, прилеглим до однієї з них.

Задача 1. **Дано:** $b = 93$, $c = 65$, $\angle A = 42^\circ$.

Знайти: a, $\angle B$, $\angle C$.

Розв'язання. 1) За теоремою косинусів:

$a^2 = 93^2 + 65^2 - 2 \cdot 93 \cdot 65 \cdot \cos 42^\circ = 8649 + 4225 - 12090 \cdot 0{,}7431 \approx 3890$,

$a \approx \sqrt{3890} \approx 62{,}4$.

2) Застосовуючи теорему косинусів, дістанемо:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx \frac{3890 + 4225 - 8649}{2 \cdot 62{,}4 \cdot 65} \approx -0{,}0658.$$

Отже, $\angle B$ – тупий.

Знайдемо гострий кут B_1, косинус якого дорівнює 0,0658. $\angle B_1 \approx 86^\circ 13'$.

Тоді $\angle B = 180^\circ - \angle B_1 = 180^\circ - 86^\circ 13' \approx 93^\circ 47'$.

3) $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 42^\circ - 93^\circ 47' \approx 44^\circ 13'$.

Задача 2. **Дано:** $c = 40$, $\angle A = 28^\circ$, $\angle B = 31^\circ$.

Знайти: a, b, $\angle C$.

Розв'язання. 1) $\angle C = 180^\circ - 28^\circ - 31^\circ = 121^\circ$.

2) Із рівності $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ знаходимо сторону b:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{40 \cdot \sin 31^\circ}{\sin 28^\circ} \approx \frac{40 \cdot 0{,}5150}{0{,}4695} \approx 43{,}9.$$

3) Із рівності $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ знаходимо сторону c:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{40 \cdot \sin 121^\circ}{\sin 28^\circ} \approx \frac{40 \cdot 0{,}8572}{0{,}4695} \approx 73.$$

Задача 3. **Дано:** $a = 18$, $b = 24$, $c = 13$.

Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Розв'язання. 1) Знаходимо за теоремою косинусів кут A:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{576 + 169 - 324}{2 \cdot 24 \cdot 13} = \frac{421}{624} \approx 0{,}6747,\ \angle A \approx 47°34'.$$

2) За теоремою косинусів: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{324 + 169 - 576}{2 \cdot 24 \cdot 13} \approx -0{,}1330.$

Знайдемо гострий кут B_1, косинус якого дорівнює 0,1330.

$\angle B_1 \approx 82°21'$. Тоді $\angle B = 180° - \angle B_1 = 180° - 82°21' \approx 97°39'$.

3) $\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 47°34' - 97°39' \approx 34°47'$.

Задача 4. **Дано:** $a = 70$, $b = 65$, $\angle A = 40°$.

Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$.

Розв'язання. 1) За теоремою синусів:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{65 \cdot \sin 40°}{70} \approx \frac{65 \cdot 0{,}6428}{70} \approx 0{,}5969.$$

Цьому значенню синуса відповідають два кути: 36°39' і 143°21'.
Оскільки $a > b$, то $\angle A > \angle B$. Оскільки $\angle A$ — гострий, то $\angle B$ — гострий: $\angle B \approx 36°39'$.

2) $\angle C = 180° - 36°39' - 40° \approx 103°21'$.

3) $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{70 \cdot \sin 103°21'}{\sin 40°} = \frac{70 \cdot 0{,}9730}{0{,}6428} \approx 105{,}9.$

Розв'язування прикладних задач ґрунтується на розв'язуванні трикутників. Розглянемо види прикладних задач.

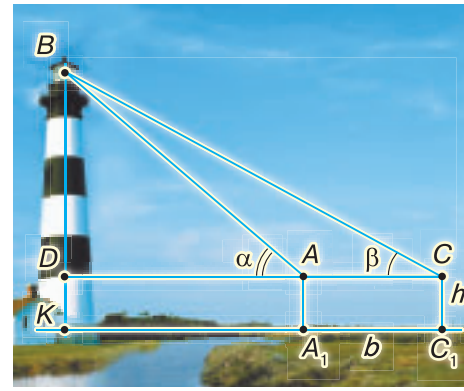
1. Задачі на знаходження висоти предмета, основа якого недоступна.

Задача. Знайдіть висоту вежі, яка відокремлена від вас річкою (мал. 37).

Розв'язання. На горизонтальній прямій, яка проходить через основу вежі, позначимо дві точки A_1 і C_1. Вимірюємо $A_1C_1 = b$, $\angle DAB = \alpha$ і $\angle DCB = \beta$. За теоремою синусів, з трикутника ABC дістанемо:

$$AB = \frac{AC \cdot \sin\beta}{\sin B}.$$

З прямокутного трикутника ABD:
$BD = AB \cdot \sin\alpha$.



Мал. 37

Отже, $BD = \dfrac{b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

Додавши до BD висоту приладу $AA_1 = DK = h$, яким вимірювали кути, дістанемо формулу для обчислення висоти вежі:

$BK = BD + DK = \dfrac{b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)} + h$.

Нехай результати вимірювання такі: $b = 12$ м, $h = 1{,}5$ м, $\alpha = 42^\circ$, $\beta = 37^\circ$.

Тоді $BK = \dfrac{12 \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 37^\circ}{\sin 5^\circ} + 1{,}5 \approx \dfrac{12 \cdot 0{,}6691 \cdot 0{,}6018}{0{,}0872} + 1{,}5 \approx 56{,}9$ (м).

2. Задачі на знаходження відстані до недоступного пункту.

Задача. Знайдіть відстань від пункту A до недоступного пункту B (мал. 38).

Розв'язання. Обираємо на місцевості таку точку C, щоб з неї було видно пункт B і можна було виміряти відстань AC.

Вимірюємо $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $BCA = \gamma$. Знаходимо $\angle B = 180^\circ - \alpha - \gamma$.

За теоремою синусів: $AB = \dfrac{b \cdot \sin\gamma}{\sin(180^\circ - (\alpha + \gamma))} = \dfrac{b \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$.

Нехай результати вимірювання такі: $b = 90$ м, $\alpha = 46^\circ$, $\gamma = 25^\circ$.

Тоді $AB = \dfrac{90 \cdot \sin 25^\circ}{\sin 71^\circ} \approx \dfrac{90 \cdot 0{,}4226}{0{,}9455} \approx 40{,}2$ (м).

3. Задачі на знаходження відстані між двома доступними пунктами (якщо безпосереднє вимірювання неможливе).

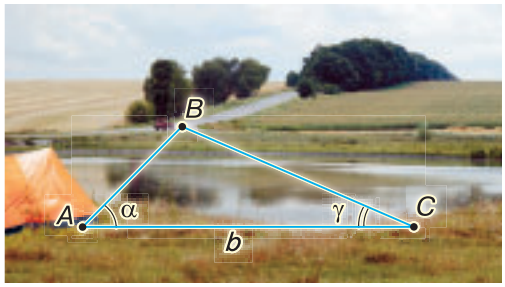
Задача. Знайдіть відстань між пунктами B і C, розділеними ставком (мал. 39).

Розв'язання. Обираємо на місцевості точку A так, щоб можна було виміряти відстані AB і AC. Вимірюємо $AB = c$, $AC = b$ і $\angle BAC = \alpha$.

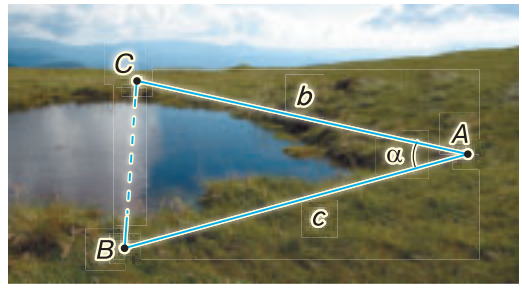
За теоремою косинусів: $BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$.

Нехай результати вимірювання такі: $b = 88$ м, $c = 90$ м, $\alpha = 28^\circ$.

Тоді $BC = \sqrt{88^2 + 90^2 - 2 \cdot 88 \cdot 90 \cdot \cos 28^\circ} \approx 43{,}1$ (м).



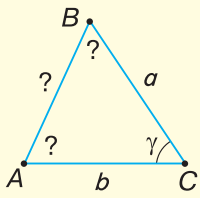
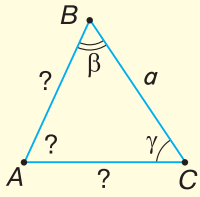
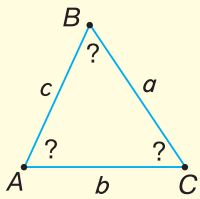
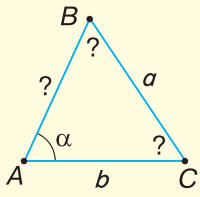
Мал. 38



Мал. 39

Алгоритми розв'язування трикутників наведено в таблиці 4.

Таблиця 4

Умова задачі		Алгоритм розв'язування
	Дано: $AC = b$, $BC = a$, $\angle C = \gamma$. Знайти: AB, $\angle A$, $\angle B$.	1) $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$, 2) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 3) $\angle B = 180^\circ - \angle A$
	Дано: $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Знайти: AC, AB, $\angle A$.	1) $\angle A = 180^\circ - \beta - \gamma$, 2) $AC = \frac{a\sin\beta}{\sin A}$, 3) $AB = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin A}$.
	Дано: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.	1) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 2) $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 3) $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$.
	Дано: $BC = a$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$. Знайти: AB, $\angle B$, $\angle C$.	1) $\sin B = \frac{b\sin\alpha}{a}$, 2) $\angle C = 180^\circ - \alpha - \angle B$, 3) $AB = \frac{a\sin C}{\sin\alpha}$.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Поміркуємо над задачею четвертого виду.

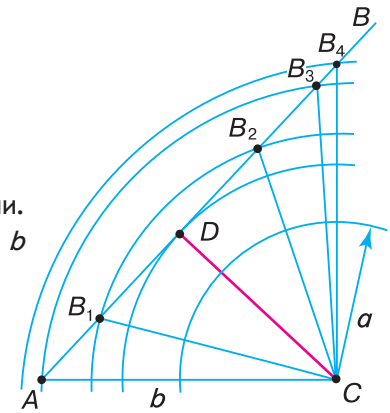
Дано: a, b, $\angle A$.

Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$.

Пригадаємо побудову трикутника за цими даними. Відкладаємо на стороні $\angle A$ відрізок $AC = b$ (мал. 40), а потім з точки C як з центра описуємо коло радіуса a.

Можливі такі випадки.

1) Коло не перетинає сторону AB кута A. Задача розв'язку не має.



Мал. 40

2) Коло дотикається до сторони AB у точці D.
Задача має один розв'язок — прямокутний $\triangle ACD$.

3) Коло перетинає сторону AB у двох точках B_1 і B_2.
Задача має два розв'язки — $\triangle AB_1C$ і $\triangle AB_2C$.

4) Коло перетинає сторону AB у точці B_3 і проходить через вершину A кута.
Задача має один розв'язок — рівнобедрений $\triangle AB_3C$.

5) Коло перетинає сторону AB у точці B_4.
Задача має один розв'язок — $\triangle AB_4C$.

Виникає запитання: *Чи не можна лише на основі числових даних задачі, не виконуючи вказаних побудов, визначити, скільки розв'язків вона має?*

Помічаємо, що при $\angle A < 90^\circ$ із прямокутного $\triangle ACD$ (мал. 40) $CD = b \sin A$.
Тоді випадки 1) — 5) запишемо так:

1) $a < CD$, тобто $a < b \sin A$.
Задача розв'язку не має, оскільки $\sin\angle B = \dfrac{b \sin A}{a} > 1$.

2) $a = b \sin A$. $\sin\angle B = \dfrac{b \sin A}{a} = 1$ і $\angle B = 90^\circ$.
Задача має один розв'язок.

3) $b \sin A < a < b$.
Задача має два розв'язки, оскільки $\angle B$ може бути як гострим, так і тупим.

4) $a = b$.
Задача має один розв'язок. $\angle A = \angle B$ як кути рівнобедреного трикутника.

5) $a > b$.
$\angle B$ — гострий, оскільки він лежить проти меншої сторони трикутника.
Задача має один розв'язок.

Якщо ж $\angle A > 90^\circ$, то матимемо випадок 5), оскільки проти тупого кута завжди лежить більша сторона.

Розглянемо приклад.

Дано: $a = 71$, $b = 96$, $\angle A = 26^\circ$.

Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$.

Знайдемо: $b \sin A = 96 \sin 26^\circ \approx 96 \cdot 0{,}4384 \approx 42{,}09 < 71$.
Отже, $b \sin A < a < b$ і задача має два розв'язки.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що означає розв'язати трикутник?
2. Які види задач стосуються розв'язування трикутників?
3. Запишіть алгоритми розв'язування кожного з видів цих задач.
4. Назвіть види прикладних задач.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

143. За даними на малюнках 41 — 43 запишіть формули для обчислення елемента x трикутника.

144'. За даними на малюнках 44, 45 обчисліть невідомі сторони і кути трикутника.

145°. Дано дві сторони трикутника і кут між ними. Знайдіть інші два кути і третю сторону, якщо:

1) $a = 6$, $c = 8$, $\beta = 30°$; 2) $b = 4$, $c = 5$, $\alpha = 60°$;
3) $a = 3$, $b = 2$, $\gamma = 45°$; 4) $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 105°$;
5) $b = 3$, $c = 4$, $\alpha = 120°$.

146°. Дано сторону і прилеглі до неї кути трикутника. Знайдіть третій кут та інші дві сторони, якщо:

1) $a = 4$, $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$; 2) $c = 2$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$;
3) $a = 7$, $\beta = 30°$, $\gamma = 48°$; 4) $b = 10$, $\alpha = 20°$, $\gamma = 110°$;
5) $c = 5$, $\alpha = 28°$, $\beta = 122°$.

147°. Дано три сторони трикутника. Знайдіть його кути, якщо:

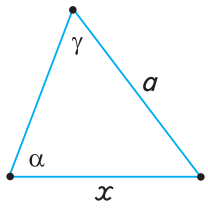
1) $a = 3$, $b = 6$, $c = 5$; 2) $a = 4$, $b = 3$, $c = 6$;
3) $a = 4$, $b = 7$, $c = 5$; 4) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$;
5) $a = 6$, $b = 8$, $c = 7$.

148°. У паралелограма діагональ d, сторона a, а кут між ними α. Знайдіть невідомі діагональ, сторону і кути паралелограма, якщо:

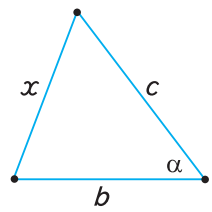
1) $d = 10$, $a = 6$, $\alpha = 20°$; 2) $d = 12$, $a = 5$, $\alpha = 35°$;
3) $d = a = 5$, $\alpha = 32°$.

149. У трикутнику дано дві сторони і кут, що лежить проти однієї зі сторін. Знайдіть інші два кути і третю сторону трикутника, якщо:

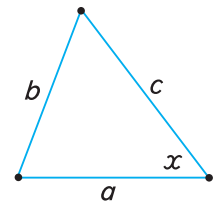
1) $a = 12$, $b = 10$, $\alpha = 40°$; 2) $a = 40$, $c = 30$, $\alpha = 45°$;
3) $b = c = 15$, $\gamma = 75°$; 4) $a = 30$, $c = 20$, $\alpha = 30°$;
5) $a = 20$, $b = 13$, $\beta = 65°$.



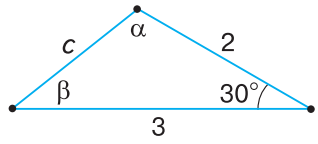
Мал. 41



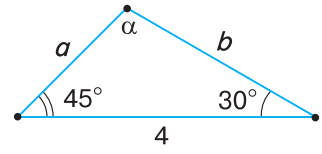
Мал. 42



Мал. 43



Мал. 44



Мал. 45

Таблиця 5

a	5	3	2	
b	4			5
c	8		4	8
α				
β		35°	40°	
γ		30°		20°

150. a, b, c — сторони, α, β, γ — кути трикутника. Накресліть у зошиті таблицю 5 та заповніть її.

151. Розв'яжіть трикутник, якщо:
1) $a - b = 5$, $\angle A = 54°$, $\angle B = 13°$; 2) $b + c = 7$, $\angle A = 29°$, $\angle B = 47°$;
3) $c - a = 3$, $\angle B = 44°$, $\angle C = 102°$.

152. Обчисліть невідомі сторони і кути трикутника, якщо:
1) $a = 7$, $b = 23$, $m_c = 9{,}6$; 2) $a = 15$, $c = 18$, $m_b = 11{,}3$;
3) $a = 13$, $b = 15$, $m_c = 12{,}3$.

153. **Діагоналі паралелограма дорівнюють d_1 і d_2, а кут між ними — α. Знайдіть сторони паралелограма**, якщо:
1) $d_1 = 12$ см, $d_2 = 6$ см, $\alpha = 35°$; 2) $d_1 = 4$ см, $d_2 = 10$ см, $\alpha = 140°$.

154. Знайдіть бісектриси трикутника ABC, якщо:
1) $AC = 7$, $\angle A = 60°$, $\angle C = 40°$; 2) $BC = 5$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 70°$.

155. Визначте сторони трикутника, якщо середня за довжиною сторона відрізняється від кожної з двох інших на одиницю, а проекція більшої сторони на середню дорівнює 9 см.

156. У рівнобедреному прямокутному трикутнику ABC гіпотенузу AB продовжено на довжину $BD = BC$ і точку D сполучено з C. Знайдіть сторони трикутника ADC, якщо катет $BC = a$.

157. Площа трикутника ABC дорівнює 16 см^2, $AC = 5$ см, $BC = 8$ см. Знайдіть сторону AB.

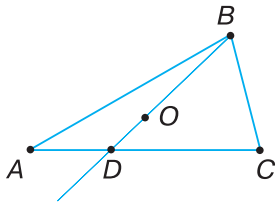
158. У коло радіуса 38 см вписано трикутник, гострі кути якого дорівнюють 49° і 63°. Знайдіть сторони трикутника.

159. **У трикутнику ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а радіус описаного кола R. Знайдіть сторони трикутника.**

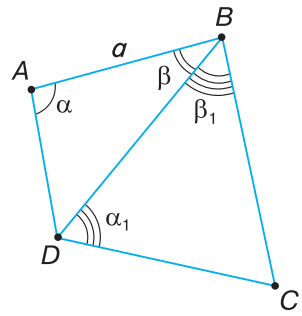
160. Сторона трикутника дорівнює 21 см, а дві інші його сторони утворюють кут 60° і відносяться, як 3 : 8. Знайдіть невідомі сторони і кути трикутника.

161. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) основи дорівнюють 60 см і 18 см, а бічні сторони — 28 см і 35 см. Обчисліть кути трапеції.

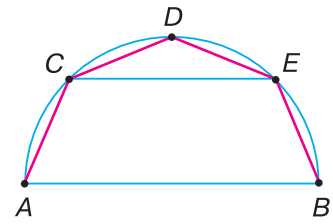
162*. У трикутнику ABC $AB = 2$ см, $AC = 5$ см, $BC = 6$ см. Знайдіть відстань від вершини B до точки перетину висот трикутника.



Мал. 46



Мал. 47



Мал. 48

163*. Усередині кута 60° з вершиною A позначено точку M на відстанях a і b від сторін кута. Знайдіть відстань AM.

164*. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = AC = b$, а $\angle A = 30°$ (мал. 46). Пряма, що проходить через вершину B і центр O описаного кола, перетинає сторону AC в точці D. Знайдіть довжину відрізка BD.

165*. Знайдіть діагоналі трапеції, якщо основи дорівнюють 23,8 см і 43,5 см, а кути при більшій основі — 63°54' і 71°18'.

166*. Обчисліть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють a і b ($a > b$), а прилеглі до основи кути — α і β.

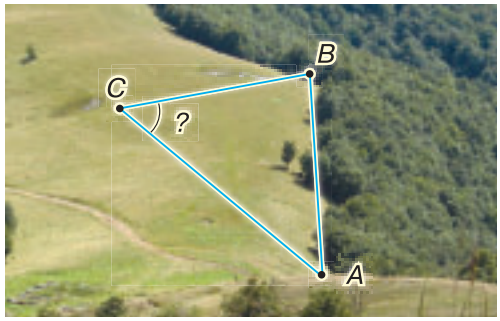
167*. За даними на малюнку 47 знайдіть сторону BC чотирикутника $ABCD$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

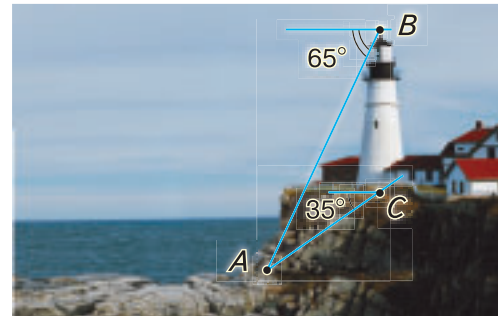
168. Мансардну крівлю спроектували так: на відрізку $AB = 11{,}5$ м (ширина перекриття, мал. 48) описали півколо і поділили його на чотири рівні частини. Точки A, C, D, E і B сполучили відрізками. Знайдіть:
1) довжину схилу покрівлі AC і CD; 2) довжину поперечини CE;
3) кути нахилу схилів AC і CD покрівлі.

169. Під яким кутом видно прямолінійний край лісу $AB = 1240$ м із пункту C, який віддалений від A на 1600 м і від B — на 1170 м (мал. 49)?

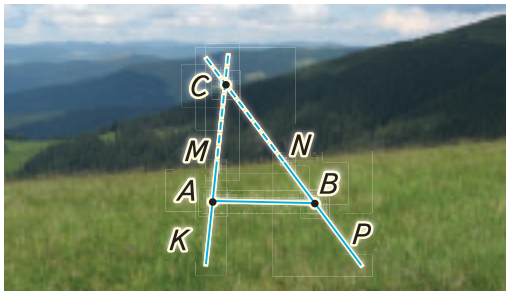
170. Щоб знайти кут на місцевості, на його сторонах від вершини відклали по 10 м і виміряли відстань між одержаними точками — 16 м. Дістали, що кут дорівнює 106°18'. Поясніть, як обчислили кут.



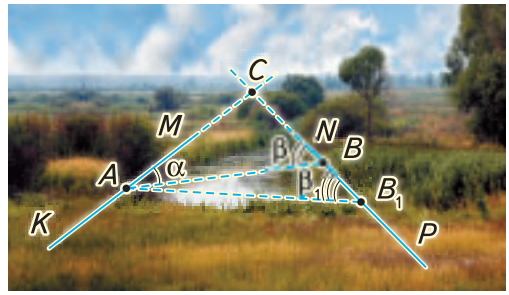
Мал. 49



Мал. 50



Мал. 51



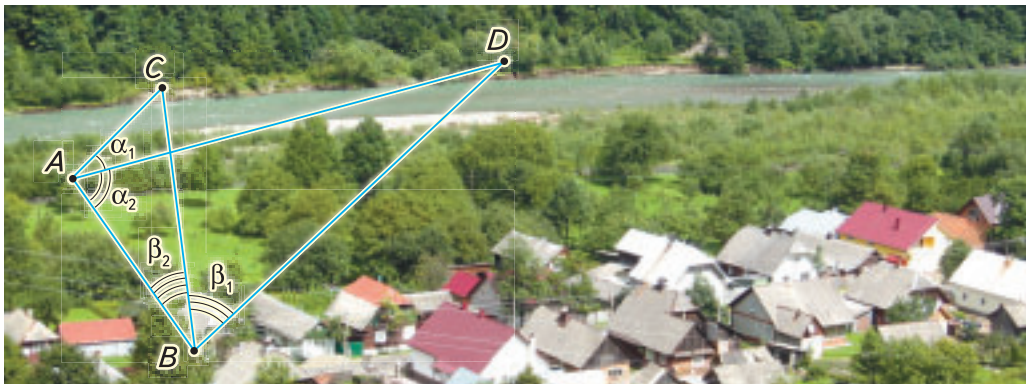
Мал. 52

171. На горі знаходиться башта висотою 60 м (мал. 50). Деякий предмет на підошві гори видно з вершини B башти під кутом 65° до горизонту, а з її основи C — під кутом 35° до горизонту. Знайдіть висоту гори.

172*. На малюнку 51 зображено дві прямі дороги KM і PN, які перетинаються десь за лісом у недоступній точці C. Потрібно знайти відстань від деякого пункту A на дорозі KM до точки C перетину доріг. Для цього позначили на дорозі PN пункт B так, що можна було виміряти відстань AB, і визначили кути BAM і ABN. Поясніть спосіб знаходження відстані AC. Обчисліть AC, якщо $AB = 800$ м, $\angle BAM = 85°$, $\angle ABN = 52°$.

173*. Трапилося так, що місцевість між дорогами заболочена і відстань AB виміряти, як у задачі 172, не можна (мал. 52). Але пункт A видно з двох місць B і B_1 на дорозі PN, а також можна підійти до пункту A. Тоді виміряли BB_1, $\angle BAM$, $\angle ABN$ і $\angle AB_1N$. Поясніть, як обчислити відстань AC, якщо: $BB_1 = a$, $\angle BAM = \alpha$, $\angle ABN = \beta$, $\angle AB_1N = \beta_1$.

174*. Потрібно обчислити відстань між недоступними пунктами C і D (мал. 53). Для цього вибрали на місцевості дві точки A і B так, щоб можна було виміряти відстань AB і щоб з цих точок було видно точки C і D. Потім виміряли $AB = a$, $\angle CAD = \alpha_1$, $\angle BAD = \alpha_2$, $\angle ABC = \beta_2$, $\angle CBD = \beta_1$. Поясніть, як знайшли відстань CD. Обчисліть CD, якщо $a = 100$ м, $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 70°$, $\beta_1 = 54°$, $\beta_2 = 28°$.



Мал. 53

§6. ФОРМУЛИ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

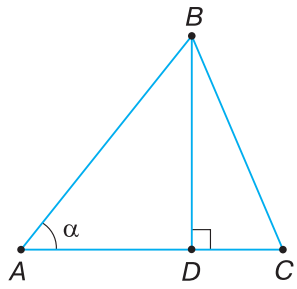
Ви вже знаєте, що площу трикутника можна обчислити за такими формулами:

$S = \frac{1}{2}ah_a$, де a – сторона трикутника, h_a – висота, проведена до цієї сторони.

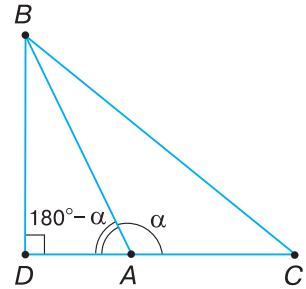
$S = p \cdot r$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника, r – радіус вписаного кола.

Виведемо інші формули для обчислення площі трикутника.

1. Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними: $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$.



Мал. 54



Мал. 55

Проведемо в трикутнику ABC висоту BD (мал. 54, 55). Дістанемо: $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$. Із прямокутного трикутника ABD знаходимо: $BD = AB\sin\alpha$, якщо кут α – гострий (мал. 54); $BD = AB\sin(180^\circ - \alpha)$, якщо кут α – тупий (мал. 55). Оскільки $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, то для будь-якого випадку $BD = AB\sin\alpha$. Підставляючи у формулу $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ вираз BD, одержимо: $S = \frac{1}{2}AC \cdot AB\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

2. $S = \frac{abc}{4R}$, де a, b, c – сторони трикутника, R – радіус описаного кола.

Ви знаєте, що $2R = \frac{a}{\sin\alpha}$, де α – кут, протилежний стороні a. Звідси $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$. Підставивши вираз $\sin\alpha$ у формулу $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, дістанемо: $S = \frac{1}{2}bc\frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$.

3. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де a, b, c – сторони трикутника, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – півпериметр.

За теоремою косинусів, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Звідси $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

З формули $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ знаходимо: $\sin\alpha = \dfrac{2S}{bc}$.

Підставляючи знайдені вирази $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ у формулу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, дістанемо: $\left(\dfrac{2S}{bc}\right)^2 + \left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = 1$.

Звідси $S^2 = \dfrac{4b^2c^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{16}$.

Застосовуючи формулу різниці квадратів, маємо: $S^2 = \dfrac{\left((b+c)^2 - a^2\right)\left(a^2 - (b-c)^2\right)}{16} = \dfrac{a+b+c}{2}\cdot\dfrac{b+c-a}{2}\cdot\dfrac{a+b-c}{2}\cdot\dfrac{a+c-b}{2}$.

Взявши до уваги, що $a+b+c = 2p$, $b+c-a = 2p-2a$, $a+b-c = 2p-2c$, $a+c-b = 2p-2b$, дістанемо:

$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ або $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

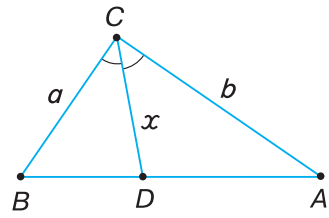
Герон Александрійський

1. Герон Александрійський (приблизно I ст. до н. е.) – видатний давньогрецький учений. Його відкриття збагатили математику, фізику, механіку, астрономію. Найбільш важливою геометричною працею вченого була «Метрика» (вчення про вимірювання). У цій книжці серед правил вимірювання площ наведено так звану «Формулу Герона» (нині встановлено, що цю формулу застосовував Архімед, який жив на кілька століть раніше Герона).

Праці вченого «Книга про військові машини», «Книга про підйомні механізми», «Театр автоматів», «Пневматика» та ін. здійснили величезний вплив на розвиток науки і техніки. Учений винайшов багато приладів і автоматів, зокрема: діоптр (прототип сучасного теодоліта), прилад для вимірювання довжини пройденого шляху (прототип таксометра), автомат для продажу «священної води», водяні годинники і багато інших. Саме тому вченого називали Героном-механіком.

2. Застосування поняття площі дає можливість іноді значно спростити розв'язування таких задач, в умовах яких це поняття не вживається. Найчастіше це можна зробити так: спочатку площу деякої фігури виражаємо через дані й шукані величини двома різними способами, а потім прирівнюємо знайдені вирази. Отримуємо рівняння, з якого можна знайти шукану величину.

Задача. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Знайдіть довжину бісектриси прямого кута.



Мал. 56

Розв'язання. Нехай ABC — даний прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), $BC = a$, $AC = b$ і CD — бісектриса прямого кута (мал. 56). Позначимо $CD = x$ і знайдемо площу трикутника ABC двома способами.

З одного боку, $S_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2}$. (1)

З другого боку,

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}ax \cdot \sin 45° + \frac{1}{2}bx \cdot \sin 45° = \frac{x\sqrt{2}}{4}(a+b). \quad (2)$$

Прирівнюючи праві частини рівностей (1) і (2), одержимо рівняння:

$\frac{ab}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{4}(a+b)$. Звідки $x = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

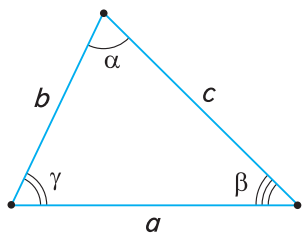
1. Доведіть, що площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними.
2. Доведіть, що $S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$.
3. Як знайти площу трикутника за півпериметром і радіусом вписаного кола?
4. Запишіть і поясніть формулу Герона.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

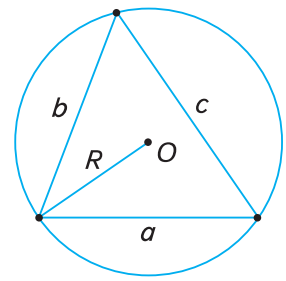
175'. За якими з формул можна обчислити площу трикутника, зображеного:
1) на малюнку 57; 2) на малюнку 58:

а) $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\beta$; б) $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$; в) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

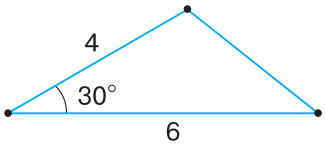
г) $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$; д) $S = \frac{abc}{4R}$; е) $S = \frac{abc}{2R}$?



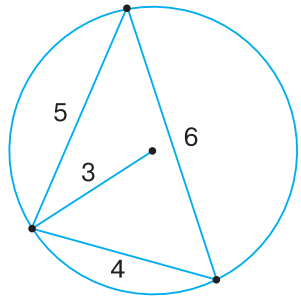
Мал. 57



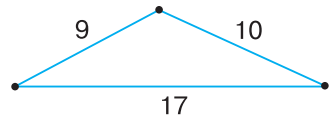
Мал. 58



Мал. 59



Мал. 60



Мал. 61

176'. Обчисліть площу трикутника за даними на малюнках 59 і 60.

177'. За даними на малюнку 61 знайдіть площу трикутника, дотримуючись плану:
а) обчисліть півпериметр p та різниці $p - a$, $p - b$, $p - c$;
б) знайдіть добуток $p(p - a)(p - b)(p - c)$;
в) обчисліть значення $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

178°. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $a = 5\sqrt{3}$ см, $c = 4$ см, $\beta = 60°$;
2) $c = 12$ см, $b = 8$ см, $\alpha = 30°$;
3) $a = 7\sqrt{2}$ см, $b = 16$ см, $\gamma = 45°$.

179°. Бічні сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють a, а кут між ними α. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $a = 2$ см, $\alpha = 70°$;
2) $a = 4$ см, $\alpha = 65°$;
3) $a = 6$ см, $\alpha = 100°$.

180°. a, b, c — сторони трикутника, R — радіус описаного кола. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $a = 26$ см, $b = 24$ см, $c = 10$ см, $R = 13$ см;
2) $a = 6$ см, $b = 6$ см, $c = 4\sqrt{5}$ см, $R = 4{,}5$ см;
3) $a = 26$ см, $b = 28$ см, $c = 30$ см, $R = 16{,}25$ см.

181°. a, b, c — сторони трикутника, r — радіус вписаного кола. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см, $r = 4$ см;
2) $a = 4$ см, $b = 13$ см, $c = 15$ см, $r = 1{,}5$ см;
3) $a = 7$ см, $b = 15$ см, $c = 20$ см, $r = 2$ см.

182°. Доведіть, що радіуси описаного (R) і вписаного (r) кіл трикутника можна обчислити за формулами: $R = \dfrac{abc}{4S}$ і $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$.

183°. Знайдіть площу трикутника, якщо його сторони дорівнюють: 1) 5 см, 5 см, 6 см; 2) 12 см, 17 см, 25 см; 3) 15 см, 26 см, 37 см.

184. Площа трикутника ABC дорівнює 60 см^2. Знайдіть сторону AB, якщо:
1) $AC = 15$ см, $\angle A = 30°$; 2) $BC = 10\sqrt{3}$ см, $\angle B = 60°$.

185. a, b — сторони трикутника, γ — кут між ними, S — площа трикутника. Накресліть у зошиті таблицю 6 та заповніть її.

Таблиця 6

a	7 см	5 см	4 см	
b	10 см	8 см		9 см
γ	80°		150°	75°
S		12 см^2	24 см^2	16 см^2

186. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 10 см. Чи може його площа дорівнювати: 1) 19 см^2; 2) 35 см^2; 3) 24 см^2?

187. Користуючись формулою $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$, дослідіть, як змінюватиметься площа трикутника ABC зі зростанням кута α від 0° до 180° (b і c — сталі). При якому значенні α площа трикутника ABC буде найбільшою?

188. Доведіть, що площа паралелограма дорівнює добутку двох його суміжних сторін на синус кута між ними.

189. Сторони паралелограма дорівнюють a і b, а один із кутів α. Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $\alpha = 70°$;
2) $a = 5$ см, $b = 3$ см, $\alpha = 130°$.

190. Площа ромба дорівнює квадрату його сторони, помноженому на синус кута ромба. Доведіть.

191. Обчисліть площу ромба за його стороною a і кутом α, якщо:
1) $a = 2$ см, $\alpha = 20°$; 2) $a = 6$ см, $\alpha = 124°$.

192. Доведіть, що площа паралелограма дорівнює половині добутку його діагоналей на синус кута між ними.

193. Знайдіть площу паралелограма, коли відомі його діагоналі d_1 і d_2 й кут α між ними:
1) $d_1 = 6$ см, $d_2 = 10$ см, $\alpha = 40°$; 2) $d_1 = 8$ см, $d_2 = 12$ см, $\alpha = 59°$.

194. Обчисліть площу прямокутника за діагоналлю d і кутом α між діагоналями, якщо:
1) $d = 12$ см, $\alpha = 30°$; 2) $d = 10$ см, $\alpha = 25°$.

195. Обчисліть площу трикутника за стороною c і прилеглими до неї кутами α і β якщо:
1) $c = 6$ см, $\alpha = 70°$, $\beta = 60°$; 2) $c = 8$ см, $\alpha = 65°$, $\beta = 54°$.

196. **Доведіть, що довжину бісектриси l кута α трикутника ABC можна обчислити за формулою: $l_\alpha = \dfrac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.**

197. **Знайдіть висоту трикутника, проведену до сторони a, якщо його сторони дорівнюють a, b, c.**

198. Знайдіть висоти трикутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 7 см, 15 см, 20 см; 2) 13 см, 14 см, 15 см.

199. Площа трикутника дорівнює 810 см^2. Знайдіть сторони трикутника, якщо вони відносяться, як 12 : 17 : 25.

200. Дві сторони трикутника дорівнюють 17 см і 21 см, а медіана, проведена до третьої сторони, 5 см. Знайдіть площу трикутника.

201. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, якщо його основа і висота відповідно дорівнюють:
1) 20 см і 26 см; 2) 16 см і 17 см.

202. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо його сторони дорівнюють: 1) 10 см, 24 см, 26 см; 2) 26 см, 28 см, 30 см.

203. a, b, c — сторони трикутника, S — його площа, R, r — радіуси описаного і вписаного кіл. Накресліть у зошиті таблицю 7 та заповніть її.

Таблиця 7

a	5 см	3 см	5 см	6 см	4 см
b	7 см	4 см	5 см	10 см	13 см
c	8 см	5 см	6 см	8 см	15 см
S	$10\sqrt{3}$ см^2				24 см^2
R		2,5 см		5 см	
r			1,5 см		

204*. Доведіть формули для обчислення площі трикутника:

1) $S = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$; 2) $S = \dfrac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha}$; 3) $S = \sqrt{\dfrac{1}{2}Rh_ah_bh_c}$,

де R — радіус описаного кола.

205*. Бісектриса l прямого кута трикутника утворює з гіпотенузою кут α. Знайдіть площу трикутника.

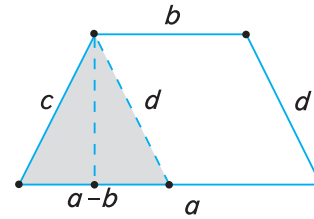
206*. Знайдіть площу трикутника за медіаною m і кутами α і β, які утворює медіана з прилеглими сторонами.

207*. Знайдіть площу трикутника за двома його висотами h_1 і h_2 і кутом α між ними.

208*. **Доведіть, що площа чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей на синус кута між ними.**

209*. Сторона трикутника дорівнює 30 см, а медіани, проведені до двох інших сторін, 12 см і 39 см. Знайдіть площу трикутника.

210*. Основи трапеції дорівнюють 16 см і 44 см, бічні сторони — 15 см і 41 см. Знайдіть площу трапеції.



Мал. 62

Щоб обчислити площу трапеції за її сторонами (мал. 62):
1) проведіть через вершину меншої основи пряму, паралельну бічній стороні;
2) знайдіть висоту утвореного трикутника за трьома його сторонами.

211*. Знайдіть висоту трапеції, якщо її основи дорівнюють 25 см і 11 см, а бічні сторони — 13 см і 15 см.

212*. Знайдіть площу трикутника, якщо його медіани дорівнюють m_a, m_b, m_c.

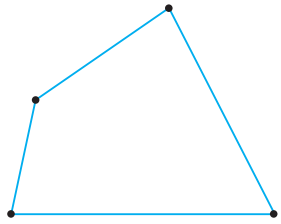
213*. Знайдіть площу трикутника, якщо його висоти дорівнюють h_a, h_b, h_c.

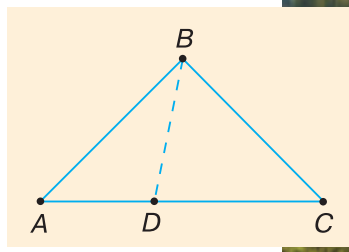
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

214. На малюнку зображено план ділянки у масштабі 1 : 1000 (мал. 63). Знайдіть за планом площу цієї ділянки.

215. Квадратний метр листового заліза важить 38 кг. Скільки важить трикутник, вирізаний з цього заліза, якщо його сторони дорівнюють 29 см, 35 см і 48 см?

216. Від трикутної ділянки площею 5 га потрібно межею BD відділити ділянку площею 2 га (мал. 64). Як це зробити, якщо $AC = 1000$ м?


Мал. 63



Мал. 64

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дайте означення синуса, косинуса і тангенса для довільного кута від 0° до 180°.
2. Назвіть значення синуса і косинуса для кутів 0°, 90°, 180°.
3. Доведіть тотожності: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$; $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.
4. Сформулюйте і доведіть теорему синусів; теорему косинусів.
5. Назвіть, які є види задач на розв'язування трикутників, та запишіть алгоритми розв'язування кожного з видів цих задач.
6. Доведіть, що площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними.
7. Запишіть і поясніть формули для обчислення площі трикутника: за трьома сторонами; за трьома сторонами і радіусом описаного кола; за півпериметром і радіусом вписаного кола.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

№ 1

1° Знайдіть значення виразу: $6\sin 180^\circ + 5\cos 0^\circ - 2\sin 90^\circ$.

А. 1. **Б.** 3. **В.** 2. **Г.** 0.

2° Спростіть вираз: $1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

А. $2\sin^2\alpha$. **Б.** $\cos^2\alpha$. **В.** $\sin^2\alpha$. **Г.** $2\cos^2\alpha$.

3° Обчисліть: $\sin 150^\circ + \cos 120^\circ$.

А. 0. **Б.** $\frac{1}{2}$. **В.** 1. **Г.** 2.

4 Знайдіть $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

А. $\frac{4}{5}$. **Б.** $\frac{3}{4}$. **В.** $\frac{3}{5}$. **Г.** $\frac{1}{5}$.

5* Обчисліть $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha \operatorname{tg}^2\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}5$.

А. 2,5. **Б.** 25. **В.** 0,2. **Г.** 0,25.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

№ 2

1° Знайдіть сторону b ΔABC, якщо: $c = 1$ см, $\angle B = 45°$, $\angle C = 30°$.

А. $\sqrt{3}$ см. **Б.** 2 см. **В.** $\sqrt{2}$ см. **Г.** 1 см.

2° Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо проти його сторони 2 см лежить кут 30°.

А. 4 см. **Б.** 2 см. **В.** 1 см. **Г.** 3 см.

3° Знайдіть сторону c ΔABC, якщо $a = 2$ см, $b = 3$ см, $\angle C = 60°$.

А. $\sqrt{3}$ см. **Б.** 3 см. **В.** $\sqrt{7}$ см. **Г.** 7см.

4 Знайдіть найменший з кутів трикутника, сторони якого дорівнюють 2, 3, 4.

А. $\approx 29°$. **Б.** $\approx 20°$. **В.** $\approx 18°$. **Г.** $\approx 26°$.

5* Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо вони відносяться, як 1 : 2, а сторони дорівнюють 2 см і 6 см.

А. 2 см і 4 см. **Б.** 1 см і 2 см. **В.** 3 см і 6 см. **Г.** 4 см і 8 см.

№ 3

1° Знайдіть площу трикутника, якщо його сторони дорівнюють 4 см і 6 см, а кут між ними 30°.

А. 4 см^2. **Б.** 6 см^2. **В.** 12 см^2. **Г.** 24 см^2.

2° Знайдіть площу трикутника, якщо його сторони дорівнюють 10 см, 10 см, 12 см.

А. 32 см^2. **Б.** 60 см^2. **В.** 48 см^2. **Г.** 24 см^2.

3° Обчисліть площу рівнобедреного трикутника, якщо бічна сторона дорівнює 2 см, а кут між бічними сторонами — 30°.

А. 2 см^2. **Б.** 6 см^2. **В.** 4 см^2. **Г.** 1 см^2.

4 Знайдіть площу паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 2 см і 4 см, а один з кутів 45°.

А. $4\sqrt{2}$ см^2. **Б.** 8 см^2. **В.** $2\sqrt{2}$ см^2. **Г.** $8\sqrt{2}$ см^2.

5* Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо його сторони дорівнюють 4 см, 7 см, 9 см.

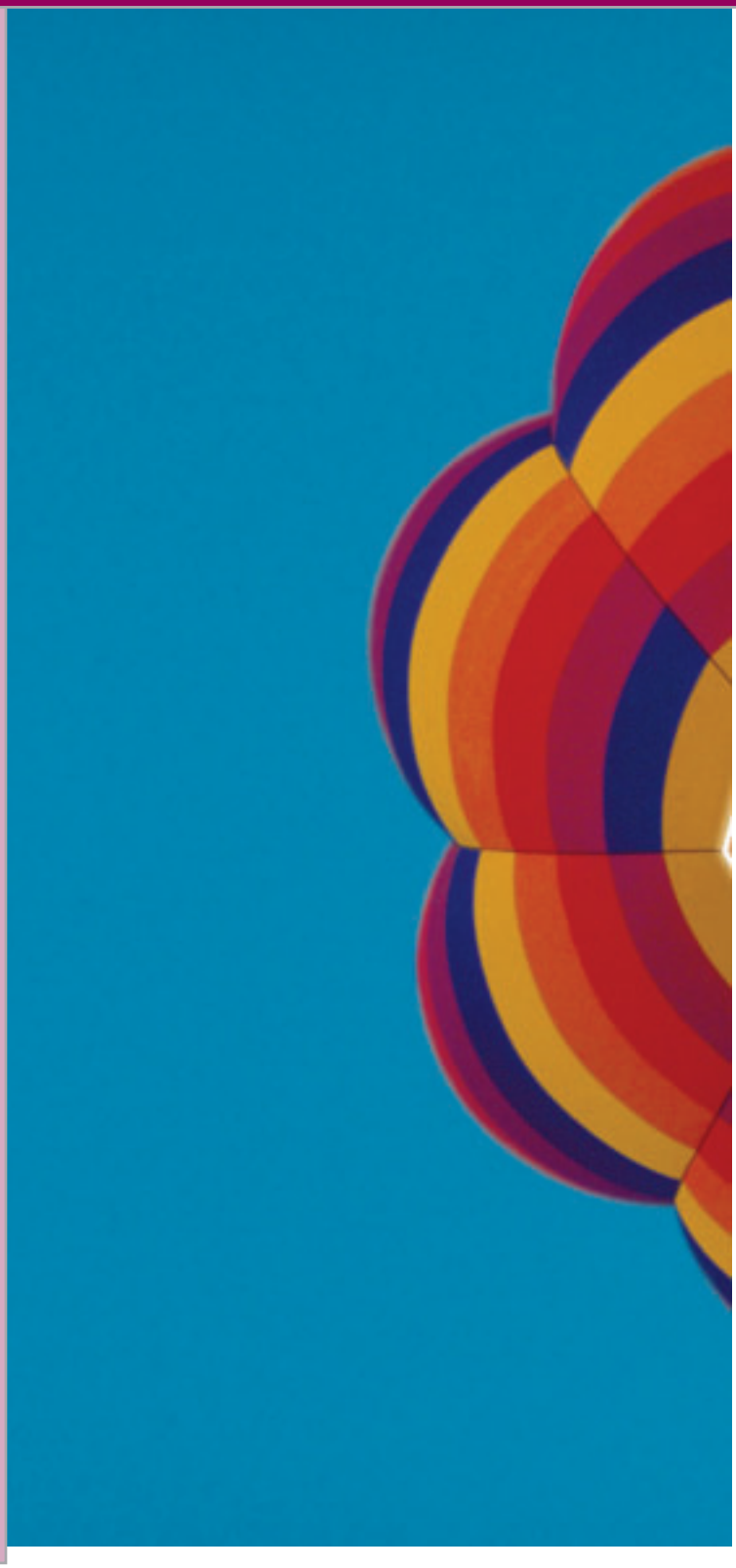
А. 10 см^2. **Б.** $6\sqrt{5}$ см^2. **В.** $\frac{42\sqrt{5}}{5}$ см^2. **Г.** $\frac{21\sqrt{5}}{10}$ см^2.

РОЗДІЛ 2

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

У розділі дізнаєтесь:

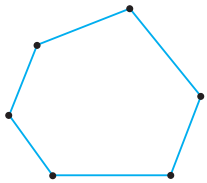
- що таке правильний n-кутник, які його властивості та як будувати деякі правильні n-кутники;
- як знайти радіуси вписаного і описаного кіл для правильного n-кутника за даною його стороною та, навпаки, як виразити сторону n-кутника через ці радіуси;
- про формули для обчислення довжини кола і дуги кола, площі круга, сектора і сегмента;
- як застосовувати вивчені властивості і формули до розв'язування геометричних задач та на практиці



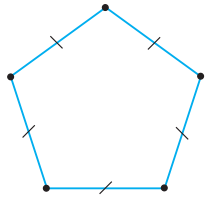
§7. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

? На малюнках 65 – 68 ви бачите многокутники. У чому їх відмінність?

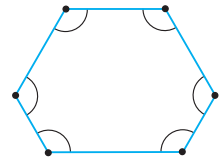
У многокутника на малюнку 65 не рівні сторони і не рівні кути. На малюнку 66 зображено многокутник з рівними сторонами, але не рівними кутами. А у многокутника на малюнку 67 – навпаки, усі кути рівні, але не рівні сторони. Лише многокутник на малюнку 68 має всі сторони рівні і всі кути рівні. Це – правильний многокутник.



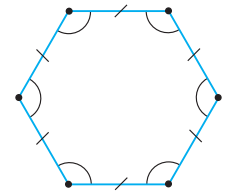
Мал. 65



Мал. 66



Мал. 67

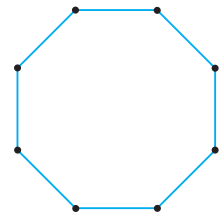


Мал. 68

Многокутник називається ***правильним***, якщо в нього всі сторони рівні і всі кути рівні.

Квадрат і рівносторонній трикутник – приклади правильних многокутників. Многокутник, зображений на малюнку 68, – правильний шестикутник, а на малюнку 69 – правильний восьмикутник.

У правильному n-кутнику, як і у довільному n-кутнику, сума всіх його кутів дорівнює $180^\circ(n-2)$.



Мал. 69

Задача. Знайдіть кут правильного десятикутника.

Розв'язання. Сума кутів правильного десятикутника дорівнює $180^\circ(n-2) = 180^\circ(10-2) = 1440^\circ$.

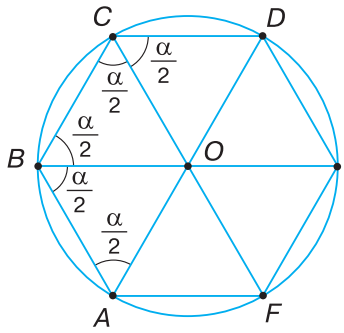
Усіх кутів 10.

Тому кожний кут дорівнює $1440^\circ : 10 = 144^\circ$.

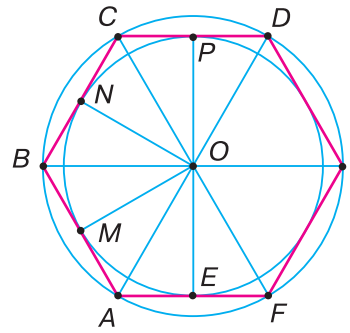
Щоб знайти кут правильного n-кутника, скористайтеся формулою:

$$\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n}.$$

? Ви знаєте, що правильний трикутник і чотирикутник (квадрат) є вписаними у коло й описаними навколо кола. Чи справджується це для будь-якого правильного многокутника? Відповідь дає теорема.



Мал. 70



Мал. 71

Теорема (властивість правильного многокутника). Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло і в нього можна вписати коло.

Дано: многокутник $ABCD...F$;

$AB = BC = CD = ... = FA$, $\angle A = \angle B = \angle C = ... = \angle F$.

Довести: 1) $OA = OB = OC = ... = OF$ (мал. 70);
2) $OM = ON = OP = ... = OE$ (мал. 71).

Доведення. 1) Нехай бісектриси кутів A і B правильного многокутника $ABCD...F$ перетинаються в точці O (мал. 70).

Оскільки $\angle A = \angle B$, то і $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\alpha}{2}$, де α – кут многокутника.

Тоді $\triangle AOB$ – рівнобедрений і $OA = OB$.

Сполучимо точку O відрізками з рештою вершин многокутника.

У трикутників AOB і BOC сторона OB – спільна, $AB = BC$ за умовою, $\angle OBA = \angle OBC = \frac{\alpha}{2}$, оскільки OB – бісектриса кута B. Отже, $\triangle AOB = \triangle BOC$, звідки $OB = OC$.

Так само у трикутників BOC і COD сторона OC – спільна, $BC = CD$, за умовою, $\angle OCB = \angle OCD = \frac{\alpha}{2}$ (за доведеним, $\triangle BOC$ – рівнобедрений і $\angle OBC = \angle OCB = \frac{\alpha}{2}$, тоді і $\angle OCD = \frac{\alpha}{2}$).

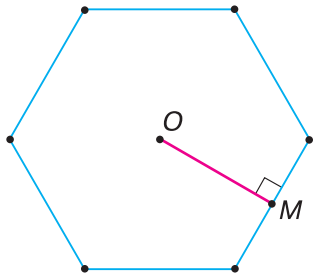
Отже, $\triangle BOC = \triangle COD$, звідки $OC = OD$. Таким чином, $OA = OB = OC = OD$.

Продовжуючи порівняння сусідніх трикутників, отримаємо:

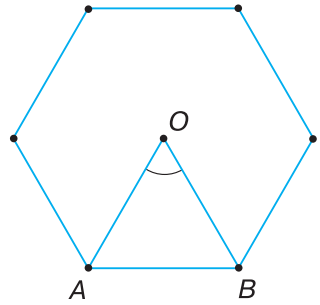
$OA = OB = OC = OD = ... = OF$.

Отже, всі вершини даного многокутника лежать на колі з центром O.

2) Ми довели, що $\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD = ... = \triangle FOA$ (мал. 71). Тому висоти цих трикутників, проведені з вершини O, також рівні: $OM = ON = OP = ... = OE$. Звідси випливає, що коло з центром O і радіусом OM проходить через точки M, N, P,..., E і дотикається до сторін многокутника $ABCD...F$ в цих точках, тобто це коло вписане в даний правильний многокутник.



Мал. 72



Мал. 73

У правильному многокутнику центри вписаного й описаного кіл збігаються. Спільний центр цих кіл називається *центром правильного многокутника*.

Перпендикуляр, проведений з центра правильного многокутника до його сторони, називається *апофемою* цього многокутника (мал. 72). Апофема є радіусом вписаного кола.

Кут, утворений двома радіусами, проведеними у суміжні вершини правильного многокутника, називається його *центральним кутом* (мал. 73).

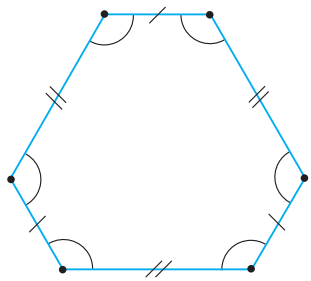
Щоб знайти центральний кут правильного n-кутника, скористайтеся формулою: $\beta = \frac{360^\circ}{n}$.

Правильні многокутники з однаковою кількістю сторін подібні (це твердження ви зможете довести пізніше).

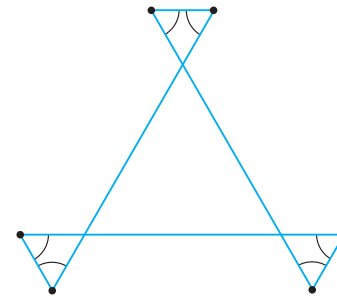
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Окремим видом многокутників є *напівправильні многокутники*. Многокутник, у якого всі кути рівні, а сторони рівні через одну, називають напівправильним рівнокутним многокутником. Найпростіший приклад — прямокутник. На малюнках 74, 75 зображено напівправильні рівнокутні шестикутники — опуклий і зірчастий.

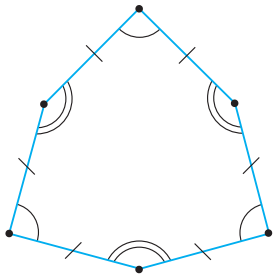
Якщо у многокутника всі сторони рівні, а кути рівні через один, то його називають напівправильним рівностороннім многокутником. На малюнках 76, 77 зображено опуклий і зірчастий напівправильні рівносторонні шестикутники.



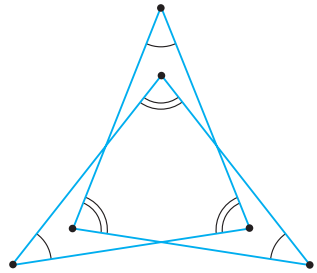
Мал. 74



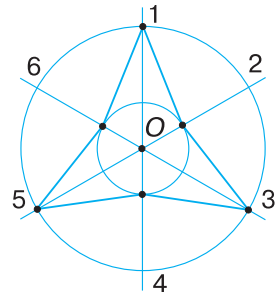
Мал. 75



Мал. 76



Мал. 77



Мал. 78

Загальний спосіб побудови напівправильних рівносторонніх многокутників (мал. 78): 1) будуємо два концентричних кола; 2) через їхній центр O проводимо $2n$ променів, які ділять повний кут при точці O на $2n$ рівних частин; 3) нумеруємо ці промені в тому порядку, в якому вони розташовані при обході навколо точки O; 4) відмічаємо точки перетину променів, які мають непарні номери, з першим колом, а променів з парними номерами — з другим та послідовно сполучаємо ці точки. Утворений многокутник — напівправильний рівносторонній.

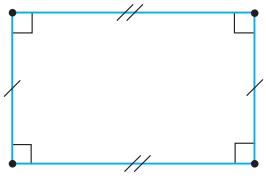
Запропонуйте схожий спосіб побудови напівправильних рівнокутних многокутників.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

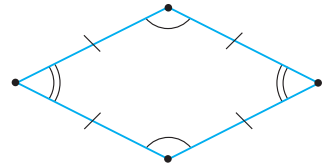
1. Що таке правильний многокутник?
2. Доведіть, що навколо правильного многокутника можна описати коло і в нього можна вписати коло.
3. Що називається центром правильного многокутника? Центральним кутом правильного многокутника?
4. Що таке апофема правильного многокутника?
5. Як знайти кут правильного n-кутника? Центральний кут правильного n-кутника?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

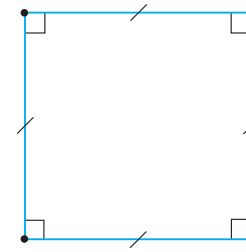
217'. Який з чотирикутників, зображених на малюнках 79 — 81, правильний? Поясніть відповідь.



Мал. 79

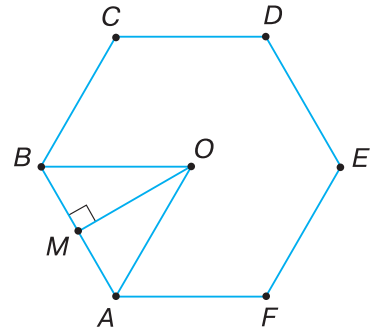


Мал. 80



Мал. 81

218'. На малюнку 82 зображено правильний шестикутник з центром O.
Назвіть:
1) радіус описаного кола;
2) радіус вписаного кола;
3) центр шестикутника;
4) центральний кут шестикутника.



Мал. 82

219'. Назвіть правильну відповідь:
1) кут правильного n-кутника дорівнює:
а) $\frac{180^\circ n}{n-2}$; б) $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$; в) $180^\circ(n-2)$.
2) центральний кут правильного n-кутника дорівнює:
а) $\frac{180^\circ}{n}$; б) $180^\circ n$; в) $\frac{360^\circ}{n}$.

220'. Знайдіть периметр правильного n-кутника зі стороною 4 см, якщо: 1) $n = 5$; 2) $n = 8$; 3) $n = 10$.

221'. Які з тверджень правильні:
1) многокутник правильний, якщо всі його сторони рівні;
2) будь-який чотирикутник з рівними кутами правильний;
3) трикутник правильний, якщо всі його кути рівні;
4) будь-який рівносторонній трикутник правильний?
Поясніть відповідь.

222'. Знайдіть радіус кола, вписаного в квадрат, якщо периметр квадрата дорівнює: 1) 12 см; 2) 16 см; 3) P.

223'. Знайдіть радіус кола, описаного навколо квадрата, якщо діагональ квадрата дорівнює: 1) 8 см; 2) 16 см; 3) d.

224'. Обчисліть кут правильного n-кутника, якщо:
1) $n = 5$; 2) $n = 12$; 3) $n = 18$.

225'. Знайдіть центральний кут правильного n-кутника, якщо:
1) $n = 20$; 2) $n = 24$; 3) $n = 10$.

226'. Скільки сторін має правильний n-кутник, якщо його центральний кут дорівнює: 1) 36°; 2) 120°; 3) 30°?

227'. Знайдіть кут правильного n-кутника, якщо його зовнішній кут дорівнює: 1) 60°; 2) 26°; 3) 34°.

228'. Знайдіть кількість сторін правильного n-кутника, якщо його кут дорівнює: 1) 135°; 2) 150°; 3) 140°.

229'. Скільки сторін має правильний n-кутник, якщо кожний із зовнішніх його кутів дорівнює: 1) 10°; 2) 36°; 3)18°?

230. α — кут правильного n-кутника, β — центральний його кут, і γ — зовнішній кут. Накресліть у зошиті таблицю 8 та заповніть її.

Таблиця 8

α	144°						150°
β		40°				45°	
γ			20°		12°		
n				6			

231. **Доведіть, що центральний кут правильного n-кутника дорівнює його зовнішньому куту.**

232. **Центральний кут правильного многокутника і його кут у сумі становлять 180°.** Доведіть.

233. Знайдіть відношення градусної міри кута правильного n-кутника до градусної міри його зовнішнього кута.

234. У скільки разів кут правильного n-кутника більший за його зовнішній кут, якщо: 1) $n = 10$; 2) $n = 20$?

235. Скільки вершин має правильний многокутник, якщо:
1) радіус вписаного кола вдвічі менший від сторони многокутника;
2) радіус описаного кола вдвічі більший за радіус вписаного кола?

236. Скільки сторін має правильний n-кутник, якщо його кут:
1) у 3 рази більший за зовнішній кут;
2) у 5 разів більший за центральний кут?

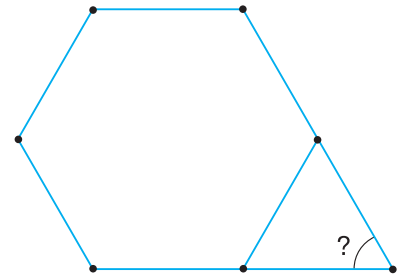
237. Скільки сторін має правильний n-кутник, якщо його кут і зовнішній кут відносяться, як: 1) 5 : 2; 2) 3 : 2?

238. Який найбільший центральний кут може мати правильний многокутник?

239. 1) **У коло вписано многокутник, усі сторони якого рівні. Чи рівні його кути?** Поясніть відповідь.
2) **У коло вписано многокутник, усі кути якого рівні. Чи рівні його сторони?** Поясніть відповідь.

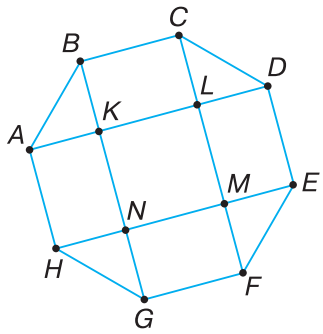
240. Два рівних кола перетинаються так, що центр одного кола лежить на другому колі. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, вершинами якого є точки перетину і центри даних кіл? Поясніть відповідь.

241. Знайдіть кут між двома несуміжними сторонами правильного шестикутника (мал. 83).

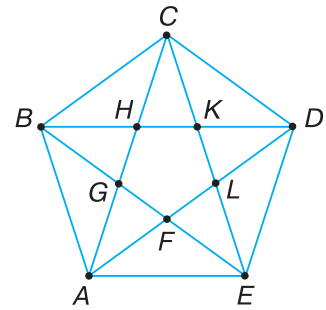


Мал. 83

242. Дано правильний п'ятикутник.
Доведіть:
1) усі його діагоналі рівні;
2) кожна діагональ паралельна одній із його сторін;
3) на кожній із діагоналей, що перетинаються, є відрізок, що дорівнює стороні п'ятикутника.



Мал. 84



Мал. 85

243. *ABCDEFGH* — правильний восьмикутник (мал. 84). Доведіть, що точки *K*, *L*, *M*, *N* — вершини квадрата.

244. *ABCDEFMN* — правильний восьмикутник. Доведіть, що точки *A*, *C*, *E* і *M* є вершинами квадрата.

245*. П'ятикутник *ABCDE* — правильний (мал. 85). Доведіть, що п'ятикутник *FGHKL* — теж правильний.

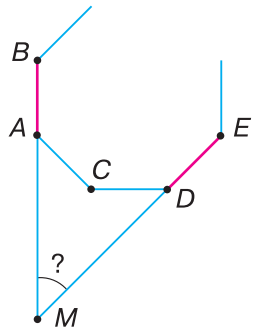
246*. Доведіть, що середини сторін правильного *n*-кутника є вершинами іншого правильного *n*-кутника.

247*. Обчисліть кут між сторонами *AB* і *DE* правильного дев'ятикутника (мал. 86).

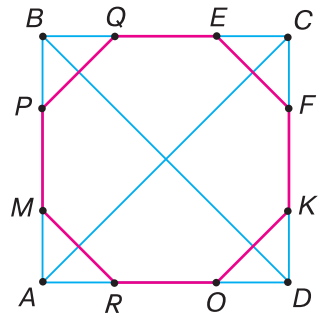
248*. Від кожної вершини квадрата із стороною *a* на його сторонах відкладено відрізки, що дорівнюють половині його діагоналі (мал. 87). Здобуті 8 точок послідовно сполучено відрізками. Доведіть, що утворений восьмикутник — правильний.

249*. Доведіть, що сума відстаней від довільної точки всередині правильного *n*-кутника до його сторони не залежить від вибору точки.

250*. Два рівних кола перетинаються так, що центр одного кола лежить на другому колі. Через одну точку їх перетину проведено спільну січну. Дві інші точки перетину січної з колами сполучено відрізками з другою точкою перетину кіл. Якого виду трикутник утворився при цьому?



Мал. 86

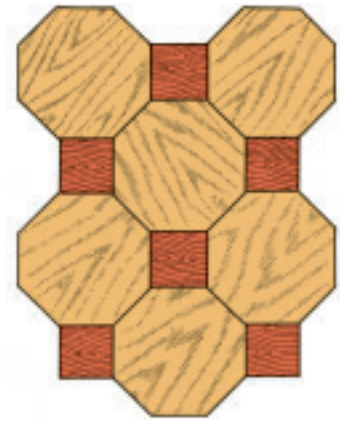


Мал. 87

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

251. Доведіть, що підлогу можна покрити плитками, які мають форму правильних трикутників, чотирикутників або шестикутників.

252. Підлогу покрили плитками, які мають форму правильних чотирикутників і восьмикутників (мал. 88). Поясніть, чому можливе таке покриття.



Мал. 88

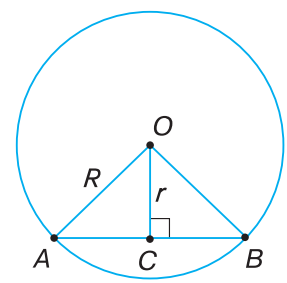
§8. ФОРМУЛИ ДЛЯ РАДІУСІВ ОПИСАНИХ І ВПИСАНИХ КІЛ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОКУТНИКІВ

Знайдемо радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола для правильного n-кутника зі стороною a. Нехай сторона правильного n-кутника $AB = a$, $OA = R$, $OC = r$ (мал. 89). У рівнобедреному трикутнику AOB висота OC є його медіаною і бісектрисою, тому $AC = CB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$,

$$\angle BOC = \angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n}.$$

З прямокутного трикутника AOC знаходимо:

$$R = \frac{AC}{\sin\angle AOC} = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}} \text{ і } r = \frac{AC}{\operatorname{tg}\angle AOC} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}.$$



Мал. 89

У правильному трикутнику:

$n = 3$, $\angle AOC = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$,

тоді $R = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{a}{2\operatorname{tg}60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

У правильному чотирикутнику (квадраті):

$n = 4$, $\angle AOC = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$, тоді $R = \frac{a}{2\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{a}{2\operatorname{tg}45^\circ} = \frac{a}{2}$.

У правильному шестикутнику:

$n = 6$, $\angle AOC = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$, тоді $R = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a$, $r = \frac{a}{2\operatorname{tg}30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Формули для радіусів описаних і вписаних кіл правильних n-кутників подано у таблиці 9.

Таблиця 9

	n	$n=3$	$n=4$	$n=6$
R	$\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	a
r	$\dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Задача. Виразіть сторону a_n правильного n-кутника через радіус R описаного навколо нього кола і радіус r вписаного кола.
Обчисліть a_n, якщо $n=3, 4, 6$.

Розв'язання. З формули $R=\dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$ знаходимо: $a_n=2R\cdot\sin\dfrac{180^\circ}{n}$.

Підставивши у цю формулу замість n числа 3, 4, 6, матимемо формули, що виражають через радіуси описаних кіл сторони правильного трикутника, чотирикутника і шестикутника: $a_3=R\sqrt{3}$, $a_4=R\sqrt{2}$, $a_6=R$.

З формули $r=\dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$ знаходимо: $a_n=2r\cdot\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$.

Зокрема, $a_3=2r\sqrt{3}$, $a_4=2r$, $a_6=\dfrac{2r}{\sqrt{3}}=\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Пам'ятайте, що за однією з величин a_n, r чи R можна обчислити дві інші.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

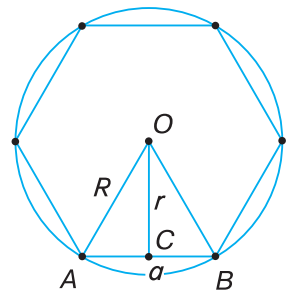
Знайдемо площу правильного n-кутника, якщо дано:
1) радіус R описаного кола; 2) радіус r вписаного кола;
3) сторону a.
Подивіться на малюнок 90. Площа правильного n-кутника $S=n\cdot S_{\triangle AOB}$.

1) $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin AOB$ (мал. 90).

Але $AO=BO=R$, $\angle AOB=\dfrac{360^\circ}{n}$.

Тому $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}R^2\cdot\sin\dfrac{360^\circ}{n}$.

Отже, площа правильного n-кутника дорівнює: $S=\dfrac{1}{2}R^2\sin\dfrac{360^\circ}{n}$.



Мал. 90

2) $S_{\triangle AOB}=\frac{a_n}{2}\cdot\frac{1}{2}r$ (мал. 90). Оскільки $\frac{a_n}{2}=r\cdot\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$, то $S_{\triangle AOB}=r^2\cdot\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

Отже, $S=nr^2\cdot\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

3) $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}AB\cdot OC$ (мал. 90). Оскільки $AB=a$, $OC=\frac{\frac{a}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$,

то $S_{\triangle AOB}=\frac{a^2}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$, а $S=\frac{na^2}{4\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$.

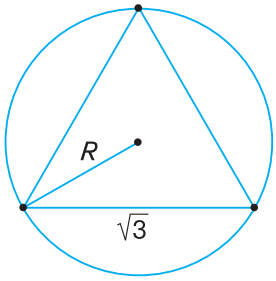
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Виведіть формули для радіусів вписаного і описаного кіл правильного n-кутника.
2. Знайдіть радіуси вписаного і описаного кіл для правильного трикутника, чотирикутника, шестикутника.
3. Виразіть сторону правильного n-кутника через радіуси вписаного і описаного кіл.

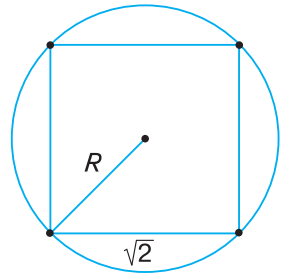
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

253'. Запишіть формули, що виражають радіуси описаних і вписаних кіл через сторону: 1) правильного трикутника; 2) правильного чотирикутника; 3) правильного шестикутника.

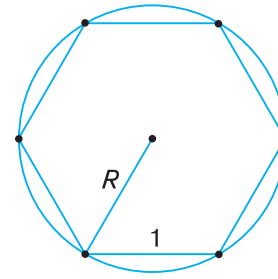
254'. На малюнках 91 — 93 зображено правильний трикутник, чотирикутник, шестикутник, вписані в коло. За даними на малюнках знайдіть радіус кола.



Мал. 91

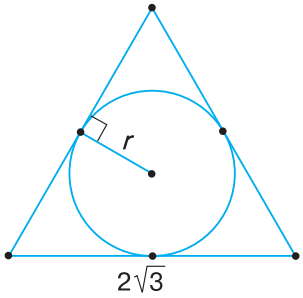


Мал. 92

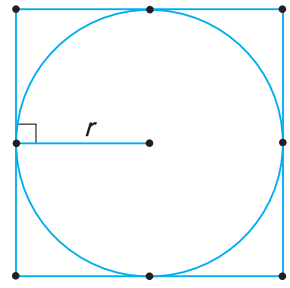


Мал. 93

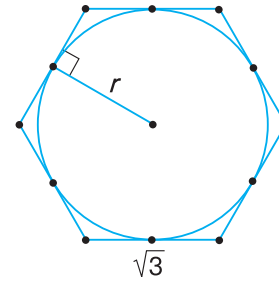
255'. На малюнках 94 — 96 зображено правильний трикутник, чотирикутник і шестикутник, описані навколо кола. За даними на малюнках знайдіть радіус кола.



Мал. 94



Мал. 95



Мал. 96

256°. Знайдіть сторону правильного трикутника, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює: 1) $4\sqrt{3}$ см; 2) 5 см; 3) $6\sqrt{3}$ см.

257°. Знайдіть сторону правильного трикутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює: 1) $2\sqrt{3}$ см; 2) 8 см; 3) $3\sqrt{3}$ см.

258°. Обчисліть радіус кола, вписаного в правильний трикутник, якщо радіус описаного кола дорівнює: 1) 10 см; 2) 12 см; 3) 16 см.

259°. Доведіть, що радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, дорівнює діаметру вписаного в нього кола.

260°. ***a* — сторона правильного трикутника, *P* — його периметр, *R* і *r* — радіуси описаного і вписаного кіл. Накресліть у зошиті таблицю 10 та заповніть її.**

Таблиця 10

a	$2\sqrt{3}$ см			
R		$4\sqrt{3}$ см		
r			$6\sqrt{3}$ см	
P				$9\sqrt{3}$ см

261°. У квадрат вписано коло, радіус якого 4 см. Обчисліть:
1) сторону квадрата; 2) радіус кола, описаного навколо квадрата.

262°. Знайдіть радіус кола, вписаного в квадрат, якщо його периметр дорівнює:
1) 12 см; 2) 16 см; 3) 20 см.

263°. Обчисліть периметр квадрата, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює: 1) $\sqrt{2}$ см; 2) $2\sqrt{2}$ см; 3) $6\sqrt{2}$ см.

264°. ***a* — сторона правильного чотирикутника, *P* — його периметр, *R* і *r* — радіуси описаного і вписаного кіл. Накресліть у зошиті таблицю 11 та заповніть її.**

Таблиця 11

a	6 см			
R		$8\sqrt{2}$ см		
r			10 см	
P				16 см

265°. Знайдіть периметр правильного шестикутника, якщо радіус описаного кола дорівнює: 1) 4 см; 2) 5 см; 3) 7 см.

266°. Знайдіть сторону правильного шестикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює: 1) $\sqrt{3}$ см; 2) $4\sqrt{3}$ см; 3) 1 см.

267°. Обчисліть радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, якщо радіус описаного кола дорівнює: 1) $\sqrt{3}$ см; 2) $6\sqrt{3}$ см; 3) $10\sqrt{3}$ см.

268. ***a*** **— сторона правильного шестикутника,** ***P*** **— його периметр,** ***R*** **і** ***r*** **— радіуси описаного і вписаного кіл. Накресліть у зошиті таблицю 12 та заповніть її.**

Таблиця 12

a	20 см			
R		14 см		
r			$10\sqrt{3}$ см	
P				36 см

269. Знайдіть сторону правильного трикутника, якщо різниця між радіусами кіл, описаного навколо правильного трикутника і вписаного в нього, дорівнює: 1) $\sqrt{3}$ см; 2) m.

270. Обчисліть радіуси кіл, вписаного в правильний трикутник і описаного навколо нього, якщо їх різниця дорівнює: 1) 4 см; 2) n.

271. Знайдіть радіуси кіл, вписаного у квадрат і описаного навколо нього, якщо добуток радіусів дорівнює: 1) $4\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$.

272. Обчисліть радіуси кіл, описаного навколо правильного шестикутника і вписаного в нього, якщо різниця радіусів дорівнює: 1) 3 см; 2) 5 см; 3) m.

273. У коло вписано правильний трикутник і квадрат. Знайдіть сторону квадрата, якщо периметр трикутника дорівнює: 1) 9 см; 2) 27 см; 3) P.

274. Знайдіть сторону правильного шестикутника, вписаного в коло, якщо сторона правильного трикутника, описаного навколо цього кола, дорівнює: 1) $10\sqrt{3}$ см; 2) $2\sqrt{3}$ см; 3) a.

275. Обчисліть сторону квадрата, описаного навколо кола, якщо сторона правильного шестикутника, вписаного в це коло, дорівнює: 1) 15 см; 2) 17 см; 3) a.

276. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо кола, якщо сторона правильного трикутника, вписаного в це коло, дорівнює: 1) 21 см; 2) 18 см; 3) a.

277. Навколо кола описаний квадрат і правильний шестикутник. Знайдіть периметр квадрата, якщо периметр шестикутника дорівнює: 1) $12\sqrt{3}$ см; 2) 36 см; 3) P.

278. Обчисліть сторону правильного шестикутника, радіуси описаного і вписаного кіл, якщо більша діагональ шестикутника дорівнює: 1) 6 см; 2) 8 см; 3) d.

279. Знайдіть сторону правильного шестикутника і радіус вписаного кола, якщо менша його діагональ дорівнює: 1) $10\sqrt{3}$ см; 2) $12\sqrt{3}$ см; 3) d.

280. Знайдіть діагоналі правильного шестикутника, якщо його сторона дорівнює: 1) 2 см; 2) 8 см; 3) a.

281. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є для одного кола стороною правильного вписаного трикутника, а для другого — стороною правильного вписаного шестикутника. Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо хорда дорівнює: 1) 9 см; 2) $3\sqrt{3}$ см; 3) a.

282. Сторона якого правильного вписаного в коло n-кутника є хордою, перпендикулярною до радіуса в його середині? Поясніть відповідь.

283. У якого правильного многокутника радіус вписаного кола вдвічі менший від сторони?

284. На сторонах правильного трикутника поза ним побудовано квадрати. Чи є вершини квадратів вершинами правильного шестикутника? Поясніть відповідь.

285*. Через середини двох суміжних сторін правильного чотирикутника, вписаного в коло радіуса R, проведено хорду. Яка довжина цієї хорди, якщо: 1) $R = 4$ см; 2) $R = 6$ см?

286*. У коло радіуса R вписано правильний n-кутник і середини його сторін послідовно сполучено. Знайдіть сторону утвореного многокутника, якщо: 1) $n = 6$; 2) $n = 8$.

287*. При яких значеннях n сторона правильного n-кутника:
1) більша за радіус описаного кола;
2) дорівнює радіусу описаного кола;
3) менша від радіуса описаного кола?

288*. Три рівних кола, що попарно дотикаються одне до одного, зовні дотикаються до кола радіуса R. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо: 1) $R = 2$ см; 2) $R = 4$ см.

289*. У правильному восьмикутнику зі стороною a сполучено середини чотирьох сторін, узятих через одну, так, що утворився квадрат. Знайдіть сторону цього квадрата.

290*. У правильному 12-кутнику зі стороною a сполучено середини шести сторін, узятих через одну, так, що утворився правильний шестикутник. Знайдіть його сторону.

291*. Доведіть, що: 1) $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; 2) $r_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$,

де a_8 і r_8 — відповідно сторона правильного 8-кутника і радіус вписаного у нього кола, R — радіус описаного кола.

292*. Доведіть, що: 1) $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$; 2) $r_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$,

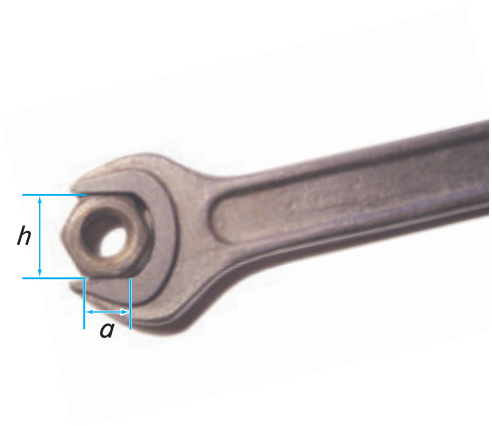
де a_{12} і r_{12} — відповідно сторона правильного 12-кутника і радіус вписаного в нього кола, R — радіус описаного кола.

293*. Знайдіть радіус кола, описаного навколо правильного n-кутника зі стороною a, якщо: 1) $n = 8$; 2) $n = 12$.

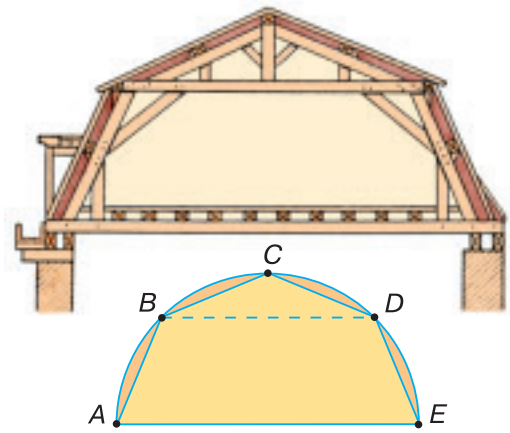
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

294. Знайдіть розмір отвору h ключа для правильної шестигранної гайки, якщо ширина грані гайки $a = 2{,}5$ см (мал. 97). Величина зазору між гранями гайки і ключа дорівнює 0,5 мм.

295. Найпростіше мансардне покриття утворює у вертикальному перерізі половину правильного восьмикутника (мал. 98). Знайдіть ширину перекриття BD, сторону восьмикутника і висоту мансардної кімнати $ABCDE$, якщо $AE = 6$ м.



Мал. 97



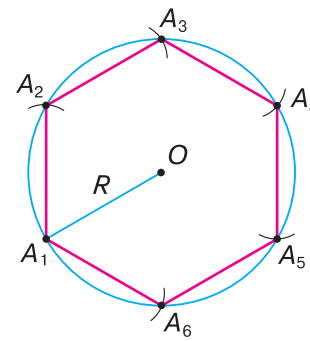
Мал. 98

§9. ПОБУДОВА ПРАВИЛЬНИХ МНОГОКУТНИКІВ

Для побудови правильного n-кутника використовується описане навколо нього коло.

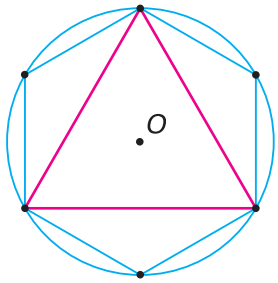
Задача 1. Побудуйте правильний шестикутник.

Розв'язання. Сторона правильного шестикутника дорівнює радіусу R описаного навколо нього кола. Проводимо коло радіуса R і позначаємо на ньому довільну точку A_1 (мал. 99). Потім, не змінюючи розхилу циркуля, будуємо на колі точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, щоб виконувалася рівність $\cup A_1A_2 = \cup A_2A_3 = \cup A_3A_4 = \cup A_4A_5 = \cup A_5A_6$. Сполучивши послідовно побудовані точки відрізками, отримаємо правильний шестикутник.

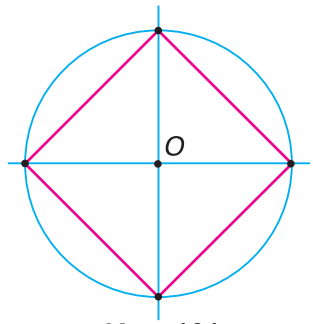


Мал. 99

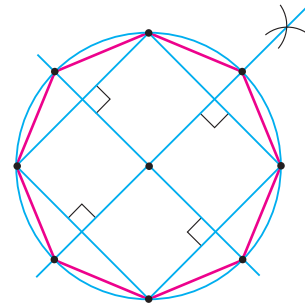
Щоб побудувати правильний n-кутник, поділіть коло на n рівних частин і точки поділу послідовно сполучіть.



Мал. 100



Мал. 101



Мал. 102

Задача 2. Побудуйте правильний трикутник.

Розв'язання. Будуємо спочатку правильний шестикутник (задача 1), а потім сполучаємо відрізками його вершини через одну (мал. 100).

Задача 3. Побудуйте правильний чотирикутник.

Розв'язання. Креслимо коло і проводимо через його центр дві перпендикулярні прямі (мал. 101). Вони перетнуть коло у чотирьох точках — вершинах квадрата.

? Чи можна побудувати інші правильні n-кутники? Так. Якщо ви побудували правильний n-кутник, то легко побудуєте і правильний $2n$-кутник.

Наприклад, побудуємо правильний 8-кутник. Будуємо правильний чотирикутник (задача 3). Проводимо до його сторін серединні перпендикуляри (мал. 102). Точки перетину серединних перпендикулярів з колом разом із вершинами чотирикутника і будуть вершинами правильного 8-кутника. Цим самим способом можна побудувати правильний 16-кутник, правильний 32-кутник і т. д.

За допомогою циркуля і лінійки можна побудувати низку правильних многокутників, якщо побудовано один із них.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

У вас може виникнути запитання: *Чи будь-який правильний n-кутник можна побудувати циркулем і лінійкою?* Ні. Наприклад, правильний п'ятикутник циркулем і лінійкою побудувати можна, а правильний семикутник — не можна. Задача про побудову правильних n-кутників була розв'язана в 1801 році великим німецьким математиком Карлом Гауссом (1777 — 1855). Учений довів, що циркулем і лінійкою можна поділити коло на таке число рівних частин, яке, будучи простим, виражається формулою $2^{2^m}+1$, де m — ціле невід'ємне число. Наприклад, коло можна поділити на 5, 17, 257 рівних частин, оскільки
$5 = 2^2 + 1,\ 17 = 2^{2^2} + 1,\ 257 = 2^{2^3} + 1$.

Карл Фрідріх Гаусс

Доведено також, що за допомогою циркуля і лінійки коло можна поділити на таке складене число рівних частин, до складу якого не входять ніякі інші прості множники, крім: 1) множників виду $2^{2^m}+1$ і 2) множника 2 в будь-кому степені. Наприклад, коло можна поділити на 170 рівних частин, оскільки $170 = 2 \cdot 5 \cdot 17 = 2(2^2 + 1)(2^{2^2} + 1)$.

На будь-яке інше число рівних частин коло може бути поділеним наближено.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Як побудувати правильний шестикутник? Трикутник? Чотирикутник?
2. Поясніть, як побудувати правильний вписаний $2n$-кутник, якщо в коло вписано правильний n-кутник.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

296'. На малюнку 103 показано побудову правильного шестикутника. Поясніть побудову.

297'. Побудуйте правильний трикутник, дотримуючись плану:
1) циркулем накресліть коло;
2) не змінюючи розхилу циркуля, поділіть коло на шість рівних части;
3) сполучіть точки поділу відрізками через одну.

298'. Виконайте такі побудови:
1) циркулем накресліть коло з центром O;
2) через точку O проведіть довільну пряму і позначте буквами A і B точки перетину її з колом;
3) проведіть пряму, перпендикулярну до прямої AB у точці O, точки перетину цієї прямої з колом позначте буквами C і D;
4) послідовно сполучіть відрізками точки A, B, C і D. Як називається побудований многокутник?

299°. За малюнком 104 складіть план побудови правильного трикутника.

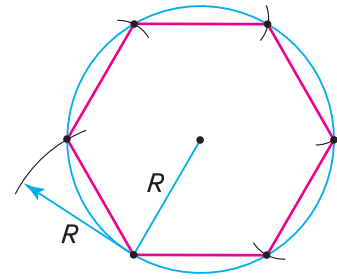
300°. Впишіть у коло квадрат, якщо радіус кола дорівнює: 1) 3 см; 2) 4 см; 3) 5 см.

301°. Впишіть у коло правильний:
1) шестикутник; 2) трикутник;
3) чотирикутник; 4) восьмикутник.

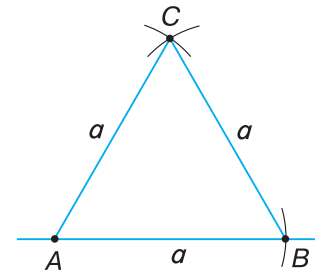
302°. Опишіть навколо кола правильний:
1) шестикутник; 2) трикутник;
3) чотирикутник; 4) восьмикутник.

303°. Побудуйте правильний шестикутник зі стороною, що дорівнює даному відрізку $AB = a$.

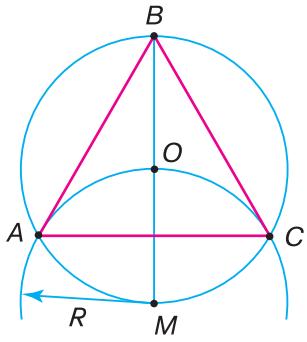
304°. Побудуйте правильний шестикутник, якщо більша його діагональ дорівнює:
1) 8 см; 2) 10 см; 3) 12 см.



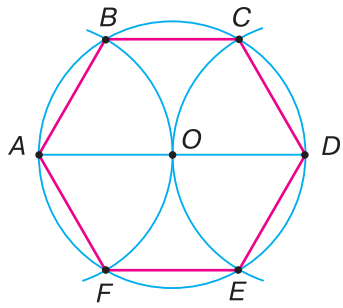
Мал. 103



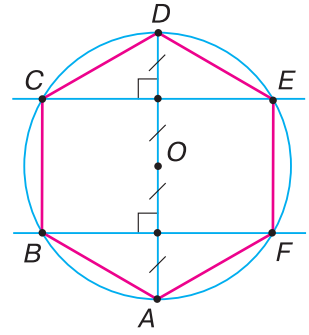
Мал. 104



Мал. 105



Мал. 106



Мал. 107

305°. У ромб впишіть квадрат так, щоб сторони квадрата були паралельними діагоналям ромба.

306°. Дано правильний *n*-кутник. Поясніть, як побудувати правильний 2*n*-кутник.

307. Доведіть, що сторона правильного вписаного трикутника ділить перпендикулярний до неї діаметр у відношенні 3 : 1. Скористайтесь цим твердженням для побудови правильного трикутника.

308. Побудуйте правильний трикутник так, як показано на малюнку 105. Доведіть, що $\triangle ABC$ — правильний.

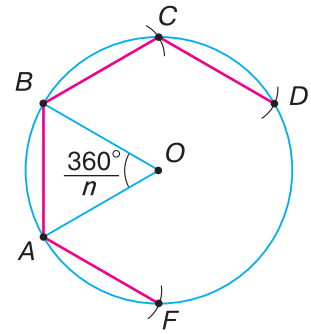
309. На малюнку 106 дано коло з центром O. Із кінців діаметра AD радіусом OA проведено дві дуги, які перетинають коло відповідно в точках B, F і C, E. Точки A, B, C, D, E, F послідовно сполучено. Доведіть, що шестикутник $ABCDEF$ — правильний.

310. За малюнком 107 складіть план побудови правильного шестикутника. Доведіть, що шестикутник $ABCDEF$ — правильний.

У задачі 311 правильний *n*-кутник побудуйте за допомогою транспортира, циркуля і лінійки. Для цього:

1) проведіть коло і побудуйте за допомогою транспортира центральний кут у $\frac{360^\circ}{n}$ (мал. 108); отримаєте дві вершини *n*-кутника, наприклад *A* і *B*;

2) розхилом циркуля, що дорівнює *AB*, поділіть коло на *n* рівних частин і точки поділу послідовно сполучіть.



Мал. 108

311. Побудуйте правильний: 1) трикутник; 2) восьмикутник; 3) дев'ятикутник; 4) десятикутник.

У задачах 312 — 315, щоб побудувати правильний *n*-кутник за стороною *a*:

1) обчисліть радіус описаного навколо нього кола $R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$ і проведіть це коло;

2) розхилом циркуля, що дорівнює даній стороні *n*-кутника, поділіть коло на *n* рівних частин.

312. Побудуйте правильний 5-кутник зі стороною:
1) 3 см; 2) 4 см.

313. Побудуйте правильний 9-кутник зі стороною:
1) 2 см; 2) 4 см.

314. Побудуйте правильний 11-кутник зі стороною:
1) 3 см; 2) 2 см.

315. За даною стороною 3 см побудуйте правильний:
1) 8-кутник; 2) 12-кутник.

316*. Побудуйте правильний восьмикутник зі стороною, що дорівнює даному відрізку $AB = a$.

317*. Побудуйте правильний 12-кутник зі стороною, що дорівнює даному відрізку $AB = a$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

318. На квадратній ділянці землі потрібно розбити клумбу для квітів у формі правильного восьмикутника. Запропонуйте спосіб побудови такої клумби.

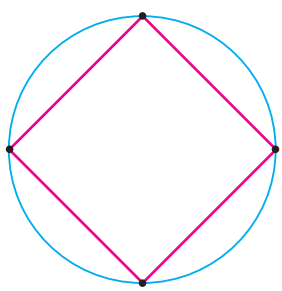
319*. Як розбити клумбу для квітів у формі п'ятикутної зірки?

§10. ДОВЖИНА КОЛА. ДОВЖИНА ДУГИ КОЛА

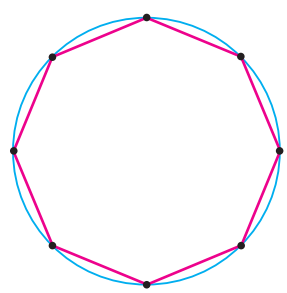
У 6 класі за допомогою вимірювання ви відшукали формулу для обчислення довжини кола $c = 2\pi R$, де R – радіус кола, $\pi \approx 3{,}14$.

Як вивести цю формулу більш строго?

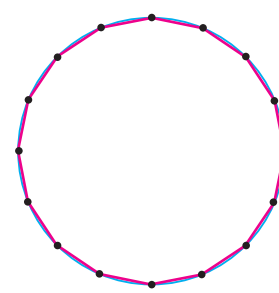
Подивіться на малюнки 109 – 111. Зрозуміло, що при необмеженому збільшенні кількості сторін n вписаного в коло правильного n-кутника його периметр P_n необмежено наближається до довжини кола C. Якщо n дуже велике, то довжина кола дуже мало відрізняється від периметра P_n.



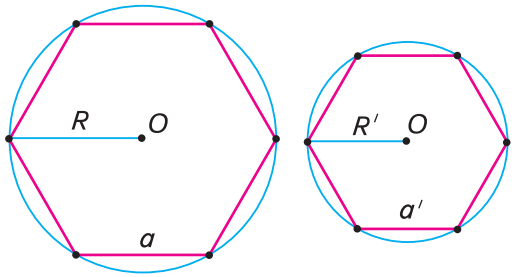
Мал. 109



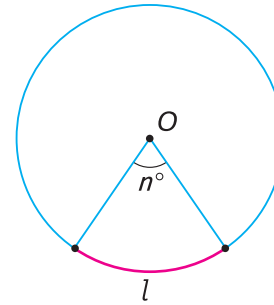
Мал. 110



Мал. 111



Мал. 112



Мал. 113

Виведемо формулу для обчислення довжини кола. Візьмемо два довільних кола (мал. 112). Нехай C і C' – їхні довжини, а R і R' – радіуси кіл. У кожне з цих кіл впишемо правильні n-кутники з однаковим числом сторін. Позначимо їхні сторони через a_n і a_n', а через P_n і P_n' – їхні периметри. Виразимо периметри цих n-кутників через радіуси R і R' кіл.

$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$ і $P_n' = n \cdot a_n' = n \cdot 2R'\sin\frac{180^\circ}{n}$.

Поділивши ці рівності почленно, одержимо: $\frac{P_n}{P_n'} = \frac{2R}{2R'}$. Якщо число сторін n необмежено збільшувати, то периметри P_n і P_n' прямуватимуть до довжин кіл C і C', а відношення периметрів – до відношення кіл $\frac{C}{C'}$. Отже, $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$ або $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

Ми довели таку властивість довжини кола: **відношення довжини кола до його діаметра одне й те саме для кожного кола.**

Це відношення позначається грецькою буквою π (читається «пі»): $\frac{C}{2R} = \pi$. Число π – ірраціональне. Наближене значення $\pi \approx 3{,}1416$.

Оскільки $\frac{C}{2R} = \pi$, то довжина кола обчислюється за формулою:

$$\boldsymbol{C = 2\pi R.}$$

Радіус R або діаметр D кола, довжина якого C, знаходьте з формули $C = 2\pi R$: $\boldsymbol{R = \frac{C}{2\pi}}$ **або** $\boldsymbol{D = \frac{C}{\pi}}$.

Знайдемо довжину l дуги кола, яка відповідає центральному куту n° (мал. 113). Розгорнутому куту відповідає довжина півкола πR. Отже, куту в 1° відповідає дуга довжиною $\frac{\pi R}{180^\circ}$. Тоді довжина l дуги, що відповідає куту n°, виражається формулою:

$$\boldsymbol{l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}.}$$

Задача. Довжина дуги кола дорівнює 4π см, а її градусна міра — 120°. Знайдіть радіус кола.

Розв'язання. З формули $l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$ знаходимо:

$$R = \frac{l \cdot 180^\circ}{\pi n^\circ} = \frac{4\pi \cdot 180^\circ}{\pi \cdot 120^\circ} = 6 \text{ (см)}.$$

Пам'ятайте, що за формулою $l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$ також знаходимо:

1) радіус R кола за довжиною його дуги l та її градусною мірою n°:

$$R = \frac{l \cdot 180^\circ}{\pi n^\circ};$$

2) градусну міру n° дуги за її довжиною l та радіусом R кола:

$$n^\circ = \frac{l \cdot 180^\circ}{\pi R}.$$

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Позначення буквою π відношення кола до його діаметра ввів у 1706 р. англійський математик У. Джонс. Воно походить від грецького слова περιφερεια — периферія, що означає «коло». Леонард Ейлер (1707 — 1783), застосовуючи методи вищої математики, знайшов для π наближення з 153 правильними знаками.

Знайти наближення π намагалися ще в глибоку давнину. Вавилоняни (близько 2000 р. до н. е.) відкрили, що радіус шість разів уміщується в колі, звідси було зроблено припущення, що довжина кола дорівнює $6R$.

У III ст. до н. е. видатний давньогрецький учений Архімед знайшов для π дуже просте число $\frac{22}{7}$, тобто $3\frac{1}{7}$. Це число відрізняється від точного значення π менш ніж на 0,002.

Леонард Ейлер

2. У 7 класі ви дізналися, що кути вимірюють не лише в градусах, а й у радіанах.

Що таке радіанна міра кута?

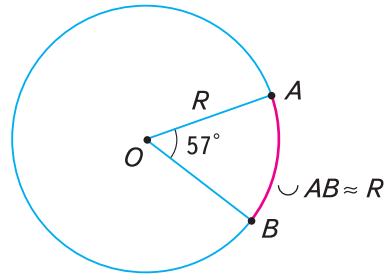
Радіанною мірою кута називається відношення довжини відповідної дуги до радіуса кола. З формули для довжини дуги кола випливає, що $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$, тобто радіанну міру кута отримуємо з градусної множенням на $\frac{\pi}{180^\circ}$. Зокрема радіанна міра кута 180° дорівнює π, радіанна міра прямого кута дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Одиницею радіанної міри кутів є *радіан*. Кут один радіан — це кут, довжина дуги якого

дорівнює радіусу (мал. 114). Градусна міра кута в один радіан дорівнює $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$.

Оскільки $\frac{\pi n^\circ}{180^\circ}$ є радіанною мірою дуги, то формулу довжини дуги можна записати ще й так:

$l = \alpha R$, де α — радіанна міра дуги.

Отже, **довжина дуги кола дорівнює добутку її радіанної міри на радіус.**



Мал. 114

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Доведіть, що відношення довжини кола до його діаметра одне й те саме для кожного кола.
2. За якою формулою знаходять довжину кола?
3. Яке наближене значення π?
4. Виведіть формулу для обчислення довжини дуги кола.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

320'. Накресліть коло. Виміряйте його радіус і знайдіть довжину кола.

321'. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:
1) 5 см; 2) 10 см; 3) 12 см.

322'. Обчисліть довжину кола, якщо його діаметр дорівнює:
1) 4 см; 2) 6 см; 3) 8 см.

323'. Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює:
1) 4π см; 2) 14π см; 3) 2π см.

324°. *R* — радіус кола, *D* — його діаметр, *C* — довжина кола. Накресліть у зошиті таблицю 13 та заповніть її.

Таблиця 13

R	2,5 см				11 см
D		20 см		9,6 см	
C			$18{,}4\pi$ см		

325°. Побудуйте коло, довжина якого дорівнює:
1) 6π см; 2) 18π см; 3) 20π см.

326°. Як зміниться довжина кола, якщо його радіус:
1) збільшити на 5 см; 2) зменшити на 3 см; 3) збільшити у 2 рази?

327°. Сторона правильного трикутника дорівнює $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть довжину кола:
1) вписаного в цей трикутник; 2) описаного навколо нього.

328°. Сторона квадрата дорівнює 8 см. Обчисліть довжину кола:
1) вписаного в цей квадрат; 2) описаного навколо нього.

329°. Знайдіть довжину кола, описаного навколо прямокутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 5 см і 12 см; 2) 7 см і 24 см; 3) 12 см і 16 см.

330°. Знайдіть довжину кола, вписаного в ромб, якщо його сторона і кут дорівнюють: 1) 6 см і 30°; 2) 4 см і 45°; 3) 8 см і 60°.

331°. Сторона правильного шестикутника дорівнює 10 см.
Обчисліть довжину кола:
1) вписаного в цей шестикутник; 2) описаного навколо нього.

332°. Знайдіть довжину дуги кола радіуса 6 см, яка відповідає центральному куту:
1) 30°; 2) 60°; 3) 120°.

333°. Дузі кола довжиною l відповідає центральний кут n°. Знайдіть радіус кола, якщо: 1) $l = 3$ см, $n^\circ = 15^\circ$; 2) $l = 12\pi$ см, $n^\circ = 20^\circ$; 3) $l = 6$ см, $n^\circ = 18^\circ$.

334°. Довжина дуги кола радіуса R дорівнює l. Знайдіть градусну міру центрального кута, якому відповідає ця дуга, якщо:
1) $l = 4\pi$ см, $R = 9$ см; 2) $l = 6\pi$ см, $R = 10$ см; 3) $l = 8\pi$ см, $R = 18$ см.

335. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону на відрізки b і c, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть довжину кола, вписаного у ромб, якщо:
1) $b = 6$ см, $c = 4$ см; 2) $b = 5$ см, $c = 8$ см.

336. Знайдіть довжину кола, вписаного у ромб, якщо його діагоналі дорівнюють: 1) 18 см і 24 см; 2) 12 см і 16 см.

337. У рівнобічну трапецію з основами a, b і бічною стороною c вписано коло. Знайдіть довжину кола, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 18$ см, $c = 10$ см;
2) $a = 32$ см, $b = 18$ см, $c = 25$ см.

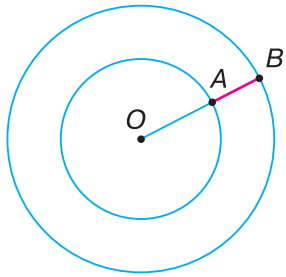
338. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b, а діагональ — d. Знайдіть довжину кола, описаного навколо трапеції, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 18$ см, $d = 20$ см;
2) $a = 16$ см, $b = 8$ см, $d = 13$ см.

339. Обчисліть сторону правильного трикутника, якщо:
1) довжина кола, вписаного в цей трикутник, дорівнює 8π см;
2) довжина кола, описаного навколо нього, дорівнює 14π см.

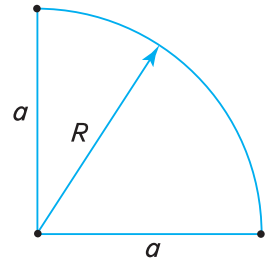
340. Знайдіть сторону правильного шестикутника, якщо:
1) довжина кола, вписаного в цей шестикутник, дорівнює $6\sqrt{3}\,\pi$ см;
2) довжина кола, описаного навколо нього, дорівнює 2π см.

341. Як побудувати коло, довжина якого дорівнює:
1) сумі довжин двох даних кіл; 2) різниці довжин двох даних кіл?

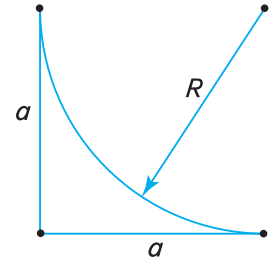
342. Знайдіть довжину кола, якщо вона більша за діаметр:
1) на 10 см; 2) на m.



Мал. 115



Мал. 116



Мал. 117

343. Довжини двох кіл, що мають спільний центр, дорівнюють C і C_1. Знайдіть ширину кільця AB (мал. 115), якщо:
1) $C = 10\pi$ см, $C_1 = 4\pi$ см; 2) $C = 16\pi$ см, $C_1 = 6\pi$ см.

344. Порівняйте периметри фігур, зображених на малюнках 116 і 117.

345. ***R* — радіус кола, *l* — довжина дуги, яка відповідає центральному куту *n*°. Накресліть у зошиті таблицю 14 та заповніть її.**

Таблиця 14

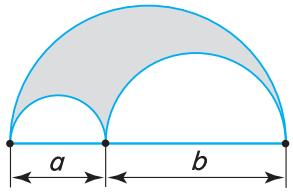
R	15 см		12 см
$n°$	45°	40°	
l		20π см	2π см

346. За даною довжиною дуги l знайдіть хорду, яка сполучає її кінці, якщо дуга містить: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

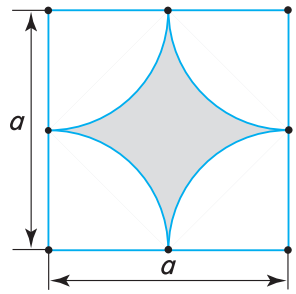
347. Знайдіть довжину дуги, якщо хорда, що її стягує, дорівнює a, а дуга містить: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

348. За даними на малюнках 118 — 120 знайдіть периметри заштрихованих фігур.

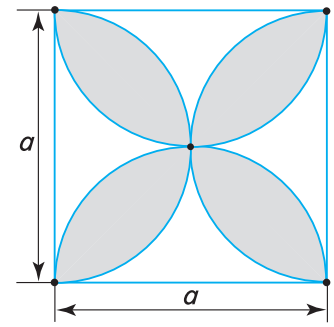
349*. Три кола попарно дотикаються зовні. Знайдіть довжину кола, яке проходить через точки дотику, якщо радіуси трьох кіл дорівнюють:
1) 9 см, 16 см, 20 см; 2) 1 см, 2 см, 3 см.



Мал. 118



Мал. 119



Мал. 120

350*. У колі по один бік від центра проведено дві паралельні хорди довжиною a і b. Відстань між хордами дорівнює c. Знайдіть довжину кола, якщо:
1) $a = 40$ см, $b = 48$ см, $c = 8$ см;
2) $a = 120$ см, $b = 32$ см, $c = 38$ см.

351*. Діаметр $2R$ кола поділено на n рівних частин і на кожній із цих частин, як на діаметрі, описано коло. Чому дорівнює сума довжин цих кіл?

352*. Дуга в 60° довша за хорду, яка її стягує, на 14 см. Знайдіть довжину хорди.

353*. Дуга радіуса 4 см, що відповідає центральному куту в 120°, дорівнює довжині деякого кола. Знайдіть радіус цього кола.

354*. В одному з двох кіл, що перетинаються, дуга, яку стягує їхня спільна хорда, дорівнює 45°, а дуга другого кола — 60°. Яке коло має більшу довжину?

355*. Спільна хорда двох кіл стягує дуги в 60° і 120°. Знайдіть відношення довжин цих кіл.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

356. Скільки треба стовпчиків для паркана навколо майданчика, що має форму круга, якщо відстань між стовпчиками (за дугою кола) повинна бути близько півтора метра, а діаметр майданчика 60 м?

357. Щоб знайти товщину дерева (діаметр), можна виміряти його обхват (довжину кола). Обчисліть товщину дерева, обхват якого дорівнює: 1) 2 м; 2) 2,5 м.

358. На котушці є 80 витків дроту. Знайдіть довжину дроту, якщо діаметр котушки 0,5 м.

359. Вантаж піднімають за допомогою блока, який зображено на малюнку 121. На яку висоту підніметься вантаж за 9 обертів блока, якщо його діаметр дорівнює 20 см.

360. Як знайти відстань до води в колодязі, якщо можна виміряти діаметр вала, на який намотується ланцюг для відра?

361. Знайдіть довжину земного екватора, якщо радіус земної кулі дорівнює 6370 км.

Мал. 121

§11. ПЛОЩА КРУГА ТА ЙОГО ЧАСТИН

Ви вже знаєте, що кругом називається частина площини, обмежена колом (мал.122).

Виведемо формулу для обчислення площі круга. Впишемо в круг радіуса R правильний многокутник $ABCD...F$ (мал. 123) і обчислимо його площу. Радіуси, проведені у вершини многокутника, розбивають його на n трикутників, кожний з яких дорівнює трикутнику AOF.

Тому $S_{ABCD...F} = n \cdot S_{\triangle AOF}$. Проведемо апофему OK n-кутника. Оскільки $S_{\triangle AOF} = \frac{1}{2} AF \cdot OK$, то $S_{ABCD...F} = \frac{1}{2}(nAF \cdot OK) = \frac{P \cdot OK}{2}$, де P – периметр n-кутника. При досить великому n периметр P як завгодно мало відрізняється від довжини кола $C = 2\pi R$, апофема OK – від радіуса R кола, а площа многокутника $S_{ABCD...F}$ як завгодно мало відрізняється від площі S круга.

Тоді площа круга дорівнюватиме: $S = \frac{CR}{2} = \frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2$.

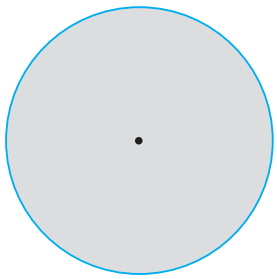
Отже, $\boldsymbol{S = \pi R^2}$.

Задача. Знайдіть радіус круга, площа якого дорівнює 25π см.

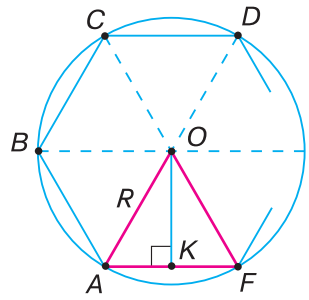
Розв'язання. З формули $S = \pi R^2$ дістанемо: $R^2 = \frac{S}{\pi} = \frac{25\pi}{\pi} = 25$ (см). Звідки $R = \sqrt{25} = 5$ (см).

Радіус R або діаметр D круга, площа якого S, знаходьте з формули $S = \pi R^2$: $\boldsymbol{R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}}$ **або** $\boldsymbol{D = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}}$.

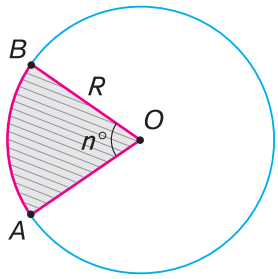
Круговим сектором називається частина круга, обмежена двома радіусами і дугою.



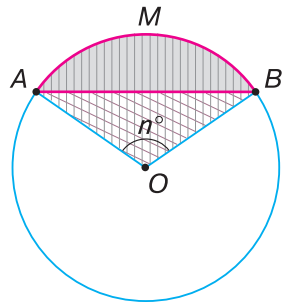
Мал. 122



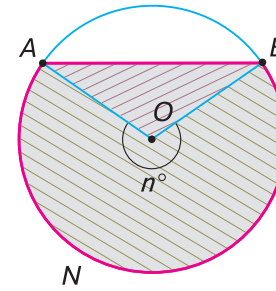
Мал. 123



Мал. 124



Мал. 125



Мал. 126

На малюнку 124 сектор AOB заштрихований. Дуга, яка обмежує сектор, називається *дугою сектора*.

Нехай сектор AOB круга радіуса R має центральний кут n°. Тоді площа сектора з центральним кутом в 1° дорівнює $\frac{\pi R^2}{360^\circ}$, а площа сектора з центральним кутом n° визначається за формулою: $\boldsymbol{S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}}$.

Круговим сегментом називається частина круга, обмежена хордою і дугою.

На малюнку 125 сегмент AMB заштрихований.

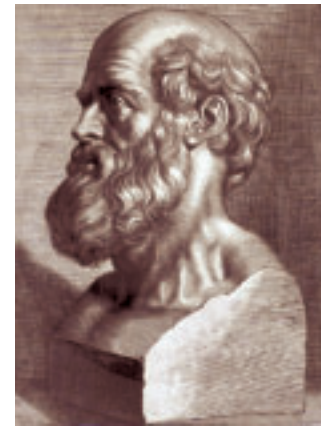
Розглянемо сегмент круга, дуга якого містить n°. Якщо $n^\circ < 180^\circ$ (мал. 125), то площа сегмента дорівнює різниці площ сектора AOB і $\triangle AOB$, а якщо $n^\circ > 180^\circ$ – то їх сумі (мал. 126).

? Як знайти площу сегмента, якщо його дуга містить 180°? Матимемо півкруг, площа якого $\frac{\pi R^2}{2}$.

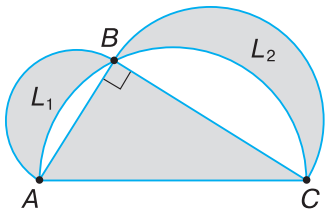
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Стародавні греки намагалися побудувати циркулем і лінійкою квадрат, рівновеликий даному кругу, і тим самим точно обчислити площу круга. Задача отримала назву – *квадратура круга*.

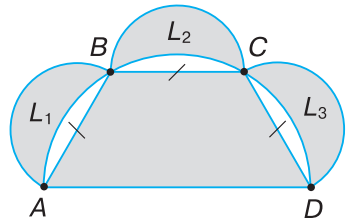
Один з підходів до розв'язування цієї задачі обрав Гіппократ з острова Хіос (південна частина Егейського моря), який жив у V ст. до н. е. Задачу про квадратуру круга вчений намагався розв'язати, відшукуючи квадратуру серпків – фігур, обмежених дугами двох кіл. Найпростіші серпки Гіппократа L_1 і L_2 (мал. 127) можна отримати, якщо у півколо вписати прямокутний трикутник ABC і на його катетах



Гіппократ



Мал. 127



Мал. 128

побудувати півкола. Вчений довів, що площа двох серпків дорівнює площі трикутника: $S_{L_1} + S_{L_2} = S_{\triangle ABC}$.

Наступна задача, на думку Гіппократа, була найближчою до розв'язання проблеми квадратури круга. У півколо вписано рівнобічну трапецію $ABCD$ — половину правильного шестикутника — і на її трьох рівних сторонах побудовано півкола (мал. 128). Тоді сума площ утворених трьох однакових серпків рівновелика площі трапеції: $S_{L_1} + S_{L_2} + S_{L_3} = S_{ABCD}$.

Це вперше в історії математики за допомогою циркуля і лінійки вдалося перетворити фігуру, обмежену кривими лініями, в рівновелику їй прямолінійну фігуру. Вчений сподівався, що те саме можна зробити з кругом. Але сподівання були марними. Неможливість розв'язати задачу про квадратуру круга була доведена наприкінці XIX ст. німецьким математиком Карлом Ліндеманом (1852 — 1939 рр.). Внесок Гіппократа був гідно поцінований — і сьогодні вживається термін «Гіппократові серпки». Вираз «Квадратура круга» у повсякденному житті означає, що дану задачу, проблему розв'язати не можна.

2. Слово «сектор» походить від латинського sector — той, що відсікає. Слово «сегмент» теж латинського походження і означає відрізок.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Виведіть формулу площі круга.
2. Що таке сектор? Сегмент?
3. Виведіть формулу для обчислення площі кругового сектора.
4. Поясніть, як знайти площу кругового сегмента.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

362'. Накресліть коло і виміряйте його радіус. Обчисліть площу круга, обмеженого цим колом.

363'. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:
1) 4 см; 2) 6 см; 3) 9 см.

364'. Обчисліть площу круга, якщо його діаметр дорівнює:
1) 10 см; 2) 12 см; 3) 16 см.

365'. Знайдіть радіус круга, площа якого дорівнює:
1) 25π см^2; 2) 9π см^2; 3) 36π см^2.

366'. Накресліть круг, площа якого дорівнює: 1) 4π см^2; 2) 16π см^2; 3) 49π см^2.

367°. Доведіть, що площу круга можна обчислювати за формулами:
1) $S=\frac{\pi D^2}{4}$; 2) $S=\frac{C}{2}R$; 3) $S=\frac{C^2}{4\pi}$.

368°. Як зміниться площа круга, якщо його радіус:
1) збільшити в 3 рази; 2) зменшити в 2 рази; 3) збільшити в 4 рази?

369°. Знайдіть радіус круга, якщо його площа і довжина кола мають одне й те саме числове значення.

370°. Обчисліть площу круга, якщо довжина його кола дорівнює:
1) π см; 2) 6π см; 3) 8π см.

371°. Сторона правильного трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу круга:
1) вписаного в цей трикутник; 2) описаного навколо нього.

372°. Обчисліть площу круга, вписаного в квадрат і описаного навколо нього, якщо сторона квадрата дорівнює: 1) 10 см; 2) 14 см; 3) 18 см.

373°. Знайдіть площу круга, якщо сторони вписаного в нього прямокутника дорівнюють: 1) 6 см і 8 см; 2) 10 см і 24 см; 3) 12 см і 16 см.

374°. Сторона правильного шестикутника дорівнює 12 см. Знайдіть площу круга:
1) вписаного в цей шестикутник; 2) описаного навколо нього.

375°. Доведіть, що площу сектора можна обчислювати за формулою: $S=\frac{lR}{2}$, де l — дуга сектора, R — радіус круга.

376°. Знайдіть площу сектора круга радіуса 6 см, якщо відповідний цьому сектору центральний кут дорівнює: 1) 10°; 2) 20°; 3) 100°.

377°. Знайдіть площу сектора круга радіуса 18 см, якщо дуга сектора дорівнює: 1) 2π см; 2) 5π см; 3) 8π см.

378°. Обчисліть площу кругового сегмента, якщо радіус кола дорівнює R, а дуга містить: 1) 90°; 2) 60°.

379. Доведіть, що довжину кола можна обчислювати за формулою: $C=2\sqrt{\pi S}$, де S — площа круга.

380. Знайдіть довжину кола, якщо площа круга дорівнює:
1) 4π см^2; 2) π см^2; 3) 81π см^2.

381. S — площа круга, R і C — радіус і довжина його кола. Накресліть у зошиті таблицю 15 та заповніть її.

Таблиця 15

R	10 см				3 см		
C		20π см		2π см		12π см	
S			25π см^2				9π см^2

382. Що більше — площа круга, побудованого на відрізку a як на діаметрі, чи площа півкруга, побудованого на відрізку $2a$ як на діаметрі?

383. У скільки разів площа півкруга радіуса R більша за суму площ двох півкругів з радіусами $\frac{R}{2}$.

384. Яка залежність між площами кругів, вписаного в правильний трикутник і описаного навколо нього?

385. Знайдіть діаметр круга, якщо його площа дорівнює:
1) сумі площ двох кругів з радіусами 3 см і 4 см;
2) різниці площ двох кругів з радіусами 10 см і 8 см.

386. Знайдіть відношення площ вписаного й описаного кругів:
1) для правильного трикутника; 2) для квадрата;
3) для правильного шестикутника.

387. Знайдіть площі кругів, описаного навколо правильного трикутника і вписаного в нього, якщо площа трикутника дорівнює: 1) $12\sqrt{3}$ см^2; 2) $3\sqrt{3}$ см^2.

388. Знайдіть площі кругів, описаного навколо квадрата і вписаного в нього, якщо площа квадрата дорівнює: 1) 16 см^2; 2) 36 см^2.

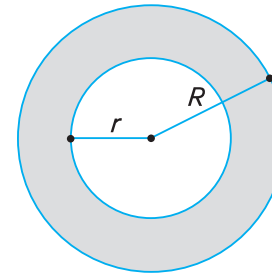
389. **Радіуси двох кіл зі спільним центром дорівнюють R і r (мал. 129). Виведіть формулу для обчислення площі кільця, обмеженого цими колами.**

390. Знайдіть площу кільця, обмеженого двома колами зі спільним центром, якщо радіуси кіл дорівнюють: 1) 2 см і 8 см; 2) 4,6 см і 5,4 см.

391. Усередині даного круга проведено коло, яке ділить його площу навпіл. Знайдіть радіус цього кола.

392. Площа сектора круга радіуса R дорівнює S. Знайдіть центральний кут сектора, якщо:
1) $R = 3$ см, $S = 4\pi$ см^2; 2) $R = 10$ см, $S = 20\pi$ см^2.

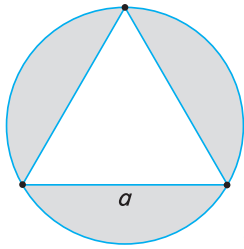
393. **Площа сектора дорівнює S, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює n°.**
Обчисліть радіус круга, якщо:
1) $S = 25$ см^2, $n^\circ = 18^\circ$; 2) $S = 14$ см^2, $n^\circ = 45^\circ$.



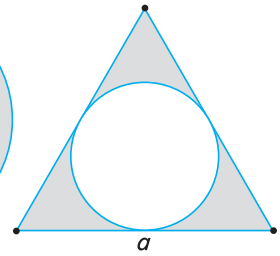
Мал. 129

394. На малюнках 130 – 133 зображено вписані в коло або описані навколо нього правильні трикутники і чотирикутники. Обчисліть площі заштрихованих частин фігур, якщо радіус кола R.

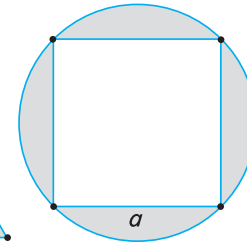
395*. Навколо круга, площа якого дорівнює S, описано ромб з кутом 30°. Обчисліть площу цього ромба.



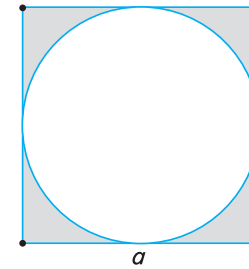
Мал. 130



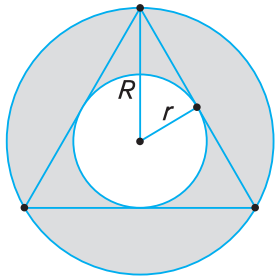
Мал. 131



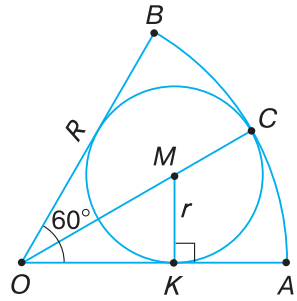
Мал. 132



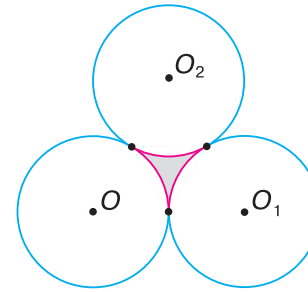
Мал. 133



Мал. 134



Мал. 135



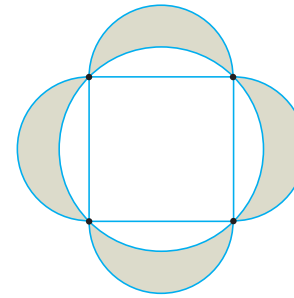
Мал. 136

396*. 1) Навколо правильного трикутника з площею Q описано коло і в цей самий трикутник вписано коло. Знайдіть площу кільця, обмеженого цими колами (мал. 134).

2) Узагальніть задачу для правильного n-кутника.

397*. У кільці, утвореному двома колами зі спільним центром, хорда більшого кола, яка дотикається до меншого, дорівнює m. Знайдіть площу кільця.

398*. Дуга сегмента містить 120°, а її довжина дорівнює l. Знайдіть площу круга, вписаного в цей сегмент.



Мал. 137

399*. У круговий сектор з центральним кутом 60° вписано круг (мал. 135). Знайдіть відношення площі сектора до площі вписаного круга.

400*. Три кола радіуса R попарно дотикаються зовні (мал. 136). Обчисліть площу «криволінійного трикутника», обмеженого дугами цих кіл.

401*. На кожній стороні a квадрата зовні нього побудовано півколо і навколо квадрата описано коло (мал. 137). Обчисліть суму площ заштрихованих серпків.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

402. Дві водопровідні труби з діаметрами 6 см і 8 см треба замінити однією трубою з такою самою пропускною здатністю. Знайдіть діаметр цієї труби.

403. Обчисліть площу поперечного перерізу дерева, якщо його обхват (довжина кола) дорівнює: 1) 90 см; 2) 1,5 м.

404. Якої товщини шар треба зняти з круглого мідного дроту, що має площу перерізу 314 мм^2, щоб дріт проходив крізь отвір діаметром 18,5 мм?

405. Діаметр заготовки дорівнює 30 мм. Поперечний переріз після обробки цієї заготовки — квадрат із стороною 20 мм. Скільки відсотків становлять відходи металу?

406. Навколо круглої клумби є доріжка, яка прилягає до клумби. Довжина зовнішнього кола доріжки дорівнює 25 м, а ширина її — 0,5 м. Скільки потрібно піску, щоб посипати ним доріжку, якщо на 1 м^2 доріжки потрібно 0,8 дм^2 піску?

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Доведіть, що навколо правильного n-кутника можна описати коло і в нього можна вписати коло.
2. Виведіть формули для радіусів вписаного і описаного кіл правильного n-кутника.
3. Поясніть, як побудувати правильний шестикутник, трикутник і чотирикутник.
4. Доведіть, що відношення довжини кола до його діаметра одне й те саме для кожного кола.
5. За якою формулою обчислюється довжина кола, довжина дуги кола?
6. Виведіть формулу площі круга.
7. Запишіть і поясніть формулу для обчислення площі кругового сектора.
8. Поясніть, як знайти площу кругового сегмента.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

№ 1

1° Знайдіть центральний кут правильного n-кутника, якщо $n = 36$.

А. 5°. **Б.** 12°. **В.** 20°. **Г.** 10°.

2° Знайдіть кут правильного n-кутника, якщо $n = 6$.

А. 100°. **Б.** 110°. **В.** 120°. **Г.** 90°.

3° Знайдіть радіус кола, вписаного в квадрат, якщо периметр квадрата дорівнює 24 см.

А. 5 см. **Б.** 3 см. **В.** 4 см. **Г.** 6 см.

4 Скільки сторін має правильний n-кутник, якщо його зовнішній кут дорівнює 20°?

А. 18. **Б.** 20 . **В.** 15. **Г.** 10.

5* Знайдіть радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, якщо радіус описаного кола дорівнює $8\sqrt{3}$ см.

А. 8 см. **Б.** 10 см. **В.** 24 см. **Г.** 12 см.

№ 2

1° Знайдіть радіус кола, якщо його довжина дорівнює 20π см.

А. 5 см. **Б.** 15 см. **В.** 20 см. **Г.** 10 см.

2° Знайдіть довжину дуги кола радіуса 9 см, яка відповідає центральному куту 20°.

А. 4π см. **Б.** 2π см. **В.** π см. **Г.** 6 см.

3° Знайдіть діаметр круга, якщо його площа дорівнює 64π см^2.

А. 8 см. **Б.** 16 см. **В.** 24 см. **Г.** 12 см.

4 Знайдіть довжину кола, якщо площа круга дорівнює 16π см^2.

А. 6π см. **Б.** 12π см. **В.** 10π см. **Г.** 8π см.

5* Знайдіть довжину кола, вписаного в ромб з гострим кутом 30°, якщо його сторона дорівнює 12 см.

А. 6π см. **Б.** 12π см. **В.** 3π см. **Г.** 8π см.

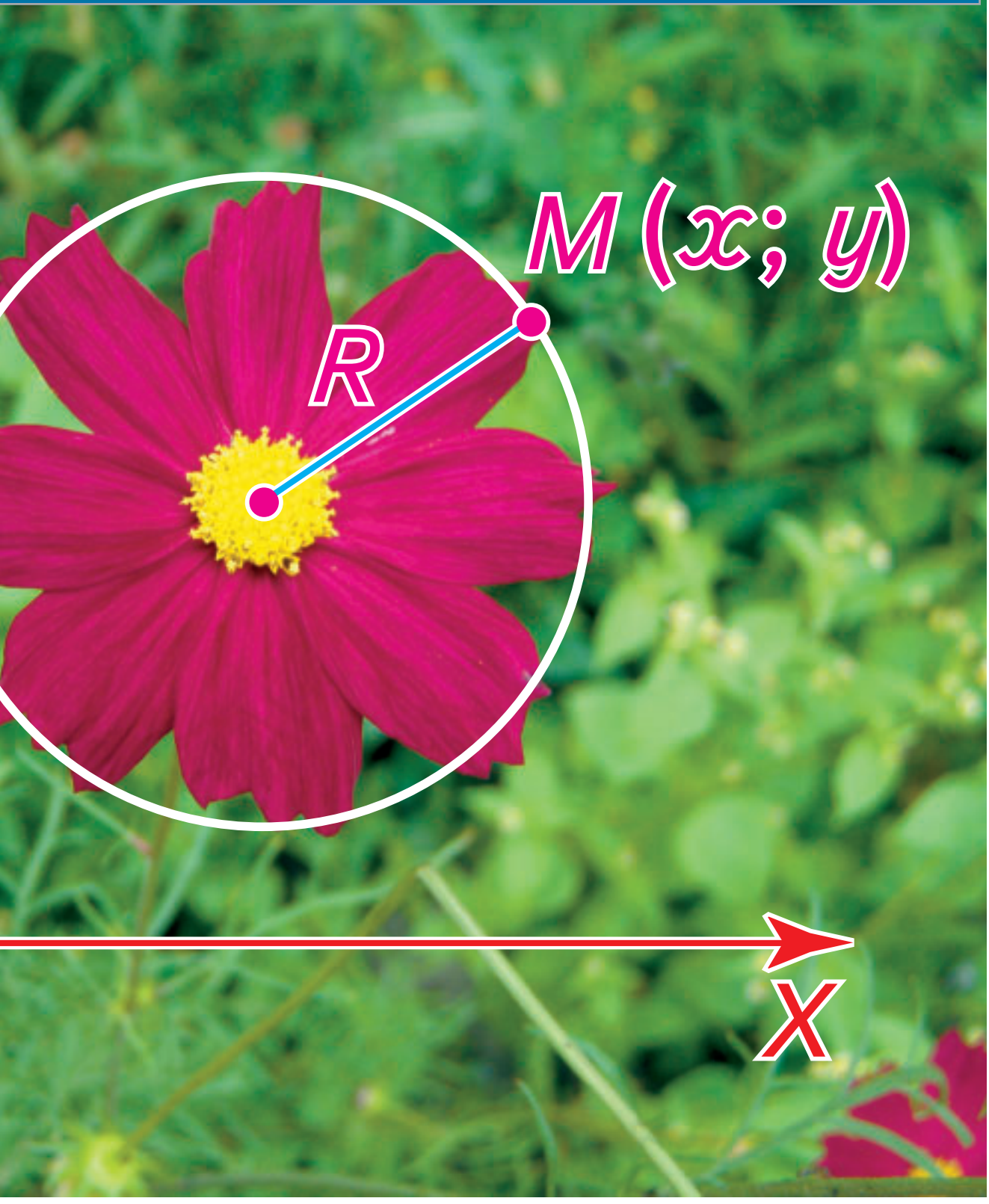
РОЗДІЛ 3

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА

У розділі дізнаєтесь:

- що таке прямокутна декартова система координат і як у ній визначають координати точки;
- як знайти довжину відрізка за координатами його кінців та координати середини відрізка;
- що таке рівняння фігури; які рівняння кола і прямої;
- які є види рівняння прямої;
- що таке метод координат і як його застосувати до розв'язування геометричних задач та задач практичного змісту

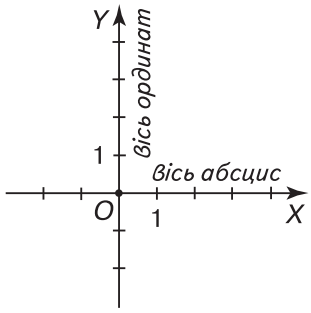
ПЛОЩИНІ



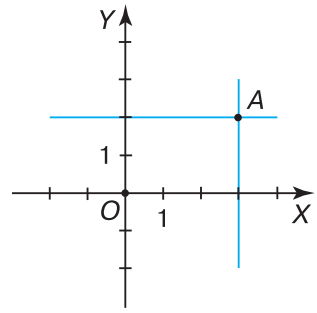
§12. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

З курсу алгебри ви знаєте, як ввести *прямокутну декартову систему координат XOY* на площині (мал. 138). Площину із введеною на ній системою координат називають *координатною площиною*.

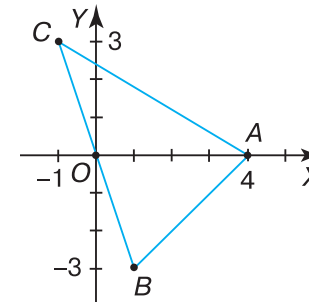
Кожній точці на координатній площині можна поставити у відповідність єдину пару чисел, узятих у певному порядку, і, навпаки, кожній парі чисел відповідає єдина точка координатної площини. Така упорядкована пара чисел називається *координатами точки у даній системі координат*. Нагадаємо, щоб визначити координати точки, треба: через дану точку провести дві прямі, паралельні осям координат; на координатних осях відмітити числа, які відповідають точкам перетину цих прямих з осями; з отриманих чисел утворити упорядковану пару. На малюнку 139 точка A має координати: $A\,(3;\,2)$.



Мал. 138



Мал. 139



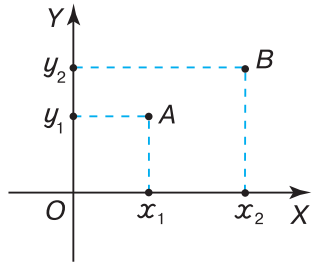
Мал. 140

Задача. Дано три точки: $A\,(4;\,0)$, $B\,(1;\,-\,3)$, $C\,(-\,1;\,3)$. Чи існує трикутник з вершинами у даних точках?

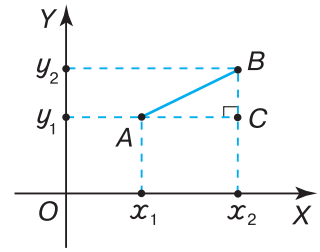
Розв'язання. Задамо прямокутну декартову систему координат і побудуємо у ній дані точки за їхніми координатами (мал. 140). Очевидно, що точки A, B і C не лежать на одній прямій. Тому трикутник ABC існує.

? Чи можна строго обґрунтувати висновок, який отримали у задачі? Так. Наприклад, скориставшись нерівністю трикутника. Але для цього треба знати, як знаходити відстань між двома точками за їх координатами.

Теорема
(про відстань між двома точками із заданими координатами).
Відстань між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць їх відповідних координат.



Мал. 141



Мал. 142

Дано: XOY — прямокутна декартова система координат (мал. 141), $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

Довести: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Доведення. Нехай точки A і B містяться у першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 < y_2$ (мал. 141). З'єднаємо точки A і B відрізком та проведемо через них прямі, паралельні осям координат (мал. 142). Нехай C — точка перетину цих прямих. Утворився прямокутний трикутник ABC, у якого кут C прямий, катет $AC = x_2 - x_1$, катет $BC = y_2 - y_1$, довжина гіпотенузи AB є шуканою відстанню між точками A і B. За теоремою Піфагора, $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Звідси $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Інші випадки розгляньте самостійно.

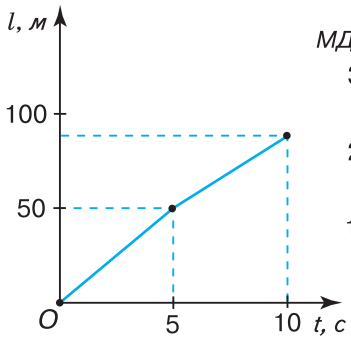
? Чи залежить формула довжини відрізка від розміщення його кінців у системі координат? Не залежить.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

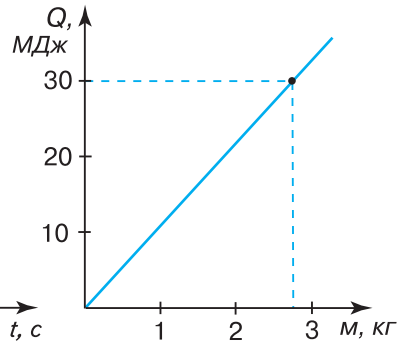
1. Прямокутна декартова система координат названа на честь видатного французького вченого Рене Декарта (1596 — 1650), відомого значними досягненнями в галузі філософії, математики, фізики, фізіології. Математичні дослідження Декарта тісно пов'язані з його філософськими і фізичними роботами. У «Геометрії» (1637) Декарт уперше ввів поняття змінної і функції, їх теперішнє позначення малими латинськими буквами x, y. Встановлений ним зв'язок між відрізками і числами зумовив взаємне проникнення геометрії та алгебри, зародження нового розділу математичної науки — *аналітичної геометрії*. Її методи широко використовують у багатьох галузях сучасних математичних досліджень.

Рене Декарт

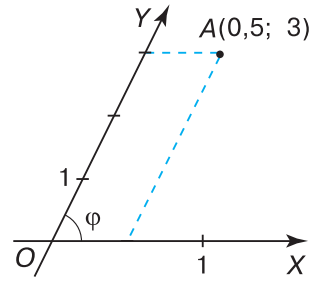
2. Прямокутна система координат широко застосовується в науці, техніці, на практиці. Наприклад, з курсу фізики ви знаєте, що у такій системі координат зображають графік руху (мал. 143), графік залежності кількості теплоти, що виділяється під час згоряння свіжої деревини, від маси палива (мал. 144)



Мал. 143



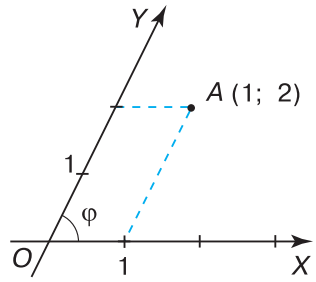
Мал. 144



Мал. 145

та ін. Загальнішим є випадок, коли осі координат не перпендикулярні і шкали на них не рівнозначні (мал. 145). Таку систему координат називають *афінною* (загальною косокутною).

3. Історія свідчить, що Р. Декарт використовував косокутну систему координат з рівнозначними шкалами (мал. 146), причому лише її першу чверть. У такій системі координат також можна знаходити довжини відрізків. Але при цьому треба враховувати координатний кут φ (мал. 146). Відстань від точки $A(x_1; y_1)$ до початку координат можна обчислити за формулою:



Мал. 146

$AO = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2xy\cos\varphi}$, а між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ — за формулою:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\varphi}.$$

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

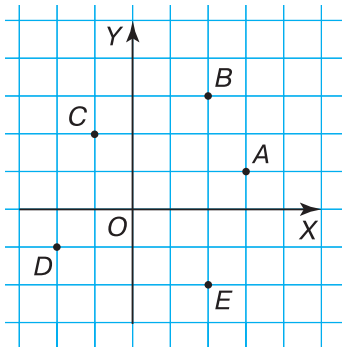
1. Поясніть, як побудувати прямокутну декартову систему координат на площині.
2. Яку назву мають осі координат? Точка їх перетину?
3. Що називають координатною площиною?
4. Поясніть, як визначити координати точки.
5. Сформулюйте і доведіть теорему про відстань між двома точками із заданими координатами.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

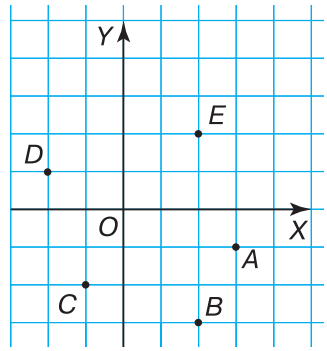
407'. За даними на малюнках 147 — 149 визначте координати позначених точок.

408'. Задайте прямокутну декартову систему координат на площині та побудуйте у ній точки: $A(1; 1)$, $B(1; -1)$, $C(-1; -1)$, $D(-1; 1)$.

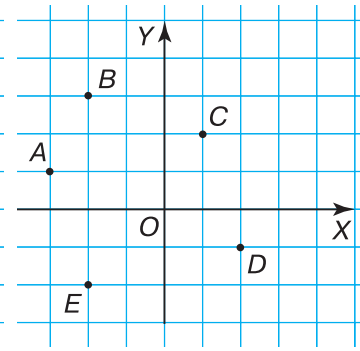
409'. Які знаки мають координати точок у координатних чвертях? Заповніть таблицю 16.



Мал. 147



Мал. 148



Мал. 149

Таблиця 16

	I чверть	II чверть	III чверть	IV чверть
Знак абсциси				
Знак ординати				
Координати точки M	$M(x; y)$	$M(-x; y)$	$M(-x; -y)$	$M(x; -y)$

410'. Не виконуючи побудови, з'ясуйте, в якій координатній чверті лежить точка: $A(-145; 200)$, $B(358; -422)$, $C(218; 3390)$, $D(-139; -247)$, $E(-371; 2108)$, $F(792; 6203)$, $K(953; -712)$, $L(-37401; -47732)$.

411'. Запишіть координати точки B, якщо з точкою $A(3; 4)$ вона має:
1) рівні абсциси, але протилежні ординати;
2) рівні ординати, але протилежні абсциси;
3) протилежні абсциси і протилежні ординати;
4) рівні абсциси і рівні ординати.

412°. Через точку $A(3; 2)$ проведіть пряму, паралельну осі: 1) абсцис; 2) ординат. З'ясуйте, чи лежать на цій прямій точки $B(-3; 2)$, $C(2; 3)$, $D(3; -2)$.

413°. Точки A і B мають координати:
1) $A(-5; -2)$, $B(-1; -4)$; 2) $A(2; 4)$, $B(2; -4)$;
3) $A(3; 1)$, $B(-3; 1)$.
Чи перетинає відрізок AB осі координат? Відповідь поясніть.

414°. Знаючи координати точки, знайдіть відстань від цієї точки до вказаної осі координат. Заповніть таблицю 17.

Таблиця 17

Координати точки	(5; −1)	(−5; −1)	(5; 1)	(−5; 1)	(−2; −4)	(−2; 4)	(2; −4)	(2; 4)
Відстань до осі абсцис								
Відстань до осі ординат								

415°. Визначте відстань між точками:
1) $A(0; 0)$, $B(3; 4)$; 2) $A(-5; -7)$, $B(3; 8)$;
3) $A(5; -1)$, $B(-3; 8)$; 4) $A(-6; 3)$, $B(4; -2)$.

416°. Знайдіть довжину діаметра кола за координатами його кінців:
1) (3; 4) і (2; − 1); 2) (− 6; 3) і (0; − 5); 3) (5; 2) і (1; − 1).
Який радіус у даного кола?

417°. Знайдіть довжини сторін трикутника ABC, вершини якого мають координати:
1) $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(-1; 3)$;
2) $A(1; 2)$, $B(8; 26)$, $C(19; 26)$;
3) $A(-2; -1)$, $B(0; 1)$, $C(0; -3)$.

418°. Доведіть, що трикутник ABC є рівнобедреним, якщо:
1) $A(-3; 3)$, $B(6; 6)$, $C(3; -3)$;
2) $A(2; -3)$, $B(3; 0)$, $C(-1; -2)$;
3) $A(-1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(2; -1)$.

419°. Доведіть, що трикутник ABC є прямокутним, якщо:
1) $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $C(3; 1)$;
2) $A(5; 1)$, $B(7; 2)$, $C(9; -2)$;
3) $A(-2; -1)$, $B(0; 1)$, $C(0; -3)$.

420°. Відстань між точками A і B дорівнює d. Знайдіть x, якщо:
1) $A(2; 3)$, $B(x; 1)$, $d = 2$; 2) $A(-1; x)$, $B(3; 2x)$, $d = 5$;
3) $A(5; x)$, $B(2; 4)$, $d = 3$.

421. На осях координат знайдіть точки, рівновіддалені від двох даних точок:
1) (− 1; 1) і (3; 5); 2) (2; − 1) і (− 2; 1).

422. Визначте довжини сторін трикутника за координатами середин його сторін:
1) (5; 1), (9; 4), (9; − 2); 2) (1; 1), (− 1; − 1), (1; − 2).

423. Дві вершини прямокутного трикутника мають координати:
1) $A(2; 5)$, $B(3; 2)$; 2) $A(1; 4)$, $B(9; 6)$.
Чи може третя його вершина міститися в точці $C(8; 8)$, $D(9; 4)$, $O(4; -1)$, $M(8; 7)$?

424. Знайдіть координати четвертої вершини паралелограма за координатами трьох його вершин: 1) $A(2; 5)$, $B(8; 13)$, $C(16; 9)$; 2) $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $C(3; 1)$.

425. Які координати має четверта вершина прямокутника, якщо три його вершини мають координати: 1) (2; 5), (3; 2), (8; 7); 2) (4; − 1), (1; 2), (− 1; 0)?

426. Дві вершини квадрата мають координати: 1) (0; 0) і (1; 2); 2) (− 1; − 1) і (2; 0). Які координати можуть мати дві інші його вершини?

427. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами у точках $A(5; -1)$, $B(-7; -6)$, $C(-12; 6)$ і $D(0; 11)$ є: 1) паралелограмом; 2) ромбом; 3) квадратом.

428. Який вид чотирикутника $ABCD$, якщо:
1) $A(-1; -2)$, $B(-2; -4)$, $C(-6; -2)$, $D(-5; 0)$;
2) $A(0; 8)$, $B(-6; 0)$, $C(2; -6)$, $D(8; 2)$?

429. Знайдіть площу квадрата, знаючи координати двох суміжних його вершин: 1) (3; 2), (8; 7); 2) (4; − 1), (1; 2).

430. Знайдіть площу квадрата, знаючи координати двох протилежних його вершин: 1) (3; 5), (1; − 3); 2) (− 2; 2), (10; − 3).

431*. Виведіть формулу для обчислення тангенса, синуса і косинуса кута, який утворює відрізок AB з додатною піввіссю абсцис, знаючи координати кінців відрізка.

432*. Який кут утворює відрізок AB з додатною піввіссю абсцис, якщо: 1) $A(0; 2)$, $B(-2; 4)$; 2) $A(-1; -3)$, $B(4; 2)$?

433*. Як обчислити кут між двома відрізками, заданими координатами своїх кінців?

434*. Якого виду трикутник (гострокутний, прямокутний чи тупокутний) з вершинами у точках: 1) $A(0; 0)$, $B(3; 1)$, $C(1; 7)$; 2) $A(-2; 1)$, $B(4; 8)$, $C(10; 6)$?

435*. Обчисліть площу трикутника ABC за координатами його вершин: 1) $A(1; 2)$, $B(2; 4)$, $C(-2; 5)$; 2) $A(4; 2)$, $B(9; 4)$, $C(7; 6)$.

436*. Обчисліть площу ромба, якщо три його вершини мають координати: $A(-3; 8)$, $B(1; 5)$, $C(4; 1)$.

437*. Яку площу має п'ятикутник, заданий координатами своїх вершин: $A(-2; 0)$, $B(0; -1)$, $C(2; 0)$, $D(3; 2)$, $E(-1; 3)$?

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

438. Як на папері в клітинку побудувати відрізок $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{5}$, якщо a — довжина сторони: 1) однієї клітинки; 2) двох клітинок?

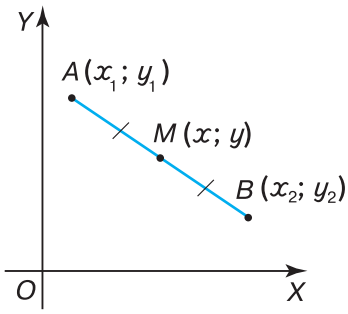
439. Як на папері в клітинку побудувати прямокутний трикутник з вершинами у вузлах сітки і гіпотенузою, що лежить на горизонтальній лінії, якщо даний трикутник: 1) рівнобедрений; 2) не рівнобедрений?

440. Чи можуть одночасно міститися у вузлах сітки всі вершини правильного: 1) трикутника; 2) шестикутника? Відповідь поясніть.

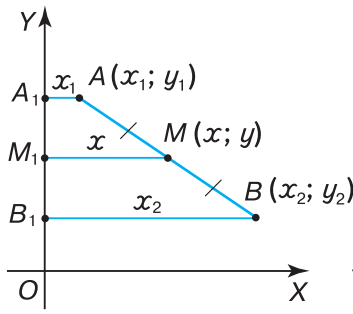
441. Основу драбини довжиною 6 м відсунуто від стіни на 1 м. На скільки знизиться верхній кінець драбини, якщо основу відсунути від стіни ще на 0,5 м? Розв'яжіть задачу, використовуючи систему координат.

§13. КООРДИНАТИ СЕРЕДИНИ ВІДРІЗКА

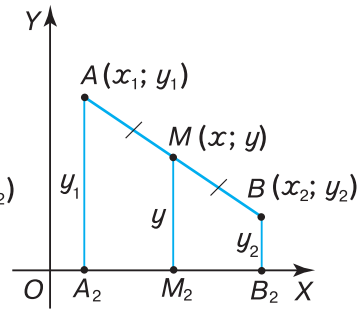
Знаючи координати кінців відрізка, можна знаходити не тільки його довжину, а й координати його середини.



Мал. 150



Мал. 151



Мал. 152

Теорема (про координати середини відрізка).
Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців.

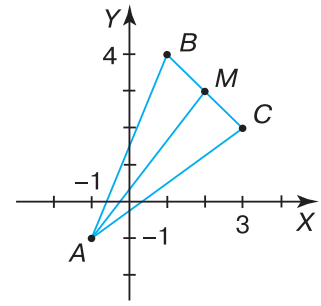
Дано: XOY — прямокутна декартова система координат (мал. 150), $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, точка $M(x; y)$ — середина відрізка AB.

Довести: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Доведення. Нехай кінці відрізка містяться у першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 > y_2$ (мал. 150). Через точки A, B і M проведемо прямі, паралельні осі OX (мал. 151). Точки їх перетину з віссю OY позначимо відповідно A_1, B_1 і M_1. Чотирикутник AA_1B_1B — трапеція з основами $AA_1 = x_1$, $BB_1 = x_2$. За побудовою, $MM_1 = x$. Оскільки $AM = MB$ (за умовою) і $MM_1 \parallel AA_1 \parallel BB_1$ (за побудовою), то MM_1 — середня лінія трапеції AA_1B_1B. Тому $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Аналогічно доводимо, що $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Для цього через точки A, B і M проведемо прямі, паралельні осі OY (мал. 152). Точки їх перетину з віссю OX позначимо відповідно A_2, B_2 і M_2. Чотирикутник AA_2B_2B — трапеція з основами $AA_2 = y_1$, $BB_2 = y_2$. За побудовою, $MM_2 = y$. Оскільки $AM = MB$ (за умовою) і $MM_2 \parallel AA_2 \parallel BB_2$ (за побудовою), то MM_2 — середня лінія трапеції AA_2B_2B. Тому $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Інші випадки розгляньте самостійно.

? Чи залежать формули координат середини відрізка від розміщення його кінців у системі координат? Не залежать.



Мал. 153

Задача. Знайдіть довжину медіани AM трикутника з вершинами у точках: $A(-1;-1)$, $B(1;4)$, $C(3;2)$.

Розв'язання. Точка M є серединою сторони BC (мал. 153), тому вона має координати: $x=\frac{1+3}{2}=2$, $y=\frac{4+2}{2}=3$. Довжина медіани AM дорівнює відстані між точками A і M.

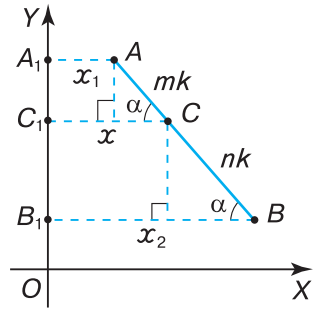
Отже, $AM=\sqrt{(2-(-1))^2+(3-(-1))^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

Щоб знайти довжину медіани трикутника, знаючи координати його вершин, визначте координати основи медіани та знайдіть відстань від цієї точки до протилежної вершини трикутника.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. У вас могло виникнути запитання: *Як визначити координати точки, що ділить даний відрізок у заданому відношенні?* Дослідимо це.

Нехай кінці відрізка AB і точка C, що ділить його у відношенні $m:n$, мають координати: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x;y)$ (мал. 154). Введемо коефіцієнт пропорційності k. Тоді $AC=mk$, $BC=nk$. Проведемо прямі AA_1, BB_1 і CC_1 паралельно осі OX. З точок A і C проведемо перпендикуляри до прямих CC_1 і BB_1 відповідно. Нехай $\angle ABB_1=\alpha$, тоді $\angle ACC_1=\alpha$ (доведіть це самостійно).



Мал. 154

Далі отримаємо: $x=x_1+mk\cos\alpha$, $x_2=x+nk\cos\alpha$. З другої рівності виразимо косинус α, підставимо цей вираз у першу рівність та знайдемо x:

$\cos\alpha=\frac{x_2-x}{nk}$; $x=x_1+mk\cdot\frac{x_2-x}{nk}$ або $x=x_1+m\cdot\frac{x_2-x}{n}$.

Звідси $nx=nx_1+mx_2-mx$ або $(m+n)x=nx_1+mx_2$.

Отже, $x=\frac{n}{m+n}x_1+\frac{m}{m+n}x_2$.

Аналогічно дістанемо, що $y=\frac{n}{m+n}y_1+\frac{m}{m+n}y_2$.

2. Формули координат точки, що ділить відрізок у заданому відношенні, зокрема координат середини відрізка, справедливі не лише у прямокутній декартовій системі координат, а й в афінній системі координат. Цей факт ви зможете строго довести пізніше, вивчивши тему «Вектори».

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. За якими формулами визначають координати середини відрізка?
2. Сформулюйте і доведіть теорему про координати середини відрізка.
3. Поясніть, як знайти довжину медіани трикутника, знаючи координати його вершин.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

442'. Чи правильно записано формули координат середини відрізка з кінцями у точках $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$:

1) $x = \frac{x_1 + x_2}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{3}$; 2) $x = \frac{x_1 + x_1}{2}$, $y = \frac{y_2 + y_2}{2}$;

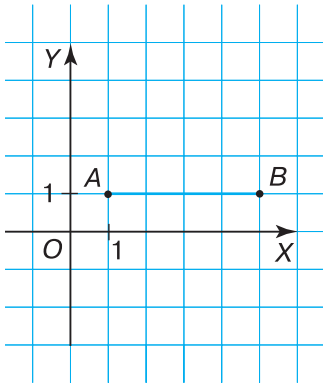
3) $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$?

Відповідь поясніть.

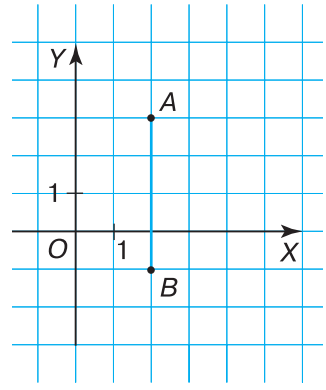
443'. Чи є правильним твердження:

1) ордината середини відрізка дорівнює півсумі координат його кінців;
2) абсциса середини відрізка дорівнює півсумі ординат його кінців;
3) абсциса середини відрізка дорівнює півсумі абсцис, а ордината — півсумі ординат кінців відрізка?

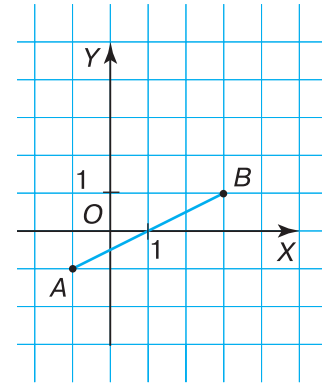
444'. Які координати мають кінці відрізка AB і його середина (мал. 155 — 157)?



Мал. 155



Мал. 156



Мал. 157

445°. Знайдіть координати середини відрізка з кінцями у точках:

1) $A(3; -1)$, $B(-1; 1)$;
2) $A(5; 4)$, $B(2; 1)$;
3) $A(5; 7)$, $B(11; 17)$.

446°. З'ясуйте, чи є точка M серединою відрізка HP, якщо:

1) $M(3; 3)$, $H(1; -1)$, $P(4; 5)$;
2) $M(-2; -3)$, $H(3; 0)$, $P(-1; -2)$;
3) $M(7; 9)$, $H(12; 13)$, $P(2; 5)$.

447°. Точка O є серединою відрізка AB. За координатами двох даних точок знайдіть координати третьої точки. Заповніть таблицю 18.

Таблиця 18

Точка A	$(1; 4)$	$(4; -6)$		$(5; -2)$	$(3; 7)$	
Точка O	$(-2; -1)$		$(-6; 8)$		$(-4; 0)$	$(-1; 4)$
Точка B		$(-4; 6)$	$(3; -3)$	$(2; 0)$		$(1; -4)$

448°. Знайдіть координати середин сторін трикутника ABC, якщо:
1) $A(-3; 3)$, $B(6; 6)$, $C(3; -3)$; 2) $A(2; -3)$, $B(3; 0)$, $C(-1; -2)$;
3) $A(-1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(2; -3)$.
Яка довжина медіани BM даного трикутника?

449°. Побудуйте паралелограм з вершинами у даних точках:
1) $A(-4; 1)$, $B(0; 5)$, $C(3; 0)$, $D(-1; -4)$;
2) $A(-2; 4)$, $B(-6; 12)$, $C(-2; 16)$, $D(2; 8)$;
3) $A(1; -2)$, $B(2; 1)$, $C(4; -1)$, $D(-1; 0)$.
Які координати має точка перетину діагоналей паралелограма?

450°. Пряма a проходить через центр кола і перетинає його в точках A і B. Знайдіть координати центра кола, якщо:
1) $A(-5; 2)$, $B(1; -4)$; 2) $A(5; -2)$, $B(-1; 4)$; 3) $A(5; 2)$, $B(-1; -4)$.

451. Точки P, Q і T ділять відрізок AB на чотири рівні частини. Знайдіть координати цих точок, якщо:
1) $A(-5; 2)$, $B(-3; -6)$; 2) $A(1; 3)$, $B(9; -7)$.

452. Знайдіть довжини медіан трикутника з вершинами у точках:
1) $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(-3; 1)$; 2) $K(0; 0)$, $L(6; 4)$, $M(10; 26)$.

453. **Координати точки перетину діагоналей паралелограма дорівнюють середнім арифметичним відповідних координат вершин паралелограма.** Доведіть.

454. Знайдіть координати точки перетину діагоналей і четвертої вершини паралелограма $ABCD$, якщо відомі координати трьох його вершин:
1) $A(-2; -3)$, $B(3; 1)$, $C(-1; 2)$; 2) $A(-2; 4)$, $B(-6; 12)$, $D(2; 8)$.

455. Яку довжину має середня лінія трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) з вершинами у точках:
1) $A(-5; 0)$, $B(0; 5)$, $C(3; 0)$, $D(-1; -4)$;
2) $A(1; -4)$, $B(-1; -2)$, $C(2; 1)$, $D(5; -2)$?

456. Знайдіть координати центра кола, описаного навколо трикутника з вершинами у точках:
1) $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(5; -1)$; 2) $A(-1; 6)$, $B(-5; 3)$, $D(-2; -1)$.

457*. Середини сторін трикутника ABC містяться в точках:
1) $A_1(0; 0)$, $B_1(2; 0)$, $C_1(-1; 3)$; 2) $A_1(1; 2)$, $B_1(8; 26)$, $C_1(19; 26)$;
3) $A_1(-2; -1)$, $B_1(0; 1)$, $C_1(0; -3)$; 4) $A_1(3; 4)$, $B_1(2; -1)$, $C_1(0; 2)$.
Які координати мають вершини трикутника?

458*. Доведіть, що сума абсцис (ординат) середин сторін трикутника дорівнює сумі абсцис (ординат) його вершин.

459*. Чи можна однозначно задати прямокутник координатами двох його вершин і точки перетину діагоналей, якщо дані вершини є:
1) протилежними; 2) суміжними? Відповідь обґрунтуйте.

460*. Якщо протилежні вершини чотирикутника мають координати, такі що сума абсцис і сума ординат однієї пари вершин дорівнює відповідним сумам другої пари вершин, то такий чотирикутник — паралелограм. Доведіть.

461*. Середини бічних сторін трапеції мають рівні ординати (абсциси). Чи паралельні її основи осі абсцис (ординат)? Відповідь поясніть.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

462. На папері у клітинку дано відрізок з кінцями у вузлах сітки. Чи завжди його середина буде міститися у вузлі сітки?

463. Як треба розмістити відрізок з кінцями у вузлах сітки, щоб можна було знайти його середину, не виконуючи вимірювань і додаткових побудов?

464. Вершини трикутника містяться у вузлах сітки. Проведіть його медіани, не виконуючи вимірювань. Чи завжди точка перетину медіан буде міститися у вузлі сітки? Відповідь поясніть.

465. Два туристи, які знаходяться на відстані 100 м один від одного, одночасно почули вигук керівника групи. На якій найменшій відстані від кожного з них міг перебувати керівник у момент вигуку, якщо точно посередині між туристами стоїть дерево, яке в обхваті має 2,5 м?

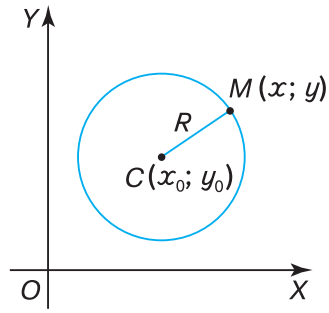
§14. ПОНЯТТЯ РІВНЯННЯ ФІГУРИ. РІВНЯННЯ КОЛА

Рівняння з двома змінними x і y називається *рівнянням фігури*, якщо виконуються дві умови: 1) координати будь-якої точки фігури задовольняють рівняння; 2) будь-які два числа, що задовольняють це рівняння, є координатами деякої точки фігури.

Теорема (про рівняння кола).
Коло з центром $C(x_0; y_0)$ і радіусом R задається рівнянням: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Дано: XOY — прямокутна декартова система координат (мал. 158), коло з центром $C(x_0; y_0)$ і радіусом R.

Довести: дане коло задається рівнянням $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.



Мал. 158

Доведення. Візьмемо довільну точку $M(x; y)$ на колі. За означенням кола, $CM = R$ або $CM^2 = R^2$. Виразивши відстань CM через координати точок C і M, дістанемо:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Оскільки точка M — довільна точка кола, то можна стверджувати, що координати будь-якої точки кола задовольняють рівняння (1).

Навпаки, нехай координати деякої точки $M_1(x_1; y_1)$ задовольняють рівняння (1). Тоді справджується рівність $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2$ або $R = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$. Остання рівність показує, що точка $M_1(x_1; y_1)$ віддалена від центра кола — точки $C(x_0; y_0)$ на відстань R, тобто точка $M_1(x_1; y_1)$ належить цьому колу.

Щоб встановити, що у даній системі координат фігура F задається певним рівнянням, треба довести два взаємно обернені твердження: 1) якщо точка належить фігурі F, то її координати задовольняють рівняння фігури F; 2) якщо координати деякої точки задовольняють рівняння фігури F, то ця точка належить фігурі F.

Наслідок. **Якщо центр кола міститься у початку координат, то рівняння кола має вигляд: $x^2 + y^2 = R^2$.**

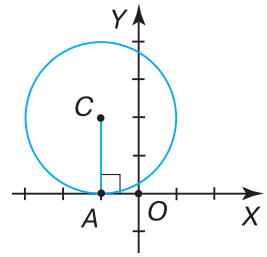
Справді, початок координат O має координати $(0; 0)$, тому $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ і рівняння (1) набуває вигляду: $x^2 + y^2 = R^2$.

Відомості про особливості рівняння кола наведено у таблиці 19.

Таблиця 19

Радіус кола	Центр кола	Рівняння кола
R	$C(x_0; y_0)$	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
	$C(0; 0)$	$x^2 + y^2 = R^2$

Задача. Коло, яке задано рівнянням $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = R^2$, дотикається до осі OX. Який радіус у даного кола?



Мал. 159

Розв'язання. Нехай C — центр кола. За рівнянням кола визначимо координати його центра: $C(-1; 2)$. За властивістю дотичної до кола, радіус, проведений в точку дотику, перпендикулярний до цієї дотичної.

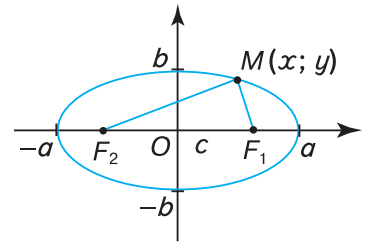
Тому перпендикуляр CA до осі OX є радіусом даного кола (мал. 159). Оскільки $CA \parallel OY$, то довжина перпендикуляра CA дорівнює ординаті центра кола C. Тому $R = 2$.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Ви вже знаєте, що коло є геометричним місцем точок, рівновіддалених від заданої точки. Раніше ви дізналися, що коло є окремим випадком еліпса.

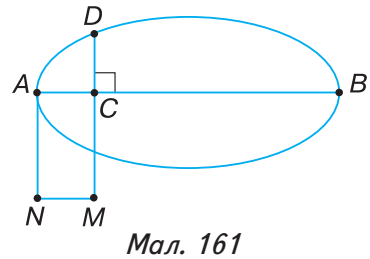
Еліпс визначають як геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок (фокусів еліпса F_1 і F_2) є сталою і дорівнює $2a$, де $2a > F_1F_2 = 2c$ (мал. 160).

Канонічне (найпростіше) *рівняння еліпса*: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Числа a і b є довжинами півосей еліпса (мал. 160). Якщо $a = b$, то еліпс є колом. Справді, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, звідки $x^2 + y^2 = a^2$. Отримали рівняння кола з центром у початку координат і радіусом $R = a$.



Мал. 160

2. Стародавні греки для обчислення площі еліпса використовували складні розрахунки. Вони досліджували площу квадрата, побудованого на відрізку CD (його довжина залежить від положення точки C на відрізку AO, де O — середина AB). Площу квадрата порівнювали з площею прямокутника $ACMN$ (мал. 161): $CD^2 = AN \cdot AC - \frac{AN}{AB} \cdot AC^2$.



Мал. 161

Оскільки в обчисленнях для еліпса площа прямокутника $ACMN$ використовується з недостачею (у формулі для CD^2 другий доданок береться зі знаком «−»), то еліпс так і назвали ελλειψις, що у перекладі з грецької означає «недостача». Цікавим є те, що назви гіперболи і параболи мають таке саме походження: ιπερβολη — перевищення, надлишок (у формулі для CD^2 другий доданок береться зі знаком «+»); παραβολη — зіставлення площ, порівняння (у формулі для CD^2 другий доданок дорівнює нулю).

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Поясніть, що таке рівняння фігури.
2. Як встановити, що фігура у даній системі координат задається певним рівнянням?
3. Яким рівнянням задається коло у прямокутній декартовій системі координат?
4. Виведіть рівняння кола.
5. Яким є рівняння кола з центром у початку координат?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

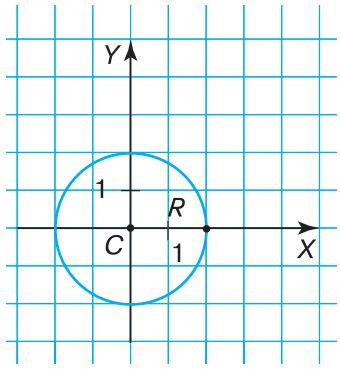
466'. За даними на малюнках 162 — 164 визначте координати центра C і радіус R кола.

467'. Побудуйте коло з даним центром C і радіусом R:
1) $C(-1; 1)$, $R = 3$; 2) $C(2; -1)$, $R = 1$; 3) $C(-2; -3)$, $R = 4$.

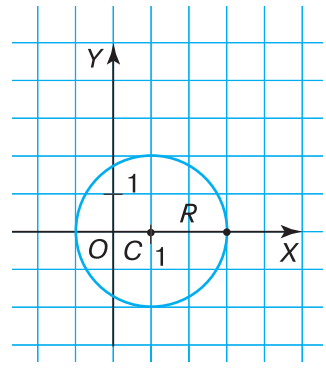
468'. Визначте координати центра і радіус кола, заданого рівнянням:
1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$; 2) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 3$;
3) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 5$; 4) $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 25$;
5) $x^2 + (y-3)^2 = 2$; 6) $(x+1)^2 + y^2 = 49$.

469°. Чи лежать дані точки $A(-1; 2)$, $B(2; -3)$, $C(-6; -4)$, $D(-5; 0)$ на колі:
1) $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$; 2) $x^2 + (y-3)^2 = 2$; 3) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 36$?

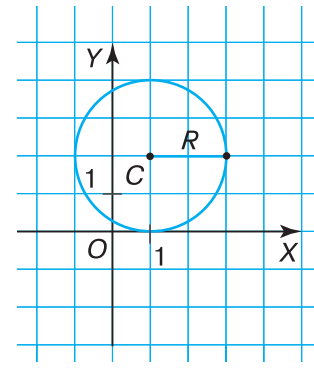
470°. Складіть рівняння кола з радіусом R і центром у точці C:
1) $R = 5$, $C(2; 1)$; 2) $R = \sqrt{5}$, $C(-2; -1)$; 3) $R = 4$, $C(2; -2)$.



Мал. 162



Мал. 163



Мал. 164

471°. Заповніть таблицю 20.

Таблиця 20

Координати кінців діаметра кола	Координати центра кола	Радіус кола	Рівняння кола
(5; − 1) і (− 5; − 1)			
(6; 0) і (0; 8)			
(6; 8) і (0; 0)			
(− 6; 0) і (2; − 8)			
(− 1; 6) і (7; − 2)			

472°. Коло проходить через точки A і B, а його центр лежить на прямій AB. Складіть рівняння кола, якщо:
1) $A(-5; 2)$, $B(1; -4)$; 2) $A(5; -2)$, $B(-1; 4)$; 3) $A(5; 2)$, $B(-1; -4)$.

473°. Коло дотикається до осі абсцис, а його центр має координати:
1) (2; − 1); 2) (− 3; 2); 3) (4; 5).
Чи перетинає дане коло вісь ординат? Відповідь поясніть.

474°. Коло з центром в точці C перетинає вісь ординат у точці A. Складіть рівняння кола, якщо:
1) $C(2; 3)$, $A(0; 4)$; 2) $C(-3; -2)$, $A(0; 2)$; 3) $C(-4; 2)$, $A(0; 5)$.

475°. Коло з центром в точці C перетинає вісь абсцис у точці B. Складіть рівняння кола, якщо:
1) $C(3; 2)$, $B(4; 0)$; 2) $C(-2; -3)$, $B(2; 0)$; 3) $C(2; -4)$, $B(5; 0)$.

476. Коло з центром у точці (− 2; 3) проходить через точку з координатами:
1) (0; 3); 2) (− 2; 4).
Чи проходить дане коло через точки $A(-4; 3)$, $B(-2; 4)$, $C(1; 3)$?

477. Складіть рівняння кола з центром на прямій $y = 4$, що дотикається до осі абсцис у точці: 1) (− 1; 0); 2) (2; 0).

478. Поясніть, чому прямі $x = -5$ і $y = 5$ не перетинають коло:
1) $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 25$; 2) $x^2 + (y - 2)^2 = 16$.

479. Відстань від центра кола, заданого рівнянням $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$, до прямої a дорівнює: 1) 1; 2) 3.
Що можна сказати про взаємне розміщення прямої і кола?

480. Коло з діаметром AB задано рівнянням $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Знайдіть координати точки B, якщо: 1) $A(2; 2)$; 2) $A(-2; 6)$.

481. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(2; 3)$ і $B(-2; 3)$, якщо його радіус дорівнює: 1) $2\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{13}$.

482. Дано коло $x^2 + y^2 = 25$ і дві точки:
1) $A(3; 4)$ і $B(4; -3)$; 2) $A(2\sqrt{5}; -\sqrt{5})$ і $B(-1; 2\sqrt{6})$.
Доведіть, що AB — хорда даного кола.

483. Складіть рівняння геометричного місця точок, віддалених на 5 одиниць від центра кола: 1) $(x-1)^2+(y+2)^2=9$; 2) $(x+3)^2+(y+1)^2=36$.

484. Складіть рівняння кола, що дотикається до осей координат і прямої: 1) $x=2$; 2) $y=5$.

485. Складіть рівняння кола, що проходить через точку (3; 3) і дотикається до осі абсцис та прямої: 1) $x=-3$; 2) $y=6$.

486*. Складіть рівняння кола, що проходить через початок координат і точки: 1) (8; 0) і (0; 6); 2) (0; 16) і (12; 0).

487*. Складіть рівняння кола, що проходить через точки: 1) (4; 0), (0; 2), (4; 2); 2) (− 1; 5), (− 2; − 2), (5; 5).

488*. Будь-яка пряма, що проходить через центр кола, перетинає його у двох точках. Доведіть.

489*. Визначте довжини хорд кола з кінцями на осях координат, якщо коло задано рівнянням: 1) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$.

490*. Яким рівнянням задається коло, описане навколо прямокутника з вершинами в точках: 1) (0; 0), (24; 0), (24; 10), (0; 10); 2) (0; 5), (8; 5), (8; − 2), (0; − 2)?

491*. У коло $x^2+y^2=16$ вписано правильний трикутник. Знайдіть координати його вершин, якщо одна з них лежить у точці: 1) (0; 4); 2) (− 4; 0).

492*. Знайдіть радіус і центр кола:
1) $x^2+8x+y^2-10y-41=0$; 2) $x^2-10x+y^2+6y=0$;
3) $x^2-4x+y^2+4y=16$; 4) $y^2=(x-2)(6-x)$.

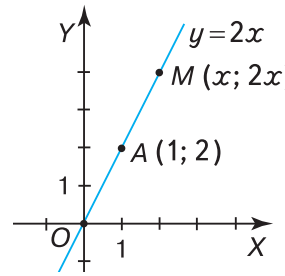
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

493. Доведіть, що коло з центром у вузлі сітки і радіусом 5 клітинок проходить через 12 вузлів сітки.

494. Через яку кількість вузлів сітки проходить коло, центр якого міститься у її вузлі, а радіус дорівнює 25 клітинкам?

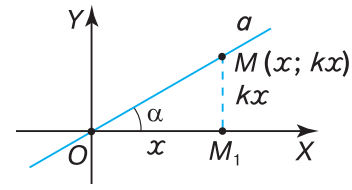
495. Де треба на подвір'ї розмістити ліхтар, щоб хвіртка, колодязь і вхід до будинку освітлювались однаково?

§15. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ



Мал. 165

З курсу алгебри ви знаєте, що графіком функції $y = 2x$ є пряма (мал. 165). Координати кожної точки цієї прямої, наприклад $O\,(0;\,0)$ і $A\,(1;\,2)$, задовольняють її рівняння. І навпаки, яку б точку M з координатами $(x;\,2x)$ ми не взяли, вона лежатиме на даній прямій. Це означає, що дана пряма задається рівнянням $y = 2x$.

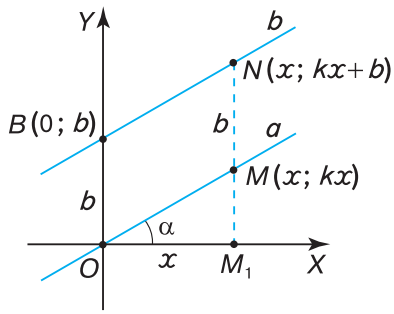


Мал. 166

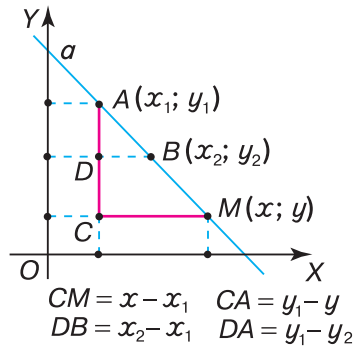
Узагалі, **пряма, що проходить через початок координат** (мал. 166), **задається рівнянням** $\boldsymbol{y = kx}$. Коефіцієнт k у цьому рівнянні називається *кутовим коефіцієнтом прямої*. Він дорівнює тангенсу кута між даною прямою і додатною піввіссю OX. На малюнку 166 ви бачите, що пряма a нахилена до додатної півосі OX під кутом α. З прямокутного трикутника OM_1M ($\angle M_1 = 90^\circ$) дістаємо: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{MM_1}{OM_1} = \dfrac{kx}{x} = k$.

? Як задати пряму, що не проходить через початок координат і має кутовий коефіцієнт k? Дослідимо це.

Нехай пряма b (мал. 167) перетинає вісь OY у точці $B\,(0;\,b)$ і має кутовий коефіцієнт k. Візьмемо на прямій b довільну точку N з абсцисою x та визначимо її ординату y. Для цього через початок координат проведемо пряму $a \parallel b$. Вона має той самий кутовий коефіцієнт k, тому задається рівнянням $y = kx$. Нехай пряма, що проходить через точку N паралельно осі OY, перетинає пряму a в точці M, а вісь OX – у точці M_1. Тоді одержимо: $MM_1 = kx$ (бо $M \in a$), $NM = OB = b$ (бо чотирикутник $NMOB$ – паралелограм за означенням), $NM_1 = kx + b$. Отже, ордината точки N виражається через її абсцису так: $y = kx + b$. Оскільки точка N – довільна точка прямої b, то можна



Мал. 167



Мал. 168

стверджувати, що координати будь-якої точки цієї прямої задовольняють рівняння $y = kx + b$. Обернене твердження доведіть самостійно.

Рівняння $\boldsymbol{y = kx + b}$ називають *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*.

? Як задати пряму, що проходить через дві точки? Дослідимо це.

Нехай точки A і B містяться у першій координатній чверті, причому $x_1 < x_2$ і $y_1 > y_2$ (мал. 168). Через ці точки проведемо пряму a і позначимо на ній довільну точку $M(x; y)$. Через точки A, B і M проведемо прямі, паралельні осі OX, через точку A – пряму, паралельну осі OY. Точки їх перетину позначимо C і D. Отримали два подібних трикутники ACM і ADB (у них кут A спільний і $CM \parallel DB$). З подібності трикутників випливає: $\frac{CM}{DB} = \frac{CA}{DA}$. Виразимо довжини цих відрізків: $CM = x - x_1$, $DB = x_2 - x_1$, $CA = y_1 - y$, $DA = y_1 - y_2$. Підставивши їх у пропорцію, отримаємо рівність: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2}$ або $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Оскільки точка M – довільна точка прямої a, то можна стверджувати, що координати будь-якої точки цієї прямої задовольняють рівняння $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Обернене твердження доведіть самостійно. Інші випадки розміщення точок A і B розгляньте самостійно.

Рівняння $\boldsymbol{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$ називають *рівнянням прямої, що проходить через дві точки*.

Отримане рівняння можна звести до вигляду:

$(y_2 - y_1)\,x + (x_1 - x_2)\,y + (y_1x_2 - x_1y_2) = 0$.

Позначивши $y_2 - y_1 = a$, $x_1 - x_2 = b$, $y_1x_2 - x_1y_2 = c$, одержимо *загальне рівняння прямої*: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$.

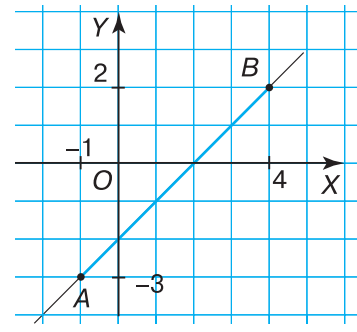
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

У вас могло виникнути запитання: *Як аналітично задати відрізок? Трикутник? Квадрат?* Розглянемо приклади.

Нехай треба задати відрізок AB прямої $y = x - 2$ (мал. 169). Зрозуміло, що координати кожної точки відрізка AB задовольняють рівняння даної прямої. Але не кожна точка цієї прямої належить відрізку AB. Кінці відрізка мають координати: $A(-1; -3)$, $B(4; 2)$. Тому абсциси точок відрізка набувають значень від -1 до 4, а ординати – від -3 до 2.

Отже, даний відрізок AB задається системою:

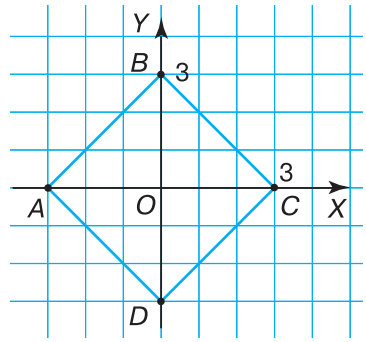
$$\begin{cases} y = x - 2, \\ -1 \leqslant x \leqslant 4, \\ -3 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$



Мал. 169

Трикутник і квадрат можна аналітично задати, відповідно, трьома і чотирма системами, що визначають їх сторони.

Особливим рівнянням задається квадрат, у якого вершини лежать на осях координат: $|x| + |y| = a$, де a — половина довжини діагоналі квадрата (дослідіть це самостійно). На малюнку 170 ви бачите квадрат $ABCD$, рівняння якого $|x| + |y| = 3$.



Мал. 170

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Яким рівнянням задається пряма, що проходить через початок координат?
2. Що таке кутовий коефіцієнт прямої?
3. Запишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
4. Який геометричний зміст вільного члена b у рівнянні прямої $y = kx + b$?
5. Яким є рівняння прямої, що проходить через дві точки?
6. Який вигляд має загальне рівняння прямої?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

496'. Назвіть кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої:

1) $y = 3x$; 2) $y = -3x$; 3) $y = x$; 4) $y = -2x$; 5) $y = -\sqrt{3}\,x$; 6) $y = \sqrt{2}\,x$.

497'. На якому з малюнків 171 — 173 зображено пряму:

1) $y = x - 2$; 2) $y = 3x - 1$; 3) $y = -2x + 1$?

Який відрізок на осі ординат відтинає задана пряма?

Який у неї кутовий коефіцієнт?

498'. Назвіть координати точок A і B (мал. 174 —176). Яким з наведених рівнянь (1 — 3) задається пряма AB:

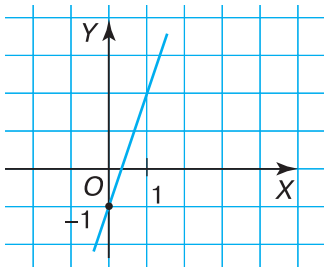
1) $\frac{x+2}{2+2} = \frac{y+1}{3+1}$; 2) $\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-2}{-2-2}$; 3) $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{2-1}$?

499°. Яке рівняння:

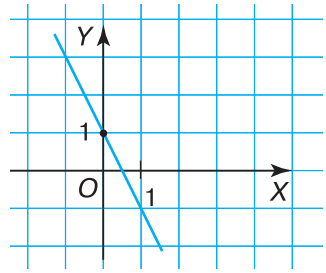
1) осі абсцис; 2) осі ординат;

3) бісектриси першого і третього координатних кутів;

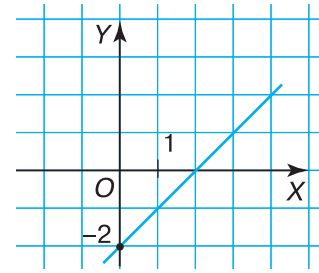
4) бісектриси другого і четвертого координатних кутів?



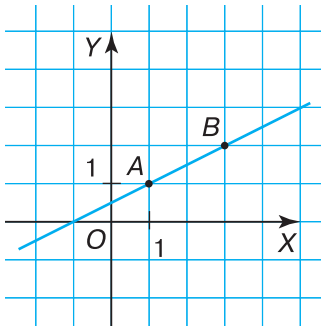
Мал. 171



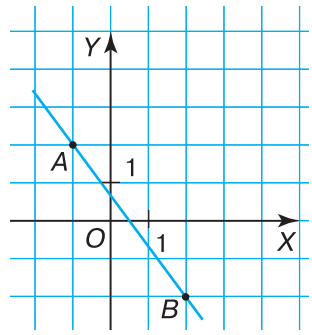
Мал. 172



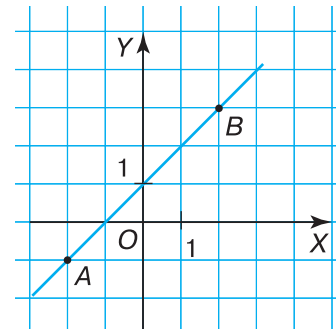
Мал. 173



Мал. 174



Мал. 175



Мал. 176

500°. Запишіть координати точок A, B і C, що лежать на:
1) осі абсцис; 2) осі ординат;
3) бісектрисі першого і третього координатних кутів;
4) бісектрисі другого і четвертого координатних кутів.

501°. Складіть рівняння прямих a і b, що проходять через точку A паралельно вказаній осі координат. Заповніть таблицю 21 за зразком, наведеним у другому стовпчику.

Таблиця 21

	$A(1; 2)$	$A(-1; 2)$	$A(-1; -2)$	$A(4; 2)$	$A(-4; 2)$	$A(4; -2)$
$a \parallel OX$	$y = 2$					
$b \parallel OY$	$x = 1$					

502°. Побудуйте прямокутник, сторони якого лежать на прямих:
1) $x = 2$, $x = 5$, $y = -2$, $y = 1$; 2) $x = -2$, $x = 6$, $y = 7$, $y = -1$;
3) $x = -9$, $x = 4$, $y = 2$, $y = 8$.
Знайдіть периметр і площу даного прямокутника.

503°. Складіть рівняння прямої, що проходить через точки:
1) $(-1; 2)$ і $(2; -1)$; 2) $(-3; 1)$ і $(2; -2)$; 3) $(2; -4)$ і $(3; -1)$.

504°. Запишіть рівняння прямих, що містять сторони трикутника з вершинами у точках:
1) $A(2; -3)$, $B(-2; 3)$ і $C(6; -3)$; 2) $A(1; -2)$, $B(-1; 2)$ і $C(5; 10)$;
3) $A(-3; 5)$, $B(1; -3)$ і $C(2; 0)$.

505°. Чи лежать на одній прямій точки A, B і C, якщо:
1) $A(-3; 2)$, $B(2; 2)$, $C(2; 14)$; 2) $A(1; -2)$, $B(5; -8)$, $C(3; -5)$;
3) $A(4; 2)$, $B(0; -6)$, $C(-4; -2)$?

506°. Запишіть координати двох точок, через які проведено пряму:
1) $\frac{x-4}{2-4} = \frac{y-1}{3-1}$; 2) $\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y+3}{2+3}$; 3) $\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-2}{-4-2}$.
Побудуйте дану пряму.

507°. Зведіть дане рівняння прямої до іншого вигляду:
1) $6x - 2y + 3 = 0$; 2) $y = -2x - 1$; 3) $y = \frac{1}{2}x - 4$.

508°. Знайдіть точку перетину прямих, заданих рівняннями:
1) $4x - 2y - 3 = 0$ і $3x + 2y - 9 = 0$; 2) $3x - y - 5 = 0$ і $3x + 4y + 7 = 0$;
3) $5x - 7y - 3 = 0$ і $x - y + 5 = 0$.

509. Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і нахилена до осі абсцис під кутом: 1) 45°; 2) 30°.

510. Доведіть, що прямі $y = kx$ і $y = kx + b$ паралельні.

511. **Якщо дві прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні, і навпаки.** Доведіть.

512. Яким рівнянням задається пряма, що відтинає на осі ординат відрізок 5 од. і проходить паралельно прямій: 1) $y = 5x + 2$; 2) $y = -x - 15$?

513. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $(-2; 1)$ і утворює з віссю абсцис кут: 1) 45°; 2) 60°.

514. Складіть рівняння прямих, що містять середні лінії трикутника ABC, якщо:
1) $A(2; -3)$, $B(-2; 3)$, $C(6; -3)$; 2) $A(1; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(5; 10)$.

515. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо:
1) $A(-2; -3)$, $B(3; 1)$, $C(-1; 2)$; 2) $A(2; 3)$, $B(-3; -1)$, $C(4; 2)$.

516. **Складіть рівняння сторін квадрата, якщо сторона дорівнює a, а його діагоналі лежать на осях координат.**

517. Складіть рівняння сторін рівнобедреного трикутника ABC, у якого:
1) $A(-1; 2)$, $B(3; 2)$, $\angle BAC = \angle ABC = 45°$; 2) $A(-2; -3)$, $B(6; -3)$, $\angle ACB = 120°$.

518. Які кути утворює з осями координат пряма:
1) $3x - 3y + 1 = 0$; 2) $2x + 2y - 5 = 0$?

519. Знайдіть довжину відрізка AB, який відтинають осі координат від прямої:
1) $5x - 12y + 3 = 0$; 2) $4x + 3y - 6 = 0$; 3) $4x - 2y - 3 = 0$.

520. Яку площу має трикутник, сторони якого лежать на осях координат і прямій:
1) $3x + y - 2 = 0$; 2) $5x - 12y + 24 = 0$?

521*. Доведіть, що прямі $3x + 4y - 2 = 0$ і $3x + 4y - 3 - m^2 = 0$ не мають спільних точок.

522*. **Дві прямі взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли добуток їх кутових коефіцієнтів дорівнює -1.** Доведіть.

523*. Вершини трикутника мають координати $A(0; 13)$, $B(2; -1)$, $C(10; 3)$. Доведіть, що його медіани, проведені з вершин B і C, взаємно перпендикулярні.

524*. Яка умова перпендикулярності відрізків AB і CD, якщо відомі координати їх кінців: $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$, $D(d_1; d_2)$?

525*. Складіть рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох даних точок: 1) $(0; 0)$ і $(a_1; a_2)$; 2) $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$.

526*. Які рівняння мають дотичні до кола $x^2 + y^2 = R^2$, що паралельні осі:
1) абсцис; 2) ординат?

527*. Складіть рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = R^2$ у точці $M(x_0; y_0)$.

528*. Пряма a, яку задано рівнянням $4x + 3y - 6 = 0$, перетинає пряму b, паралельну осі ординат, у точці $M(-1{,}5; 4)$. Знайдіть периметр трикутника, сторони якого лежать на прямих a, b і осі абсцис.

529*. На якій відстані від початку координат проходить пряма:
1) $y = kx + b$; 2) $ax + by + c = 0$?

530*. Як знайти відстань від точки $M(x_0; y_0)$ до прямої, заданої рівнянням:
1) $y = kx + b$; 2) $ax + by + c = 0$?

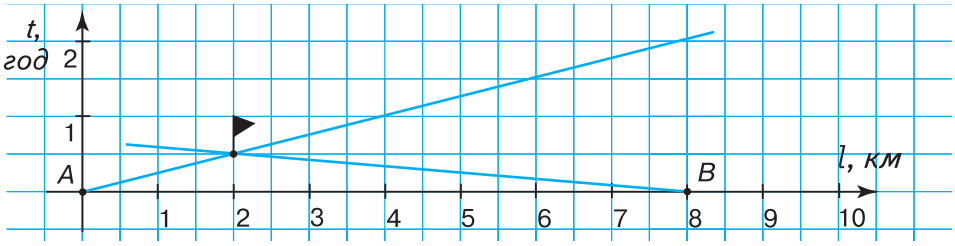
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

531. Через заданий вузол сітки проведіть пряму, яка паралельна даній прямій і проходить через два даних вузли сітки.

532. Як через даний вузол сітки провести прямі з кутовими коефіцієнтами $\frac{1}{2}$ і $\frac{2}{3}$ відносно горизонтальної лінії сітки? А відносно вертикальної?

533. Яка лінія є графіком рівномірного руху, що визначається рівнянням $s = s_0 + vt$?

534. Населені пункти A і B знаходяться на відстані 8 км один від одного. З пункту A вийшов пішохід зі швидкістю 4 км/год, а назустріч йому з пункту B виїхав велосипедист зі швидкістю 12 км/год. Поясніть за малюнком 177, як дізнатися про те, який час до зустрічі були в дорозі пішохід і велосипедист та на якій відстані від пункту A вони зустрілися.

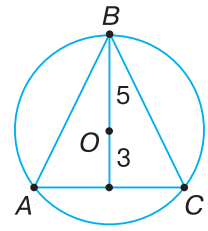


Мал. 177

§16. МЕТОД КООРДИНАТ

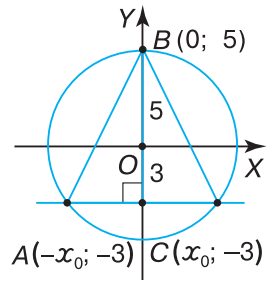
Ви вже знаєте, що властивості геометричних фігур можна досліджувати засобами алгебри. Метод, який при цьому застосовують, називається *методом координат*. У попередніх параграфах ви розв'язували методом координат такі дві задачі: 1) знаючи геометричні властивості фігури, знаходили її рівняння; 2) знаючи рівняння фігури, знаходили її властивості. На практиці нерідко виникає потреба розв'язати обидві задачі разом – спочатку за деякими властивостями фігури скласти її рівняння, а потім, дослідивши отримане рівняння, встановити нові властивості даної фігури.

Задача. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, вписаного в коло радіуса 5 см, якщо центр цього кола віддалений від основи трикутника на 3 см.



Мал. 178

Розв'язання. Нехай ABC — даний рівнобедрений трикутник з основою AC (мал. 178), точка O — центр описаного кола. Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок лежав у центрі кола, вісь OY містила висоту, проведену до основи AC трикутника, а вісь OX проходила паралельно цій основі (мал. 179). Тоді дане коло задається рівнянням $x^2 + y^2 = 25$, а вершини трикутника мають координати: $A(-x_0; -3)$, $B(0; 5)$, $C(x_0; -3)$, де $x_0 > 0$. Точка C лежить на даному колі, тому її координати задовольняють його рівняння: $x_0^2 + (-3)^2 = 25$. Звідси дістанемо: $x_0 = 4$, $A(-4; -3)$, $C(4; -3)$.



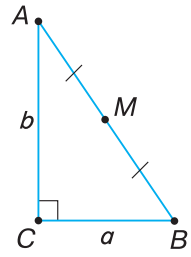
Мал. 179

За координатами вершин трикутника знайдемо довжини його сторін: $AB = BC = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}$ (см), $AC = 8$ см.

Щоб застосувати метод координат: 1) накресліть задану фігуру та введіть прямокутну декартову систему координат (для цього вкажіть розміщення початку координат та осей абсцис і ординат відносно даної фігури); 2) визначте координати точок даної фігури; 3) скористайтеся відомими формулами.

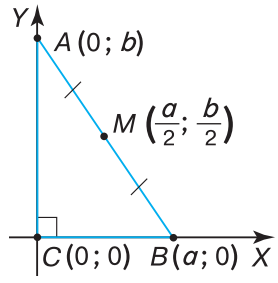
Застосування методу координат дозволяє спростити доведення властивостей фігури. Розглянемо приклад.

Задача. Доведіть, що середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від його вершин.



Мал. 180

Розв'язання. Нехай ABC — даний прямокутний трикутник з прямим кутом C (мал. 180). Позначимо довжини його катетів малими літерами a і b, а середину гіпотенузи — M. Введемо прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок містився у вершині C трикутника, а його катети лежали на осях координат (мал. 181). Тоді вершини трикутника матимуть координати: $C(0; 0)$, $B(a; 0)$, $A(0; b)$. Точка M є серединою гіпотенузи AB, тому вона має координати: $M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$. Знайдемо довжини відрізків MC, MA і MB:



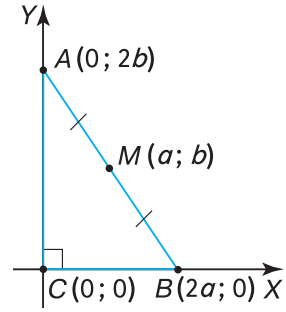
Мал. 181

$$MC = \sqrt{\left(0-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}},$$

$$MA = \sqrt{\left(0-\frac{a}{2}\right)^2+\left(b-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}},$$

$$MB = \sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(0-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}.$$

З отриманих рівностей випливає, що $MC = MA = MB$. Отже, точка M — рівновіддалена від вершин $\triangle ABC$.



Мал. 182

? Чи можна у розглянутій задачі отримати простіші вирази для довжин відрізків? Так, якщо довжини катетів $\triangle ABC$ позначити відповідно $2a$ і $2b$ (мал. 182).

Якщо у розв'язуванні задачі треба використати координати середин відрізків, то можна застосувати прийом подвоєння числових значень довжин відрізків.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

П'єр Ферма

1. Метод координат встановлює зв'язки між алгеброю і геометрією, надає допомогу і тій, і другій науці. Його основоположниками вважають французьких учених — Рене Декарта (1596 — 1650) і П'єра Ферма (1601 — 1655), які працювали незалежно один від одного. Однак наукові роботи П. Ферма стали широко відомими лише після смерті вченого, коли у 1669 р. його син опублікував збірник «Різні твори». П. Ферма вивів рівняння прямої, а також еліпса, гіперболи, параболи та інших ліній, що задаються рівняннями другого степеня.

2. Знаючи координати вершин трикутника $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$, можна знайти його площу. Для цього використовують такі формули.

У прямокутній декартовій системі координат:

$$S = \left|\frac{1}{2}(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2))\right|.$$

У косокутній системі координат з рівнозначними шкалами і кутом φ між осями:

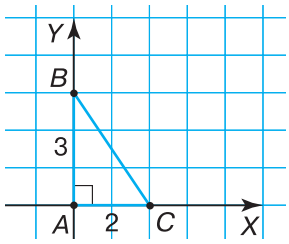
$$S = \left|\frac{\sin\varphi}{2}(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2))\right|.$$

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

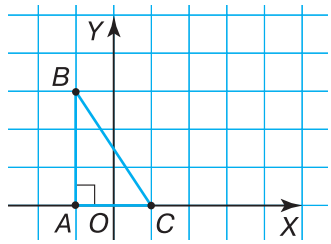
1. Що таке метод координат?
2. Які задачі розв'язують методом координат?
3. Поясніть, як застосувати метод координат.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

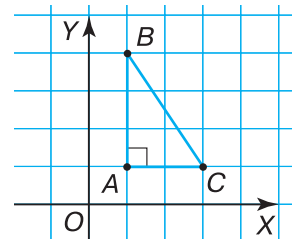
535'. Відносно прямокутного трикутника ABC з катетами 2 і 3 введено систему координат так, як показано на малюнках 183 — 185. Які координати мають вершини трикутника?



Мал. 183



Мал. 184



Мал. 185

536'. Чи правильно визначено координати вершин рівнобедреного трикутника ABC у введеній відносно нього системі координат:

1) $A(-2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$ (мал. 186);
2) $A(-2; -1)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$ (мал. 187);
3) $A(-2; 3)$, $B(0; 0)$, $C(2; 3)$ (мал. 188)?

537'. На малюнках 189 – 191 зображено чотирикутник $ABCD$. Введіть систему координат так, щоб у ній вершини чотирикутника мали координати:

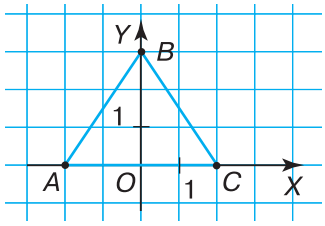
1) $A(0; 0)$, $B(0; 4)$, $C(4; 4)$, $D(4; 0)$ (мал. 189);
2) $A(-2; 0)$, $B(-2; 2)$, $C(3; 2)$, $D(3; 0)$ (мал. 190);
3) $A(-2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; 0)$, $D(-3; 0)$ (мал. 191).

538°. У $\triangle ABC$: $\angle A = 90°$, $AB = 6$ см, $AC = 8$ см. Введіть прямокутну декартову систему координат так, як указано в таблиці 22, та заповніть її.

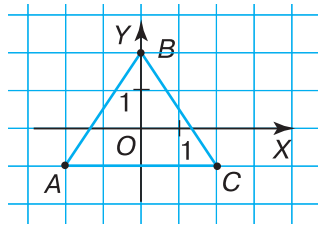
Таблиця 22

Початок координат в точці	Одиничний відрізок довжиною	Додатна піввісь координат		Координати вершин $\triangle ABC$		
		OX	OY			
		містить катет		A	B	C
A	1 см	AB	AC			
A	0,5 см	AB	AC			
A	2 см	AC	AB			

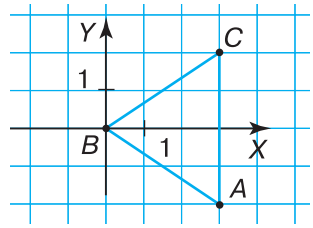
539°. Діагоналі квадрата $ABCD$ зі стороною 2 см перетинаються в точці M. Введіть прямокутну декартову систему координат з одиничним відрізком 1 см так, щоб початок координат лежав у вказаній точці, а на додатних півосях OX і OY лежали вказані відрізки: 1) A, AB, AD; 2) B, BC, AB; 3) M, CM, MD. Визначте координати вершин квадрата.



Мал. 186



Мал. 187



Мал. 188

540°. У прямокутному трикутнику ABC з катетами AB і BC знайдіть довжини медіан, якщо: 1) $AB = 3$, $BC = 4$; 2) $AB = 5$, $BC = 12$; 3) $AB = 7$, $BC = 24$.

541°. У рівнобедреному трикутнику ABC до основи AB проведено висоту CH. Знайдіть довжину медіани, проведеної до бічної сторони, якщо:

1) $AB = 12$, $CH = 4$; 2) $AB = 4$, $CH = 6$; 3) $AB = \frac{16}{3}$, $CH = 6$.

542°. Знайдіть відстань між серединами протилежних сторін ромба, якщо його діагоналі дорівнюють:

1) $AB = 6$, $BC = 8$; 2) $AB = 10$, $BC = 24$; 3) $AB = 14$, $BC = 48$.

543. Визначте координати вершин правильного шестикутника, якщо одна з координатних осей паралельна його стороні, а початок координат міститься:

1) в точці перетину діагоналей шестикутника; 2) у вершині шестикутника.

544. Якою залежністю пов'язані відповідні координати вершин двох квадратів, що мають спільну вершину в початку координат і одну спільну сторону?

545. Чи існують подібні трикутники з відповідно пропорційними координатами?

546. У прямокутному трикутнику ABC на гіпотенузі AB узято точку M так, що $AM = 4$ см. Знайдіть довжину відрізка CM, якщо $AC = 15$ см, $BC = 20$ см.

547. Точка M є серединою відрізка AB. Доведіть, що для будь-якої точки T площини справджується рівність: $TA^2 + TB^2 = 2\,TM^2 + 0{,}5\,AB^2$.

548. Відстань між точками A і B дорівнює 4. Знайдіть геометричне місце точок M площини, для яких: 1) $MA^2 + MB^2 = 24$; 2) $MA^2 - MB^2 = 4$.

549. Доведіть, що в прямокутнику сума квадратів діагоналей дорівнює подвоєній сумі квадратів його суміжних сторін.

550. Якщо чотирикутник $ABCD$ — прямокутник, то для будь-якої точки M площини справджується рівність: $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$. Доведіть.

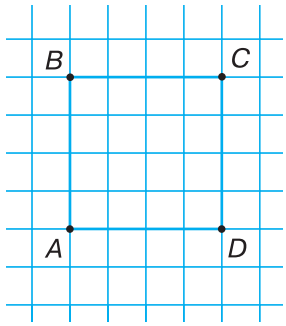
551. Точка M лежить усередині квадрата $ABCD$ на відстанях:

1) $MA = 7$, $MB = 13$, $MC = 17$; 2) $MA = 1$, $MB = \sqrt{5}$, $MC = 3$.

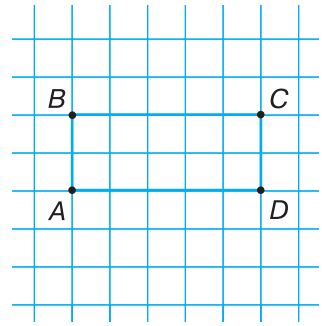
Знайдіть довжину сторони і діагоналі квадрата.

552. Центр кола радіуса R лежить у вершині прямого кута прямокутного трикутника з катетами a і b. Чи перетинає коло гіпотенузу даного трикутника, якщо:

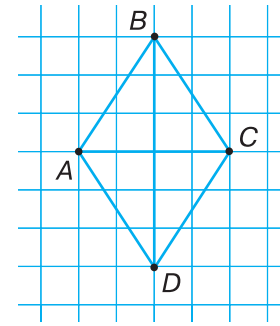
1) $a = 5$, $b = 12$, $R = 4$; 2) $a = 20$, $b = 15$, $R = 12$?



Мал. 189



Мал. 190



Мал. 191

553*. Доведіть, що сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює сумі половини квадрата третьої сторони трикутника і подвоєного квадрата медіани, проведеної до цієї сторони.

554*. Доведіть, що у паралелограмі сума квадратів сторін дорівнює сумі квадратів його діагоналей.

555*. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам і дорівнює піврізниці основ.

556*. Точка A лежить на відстані 6 см від центра O кола з радіусом 2 см. На прямій OA знайдіть таку точку M, щоб довжина дотичної, проведеної із цієї точки до кола, дорівнювала відстані між точками M і A.

557*. Доведіть, що сума квадратів відстаней від усіх вершин квадрата до прямої, що проходить через точку перетину його діагоналей, не залежить від вибору прямої.

558*. Квадрат описано навколо кола радіуса R. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до вершин квадрата дорівнює $12R^2$.

559*. Навколо правильного трикутника зі стороною a описано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до вершин трикутника дорівнює $2a^2$.

560*. Знайдіть геометричне місце точок, модуль різниці квадратів відстаней від яких до двох даних точок A і B дорівнює a^2, де a — заданий відрізок.

561*. Якщо координати вершин трикутника є парними числами, то його площа виражається натуральним числом. Доведіть.

562*. Якщо координати двох сусідніх вершин квадрата є цілими числами, то координати двох інших його вершин також є цілими числами. Доведіть.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

563. Якщо середини двох сторін трикутника та їх спільна вершина лежать у вузлах сітки, то середина третьої сторони також лежить у вузлі сітки. Доведіть.

564. Якщо дві сусідні вершини квадрата лежать у вузлах сітки, то дві інші його вершини також лежать у вузлах сітки. Доведіть.

565. Поясніть, як побудувати вершини квадрата у вузлах сітки, не будуючи його сторін. Розгляньте випадки, коли діагоналі квадрата:
1) лежать на лініях сітки; 2) не лежать на лініях сітки.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що таке прямокутна декартова система координат та як її ввести на площині.
2. Як визначають координати точки у заданій системі координат?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про відстань між двома точками із заданими координатами.
4. За якими формулами знаходять координати середини відрізка?
5. Поясніть, що таке рівняння фігури.
6. Виведіть рівняння кола.
7. Які є види рівняння прямої?
8. Як застосувати метод координат до розв'язування задач?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

1° Знайдіть відстань між точками $A(1; 2)$ і $B(2; 1)$.

А. 2. **Б.** 6. **В.** $\sqrt{2}$. **Г.** $\sqrt{3}$.

2° Які координати має середина відрізка MH, якщо $M(-3; 0)$, $H(5; 6)$?

А. $(-3; 6)$. **Б.** $(0; 5)$. **В.** $(-4; 3)$. **Г.** $(1; 3)$.

3° Знайдіть відстань від точки $A(4; -1)$ до центра O кола $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$. Порівняйте довжину відрізка AO і радіус R даного кола.

А. $AO \geqslant R$. **Б.** $AO > R$. **В.** $AO = R$. **Г.** $AO < R$.

4 Який кутовий коефіцієнт у прямої, що проходить через точки $P(-3; 1)$ і $T(2; -4)$?

А. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **Б.** -1. **В.** 1. **Г.** $\sqrt{3}$.

5* У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 10 см, а висота, проведена до основи, на 2 см довша за неї. Знайдіть відстань між серединою даної висоти і серединою медіани, проведеної до бічної сторони трикутника.

А. 13 см. **Б.** $\frac{5}{2}$ см. **В.** $\frac{\sqrt{61}}{2}$ см. **Г.** $\frac{13}{4}$ см.

РОЗДІЛ 4

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

У розділі дізнаєтесь:

- що таке переміщення та які його властивості;
- про симетрію відносно точки і прямої, поворот, паралельне перенесення та про їх застосування в природі, техніці, архітектурі;
- що таке перетворення подібності, які його властивості та як будувати подібні фігури;
- як застосовувати вивчені означення і властивості на практиці та у розв'язуванні задач

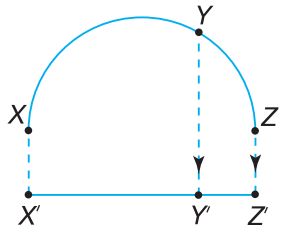
ШКОЛА

§17. ПЕРЕМІЩЕННЯ

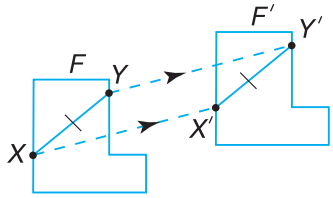
Подивіться на малюнок 192. Кожну точку півкола змістили так, що отримали відрізок. Говорять, що півколо відобразили на відрізок. Можна також сказати, що відрізок утворився з півкола у результаті геометричного перетворення. Далі коротко будемо говорити: перетворення. Зрозуміло, що дане перетворення не зберігає відстань між точками цих фігур: $XY \neq X'Y'$.

На малюнку 193 перетворення, при якому фігура F відображається на фігуру F', особливе. Воно зберігає відстань між відповідними точками фігур. Будь-які дві точки X і Y фігури F переходять у точки X' і Y' фігури F' так, що $XY = X'Y'$. Таке перетворення є переміщенням.

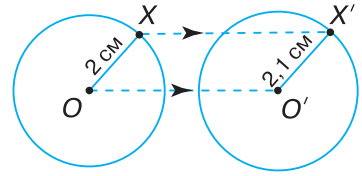
Перетворення називається ***переміщенням***, якщо воно зберігає відстань між точками.



Мал. 192



Мал. 193



Мал. 194

? Деяке перетворення коло переводить у коло (мал. 194). Чи є це перетворення переміщенням? Ні, бо воно не зберігає відстань між відповідними точками: $OX \neq O'X'$.

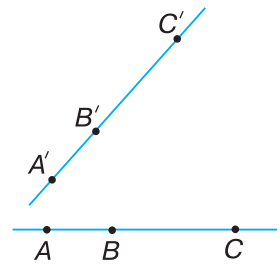
Теорема (властивість переміщення).
При переміщенні точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.

Доведення. Нехай три точки A, B, C лежать на одній прямій (мал. 195). Тоді одна з них лежить між двома іншими. Нехай, наприклад, B лежить між A і C.

Тоді $AC = AB + BC$. (1)

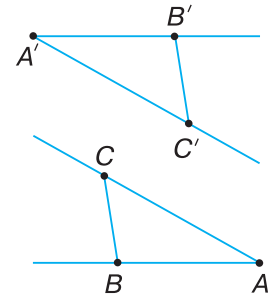
Деяке переміщення переводить точки A, B, C у точки A', B', C'. Оскільки переміщення зберігає відстані, то $AC = A'C'$, $AB = A'B'$ і $BC = B'C'$. З цих рівностей і рівності (1) випливає: $A'C' = A'B' + B'C'$.

Остання рівність означає, що точки A', B', C' лежать на одній прямій, а точка B' лежить між точками A' і C'.



Мал. 195

Наслідок. **Переміщення прямі переводить у прямі, промені — у промені, відрізки — у рівні їм відрізки.**



Мал. 196

Задача. **Доведіть, що переміщення кут переводить у рівний йому кут.**

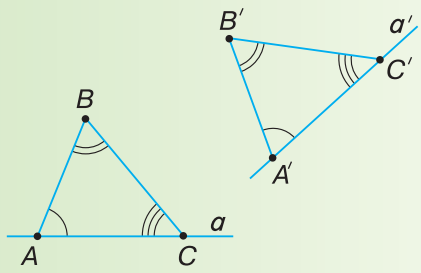
Розв'язання. Нехай AB і AC — два промені, що виходять зі спільної точки A і не лежать на одній прямій (мал. 196). Переміщення ці промені переводить у деякі промені $A'B'$ і $A'C'$.
Оскільки переміщення зберігає відстані, то $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ за трьома сторонами.
З рівності трикутників випливає: $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

Узагалі переміщення будь-яку фігуру переводить у рівну їй фігуру. Тому поняття «рівні фігури» можна визначити за допомогою поняття «переміщення».

Дві ***фігури*** називаються ***рівними***, якщо вони переводяться переміщенням одна в одну.

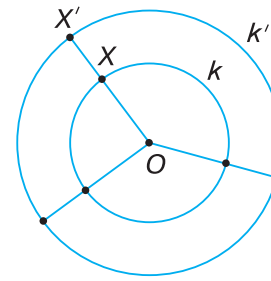
Властивості переміщення подано у таблиці 23.

Таблиця 23

Переміщення	Властивості
	1. Пряма переходить у пряму (a в a'), промінь — у промінь. 2. Відрізок переходить у рівний йому відрізок ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$). 3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$).

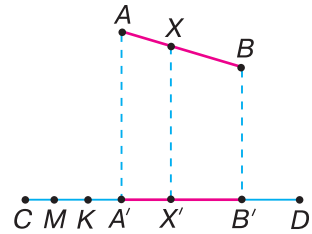
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Давайте поміркуємо над поняттям «відображення фігур».
Нехай k і k' — два кола зі спільним центром O (мал. 197). Вважатимемо, що кожній точці X першого кола відповідає точка X' другого, яка лежить на промені OX. При цьому кожна точка другого кола поставлена у відповідність деякій точці першого кола. Крім того, різним точкам першого кола відповідають різні точки другого кола. Ми отримали відображення кола k на k'.



Мал. 197

Відображенням фігури F на F' називається така відповідність, при якій:
1) кожній точці фігури F відповідає певна точка фігури F';
2) кожна точка фігури F' поставлена у відповідність деякій точці фігури F;
3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури F'.
Не кожна відповідність між точками фігур буде відображенням цих фігур.



Мал. 198

На малюнку 198 зображено відрізки AB і CD. Кожній точці X відрізка AB поставлено у відповідність основу X' перпендикуляра, проведеного з точки X до відрізка CD. Поясніть, чому задана відповідність не буде відображенням відрізка AB на відрізок CD.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Яке перетворення називається переміщенням?
2. Доведіть, що при переміщенні точки, які лежать на прямій, переходять у точки, які теж лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.
3. У які фігури переходять прямі, промені, відрізки під час переміщення?
4. Доведіть, що переміщення переводить кут у рівний йому кут.
5. Які дві фігури називаються рівними?

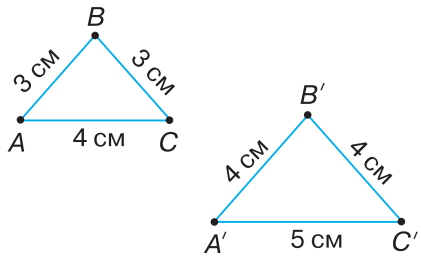
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

566'. Перетворення переводить трикутник ABC у трикутник $A'B'C'$ (мал. 199). Чи є це перетворення переміщенням? Поясніть відповідь.

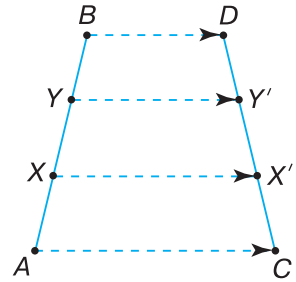
567'. На малюнку 200 переміщення переводить відрізок AB у відрізок CD.
1) У які точки переходять точки X і Y при цьому переміщенні?
2) У які фігури переходять відрізки AX і XY?
3) Чи рівні відрізки AX і CX', XY і $X'Y'$, BY і DY'?
Поясніть відповідь.

568'. Переміщення переводить фігуру F у фігуру F'. Чи рівні фігури F і F'?

569°. Переміщення переводить відрізок AB у відрізок $A'B'$. Який із записів правильний: а) $AB > A'B'$; б) $AB = A'B'$; в) $AB < A'B'$?



Мал. 199



Мал. 200

570°. Чи існує переміщення, яке переводить відрізок AB у відрізок CD, якщо:
1) $AB = 4$ см, $CD = 6$ см; 2) $AB = 5$ см, $CD = 5$ см?

571°. Позначте довільні точки A і B. Побудуйте коло з центром A і радіусом 3 см. Побудуйте фігуру, в яку перейде це коло під час переміщення, що переводить точку A в точку B.

572°. Побудуйте два прямокутних трикутники, що мають кут 30° і менший катет довжиною 2 см. У першому трикутнику з вершини прямого кута через середину гіпотенузи проведено промінь. Побудуйте фігуру, у яку він переходить під час переміщення, що переводить перший трикутник у другий.

573°. Проведіть промені OA і $O'A'$. Позначте на промені OA три точки M, K, P. Побудуйте точки M', K', P', у які переходять точки M, K, P під час переміщення, що переводить промінь OA в промінь $O'A'$.

574°. Дано промені OA і OB зі спільним початком у точці O і промінь $O'A'$. Побудуйте промінь $O'B'$, у який переходить промінь OB під час переміщення, що переводить OA в $O'A'$. Чи однозначно визначається положення променя $O'B'$?

575°. Побудуйте два рівні трикутники ABC і $A'B'C'$ і позначте точку X на стороні AC. Побудуйте точку, в яку переходить точка X' при переміщенні, що переводить $\triangle ABC$ у $\triangle A'B'C'$.

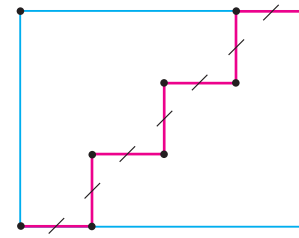
576. Чи існує переміщення, що переводить $\triangle ABC$ у $\triangle A'B'C'$, якщо:
1) $\angle A = 110°$, $\angle B' = 120°$; 2) $\angle C = 20°$, $\angle A' = 60°$;
3) $AC = 6$ см, $A'B' = B'C' = 3$ см?

577. Чи рівні два квадрати, якщо: 1) діагоналі їх рівні; 2) периметри їх рівні?

578. Чи рівні два прямокутники, якщо:
1) діагоналі їх рівні; 2) периметри їх рівні?

579. У крузі з центром O проведено діаметри AB і CD. Яка фігура рівна частині круга: 1) AOC; 2) AOD?

580. Дві частини, з яких складається фігура F, відповідно рівні двом частинам, з яких складається фігура F'.
Чи рівні ці фігури? Виконайте малюнок.



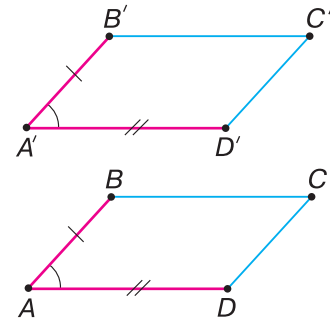
Мал. 201

581. Прямокутник поділено на дві частини, як показано на малюнку 201. Чи рівні ці частини?

582. Чи можна поділити довільний трикутник на дві рівні частини? Для яких трикутників такий поділ можливий?

583. Доведіть, що переміщення переводить:
1) трикутник у рівний йому трикутник;
2) паралелограм у рівний йому паралелограм.

584. За даними на малюнку 202 доведіть, що паралелограми $ABCD$ і $A'B'C'D'$ рівні.



Мал. 202

585. Чи рівні два паралелограми, якщо у них рівні:
1) дві діагоналі і кут між ними; 2) сторона і дві діагоналі;
3) периметри; 4) дві суміжні сторони і зовнішній кут?

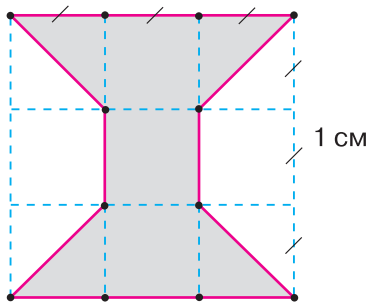
586*. Доведіть, що ромби рівні, якщо вони мають рівні діагоналі.

587*. Доведіть, що переміщення переводить многокутник у многокутник з відповідно рівними сторонами і кутами.

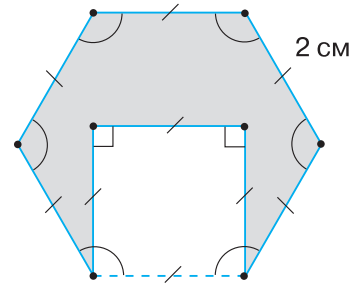
588*. **Доведіть, що переміщення переводить паралельні прямі у паралельні прямі.**

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

589. Побудуйте фігури, які рівні фігурам, зображеним на малюнках 203 і 204 (для побудови можна скористатися лінійкою, циркулем, косинцем або калькою). Обчисліть площі цих фігур, зробивши найменшу кількість вимірювань.



Мал. 203



Мал. 204

§18. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ І ПРЯМОЇ

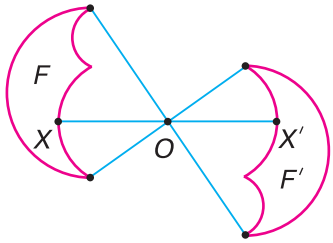
1. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ

Дві точки X і X' площини називаються ***симетричними відносно точки O***, якщо O є серединою відрізка XX' (мал. 205).

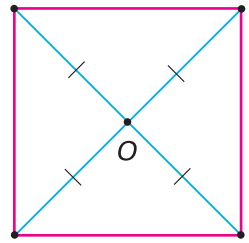
Щоб побудувати точку X', симетричну точці X відносно точки O, проведіть промінь XO, відкладіть на ньому з другого боку від точки O відрізок $OX' = OX$ (мал. 206).

Мал. 205

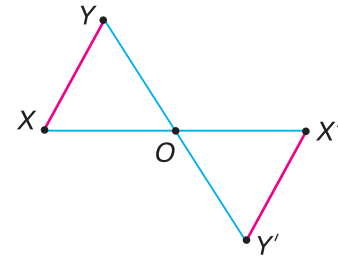
Мал. 206



Мал. 207



Мал. 208



Мал. 209

Перетворення, при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', симетричну відносно даної точки O, називається *перетворенням симетрії* відносно точки O. При цьому фігури F і F' називаються *симетричними відносно точки* O (мал. 207). Симетрію з центром O називають також *центральною симетрією*.

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то вона називається *центрально-симетричною*, а точка O – *центром симетрії*. Наприклад, квадрат – центрально-симетрична фігура. Центром симетрії його є точка перетину діагоналей (мал. 208).

Теорема (властивість симетрії відносно точки).
Перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.

Доведення. Нехай симетрія відносно точки O переводить довільні точки X і Y фігури F у точки X' і Y' фігури F' (мал. 209).

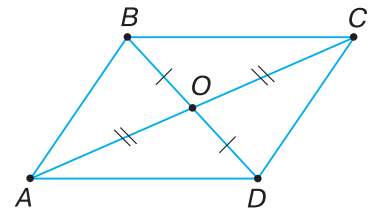
$\triangle XOY = \triangle X'OY'$ – за двома сторонами і кутом між ними. У них $OX = OX'$, $OY = OY'$ за означенням симетрії відносно точки O, $\angle XOY = \angle X'OY'$ як вертикальні. З рівності трикутників випливає: $XY = X'Y'$. Це означає, що симетрія відносно точки O є переміщенням. (Випадок, коли точки X, Y, O лежать на одній прямій, розгляньте самостійно).

Наслідок. **Симетрія відносно точки має всі властивості переміщення.**

Задача. Доведіть, що паралелограм є центрально-симетричною фігурою відносно точки перетину його діагоналей.

Розв'язання. Нехай O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ (мал. 210). Оскільки діагоналі AC і BD діляться точкою O навпіл, то точки A і C, B і D симетричні відносно точки O.

Тоді сторони AB і CD, BC і AD також симетричні відносно точки O. Тому симетрія відносно точки перетину діагоналей паралелограма переводить його у себе.

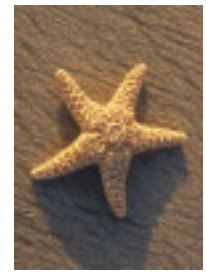


Мал. 210

Мал. 211

Мал. 212

Мал. 213


Мал. 214

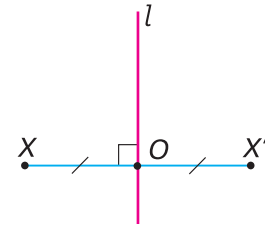
Мал. 215

Фігури, що мають центр симетрії, часто зустрічаються в довкіллі. Наприклад, пропелер літака (мал. 211), орнамент (мал. 212), квітка (мал. 213), морська зірка (мал. 214), сніжинка (мал. 215).

2. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПРЯМОЇ

Дві точки X і X' площини називаються ***симетричними відносно прямої l***, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка XX' і проходить через його середину (мал. 216).

Якщо точка X лежить на прямій l, то симетричною їй точкою є сама точка X.



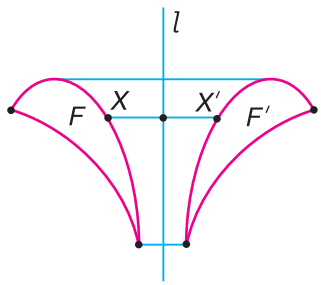
Мал. 216

Щоб побудувати точку X', симетричну точці X відносно прямої l, проведіть з точки X перпендикуляр XO до прямої l і на його продовженні з другого боку від прямої l відкладіть відрізок $OX' = OX$ (мал. 216).

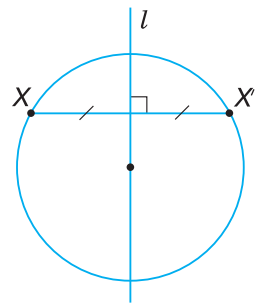
Перетворення, при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', симетричну відносно даної прямої l, називається *перетворенням симетрії відносно прямої l*. При цьому фігури F і F' називаються *симетричними відносно прямої l* (мал. 217). Пряма l називається *віссю симетрії*. Симетрію з віссю l називають також *осьовою симетрією*.

Якщо перетворення симетрії відносно прямої l переводить фігуру F у себе, то ця фігура називається *симетричною відносно прямої l*, а пряма l – *віссю симетрії* фігури.

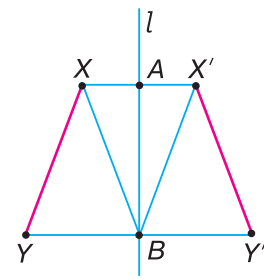
Наприклад, пряма, що проходить через центр кола, є віссю симетрії кола (мал. 218).



Мал. 217



Мал. 218



Мал. 219

Теорема (властивість симетрії відносно прямої).
Перетворення симетрії відносно прямої є переміщенням.

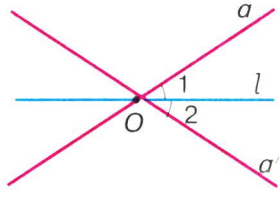
Доведення. Нехай симетрія відносно прямої l переводить довільні точки X, Y фігури F у точки X', Y' фігури F'. Розглянемо загальний випадок, коли точки X, Y не лежать на прямій, перпендикулярній до l (мал. 219). Доведемо, що $XY = X'Y'$.

Нехай пряма l перетинає відрізки XX' і YY' відповідно в точках A і B. $\triangle ABX = \triangle ABX'$ як прямокутні з рівними катетами.

У них $\angle XAB = \angle X'AB = 90°$, $AX = AX'$ за означенням осьової симетрії, сторона AB — спільна. Звідси випливає: $BX = BX'$ і $\angle ABX = \angle ABX'$. $\triangle XYB = \triangle X'Y'B$ за двома сторонами і кутом між ними. У них $BX = BX'$ за доведеним, $BY = BY'$ за означенням осьової симетрії, $\angle XBY = \angle X'BY'$ ($\angle XBY = 90° - \angle ABX$, $\angle X'BY' = 90° - \angle ABX'$). З рівності трикутників випливає: $XY = X'Y'$. (Випадки, коли точки X і Y лежать на прямій l або на прямій, перпендикулярній до l, розгляньте самостійно).

Наслідок. **Симетрія відносно прямої має всі властивості переміщення.**

Задача. Доведіть, що прямі a і a' симетричні відносно осі симетрії l або перетинаються в точці, яка лежить на осі симетрії, і утворюють з нею рівні кути або паралельні їй.



Мал. 220

Розв'язання. Можливі два випадки.

1) Пряма a перетинає вісь l у деякій точці O (мал. 220). Оскільки при осьовій симетрії точка O переходить у себе, то вона лежатиме і на симетричній прямій a'. Таким чином, симетричні прямі a і a' перетинаються в точці, яка лежить на осі l. Кути 1 і 2, утворені цими прямими з віссю l, симетричні відносно l і тому рівні.

2) Пряма a паралельна осі симетрії l. Пряма a', симетрична прямій a, не може перетинати вісь l, оскільки тоді пряма a також перетинала б вісь l (випадок 1). Отже, $a' \parallel l$.

Фігури, що мають вісь симетрії, часто трапляються в техніці (мал. 221), архітектурі (мал. 222, 223), природі (мал. 224, 225), побуті (мал. 226).

Мал. 221

Мал. 222

Мал. 223

Мал. 224

Мал. 225

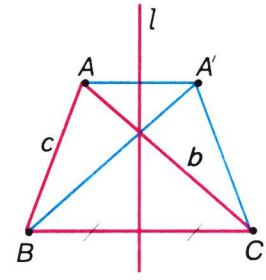
Мал. 226

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Симетрія застосовується у розв'язуванні задач. Задану в умові задачі фігуру (або її елементи) замінюємо фігурою, симетричною даній відносно деякої точки або прямої. Розглянемо приклад.

Задача. Побудуйте трикутник за двома сторонами b і c та різницею кутів B і C, які лежать проти цих сторін.

Аналіз. Припустимо, що $\triangle ABC$ побудовано (мал. 227), причому $\angle B - \angle C = \alpha$ ($\angle B > \angle C$). Побудуємо $\triangle A'CB$, симетричний трикутнику ABC відносно прямої l — серединного перпендикуляра до відрізка BC.
Розглянемо $\triangle AA'C$, у якого $AC = b$, $A'C = c$, $\angle A'CA = \angle A'CB - \angle ACB = \angle B - \angle C = \alpha$.
Цей трикутник можна побудувати.



Мал. 227

Побудова. Будуємо: $\triangle AA'C$ за двома сторонами b, c і кутом між ними α; пряму l — серединний перпендикуляр до відрізка AA'; точку B, симетричну точці C відносно прямої l. $\triangle ACB$ — шуканий.

2. Слово «симетрія» грецького походження і в перекладі означає сумірність, правильне відношення, однаковість у розміщенні частин.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Які дві точки називаються симетричними відносно даної точки?
2. Яке перетворення називається симетрією відносно даної точки?
3. Яка фігура називається центрально-симетричною?
4. Доведіть, що перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.
5. Які дві точки називаються симетричними відносно даної прямої?
6. Яке перетворення називається симетрією відносно даної прямої?
7. Яка фігура називається симетричною відносно даної прямої?
8. Доведіть, що перетворення симетрії відносно прямої є переміщенням.
9. Назвіть властивості симетрії відносно точки; прямої.

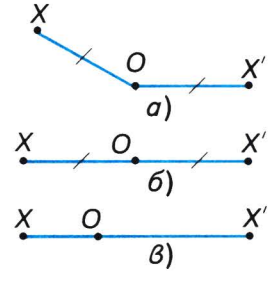
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

590'. Які з точок X і X', зображених на малюнку 228 ($а$ — $в$), симетричні відносно точки O? Поясніть відповідь.

591'. Позначте точки A і O. Побудуйте точку B, симетричну точці A відносно точки O.

592'. Накресліть відрізок AB і позначте точку M, яка не лежить на відрізку AB. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно точки M.

593'. Які з точок X і X', зображених на малюнках 229 ($а$ — $в$), симетричні відносно прямої l? Поясніть відповідь.



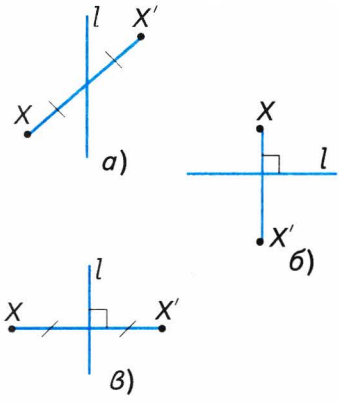
Мал. 228

594'. Проведіть пряму a і позначте точку M, яка не лежить на прямій a. Побудуйте точку N, симетричну точці M відносно прямої a.

595'. Побудуйте за клітинками фігуру, симетричну трикутнику ABC відносно прямої l (мал. 230).

596°. Позначте точки A і B. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте точку, відносно якої симетричні точки A і B.

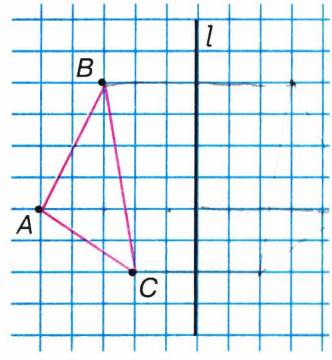
597°. Дано трикутник ABC. Побудуйте фігуру, симетричну трикутнику ABC відносно:
1) вершини C; 2) середини O сторони BC;
3) точки K, яка лежить поза трикутником.



Мал. 229

598°. Знайдіть координати точки A', яка симетрична точці A (3; 5) відносно точки:
1) O (0; 0); 2) C (3; 0); 3) D (− 1; − 1).

599°. Побудуйте на координатній площині відрізок $A'B'$, симетричний відрізку AB, де A (2; 2), B (6; 6), відносно:
1) початку координат; 2) точки M (4; 0);
3) кінця A відрізка AB.
Запишіть координати точок A' і B'.



Мал. 230

600°. Побудуйте фігуру, симетричну даному колу з центром O відносно:
1) точки A, що лежить на колі; 2) точки B, що лежить поза колом;
3) точки C, що лежить усередині кола.

601°. Позначте точки M і N. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте пряму l, відносно якої симетричні точки M і N.

602°. Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої l, яка: 1) не перетинає трикутник; 2) перетинає трикутник;
3) містить сторону AC трикутника.

603°. Дано точки A, B і C. Побудуйте точку, симетричну:
1) точці C відносно прямої AB; 2) точці B відносно прямої AC;
3) точці A відносно прямої BC.

604°. Побудуйте фігуру, симетричну:
1) чотирикутнику відносно однієї з його сторін;
2) прямокутнику відносно однієї з його діагоналей;
3) трапеції відносно її середньої лінії.

605°. Побудуйте фігуру, симетричну даному колу відносно прямої, яка:
1) не перетинає коло; 2) дотикається до кола; 3) перетинає коло.

606°. Знайдіть координати точки, симетричної точці A (− 4; 5) відносно:
1) осі OX; 2) осі OY.

607°. Знайдіть координати кінців відрізка $A'B'$, симетричного відрізку AB відносно осі OX, якщо:
1) $A(2; 1)$, $B(4; 1)$; 2) $A(-3; -3)$, $B(3; 3)$; 3) $A(3; 2)$; $B(6; 4)$.

608. Побудуйте фігуру, симетричну даному відрізку AB відносно точки O, якщо:
1) точка O лежить на відрізку;
2) точка O не лежить на відрізку, але лежить на прямій, яка містить відрізок.

609. Дано точки A, B і C, що не лежать на одній прямій. При симетрії відносно деякої точки точка B переходить у точку C. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте точку, в яку при цій симетрії переходить точка A.

610. Доведіть, що при симетрії відносно точки пряма, яка не проходить через цю точку, переходить у паралельну їй пряму.

611. Вершина B трикутника ABC при симетрії відносно середини сторони AC переходить у точку D. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

612. Знайдіть координати вершини трикутника $A'B'C'$, який симетричний трикутнику ABC відносно початку координат, якщо:
1) $A(1; 2)$, $B(4, 6)$, $C(7, 3)$; 2) $A(4, -2)$, $B(1; 2)$, $C(-2; 6)$.

613. Чи має центр симетрії: 1) відрізок; 2) промінь; 3) коло?

614. Дано точки A, B і C, які не лежать на одній прямій. Доповніть їх четвертою точкою D так, щоб чотирикутник $ABCD$ мав центр симетрії.

615. Доведіть, що чотирикутник, який має центр симетрії, — паралелограм.

616. Доведіть, що фігура, яка складається з двох паралельних прямих, є центрально-симетричною. Знайдіть геометричне місце центрів симетрії цих прямих.

617. Дано довільний трикутник ABC і довільну точку A'. Побудуйте трикутник, симетричний даному відносно деякої прямої так, щоб точка A перейшла в точку A'.

618. Доведіть, що пряма, яка містить бісектрису кута, є його віссю симетрії.

619. Доведіть, що пряма, яка містить висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, є віссю симетрії трикутника.

620. Точки перетину двох кіл симетричні відносно прямої, що проходить через їх центри. Доведіть.

621. Доведіть, що діагоналі ромба є його осями симетрії.

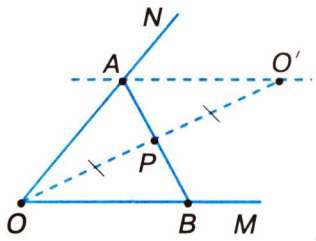
622. Якщо трикутник має вісь симетрії, то він рівнобедрений. Доведіть.

623. Доведіть, що коли трапеція має вісь симетрії, то вона рівнобічна.

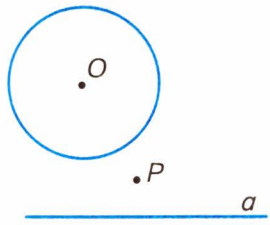
624. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини основ рівнобічної трапеції, є її віссю симетрії.

625. Скільки осей симетрії може мати чотирикутник? Наведіть приклади.

626. Вершина B рівнобедреного трикутника ABC при симетрії відносно прямої, що містить основу AC, переходить у точку D. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — ромб.



Мал. 231



Мал. 232

627*. Дано точки A і O. Користуючись тільки циркулем, побудуйте точку A', симетричну точці A відносно точки O.

628*. Дано кут MON і довільну точку P, яка лежить у внутрішній області кута. Побудуйте відрізок з кінцями на сторонах кута і серединою в даній точці P. За малюнком 231 складіть план побудови.

629*. Побудуйте відрізок так, щоб середина його була в даній точці P, а кінці — на даній прямій a і на даному колі (мал. 232).

630*. Користуючись тільки циркулем, побудуйте точку, симетричну даній точці відносно даної прямої.

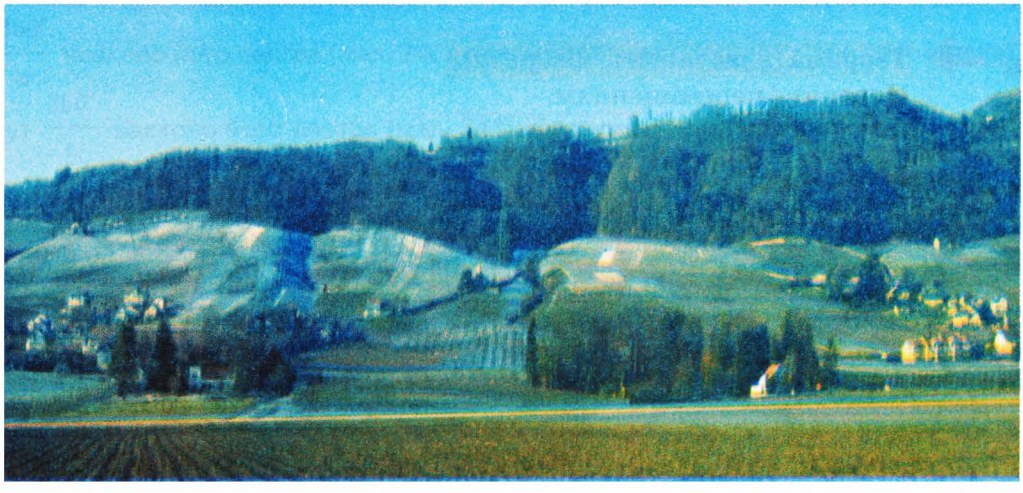
631*. Доведіть, що коли трикутник має дві осі симетрії, то він має і третю вісь симетрії.

632*. Дано пряму l і дві точки A і B з одного боку від неї. Знайдіть на прямій l точку N таку, щоб сума відстаней $AN + BN$ була найменшою.

633*. Дано гострий кут ABC і точку M усередині його. Знайдіть на сторонах кута такі точки X і Y, щоб трикутник MXY мав найменший периметр.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

634. З одного боку від газопроводу знаходяться два міста A і B. У якому місці газопроводу слід побудувати газову підстанцію, щоб при розподілі газу для міст A і B витратити найменшу кількість труб?

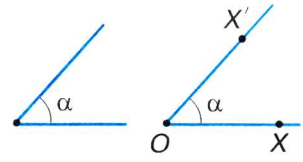


§19. ПОВОРОТ

Нехай дано кут α і точку O (мал. 233). Візьмемо довільну, відмінну від O, точку X. Точці X поставимо у відповідність таку точку X', що:

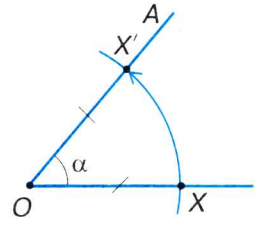
1) відстані OX і OX' рівні;

2) кут між променями OX і OX' дорівнює α.



Мал. 233

Такий перехід точки X у точку X' називається ***поворотом навколо точки*** O на кут α проти годинникової стрілки. Сама точка O переходить після повороту в себе. Точка O називається *центром повороту*, кут між променями OX і OX' – *кутом повороту* проти годинникової стрілки (мал. 234).



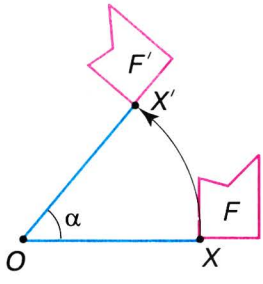
Мал. 234

Якщо центр O і кут α повороту задано, то точку X', у яку переходить точка X унаслідок повороту проти годинникової стрілки, будуємо так (мал. 234): проводимо промінь OX; від променя OX відкладаємо кут XOA, що дорівнює кутові α; на промені OA знаходимо точку X', яка лежить на відстані OX від центра O.

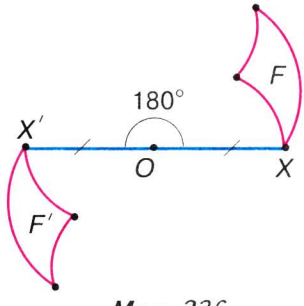
Якщо на площині дано деяку фігуру F, то для кожної її точки X можна знайти точку X', у яку перейде X унаслідок повороту навколо точки O на кут α (мал. 235). У результаті отримаємо фігуру F', в яку перейшла фігура F при заданому повороті. При цьому точка O переходить у себе.

Поворот на кут 180° навколо точки O є симетрією відносно точки O (мал. 236).

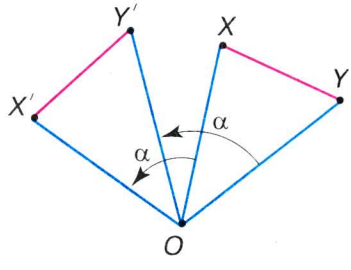
Теорема (властивість повороту).
Поворот є переміщенням.



Мал. 235



Мал. 236



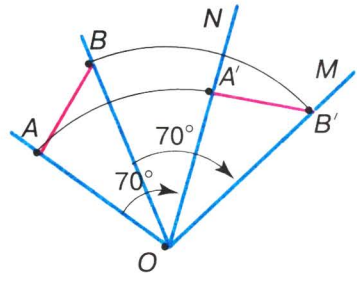
Мал. 237

Доведення. Нехай поворот навколо точки O на кут α точки X, Y фігури F переводить у точки X', Y' фігури F' (мал. 237). Доведемо, що $XY = X'Y'$. Розглянемо загальний випадок, коли точки O, X, Y не лежать на одній прямій. $\triangle OXY = \triangle OX'Y'$ за двома сторонами і кутом між ними. У них $OX = OX'$, $OY = OY'$ за означенням повороту і $\angle XOY = \angle X'OY'$ (кожний з цих кутів дорівнює різниці кута α і кута $Y'OX$). З рівності трикутників випливає $XY = X'Y'$ (випадок, коли точки O, X, Y лежать на одній прямій розгляньте самостійно).

Наслідок. **Поворот має всі властивості переміщення.**

Задача. Побудуйте відрізок, у який переходить відрізок AB при повороті навколо точки O на кут 70° за годинниковою стрілкою.

Розв'язання. Проводимо промені OA і OB (мал. 238). Відкладемо за годинниковою стрілкою $\angle AON = 70°$ і $\angle BOM = 70°$. Відкладемо на промені ON відрізок $OA' = OA$, а на промені OM — відрізок $OB' = OB$. Сполучаємо точки A' і B'.



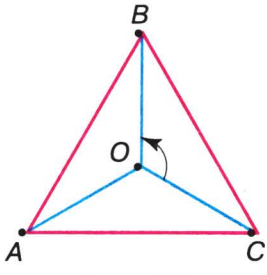
Мал. 238

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

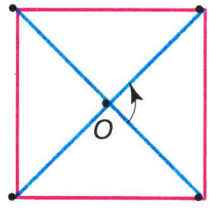
Розглянемо фігури, зображені на малюнках 239 — 241. Кожна з цих фігур внаслідок повороту навколо точки O на деякий кут переходить у себе. Правильний трикутник (мал. 239) переходить у себе при повороті на 120° (тобто $\frac{360°}{3}$) навколо його центра O.

Справді, $OA = OB = OC$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = 120°$, тому трикутник ABC переходить у себе при даному повороті.

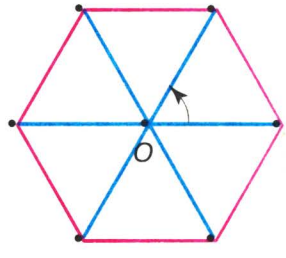
Аналогічно можна показати, що квадрат переходить у себе при повороті на кут $\frac{360°}{4}$ навколо його центра (мал. 240), правильний шестикутник — при повороті на кут $\frac{360°}{6}$ навколо його центра (мал. 241). Зрозуміло, що будь-який правильний



Мал. 239



Мал. 240



Мал. 241

многокутник з n вершинами переходить у себе внаслідок повороту навколо свого центра на кут $\frac{360^\circ}{n}$.

Якщо фігура F унаслідок повороту навколо деякої точки O на кут $\frac{360^\circ}{n}$ (n — натуральне число) переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має *симетрію обертання порядку n*. Точка O називається *центром обертання n-го порядку* фігури F.

Отже, рівносторонній трикутник, квадрат, правильний шестикутник, правильний n-кутник мають симетрію обертання порядку 3, 4, 6, n відповідно.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке поворот?
2. Що таке центр повороту? Кут повороту?
3. Доведіть, що поворот є переміщенням.
4. Сформулюйте властивості повороту.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

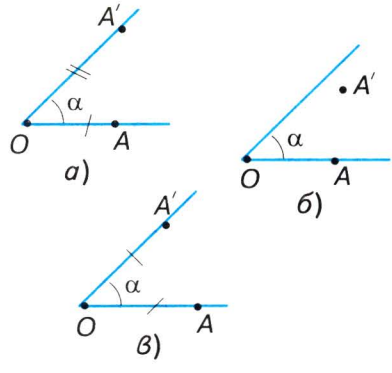
635'. На якому з малюнків 242 а) — в) точка A перейшла в точку A' внаслідок повороту навколо точки O на кут α.

636'. Побудуйте за допомогою транспортира $\angle MON = 60^\circ$. Позначте на стороні OM кута точку X. Знайдіть на стороні ON точку X', у яку перейде точка X унаслідок повороту навколо точки O на кут 60°.

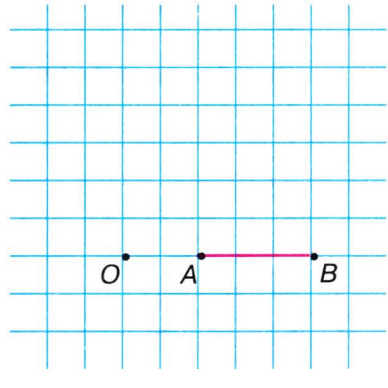
637'. Побудуйте за клітинками відрізок $A'B'$, в який переходить відрізок AB при повороті навколо точки O на кут 90° проти годинникової стрілки (мал. 243).

638'. Дано точки O і A. Побудуйте точку A', в яку переходить точка A при повороті навколо точки O:

1) на кут 50° за годинниковою стрілкою;
2) на кут 120° проти годинникової стрілки;
3) на кут 180° за годинниковою стрілкою.



Мал. 242



Мал. 243

639°. Дано відрізок AB і точку O, що лежить на прямій AB. Виконайте поворот відрізка AB навколо точки O:
1) на кут 80° проти годинникової стрілки;
2) на кут 140° за годинниковою стрілкою;
3) на кут 90° за годинниковою стрілкою.

640°. Розв'яжіть задачу 639 за умови, що точка O не лежить на прямій AB.

641°. Накресліть відрізок AB. Виконайте поворот відрізка AB:
1) навколо точки A на кут 150° за годинниковою стрілкою;
2) навколо точки B на кут 60° проти годинникової стрілки;
3) навколо середини відрізка на кут 40° за годинниковою стрілкою.

642°. У яку фігуру перейде при повороті на деякий кут:
1) пряма, що проходить через центр повороту;
2) коло, центр якого збігається з центром повороту;
3) кут з вершиною у центрі повороту?

643°. У $\triangle AOB$ $AO = OB$. Побудуйте трикутник, у який переходить трикутник AOB при повороті навколо точки O:
1) на кут AOB за годинниковою стрілкою;
2) на кут AOB проти годинникової стрілки;
3) на кут 120° за годинниковою стрілкою.

644°. Побудуйте кут, у який переходить прямий кут MON при повороті навколо вершини O на 45°:
1) за годинниковою стрілкою; 2) проти годинникової стрілки.

645. Накресліть пряму a і позначте точку M, яка не лежить на прямій. Побудуйте пряму, в яку переходить пряма a при повороті навколо точки M:
1) на кут 90° за годинниковою стрілкою;
2) на кут 45° проти годинникової стрілки.

646. Виконайте поворот даного кола навколо точки A на кут 90°, якщо:
1) точка A лежить поза колом; 2) точка A лежить на колі.

647. Позначте точки X і X'. Побудуйте геометричне місце центрів поворотів, при яких точка X переходить у точку X'.

648. Дано два рівних кола. Знайдіть геометричне місце центрів поворотів, при якому одне коло переходить у друге.

649. Побудуйте фігуру, в яку переходить трикутник ABC при повороті на 90° за годинниковою стрілкою навколо:
1) вершини C; 2) середини сторони AC;
3) точки O, яка лежить поза трикутником.

650. Накресліть квадрат $ABCD$. Побудуйте квадрат, у який переходить квадрат $ABCD$ при повороті за годинниковою стрілкою:
1) навколо вершини D на 135°; 2) навколо центра квадрата на 45°.

651. Доведіть, що квадрат при повороті навколо точки перетину його діагоналей на кут 90° переходить у себе.

652. **Доведіть, що рівносторонній трикутник при повороті навколо точки перетину його висот на кут 120° переходить у себе.**

653. Через центр правильного трикутника проведено дві прямі, кут між якими 60°. Доведіть, що відрізки цих прямих, які містяться між сторонами трикутника, рівні між собою.

654. **Через центр квадрата проведено дві взаємно перпендикулярні прямі. Доведіть, що відрізки прямих, які містяться усередині квадрата, рівні.**

655*. Дано два кола. Поворотом на кут 45° одне коло переводиться в друге. Побудуйте центр цього повороту.

656*. **Дано два рівних відрізки AB і $A'B'$. Побудуйте центр O повороту, при якому точка A переходить у точку A', а точка B — у точку B'. Чи завжди можна знайти центр такого повороту?**

657*. Нехай на сторонах AB і BC трикутника ABC побудовано квадрати $ABPQ$ і $BCMN$. Квадрат $ABPQ$ і трикутник ABC знаходяться з різних боків відносно прямої AB, а квадрат $BCMN$ і трикутник ABC — з одного боку відносно прямої BC. Доведіть, що відрізки PN і AC рівні та перпендикулярні.

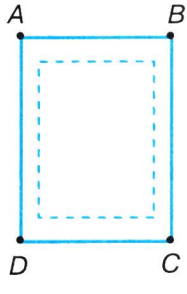
658*. При повороті навколо точки A на кут 60° кінець B відрізка BC переходить у кінець C, а кінець C — у точку D. Доведіть, що точки A, B, C, D — вершини ромба.

659*. Виконайте поворот рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом 1 см навколо вершини прямого кута на 45°. Знайдіть площу спільної частини даного трикутника і трикутника, який отримали при повороті.

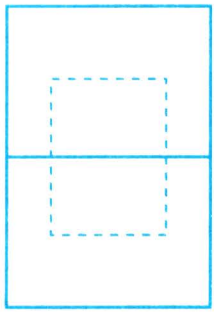
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

660. Стрілки годинника показують 12 годин. Який час показуватиме годинник, якщо хвилинна стрілка здійснить поворот: 1) на 60°; 2) на 120°; 3) на 150°?

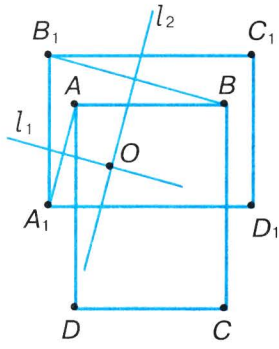
661*. Потрібно побудувати розкладний столик так, щоб у закритому стані його кришка (стільниця) була розміщена, як показано на малюнку 244, у відкритому — як на малюнку 245. У якому місці потрібно помістити шип, поворотом навколо якого кришка столу переходила б з положення, зображеного на малюнку 244, в положення на малюнку 245? Під час розв'язування скористайтеся малюнком 246.



Мал. 244



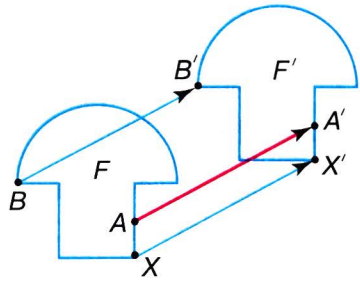
Мал. 245



Мал. 246

§20. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ

Подивіться на малюнок 247. Кожну точку фігури F змістили в одному й тому самому напрямі (вздовж паралельних прямих XX', AA', BB'...) на одну й ту саму відстань ($XX' = AA' = BB'$...). Одержали фігуру F'. Говорять, що фігура F перейшла у фігуру F' унаслідок паралельного перенесення на відстань XX'.

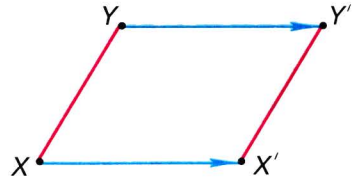


Мал. 247

Перетворення, при якому всі точки фігури зміщуються в одному й тому самому напрямі і на одну й ту саму відстань, називається ***паралельним перенесенням.***

Теорема (властивість паралельного перенесення). Паралельне перенесення є переміщенням.

Доведення. Нехай X і Y — дві довільні точки фігури (мал. 248). Паралельне перенесення переводить їх у точки X' і Y' фігури F'. Доведемо, що $XY = X'Y'$. За означенням паралельного перенесення, $XX' = YY'$ і $XX' \parallel YY'$. Тоді чотирикутник $XYY'X'$ — паралелограм. У паралелограма протилежні сторони рівні, отже, $XY = X'Y'$. (Випадок, коли рівні відрізки XX' і YY' лежать на одній прямій, розгляньте самостійно.)



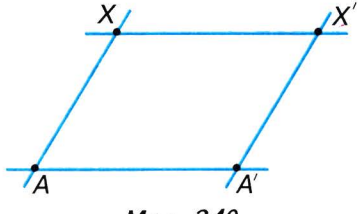
Мал. 248

Наслідок 1. **Паралельне перенесення має всі властивості переміщення.**

Наслідок 2. **При паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну їй пряму або у себе.**

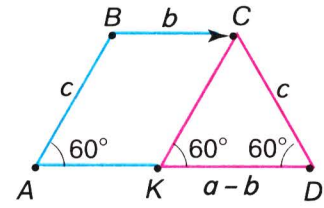
Справді, паралельність прямих випливає з паралельності відрізків XY і $X'Y'$ (мал. 248). Якщо ж пряма паралельна напряму перенесення, то кожна точка прямої переходить у точку цієї самої прямої, а сама пряма переходить у себе.

Щоб побудувати точку X', в яку переходить точка X при паралельному перенесенні, що переводить точку A в точку A', скористайтеся наслідком 2: проведіть паралельні прямі так, як показано на малюнку 249.



Мал. 249

Задача. У рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює 60°. Доведіть, що бічна сторона дорівнює різниці основ трапеції.



Мал. 250

Розв'язання. Нехай a, b — основи, c — бічна сторона рівнобічної трапеції (мал. 250). Доведемо, що $c = a - b$. Виконаємо паралельне перенесення бічної сторони AB так, щоб точка B перейшла у точку C. Тоді точка A перейде у точку K. Оскільки паралельне перенесення є переміщенням, то воно кут переводить у рівний йому кут. Отже, $\angle DKC = \angle KAB = 60°$. Тоді $\triangle KCD$ — рівносторонній і $KD = c$.
З другого боку, $KD = AD - AK = AD - BC = a - b$. Маємо: $c = a - b$.

Паралельне перенесення малюнків (вони однакові й періодично повторюються) є на вишивках, шпалерах, тканинах, паркетній підлозі, орнаментах. На малюнках подано орнаменти на старовинній грецькій вазі (мал. 251), вітражі у Соборі Паризької Богоматері (Франція, середньовіччя) (мал. 252), на стіні палацу Дарія в Сузах (давня Персія) (мал. 253).

Мал. 251

Мал. 252

Мал. 253

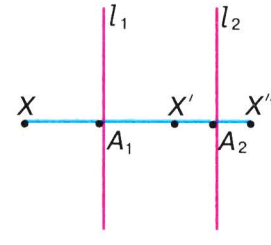
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Нехай деяке переміщення переводить фігуру F у фігуру F', а інше переміщення переводить фігуру F' у фігуру F''. Тоді послідовне виконання цих переміщень називається їх *композицією*.

Одна з композицій має таку властивість: **послідовне виконання двох осьових симетрій з паралельними осями симетрій є паралельним перенесенням.**

Доведемо це твердження.

Нехай задано дві осьові симетрії з паралельними осями l_1 і l_2 (мал. 254). Симетрія з віссю l_1 точку X переводить у точку X', а симетрія з віссю l_2 точку X' переводить у точку X''. Точки X, X', X'' лежать на одній прямій, оскільки $XX' \perp l_1$ і $X'X'' \perp l_2$, а прямі l_1 і l_2 паралельні. Позначимо через A_1 і A_2 точки перетину прямої XX'' з l_1 і l_2.
Тоді $XX'' = 2A_1A_2$.



Мал. 254

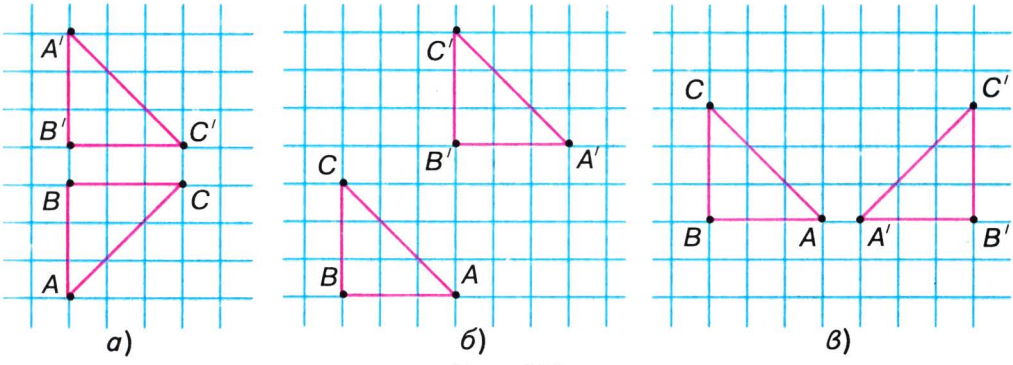
Справді, $XX'' = XA_1 + A_1X' + X'A_2 + A_2X'' = 2A_1X' + 2X'A_2 = 2(A_1X' + X'A_2) = 2A_1A_2$. Отже, відрізок, що сполучає точки X і X'', дорівнює відрізку $2A_1A_2$, який визначений заданням прямих l_1 і l_2. А це означає, що композиція двох осьових симетрій з паралельними осями є паралельним перенесенням на відстань $2A_1A_2$.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Яке перетворення називається паралельним перенесенням?
2. Доведіть, що паралельне перенесення є переміщенням.
3. Поясніть, чому при паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну їй пряму або у себе.
4. Назвіть властивості паралельного перенесення.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

662'. На якому з малюнків а) — в) зображено паралельне перенесення, що переводить трикутник ABC у трикутник $A'B'C'$ (мал. 255)?



а) б) в)

Мал. 255

663'. При паралельному перенесенні точка A переходить у точку B (мал. 256). Побудуйте за клітинками точку D, в яку переходить точка C при цьому паралельному перенесенні.

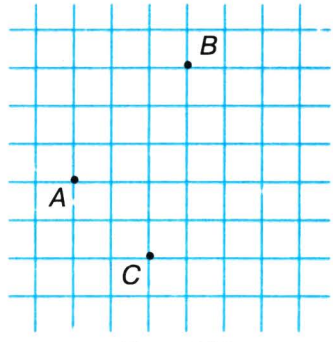
664°. Дано відрізок AB і точку M, що не лежить на прямій AB. Виконайте паралельне перенесення відрізка AB так, щоб:

1) точка A перейшла в точку M;
2) точка B перейшла в точку M;
3) середина відрізка AB перейшла в точку M.

665°. Чи може пряма при паралельному перенесенні перейти в себе?

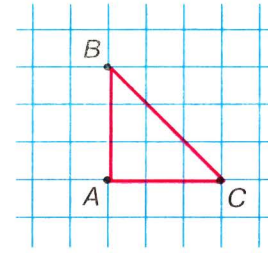
666°. Чи існує паралельне перенесення, при якому:

1) одна із сторін прямокутника переходить в іншу його сторону;
2) одна сторона трикутника переходить в іншу його сторону?



Мал. 256

667°. Побудуйте за клітинками фігуру, в яку переходить трикутник ABC (мал. 257) при паралельному перенесенні, що переводить:
1) точку A в точку C;
2) точку C у точку B.



Мал. 257

668°. Накресліть прямокутник $ABCD$. Виконайте паралельне перенесення цього прямокутника так, щоб: 1) точка A перейшла у C; 2) точка D перейшла у A; 3) точка A перейшла у B.

669°. Відрізки AB і CD рівні. В якому випадку існує паралельне перенесення, що переводить один з цих відрізків у другий?

670°. Позначте точки A, B, C. Побудуйте точку, в яку переходить точка A при паралельному перенесенні, що переводить: 1) точку B у C; 2) точку C у B. Розгляньте два випадки:
а) точка C лежить на прямій AB; б) точка C не лежить на прямій AB.

671°. Виконайте паралельне перенесення даного кола так, щоб його центр O перейшов у дану точку O_1.

672. За яких умов відрізок AB можна перевести у відрізок CD за допомогою паралельного перенесення?

673. Дано дві паралельні прямі a і b. Скільки існує паралельних перенесень, що переводять одну з цих прямих у другу? Поясніть відповідь.

674. При паралельному перенесенні відрізка AB точка A переходить у точку B, а точка B — у точку B'. Доведіть, що точка B — середина відрізка AB'.

675. Виконайте паралельне перенесення квадрата $ABCD$ зі стороною 4 см так, щоб точка A перейшла у точку O перетину діагоналей. Знайдіть площу спільної частини даного і утвореного квадратів.

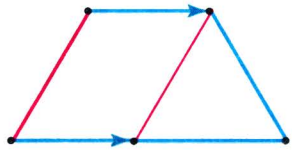
676. Доведіть, що різниця основ трапеції більша за різницю бічних сторін і менша від їх суми.

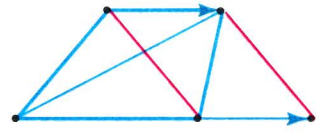
Якщо в умові задачі дано трапецію, то корисно паралельно перенести бічну сторону або діагональ так, як показано на малюнках 258, 259. Потім використати властивості утвореного трикутника.

677. Доведіть, що в рівнобічній трапеції кути при основі рівні.

678. Якщо діагоналі трапеції рівні, то трапеція рівнобічна. Доведіть.

679. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 6 см, бічна сторона 2 см, а кут між ними — 60°. Знайдіть меншу основу.


Мал. 258


Мал. 259

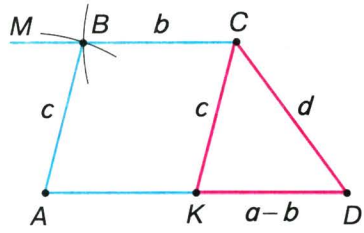
680. У рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює 60°. Доведіть, що більша основа трапеції дорівнює сумі меншої основи і бічної сторони.

681. Доведіть, що сума діагоналей трапеції більша за суму її основ.

682*. Якщо в трикутнику дві медіани рівні, то він рівнобедрений. Доведіть.

683*. Побудуйте трапецію за основами a і b ($a > b$) і бічними сторонами c і d.

За малюнком 260 складіть план побудови.



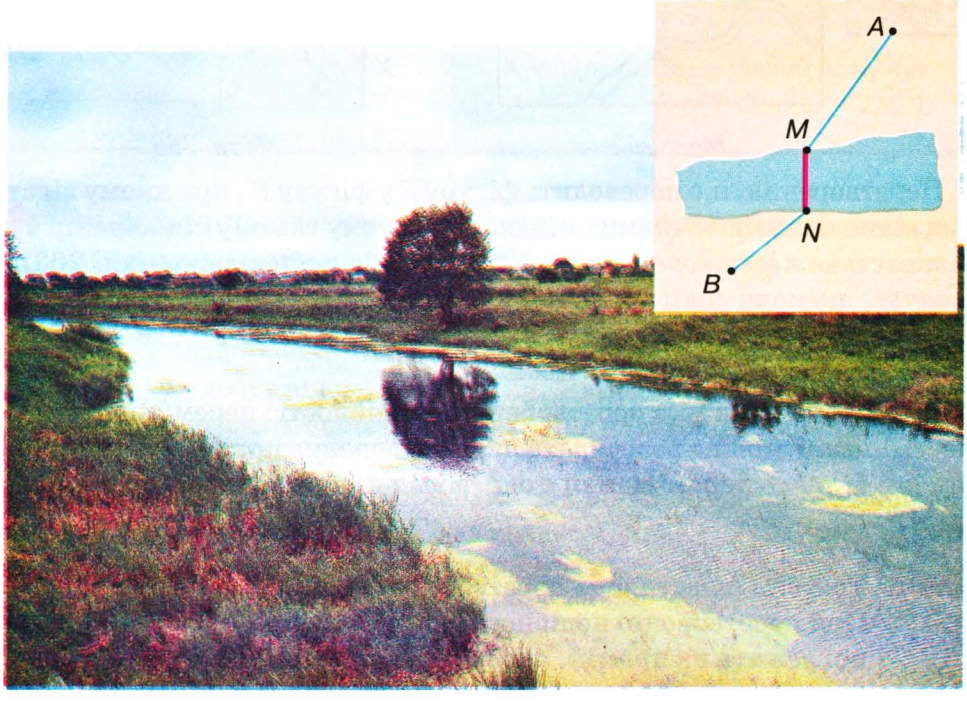
Мал. 260

684*. Побудуйте трапецію за основами a і b ($a > b$) і діагоналями d_1 і d_2.

685*. Побудуйте трикутник за двома сторонами a, b і медіаною m_c, проведеною до третьої сторони.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

686*. Два села A і B розміщені на різних берегах ріки (мал. 261). У якому місці потрібно побудувати міст, щоб шлях між селами був найкоротшим?



Мал. 261

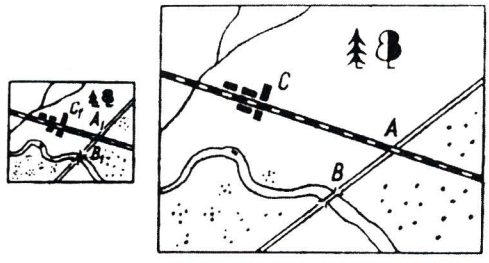
§21. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ. ГОМОТЕТІЯ

1. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

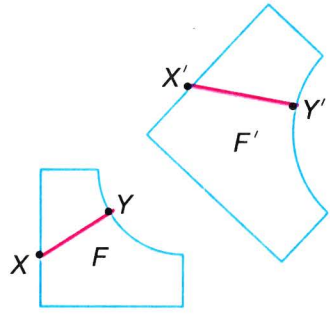
Подивіться на малюнок 262. З одного плану ділянки місцевості виготовили інший. При цьому відношення відстаней між відповідними парами точок на планах рівні і дорівнюють 2,5 (відношенню масштабів):

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots = 2{,}5.$$

Можна сказати, що один план отримали з іншого перетворенням подібності.



Мал. 262

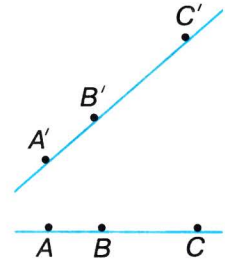


Мал. 263

Перетворення, що переводить фігуру F у фігуру F', при якому відстані між відповідними точками змінюються в тому самому відношенні $k > 0$, називається *перетворенням подібності*, або *подібністю* (мал. 263). Це означає, що коли довільні точки X і Y фігури F при перетворенні подібності переходять у точки X' і Y' фігури F', то $X'Y' = k \cdot XY$, де $k > 0$. Число k називається *коефіцієнтом подібності*.

? Чи існує зв'язок між перетворенням подібності і переміщенням? Так. Переміщення можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$, тобто **переміщення є окремим випадком перетворення подібності**.

Теорема (властивість перетворення подібності).
При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.



Мал. 264

Доведення. Нехай точки A, B і C лежать на одній прямій і точка B лежить між точками A і C (мал. 264). Тоді $AC = AB + BC$. Деяке перетворення подібності переводить точки A, B, C у точки A', B', C'. За означенням перетворення подібності, маємо:

$A'C' = k \cdot AC = k \cdot (AB + BC) = k \cdot AB + k \cdot BC = A'B' + B'C'$.

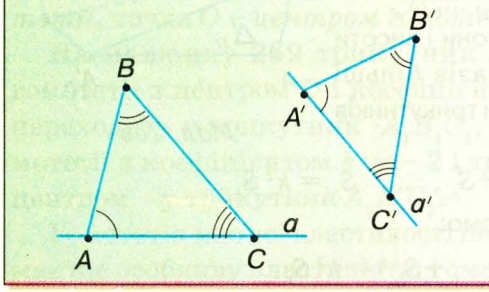
З рівності $A'C' = A'B' + B'C'$ випливає, що точки A', B', C' лежать на одній прямій, а точка B' лежить між точками A' і C'.

Наслідок. **Перетворення подібності прямі переводить у прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки.**

Приймемо без доведення ще таку властивість: **перетворення подібності кут переводить у рівний йому кут.**

Властивості перетворення подібності подано у таблиці 24.

Таблиця 24

Перетворення подібності	Властивості
	1. Пряма переходить у пряму (a в a'), промінь — у промінь. 2. Відрізок переходить у відрізок (AB у $A'B'$, BC у $B'C'$, AC у $A'C'$). 3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$).

Дві ***фігури*** називаються ***подібними,*** якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.

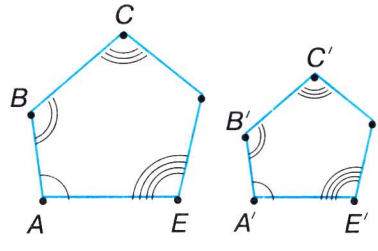
Якщо фігура F подібна фігурі F', то записують $F \sim F'$, або (коли треба вказати коефіцієнт подібності) $F \overset{k}{\sim} F'$.

Подібні фігури добре відомі з практики. Наприклад, подібними є фотознімки, надруковані з одного негатива при різних збільшеннях, дві географічні карти різного масштабу, зображення на кіноплівці й зображення на кіноекрані тощо. Прикладами подібних геометричних фігур можуть бути будь-які два квадрати, два кола.

З властивостей перетворення подібності випливає, що у подібних фігур відповідні кути рівні, а відповідні відрізки — пропорційні. Зокрема, у подібних многокутників $ABC...E$ і $A'B'C'...E'$ (мал. 265):

$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, ... , $\angle E = \angle E'$ і

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots = \frac{EA}{E'A'}.$$



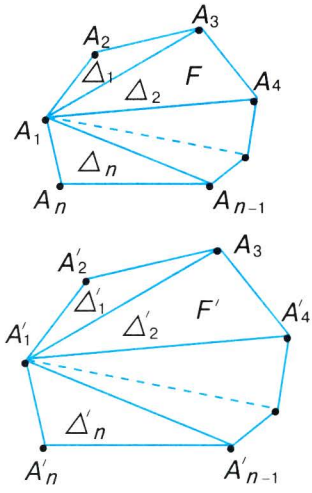
Мал. 265

Теорема (про відношення площ подібних многокутників). Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Дано: F і F' — подібні многокутники з коефіцієнтом подібності k (мал. 266).

Довести: $\dfrac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.

Доведення. Розіб'ємо многокутник F на трикутники $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_n$ (мал. 266). Оскільки многокутники F і F' подібні, то існує перетворення подібності, яке переводить многокутник F у многокутник F', а трикутники розбиття многокутника F у трикутники $\triangle'_1, \triangle'_2, \ldots, \triangle'_n$ відповідного розбиття многокутника F'. Площа многокутника F дорівнює сумі площ трикутників $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_n$, а площа многокутника F' дорівнює сумі площ трикутників $\triangle'_1, \triangle'_2, \ldots, \triangle'_n$.



Мал. 266

Якщо коефіцієнт подібності k, то сторони і висоти трикутників многокутника F' у k разів більші (мал. 266) за відповідні сторони і висоти трикутників многокутника F.

Звідси випливає: $S_{\triangle'_1} = k^2 S_{\triangle_1}$, $S_{\triangle'_2} = k^2 S_{\triangle_2}$, ..., $S_{\triangle'_n} = k^2 S_{\triangle_n}$.

Додавши ці рівності почленно, дістанемо:

$$S_{F'} = S_{\triangle'_1} + S_{\triangle'_2} + \ldots + S_{\triangle'_n} = k^2 (S_{\triangle_1} + S_{\triangle_2} + \ldots + S_{\triangle_n}) = k^2 S_F.$$

Звідки $\dfrac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.

Цей факт справджується для будь-яких фігур.

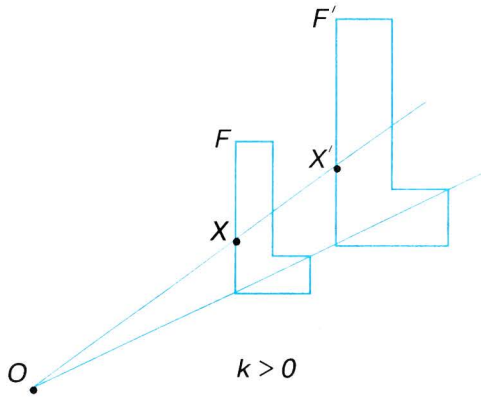
Коефіцієнт подібності k дорівнює відношенню довжин відповідних лінійних елементів фігур F і F'. Тому **площі подібних фігур відносяться, як квадрати їх відповідних лінійних елементів.**

2. ГОМОТЕТІЯ

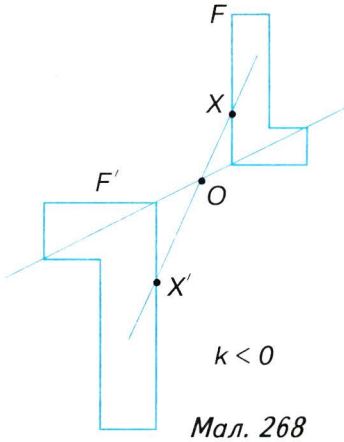
Розглянемо особливий спосіб побудови подібних фігур (мал. 267, 268). Нехай F – дана фігура. Позначимо довільну точку O. Через кожну точку X фігури F проведемо промінь OX і відкладемо на ньому відрізок OX', що дорівнює $k \cdot OX$. Отримаємо шукану фігуру F'.

На малюнку 267 точки X і X' лежать на одному промені OX, а на малюнку 268 – на доповняльних променях OX і OX'. Щоб розрізняти ці випадки, вважають, що у першому випадку $k > 0$, а у другому випадку $k < 0$. Фігури F і F' називають *гомотетичними*.

Перетворення називається ***гомотетією***, якщо воно переводить кожну точку X фігури F у точку X' фігури F' так, що $OX' = |k|OX$, де k – будь-



Мал. 267

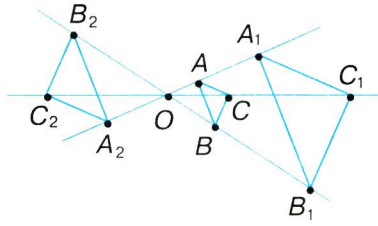


Мал. 268

яке число, відмінне від нуля, O – фіксована точка, $X' \in OX$.

Число k називається *коефіцієнтом гомотетії*, точка O – *центром гомотетії*.

На малюнку 269 трикутник ABC при гомотетії з центром O і коефіцієнтом $k = 3$ переходить у трикутник $A_1B_1C_1$, а при гомотетії з коефіцієнтом $k = -2$ і тим самим центром – у трикутник $A_2B_2C_2$.



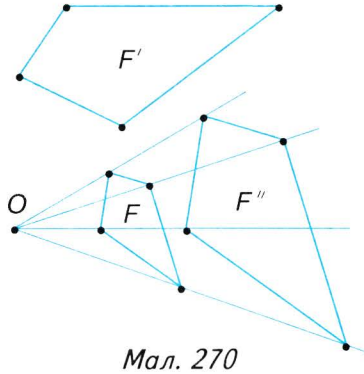
Мал. 269

Гомотетія має всі властивості перетворення подібності. Крім того, вона має ще особливу властивість: **гомотетія переводить пряму у паралельну їй пряму або у саму себе, якщо дана пряма проходить через центр гомотетії.** Можна також сказати, що гомотетія є перетворенням подібності з коефіцієнтом $|k|$.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Розглянемо зв'язок між подібністю і гомотетією.

Якщо дві фігури подібні, то існує третя фігура, яка гомотетична першій і дорівнює другій.



Мал. 270

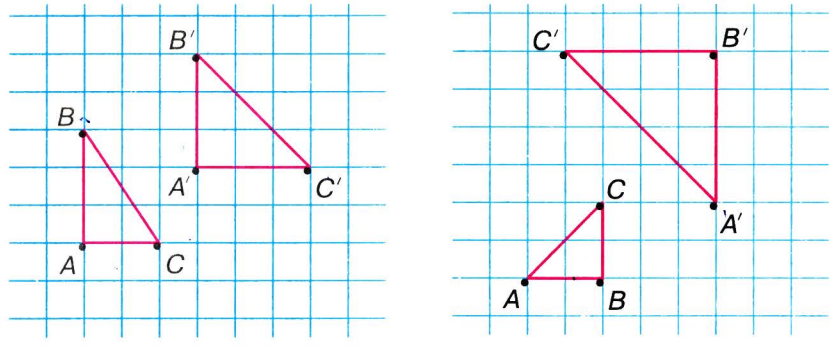
Доведемо це. Нехай $F \overset{k}{\sim} F''$ (мал. 270). Отже, при цьому перетворенні відстані між точками фігури F зміняться у фігурі F' в k разів. Розглянемо гомотетію з довільним центром O і коефіцієнтом, який дорівнює коефіцієнту подібності k. Ця гомотетія фігуру F переведе у фігуру F'', причому відстані між її точками також зміняться в k разів. Отже, відстані між відповідними точками у фігурах F'' і F' рівні, тобто $F' = F''$. Отримали, що побудована фігура F'' гомотетична фігурі F і дорівнює фігурі F'. Звідси випливає, що будь-яку фігуру можна перевести у подібну їй фігуру за допомогою послідовного виконання гомотетії і переміщення.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке перетворення подібності?
2. Доведіть, що при перетворенні подібності точки, які лежать на прямій, переходять у точки, які теж лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.
3. У які фігури переходять прямі, промені, відрізки, кути під час перетворення подібності?
4. Які дві фігури називаються подібними? Наведіть приклад подібних фігур.
5. Що таке гомотетія?
6. Що таке центр гомотетії? Коефіцієнт гомотетії?
7. Назвіть властивості гомотетії.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

687'. На якому з малюнків а) – б) зображено перетворення подібності, що переводить трикутник ABC у трикутник $A'B'C'$ (мал. 271)?



а) б)

Мал. 271

688'. На малюнку 272 перетворення подібності переводить відрізок AB у відрізок $A'B'$. Побудуйте за клітинками точки, в які переходять точки C і D відрізка AB при цьому перетворенні.

689'. 1) Гомотетія з центром O точку A переводить у точку A' (мал. 273). Знайдіть за клітинками коефіцієнт гомотетії.

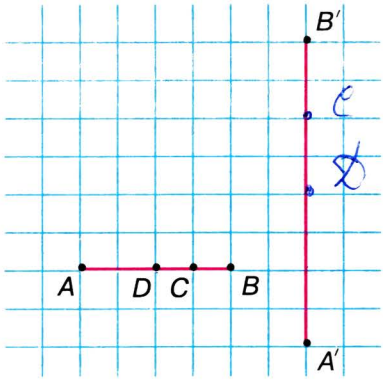
2) Побудуйте за клітинками точку B', в яку переходить точка B при гомотетії з центром O і коефіцієнтом: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$.

690°. За якої умови дві подібні фігури рівні?

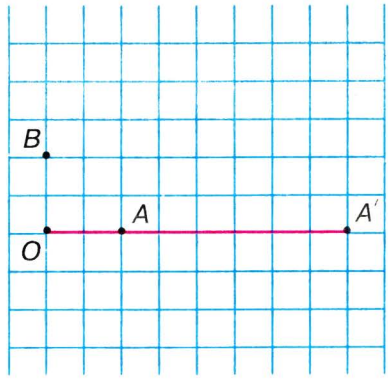
691°. Побудуйте які-небудь дві подібні, але не рівні фігури.

692°. Чи достатньо лише рівності відповідних кутів двох многокутників або лише пропорційності відповідних сторін, щоб ці многокутники були подібними?

693°. Чи будуть подібними: 1) два будь-яких квадрати; 2) два будь-яких прямокутники; 3) два будь-яких кола?



Мал. 272



Мал. 273

694°. Чому дорівнює відношення площ двох подібних многокутників, якщо коефіцієнт їх подібності дорівнює: 1) 0,5; 2) 2; 3) 5?

695°. Позначте точки O і X. Побудуйте точку X', в яку переходить точка X при гомотетії з центром O і коефіцієнтом: 1) $k = 3$; 2) $k = -3$; 3) $k = \frac{1}{2}$.

696°. Гомотетія точку X переводить у точку X'. Побудуйте центр гомотетії, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює: 1) 4; 2) -2; 3) 0,5.

697°. Позначте точки O і A. Побудуйте точку A' так, щоб:

1) $OA' = 3OA$; 2) $OA' = -2OA$; 3) $OA' = \frac{1}{3}OA$.

698°. Гомотетія з центром O точку A переводить у точку A'. Як розміщені точки A і A' відносно центра гомотетії, якщо: 1) $k > 0$; 2) $k < 0$; 3) $k > 1$?

699. Чи подібні два ромби, якщо: 1) кут одного ромба дорівнює 45°, а кут другого — 135°; 2) у кожного з них сторона дорівнює меншій діагоналі?

700. Сторони одного прямокутника дорівнюють 12 см і 8 см, а сторони другого прямокутника — 6 см і 9 см. Чи подібні ці прямокутники? Поясніть відповідь.

701. Кожну діагональ прямокутника поділено на три рівні частини і точки поділу послідовно сполучено відрізками. Чи подібний даному прямокутнику утворений чотирикутник?

702. Карти одного району виготовлено в масштабах 1:25000 і 1:100000. Який коефіцієнт подібності цих карт?

703. Середня лінія трапеції ділить її на дві частини. Чи подібні ці частини між собою? Чи подібна якась із цих частин даній трапеції?

704. Сторони одного чотирикутника дорівнюють 16 см, 24 см, 32 см, 40 см. Менша сторона подібного йому чотирикутника дорівнює 14 см. Знайдіть сторони другого чотирикутника.

705. Знайдіть відношення площ двох квадратів, якщо їхні сторони відносяться, як: 1) 1 : 4; 2) 2 : 5; 3) $m : n$.

706. Як відносяться сторони двох квадратів, якщо їхні площі відносяться, як: 1) 4 : 9; 2) 1 : 16; 3) $m : n$?

707. Площі двох квадратів відносяться, як 1 : 4. Знайдіть периметр другого квадрата, якщо периметр першого дорівнює: 1) 8 см; 2) 12 см; 3) 16 см.

708. Відповідні сторони двох подібних многокутників дорівнюють 2 см і 4 см. Знайдіть площу більшого многокутника, якщо площа меншого дорівнює: 1) 14 см^2; 2) 25 см^2; 3) 30 см^2.

709. **З теореми про властивості гомотетії випливає, що гомотетія переводить фігуру в подібну їй фігуру. Чи правильне обернене твердження: перетворення подібності переводить фігуру в гомотетичну їй фігуру?**

710. Радіус кола є діаметром іншого кола. Чи гомотетичні ці кола?

711. У чотирикутнику $ABCD$ на AB, AC і AD позначено відповідні їм середини — K, L, M. Чи гомотетичні чотирикутники $ABCD$ і $AKLM$?

712. **Чи гомотетичні трикутники ABC і AMN, якщо MN — середня лінія трикутника ABC? Поясніть відповідь.**

713. Гомотетія точку A переводить у точку A', а точку B — у точку B'. Як знайти центр гомотетії, якщо точки A, A', B, B' не лежать на одній прямій? Поясніть відповідь.

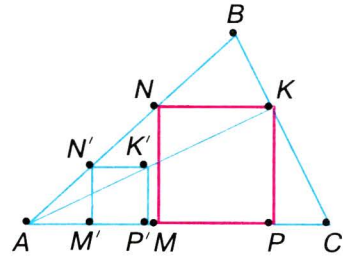
714. Дано точку O і трикутник ABC. Побудуйте фігуру, гомотетичну трикутнику ABC відносно точки O з коефіцієнтом: 1) $k = 1{,}5$; 2) $k = -2$; 3) $k = 2$.

715. Побудуйте фігуру, гомотетичну даному паралелограму з центром гомотетії в точці перетину діагоналей і коефіцієнтом: 1) $k = 2$; 2) $k = 0{,}5$; 3) $k = -1{,}5$.

716*. Пряма ділить трапецію на дві подібні трапеції. Порівняйте довжину відрізка цієї прямої, що міститься між сторонами трапеції, з довжиною її середньої лінії.

717*. Пряма, паралельна основам трапеції, ділить її на дві подібні трапеції. У якому відношенні ця пряма ділить бічні сторони трапеції, якщо її основи відносяться, як: 1) 1 : 4; 2) 2 : 3?

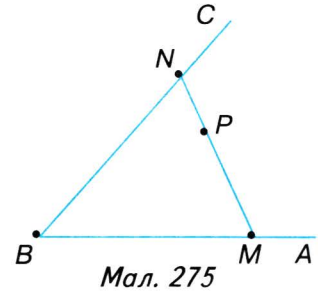
718*. Впишіть у даний трикутник квадрат, дві вершини якого лежать на одній стороні, а дві інші вершини — на двох інших сторонах трикутника. За малюнком 274 складіть план побудови.



Мал. 274

719*. У трикутник ABC впишіть ромб з даним гострим кутом α так, щоб одна з його сторін лежала на основі AC трикутника, а дві його вершини — на бічних сторонах AB і BC трикутника.

720*. Дано кут ABC і точку P усередині нього. Побудуйте відрізок MN з кінцями на сторонах кута так, щоб точка P ділила його у відношенні $NP : PM = 1 : 2$ (мал. 275).



Мал. 275

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

721. План земельної ділянки в масштабі 1 : 200 виконано на аркуші 407 × 288 мм. Чи поміститься на аркуші 288 × 203 мм цей план у масштабі 1 : 300?

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яке перетворення фігури називається переміщенням?
2. Назвіть властивості переміщення.
3. Які дві фігури називаються рівними?
4. Яке перетворення називається симетрією відносно даної точки? Відносно даної прямої?
5. Яка фігура називається центрально-симетричною? Симетричною відносно даної прямої?
6. Що таке поворот?
7. Яке перетворення називається паралельним перенесенням?
8. Що таке перетворення подібності?
9. Назвіть властивості перетворення подібності.
10. Які дві фігури називаються подібними?
11. Що таке гомотетія?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

№ 1

1° O — точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. Назвіть точку, симетричну точці A відносно точки O.

А. C. **Б.** D. **В.** A. **Г.** B.

2° $ABCD$ — ромб. Назвіть точку симетричну точці B відносно прямої AC.

А. B. **Б.** D. **В.** A. **Г.** C.

3° O — середина відрізка AB. При якому куті повороту навколо точки O відрізок переходить у себе?

А. 90°. **Б.** 45°. **В.** 180°. **Г.** 120°.

4 Точки A і A' симетричні відносно точки B. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $AA' = 12$ см.

А. 24 см. **Б.** 10 см. **В.** 4 см. **Г.** 6 см.

5* У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 6 см і 8 см, а гострий кут дорівнює 60°. Знайдіть бічну сторону трапеції.

А. 2 см. **Б.** 4 см. **В.** 14 см. **Г.** 1 см.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

№ 2

1° За якої умови дві подібні фігури рівні?

А. $k = 1$. **Б.** $k = 0$. **В.** $k = -1$. **Г.** $k = 2$.

2° Знайдіть відношення площ двох подібних многокутників, якщо коефіцієнт їх подібності дорівнює 0,5.

А. 0,5. **Б.** 0,25. **В.** 0,1. **Г.** 0,025.

3° Гомотетія з центром O і коефіцієнтом 3 точку A переводить у точку B. Знайдіть довжину відрізка OB, якщо $OA = 4$ см.

А. 2 см. **Б.** 8 см. **В.** 12 см. **Г.** 6 см.

4 Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 12 см і 14 см. Менша сторона подібного йому трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть решту сторін.

А. 8 см і 10 см. **Б.** 18 см і 12 см. **В.** 14 см і 24 см. **Г.** 18 см і 21 см.

5* Площі двох квадратів відносяться, як 1 : 9. Знайдіть периметр другого квадрата, якщо периметр першого дорівнює 24 см.

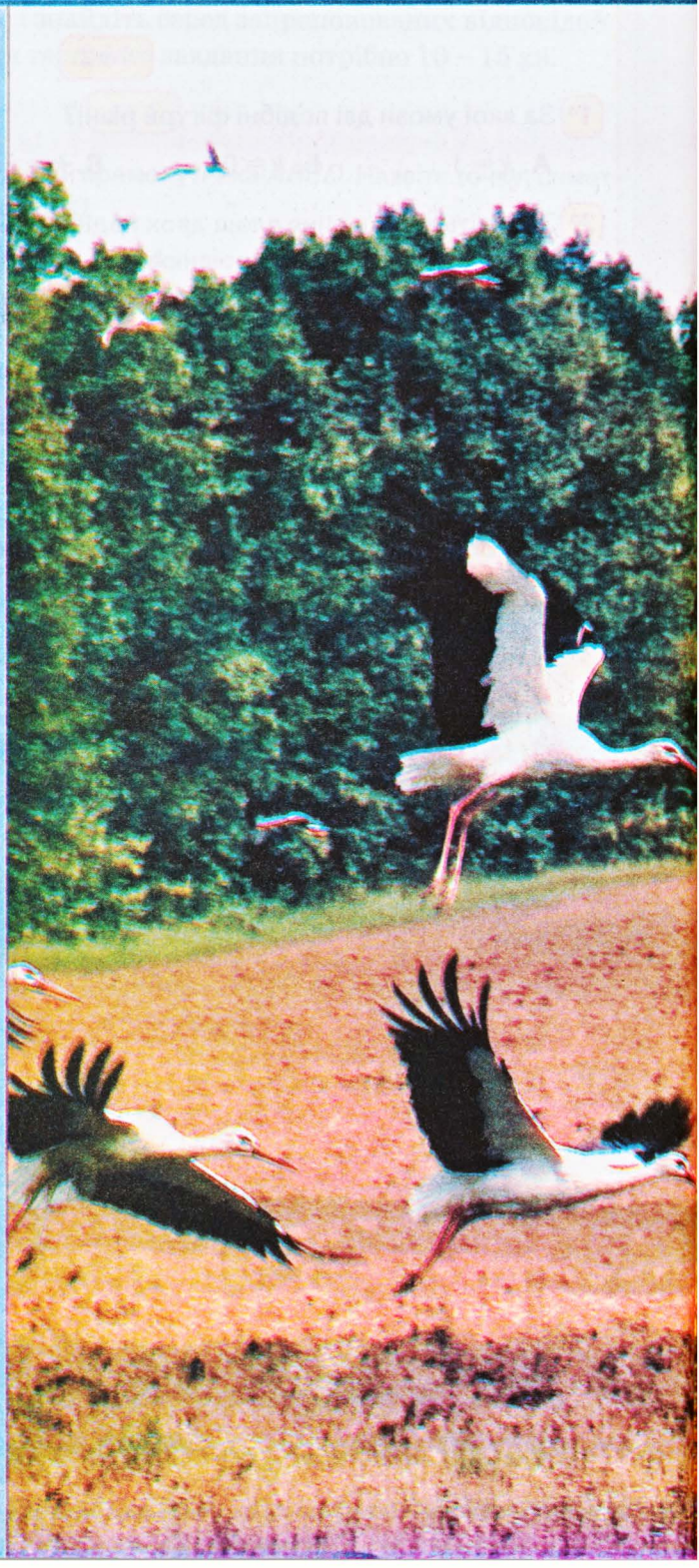
А. 72 см. **Б.** 54 см. **В.** 18 см. **Г.** 216 см.

РОЗДІЛ 5

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

У розділі дізнаєтесь:

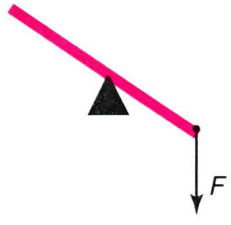
- що таке вектор; колінеарні, рівні вектори;
- як виконувати дії над векторами та які властивості цих дій;
- як знайти координати вектора за координатами його кінців і як побудувати цей вектор у даній системі координат;
- що таке векторний метод і як його застосувати до розв'язування геометричних задач та задач практичного змісту



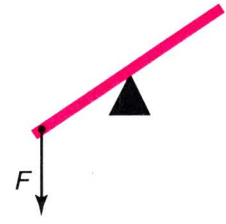
§22. ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА

З курсу геометрії і фізики ви знаєте, що довжина, площа, температура, маса і т. п. характеризуються лише їх *числовими значеннями*. Такі величини називають *скалярними*, або коротко – *скалярами*. Але багато фізичних величин характеризуються не лише своїми числовими значеннями. Наприклад, щоб охарактеризувати силу, треба вказати ще й напрям, в якому вона діє, а також точку прикладання (мал. 276, 277).

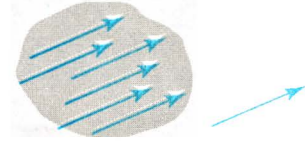
Сила є прикладом *векторної величини*. Ви знаєте, що силу зображають *напрямленим відрізком*.



Мал. 276



Мал. 277



Мал. 278

У геометрії абстрагуються від точки прикладання як характеристики векторних величин. Наприклад, при паралельному перенесенні площини на задану відстань і в указаному напрямі переміщуються усі точки площини. А їх безліч.

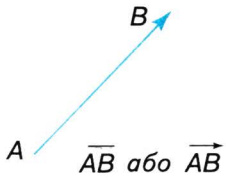
Отже, паралельне перенесення площини характеризує векторна величина, для якої не істотна точка прикладання. Можна сказати, що паралельне перенесення визначається *геометричним вектором*. Надалі будемо коротко говорити – *вектором*.

Зображенням вектора є всі напрямлені відрізки на площині, які мають ту саму довжину й однаковий напрям. Але на аркуші паперу не можна побудувати повне зображення вектора, як і зображення всієї прямої чи площини. Тому в геометрії **вектор зображають лише одним напрямленим відрізком** (мал. 278). Його початок і кінець задають довжину і напрям решти відповідних напрямлених відрізків. Узагалі будь-яка впорядкована пара точок визначає вектор.

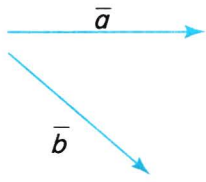
Щоб задати вектор, достатньо вказати його початок і кінець.

На малюнку 279 ви бачите вектор з початком у точці A і кінцем у точці B.

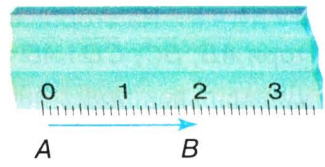
Коротко записуємо: $\overline{AB}$ або $\vec{AB}$. Риска або стрілка над назвою відрізка



Мал. 279



Мал. 280



Мал. 281

заміняє слово «вектор». Вектори можна позначати і малими латинськими буквами: $\bar{a}$ або $\vec{a}$, $\bar{b}$ або $\vec{b}$ (мал. 280).

Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називають *нуль-вектором* і позначають: $\bar{0}$ або $\vec{0}$. Про напрям нуль-вектора не говорять.

Довжиною, або *модулем, вектора* називають відстань між його початком і кінцем. На малюнку 281 вектор $\overline{AB}$ має довжину 2 см.

Коротко записуємо: $|\overline{AB}| = 2$ см, і говоримо: довжина (або модуль) вектора AB дорівнює двом сантиметрам.

Довжина нуль-вектора дорівнює нулю. Вектор, який має довжину 1, називається *одиничним вектором*. Його позначають так: $\bar{e}$. За означенням, $|\bar{e}| = 1$.

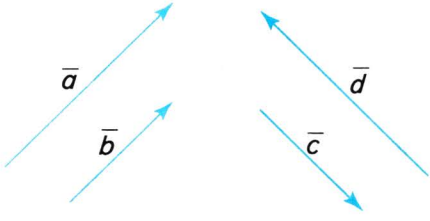
Два ненульових вектори називаються *колінеарними*, якщо вони паралельні одній прямій. На малюнку 282 ви бачите два колінеарні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Можемо записати: $\bar{a} \parallel \bar{b}$. Колінеарні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, зображені на малюнку 282, мають однаковий напрям. Їх називають *співнапрямленими* і записують: $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$. На малюнку 283 вектори $\bar{c}$ і $\bar{d}$ також є колінеарними, але *протилежно напрямленими*. Їх позначають так: $\bar{c} \uparrow\downarrow \bar{d}$.

Вектори називаються ***рівними***, якщо вони співнапрямлені і мають рівні довжини.

На малюнку 284 ви бачите рівні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

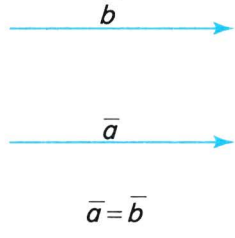
Коротко записуємо: $\bar{a} = \bar{b}$, і говоримо: вектор $\bar{a}$ дорівнює вектору $\bar{b}$.

Якщо два вектори мають рівні модулі, але протилежні напрями, тоді їх називають *протилежними векторами*. На малюнку 285 вектори $\bar{c}$ і $\bar{d}$ є протилежними. Можемо записати: $\bar{c} = -\bar{d}$.

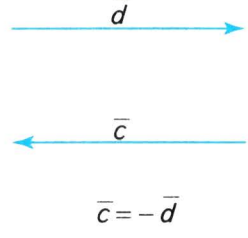


Мал. 282

Мал. 283



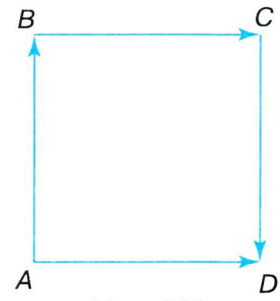
Мал. 284



Мал. 285

Задача. На сторонах квадрата $ABCD$ задано вектори $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ і $\overline{AD}$ (мал. 286).

Доведіть векторні рівності: $\overline{AD} = \overline{BC}$ і $\overline{AB} = -\overline{CD}$.



Мал. 286

Розв'язання. Оскільки $ABCD$ — квадрат, то дані вектори мають рівні довжини: $|\overline{AD}| = |\overline{BC}|$ і $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$. За умовою, $\overline{AD} \uparrow\uparrow \overline{BC}$, але $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$. Тому $\overline{AD} = \overline{BC}$ за означенням рівних векторів, а $\overline{AB} = -\overline{CD}$ за означенням протилежних векторів.

? Чи рівні вектори $\overline{AD}$ і $\overline{AB}$ у розглянутій задачі? Ні, бо ці вектори неколінеарні.

Щоб встановити рівність векторів, перевірте виконання двох вимог:
1) дані вектори є співнапрямленими;
2) дані вектори мають рівні довжини.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Назву «вектор» (*vector* у перекладі з латинської — той, що несе) запровадив ірландський математик У. Гамільтон (1805 — 1865). Позначення $\overline{AB}$ для напрямленого відрізка вперше використав у 1806 р. швейцарський математик Ж. Арган (1768 — 1822). Починаючи з 1853 р., вектор стали позначати й однією буквою $\overline{r}$, як це робив французький математик О. Коші (1789 — 1857). Позначення $\vec{AB}$ почали застосовувати лише у XX ст.

Огюстен-Луї Коші

2. Термін «модуль» походить від латинського слова *modulus* — міра. Його вперше став використовувати англійський математик Р. Котес (1682 — 1716). Знак модуля числа $|x|$ ввів у 1841 р. видатний німецький математик К. Вейєрштрасс (1815 — 1897).

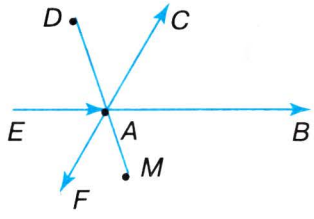
3. Термін «колінеарний» походить від латинського сполучення: *co* (*cum*) — разом, спільно, *lineo* — лінія.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

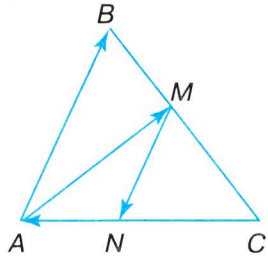
1. Поясніть, що таке вектор. Як його зображають? Позначають?
2. Як задати вектор?
3. Що таке довжина або модуль вектора?
4. Який вектор називають нуль-вектором? Одиничним вектором?
5. Які вектори називають колінеарними? Співнапрямленими? Протилежно напрямленими? Як їх позначають?
6. Сформулюйте означення рівних векторів.
7. Які вектори називають протилежними?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

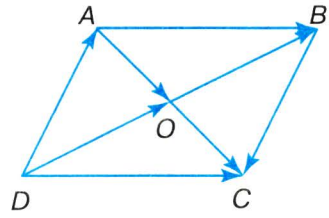
722'. На малюнках 287 — 289 назвіть:
1) усі зображені вектори; 2) вектори з початком у точці A;
3) колінеарні вектори; 4) співнапрямлені вектори;
5) протилежно напрямлені вектори.
Зробіть відповідний запис.



Мал. 287



Мал. 288



Мал. 289

723'. Вектор задано упорядкованою парою точок:
1) A і C; 2) C і A; 3) H і P; 4) P і H.
Побудуйте вказаний вектор. Зробіть відповідний запис.

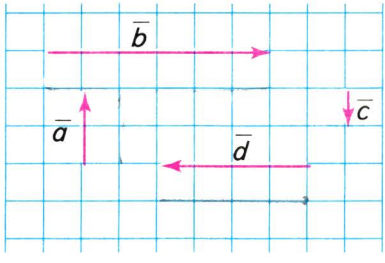
724'. Як записати, що вектор $\overline{AB}$ має довжину: 1) 5 см; 2) 3 мм; 3) 0,027 дм?

725'. Чому дорівнюють модулі векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\bar{d}$ на малюнку 290, якщо за одиницю довжини взято: 1) одну клітинку; 2) дві клітинки; 3) чотири клітинки? Чи є серед даних векторів одиничні вектори?

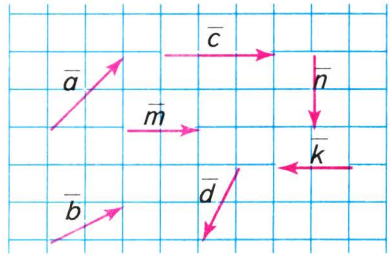
726'. На малюнку 291 за одиницю довжини взято дві клітинки. Чи є серед даних векторів одиничні вектори?
Назвіть вектори, що є: 1) колінеарними; 2) співнапрямленими;
3) протилежно напрямленими; 4) рівними; 5) протилежними.

727°. Побудуйте вектори $\overline{MN}$ і $\overline{PQ}$ так, щоб: 1) $\overline{MN} \uparrow\!\downarrow \overline{PQ}$;
2) $|\overline{MN}| = 3$ см, $|\overline{PQ}| = 3$ см; 3) $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ і $|\overline{MN}| = 3$ см, $|\overline{PQ}| = 3$ см.
Чи можна стверджувати, що $\overline{MN} = \overline{PQ}$?

728°. Накресліть паралелограм $ABCD$. На його сторонах і діагоналях позначте два вектори так, щоб вони були:
1) колінеарними; 2) співнапрямленими; 3) протилежно напрямленими;
4) рівними; 5) протилежними.



Мал. 290



Мал. 291

729°. Чи можна задати рівні вектори, що визначаються вершинами правильного трикутника? А колінеарні вектори? А рівні за модулем вектори?

730°. Накресліть правильний трикутник ABC та його середні лінії. Чи можна позначити два вектори так, щоб вони були:
1) колінеарними; 2) співнапрямленими; 3) протилежно напрямленими;
4) рівними; 5) протилежними?

731°. Дано трапецію з основами: 1) AC і BD; 2) AB і CD; 3) AD і CB.
Чи правильно, що $\overline{AB} = \overline{CD}$? Відповідь обґрунтуйте.

732°. $ABCD$ — ромб. Точка M — середина AB. $AB = 4$. Знайдіть довжину векторів $\overline{CD}$, $\overline{BA}$, $\overline{MB}$, $\overline{AM}$, $\overline{BC}$, $\overline{DA}$.

733. Дано чотири точки. Скільки ненульових векторів можна побудувати з кінцями у цих точках?

734. Точка B лежить між точками A і C. Точка M лежить між точками B і A. Серед векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AM}$, $\overline{BA}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$, $\overline{MA}$ назвіть:
1) співнапрямлені вектори; 2) протилежно напрямлені вектори.

735. Трикутник ABC симетричний трикутнику MPN відносно точки O. Серед векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{BA}$, $\overline{MP}$, $\overline{PN}$, $\overline{NM}$, $\overline{PM}$ назвіть рівні вектори.

736. Побудуйте вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо їх довжини, відповідно, дорівнюють 4 см і 2 см та відомо, що ці вектори:
1) протилежно напрямлені; 2) співнапрямлені.

737. Побудуйте вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо їх довжини дорівнюють по 1 см і дані вектори колінеарні. Скільки розв'язків має задача?

738. Дано правильний шестикутник зі стороною 2 см.
Яку довжину має вектор, що визначається:
1) двома сусідніми вершинами; 2) кінцями більшої діагоналі;
3) кінцями меншої діагоналі; 4) вершиною і точкою перетину діагоналей?

739. $ABCDEF$ — правильний шестикутник. Скільки пар рівних векторів можна побудувати з кінцями у його вершинах?

740*. Знайдіть геометричне місце кінців одиничних векторів, початки яких містяться в точці M.

741*. Знайдіть геометричне місце початків одиничних векторів, кінці яких містяться в точці H.

742*. Знайдіть геометричне місце кінців колінеарних одиничних векторів, початки яких містяться на прямій AB.

743*. Яке геометричне місце точок визначає:
1) початок вектора $\bar{a}$; 2) кінець вектора $\bar{a}$?

744*. За допомогою точки і вектора задайте пряму.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

745. Північний вітер змінився на: 1) північно-східний; 2) північно-західний; 3) східний. Покажіть початковий і кінцевий напрям вітру та напрям його зміни.

746. Вулиця проходить за напрямом з північного сходу на південний захід. У якому напрямі проходить паралельна їй вулиця? А перпендикулярна? Зробіть малюнки, вважаючи вертикальний край аркуша у зошиті напрямом на північ.

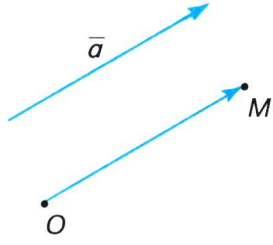
747. Туристи пройшли від базового табору в напрямі на північ 4 км і повернули на схід. Пройшовши за цим напрямом 1 км, вони пройшли на північ ще 2,5 км. Покажіть напрями їхнього руху на плані у масштабі 1 км в 1 см.

748. За допомогою векторів покажіть зміну середньодобової температури: 1) за два дні; 2) за тиждень.

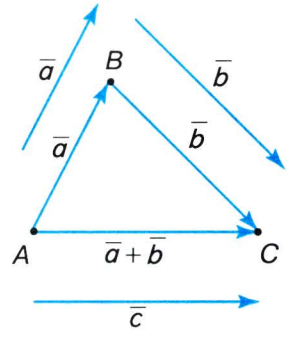
§23. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Вектори можна додавати, віднімати і множити на число. Дії над векторами виконують за особливими правилами. Розглянемо їх.

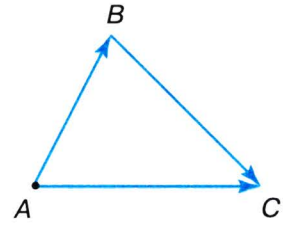
Для будь-якого вектора $\bar{a}$ і деякої точки O існує лише одна точка M, що $\overline{OM} = \bar{a}$ (мал. 292). Побудову точки M називають *відкладанням вектора $\bar{a}$ від точки O*.



Мал. 292



Мал. 293



Мал. 294

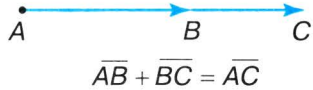
Нехай дано два вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Від довільної точки A відкладемо вектор $\overline{AB} = \bar{a}$, потім від точки B – вектор $\overline{BC} = \bar{b}$ (мал. 293). Початок вектора $\overline{AB}$ і кінець вектора $\overline{BC}$ задають вектор $\overline{AC} = \bar{c}$. Вектор $\bar{c}$ називають *сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$*. Можемо записати: $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.

Якщо будувати суму $\overline{AC}$ неколінеарних векторів $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$, спираючись на означення, то утворюється трикутник ABC (мал. 294). Тому цей спосіб знаходження суми називають *правилом трикутника*. Його можна застосувати до будь-яких двох векторів, зокрема колінеарних. На малюнках 295 і 296 ви бачите, як знаходять суму співнапрямлених векторів (мал. 295) і протилежно напрямлених векторів (мал. 296).

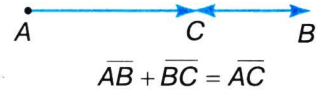
Взагалі **для будь-яких трьох точок A, B і C справджується рівність:**

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

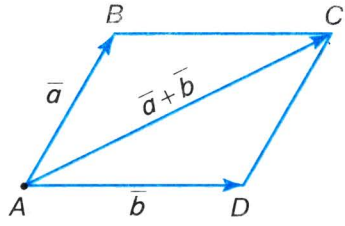
Суму двох неколінеарних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ можна знайти інакше – за *правилом паралелограма*. Для цього треба від довільної точки A відкласти



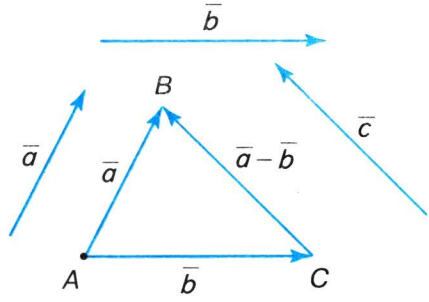
Мал. 295



Мал. 296



Мал. 297



Мал. 298

вектори $\overline{AB} = \bar{a}$ і $\overline{AD} = \bar{b}$, а потім побудувати паралелограм $ABCD$ (мал. 297). Тоді вектор $\overline{AC}$ дорівнює $\bar{a} + \bar{b}$.

Різницею векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається такий вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$, який при додаванні до вектора $\bar{b}$ дає вектор $\bar{a}$. Іншими словами, з рівності $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ випливає рівність $\bar{c} + \bar{b} = \bar{a}$. Звідси, щоб побудувати вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$, треба від довільної точки A відкласти вектори $\overline{AB} = \bar{a}$ і $\overline{AC} = \bar{b}$, (мал. 298). Тоді вектор $\overline{CB} = \bar{c}$ є різницею $\bar{a} - \bar{b}$.

Взагалі **для будь-яких трьох точок A, B і C справджується рівність:**

$$\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}.$$

Задача. На сторонах паралелограма $ABMC$ задано вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ (мал. 299). Виразіть діагоналі паралелограма через дані вектори.

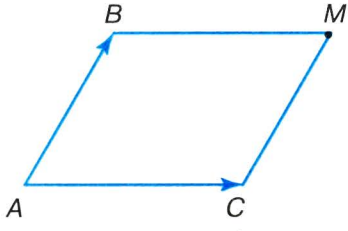
Розв'язання. 1) У паралелограмі $ABMC$ проведемо діагональ AM (мал. 300). Вектор $\overline{AM}$ дорівнює сумі векторів $\overline{AB}$ і $\overline{BM}$ за правилом трикутника. За властивістю паралелограма, $BM \parallel AC$ і $BM = AC$. Тому $\overline{BM} = \overline{AC}$. Отже, $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

2) У паралелограмі $ABMC$ проведемо діагональ CB (мал. 301). Вектор $\overline{CB}$ дорівнює різниці векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ за означенням. Отже, $\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC}$.

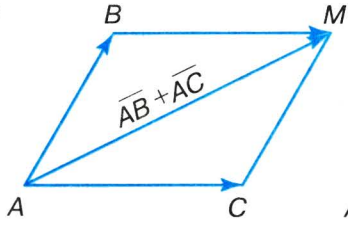
Щоб знайти суму і різницю неколінеарних векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, які відкладено від спільного початку A, побудуйте паралелограм $ABMC$. Тоді:

1) $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$ (мал. 300);

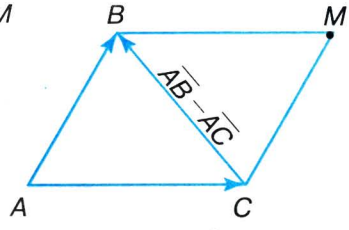
2) $\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC}$ (мал. 301).



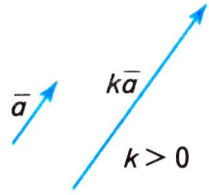
Мал. 299



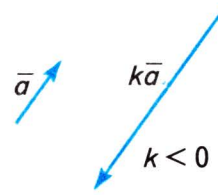
Мал. 300



Мал. 301



Мал. 302



Мал. 303

Добутком ненульового вектора $\bar{a}$ на число $k \neq 0$ називається вектор $\bar{d}$, довжина якого дорівнює добутку довжини вектора $\bar{a}$ на модуль числа k, а напрям збігається з напрямом вектора $\bar{a}$, коли $k > 0$, і протилежний напряму $\bar{a}$, коли $k < 0$.

Коротко записуємо: $\bar{d} = k \cdot \bar{a}$.

За означенням добутку вектора на число:

1) $|\bar{d}| = |k| \cdot |\bar{a}|$;

2) $\bar{d} \uparrow\uparrow \bar{a}$, коли $k > 0$ (мал. 302);

3) $\bar{d} \uparrow\downarrow \bar{a}$, коли $k < 0$ (мал. 303).

Добуток нуль-вектора на число і вектора на число 0 є нуль-вектором: $k \cdot \bar{0} = 0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$.

Властивості додавання векторів і множення вектора на число наведено у таблиці 25.

Таблиця 25

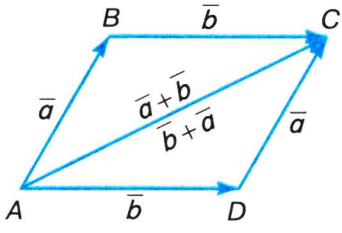
<table>
<tr><th colspan="2">ВЛАСТИВОСТІ</th></tr>
<tr><th>ДОДАВАННЯ ВЕКТОРІВ</th><th>МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО</th></tr>
<tr><td>$\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$</td><td>$1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Переставний закон
$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ $\qquad$ $k \cdot \bar{a} = \bar{a} \cdot k$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сполучний закон
$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ $\qquad$ $k \cdot (m \cdot \bar{a}) = (k \cdot m) \cdot \bar{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Перший розподільний закон
$k \cdot \bar{a} + m \cdot \bar{a} = (k + m) \cdot \bar{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Другий розподільний закон
$k \cdot \bar{a} + k \cdot \bar{b} = k \cdot (\bar{a} + \bar{b})$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$</td><td>$-1 \cdot \bar{a} = -\bar{a}$</td></tr>
<tr><td>$k \cdot \bar{0} = 0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$</td></tr>
</table>

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

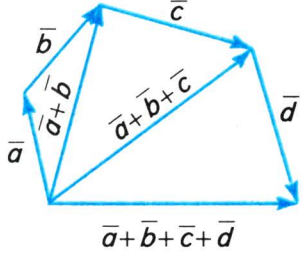
1. У вас могло виникнути запитання: *Як доводять векторні рівності?* Розглянемо приклад. Щоб довести векторну рівність $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$, треба:
1) побудувати вектор $\bar{a} + \bar{b}$; 2) побудувати вектор $\bar{b} + \bar{a}$;
3) довести, що побудовані вектори рівні.
Нехай дано неколінеарні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (випадок колінеарності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ розгляньте самостійно). Від довільної точки A відкладемо вектор $\overline{AB} = \bar{a}$, а від точки B – вектор $\overline{BC} = \bar{b}$ (мал. 304).
Тоді $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \bar{a} + \bar{b}$. (1)
Доповнимо трикутник ABC до паралелограма $ABCD$ так, щоб сторона AC цього трикутника була діагоналлю паралелограма. Тоді $\overline{DC} = \overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AD} = \overline{BC} = \bar{b}$ і $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \bar{b} + \bar{a}$. (2)
З рівностей (1) і (2) випливає, що $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

2. Щоб побудувати суму кількох векторів, застосовують *правило многокутника*.

Якщо вектори побудовано так, що початок другого вектора збігається з кінцем першого вектора, початок третього – з кінцем другого і т. д., то сума дорівнює вектору, початок якого збігається з початком першого, а кінець – з кінцем останнього вектора. На малюнку 305 ви бачите, як знайшли суму векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\bar{d}$.



Мал. 304



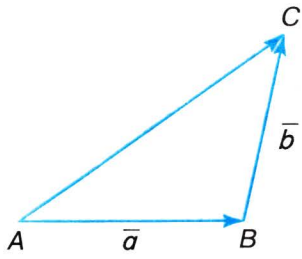
Мал. 305

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

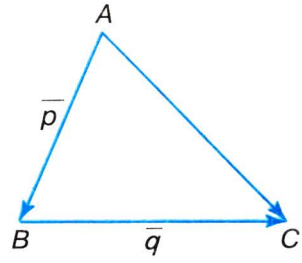
1. Що називається сумою двох векторів?
2. Сформулюйте правило трикутника.
3. Що таке правило паралелограма?
4. Що називається різницею двох векторів?
5. Сформулюйте означення добутку вектора на число.
6. Які властивості має додавання векторів?
7. Назвіть властивості множення вектора на число.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

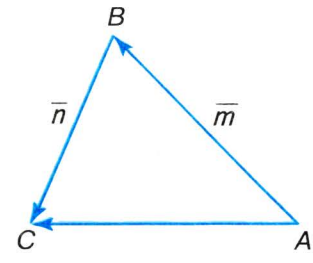
749'. На малюнках 306 — 308 назвіть вектор, що є сумою двох даних векторів.



Мал. 306

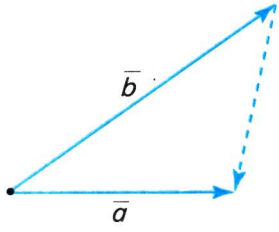


Мал. 307

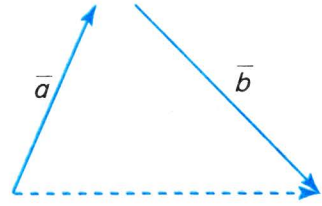


Мал. 308

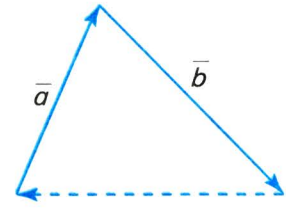
750'. Чи правильно застосували правило трикутника до векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (мал. 309 — 311)?



Мал. 309



Мал. 310



Мал. 311

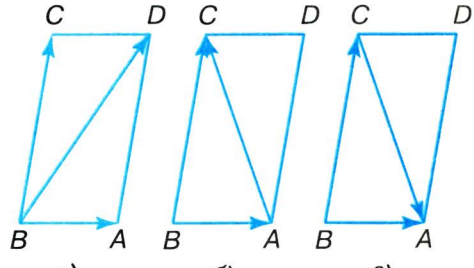
751'. Який вектор дорівнює сумі векторів:

1) $\overline{AM} + \overline{MN}$; 2) $\overline{AB} + \overline{CA}$; 3) $\overline{BK} + \overline{KN}$?

752'. На суміжних сторонах паралелограма задано два вектори (мал. 312, 313). Чому дорівнює третій із зображених векторів?

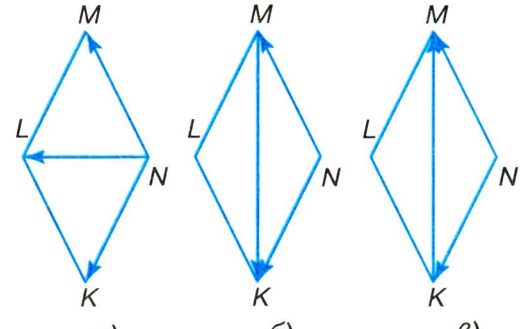
753'. На малюнках 314 і 315 для даних векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ побудовано їх суми: $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} + \bar{c}$ і $\bar{b} + \bar{c}$. Поясніть за малюнком:

1) від якої точки відкладали перший доданок;
2) від якої точки відкладали другий доданок;
3) який вектор дорівнює сумі двох доданків.



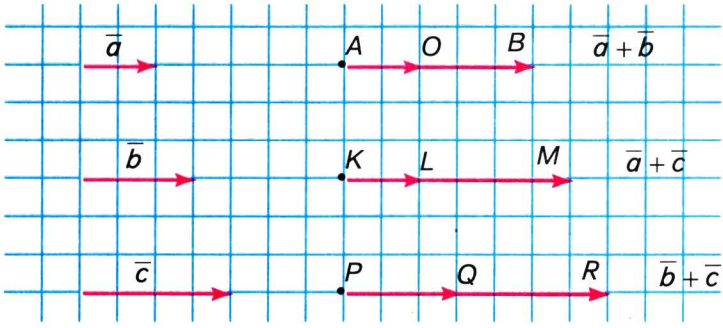
а) б) в)

Мал. 312

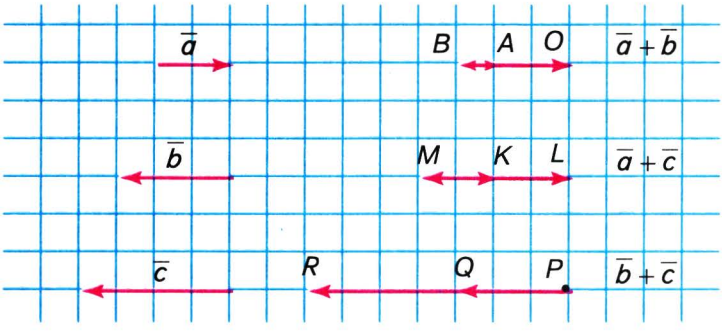


а) б) в)

Мал. 313



Мал. 314



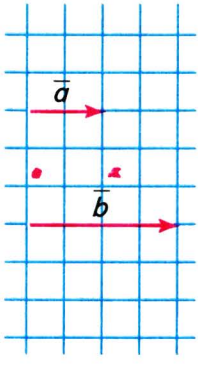
Мал. 315

754'. Чому дорівнює k у рівності (мал. 316 – 319): 1) $\bar{a} = k \cdot \bar{b}$; 2) $\bar{b} = k \cdot \bar{a}$?

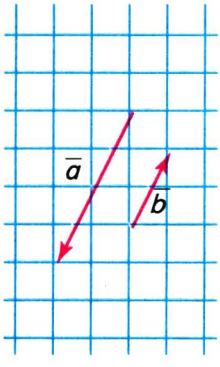
755°. ABC – трикутник. Побудуйте суму векторів:
1) $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$; 2) $\overline{AC}$ і $\overline{CB}$; 3) $\overline{BC}$ і $\overline{CA}$.

756°. Точки A, B, C лежать на одній прямій. Знайдіть суму векторів:
1) $\overline{AB} + \overline{BC}$; 2) $\overline{AB} + \overline{BA}$; 3) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$.

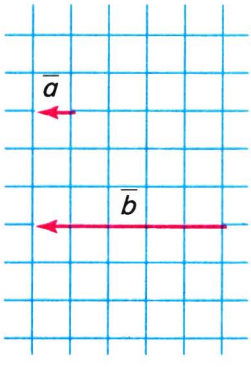
757°. Точки A, B, C не лежать на одній прямій. Знайдіть суму векторів:
1) $\overline{AB} + \overline{BC}$; 2) $\overline{AB} + \overline{BA}$; 3) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$.



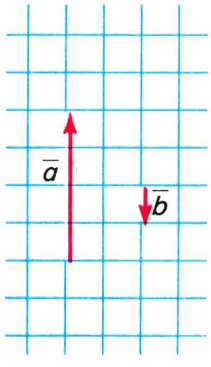
Мал. 316



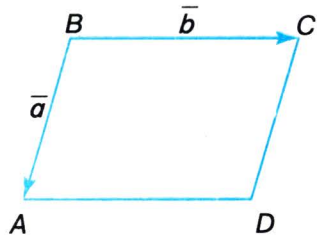
Мал. 317



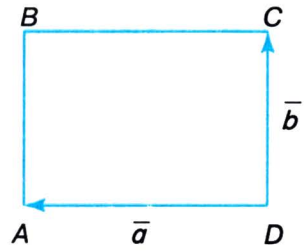
Мал. 318



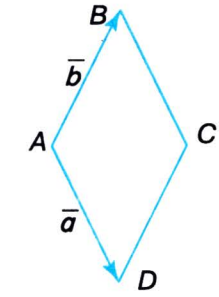
Мал. 319



Мал. 320



Мал. 321



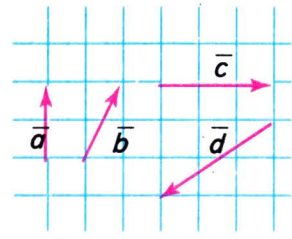
Мал. 322

758°. ABC — трикутник. Побудуйте різницю векторів:
1) $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$; 2) $\overline{AC}$ і $\overline{CB}$; 3) $\overline{BC}$ і $\overline{CA}$.

759°. ABC — правильний трикутник зі стороною 1. Яка довжина вектора:
1) $\overline{AB} + \overline{BC}$; 2) $\overline{AB} - \overline{BC}$; 3) $\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{CA}$?

760°. На сторонах паралелограма $ABCD$ задано вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (мал. 320 — 322). Побудуйте вектор:
1) $\bar{a} + \bar{b}$; 2) $\bar{a} - \bar{b}$; 3) $\bar{b} - \bar{a}$.

761°. На малюнку 323 дано вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\bar{d}$. Побудуйте суму і різницю кожної пари векторів.



Мал. 323

762°. $ABCD$ — квадрат зі стороною 1. Яка довжина вектора:
1) $\overline{AB} + \overline{AD}$; 2) $\overline{AB} - \overline{AD}$; 3) $\overline{AB} - \overline{AD} - \overline{DC}$?

763°. Накресліть таблицю 26 та у її клітинках поставте знак «+», якщо вектори відповідають указаній вимозі при даному значенні k.

Таблиця 26

Вектори $\bar{a}$ і $k \cdot \bar{a}$	$k = 2$	$k = -0{,}5$	$k = 1$	$k = -1$	$k = 0{,}5$	$k = -2$
співнапрямлені						
протилежно напрямлені						
протилежні						
мають рівні довжини						
рівні						

764°. Задайте вектор $\bar{a}$ і побудуйте вектор: 1) $2\bar{a}$; 2) $-\frac{1}{3}\bar{a}$; 3) $\frac{2}{3}\bar{a}$; 4) $-4\bar{a}$.

765°. Порівняйте довжини векторів: 1) $6\bar{a}$ і $-6\bar{a}$; 2) $-3\bar{a}$ і $\frac{1}{3}\bar{a}$; 3) $\frac{1}{2}\bar{a}$ і $-2\bar{a}$.

766. Знайдіть суму векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{CB}$, де A, B і C — три задані точки. Розгляньте два випадки.

767. **Доведіть, що для векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ і $\overline{AC}$ справджується нерівність: $|\overline{AC}| \leqslant |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$.**

768. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Чи рівні суми векторів:
1) $\overline{AB} + \overline{BC}$ і $\overline{DC} + \overline{AD}$; 2) $\overline{AB} + \overline{BD}$ і $\overline{AC} + \overline{CD}$?

769. Чотирикутник $ABCD$ — ромб з гострим кутом A. Порівняйте суми модулів векторів:
1) $|\overline{AB}| + |\overline{BC}|$ і $|\overline{DC}| + |\overline{AD}|$; 2) $|\overline{AB}| + |\overline{BD}|$ і $|\overline{AC}| + |\overline{CD}|$.

770. $ABCKFP$ — правильний шестикутник зі стороною 2. Знайдіть довжину вектора: 1) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CP}$; 2) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AP} + \overline{FP} + \overline{KF} + \overline{KC}$.

771. Спростіть вираз: 1) $\overline{BA} - \overline{BC} + 2\overline{AC}$; 2) $2\overline{CD} - \overline{DA} - \overline{DC} + \overline{CA}$.

772. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює a. Знайдіть:
1) $|\overline{AB}| - |\overline{AC}|$; 2) $|\overline{AB}| + |\overline{AC}|$; 3) $|\overline{AB} - \overline{CB}|$.

773. При якому k виконується рівність: $\overline{AB} + \overline{BC} = k(\overline{CB} - \overline{AB})$?

774. **Дано вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$. За якої умови вектори $\bar{a} + \bar{b}$ і $\bar{a} - \bar{b}$ колінеарні?**

775. Для яких ненульових векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ виконується нерівність:
1) $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$; 2) $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a}| + |\bar{b}|$?

776. Побудуйте вектор $\bar{a}$. Збільшіть його довжину спочатку в 5 разів, а потім у 2 рази. Побудуйте отриманий вектор. Скільки розв'язків має задача?

777. У трикутнику ABC $\overline{AB} = \bar{c}$, $\overline{AC} = \bar{b}$, $\overline{BC} = \bar{a}$.
Побудуйте вектор: 1) $\frac{\bar{a} + \bar{b}}{2}$; 2) $\frac{\bar{c} + \bar{b}}{2}$.

778. $ABCD$ — паралелограм. Доведіть, що $\overline{AC} + \overline{BD} = 2\overline{BC}$.

779. **AP — медіана трикутника ABC. Доведіть, що $\overline{AP} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$.**

780. O — точка перетину медіан трикутника ABC. Доведіть, що $\overline{AO} = \frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC})$.

781*. **Якщо у трикутнику ABC проведено медіани AA_1, BB_1 і CC_1, то $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \bar{0}$.** Доведіть.

782*. **Для того, щоб точка Q була точкою перетину медіан трикутника ABC, необхідно і достатньо, щоб $\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} = \bar{0}$.** Доведіть.

783*. Якщо M — точка перетину медіан трикутника ABC, тоді для будь-якої точки O справджується рівність: $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 3\overline{OM}$. Доведіть.

784*. Медіани трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ перетинаються відповідно в точках O і O_1. Доведіть, що $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = 3\overline{OO_1}$.

785*. На колі з центром в точці O позначено точки A, B і C так, що $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \bar{0}$. Доведіть, що трикутник ABC — рівносторонній.

786*. Дано: чотирикутник $ABCD$, $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{AB}$. Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.

787*. Дано три точки A, B і C. Побудуйте точку D так, щоб виконувалась рівність:
1) $\overline{DA} - 2\overline{DB} - \overline{DC} = \bar{0}$; 2) $\overline{AB} + 3\overline{BD} = \overline{BC}$.

788*. Доведіть тотожність: 1) $-\overline{DB} + \overline{BD} - \overline{CD} = 2\overline{BC} + \overline{CD}$;
2) $\overline{BA} + \overline{DC} + \overline{CD} + \overline{BM} + \overline{MA} + 2\overline{AB} = \bar{0}$.

789*. Побудуйте вектор: 1) $4\bar{a} + 6(\bar{b} - 3\bar{c} + \bar{a})$; 2) $-(\bar{a} - 8\bar{b}) + 4(2\bar{b} + \bar{a})$.

790*. Дано чотири точки A, B, C і D. Точки M і N — середини відрізків AC і BD. Доведіть, що $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{CB})$.

791*. Дано три точки A, B і C такі, що $\overline{AC} = k \cdot \overline{CB}$. Доведіть, що для будь-якої точки O справджується рівність: $\overline{OC} = \frac{\overline{OA} + k \cdot \overline{OB}}{1 + k}$.

792*. Доведіть, що точка M лежить на прямій AB тоді і тільки тоді, коли для довільної точки O справджується рівність: $\overline{OM} = k \cdot \overline{OA} + (1 - k)\overline{OB}$, де k — будь-яке дійсне число.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

793. Модуль рівнодійної двох сил дорівнює модулю кожної з них. Який кут між двома даними силами?

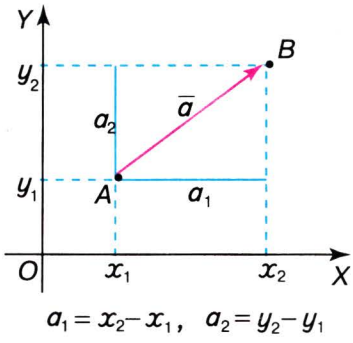
794. Двоє учнів витягують човен на берег, тримаючи його за трос. Яка сила діє на човен, якщо один учень прикладає силу 100 Н, а другий — 120 Н?

795*. Моторний човен відчалює від берега річки із власною швидкістю $v_1 = 12$ км/год, а течія річки має швидкість $v_2 = 4$ км/год (мал. 324). З якою швидкістю човен віддаляється від берега? За який час човен опиниться посередині річки і на якій відстані від причалу, якщо ширина річки становить 6 км? Виконайте відповідні малюнки.

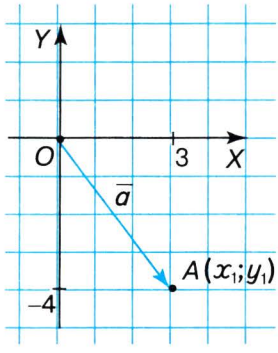
Мал. 324

§24. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА

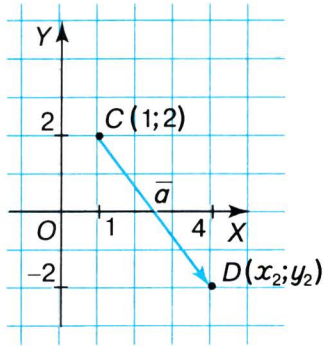
Ви вже знаєте, що впорядкована пара точок A і B визначає вектор $\overline{AB}$. Нехай точки A і B мають координати: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ (мал. 325). Числа $a_1 = x_2 - x_1$ і $a_2 = y_2 - y_1$ називають *координатами вектора $\bar{a}$ у даній системі координат.*



Мал. 325



Мал. 326



Мал. 327

Коротко записуємо: $\bar{a}(a_1; a_2)$, і говоримо: вектор $\bar{a}$ з координатами a_1 і a_2. Зрозуміло, що координати нуль-вектора дорівнюють нулю: $\bar{0}(0; 0)$.

Оскільки довжина вектора $\bar{a}(a_1; a_2)$ дорівнює відстані між його початком і кінцем, то її можна обчислити за формулою: $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Доведіть це самостійно.

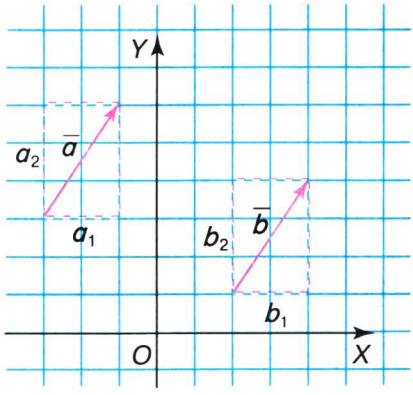
Задача. Побудуйте вектор $\bar{a}(3; -4)$.

Розв'язання. Щоб побудувати вектор $\bar{a}$, треба задати його початок і кінець у даній системі координат. Нехай початок вектора $\bar{a}$ (мал. 326) міститься в початку координат $O(0; 0)$, а його кінець – у точці $A(x_1; y_1)$. Тоді, за означенням координат вектора, $3 = x_1 - 0$, $-4 = y_1 - 0$. Звідси $x_1 = 3$, $y_1 = -4$. Отже, точка A має координати $(3; -4)$. Вектор $\overline{OA} = \bar{a}$ – шуканий.

Як побудувати вектор $\bar{a}$, якщо його початок розмістити в іншій точці координатної площини?

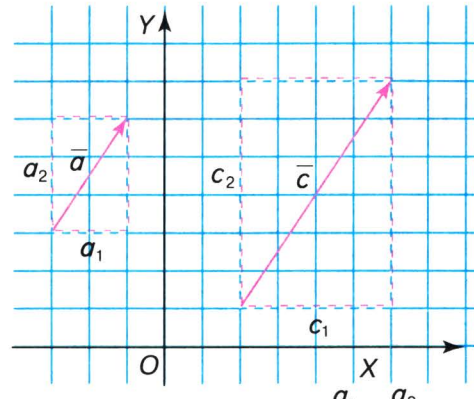
На малюнку 327 початок вектора $\bar{a}(3; -4)$ міститься в точці $C(1; 2)$, а кінець – у точці $D(x_2; y_2)$. За означенням координат вектора, $3 = x_2 - 1$, $-4 = y_2 - 2$. Звідси $x_2 = 4$, $y_2 = -2$. Отже, кінець вектора $\bar{a}$ міститься в точці $D(4; -2)$. Вектор $\overline{CD} = \bar{a}$ – шуканий.

Взагалі **довжина і напрям вектора не залежать від розміщення його початку в системі координат.**



$\bar{a}(a_1; a_2) = \bar{b}(b_1; b_2)$, $a_1 = b_1$ і $a_2 = b_2$

Мал. 328



$\bar{a}(a_1; a_2) \parallel \bar{c}(c_1; c_2)$, $\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$

Мал. 329

Наведемо без доведення інші важливі твердження.

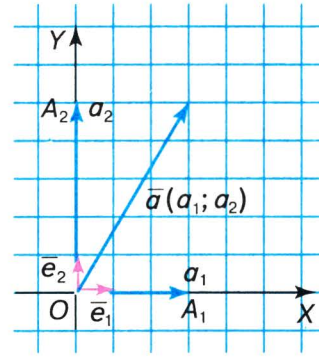
1. Вектори рівні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати рівні (мал. 328).

2. Вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні (мал. 329).

3. Щоб додати вектори, їх відповідні координати додають.

4. Щоб помножити вектор на число, його координати множать на це число.

Нехай вектор $\bar{a}(a_1; a_2)$ відкладено від початку координат (мал. 330). Відкладемо на осях координат одиничні вектори $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$ (їх ще називають *координатними векторами*), а також вектори $\overline{OA}_1$ і $\overline{OA}_2$, що мають довжини відповідно a_1 і a_2. Виразимо вектори $\overline{OA}_1$ і $\overline{OA}_2$ через відповідні одиничні вектори: $\overline{OA}_1 = a_1 \cdot \bar{e}_1$, $\overline{OA}_2 = a_2 \cdot \bar{e}_2$. Вектор $\bar{a}$ дорівнює сумі векторів $\overline{OA}_1$ і $\overline{OA}_2$. Звідси дістанемо: $\bar{a} = \overline{OA}_1 + \overline{OA}_2 = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2$.



Мал. 330

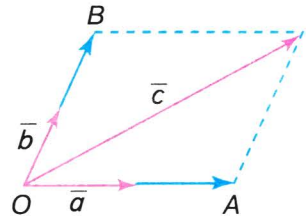
Рівність $\bar{a} = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2$ називається *розкладом вектора $\bar{a}$ за двома координатними векторами*, а числа a_1 і a_2 – *коефіцієнтами розкладу*. Взагалі **розклад вектора за двома неколінеарними векторами єдиний.** Тому можна дати наступне означення: координатами вектора у певній системі координат називаються коефіцієнти розкладу даного вектора за координатними векторами.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

У вас могло виникнути запитання: *Як довести, що розклад вектора за двома неколінеарними векторами єдиний?* Поміркуємо.

Нехай дано два ненульові неколінеарні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ та довільний вектор $\bar{c}$. Відкла-

демо дані вектори від спільного початку O (мал. 331). Вектор $\bar{c}$ дорівнює сумі векторів $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$, колінеарних з векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ відповідно.



Мал. 331

Тоді $\overline{OA} = m \cdot \bar{a}$, $\overline{OB} = n \cdot \bar{b}$, де m і n — деякі числа, що одночасно не дорівнюють нулю.

Тоді $\bar{c} = \overline{OA} + \overline{OB} = m \cdot \bar{a} + n \cdot \bar{b}$.

Отже, дістали розклад вектора $\bar{c}$ за векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Нехай існує інший розклад вектора $\bar{c}$ за векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, тобто існують такі числа m_1 і n_1, відмінні від чисел m і n, що $\bar{c} = m_1 \cdot \bar{a} + n_1 \cdot \bar{b}$.

Тоді $\bar{c} = m \cdot \bar{a} + n \cdot \bar{b} = m_1 \cdot \bar{a} + n_1 \cdot \bar{b}$.

Отже, $m \cdot \bar{a} + n \cdot \bar{b} = m_1 \cdot \bar{a} + n_1 \cdot \bar{b}$, звідки $(m - m_1) \cdot \bar{a} + (n - n_1) \cdot \bar{b} = \bar{0}$.

Оскільки вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ненульові і неколінеарні, значить, $m - m_1 = 0$ і $n - n_1 = 0$.

Звідси $m = m_1$ і $n = n_1$, що суперечить припущенню. Отже, розклад вектора за двома неколінеарними векторами єдиний.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

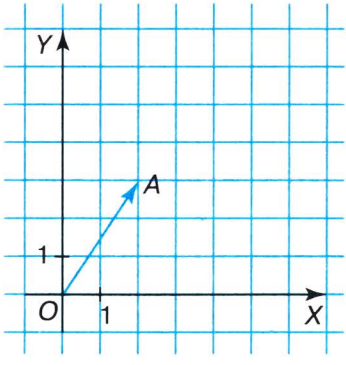
1. Що називають координатами вектора?
2. Як знайти довжину вектора, заданого своїми координатами?
3. Поясніть, як побудувати вектор за його координатами.
4. Які координати мають рівні вектори? Колінеарні вектори?
5. Як знайти суму векторів, заданих своїми координатами?
6. Як помножити на число вектор, заданий своїми координатами?
7. Що називається розкладом вектора за двома координатними векторами?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

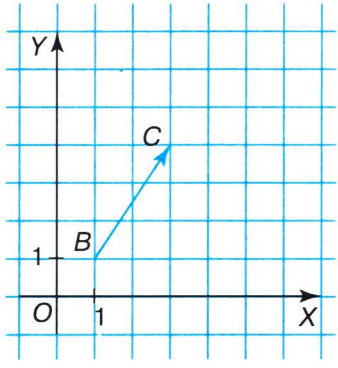
796'. За малюнками 332 — 334 знайдіть координати початку і кінця заданих векторів.

797'. Які координати має вектор:
1) $\overline{OA}$ (мал. 332); 2) $\overline{BC}$ (мал. 333); 3) $\overline{HT}$ (мал. 334)?

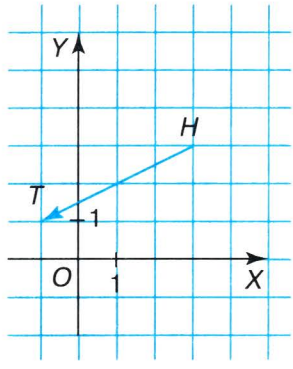
798'. Яку довжину має вектор: 1) $\bar{b}(b_1; b_2)$; 2) $\bar{c}(c_1; c_2)$; 3) $\bar{d}(d_1; d_2)$?



Мал. 332



Мал. 333



Мал. 334

799'. Чи є рівними вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо:
1) $\bar{a}(2; -4)$ і $\bar{b}(2; 4)$; 2) $\bar{a}(2; -4)$ і $\bar{b}(-2; 4)$;
3) $\bar{a}(2; -4)$ і $\bar{b}(-2; -4)$; 4) $\bar{a}(2; -4)$ і $\bar{b}(2; -4)$?

800'. Серед даних векторів знайдіть колінеарні вектори: $\bar{a}(3; 2)$, $\bar{b}(6; 4)$, $\bar{c}(2; 3)$, $\bar{d}(-6; -4)$, $\bar{h}(1{,}5; 1)$, $\bar{k}(-3; 4)$, $\bar{p}(15; 10)$, $\bar{t}(-9; -6)$.

801°. Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$, якщо: 1) $A(-1; 5)$, $B(2; 5)$;
2) $A(-4; 6)$, $B(1; 0)$; 3) $A(1; 1)$, $B(3; -9)$. Побудуйте даний вектор.

802°. Накресліть у зошиті таблицю 27 та заповніть її.

Таблиця 27

A	$(1; 4)$		$(5; 2)$	$(6; -6)$		$(5; 7)$
B	$(0; -3)$	$(2; -2)$			$(2; 1)$	$(11; 9)$
$\overline{AB}$		$\overline{AB}(8; 5)$	$\overline{AB}(4; 3)$	$\overline{AB}(-3; 5)$	$\overline{AB}(3; 0)$	

803°. Знайдіть довжину вектора $\bar{a}$:
1) $\bar{a}(1; 1)$; 2) $\bar{a}(4; 3)$; 3) $\bar{a}(12; -5)$; 4) $\bar{a}(-6; -8)$.

804°. Знайдіть довжину вектора $\overline{AB}$, якщо відомі координати точок A і B:
1) $A(10; 3)$, $B(0; 5)$; 2) $A(2; -1)$, $B(5; 2)$; 3) $A(-1; -2)$, $B(1; 2)$.

805°. Чи є одиничним вектор: 1) $\bar{a}(1; 0)$; 2) $\bar{b}\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$; 3) $\bar{c}(1; 1)$?

806°. Знайдіть координати суми векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо:
1) $\bar{a}(1; 2)$, $\bar{b}(3; 4)$; 2) $\bar{a}(-3; 1)$, $\bar{b}(2; -4)$; 3) $\bar{a}(-6; -2)$, $\bar{b}(6; 2)$.

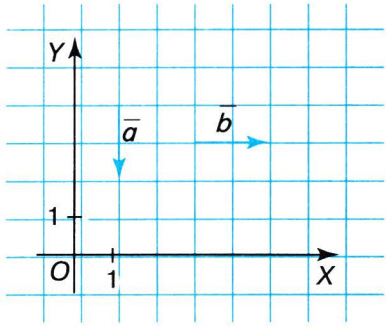
807°. Знайдіть координати суми векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (мал. 335)?

808°. Чи є вектор $\bar{c}(5; 2)$ сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (мал. 336)?

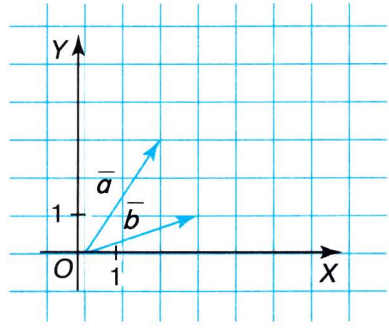
809°. Який вектор треба додати до вектора $\bar{a}(4; 3)$, щоб отримати нуль-вектор?

810°. Дано вектор $\bar{a}(1; 4)$. Знайдіть координати векторів:
1) $5\bar{a}$; 2) $-3\bar{a}$; 3) $\frac{1}{2}\bar{a}$; 4) $-\bar{a}$.

811°. Дано: $\bar{b}(1; 2)$, $\bar{c}(-5; 8)$. Знайдіть координати вектора $\bar{a}$, якщо:
1) $\bar{a} = \bar{c} - \bar{b}$; 2) $\bar{a} = \bar{b} + 0{,}5\bar{c}$; 3) $4\bar{a} = \bar{b} + \bar{c}$.



Мал. 335



Мал. 336

812°. Вектор $\bar{a}$ розкладено за координатними векторами $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$:
1) $3\bar{e}_1 + \bar{e}_2$; 2) $-5\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$; 3) $\bar{e}_1 - \bar{e}_2$.
Які координати у даного вектора? Побудуйте його.

813°. Запишіть розклад вектора $\bar{a}$ за координатними векторами $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$, якщо:
1) $\bar{a}(1; 3)$; 2) $\bar{a}(2; 0)$; 3) $\bar{a}(-4; -5)$.

814. Серед векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{DA}$, $\overline{BD}$ знайдіть колінеарні вектори, якщо: 1) $A(2; 3)$, $B(2; -1)$, $C(1; -1)$, $D(1; 13)$;
2) $A(-1; 2)$, $B(0; -6)$, $C(1; -4)$, $D(-3; 6)$.

815. При якому значенні λ вектори $\bar{a}(3; 6)$ і $\bar{b}(1; \lambda)$ колінеарні?

816. Знайдіть координати вектора, протилежного до $\overline{AB}$, якщо:
1) $A(10; 9)$, $B(1; 1)$; 2) $A(4; -7)$, $B(0; 6)$.

817. При якому λ вектор $\bar{a}(1; \lambda)$: 1) є одиничним; 2) має довжину 3?

818. Модуль вектора $\lambda\bar{a}$ дорівнює 8. Знайдіть λ, якщо: 1) $\bar{a}(-1; 1)$; 2) $\bar{a}(0; -4)$.

819. Побудуйте суму векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо $A(-1; 2)$, $B(2; -1)$, $C(1; -3)$ і $D(-5; 3)$. Розв'яжіть задачу двома способами.

820. Знайдіть координати векторів: $\bar{a} + \bar{b}$; $-3\bar{a} + \bar{b} - 7\bar{c} + \bar{d}$; $5\bar{a} - \bar{b} + \bar{c} - \bar{d}$ та побудуйте їх, якщо:
1) $\bar{a}(2; 0)$, $\bar{b}(1; 4)$, $\bar{c}(-1; 1)$, $\bar{d}(0; 2)$; 2) $\bar{a}(0; -5)$, $\bar{b}(2; -3)$, $\bar{c}(3; 7)$, $\bar{d}(5; 4)$.

821. Побудуйте паралелограм на векторах $\overline{OA}(2; 1)$ і $\overline{OB}(1; 4)$. Визначте довжини його діагоналей.

822. Відомі координати вершин трикутника ABC: $A(6; 2)$, $B(1; 1)$, $C(-5; 9)$. Знайдіть координати вектора $\overline{AM}$, якщо AM медіана даного трикутника.

823. Чи рівні вектори $\bar{b} + 3\bar{c}$ та $\bar{a} - \bar{c}$, якщо: $\bar{a}(1; 3)$, $\bar{b}(-7; -5)$, $\bar{c}(2; 2)$?

824. Одна з вершин квадрата зі стороною 2 см лежить у початку координат, а дві інші — на осях координат. На сторонах квадрата задано вектори, початок першого з яких лежить у початку координат, а напрями інших векторів можна дістати, обходячи квадрат за стрілкою годинника. Запишіть розклад цих векторів за координатними векторами, якщо:
1) $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$ см; 2) $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 2$ см.

825*. Доведіть, що точки $A(-1; 2)$, $B(2; -1)$, $C(1; -3)$ і $D(-5; 3)$ є вершинами трапеції.

826*. Побудуйте вектор $\overline{AB} + \overline{AC} + 2\overline{CA}$, якщо $A(3; 3)$, $B(-8; 1)$, $C(4; -1)$. Розв'яжіть задачу двома способами.

827*. Побудуйте вектор $2\bar{a} + 5\bar{c}$, якщо $\bar{a}(2; 5)$, $\bar{c}(-1; -1)$. Розв'яжіть задачу двома способами.

828*. Знайдіть модуль вектора $2\bar{a} - \bar{b}$, якщо:
1) $\bar{a}(2; 4)$, $\bar{b}(-1; 8)$; 2) $\bar{a}(0; -4)$, $\bar{b}(2; 3)$.

829*. На сторонах трикутника ABC задано вектори $\overline{AB}(2; 10)$ і $\overline{AC}(6; -2)$. Які координати мають вектори $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ і $\overline{CP}$, що визначаються медіанами даного трикутника? Знайдіть довжини його медіан.

830*. Знайдіть координати вершин трикутника ABC і координати вектора $\overline{CA}$, якщо: 1) $A(1; -4)$, $\overline{AB}(0; 6)$, $\overline{BC}(2; -1)$; 2) $A(2; -5)$, $\overline{AB}(0; 2)$, $\overline{BC}(4; 2)$.

831*. Знайдіть координати вектора $\bar{b}$, колінеарного з вектором $\bar{a}$, якщо $|\bar{b}| = 10$ і $\bar{a}(4; 3)$.

832*. Визначте координати вектора $\bar{d}$, якщо $\bar{d} \uparrow\downarrow \bar{c}$ і:
1) $\bar{c}(1; -2)$, $|\bar{d}| = 5$; 2) $\bar{c}(12; 5)$, $|\bar{d}| = 75$.

833*. Дано: $\overline{AB} = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\overline{BC} = -4\bar{a} - \bar{b}$, $\overline{CD} = -5\bar{a} - 3\bar{b}$. Доведіть, що $ABCD$ – трапеція.

834*. Дано: трикутник ABC, одиничні взаємно перпендикулярні вектори $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$, $\overline{AB} = 5\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$, $\overline{CA} = -7\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$. Обчисліть довжину медіани AM.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

835. На тіло діють сили $\bar{F}_1(1; 5)$ і $\bar{F}_2(-4; 7)$. Знайдіть вектор рівнодійної сили.

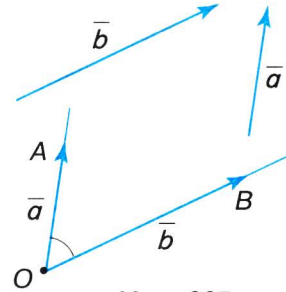
836. Дано вектор рівнодійної сили $\bar{F}(6; 13)$. Знайдіть вектори сил, що мають напрями осей координат і для яких дана сила є рівнодійною.

837. Щоб зважити брусок вагою 10 Н за допомогою двох динамометрів, розрахованих на вимірювання сили 5 Н, діють так. Обидва динамометри укріплюють поряд на одному рівні, а брусок підвішують одразу до обох гачків динамометрів. Поясніть, чому так можна зважити брусок.

§25. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Ви вже знаєте дві дії над векторами – додавання і множення вектора на число. Розглянемо нову дію над векторами – *скалярне множення*. Спочатку введемо поняття кута між векторами.

На малюнку 337 ви бачите два вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Відкладемо від точки O вектори $\overline{OA} = \bar{a}$ і $\overline{OB} = \bar{b}$. Промені OA і OB утворюють кут AOB, який називають *кутом між векторами* $\bar{a}$ і $\bar{b}$.



Мал. 337

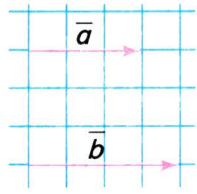
Коротко записуємо: $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}})$, і читаємо: кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ співнапрямлені, то $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = 0^\circ$, а якщо протилежно напрямлені, то $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = 180^\circ$.

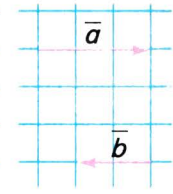
Скалярним добутком двох ненульових векторів називається число, що дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними.

Скалярний добуток позначають так: $\bar{a}\,\bar{b}$.

Отже, за означенням, $\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\widehat{\bar{a};\bar{b}})$.



Мал. 338



Мал. 339

Якщо $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ (мал. 338),
то $\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos 0^\circ = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot 1 = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$.

Якщо $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ (мал. 339),
то $\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos 180^\circ = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot (-1) = -|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$.

Якщо $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$.

Якщо $\bar{a} = \bar{b}$, то $\bar{a}\,\bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\bar{a}|^2$.

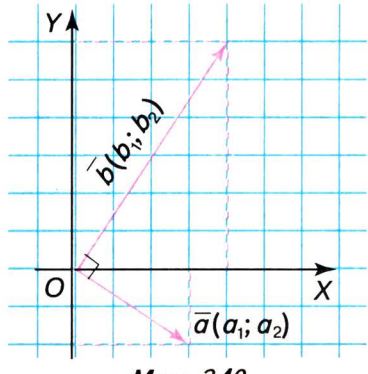
Добуток $\bar{a}\,\bar{a}$ називається *скалярним квадратом* вектора $\bar{a}$ і позначається $\bar{a}^2$. Отже, $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$, тобто **скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини.**

Властивості скалярного множення векторів наведено в таблиці 28.

Таблиця 28

Переставний закон	$\bar{a}\,\bar{b} = \bar{b}\,\bar{a}$
Сполучний закон (відносно скалярного множника)	$(k \cdot \bar{a})\,\bar{b} = k \cdot \bar{a}\,\bar{b}$
Розподільний закон	$(\bar{a} + \bar{b})\,\bar{c} = \bar{a}\,\bar{c} + \bar{b}\,\bar{c}$

Якщо вектори задано своїми координатами: $\bar{a}\,(a_1; a_2)$ і $\bar{b}\,(b_1; b_2)$, то **скалярний добуток дорівнює сумі добутків відповідних координат даних векторів:** $\bar{a}\,\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.



Мал. 340

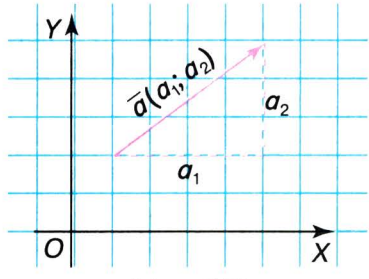
Звідси дістанемо:

1) умову перпендикулярності двох векторів $\bar{a}(a_1; a_2)$ і $\bar{b}\,(b_1; b_2)$ (мал. 340):

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0;$$

2) формулу довжини вектора $\bar{a}(a_1; a_2)$ (мал. 341):

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2};$$



Мал. 341

3) формулу для обчислення кута між векторами $\bar{a}(a_1; a_2)$ і $\bar{b}\,(b_1; b_2)$:

$$\cos(\widehat{\bar{a};\bar{b}}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. У вас могло виникнути запитання: *Як вивести формулу скалярного добутку двох векторів, заданих своїми координатами?*

Нехай дано два вектори $\bar{a}(a_1; a_2)$ і $\bar{b}(b_1; b_2)$. Розкладемо їх за координатними векторами $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$: $\bar{a} = a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2$, $\bar{b} = b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \cdot \bar{e}_2$. Застосовуючи відповідні властивості скалярного добутку, дістанемо:

$$\bar{a}\,\bar{b} = (a_1 \cdot \bar{e}_1 + a_2 \cdot \bar{e}_2)(b_1 \cdot \bar{e}_1 + b_2 \cdot \bar{e}_2) =$$
$$= (a_1 b_1)\bar{e}_1^2 + (a_1 b_2)\bar{e}_1\bar{e}_2 + (a_2 b_1)\bar{e}_2\bar{e}_1 + (a_2 b_2)\bar{e}_2^2.$$

Враховуючи, що $\bar{e}_1^2 = \bar{e}_2^2 = 1$, $\bar{e}_1\bar{e}_2 = \bar{e}_2\bar{e}_1 = 0$, матимемо: $\bar{a}\,\bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

2. Скалярне множення векторів часто застосовують для доведення геометричних тверджень і розв'язування задач. Наприклад, доведення теореми косинусів може бути таким.

Нехай на сторонах трикутника ABC, у якого $\angle BAC = \alpha$ і сторони мають довжини a, b, c, задано вектори $\overline{AB} = \bar{c}$, $\overline{AC} = \bar{b}$, $\overline{BC} = \bar{a}$ (мал. 342).

Виразимо, наприклад, вектор $\overline{BC}$ через вектори $\overline{AC}$ і $\overline{AB}$.

Дістанемо: $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$. Тоді $\bar{a} = \bar{b} - \bar{c}$.

Знайдемо скалярний квадрат вектора $\bar{a}$:

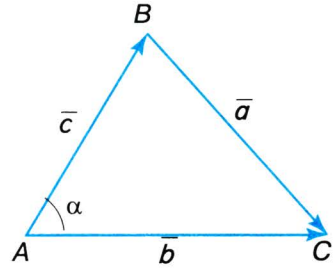
$\bar{a}^2 = (\bar{b} - \bar{c})(\bar{b} - \bar{c}) = \bar{b}^2 + \bar{c}^2 - 2\bar{b}\bar{c}$.

В отриманій рівності розкриємо скалярний добуток векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$ за означенням: $\bar{b}\,\bar{c} = |\bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos\alpha$, та скористаємось тим, що скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини.

Тоді дістанемо:

$|\bar{a}|^2 = |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 - 2 \cdot |\bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos\alpha$

або $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.



Мал. 342

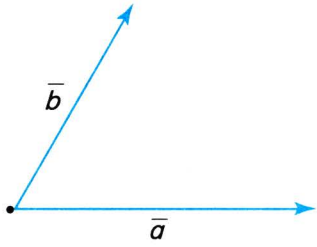
3. Термін «скалярний» походить від латинського слова *scalaris*, що означає — східчастий. Вперше його став використовувати У. Гамільтон.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

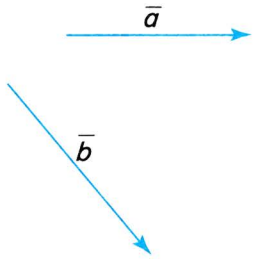
1. Поясніть, що таке кут між двома векторами.
2. Сформулюйте означення скалярного добутку двох векторів.
3. Чим зумовлена назва скалярного множення?
4. Чому дорівнює скалярний квадрат вектора?
5. Як знайти скалярний добуток векторів за їхніми координатами?
6. Сформулюйте і доведіть теорему про рівність нулю скалярного добутку двох векторів.
7. Які властивості скалярного множення?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

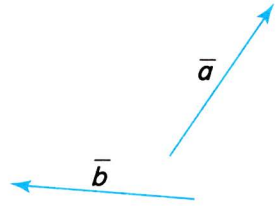
838'. За допомогою транспортира з'ясуйте, який кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ на малюнках 343 – 345.



Мал. 343



Мал. 344



Мал. 345

839'. За наведеним записом сформулюйте твердження для даних векторів:

1) $\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\widehat{\bar{a};\bar{b}})$; 2) $\bar{c}\,\bar{d} = |\bar{c}| \cdot |\bar{d}| \cdot \cos(\widehat{\bar{c};\bar{d}})$;

3) $\bar{p}\,\bar{q} = |\bar{p}| \cdot |\bar{q}| \cdot \cos(\widehat{\bar{p};\bar{q}})$.

840'. Прочитайте формулу: 1) $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$; 2) $\bar{b}^2 = |\bar{b}|^2$; 3) $\bar{c}^2 = |\bar{c}|^2$.

841'. Чому дорівнює скалярний квадрат вектора, якщо вектор має довжину:

1) $|\bar{a}| = 2$; 2) $|\bar{b}| = 3$; 3) $|\bar{c}| = 5$? Зробіть відповідний запис.

842'. Чи правильно підставлено координати векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ у формулу їх скалярного добутку:

1) $\bar{a}(2; 3)$, $\bar{b}(4; 5)$, $\bar{a}\,\bar{b} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5$;

2) $\bar{a}(-3; -4)$, $\bar{b}(2; 5)$, $\bar{a}\,\bar{b} = (-3) \cdot (-4) + 2 \cdot 5$;

3) $\bar{a}(1; -3)$, $\bar{b}(-4; 5)$, $\bar{a}\,\bar{b} = 1 \cdot (-4) + (-3) \cdot 5$?

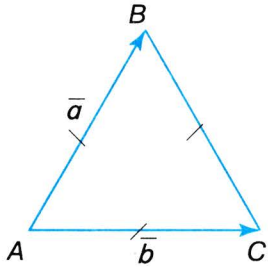
843'. Що можна стверджувати про дані вектори, якщо:

1) $\bar{a}\,\bar{b} = 0$; 2) $\bar{a} \perp \bar{b}$; 3) $(\widehat{\bar{a};\bar{b}}) = 90°$;

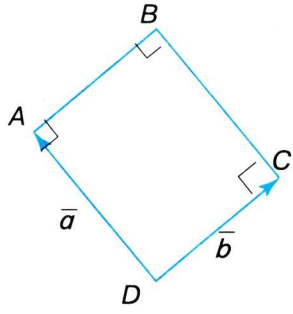
4) $\bar{p}\,\bar{q} = 0$; 5) $\bar{p} \perp \bar{q}$; 6) $(\widehat{\bar{p};\bar{q}}) = 90°$?

Зробіть відповідний запис.

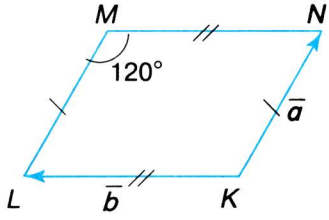
844°. За даними на малюнках 346 – 348 назвіть кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Яка його градусна міра?



Мал. 346



Мал. 347



Мал. 348

845°. Обчисліть скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо:

1) $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$, $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = 45°$; 2) $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$, $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = 135°$;

3) $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 6$, $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = 60°$; 4) $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 6$, $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = 120°$;

5) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$, $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = 30°$; 6) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$, $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = 150°$;

7) $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 6$, $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$; 8) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$;

9) $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 6$, $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$; 10) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$.

846°. Знайдіть кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо:

1) $\bar{a}\,\bar{b} = \sqrt{2}$, $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$; 2) $\bar{a}\,\bar{b} = -12$, $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$;

3) $\bar{a}\,\bar{b} = 3\sqrt{3}$, $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$.

847°. Знайдіть довжину вектора $\bar{b}$, якщо:

1) $\bar{a}\,\bar{b} = 12$, $|\bar{a}| = 2$, $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = 30°$; 2) $\bar{a}\,\bar{b} = 2$, $|\bar{a}| = 2$, $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = 45°$;

3) $\bar{a}\,\bar{b} = -6$, $|\bar{a}| = 3$, $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = 120°$.

848°. Яка довжина вектора $\bar{a}$, якщо його скалярний квадрат дорівнює:

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 8; 5) 9; 6) 12? Відповідь поясніть.

849°. Знайдіть скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо:

1) $\bar{a}\,(5; -1)$, $\bar{b}\,(1; 8)$; 2) $\bar{a}\,(1; -3)$, $\bar{b}\,(-1; 7)$;

3) $\bar{a}\,(-1; 2)$, $\bar{b}\,(2; -1)$; 4) $\bar{a}\,(0; 1)$, $\bar{b}\,(-1; -1)$.

850°. Доведіть, що вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ взаємно перпендикулярні:

1) $\bar{a}\,(-2; 2)$, $\bar{b}\,(1; 1)$; 2) $\bar{a}\,(-1; -2)$, $\bar{b}\,(4; -2)$;

3) $\bar{a}\,(3; 2)$, $\bar{b}\,(4; -6)$; 4) $\bar{a}\,(4; 2)$, $\bar{b}\,(-1; 2)$.

851°. Знайдіть кут між даними векторами:

1) $\bar{a}\,(2; 0)$, $\bar{b}\,(0; -1)$; 2) $\bar{a}\,(2; 2\sqrt{3})$, $\bar{b}\,(1{,}5; 0)$;

3) $\bar{a}\,(6; -8)$, $\bar{b}\,(12; 9)$; 4) $\bar{a}\,(-1; 1)$, $\bar{b}\,(2; -2)$.

852. Побудуйте вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, скалярний добуток яких обчислюється за формулою:

1) $\bar{a}\,\bar{b} = 3 \cdot 2 \cdot \cos 30°$; 2) $\bar{a}\,\bar{b} = 1 \cdot 3 \cdot \cos 120°$;

3) $\bar{a}\,\bar{b} = 2 \cdot 4 \cdot \cos 90°$; 4) $\bar{a}\,\bar{b} = 3 \cdot 5 \cdot \cos 180°$.

Скільки розв'язків має задача?

853. Яка особливість розміщення векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо:

1) $\bar{a}\,\bar{b} > 0$; 2) $\bar{a}\,\bar{b} < 0$; 3) $\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$; 4) $\bar{a}\,\bar{b} = -|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$?

854. Дано квадрат $ABCD$ зі стороною 1. Знайдіть:

1) $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$; 2) $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$; 3) $\overline{AB} \cdot \overline{DA}$;

4) $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$; 5) $\overline{AB} \cdot \overline{DC}$; 6) $\overline{DA} \cdot \overline{BC}$.

855. Знайдіть $|\bar{a} + \bar{b}|$ і $|\bar{a} - \bar{b}|$, якщо:

1) $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 8$, $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = 60°$; 2) $|\bar{a}| = 12$, $|\bar{b}| = 5$, $(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = 90°$.

856. На двох суміжних сторонах паралелограма задано вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Знайдіть довжини його діагоналей, якщо:

1) $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, $(\widehat{\bar{a};\bar{b}}) = 120°$; 2) $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, $(\widehat{\bar{a};\bar{b}}) = 60°$.

857. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ взаємно перпендикулярні. Визначте $|\bar{a} + \bar{b}|$ і $|\bar{a} - \bar{b}|$, якщо:

1) $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$; 2) $|\bar{a}| = 12$, $|\bar{b}| = 5$.

858. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — квадрат, якщо:

1) $A(1; 2)$, $B(4; 5)$, $C(7; 2)$, $D(4; -1)$;
2) $A(3; -2)$, $B(1; 1)$, $C(4; 3)$, $D(6; 0)$.

859. Виконайте обчислення у заданому виразі та з'ясуйте, які координати мають дані вектори, яка їхня довжина, який кут між ними:

1) $\cos(\widehat{\bar{a};\bar{b}}) = \dfrac{3\cdot(-2)+3\cdot 2}{\sqrt{3^2+3^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2}}$; 2) $\cos(\widehat{\bar{a};\bar{b}}) = \dfrac{(-1)\cdot 1+1\cdot(-2)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2}}$.

860. Знайдіть кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$: 1) $\bar{a}(2; 4)$, $\bar{b}(3; -1)$; 2) $\bar{a}(1; 3)$, $\bar{b}(-5; 1)$.

861. Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо:

1) $A(1; 1)$, $B(5; 3)$, $C(1; 7)$; 2) $A(1; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(3; 2)$.

862*. За відомими модулями векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ та кутом між ними знайдіть скалярний добуток векторів $\bar{a} - 3\bar{b}$ і $2\bar{a} + \bar{b}$, якщо:

1) $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, $(\widehat{\bar{a};\bar{b}}) = 60°$; 2) $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $(\widehat{\bar{a};\bar{b}}) = 90°$.

863*. Обчисліть скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо $\bar{a} = 3\bar{p} - 2\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 4\bar{q}$, де $\bar{p}$, $\bar{q}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

864*. Який кут утворюють одиничні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо вектори $\bar{p} = \bar{a} + 2\bar{b}$ і $\bar{q} = 5\bar{a} - 4\bar{b}$ взаємно перпендикулярні?

865*. Який кут (гострий, прямий чи тупий) між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо:

1) $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|$; 2) $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a}| + |\bar{b}|$;
3) $|\bar{a} + \bar{b}| \geqslant |\bar{a} - \bar{b}|$; 4) $|\bar{a} + \bar{b}| \leqslant |\bar{a}| + |\bar{b}|$?

866*. Доведіть нерівність: $-|\bar{a}|\,|\bar{b}| \leqslant \bar{a}\,\bar{b} \leqslant |\bar{a}|\,|\bar{b}|$.

867*. Дано вектори $\bar{a}(1; 3)$ і $\bar{b}(3; 4)$. Знайдіть таке число λ, щоб вектор $2\bar{a} + \lambda\bar{b}$ був перпендикулярним до вектора: 1) $\bar{b}$; 2) $\bar{a}$.

868*. Знайдіть кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах 1) $\bar{a}(2; 2)$ і $\bar{b}(5; -2)$; 2) $\bar{a}(2; -1)$ і $\bar{b}(2; -3)$.

869*. Вершини трикутника містяться у точках $A(0; 0)$, $B(6; 0)$ і $C(-3; 3)$. Знайдіть кут між стороною AB і медіаною AM.

870*. У рівнобічній трапеції $OACB$: $BC = AC = 2$, точки M і N — середини основ трапеції OB і AC відповідно. Гострий кут трапеції дорівнює $60°$. Знайдіть кут між векторами $\overline{OM}$ і $\overline{ON}$.

871*. Одиничні вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ задовольняють умову: $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$. Обчисліть $\bar{a}\,\bar{b} + \bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{c}$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

872. Знайдіть, яку роботу виконує сила $\bar{F}(4; 7)$, якщо її точка прикладання переміщується на вектор $\bar{S}(-1; 10)$.

873. Силу, яка діє на матеріальну точку, розкладено на дві складові за напрямами, що утворюють кути α і β з напрямом дії сили. Знайдіть модулі складових, якщо модуль даної сили дорівнює 3Н і відомо, що:
1) $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$; 2) $\alpha = 60°$, $\beta = 18°$. Виконайте малюнок.

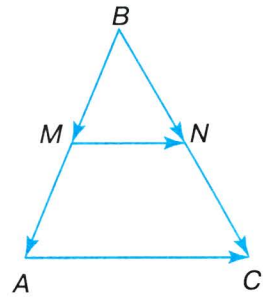
874. Крайні точки України мають такі географічні координати: північна (55° 22' пн. ш.; 33° 11' сх. д.), східна (49° 15' пн. ш.; 40° 13' сх. д.), південна (44° 23' пн. ш.; 33° 44' сх. д.), західна (48° 05' пн. ш.; 22° 08' сх. д.). Якщо провести умовні прямі через крайні північну і південну точки та крайні західну і східну точки, то чи можна встановити перпендикулярність цих прямих?

§26. ВЕКТОРНИЙ МЕТОД

До розв'язування задач і доведення теорем можна застосовувати різні методи. Ви вже знаєте, як застосовують властивості геометричних фігур, якими методами проводять доведення, як використовують метод координат. Тепер ви познайомитесь із застосуванням векторного методу.

Дії додавання векторів і множення вектора на число дозволяють будь-який вектор на площині розкласти за будь-якими двома неколінеарними векторами. Таку впорядковану пару неколінеарних векторів називають *базисом площини*.

Задача. Доведіть, що середня лінія трикутника паралельна третій стороні і дорівнює її половині.



Мал. 349

Розв'язання. Нехай MN — середня лінія трикутника ABC (мал. 349).

Доведемо, що $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$.

1. Введемо вектори $\overline{MN}$ і $\overline{AC}$. Тоді мовою векторів вимогу задачі можна записати так: $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

2. Введемо базис $\overline{BC}$ і $\overline{BA}$ та розкладемо за ним вектори $\overline{MN}$ і $\overline{AC}$.

$\overline{AC} = \overline{BC} - \overline{BA}$ (з $\triangle ABC$) і $\overline{MN} = \overline{BN} - \overline{BM}$ (з $\triangle MBN$).

Оскільки точки M і N — середини сторін AB і BC трикутника ABC, то $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BA}$.

Підставивши отримані векторні рівності у розклад вектора $\overline{MN}$, дістанемо: $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} - \frac{1}{2}\overline{BA} = \frac{1}{2}(\overline{BC} - \overline{BA})$. Отже, $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

3. З останньої векторної рівності випливає:

1) вектори $\overline{MN}$ і $\overline{AC}$ колінеарні, тобто відрізки MN і AC паралельні;

2) $|\overline{MN}| = \frac{1}{2}|\overline{AC}|$, тобто $MN = \frac{1}{2}AC$.

Щоб застосувати метод векторів до розв'язування задач, треба виконати три кроки.

1. Сформулювати задачу мовою векторів. Для цього спочатку ввести базис і допоміжні вектори. Потім скласти векторну рівність.

2. Перетворити векторну рівність, користуючись законами дій над векторами і відомими векторними рівностями.

3. Перекласти знайдений результат мовою геометрії.

Встановивши колінеарність векторів та пропорційність їх довжин, можна довести, що:

1) прямі або відрізки паралельні;

2) деяка точка є серединою відрізка або ділить його у певному відношенні;

3) три точки лежать на одній прямій.

Використовуючи скалярний добуток векторів, можна знайти:

4) довжину відрізка (як скалярний квадрат відповідного вектора);

5) градусну міру кута (за формулою косинуса кута і тригонометричними таблицями).

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Герман Вейль

У 1918 р. побачила світ книжка «Простір, час, матерія» видатного німецького математика Германа Вейля (1885 — 1955). Учений запропонував покласти в основу геометрії лише два поняття «точка» і «вектор» та чотири операції над ними. Ці операції задаються так: 1) будь-якій парі точок A і B ставиться у відповідність деякий вектор $\overline{AB}$; 2) будь-яким векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ставиться у відповідність деякий вектор $\bar{a} + \bar{b}$ — сума векторів; 3) будь-якому вектору $\bar{a}$ і дійсному числу k ставиться у відповідність деякий вектор $k\bar{a}$ — добуток вектора на число; 4) будь-яким векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ставиться у відповідність деяке число $\bar{a}\,\bar{b}$ — скалярний добуток векторів. Відомі вам властивості дій над векторами прийняті як аксіоми. Але як теореми доводяться твердження, котрі ви вивчали як аксіоми у шкільному курсі геометрії. Наприклад, аксіома про те, що через дві точки можна провести пряму і тільки одну. Побудована автором теорія широко застосовується у сучасній фізиці, кристалографії, хімії, економіці та інших науках. За роботи з геометрії та спеціального розділу алгебри — теорії груп, Г. Вейль у 1927 р. отримав Міжнародну премію імені Лобачевського.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке базис площини?
2. Як розкласти даний вектор за базисом?
3. Поясніть, як застосувати метод векторів до розв'язування задач.

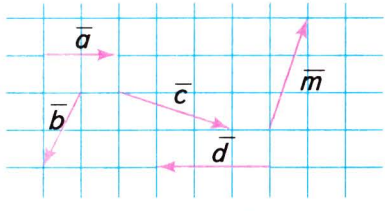
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

875'. Назвіть пари векторів (мал. 350, 351), які можна обрати за базис площини.

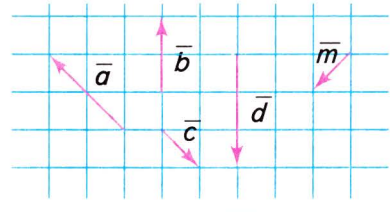
876'. Чому вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ на малюнках 352 — 354 не можна вважати базисом площини?

877°. Чи утворюють базис вектори, які: 1) колінеарні; 2) рівні; 3) неколінеарні?

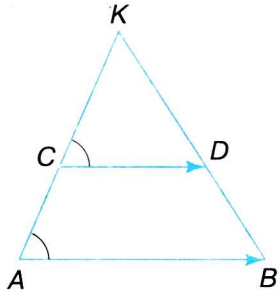
878°. Яка з умов свідчить про паралельність прямих AB і MP:
1) $\overline{AB} \parallel \overline{MP}$; 2) $\overline{AB} \cdot \overline{MP} = 0$; 3) $\overline{AB} = \overline{MP}$; 4) $\overline{AB} = \lambda\overline{MP}$; 5) $\overline{AM} \parallel \overline{BP}$?



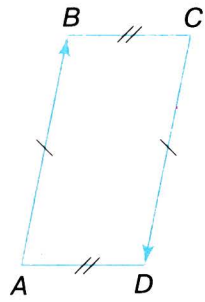
Мал. 350



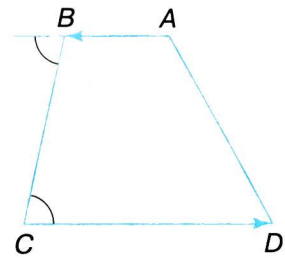
Мал. 351



Мал. 352



Мал. 353



Мал. 354

879°. Чи правильно, що точки A, B і C лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли $\overline{AB} = k\overline{BC}$? Відповідь обґрунтуйте.

880°. Сформулюйте мовою векторів твердження:
1) прямі AB і MP — паралельні; 2) прямі AB і MP — перпендикулярні;
3) точки A, B і C лежать на одній прямій; 4) відрізки AB і MP — рівні;
5) точка M — середина відрізка AB; 6) AM — медіана трикутника ABC;
7) MN — середня лінія трикутника ABC, що паралельна AC;
8) з медіан трикутника можна скласти трикутник;
9) $ABCD$ — паралелограм;
10) $ABCD$ — трапеція з основами AD і BC.

881°. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в серединах сторін трапеції — паралелограм.

882°. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в серединах сторін довільного чотирикутника — паралелограм.

883°. Доведіть, що діагоналі квадрата перпендикулярні.

884°. Доведіть, що діагоналі прямокутника рівні.

885°. Доведіть теорему Піфагора.

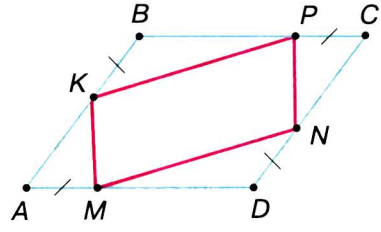
886°. Трикутник ABC переходить у трикутник $AB'C'$ при гомотетії з центром A і коефіцієнтом $k = 3$. Доведіть, що $BC \parallel B'C'$.

887. Доведіть, що вектори колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхні координати пропорційні.

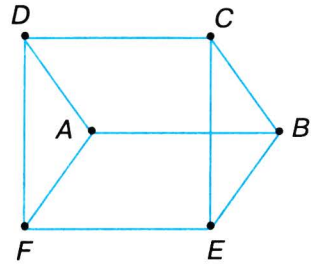
888. Координати суми двох векторів дорівнюють сумам відповідних координат даних векторів. Доведіть.

889. У паралелограмі $ABCD$ точка M — середина сторони AD, а N — середина сторони BC. Доведіть, що $BNDM$ — паралелограм.

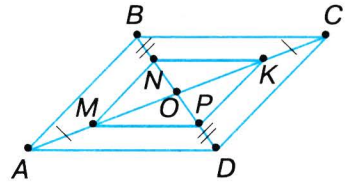
890. На сторонах паралелограма $ABCD$ відкладено, як показано на малюнку 355, рівні відрізки AM, DN, CP, BK. Доведіть, що $MNPK$ — паралелограм.



Мал. 355



Мал. 356



Мал. 357

891. Поза паралелограмом $ABCD$ з гострим кутом A побудовано рівносторонні трикутники ABE і CDF. Доведіть, що $AECF$ — паралелограм.

892. $ABCD$ і $ABEF$ — паралелограми (мал. 356). Доведіть, що $DF = CE$ і $DF \parallel CE$.

893. $ABCD$ — паралелограм (мал. 357), $AM = KC$, $BN = PD$. Доведіть, що $MP = NK$ і $MP \parallel NK$.

894. Медіану AO трикутника ABC продовжено на відрізок $OD = AO$. Точку D сполучено з вершинами B і C трикутника. Доведіть, що $CD = AB$ і $CD \parallel AB$.

895. Доведіть, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

896. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини бічних сторін трапеції, паралельний основам і дорівнює їх півсумі.

897. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам і дорівнює їх піврізниці.

898. Доведіть тотожність $(\bar{a} + \bar{b})^2 + (\bar{a} - \bar{b})^2 = 2(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2)$.
З'ясуйте її геометричний зміст.

899*. Доведіть, що коли в чотирикутнику діагоналі перпендикулярні, то суми квадратів протилежних сторін цього чотирикутника рівні між собою.

900*. Доведіть, що точка перетину медіан трикутника ділить кожну медіану у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.

901*. Доведіть, що три висоти трикутника перетинаються в одній точці.

902*. Знайдіть залежність між сторонами трикутника ABC, якщо його медіани AA_1 і BB_1 перпендикулярні.

903*. Правильний трикутник ABC зі стороною a вписано в коло. Точка M — деяка точка кола. Доведіть, що сума $MA^2 + MB^2 + MC^2$ не залежить від вибору точки M.

904*. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2$, де M — точка перетину медіан трикутника ABC, R — радіус описаного навколо нього кола.

905*. Точки A, B, C, D, N, M — середини сторін опуклого шестикутника $KFPHLG$. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого паралельні й рівні відрізкам AB, CD, MN.

906*. На стороні AD і діагоналі AC паралелограма $ABCD$ взято точки M і N так, що $AM = \frac{1}{5}AD$ і $AN = \frac{1}{6}AC$. Доведіть, що точки B, M і N лежать на одній прямій.

907*. Доведіть нерівність $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}\le\sqrt{12}$ за умови, що $a+b=1$.

908*. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=2\sqrt{x}$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

909. Тіло, маса якого дорівнює m, сповзає під дією сили тяжіння з похилої площини. Знайдіть модуль складової сили тяжіння, яка напрямлена вздовж похилої площини, якщо кут нахилу дорівнює β.

910. Малюк тягне санки із силою 10 Н на відстань 20 м. Кут між напрямом сили і напрямом переміщення дорівнює 45°. Яку роботу виконав малюк, перетягуючи санки?

911. Троє учнів, намагаючись зрушити з місця вантаж, тягнуть його кожен у свою сторону з однаковою силою 100 Н. Які кути між напрямами їхніх сил, якщо вантаж не зрушив з місця? Як треба змінити ці напрями, щоб зрушити з місця вантаж?

912. Населені пункти A і B знаходяться на різних берегах річки, які можна вважати паралельними. У якому місці слід будувати міст MN через річку, щоб шлях $AMNB$ був найкоротшим?

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що таке вектор, довжина і напрям вектора, як зображають вектор.
2. Які вектори називаються колінеарними? Співнапрямленими? Протилежно напрямленими? Рівними? Протилежними?
3. Поясніть, як застосувати правило трикутника у додаванні двох векторів.
4. Як знайти суму векторів за правилом паралелограма? А їх різницю?
5. Які властивості додавання векторів і множення вектора на число?
6. Що називається координатами вектора?
7. Як знайти довжину вектора, заданого своїми координатами? Суму двох векторів? Добуток вектора на число?
8. Що називається скалярним добутком двох векторів? Які його властивості?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

1° $ABCD$ — квадрат. Яка рівність є правильною?

А. $\overline{AB} = \overline{AD}$. **Б.** $\overline{AB} = \overline{AC}$. **В.** $\overline{AB} = \overline{DC}$. **Г.** $\overline{AB} = \overline{BD}$.

2° $ABCD$ — паралелограм. Який вектор дорівнює сумі векторів $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$?

А. $\overline{AC}$. **Б.** $\overline{BD}$. **В.** $\overline{AD}$. **Г.** $\overline{DC}$.

3° Відомо, що $\bar{a}\ (4; 3) \parallel \bar{b}\ (m; -12)$. Чому дорівнює число m?

А. -3. **Б.** 16. **В.** -16. **Г.** 4.

4 Які координати має одиничний вектор $\bar{a}$, перпендикулярний до вектора $\bar{b}\ (2; 2)$?

А. $(1; 1)$. **Б.** $(-2; -2)$. **В.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **Г.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5* У прямокутному рівнобедреному трикутнику з бічною стороною 2 см проведено медіану з вершини гострого кута. Задайте координатні вектори $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$ та обчисліть косинус кута між медіаною і гіпотенузою.

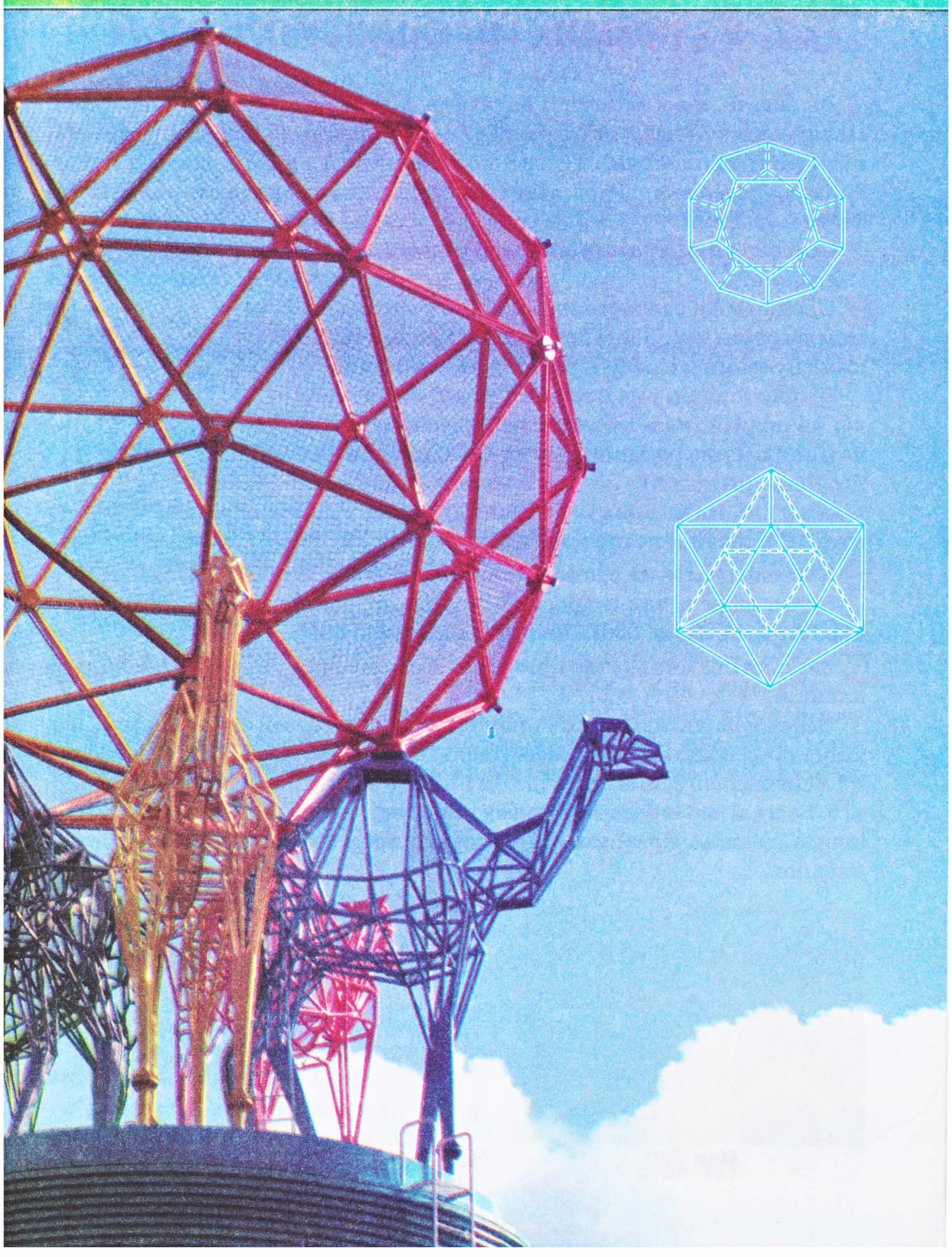
А. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **Б.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **В.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **Г.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

РОЗДІЛ 6 ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ЗІ

У розділі дізнаєтесь:

- що вивчає стереометрія;
- про взаємне розміщення у просторі двох прямих, прямої і площини, двох площин;
- що таке многогранник та які властивості мають пряма призма і піраміда;
- про тіла обертання та властивості циліндра, конуса і кулі;
- як застосувати вивчені означення і властивості на практиці та у розв'язуванні задач

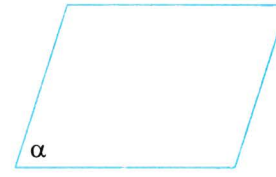
СТЕРЕОМЕТРІЇ



§27. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

Ви знаєте, що в геометрії вивчають фігури на площині і у просторі. Починаючи з 7 класу, ви вивчали *планіметрію*, де дізналися про властивості фігур на площині. Тепер ви ознайомитеся з початковими відомостями зі *стереометрії* – розділу геометрії, в якому вивчають властивості фігур у просторі.

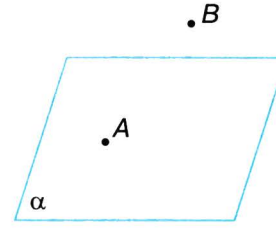
Основними фігурами у просторі є *точка*, *пряма* і *площина*.



Мал. 358

Площину зображають здебільшого у вигляді паралелограма (мал. 358) і позначають малими грецькими буквами α (альфа), β (бета), γ (гама) тощо.

У просторі, як і на площині, точка може *лежати на* прямій (*належати* прямій) або *не лежати* на ній. Взаємне розміщення точки і площини аналогічне – точка може *лежати у* площині або *не лежати у* ній. На малюнку 359 точка A лежить у площині α, а точка B не належить їй.



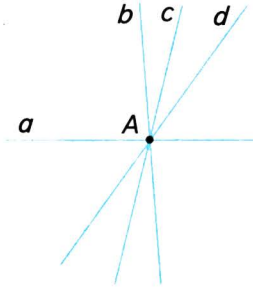
Мал. 359

Коротко це можна записати так: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$.

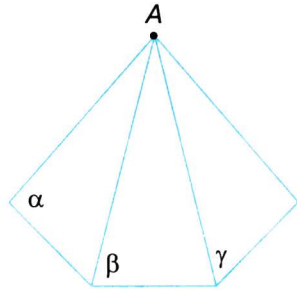
Через одну точку в просторі можна провести безліч прямих (мал. 360) і безліч площин (мал. 361).

? Скільки прямих можна провести через дві точки у просторі? А скільки площин?

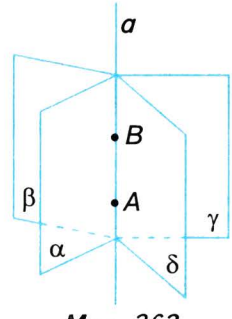
Через будь-які дві точки у просторі можна провести єдину пряму. Площина такої властивості не має. Подивіться на малюнок 362. Через точки A і B проходить єдина пряма a. Ця пряма є лінією перетину площин α, β, γ і δ. Взагалі **через будь-яку пряму у просторі можна провести безліч площин**, а значить, **через будь-які дві точки у просторі можна провести безліч площин.**



Мал. 360



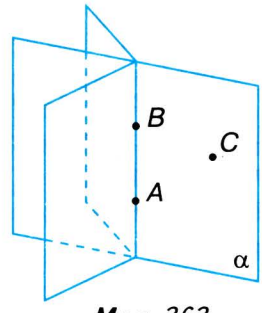
Мал. 361



Мал. 362

Відомо, що штативи багатьох інструментів (фотоапарата, теодоліта тощо) виготовляють у формі триноги. Завдяки цьому інструмент завжди стійкий. Стіл або табуретка не завжди стоять стійко. Ці спостереження приводять до такої властивості площини.

Властивість площини.
Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести єдину площину.

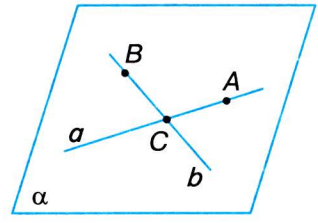


Мал. 363

Завдяки цій властивості площину можна позначати трьома її точками. Наприклад, на малюнку 363 площина ABC – це площина α.

Задача. Чи можна провести площину через дві прямі, що перетинаються?

Розв'язання. Нехай прямі a і b перетинаються в точці C (мал. 364). Візьмемо на кожній із прямих по одній точці, відмінній від точки їх перетину: $A \in a$, $B \in b$. За побудовою, точки A, B і C не лежать на одній прямій. Тому, за властивістю площини, через ці три точки проходить єдина площина α. У площині α лежать обидві прямі a і b.



Мал. 364

1. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

Подивіться на малюнок 365. Ви бачите, що прямі a і b *перетинаються*. Прямі a і c та b і c не можуть перетнутися, скільки б їх не продовжували. Отже, у просторі можливі два випадки, коли дві прямі не перетинаються. Прямі b і c не перетинаються і лежать в одній площині β – вони *паралельні*. Прямі a і c не перетинаються і не лежать в одній площині. Такі прямі називають *мимобіжними*.

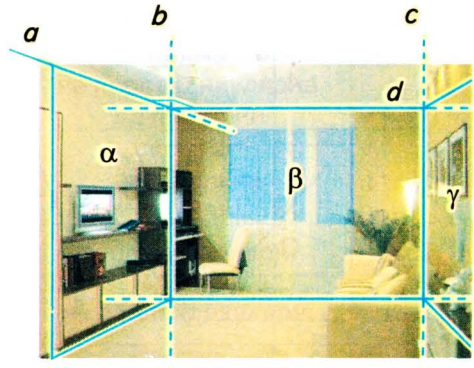
2. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Можливі такі випадки розміщення прямої і площини:

1) пряма лежить у площині, наприклад, на малюнку 365:
$a \in \alpha$, $b \in \alpha$, $b \in \beta$, $c \in \beta$, $c \in \gamma$, $d \in \beta$;

2) пряма не лежить у площині, наприклад, на малюнку 365:
$a \notin \gamma$, $b \notin \gamma$, $c \notin \alpha$, $d \notin \alpha$, $d \notin \gamma$.

Якщо пряма не лежить у площині, то вона може *перетинати площину*



Мал. 365

або *не перетинати її*. На малюнку 365 пряма d перетинає площину α, а пряма c не перетинає площину α. Пряму і площину, що не перетинаються, називають *паралельними*.

Подивіться на малюнок 365. Пряма a перпендикулярна до прямих b і d, які лежать у площині β. Це означає, що пряма a *перпендикулярна* до площини β.

Щоб встановити, чи перпендикулярна пряма до площини:

1) проведіть у площині дві прямі через точку перетину даної прямої з площиною;

2) з'ясуйте, чи перпендикулярна дана пряма до кожної з побудованих прямих.

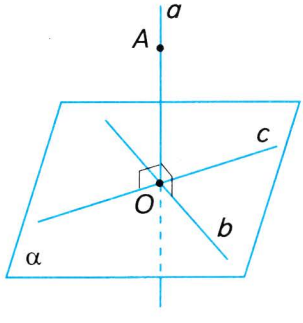
Перпендикуляром, проведеним з точки ***до площини***, називається відрізок прямої, перпендикулярної до площини, який з'єднує дану точку з точкою перетину перпендикулярної прямої і площини.

Ця точка називається *основою перпендикуляра*.

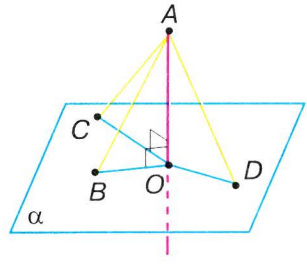
На малюнку 366 через точку A проведено пряму a перпендикулярно до прямих b і c, які лежать у площині α і перетинаються в точці O. Тому відрізок AO – перпендикуляр до площини α, точка O – основа перпендикуляра. **Перпендикуляр AO є найменшим з усіх відрізків, що сполучають точку A з точками площини α** (мал. 367).

За довжиною перпендикуляра визначають *відстань від точки до площини*. На малюнку 367 довжина перпендикуляра AO дорівнює відстані від точки A до площини α.

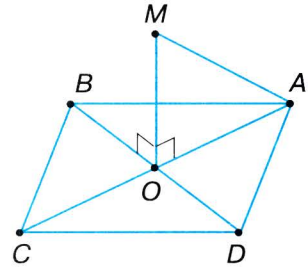
Відрізки AB, AC і AD (мал. 367) є *похилими* до площини α, а відрізки OB, OC і OD – *проекціями* цих *похилих* у площині α. **Через перпендикуляр AO і похилу AB проходить єдина площина AOB.** Тому в просторі похилі до площини мають такі самі властивості, як і похилі до прямої у планіметрії.



Мал. 366



Мал. 367



Мал. 368

Задача. Точка M не лежить у площині квадрата $ABCD$ (мал. 368). Його діагоналі AC і BD перетинаються в точці O. Пряма MO перпендикулярна до кожної з діагоналей квадрата. $MA = 10$ см, $AO = 6$ см. Яка відстань від точки M до площини квадрата?

Розв'язання. За умовою, $MO \perp AC$ і $MO \perp BD$, тому пряма MO перпендикулярна до площини ABC, а MO — перпендикуляр, довжина якого — шукана відстань. Через перпендикуляр MO і похилу MA проходить площина MOA. У цій площині лежить $\triangle MOA$, у якого: $\angle MOA = 90°$, $MA = 10$ см, $AO = 6$ см. За теоремою Піфагора, $MA^2 = MO^2 + AO^2$.

Звідси $MO = \sqrt{MA^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).

3. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПЛОЩИН

Повернемося до малюнка 365. Ви бачите, що площини α і β *перетинаються*. Лінією їх перетину є пряма b. Площини α і γ не перетинаються. Такі площини називають *паралельними*. Площини α і β перетинаються під прямим кутом. Це – *перпендикулярні* площини.

Випадки взаємного розміщення двох прямих, прямої і площини, двох площин наведено в таблиці 29.

Таблиця 29

Фігури	Взаємне розміщення		Запис
Дві прямі a і b	перетинаються	перпендикулярні	$a \perp b$
		не перпендикулярні	$a \times b$
	не перетинаються	паралельні	$a \parallel b$
		мимобіжні	$a \div b$
Пряма a і площина α	пряма лежить у площині		$a \in \alpha$
	пряма перетинає площину	пряма перпендикулярна до площини	$a \perp \alpha$
		пряма не перпендикулярна до площини	$a \times \alpha$
	пряма не перетинає площину	пряма паралельна площині	$a \parallel \alpha$
Дві площини α і β	перетинаються	перпендикулярні	$\alpha \perp \beta$
		не перпендикулярні	$\alpha \times \beta$
	не перетинаються	паралельні	$\alpha \parallel \beta$

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Символ «$\underline{\cdot}$» для позначення мимобіжних прямих має сучасне походження. Його запозичено з нарисної геометрії. Цей символ відображає розміщення двох прямих, які не визначають жодної площини. Справді, якщо риску уявити прямою, що лежить у площині, а точку — прямою, яка перпендикулярна до цієї площини, то стає очевидним, що через такі дві прямі не можна провести площину.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

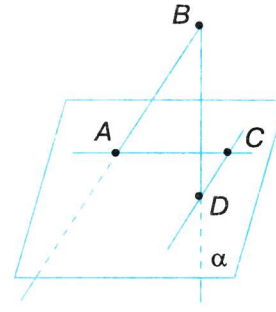
1. Що вивчають у стереометрії?
2. Назвіть основні геометричні фігури у просторі. Як їх позначають?
3. Сформулюйте властивість площини.
4. Наведіть приклади паралельних прямих; мимобіжних прямих.
5. Як можуть взаємно розміщуватися пряма і площина?
6. Що називають перпендикуляром до площини? Наведіть приклад перпендикуляра і похилої до площини.
7. Як можуть взаємно розміщуватися дві площини?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

913'. Проведіть площину α і позначте на ній точки A, B і C. Проведіть прямі AB, BC і AC.

914'. На малюнку 369 зображено площину α і прямі AB, AC, BD і CD.

1) Які з точок A, B, C і D лежать у площині α?
2) Які з прямих лежать у площині α?
3) Чи перетинаються прямі AC і BD, AB і AC, AB і CD?



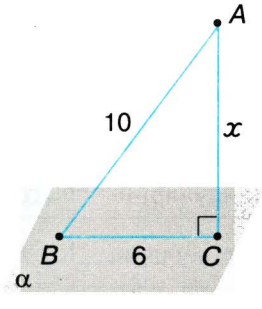
Мал. 369

915'. Скільки площин можна провести через три точки, які:

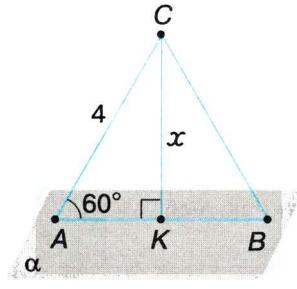
1) лежать на одній прямій;
2) не лежать на одній прямій?

916'. Скільки прямих, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через точку, яка: 1) лежить на даній прямій; 2) не лежить на даній прямій?

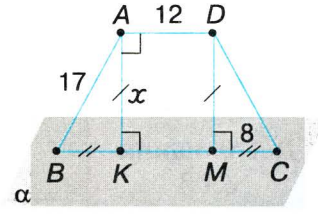
917'. Скільки рівних похилих можна провести з даної точки до площини?



Мал. 370



Мал. 371



Мал. 372

918°. Проведіть площину α. Позначте точки A і C, які лежать у площині α, і точку B, яка не лежить у цій площині. Проведіть прямі AC, AB, BC. Які з цих прямих перетинають площину α?

919°. Чи можуть пряма і площина мати тільки дві спільні точки? Чому?

920°. Чи правильні твердження для прямих простору:
1) дві прямі паралельні, якщо вони не перетинаються;
2) дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні;
3) пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає й іншу?

921°. На малюнках 370 — 372 усі позначені точки лежать у площині ABC. Знайдіть довжину відрізка x.

922°. З точки A до площини проведено перпендикуляр AC і похилу AB. Заповніть таблицю 30.

Таблиця 30

AC		2 см	6 см	12 см	
AB	5 см		10 см		25 см
BC	4 см	$2\sqrt{3}$ см		12 см	24 см

923°. Проведіть площини α і β, що перетинаються. Позначте точки, які лежать:
1) тільки у площині α; 2) тільки у площині β; 3) у площинах α і β.

924°. Через три точки проведено дві різні площини. Як розміщені ці площини?

925. Чи завжди можна провести площину через чотири довільні точки простору?

926. Через пряму і точку, що не лежить на даній прямій, можна провести єдину площину. Доведіть.

927. Чи лежать в одній площині всі прямі, що перетинають сторони даного трикутника? Відповідь поясніть.

928. Відрізки AB і CD перетинаються. Чи лежать в одній площині прямі AC, BD, BC і AD? Відповідь поясніть.

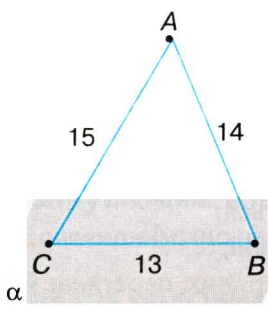
929. Прямі a і b перетинаються в точці A. Чи лежать в одній площині всі прямі, які перетинають дві дані прямі і не проходять через дану точку? Відповідь поясніть.

930. Чи може пряма a бути паралельною кожній з мимобіжних прямих b і c? Відповідь поясніть.

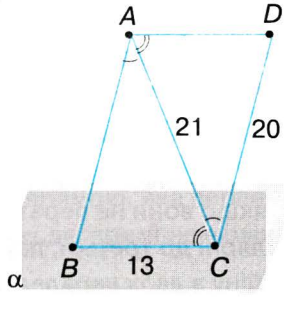
931. Прямі c і d перетинають паралельні прямі a і b. Чи можуть прямі c і d бути мимобіжними? Відповідь поясніть.

932. OM перпендикуляр до площини кола з центром O. Знайдіть діаметр кола, якщо довжина перпендикуляра 12 см, а відстань від точки M до точок кола дорівнює: 1) 13 см; 2) 15 см.

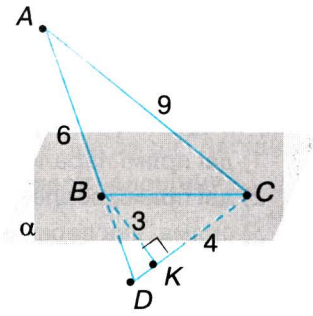
933. З точки M до площини проведено рівні похилі MA, MB, MC і MD. Чи може чотирикутник $ABCD$ бути:
1) квадратом; 2) паралелограмом; 3) прямокутником? Відповідь поясніть.



Мал. 373



Мал. 374



Мал. 375

934. З деякої точки проведено до даної площини перпендикуляр і похилу. Кут між ними дорівнює φ, а довжина перпендикуляра дорівнює d. Знайдіть похилу та її проекцію, якщо: 1) $d = 4$ см, $\varphi = 45°$; 2) $d = 8$ см, $\varphi = 30°$.

935. Площини α і β перетинаються по прямій a. Пряма a лежить у площині α, пряма b — у площині β. Ці прямі перетинаються в точці A. Чи лежить точка A на прямій a? Відповідь поясніть.

936*. Доведіть, що всі паралельні прямі, які перетинають дану пряму, лежать в одній площині.

937*. Прямі a і b перетинаються. Як розміщена пряма a відносно прямої c, якщо прямі c і b: 1) паралельні; 2) перетинаються?

938*. Прямі a і b мимобіжні. Пряма c перетинає a і b. Чи перетинає прямі a і b пряма d, яка паралельна прямій c? Відповідь поясніть.

939*. Прямі a і b мимобіжні. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і c, якщо прямі c і b: 1) паралельні; 2) перетинаються?

940*. Відрізок не перетинає площину. Доведіть, що відстань від його середини до площини дорівнює півсумі відстаней від його кінців до цієї площини.

941*. На малюнках 373 — 375 площина ABC перпендикулярна до площини α і перетинає її по прямій BC. Знайдіть відстань від точки A до площини α.

942*. Три площини мають спільну точку. Чи правильно, що ці площини мають спільну пряму? Скільки прямих можна дістати при попарному перетині цих площин?

943*. Три площини попарно перетинаються по прямих a, b і c. Доведіть, що коли ці площини мають спільну точку A, то прямі a, b і c перетинаються в точці A.

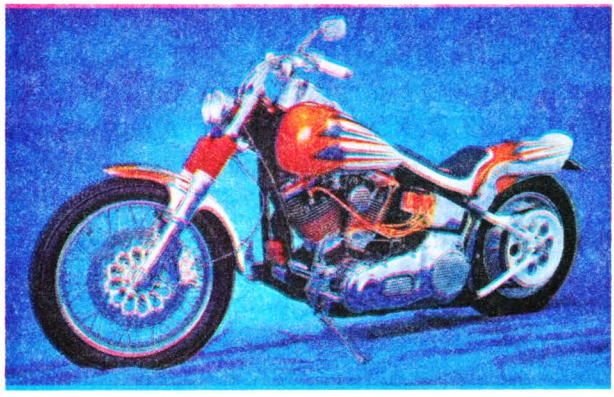
944*. Площина γ перетинає площини α і β по прямих a і b. Доведіть, що коли прямі a і b перетинаються, то точка їх перетину лежить на лінії перетину площин α і β.

945*. Дано промені зі спільним початком. Ніякі три з них не лежать в одній площині. Скільки різних площин можна провести так, щоб в кожній площині лежало по два з даних променів, якщо всього променів: 1) три; 2) чотири; 3) n?

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

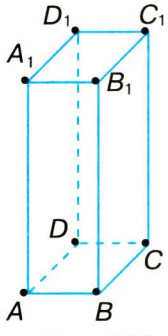
946. Чому мотоцикл з коляскою стійкий, а для закріплення мотоцикла без коляски потрібна додаткова опора?

947. Щоб перевірити, чи лежать кінці ніжок стола в одній площині, тесля користується двома нитками. Як він це робить? Чи достатня така перевірка?

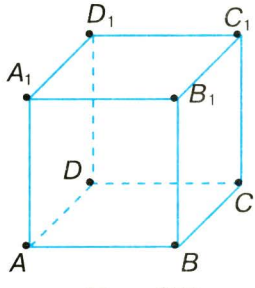


§28. МНОГОГРАННИКИ

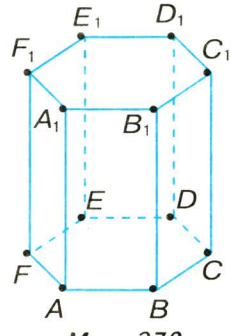
Вам знайомі деякі просторові фігури, наприклад прямокутний паралелепіпед (мал. 376) і куб (мал. 377). Вони відносяться до особливого класу фігур – *многогранників*. Поверхня многогранника складається з плоских многокутників, які називаються його *гранями*. Звідси і походить назва «многогранник». Будь-які дві *сусідні грані* многогранника мають спільний відрізок – *ребро* многогранника, а три попарно сусідні його грані сходяться в одній точці – *вершині* многогранника. У старшій школі ви дізнаєтесь про види многогранників та їхні властивості. Зараз ви познайомитеся з двома їхніми різновидами – *прямою призмою* (мал. 378) і *пірамідою* (мал. 379).



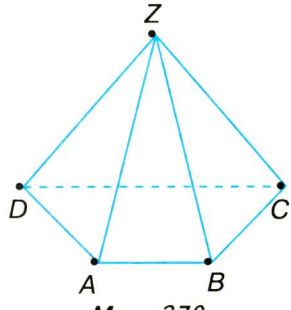
Мал. 376



Мал. 377



Мал. 378



Мал. 379

? Що відрізняє призми і піраміди? Будь-яка призма має дві *основи*, які є рівними многокутниками, що лежать у паралельних площинах, а піраміда – одну основу. *Бічними гранями* прямої призми є прямокутники, а піраміди – трикутники. *Бічні ребра* прямої призми рівні й паралельні, а піраміди – мають спільну точку, що є *вершиною піраміди*.

Наприклад, основами прямої призми $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ на малюнку 376 є шестикутники $ABCDEF$ і $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, а її бічними гранями – прямокутники ABB_1A_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1, EFF_1E_1, FAA_1F_1. Основою піраміди $ZABCD$ на малюнку 379 є чотирикутник $ABCD$, а її бічними гранями – трикутники ZAB, ZBC, ZCD, ZDA. Вершиною піраміди є точка Z.

Залежно від того, який многокутник лежить в основі, призму (піраміду) називають *трикутною, чотирикутною* чи *n-кутною*. Прямокутний паралелепіпед (мал. 376) і куб (мал. 377) є різновидами чотирикутної прямої призми. На малюнку 378 ви бачите шестикутну пряму призму, а на малюнку 379 – чотирикутну піраміду.

Бічну поверхню призми (піраміди) утворюють многокутники її бічних граней, а *повну поверхню* – усі її грані.

Площею бічної поверхні призми (піраміди) називається сума площ її бічних граней.

Площею повної поверхні призми (піраміди) називається сума площ усіх її граней.

Площу бічної і повної поверхні відповідно позначають: $S_{бп}$ і $S_{пп}$.

Наведені означення підказують спосіб знаходження площ бічної та повної поверхонь призми (піраміди).

Задача. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь піраміди, в основі якої лежить правильний трикутник із стороною 6 см, а бічні ребра мають довжину по 5 см.

Розв'язання. Нехай $ZABC$ (мал. 380) – дана піраміда, у якої $AB = BC = AC = 6$ см, $ZA = ZB = ZC = 5$ см. Бічні грані піраміди є рівними рівнобедреними трикутниками, тому $S_{\triangle ZAB} = S_{\triangle ZBC} = S_{\triangle ZCA}$.

Проведемо висоту ZK бічної грані ZAB. Трикутник ZKB – прямокутний ($\angle K = 90°$), тому $ZK = 4$ см,

$$S_{\triangle ZAB} = \frac{1}{2} AB \cdot ZK = \frac{1}{2} 6 \cdot 4 = 12 \text{ (см}^2\text{)}.$$

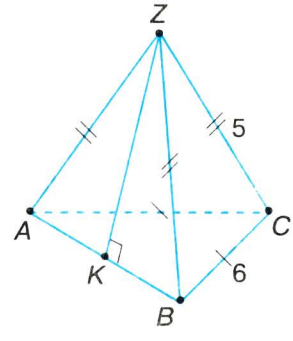
Тоді $S_{бп} = 3 \cdot S_{\triangle ZAB} = 3 \cdot 12 = 36$ (см^2).

В основі піраміди лежить правильний трикутник ABC зі стороною 6 см, тому

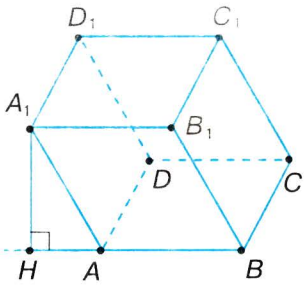
$$S_{\triangle ABC} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Отже, дістанемо:

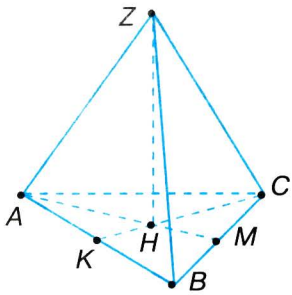
$$S_{пп} = S_{бп} + S_{\triangle ABC} = 36 + 9\sqrt{3} = 9(4 + \sqrt{3}) \text{ (см}^2\text{)}.$$



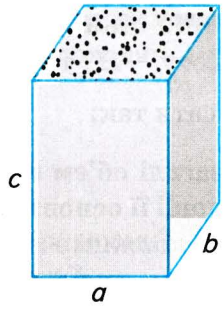
Мал. 380



Мал. 381



Мал. 382



Мал. 383

Висотою призми називається перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї з основ призми до площини її другої основи.

У прямої призми (див. мал. 378) кожне бічне ребро перпендикулярне до її основ. Звідси і назва – «пряма призма». Бічне ребро прямої призми можна вважати її висотою. На малюнку 381 ви бачите приклад похилої призми. Її бічне ребро не дорівнює висоті цієї призми.

Висотою піраміди називається перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до площини її основи.

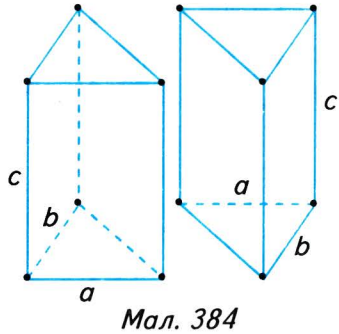
Бічні ребра піраміди не перпендикулярні до її основи, якщо це спеціально не зазначено. Тому висоту піраміди показують окремо. На малюнку 382 ви бачите трикутну піраміду $ZABC$, в якій проведено висоту ZH.

Кожен многогранник як геометричне тіло має особливу властивість – він займає частину простору. Якщо міру цієї частини простору виразити деяким числом, то дістанемо нову характеристику тіла – геометричну величину «*об'єм*».

З курсу математики 6 класу ви знаєте формули об'єму прямокутного паралелепіпеда з ребрами a, b і c: $\boldsymbol{V = abc}$, і куба з ребром a: $\boldsymbol{V = a^3}$.

? Як знайти об'єм прямої призми і піраміди? Проведемо дослід.

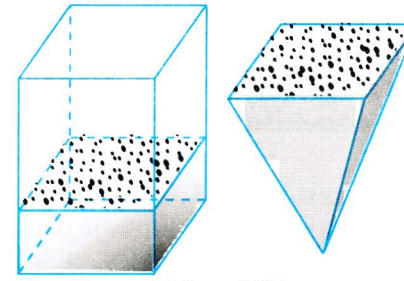
Використаємо три посудини. Одна з них має форму прямокутного паралелепіпеда з ребрами a, b і c (мал. 383). Дві інші – форму прямої трикутної призми з висотою c і прямокутним трикутником з катетами a і b в основі (мал. 384). Насиплемо пісок у паралелепіпед, а потім пересиплемо його в обидві призми. Бачимо, що об'єм кожної з таких трикутних призм становить половину об'єму прямокутного паралелепіпеда. Дістали, що для обчислення об'єму даної трикутної призми можна скористатися формулою: $\boldsymbol{V = \frac{1}{2}abc}$.



Мал. 384

У формулі $V = abc$ добуток ab – це площа основи паралелепіпеда, c – його висота; у формулі $V = \frac{1}{2}abc$ добуток $\frac{1}{2}ab$ – це площа основи трикутної призми, c – її висота.

Якщо площу основи позначити $S_{осн}$, а висоту – H, то обидві формули можна записати так: $V = S_{осн} \cdot H$.



Мал. 385

Взагалі **об'єм призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.**

Продовжимо експеримент. Візьмемо посудину, що має форму чотирикутної піраміди, у якої основа – прямокутник зі сторонами a і b, а висота дорівнює c (мал. 385). Пересипавши пісок із піраміди в призму з такою самою основою і висотою, дістанемо, що об'єм піраміди становить третину об'єму призми.

Можемо записати: $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$.

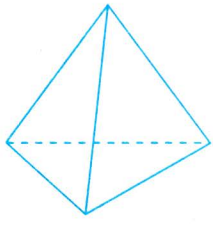
Взагалі **об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту.**

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

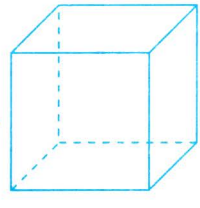
1. З давніх часів особливими вважають п'ять многогранників: *тетраедр* (мал. 386), *гексаедр* (мал. 387), *октаедр* (мал. 388), *додекаедр* (мал. 389) та *ікосаедр* (мал. 390). Усі вони є *правильними многогранниками*. У такого многогранника всі грані є рівними правильними многокутниками і в кожній його вершині сходиться однакова кількість граней. У тетраедра, октаедра та ікосаедра гранями є правильні трикутники, у гексаедра (куба) — квадрати, у додекаедра — п'ятикутники. У кожній вершині тетраедра, гексаедра і додекаедра сходиться по три грані, в октаедра — по чотири, а в ікосаедра — по п'ять граней.

Свої назви правильні многогранники дістали від сполучення двох слів. Перше із них відповідає кількості граней многогранника, а слово «*hedra*» означає «опора» (зараз говоримо «грань»). Отже, тетраедр — чотиригранник, гексаедр — шестигранник, октаедр — восьмигранник, додекаедр — дванадцятигранник, ікосаедр — двадцятигранник.

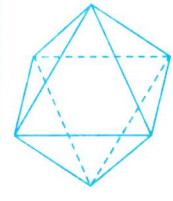
Чотири перших типи правильних многогранників було відкрито у VI ст. до н. е. науковою школою Піфагора. Три століття потому Евклід у своїх «Началах» показав, що правильних опуклих многогранників існує лише п'ять типів.



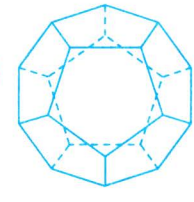
Мал. 386



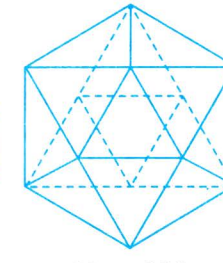
Мал. 387



Мал. 388



Мал. 389



Мал. 390

2. Символ V для позначення об'єму тіла походить від латинської назви *volumeni*, що означає «об'єм». Символ S для позначення площі фігури походить від латинської назви *superficils*, що означає «поверхня».

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Поясніть, що таке пряма призма; піраміда.
2. Що є основами прямої призми? Її гранями? Ребрами? Вершинами?
3. Що є основою піраміди? Її гранями? Ребрами? Вершинами?
4. Чому призму називають трикутною, чотирикутною, n-кутною? А піраміду?
5. Поясніть, що таке бічна поверхня призми; піраміди. Повна поверхня.
6. Як знайти площу бічної поверхні прямої призми; піраміди? Площу повної поверхні?
7. Сформулюйте означення висоти прямої призми; піраміди.
8. Запишіть формулу об'єму прямої призми; піраміди.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

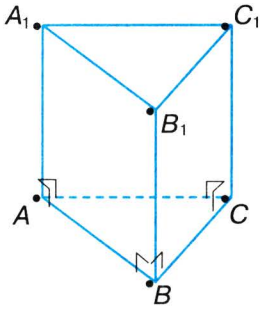
948'. За малюнками 391 — 393 з'ясуйте:
1) як називається даний многогранник;
2) скільки в нього основ і бічних граней;
3) який многокутник лежить в його основі;
4) які многокутники є його бічними гранями.

949'. Назвіть вершини і ребра многогранника (мал. 391 — 393). Скільки його граней сходиться у вершині: 1) A; 2) B; 3) C?

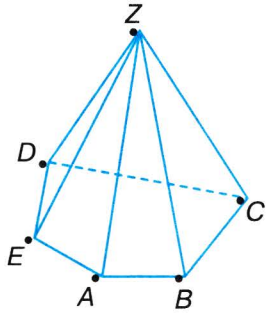
950'. Чи правильно, що:
1) площею бічної поверхні прямої призми є многокутник;
2) площею повної поверхні піраміди є площа многокутника?

951'. Сумі площ яких граней многогранника (мал. 391 — 393) дорівнює площа його бічної поверхні? А повної поверхні?
Зробіть відповідний запис.

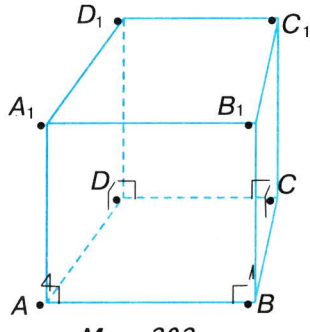
952'. Чи можна вважати висотою даного многогранника (мал. 391 — 393) якесь його ребро?



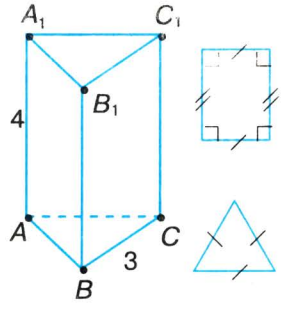
Мал. 391



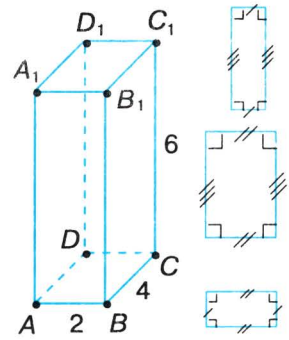
Мал. 392



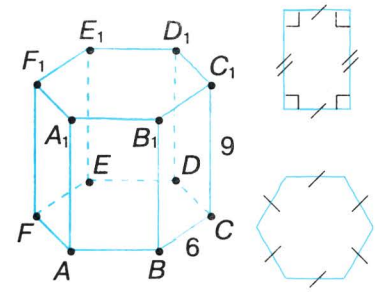
Мал. 393



Мал. 394



Мал. 395



Мал. 396

953'. Чи правильно, що:

1) об'єм прямої призми дорівнює добутку площ його основ;

2) об'єм прямої призми дорівнює добутку площі його основи на бічне ребро;

3) об'єм піраміди дорівнює добутку площі його основи на висоту;

4) об'єм піраміди дорівнює добутку третини площі його основи на висоту?

954°. Накресліть пряму призму:

1) трикутну; 2) чотирикутну; 3) шестикутну.

955°. За даними на малюнках 394 – 396 знайдіть площі бічної і повної поверхонь прямої призми.

956°. Чому дорівнюють площі бічної і повної поверхонь куба з ребром:

1) 2 см; 2) 5 см; 3) 4 см?

957°. Основою прямої призми є прямокутник зі сторонами 3 см і 4 см, а бічне ребро дорівнює: 1) 5 см; 2) 10 см; 3) 2 см.

Знайдіть площі її бічної і повної поверхонь.

958°. Бічна поверхня куба дорівнює: 1) 16 см^2; 2) 8 см^2; 3) 4 см^2.

Яку довжину має його ребро?

959°. Площа основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює 240 см^2. Знайдіть площу його бічних граней, якщо площа однієї з них становить $\frac{1}{2}$ площі основи, а площа другої – $\frac{1}{4}$ площі основи. Чому дорівнюють площі бічної і повної поверхонь паралелепіпеда?

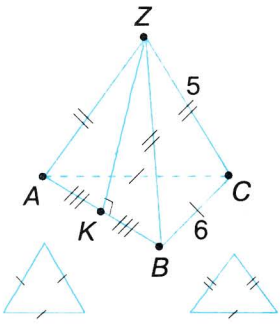
960°. За даними на малюнках 397 – 399 знайдіть площі бічної і повної поверхонь піраміди.

961°. В основі піраміди лежить квадрат зі стороною a, а її бічними гранями є рівні рівнобедрені трикутники з площею S. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь піраміди, якщо:

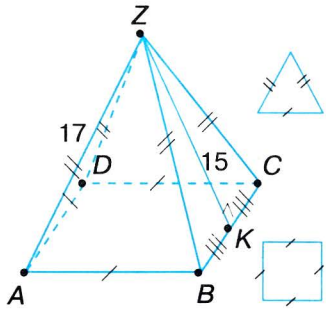
1) $a = 3$ см, $S = 12$ см^2; 2) $a = 4$ см, $S = 20$ см^2; 3) $a = 6$ см, $S = 24$ см^2.

962°. Основа піраміди – правильний n-кутник зі стороною 15 см. Висота піраміди дорівнює 20 см.

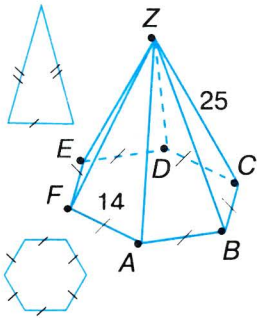
Знайдіть об'єм піраміди, якщо: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.



Мал. 397



Мал. 398



Мал. 399

963. Яку найменшу кількість граней (ребер, вершин) може мати:
1) пряма призма; 2) піраміда?

964. Як зміниться площа повної поверхні куба, якщо його сторону:
1) збільшити в 3 рази; 2) зменшити в 4 рази;
3) збільшити на 50%; 4) зменшити на 75%?

965. Як зміниться площа повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, якщо одну з його сторін:
1) збільшити в 3 рази; 2) зменшити в 4 рази;
3) збільшити на 50%; 4) зменшити на 75%?

966. Знайдіть відношення об'ємів куба і прямокутного паралелепіпеда, якщо у них:
1) основи рівні, а висоти відносяться, як 1 : 5;
2) висоти рівні, а сторони основ відносяться, як 1 : 1 : 2?

967. У прямої трикутної призми сторони основи a і b утворюють кут α, а бічне ребро дорівнює c. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь та об'єм призми, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 30°$; 2) $a = b = 10$ см, $c = 12$ см, $\alpha = 60°$.

968. В основі прямої призми лежить правильний n-кутник зі стороною a. Висота призми дорівнює H. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь призми та її об'єм. Заповніть таблицю 31.

969. Усі ребра чотирикутної піраміди мають довжину a. Чому дорівнюють площі її бічної і повної поверхонь, якщо: 1) $a = 2$ см; 2) $a = 5$ см; 3) $a = 1$ см?

Таблиця 31

n	3	3	4	4	6	6
a	5 см	10 см	9 см	3 см	2 см	2 см
H	8 см	8 см	27 см	9 см	4 см	6 см
$S_{бп}$						
$S_{пп}$						
V						

970. Усі грані трикутної піраміди є правильними трикутниками зі стороною a. Висота піраміди дорівнює H. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь піраміди та її об'єм. Заповніть таблицю 32.

Таблиця 32

a	5 см	10 см	9 см	3 см
H	$5\sqrt{\frac{2}{3}}$ см	$10\sqrt{\frac{2}{3}}$ см	$9\sqrt{\frac{2}{3}}$ см	$3\sqrt{\frac{2}{3}}$ см
$S_{бп}$				
$S_{пп}$				
V				

971*. Різниця периметра грані одного куба і периметра грані другого куба дорівнює c, а різниця їх площ — d. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь та об'єм даних кубів, якщо:
1) $c = 16$ см, $d = 56$ см^2; 2) $c = 12$ см, $d = 105$ см^2.

972*. Прямокутник зі сторонами 4 см і 17 см пряма a розбиває на два подібних прямокутники. На кожному з прямокутників як на основі побудовано пряму призму висотою 10 см. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь та об'єм побудованих призм.

973*. На сторонах рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом a побудовано квадрати. Їхні вершини з'єднано відрізками так, що утворився опуклий шестикутник. Він є основою прямої призми з висотою H. Знайдіть площі бічної і повної поверхонь та об'єм цієї призми.

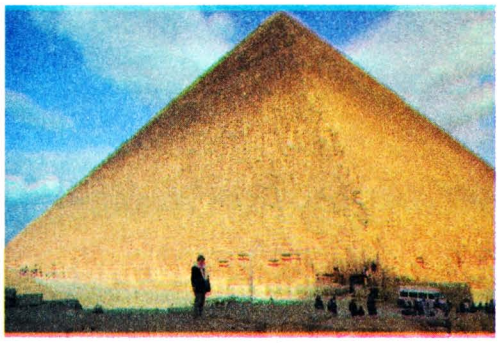
974*. Квадрат зі стороною a і прямокутник зі сторонами b і c мають рівні периметри. Вони є основами двох пірамід з рівними висотами. Знайдіть об'єм кожної піраміди, якщо: 1) $a = 8$ см, $b = 12$ см; 2) $a = 8$ см, $c = 10$ см.
Який з двох многогранників має більший об'єм?

975*. Квадрат зі стороною a і прямокутник зі сторонами b і c мають рівні площі. Вони є основами двох пірамід з рівними висотами. Знайдіть об'єм кожної піраміди, якщо: 1) $a = 6$ см, $b = 9$ см; 2) $a = 6$ см, $c = 2$ см.
Який з двох многогранників має менший об'єм?

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

976. Один кубічний метр червоної цегли має масу 1650 кг. Яка маса 5 м^3; 10 м^3 такої цегли? Відшукайте відомості про розміри такої цегли та визначте кількість цеглин, що вміщується в 1 м^3; 5 м^3; 10 м^3.

977. Маса кубічного метра буряків дорівнює 650 кг. Вантажівка має кузов розмірами 3 м $\times$ 2 м $\times$ 1 м. Визначте масу буряків, вивезених нею з поля за:
1) 2 рейси; 2) 4 рейси; 3) 10 рейсів.



Мал. 400

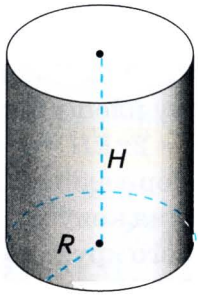
Мал. 401

978. Сторона основи піраміди Хеопса дорівнює 230,4 м, а її початкова висота — 146,6 м. У результаті землетрусу піраміда втратила верхній гранітний блок «пірамідіон» — камінь такої самої форми, що й піраміда, який встановлювали на її вершині (мал. 400). Зараз висота піраміди Хеопса дорівнює 137,2 м. Яким був об'єм піраміди до землетрусу? Який можливий об'єм пірамідіона? Який об'єм піраміди зараз?

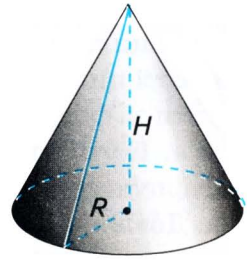
979. У 447 — 438 до н. е. на Акрополі в Афінах було збудовано Парфенон (*parthenos* з грецької означає «діва») — храм богині Афіни, найбільший пам'ятник давньогрецького мистецтва (мал. 401). З чотирьох сторін Парфенон оточують стрункі колони з білого мармуру. Розміри його основи 30,89 м × 69,54 м, а висота колон — 10,43 м. Не зважаючи на такі розміри, він виглядає легким, не масивним. Який об'єм мала б ця споруда, якби її стіни були суцільними?

§29. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

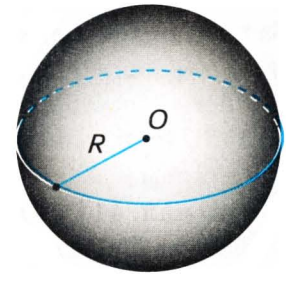
Деякі геометричні тіла можна дістати обертанням плоскої фігури навколо прямої. Наприклад, так можна утворити циліндр (мал.402), конус (мал. 403), кулю (мал. 404) та ін. Звідси їх назва – «*тіла обертання*».



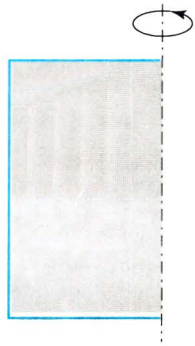
Мал. 402



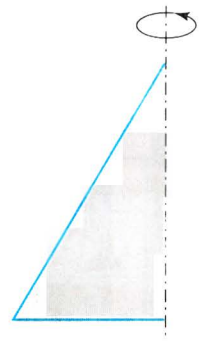
Мал. 403



Мал. 404



Мал. 405



Мал. 406

Мал. 407

Якщо обертати прямокутник навколо однієї з його сторін (мал. 405), то дістанемо прямий круговий *циліндр*. Цю сторону прямокутника вважають *віссю циліндра*, а протилежну їй сторону – *твірною циліндра*. Твірна циліндра перпендикулярна до його основ, тому її можна вважати *висотою циліндра*. Циліндр має дві *основи* – рівні круги радіуса R, що лежать у паралельних площинах.

Якщо обертати прямокутний трикутник навколо його катета (мал. 406), то дістанемо прямий круговий *конус*. Цей катет вважають *віссю конуса*, а гіпотенузу трикутника – *твірною конуса*. *Основою конуса* є круг радіуса R. Твірна конуса не перпендикулярна до його основи, тому не може бути його висотою. *Висота конуса* визначається за його віссю.

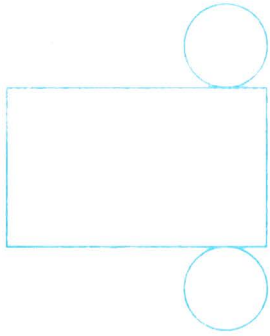
Якщо обертати півкруг навколо його діаметра (мал. 407), то дістанемо *кулю*. Цей діаметр вважають *віссю кулі*. Для кулі твірну і висоту не виділяють.

Під час обертання твірна циліндра (конуса) описує *бічну поверхню* циліндра (конуса). *Повну поверхню циліндра* утворюють його бічна поверхня і два круги основ, а *повну поверхню конуса* – його бічна поверхня і круг основи.

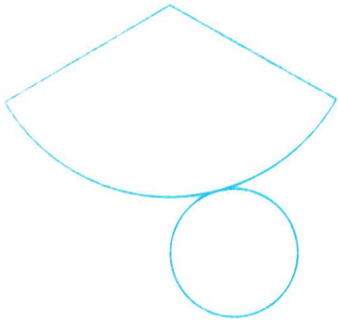
Візьмемо паперові макети циліндра і конуса. Розріжемо кожен з них уздовж твірної. Макет циліндра розріжемо ще й уздовж двох кіл основ, а макет конуса – вздовж кола його основи. Розгорнемо макети і розмістимо їх на площині. Дістали відповідно *розгортку циліндра* (мал. 408) і *розгортку конуса* (мал. 409).

За розгорткою циліндра бачимо, що одна зі сторін прямокутника розгортки має довжину кола основи циліндра і дорівнює $2\pi R$ (мал. 410). Друга його сторона дорівнює висоті циліндра H. Тому площу бічної поверхні циліндра можна обчислити за формулою: $\boldsymbol{S_{бп} = 2\pi RH}$.

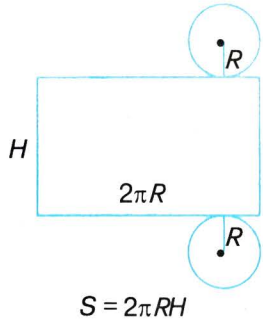
Розглянемо розгортку конуса. Її утворюють сектор великого круга радіуса l (мал. 411), в який розгорнулася бічна поверхня конуса, і малий круг радіуса R – основа конуса. Довжина кола великого круга дорівнює $2\pi l$, а довжина дуги сектора великого круга – $2\pi R$. Площа великого круга дорівнює πl^2. Площа сектора $S_{бп}$ є шуканою.



Мал. 408



Мал. 409



Мал. 410

Складемо пропорцію: $\frac{2\pi R}{2\pi l} = \frac{S_{\text{бп}}}{\pi l^2}$.

Розкривши її, дістанемо формулу площі бічної поверхні конуса:

$$S_{\text{бп}} = \pi R l.$$

Площа повної поверхні циліндра (конуса) дорівнює сумі площ його бічної поверхні й двох основ (основи).

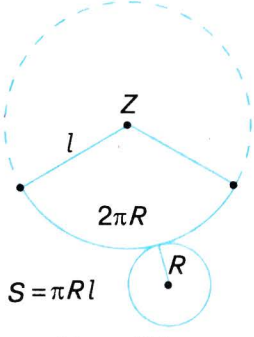
Поверхню кулі називають *сферою*. З кулею вона має той самий центр O і радіус R (мал. 412). Круг із центром O і радіусом R називають *великим кругом кулі*, а відповідне коло – *великим колом сфери*.

На відміну від циліндра і конуса, сферу не можна розрізати й розгорнути так, щоб вона без вигинань усіма точками розмістилася на площині. Отже, для знаходження формули площі сфери потрібний інший підхід. З ним ви ознайомитесь у старших класах. А зараз скористаємося лише висновком: **площа сфери у чотири рази більша за площу його великого круга** (мал. 413). Отже, маємо такі дві формули:

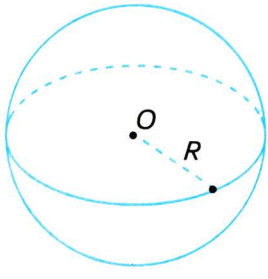
$$S_{\text{кр}} = \pi R^2; \quad S_{\text{сф}} = 4\pi R^2.$$

Щоб дістати формули об'єму тіл обертання, проведемо три досліди з пересипанням піску.

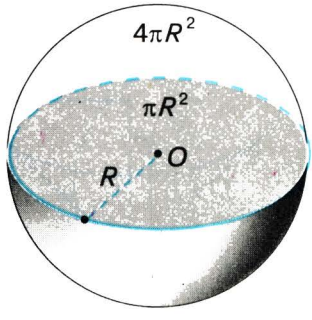
1. Об'єм циліндра з основою радіуса R будемо порівнювати з об'ємом прямої n-кутної призми (мал. 414). У неї висота дорівнює висоті циліндра H,



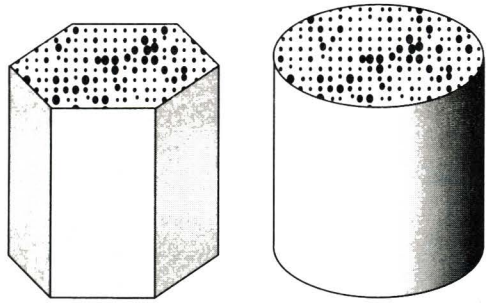
Мал. 411



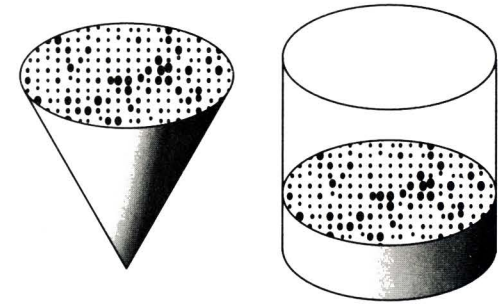
Мал. 412



Мал. 413



Мал. 414



Мал. 415

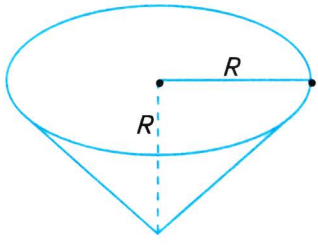
а основа – правильний n-кутник з великою кількістю сторін, вписаний у коло радіуса R. У результаті пересипання піску із призми у циліндр дістанемо, що об'єм призми майже не відрізняється від об'єму циліндра. Тому для обчислення об'єму циліндра можна скористатися формулою: $V = S_{\text{осн}} \cdot H$.

Остаточно маємо: $\boldsymbol{V = \pi R^2 H}$.

2. Об'єм конуса будемо порівнювати з об'ємом циліндра, що має з конусом таку саму висоту H і радіус основи R (мал. 415). У результаті пересипання піску із конуса в циліндр дістанемо, що **об'єм конуса становить третину об'єму циліндра**. Отже, формулу об'єму конуса можна подати у вигляді: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$.

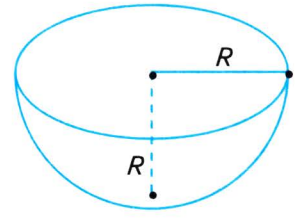
Остаточно маємо: $\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \pi R^2 H}$.

3. Формулу об'єму кулі радіуса R дістанемо з формули об'єму відповідної півкулі. А її у свою чергу дістанемо, порівнюючи півкулю з конусом, який має радіус основи R і висоту R. У результаті пересипання піску з конуса (мал. 416) в півкулю (мал. 417), дістанемо, що об'єм півкулі дорівнює подвоєному об'єму конуса. Отже, **об'єм кулі** (мал. 418) **дорівнює об'єму чотирьох конусів** і обчислюється за формулою: $\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \pi R^3}$.



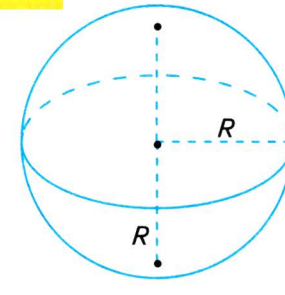
$V = \frac{1}{3} \pi R^3$

Мал. 416



$V = \frac{2}{3} \pi R^3$

Мал. 417



$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

Мал. 418

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

О. В. Погорєлов

Одним із найвідоміших сучасних геометрів є академік Олексій Васильович Погорєлов (1919 – 2002). Він народився в Корочі Бєлгородської обл., але більшу частину свого життя провів в Україні. Навчався у Харківському університеті, а потім і викладав у ньому; працював в Інституті математики та інших установах України. Йому належить розв'язання багатьох проблем сучасної геометрії. Зокрема у 1959 р. він повністю розв'язав проблему нескінченно малих вигинань загальних опуклих поверхонь. А це має не лише теоретичне, а й велике практичне значення, бо і обшивка літака, і корпус корабля під час руху зазнають певних вигинань. За низку робіт О. В. Погорєлов отримав Міжнародну премію імені Лобачевського та інші почесні премії і нагороди. Більшості українських громадян він відомий як автор шкільних підручників з геометрії, за якими вивчали цей предмет у школі впродовж кількох останніх десятиліть.

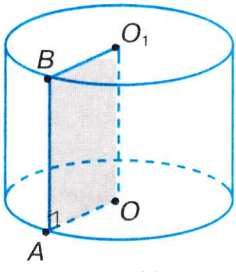
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Поясніть, що таке тіло обертання.
2. Обертанням якої плоскої фігури утворюється циліндр? Конус? Куля?
3. Що таке твірна, вісь, основа, висота циліндра? Конуса?
4. Виведіть формулу площі бічної поверхні циліндра; конуса.
5. Поясніть, як знайти площу повної поверхні циліндра; конуса.
6. Як обчислити площу сфери?
7. Запишіть формулу об'єму циліндра; конуса; кулі.

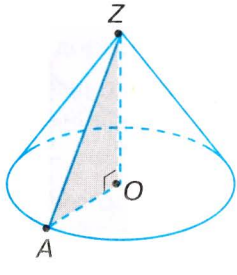
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

980'. За малюнками 419 – 421 з'ясуйте:

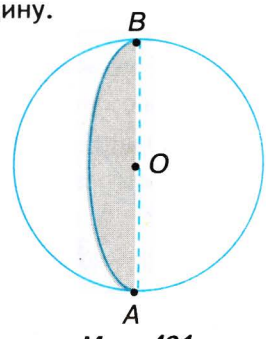
1) як називається дане тіло обертання;
2) обертанням якої фігури воно утворено;
3) що є віссю і твірною даного тіла;
4) якщо є у нього основа, то яка це фігура;
5) чи можна вважати твірну даного тіла його висотою;
6) чи можна розгорнути поверхню даного тіла на площину.



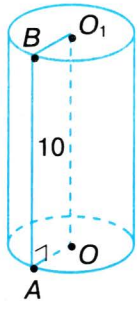
Мал. 419



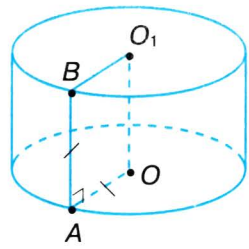
Мал. 420



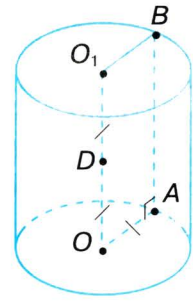
Мал. 421



Мал. 422



Мал. 423



Мал. 424

981'. Чи правильно, що сфера є поверхнею: 1) циліндра; 2) конуса; 3) кулі?

982'. У яку плоску фігуру розгортається бічна поверхня: 1) циліндра; 2) конуса?

983'. Чи можна сферу розгорнути на площину?

984'. За даними на малюнках 419, 420 складіть вираз для обчислення:
1) площі бічної поверхні тіла обертання;
2) площі повної поверхні тіла обертання;
3) об'єму тіла обертання.

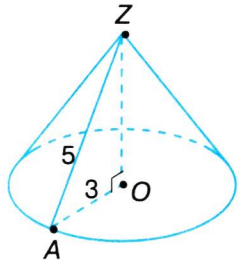
985'. За даними на малюнку 421 складіть вираз для обчислення:
1) площі сфери; 2) об'єму кулі.

986°. Чи дістанемо циліндр обертанням:
1) квадрата навколо його діагоналі;
2) паралелограма навколо його сторони;
3) прямокутної трапеції навколо її бічної сторони?

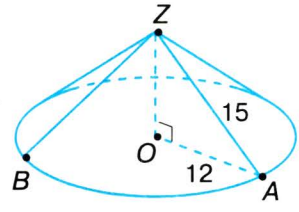
987°. За даними на малюнках 422 – 424 знайдіть площі бічної і повної поверхонь та об'єм циліндра з віссю OO_1, якщо $AO = 3$ см.

988°. Накресліть розгортку циліндра з радіусом основи R і висотою h, якщо:
1) $R = 1$ см, $h = 3$ см; 2) $R = 2$ см, $h = 4$ см; 3) $R = 3$ см, $h = 5$ см.
Чому дорівнює площа його бічної поверхні? Повної поверхні?
Який у нього об'єм?

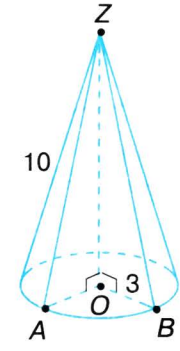
989°. Чому дорівнюють площі бічної і повної поверхонь та об'єм циліндра з твірною 10 см і площею основи:
1) 4π см^2; 2) $2{,}56\pi$ см^2; 3) 25π см^2?



Мал. 425



Мал. 426



Мал. 427

990°. Чи дістанемо конус обертанням:
1) прямокутного трикутника навколо його гіпотенузи;
2) рівнобедреного трикутника навколо його бічної сторони;
3) правильного трикутника навколо його сторони?

991°. За даними на малюнках 425 – 427 знайдіть площі бічної і повної поверхонь конуса з віссю ZO.

992°. Чому дорівнюють площі бічної і повної поверхонь та об'єм конуса з радіусом основи R і висотою h, якщо:
1) $R = 12$ см, $h = 5$ см; 2) $R = 3$ см, $h = 4$ см; 3) $R = 1$ см, $h = 6$ см?

993°. Знайдіть твірну конуса з висотою h і діаметром основи D, якщо:
1) $h = 4$ см, $D = 6$ см; 2) $h = 12$ см, $D = 10$ см; 3) $h = 8$ см, $D = 12$ см.
Яка у цього конуса площа бічної поверхні? Площа повної поверхні? Який у нього об'єм?

994°. Знайдіть об'єм кулі та площу її сфери з радіусом:
1) 2 см; 2) 3 дм; 3) 4 см; 4) 5 дм.

995°. Куля радіуса R має об'єм V, а її сфера – площу $S_{сф}$. Заповніть таблицю 33.

Таблиця 33

R	9 см					8 см
$S_{сф}$		64π см^2			49π см^2	
V			288π см^3	36π см^3		

996. Як зміняться площа бічної поверхні та об'єм циліндра, якщо: 1) його висота збільшиться в n разів, а радіус кола основи не зміниться; 2) радіус кола основи збільшиться в n разів, а твірна не зміниться.

997. Прямокутник зі сторонами a і b обертається навколо меншої сторони. Чому дорівнюють площі бічної і повної поверхонь та об'єм утвореного циліндра, якщо: 1) $a + b = 16$ см, $a - b = 4$ см; 2) $a + b = 32$ см, $b - a = 8$ см?

998. Знайдіть твірну циліндра з площею основи 81π, якщо площа його бічної поверхні становить: 1) 162π; 2) 126π.
Чому дорівнює площа повної поверхні та об'єм цього конуса?

999. З'ясуйте, чи є правильним твердження: «З двох конусів більшу площу бічної поверхні має той конус, у якого: 1) висота більша; 2) радіус основи більший; 3) висота більша, а радіус основи дорівнює радіусу основи другого конуса».

1000. Прямокутний трикутник з катетами a і b обертається навколо більшого катета. Чому дорівнюють площі бічної і повної поверхонь та об'єм утвореного конуса, якщо: 1) $a + b = 31$ см, $a - b = 17$ см; 2) $a + b = 28$ см, $b - a = 4$ см?

1001. Знайдіть висоту конуса з площею основи 144π, якщо площа його бічної поверхні становить: 1) 156π; 2) 180π.
Чому дорівнює площа повної поверхні та об'єм цього конуса?

1002. Знайдіть відношення площ двох сфер із радіусами:
1) 200 мм і 300 мм; 2) 0,7 дм і 1,4 дм.

1003. Чому дорівнює відношення об'ємів двох куль із радіусами r_1 і r_2, якщо:
1) $r_1 + r_2 = 17$ см, $r_1 - r_2 = 7$ см; 2) $r_1 + r_2 = 11$ см, $r_2 - r_1 = 5$ см?

1004*. Виразіть площі бічної і повної поверхонь та об'єм циліндра:
1) через його висоту h і довжину кола основи C;
2) через його висоту h і площу основи S.

1005*. Два циліндри утворюються обертанням прямокутника зі сторонами 3 і 5 навколо кожної з двох суміжних сторін, а третій циліндр — обертанням квадрата навколо своєї сторони. Периметр квадрата дорівнює периметру даного прямокутника. У трьох даних циліндрів порівняйте:
1) площі бічної поверхні; 2) площі повної поверхні; 3) об'єми.

1006*. Виразіть площі бічної і повної поверхонь та об'єм конуса:
1) через його висоту h і довжину кола основи C;
2) через його твірну l і площу основи S.

1007*. Виразіть:
1) об'єм кулі V через площу її поверхні S;
2) площу сфери S через об'єм кулі V;
3) об'єм кулі V через довжину C її великого кола;
4) довжину C великого кола кулі через площу її поверхні S.

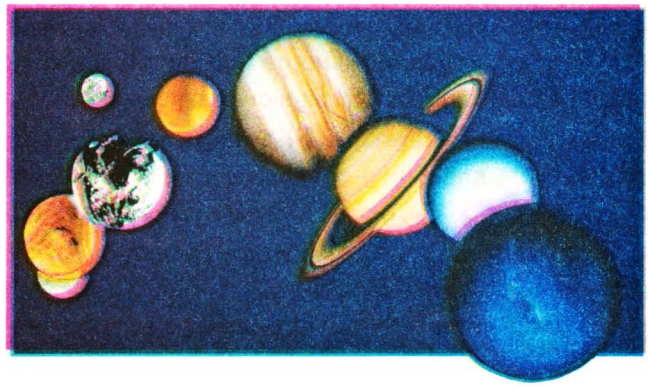
1008*. Різниця довжин великих кіл двох куль дорівнює c, а різниця їх площ — d. Знайдіть площі сфер та об'єми даних куль, якщо:
1) $c = 4\pi$ см, $d = 16\pi$ см^2; 2) $c = 10\pi$ см, $d = 45\pi$ см^2.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

1009. З циліндричної колоди треба виготовити брус, що має форму прямокутного паралелепіпеда з найбільшою площею поперечного перерізу. Який при цьому буде відсоток відходів?

1010. Як далеко бачить пілот з висоти 2 км? 10 км?
(Діаметр земної кулі $\approx$ 12,7 тис. км).

1011. Діаметр планети Меркурій $\approx$ 5 тис. км, Венери $\approx$ 12,4 тис. км, Землі $\approx$ 12,7 тис. км, Марса $\approx$ 6,8 тис. км. Яка площа поверхонь цих планет?



КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Опишіть взаємне розміщення у просторі двох прямих; прямої і площини; двох площин.
2. Що називається перпендикуляром, проведеним із точки до площини? Що таке похила до площини?
3. Як знайти площі бічної і повної поверхонь прямої призми; піраміди?
4. Як знайти площі бічної і повної поверхонь циліндра; конуса?
5. За якою формулою можна обчислити об'єм прямої призми; піраміди; циліндра; конуса?
6. Як обчислити площу сфери; об'єм кулі?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

1° В основі прямої призми лежить квадрат зі стороною 2 см. Висота призми дорівнює 6 см. Чому дорівнює площа бічної поверхні призми?

А. 12 см^2. **Б.** 24 см^2. **В.** 48 см^2. **Г.** 72 см^2.

2° Який об'єм має трикутна піраміда, у якої площа основи дорівнює 6 см^2, а висота — 4 см?

А. 2 см^3. **Б.** 8 см^3. **В.** 10 см^3. **Г.** 24 см^3.

3° Чому дорівнює площа сфери і об'єм кулі радіуса 3 см?

А. 9π см^2, 27π см^3. **Б.** 12π см^2, 4π см^3.

В. 9π см^2, 36π см^3. **Г.** 36π см^2, 36π см^3.

4 Циліндр і конус мають рівні основи радіуса 3 см і рівні висоти довжиною 4 см. На скільки площа бічної поверхні циліндра більша за площу поверхні конуса?

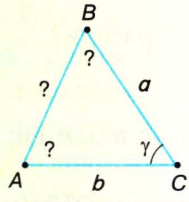
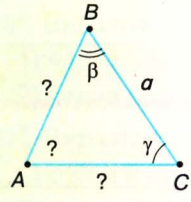
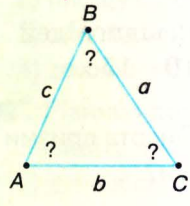
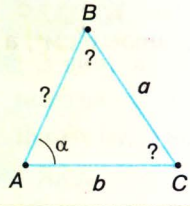
А. 9π см^2. **Б.** 12π см^2. **В.** 27π см^2. **Г.** 36π см^2.

5* Точки A і B лежать у площині α на відстані 6 см одна від одної. Точка C не лежить у площині α і $CA \perp \alpha$. Відстань між точками C і B на 2 см більша за відстань від точки C до площини α. На якій відстані від площини α знаходиться точка C?

А. 20 см. **Б.** 16 см. **В.** 10 см. **Г.** 8 см.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

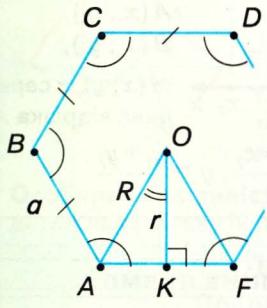
Основні задачі на розв'язування трикутників

Умова задачі		Алгоритм розв'язування
	**Дано:** $AC = b$, $BC = a$, $\angle C = \gamma$. **Знайти:** AB, $\angle A$, $\angle B$	1) $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$, 2) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 3) $\angle B = 180° - \angle A$
	**Дано:** $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. **Знайти:** AC, AB, $\angle A$	1) $\angle A = 180° - \alpha - \beta$, 2) $AC = \frac{a\sin\beta}{\sin A}$, 3) $AB = \frac{a\sin\gamma}{\sin A}$
	**Дано:** $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. **Знайти:** $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$	1) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 2) $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 3) $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$
	**Дано:** $BC = a$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$. **Знайти:** AB, $\angle B$, $\angle C$	1) $\sin B = \frac{b\sin\alpha}{a}$, 2) $\angle C = 180° - \alpha - \angle B$, 3) $AB = \frac{a\sin C}{\sin\alpha}$

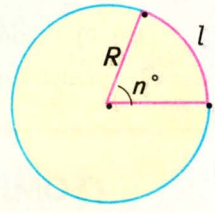
Формули площі трикутника

$S = \frac{ah_a}{2}$, де h_a — висота, проведена до сторони a	$S = pr$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$, r — радіус вписаного кола	$S = \frac{abc}{4R}$, де R — радіус описаного кола	$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, де α — кут між сторонами b і c	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$

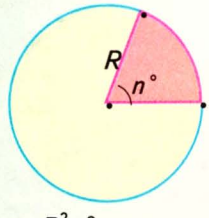
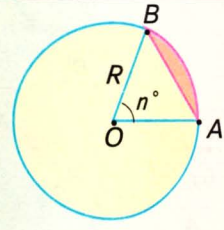
ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

Правильний n-кутник	Властивості
 $AB = BC = \ldots = AF$ і $\angle A = \angle B = \ldots = \angle F$	1. Правильний n-кутник є вписаним у коло і описаним навколо кола. $R = OA$ – радіус описаного кола. $r = OK$ – радіус вписаного кола 2. $\angle AOF = \frac{360^\circ}{n}$ 3. $\angle A + \angle B + \ldots + \angle F = 180^\circ (n-2)$ 4. $R = \frac{AK}{\sin\angle AOK} = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$ 5. $r = \frac{AK}{\operatorname{tg}\angle AOK} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$

ДОВЖИНА КОЛА І ДУГИ КОЛА

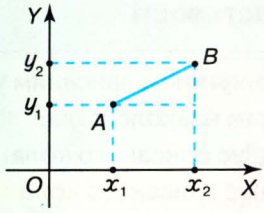
Довжина кола	Довжина дуги кола
$C = 2\pi R$ або $C = \pi D$, де D – діаметр кола	 $l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$

ПЛОЩА КРУГА І ЙОГО ЧАСТИН

Площа круга	Площа сектора	Площа сегмента
$S = \pi R^2$ або $S = \frac{\pi D^2}{4}$, де D – діаметр кола	 $S = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}$	 $S = S_{\text{сектора}} - S_{\triangle AOB}$

ПРЯМОКУТНА ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

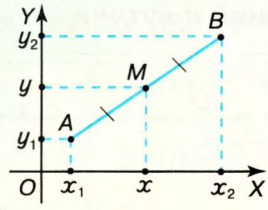
Довжина відрізка



$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Координати середини відрізка

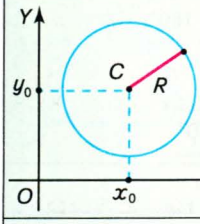


$A(x_1; y_1)$,
$B(x_2; y_2)$,
$M(x; y)$ — середина відрізка AB

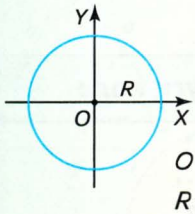
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Рівняння фігури

Рівняння кола

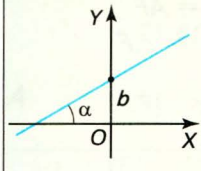


$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$,
$C(x_0; y_0)$ — центр кола,
R — радіус кола

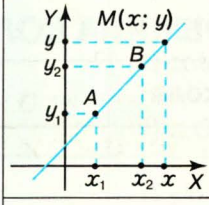


$x^2 + y^2 = R^2$
$O(0; 0)$ — центр кола,
R — радіус кола

Рівняння прямої



з кутовим коефіцієнтом
$y = kx + b$
k — кутовий коефіцієнт,
$k = \operatorname{tg}\alpha$,
b — відрізок на осі OY



через дві точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

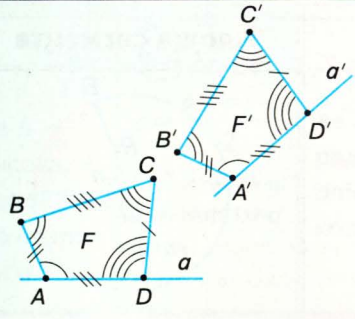
$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ — точки, через які проходить пряма

загальне $ax + by + c = 0$
a, b і c — числа, які одночасно не дорівнюють нулю

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Переміщення та його властивості

Переміщення



Фігури F і F' рівні, якщо переводяться переміщенням одна в одну

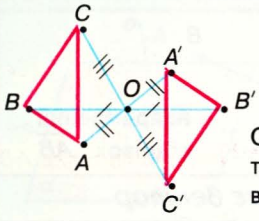
Властивості

1. Пряма переходить у пряму (a в a'), промінь — у промінь.
2. Відрізок переходить у рівний йому відрізок ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $AD = A'D'$).
3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$)

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Симетрія відносно точки і прямої

Симетрія відносно точки

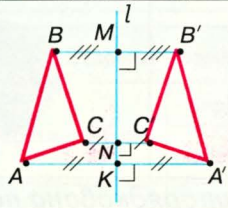


$AO = OA'$,
$BO = OB'$,
$CO = OC'$.

Симетрія відносно точки має всі властивості переміщення.

Особлива властивість: пряма переходить у паралельну їй пряму або у себе

Симетрія відносно прямої

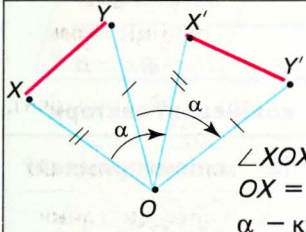


$BB' \perp l$ і $BM = MB'$,
$CC' \perp l$ і $CN = NC'$,
$AA' \perp l$ і $AK = KA'$.

Симетрія відносно прямої має всі властивості переміщення

Поворот і паралельне перенесення

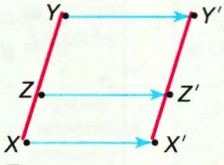
Поворот



$\angle XOX' = \angle YOY' = \alpha$,
$OX = OX'$, $OY = OY'$,
α — кут повороту,
O — центр повороту.

Поворот має всі властивості переміщення

Паралельне перенесення



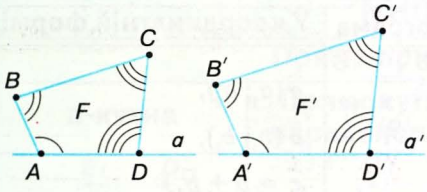
$XX' \| ZZ' \| YY'$ і
$XX' = ZZ' = YY'$

Паралельне перенесення має всі властивості переміщення.

Особлива властивість:
пряма переходить у паралельну їй пряму або у себе

Перетворення подібності

Перетворення подібності



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = k,$$

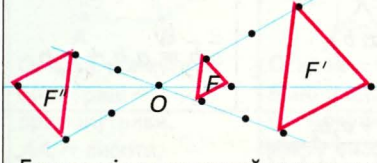
$k > 0$ — коефіцієнт подібності

Властивості

1. Пряма переходить у пряму (a в a'), промінь — у промінь.
2. Відрізок переходить у відрізок (AB у $A'B'$, BC у $B'C'$, CD у $C'D'$, AD у $A'D'$).
3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$).
4. Якщо $F \overset{k}{\sim} F'$, то $\frac{S_F}{S_{F'}} = k^2$

(S_F і $S_{F'}$ — площі подібних фігур F і F')

Гомотетія

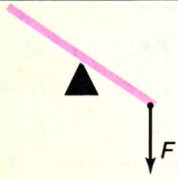
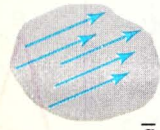


На малюнку гомотетія з центром O і коефіцієнтом $k > 0$ ($k = 3$) фігуру F переводить у фігуру F', а гомотетія з центром O і коефіцієнтом $k < 0$ ($k = -2$) фігуру F переводить у фігуру F''.

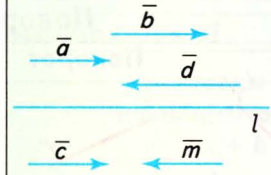
Гомотетія — окремий випадок перетворення подібності, тому має всі його властивості.

Особлива властивість: пряма переходить у паралельну їй пряму або у себе

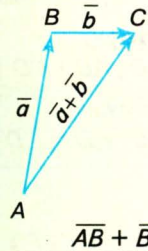
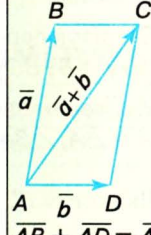
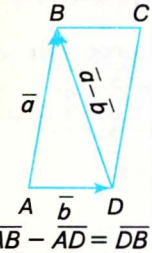
ВЕКТОРИ

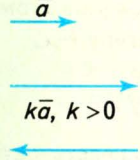
Сила	Геометричний вектор	Зображення
		напрямлений відрізок $\overline{AB}$

Будь-яка упорядкована пара точок визначає вектор

Характеристики вектора		Координати вектора	Взаємне розміщення векторів
		$A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$	 колінеарні вектори
			$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ співнапрямлені
напрям	A – початок вектора B – кінець вектора	$\overline{AB} = \bar{a}(a_1; a_2)$	$\bar{a} = \bar{c}$ рівні
довжина (модуль)	$\lvert\overline{AB}\rvert = 2$ см	$\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	$\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{d}$ протилежно напрямлені $\bar{a} = -\bar{m}$ протилежні

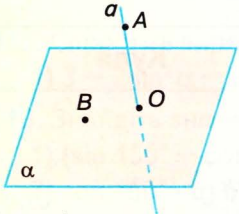
Додавання векторів

Правило трикутника	Правило паралелограма	У координатній формі
 $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$	 $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$  $\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}$	$\bar{a}(a_1; a_2)$, $\bar{b}(b_1; b_2)$, $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{c}(a_1+b_1; a_2+b_2)$

Множення вектора на число		Скалярний добуток векторів	
	$\bar{a}(a_1; a_2)$ $k\bar{a}(ka_1; ka_2)$	$\bar{a}\,\bar{b} = \lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert \cdot \cos(\widehat{\bar{a}; \bar{b}})$ $\bar{a}^2 = \lvert\bar{a}\rvert^2$	$\bar{a}\,\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2$
		$\cos(\widehat{\bar{a}; \bar{b}}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$	
		$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\,\bar{b} = 0$, $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$	

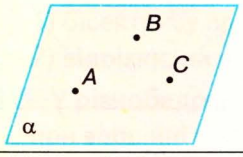
ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

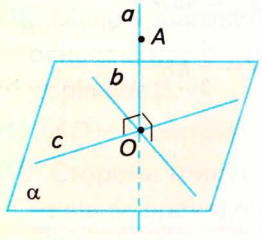
Основні фігури та їх властивості



Точка A, пряма a, площина α

Площина ABC — єдина





AO — перпендикуляр до площини α

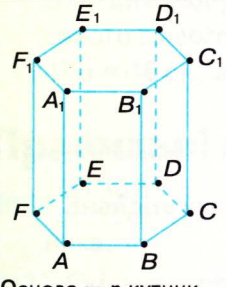
Взаємне розміщення прямих і площин

Фігури	Взаємне розміщення		Запис
Дві прямі a і b	перетинаються	перпендикулярні	$a \perp b$
		не перпендикулярні	$a \times b$
	не перетинаються	паралельні	$a \parallel b$
		мимобіжні	$a \div b$
Пряма a і площина α	пряма лежить у площині		$a \in \alpha$
	пряма перетинає площину	пряма перпендикулярна до площини	$a \perp \alpha$
		пряма не перпендикулярна до площини	$a \times \alpha$
	пряма не перетинає площину	пряма паралельна площині	$a \parallel \alpha$
Дві площини α і β	перетинаються	перпендикулярні	$\alpha \perp \beta$
		не перпендикулярні	$\alpha \times \beta$
	не перетинаються	паралельні	$\alpha \parallel \beta$

МНОГОГРАННИКИ

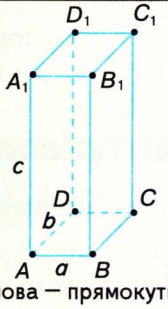
Пряма призма

n-кутна



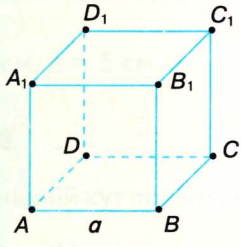
Основа — n-кутник, бічні грані — прямокутники,
AA_1 — висота,
$S_{бп} = S_1 + ... + S_n$,
$S_{пп} = S_{бп} + 2S_{осн}$,
$V = S_{осн} \cdot H$

Прямокутний паралелепіпед



Основа — прямокутник, бічні грані — прямокутники,
AA_1 — висота,
$S_{бп} = 2ac + 2bc$,
$S_{пп} = 2ac + 2bc + 2ab$,
$V = abc$

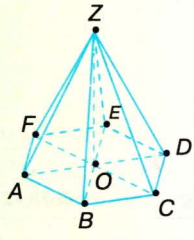
Куб



Основа — квадрат, бічні грані — квадрати,

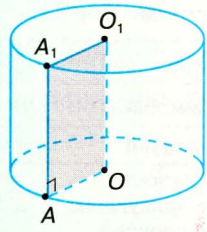
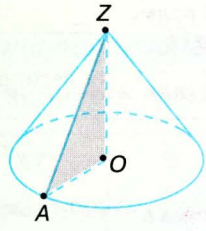
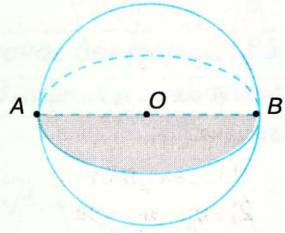
AA_1 — висота,
$S_{бп} = 4a^2$,
$S_{пп} = 6a^2$,
$V = a^3$

Піраміда



Основа — n-кутник, бічні грані — трикутники,
ZO — висота,
$S_{бп} = S_1 + ... + S_n$,
$S_{пп} = S_{бп} + S_{осн}$,
$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$

ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Циліндр	Конус	Куля
		
AA_1 – твірна і висота, $S_{бп} = 2\pi RH$, $S_{пп} = S_{бп} + 2S_{осн}$, $V = S_{осн} \cdot H = \pi R^2 H$	ZA – твірна, ZO – висота, $S_{бп} = \pi R l$, $S_{пп} = S_{бп} + S_{осн}$, $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$	$S_{сф} = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

Розв'язування трикутників

1012. Спростіть вираз:
1) $3 - 2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha$; 2) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$; 3) $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1$.

1013. Знайдіть значення виразу:
1) $(\sin 150^\circ - \cos 120^\circ)(\sin 120^\circ - \cos 150^\circ)$;
2) $\cos 150^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \sin 150^\circ \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos 0^\circ$.

1014. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює c, а гострий кут — α. Знайдіть:
1) бісектрису прямого кута;
2) відрізки, на які бісектриса кута ділить гіпотенузу.

1015. У рівнобедреному трикутнику бісектриса кута при основі дорівнює l, а кут при вершині — α. Знайдіть бічну сторону трикутника.

1016. Більша діагональ прямокутної трапеції дорівнює d і утворює з більшою основою кут α. Знайдіть більшу бічну сторону, якщо гострий кут трапеції дорівнює β.

1017. AD — бісектриса $\triangle ABC$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Знайдіть: 1) CD; 2) AD.

1018. Сторони трикутника дорівнюють 4 см і 6 см, а кут між ними 60°. Знайдіть медіану, проведену до третьої сторони трикутника.

1019. Основи трапеції дорівнюють 2 см і 5 см. Одна з бічних сторін дорівнює 3 см і утворює з більшою основою кут 60°. Знайдіть діагоналі трапеції.

1020. У паралелограмі сторона дорівнює a, діагональ — d, а кут між ними — α. Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $a = 3\sqrt{3}$ см, $d = 10$ см, $\alpha = 60^\circ$; 2) $a = 2$ см, $d = 8$ см, $\alpha = 30^\circ$.

1021. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює a, бічна сторона — b. Знайдіть радіуси кіл, описаного навколо рівнобедреного трикутника і вписаного в нього, якщо:
1) $a = 16$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 6$ см, $b = 5$ см.

Правильні многокутники

1022. Знайдіть кут, центральний кут і зовнішній кут правильного дванадцятикутника.

1023. Скільки сторін має правильний многокутник, якщо:
1) зовнішній його кут дорівнює 24°; 2) його кут дорівнює 135°?

1024. Знайдіть радіуси кіл, описаного навколо правильного шестикутника і вписаного в нього, якщо:
1) різниця їх радіусів дорівнює 6 см; 2) сума їх радіусів дорівнює 8 см.

1025. Побудуйте правильний шестикутник, якщо:
1) його більша діагональ дорівнює 8 см;
2) його менша діагональ дорівнює 6 см.

1026. Виразіть сторону a правильного вписаного многокутника через радіус R кола і сторону b правильного описаного многокутника з тією самою кількістю сторін.

1027. Периметр правильного трикутника дорівнює P. Знайдіть довжину кола, описаного навколо цього трикутника, якщо:
1) $P = 5\sqrt{3}$ см; 2) $P = 12$ см.

1028. Знайдіть довжину кола, якщо довжина його дуги, що містить 45°, дорівнює 10 см.

1029. Навколо кола, довжина якого дорівнює C, описано ромб із гострим кутом α. Знайдіть площу ромба.

1030. Знайдіть діаметр круга, площа якого дорівнює:
1) сумі площ двох кругів з радіусами m і n;
2) різниці площ двох кругів з радіусами m і n.

1031. Знайдіть площу круга, якщо площа його сектора дорівнює 20 см^2, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює 72°.

Декартові координати на площині

1032. Вершини трикутника ABC містяться в точках: A (2; 1), B (1; 3), C (5; 2). Знайдіть координати вершин рівного йому трикутника KLM, якщо відповідні вершини даних трикутників симетричні відносно:
1) осі абсцис; 2) осі ординат; 3) початку координат.

1033. При якому значенні x довжина відрізка AB дорівнює 4, якщо A (2; 3), B (0; x)?

1034. Точка M ділить сторону AC трикутника ABC у відношенні 1 : 3. Знайдіть довжину BM, якщо вершини трикутника мають координати: A (1; 5), B (2; − 2), C (5; 5). Скільки розв'язків має задача?

1035. Знайдіть площу трикутника з вершинами у точках (4; 2), (7; − 2), (1; 0).

1036. Коло радіуса 3 см дотикається до осей координат. Яка відстань від центра цього кола до точки, що симетрична центру відносно:
1) осі абсцис; 2) осі ординат; 3) початку координат?

1037. Пряму задано рівнянням $y = 2x + 3$. Яке рівняння має пряма, симетрична даній відносно: 1) осі абсцис; 2) осі ординат; 3) початку координат?

1038. Дві вершини трикутника ABC містяться в точках (0; − 2) і (2; 0), а третя лежить на прямій $y = -x$. Визначте координати точки C, якщо площа трикутника ABC дорівнює 8.

1039. Знайдіть координати точки перетину медіан трикутника з вершинами у точках (1; 0), (2; 3), (3; 2).

1040. Два кола дотикаються зовні. Доведіть, що відрізок їх спільної зовнішньої дотичної є середнім пропорційним між діаметрами кіл.

1041. (Задача Леонардо Пізанського, XIII ст.) Дві башти на рівнині знаходяться на відстані 60 ліктів одна від одної. Висота першої башти становить 50 ліктів, а висота другої — 40 ліктів. Між баштами знаходиться колодязь, який однаково віддалений від вершин обох башт. Як далеко знаходиться колодязь від основи кожної башти?

Геометричні перетворення

1042. Переміщення переводить трикутник ABC у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть:
1) периметр трикутника $A'B'C'$, якщо $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $AC = 10$ см;
2) кути трикутника $A'B'C'$, якщо $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$, $\angle C = 20°$.

1043. Вершина B прямокутного трикутника ABC при симетрії відносно середини гіпотенузи AC переходить у точку D. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник.

1044. Проведіть пряму a і позначте точку A, яка не лежить на прямій. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте точку A', симетричну точці A відносно прямої a.

1045. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини основ рівнобічної трапеції, є її віссю симетрії.

1046. Побудуйте трикутник, в який переходить трикутник ABC при повороті на 150° за годинниковою стрілкою навколо:
1) вершини A; 2) точки O, яка лежить поза трикутником.

1047. При паралельному перенесенні відрізка AB точка A переходить у точку B, а точка B — у точку B'. Знайдіть довжину відрізка AB', якщо $AB = m$.

1048. Доведіть, що сума основ трапеції менша від суми її діагоналей.

1049. Знайдіть середню лінію трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$), якщо $AE = 10$ см (E — точка перетину продовження бічних сторін трапеції), $AD = 4$ см, $AB = 10$ см.

1050. Сторони чотирикутника дорівнюють 5 см, 7 см, 9 см і 11 см. Знайдіть сторони подібного йому чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 128 см.

1051. Площі двох квадратів відносяться, як 1 : 9. Знайдіть сторону більшого квадрата, якщо периметр меншого дорівнює m.

Вектори на площині

1052. При якому значенні x вектори $\bar{a}\ (3x^2; 2)$ і $\bar{b}\ (1; x)$ перпендикулярні?

1053. Чи утворюють базис вектори:
1) $\bar{a}\ (1; 3)$ і $\bar{b}\ (-6; -18)$; 2) $\bar{a}\ (1; -1)$ і $\bar{b}\ (0; 3)$?

1054. Виразіть вектори сторін паралелограма $ABCD$ через вектори його діагоналей $\overline{AC} = \bar{a}$ і $\overline{BD} = \bar{b}$.

1055. У паралелограмі $ABCD$ точка K — середина відрізка BC, точка O — точка

перетину діагоналей. Розкладіть вектори $\overline{BD}$, $\overline{CO}$, $\overline{KD}$ за базисом $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$.

1056. Одиничні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут 60°. Доведіть, що вектор $2\bar{b} - \bar{a}$ перпендикулярний до вектора $\bar{a}$.

1057. Знайдіть кут між медіанами AP і BM трикутника ABC, у якого вершини мають координати: $A(0; -4)$, $C(0; 6)$, $B(2; -2)$.

1058. Доведіть, що для катетів a і b та гіпотенузи c прямокутного трикутника справджується нерівність: $a + b \leqslant \sqrt{2}\,c$.

1059. Сторону AB квадрата $ABCD$ точки M і P ділять на три рівні частини. Прямі DP і CM перетинаються в точці O. Знайдіть косинус кута COD.

1060. Середня лінія чотирикутника $ABCD$, яка з'єднує середини сторін AB і CD, дорівнює півсумі сторін BC і AD. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — трапеція.

1061. Знайдіть геометричне місце кінців одиничних векторів, початки яких знаходяться на колі радіуса 1 і які колінеарні з даним вектором.

Початкові відомості зі стереометрії

1062. Скільки пар паралельних ребер у прямої призми, в основі якої лежить: 1) трикутник; 2) чотирикутник; 3) n-кутник?

1063. Скільки пар ребер куба лежать на мимобіжних прямих? А трикутної піраміди?

1064. Будинок має форму прямокутного паралелепіпеда довжиною 120 м і об'ємом 369600 м^3. Знайдіть висоту будинку над землею, якщо він заглиблений у землю на 15 м, а довжина будинку більша за його ширину в $1\frac{5}{7}$ рази.

1065. Як зміниться площа бічної поверхні піраміди, в основі якої лежить правильний n-кутник, якщо площу основи збільшити в 3 рази?

1066. Циліндричне відро має внутрішній діаметр 25 см і висоту 40 см. Скільки літрів води воно уміщує?

1067. Купа піску має форму конуса, довжина кола основи якого становить 31,4 м, а твірна — 5,8 м. Скільки п'ятитонних вантажівок знадобиться для його перевезення? (Маса 1 м^3 піску дорівнює 1,6 т).

1068. Площа поверхні Місяця $\approx$ 38 млн. км^2, що становить 0,075 площі поверхні Землі. Знайдіть відношення радіусів Місяця і Землі.

1069. Перший глобус Землі діаметром 54 см був виготовлений у 1492 р. німецьким географом Мартіном Бейхамом (1459 — 1507). В якому масштабі цей глобус зображав Землю? Яка довжина екватора і меридіана на цьому глобусі?

1070. Близько 70,8% поверхні Землі покрито морською водою. Решту поверхні займають континенти й острови. Яка їх загальна площа, якщо вважати нашу планету ідеальною кулею з діаметром 12 742 км?

Розділ I

§ 1

1. 2) $\angle BOA$, $\angle COA$, $\angle DOA$; 3) $\sin\angle BOA=\frac{1}{2}$, $\cos\angle BOA=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\angle BOA=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\angle COA=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\angle COA=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\angle COA=\sqrt{3}$, $\sin\angle DOA=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\angle DOA=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\angle DOA=-1$. **3.** 1) Ні, так, так; 2) так, ні, так. **5.** 1) "+", "+", "+"; 2) "+", "−", "−". **7.** 1) Тупий; 2) гострий; 3) тупий. **9.** 1) 1; 2) 5; 3) 6; 4) 0. **10.** 1) 0; 2) 1; 3) 0. **11.** 1) 0; 2) −1 або 1. **12.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **13.** 1) Так; 2) так; 3) так. **15.** 1) "+"; 2) "+"; 3) "+". **16.** 1) Гострий; 2) тупий; 3) тупий. **17.** 1) $\beta>\alpha$; 2) $\beta>\alpha$; 3) $\beta>\alpha$. **18.** 1) $1\leqslant\sin\alpha+1\leqslant 2$; 2) $-0{,}5\leqslant\cos\alpha+0{,}5\leqslant 1{,}5$; 3) $0{,}2\leqslant\sin\alpha+0{,}2\leqslant 1{,}2$. **19.** 1) $\sin 5^\circ$, $\sin 15^\circ$, $\sin 20^\circ$, $\sin 66^\circ$, $\sin 75^\circ$; 2) $\cos 80^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\cos 46^\circ$, $\cos 16^\circ$, $\cos 9^\circ$. **20.** 1) $\sin 92^\circ$, $\sin 101^\circ$, $\sin 125^\circ$, $\sin 150^\circ$, $\sin 176^\circ$; 2) $\cos 91^\circ$, $\cos 97^\circ$, $\cos 102^\circ$, $\cos 165^\circ$, $\cos 175^\circ$. **21.** 1) "+"; 2) "−"; 3) "+". **22.** 1) "−"; 2) "−"; 3) "+". **23.** 1) −3; 2) 16; 3) 32. **24.** 1) 0; 2) не існує; 3) −0,75. **26.** *Вказівка*: розгляньте два випадки. **28.** Так. Наприклад: 1) 45°; 2) 135°. **31.** 1) Ні. **32.** $AC=\cos\alpha$, $BC=\sin\alpha$, $AD=\cos^2\alpha$, $BD=\sin^2\alpha$, $CD=\sin\alpha\cos\alpha$. **33.** 150°. **34.** 120°.

§ 2

35. 1) а) 1; б) 2; в) $\cos^2\alpha$; г) $\sin^2\alpha$; 2) а) $\sin\alpha$; б) $-\cos\alpha$; в) $-\operatorname{tg}\alpha$; г) 0; 3) а) $\cos\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) 0; г) $2\cos\alpha$. **36.** 1) $2\cos^2\alpha$; 2) $2\sin^2\alpha$; 3) $-\operatorname{tg}^2\alpha$; 4) 1. **38.** $\sin 70^\circ$, $\sin 55^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 15^\circ$, $\sin 4^\circ$. **39.** $-\cos 75^\circ$, $-\cos 60^\circ$, $-\cos 58^\circ$, $-\cos 35^\circ$, $-\cos 20^\circ$. **40.** 1) 3; 2) 2; 3) 1. **41.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1$; 3) $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$. **42.** 1) −0,5; 2) 1; 3) 0; 4) 0,5. **43.** 1) $\sin\alpha$; 2) $-\sin\alpha$; 3) $2\sin\alpha$; 4) 0. **45.** При $\alpha=90^\circ$. **46.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\sin^3\alpha$; 4) $\sin^2\alpha$; г) $\sin^2\alpha$; 5) 1; 6) $\sin^2\alpha$. **48.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **49.** 1) 2; 2) 10; 3) 5. **50.** 1) $\cos\alpha=0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha=0{,}75$; 2) $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{12}{5}$; 3) $\cos\alpha=0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$. **51.** 1) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{12}{5}$; 2) $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$; 3) $\sin\alpha=0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$. **52.** 1) $\cos\alpha=0{,}8$, $\sin\alpha=0{,}6$; 2) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $\sin\alpha=\frac{12}{13}$; 3) $\cos\alpha=\frac{60}{61}$, $\sin\alpha=\frac{11}{61}$. **53.** 1) $\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$; 2) $2\sin\alpha$; 3) $\cos\alpha+\sin\alpha$; 4) 1. **55.** 1) $\cos\alpha-\sin\alpha$; 2) 1; 3) $0{,}5\cos^2\alpha$; 4) 2. **56.** 1) 2; 2) 3; 3) −1. **57.** 1) 0; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{10}{21}$. **58.** $\frac{m^2-1}{2}$. **59.** 1) 1; 2) 0; 3) 0. **60.** $\approx 4{,}8$ км. **61.** $\alpha\approx 18^\circ 26'$.

§ 3

62. 3). **63.** 2) 12 см. **65.** BC — найбільша, AC — найменша. **66.** $\angle B$ — найбільший, $\angle C$ — найменший. **67.** 1) $6\sqrt{2}$ см; 2) $\approx 57°9'$. **68.** 1) $4\sqrt{2}$ см; 2) $2\sqrt{6}$ см; 3) ≈ 6 см. **69.** 1) $\approx 25°40'$; 2) $\approx 18°13'$; 3) $\approx 28°8'$. **70.** 1) $\angle B$ — найбільший, $\angle A$ — найменший; 2) кути рівні; 3) $\angle A$ — найбільший, $\angle C$ — найменший. **71.** 1) AB — найбільша, AC — найменша; 2) AB — найбільша, AC — найменша; 3) BC — найбільша, AB — найменша. **72.** 1) $BC > AC$; 2) $AC > BC$; 3) $BC > AC$. **73.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **74.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **75.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **76.** 1) $\sqrt{3}$ см; 2) 3 см; 3) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см. **77.** 1) 8 см; 2) $8\sqrt{2}$ см; 3) $8\sqrt{3}$ см. **78.** $1 : \sqrt{3} : 2$. **79.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **80.** 1) $a \approx 7{,}1$ см, $c \approx 9{,}7$ см; 2) $a \approx 2$ см, $c \approx 1{,}5$ см. **81.** $\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$, $\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$. **82.** 1) $\angle B \approx 135°31'$, $\angle C \approx 14°29'$; 2) $\angle B \approx 102°58'$, $\angle C \approx 32°2'$. **83.** 1) $\approx 48°31'$ або $\approx 131°29'$; 2) $\approx 109°29'$ або $\approx 26°31'$. *Вказівка*: розгляньте два випадки. **84.** $\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. **85.** 6 см, $\approx 3{,}1$ см , $\approx 4{,}4$ см. **86.** 1) $b \approx 5{,}2$ см, $c \approx 7$ см; 2) $b \approx 8{,}2$ см, $c \approx 7{,}3$ см. **87.** 1) $3\sqrt{2}$ см; 2) 4,8 см. **88.** 1) $5(\sqrt{2}+1), 5(\sqrt{2}+2)$; 2) $4(\sqrt{2}-1)$, $4(2-\sqrt{2})$. **89.** 1) Основа; 2) основа; 3) бічна сторона. **90.** *Вказівка*: застосуйте наслідок 2 з теореми синусів до $\triangle ABD$ або $\triangle BCD$. **91.** *Вказівка*: продовжіть медіану BM за точку M на відрізок $MD = BM$. Розгляньте $\triangle BCD$. **92.** $BC > AC$. **93.** 1) 16,9 см; 2) 6,25 см. **94.** 1) $2\sqrt{2}$ см; 2) 4 см; 3) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см. **95.** $\approx 27{,}8$ см. **96.** $\frac{(a^2-b^2)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{2(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}$. **97.** *Вказівка*: нехай BD — бісектриса $\triangle ABC$. Застосуйте теорему синусів до $\triangle ABD$ і $\triangle BCD$. **98.** *Вказівка*: нехай BD — медіана $\triangle ABC$. Застосуйте теорему синусів до $\triangle ABD$ і $\triangle BDC$. **99.** *Вказівка*: доведіть, що медіана CC_1 проходить через точку O, яка ділить медіану BB_1 у відношенні 2 : 1. Застосуйте теорему синусів спочатку до $\triangle BCC_1$ і $\triangle ACC_1$, а потім — до трикутників BOC і B_1OC. **100.** *Вказівка*: застосуйте теорему синусів до $\triangle AKC$ і $\triangle BKD$. **101.** *Вказівка*: побудуйте допоміжний трикутник, сторонами якого є бічні сторони трапеції і різниця її основ. **102.** *Вказівка*: побудуйте допоміжний трикутник, сторонами якого є діагоналі трапеції і сума її основ. **103.** $\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **104.** $\frac{\sqrt{21}}{3}$ см. **105.** *Вказівка*: застосуйте наслідок 1 з теореми синусів до $\triangle ABD$ і $\triangle DBC$. **106.** *Вказівка*: позначте кут між діагоналями через α. Виразіть кожну сторону чотирикутника через радіус описаного кола і кут, протилежний цій стороні. Потім скористайтеся властивістю сторін описаного чотирикутника. **107.** $\approx 101{,}3$ м.

§ 4

108. 3). **109.** $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$. **110.** $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. **111.** −0,25. **112.** 1) $b^2 = a^2 + c^2 - ac\sqrt{2}$; 2) $c^2 = a^2 + b^2 - ab$; 3) $a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{3}$. **113.** 1) $\cos A = 0{,}65$, $\cos B = \frac{83}{160}$, $\cos C = \frac{5}{16}$; 2) $\cos A = \frac{13}{14}$, $\cos B = \frac{1}{2}$, $\cos C = \frac{1}{7}$; 3) $\cos A = \frac{23}{28}$, $\cos B = \frac{29}{56}$, $\cos C = \frac{1}{16}$. **114.** 1) ≈ 5,6 см; 2) $\alpha \approx 28°57'$. **115.** 1) ≈ 3,6 см; 2) ≈ 2,8 см; 3) ≈ 7,2 см. **116.** 1) $\angle A \approx 36°20'$, $\angle B \approx 117°17'$, $\angle C \approx 26°23'$; 2) $\angle A \approx 46°34'$, $\angle B \approx 28°57'$, $\angle C \approx 104°29'$; 3) $\angle A \approx 44°25'$, $\angle B \approx 57°7'$, $\angle C \approx 78°28'$. **117.** 1) $\alpha < 90°$; 2) $\alpha = 90°$; 3) $90° < \alpha < 180°$. **118.** 1) Тупокутний; 2) гострокутний; 3) прямокутний. **119.** 1) 90°; 2) ≈ 117°17'; 3) ≈ 93°42'. **120.** 1) ≈ 14,8 см; 2) 7 см; 3) ≈ 17 см. **122.** 1) 13 см; 2) ≈ 6,1 см. **123.** 1) ≈ 8,7 см і 14 см; 2) ≈ 7,5 см і ≈ 14,7 см; 3) ≈ 14,3 см і ≈ 8,2 см. **124.** $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$, $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$. **125.** ≈ 6,8 см або ≈ 2,1 см. **126.** ≈ 6,5 см. **127.** 1) ≈ 5,7 см або ≈ 10,8 см; 2) ≈ 7,2 см і ≈ 13,4 см. **128.** Якщо кут α зростає від 0° до 90°, то значення $\cos\alpha$ спадають, залишаючись додатними. Тоді довжина сторони a зростає. При подальшому зростанні кута α від 90° до 180° значення $\cos\alpha$ спадають від 0 до −1. Тому довжина сторони a продовжує зростати. **130.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — паралелограм. За теоремою косинусів знайдіть AC^2 і BD^2. **131.** 15 см і 25 см. **132.** 5 см, 10 см. **133.** 6 см, 7 см. **134.** ≈ 9,8 см і ≈ 12,2 см. **135.** 27 см. **136.** *Вказівка*: продовжіть медіану $AM = m_a$ за точку M на відрізок $MD = AM$ і обґрунтуйте, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. **137.** 13 см. **138.** $\sqrt{R^2 + 3r^2}$. **139.** *Вказівка*: за теоремою косинусів з трикутників BOM і AOM знайдіть BM^2 і AM^2. Одержані рівності почленно додайте. **140.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою косинусів. **141.** $\alpha \approx 45°$. **142.** ≈ 338,8 м.

§ 5

143. $x = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$ (мал. 41); $x = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$ (мал. 42); $\cos x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ (мал. 43). **144.** $c \approx 1{,}6$, $\alpha \approx 111°19'$, $\beta \approx 38°41'$ (мал. 44); $\alpha = 105°$, $a \approx 2{,}1$, $b \approx 2{,}9$ (мал. 45). **145.** 1) $b \approx 4{,}1$, $\alpha \approx 47°2'$, $\gamma \approx 102°58'$; 2) $a \approx 4{,}6$, $\beta \approx 48°51'$, $\gamma \approx 71°9'$; 3) $c \approx 2{,}1$, $\alpha \approx 92°40'$, $\beta \approx 42°20'$; 4) $c \approx 9{,}6$, $\alpha \approx 30°12'$, $\beta \approx 44°48'$; 5) $a \approx 6{,}1$, $\beta \approx 25°13'$, $\gamma \approx 34°47'$. **146.** 1) $b \approx 2{,}1$, $c \approx 2{,}9$, $\alpha = 105°$; 2) $a \approx 1{,}5$, $b \approx 1{,}8$, $\gamma = 75°$; 3) $b \approx 3{,}6$, $c \approx 5{,}3$, $\alpha = 102°$; 4) $a \approx 4{,}5$, $c \approx 12{,}3$, $\beta = 50°$; 5) $a \approx 4{,}7$, $b \approx 2{,}1$, $\gamma = 30°$. **147.** 1) $\alpha \approx 29°56'$, $\beta \approx 93°49'$, $\gamma \approx 56°15'$; 2) $\alpha \approx 36°20'$, $\beta \approx 26°23'$, $\gamma \approx 117°17'$; 3) $\alpha \approx 34°3'$, $\beta \approx 101°32'$, $\gamma \approx 44°25'$; 4) $\alpha \approx 28°57'$, $\beta \approx 46°34'$, $\gamma \approx 104°29'$; 5) $\alpha \approx 46°34'$, $\beta \approx 75°31'$, $\gamma \approx 57°55'$. **148.** 1) $b \approx 4{,}8$, $d_1 \approx 4{,}3$, $\approx 44°40' \approx 135°20'$; 2) $b \approx 8{,}4$, $d_1 \approx 6{,}9$, $\approx 54°47'$, $\approx 125°13'$; 3) $b \approx 2{,}8$, $d_1 \approx 6{,}4$, $\approx 73°44'$, $\approx 106°16'$. **149.** 1) $c \approx 17{,}8$, $\beta \approx 32°23'$, $\gamma \approx 107°37'$; 2) $b \approx 55{,}1$, $\beta \approx 102°58'$, $\gamma \approx 32°2'$; 3) $a \approx 7{,}8$, $\alpha = 30°$, $\beta = 75°$; 4) $b \approx 45{,}6$, $\beta \approx 130°32'$, $\gamma \approx 19°28'$; 5) $c \approx 17{,}8$, $\beta \approx 32°23'$, $\gamma \approx 107°37'$. **150.** 1) $\alpha \approx 30°45'$, $\beta \approx 24°9'$, $\gamma \approx 125°6'$; 2) $\alpha = 115°$, $b \approx 1{,}9$, $c \approx 1{,}7$;

3) $b \approx 2{,}8$, $\alpha \approx 27°20'$, $\gamma \approx 112°40'$; 4) $\alpha \approx 12°21'$, $\beta \approx 147°39'$, $a \approx 12{,}5$. **151.** 1) $a \approx 6{,}9$, $b \approx 1{,}9$, $c \approx 7{,}8$, $\angle C = 113°$; 2) $a \approx 2$, $b \approx 3$, $c \approx 4$, $\angle C = 104°$; 3) $a \approx 4$, $b \approx 5$, $c \approx 7$, $\angle C = 34°$. **152.** 1) $c \approx 28{,}1$, $\angle A \approx 10°49'$, $\angle B \approx 38°6'$, $\angle C \approx 131°5'$; 2) $b \approx 24{,}2$, $\angle A \approx 38°12'$, $\angle B \approx 93°53'$, $\angle C \approx 47°55'$; 3) $c = 13{,}5$, $\angle A \approx 53°58'$, $\angle B \approx 68°55'$, $\angle C \approx 57°7'$. **153.** 1) $\approx 3{,}9$ см, $\approx 8{,}6$ см; 2) $\approx 3{,}7$ см, $\approx 6{,}7$ см. **154.** 1) $\approx 4{,}8$ см, ≈ 4 см, $\approx 6{,}2$ см; 2) $\approx 3{,}8$ см, $\approx 4{,}7$ см, $\approx 3{,}6$ см. **155.** 13 см, 14 см, 15 см. **156.** a, $a\left(1+\sqrt{2}\right)$, $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **157.** $\approx 6{,}4$ см, якщо $\angle C$ — гострий; $\approx 11{,}7$ см, якщо $\angle C$ — тупий. **158.** $\approx 57{,}4$ см, $\approx 67{,}7$ см, $\approx 70{,}5$ см. **159.** $2R\sin\alpha$, $2R\sin\beta$, $2R\sin(\alpha+\beta)$. **160.** 9 см, 24 см, 22°, 98°. **161.** $\angle A \approx 55°46'$, $\angle B \approx 124°14'$, $\angle C \approx 138°36'$, $\angle D \approx 41°24'$. **162.** $\frac{25\sqrt{39}}{39}$ см. **163.** $\frac{2\sqrt{3\left(a^2+b^2+ab\right)}}{3}$. **164.** $\frac{b\sqrt{2}}{2}$. **165.** $\approx 39{,}7$ см, $\approx 42{,}4$ см. *Вказівка*: з вершини меншої основи проведіть пряму, паралельну бічній стороні. Знайдіть за теоремою синусів бічні сторони утвореного трикутника. **166.** $S = \frac{\left(a^2-b^2\right)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\left(\alpha+\beta\right)}$. *Вказівка*: з вершини меншої основи проведіть пряму, паралельну бічній стороні. За теоремою синусів знайдіть сторону утвореного трикутника. **167.** $BC = \frac{a\sin\alpha\sin\beta_1}{\sin\left(\alpha+\beta\right)\sin\left(\alpha_1+\beta_1\right)}$. **169.** $\approx 44°20'$. **171.** ≈ 29 м. **172.** $\approx 924{,}3$ м. **173.** $AC = \frac{a\sin\beta\sin\beta_1}{\sin\left(\alpha+\beta\right)\sin\left(\beta-\beta_1\right)}$. **174.** ≈ 162 м.

§ 6

175. 1) б), в); 2) в), д). **176.** 6 кв. од. (мал. 59); 10 кв. од. (мал. 60). **177.** в) 36 кв. од. **178.** 1) 15 см^2; 2) 24 см^2; 3) 56 см^2. **179.** 1) $\approx 1{,}9$ см^2; 2) $\approx 7{,}3$ см^2; 3) $\approx 17{,}7$ см^2. **180.** 1) 120 см^2; 2) $8\sqrt{5}$ см^2; 3) 336 см^2. **181.** 1) 84 см^2; 2) 24 см^2; 3) 42 см^2. **183.** 1) 12 см^2; 2) 90 см^2; 3) 156 см^2. **184.** 1) 16 см; 2) 8 см. **185.** 1) $S \approx 34{,}5$ см^2; 2) $\gamma \approx 36°52'$; 3) $b = 24$ см; 4) $a \approx 3{,}7$ см. **186.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **187.** Якщо кут α зростає від 0° до 90°, то площа трикутника зростає. При подальшому зростанні кута α від 90° до 180° площа спадає. Найбільша площа трикутника, якщо $\alpha = 90°$. **188.** *Вказівка*: врахуйте, що діагональ паралелограма розбиває його на два трикутники з рівними площами. **189.** 1) $\approx 5{,}6$ см^2; 2) $\approx 11{,}5$ см^2. **191.** 1) $\approx 1{,}4$ см^2; 2) $\approx 29{,}8$ см^2. **192.** *Вказівка*: врахуйте, що діагоналі паралелограма розбивають його на чотири трикутники з рівними площами. **193.** 1) $\approx 19{,}3$ см^2; 2) $\approx 41{,}1$ см^2. **194.** 1) 36 см^2; 2) $\approx 21{,}1$ см^2. **195.** 1) $\approx 19{,}1$ см^2; 2) $\approx 26{,}8$ см^2. **196.** *Вказівка*: нехай $AD = l$ — бісектриса $\triangle ABC$. Знайдіть за формулою $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$ площі трикутників ABC, ACD, ABD та скористайтеся рівністю $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{ABD}$. **197.** $\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **198.** 1) 12 см, 5,6 см, 4,2 см; 2) $\approx 12{,}9$ см, 12 см, 11,2 см. **199.** 36 см, 51 см, 75 см. **200.** 84 см^2. **201.** 1) $\approx 14{,}9$ см; 2) $\approx 10{,}4$ см. **202.** 1) 13 см; 2) 16,25 см. **203.** 1) $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ см, $r = \sqrt{3}$ см; 2) $S = 6$ см^2, $r = 1$ см;

3) $S = 12$ см^2, $R = 3{,}125$ см; 4) $S = 24$ см^2, $r = 2$ см; 5) $R = 8{,}125$ см, $r = 1{,}5$ см. **204.** *Вказівка*: 1) скористайтеся рівностями $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$; 2) скористайтеся тим, що $R = \frac{a}{\sin\alpha}$. **205.** $\frac{l^2\sin^2\alpha}{2\sin(\alpha-45^\circ)\cos(\alpha-45^\circ)}$. **206.** $\frac{2m^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **207.** $S = \frac{h_1h_2}{2\sin\alpha}$. **208.** *Вказівка*: нехай O — точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$. Тоді площа цього чотирикутника дорівнює сумі площ трикутників ABO, BCO, CDO, ADO. **209.** 288 см^2. **210.** 270 см^2. **211.** 12 см. **212.** $S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_a+m_b-m_c)(m_a+m_c-m_b)(m_b+m_c-m_a)}$. *Вказівка*: продовжіть одну з медіан трикутника на відрізок, що дорівнює $\frac{1}{3}$ медіани. **213.** $S = 1:\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}$. *Вказівка*: виразіть сторони трикутника з рівності $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ і скористайтеся формулою Герона. **215.** $\approx 1{,}9$ кг. **216.** $AD = 400$ м.

Розділ 2

§ 7

217. Мал. 81. **218.** 1) OA; 2) OM; 3) точка O; 4) $\angle AOB$. **219.** 1) б; 2) в. **220.** 1) 20 см; 2) 32 см; 3) 40 см. **221.** 3 і 4. **222.** 1) 1,5 см; 2) 2 см; 3) $\frac{P}{8}$. **223.** 1) 4 см; 2) 8 см; 3) $\frac{d}{2}$. **224.** 1) 108°; 2) 150°; 3) 160°. **225.** 1) 18°; 2) 15°; 3) 36°. **226.** 1) 10; 2) 3; 3) 12. **227.** 1) 120°; 2) 154°; 3) 146°. **228.** 1) 8; 2) 12; 3) 9. **229.** 1) 36; 2) 10; 3) 20. **230.** 1) $\beta = 36^\circ$, $\gamma = 36^\circ$, $n = 10$; 2) $\alpha = 140^\circ$, $\gamma = 40^\circ$, $n = 9$; 3) $\alpha = 160^\circ$, $\beta = 20^\circ$, $n = 18$; 4) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$; 5) $\alpha = 168^\circ$, $\beta = 12^\circ$, $n = 30$; 6) $\alpha = 135^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, $n = 8$; 6) $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $n = 12$. **231.** *Вказівка*: зовнішній кут дорівнює $180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n}$. Порівняйте зовнішній кут із центральним. **232.** *Вказівка*: знайдіть суму $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ і $\frac{360^\circ}{n}$. **233.** 1) У 4 рази; 2) у 9 разів. **234.** $\frac{n-2}{n}$. **235.** 1) 4; 2) 3. **236.** 1) 8; 2) 12. **237.** 1) 7; 2) 5. **238.** 120°. **239.** 1) Так; 2) так. **240.** Ні. **241.** 60°. **242.** *Вказівка*: 1) спочатку доведіть рівність трикутників; 2) доведіть, що утворені чотирикутники є рівнобічними трапеціями; 3) знайдіть відповідні кути трикутника і скористайтеся ознакою рівнобедреного трикутника. **244.** *Вказівка*: спочатку доведіть рівність трикутників. **246.** *Вказівка*: доведіть, що в утвореному n-кутнику всі сторони рівні і всі кути рівні. **247.** 60°. **248.** *Вказівка*: переконайтеся, що всі кути восьмикутника дорівнюють по 135°, а кожна сторона дорівнює $a(\sqrt{2}-1)$. **249.** *Вказівка*: сполучіть дану точку з вершинами n-кутника і знайдіть

площу n-кутника як суму площ утворених трикутників. **250.** *Вказівка*: доведіть, що кожний кут утвореного трикутника дорівнює 60°. **251.** *Вказівка*: покажіть, що сума кутів многокутників, які мають спільну вершину, дорівнює 360°. **252.** *Вказівка*: скористайтеся вказівкою до попередньої задачі.

§ 8

253. 1) $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$; 2) $R=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $r=\frac{a}{2}$; 3) $R=a$, $r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **254.** 1) 1; 2) 1; 3) 1. **255.** 1) 1; 2) 1,75; 3) 1,5. **256.** 1) 12 см; 2) $5\sqrt{3}$ см; 3) 18 см. **257.** 1) 12 см; 2) $16\sqrt{3}$ см; 3) 18 см. **258.** 1) 5 см; 2) 6 см; 3) 8 см. **259.** *Вказівка*: порівняйте формули $a_3=R\sqrt{3}$ і $a_3=2r\sqrt{3}$. **260.** 1) $R=2$ см, $r=1$ см, $P=6\sqrt{3}$ см; 2) $a=12$ см, $r=2\sqrt{3}$ см, $P=36$ см; 3) $a=36$ см, $R=12\sqrt{3}$ см, $P=108$ см; 4) $a=3\sqrt{3}$ см, $R=3$ см, $r=1{,}5$ см. **261.** 1) 8 см; 2) $2\sqrt{2}$ см. **262.** 1) 1,5 см; 2) 2 см; 3) 2,5 см. **263.** 1) 8 см; 2) 16 см; 3) 48 см. **264.** 1) $R=3\sqrt{2}$ см, $r=3$ см, $P=24$ см; 2) $a=16$ см, $r=8$ см, $P=64$ см; 3) $a=20$ см, $R=10\sqrt{2}$ см, $P=80$ см; 4) $a=4$ см, $R=2\sqrt{2}$ см, $r=2$ см. **265.** 1) 24 см; 2) 30 см; 3) 42 см. **266.** 1) 2 см; 2) 8 см; 3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **267.** 1) 1,5 см; 2) 9 см; 3) 15 см. **268.** 1) $R=20$ см, $r=10\sqrt{3}$ см, $P=120$ см; 2) $a=14$ см, $r=7\sqrt{3}$ см, $P=84$ см; 3) $a=20$ см, $R=20$ см, $P=120$ см; 4) $a=6$ см, $R=6$ см, $r=3\sqrt{3}$ см. **269.** 1) 6 см; 2) $2m\sqrt{3}$. **270.** 1) 4 см, 8 см; 2) n, $2n$. **271.** 1) 2 см, $2\sqrt{2}$ см; 2) 1 см, $\sqrt{2}$ см. **272.** 1) $6(2+\sqrt{3})$, $3(3+2\sqrt{3})$; 2) $10(2+\sqrt{3})$, $5(3+2\sqrt{3})$; 3) $2m(2+\sqrt{3})$, $m(3+2\sqrt{3})$. **273.** 1) $\sqrt{6}$ см; 2) $3\sqrt{6}$ см; 3) $\frac{P\sqrt{6}}{9}$. **274.** 1) 5 см; 2) 1 см; 3) $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. **275.** 1) 30 см; 2) 34 см; 3) $2a$. **276.** 1) 14 см; 2) 12 см; 3) $\frac{2a}{3}$. **277.** 1) 24 см; 2) $24\sqrt{3}$ см; 3) $\frac{2P\sqrt{3}}{3}$. **278.** 1) $a=3$ см, $R=3$ см, $r=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см; 2) $a=4$ см, $R=4$ см, $r=2\sqrt{3}$ см; 3) $a=\frac{d}{2}$, $R=\frac{d}{2}$, $r=\frac{d\sqrt{3}}{4}$. **279.** 1) 4 см, $2\sqrt{3}$ см; 2) 16 см, $4\sqrt{3}$ см; 3) $2a$, $a\sqrt{3}$. **280.** 1) $a=10$ см, $r=5\sqrt{3}$ см; 2) $a=12$ см, $r=6\sqrt{3}$ см; 3) $a=\frac{d}{\sqrt{3}}$, $r=\frac{d}{2}$. **281.** *Вказівка*: розгляньте два випадки. 1) $6\sqrt{3}$ см або $3\sqrt{3}$ см; 2) 6 см або 3 см; 3) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ або $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **282.** Правильний

трикутник. **283.** Правильний чотирикутник. **284.** Ні. **285.** 1) $4\sqrt{3}$ см; 2) $6\sqrt{3}$ см. **286.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **287.** 1) Якщо $n < 6$; 2) якщо $n = 6$; 3) якщо $n > 6$. **288.** 1) $2(3+2\sqrt{3})$; 2) $4(3+2\sqrt{3})$. **289.** $\frac{a}{2}(2+\sqrt{2})$. **290.** $\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$. **291.** 1) $\frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$; 2) $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **292.** *Вказівка*: поділіть восьмикутник на 8 рівних трикутників і розгляньте один із них. 1) Скористайтеся теоремою косинусів; 2) скористайтеся теоремою Піфагора. **293.** *Вказівка*: скористайтеся вказівкою до попередньої задачі. **294.** 5,3 м. **295.** 4,2 м; 2,3 м; 2,1 м.

§ 9

296. 1) На колі радіуса R позначаємо довільну точку; 2) із даної точки на колі відмічаємо послідовно 5 точок розхилом циркуля, що дорівнює R; 3) з'єднуємо точки і отримуємо шестикутник. **299.** 1) На прямій від довільної точки A відкладаємо циркулем відрізок $AB = a$; 2) розхилом циркуля, що дорівнює a, описуємо коло з центром у точці A, а потім — у точці B; 3) точку C перетину цих кіл сполучаємо з точками A і B та отримуємо трикутник ABC. **300.** *Вказівка*: спочатку накресліть коло даного радіуса. Через його центр проведіть перпендикулярні прямі. **302.** *Вказівка*: впишіть у коло відповідний правильний многокутник. Дотичні, що проходять через вершини вписаного многокутника, перетинаються у вершинах правильного описаного многокутника. **303.** *Вказівка*: врахуйте, що сторона правильного шестикутника дорівнює радіусу кола, описаного навколо нього. **304.** *Вказівка*: спочатку знайдіть радіус описаного кола. **305.** *Вказівка*: врахуйте, що вершини квадрата лежать на перетині сторін ромба з бісектрисами кутів між діагоналями ромба. **306.** *Вказівка*: проводимо до сторін n-кутника серединні перпендикуляри. Точки перетину серединних перпендикулярів з колом разом з вершинами n-кутника і будуть вершинами правильного $2n$-кутника. **308.** *Вказівка*: скористайтеся твердженням із попередньої задачі. **310.** *Вказівка*: спочатку доведіть, що $CDEO$ і $BOFA$ — ромби. **312.** 1) $R \approx 2{,}6$ см; 2) $R \approx 3{,}4$ см. **313.** 1) $R \approx 3$ см; 2) $R \approx 5{,}8$ см. **314.** 1) $R \approx 5{,}3$ см; 2) $R \approx 3{,}6$ см. **315.** 1) $R \approx 4$ см; 2) $R \approx 5{,}8$ см. **316.** *Вказівка*: спочатку побудуйте допоміжний рівнобедрений трикутник AOB з основою AB, у якого OC — висота, $D \in OC$, $AD = OD$ і $DC = AB$. OA — радіус кола, описаного навколо восьмикутника. **317.** *Вказівка*: скористайтеся вказівкою до попередньої задачі. **318.** *Вказівка*: від кожної вершини квадрата відкладіть відрізки, що дорівнюють половині його діагоналі. Отримані вісім точок послідовно сполучить. **319.** *Вказівка*: побудуйте коло і поділіть його на п'ять рівних частин. Сполучіть точки поділу, утворивши зірочку.

§ 10

321. 1) 10π см; 2) 20π см; 3) 24π см. **322.** 1) 4π см; 2) 6π см; 3) 8π см. **323.** 1) 2 см; 2) 7 см; 3) 1 см. **324.** 1) $D = 5$ см, $C = 5\pi$ см; 2) $R = 10$ см, $C = 20\pi$ см; 3) $R = 9{,}2$ см,

$D = 18{,}4$ см; 4) $R = 4{,}8$ см, $C = 9{,}6\pi$ см; 5) $D = 22$ см, $C = 22\pi$ см. **325.** *Вказівка*: спочатку знайдіть радіус кола. **326.** 1) Збільшиться на 10π; 2) зменшиться на 6π; 3) збільшиться у 2 рази. **327.** 1) 6π см; 2) 12π см. **328.** 1) 8π см; 2) $8\sqrt{2}\,\pi$ см. **329.** 1) 13π см; 2) 25π см; 3) 20π см. **330.** 1) 3π см; 2) $2\sqrt{2}\,\pi$ см; 3) $4\sqrt{3}\,\pi$ см. **331.** 1) $10\sqrt{3}\,\pi$ см; 2) 20π см. **332.** 1) π см; 2) 2π см; 3) 4π см. **333.** 1) $\frac{36}{\pi}$ см; 2) 108 см; 3) $\frac{60}{\pi}$ см. **334.** 1) 80°; 2) 108°; 3) 80°. **335.** 1) 8π см; 2) 12π см. **336.** 1) $14{,}4\,\pi$ см; 2) $9{,}6\,\pi$ см. **337.** 1) 6π см; 2) 24π см. **338.** 1) $\frac{5\pi\sqrt{73}}{2}$ см; 2) $\frac{13\pi\sqrt{41}}{5}$ см. **339.** $8\sqrt{3}\,\pi$ см; 2) $7\sqrt{3}\,\pi$ см. **340.** 1) 6 см; 2) 1 см. **341.** *Вказівка*: спочатку знайдіть радіус кола. **342.** 1) ≈ 15 см; 2) 1,5*m*. **343.** 1) 3 см; 2) 5 см. **344.** Периметри рівні. **345.** 1) $\frac{15\pi}{4}$ см; 2) 90 см; 3) 30°. **346.** 1) $\frac{3l}{\pi}$; 2) $\frac{2l\sqrt{2}}{\pi}$; 3) $\frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}$. **347.** 1) $\frac{a\pi}{3}$; 2) $\frac{a\pi\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{2a\pi\sqrt{3}}{9}$. **348.** 1) $2\pi(a+b)$; 2) $a\pi$; 3) $2a\pi$. **349.** 1) 16π см; 2) 2π см. **350.** 1) 50π см; 2) 130π см. **351.** Довжині даного кола. **352.** 294 см. **353.** $1\frac{1}{3}$ см. **354.** Перше коло. **355.** $1 : \sqrt{3}$. **356.** 94. **357.** 1) ≈ 64 см; 2) ≈ 80 см. **358.** ≈ 126 м. **359.** $\approx 5{,}7$ м. **360.** *Вказівка*: спочатку треба поміряти, скільки разів намотується ланцюг для відра на вал. **361.** ≈ 40024 км.

§ 11

363. 1) 16π см^2; 2) 36π см^2; 3) 81π см^2. **364.** 1) 25π см^2; 2) 36π см^2; 3) 64π см^2. **365.** 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 6 см. **366.** *Вказівка*: спочатку знайдіть радіус круга. **367.** *Вказівка*: застосуйте формули $D = 2R$ і $C = 2\pi R$. **368.** 1) Збільшиться у 9 разів; 2) зменшиться у 4 рази; 3) збільшиться у 16 разів. **369.** 2. **370.** 1) $\frac{\pi}{4}$ см^2; 2) 9π см^2; 3) 16π см^2. **371.** 1) 2 см; 2) 4 см. **372.** 1) 25π см^2, 50π см^2; 2) 49π см^2, 98π см^2; 3) 81π см^2, 162π см^2. **373.** 1) 25π см^2; 2) 169π см^2; 3) 100π см^2. **374.** 1) 108π см^2; 2) 144π см^2. **376.** 1) π см^2; 2) 2π см^2; 3) 10π см^2. **377.** 1) 18π см^2; 2) 45π см^2; 3) 72π см^2. **378.** 1) $\frac{R^2}{4}(\pi - 2)$; 2) $\frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$. **379.** *Вказівка*: застосуйте формулу $S = \pi R^2$. **380.** 1) 4π см; 2) 2π см; 3) 18π см. **381.** 1) $C = 20\pi$ см, $S = 100\pi$ см^2; 2) $R = 10$ см, $S = 100\pi$ см^2; 3) $R = 5$ см, $C = 10\pi$ см; 4) $R = 1$ см, $S = \pi$ см^2; 5) $C = 6\pi$ см, $S = 9\pi$ см^2; 6) $R = 6$ см, $S = 36\pi$ см^2; 7) $R = 3$ см, $C = 6\pi$ см. **382.** Площа півкруга більша. **383.** У 2 рази. **384.** Площа описаного круга в чотири рази більша за площу вписаного круга. **385.** 1) 10 см; 2) 12 см. **386.** 1) 1 : 4; 2) 1 : 2; 3) 3 : 4. **387.** 1) 16π см^2, 4π см^2; 2) 4π см^2, π см^2. **388.** 1) 8π, 4π; 2) 18π, 9π. **389.** $S = \pi(R-r)(R+r)$. **390.** 1) 60π см^2; 2) 8π см^2. **391.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **392.** 1) 160°; 2) 72°.

393. 1) $\approx 12{,}6$ см; 2) ≈ 6 см. **394.** 1) $R^2(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4})$; 2) $R^2(3\sqrt{3}-\pi)$; 3) $R^2(\pi-2)$; 4) $R^2(4-\pi)$. **395.** $\frac{8S}{\pi}$. **396.** $\frac{Q\pi\sqrt{3}}{3}$. **397.** $\frac{m^2\pi}{4}$. **398.** $\frac{9l^2}{64\pi}$. **399.** 3 : 2. **400.** $S=(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})R$. **401.** a^2. **402.** 10 см. **403.** 1) $\approx 644{,}4$ см^2; 2) ≈ 1790 см^2. **404.** 0,75. **405.** 43,4 %. **406.** $\approx 9{,}6$ дм^2.

Розділ 3

§ 12

410. Точка A — II чв., точка B — IV чв., точка C — I чв., точка D — III чв., точка E — II чв., точка F — I чв., точка K — IV чв., точка L — III чв. **411.** 1) $B(3; -4)$; 2) $B(-3; 4)$; 3) $B(-3; -4)$; 4) $B(3; 4)$. **412.** 1) Так, ні, ні; 2) ні, ні, так. **413.** 1) Ні; 2) так, вісь OX; 3) так, вісь OY. **415.** 1) 5; 2) 17; 3) $\sqrt{145}$; 4) $5\sqrt{5}$. **416.** 1) $d=\sqrt{26}$, $R=\frac{\sqrt{26}}{2}$; 2) $d=10$, $R=5$; 3) $d=5$, $R=2{,}5$. **417.** 1) $AB=2$, $BC=3\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{10}$; 2) $AB=25$, $BC=11$, $AC=30$; 3) $AB=2\sqrt{2}$, $BC=4$, $AC=2\sqrt{2}$. **418.** 1) $AB=BC=3\sqrt{10}$; 2) $AB=AC=\sqrt{10}$; 3) $AB=AC=\sqrt{13}$. **419.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою Піфагора. **420.** 1) 2; 2) -3 або 3; 3) 4. **421.** 1) (4; 0) і (0; 4); 2) (0; 0). **422.** 1) 10, 10, 12; 2) $4\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, 6. **423.** 1) Може, в точках D і M; 2) може, в точці D. **424.** 1) $D(-6; 9)$ або $D(10; 1)$ або $D(22; 17)$; 2) $D(-2; 1)$ або $D(2; -1)$ або $D(4; 3)$. *Вказівка*: розгляньте три випадки. **425.** 1) (9; 4); 2) (2; -3). **426.** (3; 1) і (2; -1) або (-1; 3) і (-2; 1). **428.** 1) Прямокутник; 2) квадрат. **429.** 1) 50 кв. од.; 2) 18 кв. од. **430.** 1) 34 кв. од.; 2) 84,5 кв. од. **432.** 1) 135°; 2) 45°. **434.** 1) Прямокутний; 2) тупокутний. **435.** 1) 4,5 кв. од.; 2) 7 кв. од. **436.** 7 кв. од. **437.** 12,5 кв. од. **438.** 1) $a\sqrt{2}$ — діагональ квадрата зі стороною 1 клітинка, $a\sqrt{5}$ — діагональ прямокутника зі сторонами 1 та 2 клітинки; 2) $a\sqrt{2}$ — діагональ квадрата зі стороною 2 клітинки, $a\sqrt{5}$ — діагональ прямокутника зі сторонами 2 та 4 клітинки. **440.** 1) Ні; 2) так. **441.** На $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ м.

§ 13

442. 1) Ні); 2) ні; 3) так. **443.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **444.** $A(1; 1)$, $B(5; 1)$, $M(3; 1)$ (мал. 155); $A(2; 3)$, $B(2; -1)$, $M(2; 1)$ (мал. 156); $A(-1; -1)$, $B(3; 1)$, $M(1; 0)$ (мал. 157). **445.** 1) (1; 0); 2) (3,5; 2,5); 3) (8; 12). **446.** 1) Ні; 2) ні; 3) так.

447. 1) $B(-5; -6)$; 2) $O(0; 0)$; 3) $A(-15; 19)$; 4) $O(3,5; -1)$; 5) $B(-11; -7)$; 6) $A(-3; 12)$. **448.** 1) $(1,5; 4,5)$, $(4,5; 1,5)$, $(0; 0)$, $BM = 6\sqrt{2}$; 2) $(2,5; -1,5)$, $(1; -1)$, $(0,5; -2,5)$, $BM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$; 3) $(0,5; 2)$, $(2; 0)$, $(0,5; -1)$, $BM = 2,5$. **449.** 1) $(-0,5; 0,5)$; 2) $(-2; 10)$; 3) $(1,5; -0,5)$. **450.** 1) $O(-2; -1)$; 2) $O(2; 1)$; 3) $O(2; -1)$. **451.** 1) $P(-4,5; 0)$, $Q(-4; -2)$, $T(-3,5; -4)$; 2) $P(3; 0,5)$, $Q(5; -2)$, $T(7; -4,5)$. **452.** 1) 3,5; 5; $\frac{\sqrt{37}}{2}$; 2) 25, 17, $\sqrt{82}$. **454.** 1) $O(-1,5; -0,5)$, $D(-6; -2)$; 2) $O(-2; 10)$, $C(-2; 16)$. **455.** 1) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **456.** 1) $(3,5; 1)$; 2) $(-1,5; 2,5)$. **457.** 1) $A(1; 3)$, $B(-3; 3)$, $C(3; -3)$; 2) $A(26; 50)$, $B(12; 2)$, $C(-10; 2)$; 3) $A(2; -1)$, $B(-2; -5)$, $C(-2; 3)$; 4) $A(-1; -3)$, $B(1; 7)$, $C(5; 1)$. **459.** 1) Ні; 2) так. **461.** Так.

§ 14

466. $C(0; 0)$, $R = 2$ (мал. 162); $C(1; 0)$, $R = 2$ (мал. 163); $C(1; 2)$, $R = 2$ (мал. 164). **468.** 1) $C(2; 1)$, $R = 4$; 2) $C(1; 3)$, $R = \sqrt{3}$; 3) $C(-3; 4)$, $R = \sqrt{5}$; 4) $C(-4; 1)$, $R = 5$; 5) $C(0; 3)$, $R = \sqrt{2}$; 6) $C(-1; 0)$, $R = 7$. **469.** 1) Ні; 2) точка A — так, точки B, C, D — ні; 3) ні. **470.** 1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$; 2) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 5$; 3) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$. **471.** 1) $x^2 + (y+1)^2 = 25$; 2) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$; 3) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$; 4) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 32$; 5) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 32$. **472.** 1) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 18$; 2) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$; 3) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 25$. **473.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **474.** 1) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$; 2) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 25$; 3) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 25$. **475.** 1) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$; 2) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 25$; 3) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$. **476.** 1) Точка A — так, точки B, C — ні; 2) точка B — так, точки A, C — ні. **477.** 1) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 16$; 2) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$. **479.** 1) Пряма і коло перетинаються; 2) пряма дотикається до кола. **480.** 1) $B(-6; 2)$; 2) $B(-2; -2)$. **481.** 1) $x^2 + (y-1)^2 = 8$ або $x^2 + (y-5)^2 = 8$; 2) $x^2 + y^2 = 13$ або $x^2 + (y-6)^2 = 13$. **483.** 1) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$; 2) $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 25$. **484.** 1) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ або $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$; 2) $(x-2,5)^2 + (y-2,5)^2 = 6,25$ або $(x+2,5)^2 + (y-2,5)^2 = 6,25$. **485.** 1) $(x-12)^2 + (y-15)^2 = 225$ або $x^2 + (y-3)^2 = 9$; 2) $x^2 + (y-3)^2 = 9$ або $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 9$. **486.** 1) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$; 2) $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$. **487.** 1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$; 2) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$. **489.** 1) $4\sqrt{6}$, $\sqrt{50+2\sqrt{21}-8\sqrt{6}}$, $\sqrt{50+2\sqrt{21}-8\sqrt{6}}$, $\sqrt{50+2\sqrt{21}+8\sqrt{6}}$, $\sqrt{50+2\sqrt{21}-8\sqrt{6}}$, $2\sqrt{21}$; 2) $\sqrt{18+12\sqrt{2}}$, $\sqrt{18-12\sqrt{2}}$, $4\sqrt{2}$. **490.** 1) $(x-12)^2 + (y-5)^2 = 169$; 2) $(x-4)^2 + (y-1,5)^2 = 28,25$. **491.** 1) $(2\sqrt{3}; -2)$, $(-2\sqrt{3}; -2)$; 2) $(2; 2\sqrt{3})$, $(2; -2\sqrt{3})$. **492.** 1) $R = \sqrt{82}$, $C(-4; 5)$; 2) $R = \sqrt{34}$, $C(5; -3)$; 3) $R = 2\sqrt{6}$, $C(2; -2)$; 4) $R = 2$, $C(4; 0)$. **494.** 20. **495.** Якщо уявити, що дані об'єкти містяться у вершинах трикутника, то ліхтар потрібно розмістити в центрі кола, описаного навколо цього трикутника.

§ 15

496. 1) $k=3$; 2) $k=-3$; 3) $k=1$; 4) $k=-2$; 5) $k=-\sqrt{3}$; 6) $k=\sqrt{2}$. **498.** $A(1;1)$, $B(3;2)$, пряма AB задається рівнянням 3) (мал. 174); $A(-1;2)$, $B(2;-2)$, пряма AB задається рівнянням 2) (мал. 175); $A(-2;-1)$, $B(2;3)$, пряма AB задається рівнянням 1) (мал. 176). **499.** 1) $y=0$; 2) $x=0$; 3) $y=x$; 4) $y=-x$. **501.** 1) $y=2$, $x=-1$; 2) $y=-2$, $x=-1$; 3) $y=2$, $x=4$; 4) $y=2$, $x=-4$; 5) $y=-2$, $x=4$. **502.** 1) $P=12$, $S=9$; 2) $P=32$, $S=64$; 3) $P=38$, $S=78$. **503.** 1) $x+y-1=0$; 2) $3x+5y+4=0$; 3) $3x-y-10=0$. **504** 1) AB: $3x+2y=0$, BC: $3x+4y-6=0$, AC: $y+3=0$; 2) AB: $2x+y=0$, BC: $4x-3y+10=0$, AC: $3x-y-5=0$; 3) AB: $2x+y+1=0$, BC: $3x-y-6=0$, AC: $x+y-2=0$. **505.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **506.** 1) Наприклад, (4; 1) і (2; 3); 2) наприклад, (0; −3) і (−2; 2); 3) наприклад, (−1; 2) і (3; −4). **507.** 1) $y=3x+1{,}5$; 2) $2x+y+1=0$; 3) $x-2y-8=0$. **508.** 1) $\left(\frac{12}{7};\frac{27}{14}\right)$; 2) $\left(\frac{13}{15};-\frac{12}{5}\right)$; 3) (−19; −14). **509.** 1) $y=x$; 2) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$. **512.** 1) $y=5x+5$ або $y=5x-5$; 2) $y=-x+5$ або $y=-x-5$. **513.** 1) $y=x+3$; 2) $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}+1$. **514.** 1) $y=0$, $3x+2y-6=0$, $3x+4y=0$; 2) $3x-y=0$, $2x+y-10=0$, $4x-3y=0$. **515.** 1) $D(-6;-2)$; 2) $D(9;6)$. **516.** $y=x-a$, $y=x+a$, $y=-x-a$, $y=-x+a$. **517.** 1) $y-2=0$, $x+y-1=0$, $x-y-1=0$ або $y-2=0$, $x-y+3=0$, $x+y-5=0$; 2) $y+3=0$, $\sqrt{3}x-3y+2\sqrt{3}-9=0$, $\sqrt{3}x-3y+2\sqrt{3}-9=0$ або $y+3=0$, $\sqrt{3}x+3y+2\sqrt{3}+9=0$, $\sqrt{3}x-3y+2\sqrt{3}-9=0$. **518.** 1) 45° і 45°; 2) 135° і 45°. **519.** 1) 0,65; 2) 2,5; 3) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$. **520.** 1) $\frac{2}{3}$ кв. од.; 2) 4,8 кв. од. **524.** $\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}=\frac{c_1-d_1}{d_2-c_2}$.

525. 1) пряма $2a_1x+2a_2y-(a_1^2+a_2^2)=0$;

2) пряма $(2b_1-2a_1)x+(2b_2-2a_2)y+(a_1^2+a_2^2-b_1^2-b_2^2)=0$.

526. 1) $y=R$, $y=-R$; 2) $x=R$, $x=-R$. **527.** $yy_0+xx_0=R^2$. **528.** 12. **529.** 1) $\frac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}$; 2) $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **530.** 1) $\frac{|y_0-b-kx_0|}{\sqrt{k^2+1}}$; 2) $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **533.** Пряма. **534.** 0,5 год, 2 км.

§ 16

535. $A(0;0)$, $B(0;3)$, $C(2;0)$ (мал. 183); $A(-1;0)$, $B(-1;3)$, $C(1;0)$ (мал. 184); $A(1;1)$, $B(1;4)$, $C(3;1)$ (мал. 185). **536.** Так (мал. 186); ні (мал. 187); ні (мал. 188). **538.** 1) (0; 0), (0; 2), (2; 2), (2; 0) або (0; 0), (0; 2), (−2; 2), (−2; 0); 2) (−1; 0), (1; 0), (−1; 2), (1; 2) або (−1; 0), (1; 0), (−1; −2), (1; −2); 3) (1; 1), (1; −1), (−1; 1), (−1; −1). **539.** 1) (0; 0), (0; 6), (8; 0) або (0; 0), (0; 6), (−8; 0); 2) (0; −3), (0; 3), (8; 3) або (0; −3), (0; 3), (8; −3), або (0; −3), (0; 3), (−8; 3), або (0; −3), (0; 3),

$(-8; -3)$; 3) $(-4; 0)$, $(4; 0)$, $(4; 6)$, або $(-4; 0)$, $(4; 0)$, $(4; -6)$, або $(-4; 0)$, $(4; 0)$, $(-4; 6)$, або $(-4; 0)$, $(4; 0)$, $(-4; -6)$. **540.** 1) $\sqrt{13}$, 2,5, $\frac{\sqrt{73}}{2}$; 2) $\sqrt{61}$, 6,5, $\frac{\sqrt{601}}{2}$; 3) $\sqrt{193}$, 12,5, $\frac{\sqrt{2353}}{2}$. **541.** 1) $\sqrt{85}$; 2) $3\sqrt{2}$; 3) 5. **542.** 1) 5; 2) 13; 3) 25. **543.** 1) $(-a; 0)$, $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $(a; 0)$, $\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ або $(0; -a)$, $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $(0; a)$, $\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}\right)$; 2) *Вказівка*: розгляньте 12 випадків. **544.** У даних квадратів дві вершини спільні. Якщо вони лежать на осі OY, то абсциси двох інших відповідних вершин квадратів є протилежними числами. Якщо ці спільні вершини лежать на осі OX, то ординати двох інших відповідних вершин квадратів є протилежними числами. **545.** Так. Наприклад, трикутники з вершинами в точках (1; 1), (2; 1), (1; 2) і (2; 2), (4; 2), (2; 4). *Вказівка*: щоб довести існування фігури, достатньо навести один приклад. **546.** 13 см. **547.** *Вказівка*: введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб один з кінців відрізка AB лежав у початку координат. **548.** 1) Коло з центром (2; 0) і радіусом $2\sqrt{2}$; 2) пряма, що перпендикулярна до відрізка AB і ділить його у відношенні 5 : 2, рахуючи від точки A. **551.** 1) $a = 12\sqrt{2}$, $d = 24$; 2) $a = 2\sqrt{2}$, $d = 4$. **552.** 1) Ні; 2) дотикається. **553.** *Вказівка*: введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб сторона трикутника, до якої проводимо медіану, лежала на осі абсцис, а основа медіани — у початку координат. **556.** Точка M знаходиться на відстані $3\frac{1}{3}$ від центра кола. **560.** Пряма $x = \frac{a^2 + b^2}{2b}$, де b — відстань між точками A і B. *Вказівка*: введіть прямокутну декартову систему координат так, щоб точка A містилась у початку координат, а точка B лежала на осі абсцис. **563.** *Вказівка*: введіть прямокутну декартову систему координат і визначте координати середини третьої сторони трикутника.

Розділ 4

§ 17

566. Перетворення не є переміщенням, оскільки воно не зберігає відстані між відповідними точками. **567.** 1) У точки X' і Y'; 2) у відрізки CX' і $X'Y'$; 3) так. **568.** Так. **569.** $AB = A'B'$. **570.** 1) Не існує; 2) існує. **571.** *Вказівка*: коло з центром B і радіусом 3 см. **576.** 1) Не існує; 2) існує, якщо трикутники ABC і $A'B'C'$ рівні; 3) не існує. **577.** 1) Так; 2) так. **578.** 1) Не обов'язково. **580.** Не обов'язково. **581.** Так. **582.** Ні. Це можливо для рівнобедрених трикутників. **583.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком з теореми про властивість переміщення. **585.** 1) Так; 2) так; 3) не завжди. **586.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком з теорем про властивість

переміщення. **588.** *Вказівка*: нехай паралельні прямі a і b при переміщенні переходять у прямі a' і b', які перетинаються. Оскільки переміщення зберігає належність точок прямій, то прямі a і b також перетиналися б. **589.** 5 см^2 (мал. 203); $(6\sqrt{3} - 4)$ см^2 (мал. 204).

§ 18

590. Мал. 228 б. **593.** Мал. 229 в. **597.** *Вказівка*: побудуйте точки, симетричні вершинам трикутника. **598.** 1) $A'(-3; -5)$; 2) $A'(3; -5)$; 3) $A'(-5; -7)$. **599.** 1) $A'(-2; -2)$, $B'(-6; -6)$; 2) $A'(6; -2)$, $B'(2; -6)$; 3) $A'(2; 2)$, $B'(-2; -2)$. **601.** *Вказівка*: побудуйте серединний перпендикуляр до відрізка MN.
605. 1) *Вказівка*: побудуйте точки, симетричні центру кола та деякій точці кола. **606.** 1) $A'(-4; -5)$; 2) $A'(4; 5)$. **607.** 1) $A'(2; -1)$, $B'(4; -1)$; 2) $A'(-3; 3)$, $B'(3; -3)$; 3) $A'(3; -2)$, $B'(6; -4)$. **609.** *Вказівка*: спочатку знайдіть точку, відносно якої точки C і B симетричні. **610.** *Вказівка*: скористайтесь теоремою про властивість симетрії відносно точки. **611.** *Вказівка*: скористайтесь ознакою: якщо діагоналі чотирикутника діляться точкою їх перетину навпіл, то такий чотирикутник — паралелограм. **612.** 1) $A'(-1; -2)$, $C'(-7; -3)$, $B'(-4; -6)$. **613.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **615.** *Вказівка*: якщо чотирикутник $ABCD$ має центр симетрії, то вершини A, B, C, D переходять відповідно у вершини C, D, A, B. Отже, його сторони AB і BC переходять відповідно у сторони CD і DA. Тому $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$. **616.** Пряма, рівновіддалена від даних прямих. **617.** *Вказівка*: спочатку побудуйте пряму l, відносно якої симетричні точки A і A', а потім точки B' і C' симетричні B і C відносно l. **620.** *Вказівка*: скористайтесь тим, що лінія центрів є віссю симетрії кожного з даних кіл. **621.** *Вказівка*: скористайтеся властивостями діагоналей ромба. **625.** Трапеція — не більше однієї; прямокутник, ромб — дві; квадрат — чотири. **627.** *Вказівка*: проведіть коло з центром O і радіусом OA. Відкладіть від точки A три хорди, які дорівнюють OA. Дістанете точку A'. **629.** *Вказівка*: побудуйте пряму, симетричну прямій a відносно точки P. **630.** *Вказівка*: позначте на даній прямій дві довільні точки M і N. Тоді точка A', симетрична точці A відносно даної прямої, є точка перетину кіл з центрами M і N і радіусами MA і NA. **631.** *Вказівка*: користуючись властивостями осьової симетрії обґрунтуйте рівність сторін трикутника. **632.** *Вказівка*: побудуйте точку B_1, симетричну точці B відносно прямої l. Точка перетину прямих AB_1 і l — шукана точка N. **633.** *Вказівка*: побудуйте точки M_1 і M_2, симетричні точці M відносно сторін деякого кута. Проведіть пряму M_1M_2 і позначте точки перетину цієї прямої із сторонами кута через X і Y. $\triangle MXY$ — шуканий. **634.** *Вказівка*. Скористайтеся розв'язанням задачі 632.

§ 19

635. Мал. 242, *в*. **636.** *Вказівка*: відкладіть відрізок ON, що дорівнює OM. **642.** 1) у пряму, яка проходить через центр повороту; 3) у кут рівний даному. **645.** *Вказівка*: виконайте поворот двох будь-яких точок прямої навколо точки M на даний кут. **646.** *Вказівка*: виконайте поворот центра кола та деякої точки кола навколо

точки A на даний кут. **647.** Геометричне місце центрів поворотів — серединний перпендикуляр до відрізка XX'. **648.** Геометричне місце центрів поворотів — серединний перпендикуляр до відрізка, що сполучає центри даних кіл. **652.** *Вказівка*: покажіть, що відрізки, у яких один кінець спільний — точка перетину висот, а інші — вершини трикутника, є рівними за довжиною, а кути між ними дорівнюють 120°. **653.** *Вказівка*: виконайте поворот трикутника навколо центра на 120°. **654.** *Вказівка*: виконайте поворот квадрата навколо центра на кут 90°. **655.** *Вказівка*: на серединному перпендикулярі до відрізка, який сполучає центри даних кіл, побудуйте точки з яких цей відрізок видно під кутом 45°. **656.** Центр повороту — точка перетину серединних перпендикулярів до відрізків AA' і BB'. Центра повороту не існує, якщо $AA' \parallel BB'$ і $AA' \neq BB'$, або $AA' = BB'$, а середини відрізків AA' і BB' не збігаються. **657.** *Вказівка*: виконайте поворот трикутника навколо вершини B на кут 90°. **659.** $\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$. **660.** 1) 10 хвилин на 13; 2) 20 хвилин на 13. **661.** *Вказівка*: знайдіть центр повороту, при якому прямокутник $ABCD$ займе положення прямокутника $A_1B_1C_1D_1$ (мал. 246). Для цього знайдіть точку O перетину серединних перпендикулярів l_1 і l_2 до відрізків AA_1, BB_1. При повороті навколо точки O на кут 90° прямокутник $ABCD$ займе положення $A_1B_1C_1D_1$.

§ 20

662. Мал. 255 б. **665.** Так. **666.** 1) Так; 2) ні. **669.** Якщо $AB \parallel CD$ або AB і CD лежать на одній прямій. **672.** $AB \parallel CD$ і $AB = CD$ або $AB = CD$ і відрізки AB, CD лежать на одній прямій. **673.** Безліч. **675.** 4 см^2. **676.** *Вказівка*: виконайте паралельне перенесення бічної сторони AB трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) так, щоб точка B перейшла у точку C. Розгляньте утворений трикутник. **677.** *Вказівка*: виконайте паралельне перенесення бічної сторони трапеції так, як показано на мал. 258. **678.** *Вказівка*: виконайте паралельне перенесення діагоналі трапеції так, як показано на мал. 259. **679.** 4 см. *Вказівка*: скористайтеся мал. 258. **680.** *Вказівка*: скористайтеся мал. 258. **681.** *Вказівка*: скористайтеся мал. 259. **682.** *Вказівка*: нехай у трикутнику ABC медіани AM і BN — рівні. Паралельно перенесіть відрізок BN так, що точка N перейшла у M. $\triangle AMB'$ — рівнобедрений. Розгляньте трикутники ANB і BMA. **684.** *Вказівка*: скористайтеся мал. 259. **685.** *Вказівка*: виконайте паралельне перенесення медіани CM трикутника ABC, при якому точка C переходить у точку M. **686.** *Вказівка*: нехай $AMNB$ — шуканий шлях між селами A і B (мал. 261). Побудуйте точку A', в яку переходить точка A при паралельному перенесенні, що переводить точку M у N. Знайдіть точку K перетину прямої $A'B$ з берегом річки, який ближче до села B. Проведіть з точки K перпендикуляр до другого берега річки.

§ 21

687. Мал. 271 б. **689.** 1) $k = 4$. **690.** $k = 1$. **692.** Ні. Наприклад, квадрат не подібний прямокутнику, хоча їх кути рівні, квадрат не подібний ромбу, хоча їх сторони пропорційні. **693.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **694.** 1) 0,25; 2) 4; 3) 25. **698.** 2) точка O лежить між точками A і A'. **699.** 1) Так; 2) так. **700.** Так, бо $\frac{8}{12} = \frac{6}{9}$. **701.** Так. **702.** 1 : 4. **704.** 14 см, 21 см, 28 см, 35 см. **705.** 1) 1 : 16; 2) 4 : 25; 3) $m^2 : n^2$. **706.** 1) 2 : 3; 2) 1 : 4; 3) $\sqrt{m} : \sqrt{n}$. **707.** 1) 16 см; 2) 24 см; 3) 32 см. **708.** 1) 56 см^2; 2) 100 см^2; 3) 120 см^2. **709.** Ні. **710.** Так. **711.** Так, $k = 0{,}5$. **712.** Так. **713.** Центр гомотетії — точка перетину прямих AA' і BB'. **716.** Середня лінія має більшу довжину. *Вказівка*: нехай $ABCD$ — дана трапеція з основами BC і AD, точки N і M лежать відповідно на сторонах AB і CD. Трапеції $NBCM$ та $ANMD$ подібні. Тоді $\frac{BC}{NM} = \frac{NM}{AD}$, звідки $NM = \sqrt{BC \cdot AD}$. Середня лінія трапеції дорівнює $\frac{1}{2}(BC + AD)$. Тоді $\sqrt{BC \cdot AD} < \frac{1}{2}(BC + AD)$. **717.** 1) 1 : 2; 2) $\sqrt{6} : 3$. **719.** *Вказівка*: побудуйте деякий ромб з кутом α, вершини якого лежать на сторонах AB і AC. Такий ромб гомотетичний шуканому. **720.** *Вказівка*: позначте на стороні BA кута довільну точку K. Знайдіть точки B' і K', в які переходять точки B і K при гомотетії з центром P і коефіцієнтом $-\frac{1}{2}$. Точку перетину прямих BC і $B'K'$ позначте N. Проведіть пряму NP. **721.** Так.

Розділ 5

§ 22

731. 1) Ні. **732.** $|\overline{CD}| = |\overline{BA}| = |\overline{BC}| = |\overline{DA}| = 4$, $|\overline{MB}| = |\overline{AM}| = 2$. **733.** 12. **734.** 1) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AM}$; 2) $\overline{BA}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$, $\overline{MA}$. **737.** Задача має два розв'язки. **738.** 1) 2 см; 2) 4 см. **739.** 12. **740.** Коло з центром M і радіусом 1 см. **741.** Коло з центром H і радіусом 1 см. **743.** 1) Площина.

§ 23

751. 1) $\overline{AN}$; 2) $\overline{CB}$. **756.** 1) $\overline{AC}$; 2) $\bar{0}$; 3) $\bar{0}$. **757.** 1) $\overline{AC}$; 2) $\bar{0}$; 3) $\bar{0}$. **759.** 1) 1; 2) 1; 3) 2. **762.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}$. **767.** *Вказівка*: розгляньте два випадки: точки A, B і C лежать на одній прямій, точки A, B і C не лежать на одній прямій. **770.** 1) 2; 2) 0. **771.** 1) $\overline{AC}$; 2) $4\overline{CD}$. **773.** -1. **775.** 1) $\bar{a}$ і $\bar{b}$ перпендикулярні; 2) $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$. **782.** *Вказівка*: скористайтеся задачею 781. **783.** *Вказівка*: скористайтеся задачею 782. **784.** *Вказівка*: скористайтеся задачею 782. **785.** *Вказівка*: скористайтеся задачею 782. **787.** 1) *Вказівка*: $\overline{CA} = 2\overline{DB}$; 2) *Вказівка*: точка D — точка перетину медіан трикутника ABC. **792.** *Вказівка*: точка M лежить на прямій AB тоді і тільки тоді, коли $\overline{BM}$ і $\overline{BA}$ — колінеарні.

§ 24

798. 1) $\sqrt{b_1^2+b_2^2}$; 2) $\sqrt{c_1^2+c_2^2}$. **799.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **800.** $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{d}$, $\bar{h}$, $\bar{p}$, $\bar{t}$. **801.** 1) $\overline{AB}(3;0)$; 2) $\overline{AB}(5;-6)$. **803.** 1) $\sqrt{2}$; 2) 5; 3) 13; 4) 10. **804.** 1) $\sqrt{104}$; 2) $3\sqrt{2}$. **805.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **806.** 1) (4; 6); 2) (− 1; − 3). **809.** (− 4; − 3). **810.** 1) (5; 20); 2) (− 3; − 12). **811.** 1) (− 6; 6). **812.** 1) (3; 1); 2) (− 5; 2). **813.** 1) $\bar{a}=\bar{e}_1+3\bar{e}_2$; 2) $\bar{a}=2\bar{e}_1$. **815.** $\lambda=2$. **816.** 1) (9; 8); 2) (4; − 13). **817.** 1) $\lambda=0$; 2) $\lambda=\pm 2\sqrt{2}$. **818.** 2) $\lambda=\pm 2$. **820.** 1) (3; 4); (2; − 1); (8; − 5). **821.** $\sqrt{34}$, $\sqrt{10}$. **822.** $\overline{AM}(-8;3)$. **823.** Так. **824.** 1) $2\bar{e}_1$, $2\bar{e}_2$, $-2\bar{e}_1$, $-2\bar{e}_2$. **825.** *Вказівка*: покажіть, що вектори $\overline{DC}$ і $\overline{AB}$ — колінеарні, а вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ — неколінеарні. **828.** 1) 5. **830.** 1) $B(1;2)$, $C(3;1)$, $\overline{CA}(-2;-5)$. **831.** $\bar{b}(\pm 8;\pm 6)$. **832.** 1) $\bar{d}(-\sqrt{5};2\sqrt{5})$. **834.** 6. **835.** $\bar{F}(-3;12)$.

§ 25

841. 1) 4; 2) 9; 3) 25. **842.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **843.** 1) вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — перпендикулярні; 2) вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — перпендикулярні; 3) вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — перпендикулярні. **845.** 1) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$; 2) $-\frac{15\sqrt{2}}{2}$; 3) 18; 4) − 18; 9) −30; 10) 6. **846.** 1) 45°; 2) 180°; 3) 30°. **847.** 1) $4\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2}$. **848.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) 2. **849.** 1) − 3; 2) −22; 3) − 4. **851.** 1) 90°; 2) 60°. **853.** 1) кут між векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$ — гострий; 3) вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ співнапрямлені. **854.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) 1; 6) −1. **855.** 1) $|\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{129}$, $|\bar{a}-\bar{b}|=7$. **857.** 1) $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|=5$. **860.** 1) $\approx 82°$. **861.** 1) $\approx 63°$. **862.** 1) − 60; 2) − 19. **863.** − 5. **864.** 60°. **865.** 1) прямий; 2) 0°; 3) не тупий. **867.** 1) − 1,2. **869.** 45°. **871.** − 1,5. **872.** 66.

§ 26

880. 1) $\overline{AB}\parallel\overline{MP}$; 2) $\overline{AB}\cdot\overline{MP}=0$; 5) $\overline{AM}=\overline{MB}$. **883.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — квадрат. $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}$, $\overline{BD}=-\overline{AB}+\overline{AD}$. Знайдіть скалярний добуток цих векторів. **884.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — прямокутник. $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}$, $\overline{BD}=-\overline{AB}+\overline{AD}$. Знайдіть скалярні квадрати цих векторів. **885.** *Вказівка*: нехай ABC — прямокутний трикутник ($\angle B=90°$). $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$. Знайдіть скалярні квадрати лівої і правої частин рівності. **888.** *Вказівка*: введіть базис; розкладіть вектори за базисом; скористайтеся тим, що рівні вектори мають рівні координати. **891.** *Вказівка*: покажіть, що пари векторів $\overline{AE}$ і $\overline{FC}$, $\overline{AF}$ і $\overline{EC}$ — колінеарні. **893.** *Вказівка*: покажіть, що $\overline{MP}=\overline{NK}$. **898.** Сума квадратів сторін паралелограма дорівнює сумі квадратів його діагоналей. **903.** *Вказівка*: скористайтеся задачею 781. **907.** *Вказівка*: знайдіть скалярний добуток векторів $\bar{a}(\sqrt{4a+1};\sqrt{4b+1})$ і $\bar{c}(1;1)$. **908.** x — будь-яке невід'ємне число, $y=0$. **911.** 120°.

Розділ 6

§ 27

915. 1) Безліч; 2) одну. **916.** 1) Безліч; 2) одну. **917.** Безліч. **919.** Ні. **920.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **922.** 1) 3 см; 2) 4 см; 3) 8 см; 4) $12\sqrt{2}$ см; 5) 7 см. **924.** *Вказівка*: розгляньте 2 випадки: три точки, що лежать на одній прямій, і три точки, що не лежать на одній прямій. **925.** Ні. **926.** *Вказівка*: застосуйте властивість площини. **927.** Ні. **928.** Так. **929.** Так. **930.** Ні. **931.** Ні. **932.** 1) 10 см; 2) 18 см. **933.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **934.** 1) $4\sqrt{2}$ см, 4 см; 2) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см, $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см. **935.** Так. **937.** 1) Перетинаються, мимобіжні; 2) перетинаються, паралельні, мимобіжні. **939.** 1) Перетинаються, мимобіжні; 2) перетинаються, паралельні, мимобіжні. **940.** *Вказівка*: застосуйте властивість середньої лінії трапеції. **942.** Ні; три прямі. **916.** *Вказівка*: застосуйте властивість площини. **947.** *Вказівка*: через дві прямі, що перетинаються, можна провести єдину площину.

§ 28

953. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **956.** 1) 16 см^2, 24 см^2; 2) 100 см^2, 150 см^2; 3) 64 см^2, 96 см^2. **957.** 1) 94 см^2; 2) 164 см^2; 3) 52 см^2. **958.** 1) 2 см^2; 2) $\sqrt{2}$ см^2; 3) 1 см^2. **959.** 360 см^2, 840 см^2. **961.** 1) 48 см^2, 57 см^2; 2) 80 см^2, 96 см^2; 3) 96 см^2, 132 см^2. **962.** 1) $375\sqrt{3}$ см^3; 2) 1500 см^3; 3) $2250\sqrt{3}$ см^3. **963.** 1) 5 граней, 9 ребер, 6 вершин; 2) 4 грані, 6 ребер, 4 вершини. **964.** 1) Збільшиться у 9 разів; 2) зменшиться у 16 разів; 3) збільшиться у 2,25 рази; 4) зменшиться у 16 разів. **966.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{2}$. **967.** 1) 140 см^2, 188 см^2, 120 см^3; 2) 480 см^2, $480 + 200\sqrt{3}$ см^2, $600\sqrt{3}$ см^3. **968.** 1) 120 см^2, $\frac{240+25\sqrt{3}}{2}$ см^2, $50\sqrt{3}$ см^3; 2) 240 см^2, $240 + 50\sqrt{3}$ см^2, $200\sqrt{3}$ см^3, 3) 972 см^2, 1134 см^2, 2187 см^3; 4) 108 см^2, 126 см^2, 81 см^3; 5) $6\sqrt{3}$ см^2, $48 + 12\sqrt{3}$ см^2, $24\sqrt{3}$ см^3; 6) 72 см^2, $72 + 12\sqrt{3}$ см^2, $36\sqrt{3}$ см^3. **969.** 1) $4\sqrt{3}$ см^2, $4\sqrt{3} + 4$ см^2; 2) $25\sqrt{3}$ см^2, $25\sqrt{3} + 25$ см^2; 3) $\sqrt{3}$ см^2, $\sqrt{3} + 1$ см^2. **970.** 1) $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ см^2, $25\sqrt{3}$ см^2, $\frac{125\sqrt{2}}{12}$ см^3; 2) $75\sqrt{3}$ см^2, $100\sqrt{3}$ см^2, $\frac{250\sqrt{2}}{3}$ см^3; 3) $\frac{243\sqrt{3}}{4}$ см^2, $81\sqrt{3}$ см^2, $\frac{243\sqrt{2}}{4}$ см^3; 4) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ см^2, $9\sqrt{3}$ см^2, $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ см^3. **971.** 1) 324 см^2, 486 см^2, 729 см^3, 100 см^2, 150 см^2, 125 см^3; 2) 1444 см^2, 2166 см^2, 6859 см^3, 1024 см^2, 1536 см^2, 4096 см^3. **972.** 100 см^2, 108 см^2, 40 см^3; 400 см^2, 528 см^2, 640 см^3. **973.** $2aH(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$, $2aH(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}) + 12a^2$, $6a^2H$. **974.** Більший об'єм має многогранник, основою якого є квадрат. **975.** Многогранники мають однакові об'єми. **977.** 1) 7800 кг; 2) 15600 кг; 3) 39 т.

§ 29

981. 1) Ні; 2) ні; 3) так. **982.** 1) Прямокутник; 2) сектор. **983.** Ні. **986.** 1) Ні; 2) не завжди; 3) ні. **989.** 1) 40π см^2, 48π см^2, 40π см^3; 2) 32π см^2, $37{,}12\pi$ см^2, $25{,}6\pi$ см^3; 3) 100π см^2, 110π см^2, 250π см^3. **990.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні. **992.** 1) 156π см^2, 300π см^2, 240π см^2; 2) 15π см^2, 24π см^2, 12π см^3; 3) $\pi\sqrt{37}$ см^2, $\pi(\sqrt{37}+1)$см^2, 2π см^3. **993.** 1)15π см^2, 24π см^2, 12π см^3; 2) 65π см^2, 90π см^2, 100π см^3; 3) 60π см^2, 96π см^2, 96π см^3. **994.** 1) 16π см^2, $\frac{32\pi}{3}$ см^3; 2) 36π см^2, 36π см^3; 3) 64π см^2, $\frac{256\pi}{3}$ см^3; 4) 100π см^2, $\frac{500\pi}{3}$ см^3. **995.** 1) 324π см^2, 972π см^3; 2) 4 см, $\frac{256\pi}{3}$ см^3; 3) 6 см, 144π см^2; 4) 3 см, 36π см^2; 5) $\frac{7}{2}$ см, $\frac{343\pi}{3}$ см^3; 6) 256π см^2, $\frac{2048\pi}{3}$ см^3.

996. 1) Збільшиться в n раз, збільшиться в n раз; 2) збільшиться в n раз, збільшиться в n^2 раз. **997.** 1) 120π см^2, 320π см^2, 600π см^3; 2) 480π см^2, 1280π см^2, 4800π см^3. **998.** 1) 324π см^2, 729π см^3; 2) 288π см^2, 567π см^3. **999.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні. **1000.** 1) 175π см^2, 224π см^2, 392π см^3; 2) 240π см^2, 384π см^2, 768π см^3.

1001. 1) 300π см^2, 240π см^3; 2) 324π см^2, 432π см^3. **1002.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{1}{4}$.

1003. 1) $\frac{125}{1728}$; 2) $\frac{27}{512}$. **1004.** 1) Ch, $Ch+\frac{C^2}{2\pi}$, $\frac{C^2h}{4\pi}$; 2) $2h\sqrt{S\pi}$, $2h\sqrt{S\pi}+2S$, SH.

1005. Найбільшу площу бічної поверхні має циліндр, який утворили обертанням квадрата навколо його сторони, найбільші площу повної поверхні і об'єм має циліндр, який утворили обертанням прямокутника навколо сторони 3 см.

1006. 1) $\frac{C}{2}\sqrt{h^2+\frac{C^2}{4\pi^2}}$, $\frac{C}{2}\sqrt{h^2+\frac{C^2}{4\pi^2}}+\frac{C^2}{4\pi}$, $\frac{C^2h}{12}$; 2) $l\sqrt{\pi S}$, $l\sqrt{\pi S}+S$, $\frac{S}{3}\sqrt{l^2-\frac{S}{\pi}}$.

1007. 1) $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$; 2) $\sqrt[3]{9\pi V^2}$; 3) $\frac{C^3}{6\pi^2}$; 4) $\sqrt[3]{6\pi^2V}$. **1008.** 1) 100π см^2, 36π см^2, $\frac{500\pi}{3}$ см^3, 36π см^3; 2) 196π см^2, 16π см^2, $\frac{1372\pi}{3}$ см^3, $\frac{32\pi}{3}$ см^3. **1009.** $\approx 36{,}3$ %. **1010.** $\approx 225{,}4$ км, $\approx 504{,}08$ км. **1011.** $\approx 78{,}5$ тис. км^2, $\approx 482{,}81$ тис. км^2, $\approx 506{,}45$ тис. км^2, $\approx 145{,}19$ тис. км^2.

Повторення вивченого

1012. 1) 1; 2) $\sin^2\alpha$; 3) $\cos^2\alpha$. **1013.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 2) 1.

1014. 1) $\frac{c\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\alpha+45^\circ)}$; 2) $\frac{\sqrt{2}c\sin\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$, $\frac{\sqrt{2}c\cos\alpha}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$. **1015.** $\frac{l\sin\left(45^\circ+\frac{3\alpha}{4}\right)}{\sin\alpha}$.

1016. $\frac{d\sin\alpha}{\sin\beta}$. **1017.** 1) $\frac{b\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$; 2) $\frac{b\sin(\alpha+\beta)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$. **1018.** $\sqrt{7}$ см. **1019.** $\sqrt{7}$ см, $\sqrt{19}$ см.

1020. 1) 45 см^2; 2) 8 см^2. **1021.** 1) $\frac{25}{3}$ см, $\frac{8}{3}$ см; 2) 3,125 см, 1,5 см. **1022.** 150°, 30°, 30°. **1023.** 1) 15; 2) 8. **1024.** 1) $12(2+\sqrt{3})$ см, $6\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$ см; 2) $16(2-\sqrt{3})$ см, $8\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$ см. **1025.** *Вказівка*: знайдіть радіус описаного кола. **1026.** $a=\frac{2bR}{\sqrt{4R^2+b^2}}$. **1027.** 1) $\frac{10\pi}{3}$ см; 2) $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}$ см. **1028.** 80π см. **1029.** $\frac{C^2}{\pi^2\sin\alpha}$. **1030.** 1) $2\sqrt{m^2+n^2}$; 2) $2mn\sqrt{\pi}$. **1031.** 100 см^2. **1032.** 1) $K(2;-1)$, $L(1;-3)$, $M(5;-2)$; 2) $K(-2;1)$, $L(-1;3)$, $M(-5;2)$; 3) $K(-2;-1)$, $L(-1;-3)$, $M(-5;-2)$. **1033.** $3-2\sqrt{3}$, $3+2\sqrt{3}$. **1034.** 7 або $\sqrt{53}$. *Вказівка*: розгляньте два випадки. **1035.** 9 кв. од. **1036.** 1) 6 см; 2) 6 см; 3) $6\sqrt{2}$ см. **1037.** 1) $y=-2x-3$; 2) $y=-2x+3$; 3) $y=2x-3$. **1038.** $C(5;-5)$. **1039.** $(2;\frac{5}{3})$. **1041.** 22,5 і 37,5 ліктів. **1042.** 1) 25 см; 2) $\angle A'=30°$, $\angle B'=50°$, $\angle C'=20°$. **1043.** *Вказівка*: доведіть, що діагоналі чотирикутника діляться точкою перетину навпіл і вони рівні. **1047.** 2 см. **1048.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ – трапеція ($AB\|CD$). Паралельно перенесіть одну з її діагоналей, наприклад BD, так, щоб вершина B перейшла у вершину C. **1049.** 6 см або 4 см. **1050.** 20 см, 28 см, 36 см і 44 см. **1051.** 0,75m. **1052.** $x=0$, $x=\frac{-2}{3}$. **1053.** 1) Ні; 2) так. **1054.** $\overline{AB}=\frac{\bar{a}}{2}-\frac{\bar{b}}{2}$, $\overline{BC}=\frac{\bar{a}}{2}+\frac{\bar{b}}{2}$. **1055.** $\overline{BD}=-\overline{AB}+\overline{AD}$, $\overline{CO}=\frac{\overline{AB}}{2}-\frac{\overline{AD}}{2}$. **1056.** *Вказівка*: знайдіть скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $2\bar{b}-\bar{a}$. **1057.** ≈ 43°. **1059.** $\frac{\sqrt{13}}{13}$. **1061.** Коло радіуса 1. **1061.** 1) 6. **1062.** 2) 3. **1064.** 29 м. **1065.** Збільшиться у $\sqrt{3}$ разів. **1066.** 6,25 л. **1067.** 25. **1068.** ≈ 0,5 рази. **1070.** ≈ 15 млн. км^2.

Базис площини 174

Вектор 148
– одиничний 149
вектора довжина 149
– модуль 149
вектори колінеарні 149
– координатні 164
– протилежні 149
– протилежно напрямлені 149
– рівні 149
– співнапрямлені 149
відстань від точки до площини 186
вісь симетрії 120
властивість довжини кола 68
– паралельного перенесення 131
– переміщення 114
– перетворення подібності 136
– площини 185
– повороту 126
– правильного многокутника 51
– симетрії відносно точки 119
– – – прямої 121

Гомотетія 138

Добуток вектора на число 156
– векторів скалярний 168

Коефіцієнт гомотетії 139
– подібності 136
– кутовий прямої 100
конус 200
конуса бічна поверхня 201
– повна поверхня 201
координати вектора 163
– точки 84
котангенс 15
куля 200
кулі вісь 200
кут між векторами 168
– повороту 126

Многогранник 191
многокутник правильний 50
многокутника апофема 52
– центр 52
– центральний кут 52
множення скалярне 168

Нуль-вектор 149

***n*-кутник** 50
***n*-кутна піраміда** 192
– призма 192

Паралельне перенесення 131
переміщення 114
перетворення подібності 136
– симетрії відносно точки 118
– – – прямої 120
перпендикуляр до площини 186
піраміда 192
піраміди бічна поверхня 192
– повна поверхня 192
планіметрія 184
площина координатна 84
площини паралельні 187
– перпендикулярні 187
–, що перетинаються 187

поворот навколо точки 126
подібність 136
похила до площини 186
правило паралелограма 154
— трикутника 154
призма пряма 192
призми прямої бічна поверхня 192
— — повна поверхня 192
пряма, паралельна площині 186
— перпендикулярна до площини 186
прямі мимобіжні 185
— паралельні 185
—, що перетинаються 185

Рівняння прямої
з кутовим коефіцієнтом 101
— — загальне 101
— —, що проходить
через дві точки 101
— фігури 95
різниця векторів 155

Сегмент круговий 75
сектор круговий 74
сектора дуга 75
симетрія відносно точки 118
— — прямої 120
— осьова 120
— центральна 119
система координат прямокутна
декартова 84
скалярний квадрат вектора 169
стереометрія 184
сума векторів 154
сфера 201

Теорема косинусів 24
— Піфагора узагальнена 26
— синусів 18
— про відношення площ подібних
многокутників 138
— — відстань між двома точками із
заданими координатами 84
— — властивість правильного
многокутника 51
— — координати середини
відрізка 90
тіло обертання 199
точки, симетричні відносно
даної точки 118
— — — — прямої 120

Фігура центрально-симетрична 119
фігури гомотетичні 138
— основні 184
— подібні 137
— рівні 115
—, симетричні відносно точки 119
— — — прямої 120
формула Герона 40

Центр гомотетії 139
— симетрії 119
циліндр 200
циліндра бічна поверхня 200
— повна поверхня 201

Таблиця синусів і косинусів

α	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\cos\alpha$ $\sin\beta$	β
0°	0,000	1,000	90°
1°	0,017	1,000	89°
2°	0,035	0,999	88°
3°	0,052	0,999	87°
4°	0,070	0,998	86°
5°	0,087	0,996	85°
6°	0,105	0,995	84°
7°	0,122	0,993	83°
8°	0,139	0,990	82°
9°	0,156	0,988	81°
10°	0,174	0,985	80°
11°	0,191	0,982	79°
12°	0,208	0,978	78°
13°	0,225	0,974	77°
14°	0,242	0,970	76°
15°	0,259	0,966	75°
16°	0,276	0,961	74°
17°	0,292	0,956	73°
18°	0,309	0,951	72°
19°	0,326	0,946	71°
20°	0,342	0,940	70°
21°	0,358	0,934	69°
22°	0,375	0,927	68°
23°	0,391	0,921	67°
24°	0,407	0,914	66°
25°	0,423	0,906	65°
26°	0,438	0,899	64°
27°	0,454	0,891	63°
28°	0,469	0,883	62°
29°	0,485	0,875	61°
30°	0,500	0,866	60°
31°	0,515	0,857	59°
32°	0,530	0,848	58°
33°	0,545	0,839	57°
34°	0,559	0,829	56°
35°	0,574	0,819	55°
36°	0,588	0,809	54°
37°	0,602	0,799	53°
38°	0,616	0,788	52°
39°	0,629	0,777	51°
40°	0,643	0,766	50°
41°	0,656	0,755	49°
42°	0,669	0,743	48°
43°	0,682	0,731	47°
44°	0,695	0,719	46°
45°	0,707	0,707	45°

Таблиця тангенсів

α	tg α	α	tg α	α	tg α	α	tg α	α	tg α
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,062	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	57°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	52°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

Таблиця квадратів натуральних чисел від 10 до 99

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801