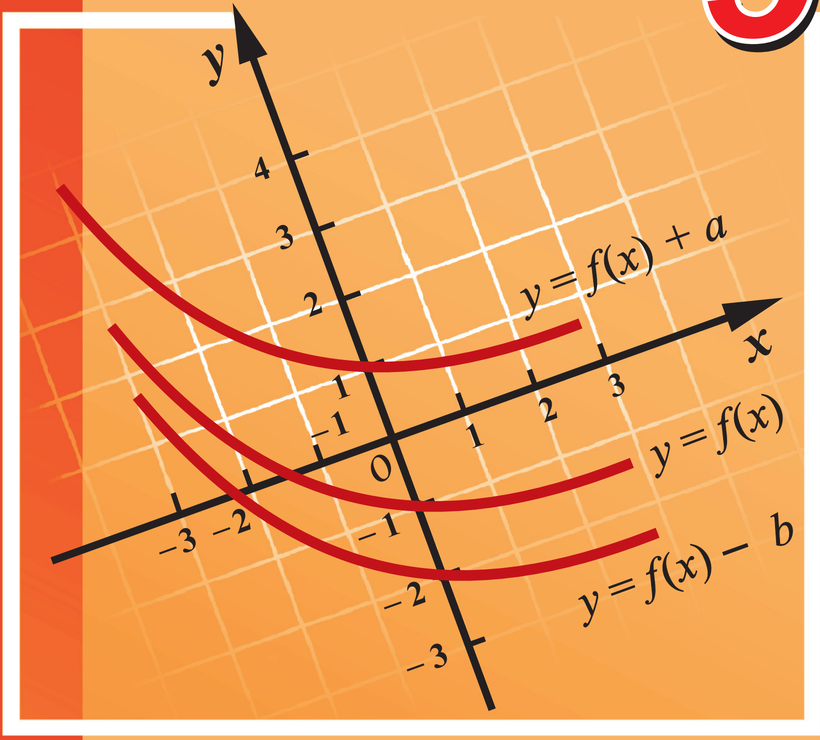
Василь Кравчук
Марія Підручна
Галина Янченко

АЛГЕБРА

клас

9



Василь Кравчук, Марія Підручна, Галина Янченко

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу

Тернопіль
Видавництво «Підручники і посібники»
2009

УДК 373.512
ББК 22.141я721
К 77

Редактори: *Ярослав Гап'юк*, кандидат педагогічних наук, доцент
Ярослав Гринчишин, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Сергій Мартинюк, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Літературне редагування *Людмили Олійник*
Обкладинка *Світлани Демчак*

Відповідальні за підготовку підручника до видання:

Прокопенко Н. С. — головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України
Литвиненко О. О. — методист вищої категорії Інституту інноваційних технологій і змісту освіти

Експерти, які здійснювали експертизу рукописів підручників на Всеукраїнському конкурсі рукописів підручників

Горобець І. В. — заступник директора ліцею «Перспектива», м. Запоріжжя, вчитель-методист
Горбачик О. В. — учитель Кузнецовської гімназії Рівненської області
Кастранець Л. М. — методист Чортківського РМК
Бончук О. М. — методист з математики методичного кабінету Новоодеської РДА Миколаївської області, вчитель-методист
Величко І. Г. — доцент кафедри алгебри і геометрії Запорізького національного університету, кандидат фізико-математичних наук
Дрозд Ю. А. — завідувач відділом алгебри Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор
Глобін О. І. — старший науковий співробітник лабораторії математичної та фізичної освіти АПН України, кандидат педагогічних наук

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (наказ №56 від 02.02.2009 року)

Кравчук Василь, Підручна Марія, Янченко Галина

К 77 Алгебра: Підручник для 9 класу. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2009. — 256 с.

ISBN 978-966-07-1493-9

ББК 22.141я721

ISBN 978-966-07-1493-9

ЮНІ ДРУЗІ!

Кілька слів про особливості підручника.

Матеріал, який ви вивчатимете, поділено на чотири параграфи, а параграфи — на пункти.

Кожний пункт розпочинається викладом теоретичного матеріалу. Деякі пункти містять додатковий матеріал під рубрикою «Для тих, хто хоче знати більше».

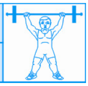
Для тих, хто хоче знати більше

Рубрика «Приклади розв’язання вправ» допоможе вам ознайомитися з основними видами вправ, способами їх розв’язування та навчить правильно записувати розв’язання.

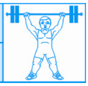
Приклади розв'язання вправ

Прочитавши теоретичний матеріал та поміркувавши над зразками розв’язаних задач, варто спочатку розв’язувати усні вправи і простіші задачі (рівень А), а потім перейти до складніших (рівень Б). Задачі рівня В — для найкмітливіших, тих, хто хоче вміти та знати більше й отримувати найвищі оцінки. Для деяких задач цього рівня наведено розв’язання.

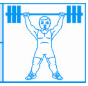
Рівень А



Рівень Б



Рівень В



Для самостійної роботи вдома рекомендовано задачі, номери яких виділено кольором (наприклад, **182**).

Рубрика «Вправи для повторення» допоможе періодично повторювати основні види вправ.

Вправи для повторення

Після вивчення параграфа ви зможете повторити і систематизувати матеріал, давши відповіді на запитання та розв'язавши задачі наприкінці параграфа.

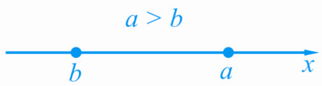
Свої знання можна перевірити, розв'язавши завдання для самоперевірки.

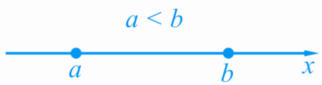
Щиро бажаємо успіху!

§ 1 НЕРІВНОСТІ

Є чимало задач, для розв’язання яких потрібно порівняти деякі числа або величини, знайти значення змінної, які задовольняють деяку нерівність.

У цьому параграфі ми з’ясуємо властивості числових нерівностей, як доводити нерівності, що таке нерівність зі змінною та система нерівностей зі змінною, як розв’язувати нерівності та їх системи.





1. Числові нерівності

1. Числові нерівності. Ви знаєте, що записи

$$25 > 17; \quad 0{,}32 > 0{,}2; \quad \frac{3}{7} > \frac{1}{7}; \quad -5 > -7$$

є прикладами *числових нерівностей*. Ви навчилися порівнювати натуральні числа, дроби, раціональні та дійсні числа.

Відомо, що $25 > 17$. Знайдемо різницю лівої та правої частин цієї нерівності:

$25 - 17 = 8 > 0$ — різниця додатна.

Знайдемо різницю лівої та правої частин нерівності $7 < 10$:

$7 - 10 = -3 < 0$ — різниця від'ємна.

З рівності $15 = 15$ маємо:

$15 - 15 = 0$ — різниця дорівнює нулю.

Отже, існує залежність між співвідношеннями «>», «<», «=» та значенням різниці лівої та правої частин відповідної нерівності (рівності). Цю залежність виражає означення.

Означення

Число *a більше* від числа *b*, якщо різниця *a – b* — додатне число;
число *a менше* від числа *b*, якщо різниця *a – b* — від'ємне число;
число *a дорівнює* числу *b*, якщо різниця *a – b* дорівнює нулю.

Оскільки різниця чисел a і b може бути лише додатною, від'ємною або дорівнювати нулю, то для довільних чисел a і b виконується одне і тільки одне із трьох співвідношень: $a > b$, $a < b$ або $a = b$.

Користуючись даним означенням, порівняємо числа $\frac{3}{7}$ і $\frac{9}{22}$. Для цього знайдемо їх різницю:

$$\frac{3}{7} - \frac{9}{22} = \frac{3 \cdot 22 - 7 \cdot 9}{7 \cdot 22} = \frac{3}{7 \cdot 22}.$$

Різниця даних чисел — число додатне, тому $\frac{3}{7} > \frac{9}{22}$.

Отже, для порівняння двох чисел a і b досить утворити різницю $a - b$ і з'ясувати, є вона додатним числом, від'ємним числом чи нулем. Якщо $a - b > 0$, то $a > b$; якщо $a - b < 0$, то $a < b$; якщо $a - b = 0$, то $a = b$.

На координатній прямій більше число зображують точкою, яка лежить праворуч від точки, що зображує менше число (див. рис. 1).

Рис. 1

У нерівностях використовують знаки: «<» — менше, «>» — більше, «≤» — менше або дорівнює (не більше), «≥» — більше або дорівнює (не менше).

Нерівності, складені за допомогою знаків «<» або «>», називають *строгими* нерівностями, а нерівності, складені за допомогою знаків «≤» або «≥», називають *нестрогими*.

З означення співвідношень «більше», «менше», «дорівнює» випливає, що $a \geq b$, якщо $a - b \geq 0$; $a \leq b$, якщо $a - b \leq 0$.

Числові нерівності можуть бути *правильними* і *неправильними*. Наприклад, $5 < 8$; $1{,}2 \geq -1$ — правильні нерівності, $21 > 30$ — неправильна нерівність.

2. Доведення нерівностей. Доведемо, що для будь-якого числа a є правильною нерівність

$$a(a-4) < (a-2)^2.$$

(Ще кажуть: доведемо нерівність $a(a-4) < (a-2)^2$.)

Для цього утворимо різницю лівої та правої частин нерівності й перетворимо її:

$$a(a-4) - (a-2)^2 = a^2 - 4a - a^2 + 4a - 4 = -4.$$

Оскільки різниця $a(a-4) - (a-2)^2$ є від'ємною для будь-якого числа a, то нерівність $a(a-4) < (a-2)^2$ є правильною теж для будь-якого числа a.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Довести нерівність $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$, якщо $a > 0$, $b > 0$.

● Утворимо різницю лівої і правої частин нерівності й перетворимо її:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}.$$

Різницю ми подали у вигляді дробу, чисельник якого невід'ємний, бо є квадратом деякого числа, а знаменник — додатний як добуток додатних чисел. Тому цей дріб, а значить і різниця, невід’ємні: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\geq 0$. Отже, нерівність $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ є правильною для будь-яких додатних чисел a і b. ●

Якщо в доведеній нерівності взяти $b = 1$, то матимемо правильну нерівність:

$$\boldsymbol{a+\frac{1}{a}\geq 2}\textbf{, де } \boldsymbol{a>0}.$$

Отже, *сума двох додатних взаємно обернених чисел не менша від* 2.

Вправа 2. Довести нерівність $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, якщо $a\geq 0$, $b\geq 0$.

● Утворимо різницю лівої та правої частин нерівності й перетворимо її:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geq 0.$$

Отже, $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$. ●

Для додатних чисел a і b число $\sqrt{ab}$ називають їх *середнім геометричним* (або *середнім пропорційним*). Нерівність

$$\boldsymbol{\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}}\textbf{, де } \boldsymbol{a\geq 0,\ b\geq 0,}$$

є правильною й для будь-яких додатних чисел a і b. Отже, *середнє арифметичне двох додатних чисел не менше від їх середнього геометричного*.

Вправа 3. Довести, що нерівність $10a^2-6a+2ab+b^2+2>0$ є правильною для будь-яких дійсних чисел a і b.

● $10a^2-6a+2ab+b^2+2=(9a^2-6a+1)+(a^2+2ab+b^2)+1=$
$$=(3a-1)^2+(a+b)^2+1.$$

Оскільки $(3a-1)^2\geq 0$, $(a+b)^2\geq 0$ для будь-яких дійсних чисел a і b, то $(3a-1)^2+(a+b)^2+1>0$. ●

Примітка. Щоб довести нерівність за допомогою означення співвідношень «більше», «менше» або «дорівнює», різницю лівої та правої частин нерівності потрібно перетворити так, щоб можна було встановити знак різниці.

Вираз, одержаний після перетворень, набуває невід’ємних значень, якщо він є, наприклад, сумою, добутком або часткою невід’ємних чисел, парним степенем деякого виразу тощо.

Вираз набуває від’ємних значень, якщо він є сумою від’ємних чисел, добутком або часткою чисел різних знаків тощо.

Усно

1. Порівняйте з нулем різницю лівої та правої частин правильних нерівностей:

а) $m < n$; **б)** $p \geq q$; **в)** $8 > y$; **г)** $k \leq 5$.

2. Відомо, що $a > b$. Чи може різниця $a - b$ дорівнювати: –5; 0; 2; 0,01?

3. Порівняйте числа a і b, b і c, a і c, які зображені точками на координатній прямій (рис. 2).

Рис. 2

Рівень А

4. Порівняйте числа x та y, якщо різниця $x - y$ дорівнює 8; 0; –1,5.

5. Порівняйте числа m і n, якщо $m - n = -3$; $m - n = 3$.

6. Позначте на координатній прямій точки, які зображують числа p, q і r, якщо $p < r$, $r < q$.

7. Позначте на координатній прямій точки, які зображують числа a, b і c, якщо $c > b$, $b > a$.

Порівняйте числа:

8. **а)** $\frac{3}{5}$ і $\frac{15}{26}$; **б)** $\frac{1}{3}$ і 0,4; **в)** $-\frac{11}{13}$ і $-\frac{3}{4}$.

9. **а)** $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{7}$; **б)** $-\frac{7}{11}$ і $-\frac{3}{5}$; **в)** $\frac{1}{3}$ і 0,3.

10. Розмістіть у порядку зростання числа: $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{7}$.

11. Розмістіть у порядку спадання числа: $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{11}$; $\frac{2}{7}$.

12. Порівняйте значення виразів $5(a + 2) - 2a$ і $3a - 4$, якщо $a = -3$; $a = 0,1$. Доведіть, що для будь-якого значення a значення першого виразу більше за відповідне значення другого виразу.

13. Порівняйте значення виразів $6(b - 2) + 4b$ і $10b + 1$, якщо $b = -0,1$; $b = 0$. Доведіть, що для будь-якого значення b значення першого виразу менше за відповідне значення другого виразу.

Доведіть нерівність:

14. **а)** $2(a-3)+5a<7a+8$; **б)** $(a-4)(a+5)>a^2+a-30$;
в) $(b-5)^2>b(b-10)$; **г)** $a(a+7)<(a+3)(a+4)$.

15. **а)** $12b+8>4b+8(b-0{,}5)$; **б)** $2x^2+13x+3<(2x+5)(x+4)$;
в) $(b-3)(b+3)>b^2-14$.

16. **а)** $a^2+b^2\geq 2ab$; **б)** $a^2+9\geq 6a$;
в) $m(m+n)\geq mn$; **г)** $2y^2-21>(y+5)(y-5)$.

17. **а)** $4+b^2\geq 4b$; **б)** $x(x+2)>2x-3$;
в) $a(a+b)+1>ab$.

Рівень Б

18. Порівняйте числа:

а) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ і $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; **б)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ і $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Доведіть нерівність:

19. **а)** $4bc\leq 4b^2+c^2$; **б)** $(2n+1)^2\geq 8n$;
в) $a^2+2a\leq 17a^2+10a+1$; **г)** $b^2+10>6b$;
д) $a^2-4a+b^2+2b+5\geq 0$; **е)** $2x^2-6xy+9y^2-6x+10>0$.

20. **а)** $9x^2-3xy+y^2\geq 3xy$; **б)** $(5-3y)^2\geq 3y(y-2)+1$;
в) $8b(3b-10)<(5b-8)^2$; **г)** $(a+1)^2>4a-1$;
д) $x^2+6x+y^2-2y+10\geq 0$; **е)** $5a^2+4a-2ab+b^2+2>0$.

21. **а)** $\dfrac{3c}{9c^2+1}\leq\dfrac{1}{2}$; **б)** $\dfrac{x^2}{1+x^4}\leq\dfrac{1}{2}$.

22. Який знак числа x, якщо відомо, що:
а) $8x<3x$; **б)** $7x>4x$; **в)** $2x<-3x$; **г)** $-10x>-2x$?

Рівень В

Доведіть нерівність:

23. **а)** $a^2+b^2+2\geq 2(a+b)$; **б)** $a^2+b^2\geq ab$;
в) $2a^2+b^2+1\geq 2ab+2a$; **г)** $m^3n+mn^3\leq m^4+n^4$;
д) $a^2+5b^2+4ab+4\geq 4b$; **е)** $1+2a^4\geq a^2+2a^3$.

24. **а)** $ab+1\geq 2\sqrt{ab}$; **б)** $4\sqrt{ab}\leq\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$;

в) $\dfrac{b^2+5}{2}>\sqrt{b^2+4}$; **г)** $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}>2$.

Вказівка. **в)** Щоб встановити знак різниці лівої та правої частин, скористайтеся тотожністю $b^2+5=\left(\sqrt{b^2+4}\right)^2+1$.

25. Доведіть нерівність $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}>\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, якщо $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

Вправи для повторення

26. Розв’яжіть рівняння:

а) $(x-5)(x+1)=3x-5$; **б)** $\dfrac{4x}{x^2-4}+\dfrac{x}{x-2}=3\dfrac{1}{3}$.

27. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}+\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$; **б)** $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

28. Батько втричі старший від сина. Через 6 років сума років батька і сина дорівнюватиме 68. Скільки років синові зараз?

29. Сім’я складається з батька, матері і трьох синів. Усім разом їм 90 років. Різниця у віці синів становить 2 роки. Вік матері на 10 років більший від суми років синів. Різниця років батька і матері дорівнює віку середнього сина. На скільки років мати старша від молодшого сина?

2. Властивості числових нерівностей

Властивість 1 | **Якщо $a>b$, то $b<a$.**

Доведення. Якщо $a>b$, то $a-b$ — додатне число. Протилежне йому число $-(a-b)=b-a$ є від’ємним. Оскільки $b-a<0$, то $b<a$. ●

Властивість 2 | **Якщо $a<b$ і $b<c$, то $a<c$.**

Доведення. За умовою $a<b$ і $b<c$, тому $a-b$ і $b-c$ — від’ємні числа. Сума двох від’ємних чисел є від’ємним числом, тому $(a-b)+(b-c)=$ $=a-b+b-c=a-c<0$. Оскільки $a-c<0$, то $a<c$. ●

Геометрична ілюстрація властивості 2 подана на рисунку 3.

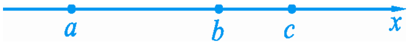


Рис. 3

Аналогічно можна довести твердження: **якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$.**

Властивість 3 **Якщо до обох частин правильної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну нерівність.**

Доведення. Нехай $a < b$ і c — будь-яке число. Доведемо, що $a + c < b + c$. Розглянемо різницю $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$. Оскільки $a < b$, то $a - b < 0$. Отже, $(a + c) - (b + c) < 0$, тому $a + c < b + c$.

Аналогічно проводимо доведення для випадку $a > b$ і будь-якого числа c. ●

Наслідок. *Якщо деякий доданок перенести з однієї частини правильної нерівності в іншу, змінивши при цьому знак доданка на протилежний, то одержимо правильну нерівність.*

Доведення. Нехай $a < b + c$ — правильна нерівність. Додамо до обох її частин число $-c$, отримаємо правильну нерівність $a + (-c) < b + c + (-c)$ або $a - c < b$. Отже, якщо перенести доданок c у ліву частину нерівності, змінивши його знак на протилежний, то одержимо правильну нерівність. ●

Властивість 4 **Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність.**

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

Доведення. Нехай $a < b$. Доведемо, що $ac < bc$, якщо c — додатне число, й $ac > bc$, якщо c — від'ємне число. Розглянемо різницю:

$$ac - bc = c(a - b).$$

За умовою $a < b$, тому $a - b < 0$. Якщо $c > 0$, то в добутку $c(a - b)$ перший множник додатний, а другий — від'ємний. Тому $c(a - b) < 0$. У даному випадку $ac - bc < 0$, звідки $ac < bc$.

Якщо $c < 0$, то добуток $c(a - b)$ додатний як добуток двох від'ємних множників. Тоді й $ac - bc > 0$, звідки $ac > bc$.

Аналогічно проводимо доведення, якщо маємо нерівність $a > b$.

Правильною є й та частина властивості, яка стосується ділення обох частин нерівності на деяке число, оскільки ділення можна замінити множенням на число, обернене дільнику. ●

Наслідок. *Якщо a і b — додатні числа й $a < b$, то* $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Доведення. Поділимо обидві частини нерівності $a < b$ на додатне число ab. Матимемо:

$$\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab};\ \frac{1}{b} < \frac{1}{a},\ \text{тобто}\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$ ●

Цей наслідок можна використовувати для порівняння чисел, обернених даним. Наприклад, оскільки $\sqrt{2} < 2$, то $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$.

Зауваження. Подвійну нерівність $a < b < c$ можна записати у вигляді двох нерівностей: $a < b$ і $b < c$. Оскільки $a < b$ і $b < c$, то для будь-якого числа m правильними є нерівності: $a + m < b + m$ і $b + m < c + m$, звідки $a + m < b + m < c + m$. Отже, якщо до всіх частин правильної подвійної нерівності додати одне й те саме число, то отримаємо правильну подвійну нерівність.

Аналогічно можна обґрунтувати твердження:

якщо $a < b < c$ і $m > 0$, то $am < bm < cm$;

якщо $a < b < c$ і $m < 0$, то $am > bm > cm$, тобто $cm < bm < am$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Відомо, що $-1 < x < 3$. Оцінити значення виразу:

а) $x - 3$; **б)** $-x$; **в)** $2x - 5$.

● **а)** Додамо до всіх частин нерівності $-1 < x < 3$ число -3, одержимо: $-1 - 3 < x - 3 < 3 - 3$, звідки $-4 < x - 3 < 0$.

б) Помножимо всі частини нерівності $-1 < x < 3$ на -1, одержимо:

$$1 > -x > -3, \text{ або } -3 < -x < 1.$$

в) Помножимо всі частини заданої нерівності на 2, матимемо: $-2 < 2x < 6$. Тепер додамо до всіх частин одержаної нерівності число -5, одержимо: $-2 - 5 < 2x - 5 < 6 - 5$, звідки $-7 < 2x - 5 < 1$. ●

Вправа 2. Довести, що якщо $a \geq -1$, то $a^3 + 1 \geq a^2 + a$.

● Складемо різницю лівої та правої частин нерівності й перетворимо її:

$a^3 + 1 - a^2 - a = (a^3 - a^2) + (1 - a) = a^2(a - 1) - (a - 1) = (a - 1)(a^2 - 1) =$
$= (a - 1)(a - 1)(a + 1) = (a - 1)^2(a + 1)$.

Значення виразу $(a-1)^2$ є невід'ємними. За умовою $a \geq -1$, додамо до обох частин цієї нерівності число 1, одержимо: $a + 1 \geq 0$. Тому

$$(a-1)^2(a+1) \geq 0.$$

Отже, якщо $a \geq -1$, то нерівність $a^3 + 1 \geq a^2 + a$ є правильною. •

Усно

30. Порівняйте числа x та y, якщо $x < 3$ і $3 < y$.

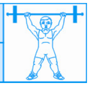
31. Відомо, що $m < n$. Які з даних нерівностей є правильними:

а) $m + 7 < n + 7$; **б)** $m - 7 < n - 7$; **в)** $m + 3 > n + 3$;

г) $3m < 3n$; **д)** $-3m < -3n$; **е)** $\frac{m}{3} < \frac{n}{3}$?

Відповіді обґрунтуйте.

Рівень А



32. Відомо, що $a < b$. Поставте замість «*» знак «<» або «>» так, щоб вийшла правильна нерівність:

а) $5a * 5b$; **б)** $-7a * -7b$; **в)** $-a * -b$;

г) $\frac{1}{3}a * \frac{1}{3}b$; **д)** $\frac{a}{6} * \frac{b}{6}$; **е)** $-\frac{a}{5} * -\frac{b}{5}$.

33. Замість «*» поставте знак «>» або «<» так, щоб було правильним твердження:

а) якщо $a < -5$, то $-5 * a$; **б)** якщо $-2 > a$ і $a > b$, то $-2 * b$.

34. Відомо, що $a < b$. Використовуючи властивості нерівностей, запишіть правильну нерівність, яку одержимо, коли:

а) до обох частин нерівності додамо число –2;
б) обидві частини нерівності помножимо на 3;
в) обидві частини нерівності помножимо на –1;
г) обидві частини нерівності поділимо на 5.

35. Відомо, що $x > y$. Використовуючи властивості нерівностей, запишіть правильну нерівність, яку одержимо, коли:

а) до обох частин нерівності додамо число 9;
б) від обох частин нерівності віднімемо число –3;
в) обидві частини нерівності помножимо на –5;
г) обидві частини нерівності поділимо на –3.

36. Відомо, що $3{,}2 < a < 3{,}4$. Оцініть значення виразу:

а) $a + 4$; **б)** $2a$; **в)** $3a - 2$.

37. Відомо, що $1{,}4 < c < 1{,}6$. Оцініть значення виразу:
а) $c - 1$; **б)** $3c$; **в)** $2c + 3$.

Рівень Б

Доведіть твердження:

38. **а)** Якщо $ac > bc$ і $c > 0$, то $a > b$;

б) якщо $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ і $c < 0$, то $a > b$.

39. **а)** Якщо $an > bn$ і $n < 0$, то $a < b$; **б)** якщо $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$ і $n > 0$, то $a < b$.

40. Порівняйте числа a і d, якщо:
а) $a < b$ і $d > b$; **б)** $b - a < 0$ і $d - b < 0$.

41. Порівняйте числа m і k, якщо:
а) $m > n$ і $k < n$; **б)** $m - n > 0$ і $n - k > 0$.

42. Порівняйте числа $\frac{c}{a}$ і $\frac{c}{b}$, якщо $0 < b < a$ і $c > 0$.

43. Порівняйте числа $\frac{c}{a}$ і $\frac{c}{b}$, якщо $0 < a < b$ і $c > 0$.

44. Розмістіть у порядку спадання числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ і $\frac{1}{c}$, якщо всі вони додатні й $a > b$, $b > c$.

45. Відомо, що $-2 \le x < 5$. Оцініть значення виразу:
а) $1{,}5x - 3$; **б)** $-x$; **в)** $1{,}5 - 3x$.

46. Відомо, що $0{,}5 < c < 2$. Оцініть значення виразу:
а) $\frac{1}{c}$; **б)** $\frac{3}{c}$; **в)** $-\frac{2}{c}$.

47. Відомо, що $2 < y \le 3$. Оцініть значення виразу:
а) $-y$; **б)** $-2y + 1$; **в)** $\frac{1}{y}$.

48. Оцініть периметр квадрата зі стороною b см, якщо $3{,}8 < b < 4{,}2$.

49. Оцініть периметр рівностороннього трикутника зі стороною a дм, якщо $1{,}7 < a < 1{,}9$.

Рівень В

50. Доведіть твердження:

а) якщо $a < b$ і $b \le c$, то $a < c$;

б) якщо $a < b$, $b < c$ і $c < d$, то $a < d$;

в) якщо $a \geq b$ і $c < 0$, то $ac \leq bc$;

г) якщо a, b — від'ємні числа і $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

51. Доведіть нерівність $a^3 + 8 \geq 2a^2 + 4a$, де $a \geq -2$.

Вправи для повторення

52. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{7x^2-11}{2}-\frac{3x^2+13}{5}=18$; **б)** $\frac{14}{x^2-9}+\frac{2}{3x-9}=2\frac{2}{3}$.

53. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x+2y=8; \\ x-y=-9; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 0,5x+0,2y=2; \\ 2x-y=-1. \end{cases}$

54. Змішали 30%-й і 40%-й розчини сульфатної кислоти й одержали 200 л 34%-го розчину. Скільки літрів кожного з розчинів використали?

55*. Маємо 110 аркушів паперу. З них потрібно зшити зошити по 8 і по 10 аркушів у кожному. Скільки можна зшити зошитів кожного виду?

3. Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значень виразів

Розглянемо дії, які можна виконувати над правильними числовими нерівностями.

1. Додавання числових нерівностей. Нехай маємо правильні числові нерівності однакового знака: $-3 < 4$ і $5 < 7$. Почленно додамо ці нерівності. Отримаємо правильну нерівність того ж знака, а саме: $-3 + 5 < 4 + 7$ або $2 < 11$. У загальному випадку справджується така властивість:

Властивість 5 **Якщо почленно додати правильні нерівності однакового знака, залишивши їхній спільний знак, то одержимо правильну нерівність.**

Доведення. Нехай $a < b$ і $c < d$. Потрібно довести, що $a + c < b + d$. Щоб отримати суму $a + c$, додамо до обох частин першої нерівності число c, а щоб отримати суму $b + d$, додамо до обох частин другої нерівності число b. Одержимо правильні нерівності: $a + c < b + c$, $b + c < b + d$. За властивістю 2 з останніх двох нерівностей випливає, що $a + c < b + d$.

Аналогічно можна довести: якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$. ●

2. Множення числових нерівностей. Нехай маємо правильні нерівності: $7 > 2$ і $5 > 3$. Почленно перемножимо ці нерівності. Одержимо правильну нерівність $7 \cdot 5 > 2 \cdot 3$ або $35 > 6$.

Почленно перемножимо нерівності $-3 < 1$ і $-4 < 6$. Одержимо неправильну нерівність $12 < 6$.

У першому випадку всі числа даних нерівностей були додатні, у другому — додатні й від'ємні. Доведемо таку властивість.

Властивість 6

Якщо почленно перемножити правильні нерівності однакового знака, ліві й праві частини яких — додатні числа, залишивши при цьому їхній спільний знак, то одержимо правильну нерівність.

Доведення. Нехай $a < b$ і $c < d$, де a, b, c і d — додатні числа. Потрібно довести, що $ac < bd$. Помножимо обидві частини нерівності $a < b$ на додатне число c, а обидві частини нерівності $c < d$ — на додатне число b. Одержимо правильні нерівності: $ac < bc$, $bc < bd$. За властивістю 2 з останніх двох нерівностей випливає, що $ac < bd$.

Аналогічно можна довести: якщо $a > b$ і $c > d$, де a, b, c і d — додатні числа, то $ac > bd$. ●

Наслідок*. Якщо $a < b$, a і b — додатні числа, n — натуральне число, то $a^n < b^n$.*

Для доведення наслідку досить узяти n нерівностей $a < b$ і почленно їх перемножити.

3. Оцінювання значень виразів. Розглянемо приклад.

Приклад 1. Дано: $11 < x < 14$ і $1 < y < 2$. Оцінити:

а) суму $x + y$; **б)** різницю $x - y$;

в) добуток xy; **г)** частку $\dfrac{x}{y}$.

● **а)** Оцінимо суму $x + y$.

Застосуємо до нерівностей $11 < x$ та $1 < y$ властивість про почленне додавання нерівностей. Матимемо: $12 < x + y$. Застосуємо цю ж властивість до нерівностей $x < 14$ та $y < 2$. Одержимо: $x + y < 16$. Результат запишемо у вигляді подвійної нерівності $12 < x + y < 16$.

Коротко ці перетворення записують так:

$$+\begin{array}{r} 11 < x < 14 \\ 1 < y < 2 \\ \hline 12 < x + y < 16. \end{array}$$

Загальна схема оцінки суми має такий вигляд:

$$+\begin{array}{c} a < x < b \\ c < y < d \\ \hline a + c < x + y < b + d. \end{array}$$

б) Оцінимо різницю $x - y$.

Знаючи, як оцінюється сума, подамо різницю $x - y$ у вигляді суми $x + (-y)$. Спочатку оцінимо значення виразу $-y$. Помножимо усі частини нерівності $1 < y < 2$ на -1, матимемо: $-1 > -y > -2$ або $-2 < -y < -1$. За властивістю про почленне додавання нерівностей матимемо:

$$+\begin{array}{r} 11 < x < 14 \\ -2 < -y < -1 \\ \hline 9 < x - y < 13. \end{array}$$

Загальна схема оцінки різниці має такий вигляд:

$$-\begin{array}{c} a < x < b \\ c < y < d \\ \hline a - d < x - y < b - c. \end{array}$$

в) Оцінимо добуток xy.

Оскільки $11 < x < 14$ і $1 < y < 2$, то x та y — додатні числа. Застосуємо до нерівностей $11 < x$ та $1 < y$ властивість про почленне множення нерівностей. Матимемо: $11 < xy$. Застосуємо цю ж властивість до нерівностей $x < 14$ і $y < 2$. Одержимо: $xy < 28$. Результат запишемо у вигляді подвійної нерівності $11 < xy < 28$.

Коротко ці перетворення записують так:

$$\times\begin{array}{r} 11 < x < 14 \\ 1 < y < 2 \\ \hline 11 < xy < 28. \end{array}$$

Загальна схема оцінки добутку має такий вигляд:

$$\times\begin{array}{c} a<x<b \\ c<y<d \\ \hline ac<xy<bd \end{array} \quad (a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0).$$

г) Оцінимо частку $\dfrac{x}{y}$.

Подамо частку $\dfrac{x}{y}$ у вигляді добутку $x\cdot\dfrac{1}{y}$. Оскільки $1<y<2$, то $\dfrac{1}{1}>\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{2}$ або $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{y}<1$. За властивістю про почленне множення нерівностей матимемо:

$$\times\begin{array}{c} 11<x<14 \\ \dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{y}<1 \\ \hline \dfrac{11}{2}<\dfrac{x}{y}<14, \end{array}$$

тобто $5{,}5<\dfrac{x}{y}<14$.

Загальна схема оцінки частки має такий вигляд:

$$:\begin{array}{c} a<x<b \\ c<y<d \\ \hline \dfrac{a}{d}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{b}{c} \end{array} \quad (a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0).$$ ●

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Довести нерівність $(m+n)(mn+1)\geq 4mn$, де $m\geq 0$, $n\geq 0$.

● Використаємо відому нерівність $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, де $a\geq 0$, $b\geq 0$. Запишемо цю нерівність для чисел m і n, а потім — для чисел mn і 1. Одержимо дві правильні нерівності:

$$\frac{m+n}{2}\geq\sqrt{mn}; \qquad \frac{mn+1}{2}\geq\sqrt{mn}.$$

Помножимо обидві частини кожної нерівності на 2:

$$m+n \geq 2\sqrt{mn}; \qquad mn+1 \geq 2\sqrt{mn}.$$

Почленно перемноживши ці нерівності, одержимо:

$$(m+n)(mn+1) \geq 4mn. \bullet$$

Примітка. Для доведення нерівності прикладу 1 ми використали відому нерівність, яку довели раніше. Суть застосованого способу доведення нерівностей полягає в тому, що:

1) записуємо кілька нерівностей, які доведені раніше;

2) перемноживши (або додавши) ці нерівності, приходимо до нерівності, яку потрібно було довести.

Усно

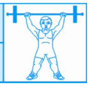
56. Додайте та перемножте почленно нерівності: $5 > 3$ і $7 > 4$.

57. Піднесіть обидві частини нерівності $2 < 3$ до квадрата; до куба.

58. Чи одержимо правильну нерівність того самого знака, перемноживши почленно нерівності $4 > -2$ і $1 > -3$?

59. Чи одержимо правильну нерівність того самого знака, піднісши до квадрата обидві частини нерівності $-5 < 2$?

Рівень А



Додайте почленно нерівності:

60. **а)** $-7 > -9$ і $9 > 4$; **б)** $1{,}3 < 2{,}5$ і $-3{,}4 < -1{,}3$;
в) $2{,}5 < 3{,}2$ і $-1{,}7 < -0{,}9$.

61. **а)** $-11 < -9$ і $-3 < 7$; **б)** $-0{,}1 > -0{,}3$ і $1{,}2 > 0{,}8$.

Перемножте почленно нерівності:

62. **а)** $0{,}8 < 1{,}2$ і $5 < 7$; **б)** $7{,}2 > 3{,}5$ і $0{,}5 > 0{,}4$.

63. **а)** $0{,}25 > 0{,}1$ і $12 > 8$; **б)** $0{,}3 < 0{,}5$ і $11 < 18$.

64. Піднесіть до квадрата обидві частини нерівності:
а) $9 > 7$; **б)** $0{,}9 < 1{,}2$.

65. Відомо, що $2 < a < 4$ і $-5 < b < -2$. Оцініть значення виразу:
а) $a + b$; **б)** $a - b$.

66. Відомо, що $0{,}5 < x < 2$ і $2 < y < 3$. Оцініть значення виразу: $x + y$; $x - y$; xy.

67. Відомо, що $1 < a < 3$ і $0{,}2 < b < 0{,}5$. Оцініть значення виразу:

а) $a + b$; **б)** $a - b$; **в)** ab.

Рівень Б

68. Відомо, що $3 < a < 5$ і $7 < b < 9$. Оцініть значення виразу:

а) $a + 2b$; **б)** $2ab$; **в)** $\dfrac{a}{b}$.

69. Відомо, що $4 < x < 5$ і $8 < y < 10$. Оцініть значення виразу:

а) $2x - y$; **б)** $0{,}5xy$; **в)** $\dfrac{y}{x}$.

70. Оцініть периметр трикутника зі сторонами a дм, b дм, c дм, якщо $2 < a < 2{,}1$; $1{,}6 < b < 1{,}7$; $0{,}9 < c < 1$.

71. Оцініть площу квадрата зі стороною b см, якщо $1{,}1 < b < 1{,}2$.

72. Оцініть периметр та площу прямокутника зі сторонами a см і b см, якщо $3{,}5 < a < 4$; $2 < b < 2{,}2$.

Доведіть нерівність:

73. **а)** $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$;

б) $(p + 2)(q + 2)(p + q) \geq 16pq$, якщо $p \geq 0$, $q \geq 0$;

в) $(a + b)(ab + 4) \geq 8ab$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$.

74. **а)** $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 8\sqrt{abc}$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$;

б) $(a^2 + 1)(a + 1) \geq 4a\sqrt{a}$, якщо $a \geq 0$.

75. **а)** $\sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}} \geq 2$, якщо $a > 0$; **б)** $(x^2 + 1) + \dfrac{1}{x^2 + 1} \geq 2$.

Рівень В

76. Доведіть нерівність:

а) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt{abcd}$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$; $d \geq 0$;

б) $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_{10}) \geq 2^{10}$, якщо $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ — додатні числа, добуток яких дорівнює 1.

77. Доведіть нерівність $a + b + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq 4$, якщо $a > 0$, $b > 0$.

78. Доведіть: якщо $a + b = 1$, то $a^4 + b^4 \geq \dfrac{1}{8}$.

Вправи для повторення

79. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності:

а) $-2 \le x < 7$; **б)** $-1 < y \le 6$; **в)** $-5 < x < 3$.

80. Спростіть вираз $\frac{a+2}{a^2-2a+1} : \frac{a^2-4}{a-1} - \frac{1}{a-2}$.

81. *Задача Ейлера.* Дві селянки принесли на базар 100 яєць: одна більше ніж інша; продаючи їх за різною ціною, обидві селянки вторгували однакові суми. Тоді перша сказала другій: «Якби в мене були твої яйця, я вторгувала б за них 15 крейцерів». Друга відповіла: «А якби твої яйця були в мене, я вторгувала б за них $6\frac{2}{3}$ крейцера». Скільки яєць було в кожної селянки?

82. До книгарні для продажу надійшли підручники з фізики та математики. Коли було продано 50% підручників з математики і 20% підручників з фізики, що разом становить 780 книжок, то підручників з математики залишилося утричі більше, ніж з фізики. Скільки підручників з математики надійшло у продаж?

4. Нерівності з однією змінною. Числові проміжки

1. Поняття нерівності з однією змінною та її розв'язку. Розглянемо нерівність $2x + 5 > 11$. Для одних значень x дана нерівність перетворюється у правильну числову нерівність, для інших — у неправильну. Наприклад, якщо $x = 5$, то одержимо правильну числову нерівність $2 \cdot 5 + 5 > 11$; $15 > 11$, а якщо $x = 1$, то матимемо неправильну числову нерівність $2 \cdot 1 + 5 > 11$; $7 > 11$.

Якщо потрібно знайти усі значення x, для яких нерівність $2x + 5 > 11$ є правильною, то кажуть, що потрібно *розв'язати* нерівність $2x + 5 > 11$, яка містить одну змінну x.

Якщо $x = 5$, то нерівність $2x + 5 > 11$ є правильною. Кажуть, що число 5 є *розв'язком* даної нерівності, або *задовольняє* дану нерівність.

Означення **Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її у правильну числову нерівність.**

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Нерівність з однією змінною переважно має безліч розв'язків. Так, розв'язками нерівності $2x + 5 > 11$ є числа 3,5; 4; 5; $5\frac{1}{3}$ тощо. Множини розв'язків нерівностей інколи можна записувати у вигляді *числових проміжків*.

2. Числові проміжки. Розглянемо кілька прикладів.

1) Нерівність $-2 < x < 3$ задовольняють усі дійсні числа, які більші від –2 і менші від 3, тобто всі дійсні числа, що лежать на числовій прямій між числами –2 і 3. Множину всіх чисел, що задовольняють подвійну нерівність $-2 < x < 3$, називають *числовим проміжком*, або просто *проміжком*, і позначають (–2; 3) (читають: «проміжок від –2 до 3»). На координатній прямій його зображують так:

Рис. 4

Проміжок заштриховують, точки –2 і 3 зображують «порожніми» («виколотими»).

Число 2,2 задовольняє подвійну нерівність $-2 < x < 3$, а число 4 її не задовольняє. Кажуть, що число 2,2 *належить* проміжку (–2; 3), а число 4 йому *не належить*.

Рис. 5

2) Нерівність $-2 \le x \le 3$ задовольняють усі дійсні числа, які лежать між числами –2 і 3, або дорівнюють числам –2 або 3. Множину таких чисел позначають так: [–2; 3] (читають: «проміжок від –2 до 3, включаючи –2 і 3»). На координатній прямій його зображають так:

Рис. 6

3) Множини чисел, які задовольняють подвійні нерівності $-2 \le x < 3$ і $-2 < x \le 3$, позначають відповідно $[-2; 3)$ і $(-2; 3]$ (читають: «проміжок від –2 до 3, включаючи –2» і «проміжок від –2 до 3, включаючи 3»). Ці проміжки зображують на координатній прямій так:

Рис. 7 а

Рис. 7 б

4) Нерівність $x > 4$ задовольняють усі дійсні числа, які більші від 4. На координатній прямій ці числа зображують точками, які лежать праворуч від точки з координатою 4. Множину чисел, які задовольняє нерівність $x > 4$, зображують півпрямою, що міститься праворуч від точки з координатою 4 без цієї точки (див. рис. 8). Таку множину називають проміжком від 4 до плюс нескінченності й позначають $(4; +\infty)$.

Рис. 8

Множину чисел, які задовольняють нерівність $x \ge 4$, зображують півпрямою (див. рис. 9). Цю множину позначають $[4; +\infty)$ (читають: «проміжок від 4 до плюс нескінченності, включаючи 4»).

Рис. 9

5) Множину чисел, які задовольняють нерівність $x < 8$, записують $(-\infty; 8)$ і читають «проміжок від мінус нескінченності до 8». Множину чисел, які задовольняють нерівність $x \le 8$, записують $(-\infty; 8]$ і читають: «проміжок від мінус нескінченності до 8, включаючи 8». На координатній прямій ці числові проміжки зображують так:

Рис. 10 а

Рис. 10 б

6) Множину всіх дійсних чисел зображують усією координатною прямою і позначають так: $(-\infty; +\infty)$.

3. Об'єднання та переріз числових проміжків. Розглянемо два проміжки: $[-1; 4)$ і $(2; 7)$.

Рис. 11

Проміжок $[-1; 7)$ утворюють усі числа, які належать проміжку $[-1; 4)$ або проміжку $(2; 7)$. Кажуть, що проміжок $[-1; 7)$ є *об'єднанням* проміжків $[-1; 4)$ і $(2; 7)$. Записують: $[-1; 4) \cup (2; 7) = [-1; 7)$, де «$\cup$» — знак об'єднання.

Означення **Об’єднанням числових проміжків називають множину всіх чисел, які належать хоча б одному з цих проміжків.**

Проміжок (2; 4) утворюють усі спільні числа з проміжків [–1; 4) і (2; 7), тобто усі числа, які належать кожному з проміжків [–1; 4) і (2; 7). Кажуть, що проміжок (2; 4) є *перерізом* проміжків [–1; 4) і (2; 7). Записують: $[-1; 4)\cap(2; 7) = (2; 4)$, де «$\cap$» — знак перерізу.

Означення **Перерізом числових проміжків називають множину всіх чисел, які належать кожному з цих проміжків.**

Для тих, хто хоче знати більше

Об’єднанням та перерізом двох числових проміжків можуть бути не числові проміжки. Розглянемо, наприклад, проміжки [–2; 1] і (3; 4). Чисел, які належали б обом цим проміжкам, немає (див. рис. 12). Тому кажуть, що перерізом цих проміжків є *порожня множина*. Її позначають символом «$\varnothing$». Записують: $[-2; 1]\cap(3; 4) = \varnothing$. Об’єднанням проміжків [–2; 1] і (3; 4) є множина $[-2; 1]\cup(3; 4)$, яка не є числовим проміжком (вона «складається» із двох проміжків).

Рис. 12

Для проміжків [–2; 1] і [1; +∞) множина спільних чисел містить лише одне число — число 1 (див. рис. 13). Таку множину позначають так: {1}. Записують: $[-2; 1]\cap[1; +\infty) = \{1\}$. Легко знайти, що $[-2; 1]\cup[1; +\infty) = [-2; +\infty)$.

Рис. 13

Приклади розв'язання вправ

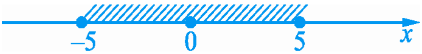
Вправа 1. Вказати найменше і найбільше дійсні числа, які належать проміжку:

а) $\left[-\frac{1}{3}; 1{,}01\right]$; **б)** [–2; 3); **в)** (–∞; 4,8]; **г)** (5; +∞).

• **а)** $-\frac{1}{3}$; 1,01; **б)** –2; найбільшого дійсного числа, яке належить цьому проміжку, немає. (Це випливає з таких міркувань. Припустимо, що m — найбільше число з проміжку [–2; 3). Оскільки $m < 3$, то можна розглядати проміжок (m; 3), будь-яке число з якого більше від m. Отже, число m на проміжку [–2; 3) не є найбільшим.); **в)** найменшого числа немає; 4,8; **г)** ні найменшого, ні найбільшого чисел немає. ●

Вправа 2. Зобразити на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівність, і записати цю множину у вигляді проміжку або об'єднання проміжків: **а)** $|x| \le 5$; **б)** $|x| \ge 5$.

● **а)** Модулем числа x є відстань від початку відліку до точки, що зображує число x на координатній прямій. Тому розв'язками даної нерівності є числа, яким відповідають ті точки координатної прямої, що розміщені від початку відліку на відстані, яка не перевищує 5.



Отже, розв'язками нерівності $|x| \le 5$ є всі числа, які належать проміжку [–5; 5].

б) Розв'язками нерівності $|x| \ge 5$ є числа, яким відповідають ті точки координатної прямої, що розміщені від початку відліку на відстані, не меншій від 5 (більшій від 5 або дорівнює 5), тобто значення x, які задовольняють нерівність $x \le -5$ або нерівність $x \ge 5$.

Отже, множиною розв'язків нерівності $|x| \ge 5$ є об'єднання проміжків (–∞; –5] і [5; +∞), тобто (–∞; –5]∪[5; +∞). ●

Усно

83. Які з чисел –2; $-\frac{1}{3}$; 0; 0,5; 4 є розв'язками нерівності $3x + 1 > 2$?

84. Назвіть проміжки, зображені на рисунку 14.

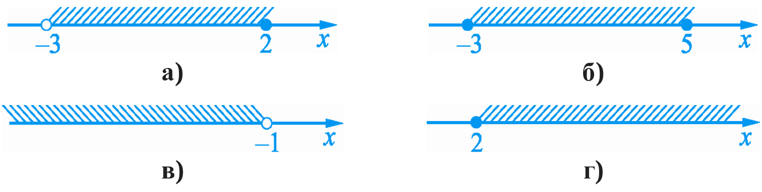


Рис. 14

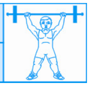
85. Які з чисел –3; –1; 0; 1,7; 4 належать числовому проміжку:

а) [–2; 4]; **б)** (–3; 4); **в)** (–1; 5); **г)** [–3; +∞)?

86. Вкажіть об’єднання та переріз проміжків, зображених на рисунку 15.

Рис. 15

Рівень А



87. Які з чисел –4; 0,5; 8; 10 є розв’язками нерівності $3(x - 2) > 2x + 1$?

88. Знайдіть які-небудь три розв’язки нерівності $-5x + 1 < 3x$.

Зобразіть на координатній прямій проміжок:

89. **а)** [–2; 4); **б)** (–∞; 3]; **в)** (2; +∞); **г)** (3; 7].

90. **а)** [–1; 3]; **б)** (2; 6]; **в)** [3; +∞); **г)** (–∞; 1).

Зобразіть на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівність, і запишіть цю множину у вигляді проміжку:

91. **а)** $x \geq 3$; **б)** $x > 4$; **в)** $-1 \leq x < 3$; **г)** $1 < x \leq 5$.

92. **а)** $x \leq -1$; **б)** $x > 5$; **в)** $0 \leq x \leq 6$; **г)** $-1 < x < 4$.

93. Знайдіть, якщо можливо, найбільше натуральне число, яке належить проміжку:

а) (–7; 8); **б)** (–∞; 3); **в)** (–15; –3); **г)** (–∞; 7].

94. Запишіть усі цілі числа, які належать проміжку:

а) (–1; 9); **б)** [5; 12); **в)** (–4; 10]; **г)** (0; 7).

Вкажіть, якщо можливо, найменше та найбільше числа, які належать проміжку:

95. **а)** [5; 11); **б)** (8; 20]; **в)** [–3; +∞); **г)** (–∞; 2).

96. **а)** (3; 8]; **б)** [–4; 5]; **в)** (–∞; 3]; **г)** (0; +∞).

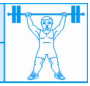
Зобразіть на координатній прямій проміжки та знайдіть їх об’єднання і переріз:

97. **а)** [–1; 2] і (1; 3); **б)** [3; 4) і [2; +∞);

в) (–∞; 5) і [0; 2]; **г)** (–∞; –1] і [–2; +∞).

98. **а)** [–4; 0) і [–2; 2); **б)** (–∞; 5] і [1; 6].

Рівень Б



Зобразіть на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівність, і запишіть цю множину у вигляді проміжку або об'єднання проміжків:

99. **а)** $|x| < 3$; **б)** $|x| > 4$; **в)** $|x| \le 3{,}5$; **г)** $|x| \ge 1{,}5$.

100. **а)** $|x| \ge 1$; **б)** $|x| < 2{,}5$; **в)** $|x| \le 1{,}5$; **г)** $|x| > 0{,}5$.

101. Запишіть п'ять чисел, які належать проміжку $(0{,}1; 0{,}2)$.

Вправи для повторення

102. Розв'яжіть рівняння:

а) $7(2x - 1) - 5x = 11 + 3(3x - 2)$; **б)** $\frac{7x-2}{20} = \frac{4x+1}{5} - \frac{3x-6}{4}$.

103. Для яких значень a значення дробу дорівнює нулю:

а) $\frac{a^2-49}{a+7}$; **б)** $\frac{|a|-5}{a+5}$; **в)** $\frac{|a|-2}{a^2-3a+2}$?

104. Вкладник вніс до банку 5000 грн. Частину грошей він поклав під 7% річних, а решту — під 6%. Через рік загальна сума грошей збільшилася на 315 грн. Скільки грошей вніс вкладник під 7% річних?

105. *Задача Бхаскари (відомого індійського математика XII ст.).* Із множини чистих квіток лотоса були принесені в жертву: Шиві — третя частина цієї множини, Вишну — п'ята, Сонцю — шоста, четверту частину одержав Бхавани, а решту — шість квітів — одержав шановний Учитель. Скільки було квіток?

5. Розв'язування нерівностей з однією змінною. Рівносильні нерівності

Задача. Одна сторона ділянки прямокутної форми на 5 м довша від іншої. Якими можуть бути сторони ділянки, якщо для її обгородження вистачило сітки завдовжки 46 м?

Нехай довжина меншої сторони ділянки дорівнює x м, тоді довжина більшої — $(x + 5)$ м, а периметр ділянки — $2(x + x + 5) = (4x + 10)$ (м). За умовою периметр не перевищує 46 м, тобто $4x + 10 \le 46$.

Щоб знайти довжини сторін ділянки, потрібно розв'язати нерівність $4x + 10 \le 46$ з однією змінною x.

Розв'язуючи нерівність, її перетворюють, замінюючи простішими нерівностями з тими ж розв'язками.

Нерівності, які мають одні й ті ж розв'язки, називають ***рівносильними****. Нерівності, які не мають розв'язків, теж називають рівносильними.*

Заміну нерівності рівносильними їй нерівностями виконують на основі таких властивостей:

1) якщо виконати тотожні перетворення деякої частини нерівності, що не змінюють допустимі значення змінної, то одержимо нерівність, рівносильну даній;

2) якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу частину доданок, змінивши його знак на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній;

3) якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те ж додатне число, то одержимо нерівність, рівносильну даній;

4) якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те ж від'ємне число і при цьому змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну даній.

Користуючись цими властивостями, розв'яжемо нерівність:

$$4x + 10 \le 46.$$

Перенесемо доданок 10 з лівої частини нерівності у праву, змінивши його знак на протилежний, одержимо нерівність

$$4x \le 46 - 10,$$

яка рівносильна заданій нерівності.

У правій частині нерівності $4x \le 46 - 10$ зведемо подібні доданки, одержимо:

$$4x \le 36.$$

Поділимо обидві частини останньої нерівності на 4, одержимо нерівність

$$x \le 9.$$

Отже, нерівність $4x + 10 \le 46$ рівносильна нерівності $x \le 9$ і її задовольняють усі числа, не більші від 9 (див. рис. 16). Множину розв'язків даної нерівності можна записати у вигляді числового проміжку $(-\infty; 9]$.

Рис. 16

Повернімося до задачі. Довжину меншої сторони ділянки ми позначили через x м. Оскільки довжина сторони виражається додатним числом, то x може набувати значень із проміжку (0; 9]. Отже, менша сторона ділянки не повинна перевищувати 9 м, більша ж сторона на 5 м довша від неї.

Для тих, хто хоче знати більше

Розв’язуючи нерівність

$$4x + 10 \le 46, \qquad (1)$$

ми перенесли доданок 10 з лівої частини нерівності у праву, змінивши його знак на протилежний. Одержали нерівність

$$4x \le 46 - 10. \qquad (2)$$

Доведемо, що нерівності (1) і (2) рівносильні.

Нехай $x = a$ — довільний розв’язок нерівності (1), тоді $4a + 10 \le 46$ — правильна числова нерівність. Перенесемо доданок 10 з лівої частини нерівності у праву, змінивши його знак на протилежний, одержимо правильну числову нерівність $4a \le 46 - 10$. З того, що остання нерівність є правильною, випливає, що число a є розв’язком нерівності (2).

Нехай $x = b$ — довільний розв’язок нерівності (2), тоді $4b \le 46 - 10$ — правильна числова нерівність. Перенесемо доданок -10 із правої частини нерівності у ліву, змінивши його знак на протилежний, одержимо правильну числову нерівність $4b + 10 \le 46$. З того, що остання нерівність є правильною, випливає, що число b є розв’язком нерівності (1).

Ми показали, що довільний розв’язок нерівності (1) є розв’язком нерівності (2) і довільний розв’язок нерівності (2) є розв’язком нерівності (1). Тому ці нерівності мають одні й ті ж розв’язки, тобто є рівносильними.

Рівносильність нерівностей $4x \le 46 - 10$ і $4x \le 36$, а також нерівностей $4x \le 36$ та $x \le 9$ доводять аналогічно.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв’язати нерівність $3(5x - 1) + 10 > 7 - 2(1 - 6x)$ і зобразити на координатній прямій множину її розв’язків.

● Розкриємо дужки:

$$15x - 3 + 10 > 7 - 2 + 12x;$$

перенесемо доданки, які містять змінну в ліву частину нерівності, а інші — у праву частину:

$$15x - 12x > 7 - 2 + 3 - 10;$$

зведемо подібні доданки:

$$3x > -2;$$

поділимо обидві частини нерівності на 3:

$$x > -\frac{2}{3}.$$

Відповідь. $x > -\frac{2}{3}$, або по-іншому $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. ●

Вправа 2. Розв'язати нерівність $\frac{3t-1}{6} - \frac{2t}{9} \le 1$, зобразити на координатній прямій множину її розв'язків та записати цю множину у вигляді числового проміжку.

● Помножимо обидві частини нерівності на найменший спільний знаменник дробів, які входять до нерівності, тобто на 18. Матимемо:

$$18 \cdot \frac{3t-1}{6} - 18 \cdot \frac{2t}{9} \le 18; \quad 9t - 3 - 4t \le 18; \quad 9t - 4t \le 18 + 3; \quad 5t \le 21; \quad t \le 4{,}2.$$

Відповідь. $(-\infty; 4{,}2]$. ●

Вправа 3. Розв'язати нерівність $-2 \le \frac{3x-1}{2} \le 5$.

● Помножимо всі частини нерівності на 2: $-4 \le 3x - 1 \le 10$.

Додамо до всіх частин нерівності число 1:

$$-4 + 1 \le 3x - 1 + 1 \le 10 + 1; \qquad -3 \le 3x \le 11.$$

Поділимо всі частини нерівності на 3, одержимо: $-1 \le x \le 3\frac{2}{3}$.

Відповідь. $-1 \le x \le 3\frac{2}{3}$, або по-іншому $\left[-1; 3\frac{2}{3}\right]$. ●

Вправа 4. Розв'язати нерівність:

а) $|2x - 3| \le 5$; **б)** $|3x - 1| < -4$; **в)** $|2x - 1| > 5$.

● **а)** Розв'язками нерівності $|2x - 3| \le 5$ є числа, які задовольняють подвійну нерівність

$$-5 \le 2x - 3 \le 5.$$

Додамо до всіх частин нерівності число 3, одержимо:

$$-2 \le 2x \le 8.$$

Поділимо всі частини нерівності на 2:

$$-1 \le x \le 4.$$

Відповідь. [–1; 4].

б) Модуль числа — число невід'ємне, тому модуль числа не може бути меншим від –4. Нерівність $|3x - 1| < -4$ не має розв'язків.

Відповідь. Розв'язків немає.

в) Вираз $2x - 1$, який стоїть під знаком модуля, повинен набувати значень, менших від –5 або більших від 5. Отже, $2x - 1 < -5$ або $2x - 1 > 5$.

Якщо потрібно знайти усі значення x, які задовольняють нерівність $2x - 1 < -5$ або нерівність $2x - 1 > 5$, то кажуть, що потрібно розв'язати *сукупність* нерівностей, яку записують так: $\left[\begin{array}{l} 2x-1<-5; \\ 2x-1>5. \end{array}\right.$

Розв'язуючи кожну нерівність сукупності, матимемо:

$$\left[\begin{array}{l} 2x<-5+1; \\ 2x>5+1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x<-4; \\ 2x>6; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x<-2; \\ x>3. \end{array}\right.$$

Розв'язками сукупності є значення x, які задовольняють нерівність $x < -2$ або нерівність $x > 3$.

Відповідь. $x < -2$ або $x > 3$. (Відповідь можна записати й у вигляді об'єднання проміжків: $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.) •

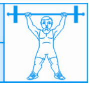
Усно

106. Чи рівносильні нерівності:

а) $5x + 1 > 0$ і $5x > 1$; **б)** $3x < 0$ і $x < 0$; **в)** $-2x > 0$ і $x > 0$?

107. Обґрунтуйте рівносильність перетворень при розв'язуванні нерівності: $3x - 2 > 1$; $3x > 1 + 2$; $3x > 3$; $x > 1$.

Рівень А



Розв'яжіть нерівність, зобразіть множину її розв'язків на координатній прямій та запишіть цю множину у вигляді числового проміжку:

108. **а)** $x - 5 > 0$; **б)** $x + 7 < 0$; **в)** $x - 3{,}2 \le 0$; **г)** $x + 5{,}3 \ge 0$.

109. **а)** $2x < 5$; **б)** $3x \ge -15$; **в)** $-3x < -36$; **г)** $-0{,}5x \le 0$.

110. **а)** $5x - 3 \le 0$; **б)** $4x - 7 > 11$; **в)** $2x - 9 \le 5 + x$; **г)** $19 - x > 5 + 6x$.

111. **а)** $x - 2 < 0$; **б)** $x + 3{,}5 \geq 0$; **в)** $5x \geq 15$; **г)** $-2x < 5$;
д) $-0{,}8x > 0$; **е)** $8x - 12 \leq 0$; **є)** $3x + 11 > 5$; **ж)** $3x - 13 \geq 7x + 3$.

112. Розв'яжіть нерівність $9x - 5 > 4x + 3$. Запишіть три значення x, які є розв'язками цієї нерівності.

113. Розв'яжіть нерівність $11 - 2x \leq 15 - 4x$. Чи є розв'язками цієї нерівності числа -3; 0?

Розв'яжіть нерівність:

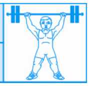
114. **а)** $4(x - 3) + 1 \geq 12 - 3(1 - 2x)$; **б)** $9 - 2(5 + 3x) < 4(1 - 2x)$;
в) $4a - 12(3a - 1) < 16(1 - a)$; **г)** $5(x + 3) - 3(1 - x) > 1 - 3x$.

115. **а)** $7(x - 2) + 20 < 4(x - 3) - 9$; **б)** $2(3 - y) - 3(2 + y) \leq y$;
в) $z + 10 < 5(2z + 7) + 14(5 - z)$; **г)** $5y - (y + 3) - 4(2 - y) \leq 9$.

116. **а)** $\dfrac{x}{4} \geq 0$; **б)** $\dfrac{5x}{3} < 0$; **в)** $\dfrac{x-6}{8} \leq 1$; **г)** $\dfrac{3x}{5} \geq 2$.

117. **а)** $\dfrac{7x}{4} \geq 0$; **б)** $\dfrac{2x-1}{3} < 0$; **в)** $\dfrac{x+7}{8} > 1$; **г)** $\dfrac{x-5}{3} > 4$.

Рівень Б



Розв'яжіть нерівність:

118. **а)** $250(x - 3) > 500(x + 1) + 750$;
б) $\dfrac{1}{70}(3x+1)+\dfrac{9}{70}<\dfrac{11}{70}x$; **в)** $\dfrac{2x+1}{4}-\dfrac{2x-3}{6}\leq\dfrac{1}{12}$.

119. **а)** $90(x - 12) + 180(x + 6) < 270$; **б)** $\dfrac{1-x}{30}-\dfrac{1+x}{15}\geq\dfrac{7}{60}$.

Розв'яжіть подвійну нерівність:

120. **а)** $-1 \leq 3x + 4 < 5$; **б)** $0 < 2 - 5x < 7$;
в) $2 < \dfrac{7+2a}{3} \leq 6$; **г)** $-2 < \dfrac{8-x}{4} < 2$.

121. **а)** $-1 < 7 + 2y < 4$; **б)** $4 < 8 - 3x \leq 10$;
в) $0 < \dfrac{3y+2}{6} \leq 5$; **г)** $2 \leq \dfrac{3-x}{8} < 3$.

Розв'яжіть нерівність:

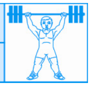
122. **а)** $|5x - 9| < 7$; **б)** $|11 - 2x| \geq 3$;
в) $|4x - 15| \leq -2$; **г)** $|x + 1| > 0$.

123. **а)** $|2x - 7| \leq 1$; **б)** $|1 - 4x| > 5$.

124. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 7 см. Якою може бути бічна сторона цього трикутника, якщо його периметр менший від периметра рівностороннього трикутника зі стороною 9 см?

125. Одна сторона прямокутника на 11 см коротша від іншої. Якою може бути довжина більшої сторони прямокутника, якщо його периметр більший від периметра квадрата зі стороною 18 см?

Рівень В



126. Розв’яжіть нерівність:

а) $5|x-3| < 9 + 2|x-3|$; **б)** $|1 - 2(x+6)| \geq 11$;

в) $4 - |2x+9| > 3(|2x+9| - 4)$; **г)** $|1-4x| + |x| \leq -2$.

127. Доведіть рівносильність нерівностей:

а) $30(x-5) < 120$ і $x - 5 < 4$; **б)** $\frac{2}{7}(x+3) \geq \frac{1}{7}x$ і $2(x+3) \geq x$.

Вправи для повторення

128. Розв’яжіть рівняння:

а) $|x| - 1 = 5$; **б)** $|3x+4| = 8$; **в)** $3x + |x| = -7$.

129. За течією річки катер пройшов за 7 год такий шлях, який він долає за 8 год проти течії. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість катера у стоячій воді дорівнює 30 км/год.

130. Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 8. Якщо цифри числа поміняти місцями, то одержимо число, яке менше від даного на 18. Знайдіть дане число.

131. У слові *мама* довільно міняють місцями дві букви. Знайдіть імовірність того, що після цього знову вийде слово *мама*.

6. Лінійні нерівності з однією змінною

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Розв’язати нерівність $2(6x+5) + 3x \leq 40$.

• $12x + 10 + 3x \leq 40$;

$12x + 3x \leq 40 - 10$;

$15x \leq 30$;

$$x \le 2.$$

Множиною розв'язків нерівності є числовий проміжок $(-\infty; 2]$.

Відповідь. $(-\infty; 2]$. ●

Приклад 2. Розв'язати нерівність $4(3x + 7) - 9x > 20 + 3x$.

$$● \ 12x + 28 - 9x > 20 + 3x;$$

$$12x - 9x - 3x > 20 - 28;$$

$$0 \cdot x > -8.$$

Для будь-якого значення x значення лівої частини нерівності $0 \cdot x > -8$ дорівнює нулю, а нуль більший від -8. Отже, множиною розв'язків даної нерівності є множина всіх дійсних чисел, тобто проміжок $(-\infty; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; +\infty)$. ●

Приклад 3. Розв'язати нерівність $14x + 17 < 8x + 6(x + 2)$.

● $14x + 17 < 8x + 6x + 12$; $14x - 8x - 6x < 12 - 17$; $0 \cdot x < -5$.

Нерівність $0 \cdot x < -5$ не має розв'язків, бо для будь-якого x значення її лівої частини дорівнює нулю, а нуль не менший від -5.

Відповідь. Розв'язків немає. ●

У результаті перетворень ми звели першу нерівність до нерівності $15x \le 30$, другу — до нерівності $0 \cdot x > -8$, третю — до нерівності $0 \cdot x < -5$. Нерівності такого виду називають *лінійними нерівностями з однією змінною*.

Нерівності виду $ax > b$, $ax \ge b$, $ax < b$, $ax \le b$, де a і b — деякі відомі числа, а x — змінна, називають *лінійними нерівностями з однією змінною*.

Якщо $a \ne 0$, то для розв'язання лінійної нерівності з однією змінною потрібно поділити обидві частини нерівності на a. Якщо $a = 0$, то або розв'язком нерівності є будь-яке число, або нерівність не має розв'язків.

Виділимо такі основні кроки розв'язування нерівностей:

1) якщо нерівність містить дроби, то множимо обидві частини нерівності на найменший спільний знаменник дробів, які входять у нерівність;

2) якщо в нерівності є дужки, то розкриваємо їх;

3) переносимо доданки, які містять змінну, в одну частину нерівності (як правило, в ліву), а доданки, які не містять змінної, — в іншу частину (як правило, у праву);

4) зводимо подібні доданки;

5) якщо одержали лінійну нерівність і коефіцієнт біля змінної не дорівнює нулю, то ділимо на нього обидві частини нерівності;

6) якщо коефіцієнт біля змінної дорівнює нулю, то встановлюємо, чи нерівність не має розв'язків, чи її розв'язком є будь-яке число.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{8 - 2x}$.

● Область визначення функції утворюють ті значення x, для яких вираз $8 - 2x$ набуває невід'ємних значень. Отже, потрібно розв'язати нерівність $8 - 2x \geq 0$. Матимемо:

$$-2x \geq -8; \quad x \leq 4.$$

Областю визначення функції є проміжок $(-\infty; 4]$.

Відповідь. $(-\infty; 4]$. ●

Вправа 2. Розв'язати нерівність $(a + 3)x < 5$ з параметром a.

● Розглянемо три випадки: 1) $a + 3 < 0$; 2) $a + 3 = 0$; 3) $a + 3 > 0$.

1) Якщо $a + 3 < 0$, тобто $a < -3$, то, поділивши обидві частини нерівності на від'ємне число $a + 3$, одержимо: $x > \dfrac{5}{a+3}$.

2) Якщо $a + 3 = 0$, тобто $a = -3$, то матимемо нерівність $0 \cdot x < 5$, розв'язком якої є будь-яке число.

3) Якщо $a + 3 > 0$, тобто $a > -3$, то $x < \dfrac{5}{a+3}$.

Відповідь. Якщо $a < -3$, то $x > \dfrac{5}{a+3}$; якщо $a = -3$, то розв'язком нерівності є будь-яке число; якщо $a > -3$, то $x < \dfrac{5}{a+3}$. ●

Усно

132. Розв'яжіть нерівність:

а) $2x < 8$; **б)** $3x \geq 6$; **в)** $0x > 11$;

г) $0x < -7$; **д)** $0x < 8$; **е)** $0x > -3$.

Рівень А

Розв'яжіть нерівність:

133. **а)** $9(x-1)+5x<17x-11$; **б)** $8x-5(x+2)\geq 3x$;
в) $7(1-2x)+5x\geq 4-9x$; **г)** $10a-4(a+3)>5+6a$.

134. **а)** $9y-4(1+2y)<y-7$; **б)** $7(2x-3)\geq 10+2(2x-1)$;
в) $y-7(y+1)\leq 5-6(y+2)$; **г)** $3(5+x)>11+8(x-2)$.

135. **а)** $\frac{3x}{2}+\frac{x}{3}<4$; **б)** $\frac{4y}{9}-y\geq 2$; **в)** $\frac{a}{8}-\frac{3a}{4}>-1$; **г)** $\frac{5x}{6}+3\leq x$.

136. **а)** $\frac{3x}{5}-4x<0$; **б)** $\frac{a}{6}-\frac{3a}{4}>1$; **в)** $\frac{x}{4}-\frac{x}{2}<-3$; **г)** $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}\leq 2$.

137. Для яких значень x функція $y=3(5-4x)$ набуває від'ємних значень?

138. Для яких значень x функція $y=\frac{7-8x}{5}$ набуває невід'ємних значень?

Знайдіть область визначення функції:

139. **а)** $y=\sqrt{x-3}$; **б)** $y=\sqrt{2x+6}$;
в) $y=\sqrt{5-x}$; **г)** $y=\sqrt{7-2x}$.

140. **а)** $y=\sqrt{3x-12}$; **б)** $y=\sqrt{4-8x}$.

Рівень Б

Розв'яжіть нерівність:

141. **а)** $\frac{4+3y}{3}-5y\geq 0$; **б)** $\frac{5y-13}{4}-y\leq\frac{y}{4}$;
в) $x-\frac{x+3}{2}\geq\frac{2x-1}{4}$; **г)** $\frac{3a-1}{2}-\frac{2a+5}{8}-a<3$.

142. **а)** $\frac{5-3y}{3}-y\geq 17-2y$; **б)** $4-\frac{a}{3}+a<\frac{2a}{3}$;
в) $\frac{15x-8}{5}<3x+12$; **г)** $\frac{y+1}{2}+\frac{2y-1}{6}<y$.

143. **а)** $x^2+3x-8<x(x+2)$; **б)** $(x-3)^2>x^2-7x$.

144. **а)** $x(x-5)>x^2-4x+1$; **б)** $x(x+4)<(x+3)^2$.

145. Для яких значень x значення дробу $\frac{1,5x-4}{5}$ менше від відповідного значення дробу $\frac{2,4x+3}{4}$?

146. Для яких значень y значення дробу $\frac{0,6y+5}{3}$ більше від відповідного значення дробу $\frac{4-1,2y}{4}$?

147. Знайдіть область визначення функції:

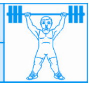
а) $y = \sqrt{-(9-11x)}$; **б)** $y = \sqrt{\frac{2}{7}-\frac{1}{14}x}$; **в)** $y = \sqrt{\frac{x-1}{3}-7}$.

148. Сторона трикутника дорівнює 12 см. Якою може бути висота трикутника, проведена до цієї сторони, якщо його площа менша від площі прямокутника зі сторонами 7 см і 9 см?

149. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 6 см, 7 см і 8 см. Якою може бути висота призми, якщо площа її бічної поверхні менша від площі бічної поверхні прямокутного паралелепіпеда, основою якого є прямокутник зі сторонами 5 см і 6 см, а висота дорівнює 7 см?

150. Туристи планують здійснити прогулянку річкою на моторному човні та повернутися на базу не пізніше як через 5 годин. На яку відстань вони можуть відплисти від бази за течією річки, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 15 км/год, а швидкість течії річки — 3 км/год?

Рівень В



Розв'яжіть нерівність:

151. **а)** $2x - 3a \le 4 - 7a$; **б)** $3(x + a) - 2 \ge 7x - a$.

152. **а)** $(a + 2)x > 1$; **б)** $(2a + 3)x > a$.

153. Чи існують значення a, для яких нерівність $a(x + 1) \le (2a + 3)x$ не має розв'язків?

154. Чи існують значення a, для яких розв'язком нерівності $(a^2 + 2a - 3) \cdot x \ge$ $\ge a + 3$ є будь-яке число?

Вправи для повторення

155. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 7x+12y=41; \\ 8x+3y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3(x+y)-11y=6,5; \\ 10x-4(x-y)=17. \end{cases}$

156. На черевики знизили ціну на 10%, а потім ще на 20%. Після двох знижень цін вони стали коштувати 90 грн. Знайдіть початкову ціну черевиків.

157*. Знайдіть такі два натуральних числа, різниця квадратів яких дорівнює 133.

158. *Давньокитайська задача*. У клітці перебувають фазани і кролики. Відомо, що там є 35 голів і 94 ноги. Знайдіть кількість фазанів і кількість кроликів у клітці.

7. Системи лінійних нерівностей з однією змінною

1. Поняття системи нерівностей з однією змінною та її розв'язку.

Задача. Одна господиня купила на ринку 10 кг помідорів і заплатила за них більше, ніж 18 грн. Друга господиня купила такі ж помідори і заплатила за 5 кг менше, ніж 14 грн. За якою ціною купували помідори господині?

Нехай ціна 1 кг помідорів дорівнює x грн., тоді 10 кг коштують $10x$ грн., що за умовою задачі більше, ніж 18 грн., тобто $10x > 18$.

5 кг помідорів коштують $5x$ грн., що за умовою задачі менше, ніж 14 грн., тобто $5x < 14$.

Щоб розв'язати задачу, потрібно знайти ті значення x, для яких правильною буде як нерівність $10x > 18$, так і нерівність $5x < 14$.

Якщо потрібно знайти ті значення змінної, які задовольняють дві нерівності, то кажуть, що потрібно *розв'язати систему нерівностей*. Для нашої задачі систему записують так:

$$\begin{cases} 10x>18; \\ 5x<14. \end{cases}$$

Розв'язавши кожну з нерівностей системи, одержимо: $\begin{cases} x>1,8; \\ x<2,8. \end{cases}$

Отже, значення x має задовольняти умову $1,8 < x < 2,8$, тобто ціна 1 кг помідорів більша, ніж 1 грн. 80 к., але менша, ніж 2 грн. 80 к.

Значення $x=2$ є розв'язком обох нерівностей системи $\begin{cases}10x>18;\\5x<14,\end{cases}$ бо кожна з числових нерівностей $10\cdot2>18$ і $5\cdot2<14$ є правильною. Таке значення x називають *розв'язком системи нерівностей*.

Означення **Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, для якого є правильною кожна з нерівностей системи.**

Розв'язати систему нерівностей означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

2. Розв'язування систем лінійних нерівностей з однією змінною. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases}2x+3<11;\\x+6\le5.\end{cases}$

● Розв'яжемо кожну з нерівностей системи:

$$\begin{cases}2x+3<11;\\x+6\le5;\end{cases}\quad\begin{cases}2x<11-3;\\x\le5-6;\end{cases}\quad\begin{cases}2x<8;\\x\le-1;\end{cases}\quad\begin{cases}x<4;\\x\le-1.\end{cases}$$

Позначимо на координатній прямій множину тих чисел, які задовольняють першу нерівність останньої системи, — проміжок $(-\infty;\,4)$, і множину чисел, які задовольняють другу нерівність, — проміжок $(-\infty;\,1]$.

Спільними розв'язками нерівностей є значення x, які належать обом проміжкам, тобто їх перерізу: $(-\infty;\,4)\cap(-\infty;\,1]=(-\infty;\,1]$.

Відповідь. $(-\infty;\,-1]$. ●

Приклад 2. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases}3x+4<6;\\2x+7\ge4.\end{cases}$

● $\begin{cases}3x<6-4;\\2x\ge4-7;\end{cases}\quad\begin{cases}3x<2;\\2x\ge-3;\end{cases}\quad\begin{cases}x<\dfrac{2}{3};\\x\ge-1{,}5.\end{cases}$

На координатній прямій позначимо множину чисел, які задовольняють нерівність $x<\dfrac{2}{3}$, і множину чисел, які задовольняють нерівність $x\ge-1{,}5$.

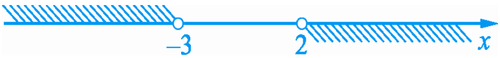
Спільними розв'язками нерівностей є значення x, які належать проміжку $\left[-1,5; \frac{2}{3}\right)$.

Відповідь. $\left[-1,5; \frac{2}{3}\right)$. ●

Приклад 3. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} 4x+1>9; \\ 8-x>11. \end{cases}$

● $\begin{cases} 4x>9-1; \\ -x>11-8; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x>8; \\ -x>3; \end{cases}$ $\begin{cases} x>2; \\ x<-3. \end{cases}$

На координатній прямій позначимо множину чисел, які задовольняють нерівність $x > 2$ і множину чисел, які задовольняють нерівність $x < -3$.



Спільних розв'язків нерівності не мають.

Відповідь. Розв'язків немає. ●

Отже, систему лінійних нерівностей з однією змінною можна розв'язувати за такою схемою:

1) розв'язуємо кожну нерівність системи;

2) зображуємо множину розв'язків кожної нерівності на одній координатній прямій;

3) знаходимо переріз множин розв'язків нерівностей і записуємо множину розв'язків системи у вигляді проміжку або відповідної нерівності.

Примітка.

1. Якщо система нерівностей зводиться до вигляду $\begin{cases} x<a; \\ x<b, \end{cases}$ де $a < b$, то розв'язками системи є $x < a$, тобто x менше від меншого з чисел a і b.

2. Якщо система нерівностей зводиться до вигляду $\begin{cases} x>a; \\ x>b, \end{cases}$ де $a > b$, то розв'язками системи є $x > a$, тобто x більше від більшого з чисел a і b.

Для тих, хто хоче знати більше

Приклад 4. Розв'язати нерівність $|x + 1| + |x - 2| < 6$.

● Знайдемо значення x, для яких значення виразів, які стоять під знаком модуля, дорівнюють нулю:

$$x + 1 = 0,\ x = -1; \qquad x - 2 = 0,\ x = 2.$$

Значення $x = -1$ та $x = 2$ розбивають координатну пряму на три проміжки.

Розкриємо модулі на кожному із проміжків і розв'яжемо відповідну нерівність.

1) $x < -1$, або x належить проміжку $(-\infty; -1)$, що скорочено записують так: $x \in (-\infty; -1)$ (знак «$\in$» читають: «належить»). Для цих значень x вираз $x + 1$ набуває від'ємних значень, а тому $|x + 1| = -x - 1$; вираз $x - 2$ теж набуває від'ємних значень, тому $|x - 2| = -x + 2$. Тоді нерівність $|x + 1| + |x - 2| < 6$ набуде вигляду $-x - 1 - x + 2 < 6$. Розв'яжемо одержану нерівність:

$$-2x < 6 + 1 - 2; \quad -2x < 5; \quad x > -2{,}5.$$

Крім того, значення x повинні задовольняти нерівність $x < -1$, а тому й систему нерівностей $\begin{cases} x < -1; \\ x > -2{,}5. \end{cases}$ Множиною розв'язків цієї системи є проміжок $(-2{,}5; -1)$.

2) $-1 \le x < 2$, або $x \in [-1; 2)$. Значення виразу $x + 1$ для цих значень x невід'ємні, тому $|x + 1| = x + 1$; вираз $x - 2$ набуває від'ємних значень, тому $|x - 2| = -x + 2$. Задана нерівність на проміжку $[-1; 2)$ без знака модуля матиме вигляд: $x + 1 - x + 2 < 6$, звідки $0 \cdot x < 3$. Розв'язками останньої нерівності є будь-які числа. Тому всі числа із проміжку $[-1; 2)$ є розв'язками заданої нерівності.

3) $x \ge 2$, або $x \in [2; +\infty)$. На цьому проміжку вирази $x + 1$ та $x - 2$ набувають невід'ємних значень, тому $|x + 1| = x + 1$, $|x - 2| = x - 2$. Задана нерівність на проміжку $[2; +\infty)$ без знака модуля матиме вигляд: $x + 1 + x - 2 < 6$, звідки $2x < 7$; $x < 3{,}5$.

Значення x повинні задовольняти дві нерівності: $x \ge 2$ і $x < 3{,}5$, тобто систему $\begin{cases} x \ge 2; \\ x < 3{,}5, \end{cases}$ множиною розв'язків якої є проміжок $[2; 3{,}5)$.

Отже, множиною розв'язків заданої нерівності є об'єднання проміжків $(-2{,}5; -1)$, $[-1; 2)$ і $[2; 3{,}5)$, тобто проміжок $(-2{,}5; 3{,}5)$.

Відповідь. $(-2{,}5; 3{,}5)$. ●

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Для яких значень x має зміст вираз $\sqrt{2x+9} + \sqrt{5+x}$?

● Даний вираз має зміст для тих значень x, для яких кожний з виразів $2x + 9$ і $5 + x$ набуває невід'ємних значень. Отже, шукані значення x повинні задовольняти систему нерівностей $\begin{cases} 2x+9 \ge 0; \\ 5+x \ge 0. \end{cases}$

Розв'яжемо одержану систему:

$$\begin{cases} 2x+9 \ge 0; \\ 5+x \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x \ge -9; \\ x \ge -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge -4,5; \\ x \ge -5. \end{cases}$$

Спільними розв'язками нерівностей є значення x, які задовольняють нерівність $x \ge -4,5$.

Відповідь. $x \ge -4,5$. ●

Вправа 2. Розв'язати нерівність $\dfrac{x-2}{x+1} > 0$.

● Дріб додатний лише тоді, коли його чисельник і знаменник додатні або коли вони обидва від'ємні. Тому розв'язування даної нерівності зводиться до розв'язування двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} x-2 > 0; \\ x+1 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2 < 0; \\ x+1 < 0. \end{cases}$$

Розв'язками першої системи є значення x, які задовольняють нерівність $x > 2$, а другої — нерівність $x < -1$.

Відповідь. $x < -1$ або $x > 2$. (Множину розв'язків можна записати у вигляді об'єднання проміжків: $(-\infty; -1)\cup(2; +\infty)$.) ●

Зауваження. Розв'язування нерівності $(x - 2)(x + 1) > 0$ також зводиться до розв'язування двох систем, наведених у попередньому прикладі. Тому множиною розв'язків цієї нерівності теж є $(-\infty; -1)\cup(2; +\infty)$.

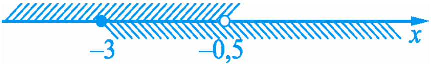
Вправа 3. Розв'язати подвійну нерівність $4 < 3 - 2x \le 9$.

● Дану подвійну нерівність можна записати у вигляді системи

$$\begin{cases} 3-2x > 4; \\ 3-2x \le 9. \end{cases}$$

Розв’яжемо систему:

$$\begin{cases}3-2x>4;\\3-2x\le 9;\end{cases}\quad \begin{cases}-2x>4-3;\\-2x\le 9-3;\end{cases}\quad \begin{cases}-2x>1;\\-2x\le 6;\end{cases}\quad \begin{cases}x<-0,5;\\x\ge -3.\end{cases}$$



Відповідь. [–3; –0,5). ●

Зауважимо, що подвійну нерівність у вправі 3 можна розв’язати й на основі властивостей рівносильності нерівностей (див. пункт 5, вправа 3).

Усно

159. Які з чисел –4; 0; 5 є розв’язками системи нерівностей $\begin{cases}3x\le 0;\\x+7>0?\end{cases}$

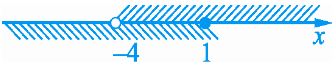
160. На рисунку 17 позначено множини розв’язків нерівностей системи. Чи правильно записана множина розв’язків системи?

(4; +∞);

а)

розв’язків немає;

б)



(–4; 1];

в)

(–∞; 6].

г)

Рис. 17

Рівень А

161. Які з чисел –3; 0; 5; 11 є розв’язками системи нерівностей $\begin{cases}4x-11>1;\\7-3x\le 8?\end{cases}$

162. Чи є число –2 розв’язком системи нерівностей:

а) $\begin{cases}3x-1<0;\\5x+9>1;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}4-3x\ge 0;\\6x-11<3;\end{cases}$ **в)** $\begin{cases}7x+8<3;\\4x+5>2?\end{cases}$

Розв’яжіть систему нерівностей:

163. **а)** $\begin{cases}x\ge 3;\\x>5;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}x<-2;\\x<3;\end{cases}$ **в)** $\begin{cases}x<4;\\x\ge -1;\end{cases}$ **г)** $\begin{cases}x>4;\\x<-3.\end{cases}$

164. а) $\begin{cases} x \le -4; \\ x < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \ge 5; \\ x < -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \ge -2; \\ x \ge 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < 5; \\ x \ge -1. \end{cases}$

165. а) $\begin{cases} x-1 \ge 0; \\ 3x > 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x < 8; \\ x-5 > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x \le 20; \\ 2x+4 > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -4x \ge 10; \\ 3x-15 > 0. \end{cases}$

166. а) $\begin{cases} x+7 < 0; \\ 5x \le 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-9 \ge 0; \\ -x > 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+6 \le 0; \\ 5-2x > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 9-4x < 0; \\ 3x+1 \ge 0. \end{cases}$

167. а) $\begin{cases} 4x+6 \le 7x; \\ x-9 > 10-5x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1,1x-2 > 1,4x-3; \\ 4-9x < 1-2x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 21-5x \le 8+2x; \\ 3x+7,7 \le 1+4x. \end{cases}$

168. а) $\begin{cases} 14-6x > 3x+2; \\ 11x-3 \le 2x+15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3-7y > 10y+3; \\ 5y+1,2 \ge 6-3y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8x+5 \le x; \\ 10x+14 \le 2x+13. \end{cases}$

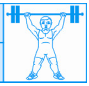
169. Розв'яжіть систему нерівностей і вкажіть найбільше ціле число, яке є її розв'язком:

а) $\begin{cases} 3-4y < 19; \\ 6y \le 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8-4x \le 0; \\ 4x-1 \le 24-x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5-4x < 17; \\ 3 < 23-5x. \end{cases}$

170. Знайдіть натуральні розв'язки системи нерівностей:

а) $\begin{cases} 3x+8 < 23; \\ 4x+11 > 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 20-4x \ge -12; \\ 7x+9 > 30; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 15-x > 14; \\ 5x+12 \le -8. \end{cases}$

Рівень Б



Розв'яжіть систему нерівностей:

171. а) $\begin{cases} 5(3-x)+4(2x-6) > 2x-7; \\ 11x-17(1+2x) < 11-14x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x-9-3(4x-12) \le 2x+17; \\ 14(x-1)-19x+31 > 1-2x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9(x+2)-7,2(2x+1) \ge 1,8+0,9x; \\ 10x-6,5(x-2) < 1,5x+1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3,5-(y-1,5) \le 6-4y; \\ y(y-2)-(y^2+4) < 1-6y. \end{cases}$

172. а) $\begin{cases} 11x-5(2+3x) > x-8; \\ 7(1-2x)+10x < 1-4x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 11-3,2(x-0,5) < 2,8x+3; \\ 4,5x-3(x-1,5) < 13+0,8x. \end{cases}$

173. **а)** $\begin{cases} \frac{a}{2}-\frac{a}{6}<5; \\ 3-\frac{a}{4}\geq 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y-\frac{2y-1}{3}<4; \\ \frac{y-1}{5}\leq 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{4x-1}{3}-x\leq 4; \\ 2x-\frac{x}{3}\geq 1; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 2y-\frac{y+5}{3}<6; \\ \frac{y}{2}-\frac{y}{8}\geq 2. \end{cases}$

174. **а)** $\begin{cases} \frac{a-3}{3}-\frac{a-2}{2}<1; \\ 4-\frac{a}{2}\geq 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5-\frac{3y-1}{4}\geq 1; \\ \frac{6y-1}{8}<1. \end{cases}$

175. **а)** $\begin{cases} \frac{1}{3}(2-3x)+0,5>3; \\ 1,6-\frac{2}{3}(6x-1)<0,6; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \frac{2}{7}x+11<3x-8; \\ 12+2,5x>3,3x+2. \end{cases}$

176. **а)** $\begin{cases} 17-\frac{2}{9}(18x+1)>5x+1\frac{7}{9}; \\ 4x-1,1>9x+2,4; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 7-0,6(5x+2)<10; \\ 1,2x+3>2,8x-1,8. \end{cases}$

177. Для яких значень аргументу значення функції $y=\frac{6x+1}{5}$ належать проміжку [–3; 1]?

178. Для яких значень аргументу значення функції $y=\frac{1-4x}{3}$ більші від –2, але менші від 4?

Розв'яжіть нерівність:

179. **а)** $(x-3)(x+1)<0$; **б)** $(x-1)(2x+5)\geq 0$;

в) $\frac{x+2}{x-3}>0$; **г)** $\frac{1-2x}{4-2x}\leq 0$.

180. **а)** $(x-2)(2x-5)<0$; **б)** $\frac{x+3}{x-1}\geq 0$.

181. Знайдіть область визначення функції:

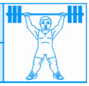
а) $y=\sqrt{2x+10}-\sqrt{9-3x}$; **б)** $y=\sqrt{4-x}+\sqrt{5-4x}$.

182. Для яких значень x має зміст вираз:

а) $\sqrt{3-5x}+\sqrt{x+9}$; **б)** $\sqrt{x-8}-\sqrt{3x-6}$?

183. Поїзд рухається з деякою швидкістю. Якщо він збільшить швидкість на 10 км/год, то за 4 год пройде менше, ніж 260 км. Якщо ж він зменшить швидкість на 5 км/год, то за 5 год пройде більше, ніж 240 км. Якою може бути швидкість поїзда?

Рівень B



184. Розв'яжіть нерівність:

а) $|x| + |4x - 1| < 3$; **б)** $|2x + 5| - |3x - 6| > 4$;

в) $3x + |x - 1| \le 7$; **г)** $|6 - 3x| - (3x - 5) > 1$.

185. Розв'яжіть систему нерівностей з параметром a:

а) $\begin{cases} x + a < 5; \\ 3x < 3a; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 4x + a \ge 1; \\ 5x - a < 8. \end{cases}$

186. Змішали 2 кг 30%-го розчину сульфатної кислоти із 3 кг іншого розчину цієї ж кислоти й одержали розчин, відсотковий уміст у якому сульфатної кислоти більший, ніж 36%, але менший, ніж 42%. Скільки відсотків сульфатної кислоти містив другий розчин?

Вправи для повторення

187. Знайдіть значення функції $y = 4 - 2x^2$, якщо $x = 0$; $x = -3$; $x = 3$. Чи проходить графік цієї функції через точку $A(4; -28)$?

188. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2x - 2$; **б)** $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

189. Знайдіть значення k, для якого графіки функцій $y = kx + 4$ й $y = 0{,}5x - 2$ перетинаються в точці, що лежить на осі абсцис.

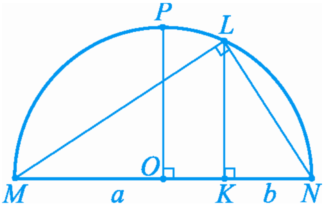
190. Знайдіть три послідовні натуральні числа, якщо відомо, що сума квадратів найменшого і найбільшого чисел у 5 разів більша від третього числа.

Цікаво знати

Як відомо, виникнення чисел обумовлено потребами практичної діяльності людини. Застосування ж чисел вимагало вміння їх порівнювати. Робити це люди навчилися багато тисячоліть тому.

Ще в «Началах» Евкліда суто геометрично було обґрунтовано нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, де a і b розглядали як довжини відрізків.

Розглянемо геометричну ілюстрацію нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, де $a > 0$, $b > 0$.



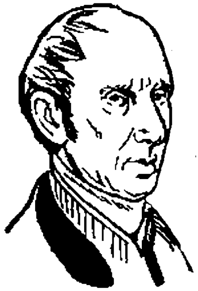
На відрізку MN завдовжки $a + b$ як на діаметрі побудуємо півколо, O — його центр, $MK = a$, $KN = b$. Проведемо перпендикуляри PO і LK до прямої MN, де P і L — точки півкола. Трикутник MLN — прямокутний ($\angle L = 90°$), LK — його висота, тому $LK = \sqrt{MK \cdot KN} = \sqrt{ab}$.

Відрізок PO — радіус півкола, тому $PO = \frac{1}{2}MN = \frac{a+b}{2}$.

Оскільки $PO \geq LK$, то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Цю доволі відому нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним двох додатних чисел, яку можна поширити на випадок більшої кількості чисел, називають ще *нерівністю Коші*.

Огюстен Луї Коші — відомий французький математик. Він написав понад 800 праць з арифметики і теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, теоретичної та небесної механіки, математичної фізики і т. д. Були періоди, коли Коші щотижня подавав до Паризької Академії наук нову математичну працю. Швидкість, з якою Коші переходив від одного предмета до іншого, дозволила йому прокласти в математиці чимало нових шляхів. Багато теорем, означень, ознак носять його ім'я.



Огюстен Луї Коші
(1789 – 1857)

Наведемо ще дві відомі нерівності, які, як і нерівність Коші, використовують для доведення багатьох математичних тверджень, зокрема, для доведення інших нерівностей.

Нерівність Коші — Буняковського:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2,$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$ — довільні дійсні числа.

Про В. Я. Буняковського читайте в рубриці «Вітчизняні математики».

Нерівність Бернуллі:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx,$$

де $x \geq -1$, n — натуральне число.

Якоб Бернуллі — швейцарський математик, працював професором Базельського університету. Основні його праці стосуються математичного аналізу, та особливу увагу вчений приділяв теорії ймовірностей, чимало теорем якої названо його ім'ям. Бернуллі започаткував один з розділів прикладної математики — математичну статистику.

Якоб Бернуллі
(1654 – 1705)

Запитання і вправи для повторення §1

1. Коли число a більше від числа b, менше від числа b, дорівнює числу b?
2. Як розміщені на координатній прямій точки, що відповідають числам a і b, якщо $a < b$; $a > b$?
3. Які нерівності називають строгими; нестрогими?
4. Сформулюйте властивості числових нерівностей. Доведіть їх.
5. Сформулюйте властивість додавання числових нерівностей, доведіть її.
6. Сформулюйте властивість множення числових нерівностей, доведіть її.
7. Сформулюйте наслідок із властивості множення числових нерівностей.
8. Наведіть приклади нерівностей з однією змінною.
9. Що називають розв'язком нерівності з однією змінною? Що означає розв'язати таку нерівність?
10. Наведіть приклади числових проміжків.
11. Які нерівності називають рівносильними?
12. Сформулюйте властивості рівносильності нерівностей.
13. Коли нерівності з однією змінною утворюють систему нерівностей?
14. Що називають розв'язком системи нерівностей з однією змінною?
15. Назвіть кроки розв'язування системи лінійних нерівностей з однією змінною.

Доведіть нерівність:

191. **а)** $(4a + 3)^2 \geq 48a$; **б)** $4(b + 2) < (b + 3)^2 - 2b$;

в) $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$; **г)** $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$;

д) $\dfrac{m^2 + n^2}{2} \geq m + n - 1$; **е)** $\dfrac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 2$.

192. **а)** $\left(a + \dfrac{1}{b}\right)\left(b + \dfrac{1}{a}\right) \geq 4$, якщо $a > 0$, $b > 0$;

б) $\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)\left(1 + \dfrac{y}{z}\right)\left(1 + \dfrac{z}{x}\right) \geq 8$, якщо $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;

в) $x^2 + y^2 \geq 8$, якщо $x + y = 4$;

г) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$; **д)** $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

193. Виділивши із тричлена квадрат двочлена, доведіть нерівність:

а) $x^2 + 4x + 5 > 0$; **б)** $a^2 - 10a + 30 > 0$;

в) $x^2 + 2xy + 2y^2 \geq 0$; **г)** $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.

194*. У якому випадку катер витратить більше часу: якщо пройде 30 км за течією річки і 30 км проти течії, чи якщо пройде 60 км у стоячій воді?

195*. Два катери, що мають однакову швидкість у стоячій воді, проходять двома різними річками однакову відстань за течією річки і повертаються у ті пункти, з яких вийшли. У якій з річок на цей рух потрібно більше часу: у річці зі швидкою течією чи в річці з повільною течією?

196*. Доведіть, що для будь-якого трикутника ABC виконується нерівність $AB + BC - AC < 2BM$, де M — довільна точка сторони AC.

197. Оцініть значення виразу:

а) $a - 2b$, якщо $-3 < a < -2{,}5$; $1{,}5 < b < 2$;

б) $\dfrac{a}{5} + 3b$, якщо $1 < a < 1{,}2$; $0{,}3 < b < 0{,}4$.

198. Оцініть довжину l середньої лінії трапеції з основами a і b, якщо $7{,}4 < a < 7{,}5$ і $4{,}8 < b < 4{,}9$.

199. Зобразіть на координатній прямій проміжок:

а) $[-1{,}5; 2)$; **б)** $[3; +\infty)$; **в)** $(-\infty; -7]$; **г)** $(2; 7)$.

Назвіть, якщо можливо, найбільше і найменше числа, які належать заданому проміжку.

200. Чи є число 1,999 розв’язком нерівності $x < 2$? Знайдіть яке-небудь число, більше від 1,999, що задовольняє дану нерівність.

Розв’яжіть нерівність:

201. **а)** $11(x + 7) - 14x < 37 + 13x$; **б)** $0{,}3x - 1{,}1(4 - 2x) \geq 7{,}5x + 1{,}6$;

в) $\frac{1}{3}(1-9x)-\frac{2}{5}(4-10x)<4\frac{1}{3}+2x$; **г)** $(y-5)(y+3)-y^2>3y+17$.

202. **а)** $\frac{2y-1}{2}+\frac{5y}{6}-\frac{3y-1}{3}<1$; **б)** $\frac{2a+9}{5}-\frac{9a}{10}>a$;

в) $\frac{11-3x}{3}+\frac{8+3x}{2}\geq 3$; **г)** $\frac{1+2y}{4}-1<\frac{4y-5}{8}$.

203. **а)** $|x-3|<18$; **б)** $|2x+7|\geq 9$;

в) $1-|x+2|<2(|x+2|+5)$; **г)** $|1-4x|+|x|\leq -2$.

204. Знайдіть усі натуральні числа, які задовольняють нерівність:

а) $8-3(x+1)>-10$; **б)** $7-3y\geq 2y-23$.

205. Для яких значень x значення дробу $\frac{12-5x}{3}$ більше від відповідного значення дробу $\frac{4x+5}{2}$?

206. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння має від'ємний корінь:

а) $5x-2a=0$; **б)** $x-7=3a$;

в) $x+9=4a+3$; **г)** $1-2x=3a+5$.

207. Учневі потрібно купити книжку, яка коштує 3 грн. 20 к., і кілька зошитів по 80 к. Яку найбільшу кількість зошитів може купити учень, якщо він має 9 грн.?

208. З Києва до Рівного виїхав автобус і рухався зі швидкістю 70 км/год, а через годину услід за ним виїхав автомобіль. З якою швидкістю повинен їхати автомобіль, щоб наздогнати автобус до його прибуття в Рівне, якщо відстань між цими містами дорівнює 320 км?

Розв'яжіть систему нерівностей:

209. **а)** $\begin{cases}3x+4>x+2;\\-7x<1;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}5-2x\leq 9;\\10-3x<7-1,2x;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2+3<0;\\3x-2(x+7)<9x;\end{cases}$ **г)** $\begin{cases}3x^2+5>0;\\2,5x-0,15\leq 0,6x+0,8;\end{cases}$

д) $\begin{cases}3x+2,4<\frac{x-11}{5};\\7x+1>\frac{2-21x}{2};\end{cases}$ **е)** $\begin{cases}5(x-3)(x+3)\geq 9x+5x^2;\\x+3<\frac{6x}{7}+2;\end{cases}$

є) $\begin{cases}\frac{x}{7}+1<\frac{2x}{3}+4;\\1,4+\frac{x}{...}<x;\end{cases}$ **ж)** $\begin{cases}(2x-1)^2+5>4x^2+3x;\\0,6(x-5)+1,4x<6x-1.\end{cases}$

210*. **а)** $\begin{cases} 3x > 0; \\ -2x < 0; \\ x+5 > 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 4x < 0; \\ 5x > 0; \\ x-7 < 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x < 10; \\ -2x < 0; \\ 2x^2+3 > 0; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x+5 < 0; \\ 3x > -27; \\ -2x > 12; \\ x < 0. \end{cases}$

211. Знайдіть множину невід'ємних чисел, які задовольняють систему нерівностей:

а) $\begin{cases} 7y-2(y-6) > 5y+9; \\ 12y-2(3-2y) < 2(y-2); \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{9+y}{9}-\dfrac{2y-1}{3} < 0; \\ 1-\dfrac{y+4}{9} < 0. \end{cases}$

212. Розв'яжіть подвійну нерівність:

а) $-3 \le 2x + 5 < 1$; **б)** $3 < 2 - x < 9$;

в) $-1 < \dfrac{3+2y}{5} \le 3$; **г)** $2 < \dfrac{1-x}{7} < 3$.

213. Розв'яжіть нерівність:

а) $(x-2)(2x-3) \le 0$; **б)** $(3-x)(4-2x) > 0$;

в) $\dfrac{6+2y}{y} < 0$; **г)** $\dfrac{1-x}{7-2x} \ge 0$;

д) $|x+2| + |x-2| < 6$; **е)** $|4x+2| - |x-6| > 1$.

214. Довжина прямокутної ділянки дорівнює 12 м. Якщо ширину цієї ділянки збільшити на 1,5 м, то площа стане більшою від 90 м^2. Якщо ж ширину ділянки зменшити на 0,5 м, то площа стане меншою від 72 м^2. Якою може бути ширина ділянки?

215. Бак має форму прямокутного паралелепіпеда, основою якого є квадрат зі стороною 2 м. Якщо висоту бака збільшити на 0,6 м, то об'єм все ж буде меншим від 24 м^3. Якщо ж висоту бака зменшити на 0,2 м, то об'єм буде більшим, ніж 20 м^3. Якою може бути висота цього бака?

Завдання для самоперевірки № 1

Рівень 1

1. Відомо, що $a < b$. Якому з чисел може дорівнювати різниця $a - b$:

а) 6; **б)** 0,03; **в)** –1,2; **г)** 0?

2. Відомо, що $x > y$. Вкажіть правильні нерівності:

а) $x - 2 > y - 2$; **б)** $-x > -y$; **в)** $5x < 5y$; **г)** $2x + 1 > 2y + 1$.

3. Розв'язком якої нерівності є число –3?

а) $5x + 1 > 0$; **б)** $-x + 7 > 0$; **в)** $-2x - 1 < 0$; **г)** $x + 8 < 0$.

4. Який проміжок зображено на рисунку?

а) $(-\infty; 3)$; **б)** $(-3; +\infty)$; **в)** $[3; +\infty)$; **г)** $(-\infty; -3]$.

5. Множиною розв'язків нерівності $3x + 6 < 0$ є:

а) $(-\infty; -2]$; **б)** $(-\infty; -2)$; **в)** $(-2; +\infty)$; **г)** $[-2; +\infty)$.

6. Множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} 3x + 1 \le 7; \\ 2x > -2 \end{cases}$ є:

а) $(-\infty; -1)$; **б)** $[-1; 2]$; **в)** $(-1; 2]$; **г)** $[2; +\infty)$.

Рівень 2

7. Порівняйте числа:

а) $2\frac{1}{3}$ і $2\frac{2}{7}$; **б)** $-0{,}5$ і $-\frac{5}{9}$.

8. Відомо, що $a < b$. Використовуючи різні властивості числових нерівностей, запишіть 3 правильні нерівності.

9. Вимірявши довжину a і ширину b прямокутника (у сантиметрах), знайшли, що $2{,}1 < a < 2{,}2$ і $1{,}7 < b < 1{,}8$. Оцініть:

а) периметр прямокутника; **б)** площу прямокутника.

10. Зобразіть на координатній прямій проміжок:

а) $(4; 7]$; **б)** $(3; +\infty)$.

11. Розв'яжіть нерівність:

а) $-3x < 12$; **б)** $5 + 4x > 6$.

12. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 6y > -24; \\ 2y + 3 < 8. \end{cases}$

Рівень 3

13. Доведіть нерівність:

а) $(3m-1)(3m+1) > 9m^2-7$; **б)** $x^2+8x+19>0$.

14. Знаючи, що $4 \le x \le 5$, $2 \le y \le 3$, оцініть значення виразу:

а) $x+y$; **б)** $3x-0{,}5y$.

15. Розв'яжіть нерівність:

а) $4(3x+1)-(8x+5) < 1+4x$; **б)** $\dfrac{11-3x}{2}+x<0$.

16. Розв'яжіть подвійну нерівність $-1<\dfrac{4x-3}{2}\le 0$.

17. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} 3+3{,}2x \ge 7-1{,}8x; \\ 5+6x \ge 4{,}5+4x; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{y}{2} > 5; \\ 2y-\dfrac{y+1}{3} > 3. \end{cases}$

18. Моторний човен пройшов деякий шлях за течією річки і повернувся у початковий пункт. Швидкість течії річки дорівнює 3 км/год, а швидкість човна у стоячій воді — 15 км/год. На яку відстань від початкового пункту відплив човен, якщо вся поїздка тривала більше, ніж 3 год, але менше, ніж 4 год?

Рівень 4

19. Доведіть нерівність:

а) $(a^2+1)(a^4+1) \ge 4a^3$; **б)** $a^2+2b^2+3 \ge 2a+4b$.

20. Знаючи, що $0{,}6 \le a \le 0{,}7$, $0{,}4 \le b \le 0{,}5$, оцініть значення виразу:

а) a^2-b^2; **б)** $\dfrac{a}{b}$.

21. Розв'яжіть нерівність:

а) $|3x-0{,}5| \le 3{,}5$; **б)** $|2x+1|>1$.

22. Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей $\begin{cases} 0{,}2(5x-1)+\dfrac{1}{3}(3x+1) < x+5{,}8; \\ 8x-7-\dfrac{1}{6}(6x-2) > x. \end{cases}$

23. Знайдіть область визначення функції:

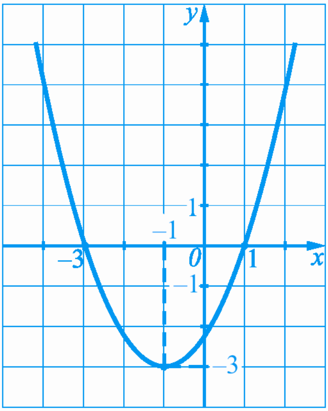
а) $y=\sqrt{x+3}-\sqrt{4-3x}$; **б)** $y=\dfrac{\sqrt{3x-4}}{x-2}$.

24. Два туристи пройшли шлях від пункту A до пункту B. Перший турист першу половину часу рухався зі швидкістю v_1, а другу половину часу — зі швидкістю v_2. Другий же турист першу половину шляху йшов зі швидкістю v_1, а другу половину шляху — зі швидкістю v_2. Хто з них затратив менше часу на шлях від пункту A до пункту B, якщо $v_1 \ne v_2$?

§ 2 КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

Моделюючи реальні процеси за допомогою функцій, доволі часто приходять до так званої квадратичної функції, частковим випадком якої є вже вивчена функція $y = x^2$.

У цьому параграфі ми з’ясуємо: що таке квадратична функція, які її властивості та графік; що таке квадратна нерівність, як розв’язувати квадратні нерівності, виходячи із властивостей квадратичної функції.



8. Функція. Область визначення, область значень, графік функції

У 7 класі ми почали вивчати одне з найважливіших понять математики — поняття функції.

1. Що таке функція. Нагадаємо, що змінну y називають функцією від змінної x, якщо *кожному* значенню змінної x відповідає *одне* певне значення змінної y. При цьому змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, а змінну y — *залежною змінною*, або *функцією* (від аргументу x).

Якщо змінна y є функцією від аргументу x, то записують: $y = f(x)$ (читають: y дорівнює f від x). Значення функції для $x = x_0$ позначають через $f(x_0)$. Так, якщо функцію задано формулою $y = 2x - 3$, то можна записати: $f(x) = 2x - 3$. Тоді, наприклад, $f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, $f(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5 - 3 = 2$.

2. Область визначення і область значень функції. Множину значень, яких набуває незалежна змінна (аргумент), називають *областю визначення* функції; множину значень, яких набуває залежна змінна (функція), називають *областю значень* функції.

Область визначення функції $y = f(x)$ позначають $D(f)$ або $D(y)$, а область значень — $E(f)$ або $E(y)$.

Так, областю визначення лінійної функції $f(x) = 2x$ є множина всіх дійсних чисел, тобто $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Множиною значень цієї функції також є множина всіх дійсних чисел: $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

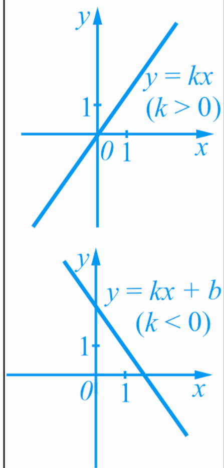
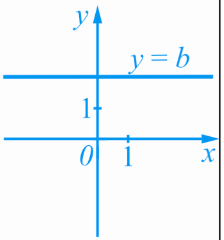
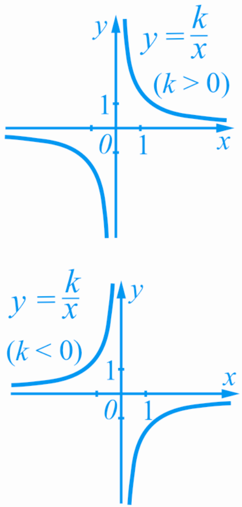
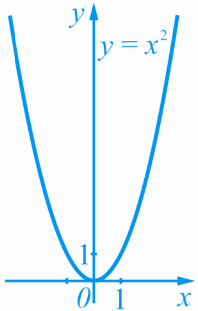
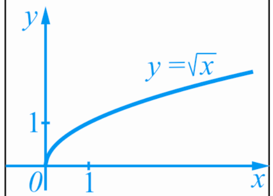
Якщо функцію задано формулою $y = f(x)$ і не вказано, яких значень можна надавати аргументу, то вважають, що областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, для яких вираз $f(x)$ має зміст.

Якщо вираз $f(x)$ є многочленом, то областю визначення функції $y = f(x)$ є множина всіх дійсних чисел; якщо $f(x)$ — раціональний дріб, то областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, крім тих значень x, для яких знаменник дробу дорівнює нулю; якщо функція задана формулою $y = \sqrt{f(x)}$, то областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, для яких виконується нерівність $f(x) \geq 0$.

Розглянемо, наприклад, функцію $y = \dfrac{2}{x-3}$. Вираз $\dfrac{2}{x-3}$ має зміст для всіх значень x, крім $x = 3$. Тому областю визначення цієї функції є множина всіх дійсних чисел, крім $x = 3$, тобто $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

3. Графік функції. *Графіком* функції називають фігуру, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють усім значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

Графіки функцій, які ми вивчали у 7 і 8 класах, а також їх області визначення та області значень наведено в таблиці.

Функція	$y = kx + b$, $k \neq 0$	$y = kx + b$, $k = 0$	$y = \dfrac{k}{x}$, $k \neq 0$	$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Область значень	$(-\infty; +\infty)$	b	$(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Графік	пряма	пряма	гіпербола	парабола	вітка параболи
					

На рисунку 18 зображено графік функції $y = f(x)$, областю визначення якої є проміжок [–2; 4]. Точка $M(2; 4)$ належить графіку. Це означає, що для $x = 2$ значення функції дорівнює 4: $f(2) = 4$.

Очевидно, що найменше значення функції дорівнює –1. Цього найменшого значення функція набуває, якщо $x = 4$. Найбільше значення функції дорівнює 5 і досягається для $x = 0$. Областю значень функції є проміжок [–1; 5].

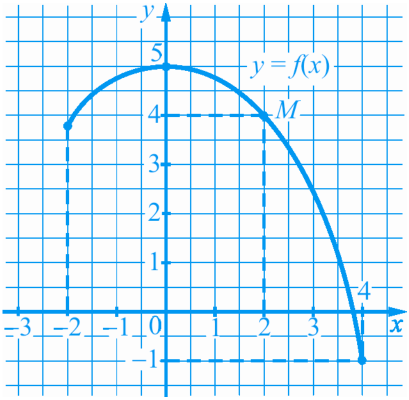


Рис. 18

Для тих, хто хоче знати більше

4. Задання функції кількома формулами. Існують функції, які на окремих частинах області визначення задаються різними формулами. Наприклад, якщо функція $y = f(x)$ задана у вигляді

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{якщо } x \le -1; \\ x^2, & \text{якщо } -1 < x \le 2; \\ 4, & \text{якщо } x > 2, \end{cases}$$

то це означає, що для $x \le -1$ значення функції потрібно знаходити за формулою $f(x) = 2x + 3$, для $-1 < x \le 2$ — за формулою $f(x) = x^2$, а для $x > 2$ — за формулою $f(x) = 4$.

Так, $f(-2) = 2\cdot(-2) + 3 = -1$; $f(1) = 1^2 = 1$; $f(5) = 4$.

Щоб побудувати графік такої функції (див. рис. 19), досить на проміжку (–∞; –1] побудувати графік функції $y = 2x + 3$, на проміжку (–1; 2] — графік функції $y = x^2$ і на проміжку (2; +∞) — графік функції $y = 4$.

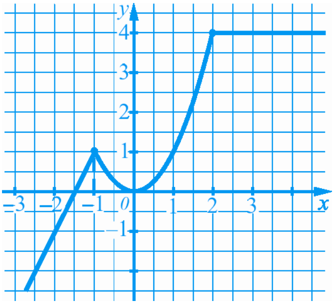


Рис. 19

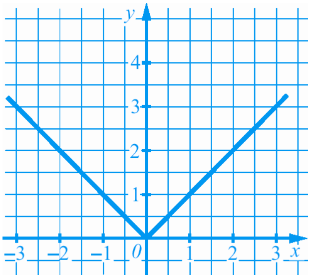


Рис. 20

Описаним способом можна задати і функцію $y = |x|$:

$$y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0; \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Графік функції $y = |x|$ зображено на рисунку 20.

5. Графік функції, формула якої містить аргумент під знаком модуля. Побудуємо графік функції $y = |x - 1| + |x + 1|$.

Знайдемо значення x, для яких значення виразів $x - 1$ і $x + 1$, які стоять під знаком модуля, дорівнюють нулю:

$x - 1 = 0$; $x = 1$; $x + 1 = 0$; $x = -1$.

Значення $x = -1$ та $x = 1$ розбивають координатну пряму на три проміжки (див. рис. 21).

Рис. 21

Враховуючи означення модуля числа, одержимо:

якщо $x < -1$, то $x - 1 < 0$, $x + 1 < 0$, тому $|x - 1| = -(x - 1)$, $|x - 1| = -(x + 1)$ і

$$y = -(x - 1) - (x + 1) = -2x;$$

якщо $-1 \leq x < 1$, то $x - 1 < 0$, $x + 1 \geq 0$ та $y = -(x - 1) + (x + 1) = 2$;

якщо $x \geq 1$, то $x - 1 \geq 0$, $x + 1 > 0$ та $y = (x - 1) + (x + 1) = 2x$.

Щоб одержати графік заданої функції, будуємо на проміжку $(-\infty; -1)$ графік функції $y = -2x$, на проміжку $[-1; 1)$ — графік функції $y = 2$ і на проміжку $[1; +\infty)$ — графік функції $y = 2x$. Шуканий графік зображено на рисунку 22.

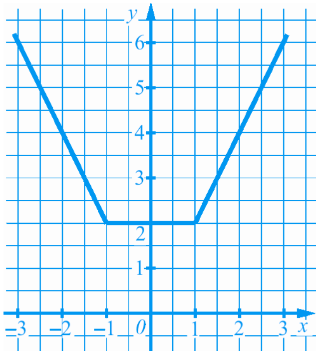


Рис. 22

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{4 - 2x} + \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

● Область визначення функції утворюють ті значення x, для яких вираз $4 - 2x$ набуває невід'ємних значень, а вираз $2x$ — додатних значень. Отже, потрібно розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} 4 - 2x \geq 0; \\ 2x > 0. \end{cases}$ Матимемо:

$$\begin{cases} -2x \geq -4; \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2; \\ x > 0. \end{cases}$$

Областю визначення функції є проміжок (0; 2].

Відповідь. (0; 2]. ●

Усно

216. Функція задана формулою $f(x) = \frac{15}{x}$.

а) Знайдіть значення функції, якщо $x = 1$; $x = 3$.

б) Вкажіть область визначення функції.

217. Функція задана формулою $f(x) = x^2$, де $-1 \leq x \leq 4$.

а) Знайдіть: $f(1)$; $f(3)$. **б)** Вкажіть область визначення функції.

218. Функція $y = f(x)$ задана таблицею:

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	–4	–1	0	–1	–4

а) Знайдіть: $f(-1)$; $f(2)$.

б) Для яких значень аргументу значення функції дорівнює –4?

в) Вкажіть область визначення та область значень функції.

219. На рисунку 23 зображено графік функції $y = f(x)$.

а) Знайдіть: $f(-3)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$.

б) Вкажіть область визначення та область значень функції.

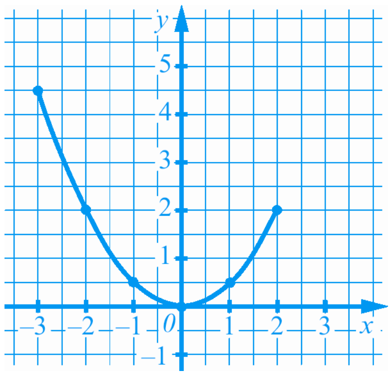


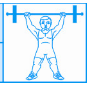
Рис. 23

220. Яка область визначення функції, заданої формулою:

а) $y = 2x^2 + 1$, де $0 \leq x \leq 1$; **б)** $y = -x + 5$;

в) $y = \frac{3}{x-1}$; **г)** $y = 2\sqrt{x}$?

Рівень А



221. Функція задана формулою $f(x) = 2x^2 - 2$. Знайдіть: $f(0)$; $f(-3)$; $f(4)$.

222. Функція задана формулою $f(x) = 5 - x^2$. Знайдіть: $f(-1)$; $f(1)$; $f(10)$.

223. Знайдіть значення функції $y = \dfrac{x+5}{x-3}$, якщо $x = -1$.

224. Функція задана формулою $f(x) = 6x - 1$. Знайдіть значення x, для яких:
а) $f(x) = 11$; **б)** $f(x) > -19$.

225. Функція задана формулою $f(x) = 3x + 2$. Знайдіть значення x, для яких:
а) $f(x) = 17$; **б)** $f(x) < -4$.

Чи проходить графік функції через дану точку:

226. **а)** $y = 4x - 5$; $A(3; 6)$; **б)** $y = x^2 - 3x$; $B(2; -2)$?

227. **а)** $y = 2x + 8$; $M(4; 16)$; **б)** $y = 4x - x^2$; $N(2; 2)$?

Знайдіть область визначення функції:

228. **а)** $y = \dfrac{3}{2x-8}$; **б)** $y = \dfrac{4}{x^2-36}$; **в)** $y = \sqrt{x-8}$; **г)** $y = \sqrt{2-x}$.

229. **а)** $y = \dfrac{4}{9-3x}$; **б)** $y = \dfrac{5}{x^2-64}$; **в)** $y = \sqrt{4-x}$; **г)** $y = \sqrt{2x+8}$.

Побудуйте графік функції:

230. **а)** $y = -3x$; **б)** $y = 2x - 3$; **в)** $y = 5 - 4x$; **г)** $y = -\dfrac{1}{3}x$.

231. **а)** $y = 2x$; **б)** $y = -x + 3$; **в)** $y = -\dfrac{1}{2}x$.

Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій, не будуючи самих графіків:

232. **а)** $y = x^2$ і $y = 5x - 4$; **б)** $y = x^2 - x$ і $y = -x + 9$.

233. $y = 2 - x$ і $y = x^2$.

234. Знайдіть координати точки перетину графіка функції $y = -3x + 9$ з віссю абсцис; віссю ординат.

235. Знайдіть координати точки перетину графіка функції $y = 2x + 16$ з віссю абсцис; віссю ординат.

Рівень Б

Знайдіть область визначення функції:

236. **а)** $y = \dfrac{1}{2x-4} + \dfrac{1}{x+3}$; **б)** $y = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$;

в) $y = \sqrt{-2x-8}$; **г)** $y = \sqrt{1-4x}$;

д) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$; **е)** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

237. **а)** $y = \dfrac{2x+1}{x^2+8x-9}$; **б)** $y = \sqrt{4-3x}$; **в)** $y = \sqrt{5x+1}$.

238. Побудуйте графіки функцій $y = -\dfrac{6}{x}$ і $y = 4 - 2x$. Знайдіть координати точок перетину цих графіків.

239. Побудуйте графіки функцій $y = \dfrac{4}{x}$ і $y = x - 3$. Знайдіть координати точок перетину цих графіків.

240. Для яких значень аргументу значення функції $y = x^2 + 6x - 2$ дорівнює: **а)** 5; **б)** –11; **в)** –15?

241. Для яких значень аргументу значення функції $y = x^2 - 2x + 5$ дорівнює: **а)** 8; **б)** 4; **в)** –1?

242. Чи належить число 5 області значень функції $y = 3x^2 - 2x + 6$?

243. Пряма $y = kx + b$ проходить через точки $M(-1; -2)$ і $N(2; 4)$. Знайдіть k і b.

244. Воду деякий час нагрівали. Залежність її температури t (у °C) від часу τ (у хвилинах) задано так: $t(\tau) = \begin{cases} 12\tau+16, & \text{якщо } 0 \le \tau \le 7; \\ 100, & \text{якщо } 7 < \tau \le 10; \\ -2\tau+120, & \text{якщо } 10 < \tau \le 16. \end{cases}$

а) Знайдіть: $t(5)$, $t(9)$, $t(15)$, початкову та кінцеву температури води.

б) Який фізичний зміст має процес, що описується функцією $t(\tau)$?

в) Побудуйте графік функції $t(\tau)$, вибравши зручні масштаби на осях координат.

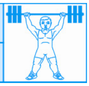
245. Тіло рухається прямолінійно. Залежність пройденого ним шляху s (у метрах) від часу t (у секундах) задано так: $s(t) = \begin{cases} 2{,}5t, & \text{якщо } 0 \le t \le 2; \\ 5, & \text{якщо } 2 < t \le 4; \\ 3t-7, & \text{якщо } 4 < t \le 6. \end{cases}$

а) Знайдіть: $s(1)$; $s(2)$; $s(3{,}5)$; $s(4)$; $s(6)$.

б) З якою швидкістю рухалося тіло протягом перших двох секунд; між другою і четвертою секундами руху; між четвертою і шостою секундами руху? Чи є рух тіла рівномірним?

в) Побудуйте графік функції $s(t)$.

Рівень В



246. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{1-0{,}1x}}-\sqrt{3x+2}$; **б)** $y=\dfrac{x}{\sqrt{3x+2}}+\dfrac{1}{|x|-3}$.

Побудуйте графік функції:

247. **а)** $y=\dfrac{x-2}{x^2-2x}$; **б)** $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}+\dfrac{x^2+x}{x+1}$;

в) $y=\sqrt{x^2}-3x$, де $x\geq 0$; **г)** $y=\sqrt{x^2}+3x$, де $x\leq 0$.

248. **а)** $y=\begin{cases} x^2, & \text{якщо } x\geq -1; \\ x+2, & \text{якщо } x<-1; \end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases} \dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x\leq -2 \text{ або } x\geq 2; \\ x, & \text{якщо } -2<x<2. \end{cases}$

249. **а)** $y=|2x-4|+|2x+2|$; **б)** $y=|x-3|-|x-2|$;

в) $y=|x-1|+|3x+1|$; **г)** $y=|x+1|-|2x-4|$.

250. Дано функцію $f(x)=\begin{cases} 4x+12, & \text{якщо } x\leq -2; \\ x^2, & \text{якщо } -2<x<1; \\ 1, & \text{якщо } x\geq 1. \end{cases}$

а) Побудуйте графік цієї функції.

б) Розв’яжіть рівняння $f(x)=2$.

251. **а)** Побудуйте графік функції $y=|x-4|+|x+2|$.

б) Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $|x-4|+|x+2|=a$ має два корені; не має коренів. Чи існують значення a, для яких рівняння має лише один корінь?

Вправи для повторення

252. За 300 г цукерок і 500 г печива заплатили 7 грн. 60 к. Скільки коштує 1 кг цукерок і скільки 1 кг печива, якщо 4 кг цукерок дорожчі, ніж 5 кг печива на 8 грн.?

253. *Задача з «Азбуки» Л. М. Толстого.* До бочки підведено дві труби, з обох труб вода тече в бочку. З однієї труби вода наповнює бочку за 24 хв, з іншої — за 15 хв. Ще в бочці є дірка; через дірку вся вода з повної бочки витече за 2 год. Чи наповниться бочка і як швидко, якщо пустити воду з обох труб і вода витікатиме з дірки?

254. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{4}{x+3} = -2x;$ **б)** $\frac{36}{x-15} + \frac{36}{x+15} = 1;$ **в)** $\frac{3}{x+3} - \frac{5x}{x-1} = -1.$

255*. Один з коренів рівняння $x^3 + 2x^2 - 9x + a = 0$ дорівнює –2. Знайдіть решту коренів цього рівняння.

9. Властивості функцій

1. Нулі функції. Проміжки знакосталості. Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на рисунку 24. Якщо $x = –1$, $x = 4$ або $x = 6$, то значення функції дорівнює нулю. Такі значення аргументу x називають *нулями функції*.

Означення **Значення аргументу, для яких значення функції дорівнює нулю, називають нулями функції.**

Нулем функції $y = x – 2$ є лише одне значення x, а саме: $x = 2$, бо значення функції дорівнює нулю лише для $x = 2$.

Щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$.

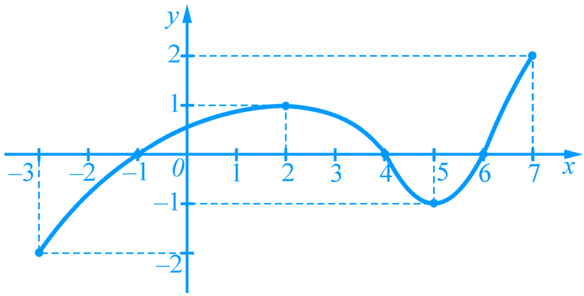


Рис. 24

Функція $y = f(x)$, графік якої зображено на рисунку 24, на проміжках [–3; –1) і (4; 6) набуває лише від'ємних значень, а на проміжках (–1; 4) і (6; 7] — лише додатних значень. Усі ці проміжки називають *проміжками знакосталості* функції $y = f(x)$.

2. Зростання, спадання функції. Розглянемо графік функції $y = f(x)$ на рисунку 24. На проміжку [–3; 2] графік «іде вгору»: якщо збільшувати значення x із цього проміжку, то відповідні значення функції збільшуватимуться. Наприклад, візьмемо значення аргументу $x_1 = –3$ та $x_2 = –1$, тоді $x_2 > x_1$.

Оскільки $f(x_1) = f(-3) = -2$, а $f(x_2) = f(-1) = 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$. Більшому значенню аргументу (x_2) відповідає більше значення функції ($f(x_2)$). Кажуть, що на проміжку [–3; 2] функція $y = f(x)$ *зростає* (або *є зростаючою*). Такою ж вона є й на проміжку [5; 7].

На проміжку [2; 5] графік функції $y = f(x)$ «іде вниз»: якщо збільшувати значення аргументу, то відповідні значення функції зменшуватимуться. Кажуть, що на цьому проміжку функція $y = f(x)$ *спадає* (або *є спадною*).

Означення

Функцію називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Функцію називають спадною на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають *зростаючою функцією*; якщо ж функція спадає на всій області визначення, то її називають *спадною функцією*.

Наприклад, на рисунку 25 зображено графік функції, областю визначення якої є проміжок [–1; 5]. Ця функція є зростаючою, бо вона зростає на всій області визначення. Функція, графік якої зображено на рисунку 26, є спадною, бо вона спадає на всій області визначення — проміжку [–1; 5].

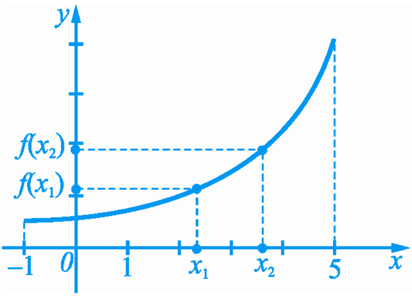


Рис. 25

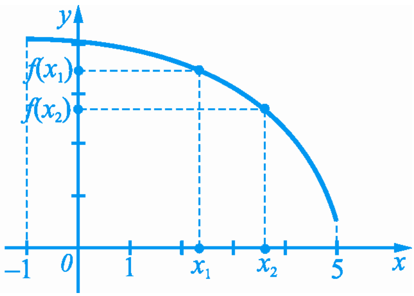


Рис. 26

Зростаючими, наприклад, є функції $y = 2x$, $y = \sqrt{x}$ (їхні графіки завжди «ідуть угору»), а спадними — функції $y = -2x$, $y = -x$ (їхні графіки завжди «ідуть униз»). Функція $y = f(x)$, графік якої зображено на рисунку 24, є ні зростаючою, ні спадною. Вона лише зростає або спадає на окремих проміжках.

Функція $y = \dfrac{k}{x}$, де $k > 0$, спадає на кожному із проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, але не є спадною. Справді, вона не спадає на всій області визначення $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$, оскільки для $x_2 > x_1$ (див. рис. 27) маємо: $y_2 > y_1$.

Для тих, хто хоче знати більше

3. Парні та непарні функції. Розглянемо функцію $f(x) = x^2$, її графік зображено на рисунку 28. Оскільки для будь-якого значення x виконується рівність $(-x)^2 = x^2$, то $f(-x) = f(x)$. Функцію $f(x) = x^2$ називають *парною*.

Означення **Функцію $y = f(x)$ називають парною, якщо для будь-якого значення x із області її визначення значення $-x$ також належить області визначення і виконується рівність $f(-x) = f(x)$.**

Область визначення парної функції симетрична відносно початку координат, бо разом зі значенням x вона містить і значення $-x$.

Графік парної функції симетричний відносно осі y (див., наприклад, рис. 28). Тому для побудови графіка парної функції досить побудувати частину графіка для $x \geq 0$, а потім симетрично відобразити цю частину відносно осі y.

На рисунку 29 зображено графік функції $f(x) = x^3$. Оскільки для будь-якого значення x виконується рівність $(-x)^3 = -(x^3)$, то $f(-x) = -f(x)$. Функцію $f(x) = x^3$ називають *непарною*.

Означення **Функцію $y = f(x)$ називають непарною, якщо для будь-якого значення x із області її визначення значення $-x$ також належить області визначення і виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.**

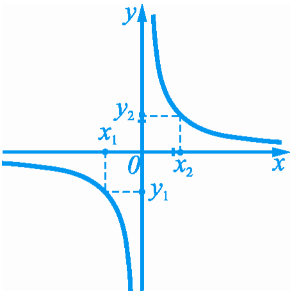


Рис. 27

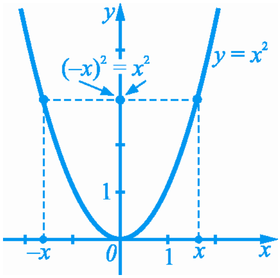


Рис. 28

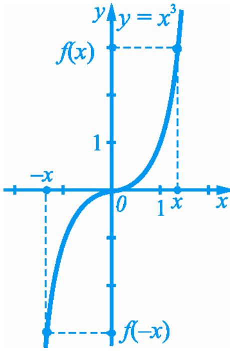


Рис. 29

Область визначення та графік непарної функції симетричні відносно початку координат. Тому для побудови графіка непарної функції досить побудувати частину графіка для $x \geq 0$, а потім симетрично відобразити цю частину відносно початку координат.

Розглянемо функцію $f(x) = 2x + 3$. Область її визначення — множина всіх дійсних чисел — симетрична відносно початку координат. Для цієї функції $f(-x) = -2x + 3$. Рівності

$f(-x) = f(x)$ і $f(-x) = -f(x)$ не виконуються для всіх значень x, наприклад, для $x = 1$ ($f(1) = 5$; $f(-1) = 1$; $f(-1) \neq f(1)$ і $f(-1) \neq -f(1)$). Ця функція є ні парною, ні непарною.

Функція $f(x) = \sqrt{x}$, де $x \geq 0$, також є ні парною, ні непарною, бо область визначення функції (проміжок $[0; +\infty)$) не симетрична відносно початку координат.

Підсумок. *Щоб дослідити функцію $y = f(x)$ на парність, потрібно:*

1) *знайти область визначення функції і встановити, чи вона симетрична відносно початку координат;*

2) *якщо область визначення симетрична відносно початку координат, то шукаємо $f(-x)$:*

а) *якщо для будь-якого значення x з області визначення функції виконується рівність $f(-x) = f(x)$, то функція є парною;*

б) *якщо для будь-якого значення x з області визначення функції виконується рівність $f(-x) = -f(x)$, то функція є непарною;*

в) *якщо хоча б для одного значення x із області визначення функції жодна з цих рівностей не виконується, то функція є ні парною, ні непарною;*

3) *якщо область визначення не симетрична відносно початку координат, то функція є ні парною, ні непарною.*

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти нулі функції $y = x^2 - 8x + 12$.

● Розв'яжемо рівняння $x^2 - 8x + 12 = 0$:

$$D = (-8)^2 - 4\cdot1\cdot12 = 16; \quad x_1 = \frac{8-4}{2} = 2; \quad x_2 = \frac{8+4}{2} = 6.$$

Отже, функція має два нулі: $x = 2$ та $x = 6$.

Відповідь. 2; 6. ●

Вправа 2. Довести, що функція $y = x^2 - 1$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

● Нехай x_1 та x_2 — два довільні значення аргументу із проміжку $[0; +\infty)$, до того ж, $x_2 > x_1$, а y_1 та y_2 — відповідні їм значення функції, тобто $y_1 = x_1^2 - 1$, $y_2 = x_2^2 - 1$. Покажемо, що $y_2 > y_1$. Для цього розглянемо різницю:

$$y_2 - y_1 = (x_2^2 - 1) - (x_1^2 - 1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Значення x_1 та x_2 належать проміжку $[0; +\infty)$, тому $x_1 \geq 0$, $x_2 > 0$ (бо $x_2 > x_1$) і $x_1 + x_2 > 0$.

Тоді:

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0; \quad y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0; \quad y_2 > y_1.$$

Більшому значенню аргументу з проміжку $[0; +\infty)$ відповідає більше значення функції. Отже, функція $y = x^2 - 1$ на проміжку $[0; +\infty)$ зростає. ●

Вправа 3. Парною чи непарною є функція:

а) $f(x) = x^3 + 3x$; **б)** $f(x) = x^4 + x^2$; **в)** $f(x) = x^3 + 1$?

● Областю визначення кожної з даних функцій є множина всіх дійсних чисел. Отже, область визначення кожної функції симетрична відносно початку координат. Для будь-якого значення x матимемо:

а) $f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -x^3 - 3x = -(x^3 + 3x) = -f(x)$; функція $f(x) = x^3 + 3x$ є непарною;

б) $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x)$; функція $f(x) = x^4 + x^2$ є парною;

в) $f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$. Візьмемо $x = 1$ і знайдемо: $f(1) = 2$; $f(-1) = 0$. Бачимо, що $f(-1) \neq f(1)$ і $f(-1) \neq -f(1)$. Функція $f(x) = x^3 + 1$ є ні парною, ні непарною.

Відповідь. **а)** Непарна; **б)** парна; **в)** ні парна, ні непарна. ●

Усно

256. На рисунку 30 зображено графік функції $t = f(\tau)$, яка характеризує зміну температури тіла протягом 7 хвилин.

а) У які моменти часу температура тіла дорівнювала 0 °C? Вкажіть нулі функції $t = f(\tau)$.

б) Протягом яких проміжків часу температура тіла була додатною; від'ємною? На яких проміжках функція $t = f(\tau)$ набуває додатних значень; від'ємних значень?

в) Протягом яких проміжків часу температура тіла зростала; спадала? На яких проміжках функція $t = f(\tau)$ зростає; спадає?

г) Яке найбільше (найменше) значення температури тіла? Яке найбільше (найменше) значення функції $t = f(\tau)$?

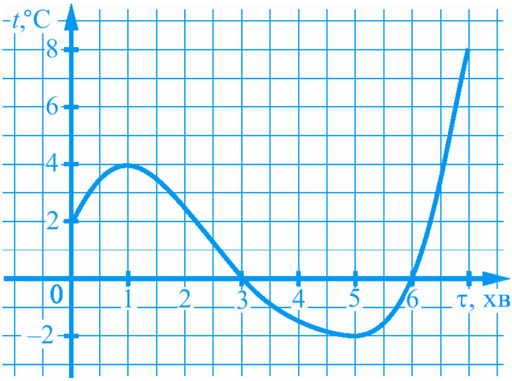


Рис. 30

Рівень А

257. На рисунку 31 зображено графік функції $y = f(x)$, де $-2{,}5 \le x \le 4$. Вкажіть:

а) нулі функції;

б) проміжки знакосталості функції;

в) проміжки, на яких функція зростає; спадає;

г) найбільше та найменше значення функції.

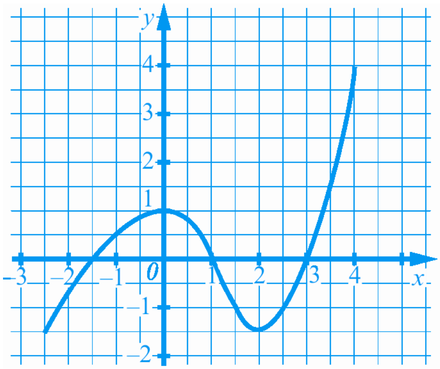


Рис. 31

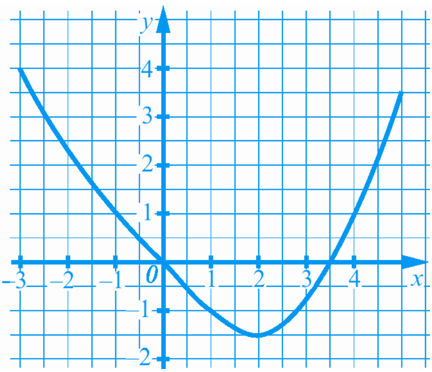


Рис. 32

258. На рисунку 32 зображено графік функції $y = f(x)$, де $-3 \le x \le 5$. Вкажіть:

а) нулі функції;

б) проміжки знакосталості функції;

в) проміжки, на яких функція зростає; спадає.

Знайдіть нулі функції:

259. **а)** $y = 2x - 4$; **б)** $y = 3 - 2x$; **в)** $y = (x - 1)(x + 2)$;

г) $y = x^2 - 6x + 8$; **д)** $y = \dfrac{x-1}{x-3}$; **е)** $y = \dfrac{x-1}{x^2 - x}$.

260. **а)** $y = 6 - 2x$; **б)** $y = x^2 + 2x - 8$; **в)** $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

Побудуйте графік функції. Знайдіть її нулі. Вкажіть проміжки знакосталості функції. Чи є дана функція зростаючою; спадною?

261. **а)** $y = 2x$; **б)** $y = 3x - 3$; **в)** $y = -0{,}5x + 1$.

262. **а)** $y = 0{,}5x - 1$; **б)** $y = -2x - 2$.

Рівень Б

263. Накресліть графік функції, областю визначення якої є проміжок [–2; 4], і щоб функція:

а) зростала на проміжку [–2; 0] і спадала на проміжку [0; 4];

б) спадала на проміжку [–2; 1], зростала на проміжку [1; 4] і мала два нулі: $x = 0$ та $x = 3$;

в) була зростаючою і мала один нуль — число 2.

264. Накресліть графік функції, областю визначення якої є проміжок [–1; 6], і щоб функція:

а) спадала на проміжку [–1; 4], зростала на проміжку [4; 6] і мала один нуль: $x = 1$;

б) була спадною і мала один нуль — число 3;

в) була зростаючою і не мала нулів.

Знайдіть нулі функції:

265. **а)** $y = 2x^2 - 2x - 1$; **б)** $y = \dfrac{x}{x+3} - \dfrac{1}{x-1}$; **в)** $y = \dfrac{1}{x^2-5x+6} + \dfrac{1}{x-3}$.

266. **а)** $y = -x^2 + 4x - 1$; **б)** $y = \dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{x}{x-1}$.

Побудуйте графік функції. Користуючись графіком, вкажіть: а) проміжки знакосталості функції; б) проміжки, на яких функція зростає; спадає. Чи є дана функція парною; непарною?

267. **а)** $y = -\dfrac{2}{x}$; **б)** $y = \begin{cases} x+2, \text{ якщо } x < -1; \\ x^2, \quad \text{якщо } -1 \le x \le 1; \\ 2-x, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$

268. **а)** $y = \dfrac{4}{x}$; **б)** $y = \begin{cases} -x-2, \text{ якщо } x \le -1; \\ -1, \quad \text{якщо } -1 < x < 1; \\ x-2, \quad \text{якщо } x \ge 1. \end{cases}$

Парною чи непарною є функція:

269. **а)** $y = x^4 - 4x^2$; **б)** $y = x^3 - x$; **в)** $y = x^2 - 2x$;

г) $y = \dfrac{1}{x-1}$; **д)** $y = \dfrac{x^2+1}{x}$; **е)** $y = \dfrac{2}{x^2-4}$?

270. **а)** $y = 4x + x^3$; **б)** $y = x^4 - 1$; **в)** $y = x + 1$;

г) $y = \sqrt{x-1}$; **д)** $y = \dfrac{1}{x^2-1}$; **е)** $y = \dfrac{2x}{x^2+2}$?

Рівень В

271. Доведіть, що функція $y = x^2$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.

272. Доведіть, що функція $y = kx + b$ є зростаючою, якщо $k > 0$; спадною, якщо $k < 0$.

273. **а)** Функція $y = f(x)$ є зростаючою, а функція $y = g(x)$ — спадною. Доведіть, що рівняння $f(x) = g(x)$ має не більше одного кореня.

б) Розв'яжіть (усно) рівняння $\sqrt{x} = 10 - 9x$.

274. Областю визначення парної функції $y = f(x)$ є множина всіх дійсних чисел. Побудуйте графік цієї функції, якщо $f(x) = \sqrt{x}$ для $x \geq 0$. Задайте функцію $y = f(x)$ формулою на множині всіх дійсних чисел.

275. **а)** Функція $y = f(x)$ є парною і має непарну кількість нулів. Доведіть, що число 0 є нулем цієї функції.

б) Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $x^4 - 4x^2 + a^2 - 1 = 0$ має три корені. Знайдіть ці корені.

Вправи для повторення

276. Доведіть тотожність:

а) $\left(m - \dfrac{mn}{m+n}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{n}{m}\right) = m$;

б) $\left(\dfrac{1}{x-4y} + \dfrac{1}{x+4y}\right) : \left(\dfrac{x^2+16y^2}{x^2-16y^2} + 1\right) = \dfrac{1}{x}$.

277. Знайдіть значення виразу:

а) $2 + 4\sqrt{8} - 2\sqrt{32}$;

б) $\left(\sqrt{17} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{17} + \sqrt{3}\right)$;

в) $\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(3 - \sqrt{3}\right) - \sqrt{3}$;

г) $\sqrt{\left(5 - \sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2}$.

278. *Задача Бхаскари.* Доведіть, що $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

279. Відстань між пунктами A і B по шосе дорівнює 135 км, а залізницею — 120 км. Автомобіль виїхав з пункту A на 10 хв раніше, ніж поїзд, і прибув у пункт B на 8 хв пізніше. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 10 км/год менша від швидкості поїзда.

10. Перетворення графіків функцій

1. Графік функції $y = f(x) \pm n$, де $n > 0$. Нехай маємо графік функції $y = x^2$, а потрібно побудувати графіки функцій $y = x^2 + 2$ та $y = x^2 - 3$. Складемо таблицю значень цих функцій для деяких значень аргументу:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = x^2 + 2$	11	6	3	2	3	6	11
$y = x^2 - 3$	6	1	–2	–3	–2	1	6

Для будь-якого значення x значення функції $y = x^2 + 2$ на 2 більше, ніж відповідне значення функції $y = x^2$, а значення функції $y = x^2 - 3$ на 3 менше, ніж відповідне значення функції $y = x^2$. (З таблиці це легко побачити для вибраних значень x.)

Тому графік функції $y = x^2 + 2$ можна одержати за допомогою паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ уздовж осі y на 2 одиниці вгору (див. рис. 33). Графік функції $y = x^2 - 3$ можна одержати за допомогою паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ уздовж осі y на 3 одиниці вниз.

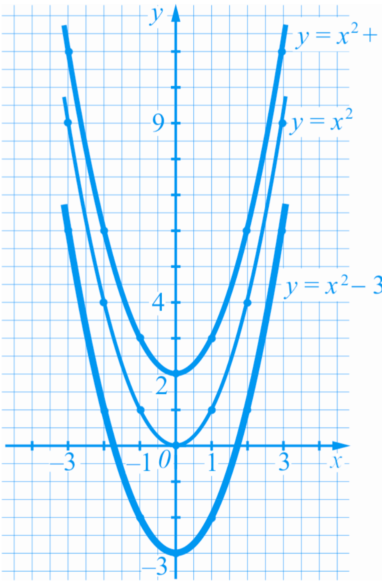


Рис. 33

Якщо функцію $y = x^2$ записати у вигляді $y = f(x)$, то функції $y = x^2 + 2$ та $y = x^2 - 3$ будуть функціями виду $y = f(x) \pm n$, де $n > 0$, а саме: $y = f(x) + 2$ та $y = f(x) - 3$.

Узагалі, *графік функції $y = f(x) + n$, де $n > 0$, можна одержати із графіка функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі y на n одиниць угору; графік функції $y = f(x) - n$, де $n > 0$, можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі y на n одиниць униз.*

2. Графік функції $y = f(x \pm m)$, де $m > 0$. Нехай маємо графік функції $y = x^2$, а потрібно побудувати графіки функцій $y = (x - 3)^2$ і $y = (x + 2)^2$. Складемо таблицю значень цих функцій для деяких значень аргументу:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$			9	4	1	0			
$y = (x - 3)^2$						9	4	1	0
$y = (x + 2)^2$	9	4	1	0					

З таблиці видно, що графік функції $y = (x - 3)^2$ можна одержати із графіка функції $y = x^2$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі x на 3 одиниці праворуч (рис. 34).

Графік функції $y = (x + 2)^2$ можна одержати із графіка функції $y = x^2$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі x на 2 одиниці ліворуч (рис. 34).

Якщо функцію $y = x^2$ записати у вигляді $y = f(x)$, то функції $y = (x - 3)^2$ та $y = (x + 2)^2$ будуть функціями виду $y = f(x \pm m)$, де $m > 0$, а саме: $y = f(x - 3)$ та $y = f(x + 2)$.

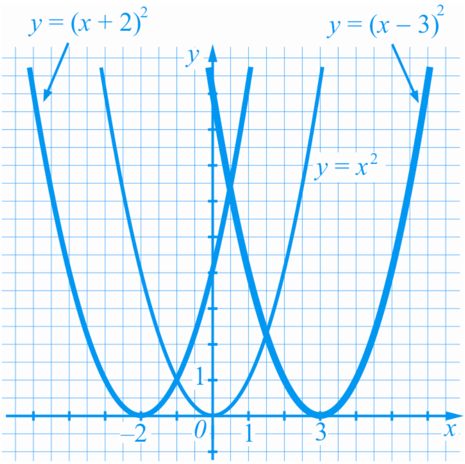


Рис. 34

Узагалі, *графік функції $y = f(x - m)$, де $m > 0$, можна одержати із графіка функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі x на m одиниць праворуч; графік функції $y = f(x + m)$, де $m > 0$, можна одержати із графіка функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі x на m одиниць ліворуч.*

3. Графік функції $y = f(x \pm m) \pm n$, де $m > 0$, $n > 0$.

Розглянемо функцію $y = (x - 2)^2 - 1$. Її графік можна одержати, якщо графік функції $y = x^2$ паралельно перенести вздовж осі x на 2 одиниці праворуч, а потім уздовж осі y на 1 одиницю вниз (рис. 35).

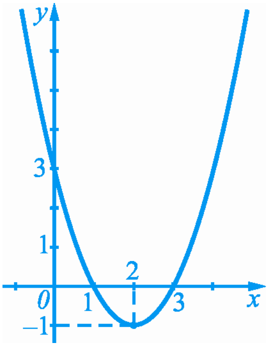


Рис. 35

4. Графік функції $y = -f(x)$. Нехай маємо графік функції $y = x^2$, а потрібно побудувати графік функції $y = -x^2$. Складемо таблицю значень цих функцій для деяких значень аргументу:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = -x^2$	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9

Значення функції $y = -x^2$ протилежні відповідним значенням функції $y = x^2$. Тому кожна точка графіка функції $y = -x^2$ симетрична відповідній точці графіка функції $y = x^2$ відносно осі x. Наприклад, точка (2; –4) графіка функції $y = -x^2$ симетрична точці (2; 4) графіка функції $y = x^2$ відносно осі x. Отже, графік функції $y = -x^2$ можна одержати із графіка функції $y = x^2$ за допомогою симетрії відносно осі x (рис. 36).

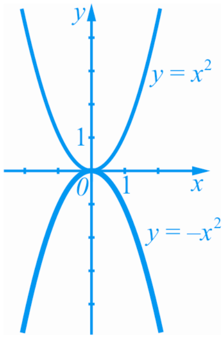


Рис. 36

Якщо функцію $y = x^2$ записати у вигляді $y = f(x)$, то функція $y = -x^2$ буде функцією виду $y = -f(x)$.

Узагалі, *графік функції $y = -f(x)$ можна одержати із графіка функції $y = f(x)$ за допомогою симетрії відносно осі x.*

5. Графік функції $y = a\,f(x)$, де $a > 0$. Нехай маємо графік функції $y = x^2$, а потрібно побудувати графіки функцій $y = 2x^2$ і $y = \frac{1}{2}x^2$. Складемо таблицю значень цих функцій для деяких значень аргументу:

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Для будь-якого значення x значення функції $y = 2x^2$ удвічі більше, ніж відповідне значення функції $y = x^2$, а значення функції $y = \frac{1}{2}x^2$ удвічі менше, ніж відповідне значення функції $y = x^2$. (З таблиці це легко побачити для вибраних значень x.)

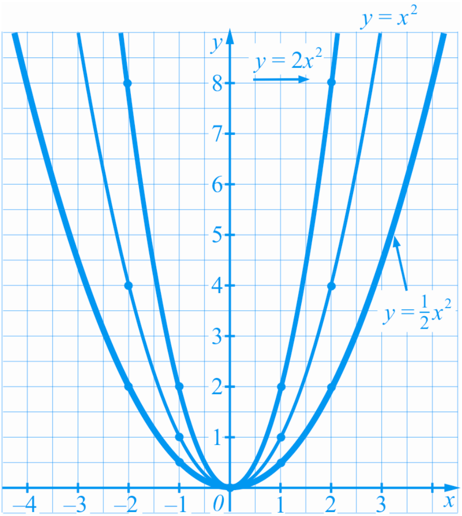


Рис. 37

Тому графік функції $y = 2x^2$ можна одержати із графіка функції $y = x^2$, розтягнувши останній від осі x удвічі, а графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ можна одержати із графіка функції $y = x^2$, стиснувши останній до осі x удвічі (див. рис. 37).

Якщо функцію $y = x^2$ записати у вигляді $y = f(x)$, то функції $y = 2x^2$ та $y = \frac{1}{2}x^2$ будуть функціями виду $y = a\,f(x)$, де $a > 0$, а саме: $y = 2f(x)$ і $y = \frac{1}{2}f(x)$.

Узагалі, *графік функції* $y = a\,f(x)$, *де* $a > 0$, *можна одержати із графіка функції* $y = f(x)$, *розтягнувши останній від осі x в a разів, якщо* $a > 1$, *і стиснувши його до осі x в* $\dfrac{1}{a}$ *разів, якщо* $0 < a < 1$.

Для тих, хто хоче знати більше

6. Графік функції $y = |f(x)|$. За означенням модуля числа маємо:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \ge 0; \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отже, якщо $f(x) \ge 0$, то значення функцій $y = |f(x)|$ та $y = f(x)$ однакові, якщо $f(x) < 0$, то значення цих функцій є протилежними числами. Тому графік функції $y = |f(x)|$ можна одержати так: будуємо графік функції $y = f(x)$ і ту його частину, яка розташована нижче від осі x, симетрично відображаємо відносно цієї осі.

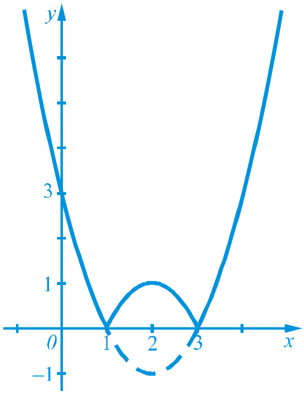


Рис. 38

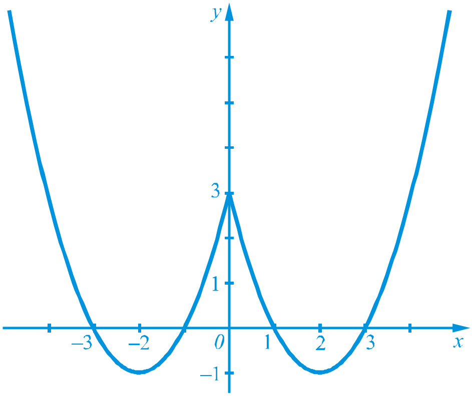


Рис. 39

На рисунку 38 зображено графік функції $y = |(x-2)^2 - 1|$. Порівняйте його із графіком функції $y = (x-2)^2 - 1$ (рис. 35).

7. Графік функції $y = f(|x|)$. Зазначимо дві властивості даної функції.

1) Функція є парною. Справді, з тотожності $|-x| = |x|$ випливає, що для будь-якого значення x з області її визначення виконується рівність $f(|-x|) = f(|x|)$. Отже, графік функції симетричний відносно осі y.

2) Якщо $x \ge 0$, то $y = f(|x|) = f(x)$. Тому для $x \ge 0$ графік функції $y = f(|x|)$ збігається із графіком функції $y = f(x)$.

Таким чином, графік функції $y = f(|x|)$ можна побудувати так: будуємо частину графіка функції $y = f(x)$ для $x \geq 0$; виконавши симетрію побудованої частини відносно осі y, одержуємо другу частину графіка для $x \leq 0$.

На рисунку 39 зображено графік функції $y = (|x| - 2)^2 - 1$. Порівняйте його із графіком функції $y = (x - 2)^2 - 1$ (рис. 35).

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Побудувати графік функції $y = \sqrt{x+2} + 1$.

● Будуємо графік функції $y = \sqrt{x}$. Паралельно переносимо його вздовж осі x на 2 одиниці ліворуч, а потім уздовж осі y на 1 одиницю вгору. Одержуємо шуканий графік (рис. 40). ●

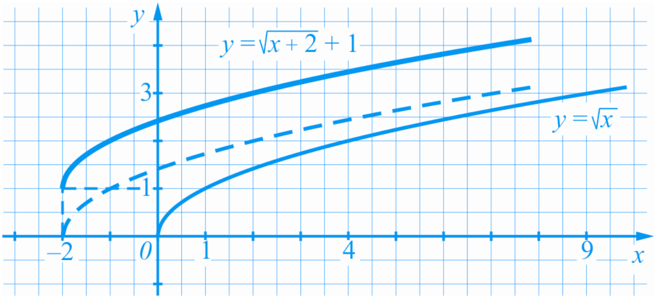


Рис. 40

Вправа 2. Побудувати графік функції $y = 2 - x^2$.

● Послідовно будуємо графіки таких функцій:

1) $y = x^2$; 2) $y = -x^2$; 3) $y = -x^2 + 2$, тобто $y = 2 - x^2$.

Графік функції $y = 2 - x^2$ зображено на рисунку 41. ●

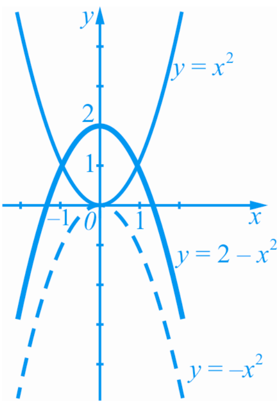


Рис. 41

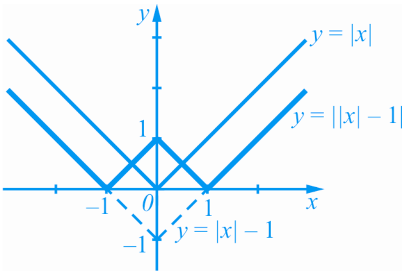


Рис. 42

Вправа 3. Побудувати графік функції $y = ||x| - 1|$.

● Послідовно будуємо графіки таких функцій:

1) $y = |x|$; 2) $y = |x| - 1$; 3) $y = ||x| - 1|$.

Графік функції $y = ||x| - 1|$ зображено на рисунку 42. ●

Усно

280. На рисунку 43а зображено графіки функцій $y = f(x)$, $y = f(x) + a$ та $y = f(x) - b$, а на рисунку 43б — графіки функцій $y = f(x)$, $y = f(x - a)$ та $y = f(x + b)$. Знайдіть a і b.

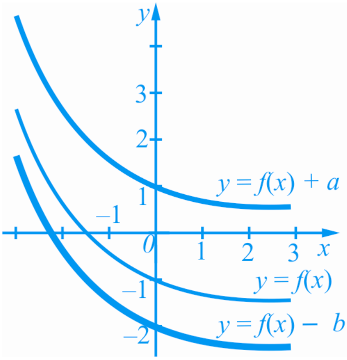


Рис. 43 а

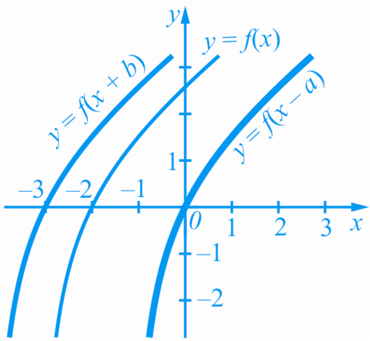


Рис. 43 б

Рівень А

Побудуйте графік функції:

281. **а)** $y = x^2 + 1$; **б)** $y = \sqrt{x} - 3$; **в)** $y = (x - 3)^2$; **г)** $y = (x + 1)^2$.

282. **а)** $y = \sqrt{x} + 2$; **б)** $y = x^2 - 5$; **в)** $y = (x - 1)^2$.

Рівень Б

Побудуйте графік функції:

283. **а)** $y = (x - 1)^2 + 2$; **б)** $y = (x + 3)^2 - 1$;

в) $y = \sqrt{x-2} - 1$; **г)** $y = \sqrt{x+4} + 4$.

284. **а)** $y = 4 - x^2$; **б)** $y = -(x + 2)^2$;

в) $y = -(x + 3)^2 + 4$; **г)** $y = -\sqrt{x-4} + 2$.

285. **а)** $y = (x - 2)^2 - 3$; **б)** $y = \sqrt{x+1} + 1$;

в) $y = -(x - 3)^2$; **г)** $y = -(x + 1)^2 + 5$.

286. **а)** $y = \dfrac{4}{x} + 2$; **б)** $y = \dfrac{4}{x-2}$.

287. **а)** $y = 2\sqrt{x}$; **б)** $y = \dfrac{1}{4}x^2$.

288. **а)** $y = \dfrac{1}{x} - 2$; **б)** $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$.

289. Побудуйте графік функції $y = (x + 3)^2 - 1$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) усі значення x, для яких функція набуває від'ємних значень;

в) проміжок, на якому функція спадає.

290. Побудуйте графік функції $y = (x - 2)^2 - 4$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) усі значення x, для яких функція набуває додатних значень;

в) проміжок, на якому функція зростає.

291. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \sqrt{x+1}$ та $y = -x^2 + 2{,}5$. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x+1} = -x^2 + 2{,}5$?

Розв'яжіть графічно рівняння:

292. **а)** $(x-2)^2 = \sqrt{x}$; **б)** $\dfrac{4}{x+1} = x - 2$.

293. $\sqrt{x+3} = 4 - 2x$.

Рівень B

294. Побудуйте графік функції:

а) $y = |x^2 - 4|$; **б)** $y = |(x + 1)^2 - 1|$; **в)** $y = (|x| - 1)^2$;

г) $y = ||x| - 2|$; **д)** $y = 3 - |x - 3|$; **е)** $y = |3 - |x - 3||$.

295. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $|1 - x^2| = a$ має три корені.

296. Скільки коренів має рівняння $1 - |1 - |x|| = a$ залежно від значень параметра a?

Вправи для повторення

297. Розкладіть на множники:

а) $2a - 6 + ab - 3b$; **б)** $x^2 + xy - 2x - 2y$.

298. Нехай x_1 та x_2 — корені рівняння $2x^2 - 7x + 2 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2$.

299*. Не розв'язуючи рівняння $x^2 + 4x - 7 = 0$, складіть зведене квадратне рівняння, корені якого на одиницю менші від коренів даного рівняння.

300. Дві вантажівки одночасно виїхали з фабрики до бази, розташованої на відстані 96 км від фабрики. Перша вантажівка прибула до бази на 10 хв раніше, ніж друга. Знайдіть швидкість першої вантажівки, якщо вона на 8 км/год більша від швидкості другої.

11. Функція $y = ax^2$

Розглянемо приклад. Нехай тіло вільно падає. Шлях S, який тіло проходить за час t, можна знайти за формулою

$$S = \frac{gt^2}{2},$$

де g — прискорення вільного падіння ($g \approx 9{,}8$ м/с^2).

Перейшовши до прийнятих позначень аргументу і функції, матимемо функцію, що задається формулою виду $y = ax^2$, де $a \neq 0$.

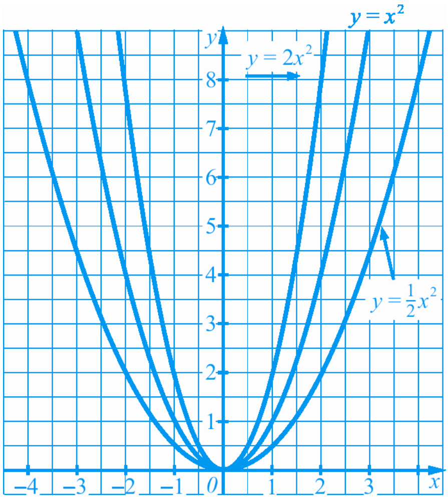


Рис. 44

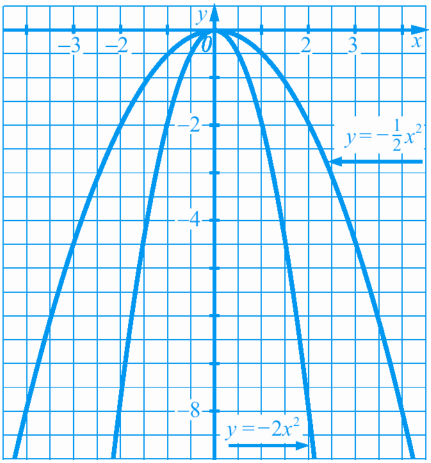


Рис. 45

На рисунках 44 і 45 зображено графіки функцій $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$, які є окремими випадками функції $y = ax^2$, якщо a дорівнює 1, 2, $\frac{1}{2}$, –2 і $-\frac{1}{2}$.

Графік функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$, як і графік функції $y = x^2$, називають *параболою*.

Функція $y = ax^2$, де $a \neq 0$, має такі властивості:

1. *Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел.*

2. *Якщо* $a > 0$, *то областю значень функції є проміжок* $[0; +\infty)$; *якщо* $a < 0$ — *проміжок* $(-\infty; 0]$.

3. *Графік функції — парабола.*

4. *Якщо* $x = 0$, *то* $y = 0$. Графік проходить через точку (0; 0). Цю точку називають *вершиною* параболи.

5. Якщо $a > 0$, то усі точки параболи, крім її вершини, розміщені вище від осі x; якщо $a < 0$ — нижче від цієї осі. Кажуть: *якщо* $a > 0$, *то вітки параболи напрямлені вгору*; *якщо* $a < 0$ — *донизу*.

6. *Якщо* $a > 0$, *то функція зростає на проміжку* $[0; +\infty)$ *і спадає на проміжку* $(-\infty; 0]$. *Якщо* $a < 0$, *то функція зростає на проміжку* $(-\infty; 0]$ *і спадає на проміжку* $[0; +\infty)$.

Доведення властивості 6 подано у рубриці «Для тих, хто хоче знати більше».

7. Функція $y = ax^2$ є *парною*, бо для будь-якого значення x виконується рівність $a(-x)^2 = ax^2$. *Графік функції симетричний відносно осі* y.

Для тих, хто хоче знати більше

Доведемо, що функція $y = ax^2$, де $a > 0$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

Нехай x_1 та x_2 — два довільні невід'ємні значення аргументу, до того ж, $x_2 > x_1$, а y_1 та y_2 — відповідні їм значення функції, тобто $y_1 = ax_1^2$, $y_2 = ax_2^2$. Покажемо, що $y_2 > y_1$. Для цього розглянемо різницю:

$$y_2 - y_1 = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2^2 - x_1^2) = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Оскільки $0 \le x_1 < x_2$, то $x_2 - x_1 > 0$ та $x_2 + x_1 > 0$. Урахувавши, що $a > 0$, матимемо:

$$a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0; \quad y_2 - y_1 > 0; \quad y_2 > y_1.$$

Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Отже, якщо $a > 0$, то функція $y = ax^2$ на проміжку $[0; +\infty)$ зростає.

Те, що функція $y = ax^2$, де $a > 0$, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, доводимо аналогічно.

Усно

301. Які властивості має функція:

а) $y = 2x^2$; **б)** $y = -2x^2$?

Рівень А

302. Чи належить графіку функції $y = 8x^2$ точка: $A(2; 32)$; $B(3; 24)$; $C(-1; -8)$?

Побудуйте графік функції:

303. **а)** $y = 3x^2$; **б)** $y = \frac{1}{3}x^2$; **в)** $y = -1{,}5x^2$.

304. **а)** $y = 2{,}5x^2$; **б)** $y = -\frac{1}{4}x^2$.

305. Побудуйте графік функції $y = -2{,}5x^2$. Вкажіть проміжки, на яких функція зростає; спадає.

306. Побудуйте графік функції $y = 1{,}5x^2$. Вкажіть проміжки, на яких функція зростає; спадає.

Рівень Б

307. Графік функції $y = ax^2$ проходить через точку $M(2; -2)$. Побудуйте графік цієї функції.

308. Графік функції $y = ax^2$ проходить через точку $N(0{,}5; 1)$. Чи проходить цей графік через точку $K(-4; 64)$?

Розв'яжіть графічно рівняння:

309. **а)** $-\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{x}$; **б)** $\frac{1}{8}x^2 = \sqrt{x}$.

310. $\frac{1}{2}x^2 = \frac{4}{x}$.

Рівень В

311. Побудуйте графік функції:

а) $y = x|x|$; **б)** $y = \dfrac{2x^4 - 2x^2}{x^2 - 1}$.

312. Доведіть, що функція $y = ax^2$, де $a < 0$, спадає на проміжку $[0; +\infty)$.

Вправи для повторення

313. Побудуйте графік функції:

а) $y = (x - 1{,}5)^2$; **б)** $y = (x + 1)^2 - 2$.

314. Доведіть нерівність:

а) $x^2 + 4x + 5 > 0$; **б)** $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$.

315*. Частину шляху автомобіль рухався зі швидкістю a км/год. Решту шляху він їхав удвічі довше зі швидкістю b км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля.

316*. Третину шляху автомобіль їхав зі швидкістю a км/год, а решту — зі швидкістю b км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля.

12. Квадратична функція

1. Поняття квадратичної функції. Розглянемо приклад. Нехай тіло рухається прямолінійно вздовж осі x із прискоренням a_x. Якщо у початковий момент часу воно мало швидкість v_{0x} і перебувало в точці з координатою x_0, то координату x тіла у момент часу t можна знайти за формулою

$$x = \frac{a_x t^2}{2} + v_{0x} t + x_0.$$

Зокрема, якщо $a_x = 4$, $v_{0x} = 7$, $x_0 = 50$, то

$$x = 2t^2 + 7t + 50.$$

Формула $x = 2t^2 + 7t + 50$ задає функцію, яку називають *квадратичною*.

Означення | ***Квадратичною функцією*** **називають функцію, яку можна задати формулою виду $y = ax^2 + bx + c$, де x — незалежна змінна, a, b і c — деякі числа, до того ж, $a \neq 0$.**

Так, $y = 3x^2 - 2x - 1$, $y = x^2 + 3x$, $y = -2x^2 + 1$, $y = x^2$, $y = -1{,}2x^2$ — квадратичні функції.

2. Графік квадратичної функції. З'ясуємо спочатку, що є графіком квадратичної функції $y = 2x^2 - 8x + 7$. Для цього перетворимо квадратний тричлен $2x^2 - 8x + 7$ так:

$$2x^2 - 8x + 7 = 2\left(x^2 - 4x + \frac{7}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2\cdot 2\cdot x + 2^2 - 2^2 + \frac{7}{2}\right) =$$

$$= 2\left((x-2)^2 - \frac{1}{2}\right) = 2(x-2)^2 - 1.$$

Записавши квадратний тричлен $2x^2 - 8x + 7$ у вигляді $2(x - 2)^2 - 1$, кажуть, що з даного квадратного тричлена виділили квадрат двочлена $x - 2$.

Взагалі, *виділити із квадратного тричлена* $ax^2 + bx + c$ *квадрат двочлена означає записати його у вигляді* $a(x - m)^2 + n$, *де* m *і* n *— деякі числа*.

Отже, квадратичну функцію $y = 2x^2 - 8x + 7$ можна задати формулою $y = 2(x - 2)^2 - 1$. Тому її графік можна одержати, якщо графік функції $y = 2x^2$ паралельно перенести вздовж осі x на 2 одиниці праворуч, а потім уздовж осі y на 1 одиницю вниз (рис. 46).

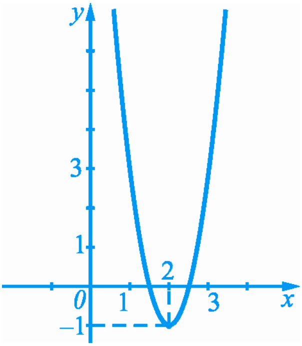


Рис. 46

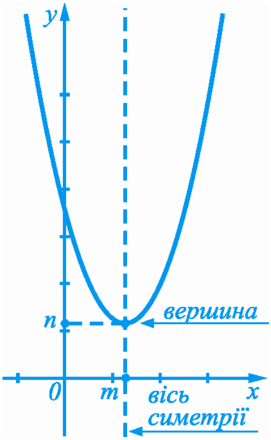


Рис. 47

Розглянемо загальний випадок. Нехай маємо квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$. Виділимо із квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двочлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x\cdot\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Тому

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n,}$$

де $\boldsymbol{m = -\frac{b}{2a}}$, $\boldsymbol{n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$.

Отже, графік функції $y = ax^2 + bx + c$ можна одержати із графіка функції $y = ax^2$ за допомогою двох паралельних перенесень уздовж осей координат (див. рис. 47). *Графіком функції* $y = ax^2 + bx + c$ *є парабола*.

Точку $(m; n)$, де $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, називають *вершиною* цієї параболи. Її *віссю симетрії* є пряма $x = m$. *Якщо* $a > 0$, *то вітки параболи напрямлені вгору*; *якщо* $a < 0$, — *вниз*.

Координати вершини параболи можна шукати за формулами

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = -\frac{D}{4a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac,$$

або за формулами

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = am^2 + bm + c$$

(ордината n вершини параболи є значенням квадратичної функції для $x = m$).

3. Побудова графіка квадратичної функції. Розглянемо квадратичну функцію

$$y = x^2 + 4x + 3.$$

Оскільки $x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 3 = (x + 2)^2 - 1$, то графік цієї функції можна одержати із графіка функції $y = x^2$ за допомогою двох паралельних перенесень: уздовж осі x на 2 одиниці ліворуч й уздовж осі y на 1 одиницю вниз (див. рис. 48).

Параболу, яка є графіком функції $y = x^2 + 4x + 3$, можна побудувати й так:

1) знаходимо координати вершини параболи:

$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$ — абсциса вершини;

$n = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3 = -1$ — ордината вершини.

2) знаходимо значення функції для кількох цілих значень x, близьких до абсциси вершини:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1
y	8	3	0	–1	0	3	8

3) відмічаємо знайдені точки на координатній площині й сполучаємо їх плавною лінією. Одержуємо шукану параболу (рис. 49).

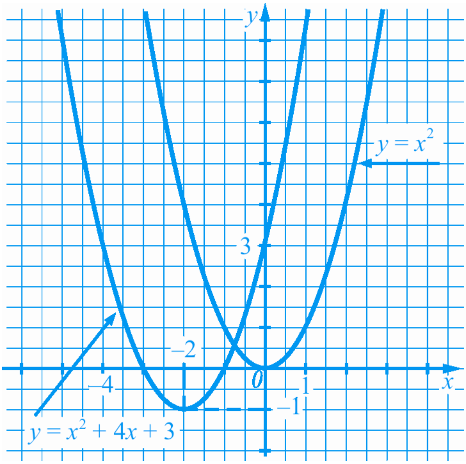


Рис. 48

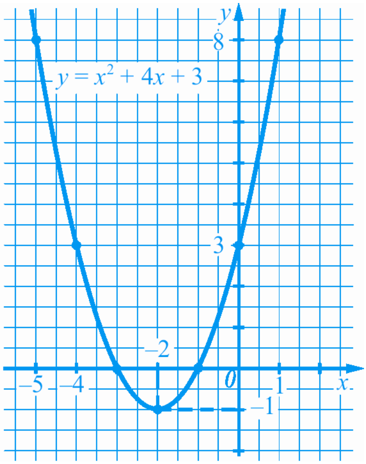
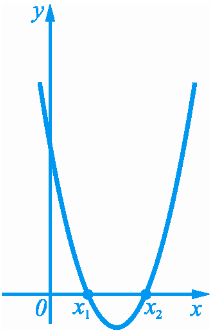
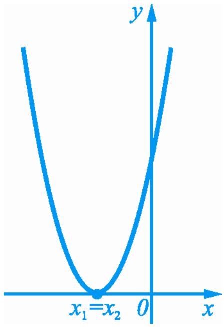
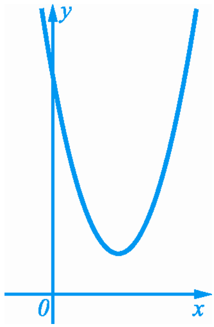
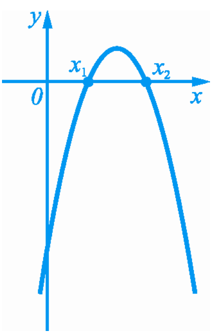
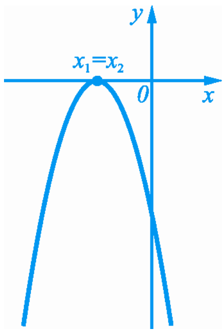
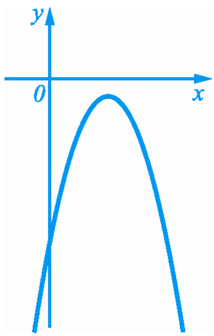


Рис. 49

4. Положення графіка квадратичної функції. У таблиці показано положення графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ залежно від знаків коефіцієнта a та дискримінанта D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Якщо $D > 0$, то парабола перетинає вісь x у двох точках; якщо $D = 0$, — дотикається до цієї осі; якщо $D < 0$, — не має з віссю x спільних точок.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Побудувати графік функції $y = -2x^2 + 8x - 9$. Користуючись графіком, знайти:

а) область значень функції;

б) проміжок, на якому функція зростає; спадає.

● Знайдемо координати вершини параболи:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2\cdot(-2)} = 2; \quad n = -2\cdot 2^2 + 8\cdot 2 - 9 = -1.$$

Складемо таблицю значень функції для кількох значень x:

x	0	1	2	3	4
y	–9	–3	–1	–3	–9

Відмітивши точки, координати яких подано в таблиці, на координатній площині й сполучивши їх плавною лінією, одержуємо шуканий графік (рис. 50).

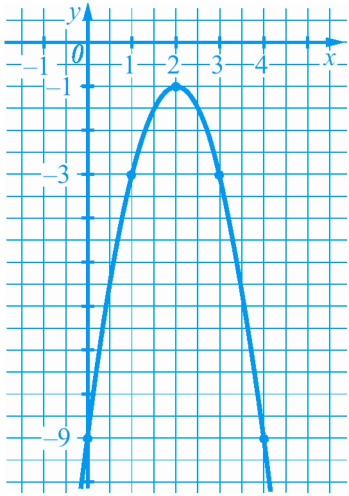


Рис. 50

Із графіка маємо: **а)** областю значень функції є проміжок $(-\infty; -1]$; **б)** функція зростає на проміжку $(-\infty; 2]$ і спадає на проміжку $[2; +\infty)$. ●

Вправа 2. Побудувати графік функції $y = (x - 1)(x - 3)$.

● Графіком даної функції є парабола.

Нулями функції $y = (x - 1)(x - 3)$ є $x_1 = 1$ та $x_2 = 3$. Ці нулі мають бути симетричними відносно осі параболи, тому абсцисою її вершини має бути $m = \frac{1+3}{2} = 2$ (середина відрізка з кінцями у нулях функції).

Знаходимо ординату вершини:

$$n = (2 - 1)(2 - 3) = -1.$$

Вісь y парабола перетинає в точці $(0; 3)$. Графік функції зображено на рисунку 51. ●

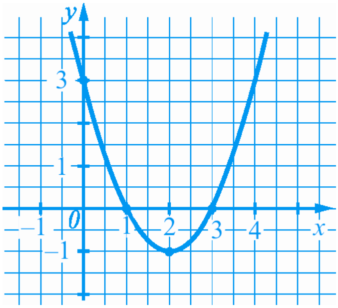


Рис. 51

Вправа 3. Довести, що функція $y=\frac{1}{2}x^2-3x+5$ набуває лише додатних значень та знайти найменше значення функції.

● Знаходимо координати вершини параболи $y=\frac{1}{2}x^2-3x+5$:

$m=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\cdot\frac{1}{2}}=3$ — абсциса вершини; $n=\frac{1}{2}\cdot 3^2-3\cdot 3+5=\frac{1}{2}$ — ордината вершини.

Оскільки вітки параболи напрямлені вгору, то значення квадратичної функції для $x=m=3$ є найменшим. Це найменше значення $n=\frac{1}{2}$ є додатним, тому квадратична функція набуває лише додатних значень. ●

Усно

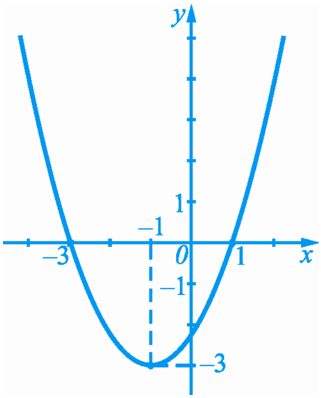


Рис. 52

317. На рисунку 52 зображено параболу, яка є графіком деякої квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Вкажіть:
а) знак коефіцієнта a;
б) координати вершини параболи;
в) вісь параболи;
г) нулі квадратичної функції;
д) проміжки знакосталості функції;
е) проміжок, на якому квадратична функція зростає; спадає;
є) найменше значення квадратичної функції і значення x, для якого функція набуває найменшого значення;
ж) знак коефіцієнта c.

318. Угору чи вниз напрямлені вітки параболи, яка є графіком функції:
а) $y = 2x^2 – 5x + 4$; **б)** $y = –5x^2 + 2x + 3$; **в)** $y = –x^2 + x$?

Рівень А

319. Знайдіть координати вершини параболи $y = 2x^2 - 6x + 3$. Чи перетинає ця парабола вісь x?

320. Знайдіть нулі функції $y = x^2 - 2x - 8$. Чи перетинає графік цієї функції вісь x?

Побудуйте графік функції:

321. **а)** $y = x^2 + 2x - 3$; **б)** $y = -x^2 + 4x$; **в)** $y = 2x^2 - 4x + 3$.

322. **а)** $y = x^2 - 2x + 2$; **б)** $y = -x^2 - 4x - 3$; **в)** $y = -2x^2 + 8x$.

Рівень Б

Побудуйте графік функції:

323. **а)** $y = 3x^2 + 6x - 5$; **б)** $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$;

в) $y = -2x^2 - 4x + 6$; **г)** $y = (x + 1)(x - 3)$.

324. **а)** $y = 4x^2 - 4x - 3$; **б)** $y = -3x^2 - 6x$;

в) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$; **г)** $y = (x + 4)(x + 2)$.

325. Побудуйте графік функції $y = x^2 + 6x + 5$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) усі значення x, для яких функція набуває від'ємних значень;

в) проміжок, на якому функція спадає.

326. Побудуйте графік функції $y = 4x - x^2$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) усі значення x, для яких функція набуває додатних значень;

в) проміжок, на якому функція зростає.

Знайдіть координати точок перетину прямої та параболи:

327. **а)** $3x - y = 4$; $y = 2x^2 - 6$; **б)** $2x + y = -7$; $y = -3x^2 - 9x + 3$.

328. $3x + y = -2$; $y = 4x^2 + 5x + 1$.

Розв'яжіть графічно рівняння:

329. **а)** $x^2 - 2x + 2 = \frac{1}{x}$; **б)** $-x^2 + 3x + 6 = \sqrt{x}$.

330. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x = \sqrt{x}$.

331. Доведіть, що функція $y = x^2 + 5x + 7$ набуває лише додатних значень. Знайдіть найменше значення цієї функції.

332. Для якого значення x тричлен $-3x^2 + 6x + 2$ набуває найбільшого значення? Знайдіть це найбільше значення.

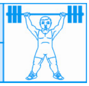
333. Знайдіть найменше значення функції $y = 2x^2 - 6x - 2$.

334. Доведіть, що тричлен $-2x^2 + 7x - 7$ набуває лише від'ємних значень. Знайдіть найбільше значення цього тричлена.

335. Доведіть нерівність:

а) $3a^2 - 6a + 4 > 0$; **б)** $-2c^2 + 8c - 9 < 0$.

Рівень В



336. Для яких значень a і b вершиною даної параболи є дана точка A?

а) $y = x^2 + bx + c$; $A(-4; 2)$; **б)** $y = ax^2 + bx - 1$; $A\left(1; \frac{1}{3}\right)$.

337. Побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{x^3 - 4x^2 + x}{x}$; **б)** $y = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 4}$;

в) $y = \frac{x^3 + 8}{x + 2} - 5$; **г)** $y = x^2 - 4|x| + 3$;

д) $y = |2x^2 - 8x + 6|$; **е)** $y = |-2x^2 + 8|x| - 6|$.

338. Знайдіть усі значення a, для яких парабола $y = 1{,}5x^2 + 6x + 2a$ розташована над віссю x.

339. Під кутом до горизонту кинуто камінь, який, рухаючись по параболі, упав через 4 с на відстані 24 м від початкового положення. На якій висоті був камінь через 1 с після кидка, якщо найбільша висота, на яку він піднявся, дорівнювала 6 м?

340. Щоб залишати на ніч корів на пасовищі, пастухи вирішили обгородити на ньому ділянку прямокутної форми сіткою завдовжки 200 м. Якими мають бути сторони ділянки, щоб її площа була найбільшою?

341. **а)** Знайдіть найменше значення функції $y = \sqrt{4x-2} + 2x^2 - 2x$.

б) Розв’яжіть рівняння $\sqrt{4x-2} + 2x^2 - 2x = -0,5 - \sqrt{2x^2 - x}$.

342. **а)** Знайдіть найбільше значення виразу $\dfrac{4}{4x^2 - 8x + 5}$.

б) Розв’яжіть рівняння $\dfrac{4}{4x^2 - 8x + 5} = 4 + \sqrt{x-1}$.

Вправи для повторення

343. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{(2a^3b)^2 \cdot 4ab^2}{(2ab)^5}$; **б)** $\dfrac{2x^3y^2 \cdot (-3xy^2)^3}{18x^5y^{10}}$.

344. Розв’яжіть нерівність:

а) $4x - 9 > 2x + 7$; **б)** $x^2 + x - 1 > x^2 + 5x + 15$;

в) $\dfrac{x-3}{6} \le x - 4$; **г)** $(2x - 4)(x + 5) < 0$.

345. Розв’яжіть рівняння:

а) $3x^2 + 2x - 1 = x^2 - 6x - 9$; **б)** $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$;

в)* $x^2 - 3|x| - 4 = 0$; **г)*** $x|x| - 4x + 3 = 0$.

346. Два будівельники, працюючи разом, вимурували стіни будинку за 20 днів. За скільки днів вимурував би стіни кожний з них, працюючи окремо, якщо відомо, що перший може це зробити на 9 днів швидше, ніж другий?

347*. У деякому місті кожний десятий математик — музикант, а кожний одинадцятий музикант — математик. Кого в місті більше — музикантів чи математиків?

348*. Яких значень може набувати вираз $x + \dfrac{1}{2x}$, якщо $4x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 12$?

349*. Доведіть, що рівняння $ax^2 + (a + b)x + (b - a) = 0$ має хоча б один корінь для будь-яких значень a і b.

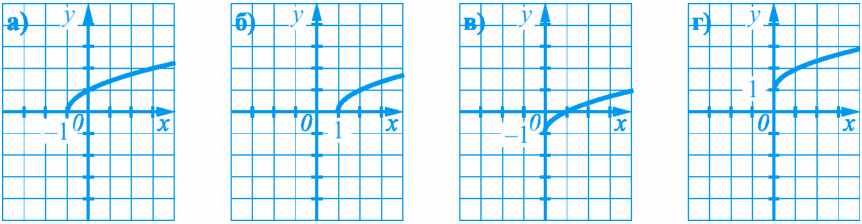
Завдання для самоперевірки № 2

Рівень 1

1. Чому дорівнює значення функції $f(x) = 2x^2 - 5$, якщо $x = 4$:
а) 11; **б)** 3; **в)** 27; **г)** –27?

2. Нулем функції $y = 5x + 8$ є:
а) 1,6; **б)** –1,6; **в)** –16; **г)** –0,625.

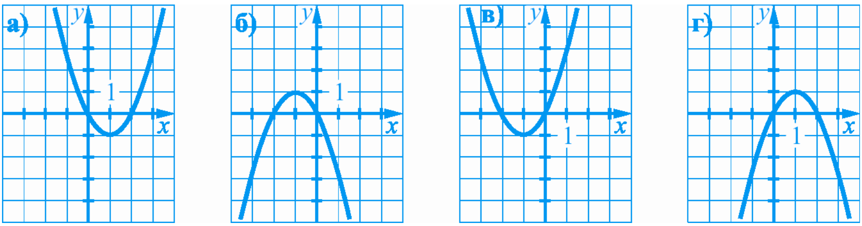
3. Який із графіків є графіком функції $y = \sqrt{x} - 1$?



4. Вкажіть твердження, правильні для функції $y = 3x^2$:
а) графіком функції є парабола, вітки якої напрямлені вниз;
б) функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$;
в) функція спадає на проміжку $[0; +\infty)$;
г) графік функції симетричний відносно осі y.

5. Вкажіть координати вершини параболи $y = x^2 - 4x + 6$:
а) (–4; 6); **б)** (4; 6); **в)** (2; 2); **г)** (–2; 18).

6. На якому рисунку зображено графік функції $y = x^2 - 2x$?



Рівень 2

7. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{5 - 2x}$.

8. Знайдіть нулі функції $y = x^2 + 6x - 16$.

9. Побудуйте графік функції $y = (x - 2)^2 - 1$. Користуючись графіком, знайдіть область значень функції.

10. Чи проходить графік функції $y = -2x^2$ через точку (1,5; 4,5)?

11. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 2x$. Користуючись графіком, знайдіть проміжок, на якому функція зростає; спадає.

Рівень 3

12. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{12-2x} + \sqrt{4x+6}$.

13. Чи належить число 3 області значень функції $y = x^2 + 15x + 48$?

14. Побудуйте графік функції $y = -2x^2 + 4x + 6$. Користуючись графіком, знайдіть: **а)** область значень функції; **б)** усі значення x, для яких функція набуває від'ємних значень; **в)** проміжок, на якому функція спадає.

15. Для якого значення x функція $y = 3x^2 + 12x - 20$ набуває найменшого значення? Знайдіть це найменше значення.

16. Доведіть нерівність $3x^2 - 3x + 1 > 0$.

Рівень 4

17. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{9-x} + \dfrac{\sqrt{x}}{3x^2 - 19x + 6}$.

18. Доведіть, що функція $y = \dfrac{3}{x}$ спадає на проміжку $(0; +\infty)$.

19. Побудуйте графік функції $y = |2x - 4| - 4$. Користуючись графіком, знайдіть: **а)** область значень функції; **б)** усі значення x, для яких функція набуває від'ємних значень.

20. Знайдіть найбільше значення функції $y = \dfrac{4}{2x^2 - 8x + 9}$.

21. За допомогою графіків функцій встановіть, чи має корені рівняння $-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = \sqrt{x+1}$.

13. Нерівності другого степеня з однією змінною

Нерівності виду

$$ax^2 + bx + c > 0,$$
$$ax^2 + bx + c < 0,$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0,$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0,$$

де x — змінна, a, b, c — деякі числа, до того ж, $a \neq 0$, називають *нерівностями другого степеня з однією змінною* (або *квадратними нерівностями*).

Наприклад, $2x^2 - 3x + 1 > 0$, $-x^2 + 4x + 5 \leq 0$ — квадратні нерівності.

Розв'язування квадратних нерівностей можна звести до знаходження проміжків, на яких квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває додатних, недодатних, від'ємних або невід'ємних значень. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $2x^2 + x - 1 > 0$.

● Розглянемо квадратичну функцію $y = 2x^2 + x - 1$. Її графіком є парабола, вітки якої напрямлені вгору. З'ясуємо, чи перетинає парабола вісь x. Для цього розв'яжемо рівняння $2x^2 + x - 1 = 0$. Його коренями є $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Отже, парабола перетинає вісь x у двох точках з абсцисами -1 та $\frac{1}{2}$.

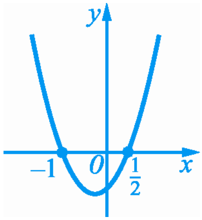


Рис. 53

Схематично зображуємо параболу на координатній площині (рис. 53). З побудованого графіка бачимо, що функція набуває додатних значень, якщо x належить проміжку $(-\infty; -1)$ або проміжку $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ (на цих проміжках парабола розміщена вище від осі x). Отже, множиною розв'язків заданої нерівності $2x^2 + x - 1 > 0$ є $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Відповідь. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. ●

Використовуючи схематичне зображення параболи $y = 2x^2 + x - 1$ (див. рис. 53), можна записати й множини розв'язків таких нерівностей.

Нерівність	*Множина розв'язків*	*Коментар.* У множину розв'язків включено усі значення x, для яких функція $y = 2x^2 + x - 1$ набуває:
$2x^2 + x - 1 \geq 0$	$(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$	невід'ємних значень
$2x^2 + x - 1 < 0$	$\left(-1; \frac{1}{2}\right)$	від'ємних значень
$2x^2 + x - 1 \leq 0$	$\left[-1; \frac{1}{2}\right]$	недодатних значень

Приклад 2. Розв'язати нерівність $-3x^2 + 14x - 8 \geq 0$.

● Графіком функції $y = -3x^2 + 14x - 8$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз. Розв'язавши рівняння $-3x^2 + 14x - 8 = 0$, одержимо: $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = 4$. Отже, парабола перетинає вісь x у точках з абсцисами $\frac{2}{3}$ та 4. Схематично зображуємо дану параболу (рис. 54). Функція набуває невід'ємних значень, якщо x належить проміжку $\left[\frac{2}{3};\ 4\right]$. Цей проміжок і є множиною розв'язків нерівності.

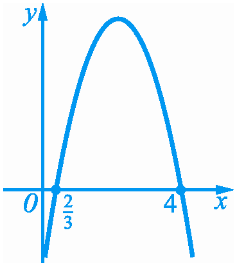


Рис. 54

Відповідь. $\left[\frac{2}{3};\ 4\right]$. ●

Приклад 3. Розв'язати нерівність:

а) $x^2 - 2x + 3 > 0$; **б)** $x^2 - 2x + 3 < 0$.

● Графіком функції $y = x^2 - 2x + 3$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Рівняння $x^2 - 2x + 3 = 0$ не має коренів, бо $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$. Отже, парабола не перетинає осі x. Схематично зображаємо цю параболу (рис. 55). Функція для всіх значень x набуває додатних значень.

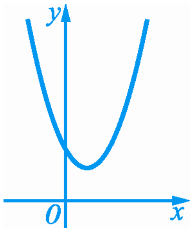


Рис. 55

Тому множиною розв'язків нерівності $x^2 - 2x + 3 > 0$ є множина всіх дійсних чисел, тобто $(-\infty; +\infty)$, а нерівність $x^2 - 2x + 3 < 0$ розв'язків немає.

Відповідь. **а)** $(-\infty; +\infty)$; **б)** розв'язків немає. ●

Підсумок. *Щоб розв'язати нерівність виду*

$$ax^2 + bx + c > 0,\quad ax^2 + bx + c < 0,\quad ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ або } ax^2 + bx + c \leq 0,$$

де $a \neq 0$, можна розглянути квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$ і:

1) знайти нулі функції;

2) якщо квадратична функція має два нулі, то позначити їх точками на осі x і через ці точки схематично провести параболу $y = ax^2 + bx + c$, вітки якої напрямлені вгору, якщо $a > 0$, і вниз, — якщо $a < 0$;

якщо квадратична функція має один нуль, то позначити його точкою на осі x і схематично провести параболу, яка дотикається до осі x у цій точці; вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a > 0$, і вниз — якщо $a < 0$;

якщо квадратична функція не має нулів, то схематично провести параболу, розміщену у верхній півплощині вітками вгору, якщо $a > 0$, у нижній півплощині вітками вниз — якщо $a < 0$;

3) знайти на осі x проміжки, на яких значення функції $y = ax^2 + bx + c$ задовольняють відповідну нерівність.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати нерівність $3x(2 - x) > x^2 + 6x - 8$.

● Перенесемо доданки із правої частини нерівності у ліву, змінивши їхні знаки на протилежні, і спростимо одержаний у лівій частині вираз: $6x - 3x^2 - x^2 - 6x + 8 > 0$; $-4x^2 + 8 > 0$. Поділимо обидві частини останньої нерівності на –4, одержимо нерівність

$$x^2 - 2 < 0.$$

Графіком квадратичної функції $y = x^2 - 2$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Рівняння $x^2 - 2 = 0$ має корені $x_1 = -\sqrt{2}$ та $x_2 = \sqrt{2}$. Отже, парабола перетинає вісь x у точках з абсцисами $-\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$. Зобразимо схематично цю параболу (рис. 56). Множиною розв'язків нерівності $x^2 - 2 < 0$, а, отже, й заданої в умові нерівності, є проміжок $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

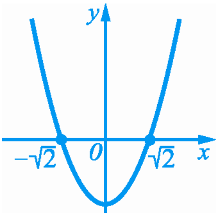


Рис. 56

Відповідь. $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. ●

Вправа 2. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{4x - 2x^2}$.

● Область визначення функції утворюють ті значення x, для яких підкореневий вираз $4x - 2x^2$ набуває невід'ємних значень.

Розв'яжемо нерівність $4x - 2x^2 \geq 0$. Графіком функції $y = 4x - 2x^2$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз. Рівняння $4x - 2x^2 = 0$ має корені: $x_1 = 0$ та $x_2 = 2$. Отже, парабола перетинає вісь x у точках з абсцисами 0 і 2. Зобразимо схематично цю параболу (рис. 57). Нерівність $4x - 2x^2 \geq 0$ виконується, якщо x належить проміжку [0; 2]. Це і є шукана область визначення.

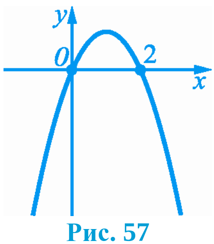


Рис. 57

Відповідь. [0; 2]. ●

Вправа 3. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4} + \dfrac{x+1}{\sqrt{4-x}}$.

● Область визначення функції утворюють ті значення x, які є розв’язками системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 \ge 0; \\ 4 - x > 0. \end{cases}$$

Коренями рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$ є числа –4 й 1. Оскільки вітки параболи $y = x^2 + 3x - 4$ напрямлені вгору, то множиною розв’язків першої нерівності системи є множина $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

Розв’яжемо другу нерівність системи: $4 - x > 0$; $-x > -4$; $x < 4$. $(-\infty; 4)$ — множина розв’язків другої нерівності.

Зобразимо на координатній прямій множини розв’язків обох нерівностей.

Спільні розв’язки нерівностей системи утворюють множину $(-\infty; -4] \cup [1; 4)$.

Відповідь. $(-\infty; -4] \cup [1; 4)$. ●

Вправа 4. Розв’язати нерівність $\sqrt{x-1}\left(x^2 + 2x - 8\right) \ge 0$.

● Вираз $\sqrt{x-1}$ має зміст, якщо $x \ge 1$. Тому розв’язки даної нерівності повинні належати проміжку $[1; +\infty)$.

Оскільки множник $\sqrt{x-1}$ набуває лише невід’ємних значень, а саме: $\sqrt{x-1} = 0$, якщо $x = 1$, $\sqrt{x-1} > 0$, якщо $x > 1$, то розглянемо два випадки:

1) $x = 1$. Тоді матимемо правильну нерівність $0 \ge 0$. Отже, $x = 1$ — розв’язок нерівності.

2) $x > 1$. Тоді множник $\sqrt{x-1}$ — додатний, і дана нерівність виконуватиметься, якщо другий множник невід’ємний. Маємо систему нерівностей: $\begin{cases} x > 1; \\ x^2 + 2x - 8 \ge 0. \end{cases}$ Розв’язавши цю систему, знайдемо розв’язки: $x \ge 2$.

Відповідь. $\{1\} \cup [2; +\infty)$. ●

Вправа 5. Розв’язати нерівність $\dfrac{x^2-4x-5}{|x-2|}\le 0.$

● Дріб у лівій частині нерівності має зміст, якщо $x \ne 2$. Оскільки для $x \ne 2$ знаменник дробу додатний, то дана нерівність виконуватиметься, якщо $x^2 - 4x - 5 \le 0$. Множиною розв’язків квадратної нерівності є проміжок $[-1; 5]$. Виключивши з нього число 2, одержимо множину розв’язків даної нерівності: $[-1; 2)\cup(2; 5]$.

Відповідь. $[-1; 2)\cup(2; 5]$. ●

Усно

350. На рисунку 58 зображено графік функції $y = x^2 - x - 2$. Назвіть множини розв’язків нерівностей:

а) $x^2 - x - 2 > 0$; **б)** $x^2 - x - 2 \ge 0$;
в) $x^2 - x - 2 < 0$; **г)** $x^2 - x - 2 \le 0$.

351. На рисунку 59 зображено графік функції $y = x^2 + 2x + 1$. Назвіть множини розв’язків нерівностей:

а) $x^2 + 2x + 1 > 0$; **б)** $x^2 + 2x + 1 \ge 0$;
в) $x^2 + 2x + 1 < 0$; **г)** $x^2 + 2x + 1 \le 0$.

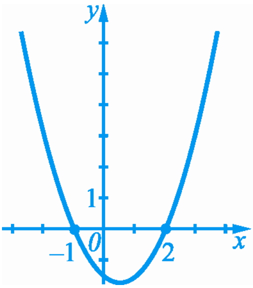


Рис. 58

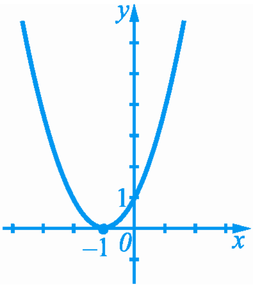


Рис. 59

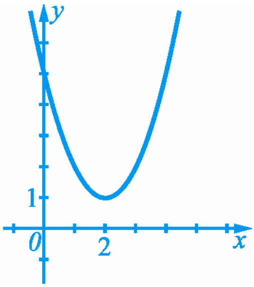


Рис. 60

352. На рисунку 60 зображено графік функції $y = x^2 - 4x + 5$. Назвіть множини розв’язків нерівностей:

а) $x^2 - 4x + 5 > 0$; **б)** $x^2 - 4x + 5 \ge 0$;
в) $x^2 - 4x + 5 < 0$; **г)** $x^2 - 4x + 5 \le 0$.

Рівень А

Розв’яжіть нерівність:

353. **а)** $x^2 + 3x - 4 < 0$; **б)** $x^2 + 3x - 4 > 0$; **в)** $2x^2 - 3x < 0$;

г) $-x^2 - 2x + 3 > 0$; **д)** $-2x^2 + 5x - 3 < 0$; **е)** $2x^2 - 8 > 0$.

354. **а)** $x^2 + 6x + 8 \geq 0$; **б)** $x^2 + 5x - 14 \leq 0$; **в)** $-x^2 + 6x + 7 \leq 0$.

355. **а)** $x^2 + x - 6 < 0$; **б)** $3x^2 - 10x + 3 > 0$; **в)** $-2x^2 + 4x > 0$;
г) $-x^2 + 4x - 3 \leq 0$; **д)** $x^2 - 3x + 2 \geq 0$; **е)** $-3x^2 + 3 \geq 0$.

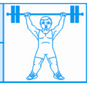
Знайдіть множину розв'язків нерівності:

356. **а)** $x^2 > 0$; **б)** $x^2 \geq 0$; **в)** $x^2 < 0$; **г)** $x^2 \leq 0$.

357. **а)** $2x^2 > 18$; **б)** $-3x^2 \geq 0$; **в)** $x^2 < 2x$; **г)** $-2x^2 \leq 3x$.

358. **а)** $x^2 > 4$; **б)** $x^2 < 1$; **в)** $-2x^2 \geq -2$; **г)** $x^2 \leq 5x$.

Рівень Б



Розв'яжіть нерівність:

359. **а)** $x^2 - 0{,}4x - 0{,}96 \leq 0$; **б)** $x^2 + x - 1 > 0$;
в) $-50x^2 + 250x - 300 \geq 0$; **г)** $3x^2 - 2x + 3 < 0$;
д) $-x^2 + 3x - 10 \leq 0$; **е)** $-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 \geq 0$.

360. **а)** $x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 > 0$; **б)** $x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \leq 0$; **в)** $-8x^2 + 40x - 56 < 0$.

361. **а)** $(2x - 1)(2x + 1) > 2(x + 0{,}5)^2$;
б) $(x - 3)(2x + 5) < x(x + 1)$;
в) $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x - 6)^2 > 0$;
г) $(2x - 1)(3x + 2) - (3x - 1)(x + 4) \leq 2x - 2$.

362. **а)** $\frac{x^2 - 3x}{6} - \frac{x + 1}{9} > \frac{x - 14}{18}$; **б)** $\frac{2x - 3}{12} - \frac{1 - 3x^2}{16} < \frac{x}{24} - \frac{7}{48}$.

363. **а)** $x(2x + 3) \leq (2x + 3)(2x - 1)$; **б)** $(3x - 1)^2 - (x - 1)^2 > 4(x + 4)$;
в) $\frac{x^2 - 1}{4} - \frac{x + 3}{6} \leq -\frac{2}{3}$; **г)** $\frac{x^2 - 3x + 2}{6} + \frac{3 - x}{9} < \frac{8x + 9}{36} - \frac{1}{4}$.

364. **а)** Розв'яжіть нерівність $8x^2 - 8x + 3 > 0$.
б) Доведіть нерівність $8x^2 - 8x + 3 > 0$.

365. Для яких значень x квадратний тричлен $-x^2 + x - 0{,}21$ набуває від'ємних значень?

366. Для яких значень x квадратний тричлен $x^2 + 2x + 0{,}75$ набуває невід'ємних значень?

Знайдіть область визначення функції:

367. **а)** $y = \sqrt{12 - 4x - x^2}$; **б)** $y = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$; **в)** $y = \sqrt{x^2 - 5x + 7}$.

368. **а)** $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$; **б)** $y = \sqrt{24 - 10x - x^2}$.

Рівень В

369. Розв'яжіть нерівність:

а) $(x^2+1)^2(x^2-10x+9)\ge 0$; **б)** $|x|(x^2-x-30)>0$;

в) $\sqrt{x}\,(x^2-9x-90)\le 0$; **г)** $\sqrt{(x-2)(2x+3)}\ge 0$;

д) $\sqrt{20x^2-41x+20}\le 0$; **е)** $\dfrac{1}{\sqrt{18+3x-x^2}}\ge 0$;

є) $(2x-9)\sqrt{x^2-6x+5}>0$; **ж)** $(x+3)\sqrt{x^2+x-12}\ge 0$;

з) $\dfrac{x^2+3x-4}{|x+1|}\le 0$; **и)** $\dfrac{x^2-2x-15}{(x-6)^2}>0$.

370. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} x^2-2x-24>0; \\ 14-2x\ge 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x+3\le x^2; \\ x^2<2x+8; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x^2+x\le 6; \\ 4x-x^2\ge 0. \end{cases}$

371. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{15-2x-x^2}}+2\sqrt{6-3x}$; **б)** $y=\dfrac{1+\sqrt{x^2-x-12}}{\sqrt{12-x-x^2}}$;

в) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-11x+5}}-\dfrac{1}{|x|-4}$.

372. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння:

а) $x^2-(a+1)x+a^2=0$ має два різні корені;

б) $x^2+(2a+1)x-2a-1=0$ не має коренів;

в) $ax^2+(1-a)x+a+1=0$ має хоча б один корінь.

373. Знайдіть усі значення a, для яких нерівність не має розв'язків:

а) $x^2+3x+1-2a<0$; **б)** $x^2+3x+1-2a\le 0$; **в)** $ax^2-4x+a>0$.

374. Знайдіть усі значення a, для яких нерівність $(2a-1)x^2+2ax+a+3\le 0$ виконується для всіх дійсних значень x.

Вправи для повторення

375. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{a^2-4c^2}{2a+4c}$; **б)** $\dfrac{m^4-n^2}{3m^3-3mn}$.

376. Доведіть тотожність $\left(x+y-\dfrac{4xy}{x+y}\right):\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x+y}=1$.

377. Побудуйте графік рівняння:

а) $x - 2y = 4$; **б)** $-3x + 2y = -6$.

378. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x + 2y = 3; \\ 3x - y = 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x - 4y = 10; \\ 4x - 3y = 10; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 5x - 4y = 9; \\ 5x + 2y = 3. \end{cases}$

379*. Розв'яжіть рівняння:

а) $(3x^2 + 1)^2 - 2(3x^2 + 1) - 8 = 0$; **б)** $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$.

380. За зміну 2 майстри і 6 учнів виготовили 72 деталі. Скільки деталей виготовив за зміну один майстер і скільки один учень, якщо 3 майстри і 5 учнів за тієї ж продуктивності за зміну можуть виготовити 76 деталей?

Для тих, хто хоче знати більше

14. Розв'язування нерівностей методом інтервалів

1. Метод інтервалів. Розв'яжемо нерівність

$$(x + 1)(x - 2)(x - 4) > 0.$$

Для цього розглянемо функцію

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$$

і знайдемо значення x, для яких вона набуває додатних значень. Областю визначення цієї функції є множина всіх дійсних чисел, а нулями — числа –1, 2 і 4. Нулі розбивають область визначення на чотири проміжки: $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; 4)$ і $(4; +\infty)$. На кожному з цих проміжків кожний із множників добутку $(x + 1)(x - 2)(x - 4)$ має певний знак. Знаки множників і знаки добутку $(x + 1)(x - 2)(x - 4) = f(x)$ подано в таблиці.

Множник	$(-\infty; -1)$	$(-1; 2)$	$(2; 4)$	$(4; +\infty)$
$x + 1$	–	+	+	+
$x - 2$	–	–	+	+
$x - 4$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+

Отже, функція $f(x)$ набуває додатних значень на проміжках $(-1; 2)$ і $(4; +\infty)$. Тому множиною розв'язків нерівності $(x + 1)(x - 2)(x - 4) > 0$ є $(-1; 2) \cup (4; +\infty)$.

Позначимо на координатній прямій нулі функції $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$ та її знаки на проміжках $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; 4)$ і $(4; +\infty)$ (рис. 61). На кожному із цих проміжків функція зберігає знак, а при переході через значення –1, 2 і 4 (нулі функції) її знак почергово змінюється. На крайньому праворуч проміжку $(4; +\infty)$, як видно з таблиці, функція $f(x)$ набуває додатних значень. Тому знаки функції $f(x)$ на проміжках можна було знайти так: відмічаємо знаком «+» знак функції на крайньому праворуч проміжку (4; +∞), а потім, використавши властивість чергування знаків, визначаємо знаки функції на решті проміжків, рухаючись справа наліво.

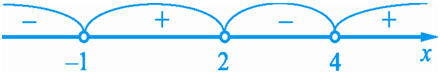


Рис. 61

Описаним способом можна знайти знаки функції виду

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n),$$

де x_1, x_2, ..., x_n — деякі попарно різні числа, на проміжках, що визначаються нулями цієї функції. Знаючи знаки функції на проміжках, можна записати множини розв’язків нерівностей

$$\begin{aligned} &(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) > 0, \\ &(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) < 0, \\ &(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) \geq 0, \\ &(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) \leq 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Приклад 1. Розв’язати нерівність $(x + 3)(x + 2)(x - 6) < 0$.

● Позначимо на координатній прямій нулі функції $f(x) = (x + 3)(x + 2)(x - 6)$ — числа –3, –2 і 6. Відмітимо знаки функції на утворених проміжках (на крайньому праворуч — знак «+», на решті проміжків — такі знаки, щоб, рухаючись справа наліво, ці знаки чергувались).

Множиною розв’язків нерівності є об’єднання проміжків (–∞; –3) і (–2; 6).

Відповідь. $(-\infty; -3) \cup (-2; 6)$. ●

Розглянутий у прикладі метод розв’язування нерівностей називають *методом інтервалів*.

Щоб розв’язати нерівність виду (1) методом інтервалів, потрібно:

1) позначити на координатній прямій нулі функції $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$;

2) відмітити знаки функції на утворених проміжках (на крайньому праворуч — знак «+», на решті проміжків — такі знаки, щоб, рухаючись справа наліво, ці знаки чергувались);

3) вибравши проміжки, на яких функція $f(x)$ набуває значень відповідного знака, записати множину розв’язків нерівності.

Метод інтервалів можна застосувати при розв’язуванні не лише нерівностей виду (1), але й нерівностей, які шляхом перетворень зводяться до однієї з нерівностей цього виду. Розглянемо приклад.

Приклад 2. Розв’язати нерівність $(1 - 2x)(x^2 - 3x - 4) \leq 0$.

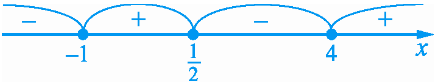
● Зведемо дану нерівність до виду (1). Для цього у виразі $1 - 2x$ винесемо за дужки множник –2, а квадратний тричлен $x^2 - 3x - 4$ розкладемо на множники:

$$-2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)(x - 4) \leq 0.$$

Поділивши обидві частини нерівності на –2, одержимо нерівність виду (1):

$$(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 4) \geq 0.$$

Позначимо на координатній прямій нулі функції $f(x) = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 4)$ та відмітимо її знаки на утворених проміжках.



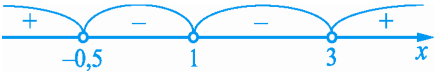
На проміжках $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ та $(4; +\infty)$ функція $f(x)$ набуває додатних значень, а для $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 4$ — значення 0. Тому $f(x) \geq 0$, якщо x належить проміжку $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ або проміжку $[4; +\infty)$.

Відповідь. $\left[-1; \frac{1}{2}\right] \cup [4; +\infty)$. ●

Якщо у нерівностях (1) не всі числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є різними, то розглянутий алгоритм знаходження знаків функції $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ застосовувати не можна. Спосіб розв'язування таких нерівностей показано у наступному прикладі.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $(x + 0{,}5)(x - 1)^2(x - 3)^3 < 0$.

● Позначимо на координатній прямій нулі функції $f(x) = (x + 0{,}5)(x - 1)^2(x - 3)^3$ та відмітимо її знаки на утворених проміжках.



На крайньому праворуч проміжку $(3; +\infty)$ усі множники добутку $(x + 0{,}5)(x - 1)^2(x - 3)^3$ є додатними, тому на цьому проміжку $f(x) > 0$. Рухаючись справа наліво при переході через значення $x = 3$, функція змінює знак, оскільки змінює знак множник $(x - 3)^3$, який є непарним степенем двочлена $x - 3$. При переході через значення $x = 1$ знак функції не змінюється, оскільки не змінюється знак множника $(x - 1)^2$, який є парним степенем двочлена $x - 1$. При переході через значення $x = -0{,}5$ функція змінює знак, оскільки змінює знак множник $x + 0{,}5$ — непарний (перший) степінь двочлена $x + 0{,}5$.

Відповідь. $(-0{,}5; 1) \cup (1; 3)$. ●

2. Розв'язування дробових раціональних нерівностей. Метод інтервалів можна застосувати і для розв'язування дробових нерівностей. Розв'яжемо нерівність

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x-4} > 0. \qquad (2)$$

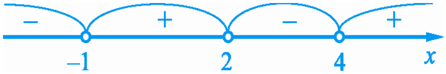
Розглянемо функцію $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x-4}$.

1) Знайдемо область визначення функції: $x - 4 \neq 0$; $x \neq 4$.

2) Знайдемо нулі функції: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.

3) Позначимо на координатній прямій точки, що відповідають числам –1, 2 і 4.

Знаки частки $\frac{(x+1)(x-2)}{x-4}$ на проміжках $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; 4)$ і $(4; +\infty)$ визначаємо так само, як і знаки добутку $(x + 1)(x - 2)(x - 4)$.



Функція $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x-4}$ набуває додатних значень на проміжках $(-1; 2)$ і $(4; +\infty)$. Тому множиною розв'язків нерівності (2) є $(-1; 2)\cup(4; +\infty)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\frac{4-7x}{x+2} \leq -1$.

● Зведемо дану нерівність до нерівності, лівою частиною якої є дріб, а правою — нуль:

$$\frac{4-7x}{x+2} + 1 \leq 0; \quad \frac{4-7x+x+2}{x+2} \leq 0; \quad \frac{-6x+6}{x+2} \leq 0; \quad \frac{-6(x-1)}{x+2} \leq 0; \quad \frac{x-1}{x+2} \geq 0.$$

Нулем функції $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ є $x = 1$; якщо $x = -2$, то ця функція не визначена. Позначимо на координатній прямій точки, що відповідають числам –2 та 1 і відмітимо знаки функції на утворених проміжках (на крайньому праворуч — знак «+», на решті проміжків — такі знаки, щоб, рухаючись справа наліво, ці знаки чергувались).

На проміжках $(-\infty; -2)$ і $(1; +\infty)$ функція $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ набуває додатних значень, а для $x = 1$ — значення 0. Тому множиною розв'язків нерівності є об'єднання проміжків $(-\infty; -2)$ і $[1; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -2)\cup[1; +\infty)$. ●

Рівень В

Розв'яжіть нерівність:

381. **а)** $(x-4)(x+6)<0$; **б)** $(x+1)(x+3{,}5)\geq 0$;
в) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$; **г)** $x(x-5)(x+3)\leq 0$;
д) $(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)>0$.

382. **а)** $(x-2)(x-3)<0$; **б)** $(x+3)(x-0{,}5)(x-5)\geq 0$;
в) $(x-5)(x-1)(x+2)(x+4)\leq 0$.

383. **а)** $(2x-1)(x+1)>0$; **б)** $(6-3x)(5x+3)\geq 0$;
в) $(4x-8)(3-x)(x+1)<0$; **г)** $-x(2x-5)(-3x+3)\leq 0$.

384. **а)** $(x^2-4)(x+4)>0$; **б)** $(2-x)(9x^2-1)\leq 0$.

385. **а)** $(4x-16)(2-x)\leq 0$; **б)** $(3x+2)(x^2-9)>0$.

386. **а)** $\dfrac{x+1}{x-3}<0$; **б)** $\dfrac{(x-1)(x-8)}{x+2}>0$; **в)** $\dfrac{1-2x}{(x+3)(x-4)}\geq 0$.

387. **а)** $\dfrac{3}{x-1}>2$; **б)** $\dfrac{2x-1}{x+1}<1$; **в)** $\dfrac{3-x}{2x+3}\leq 4$.

388. **а)** $\dfrac{x-7}{(x-1)(x-5)}>0$; **б)** $\dfrac{2x-1}{4x+1}>3$; **в)** $\dfrac{5x+3}{3-x}\leq 1$.

389. **а)** $x^3-4x^2+3x>0$; **б)** $x^3-x^2-4x+4\leq 0$;
в) $(x^2+6x-16)(x^2-1)<0$; **г)** $(x^2-6x+5)(x^2-4)\geq 0$.

390. **а)** $(x+8)^2(x+6)^3(x-1)\leq 0$; **б)** $(x^2-1)^2(3x^2+2x-1)>0$.

391. Знайдіть область визначення функції:
а) $y=\sqrt{(x^2-3x+3)(x^2-3x-10)}$; **б)** $y=\sqrt{(x-1)(x+2)(x^2-16)}$.

392. Розв'яжіть нерівність $(x-1)(x-a)<0$ з параметром a.

Розв'яжіть нерівність:

393. **а)** $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2+5x+6}<0$; **б)** $\dfrac{(x-1)(x^2-8x+12)}{2x-2}\geq 0$;
в) $\dfrac{x^2-4x-5}{(x-1)^2}<0$; **г)** $\dfrac{6-x}{(x^2-6x+10)(2x-1)}\geq 0$.

394. **а)** $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-1}<1$; **б)** $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\geq -3$;
в) $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{x+2}$; **г)** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+2}>\dfrac{3}{x+1}$.

Вправи для повторення

395. Розв’яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} 2x + y = 3; \\ 2x - 3y = -1. \end{cases}$

396*. Знайдіть значення виразу:

$$\frac{4}{\sqrt{8}+\sqrt{4}} + \frac{4}{\sqrt{12}+\sqrt{8}} + \frac{4}{\sqrt{16}+\sqrt{12}} + \ldots + \frac{4}{\sqrt{36}+\sqrt{32}}.$$

397. На обробку однієї деталі перший робітник витрачає часу на 6 хв менше, ніж другий. Скільки деталей обробляє другий робітник за 7 год, якщо перший за цей час обробляє на 8 деталей більше, ніж другий?

398*. Басейн, до якого підведені дві труби, через першу трубу наповнюється водою на 5 год швидше, ніж через другу. Якщо спочатку відкрити другу трубу, а через 8 год відкрити і першу, то басейн буде наповнений за 18 год. Яка місткість басейну, якщо за 5 год через першу трубу і за 4 год через другу трубу в сумі проходить 20 м^3 води?

15. Системи рівнянь із двома змінними

1. Рівняння із двома змінними. Нехай відомо, що гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 25 см. Якщо довжину одного з катетів позначити через x см, а другого — через y см, то матимемо рівність

$$x^2 + y^2 = 25^2,$$

яка містить дві змінні x та y. Таку рівність, як відомо, називають *рівнянням із двома змінними* (або рівнянням із двома невідомими).

Рівняння $x^2 - y = 0$, $2x - 5y = 1$, $xy = 1$, $x + y = 3x^2y^2$ також є рівняннями із двома змінними.

Лівою частиною рівняння $x^2 - y = 0$ є многочлен другого степеня, а правою — нуль. Таке рівняння називають рівнянням другого степеня із двома змінними.

Рівняння $2x - 5y = 1$, $xy = 1$ і $x + y = 3x^2y^2$ є відповідно рівняннями першого, другого і четвертого степенів.

Нагадаємо, що *розв’язком* рівняння із двома змінними називають пару значень змінних, для яких рівняння перетворюється у правильну числову рівність. Так, рівняння $x^2 + y^2 = 25$ для $x = 3$, $y = 4$ перетворюється у правильну числову рівність $3^2 + 4^2 = 25$. Тому пара значень змінних $x = 3$, $y = 4$ є розв’язком рівняння $x^2 + y^2 = 25$. Цей розв’язок записують ще й так: (3; 4). Розв’язками рівняння $x^2 + y^2 = 25$ є також пари (–3; 4), (4; 3), (0; 5), (–5; 0) тощо.

Якщо на координатній площині позначити всі точки, координати яких є розв'язками деякого рівняння із двома змінними, то одержимо *графік* цього рівняння.

Так, графіком рівняння $2x - 5y = 1$ є пряма, графіком рівняння $x^2 + y^2 = 25$ — коло радіуса 5 із центром у початку координат (рис. 62). Рівняння $x^2 - y = 0$ та $xy = 1$ рівносильні рівнянням $y = x^2$ та $y = \frac{1}{x}$. Тому їх графіками є відповідно парабола та гіпербола.

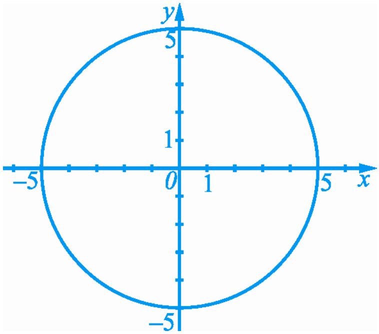


Рис. 62

2. Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь. У 7 класі ми розглядали різні способи розв'язування систем лінійних рівнянь: графічний спосіб, способи підстановки, додавання. Нехай потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ y = 5 - x^2, \end{cases}$$

обидва рівняння якої є рівняннями другого степеня.

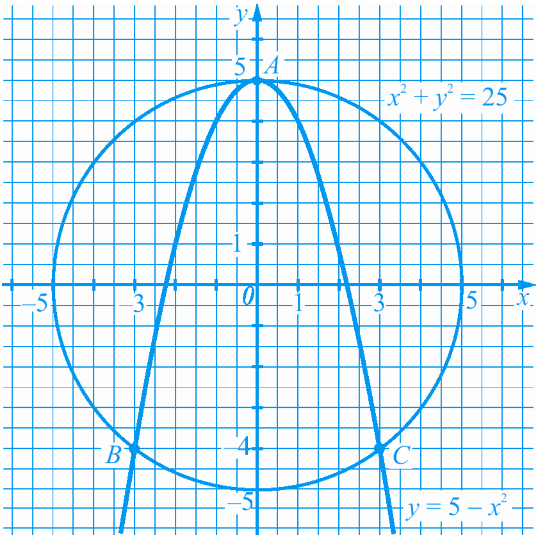


Рис. 63

Будуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь системи (рис. 63). Графіком рівняння $x^2 + y^2 = 25$ є коло, а графіком рівняння $y = 5 - x^2$ — парабола. Ці графіки мають 3 спільні точки: $A(0; 5)$, $B(-3; -4)$ і $C(3; -4)$. Легко перевірити, що координати кожної з цих точок є розв'язком як першого, так і другого рівнянь системи. Отже, система має 3 розв'язки: $(0; 5)$, $(-3; -4)$ і $(3; -4)$.

Щоб розв'язати систему рівнянь із двома змінними графічним способом, потрібно побудувати графіки рівнянь системи в одній системі координат і знайти координати спільних точок цих графіків.

3. Розв'язування систем рівнянь. Якщо в системі рівнянь із двома змінними одне з рівнянь є рівнянням першого степеня, то таку систему можна розв'язати *способом підстановки*.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x - y = 2; \\ 3x^2 + y^2 = 28. \end{cases}$

● Виразимо з першого рівняння змінну y через змінну x:

$$-y = -3x + 2; \qquad y = 3x - 2.$$

Підставимо у друге рівняння замість y вираз $3x - 2$ і розв'яжемо одержане рівняння з однією змінною x:

$3x^2 + (3x - 2)^2 = 28;$ $3x^2 + 9x^2 - 12x + 4 - 28 = 0;$

$12x^2 - 12x - 24 = 0;$ $x^2 - x - 2 = 0;$ $x_1 = -1;$ $x_2 = 2.$

За формулою $y = 3x - 2$ знаходимо:

$y_1 = 3x_1 - 2 = 3\cdot(-1) - 2 = -5;$ $y_2 = 3x_2 - 2 = 3\cdot2 - 2 = 4.$

Отже, система має два розв'язки: $x_1 = -1$, $y_1 = -5$; $x_2 = 2$, $y_2 = 4$.

Відповідь. $(-1; -5)$, $(2; 4)$. ●

Розв'язуючи систему рівнянь способом підстановки, потрібно:

1) виразити з деякого рівняння системи одну змінну через іншу;

2) підставити одержаний вираз в інше рівняння замість відповідної змінної;

3) розв'язати одержане рівняння з однією змінною;

4) знайти відповідне значення іншої змінної.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10; \\ xy = 3. \end{cases}$

● Помножимо друге рівняння на 2 і додамо до першого рівняння, одержимо:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 16.$$

Звідси: $(x+y)^2 = 16$; $x + y = 4$ або $x + y = -4$.

Отже, можливі два випадки.

1) $\begin{cases} x+y=4; \\ xy=3; \end{cases}$ $\begin{cases} y=4-x; \\ x(4-x)=3; \end{cases}$ $4x - x^2 - 3 = 0$; $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

$y_1 = 4 - 1 = 3$; $y_2 = 4 - 3 = 1$. (1; 3), (3; 1) — розв'язки системи.

2) $\begin{cases} x+y=-4; \\ xy=3; \end{cases}$ $\begin{cases} y=-4-x; \\ x(-4-x)=3; \end{cases}$ $-4x - x^2 - 3 = 0$; $x^2 + 4x + 3 = 0$;

$x_3 = -1$; $x_4 = -3$. $y_3 = -4 - (-1) = -3$; $y_4 = -4 - (-3) = -1$.

(–1; –3), (–3; –1) — розв'язки системи.

Відповідь. (1; 3), (3; 1), (–1; –3), (–3; –1). ●

Зауваження. 1. Систему із прикладу 2 можна було б розв'язати способом підстановки, виразивши із другого рівняння змінну y через змінну x: $y = \dfrac{3}{x}$.

2. Розв'язуючи систему рівнянь виду $\begin{cases} x+y=a; \\ xy=b, \end{cases}$ де a і b — деякі відомі числа, можна використовувати теорему, обернену до теореми Вієта. Так, розв'язуючи приклад 2, ми мали систему $\begin{cases} x+y=4; \\ xy=3. \end{cases}$ На основі згаданої теореми числа x та y є коренями квадратного рівняння $t^2 - 4t + 3 = 0$. Розв'язавши рівняння, знайдемо: $t_1 = 1$; $t_2 = 3$. Тоді пари чисел (1; 3) і (3; 1) — розв'язки даної системи.

Для тих, хто хоче знати більше

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = 3; \\ 3xy + \dfrac{2x}{y} = 14. \end{cases}$

● Зробимо заміну: $xy = u$, $\dfrac{x}{y} = v$. Одержимо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} u - v = 3; \\ 3u + 2v = 14, \end{cases}$$

розв'язком якої є $u = 4$, $v = 1$. Повертаючись до заміни, матимемо:

$$\begin{cases} xy = 4; \\ \dfrac{x}{y} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 4; \\ x = y. \end{cases}$$

Розв’язавши останню систему способом підстановки, знайдемо: $x_1 = 2$, $y_1 = 2$; $x_2 = -2$, $y_2 = -2$.

Відповідь. (2; 2), (–2; –2). ●

Приклад 4. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} xy - x = 35; \\ xy^3 - xy^2 = 560. \end{cases}$

● Перепишемо дану систему так: $\begin{cases} xy - x = 35; \\ y^2(xy - x) = 560. \end{cases}$ Поділимо почленно друге рівняння на перше (оскільки $xy - x = 35$, то $xy - x \neq 0$ і на $xy - x$ ділити можна). Одержимо: $y^2 = 16$, звідки $y_1 = -4$, $y_2 = 4$.

Підставимо ці значення y в перше рівняння системи:

$$-4x - x = 35,\ \ x_1 = -7; \quad 4x - x = 35,\ \ x_2 = 11\frac{2}{3}.$$

Відповідь. (–7; –4); $\left(11\frac{2}{3}; 4\right)$. ●

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Побудувати графік рівняння $y = \sqrt{4 - x^2}$.

● Оскільки для допустимих значень x вираз $\sqrt{4 - x^2}$ набуває невід’ємних значень, то $y \geq 0$. Тому дане рівняння рівносильне таким двом умовам: $y^2 = 4 - x^2$, $y \geq 0$ або $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$. Отже, графіком рівняння є півколо радіуса 2 із центром у початку координат, розташоване у верхній півплощині (рис. 64). ●

Вправа 2. Побудувати графік рівняння $|2x - y| = 2$.

● Якщо модуль числа дорівнює 2, то цим числом є 2 або –2. Отже, $2x - y = 2$ або $2x - y = -2$. Тому графіком рівняння є дві прямі, задані рівняннями $2x - y = 2$ і $2x - y = -2$ (рис. 65). ●

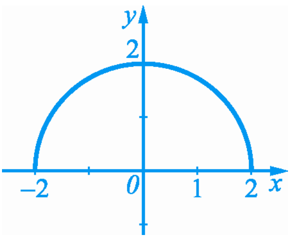


Рис. 64

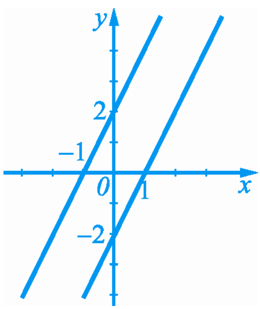


Рис. 65

Вправа 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+2xy=5; \\ 3y-2xy=2. \end{cases}$

● Додамо до першого рівняння системи друге рівняння, одержимо: $x + 3y = 7$, звідки $x = 7 - 3y$. Підставивши замість x вираз $7 - 3y$ в друге рівняння системи, матимемо:

$3y - 2y(7 - 3y) = 2$; $3y - 14y + 6y^2 - 2 = 0$;

$6y^2 - 11y - 2 = 0$; $y_1 = -\frac{1}{6}$; $y_2 = 2$.

$x_1 = 7 - 3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = 7\frac{1}{2}$; $x_2 = 7 - 3 \cdot 2 = 1$.

Відповідь. $\left(7\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$, $(1; 2)$. ●

Усно

399. Чи є розв'язком рівняння $x^2 + y = 10$ пара чисел:

а) $x = 3$; $y = 1$; **б)** $(-2; 6)$?

400. Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=17; \\ xy=4 \end{cases}$ пара чисел:

а) $x = -1$; $y = 4$; **б)** $(1; 4)$?

Рівень А

Побудуйте графік рівняння:

401. **а)** $2x - 3y = 6$; **б)** $x^2 + y^2 = 9$; **в)** $2x^2 - y = 0$.

402. **а)** $x - 2y = 2$; **б)** $x^2 + y^2 = 4$.

Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

403. **а)** $\begin{cases} x+y=2; \\ y=x^2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x-y=2; \\ x^2+y^2=4; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x^2+y^2=1; \\ y=x^2+1. \end{cases}$

404. **а)** $\begin{cases} 2x-y=0; \\ y=x^2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2+y^2=9; \\ x+y=3. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь:

405. **а)** $\begin{cases} y=3x-2; \\ y=x^2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x=2y+1; \\ xy+y=4; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 3x^2+y^2=7; \\ y=2x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y=2; \\ xy=1; \end{cases}$ **д)** $\begin{cases} x-y=11; \\ xy=-28; \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} xy+y^2=4; \\ x+y=2. \end{cases}$

406. **а)** $\begin{cases} y=x+1; \\ xy=x^2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x+y^2=9; \\ x+2y=9; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 2x-y=2; \\ xy+2y=0. \end{cases}$

Рівень Б

Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

407. **а)** $\begin{cases} y-x^2-2x=0; \\ x-y=-2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2-y+1=0; \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x^2-y=0; \\ \sqrt{x}-y=0. \end{cases}$

408. **а)** $\begin{cases} y=x^2-2x+1; \\ y-x=1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y=\sqrt{x}; \\ x^2+y^2=2; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x^2+2y=7; \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

409. Використовуючи графіки рівнянь, знайдіть кількість розв'язків системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=4; \\ y=x^2-2x+2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2+y^2=9; \\ xy=1; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} xy=-1; \\ y=4-x^2. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь:

410. **а)** $\begin{cases} x+y+1=0; \\ 3x^2+2xy+y=9; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x-2y=4; \\ x^2-3xy-2y^2=8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-5y=14; \\ 2x+3y=3; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 2x-y=1; \\ (x-1)(y+2)+x^2+3=2xy; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y=4; \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{y}=1; \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} 2x+y=5; \\ \dfrac{4x}{x+y}+\dfrac{1}{x}=2. \end{cases}$

411. **а)** $\begin{cases} x^2+y^2=25; \\ x^2-y^2=7; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x+2y+xy=10; \\ x+2y-xy=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy+2x=5; \\ xy-3y=-6; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x^2+2x-y=5; \\ x^2+x-2y=6. \end{cases}$

412. **а)** $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=1; \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{8}{x-y}-\dfrac{8}{x+y}=1; \\ \dfrac{2}{x-y}+\dfrac{4}{x+y}=1. \end{cases}$

413. а) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=1; \\ 2x-3y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=26; \\ xy=5. \end{cases}$

414. а) $\begin{cases} x+y=6; \\ x^2-xy=2y^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-4=3y; \\ (2x+1)(y-1)=6xy; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=1; \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+xy=10; \\ x^2-xy=-2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y^2=5; \\ 2x-y-y^2=-4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{y}=3; \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=1; \end{cases}$

є) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=4; \\ 4x+3y=1; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x^2+y^2=25; \\ xy=12. \end{cases}$

Рівень B

415. Побудуйте графік рівняння:

а) $y+\sqrt{4-x^2}=0;$ б) $|x-y|=2;$

в) $|y|-x^2=0;$ г) $\dfrac{y-x^2}{(x-2)^2+(y-4)^2}=0.$

416. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

а) $\begin{cases} xy=2; \\ (x+1)^2+y=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=1; \\ (x-2)^2+y^2=25; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x|-y=0; \\ x^2+y=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+(y-3)^2=9; \\ (x-3)^2+y^2=9. \end{cases}$

417. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} xy^2-x=2y; \\ xy^2-y=3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-6xy+9y^2=225; \\ y^2+3xy=-35; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=10; \\ x^2y^2=9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y-2xy=3; \\ xy(x+y)=2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} xy - \dfrac{y}{x} = 1; \\ 2xy - \dfrac{3y}{x} = 6; \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} (2x+y)^2 - 2(2x+y) = 15; \\ 2x + 2xy + y = 11; \end{cases}$

є) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{2y}{x} = 3; \\ x^2 + 3xy - 5y^2 = 20; \end{cases}$ **ж)** $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{x+2y} + \dfrac{x+2y}{x-2y} = \dfrac{10}{3}; \\ 3x - 5y = 17; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8; \\ x^4 - x^2y^2 = 72; \end{cases}$ **и)** $\begin{cases} x^3 - y^3 = 56; \\ x^2 + xy + y^2 = 28. \end{cases}$

418. Знайдіть усі значення a, для яких система рівнянь має задану кількість розв'язків:

а) $\begin{cases} y + 2x = 3; \\ 3x^2 - xy = a; \end{cases}$ 1 розв'язок; **б)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ x + y = a; \end{cases}$ 2 розв'язки;

в) $\begin{cases} y - |x| = 0; \\ x^2 + y = a; \end{cases}$ 2 розв'язки; **г)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = a; \\ xy = 1; \end{cases}$ 4 розв'язки.

Вправи для повторення

419. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{3ab + 6b^2}{a^2 - 4b^2}$; **б)** $\dfrac{x^2 - 5}{x - \sqrt{5}}$;

в) $\dfrac{6}{a} + \dfrac{a+3}{a-3} : \dfrac{a^2 + 3a}{3a - 9}$; **г)** $\dfrac{9}{3a + c} - \dfrac{3a - c}{2a - c} \cdot \left(\dfrac{18a - 9c}{9a^2 - c^2} - 2a + c \right)$.

420. Відомо, що $1{,}5 < m < 1{,}7$. Оцініть значення виразу:

а) $2m - 4{,}8$; **б)** $-3m$; **в)** $4{,}5 - 2m$.

421. Корені x_1 та x_2 рівняння $x^2 + px + 12 = 0$ задовольняють умову $x_1 - x_2 = 1$. Знайдіть p, якщо $p > 0$.

422. Чан можна наповнити водою через два крани — A і B. Наповнення чану через кран A триває на 11 хв довше, ніж через кран B. Якщо відкрити обидва крани, то чан заповниться за 0,5 год. За який час можна наповнити чан через один кран A?

423*. Деяку відстань автомобіль проїхав зі швидкістю 60 км/год. Після цього відстань на 75 км більшу він проїхав зі швидкістю 75 км/год, а решту шляху, що на 135 км коротший від пройденого, — зі швидкістю 48 км/год. Знайдіть увесь шлях, якщо середня швидкість автомобіля дорівнює 60 км/год.

16. Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь

Розглянемо приклади.

Задача 1. Із двох пунктів, відстань між якими дорівнює 18 км, вийшли одночасно назустріч одна одній дві групи туристів і зустрілися через 2 год. Знайти швидкість руху кожної групи, якщо першій для проходження усього шляху між пунктами потрібно часу на 0,9 год більше, ніж другій.

● Нехай швидкість першої групи туристів дорівнює x км/год, а другої — y км/год. Групи зустрілися через 2 год, тому до зустрічі перша група пройшла шлях $2x$ км, а друга — $2y$ км. Разом вони пройшли 18 км. Маємо рівняння $2x + 2y = 18$.

Щоб пройти увесь шлях завдовжки 18 км, першій групі потрібно $\frac{18}{x}$ год, а другій — $\frac{18}{y}$ год. Оскільки першій групі на це потрібно часу на 0,9 год більше, ніж другій, то: $\frac{18}{x}-\frac{18}{y}=0,9.$ Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x+2y=18; \\ \frac{18}{x}-\frac{18}{y}=0,9. \end{cases}$$

За змістом задачі $x > 0$ і $y > 0$. Тому, помноживши обидві частини другого рівняння на xy, матимемо:

$$\begin{cases} 2x+2y=18; \\ 18y-18x=0,9xy; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=9; \\ 20y-20x=xy; \end{cases} \quad \begin{cases} y=9-x; \\ 20y-20x=xy; \end{cases}$$

$20(9 - x) - 20x = x(9 - x)$;

$x^2 - 49x + 180$; $x_1 = 4$; $x_2 = 45$.

Якщо $x = 4$, то $y = 9 - 4 = 5$.

Якщо $x = 45$, то $y = 9 - 45 = -36$ — не задовольняє нерівність $y > 0$.

Відповідь. 4 км/год; 5 км/год. ●

Задача 2. Сад і город мають прямокутні форми. Довжина саду на 30 м менша від довжини городу, проте його ширина на 10 м більша від ширини городу. Знайти розміри саду, якщо його площа дорівнює 900 м^2, а площа городу — 1200 м^2.

● За умовою задачі складаємо таблицю.

	Довжина	Ширина	Площа
Сад	x м	y м	$xy = 900$
Город	$(x + 30)$ м	$(y - 10)$ м	$(x + 30)(y - 10) = 1200$

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 900; \\ (x+30)(y-10) = 1200. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{cases} xy = 900; \\ xy - 10x + 30y - 300 = 1200; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 900; \\ 900 - 10x + 30y - 300 = 1200; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 900; \\ -10x + 30y = 600; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 900; \\ x - 3y = -60; \end{cases} \quad \begin{cases} y(3y - 60) = 900; \\ x = 3y - 60; \end{cases}$$

$3y^2 - 60y - 900 = 0$; $y^2 - 20y - 300 = 0$; $y_1 = -10$; $y_2 = 30$.

Значення y_1 не задовольняє умову задачі (ширина саду не може виражатися від'ємним числом). Тому: $y = 30$; $x = 3y - 60 = 3 \cdot 30 - 60 = 30$.

Відповідь. 30 м; 30 м. ●

Рівень А

424. За 2 кг полуниць і 3 кг черешень заплатили 33 грн., а за 4 кг полуниць і 2 кг черешень — 38 грн. Скільки коштує 1 кг полуниць і скільки 1 кг черешень?

425. За 8 зошитів і 5 альбомів заплатили 9 грн. Скільки коштує один зошит і скільки один альбом, якщо 4 зошити дешевші від 6 альбомів на 4 грн.?

426. Знайдіть сторони прямокутника, периметр якого дорівнює 30 см, а площа — 56 см^2.

427. Сума двох чисел дорівнює 11, а їх добуток — 28. Знайдіть ці числа.

428. Різниця двох чисел дорівнює 10, а сума їх квадратів — 82. Знайдіть ці числа.

429. Добуток двох чисел дорівнює 64. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 12 більше від іншого.

430. Сума двох чисел дорівнює 2, а різниця їх квадратів — 16. Знайдіть ці числа.

431. Знайдіть сторони прямокутника, периметр якого дорівнює 28 дм, а діагональ — 10 дм.

432. Периметр прямокутника дорівнює 26 см, а сума площ квадратів, побудованих на двох його суміжних сторонах, дорівнює 89 см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

Рівень Б

433. Змішавши 20-відсотковий і 60-відсотковий розчини кислоти, отримали 800 г розчину, що містить 30% кислоти. Скільки грамів кожного розчину змішали?

434. За пачку друкарського паперу і 3 альбоми заплатили 25 грн. Після того як папір подешевшав на 10%, а альбоми подорожчали на 20%, за 3 пачки паперу і 2 альбоми заплатили 39 грн. Якою була початкова ціна пачки паперу й одного альбому?

435. Відомо, що 3 банки фарби і 2 банки лаку коштували 90 грн. Після того як фарба подешевшала на 10%, а лак — на 20%, за 4 банки фарби і 1 банку лаку заплатили 60 грн. Якою була початкова ціна банки фарби і банки лаку?

436. З міста *A* в місто *B*, відстань між якими дорівнює 210 км, одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість одного з них на 10 км/год більша від швидкості іншого, завдяки чому він приїхав у місто *B* на 30 хв швидше. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

437. Два екскаватори, працюючи разом, вирили котлован за 7 год 30 хв. За який час може вирити котлован кожен екскаватор, працюючи окремо, якщо одному з них потрібно на це часу на 8 год більше, ніж іншому?

438. Два трактори, працюючи разом, зорали поле за 2 дні. За скільки днів може зорати все поле кожен трактор, працюючи окремо, якщо один з них може зробити це на 3 дні швидше, ніж інший?

439. З бази відпочинку одночасно у протилежних напрямах вирушили дві групи туристів. Через 3 год відстань між ними дорівнювала 21 км. Знайдіть швидкість кожної групи, якщо відомо, що шлях завдовжки 6 км одна з них проходить на 30 хв швидше від іншої.

440. Відстань між містами *A* та *B* дорівнює 480 км. З цих міст одночасно назустріч один одному вийшли два потяги. Через 3 год руху їм до зустрічі залишалося пройти ще 60 км. Знайдіть швидкість кожного потяга, якщо шлях між містами *A* та *B* один з них проходить на 2 год швидше, ніж інший.

441. Два велосипедисти виїхали одночасно з пунктів *A* і *B* назустріч один одному. Через годину вони зустрілися і, не зупиняючись, продовжили рухатися з попередніми швидкостями. Один з них прибув у пункт *A* на 27 хв раніше, ніж інший — у пункт *B*. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста, якщо відстань між пунктами дорівнює 36 км.

442. З міста *A* в місто *B*, відстань між якими дорівнює 120 км, виїхав мотоцикліст, а через 40 хв назустріч йому з міста *B* — автомобіль. Мотоцикліст у місто *B* й автомобіль у місто *A* прибули одночасно. Знайдіть швидкості мотоцикліста та автомобіля, якщо мотоцикліст за 3 год проїжджає на 90 км більше, ніж автомобіль за 1 год і швидкість автомобіля не перевищує 120 км/год.

443. Резервуар, місткість якого дорівнює 25 м^3, можна наповнити водою через два крани за 2 год. Якщо перші 10 м^3 води пропустити через перший кран, а решту — через другий, то резервуар буде наповнено за 4 год. Який об'єм води проходить через кожний кран за 1 год?

444. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати деяке завдання за 10 год. Якщо спочатку перший робітник виконає половину завдання, а потім другий — решту, то завдання буде виконано за 22 год 30 хв. За який час кожний робітник, працюючи окремо, може виконати все завдання?

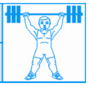
445. Кожний із двох принтерів друкує текстовий файл, обсяг якого дорівнює 36 сторінок. Перший принтер надрукував 6 сторінок за той самий час, за який другий надрукував 5 сторінок. Скільки сторінок друкує кожний принтер за хвилину, якщо перший закінчив роботу на 1,5 хв швидше від другого?

446. Батько і син можуть пофарбувати паркан, працюючи разом, за 4 год. За скільки годин може пофарбувати паркан кожний з них, працюючи окремо, якщо батькові для того, щоб пофарбувати $\frac{2}{3}$ паркану, потрібно часу на 1 год більше, ніж синові, щоб пофарбувати $\frac{1}{4}$ паркану?

447. Площа прямокутника дорівнює 4200 см^2. Якщо довжину прямокутника збільшити на 50 см, а ширину зменшити на 25 см, то площа не зміниться. Знайдіть сторони прямокутника.

448. Кілька учнів поділили порівну між собою 90 яблук. Якби учнів було на 3 менше, то кожний з них одержав би на 1 яблуко більше. Скільки було учнів?

Рівень В



449. Басейн можна наповнювати водою за допомогою двох насосів. Якщо перший насос увімкнути на 5 год, а потім другий — на 7 год, то буде наповнено $\frac{11}{20}$ басейну. Після цього, щоб наповнити басейн, потрібно ще 5 год спільної роботи обох насосів. За скільки годин може наповнити басейн кожний насос, працюючи окремо?

450. Двом працівникам було доручено виготовити партію однакових деталей. Після того як перший пропрацював 7 год та другий 4 год, виявилось, що вони виготовили $\frac{5}{9}$ усіх деталей. Пропрацювавши разом ще

4 год, вони встановили, що їм залишилося виготовити $\frac{1}{18}$ усіх деталей. За скільки годин перший робітник, працюючи окремо, може виготовити партію деталей?

451. Катер за 42 хв пройшов 5 км озером і 11 км річкою, що впадає в це озеро. Знайдіть швидкість катера у стоячій воді, якщо він за 2 год проходить за течією річки на 10 км менше, ніж за 3 год проти течії.

452. Відстань між пристанями *A* і *B*, що розташовані на річці, дорівнює 33 км. Моторний човен шлях від *A* до *B* і назад проходить за 3 год 20 хв. Знайдіть швидкість течії річки, якщо відомо, що 20 км, з яких 11 км — за течією річки і 9 км — проти течії, човен проходить за 1 год.

453. Кілька самоскидів перевезли щебінь, виділений для будівництва дороги, за 14 днів. Усі самоскиди виконували щодня однакову кількість ходок, перевозячи за кожну по 5 т щебеню. Якби самоскидів було на 4 більше і кожний робив щодня на 1 ходку більше, то щебінь було б перевезено за 10 днів. Якби ж самоскидів було на 10 більше і кожний робив щодня на 2 ходки більше, то щебінь було б перевезено за 7 днів. Скільки було самоскидів, скільки ходок виконував кожен з них за один день і скільки тонн щебеню було перевезено?

454. Із двох пунктів *A* і *B*, відстань між якими дорівнює 24 км, одночасно виїхали два автомобілі назустріч один одному. Після зустрічі автомобіль, що виїхав з пункту *A*, прибув у пункт *B* через 16 хв, а другий автомобіль — у пункт *A* через 4 хв. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

Вправи для повторення

455. Обчисліть:

а) $(5^3)^4 : 5^{10}$; **б)** $(4^{-5})^5 \cdot 4^{23}$; **в)** $(4^{-1})^8 \cdot (2^{-3})^{-3}$.

456. Розкладіть на множники:

а) $(a-b)^2 + \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b$; **б)** $a^2m + b^2 - abm - ab$.

457. Доведіть, що значення виразу $\frac{8a}{2a+5b} - \frac{100b^2}{4a^2-25b^2} : \left(1 - \frac{2a}{2a-5b}\right)$ дорівнює 4 для всіх допустимих значень a і b.

458. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{3x-5}{8} + \frac{3x+5}{6} = \frac{1}{2}$; **б)** $\frac{3}{x^2+4x+4} + \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$.

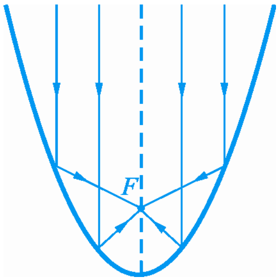
459*. Доведіть нерівність:

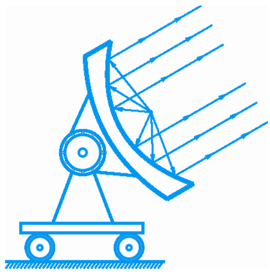
а) $2a^2 - 4ab + 4b^2 \geq 0$; **б)** $a^2 - 4a + b^2 - 2b + 6 > 0$;

в) $2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b$; **г)** $a^6 + b^6 \geq a^2b^2(a^2 + b^2)$.

Цікаво знати

Парабола має низку цікавих властивостей. Уявимо собі, що парабола може відбивати світлові промені. Якщо на параболу падатиме пучок променів паралельно її осі симетрії, то після відбивання вони пройдуть через одну точку, яку називають фокусом параболи (на рисунку — це точка F). Навпаки, якщо у фокусі параболи помістити джерело світла, то промені, відбившись від параболи, підуть паралельно її осі симетрії.





На цій властивості параболи ґрунтується будова параболічних дзеркал. Поверхня такого дзеркала утворюється внаслідок обертання параболи навколо своєї осі. Параболічні дзеркала використовують для створення прожекторів, телескопів, автомобільних фар тощо.

За певних умов камінь, кинутий під кутом до горизонту, рухається «по параболі». Те ж саме можна сказати і про гарматний снаряд.

Запитання і вправи для повторення § 2

1. Що називають функцією? Які є способи задання функції?

2. Що називають областю визначення і областю значень функції?

3. Що називають графіком функції?

4. Що називають нулями функції? Знайдіть нулі функції $y = x^2 - 4$.

5. Яку функцію називають зростаючою на проміжку; спадною? Наведіть приклади.

6. Як, користуючись графіком функції $y = x^2$, побудувати графік функції: $y = x^2 + 3$; $y = (x - 1)^2$; $y = (x - 1)^2 + 3$; $y = -x^2$?

7. Які властивості має функція $y = ax^2$?

8. Яку функцію називають квадратичною? Що є графіком квадратичної функції і як його побудувати?

9. Як розв'язують квадратні нерівності? Поясніть це на прикладі нерівності $x^2 + 2x - 3 < 0$.

10. Як розв'язати систему рівнянь із двома змінними графічним способом?

11. Як розв'язати систему рівнянь із двома змінними способом підстановки?

460. Функція задана формулою $f(x) = 2x^2 - 4$.

а) Знайдіть: $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$.

б) Знайдіть значення аргументу, яким відповідає значення функції: –2; 5.

в) Для яких додатних значень x значення функції удвічі більше від значення аргументу?

461. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \dfrac{x+1}{2x-3}$; **б)** $y = \dfrac{1}{x^2-4x-12}$; **в)** $y = \sqrt{3-5x}$;

г) $y = \sqrt{3x+12}$; **д)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-7x+12}}$; **е)** $y = \sqrt{9-3x} + \dfrac{1}{\sqrt{2x+6}}$.

462. Чи належить число 12 області значень функції:

а) $y = -x + 3$; **б)** $y = -x^2 + 10$; **в)** $y = x^2 - 12x + 44$?

Побудуйте графік функції:

463. **а)** $y = 2x - 1$; **б)** $y = -3x^2$; **в)** $y = 0{,}25x^3$, де $-2 \le x \le 2$.

464. **а)** $y = x^2 - 1$; **б)** $y = \dfrac{4}{x} - 1$; **в)** $y = -\sqrt{x} + 1$.

465. **а)** $y = (x - 1{,}5)^2$; **б)** $y = \sqrt{x+2}$; **в)** $y = \dfrac{2}{x-2}$.

466. **а)** $y = (x + 2)^2 - 2$; **б)** $y = \dfrac{1}{x-1} + 2$; **в)** $y = -\sqrt{x-3} + 2$.

467. **а)** $y = x^2 - 6x + 5$; **б)** $y = 3x^2 + 9x + 6$; **в)** $y = -2x^2 + 2x - 1$.

468. Графік функції $y = ax^2$ проходить через точку $A(-2; -2)$. Знайдіть a та побудуйте графік функції. Чи проходить цей графік через точку $B(4; -8)$?

469. Графік функції $y = \dfrac{k}{x-2}$ проходить через точку $M(1; 2)$. Знайдіть k та побудуйте графік функції. Чи проходить цей графік через точку $N(4; 1)$?

470. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4x + 3$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) усі значення x, для яких функція набуває від'ємних значень;

в) проміжок, на якому функція спадає.

471. Побудуйте графік функції $y = -x^2 - 2x + 3$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) усі значення x, для яких функція набуває від'ємних значень;

в) проміжок, на якому функція зростає; спадає.

472. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4$. Користуючись графіком, знайдіть область значень функції. Чи є дана функція парною?

Побудуйте графік функції:

473. **а)** $y = \begin{cases} 2x-3, \text{ якщо } x \le 1; \\ x^2 - 2, \text{ якщо } x > 1; \end{cases}$ **б)** $y = \begin{cases} x+1, \quad \text{якщо } x < 0; \\ 1-\sqrt{x}, \text{ якщо } x \ge 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} -4, \quad \text{якщо } x \le -2; \\ -x^2, \text{ якщо } -2 < x < 1; \\ x-2, \text{ якщо } x \ge 1; \end{cases}$ **г)** $y = \begin{cases} -x-1, \quad \text{якщо } x < -1; \\ \sqrt{1-x^2}, \text{ якщо } -1 \le x \le 1; \\ x-1, \quad \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

474*. **а)** $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x-1} + x^2$; **б)** $y = x^2 + 2|x-1|$;

в) $y = |x^2 + 4x|$; **г)** $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$;

д) $y = \dfrac{|x|}{x}$; **е)** $y = x^2 - \dfrac{x-1}{|x-1|}$.

475. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

а) $y = 3x^2 - 3x + 1$ і $y = -x + 2$; **б)** $y = x^2 - 2x - 5$ і $y = -x^2 + 4x + 3$.

476. За допомогою графіків функцій встановіть, чи має корені рівняння:

а) $-x - 3 = \sqrt{x+4}$; **б)** $x^2 + 2x = \sqrt{x-1}$; **в)** $\dfrac{4}{x-2} = 4 - 2x$.

477. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $(x-1)^2 = \sqrt{x-1}$; **б)** $2 - x^2 = \sqrt{x}$; **в)** $\dfrac{6}{x-1} = x^2 - 2x + 6$.

478*. Встановіть кількість коренів рівняння $|2|x| - 1| = x - a$ залежно від значень параметра.

Розв'яжіть нерівність:

479. **а)** $x^2 \le 25$; **б)** $x^2 > 25$; **в)** $-x^2 + 100 \ge 0$;

г) $x^2 - 7x < 0$; **д)** $-x^2 + 3x \le 0$; **е)** $-\dfrac{1}{3}x^2 + 3x \ge 0$.

480. **а)** $x^2 - 2x - 8 > 0$; **б)** $-x^2 - 4x + 5 \le 0$; **в)** $3x^2 + 4x - 7 < 0$.

481. **а)** $(x - 3)(x + 3) > 2(x + 3)$; **б)** $(x - 2)(4x + 1) < (x + 1)^2 + 3$.

482. **а)** $\frac{x+1}{3} - \frac{x}{6} > \frac{x^2+2x}{24}$; **б)** $\frac{1}{12}(x^2-4) - \frac{1}{16}(x-4) < -\frac{1}{24} - \frac{x}{48}$.

483. **а)** $(x - 2)(x + 4) < 0$; **б)** $(3x - 1)(2x - 4) \ge 0$;

в) $(x - 8)(x - 1)(x + 3)(x + 6) > 0$; **г)** $(4x - 7)(3x + 1)(2 - x) \ge 0$.

484*. **а)** $(x^2 - 3x)(x^2 + 7x + 12) \le 0$; **б)** $\sqrt{(x-1)(2-x)(x+2)} \ge 0$.

485*. **а)** $(x+6)\sqrt{x^2 - x - 20} > 0$; **б)** $\frac{x+3}{\sqrt{x^2+x-12}} \ge 0$.

486. Знайдіть проміжки знакосталості функції $y = 2x^2 - 11x + 5$.

487. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} x^2 - 7x - 8 > 0; \\ 45 - 3x \ge 0. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2 - 2x \ge 3; \\ x^2 - 2x - 8 < 0. \end{cases}$

488*. Знайдіть усі значення параметра, для кожного з яких нерівність виконується для всіх значень x:

а) $x^2 + 2x + a > 0$; **б)** $mx^2 + (m - 1)x + m - 1 < 0$.

489*. Знайдіть усі значення a, для кожного з яких сума квадратів коренів рівняння $x^2 - ax + a - 1 = 0$ є найменшою.

490*. Для яких значень параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - ax + a^2 - 3a - 2 = 0$ є найбільшою?

491. Побудуйте графік рівняння:

а) $y + x^2 - 4 = 0$; **б)** $x^2 + (y + 2)^2 = 4$; **в)*** $x^2 - |y| = 4$.

492. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0; \\ x + y = 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y = 2x^2 - 1; \\ y - \sqrt{x} = 0; \end{cases}$ **в)*** $\begin{cases} |x - y| = 1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь:

493. **а)** $\begin{cases} 2x - y = 0; \\ x^2 + y = 3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x + 3y = 1; \\ x^2 + 4xy + y^2 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 4; \\ 4x + 3y = 2; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x - 2y = 3; \\ (x - 2)(y + 2) = x^2 + 2xy; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x+y=6; \\ \dfrac{1}{2x}+\dfrac{3}{2y}=1; \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} x+y=3; \\ \dfrac{4}{x+2}-\dfrac{1}{y-2}=1. \end{cases}$

494*.а) $\begin{cases} x^2+xy=10; \\ y^2+xy=15; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2+y^2=5; \\ xy-x-y+1=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3+y^3=35; \\ xy(x+y)=30; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} (x+y)^2-5(x+y)+4=0; \\ (x-y)^2-(x-y)-2=0. \end{cases}$

495*. Для яких значень m два рівняння $2x^2-(3m+2)x+12=0$ і $4x^2-(9m-2)x+36=0$ мають спільний корінь?

496*. Знайдіть усі значення параметра, для кожного з яких система рівнянь $\begin{cases} 4x^2-3y^2=24; \\ y-2x+m=0 \end{cases}$ має лише один розв'язок.

497. Периметр прямокутника дорівнює 28 см, а площа на 12 см^2 більша від площі квадрата, сторона якого дорівнює меншій стороні прямокутника. Знайдіть сторони прямокутника.

498. Добуток двох додатних чисел у 16 разів більший від їх суми. Знайдіть ці числа, якщо перше число на 20 більше від потроєного другого числа.

499. У залі було 160 місць, розміщених однаковими рядами. Після того як число місць у кожному ряді збільшили на 2 і додали ще один ряд, стало 210 місць. Скільки рядів стало в залі, якщо їх кількість більша від кількості місць в одному ряду?

500. З пунктів A та B, відстань між якими дорівнює 150 км, назустріч один одному виїхали одночасно мотоцикліст і велосипедист. Через дві години вони зустрілися і, не зупиняючись, продовжили рух. Мотоцикліст прибув у пункт B на три години раніше, ніж велосипедист у пункт A. Знайдіть швидкість велосипедиста.

501*. Із двох міст одночасно виїхали назустріч один одному два автомобілі й зустрілися через 2 год. За який час подолає шлях між містами кожний автомобіль, якщо перший автомобіль за 1,5 год і другий за 1 год разом долають $\dfrac{2}{3}$ цього шляху?

502*. Майстер і учень, працюючи разом, виконують завдання на 1 год швидше, ніж майстер, працюючи сам, але на 0,5 год довше, ніж майстер і два учні. За який час виконає дане завдання один учень, працюючи сам?

Завдання для самоперевірки № 3

Рівень 1

1. Яке з чисел є розв'язком нерівності $x^2 - 5 < 0$:

а) 3; **б)** –3; **в)** –2; **г)** 2,5?

2. Вкажіть множину розв'язків нерівності $x^2 < 9$:

а) $(-\infty; 3)$; **б)** $(-\infty; -3)$;

в) $(-3; 3)$; **г)** $(-\infty; -3)\cup(3; +\infty)$.

3. Рівняння $x^2 + 2x - 3 = 0$ має корені –3 і 1. Вкажіть множину розв'язків нерівності $x^2 + 2x - 3 \ge 0$:

а) $(-3; 1)$; **б)** $[-3; 1]$;

в) $(-\infty; -3]\cup[1; +\infty)$; **г)** $(-\infty; -3)\cup(1; +\infty)$.

4. Яка з пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10; \\ y - 2x = 5 \end{cases}$:

а) (3; 1); **б)** (3; –1); **в)** (–3; 1); **г)** (–3; –1)?

5. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y = 5; \\ y = x - 1 \end{cases}$ та вкажіть правильну відповідь:

а) (–3; –4); (2; 1); **б)** (3; 2); (–2; –3);

в) (–3; –4); (–2; –3); **г)** (3; 2); (2; 1).

6. Стіл і 4 стільці коштують 350 грн., до того ж, стіл дорожчий від стільця на 100 грн. Знайдіть ціну стола й ціну одного стільця.

Нехай стіл коштує x грн., а стілець — y грн. Яка система рівнянь відповідає умові задачі?

а) $\begin{cases} x + 4y = 350; \\ y - x = 100; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x + 4y = 350; \\ x - y = 100; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 4x + y = 350; \\ y - x = 100; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 4x + y = 350; \\ x - y = 100. \end{cases}$

Рівень 2

7. Розв'яжіть нерівність $x^2 - 3x - 4 > 0$.

8. Побудуйте графік рівняння $x^2 + y^2 = 16$.

9. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} y = x^2; \\ 2x - y = 0. \end{cases}$

10. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + 2y = 5; \\ y - x = 1. \end{cases}$

11. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 12, а добуток — 35.

Рівень 3

12. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{-4x^2-7x+2}$.

13. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x^2-6x+8>0; \\ 3x-2\le 5x+4. \end{cases}$

14. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=8; \\ x^2-y=2. \end{cases}$

15. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+4y=1; \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{5y}=-1. \end{cases}$

16. Майстер і учень, працюючи разом, можуть виготовити 60 однакових деталей за 12 год. Якби майстер виготовив половину усіх деталей, а після нього учень — решту деталей, то на це витратили б 25 год. За який час виготовить партію деталей майстер, працюючи сам, якщо відомо, що він це зробить швидше, ніж учень?

Рівень 4

17. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{6x^2+5x-4}-\dfrac{2}{\sqrt{3-2x}}$.

18. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $x^2-(a-2)x-3a+6=0$ не має коренів.

19. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2+9y^2=13; \\ xy=2. \end{cases}$

20. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2+(y-2)^2=9; \\ y+|x|=a, \end{cases}$ якщо $a=0$; $a=5$?

21. З пункту A в пункт B виїхав мотоцикліст і рухався зі швидкістю 40 км/год. У той же час назустріч йому з пункту B виїхав велосипедист і, проїхавши 4 км, зустрів мотоцикліста. Коли мотоцикліст прибув у пункт B, велосипедист перебував на відстані 15 км від пункту A. Знайдіть відстань між пунктами та швидкість велосипедиста.

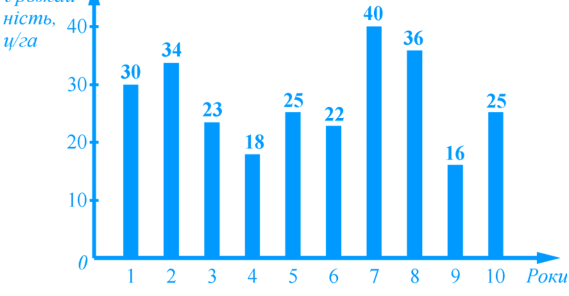
§ 3

ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Жодної достовірності немає в науках там, де не можна застосувати жодну з математичних наук, і в тому, що не має зв'язку з математикою.

Леонардо да Вінчі

У цьому параграфі ми пригадаємо прикладні застосування математики, а також з'ясуємо, що таке випадкова подія, ймовірність випадкової події, що вивчає математична статистика.



17. Математичне моделювання

Вам, мабуть, уже доводилося бачити моделі човна, літака, автомобіля, виготовляти моделі куба, прямокутного паралелепіпеда. Кожна модель, залежно від її призначення, відображає певні властивості оригіналу.

Математична модель — це опис якогось реального об’єкта чи процесу мовою математики.

У попередніх класах для моделювання реальних процесів ми використовували рівняння, нерівності, системи рівнянь і нерівностей, функції тощо.

Розв’язування задач з будь-якої галузі з використанням математики передбачає такі три кроки:

1) формулюють задачу мовою математики, тобто будують математичну модель;

2) розв’язують одержану математичну задачу;

3) записують математичний розв’язок мовою, якою була сформульована початкова задача.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Знайти, скільки потрібно квадратних плиток зі стороною 15 см, щоб застелити підлогу ванної кімнати, розміри якої 3,3 м × 2,8 м.

Побудуємо математичну модель задачі. Нехай для застелення підлоги потрібно x плиток. Площа однієї плитки дорівнює $0{,}15 \cdot 0{,}15 = 0{,}0225$ (м^2), площа x плиток — $0{,}0225x$ м^2, а площа підлоги — $3{,}3 \cdot 2{,}8 = 9{,}24$ (м^2). Площа усіх плиток має бути не меншою від площі підлоги:

$$0{,}0225x \geq 9{,}24.$$

Одержана нерівність і є математичною моделлю задачі.

Розв’яжемо математичну задачу, тобто нерівність:

$$0{,}0225x \geq 9{,}24; \quad x \geq 9{,}24 : 0{,}0225; \quad x \geq 410{,}(6).$$

Запишемо одержаний результат мовою вихідної задачі: щоб застелити підлогу, потрібно не менше ніж 411 плиток.

В умові даної задачі використано нематематичні поняття. Такі задачі називають *прикладними*. Числове значення відповіді для прикладних задач здебільшого буває наближеним.

Приклад 2. На реостат подали напругу 22 В. Коли напругу збільшили на 10%, а опір реостата зменшили на 9 Ом, то сила струму в реостаті збільшилася на 1,1 А. Знайти початковий опір реостата.

Побудуємо математичну модель задачі. Нехай початковий опір реостата дорівнював x Ом, а початкова сила струму — y А. Оскільки початкова напруга дорівнювала 22 В, то $22 = yx$ ($U = IR$ — закон Ома для ділянки кола).

Коли напруга стала $22 \cdot 1{,}1 = 24{,}2$ (В) (збільшили на 10%), а опір став $(x - 9)$ Ом, то сила струму стала $(y + 1{,}1)$ А. Маємо: $24{,}2 = (y + 1{,}1)(x - 9)$.

Математичною моделлю задачі є система рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 22; \\ (x-9)(y+1{,}1) = 24{,}2. \end{cases}$$

Розв'яжемо одержану математичну задачу.

$$\begin{cases} xy = 22; \\ (x-9)(y+1{,}1) = 24{,}2; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 22; \\ xy - 9y + 1{,}1x - 9{,}9 = 24{,}2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 22; \\ 22 - 9y + 1{,}1x - 9{,}9 = 24{,}2; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 22; \\ 1{,}1x - 9y = 12{,}1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \cdot \dfrac{1{,}1x - 12{,}1}{9} = 22; \\ y = \dfrac{1{,}1x - 12{,}1}{9}; \end{cases}$$

$$1{,}1x^2 - 12{,}1x = 198; \quad x^2 - 11x - 180 = 0;$$

$$x_1 = -9, \; x_2 = 20.$$

Число –9 умову задачі не задовольняє.

Запишемо результат мовою вихідної задачі: початковий опір реостата дорівнював 20 Ом.

Приклад 3. З пункту A в пункт B виїхав велосипедист і рухався зі швидкістю 20 км/год, а через півгодини услід за ним виїхав мотоцикліст і рухався зі швидкістю 36 км/год. Через скільки часу після виїзду велосипедиста його наздожене мотоцикліст?

Можна побудувати різні математичні моделі цієї задачі. Побудуємо математичну модель за допомогою графіків функцій. За t год велосипедист проїде $20t$ км, а мотоцикліст, рухаючись на 0,5 год менше, за $(t - 0{,}5)$ год проїде $36(t - 0{,}5)$ км. На рисунку 66 зображено графіки функцій $s = 20t$ й $s = 36(t - 0{,}5)$, які виражають залежність шляхів, пройдених велосипедистом і мотоциклістом, від часу руху велосипедиста. Щоб відповісти на запитання задачі, потрібно знайти абсцису точки перети-

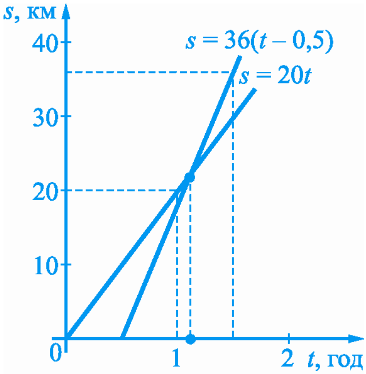


Рис. 66

ну графіків функцій. З рисунка знаходимо, що $t \approx 1{,}1$ год. Отже, мотоцикліст наздожене велосипедиста приблизно через 1,1 год після виїзду велосипедиста.

Для тих, хто хоче знати більше

Історія науки знає чимало прикладів, коли в межах вдало побудованої математичної моделі за допомогою обчислень вдавалося передбачити існування нових фізичних явищ та об'єктів. Ми вже наводили один з таких прикладів: опираючись на математичні моделі, астрономи Дж. Адамс (Англія) у 1845 році й У. Левер'є (Франція) у 1846 році незалежно один від одного дійшли висновку про існування невідомої тоді ще планети і вказали її розміщення. За розрахунками У. Левер'є астроном Г. Галле (Німеччина) знайшов цю планету. Її назвали Нептуном.

Англійський фізик П. Дірак у 1928 році отримав рівняння руху електрона. З розв'язку цього рівняння випливало існування елементарної частинки, яка відрізняється від електрона лише знаком електричного заряду. Таку частинку у 1932 році відкрив фізик К. Д. Андерсон (США) і назвав її позитроном.

Метод математичного моделювання відіграє неабияку роль у корабле- та авіабудуванні, економіці тощо.

Усно

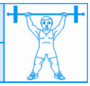
Побудуйте математичну модель задачі (503–505):

503. У залі є 400 місць для глядачів. Усі ряди містять однакову кількість місць. Скільки рядів у залі та скільки місць є в кожному ряді?

504. У залі є 400 місць для глядачів. Число рядів на 9 менше від числа місць у кожному ряді. Скільки рядів у залі та скільки місць має кожний ряд?

505. Учень купив кілька зошитів по 80 к. і витратив на покупку менше, ніж 3 грн. Скільки зошитів він міг купити?

Рівень А



Побудуйте математичну модель задачі та розв'яжіть задачу (506–525):

506. У 100 г гарбуза міститься 8 мг вітаміну С. Скільки потрібно взяти гарбуза, щоб отримати 100 мг вітаміну С?

507. Із 10 кг насіння льону виходить 3,7 кг олії. Скільки олії вийде зі 150 кг такого насіння?

508. На пошиття костюма витратили 3,2 м тканини. Яку найбільшу кількість таких костюмів можна пошити, маючи 60 м цієї ж тканини?

509. Маса 100 зернин не перевищує 80 г, а маса 50 таких же зернин не менша ніж 35 г. Якою може бути маса однієї зернини?

510. Від квадратного листа жерсті відрізали смугу завширшки 25 см. Знайдіть початкові розміри листа, якщо площа його частини, утвореної після відрізання смуги, дорівнює 4400 см^2.

511. Автомобіль долає шлях між двома містами за 2,2 год, рухаючись зі швидкістю 60 км/год. На скільки потрібно збільшити швидкість автомобіля, щоб він подолав цей шлях за 2 год?

512. З пункту *A* виїхав мотоцикліст, а через 1,5 год услід за ним — автомобіль. Швидкість автомобіля дорівнює 80 км/год, а швидкість мотоцикліста — 40 км/год. Через який час після свого виїзду автомобіль наздожене мотоцикліста?

Рівень Б

513. Шайби виготовляють із квадратних заготовок зі стороною 60 мм. Який завдовжки повинен бути лист сталі, щоб з нього можна було виготовити 52 заготовки, якщо ширина листа дорівнює 300 мм?

514. Із прямокутного листа жерсті, розміри якого 30 см × 48 см, потрібно виготовити відкриту коробку. Для цього по кутах прямокутника вирізують квадрати, а потім загинають краї листа (рис. 67). Знайдіть, якою завдовжки має бути сторона вирізаного квадрата, щоб площа дна коробки дорівнювала 1008 см^2?

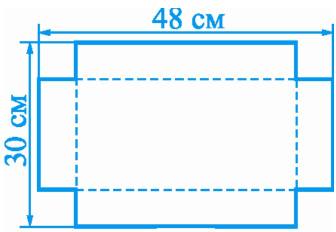


Рис. 67

515. Ширина кімнати менша від довжини на 1 м і від діагоналі — на 2 м. Знайдіть площу кімнати.

516. Комп'ютерний клуб планує працювати 9 год на день й обслуговувати 38 членів клубу. Обслуговування кожного відвідувача клубу має відбуватися щоденно за окремим комп'ютером протягом 1,5 год. Яку найменшу кількість комп'ютерів потрібно клубові, щоб обслуговувати своїх відвідувачів?

517. Вал з меншим діаметром робить за хвилину на 400 обертів більше і здійснює один оберт на 0,2 с швидше, ніж вал з більшим діаметром. Скільки обертів робить кожний вал за хвилину?

518. З першої ділянки зібрали 2880 ц пшениці, а з другої, площа якої на 12 га менша, — 2160 ц. Знайдіть площу кожної ділянки, коли відомо, що з кожного гектара першої ділянки зібрали пшениці на 4 ц більше, ніж з кожного гектара другої.

519. Катер пройшов річкою шлях від пристані *A* до пристані *B* і повернувся назад. Його швидкість у стоячій воді дорівнює 18 км/год, а швидкість течії річки — 3 км/год. Відомо, що час руху катера менший, ніж 2 год, але більший, ніж 1,5 год. Якою може бути відстань між пристанями?

Рівень B

520. Для визначення глибини підземної порожнини спелеолог кинув на дно порожнини камінь і через 4 с почув звук від його падіння. Знайдіть глибину порожнини, вважаючи, що швидкість звуку дорівнює 340 м/с, а камінь при падінні за перші t с пролітає $5t^2$ м.

521. Теплохід від Києва до Херсона йде 5 діб, а від Херсона до Києва — 7 діб. Скільки діб плистиме пліт від Києва до Херсона?

522. Під стоянку автомобілів потрібно відгородити прямокутну ділянку. Є матеріал для огорожі завдовжки 300 м. З однієї сторони ділянку має обмежувати заводська стіна. Якими мають бути сторони ділянки, щоб її площа була найбільшою?

523. Потрібно виготовити вікно у формі прямокутника, доповненого півкругом (див. рис. 68). Периметр вікна має дорівнювати $(4 + \pi)$ м. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб вікно пропускало якнайбільше світла?

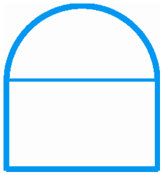


Рис. 68

524. Вантаж, загальна маса якого більша від 40 т, але менша від 60 т, мали перевезти на автомобілях, завантажуючи їх порівну. В останній момент для перевезення вантажу виділили на 2 автомобілі менше, а тому навантажили на кожний автомобіль на 1 т вантажу більше, ніж планували раніше. Знайдіть масу вантажу.

525. Сівалка обладнана ящиком, що вміщує 250 кг зерна. Якою повинна бути ширина захвату сівалки, щоб за швидкості 3,2 км/год і норми висіву 125 кг зерна на 1 га зерна у ящику вистачило б не більше ніж на 2 год роботи сівалки, а за швидкості 4 км/год і тієї ж норми висіву — не менше ніж на 1,25 год роботи?

Вправи для повторення

526. Розв'яжіть нерівність:

а) $(2{,}5x + 1)(4x - 3) - 5x(2x + 7) < 4$;

б) $(3 - 4x)^2 - (8x - 1)(2x + 9) - 11 > 0$.

527. Відомо, що $5 < x < 6$ і $9 < y < 10$. Оцініть значення виразу:

а) $2x$; **б)** $x - y$; **в)** $x + 2y$.

528. Для яких значень k графік функції $y = x^2 - 8x + 5 + k$ має з віссю x єдину спільну точку?

529. Скільки мілілітрів 50%-го розчину сульфатної кислоти потрібно змішати з 10%-м розчином цієї ж кислоти, щоб одержати 200 мілілітрів 25%-го розчину?

18. Відсоткові розрахунки. Формула складних відсотків

1. Задачі на відсотки. Ви знаєте, що відсоток — це одна сота, тобто $1\% = \frac{1}{100} = 0,01$. Тоді:

$$15\% = \frac{15}{100} = 0,15; \quad p\% = \frac{p}{100}; \quad 100\% = \frac{100}{100} = 1.$$

Ви навчилися також розв'язувати основні типи задач на відсотки, а саме — знаходити відсотки від числа, число за його відсотками, відсоткове відношення двох чисел.

Нагадаємо:

1) *щоб знайти p% від числа a, потрібно число a помножити на дріб* $\frac{p}{100}$;

2) *щоб знайти число, p% якого дорівнюють b, потрібно число b поділити на дріб* $\frac{p}{100}$;

3) *щоб знайти, скільки відсотків становить число a від числа b, потрібно поділити a на b і записати результат у відсотках.*

Наприклад:

1) 15% від числа 75 дорівнюють $75 \cdot \frac{15}{100} = 11,25$;

2) число, 15% якого дорівнюють 75, становить $75 : \frac{15}{100} = \frac{75 \cdot 100}{15} = 500$;

3) відсоткове відношення чисел 32 і 160 дорівнює $\frac{32}{160} = 0,2 = 20\%$.

Розглянемо складніші задачі на відсотки.

Задача 1. Зимова куртка коштувала 200 грн. З настанням весни на куртку знизили ціну на 10%, але продали лише тоді, коли нову ціну зменшили ще на 10%. На скільки відсотків ціна, за якою продали куртку, менша від початкової?

Розв'язання. Після першого зниження ціну зменшили на $200 \cdot 0{,}1 = 20$ (грн.), і куртка стала коштувати $200 - 20 = 180$ (грн.).

Після другого зниження ціну зменшили на $180 \cdot 0{,}1 = 18$ (грн.). У результаті двох знижень ціна куртки зменшилася на $20 + 18 = 38$ (грн.).

38 грн. від 200 грн. становить: $\frac{38}{200} \cdot 100\% = 19\%$.

Отже, початкову ціну зменшили на 19%.

Відповідь. 19%. •

Для розв'язання цієї задачі потрібно було знаходити відсотки від числа та відсоткове відношення двох чисел. Ціну куртки після зниження на 10% можна було знайти так:

$$200 - 200 \cdot \frac{10}{100} = 200 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 200 \cdot 0{,}9 = 180 \text{ (грн.)}.$$

Якщо число а зменшити на р%, то одержимо число $a\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Якщо число а збільшити на р%, то одержимо число $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Задача 2. Вкладник зняв зі свого рахунку в банку 20% усіх грошей, а наступного дня він зняв 10% решти. Після цього на його рахунку залишилося 360 грн. Скільки грошей було на рахунку спочатку?

Розв'язання. Нехай на рахунку вкладника спочатку було x грн. Після першого зняття грошей на рахунку залишилося $100\% - 20\% = 80\%$ грошей початкового внеску. З нової суми було знято $80\% \cdot 0{,}1 = 8\%$ початкового внеску.

Вкладник зняв за два рази $20\% + 8\% = 28\%$ початкового внеску, а залишилося $100\% - 28\% = 72\%$.

360 грн. — 72%

x грн. — 100%

$$x = \frac{360 \cdot 100}{72} = 500 \text{ (грн.)}.$$

Відповідь. 500 грн. •

Задача 3. Є два сплави із 30 і 10-відсотковим умістом міді. Скільки кілограмів кожного сплаву потрібно взяти, щоб одержати 6 кг нового сплаву із 15-відсотковим умістом міді?

Розв'язання. Нехай потрібно взяти x кг першого сплаву (із 30-відсотковим умістом міді). Тоді другого сплаву потрібно взяти $(6 - x)$ кг.

Перший сплав містить 30% міді, а другий — 10%. Тому x кг першого сплаву містять $0{,}3x$ кг міді, а $(6 - x)$ кг другого сплаву — $0{,}1(6 - x)$ кг міді. Новий сплав має містити $0{,}3x + 0{,}1(6 - x)$ кілограмів міді.

З іншого боку, 6 кг нового сплаву мають містити 15%, або $6 \cdot 0{,}15 = 0{,}9$ (кг) міді. Маємо рівняння:

$$0{,}3x + 0{,}1(6 - x) = 0{,}9.$$

Розв'язавши рівняння, знайдемо: $x = 1{,}5$.

Отже, потрібно взяти 1,5 кг першого сплаву і $6 - 1{,}5 = 4{,}5$ (кг) другого сплаву.

Відповідь. 1,5 кг; 4,5 кг. ●

2. Формула простих відсотків. Працівникам фінансових установ доводиться проводити розрахунки, пов'язані з нарахуванням відсоткових грошей. Розглянемо такі задачі в загальному випадку.

Нехай банк нараховує вкладникам щомісяця p% від внесеної суми. Клієнт зробив внесок у розмірі A_0 грн. Потрібно знайти, яка сума буде на його рахунку через n місяців.

Нараховуючи щомісяця по p% від A_0 грн., за n місяців банк нарахує pn% від A_0 грн. або $A_0 \cdot \frac{pn}{100}$ грн. Через n місяців клієнт матиме на рахунку $A_0 + A_0 \cdot \frac{pn}{100} = A_0\left(1 + \frac{pn}{100}\right)$ (грн.).

Позначимо цю суму через A_n, тоді матимемо формулу

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{pn}{100}\right),$$

яку називають *формулою простих відсотків*. За цією формулою проводять обчислення, пов'язані з нарахуванням пені, амортизацією (зношуваністю) механізмів, зміною ціни тощо.

3. Формула складних відсотків. Нехай вкладник вніс до банку A_0 грн. під p% річних. Суму A_0 грн. називають *початковим капіталом*.

Через рік банк нарахує йому p%, або $A_0 \cdot \frac{p}{100}$ грн. *відсоткових грошей*. Отже, на рахунку вкладника стане на p% грошей більше, а саме:

$$A_0 + A_0 \cdot \frac{p}{100} = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ (грн.)} — \textit{нарощений капітал}.$$

За другий рік йому будуть нараховані p% від нової суми. Ця сума зросте на p% і становитиме

$$A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right) = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 \text{ (грн.)}.$$

Через n років нарощений капітал становитиме $A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ грн.

Отже, початковий капітал A_0, покладений у банк під p% річних, через n років стане нарощеним капіталом A_n, що обчислюють за формулою:

$$\mathbf{A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n},$$

яку називають *формулою складних відсотків*.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Вартість нереалізованого товару через кожні 5 днів зменшують на 2% від початкової вартості. Вважаючи, що початкова вартість становила 400 грн., обчислити вартість цього товару: **а)** на 6-й день; **б)** на 16-й день; **в)** на 26-й день.

● На 6-й день вартість товару зменшують на 2%; на 16-й день — зменшують 3-разово на 2%; на 26-й день — зменшують 5-разово на 2%. Тому за формулою простих відсотків знаходимо:

а) $A_1 = 400\left(1-\frac{2}{100}\right) = 392$ (грн.);

б) $A_3 = 400\left(1-\frac{2\cdot 3}{100}\right) = 376$ (грн.);

в) $A_5 = 400\left(1-\frac{2\cdot 5}{100}\right) = 360$ (грн.). ●

Вправа 2. Вкладник вніс до банку 20000 грн. під 14% річних (накопичувальний вклад). Скільки грошей буде на рахунку вкладника через 3 роки?

● За формулою складних відсотків знаходимо:

$A_3 = 20000(1 + 0{,}14)^3 = 29630{,}88$ (грн.). ●

Усно

530. Знайдіть:

а) 20% від 10; **б)** 150% від 20.

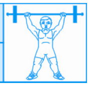
531. Знайдіть число:

а) 10% якого дорівнюють 7; **б)** 50% якого дорівнюють 15.

532. Знайдіть відсоткове відношення чисел:

а) 5 і 25; **б)** 60 і 30.

Рівень А



533. З молока одержують 23% вершків за масою. Скільки кілограмів вершків можна отримати із 250 кг молока?

534. Магнітний залізняк містить 70% заліза за масою. Скільки тонн заліза містять 11,7 т магнітного залізняка?

535. Бронза — сплав, який містить 85% міді й 15% олова. Скільки міді й олова потрібно взяти, щоб одержати 240 кг бронзи?

536. Із 800 г сирого м’яса одержали 520 г вареного. Скільки відсотків маси втратило сире м’ясо під час варіння?

537. У виборах взяли участь 588 із 640 виборців села. Скільки відсотків виборців взяли участь у виборах?

538. Скільки грамів солі потрібно взяти, щоб приготувати 15%-й її розчин, маючи 340 г води?

539. Скільки грамів води потрібно взяти, щоб приготувати 30%-й розчин солі, маючи 360 г солі?

540. За несвоєчасну сплату боргу нараховують 3% пені за кожний день неоплати. Яку суму доведеться заплатити через 10 днів після строку сплати 500 грн. боргу?

541. Новий комп’ютер купили за 3200 грн. Щороку на його амортизацію припадає 10% від початкової ціни. Скільки коштуватиме комп’ютер через 4 роки?

542. Вкладник вніс до банку 2000 грн. під 11% річних. На скільки більше від внесеної суми він зможе одержати грошей через 3 роки?

543. Вкладник вніс до банку 1000 грн. під 10% річних. Яку суму він матиме на рахунку через 3 роки?

Рівень Б

544. У січні підприємство виготовило 750 одиниць продукції, у лютому — 800 одиниць, у березні — 780 одиниць.

а) На скільки відсотків збільшилось виробництво продукції в лютому порівняно із січнем?

б) На скільки відсотків зменшилось виробництво продукції в березні порівняно з лютим?

545. Заробітна плата робітника двічі підвищувалася на одне й те ж число відсотків та із суми 800 грн. зросла до 1058 грн. На скільки відсотків підвищувалася заробітна плата щоразу?

546. За якої відсоткової ставки на місяць від початкової суми вклад на суму 2000 грн. збільшиться за рік до 2240 грн.?

547. На вступному іспиті з математики 15% абітурієнтів не розв'язали правильно жодної задачі, 144 абітурієнти розв'язали деякі задачі з помилками, а відношення тих, хто розв'язав усі задачі, до тих, хто не розв'язав правильно жодної задачі, складає 5 : 3. Скільки абітурієнтів складали іспит з математики?

548. Рис містить 81% білків, жирів та вуглеводів. Білків містить на 5% більше, а вуглеводів — на 74% більше, ніж жирів. Скільки грамів білків, жирів і вуглеводів окремо містить 400 г рису?

549. Вкладник вніс до банку 11500 грн. Частину грошей він поклав під 16% річних, а решту — під 14% річних. Через рік сума грошей, покладених під 16% річних, дорівнювала сумі грошей, покладених під 14% річних. Яку суму вніс вкладник під 16% річних?

550. Вкладник вніс до банку 3000 грн. Частину грошей він поклав під 16% річних, а решту — під 15% річних. Через рік прибуток від суми грошей, покладених під 16% річних, виявився на 170 грн. більшим за прибуток від суми, покладеної під 15% річних. Скільки грошей вніс вкладник під 16% річних?

551. Щоб одержати 100 л 48%-го розчину азотної кислоти, змішали 40%-й розчин цієї кислоти із 60%-м розчином. Скільки літрів кожного з розчинів використали?

552. Яку мінімальну суму грошей потрібно покласти до банку під 10% річних, щоб через 3 роки одержати більше, ніж 50000 грн.?

553. Вкладник вніс до банку 40000 грн. під 10% річних. Який прибуток він матиме через 4 роки?

Рівень В

554. Пекарні потрібно закупити олію. Одна фірма пропонує олію по 5 грн. за літр і 8% від вартості усієї купленої олії за транспортування, а друга — по 4,5 грн. за літр і 10% за транспортування. У якій фірмі вигідніше купувати олію?

555. Відповідно до вимог агротехніки зерно потрібно засипати на тривале зберігання за вологості 14% (кондиційний стан). На скільки відсотків зменшиться маса зібраного зерна, що має вологість 24%, при доведенні його до кондиційного стану?

556. Є 500 кг залізної руди. Після видалення з руди 200 кг домішок, що містять 12,5% заліза, відсоткові вмісти заліза у початковій та одержаній рудах відрізняються на 20%. Яка маса заліза була в руді спочатку?

557. Сплав золота зі сріблом, що містить 5 кг срібла, сплавили із 15 кг срібла. Відсоткові вмісти золота у початковому й одержаному сплавах відрізняються на 30%. Знайдіть масу початкового сплаву.

558. З удосконаленням технології продуктивність праці на підприємстві збільшилася на 20%. Скільки відсотків становить попередня продуктивність від нової?

559. Тривалість робочого дня зменшилася з 8 год до 7 год. На скільки відсотків потрібно підвищити продуктивність праці, щоб збільшити денний випуск продукції на 5%?

560. Ціну товару знизили на 10%, а потім нову ціну підвищили на 5%. На скільки відсотків змінилася початкова ціна після двох переоцінень?

561. Вкладник вніс до банку певну суму грошей. Через рік йому нарахували відсотки, що становило 420 грн. Додавши 580 грн., вкладник залишив гроші ще на рік. Наприкінці наступного року знову були нараховані відсотки, й на рахунку вкладника стало 4560 грн. Яка сума була спочатку внесена на рахунок, якщо вона більша, ніж 1000 грн.?

Вправи для повторення

562. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x - y = 2; \\ y^2 - 3 = 2xy; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3xy + x = -2; \\ 6xy + y = -2. \end{cases}$

563. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^2}$; **б)** $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}\cdot\dfrac{x^3-y^3}{y^2-x^2}:\left(1-\dfrac{1+y}{y}\right)$.

564. Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 2, 5, 9, якщо:

а) кожну цифру можна використовувати лише один раз;

б) цифри можуть повторюватися?

565*. З пункту A в пункт B вийшов турист і рухався зі швидкістю 4 км/год. Через годину услід за ним вийшов другий турист і рухався зі швидкістю 5 км/год, а ще через годину з пункту A виїхав велосипедист, який, обігнавши другого туриста, через 10 хв після цього обігнав і першого. Знайдіть швидкість велосипедиста.

566*. Розв'яжіть нерівність $|x-3|<a$.

19. Випадкові події. Імовірність випадкової події

1. Випадкові події. У житті доволі часто доводиться мати справу з подіями, перебіг яких передбачити неможливо. Наприклад, підкинувши монету, завчасно не можна сказати, як вона впаде: догори гербом чи цифрою. Виймаючи навмання кульку з лототрону, завчасно не можна сказати, яке число буде на ній написане. Підійшовши до зупинки, наперед не можна сказати, скільки хвилин доведеться чекати потрібний транспорт.

Є події, усі можливі результати яких можна передбачити. Так, після підкидання монети обов'язково відбудеться одна із двох можливих подій: «випаде герб», «випаде число». Наперед невідомо, яка з цих подій відбудеться, тому їх називають *випадковими подіями*.

Будь-яка подія відбувається внаслідок випробування (або спостереження). Якщо з партії деталей вибирають навмання 5 деталей для контролю якості, то вибір деталей — випробування, наявність серед вибраних деталей однієї бракованої — подія.

Події позначатимемо великими літерами латинського алфавіту A, B, C і т. д. Розрізнятимемо елементарні та складні події. Розглянемо приклад.

Підкидають гральний кубик. На його верхній грані може випасти число 1, 2, 3, 4, 5 або 6. Отже, може відбутися одна із шести подій:

A_1: випаде число 1;

A_2: випаде число 2;

A_3: випаде число 3;

A_4: випаде число 4;

A_5: випаде число 5;

A_6: випаде число 6.

Ці події мають такі властивості:

1) унаслідок кожного випробування одна з цих подій обов'язково відбудеться;

2) жодні дві з них не можуть відбутися разом;

3) події є рівноможливими (серед них жодна не має переваг у появі перед іншими).

Події, які мають такі три властивості, називають *елементарними подіями*, або *випадками*.

Можна говорити про наслідки підкидання грального кубика, які не є елементарними подіями. Наприклад, поява парного числа, поява числа, меншого від 4, поява одного із чисел 1, 2 або 3 тощо. Такі події називають *складними*. Кожну складну подію можна розкласти на елементарні. Нехай A — згадана вище складна подія «випаде парне число». Подію A можна розкласти на елементарні події A_2, A_4, A_6 («випаде число 2», «випаде число 4», «випаде число 6»). Кажуть, що події A *сприяють* 3 елементарні події A_2, A_4, A_6, або 3 випадки A_2, A_4, A_6.

Вірогідною називають подію, яка внаслідок даного випробування обов'язково має відбутися, а *неможливою* — подію, яка не може відбутися.

Наприклад, після підкидання грального кубика хоча б одне із чисел 1, 2, 3, 4, 5 або 6 обов'язково випаде, а число 7 випасти не може. Тому подія «випаде одне із чисел 1, 2, 3, 4, 5 або 6» є вірогідною, а подія «випаде число 7» — неможливою.

2. Імовірність випадкової події. Нехай у кошику є 40 яблук, з них 25 червоних і 15 зелених. Навмання беруть з кошика одне яблуко. Позначимо буквою A подію «вийняте яблуко — червоне», а буквою B — подію «вийняте яблуко — зелене». Червоних яблук більше, ніж зелених. Тому більше можливостей («шансів») відбутися має подія A. Можливості здійснення подій A і B характеризують певними числами, які визначають так.

У кошику є 40 яблук, тому всіх випадків узяти одне яблуко є 40. Події A сприяють 25 випадків — якщо вийняли одне із 25 червоних яблук, а події B — 15 випадків. Можливість настання події A характеризують числом $\frac{25}{40}=\frac{5}{8}$, а події B — числом $\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$. Ці числа називають *імовірностями* подій A і B. Пишуть: $P(A)=\frac{5}{8}$, $P(B)=\frac{3}{8}$ (P — перша літера латинського слова *probabilities*, що означає ймовірність).

Означення **Імовірністю випадкової події A називають відношення числа рівноможливих випадків, які сприяють події A, до числа всіх можливих випадків.**

Отже,

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

де n — загальна кількість рівноможливих випадків, m — число випадків, які сприяють події A.

Якщо подія A є вірогідною, то їй сприяють усі n можливих випадків. Для такої події $m = n$ і $P(A)=\frac{n}{n}=1$.

Якщо подія A є неможливою, то $m = 0$ і $P(A)=\frac{0}{n}=0$.

Якщо подія A випадкова, тобто така, яка може відбутися або не відбутися, то її ймовірність задовольняє нерівність: $0 < P(A) < 1$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Яка ймовірність того, що після підкидання грального кубика випаде число, кратне 2?

● Нехай подія A — випаде число, кратне 2. Після підкидання грального кубика може випасти будь-яке із шести чисел 1, 2, 3, 4, 5 або 6, тому $n = 6$. Події A сприяють 3 випадки — якщо випаде число 2, 4 або 6, тому $m = 3$. Отже, $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. ●

Вправа 2. У партії з 1000 деталей є 600 деталей першого сорту, 370 — другого і 30 бракованих деталей. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь буде не бракованою?

● Нехай подія A — вибрана деталь не бракована. У партії є 1000 деталей, тому $n = 1000$. Не бракованих деталей є $600 + 370 = 970$, тому $m = 970$. Отже, $P(A)=\frac{970}{1000}=0{,}97$. ●

Вправа 3. У шухляді лежать 5 зошитів, з них 3 у клітинку і 2 у лінійку. Учень бере навмання два зошити. Яка ймовірність того, що серед них буде хоча б один зошит у лінійку?

● Нехай подія A — серед вибраних зошитів буде хоча б один зошит у лінійку. Позначимо зошити у клітинку: $к_1$, $к_2$, $к_3$; зошити у лінійку: $л_1$, $л_2$. Після виймання двох зошитів можливі такі випадки:

$к_1, к_2$; $к_1, к_3$; $к_1, л_1$; $к_1, л_2$;

$к_2, к_3$; $к_2, л_1$; $к_2, л_2$;

$к_3, л_1$; $к_3, л_2$;

$л_1, л_2$.

Усіх пар зошитів, а, значить, усіх можливих випадків, є 10, тому $n = 10$. Події A сприяють 7 випадків ($к_1, л_1$; $к_1, л_2$; $к_2, л_1$; $к_2, л_2$; $к_3, л_1$; $к_3, л_2$; $л_1, л_2$), тому $m = 7$. Отже, $P(A) = \frac{7}{10} = 0,7$. ●

Усно

567. Біатлоніст робить 5 пострілів по 5 мішенях. За кожного пострілу він може влучити у мішень, а може й не влучити. Яка з указаних подій є випадковою; неможливою; вірогідною:

а) буде влучено у 4 мішені;

б) не буде влучено в жодну мішень;

в) буде влучено в 6 мішеней?

568. В урні є 5 білих і 5 чорних куль. Білі кулі мають номери від 1 до 5, а чорні — від 6 до 10. З урни навмання виймають одну кулю. Розглянемо події:

а) вийнята куля матиме номер 3;

б) вийнята куля матиме номер 7;

в) вийнята куля буде білою;

г) номер вийнятої кулі буде кратний 4.

Які з даних подій є елементарними; складними? Назвіть усі елементарні події цього випробування. Які елементарні події (випадки) сприяють кожній з даних складних подій?

569. Із п'яти чисел 2, 3, 5, 10, 15 навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що вибране число виявиться:

а) числом 3; **б)** числом 15;

в) парним; **г)** непарним;

д) одноцифровим; **е)** двоцифровим?

Рівень А

570. Для лотереї випущено 1000 білетів, з яких 400 виграшних. Яка ймовірність того, що придбаний один білет виявиться виграшним?

571. З урни, в якій є 5 білих і 10 червоних куль, навмання виймають одну кулю. Знайдіть імовірність того, що вийнята куля виявиться білою.

572. У кошику лежать 3 білі гриби, 7 сироїжок і 8 маслюків. Яка ймовірність того, що навмання вийнятий з кошика гриб буде сироїжкою?

573. Яка ймовірність того, що після підкидання грального кубика випаде:

а) число 4; **б)** число 8; **в)** число, відмінне від 4.

574. У гаманці є 6 монет по 5 к. і 2 монети по 50 к. Знайдіть імовірність того, що навмання вийнята монета матиме вартість:

а) 50 к.; **б)** 5 к.; **в)** 10 к.

575. У ящику лежать 50 лампочок, з них 2 браковані. Забрали 20 не бракованих лампочок. Яка ймовірність того, що після цього навмання взята лампочка буде бракованою?

576. У вазі лежать 12 шоколадних цукерок і 15 льодяників. З неї навмання взяли 2 цукерки, які виявилися шоколадними. Після цього з вази беруть навмання ще одну цукерку. Яка ймовірність того, що ця цукерка буде шоколадною?

577. Партія із 60 виробів має 5% браку. Знайдіть імовірність того, що навмання взятий виріб виявиться бракованим. Якою буде відповідь, якщо кількість усіх деталей дорівнюватиме 80? Зробіть висновок.

578. У парку росте 360 дерев, з них $\frac{2}{9}$ — хвойні. Знайдіть імовірність того, що навмання вказане дерево буде хвойним. Якою буде відповідь, якщо кількість усіх дерев дорівнюватиме 450? Зробіть висновок.

Рівень Б

579. В урні є 25 однакових кульок, пронумерованих числами від 1 до 25. З урни навмання беруть одну кульку. Яка ймовірність того, що номер кульки виявиться:

а) меншим від 10; **б)** кратним 3;

в) кратним 2 і 3; **г)** кратним 2 або 3?

580. Знайдіть імовірність того, що навмання взяте двоцифрове число виявиться:

а) більшим від 90; **б)** кратним 10;

в) кратним 25; **г)** меншим від 10.

581. На складі є вироби першого та другого сортів, до того ж виробів другого сорту в 1,5 разу більше, ніж першого. Знайдіть імовірність того, що навмання взятий виріб виявиться виробом першого сорту.

582. Якість деталей перевіряють два контролери. Перший контролер перевірив 55% усіх деталей, а другий — 45%. Навмання беруть одну деталь. Яка ймовірність того, що її перевіряв другий контролер?

583. У першій коробці лежать картки з номерами від 1 до 3, а в другій — від 4 до 6. З кожної коробки беруть навмання по одній картці. Знайдіть імовірність того, що сума номерів вибраних карток дорівнюватиме 7.

584. Із чотирьох чисел 2, 3, 5, 6 навмання вибирають два числа, використовуючи які записують правильний дріб. Яка ймовірність того, що цей дріб виявиться скоротним?

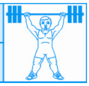
585. На трьох картках написано по одній букві: *М*, *О*, *С*. Картки перемішують і розкладають у ряд. Яка ймовірність того, що утвориться слово *СОМ*?

586. Троє друзів придбали квитки на літак в одному ряді крісел із трьох місць і випадково зайняли ці місця. Знайдіть імовірність того, що кожний із друзів зайняв своє місце.

587. Для збирання телевізорів надійшло 900 мікросхем від двох постачальників. Імовірність того, що навмання взята мікросхема надійшла від першого постачальника, дорівнює 0,6. Скільки мікросхем надійшло від кожного постачальника?

588. У класі навчається 28 учнів. Імовірність того, що навмання вказаний учень виявиться дівчиною, дорівнює $\frac{3}{7}$. Скільки у класі дівчат і скільки хлопців?

Рівень В



589. Учень забув останні три цифри номера потрібного телефону. Пам'ятаючи, що ці цифри різні, він набирає їх навмання. Знайдіть імовірність того, що набрані цифри є правильними.

590. Про деякий трицифровий код відомо, що: він не містить цифри 0, 1, 2, 3 і 4; цифри коду можуть повторюватися. Яка ймовірність того, що навмання названий код із такими властивостями збіжиться з даним?

591. На п'яти картках написано по одній букві: *Д*, *Е*, *С*, *Н*, *А*. Навмання одна за одною вибирають три картки і розташовують в ряд у порядку появи. Яка ймовірність того, що утвориться слово *САД*?

592. Використовуючи цифри 1, 2, 3, 4, 5 не більше одного разу, навмання пишуть деяке трицифрове число. Знайдіть імовірність того, що це число виявиться парним.

593. Знайдіть імовірність того, що навмання взяте трицифрове число буде кратне 2 або 5.

594. Партію деталей виготовляють на двох станках. Імовірність виготовлення бракованої деталі на першому станку дорівнює 0,02, а на другому — 0,025. Серед 500 деталей, з яких 300 виготовлено на першому станку і 200 на другому, навмання вибирають одну деталь. Яка ймовірність того, що вибрана деталь виявиться бракованою?

595. У класі навчається 29 учнів. На екскурсію в музей ходили 24 учні, у музей і зоопарк — 16 учнів, а 2 учні не ходили ні в музей, ні в зоопарк. Яка ймовірність того, що навмання вказаний учень класу ходив на екскурсію в зоопарк?

596. Одночасно підкидають два гральні кубики. Яка ймовірність того, що випадуть числа, сума яких не менша від 7?

597. Монету підкидають чотири рази. Яка ймовірність того, що «герб» випаде: **а)** двічі; **б)** хоча б двічі?

Вправи для повторення

598. Побудуйте графік функції $y = 2x^2 - 3x$.

599. Розв'яжіть нерівність:

а) $x^2 - 4x - 5 \le 0$; **б)** $-4x^2 - 4x + 3 < 0$.

600. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{a-49}{\sqrt{a}+7}$; **б)** $\dfrac{x-3}{x^2-x-6}$.

601. Доведіть, що значення виразу $\left(\dfrac{b+3}{b-3}+\dfrac{b-3}{b+3}\right):\dfrac{2b^2+18}{9-b^2}$ не залежать від значень b.

602*. Математик ішов додому берегом річки проти течії зі швидкістю у півтора разу більшою, ніж швидкість течії річки, тримаючи в руках капелюх і палку. У деякий момент часу він кинув у річку капелюх, переплутавши його з палкою, і продовжував рухатися з тією ж швидкістю. Через деякий час він помітив помилку, кинув у річку палку та побіг назад зі швидкістю, удвічі більшою, ніж ішов раніше. Він наздогнав капелюх, виловив його з води та пішов проти течії річки з попередньою швидкістю. Пройшовши 10 хв, він побачив палку, що пливла річкою. На скільки раніше він прийшов би додому, якби не переплутав палку з капелюхом?

20. Статистичні дані

1. Статистичні спостереження. Ви, очевидно, не раз слухали дані стану погоди в різних куточках планети, результатів виборів, соціальних опитувань тощо. Це *статистичні дані*. Статистичні дані дозволяють не тільки охопити картину певного питання на даний час, а й планувати необхідні дії на майбутнє. Так, статистичні дані про зайнятість населення дозволяють визначити, яку кількість спеціалістів і якої кваліфікації слід готувати, у якому регіоні варто споруджувати те чи інше підприємство тощо.

Методи збирання, обробки, інтерпретації різноманітних даних вивчає окремий розділ прикладної математики — *математична статистика*.

Нехай потрібно дослідити сім'ї міста за деякою ознакою (наприклад, розподілити сім'ї за кількістю дітей, за величиною місячного матеріального доходу на одного члена сім'ї тощо). Для цього можна провести *суцільне* спостереження — відвідати кожну сім'ю і з'ясувати питання, які нас цікавлять. Можна провести вибіркове спостереження — дослідити лише частину сімей і за результатами дослідження зробити висновок про всі сім'ї міста. При цьому сукупність сімей, відібраних для спостереження, називають *вибірковою сукупністю*, або просто *вибіркою*.

У загальному випадку *вибірка* — це сукупність об'єктів, відібраних для спостереження. Для того щоб за даними вибірки можна було судити про властивості всіх об'єктів, необхідно, щоб вибірка правильно відображала ці властивості. Це забезпечується перш за все випадковістю відбору, коли всі об'єкти мають однакову ймовірність потрапити до вибірки.

2. Обробка статистичних даних та способи їх подання. Розглянемо приклади.

Приклад 1. У відділі жіночого взуття протягом трьох днів було проведено обстеження для вивчення попиту на певні розміри взуття. За ці дні було продано 22 пари взуття таких розмірів:

38; 36; 38; 37; 40; 38; 36; 35; 35; 39; 37; 40; 41; 37; 39; 36; 38; 37; 37; 38; 39; 37.

Розташуємо ці дані в порядку не спадання розмірів:

$\underline{35;\ 35;}$ $\underline{36;\ 36;\ 36;}$ $\underline{37;\ 37;\ 37;\ 37;\ 37;\ 37;}$ $\underline{38;\ 38;\ 38;\ 38;\ 38;}$ $\underline{39;\ 39;\ 39;}$ $\underline{40;\ 40;}$ $\underline{41}$.

Одержали так званий *ранжований ряд* даних спостереження. Він містить 7 груп розмірів взуття. Значення кожної групи називають *варіантою*, а число, яке показує, скільки разів трапляється варіанта, — *частотою* відповідної варіанти. У прикладі маємо такі 7 варіант:

35; 36; 37; 38; 39; 40; 41.

Варіанта 35 має частоту 2 (35-й розмір трапляється двічі); варіанта 38 — частоту 5; варіанта 41 — частоту 1.

Результати спостереження зручно подавати у вигляді такої таблиці:

Розмір	35	36	37	38	39	40	41
Частота	2	3	6	5	3	2	1

Щоб візуально охопити дані спостереження, побудуємо на координатній площині точки, абсциси яких дорівнюють розмірам взуття (варіантам), а ординати — відповідній частоті розміру, та сполучимо сусідні точки відрізками (рис. 69). Одержану ламану називають *полігоном частот*.

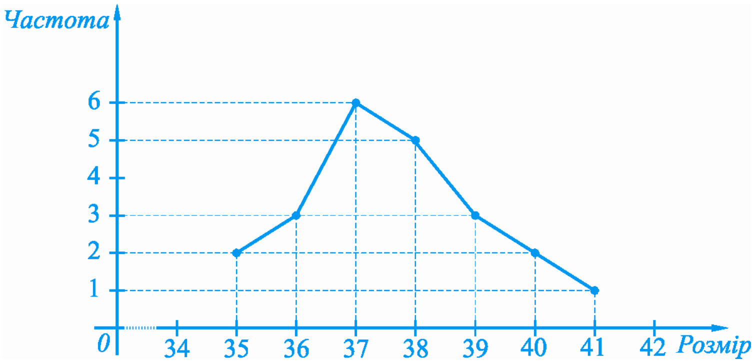


Рис. 69

Для наочного зображення даних спостереження можна використати й діаграму (рис. 70).

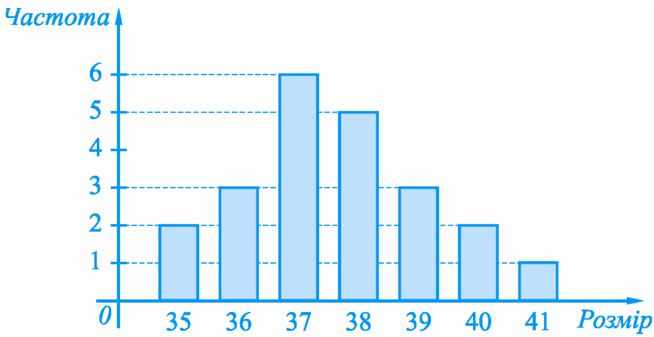


Рис. 70

Графічні зображення дозволяють візуально охопити всю сукупність даних і скласти картину дослідження в цілому. Так, з рисунків 69 і 70 видно, що більшим попитом користується жіноче взуття 37 і 38 розмірів.

Приклад 2. Розглянемо таблицю, в якій вказано, за якою ціною та скільки було продано кавунів на ринку за один день.

Ціна за 1 кг, грн.	1–1,2	1,2–1,4	1,4–1,6	1,6–1,8	1,8–2
Маса проданих кавунів, кг	80	100	75	55	30

З таблиці видно, що кавунів, ціна яких лежить в інтервалі від 1 грн. до 1,2 грн., було продано 80 кг. Кажуть, що першим рядком таблиці задані *інтервали* ціни[1], а другим — *частоти* цих інтервалів (маси кавунів, проданих за ціною відповідних інтервалів).

Для графічного зображення даних такого спостереження використовують *гістограму*, яку будують так: на осі абсцис відмічають задані інтервали й на кожному з них, як на основі, будують прямокутник, висота якого дорівнює частоті відповідного інтервалу (рис. 71).

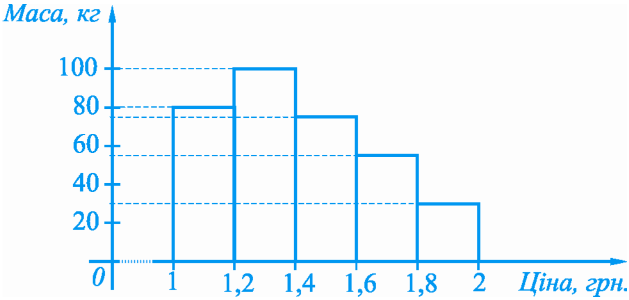


Рис. 71

Розглянемо інший графічний спосіб зображення даних цього спостереження. На осі абсцис знову відмітимо задані інтервали. До середин цих інтервалів проведемо перпендикуляри, довжина кожного з яких дорівнює частоті відповідного інтервалу. З’єднавши кінці сусідніх перпендикулярів відрізками, одержимо ламану (рис. 72), яку називають *полігоном частот* інтервального розподілу даних.

[1] Інтервали ціни можна задавати так: [1; 1,2); [1,2; 1,4); [1,4; 1,6); [1,6; 1,8); [1,8; 2]. За такого задання зрозуміло, куди слід відносити значення величини, яке відповідає одному з кінців інтервала.

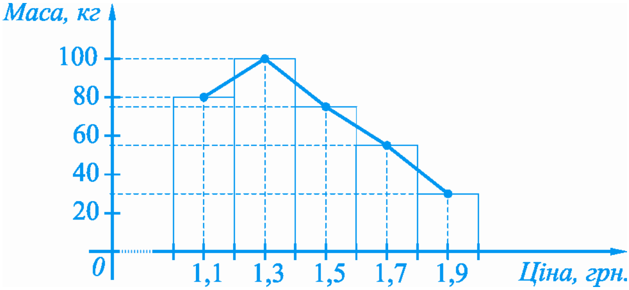


Рис. 72

Підсумок. Дані спостережень зручно подавати у вигляді таблиць та графічних зображень.

Для графічного зображення даних, крім уже розглянутих стовпчастих діаграм, гістограм, полігонів частот, можна використовувати інші види діаграм (кругові, лінійчаті), графіки.

3. Середні значення. Розглянемо приклад.

Приклад 3. Протягом травня через день, проводячи спостереження за температурою повітря опівночі, одержали такі дані:

3° C; 4° C; 4° C; 3° C; 3° C; 5° C; 8° C; 8° C; 6° C; 8° C; 10° C; 11° C; 12° C; 11° C; 12° C; 12° C.

Знайдемо середнє значення температури. Для цього суму 16 значень температури поділимо на 16:

$$t_с = \frac{3+4+4+3+3+5+8+8+6+8+10+11+12+11+12+12}{16} = \frac{120}{16} = 7{,}5\ (°\ C).$$

Отже, можна сказати, що середня температура повітря опівночі у травні дорівнювала 7,5° C.

Середнім значенням n даних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вибірки (або середнім арифметичним даних вибірки) називають число

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Подамо результати спостереження температури повітря у вигляді таблиці:

t° C	3	4	5	6	8	10	11	12
Частота	3	2	1	1	3	1	2	3

Враховуючи, що значення 3° C має частоту 3 (повторюється тричі), значення 4° C — частоту 2 і т. д., середню температуру можна було знайти й так:

$$t_{\text{c}} = \frac{3\cdot 3+4\cdot 2+5\cdot 1+6\cdot 1+8\cdot 3+10\cdot 1+11\cdot 2+12\cdot 3}{16} = \frac{120}{16} = 7{,}5\,(^\circ\ \text{C}).$$

Якщо у вибірці з n об'єктів варіанта x_1 трапляється n_1 разів, варіанта x_2 — n_2 разів, …, варіанта x_k — n_k разів, то середнє значення вибірки знаходять за формулою

$$\overline{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n},$$

де $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Усно

603. У таблиці подано результати опитування 258 сімей щодо розміру місячного матеріального доходу на одну особу:

Місячний дохід сім'ї на одну особу, грн.	*Число сімей*	*Відсоток сімей*
До 200	34	13,2
200 – 400	52	20,2
400 – 600	72	27,9
600 – 1000	70	27,1
1000 і більше	30	11,6
Разом	258	100

а) Скільки сімей мають дохід 200 – 400 гривень?

б) Скільки відсотків сімей мають дохід 400 – 600 гривень?

в) Який дохід мають найбільше сімей?

604. На діаграмі (рис. 73) показана врожайність зернових на дослідній станції протягом 10 років. На який рік припадає найбільша врожайність? найменша?

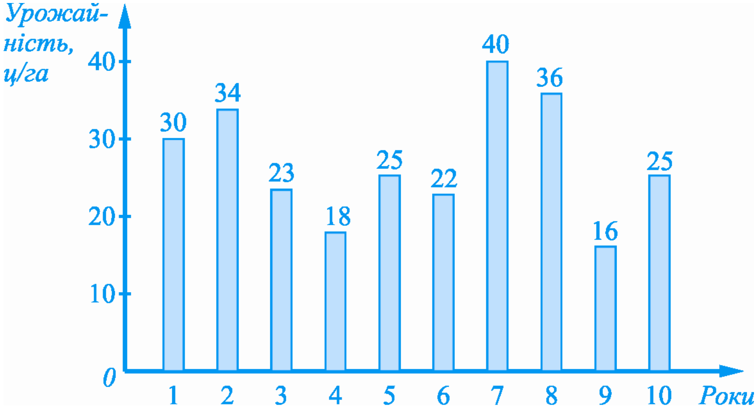


Рис. 73

Рівень А

605. У магазині за тиждень були продані костюми таких розмірів: 48, 46, 52, 44, 48, 50, 54, 46, 44, 48, 50, 52, 52, 50, 48, 50, 48, 46, 48, 54, 50, 48, 54, 50, 48, 46, 48, 52. Запишіть ранжований ряд даних розмірів. Скільки утворилося варіант? Знайдіть частоту кожної варіанти. Складіть таблицю варіант і частот. Побудуйте полігон частот.

606. У 20 фермерських господарствах району врожайність пшениці (у ц з га) була такою: 35, 28, 30, 41, 30, 34, 36, 30, 38, 36, 28, 29, 32, 30, 38, 36, 41, 42, 38, 30. Запишіть ранжований ряд даних. Скільки утворилося варіант? Знайдіть частоту кожної варіанти. Складіть таблицю варіант і частот. Побудуйте полігон частот.

607. Для розв'язання задачі 6 учнів витратили часу: 12 хв; 7 хв; 9 хв; 8 хв; 10 хв; 11 хв. Скільки часу в середньому витрачав один учень для розв'язання задачі?

608. Одні й ті ж деталі виготовляють на двох станках, продуктивність яких однакова. Кількість бракованих деталей, виготовлених на кожному станку за дні робочого тижня, подані в таблиці.

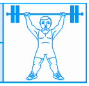
Дні тижня	1	2	3	4	5
1-й станок	5	8	7	4	8
2-й станок	6	6	5	7	9

Скільки бракованих деталей за день у середньому виготовляли на кожному станку? Який станок працює якісніше?

609. Щоб знайти середню масу головки капусти, навмання взяли 20 головок, маси яких виявилися:
2,8 кг; 2,8 кг; 2,9 кг; 3,1 кг; 3,2 кг; 3,1 кг; 3,3 кг; 3,2 кг; 3,2 кг; 2,8 кг; 3,5 кг; 3,4 кг; 3,4 кг; 3,2 кг; 2,8 кг; 3,3 кг; 3,6 кг; 3,7 кг; 3,1 кг; 3,6 кг.
Знайдіть середню масу головки капусти.

610. При відгодівлі 8 гусей було зафіксовано такі прирости маси за сім днів: 410 г; 370 г; 420 г; 400 г; 380 г; 370 г; 390 г; 400 г. Знайдіть середній приріст маси однієї птиці за ці дні.

Рівень Б



611. Вибіркова перевірка малих підприємств міста щодо прибутків за рік дала такі результати:

Річний прибуток, тис. грн.	9	10	11	12	13	14	15
Кількість підприємств	3	6	2	5	6	2	1

Побудуйте полігон частот одержаних даних. Знайдіть середній річний прибуток одного підприємства.

612. Учитель фіксував кількість помилок, допущених учнями на контрольній роботі. Було одержано такі результати:

Кількість помилок	0	1	2	3	4	5
Кількість учнів	3	11	6	5	3	2

Побудуйте полігон частот одержаних даних. Скільки помилок у середньому припадає на одного учня?

613. Продавець на ринку, закупивши оптом лимони, продає їх поштучно за такою ціною:
50 г – 60 г — 70 к.;
60 г – 70 г — 90 к.;
70 г – 80 г — 1 грн. 10 к.;
80 г – 90 г — 1 грн. 30 к.;
90 г – 100 г — 1 грн. 40 к.;
100 г – 120 г — 1 грн. 50 к.;
Складіть таблицю даних задачі. Побудуйте гістограму та полігон частот.

614. Розподіл корів одного фермерського господарства за річним надоєм молока задано таблицею:

Річний надій, тис. кг	1–2	2–3	3–4	4–5
Кількість корів	20	8	8	4

Побудуйте гістограму та полігон частот даного розподілу.

615. Віковий склад працівників підприємства задано таблицею:

Вік працівника	18–28	28–38	38–48	48–58
Кількість працівників	12	20	10	8

Побудуйте гістограму та полігон частот даного розподілу.

616. За результатами контрольної роботи учні класу отримали такі оцінки: 2 бали — 1 учень; 3 бали — 1 учень; 4 бали — 2 учні; 5 балів — 3 учні; 6 балів — 2 учні; 7 балів — 4 учні; 8 балів — 5 учнів; 9 балів — 2 учні; 10 балів — 5 учнів; 11 балів — 2 учні; 12 балів — 1 учень. Знайдіть середню оцінку за контрольну роботу.

617. Спортсмен зробив 40 пострілів по мішені і вибив 10 очок 18 разів, 9 очок — 10 разів, 8 очок — 6 разів і 7 очок — 6 разів. Скільки очок у середньому вибивав спортсмен за один постріл?

618. Знайдіть середній зріст учнів вашого класу, а також середній зріст учнів, які у списку класного журналу мають номери 1, 5, 9, … (кожний наступний на 4 більший від попереднього). Порівняйте знайдені середні значення.

619. За січень, лютий і березень підприємство виготовило відповідно 750, 810 і 891 одиниць продукції. Знайдіть середній місячний приріст виготовлення продукції у відсотках.

Вправи для повторення

620. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$, де $a > 0$, $b > 0$; **б)** $\dfrac{x-\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}$.

621. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6}; \\ x+y=5; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}; \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$

622. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $x^2 - 2ax + 3a - 2 = 0$ має корені. Знайдіть ці корені.

623*. Ескалатор метро піднімає пасажира, який нерухомо стоїть на ньому, за 1 хв. Ідучи нерухомим ескалатором, пасажир піднімається за 3 хв. За який час пасажир підніметься, ідучи вгору рухомим ескалатором?

Цікаво знати

Теорія ймовірностей. Випадковий характер події, процесів відзначали ще в давні часи. Давньогрецький філософ Епікур (341 – 270 рр. до н. е.) вважав, що випадок притаманний самій природі явищ, і, отже, випадковість об’єктивна. Були спроби виробити математичний підхід до вивчення випадкових подій, проте перші математичні розрахунки ймовірностей з’явилися в письмових документах лише в середині XVII ст.

У 1654 році вся наукова (і не тільки) громадськість Парижа говорила про виникнення нової науки — теорії ймовірностей. Основи цієї теорії були закладені не в науковій роботі, а в листуванні між двома відомими французькими математиками Б. Паскалем (1623 – 1662) і П. Ферма (1601 – 1665) з приводу задачі, яка стосувалася гри в кості. Взагалі, до перших задач теорії ймовірностей належать задачі, пов’язані з азартними іграми, дуже популярними в середньовічній Європі. З результатами Паскаля і Ферма ознайомився нідерландський фізик і математик Х. Гюйгенс (1629 – 1695), який написав твір «Про розрахунки в азартній грі». Цю роботу вважають першою книжкою з теорії ймовірностей.

Розв’язування задач, пов’язаних з популярними азартними іграми, лише спонукало виникненню теорії ймовірностей, як у свій час вимірювання площ під час земляних робіт спонукало до виникнення геометрії.

Сьогодні теорія ймовірностей розвинулася в універсальну теорію, яка знаходить застосування в багатьох сферах людської діяльності. Її широко використовують в економіці, транспорті, у виробництві, статистиці, військовій справі. Сучасне природознавство широко користується теорією ймовірностей як теоретичною основою в обробці результатів спостережень.

Математична статистика. «Статистика знає все» — такими словами починається друга частина роману І. Ільфа й Є. Петрова «Дванадцять стільців». Щоб підкреслити значення статистики у повсякденному житті, наводять приклад прогнозування результатів президентських виборів у США 1936 року. Тоді кандидатами на виборах були Ф. Рузвельт і А. Ландон. Редакція одного вельми поважного журналу вирішила провести опитування виборців за телефонними довідниками. По всій країні були розіслані понад 10 мільйонів листівок із проханням назвати прізвище майбутнього президента. Згодом журнал поінформував, що на майбутніх виборах президентом США з великою перевагою буде обрано А. Ландона.

Паралельне опитування здійснили соціологи Дж. Геллап та Е. Роупер, опираючись на вибірку, яка нараховувала лише 4 тисячі респондентів. Незважаючи на те, що редакція журналу опитала 10 мільйонів виборців, витратила величезні кошти на розповсюдження листівок, збирання та обробку даних, їхній прогноз виявився хибним, бо опирався на думку лише тих виборців, які мали телефони. Прогноз же соціологів майже збігся з результатами виборів.

Перші статистичні дослідження були проведені в Англії та Німеччині. У середині XVII ст. в Англії виник науковий напрям, який отримав назву «політична арифметика». Його започаткували У. Петті (1623 – 1687) та Дж. Граунт (1620 – 1674), які на основі вивчення інформації про масові суспільні процеси намагалися відкрити закономірності суспільного життя. Поряд зі школою «політичної арифметики» в Англії розвивалась школа описової статистики, або «державознавство», в Німеччині. Розвиток «політичної арифметики» і «державознавства» сприяв появі науки статистики. Термін «статистика» походить від латинського слова *status*, яке в перекладі означає «стан» (речей, явищ).

Сучасну математичну статистику характеризують як *науку про прийняття рішень в умовах невизначеності*. Її завдання полягає у створенні методів збору й обробки статистичних даних для отримання наукових і практичних висновків.

Запитання і вправи для повторення § 3

1. Наведіть приклади математичних моделей.
2. Назвіть основні кроки розв’язування прикладних задач.
3. Запишіть формулу складних відсотків.
4. Наведіть приклади випадкових подій.
5. Яку подію називають вірогідною? неможливою?
6. Що називають імовірністю випадкової події?
7. Наведіть приклади статистичних спостережень.
8. Які є способи подання статистичних даних?
9. Як будують полігон частот? Наведіть приклад.
10. Як будують гістограму? Наведіть приклад.
11. Як знайти середнє значення вибірки?

Побудуйте математичну модель задачі та розв’яжіть задачу (624–629):

624. Площа кімнати дорівнює 14 м^2, а її довжина на 0,5 м більша від ширини. Знайдіть розміри кімнати.

625. Катер пройшов 30 км за течією річки за 1,5 год, а 32 км проти течії — за 2 год. Знайдіть швидкість катера у стоячій воді та швидкість течії річки.

626. Маса бетонного блоку дорівнює 350 кг. Скільки таких блоків може перевезти автомобіль, вантажність якого дорівнює 5 т?

627. На автоматичному станку виготовили партію деталей. Після удосконалення станка таку ж партію деталей він виготовив у 1,05 разу швидше, бо за годину виготовляв на 5 деталей більше, ніж раніше. Скільки деталей за годину почав виготовляти станок?

628. Військова колона під час походу рухається зі швидкістю 5 км/год, розтягнувшись дорогою на 400 м. Командир, який перебуває у хвості колони, посилає мотоцикліста з пакетом у голову колони. Мотоцикліст, виконавши доручення, відразу повертається. Знайдіть, через який проміжок часу після одержання пакета мотоцикліст повернеться до командира, якщо його швидкість дорівнює 25 км/год.

629. Для кожної сільськогосподарської культури визначають оптимальну кількість рослин на 1 га. Тому перед посівом потрібно розрахувати норму висіву — масу насіння, яке потрібно висіяти на 1 га поля, щоб забезпечити потрібну густоту рослин. Знайдіть норму висіву насіння пшениці, якщо відомо, що на 1 га має рости 6 млн рослин, маса 1000 зерен становить 40 г, чистота насіння — 97%, а схожість — 93%.

Розв'яжіть задачі.

630. Вкладник вніс до банку певну суму грошей і через рік після нарахування 15% річних мав на рахунку 2300 грн. Яку суму вкладник вніс до банку?

631. Довжина першої сторони трикутника становить 75% довжини другої та на 20% більша від довжини третьої. Знайдіть довжини сторін трикутника, якщо його периметр дорівнює 38 см.

632. Змішали 30%-й розчин сірчаної кислоти з 10%-м розчином цієї ж кислоти й одержали 300 г 15%-го розчину. Скільки 10%-го розчину кислоти при цьому використали?

633. Яку суму необхідно внести до банку під 14% річних, щоб через 2 роки на рахунку було 6498 грн.?

634. Приріст випуску продукції на заводі порівняно з попереднім роком за перший рік становив 5%, за другий — 8%. Яким повинен бути відсоток приросту випуску продукції за третій рік, щоб середній річний приріст за три роки дорівнював 7%?

635*. Морська вода містить 5% солі. Скільки прісної води потрібно долити до 30 кг морської, щоб концентрація солі зменшилася на 70%?

636. З 10000 білетів лотереї 1250 білетів є виграшними. Яка ймовірність того, що придбаний один білет виявиться виграшним?

637. Є 10 карток, пронумерованих числами від 1 до 10. Навмання беруть одну картку. Яка ймовірність того, що номер картки виявиться:

а) більшим від 5; **б)** меншим від 15;
в) кратним 3; **г)** кратним 2 і 3?

638. У ящику лежать лампочки, з них $\frac{2}{9}$ мають потужність 60 Вт, $\frac{4}{9}$ — потужність 100 Вт, решту — потужність 150 Вт. Яка ймовірність того, що навмання взята лампочка матиме потужність 150 Вт?

639. На полиці лежать зошити у клітинку і в лінійку, до того ж зошитів у клітинку в 1,2 разу більше, ніж зошитів у лінійку. Знайдіть імовірність того, що навмання взятий зошит виявиться зошитом у лінійку.

640. Тест містить 10 завдань. До кожного завдання подано чотири варіанти відповіді, один з яких є правильним. Учень знає правильні відповіді до 9 завдань і не знає — до одного завдання, тому навмання вибирає для нього варіант відповіді. Знайдіть імовірність того, що учень дасть правильні відповіді на всі завдання тесту.

641. У першій урні містяться кулі з номерами від 1 до 4, а в другій — з номерами від 5 до 8. З кожної урни навмання виймають по одній кулі. Яка ймовірність того, що сума номерів вийнятих куль дорівнюватиме 9?

642. Олег написав на аркуші паперу деяке трицифрове число і повідомив, що сума цифр числа дорівнює 9, цифри є непарними і можуть повторюватися. Яка ймовірність того, що навмання назване число з такими властивостями збігатиметься з числом, записаним Олегом?

643. Одночасно підкидають три монети. Яка ймовірність того, що випаде:

а) три «герби»; **б)** два «герби» та «число»?

644. На олімпіаді з математики правильне розв’язання кожної задачі оцінюють 7 балами. Кількості балів, одержаних учнями за розв’язання першої задачі, такі:

3, 0, 7, 2, 1, 0, 3, 7, 7, 5, 7, 2, 3, 4, 1, 2, 6, 7, 7, 0, 4, 5, 7, 7, 4, 2, 0, 0, 1, 3.

а) Запишіть ранжований ряд даних. Скільки утворилося варіант? Знайдіть частоту кожної варіанти.

б) Складіть таблицю варіант і частот.

в) Побудуйте полігон частот.

г) Знайдіть середню кількість балів, яка припадає на одного учня.

645. Дані дослідження тривалості роботи електричних лампочок наведені в таблиці:

Тривалість роботи, тис. год.	2–2,1	2,1–2,2	2,2–2,3	2,3–2,4	2,4–2,5
Кількість лампочок	2	8	8	5	2

Побудуйте гістограму та полігон частот даного розподілу.

646. Протягом семи днів березня проводились спостереження за температурою повітря опівдні. Були одержані такі дані: –4° C; –4° C; –2° C; 0° C; 0° C; 1° C; 2° C. Знайдіть середнє значення температури повітря опівдні за ці дні.

647. На уроці фізкультури вчитель фіксував кількість підтягувань учнів на перекладині. Були одержані такі результати:

Кількість підтягувань	4	6	7	8	9	12	14
Кількість учнів	1	2	4	4	2	1	1

Скільки підтягувань у середньому припадає на одного учня?

Завдання для самоперевірки № 4

Рівень 1

1. Батько старший від сина у 5 разів. Скільки років синові, якщо їм разом 36 років?
Нехай синові x років. Яке з рівнянь є математичною моделлю цієї задачі?

а) $\frac{x}{5}+x=36$; **б)** $5x+x=36$; **в)** $x+5+x=36$; **г)** $x+x-5=36$.

2. Яка швидкість катера у стоячій воді, якщо він пройшов шлях між пристанями за течією річки за 2 год, а проти течії — за 3 год? Швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.
Нехай швидкість катера у стоячій воді дорівнює x км/год. Яке з рівнянь відповідає умові задачі?

а) $\frac{x+2}{2}=\frac{x-2}{3}$; **б)** $3(x+2)=2(x-2)$;

в) $2(x+2)=3(x-2)$; **г)** $3x=2x+2$.

3. Вкладник вніс до банку 900 грн. під 15% річних. Скільки гривень буде нараховано банком через рік?

а) 60 грн.; **б)** 1035 грн.; **в)** 135 грн.; **г)** 6000 грн.

4. Із цукрових буряків при переробці виходить за масою 16% цукру. Скільки потрібно центнерів буряків, щоб отримати 128 ц цукру?

а) 800 ц; **б)** 20,48 ц; **в)** 204,8 ц; **г)** 80 ц.

5. З коробки, у якій є 15 пачок чаю першого ґатунку і 19 пачок чаю другого ґатунку, навмання виймають одну пачку. Яка ймовірність того, що нею виявиться пачка чаю першого ґатунку?

а) $\frac{15}{19}$; **б)** $\frac{15}{34}$; **в)** $\frac{19}{34}$; **г)** $\frac{34}{15}$.

6. Спортсмен пробіг доріжкою стадіону 4 кола по 400 м. На кожне коло він витратив відповідно 62 с, 64 с, 64 с, 58 с. Скільки часу в середньому витрачав спортсмен на подолання одного кола?

а) 64 с; **б)** 63 с; **в)** 62 с; **г)** 58 с.

Рівень 2

7. З пункту A в пункт B автомобіль їхав зі швидкістю 60 км/год, а повертався зі швидкістю 90 км/год. Усього в дорозі він був 5 год. Скільки часу їхав автомобіль з пункту A в пункт B?

8. Периметр прямокутника дорівнює 96 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо одна з них на 40% більша, ніж інша.

9. Заробітну плату робітника двічі підвищували на 10%. Якою є заробітна плата робітника після цих підвищень, якщо початкова заробітна плата дорівнювала 1000 грн.?

10. У контейнері лежать кавоварки, з яких 30 мають білий колір, 10 — голубий і 10 — червоний. Яка ймовірність того, що навмання вийнята з контейнера кавоварка матиме червоний колір?

11. Після зважування маса 10 овець виявилася такою: 35 кг, 37 кг, 34 кг, 35 кг, 40 кг, 38 кг, 37 кг, 35 кг, 36 кг, 36 кг. Запишіть ранжований ряд даних. Складіть таблицю варіант і частот.

Рівень 3

12. З пунктів A та B, відстань між якими дорівнює 240 км, вирушили одночасно два автомобілі. Якщо автомобілі рухатимуться назустріч один одному, то зустрінуться через 2 год. Якщо ж вони їхатимуть в одному напрямі, то автомобіль, який виїхав з пункту B, наздожене автомобіль, який виїхав із пункту A, через 12 год. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

13. Шматок сплаву міді та цинку, загальна маса якого дорівнює 72 кг, містить 45% міді. Скільки кілограмів міді потрібно додати до цього шматка, щоб одержати новий сплав, який містив би 60% міді?

14. Вкладник вніс до банку 5000 грн. під 11% річних. Який прибуток він матиме через 2 роки?

15. Партію деталей виготовили три робітники, до того ж перший робітник виготовив $\frac{2}{5}$ усіх деталей, другий — $\frac{3}{10}$, третій — решту. Яка ймовірність того, що навмання взяту деталь виготовив третій робітник?

16. Урожайність пшениці у господарствах району була такою:

Урожайність, ц/га	25–30	30–35	35–40	40–45
Кількість господарств	5	8	7	4

Побудуйте гістограму та полігон частот даного розподілу.

Рівень 4

17. Два трактори, працюючи разом, можуть зорати поле за 8 год. Якщо один трактор виоре спочатку $\frac{1}{4}$ поля, а далі інший — решту, то все поле буде зоране за 15 год. За скільки годин може зорати поле кожний трактор, працюючи окремо?

18. Ціну на товар підвищили на 10%. На скільки відсотків потрібно зменшити нову ціну, щоб одержати початкову?

19. Яку мінімальну суму грошей потрібно покласти до банку під 14% річних, щоб через 3 роки одержати більше, ніж 20000 грн.?

20. Одночасно підкидають два гральні кубики. Яка ймовірність того, що випадуть числа, добуток яких менший від 15?

21. На змаганні богатирів фіксували кількість піднімань штанги масою 150 кг. Були одержані такі результати:

Кількість піднімань	4	5	6	7	8
Кількість богатирів	3	2	4	4	2

Побудуйте полігон частот даного розподілу. Скільки піднімань у середньому припадає на одного богатиря?

§ 4

ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Термін «послідовність» використовують, коли кажуть про розташування учнів у шерензі, черговість днів тижня, розміщення команд у турнірній таблиці тощо.

У цьому параграфі ми з'ясуємо, що таке числова послідовність, зокрема, що таке арифметична та геометрична прогресії, які їхні властивості, навчимося використовувати властивості зазначених прогресій для розв'язування прикладних задач.

1; 1; 2; 3; 5; 8; … — послідовність

2; 5; 8; 11; 14; … — арифметична прогресія
(кожне число, починаючи з другого,
на 3 більше від попереднього)

2; 6; 18; 54; 162; … — геометрична прогресія
(кожне число, починаючи з другого,
утричі більше від попереднього)

21. Числові послідовності. Способи задання послідовностей

1. Числові послідовності. Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Один соняшник за літо «випиває» у середньому 250 л води. Скільки води «вип'ють» за літо 1, 2, 3, 4, 5 соняшників?

Одержимо:	Кількість соняшників	1	2	3	4	5
	Об'єм води у літрах	250	500	750	1000	1250

У другому рядку таблиці маємо кілька чисел, записаних у певному порядку, кажуть, маємо *послідовність чисел*: 250; 500; 750; 1000; 1250, у якій на першому місці стоїть число 250, на другому — 500, на п'ятому — 1250.

У цьому прикладі кожному натуральному числу від 1 до 5 включно відповідає єдине число з указаної послідовності. Отже, маємо функцію, областю визначення якої є множина чисел 1, 2, 3, 4, 5.

Приклад 2. Записати у порядку зростання натуральні числа, запис яких закінчуються цифрою 2.

Одержимо *послідовність* чисел 2; 12; 22; 32; 42; ..., у якій на першому місці стоїть число 2, на другому — 12, на третьому — 22 і т. д.

Місце	1	2	3	4	5	...
Число	2	12	22	32	42	...

У цьому прикладі кожному натуральному числу n відповідає єдине число з указаної послідовності. Так, натуральному числу 6 відповідає число 52 цієї послідовності, числу 7 — число 62 і т. д. Отже, маємо функцію, областю визначення якої є множина всіх натуральних чисел.

Означення **Послідовністю називають функцію, яка задана на множині всіх або перших n натуральних чисел.**

Числа, які утворюють послідовність, називають *членами послідовності*. Якщо послідовність має скінченне число членів, тоді її називають *скінченною послідовністю* (приклад 1). Якщо послідовність має нескінченне число членів, то її називають *нескінченною послідовністю* (приклад 2), а у записі це показують трьома крапками після останнього записаного члена послідовності.

Наведемо ще приклади послідовностей:

4; 8; 12; 16; ... — послідовність натуральних чисел, кратних 4;

$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ... — послідовність правильних дробів із чисельником 1;

–1; –2; –3; –4; ... — послідовність від'ємних цілих чисел;

0,1; 1,1; 2,1; 3,1 — послідовність, яка має чотири члени;

7; 7; 7; 7; ... — послідовність, усі члени якої однакові.

Четверта послідовність скінченна, решту — нескінченні.

У загальному випадку члени послідовності, як правило, позначають малими буквами з індексами внизу. Кожний індекс вказує порядковий номер члена послідовності. Наприклад, перший член послідовності позначають a_1, читають «*a* перше», другий — a_2, читають «*a* друге», член послідовності з номером *n* позначають a_n і читають «*a* енне». Саму послідовність позначають (a_n) і записують: a_1; a_2; a_3; a_4; ... . Член a_4 називають наступним за a_3, а член a_3 — попереднім до члена a_4.

Наприклад, розглянемо послідовність (a_n): 1; 3; 5; ... — послідовність непарних натуральних чисел. У ній $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; ... . Член послідовності $a_2 = 3$ є попереднім до члена $a_3 = 5$ і наступним за членом $a_1 = 1$.

2. Способи задання послідовностей. Щоб задати послідовність, потрібно вказати спосіб, за допомогою якого можна знайти будь-який її член. Існують різні способи задання послідовностей.

1. Послідовність можна задати *описом* знаходження її членів. Наприклад, нехай задано послідовність, членами якої є дільники числа 15, записані у порядку зростання. Цю послідовність, яка описана словами, можна записати: 1; 3; 5; 15.

2. Скінченну послідовність можна задати *переліком її членів*. Наприклад, (b_n): 54; 1; 33; 27.

3. Послідовність можна задати *таблицею*, у якій навпроти кожного члена послідовності вказують його порядковий номер. Наприклад,

n	1	2	3	4	5
a_n	–2	1	–4	1	–6

4. Послідовність можна задати *формулою*, за якою можна знайти будь-який член послідовності, знаючи його номер. Наприклад, послідовність натуральних чисел, кратних 3, можна задати формулою $a_n = 3n$; послідовність чисел, обернених до натуральних, — формулою $b_n = \frac{1}{n}$. Такі формули називають ще формулами *n*-го члена послідовності.

Нехай послідовність (c_n) задана формулою $c_n = 3n - n^2$. Підставляючи замість *n* натуральні числа 1, 2, 3, ... , одержимо:

$$c_1 = 3 \cdot 1 - 1^2 = 2; \quad c_2 = 3 \cdot 2 - 2^2 = 2; \quad c_3 = 3 \cdot 3 - 3^2 = 0; \ldots .$$

Отже, (c_n): 2; 2; 0; ... .

5. Послідовність можна задати так: спочатку вказати перший або кілька перших членів послідовності, а потім — умову, за якою можна визначити будь-який член послідовності за попередніми. Такий спосіб задання послідовності називають *рекурентним*.

Наприклад, знайдемо кілька членів послідовності (a_n), у якій перший член дорівнює –1, другий — –3, а кожний наступний, починаючи із третього, дорівнює добутку двох попередніх. Одержимо: $a_1 = -1$; $a_2 = -3$;

$a_3 = a_1 \cdot a_2 = (-1) \cdot (-3) = 3$;

$a_4 = a_2 \cdot a_3 = (-3) \cdot 3 = -9$;

$a_5 = a_3 \cdot a_4 = 3 \cdot (-9) = -27$; і т. д.

Умови, що задають цю послідовність, можна записати так: $a_1 = -1$; $a_2 = -3$; $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$. Формулу, за допомогою якої будь-який член послідовності можна знайти через попередні, називають *рекурентною формулою*.

Розглянуті вище послідовності є *числовими послідовностями*, оскільки їхніми елементами є числа. Існують й інші послідовності. Наприклад, послідовність передач на каналі телебачення, послідовність футбольних команд у турнірній таблиці тощо. Надалі розглядатимемо лише числові послідовності.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Записати шість перших членів послідовності натуральних чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 2.

● Першим натуральним числом, яке при діленні на 3 дає в остачі 2, є саме число 2. Наступним є число 5 — воно на 3 більше від 2, далі 8 — на 3 більше від 5 і т. д. Тому одержимо: 2; 5; 8; 11; 14; 17.

Відповідь. 2; 5; 8; 11; 14; 17. ●

Вправа 2. Записати формулу n-го члена послідовності (x_n) натуральних чисел, більших від 8, які при діленні на 9 дають в остачі 7.

● Першим натуральним числом, яке є більшим від 8 і при діленні на 9 дає в остачі 7, є число 16. Його можна записати так: $16 = 9 \cdot 1 + 7$. Другим є число 25, яке можна записати так: $25 = 9 \cdot 2 + 7$, третім — $34 = 9 \cdot 3 + 7$ і т. д. Тоді формула n-го члена шуканої послідовності (x_n) матиме вигляд: $x_n = 9n + 7$.

Відповідь. $x_n = 9n + 7$. ●

Вправа 3. Послідовність задана формулою $x_n = 3n^2 - 7n$. Чи є членом цієї послідовності число 6?

● Число 6 буде членом цієї послідовності, якщо знайдеться такий номер n, що $x_n = 6$, тобто $3n^2 - 7n = 6$. Маємо рівняння: $3n^2 - 7n - 6 = 0$, звідки $n_1 = 3$;

$n_2 = -\dfrac{2}{3}$. Число $-\dfrac{2}{3}$ не є натуральним, а тому не може бути номером члена послідовності. Отже, число 6 є третім членом заданої послідовності.

Відповідь. Так. ●

Вправа 4. Записати три перших члени послідовності (a_n), якщо $a_1 = 2$, ${}_{+1} = 3a_n - 2$.

● Узявши $n = 1$ у формулі $a_{n+1} = 3a_n - 2$, одержимо: $a_2 = 3a_1 - 2 = 3 \cdot 2 - - 2 = 4$. Узявши $n = 2$, матимемо: $a_3 = 3a_2 - 2 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$.

Відповідь. 2; 4; 10. ●

Усно

648. Дано послідовність: 0,1; 7; 0,2; 8; 0,3; 9.

а) Скільки членів має ця послідовність?

б) Назвіть третій член послідовності.

в) Який номер має член послідовності, що дорівнює 0,3?

г) Який член послідовності є наступним за числом 8; попереднім до числа 7?

649. Дано послідовність натуральних чисел, кратних 10:

10; 20; 30; 40; 50; ... .

а) Назвіть перший, четвертий та восьмий члени цієї послідовності.

б) Який номер має член послідовності, що дорівнює 70?

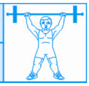
в) Які члени послідовності розміщені між числами 30 і 90?

г) Якою формулою можна задати цю послідовність?

650. Послідовність задана формулою $x_n = n + 5$. Вкажіть три перших члени послідовності.

651. Назвіть кілька перших членів послідовності квадратів натуральних чисел.

Рівень А



652. Дано послідовність (c_n). Запишіть:

а) член послідовності, наступний за c_{15}; c_k;

б) член послідовності, попередній до c_8; c_k;

в) члени послідовності, які розміщені між c_3 і c_7; c_k і c_{k+3}.

653. Запишіть перші шість членів послідовності натуральних чисел, кратних 4. Який номер має член послідовності, що дорівнює 16?

654. Запишіть перші п’ять членів послідовності кубів натуральних чисел. Який номер має член послідовності, що дорівнює 27?

655. Запишіть перші п’ять членів послідовності натуральних чисел, які:

а) діляться на 5;
б) при діленні на 5 дають в остачі 1;
в) при діленні на 5 дають в остачі 2.

656. Запишіть перші чотири члени послідовності натуральних чисел, які:

а) діляться на 7;
б) при діленні на 4 дають в остачі 3.

657. Послідовність задана формулою $a_n = 5n^2 - 1$. Знайдіть: a_4; a_{10}.

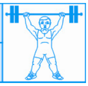
658. Послідовність задана формулою $b_n = 3n + 5$.

а) Знайдіть перші чотири члени цієї послідовності; дванадцятий член.
б) Вкажіть номер члена послідовності, який дорівнює 20.

659. Послідовність задана формулою $c_n = 2n - 7$.

а) Знайдіть перші три члени цієї послідовності; п’ятнадцятий член.
б) Який номер має член послідовності, що дорівнює 193?

Рівень Б



660. Запишіть усі члени послідовності, заданої формулою:

а) $a_n = (-1)^n$, $1 \le n \le 7$;
б) $b_n = n^2 - 5n$, $1 \le n \le 3$;
в) $c_n = 3^{2n-3}$, $1 \le n \le 4$.

661. Послідовність задана формулою $x_n = 5 + 3n^2$. Знайдіть номер члена послідовності, який дорівнює: 305; 680.

662. Послідовність задана формулою $y_n = 2n^2 - 5n - 1$. Чи є членом цієї послідовності число 1; число 11?

663. Послідовність задана формулою $x_n = n^2 - 7n + 1$. Чи є членом цієї послідовності число –11; число 3?

664. Запишіть формулу n-го члена послідовності натуральних чисел, більших від 3, які при діленні на 7 дають в остачі 1; в остачі 2.

665. Запишіть формулу n-го члена послідовності натуральних чисел, більших від 6, які при діленні на 11 дають в остачі 5; в остачі 3.

Запишіть перші п'ять членів послідовності, якщо:

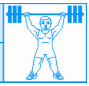
666. **а)** $a_1 = -3$; $a_{n+1} = 2a_n + 1$; **б)** $c_1 = 2$; $c_2 = -\frac{1}{2}$; $c_{n+2} = c_n \cdot c_{n+1} - 5$;

667. **а)** $b_1 = 5$; $b_{n+1} = -2b_n$; **б)** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + 1$.

668. Запишіть рекурентну формулу і знайдіть перші чотири члени послідовності, перший член якої дорівнює –2, другий — 3, а кожний наступний, починаючи із третього, дорівнює квадрату суми двох попередніх.

669. Запишіть рекурентну формулу і знайдіть перші чотири члени послідовності, перший член якої дорівнює 3, а кожний наступний член, починаючи із другого, дорівнює квадрату попереднього члена, зменшеному на одиницю.

Рівень В



670. Знайдіть перші шість членів послідовності, заданої формулою

$$a_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{5}{n}, \text{ якщо } n \text{ — парне;} \\ 2 - n, \text{ якщо } n \text{ — непарне.} \end{cases}$$

671. Послідовність задана формулою $b_n = 2n^2 - 13n + 1$. Знайдіть номери тих членів послідовності, які не перевищують 8.

672. Загальний член послідовності визначається за формулою $x_n = \frac{2n}{n+1}$. Для яких значень n модуль різниці $x_n - 2$ менший від 10^{-1}?

Вправи для повторення

673. Розкладіть на множники тричлен:

а) $9x^2 - 10x + 1$; **б)** $x^4 - 5x^2 - 36$.

674. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{\frac{1}{18 - 6x}}$; **б)** $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$.

675. Перший бульдозер почав копати траншею. Через 2 год до нього приєднався другий, і через 8 год спільної роботи вони викопали 80% траншеї. За скільки годин міг би викопати траншею кожний бульдозер, якщо відомо, що першому на це потрібно на 5 год більше, ніж другому?

676. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 3x + a = 0$, якщо a — абсциса вершини параболи $y = (x + 10)^2 - 1$.

22. Арифметична прогресія та її властивості

Серед числових послідовностей важливу роль відіграють послідовності, які називають арифметичною і геометричною прогресіями.

Приклад 1. Група туристів піднімалася вгору протягом 4 год. За першу годину туристи пройшли 2,5 км, а за кожну наступну — на 0,5 км менше, ніж за попередню. Який шлях проходили туристи за кожну годину руху?

За першу годину туристи пройшли 2,5 км, за другу — 2,5 – 0,5 = 2 (км), за третю — 2 – 0,5 = 1,5 (км), за четверту — 1 км.

Одержали скінченну послідовність чисел: 2,5; 2; 1,5; 1, у якій кожний наступний член, починаючи із другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне і те ж число –0,5.

Приклад 2. Записати послідовність натуральних чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 1.

Одержимо:

$$1;\ 4;\ 7;\ 10;\ 13;\ 16;\ 19;\ 22;\ \ldots\ .$$

У цій послідовності будь-який член, починаючи із другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне і те ж число 3.

Кожна з розглянутих послідовностей є прикладом арифметичної прогресії.

Означення **Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи із другого, дорівнює попередньому члену, до якого додається одне й те ж число.**

Це число називають *різницею арифметичної прогресії* та позначають буквою d (d — початкова буква латинського слова *differentia* — різниця).

Отже, якщо маємо арифметичну прогресію a_1; a_2; a_3; …, то $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_2 + d$; …, тобто для будь-якого натурального n виконується рівність

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

З означення арифметичної прогресії випливає, що різниця між будь-яким її членом, починаючи з другого, і попереднім членом дорівнює одному й тому ж числу — різниці d, тобто $a_2 - a_1 = d$, $a_3 - a_2 = d$, ... Отже,

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Правильно і навпаки: якщо у деякій числовій послідовності різниця між будь-яким її членом, починаючи із другого, і попереднім членом дорівнює одному й тому ж числу, то така послідовність є арифметичною прогресією.

Арифметичні прогресії можуть бути скінченними (приклад 1) і нескінченними (приклад 2).

Щоб задати арифметичну прогресію, досить вказати її перший член і різницю. Тоді кожний наступний член можна обчислити через попередній за *рекурентною формулою* $a_{n+1} = a_n + d$.

У таблиці наведено приклади арифметичних прогресій для деяких значень a_1 і d.

a_1	d	Арифметична прогресія
1	2	1; 3; 5; 7; 9; ...
0	–2	0; –2; –4; –6; –8; ...
5	0	5; 5; 5; 5; 5; ...
1,1	–0,5	1,1; 0,6; 0,1; –0,4; –0,9; ...

Розглянемо *властивості арифметичної прогресії.*

1. В арифметичній прогресії 1; 3; 5; 7; 9; ... кожний член, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів:

$$3 = \frac{1+5}{2}; \quad 5 = \frac{3+7}{2}; \quad 7 = \frac{5+9}{2}; \dots .$$

Покажемо, що таку властивість має будь-яка арифметична прогресія.

Нехай маємо арифметичну прогресію (a_n) з різницею d. Тоді для натуральних значень $n > 1$ виконуються рівності: $a_n - a_{n-1} = d$, $a_{n+1} - a_n = d$. Звідси: $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$; $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$;

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

***Властивість 1.* Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів.**

З цією властивістю арифметичної прогресії і пов'язана її назва.

2. Розглянемо скінченну арифметичну прогресію (x_n), яка має 7 членів: 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15. Знайдемо суму крайніх членів прогресії і суми членів, рівновіддалених від крайніх:

$$x_1 + x_7 = 3 + 15 = 18;$$
$$x_2 + x_6 = 5 + 13 = 18;$$
$$x_3 + x_5 = 7 + 11 = 18;$$
$$x_4 + x_4 = 9 + 9 = 18.$$

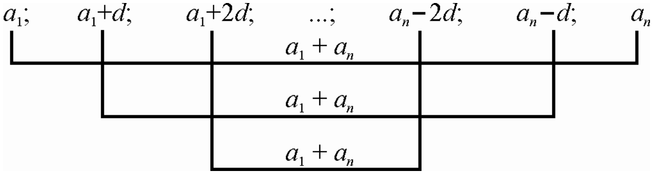
Сума будь-яких двох членів арифметичної прогресії, які рівновіддалені від її крайніх членів, дорівнює сумі крайніх членів.

Використаємо ці міркування для довільної скінченної арифметичної прогресії a_1; a_2; …; a_n з різницею d.

Нехай $a_1 + a_n = m$. Тоді:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n = m;$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = m \text{ і т. д.}$$



Властивість 2. **Сума будь-яких двох членів скінченної арифметичної прогресії, які рівновіддалені від її крайніх членів, дорівнює сумі крайніх членів цієї прогресії.**

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти різницю і третій член арифметичної прогресії (a_n): 1; 1,2; … .

● У цій прогресії $a_1 = 1$, $a_2 = 1,2$. Тому:

$$d = a_2 - a_1 = 1,2 - 1 = 0,2; \quad a_3 = a_2 + d = 1,2 + 0,2 = 1,4.$$

Відповідь. 0,2; 1,4. ●

Вправа 2. Чи є послідовність чисел 3; 0; –3; –6; –9 арифметичною прогресією?

● Позначимо члени заданої послідовності:

$$a_1 = 3;\ a_2 = 0;\ a_3 = -3;\ a_4 = -6;\ a_5 = -9.$$

Знайдемо різниці наступного та попереднього членів послідовності:

$a_2 - a_1 = 0 - 3 = -3$;

$a_3 - a_2 = -3 - 0 = -3$;

$a_4 - a_3 = -6 - (-3) = -3$;

$a_5 - a_4 = -9 - (-6) = -3$.

Оскільки одержані різниці дорівнюють одному й тому ж числу –3, то ця послідовність є арифметичною прогресією. ●

Вправа 3. Між числами 7 і 15 вставити таке число, щоб усі три числа утворили арифметичну прогресію.

● Нехай x — шукане число, тоді послідовність 7; x; 15 — арифметична прогресія. Другий член арифметичної прогресії є середнім арифметичним першого й третього членів: $x = \frac{7+15}{2} = 11.$

Відповідь. 11. ●

Усно

677. Чи є арифметичною прогресією послідовність:

а) 1; 2; 3; 4; 5; … — послідовність натуральних чисел;

б) 2; 4; 6; 8; 10; … — послідовність парних натуральних чисел;

в) 1; 4; 9; 16; 25; … — послідовність квадратів натуральних чисел;

г) –1; –2; –3; –4; –5; … — послідовність від'ємних цілих чисел?

678. Вкажіть перший член і різницю арифметичної прогресії:

а) 2; 7; 12; …; **б)** 0,7; 1; 1,3; …;

в) 6; 5,5; 5; …; **г)** –9; –7; –5; … .

679. Знайдіть перші чотири члени арифметичної прогресії (a_n), у якій:

а) $a_1 = 5$; $d = 2$; **б)** $a_1 = 7$; $d = -2$.

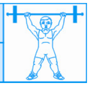
680. Знайдіть четвертий член арифметичної прогресії:

а) 7; 11; 15; ...; **б)** 13; 10; 7; ... .

681. Знайдіть різницю і перший член арифметичної прогресії:

а) a_1; 4; 7; …; **б)** a_1; 5; 3; … .

Рівень А



682. Запишіть послідовність натуральних чисел, кратних 6. Чи є ця послідовність арифметичною прогресією?

683. Знайдіть різницю і третій та четвертий члени арифметичної прогресії (a_n), у якій:

а) $a_1 = 5$; $a_2 = 8$; **б)** $a_1 = -2$; $a_2 = -5$;

в) $a_1 = 0{,}78$; $a_2 = 0{,}78$; **г)** $a_1 = -9{,}1$; $a_2 = -8{,}1$.

684. Знайдіть перші чотири члени арифметичної прогресії (a_n), у якій:

а) $a_1 = 10$; $d = 5$; **б)** $a_1 = 4{,}5$; $d = -0{,}5$.

685. Знайдіть різницю та п'ятий член арифметичної прогресії:

а) 1,4; 1,7; 2; ...; **б)** –3; –2,8; –2,6; … .

686. Знайдіть різницю та четвертий член арифметичної прогресії:

а) 10,5; 13; 15,5; …; **б)** $\sqrt{2}+5$; $\sqrt{2}+3$; $\sqrt{2}+1$; … .

687. Знайдіть другий член арифметичної прогресії:

а) –5; a_2; –13; …; **б)** $\sqrt{5}$; a_2; $4-\sqrt{5}$; … .

688. Знайдіть шостий член арифметичної прогресії, якщо п’ятий і сьомий її члени відповідно дорівнюють:

а) 4,8 і 7,8; **б)** –16,8 і 22.

689. Четвертий член арифметичної прогресії дорівнює –15. Чому дорівнює сума третього і п’ятого членів цієї прогресії?

690. Дев’ятий член арифметичної прогресії дорівнює 23. Чому дорівнює сума восьмого і десятого членів цієї прогресії?

Рівень Б

691. Чи є послідовними членами арифметичної прогресії числа:

а) $7+\sqrt{5}$; $9+2\sqrt{5}$; $10+3\sqrt{5}$; **б)** 4; $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$; $4-4\sqrt{3}$?

692. Між числами –5 і –11 вставте таке число, щоб усі три числа утворили арифметичну прогресію.

693. Знайдіть другий і четвертий члени арифметичної прогресії:

а) 1; c_2; 0,9; c_4;…; **б)** $-\sqrt{2}$; a_2; $3\sqrt{2}$; a_4; … .

694. Перший і четвертий члени арифметичної прогресії відповідно дорівнюють 3,8 і 7,5. Знайдіть суму перших чотирьох членів цієї прогресії.

695. Олег, Петро, Сергій та Андрій ловили рибу. Кількості рибин, які вони зловили, утворюють арифметичну прогресію. Найменше рибин — 9 — зловив Петро, а найбільше — 18 — Олег. Скільки рибин зловили Сергій та Андрій разом? Скільки всього рибин зловили хлопці?

696. Для яких значень m числа 2, $2m-30$ і $m-8$ є трьома послідовними членами арифметичної прогресії?

697. Знайдіть третій член арифметичної прогресії (x_n), якщо $x_1=7\sqrt{3}$ і $x_5=5\sqrt{3}$.

Рівень В

698. П’ятий член арифметичної прогресії дорівнює 2,5. Знайдіть суму перших дев’яти членів цієї прогресії.

699. Числа, якими визначаються градусні міри кутів трикутника, утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть середній за величиною кут трикутника.

700. На вал насаджено п'ять шківів, числові значення діаметрів яких утворюють арифметичну прогресію. Діаметр найменшого шківа дорівнює 34 см, а найбільшого — 46 см. Знайдіть діаметри решти трьох шківів.

Вправи для повторення

701. Що більше: $2\sqrt{3}$ чи $\sqrt{10}$?

702. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} a+4d-(a+2d)=-4; \\ (a+d)(a+3d)=-3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x+2y=-3; \\ x^2-y^2=-8. \end{cases}$

703. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2+6x-7=0$; **б)** $x+6\sqrt{x}-7=0$.

704. У момент відходу човна від пристані в одного з пасажирів упав у воду капелюх. Човен, пройшовши 4 км за течією, повернув назад і на відстані 2 км від пристані порівнявся з капелюхом. Яка швидкість капелюха відносно берега, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 6 км/год?

23. Формула *n*-го члена арифметичної прогресії

Щоб задати арифметичну прогресію, досить вказати її перший член і різницю, а наступні члени можна знайти за формулою $a_{n+1} = a_n + d$.

Наприклад, знайдемо кілька перших членів арифметичної прогресії, у якій $a_1 = 4$, $d = 3$.

Одержимо:

$$a_2 = a_1 + d = 4 + 3 = 7;$$
$$a_3 = a_2 + d = 7 + 3 = 10.$$

Далі можна знайти a_4, a_5 і т. д.

Щоб знайти член цієї прогресії з великим порядковим номером, наприклад, a_{50}, потрібно виконати багато обчислень. Тому відшукання членів арифметичної прогресії за формулою $a_{n+1} = a_n + d$ часто буває незручним.

Знайдемо інший шлях знаходження n-го члена арифметичної прогресії (a_n).

За означенням арифметичної прогресії маємо:

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d.$$

Зауважуємо, що в цих формулах коефіцієнт біля d на 1 менший від порядкового номера члена прогресії, який шукаємо. Так, $a_5 = a_1 + 4d$, $a_{20} = a_1 + 19d$. Отже, можемо записати:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)d.}$$

Одержану формулу називають *формулою n-го члена арифметичної прогресії*.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти дев'ятий член арифметичної прогресії (a_n): 5; 4,2; 3,4; ... .

● Маємо: $a_1 = 5$. Знайдемо різницю прогресії: $d = 4{,}2 - 5 = -0{,}8$. Тоді $a_9 = a_1 + 8d = 5 + 8 \cdot (-0{,}8) = -1{,}4$.

Відповідь. –1,4. ●

Вправа 2. Знайти перший член арифметичної прогресії (a_n), у якій $d = -2$, $a_8 = 93$.

● Використавши формулу n-го члена арифметичної прогресії для $n = 8$, одержимо: $93 = a_1 + 7 \cdot (-2)$. Звідси $a_1 = 93 + 14 = 107$.

Відповідь. 107. ●

Вправа 3. Чи є число 181 членом арифметичної прогресії, у якій $a_1 = 3$, $d = 5$?

● Число 181 буде членом прогресії, якщо існує таке натуральне число n — порядковий номер члена прогресії, що $a_n = 181$. Оскільки $a_n = a_1 + (n - 1)d$, то $181 = 3 + (n - 1) \cdot 5$. Розв'яжемо одержане рівняння: $181 = 3 + 5n - 5$; $183 = 5n$; $n = 36{,}6$. Число 36,6 не є натуральним, тому число 181 не є членом даної арифметичної прогресії.

Відповідь. Ні. ●

Вправа 4. Знайти перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо сума другого і п'ятого її членів дорівнює 20, а різниця дев'ятого і третього членів дорівнює 18.

● За умовою маємо: $a_2 + a_5 = 20$, $a_9 - a_3 = 18$. Записавши члени a_2, a_5, a_9 і a_3 за формулою n-го члена арифметичної прогресії, одержимо систему рівнянь:

$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 4d = 20; \\ a_1 + 8d - a_1 - 2d = 18. \end{cases}$ Звідки: $\begin{cases} 2a_1 + 5d = 20; \\ 6d = 18; \end{cases}$ $\begin{cases} 2a_1 + 15 = 20; \\ d = 3; \end{cases}$ $a_1 = 2{,}5$; $d = 3$.

Відповідь. 2,5; 3. ●

Рівень А

705. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії (a_n) та знайдіть a_{11}, якщо:

а) $a_1 = 11$, $d = \frac{1}{2}$; **б)** $a_1 = -3$, $d = -4$.

706. Знайдіть вісімнадцятий член арифметичної прогресії:

а) 1; 1,3; 1,6; ...; **б)** 3; 1; –1; ... .

707. В арифметичній прогресії (a_n): $a_1 = 0{,}5$; $d = 2$. Знайдіть a_7, a_{15}.

708. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії (a_n) та знайдіть a_9:

а) 7,8; 8,9; 10; …; **б)** –6; –13; –20; … .

709. Знайдіть перший член арифметичної прогресії, якщо її різниця і дев'ятий член відповідно дорівнюють:

а) 0,5; 3; **б)** 0,2; –2.

710. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n), якщо:

а) $d = 2{,}5$; $a_{11} = 11$; **б)** $d = -\frac{1}{9}$; $a_{100} = 0$.

Знайдіть порядковий номер члена a_n арифметичної прогресії, якщо:

711. а) $a_1 = 3$; $d = -5$; $a_n = -37$; **б)** $a_1 = -7$; $d = 2$; $a_n = 81$.

712. а) $a_1 = 1$; $d = 7$; $a_n = 71$; **б)** $a_1 = -20$; $d = 3$; $a_n = -2$.

Рівень Б

713. Чи є членом арифметичної прогресії –2; –5; –8; ... число –84; число –152?

714. Чи є число 130 членом арифметичної прогресії:

а) 4; 7; 10; ...; **б)** 23; 34; 45; …?

715. Ламана складається із дванадцяти відрізків. Довжина першого відрізка дорівнює 25 см, а кожного наступного — на 2 см менша, ніж попереднього. Яка довжина найкоротшого відрізка?

716. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії, якщо її четвертий і дев'ятий члени відповідно дорівнюють 16 і 41.

717. Знайдіть різницю і п'ятнадцятий член арифметичної прогресії, якщо її третій член дорівнює 9, а сума п'ятого і дев'ятого членів дорівнює 2.

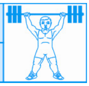
718. Знайдіть дев'ятий член арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_4 = 9$, $a_{17} = -17$.

719. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (c_n), для якої $c_2 + c_8 = 10$, $c_3 + c_{14} = 31$.

720. Між числами 8 і 63 вставте чотири числа так, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

721. Між числами 2 і –6 вставте три числа так, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

Рівень В



722. Знайдіть перший від'ємний член арифметичної прогресії 72; 70,5; ... .

723. Знайдіть перший додатний член арифметичної прогресії –90; –85,6; ... .

724. Скільки додатних членів має арифметична прогресія 28; 27,7; ...?

725. Дано дві арифметичні прогресії (x_n): 7; 26; ... і (y_n): 3; 8; ... . Знайдіть найменший спільний член цих прогресій.

Вправи для повторення

726. Чи належить число –2 області значень функції $y = x^2 + 5x + 4$?

727. Розв'яжіть нерівність:

а) $3n^2 - 10n + 7 > 0$;   **б)** $(21 - x)(2x + 3) \geq 0$.

728. З урни, у якій є 15 куль, пронумерованих числами від 1 до 15, навмання виймають одну кулю. Знайдіть імовірність того, що номер вийнятої кулі виявиться дільником числа 15.

729. Доведіть, що значення виразу $\sqrt{x^2 + 5xy + y^2}$ є цілим числом, якщо $(x; y)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x - 2y = -5; \\ 3x + y = 6. \end{cases}$

24. Формула суми перших *n* членів арифметичної прогресії

Приклад. Знайти суму натуральних чисел від 1 до 100 включно.

Запишемо суму S даних чисел двома способами: у порядку зростання доданків та у порядку спадання і почленно додамо одержані рівності:

$$\begin{array}{rl} & S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 \\ + & S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 1 \\ \hline & 2S = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 \end{array}$$

Суми пар чисел, розміщених одне під одним у правих частинах цих рівностей, дорівнюють одному й тому ж числу 101; таких пар є 100. Тому

$$2S = 101 \cdot 100.$$

Звідси $S = \dfrac{101 \cdot 100}{2} = 5050.$

Отже, сума всіх натуральних чисел від 1 до 100 включно дорівнює 5050.

Зазначимо, що послідовність натуральних чисел 1; 2; ...; 99; 100 є арифметичною прогресією (a_n), у якій $a_1 = 1$; $d = 1$; $n = 100$.

Використаємо проведені міркування для виведення формули суми S_n перших n членів довільної арифметичної прогресії a_1; a_2; …; a_n; ... .

Запишемо:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n;$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1.$$

Додамо почленно ці рівності, одержимо:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_n + a_1).$$

За властивістю 2 арифметичної прогресії сума кожних двох членів, узятих у дужки, дорівнює $a_1 + a_n$. Таких сум є n, тому:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Звідси

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.} \qquad (1)$$

Якщо в цій формулі замість a_n підставити вираз $a_1 + (n-1)d$, то одержимо:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Отже,

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \qquad (2)$$

Формули (1) і (2) називають *формулами суми перших n членів арифметичної прогресії*.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти суму перших дев’яти членів арифметичної прогресії (a_n): 3; 7; 11; ... .

● *1-й спосіб.* Маємо: $a_1 = 3$, $d = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$. Знайдемо a_9: $a_9 = 3 + 8 \cdot 4 = 35$. За формулою (1) знаходимо:

$$S_9 = \frac{3+35}{2} \cdot 9 = 171.$$

2-й спосіб. Знаючи, що $a_1 = 3$, $d = 4$, за формулою (2) знаходимо:

$$S_9 = \frac{2 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{2} \cdot 9 = 171.$$

Відповідь. 171. ●

Вправа 2. Знайти суму непарних натуральних чисел, які не перевищують 71.

● Непарні натуральні числа утворюють арифметичну прогресію 1; 3; 5; ..., у якій $a_1 = 1$, $d = 2$, $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$. Знайдемо, який порядковий номер має член 71 цієї прогресії: $71 = 2n - 1$; $n = 36$. Отже, потрібно шукати суму перших тридцяти шести членів прогресії. Знаходимо:

$$S_{36} = \frac{1+71}{2} \cdot 36 = 1296.$$

Відповідь. 1296. ●

Вправа 3. Знайти суму натуральних чисел, не більших від 105, які при діленні на 9 дають в остачі 1.

● Натуральні числа, які при діленні на 9 дають в остачі 1, утворюють арифметичну прогресію (a_n): 1; 10; 19; ..., у якій $a_1 = 1$, $d = 9$, $a_n = 1 + 9(n-1) = 9n - 8$. Знайдемо, скільки членів цієї прогресії не перевищують 105. Для цього розв’яжемо нерівність $a_n \le 105$:

$$9n - 8 \le 105; \;\; 9n \le 113; \;\; n \le 12\frac{5}{9}.$$

Отже, потрібно шукати суму перших дванадцяти членів прогресії. Знаходимо: $a_{12} = 1 + 9 \cdot 11 = 100$; $S_{12} = \dfrac{1+100}{2} \cdot 12 = 606$.

Відповідь. 606. ●

Вправа 4. Знайти перший член арифметичної прогресії (a_n), якщо сума другого і дванадцятого її членів дорівнює 20,4, а сума перших одинадцяти — 121.

● За умовою маємо: $a_2 + a_{12} = 20{,}4$; $S_{11} = 121$. Використавши формули n-го члена та суми перших n членів арифметичної прогресії, одержимо систему рівнянь $\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 11d = 20{,}4; \\ \dfrac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = 121. \end{cases}$ Звідси:

$$\begin{cases} 2a_1 + 12d = 20{,}4; \\ (a_1 + 5d) \cdot 11 = 121; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 6d = 10{,}2; \\ a_1 + 5d = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} d = -0{,}8; \\ a_1 + 5d = 11; \end{cases} \quad a_1 = 15.$$

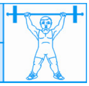
Відповідь. 15. ●

Вправа 5. Скільки потрібно взяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), у якій $a_1 = 2$; $d = 1$, щоб їх сума дорівнювала 90?

● Використавши формулу суми перших n членів арифметичної прогресії $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, матимемо: $90 = \dfrac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (n-1)}{2} \cdot n$; $180 = (n + 3) \cdot n$; $n^2 + 3n - 180 = 0$; $n_1 = -15$, $n_2 = 12$. Корінь $n_1 = -15$ не задовольняє умову задачі. Отже, $n = 12$.

Відповідь. 12. ●

Рівень А



730. Знайдіть суму перших одинадцяти членів арифметичної прогресії, якщо:

а) $a_1 = 22$; $a_{11} = -1$; **б)** $a_1 = 5$; $a_{11} = 15$.

Знайдіть суму перших n членів арифметичної прогресії (a_n), *якщо:*

731. **а)** $a_1 = 8$; $d = 4$; $n = 5$; **б)** $a_1 = -0{,}1$; $d = -0{,}1$; $n = 9$.

732. **а)** $a_1 = 1{,}5$; $d = 2$; $n = 8$; **б)** $a_1 = 5$; $d = -3$; $n = 7$.

733. Знайдіть суму перших десяти членів арифметичної прогресії:

а) 3; 9; 15; ...; **б)** –2,3; –2,5; –2,7; ... .

734. Знайдіть суму перших дев'яти членів арифметичної прогресії:

а) 1; 5; 9; ...; **б)** –1; –2; –3; ... .

735. Знайдіть суму перших п'ятдесяти натуральних чисел.

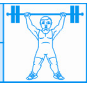
736. Знайдіть суму перших сорока натуральних чисел.

737. Довжини сторін п'ятикутника утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть периметр п'ятикутника, якщо довжина його найкоротшої сторони дорівнює 4 см, а найдовшої — 12 см.

738. Сума перших п'яти членів арифметичної прогресії (a_n) дорівнює 25. Знайдіть п'ятий член прогресії, якщо $a_1 = –5$.

739. Сума перших дев'яти членів арифметичної прогресії дорівнює 126, дев'ятий член дорівнює 54. Знайдіть перший член цієї прогресії.

Рівень Б



740. Знайдіть суму непарних натуральних чисел, не більших від 81.

741. Знайдіть суму парних натуральних чисел, не більших від 100.

742. Знайдіть суму натуральних чисел, кратних 7 і не більших від 145.

743. Знайдіть суму парних натуральних чисел від 24 до 120 включно.

744. Знайдіть суму непарних натуральних чисел від 17 до 117 включно.

745. Скільки потрібно взяти перших членів арифметичної прогресії 16; 14; ..., щоб їх сума дорівнювала –434?

746. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_{10} = 33$; $S_8 = 88$.

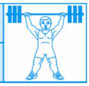
747. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_6 = 0$; $S_{12} = –18$.

748. Знайдіть суму перших десяти членів арифметичної прогресії, п'ятий і восьмий члени якої відповідно дорівнюють 12 і 27.

749. Дев'ятий член арифметичної прогресії більший від четвертого утричі, а їх сума дорівнює 20. Знайдіть суму перших восьми членів прогресії.

750. Екскаватор вирив траншею завдовжки 375 м, до того ж за перший день він вирив 50 м, а за кожний наступний — на 5 м більше, ніж за попередній. За скільки днів екскаватор вирив траншею?

Рівень В



751. Знайдіть суму перших двадцяти натуральних двоцифрових чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 1.

752. Знайдіть суму натуральних трицифрових чисел, кратних 4.

753. Знайдіть суму членів арифметичної прогресії з дев'ятого до двадцятого включно, якщо перший член прогресії дорівнює 5, а різниця — –2.

754. Знайдіть суму перших n:

а) парних натуральних чисел; **б)** непарних натуральних чисел.

755. Знайдіть натуральне число, яке у 5 разів менше від суми усіх натуральних чисел, які йому передують.

756. Розв'яжіть рівняння:

а) $6 + 11 + ... + (1 + 5n) = 111$ (n — натуральне число);

б) $(x - 1) + (x - 3) + \ldots + (x - 27) = 350$.

757. Для поливання 10 дерев, розміщених у ряд на відстані 3 м одне від одного, садівник приносить відро води для кожного дерева окремо із криниці, розміщеної у тому ж ряду за 10 м від першого дерева. Скільки всього метрів пройде садівник, щоб полити всі дерева і повернутися до криниці?

Вправи для повторення

758. Побудуйте графік функції $y = -2x^2 + 8x$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) усі значення x, для яких функція набуває від'ємних значень;

в) проміжок, на якому функція зростає; спадає.

759. Скільки кілограмів 9%-го і 12%-го сплавів срібла потрібно взяти, щоб одержати 50 кг сплаву, що містить 10,8% срібла?

760. Доведіть нерівність:

а) $(2a - 1)^2 > a^2 - 1$; **б)** $a^4 + 16b \geq 8a^2\sqrt{b}$.

761. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7; \\ x + y = 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x - 2y = 1; \\ x^2 + 2 = y^2 + 2xy. \end{cases}$

25. Геометрична прогресія та її властивості

За сприятливих умов деякі бактерії розмножуються так, що їх кількість подвоюється кожні 30 хвилин. Тому, якщо на початку була одна така бактерія, то їх буде:

через 0,5 год	2
через 1 год	4
через 1,5 год	8
через 2 год	16
....	...

У другому стовпчику одержали послідовність чисел: 2; 4; 8; 16; ..., кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на число 2. Така послідовність є прикладом *геометричної прогресії*.

Означення **Геометричною прогресією називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те ж число.**

Це число називають *знаменником геометричної прогресії* та позначають буквою q (початкова буква французького слова «*qwoti*» — частка).

Отже, якщо маємо геометричну прогресію b_1; b_2; b_3; ..., то $b_2 = b_1 \cdot q$; $b_3 = b_2 \cdot q$; ..., тобто для будь-якого натурального n виконується рівність

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

З означення геометричної прогресії випливає, що частка від ділення будь-якого її члена, починаючи із другого, на попередній член дорівнює одному й тому ж числу — знаменнику q, тобто: $\frac{b_2}{b_1} = q$; $\frac{b_3}{b_2} = q$; … . Отже, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Правильно і навпаки: якщо у деякій послідовності частка від ділення будь-якого її члена, починаючи із другого, на попередній член дорівнює одному й тому ж числу, то така послідовність є геометричною прогресією.

Геометричні прогресії, як і арифметичні, можуть бути скінченними і нескінченними.

Щоб задати геометричну прогресію, досить вказати її перший член і знаменник. Тоді кожний наступний член через попередній можна обчислити за *рекурентною формулою* $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

У таблиці наведені приклади геометричних прогресій для деяких значень b_1 і q.

b_1	q	Геометрична прогресія
1	3	1; 3; 9; 27; 81; ...
1	–2	1; –2; 4; –8; 16; ...
2	$\frac{1}{2}$	2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ...
–7	1	–7; –7; –7; –7; –7; ...

Розглянемо *властивості геометричної прогресії.*

1. У геометричній прогресії 1; 3; 9; 27; 81; ... квадрат кожного члена, починаючи із другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів:

$$3^2 = 1 \cdot 9; \quad 9^2 = 3 \cdot 27; \quad 27^2 = 9 \cdot 81; \ldots .$$

Покажемо, що таку властивість має будь-яка геометрична прогресія.

Нехай маємо геометричну прогресію (b_n) зі знаменником q. Тоді для $n > 1$ виконуються рівності: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = q$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Звідси: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$;

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Властивість 1 **Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи із другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів.**

Якщо всі члени геометричної прогресії є додатними числами, то з рівності $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ випливає, що $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Отже, кожний член такої прогресії, починаючи із другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів. З цією властивістю геометричної прогресії і пов'язана її назва.

2. Розглянемо скінченну геометричну прогресію (x_n), яка містить шість членів: –1; 2; –4; 8; –16; 32. Знайдемо добуток крайніх членів цієї прогресії та добутки членів, рівновіддалених від крайніх:

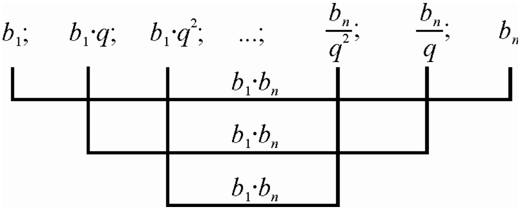
$$x_1 \cdot x_6 = (-1) \cdot 32 = -32;$$
$$x_2 \cdot x_5 = 2 \cdot (-16) = -32;$$
$$x_3 \cdot x_4 = (-4) \cdot 8 = -32.$$

Бачимо, що добутки членів прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів, однакові й дорівнюють добутку крайніх членів.

Використаємо ці міркування для довільної скінченної геометричної прогресії b_1; b_2; …; b_n.

Нехай $b_1 \cdot b_n = m$. Тоді:

$$b_2 \cdot b_{n-1} = b_1 q \cdot \frac{b_n}{q} = b_1 \cdot b_n = m, \quad b_3 \cdot b_{n-2} = b_2 q \cdot \frac{b_{n-1}}{q} = b_2 \cdot b_{n-1} = m, \ldots .$$



Властивість 2 **Добуток будь-яких двох членів скінченної геометричної прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів, дорівнює добутку крайніх членів.**

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти знаменник і третій член геометричної прогресії (b_n): 1; 1,5; … .

● У цій прогресії $b_1 = 1$, $b_2 = 1{,}5$. Тому:

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5; \qquad b_3 = b_2 q = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25.$$

Відповідь. 1,5; 2,25. ●

Вправа 2. Довести, що послідовність 8; –4; 2; –1; $\frac{1}{2}$ є геометричною прогресією.

● Позначимо члени послідовності: $b_1 = 8$; $b_2 = -4$; $b_3 = 2$; $b_4 = -1$; $b_5 = \frac{1}{2}$.

Знайдемо частки від ділення наступного члена послідовності на попередній:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{b_4}{b_3}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2};$$

$$\frac{b_5}{b_4}=\frac{1}{2}:(-1)=-\frac{1}{2}.$$

Оскільки одержані частки дорівнюють одному й тому ж числу $-\frac{1}{2}$, то задана послідовність є геометричною прогресією зі знаменником $-\frac{1}{2}$. ●

Вправа 3. Знайти другий член геометричної прогресії: –4; b_2; –25; ... .

● За властивістю 1 геометричної прогресії $b_2^2=b_1b_3=(-4)\cdot(-25)=100$. Звідси b_2 = 10 або b_2 = –10.

Відповідь. 10 або –10. ●

Усно

762. Чи є геометричною прогресією послідовність:

а) 5; 25; 125; 625; … — послідовність натуральних степенів числа 5;

б) –3; 9; –27; 81; … — послідовність натуральних степенів числа –3;

в) 1; 8; 27; 64; … — послідовність кубів натуральних чисел?

763. Вкажіть перший член і знаменник геометричної прогресії:

а) 1; –5; 25; ...; **б)** 9; 3; 1; …;

в) –6; –6; –6; …; **г)** 7; $\frac{7}{2}$; $\frac{7}{4}$; ... .

764. Знайдіть перші три члени геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) b_1 = 3; q = 2; **б)** b_1 = 5; q = –2.

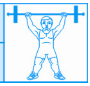
765. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії:

а) 2; 6; 18; …; **б)** –9; –3; –1; … .

766. Знайдіть знаменник і перший член геометричної прогресії:

а) b_1; 4; 16; …; **б)** b_1; 6; 3; … .

Рівень А



Запишіть перші чотири члени геометричної прогресії (b_n), *у якій:*

767. **а)** $b_1 = \frac{1}{2}$; q = 2; **б)** $b_1=\frac{81}{25}$; $q=-\frac{1}{3}$.

768. **а)** b_1 = 4; q = –2; **б)** b_1 = –3; q = 0,2.

769. Знайдіть знаменник і третій та четвертий члени геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) $b_1 = 5$; $b_2 = 10$; **б)** $b_1 = 3$; $b_2 = –0{,}3$.

770. Знайдіть знаменник та п’ятий член геометричної прогресії:

а) 3; 9; 27; ...; **б)** –64; 16; –4; … .

771. Знайдіть знаменник та четвертий член геометричної прогресії:

а) 2; –6; 18; …; **б)** 4; 2; 1; … .

772. Знайдіть другий член геометричної прогресії:

а) –36; b_2; –9; …; **б)** 0,7; b_2; 0,063; … .

773. Знайдіть п’ятий член геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_4 = 3$; $b_6 = 75$; **б)** $b_4 = –8$; $b_6 = –18$.

774. Чому дорівнює добуток шостого і восьмого членів геометричної прогресії, якщо її сьомий член дорівнює: –8; 1,8?

Рівень Б

775. Чи є послідовними членами геометричної прогресії значення: **а)** $\mathrm{tg}\alpha$; **б)** $\sin\alpha$, де $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$; $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$; $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$?

776. Чи є послідовними членами геометричної прогресії числа:

а) 3^{12}; 3^{14}; 3^{16}; **б)** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$; 1; $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$?

777. Виміри прямокутного паралелепіпеда утворюють геометричну прогресію. Знайдіть об’єм паралелепіпеда, якщо його найменше ребро дорівнює 2,5 см, а найбільше — 10 см.

778. Вік батька, старшого та молодшого синів утворюють геометричну прогресію. Скільки років старшому синові, якщо батькові 32 роки, а молодшому синові — 2 роки?

779. Знайдіть невідомі члени скінченної геометричної прогресії:

а) 1; b_2; 49; b_4; **б)** 8; x; 2; y; $\dfrac{1}{2}$; **в)** b_1; $\dfrac{3}{2}$; b_3; $\dfrac{3}{8}$; b_5.

780. Між числами 1 і 3 вставте таке число, щоб усі три числа утворили геометричну прогресію.

Рівень В

781. Числа 1, x, y є одночасно послідовними членами арифметичної та геометричної прогресій. Знайдіть x та y.

782. Третій член геометричної прогресії дорівнює 2. Знайдіть добуток перших п’яти членів цієї прогресії.

Вправи для повторення

783. Обчисліть:

а) $\frac{2^{-7}\cdot 2^{5}}{2^{-3}}$; **б)** $\frac{3^{20}-5\cdot 3^{19}}{9^{9}}$.

784. Розв’яжіть нерівність:

а) $1 - 2(x - 1) < 6 - 5x$; **б)** $\frac{x-1}{3} > 1 - \frac{x+2}{6}$.

785. Одна сторона прямокутника утричі більша, а друга на 4 см менша від сторони квадрата. Знайдіть площу квадрата, якщо вона на 10 см^2 більша від площі прямокутника.

786. Знайдіть усі значення a, для кожного з яких нерівність $x^2 - 2ax + 4a > 0$ виконується для усіх значень x.

26. Формула n-го члена геометричної прогресії

Щоб задати геометричну прогресію (b_n), досить вказати її перший член і знаменник, а наступні члени можна знайти за формулою $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

Наприклад, запишемо кілька перших членів геометричної прогресії, у якій $b_1 = 5$, $q = 2$:

$$b_2 = 5\cdot 2 = 10;$$

$$b_3 = 10\cdot 2 = 20;$$

....

Далі можна знайти b_4, b_5 і т. д.

Щоб знайти член цієї прогресії з великим порядковим номером, наприклад, b_{50}, потрібно виконати багато обчислень. Тому відшукання членів геометричної прогресії за формулою $b_{n+1} = b_n \cdot q$ часто є незручним.

Знайдемо коротший шлях відшукання n-го члена геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q.

За означенням геометричної прогресії маємо:

$$b_2 = b_1 q;$$

$$b_3 = b_2 q = b_1 q\cdot q = b_1 q^2;$$

$$b_4 = b_3 q = b_1 q^2\cdot q = b_1 q^3.$$

Зауважуємо, що в цих формулах показник степеня числа q на одиницю менший від порядкового номера члена прогресії, який шукаємо. Так, $b_5 = b_1q^4$; $b_{20} = b_1q^{19}$. Отже, можемо записати:

$$\boldsymbol{b_n = b_1q^{n-1}}.$$

Одержану формулу називають *формулою n-го члена геометричної прогресії*.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти шостий член геометричної прогресії (b_n): 2; 10; 50; ... .

● Маємо: $b_1 = 2$; $q = 10 : 2 = 5$. Тоді $b_6 = b_1 \cdot q^5 = 2 \cdot 5^5 = 6250$.

Відповідь. 6250. ●

Вправа 2. Знайти перший член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_7 = 32$, $q = -2$.

● Використавши формулу $b_n = b_1q^{n-1}$ для $n = 7$, одержимо:

$$32 = b_1(-2)^6; \quad 32 = b_1 \cdot 64; \quad b_1 = 0{,}5.$$

Відповідь. 0,5. ●

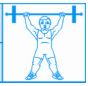
Вправа 3. Знайти знаменник геометричної прогресії (b_n), у якій $b_7 = -12$, $b_9 = -108$.

● Використавши формулу n-го члена геометричної прогресії, одержимо: $b_9 = b_1q^8 = -108$, $b_7 = b_1q^6 = -12$. Звідси:

$$\frac{b_1q^8}{b_1q^6} = \frac{-108}{-12}; \;\; q^2 = 9; \;\; q = -3 \text{ або } q = 3.$$

Відповідь. –3 або 3. ●

Рівень А



787. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) $b_1 = 6$; $q = 2$;

б) $b_1 = -2$; $q = 0{,}1$;

в) $b_1 = \frac{1}{3}$; $q = -3$;

г) $b_1 = -64$; $q = \frac{1}{2}$.

788. Послідовність (b_n) — геометрична прогресія. Знайдіть:

а) b_5, якщо $b_1 = 2$; $q = \frac{1}{2}$; **б)** b_3, якщо $b_1 = 36$; $q = \frac{1}{3}$;

в) b_4, якщо $b_1 = 1$; $q = –2$; **г)** b_3, якщо $b_1 = 100$; $q = 3$.

789. Знайдіть шостий член геометричної прогресії:

а) –32; 16; –8; ...; **б)** $\frac{1}{2}$; 1; 2; ... .

790. Знайдіть п’ятий член геометричної прогресії:

а) 1; 3; 9; ...; **б)** 2; –4; 8; ... .

Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), *у якій:*

791. **а)** $b_6 = 243$; $q = 3$; **б)** $b_5 = -\frac{5}{32}$; $q = \frac{1}{2}$.

792. **а)** $b_7 = 128$; $q = 2$; **б)** $b_5 = \frac{3}{625}$; $q = -\frac{1}{5}$.

793. Заповніть таблицю, якщо (b_n) — геометрична прогресія.

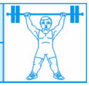
b_1	q	n	b_n
3	3	3	
0,6		3	5,4
	–2	9	256

794. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) $b_5 = 32$, $b_3 = 8$; **б)** $b_6 = –27$; $b_8 = –243$.

795. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), у якій $b_4 = 10$, $b_2 = 0,1$.

Рівень Б



796. Знайдіть перший член геометричної прогресії, якщо її четвертий і шостий члени відповідно дорівнюють 9 і 81.

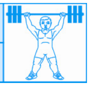
797. Третій член геометричної прогресії з додатним знаменником дорівнює 16, а сума перших двох членів дорівнює 12. Знайдіть п’ятий член прогресії.

798. Знайдіть шостий член геометричної прогресії (x_n), якщо $x_1 + x_3 = 10$, $x_2 = –4$.

799. У квадрат зі стороною 8 см вписано квадрат, вершинами якого є середини сторін заданого квадрата. У другий квадрат у такий же спосіб вписано третій квадрат і т. д. Доведіть, що числові значення площ цих квадратів утворюють геометричну прогресію і знайдіть площу п’ятого квадрата.

800. У рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює 24 см, вписано інший трикутник, вершинами якого є середини сторін даного трикутника. У другий трикутник у такий же спосіб вписано третій трикутник і т. д. Доведіть, що числові значення периметрів цих трикутників утворюють геометричну прогресію і знайдіть периметр п’ятого трикутника.

Рівень В



801. Знайдіть чотири числа, що утворюють геометричну прогресію, у якій різниця першого і другого членів дорівнює 28, а різниця четвертого і третього членів дорівнює –252.

802. Три числа утворюють скінченну геометричну прогресію. Сума другого і третього чисел дорівнює 4. Якщо перше число помножити на $\frac{5}{9}$, а два інших залишити без зміни, то нова трійка чисел утворюватиме скінченну арифметичну прогресію. Знайдіть члени геометричної прогресії.

803. Чотири числа утворюють геометричну прогресію. Якщо до перших двох чисел додати по 1, а до третього і четвертого — відповідно 4 і 13, то нова четвірка чисел утворюватиме арифметичну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють геометричну прогресію.

Вправи для повторення

804. Спростіть вираз:

а) $\frac{x^3y^2c}{2y}\cdot\frac{4c^3}{yx^7}$; **б)** $\frac{a^3+b^3}{m^2-n^2}:\frac{a^2-ab+b^2}{(m+n)^2}$.

805. Розв’яжіть нерівність:

а) $\frac{16x+5}{x}\ge 0$; **б)** $(x+3)^2-64<0$.

806. Для яких значень m один з коренів рівняння $8x^2-6x+m=0$ удвічі більший від іншого?

807. *Із «Бахшалійського рукопису».* Знайдіть натуральне число, яке збільшене на 5 і зменшене на 11 дає повні квадрати.

27. Формула суми перших *n* членів геометричної прогресії

Нехай b_1; b_2; b_3; … — геометрична прогресія, знаменник якої дорівнює q. Позначимо через S_n суму перших n членів цієї прогресії, тобто

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \qquad (1)$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на q, одержимо:

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + \ldots + b_{n-1} q + b_n q.$$

За означенням геометричної прогресії: $b_1 q = b_2$; $b_2 q = b_3$; …; $b_{n-1} q = b_n$. Тоді:

$$S_n q = b_2 + b_3 + \ldots + b_n + b_n q. \qquad (2)$$

Віднімемо почленно від рівності (1) рівність (2), одержимо:

$$S_n - S_n q = b_1 + \underline{b_2 + b_3 + \ldots + b_n} - \left(\underline{b_2 + b_3 + \ldots + b_n} + b_n q \right) = b_1 - b_n q;$$

$$S_n(1-q) = b_1 - b_n q.$$

Якщо $q \neq 1$, то

$$\boldsymbol{S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q}}. \qquad (3)$$

Урахувавши, що $b_n = b_1 q^{n-1}$, одержимо $S_n = \dfrac{b_1 - b_1 q^n}{1-q}$. Отже,

$$\boldsymbol{S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}} \text{ або } \boldsymbol{S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}}. \qquad (4)$$

Формули (3) і (4) називають *формулами суми перших n членів геометричної прогресії.*

Якщо $q = 1$, то кожний член геометричної прогресії дорівнює b_1, тому $S_n = n \cdot b_1$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти суму восьми перших членів геометричної прогресії (b_n): 3; –6; 12; … .

● Маємо: $b_1 = 3$; $q = \dfrac{-6}{3} = -2$. Тоді за формулою $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ знаходимо: $S_8 = \dfrac{3\cdot(1-(-2)^8)}{1+2} = \dfrac{3\cdot(1-256)}{3} = -255.$

Відповідь. –255. ●

Вправа 2. Знайти перший член геометричної прогресії (b_n), якщо четвертий її член утричі більший від третього, а сума перших п'яти членів дорівнює –12,1.

● Оскільки $b_4 = 3b_3$, то $q = 3$. За умовою $S_5 = -12{,}1$, тому:

$$-12{,}1 = \frac{b_1(1-3^5)}{1-3}; \quad -12{,}1 = 121b_1; \quad b_1 = -0{,}1.$$

Відповідь. –0,1. ●

Рівень А

808. Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) $b_1 = -3$; $q = 2$; **б)** $b_1 = 0{,}5$; $q = -2$.

Знайдіть суму перших n членів геометричної прогресії (b_n)*, у якій:*

809. **а)** $b_1 = -1$; $q = -5$; $n = 5$; **б)** $b_1 = -64$; $q = -\frac{1}{2}$; $n = 8$.

810. **а)** $b_1 = -4$; $q = 3$; $n = 4$; **б)** $b_1 = 1$; $q = -2$; $n = 6$.

811. Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії:

а) $2; -1; \frac{1}{2}; \ldots$; **б)** $-5; 10; -20; \ldots$.

812. Знайдіть суму перших п'яти членів геометричної прогресії:

а) $3; -6; 12; \ldots$; **б)** $0{,}2; 0{,}6; 1{,}8; \ldots$.

Рівень Б

813. Знайдіть перший член геометричної прогресії зі знаменником $-\frac{1}{2}$, якщо сума перших восьми її членів дорівнює $1\frac{21}{64}$.

814. Знайдіть перший член геометричної прогресії, у якій $q = \frac{1}{2}$, $S_7 = 254$.

815. Знайдіть суму членів геометричної прогресії (b_n) від третього до восьмого включно, якщо:

а) $b_1 = 2$; $q = 3$; **б)** $b_1 = -16$; $q = 0{,}5$.

816. Знайдіть суму членів геометричної прогресії (b_n) від четвертого до восьмого включно, якщо $b_1 = 5$; $q = -2$.

817. Доведіть, що послідовність, яка задана формулою $x_n = 2 \cdot 3^n$, є геометричною прогресією і знайдіть суму перших шести її членів.

Рівень В

818. Різниця п'ятого і третього членів геометричної прогресії дорівнює 36, а різниця третього і першого — 9. Знайдіть суму перших восьми членів цієї прогресії.

819. Три числа, сума яких дорівнює 21, утворюють арифметичну прогресію. Якщо від другого числа відняти 1, до третього — додати 1, а перше число залишити без зміни, то нова трійка чисел утворить геометричну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють геометричну прогресію.

820. Знайдіть восьмий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 3$ і для деякого натурального n виконуються рівності $b_n = 96$, $S_n = 189$.

821. Сума перших трьох членів геометричної прогресії з додатним знаменником дорівнює 14, а сума членів із третього до п'ятого включно — 3,5. Знайдіть суму перших п'яти членів прогресії.

Вправи для повторення

822. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-2} - \dfrac{1}{\sqrt{6}+2}$; **б)** $\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}$.

823. Побудуйте графік функції:

а) $y = x^2 - 5$; **б)** $y = x^2 + 6x + 10$.

824. Розв'яжіть нерівність:

а) $5x + m \geq 0$; **б)** $\dfrac{2x-1}{x+m} \leq 0$,

де m — сума перших п'яти членів арифметичної прогресії: 1; –2; –5; ... .

825. На заводі для виготовлення одного електродвигуна типу A використовують 2 кг міді й 1 кг свинцю, а на виготовлення одного електродвигуна типу B — 3 кг міді й 2 кг свинцю. Скільки електродвигунів кожного типу було виготовлено на заводі, якщо відомо, що всього використали 130 кг міді й 80 кг свинцю?

28. Сума нескінченної геометричної прогресії, у якій $|q| < 1$

Нехай маємо прямокутник *ABCD* зі сторонами 1 см і 4 см (рис. 74). Його площа дорівнює $1 \cdot 4 = 4$ (см^2).

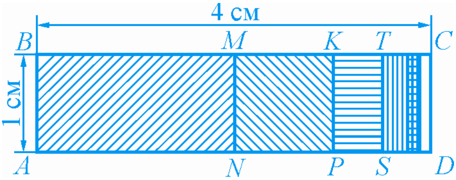


Рис. 74

Знайдемо площу цього прямокутника по-іншому.

Відрізком *MN*, що з'єднує середини протилежних сторін *BC* і *AD* прямокутника, поділимо його навпіл. Площі утворених прямокутників *ABMN* і *NMCD* дорівнюють по 2 см^2. Утворений праворуч прямокутник знову поділимо навпіл, з'єднавши середини *K* і *P* протилежних сторін. Площі утворених прямокутників *NMKP* і *PKCD* дорівнюють по 1 см^2. Аналогічно утворений прямокутник *PKCD* знову поділимо навпіл відрізком *TS* на два прямокутники з площами по $\frac{1}{2}$ см^2 і т. д.

Знайдемо суму площ прямокутників *ABMN*, *NMKP*, *PKTS* і т. д. Числове значення суми площ цих прямокутників дорівнюватиме сумі чисел $2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \ldots$. Послідовність $2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \ldots$ є нескінченною геометричною прогресією, перший член якої дорівнює 2, а знаменник — $\frac{1}{2}$.

Знайдемо суму перших n членів цієї прогресії:

$$S_n = \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2}} = 4\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 4-\frac{1}{2^{n-2}}.$$

Якщо число n доданків суми S_n необмежено збільшується, то значення дробу $\frac{1}{2^{n-2}}$ наближається до нуля, а різниця $4-\frac{1}{2^{n-2}}$ наближається до числа 4, кажуть: *прямує до числа* 4. Число 4 називають *сумою нескінченної геометричної прогресії* $2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \ldots$ і записують $2+1+\frac{1}{2}+\ldots=4$.

Отже, сума площ прямокутників *ABMN*, *NMKP*, *PKTS* і т. д. дорівнює 4 см^2, тобто дорівнює площі прямокутника *ABCD*.

Узагальнимо розглянутий приклад.

Нехай b_1; b_2; b_3; … — довільна нескінченна геометрична прогресія, у якій $|q| < 1$.

Сума перших n членів цієї прогресії обчислюється за формулою $S_n = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q}$. Перетворимо вираз у правій частині останньої рівності: $S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$. Оскільки $|q| < 1$, то при необмеженому збільшенні n множник q^n прямує до нуля, а, отже, до нуля прямує і добуток $\frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$. Тоді сума S_n прямує до числа $\frac{b_1}{1-q}$.

Число $\frac{b_1}{1-q}$ називають *сумою нескінченної геометричної прогресії зі знаменником* $|q| < 1$ і записують: $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = \frac{b_1}{1-q}$. Позначимо цю суму через S. Тоді

$$\boldsymbol{S = \frac{b_1}{1-q}}.$$

Одержану формулу називають *формулою суми нескінченної геометричної прогресії, у якій* $|q| < 1$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти суму нескінченної геометричної прогресії (b_n): 6; –2; … .

● За умовою маємо: $b_1 = 6$; $b_2 = -2$. Тоді $q = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$. Маємо геометричну прогресію, у якій $|q| < 1$. За формулою $S = \frac{b_1}{1-q}$ знаходимо:

$$S = \frac{6}{1+\frac{1}{3}} = 6 : \frac{4}{3} = 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Відповідь. 4,5. ●

Рівень А

826. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), у якій:

а) $b_1 = 7;\ q = -\frac{1}{2};$ **б)** $b_1 = -100;\ q = \frac{1}{50}.$

Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

827. **а)** $3;\ 1;\ \frac{1}{3};\ \ldots;$ **б)** $-10;\ -4;\ -\frac{8}{5};\ \ldots;$

в) $32;\ -16;\ 8;\ \ldots;$ **г)** $4{,}2;\ 0{,}84;\ 0{,}168;\ \ldots\ .$

828. **а)** $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \ldots;$ **б)** $9;\ -3;\ 1;\ \ldots;$

в) $-6;\ -4;\ -\frac{8}{3};\ \ldots;$ **г)** $2;\ 1{,}5;\ 1{,}125;\ \ldots\ .$

829. *Задача Архімеда.* Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії $1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots\ .$

Рівень Б

830. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

а) $3\sqrt{7};\ \sqrt{7};\ \ldots;$ **б)** $2+\sqrt{3};\ -\frac{2+\sqrt{3}}{2};\ \ldots\ .$

Знайдіть перший член нескінченної геометричної прогресії, у якій:

831. **а)** $q = \frac{3}{5};\ S = 50;$ **б)** $q = -\frac{1}{2};\ S = 28.$

832. **а)** $q = \frac{1}{7};\ S = -14;$ **б)** $q = \frac{5}{6};\ S = 96.$

833. Знайдіть знаменник q ($|q| < 1$) геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 80$, $S = 100$.

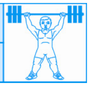
Знайдіть суму, якщо доданки є членами нескінченної геометричної прогресії:

834. **а)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots;$ **б)** $x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + \ldots\ (|x| < 1).$

835. **а)** $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots;$ **б)** $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots\ (|a| < 1).$

836. Знайдіть число членів арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює 5, а різниця — 1, якщо сума всіх її членів дорівнює сумі нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $|q| < 1$, другий і третій члени якої відповідно дорівнюють $15\frac{3}{7}$ і $13\frac{11}{49}$.

Рівень В



837. Сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $|q| < 1$ дорівнює 3, а сума квадратів її членів дорівнює 4,5. Знайдіть перший член і знаменник прогресії.

838. *Задача Ферма.* Доведіть: якщо S — сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $|q| < 1$, то $\frac{S}{S-b_1} = \frac{b_1}{b_2}$.

839. У квадрат зі стороною 4 см вписано коло, у коло вписано квадрат, а у квадрат знову вписано коло і т. д. Знайдіть:

а) суму площ усіх квадратів; **б)** суму довжин усіх кіл.

Вправи для повторення

840. Спростіть вираз $\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}} \cdot \frac{a^3b^3}{a+b}$ і знайдіть його значення, якщо $a = 2^{-1}$, $b = 3^{-1}$.

841. З послідовності натуральних чисел, які кратні 3 і не перевищують 100, навмання вибирають одне число. Знайдіть імовірність того, що це число виявиться кратним 5.

842. Бригада робітників за кілька днів виготовила 400 деталей. Якби робітники виготовляли за день на 20 деталей більше, то закінчили б роботу на один день швидше. Скільки деталей виготовляли робітники за один день?

843*. Для яких значень a система рівнянь $\begin{cases} ax+3y=5; \\ 2x-y=4 \end{cases}$ не має розв’язків?

29. Розв'язування задач, пов'язаних з арифметичною та геометричною прогресіями

1. Обчислення сум. Вивчаючи арифметичну і геометричну прогресії, ми знаходили суми перших n їхніх членів. Знаємо також, як знайти суму нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $q| < 1$. Проте є задачі, розв'язуючи які, доводиться шукати суми чисел, що не утворюють ні арифметичної, ні геометричної прогресій. Такі суми деколи можна знайти, перетворивши певним чином їхні доданки.

Приклад 1. Знайти суму $1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}+...+13\frac{1}{128}$.

● Позначимо цю суму через S і запишемо її так:

$$S=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(3+\frac{1}{4}\right)+\left(5+\frac{1}{8}\right)+...+\left(13+\frac{1}{128}\right)=$$

$$=(1+3+5+...+13)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{128}\right).$$

У перших дужках записана сума членів арифметичної прогресії (a_n), у якої $a_1 = 1$, $d = 2$. Знайдемо, яким за номером членом цієї прогресії є число 13:

$$13 = a_1 + (n-1)\cdot d;\quad 13 = 1 + (n-1)\cdot 2;\quad n = 7.$$

Отже, в перших дужках записана сума перших семи членів арифметичної прогресії.

У других дужках записана сума перших семи членів геометричної прогресії (b_n), у якій $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Використавши формули суми перших n членів арифметичної та геометричної прогресій, знаходимо:

$$S=\frac{1+13}{2}\cdot 7+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1-\frac{1}{2}}=49+\frac{127}{128}=49\frac{127}{128}.$$

Відповідь. $49\frac{127}{128}$. ●

2. Запис нескінченних періодичних десяткових дробів у вигляді звичайних дробів. Розглянемо приклад.

Приклад 2. Записати число 0,(7) у вигляді звичайного дробу.

● Нескінченний десятковий дріб 0,(7) = 0,777... запишемо у вигляді такої суми: 0,(7) = 0,7 + 0,07 + 0,007 + ... Доданки 0,7; 0,07; 0,007; ... — члени нескінченної геометричної прогресії з першим членом 0,7 і знаменником $q = 0{,}1$ ($|q| < 1$). Сума цієї прогресії: $S = \dfrac{0{,}7}{1-0{,}1} = \dfrac{0{,}7}{0{,}9} = \dfrac{7}{9}$. Тому $0{,}(7) = \dfrac{7}{9}$.

Відповідь. $\dfrac{7}{9}$. ●

3. Розв’язування рівнянь. Розглянемо приклад.

Приклад 3. Розв’язати рівняння

$$4x + 7x + \ldots + 25x = 290,$$

у якому коефіцієнти 4, 7, … , 25 утворюють арифметичну прогресію.

● Запишемо рівняння так:

$$(4 + 7 + \ldots + 25) \cdot x = 290.$$

У дужках записана сума перших членів арифметичної прогресії, у якій $a_1 = 4$, $d = 3$. Знайдемо кількість членів. Нехай число 25 є її n-м членом. За формулою n-го члена $25 = 4 + (n - 1)\cdot 3$, звідки матимемо:

$$21 = (n - 1)\cdot 3; \quad 7 = n - 1; \quad n = 8.$$

Отже, у дужках записана сума перших 8 членів арифметичної прогресії. Тоді одержимо:

$$\frac{4+25}{2}\cdot 8\cdot x = 290; \quad 29 \cdot 4x = 290; \quad x = 2{,}5.$$

Відповідь. 2,5. ●

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Записати число 3,1(23) у вигляді звичайного дробу.

● Число 3,1(23) = 3,12323... запишемо у вигляді такої суми:

$$3{,}1(23) = 3 + 0{,}1 + 0{,}023 + 0{,}00023 + \ \ldots .$$

Доданки 0,023; 0,00023; ... — члени нескінченної геометричної прогресії з першим членом 0,023 і знаменником $q = 0{,}01$ ($|q| < 1$). Сума цієї прогресії дорівнює: $S = \dfrac{0{,}023}{1-0{,}01} = \dfrac{0{,}023}{0{,}99} = \dfrac{23}{990}$. Тому

$$3{,}1(23) = 3 + \frac{1}{10} + \frac{23}{990} = 3\frac{122}{990} = 3\frac{61}{495}.$$

Відповідь. $3\dfrac{61}{495}$. ●

Вправа 2. Розв’язати рівняння:

$$(x^2 - x) + (x^2 - 3x) + (x^2 - 5x) + \ldots + (x^2 - 71x) = -1260.$$

● Запишемо рівняння у вигляді:

$$(x^2 + x^2 + x^2 + \ldots + x^2) - (1 + 3 + 5 + \ldots + 71) \cdot x = -1260.$$

У других дужках записана сума перших n членів арифметичної прогресії, у якій $a_1 = 1$, $d = 2$. Знайдемо n. Нехай число 71 є її n-м членом. За формулою n-го члена $71 = 1 + (n - 1) \cdot 2$, звідки $n = 36$. Урахувавши, що в перших дужках записана сума тридцяти шести доданків, кожний з яких дорівнює x^2, матимемо:

$$36x^2 - \frac{1+71}{2} \cdot 36 \cdot x = -1260; \quad 36x^2 - 36 \cdot 36x + 1260 = 0;$$

$$x^2 - 36x + 35 = 0; \quad x_1 = 1; \ x_2 = 35.$$

Відповідь. 1; 35. ●

Вправа 3. Знайти суму $9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ разів}}$.

● Позначимо дану суму через S. Записавши доданки у вигляді $9 = 10 - 1$, $99 = 10^2 - 1$, $999 = 10^3 - 1$ і т. д., матимемо:

$$S = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \ldots + (10^n - 1) =$$

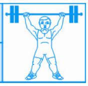
$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n) - n.$$

У дужках записано суму перших n членів геометричної прогресії (b_n), у якій $b_1 = 10$, $q = 10$. Тому:

$$S = \frac{10(1 - 10^n)}{1 - 10} - n = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}.$$

Відповідь. $\dfrac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$. ●

Рівень Б



Запишіть у вигляді звичайного дробу число:

844. **а)** 0,(6); **б)** 1,(3); **в)** 3,(12); **г)** 0,(25); **д)** 1,2(3); **е)** 0,1(13); **є)** 5,25(7); **ж)** 0,13(24).

845. **а)** 0,(15); **б)** 3,(7); **в)** 6,1(3); **г)** 2,24(1); **д)** 0,02(5); **е)** 1,1(20).

Знайдіть суму:

846. **а)** $1\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}+1\frac{1}{8}+\ldots+1\frac{1}{512}$;

б) $\left(2^2-1^2\right)+\left(4^2-3^2\right)+\ldots+\left((2n)^2-(2n-1)^2\right)$.

847. $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}+8\frac{1}{2}+\ldots+128\frac{1}{2}$.

Розв'яжіть рівняння:

848. $(2x-100)+(4x-100)+\ldots+(18x-100)=x^2-100$.

849. $x+3x+5x+\ldots+21x=x^2+120$.

850. Куля котиться похилим жолобом. За першу секунду вона пройшла 0,2 м, а за кожну наступну — на 0,1 м більше, ніж за попередню. Який шлях пройшла куля за дев'яту секунду?

851. Тіло, яке вільно падає, за першу секунду проходить 4,9 м, а за кожну наступну — на 9,8 м більше, ніж за попередню. Який шлях пройде тіло, що вільно падає, за шосту секунду після початку падіння?

852. Після реконструкції станків у цеху за перший день виготовили 40 деталей, а далі протягом місяця почали виготовляти щодня на 3 деталі більше, ніж за попередній день. За який день роботи буде виготовлено 100 деталей? За скільки днів у цеху буде виготовлено 178 деталей?

853. Гальмуючи, автомобіль за першу секунду проїхав 15 м, а за кожну наступну — на 3 м менше, ніж за попередню. Знайдіть гальмівний шлях автомобіля.

854. У трикутнику ABC провели середню лінію A_1C_1 паралельно стороні AC. У трикутнику A_1BC_1 знову провели середню лінію A_2C_2 паралельно A_1C_1 і т. д. Знайдіть висоту шостого трикутника, проведену з вершини B, якщо висота BH трикутника ABC дорівнює 16 см.

Рівень В

855. Знайдіть суму, де n — натуральне число:

а) $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$; **б)** $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n$;

в) $1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ разів}}$.

Вказівки. **а)** Запишіть доданки у вигляді різниці двох дробів. Наприклад, $\frac{2}{3\cdot 5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$. **б)** Позначте суму через S. Знайдіть $2S$, а потім різницю $2S-S$.

856. Розв’яжіть рівняння:

а) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 3 \quad (|x| < 1)$;

б) $(1+3+\ldots+(2x-1))+\left(3{,}5+5+\ldots+\dfrac{3x+4}{2}\right)=105$, x — натуральне.

857. Доведіть нерівність, де n — натуральне число:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}<1$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}<\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2}$.

858. Два тіла рухаються назустріч одне одному із двох точок, відстань між якими дорівнює 127 м. Перше тіло рухається рівномірно зі швидкістю 5 м/с. Друге, яке почало рухатися на 3 с пізніше від першого, за першу секунду пройшло 5 м, а за кожну наступну — на 2 м більше, ніж за попередню. Скільки часу рухатиметься друге тіло до зустрічі?

859. Атмосферний тиск зменшується на 10% зі збільшенням висоти на 700 м. Який атмосферний тиск на висоті 2,8 км, якщо на вершині Ельбруса (висота над рівнем моря 5600 м) він дорівнює 50 кПа?

Вправи для повторення

860. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{x+m}$, де m — найбільший корінь рівняння $x^2 - 4x - 12 = 0$.

861. Знайдіть цілі розв’язки системи нерівностей $\begin{cases} 2n-3<3n+5; \\ 6-n>4(n+3). \end{cases}$

862*. Для яких значень a рівняння $x - 6 = 3(x - a)$ має від’ємний корінь?

863. Вкладник вніс до банку певну суму під 15% річних і через 2 роки мав на рахунку 2645 грн. Яку суму вніс вкладник до банку?

Цікаво знати

Слово «*прогресія*» походить від латинського слова «*progressio*» й означає «*рух уперед*» (як і слово «прогрес»). Уперше цей термін як математичний вживається у працях римського вченого Боеція (V–VI ст.).

Прогресії як часткові види числових послідовностей, трапляються у папірусах II тисячоліття до н. е. Перші із задач на прогресії, що дійшли до нас, пов'язані з господарською діяльністю, а саме — з розподілом продуктів, поділом спадку тощо.

Найдавнішою задачею, пов'язаною з прогресіями, вважають задачу з єгипетського папірусу Ахмеса Райнда про поділ 100 мір хліба між п'ятьма людьми так, щоб другий одержав на стільки більше від першого, на скільки третій одержав більше від другого і т. д. У цій задачі йдеться про арифметичну прогресію, сума перших п'яти членів якої дорівнює 100.

В одній із задач цього папірусу подано формулу першого члена арифметичної прогресії, яку в сучасній символіці записують так:

$$a = \frac{S}{n} - (n-1)\frac{d}{2},$$

де a — перший член, n — число членів, S — сума перших n членів, d — різниця прогресії. Переконайтеся, що ця формула є правильною.

Зі знаходженням суми членів арифметичної прогресії пов'язана така цікава історія. Відомий німецький математик Карл Гаус (1777–1875) ще у школі виявив блискучі математичні здібності. Якось учитель запропонував учням знайти суму перших ста натуральних чисел. Ледь устиг учитель прочитати умову задачі, як малий Гаус підняв руку: «Уже». Увесь клас був захоплений швидкістю, з якою він провів підрахунок. Поміркуйте, як рахував Гаус.

Давно неабиякою популярністю користується задача-легенда, яка належить до початку нашої ери. Індійський цар Шерам покликав до себе винахідника гри у шахи, свого підданого Сету, щоб нагородити його за кмітливу вигадку. Коли винахідникові запропонували самому вибрати винагороду, він попросив за першу клітинку шахової дошки дати йому 1 зернину пшениці, за другу — 2 зернини, за третю — 4 і т. д. Виявилося, що цар не зміг виконати прохання Сети. За останню 64-ту клітинку шахової дошки довелося б віддати 2^{63} зернин пшениці, а за всі клітинки — таку кількість зернин, яка дорівнює сумі членів геометричної прогресії: 1; 2; 2^2; 2^3; ...; 2^{63}. Ця сума дорівнює $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$. Таку кількість зернин пшениці можна зібрати із площі, яка приблизно у 2000 разів більша від площі усієї поверхні Землі.

Запитання і вправи для повторення § 4

1. Наведіть приклади послідовностей.
2. Що називають арифметичною прогресією? Наведіть приклади арифметичних прогресій.
3. Як знайти різницю арифметичної прогресії?
4. Сформулюйте властивості арифметичної прогресії.
5. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії.
6. За якими формулами шукають суму перших n членів арифметичної прогресії?
7. Що називають геометричною прогресією? Наведіть приклади геометричних прогресій.
8. Як знайти знаменник геометричної прогресії?
9. Сформулюйте властивості геометричної прогресії.
10. Запишіть формулу n-го члена геометричної прогресії.
11. За якими формулами шукають суму перших n членів геометричної прогресії?
12. За якою формулою шукають суму нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $|q| < 1$?

864. Знайдіть члени послідовності (a_n) із третього до шостого включно, якщо:
а) $a_n = 4 - 3n^2$; **б)** $a_n = 3 \cdot (-2)^n$.

865. Послідовність задана формулою $x_n = n^2 - 6$. Чи є членом цієї послідовності число 138; число 150?

866. Запишіть перші чотири члени послідовності (a_n), якщо:
а) $a_1 = -5$; $a_{n+1} = 2a_n + 3$; **б)** $a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 2a_n$.

867. Знайдіть порядкові номери членів послідовності $a_n = n^2 - 5n$, для яких виконується нерівність $a_n + 6 \le 0$.

868*. Знайдіть найменший член послідовності $x_n = 2n - 5$, для якого виконується нерівність $|x_n - 7| \le 3{,}2$.

869. Чи є числа –12, –11, –9 послідовними членами арифметичної прогресії?

870. Знайдіть різницю та четвертий член арифметичної прогресії:
а) 15; 19; 23; ...; **б)** 1,2; –1,3; –3,8... .

871. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії (a_n):
а) 13; 1; –11; ...; **б)** –4; –3,5; –3; ... .

872. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо:

а) $a_3 = 16$; $a_7 = 4$; **б)** $a_4 = 10$; $a_{21} = -24$.

873. В арифметичній прогресії (x_n): $x_2 = -8$; $x_9 = 27$. Знайдіть x_5.

874. Знайдіть периметр п'ятикутника, якщо відомо, що довжина однієї його сторони дорівнює 7 см, а кожної наступної — на 2 см більша від попередньої.

875. Автомобіль після старту за першу секунду пройшов 1,75 м, а далі збільшував свою швидкість, проходячи за кожну наступну секунду на 3,5 м більше, ніж за попередню. Який шлях пройшов автомобіль за 5 с?

876. Заповніть таблицю, якщо (a_n) — арифметична прогресія:

a_1	d	a_n	n	S_n
0,1	0,2			22,5
	–0,6	9,5	17	
		–2,5	11	0

877. Знайдіть суму перших десяти членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_3 = 6$; $a_8 = 26$.

878. Скільки потрібно взяти членів арифметичної прогресії –100; –80; …, щоб їх сума дорівнювала 600?

879. Різниця арифметичної прогресії дорівнює 2,1, а сума перших п'яти її членів дорівнює 0,5. Знайдіть:

а) перший член прогресії; **б)** п'ятий член прогресії.

880. Знайдіть суму членів арифметичної прогресії 7; 21; 35; ... з дев'ятого до двадцять першого включно.

881. Знайдіть суму всіх:

а) натуральних чисел від 11 до 101 включно;

б) двоцифрових чисел, які не перевищують 75;

в) натуральних чисел, кратних 3, які не перевищують 121;

г) непарних натуральних чисел, які не перевищують 125;

д) парних натуральних чисел від 70 до 170 включно;

е) двоцифрових чисел, які при діленні на 7 дають в остачі 1.

882. Знайдіть суму перших шести членів арифметичної прогресії з першим членом x та різницею y, якщо $(x; y)$ — розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x+5y=-6; \\ x+3y=-4. \end{cases}$$

883. Чи є послідовними членами геометричної прогресії числа 2; 0,8; 0,32?

884. Знайдіть знаменник та четвертий член геометричної прогресії:

а) 5; 20; 80; ...; **б)** 1,6; 0,4; 0,1; ... .

885. Знайдіть п'ятий член геометричної прогресії:

а) 1; –3; …; **б)** $\sqrt{\frac{2}{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; … .

886. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_3 = \frac{9}{25}$; $b_5 = \frac{81}{625}$.

887. Знайдіть суму перших восьми членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_8 = -\frac{1}{64}$; $q = -\frac{1}{2}$.

888*. Знайдіть чотири числа, які утворюють геометричну прогресію, якщо сума крайніх членів дорівнює –126, а сума середніх — –30.

889*. Дано рівнобедрений прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють по 1 см. Гіпотенуза цього трикутника є катетом іншого рівнобедреного прямокутного трикутника і т. д. Знайдіть довжину гіпотенузи десятого такого трикутника.

890*. Сума трьох чисел, які утворюють арифметичну прогресію з додатною різницею, дорівнює 51. Якщо від цих чисел відняти відповідно числа 1, 7 і 8, то отримаємо три числа, які утворюють геометричну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють арифметичну прогресію.

891*. Три числа, з яких перше більше від третього на 9, є послідовними членами геометричної прогресії. Якщо від другого числа відняти 7, до третього додати 13, а перше залишити без змін, то нова трійка чисел утворить арифметичну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють геометричну прогресію.

892. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

а) 1,5; 0,5; …; **б)** $3-\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}-3}{2}$; … .

893. Перший член і сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $|q| < 1$ відповідно дорівнюють 16 і 9,6. Запишіть перші три члени цієї прогресії.

894. Запишіть у вигляді звичайного дробу число:

а) 0,(8); **б)** 0,(12); **в)** 51,(3); **г)** 14,(1);
д) 1,3(2); **е)** 0,4(3); **є)** 0,1(12); **ж)** 24,35(2).

895. Розгляньте рисунок 75. На бісектрисі OK кута xOy позначено точку $M(8; 8)$. З точки M на осі координат опущено перпендикуляри MA і MB, у результаті чого утворився квадрат $OBMA$. З точки M_1, яка є серединою діагоналі OM, знову опущено перпендикуляри на осі координат і знову утворився квадрат, і т. д. Знайдіть:

а) площу шостого квадрата;

б) суму площ усіх таких квадратів;

в) суму периметрів усіх таких квадратів.

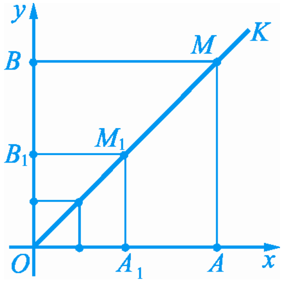


Рис. 75

896. Дано трикутник ABC зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$. Трикутник $A_2B_2C_2$ подібний трикутнику $A_1B_1C_1$ із таким же коефіцієнтом подібності, і т. д. Знайдіть:

а) суму периметрів усіх таких трикутників;

б) суму площ усіх таких трикутників.

897*. Знайдіть суму, де n — натуральне число:

а) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$;

б) $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}$.

898*. Розв’яжіть рівняння:

а) $1-x+x^2-x^3+\ldots=5 \quad (|x|<1)$;

б) $1+4+7+\ldots+(3x-2)=145$, x — натуральне число.

899. Побудуйте графік функції $y=(x-m)^2$, де m — перший додатний член арифметичної прогресії: $-81; -77; \ldots$.

900. Розв’яжіть нерівність $x^2-3x+m>0$, де m — перший член геометричної прогресії (b_n), у якої $b_3=16$, $q=-2$.

Завдання для самоперевірки № 5

Рівень 1

1. Знайдіть різницю арифметичної прогресії 5; –2; –9; … .

а) –3; **б)** 3; **в)** –7; **г)** 7.

2. Знайдіть п'ятий член арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = -5$; $d = 3$.

а) –7; **б)** 7; **в)** –17; **г)** 17.

3. Знайдіть суму перших дев'яти членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 2$; $a_9 = -6$.

а) 4; **б)** 18; **в)** –18; **г)** –4.

4. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = -2$; $q = \frac{1}{2}$.

а) $\frac{1}{4}$; **б)** $-\frac{1}{4}$; **в)** 4; **г)** –4.

5. Знайдіть суму перших п'яти членів геометричної прогресії (b_n), у якій $b_1 = -5$; $q = 2$.

а) 160; **б)** 155; **в)** –160; **г)** –155.

6. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 2$; $q = \frac{1}{3}$.

а) $\frac{1}{3}$; **б)** 3; **в)** 6; **г)** $\frac{4}{3}$.

Рівень 2

7. Знайдіть десятий член арифметичної прогресії:

а) 10,2; 8,2; …; **б)** –3,5; –5,5; … .

8. Знайдіть суму перших п'яти членів арифметичної прогресії (x_n), якщо $x_1 = 2$, $d = -3$.

9. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії 3; $-\frac{3}{2}$; … .

10. Знайдіть суму перших п'яти членів геометричної прогресії –4; –8; ... .

11. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії: 12; 4; $\frac{4}{3}$; … .

Рівень 3

12. Чи є число –32 членом арифметичної прогресії (a_n), у якій $a_1 = -8$; $d = -2{,}4$?

13. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 + a_6 = -12{,}6$; $a_5 - a_2 = -9$.

14. Знайдіть суму всіх двоцифрових чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 2.

15. Знайдіть перший член і суму перших семи членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_7 = 192$; $q = 2$.

16. Запишіть у вигляді звичайних дробів числа: 0,(4); 5,(53).

Рівень 4

17. Знайдіть кількість додатних членів арифметичної прогресії 91; 89,5; … .

18. Знайдіть суму перших двадцяти членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_5 = 1$; $S_6 = -1{,}2$.

19. Розв'яжіть рівняння: $105 - (7 + 12 + ... + (2 + 5x)) = 20$, де x — натуральне число.

20. Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 13, а третій її член більший від першого на 8. Знайдіть знаменник цієї прогресії.

21. Три числа, з яких третє дорівнює –8, утворюють геометричну прогресію. Якщо замість третього числа взяти –6, то нова трійка чисел утворить арифметичну прогресію. Знайдіть числа, які утворюють геометричну прогресію.

ЗАДАЧІ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 9 КЛАСУ

901. Порівняйте числа:

а) $\frac{2}{7}$ і 0,3; **б)** $-\frac{5}{6}$ і –0,85; **в)** 0,7(4) і $\frac{7}{9}$; **г)** 1,19 і $1\frac{2}{9}$.

902. Доведіть, що $\sqrt{7}-\sqrt{5} > \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

903. Виділяючи з тричлена квадрат двочлена, доведіть нерівність:
а) $a^2 - a + 3 > 0$; **б)** $4b^2 - 4b + 1,9 > 0$.

904. Доведіть нерівність:
а) $y^4 + 2y^2 - 4y > -2$; **б)** $y^2 + 8y + x^2 \geq 8(x - 4)$;
в) $(a^2 - b^2)^2 \geq 4ab(a - b)^2$; **г)** $2x^4 + 1 \geq 2x^3 + x^2$.

905. Доведіть нерівність:
а) $(a - 1)^4 + (b - 1)^4 \geq 2(a - 1)^2(b - 1)^2$; **б)** $(a^3 + 1)(a + 4) \geq 8a^2$, де $a \geq 0$;
в) $1+a+a^2+a^3 \geq 4a\sqrt{a}$; **г)** $\sqrt{b}+\frac{1}{4\sqrt{b}} \geq 1$.

906. Доведіть: якщо $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$.

907. Відомо, що $2 < a < 4$, $5 < b < 6$. Оцініть значення виразів $a + b$, $a - b$, ab, $\frac{a}{b}$.

908*. Ціна діаманта пропорційна квадрату його маси. Доведіть: якщо діамант розділити на кілька частин, то його вартість зменшиться.

909*. Доведіть, що сума діагоналей опуклого чотирикутника більша від суми двох його протилежних сторін.

910*. Доведіть, що у будь-якому трикутнику найменшою є та висота, яка проведена до найбільшої сторони.

Розв'яжіть нерівність:

911. **а)** $2(1 - 3x) > 7 - x$;
б) $-20(x + 3) \geq 2(3 - 10x)$;
в) $1,7 \leq 0,3(4x - 2) + 0,5(1 - 3x) + 2,7x$;
г) $0,9(1 + x) > 1,3(x - 5) - 0,2(10x - 1) + 2,4$.

912. **а)** $\frac{3x-4}{5}-2+x>4$; **б)** $\frac{8-3x}{6}-\frac{2x-5}{4}>1$;
в) $5(x-1)(x+1)-7x>5x^2$; **г)** $(3x-2)^2+14 \leq 9x^2+11$.

913. Знайдіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності

$$7(2x-3)-4(6+x)>-19.$$

914. Для яких значень x має зміст вираз:

а) $\sqrt{4-5x}$; **б)** $\sqrt{-(4x-7)}$; **в)** $\dfrac{\sqrt{6+x}}{x}$?

915. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} 3x\le 1-3(x+2); \\ 2x>4-(x+7); \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{4}<\dfrac{x-1}{3}; \\ 3(x-5)+1>0; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} (2x-1)^2\ge(2x-1)(2x+1); \\ x^2+4<x(x-2). \end{cases}$

916. Розв'яжіть подвійну нерівність:

а) $-2\le 1-5x<4$; **б)** $0,9\le 3-2x\le 1,5$; **в)** $4<3(x-4)\le 5$.

917*. Розв'яжіть нерівність:

а) $|4x-9|<3$; **б)** $|12-5x|\ge 3$; **в)** $|7-8x|>-6$; **г)** $|x|+|x+2|>3$.

918. Для яких значень x значення виразу $7-4x$ належать проміжку:

а) $(-\infty; -1]$; **б)** $(-2; 3)$; **в)** $(0; 2]$; **г)** $[4; +\infty)$?

919. Для яких значень аргументу значення функції $y=\dfrac{1}{4}(5x-1)$ належать проміжку $(-\infty; 3]$?

920. Для яких значень x значення дробу $\dfrac{9-7x}{2}$ не менше від відповідного значення дробу $\dfrac{1-3x}{3}$?

921*. Для яких значень a рівняння має додатний корінь:

а) $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{x-2a}{2}$; **б)** $\dfrac{3x-9}{4}=\dfrac{a-x}{3}-1$?

922. Для яких значень змінної x має зміст вираз:

а) $\sqrt{2x-3}+\dfrac{1}{x-1,5}$; **б)** $\sqrt{4x-8}+\sqrt{12-3x}$; **в)** $\dfrac{\sqrt{2x-7}}{x-5}$?

923. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\dfrac{2x}{x^2+2x-3}$; **б)** $y=\sqrt{12-4x}$; **в)** $y=\sqrt{x^2-4x-12}$;

г) $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{-x^2+7x-12}}$; **д)** $y=\sqrt{4-3x-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; **е)** $y=\sqrt{\dfrac{3-x}{2x-7}}$.

924. Чи належить число 5 області значень функції $y=2x^2-2x+9$?

Побудуйте графік функції:

925. **а)** $y = 2\sqrt{x} - 1$; **б)** $y = \dfrac{1}{x-3}$; **в)** $y = \dfrac{2}{x+2} + 2$;

г) $y = 2(x + 1)^2 - 2$; **д)** $y = 1 - \sqrt{x-1}$; **е)** $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x+4}$.

926. **а)** $y = x^2 - 3x + 2$; **б)** $y = 2x^2 + 4x + 2$; **в)** $y = -3x^2 + 6x + 5$.

927. Графік функції $y = x^2 + a$ перетинає вісь y у точці $M(0; -4)$. Знайдіть a та побудуйте графік функції. Чи проходить цей графік через точку $N(3; 5)$?

928. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 6x + 6$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) область значень функції;

б) проміжки знакосталості функції;

в) проміжок, на якому функція зростає; спадає.

929. Чи є дана функція парною; непарною?

а) $y = 5 - x^2$; **б)** $y = -2x^3$; **в)** $y = x^2 + x$.

Побудуйте графік функції:

930. **а)** $y = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ якщо } x \le -1; \\ x^2 - 2x - 2, \text{ якщо } x > -1; \end{cases}$ **б)** $y = \begin{cases} 4x + 16, \text{ якщо } x < -2; \\ 2x^2, \text{ якщо } -2 \le x \le 1; \\ 2, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$

931*. **а)** $y = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x+1}$; **б)** $y = x^2 + \dfrac{|x-1|}{x-1}$;

в) $y = |x^2 - 5x + 4|$; **г)** $y = |x^2 - 5|x| + 4|$.

932. За допомогою графіків функцій встановіть, чи має корені рівняння:

а) $x^2 + 4x + 1 = \sqrt{x}$; **б)** $-x^2 + 2x = \sqrt{x - 0,5}$.

933. Розв’яжіть графічно рівняння:

а) $-\sqrt{x-1} = x^2 - 5$; **б)** $x^2 - 2x + 1 = -\dfrac{4}{x}$.

934*. Встановіть кількість коренів рівняння $|2|x| - x^2| = b$ залежно від значень параметра.

Розв’яжіть нерівність:

935. **а)** $x^2 \le 121$; **б)** $x^2 > 2,25$;

в) $x^2 - 1,5x < 0$; **г)** $x^2 - 5x - 36 > 0$;

д) $-2x^2 + 4x + 6 \le 0$; **е)** $5x^2 + 3x - 14 \ge 0$.

936. **а)** $(2x + 1)^2 + 2 < (4x - 3)(2x + 3)$; **б)** $(x - 4)(x + 4) \ge (2x + 5)(x - 4)$;

в) $\dfrac{x^2+2x}{4} > x+2$; г) $x^2-\dfrac{1}{12}(4x+3) \le \dfrac{1}{12}-\dfrac{x+1}{4}$.

937. а) $(2x-1)(x+2) < 0$; б) $(x-1)(x-4)(x+10) \ge 0$;
в) $x(x-1{,}2)(x+1{,}5)(x+2) > 0$; г) $(4-x)(3x+15)(2+x) \ge 0$.

938*. а) $(x^2-x-2)(x^2+x-2) \le 0$; б) $(x^2-3x+3)(x^2-3x+2) > 0$.

939. а) $\dfrac{x^2+2x}{x-1} > 0$; б) $\dfrac{3x-4}{x+2} < 2$;
в) $\dfrac{x+5}{x-1}+1 > x$; г) $\dfrac{3}{x+4}-\dfrac{2}{x-2} < 1$.

940*. а) $\dfrac{x^2+5x+6}{x+2} > 0$; б) $\dfrac{(x-4)(x^2+x-20)}{(x+4)(x^2+x-42)} \le 0$.

941*. а) $|2x-5|\sqrt{x^2-7x+10} \le 0$; б) $(x+2)\sqrt{15-2x-x^2} \ge 0$.

942. Дано функцію $f(x) = 4x^2 - 9x + 5$. Знайдіть усі значення x, для яких:
а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \le 0$.

943. Розв'яжіть систему нерівностей:
а) $\begin{cases} 3x > x^2; \\ 9-4{,}5x \ge 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-3x \le 70; \\ 2x+24 < x^2. \end{cases}$

944. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $x^2 + 2ax + 3a + 10 = 0$ не має коренів.

945*. Знайдіть усі значення b, для яких нерівність $bx^2 + 4x + b - 3 < 0$ виконується для всіх дійсних значень x.

946. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:
а) $\begin{cases} y = 2-x^2; \\ x+y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y+\sqrt{x} = 1; \\ y-x^2 = -1; \end{cases}$ в)* $\begin{cases} y = \big||x|-2\big|; \\ x^2+y^2 = 4. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь:

947. а) $\begin{cases} x-2y = 0; \\ x^2+(y-2)^2 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3y = 1; \\ x^2+3xy = -2; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 3x-y = 4; \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y} = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y-1} = 4; \\ x+2y = 2. \end{cases}$

948*. а) $\begin{cases} x^2+3xy = 4; \\ 4y^2+xy = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy-y^2 = 1; \\ xy+3x+3y = 1; \end{cases}$
в) $\begin{cases} x^4-y^4 = 3; \\ x^2+y^2 = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2 = 5(x-y); \\ x^2-2x-y^2 = 4. \end{cases}$

949*. Для яких значень m система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2-4y=0; \\ y=|x|-m \end{cases}$ має три розв'язки?

950*. Знайдіть усі значення параметра, для кожного з яких система рівнянь $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2=1; \\ (x-a)^2+(y-1)^2=1 \end{cases}$ має лише один розв'язок.

951. Сума квадратів двох додатних чисел на 0,5 більша від їх подвоєної суми. Знайдіть ці числа, якщо перше число на 2 менше від потроєного другого числа.

952. Навколо спортивного майданчика, який має форму прямокутника, зроблена доріжка завширшки 3 м. Знайдіть розміри майданчика, якщо його площа і площа доріжки дорівнюють по 216 м^2.

953. Шлях від пункту A до пункту B теплохід проходить за 3 год, а шлях від B до A — за 4 год. Знайдіть швидкість теплохода у стоячій воді, якщо 12 км за течією річки і 6 км проти течії він проходить за 50 хв.

954. Два трактори різної потужності, працюючи разом, можуть зорати поле за 4 дні. Якщо один трактор зоре $\frac{2}{3}$ поля, а інший — решту, то все поле буде зоране за 8 днів. За скільки днів може зорати поле кожний трактор, працюючи окремо?

955. Одна труба наповнює басейн на 2 год довше, а інша — на 4,5 год довше, ніж наповнюють його дві труби, відкриті одночасно. За який час може наповнити басейн кожна труба окремо?

956*. По двох сторонах прямого кута у напрямі до його вершини рухаються два тіла. У початковий момент тіло A перебувало на відстані 60 м від вершини, а тіло B — на відстані 80 м. Через 3 с відстань між A і B дорівнювала 85 м. Знайдіть швидкість кожного тіла, якщо вершини кута вони досягли одночасно.

957*. З міста A до міста B вирушив поїзд. Через годину назустріч йому з міста B вийшов інший поїзд, і ще через годину відстань між поїздами стала $\frac{7}{12}$ відстані між містами. За який час кожний поїзд пройде шлях між містами, якщо до зустрічі вони пройшли однакові відстані?

958*. Сума двох трицифрових чисел, записаних тими ж цифрами, але у зворотному порядку, дорівнює 1252. Знайдіть ці числа, якщо сума цифр кожного з них дорівнює 14, а сума квадратів цифр дорівнює 84.

959. Геолог піднявся на вершину гори за 12 год. Другу половину шляху він ішов зі швидкістю, яка на 0,5 км/год менша від швидкості на першій половині. Спускаючись тією ж дорогою, геолог проходив за годину на 2 км більше, ніж проходячи першу половину шляху вгору, і затратив на спуск 2 год 40 хв. Який шлях пройшов геолог, піднімаючись на вершину гори?

960. На змаганнях зі спортивного орієнтування після фінішу $\frac{6}{25}$ усіх спортсменів на дистанції залишалося більше, ніж 37 спортсменів, а після фінішу $\frac{7}{25}$ усіх спортсменів — менше, ніж 37 спортсменів. Скільки спортсменів брало участь у змаганнях?

961. Вкладник вніс до банку 4000 грн. під 15% річних. Яку суму він матиме на рахунку через 3 роки?

962. Є лом сталі двох сортів з умістом нікелю 5% і 40%. Скільки потрібно взяти лому кожного сорту, щоб отримати 140 т сталі із 30-відсотковим умістом нікелю?

963. За стіл і чотири стільці заплатили 220 грн. Після того як столи подешевшали на 5%, а стільці — на 10%, за два столи і шість стільців заплатили 352 грн. Якою була початкова ціна одного стола й одного стільця?

964. На двох станках обробляють однакові деталі. Продуктивність першого станка на 40% більша від продуктивності другого. Скільки деталей було оброблено за зміну кожним станком окремо, якщо перший працював цієї зміни 6 год, другий — 7 год, і вони разом обробили 616 деталей?

965. У квітковому магазині є 30 троянд червоного кольору і 15 — білого. Яка ймовірність того, що навмання взята троянда буде червоного кольору?

966. З 11 футболок з номерами від 1 до 11 навмання беруть одну футболку. Знайдіть імовірність того, що номер узятої футболки буде:

а) парним числом; **б)** непарним числом;
в) простим числом; **г)** складеним числом.

967. Знайдіть імовірність того, що навмання взяте трицифрове число матиме всі однакові цифри.

968. На вулиці Назарія Яремчука в послідовності зростання номерів розташовані такі будинки: триповерховий, одноповерховий, двоповерховий, п’ятиповерховий, дев’ятиповерховий, п’ятиповерховий, двоповерховий, одноповерховий, одноповерховий, двоповерховий, одноповерховий, п’ятиповерховий, п’ятиповерховий, дев’ятиповерховий.

а) Запишіть ранжований ряд даних. Скільки утворилося варіант? Знайдіть частоту кожної варіанти.

б) Складіть таблицю варіант і частот.

в) Побудуйте полігон частот.

969. У фермерських господарствах району врожайність жита була такою:

Урожайність, ц з га	20–25	25–30	30–35	35–40
Кількість господарств	6	12	9	3

Побудуйте гістограму та полігон частот даного розподілу.

670. Маси 10 кавунів відповідно дорівнюють: 4,8 кг; 3,9 кг; 5,2 кг; 4,1 кг; 4,2 кг; 4,1 кг; 5,3 кг; 5,2 кг; 4,2 кг; 4,8 кг. Знайдіть середню масу одного кавуна.

971. Знайдіть перших п'ять членів послідовності, заданої формулою:

а) $a_n = (-5)^n \cdot n$; **б)** $b_n = 3n^2 - 5n + 1$.

972. Знайдіть перших шість членів послідовності (x_n), заданої рекурентною формулою: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_{n+1} = 3x_{n-1} + 2x_n$.

973. Знайдіть таке число x, щоб числа $x + 2$, $3 - 2x$ і $4x$ були послідовними членами арифметичної прогресії.

974. Послідовність, яка задана формулою $a_n = 5n - 7$, є арифметичною прогресією. Знайдіть:

а) перший член і різницю прогресії;

б) суму перших дванадцяти членів прогресії.

975. Під час літньої акції розпродажу зимових шапок підприємець щодня знижував ціну шапки на 5% її початкової вартості — 200 грн. Скільки шапок продав підприємець, якщо щодня він продавав по 2 шапки і за весь реалізований товар виручив 2640 грн.?

976. В арифметичній прогресії (a_n): $a_6 = 0{,}8$; $a_{11} = 2{,}8$. Знайдіть:

а) перший член і різницю прогресії;

б) двадцять перший член прогресії;

в) суму перших шістнадцяти членів прогресії.

977. Сума перших п'яти членів арифметичної прогресії менша від суми наступних п'яти членів на 50. На скільки десятий член прогресії більший від другого члена?

978. Альпініст, який піднімається на гору, за першу годину досяг висоти 400 м, а за кожну наступну годину піднімався на 25 м менше, ніж за попередню. За який час він досягне висоти 1750 м?

979*. Числа a^2, b^2 і c^2, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, є послідовними членами арифметичної прогресії. Доведіть, що числа $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$ і $\frac{1}{b+c}$ також є послідовними членами арифметичної прогресії.

980. Знайдіть знаменник та перший член геометричної прогресії, якщо:

а) $b_2 = \frac{\sqrt{5}}{7}$; $b_3 = \frac{7\sqrt{5}}{5}$; **б)** $b_3 = -7$; $b_5 = -63$.

981. Запишіть формулу загального члена послідовності, перші члени якої є такими:

а) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; ...; **б)** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$; ...;

в) $\frac{1}{101}$; $\frac{4}{102}$; $\frac{9}{103}$; $\frac{16}{104}$; ...; **г)** 2; 5; 10; 17; ... .

982. Знайдіть усі такі числа m, щоб числа $\sqrt{5}m$, $4m-2$ і $5\sqrt{5}m$ були послідовними членами геометричної прогресії.

983. Знайдіть перший член та суму перших шести членів геометричної прогресії (b_n), у якій $b_7 = 128$, $q = -2$.

984. Кожний із п'яти аркушів паперу розрізали на 5 частин, потім кожну з утворених частин знову розрізали на 5 частин і т. д. Скільки частин паперу отримають після чотирьох розрізувань?

985. Сума трьох перших членів арифметичної прогресії дорівнює 54. Якщо від другого члена відняти 9, а від третього — 6, то нові три члени утворять геометричну прогресію. Знайдіть перші три члени арифметичної прогресії.

986*. Знайдіть знаменник геометричної прогресії, якщо третій, четвертий і шостий її члени є послідовними членами арифметичної прогресії.

987. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії: $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{4}$; ... .

988. Запишіть у вигляді звичайного дробу число:

а) 3,10(3); **б)** 0,0(85).

989. Розв'яжіть рівняння:

а) $(3+2x)+(4+4x)+(5+6x)+\ldots+(20+36x)=549$;

б) $(\sqrt{3}x+1)+(\sqrt{3}x+2)+\ldots+(\sqrt{3}x+17)=255$.

990. Знайдіть суму:

а) $1+\sin\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\ldots+\sin^n\frac{\pi}{6}+\ldots$;

б) $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{2}{3^2}+\frac{3}{5^2}\right)+\ldots+\left(\frac{2}{3^n}+\frac{3}{5^n}\right)+\ldots$.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

До § 1. Нерівності

991. Доведіть нерівність:

а) $(a+b)^4 \le 8(a^4+b^4)$; **б)** $a+b \le \dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}$, де $a>0$, $b>0$;

в) $(a^2-b^2)(a^4-b^4) \le (a^3-b^3)^2$; **г)** $(a^2+b^2)(a^4+b^4) \ge (a^3+b^3)^2$.

992. Доведіть, що для будь-якого дійсного значення a виконується нерівність $3(a^4+a^2+1) \ge (a^2+a+1)^2$.

993. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a, b і c, добуток яких дорівнює 1, виконується нерівність $ab+bc+ca+a+b+c \ge 6$.

994. Доведіть, що $(1+a_1)(1+a_2)\ \dots\ (1+a_n) \ge 2^n$, де $a_1, a_2, \dots, a_n$ — додатні числа і $a_1a_2 \dots a_n = 1$.

995. Яке із двох чисел більше: $\dfrac{10^{2000}+1}{10^{2001}+1}$ чи $\dfrac{10^{2001}+1}{10^{2002}+1}$?

996. Доведіть, що для будь-якого натурального n виконується нерівність:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}<1$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}>\sqrt{n}-1$;

в) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{2n}\ge\dfrac{1}{2}$;

г) $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dots+\dfrac{1}{n^2}<2$.

997. Доведіть, що для будь-якого натурального n виконується нерівність:

а) $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}$; **б)** $\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$.

998. Для додатних чисел a та b і від'ємного числа c ($c \ne -a$) правильними є нерівності $a \le b$ і $ac \le bc$. Доведіть, що для цих чисел виконується рівність $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}=0$.

999. Доведіть, що для будь-яких значень x та y, де $x \ne -y$, відповідні значення виразів x^3+y^3 і $x+y$ мають однакові знаки.

1000. Нехай $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}$ (квадратний корінь повторюється n разів). Доведіть, що:

а) $a_n < 2$; **б)** $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$; **в)** $\dfrac{2-a_n}{2-a_{n-1}} > \dfrac{1}{4}$.

1001. Розв'яжіть рівняння із двома невідомими: $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} + \dfrac{y+1}{\sqrt{y}} = 4$.

1002. Числа 1, 2, ... , 9 розбили на три групи по три числа в кожній. Нехай M — найбільший із добутків чисел однієї групи. Доведіть, що $M \geq 72$.

1003. Чотири рибалки — A, B, C і D — ловили рибу. Рибалки B і D зловили разом таку ж кількість рибин, як A із C. Рибалка A зловив більше рибин, ніж рибалка C, але A із D зловили менше рибин, ніж B із C. Скільки рибин зловив кожний рибалка, якщо рибалка B зловив 3 рибини?

1004. Кілька хлопців збирали гриби. Один з них знайшов 6 грибів, а інші — по 13 грибів. Наступного разу кількість хлопців була іншою, і один з них знайшов 5 грибів, а інші — по 10 грибів. Скільки хлопців збирали гриби першого разу і скільки другого разу, якщо кількість зібраних грибів в обох випадках була однаковою? Відомо, що це число більше від 100 і менше від 200.

1005. Розв'яжіть нерівність з параметром:

а) $a\sqrt{x} > 0$; **б)** $\left(b^2 - b - 6\right)x \leq b^2 + 3b + 2$.

1006. Розв'яжіть нерівність:

а) $|x-2| + |x-3| \geq |x-4|$; **б)** $\left|\dfrac{2x-1}{x}\right| < 1$.

1007. Для яких значень a система нерівностей $\begin{cases} x(x-1) \leq x^2 - 2a; \\ a - x \geq 2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

1008. Доведіть, що система нерівностей $\begin{cases} x - 2 \leq a^2; \\ x > 2a \end{cases}$ має розв'язок для будь-якого значення a.

До § 2. Квадратична функція

1009. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2\sqrt{x^2} - x^2 - 1$; **б)** $y = \left|x^2 - 1\right| - \dfrac{|x-1|}{x-1}$;

в) $y = \left|\dfrac{x^3 - 1}{x - 1} - 3x\right|$; **г)** $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x+1} + 2}$.

1010. Для яких значень параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - ax + a^2 - 3a - 2 = 0$ є найбільшою?

1011. Знайдіть значення x, для якого вираз $(x-1)^2 + (x-2)^2 + \ldots + (x-10)^2$ набуває найменшого значення.

1012. Знайдіть найбільше значення функції $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 4} - |x-1|$.

1013. Розв'яжіть нерівність $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 \geq 0$.

1014. Для яких значень a нерівність $(x-a)(x-a-2) > 0$ виконується для всіх значень x, що задовольняють нерівність $x^2 - 4x + 3 < 0$?

1015. Параболи $y = x^2 - (2a+1)x + 1$ та $x = y^2 - (2b+1)y - 1$ перетинаються в чотирьох точках. Доведіть, що ці точки лежать на одному колі.

1016. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 3|x| + 2$. Для яких значень x виконується нерівність $x^2 - 3|x| + 2 > 1$?

1017. Знайдіть усі значення параметра a, для кожного з яких рівняння $x^2 - 2\sqrt{2}(a-3)x + a^2 - 3a - 2 = 0$ має хоча б один корінь.

1018. Знайдіть усі значення a, для яких нерівність $x^2 - 2(a-1)x + 4a < 0$ виконується для всіх $0 < x < 1$.

1019. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x+1} = |x| + a$ залежно від значень a?

1020. Для яких значень a рівняння $-x^2 + 2x - a = |1 - |x||$ не має коренів?

1021. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x(x+y) = 80; \\ x(2x-3y) = 80; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x - 3y + 9; \\ 2x^2 + 2y^2 = 5x - 7y + 19; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 4; \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19; \\ (xy + 8)(x + y) = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 1 = 2y; \\ |x| = 1 - y^2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14; \\ x^2 + y^2 + xy = 84; \end{cases}$

є) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = 0; \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160; \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x(y+z) = 5; \\ y(z+x) = 10; \\ z(x+y) = 13; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 2; \\ x + y + 2z = 8; \\ z^2 - xy = 1. \end{cases}$

1022. Знайдіть усі значення a, для яких система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=25; \\ ax-y=3a-4 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

1023. Знайдіть усі значення параметра a, для кожного з яких система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2-4ax-2y=3-4a^2; \\ x^2+y^2-2ax-2y=-a^2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

1024. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=8; \\ (y-ax)(y-a\sqrt{2})=0 \end{cases}$ залежно від значень a?

1025. Знайдіть усі значення параметра a, для кожного з яких система рівнянь $\begin{cases} y=|2x-1|+|5-2x|; \\ y=a \end{cases}$ має безліч розв'язків.

1026. Знайдіть усі значення параметра a, для кожного з яких система рівнянь $\begin{cases} |x|+|y|=a; \\ |x-y|+|x+y|=2 \end{cases}$ має чотири розв'язки.

1027. Два робітники, працюючи разом, виготовили 150 деталей. Якби обидва робітники працювали із продуктивністю першого робітника, то для виготовлення цих деталей їм потрібно було б часу на 0,5 год менше. Якби ж обидва робітники працювали із продуктивністю другого робітника, то для виготовлення деталей їм потрібно було б часу на 0,75 год більше. Скільки деталей виготовляв за годину кожний робітник?

1028. До басейну підведено три труби. Якщо відкрити одночасно першу і другу труби, то басейн наповниться водою за 2,4 год, якщо першу і третю — за 3 год, якщо другу і третю — за 4 год. За який час наповниться басейн, якщо одночасно відкрити усі три труби?

1029. Резервуар, місткість якого дорівнює 1000 л, наповнюють водою через дві труби. Перші 800 л наповнюють через обидві труби, потім 120 л — лише через першу трубу, а останні 80 л — лише через другу. За таких умов час наповнювання на 2 год більший від часу наповнювання через обидві відкриті труби і на 13 год менший від часу наповнювання тільки через другу трубу. Скільки літрів води протікає через першу трубу за годину?

1030. Два пішоходи ідуть назустріч один одному з пунктів A та B. Перший вийшов з A на 1 год пізніше, ніж другий з B, і при зустрічі виявилось, що він пройшов на 6 км менше, ніж другий. Не зупиняючись, пішоходи продовжили свій рух і перший прибув у пункт B через 2,5 год, а другий — в A через 0,8 год після зустрічі. Знайдіть швидкість кожного пішохода.

1031. Є два двоцифрові числа. Якщо до першого числа дописати праворуч друге число, а потім ще цифру 0, то одержимо п'ятицифрове число, яке при діленні на квадрат другого числа дає неповну частку 39 й остачу 575. Якщо до першого числа дописати праворуч друге число, то одержимо чотирицифрове число, що на 1287 більше від чотирицифрового числа, яке одержимо, коли до другого числа допишемо праворуч перше число. Знайдіть ці двоцифрові числа.

1032. У річку впадає притока. Катер відходить від пункту A, що розташований на притоці, рухається за течією 80 км до впадання притоки в річку в пункті B, а потім іде вгору по річці до пункту C. На шлях від A до C він затратив 18 год, на зворотний шлях — 15 год. Знайдіть відстань від B до C, якщо відомо, що швидкість катера у стоячій воді дорівнює 18 км/год, а швидкість течії річки — 3 км/год.

1033. Майстер і учень за 3 дні виготовили партію деталей, виділяючи на це щодня по кілька годин. Першого дня, працюючи разом, вони виготовили 14 деталей. Другого дня працював лише учень. Він виготовив 14 деталей, пропрацювавши на 5 год більше, ніж першого дня. Третього дня робота тривала стільки часу, скільки й другого, але спочатку працювали майстер і учень разом, виготовивши 21 деталь, а потім — лише майстер, виготовивши 20 деталей. Скільки деталей за годину виготовляв майстер і скільки учень?

До § 3. Елементи прикладної математики

1034. Група учнів брала участь у лижному кросі. Відсоток учнів, які виконали норматив, виявився в межах від 94,2% до 94,4%. Яка найменша можлива кількість учнів брала участь у кросі?

1035. Моторний човен пройшов річкою з пункту A до пункту B і повернувся назад. Якби швидкість човна у стоячій воді була удвічі більшою, то на цей шлях човен витратив би часу на 60% менше. Знайдіть відношення швидкості човна у стоячій воді до швидкості течії річки.

1036. Проаналізувавши роботу двох підприємств за 4 роки, було встановлено, що вони виготовили однакову кількість продукції за перший рік, а також за четвертий рік. На першому підприємстві приріст випуску продукції за кожен рік дорівнював 10%. Приріст випуску продукції на другому підприємстві порівняно з попереднім роком становив: за другий рік 5%, за третій — 10%. Знайдіть відсоток приросту випуску продукції за четвертий рік на другому підприємстві.

1037. У посудині міститься V кг p-відсоткового розчину солі. З посудини виливають a кг суміші та доливають стільки ж води, утворений розчин перемішують. Таку процедуру повторюють 5 разів. Знайдіть відсотковий уміст солі в утвореному розчині.

1038. Є два шматки металів, до складу яких входить мідь. Маси шматків дорівнюють 1 кг і 2 кг. З них отримали два нових шматки: маса першого шматка дорівнює 0,5 кг, а вміст міді в ньому — 40%; маса другого шматка дорівнює 2,5 кг, а вміст міді в ньому — 88%. Знайдіть відсотковий уміст міді в шматках, які були спочатку.

1039. Є три сплави. Перший сплав містить 60% алюмінію, 15% міді й 25% магнію, другий — 30% міді й 70% магнію, третій — 45% алюмінію й 55% магнію. Із цих сплавів виготовили новий сплав, що містить 20% міді. Який найменший та який найбільший відсотковий уміст алюмінію може бути в новому сплаві?

1040. Швидкість течії річки більша від швидкості течії притоки. З пункту A, що розташований у місці впадання притоки в річку, одночасно відходять два катери: перший угору річкою, а другий — притокою. Пройшовши по 10 км, катери відразу вирушають у зворотний шлях. Який з катерів першим прибуде у пункт A: той, що пливе річкою, чи той, що пливе притокою, якщо катери мають однакову швидкість у стоячій воді?

1041. Два спортсмени бігають по одній круговій доріжці. Перший спортсмен пробігає кожне коло на 5 с швидше, ніж другий. Якщо спортсмени починають пробіг зі спільного старту одночасно і в одному напрямі, то опиняються поряд через 30 с. Через який час вони зустрінуться, якщо побіжать одночасно зі спільного старту в протилежних напрямах?

До § 4. Числові послідовності

1042. Знайдіть суму усіх трицифрових чисел, які:

а) кратні 3;

б) при діленні на 5 дають в остачі 1;

в) не діляться ні на 2, ні на 3.

1043. Чи правильно, що сума всіх трицифрових чисел, які не діляться ні на 2, ні на 3, дорівнює сумі трицифрових чисел, які діляться на 6?

1044. Знайдіть суму перших п’ятнадцяти членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_7 + a_8 + a_9 = 12$.

1045. Чи можуть числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ і $\sqrt{5}$ бути членами однієї арифметичної прогресії?

1046. Додатні числа a, b, c утворюють арифметичну прогресію. Чи правильно, що числа $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ теж утворюють арифметичну прогресію?

1047. Відомо, що для будь-якого натурального n сума перших n членів деякої арифметичної прогресії обчислюється за формулою $S_n = 4n^2 - 3n$. Знайдіть третій член прогресії.

1048. Сума перших n членів послідовності обчислюється за формулою $S_n = 3n^2$. Доведіть, що ця послідовність є арифметичною прогресією та знайдіть її різницю.

1049. Сума чотирьох перших членів скінченної арифметичної прогресії дорівнює 56, а сума чотирьох останніх — 112. Знайдіть число членів прогресії, якщо перший її член дорівнює 11.

1050. Знайдіть число членів скінченної арифметичної прогресії, для якої відношення суми перших семи членів до суми останніх семи членів дорівнює $\frac{2}{5}$, а відношення другого члена до першого дорівнює 2.

1051. Є три арифметичні прогресії, перші члени яких дорівнюють нулю, а різниці відповідно 931, 63 і 1083. Знайдіть номер найменшого, відмінного від нуля, члена першої прогресії, який трапляється у двох інших прогресіях.

1052. Є три арифметичні прогресії, перші члени яких дорівнюють нулю, а різниці — відповідно 400, 9604 і 30625. Четверта прогресія побудована з послідовних спільних членів перших трьох. Знайдіть її різницю.

1053. Знайдіть чотири цілих числа, які утворюють арифметичну прогресію, якщо найбільше з них дорівнює сумі квадратів усіх інших.

1054. Для яких значень a рівняння $1+2+...+x=\frac{a+2x}{2}$ має натуральний корінь?

1055. Розв'яжіть рівняння $x^3 + x^2 - a = 0$, якщо відомо, що його корені є трьома послідовними членами арифметичної прогресії.

1056. Знайдіть усі значення p і r, для яких рівняння $x^3 + px^2 - x + r = 0$ має три корені, що утворюють арифметичну прогресію з різницею 1.

1057. Знайдіть три додатних числа, які утворюють геометричну прогресію і в сумі складають 21, якщо сума обернених їм чисел дорівнює $\frac{7}{12}$.

1058. Знайдіть суму всіх різних знаменників геометричних прогресій, у яких кожний член, починаючи із третього, дорівнює сумі двох попередніх.

1059. Три додатні числа утворюють арифметичну прогресію. Третє число більше від першого на 14. Якщо третє число замінити його сумою з першим, а інші два залишити без змін, то отримаємо геометричну прогресію. Знайдіть суму чисел арифметичної прогресії.

1060. Три числа утворюють геометричну прогресію. Якщо третє число зменшити на 64, то одержимо числа, які утворюють арифметичну прогресію. Якщо ж потім другий член нової прогресії зменшити на 8, то одержимо геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.

Логічні задачі

1061. На крайніх клітинках смуги 1×20 стоять біла й чорна фішки. Максим, а за ним Олег по черзі пересувають свою фішку на одну або дві клітинки вперед чи назад, якщо це можливо (перескакувати через фішку не можна). Програє той, хто не може пересунути свою фішку. Як повинен грати Олег, щоб перемогти?

1062. Підручник складається із трьох розділів. Номери останніх сторінок усіх розділів є парними трицифровими числами, у запису яких використано дев'ять різних цифр, крім нуля. Скільки щонайбільше сторінок може мати другий розділ підручника?

1063. При дворі короля Артура зібрались 6 лицарів. Відомо, що кожний з них має серед присутніх щонайбільше двох ворогів. Доведіть, що лицарів можна розсадити за Круглим Столом так, що жоден з них не сидітиме поряд зі своїм ворогом.

1064. Чи можна множину перших 100 натуральних чисел розбити на 25 груп так, щоб у кожній групі було по 4 числа, одне з яких дорівнювало середньому арифметичному трьох інших чисел?

1065. На столі лежать монети по 25 копійок без накладання. Доведіть, що знайдеться монета, яка дотикається не більше ніж до трьох інших.

1066. В усі клітинки таблиці 25×25 вписані деякі числа. За один крок дозволяється міняти знаки усіх чисел будь-якого рядка або будь-якого стовпця. Чи можна за кілька таких кроків добитися того, щоб суми чисел кожного рядка і кожного стовпця були невід'ємними?

ВІТЧИЗНЯНІ МАТЕМАТИКИ

Віктор Якович Буняковський
(1804 – 1889)

Відома нерівність Коші — Буняковського — не єдиний значний здобуток Віктора Буняковського. Зважаючи на вагомий внесок у розвиток теорії ймовірностей, статистики, математичного аналізу, він був обраний почесним членом усіх університетів царської Росії. Петербурзька Академія наук присуджувала премії імені Буняковського — за найкращі праці з математики.

Народився Віктор Буняковський у місті Бар на Вінниччині. Його батько — підполковник кінно-польського уланського полку — помер, коли синові йшов 5-й рік. Початкову освіту Віктор Буняковський здобув у Москві в будинку графа Тормасова, який був другом його батька. У 1820 році 16-річний Буняковський разом із сином гр. Тормасова поїхав за кордон. Спочатку він брав приватні уроки в Кобурзі, згодом переїхав до Лозанни, де відвідував лекції з математики в академії, відтак протягом двох років навчався у Парижі, де в той час викладали такі видатні вчені, як Лаплас, Фур’є, Пуассон, Коші, Ампер та інші. Там же у 1824 році успішно захистив докторську дисертацію й отримав ступінь доктора математичних наук Паризького університету.

У 1826 році Віктор Буняковський переїхав до Петербурга, де майже 40 років викладав математику й механіку в цивільних і військових навчальних закладах, зокрема в Петербурзькому університеті. Упродовж 25 років (1864 – 1889) був віце-президентом Петербурзької Академії наук.

Віктор Буняковський залишив понад 100 наукових праць з різних розділів математики, зокрема з теорії чисел, математичного аналізу, теорії ймовірностей, статистики. Його «Лексикон математики» став основою створення російської математичної термінології. Віктора Буняковського вважають батьком теорії ймовірностей у царській Росії, оскільки його «Основи математичної теорії ймовірностей» були першим повним посібником з теорії ймовірностей російською мовою.

Юрій Олексійович Митропольський
(1917 – 2008)

Юрій Митропольський — відомий учений у галузі математичного аналізу. Академік Національної академії наук України (1961), заслужений діяч науки УРСР (1967), лауреат Державної премії України в галузі науки й техніки (1996), Герой України (2007).

У 1958 – 1988 роках очолював Інститут математики Академії наук України.

Юрій Митропольський народився 3 січня 1917 року в селі Шишаки (нині Гоголівського району Полтавської області). У 1932 році екстерном закінчив семирічку в Києві й пішов працювати на Київський консервний завод. У 1938 році закінчив 10-й клас середньої школи і тоді ж вступив до Київського державного університету імені Т. Г. Шевченка на механіко-математичний факультет.

У роки Великої Вітчизняної війни Юрій Митропольський був на фронті. За бойові заслуги нагороджений двома орденами Червоної Зірки та медалями. Після демобілізації, з 1946 року, працював у Академії наук України: спочатку співробітником в Інституті будівельної механіки АН УРСР; згодом в Інституті математики АН УРСР пройшов шлях від старшого наукового співробітника до директора інституту. Одночасно з роботою в Інституті математики він очолював у президії Академії наук України низку відділень: фізико-математичних наук, математики, механіки і кібернетики, математики і механіки. Був дійсним членом ряду іноземних Академій наук.

Наукові здобутки Юрія Митропольського увійшли до численних фундаментальних вітчизняних і зарубіжних видань. Він автор більш ніж 750 наукових праць, серед яких 53 монографії, виданих багатьма мовами світу.

Наукову роботу вчений успішно поєднував з педагогічною. Майже 40 років Юрій Митропольський читав лекції на механіко-математичному факультеті рідного університету. Серед його учнів — 25 докторів і понад 100 кандидатів фізико-математичних наук.

ВІДОМОСТІ З КУРСУ АЛГЕБРИ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

Числа

1. *Натуральні* числа: 1, 2, 3, 4, … . Множину натуральних чисел позначають літерою N.

2. Натуральні числа, протилежні їм числа та число 0 (нуль) утворюють множину *цілих* чисел: ..., –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, … . Множину цілих чисел позначають літерою Z.

3. Цілі й дробові числа утворюють множину *раціональних* чисел. Позначають цю множину літерою Q.

Будь-яке раціональне число можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне. Раціональні числа можна подати також у вигляді нескінченних періодичних десяткових дробів.

Наприклад:

$$5=\frac{5}{1}=5,00...=5,(0);\ \frac{1}{4}=0,2500...=0,25(0);$$

$$-\frac{2}{3}=-0,66...=-0,(6);\ 2\frac{5}{6}=\frac{17}{6}=2,833...=2,8(3).$$

4. Раціональні й ірраціональні числа утворюють множину *дійсних* чисел. Позначають цю множину літерою R.

Ірраціональні числа можна подати у вигляді нескінченних неперіодичних десяткових дробів.

Наприклад: $\sqrt{2}=1,41421...;$ $\pi=3,14159...;$ $2,010010001...$.

Степені

5. Степенем числа a з натуральним показником n, більшим від 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.

Степенем числа a з показником 1 називають саме число a.

$$a^n=\underbrace{aa...a}_{n},\ \text{якщо } n\in N,\ n>1;\qquad a^1=a.$$

6. Степінь числа a, яке не дорівнює 0, з нульовим показником дорівнює 1.

$$a^0=1\ (a\neq 0).$$

7. Якщо $a\neq 0$ і n — натуральне число, то

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Наприклад: $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$; $5^{-1}=\frac{1}{5}$. Запис 0^{-2} не має змісту.

8. *Властивості степеня з цілим показником*:

для будь-якого $a \neq 0$ і довільних цілих m та n справджуються рівності:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

для будь-яких $a \neq 0$, $b \neq 0$ і довільного цілого n справджуються рівності:

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Вирази. Тотожні перетворення виразів

9. Вирази, складені з чисел, знаків дій і дужок, називають числовими.

Вирази, складені з чисел, змінних, знаків дій і дужок, називають виразами зі змінними.

Наприклад: 1,5; $7 + 3^2$; $(32 - 2{,}7) \cdot 0{,}32$ — числові вирази; a; ab^2; $-18c^3$; $3a + 10$ — вирази зі змінними.

10.

$\frac{b}{4}+a^3$ *Цілий вираз*	$\frac{4}{b}+a^3$ *Дробовий вираз*
Раціональні вирази	

Цілий вираз не містить дії ділення на вираз зі змінною.

11.

$7ab^2$ — *одночлен*	$7ab^2 + c + 1$ — *многочлен*
Цілі вирази	

12. Два вирази називають *тотожно рівними*, якщо для будь-яких допустимих для них значень змінних їхні відповідні значення дорівнюють одне одному.

Рівність, яка є правильною для всіх допустимих значень змінних, що входять до неї, називають *тотожністю*.

Заміну одного виразу тотожно рівним йому виразом називають *тотожним перетворенням виразу*.

13. Перемножимо одночлени $-3a^2b$ і $4ab^3$:

$$-3a^2b \cdot 4ab^3 = (-3 \cdot 4) \cdot (a^2a) \cdot (bb^3) = -12a^3b^4.$$

Піднесемо одночлен $-5a^2b$ до куба:

$$(-5a^2b)^3 = (-5)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot b^3 = -125a^6b^3.$$

14. Додамо многочлени $4a^2 - 6a + 5$ і $-2a^2 + 3a + 2$:

$(4a^2 - 6a + 5) + (-2a^2 + 3a + 2) = 4a^2 - 6a + 5 - 2a^2 + 3a + 2 = 2a^2 - 3a + 7.$

Віднімемо від многочлена $4x^2 - 4x + 7$ многочлен $2x^2 - 3x + 5$:

$(4x^2 - 4x + 7) - (2x^2 - 3x + 5) = 4x^2 - 4x + 7 - 2x^2 + 3x - 5 = 2x^2 - x + 2.$

15. Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно одночлен помножити на кожний член многочлена й одержані добутки додати.

Наприклад: $2a(a^2 - 3a + 4) = 2a \cdot a^2 + 2a \cdot (-3a) + 2a \cdot 4 = 2a^3 - 6a^2 + 8a.$

16. Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член одного многочлена помножити на кожний член іншого многочлена й одержані добутки додати.

Наприклад: $(2a^2 + b^2)(2a - b) = 2a^2 \cdot 2a + 2a^2 \cdot (-b) + b^2 \cdot 2a + b^2 \cdot (-b) =$
$= 4a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3.$

17. Формули скороченого множення:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2;$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

18. *Способи розкладання многочленів на множники*:

а) винесення спільного множника за дужки:

$$2a^2b - 8ab^2 = 2ab \cdot a - 2ab \cdot 4b = 2ab(a - 4b);$$

б) групування:

$$b^2n + y^2 - bny - by = (b^2n - bny) + (y^2 - by) = bn(b - y) +$$
$$+ y(y - b) = bn(b - y) - y(b - y) = (b - y)(bn - y);$$

в) за формулами:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$ $\qquad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2;$ $\qquad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$

19. *Основна властивість дробу*. Для будь-яких чисел a, b і c, де $b \neq 0$ і $c \neq 0$, справджується рівність: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$.

20. Додавання дробів з однаковими знаменниками:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}.$$

Віднімання дробів з однаковими знаменниками:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}.$$

Додавання і віднімання дробів з різними знаменниками:

$$\frac{a^{\backslash d}}{b}\pm\frac{c^{\backslash b}}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

21. Множення дробів:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Ділення дробів:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

22. *Квадратним коренем* з числа a називають таке число, квадрат якого дорівнює a.

Арифметичним квадратним коренем з числа a (позначають $\sqrt{a}$) називають таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a.

Наприклад, $\sqrt{0,36}=0,6$, бо число 0,6 невід'ємне і $0,6^2 = 0,36$.

Рівність $\sqrt{a}=b$ є правильною, якщо виконуються дві умови:

1) $b \geq 0$; 2) $b^2 = a$.

23. Властивості арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ \ (a\geq 0, b\geq 0)$; **2)** $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ \ (a\geq 0, b>0)$;

3) $\sqrt{a^2}=|a|$; **4)** $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, $(a\geq 0)$.

Рівняння та їх системи

24. Рівність з невідомим значенням змінної називають *рівнянням з однією змінною*, або *рівнянням з одним невідомим*.

Значення змінної, для якого рівняння перетворюється у правильну числову рівність, називають *коренем*, або *розв'язком* рівняння.

Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

Множину значень змінної, для яких мають зміст вирази, що стоять у лівій і правій частинах рівняння, називають *областю допустимих значень* (скорочено ОДЗ) рівняння.

25. Два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті ж корені. Два рівняння, які не мають коренів, теж вважають рівносильними.

Основні властивості рівнянь

1) Якщо в деякій частині рівняння виконати тотожне перетворення, яке не змінює ОДЗ, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

2) Якщо деякий доданок перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

3) Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те ж, відмінне від нуля, число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

26. Рівняння виду $ax = b$, у якому a і b — деякі відомі числа, а x — змінна, називають *лінійним рівнянням з однією змінною*.

	Коефіцієнти	Корені
$ax = b$ — лінійне рівняння	$a \neq 0$	$\frac{b}{a}$ — єдиний корінь
	$a = 0$ і $b \neq 0$	коренів немає
	$a = 0$ і $b = 0$	коренем є будь-яке число (рівняння має безліч коренів)

27. Рівняння виду $ax + by = c$, де a, b і c — деякі відомі числа (коефіцієнти рівняння), x та y — змінні, називають *лінійним рівнянням із двома змінними*.

Розв'язком лінійного рівняння із двома змінними називають пару значень змінних, для яких рівняння перетворюється у правильну числову рівність.

28. Якщо потрібно знайти спільні розв'язки двох рівнянь, то кажуть, що потрібно розв'язати *систему рівнянь*.

$$\begin{cases} ax + by = c; \\ mx + ny = k \end{cases} \text{— система лінійних рівнянь.}$$

Розв'язком системи лінійних рівнянь із двома змінними називають пару значень змінних, для яких кожне рівняння системи перетворюється у правильну числову рівність.

Якщо $\frac{a}{m} \neq \frac{b}{n}$, то система має один розв'язок;

якщо $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} \neq \frac{c}{k}$, то система не має розв'язків;

якщо $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{k}$, то система має безліч розв'язків.

29. Способи розв'язування систем двох лінійних рівнянь із двома змінними.

а) *Спосіб підстановки.*

Наприклад: $\begin{cases} 2x + y = 3; \\ 3x - 2y = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 - 2x; \\ 3x - 2(3 - 2x) = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 - 2x; \\ 7x = 14; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2; \\ y = -1. \end{cases}$

б) *Спосіб додавання.*

Наприклад: $\begin{cases} 3x + 4y = 12; \\ 2x - 3y = -26; \end{cases} \left| \begin{matrix} \times 2 \\ \times(-3) \end{matrix} \right.$ $\begin{cases} 6x + 8y = 24; \\ -6x + 9y = 78; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 4y = 12; \\ 17y = 102; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + 4 \cdot 6 = 12; \\ y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4; \\ y = 6. \end{cases}$

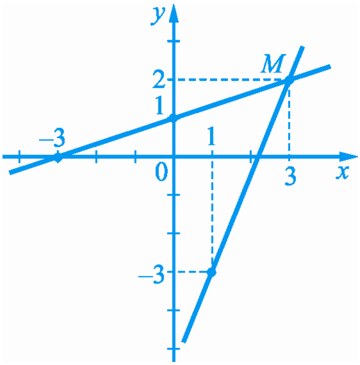
в) *Графічний спосіб.*

Наприклад: $\begin{cases} 5x - 2y = 11; \\ x - 3y = -3. \end{cases}$

Будуємо графіки обох рівнянь системи.

$5x - 2y = 11$		
x	1	3
y	–3	2

$x - 3y = -3$		
x	0	–3
y	1	0



$M(3; 2)$ — точка перетину графіків.
Розв'язок системи — (3; 2).

30. Рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — деякі відомі числа, до того ж $a \neq 0$, називають *квадратним рівнянням*.
Неповні квадратні рівняння:

а) $ax^2 + bx = 0$, де $b \neq 0$; $x(ax + b) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$;

б) $ax^2 + c = 0$, де $c \neq 0$; $x^2 = -\frac{c}{a}$; якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$; якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то коренів немає;

в) $ax^2 = 0$; $x = 0$ (або $x_1 = 0$; $x_2 = 0$).

31. Формула коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac.$$

Формула коренів зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

32. *Теорема Вієта*. Якщо x_1, x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$.

Якщо x_1, x_2 — корені повного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

33. Якщо x_1, x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

34. Система двох рівнянь із двома змінними.

$$\begin{cases} 3x - y = 2; \\ 3x^2 + y^2 = 28; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 2; \\ 3x^2 + (3x-2)^2 = 28; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x - 2; \\ 12x^2 - 12x - 24 = 0; \end{cases}$$

$x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $y_1 = -5$; $y_2 = 4$.

Розв’язки системи: (–1; –5); (2; 4).

Числові нерівності

35. Число a більше від числа b, якщо різниця $a - b$ — число додатне; число a менше від числа b, якщо різниця $a - b$ — число від’ємне; число a дорівнює числу b, якщо різниця $a - b$ дорівнює нулю.

36. *Властивості числових нерівностей*:

1) якщо $a < b$, то $b > a$;

2) якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$;

3) якщо $a < b$ і m — будь-яке число, то $a + m < b + m$;

4) якщо $a < b$ і $m > 0$, то $am < bm$;

5) якщо $a < b$ і $m < 0$, то $am > bm$;

6) якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$;

7) якщо $a < b$ і $c < d$, де a, b, c, d — додатні числа, то $ac < bd$;

8) якщо $a < b$, де a, b — додатні числа, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;

9) якщо $a < b$, де a, b — додатні числа, n — натуральне число, то $a^n < b^n$.

Нерівності з однією змінною

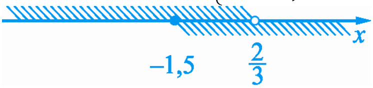
37. Нерівності виду $ax > b$, $ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$, де a, b — деякі відомі числа, а x — змінна, називають *лінійними нерівностями з однією змінною*.

38. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною.

1)	$5x > 12$; $x > 2{,}4$.	 $(2{,}4; +\infty)$.
2)	$-3x \geq 9$; $x \leq -3$.	 $(-\infty; -3]$.
3)	$0 \cdot x < 2$.	Множина усіх дійсних чисел: $(-\infty; +\infty)$.
4)	$0 \cdot x < -1$.	Розв'язків немає.

39. Розв'язування систем лінійних нерівностей з однією змінною.

$$\begin{cases} 3x+4<6; \\ 2x+7\geq 4; \end{cases} \begin{cases} 3x<6-4; \\ 2x\geq 4-7; \end{cases} \begin{cases} 3x<2; \\ 2x\geq -3; \end{cases} \begin{cases} x<\dfrac{2}{3}; \\ x\geq -1{,}5. \end{cases}$$



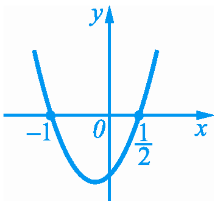
$$-1{,}5 \leq x < \frac{2}{3}, \text{ або } \left[-1{,}5; \frac{2}{3}\right).$$

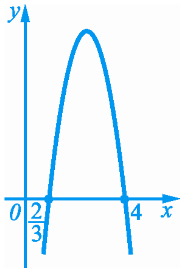
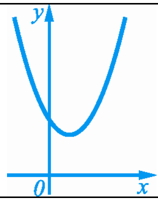
40. Нерівності виду

$$ax^2 + bx + c > 0,\ ax^2 + bx + c < 0,$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0,\ ax^2 + bx + c \leq 0,$$

де x — змінна, a, b, c — деякі відомі числа, до того ж $a \neq 0$, називають *нерівностями другого степеня з однією змінною*, або *квадратними нерівностями*.

41. Розв'язування квадратних нерівностей.

1)	*Нерівність*	*Множина розв'язків*	*Графік функції* $y = 2x^2 + x - 1$
	$2x^2 + x - 1 > 0$	$(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$	
	$2x^2 + x - 1 \geq 0$	$(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$	
	$2x^2 + x - 1 < 0$	$\left(-1; \frac{1}{2}\right)$	
	$2x^2 + x - 1 \leq 0$	$\left[-1; \frac{1}{2}\right]$	

2)	*Нерівність*	*Множина розв'язків*	*Графік функції* $y = -3x^2 + 14x - 8$
	$-3x^2 + 14x - 8 > 0$	$\left(\frac{2}{3}; 4\right)$	
	$-3x^2 + 14x - 8 \geq 0$	$\left[\frac{2}{3}; 4\right]$	
	$-3x^2 + 14x - 8 < 0$	$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (4; +\infty)$	
	$-3x^2 + 14x - 8 \leq 0$	$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup [4; +\infty)$	
3)	*Нерівність*	*Множина розв'язків*	*Графік функції* $y = x^2 - 2x + 3$
	$x^2 - 2x + 3 > 0$	$(-\infty; +\infty)$	
	$x^2 - 2x + 3 \geq 0$	$(-\infty; +\infty)$	
	$x^2 - 2x + 3 < 0$	розв'язків немає	
	$x^2 - 2x + 3 \leq 0$	розв'язків немає	

Функції

42. Змінну y називають функцією від змінної x, якщо *кожному* значенню змінної x відповідає *одне* певне значення змінної y. При цьому змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, а змінну y — *залежною змінною*, або *функцією*; записують $y = f(x)$.

43. Множину значень, яких набуває незалежна змінна (аргумент), називають *областю визначення* функції; множину значень, яких набуває залежна змінна (функція), називають *областю значень* функції. Область визначення функції $y = f(x)$ позначають $D(f)$ або $D(y)$, а область значень — $E(f)$ або $E(y)$.

44. Значення аргументу, для яких значення функції дорівнюють нулю, називають *нулями* функції.

45. Функцію називають *зростаючою* на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Функцію називають *спадною* на деякому проміжку, якщо для будь-яких двох значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

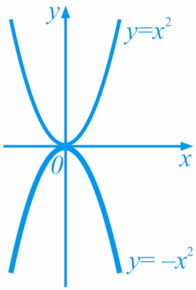
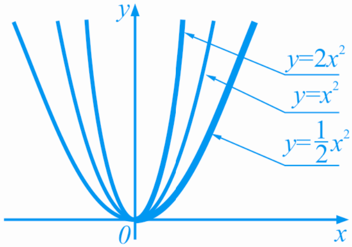
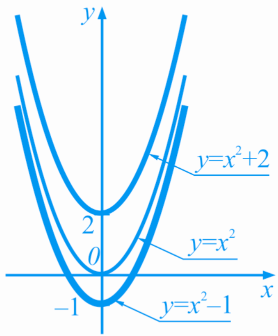
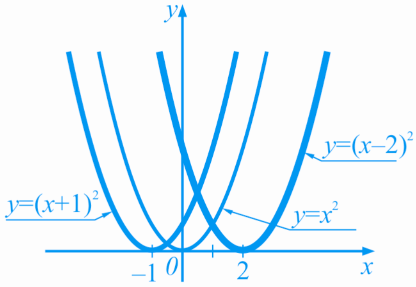
46. Функцію $y = f(x)$ називають *парною*, якщо для будь-якого значення x із області її визначення значення $-x$ також належить області визначення і виконується рівність: $f(-x) = f(x)$.

Функцію $y = f(x)$ називають *непарною*, якщо для будь-якого значення x із області її визначення значення $-x$ також належить області визначення і виконується рівність: $f(-x) = -f(x)$.

47. Властивості функцій.

Функція	Область визначення	Область значень	Нулі	Парність	Зростання, спадання	Графік
$y = kx + b,\ k \neq 0$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$x = -\dfrac{b}{k}$	якщо $b \neq 0$, — ні парна, ні непарна; якщо $b = 0$, — непарна	якщо $k > 0$, — зростаюча; якщо $k < 0$, — спадна	пряма
$y = \dfrac{k}{x},\ k \neq 0$	$(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$	немає	непарна	якщо $k > 0$, — спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$; якщо $k < 0$, — зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	гіпербола
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$x = 0$	парна	спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$	парабола
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$x = 0$	ні парна, ні непарна	зростаюча	вітка параболи

48. Перетворення графіків функцій.

			
Графік функції $y = -f(x)$ симетричний графіку функції $y = f(x)$ відносно осі x	Графік функції $y = af(x)$, де $a > 0$, одержують із графіка функції $y = f(x)$ шляхом розтягу або стиску до осі x	Графік функції $y = f(x) \pm n$ одержують із графіка функції $y = f(x)$ шляхом паралельного перенесення уздовж осі y	Графік функції $y = f(x \pm m)$ одержують із графіка функції $y = f(x)$ шляхом паралельного перенесення уздовж осі x

Відсотки

49. *Відсоток* — це одна сота: 1% = 0,01.
Розв'язуючи задачі на відсотки, можна використовувати такі твердження і формули:

1) щоб знайти p% від числа, потрібно це число помножити на дріб $\frac{p}{100}$;

2) щоб знайти число, p% якого дорівнюють b, потрібно число b поділити на дріб $\frac{p}{100}$;

3) щоб знайти, скільки відсотків становить число a від числа b, потрібно поділити a на b і записати результат у відсотках;

4) $A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ — формула складних відсотків; A_0 — початковий капітал, A_n — нарощений капітал за n років, p — річні відсотки.

Імовірність випадкової події

50. Імовірністю випадкової події A називають відношення числа рівноможливих випадків, які сприяють події A, до числа всіх можливих випадків: $P(A)=\frac{m}{n}$, де n — загальна кількість рівноможливих випадків, m — число випадків, які сприяють події A.

Прогресії

51. *Арифметичною прогресією* називають послідовність, кожний член якої, починаючи із другого, дорівнює попередньому члену, до якого додається одне й те ж число.
Арифметична прогресія (a_n):

$$a_1;\ a_2 = a_1 + d;\ a_3 = a_2 + d;\ \ldots,\ a_{n+1} = a_n + d;\ \ldots .$$

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — формула n-го члена арифметичної прогресії;

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n,\ S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$ — формули суми перших n членів арифметичної прогресії.

52. *Геометричною прогресією* називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожний член якої, починаючи із другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те ж число.
Геометрична прогресія (b_n):

$$b_1;\ b_2 = b_1\cdot q;\ b_3 = b_2\cdot q;\ \ldots,\ b_{n+1} = b_n\cdot q;\ \ldots .$$

$b_n = b_1q^{n-1}$ — формула n-го члена геометричної прогресії;

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ — формула суми перших n членів геометричної прогресії;

$S = \frac{b_1}{1-q}$ — формула суми нескінченної геометричної прогресії, у якій $|q| < 1$.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

§ 1

26. а) 0; 7; **б)** $-1\frac{3}{7}$; 4. **27. а)** 37; **б)** 0. **28.** 14 років. **29.** 26 років. **52. а)** –3; 3; **б)** –3,75; 4. **53. а)** (–2; 7); **б)** (2; 5). **54.** 120 л, 80 л. **55.** 5 і 7, 10 і 3 або 0 і 11 зошитів. **78.** *Вказівка*. Використавши рівність $a^2 + 2ab + b^2 = 1$ і нерівність $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, доведіть спочатку, що $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$. **81.** 40 і 60 яєць. **82.** 1440 підручників. **102. а)** Коренів немає; **б)** 6. **103. а)** 7; **б)** 5; **в)** –2. **104.** 1500 грн. **105.** 120 квіток. **114. а)** $x \leq -10$; **б)** $x < 2{,}5$; **в)** $a > -\frac{1}{4}$; **г)** $x > -1$. **115. а)** $x < -9$; **б)** $y \geq 0$; **в)** $z < 19$; **г)** $y \leq 2{,}5$. **116. а)** $x \geq 0$; **б)** $x < 0$; **в)** $x \leq 14$; **г)** $x \geq 3\frac{1}{3}$. **117. а)** $x \geq 0$; **б)** $x < \frac{1}{2}$; **в)** $x > 1$; **г)** $x > 17$. **118. а)** $x < -8$; **б)** $x > 1{,}25$; **в)** $x \leq -4$. **119. а)** $x < 1$; **б)** $x \leq -1{,}5$. **120. а)** $\left[-1\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$; **б)** (–1; 0,4); **в)** (–0,5; 5,5]; **г)** (0; 16). **121. а)** (–4; –1,5); **б)** $\left[-\frac{2}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$; **в)** $\left(-\frac{2}{3}; 9\frac{1}{3}\right]$; **г)** (–21; –13]. **122. а)** (0,4; 3,2); **б)** $(-\infty; 4] \cup [7; +\infty)$; **г)** $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. **123. а)** [3; 4]; **б)** $(-\infty; -1) \cup (1{,}5; +\infty)$. **124.** Більша, ніж 3,5 см і менша, ніж 10 см. **125.** Більша, ніж 23,5 см. **126. а)** (0; 6); **б)** $(-\infty; -11] \cup [0; +\infty)$; **в)** (–6,5; –2,5); **г)** розв'язків немає. **128. б)** –4; $1\frac{1}{3}$; **в)** –3,5. **129.** 2 км/год. **130.** 53. **131.** $\frac{1}{3}$. **133. а)** $x > \frac{2}{3}$; **б)** розв'язків немає; **в)** будь-яке число; **г)** розв'язків немає. **134. а)** Розв'язків немає; **б)** $x \geq 2{,}9$; **в)** будь-яке число; **г)** $x < 4$. **135. а)** $x < 2\frac{2}{11}$; **б)** $y \leq -3\frac{3}{5}$; **в)** $a < 1{,}6$; **г)** $x \geq 18$. **136. а)** $x > 0$; **б)** $a < -1\frac{5}{7}$; **в)** $x > 12$; **г)** $x \leq 4\frac{4}{9}$. **137.** $x > 1\frac{1}{4}$. **138.** $x \leq \frac{7}{8}$. **139. а)** $[3; +\infty)$; **б)** $[-3; +\infty)$; **в)** $(-\infty; 5]$; **г)** $(-\infty; 3{,}5]$. **140. а)** $[4; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 0{,}5]$. **141. а)** $y \leq \frac{1}{3}$; **б)** будь-яке число; **в)** розв'язків немає; **г)** $a < 16{,}5$. **142. а)** Розв'язків немає; **б)** розв'язків немає; **в)** будь-яке число; **г)** $y > 2$. **143. а)** $x < 8$; **б)** $x > -9$. **144. а)** $x < -1$; **б)** $x > -4{,}5$. **145.** $x > -5\frac{1}{6}$. **146.** $y > -1\frac{1}{3}$. **147. а)** $\left[\frac{9}{11}; +\infty\right)$; **б)** $(-\infty; 4]$; **в)** $[22; +\infty)$. **148.** Менша, ніж 10,5 см. **149.** Менша, ніж $7\frac{1}{3}$ см. **150.** Не більше як на 36 км. **151. а)** $x \leq 2(1 - a)$; **б)** $x \leq a - \frac{1}{2}$. **152. а)** Якщо

$a < -2$, то $x < \dfrac{1}{a+2}$; якщо $a = -2$, то розв'язків немає; якщо $a > -2$, то $x > \dfrac{1}{a+2}$; **б)** якщо $a < -1{,}5$, то $x < \dfrac{a}{2a+3}$; якщо $a = -1{,}5$, то x — будь-яке число; якщо $a > -1{,}5$, то $x > \dfrac{a}{2a+3}$. **153.** Ні. **154.** Так, наприклад, $a = -3$. **155. а)** (–1; 4); **б)** (2,7; 0,2). **156.** 125 грн. **157.** 13 і 6; 67 і 66. **158.** 23 фазани, 12 кроликів. **166. а)** $(-\infty; -7)$; **б)** розв'язків немає; **в)** $(-\infty; -2]$; **г)** $(2{,}25; +\infty)$. **167. а)** $\left(3\frac{1}{6}; +\infty\right)$; **б)** $\left(\frac{3}{7}; 3\frac{1}{3}\right)$; **в)** $[6{,}7; +\infty)$. **168. а)** $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right)$; **б)** розв'язків немає; **в)** $\left(-\infty; -\frac{5}{7}\right]$. **169. а)** $\left(-4; 1\frac{5}{6}\right]$; 1; **б)** [2; 5]; 5; **в)** (–3; 4); 3. **170. а)** 1; 2; 3; 4; **б)** 4; 5; 6; 7; 8; **в)** таких розв'язків немає. **171. а)** $(2; +\infty)$; **б)** $\left[1\frac{2}{3}; 5\frac{1}{3}\right)$; **в)** $(-\infty; -6)$; **г)** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. **172. а)** Розв'язків немає; **б)** $\left(1\frac{3}{5}; 12\frac{1}{7}\right)$. **173. а)** $(-\infty; 8]$; **б)** $(-\infty; 11)$; **в)** [0,6; 13]; **г)** розв'язків немає. **174. а)** (–6; 8]; **б)** $(-\infty; 1{,}5)$. **175. а)** Розв'язків немає; **б)** (7; 12,5). **176. а)** $(-\infty; -0{,}7)$; **б)** (–1,4; 3). **177.** $-2\frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3}$. **178.** $\left(-2\frac{3}{4}; 1\frac{3}{4}\right)$. **179. а)** (–1; 3); **б)** $(-\infty; -2{,}5]\cup[1; +\infty)$; **в)** $(-\infty; -2)\cup(3; +\infty)$; **г)** [0,5; 2). **180. а)** (2; 2,5); **б)** $(-\infty; -3]\cup(1; +\infty)$. **181. а)** [–5; 3]; **б)** $(-\infty; 1{,}25]$. **182. а)** $-9 \le x \le 0{,}6$; **б)** $x \ge 8$. **183.** Від 53 км/год до 55 км/год. **184. а)** $\left(-\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$; **б)** (1; 7); **в)** $(-\infty; 2]$; **г)** $\left(-\infty; 1\frac{2}{3}\right)$. **185. а)** Якщо $a \le 2{,}5$, то $x < a$, якщо $a > 2{,}5$, то $x < 5 - a$; **б)** якщо $a \le -3$, то розв'язків немає; якщо $a > -3$, то $\dfrac{1-a}{4} \le x < \dfrac{8+a}{5}$. **186.** Від 40% до 50%. **189.** $k = -1$. **190.** 1; 2; 3. **194.** Якщо рухатиметься за течією і проти течії річки. **195.** У річці зі швидкою течією. **197. а)** $-7 < a - 2b < -5{,}5$; **б)** $1{,}1 < \dfrac{a}{5} + 3b < 1{,}44$. **198.** $6{,}1 < l < 6{,}2$. **201. а)** $x > 2{,}5$; **б)** $x \le -1{,}2$; **в)** $x > -5{,}6$; **г)** $y < -6{,}4$. **202. а)** $y < 1{,}4$; **б)** $a < 1{,}2$; **в)** $x \ge -9\frac{1}{3}$; **г)** будь-яке число. **203. а)** (–15; 21); **б)** $(-\infty; -8]\cup[1; +\infty)$; **в)** $(-\infty; +\infty)$; **г)** розв'язків немає. **204. а)** 1; 2; 3; 4; **б)** 1; 2; 3; 4; 5; 6. **205.** $x < \dfrac{9}{22}$. **206. а)** $a < 0$; **б)** $a < -2\frac{1}{3}$; **в)** $a < 1{,}5$; **г)** $a > -1\frac{1}{3}$. **207.** 7 зошитів. **208.** Більшою від 89,6 км/год. **209. а)** $\left(-\frac{1}{7}; +\infty\right)$; **б)** $\left(1\frac{2}{3}; +\infty\right)$; **в)** розв'язків немає; **г)** $(-\infty; 0{,}5]$; **д)** розв'язків немає; **е)** $(-\infty; -7)$; **є)** $[1{,}75; +\infty)$;

ж) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{6}{7}\right)$. **210. а)** (0; +∞); **б)** розв'язків немає; **в)** (0; 2); **г)** (–9; –6). **211. а)** $\left[0; \frac{1}{7}\right)$; **б)** (5; +∞). **212. а)** [–4; –2); **б)** (–7; –1); **в)** (–4; 6]; **г)** (–20; –13). **213. а)** [1,5; 2]; **б)** (–∞; 2)∪(3; +∞); **в)** (–3; 0); **г)** (–∞; 1]∪(3,5; +∞); **д)** (–3; 3); **е)** (–∞; –3)∪(1; +∞). **214.** Від 6 м до 6,5 м. **215.** Від 5,2 м до 5,4 м.

Завдання для самоперевірки № 1

1. в). **2.** а), г). **3.** б). **4.** г). **5.** б). **6.** в). **7. а)** $2\frac{1}{3} > 2\frac{2}{7}$; **б)** $-0,5 > -\frac{5}{9}$. **9.** $7,6 < P < 8,0$; $3,57 < S < 3,96$. **11. а)** (–4; +∞); **б)** $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **12.** (–4; 2,5). **14. а)** $6 \le x + y \le 8$; **б)** $10,5 \le 3x - 0,5y \le 14$. **15. а)** (–∞; +∞); **б)** (11; +∞). **16.** $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$. **17. а)** [0,8; +∞); **б)** (10; +∞). **18.** 21,6 км < S < 28,8 км. **20. а)** $0,11 \le a^2 - b^2 \le 0,33$; **б)** $1,2 \le \frac{a}{b} \le 1,75$. **21. а)** $\left[-1; 1\frac{1}{3}\right]$; **б)** (–∞; –1)∪(0; +∞). **22.** 2; 3; 4; 5. **23. а)** $\left[-3; 1\frac{1}{3}\right]$; **б)** $\left[1\frac{1}{3}; 2\right)$∪(2; +∞). **24.** Перший.

§ 2

228. в) [8; +∞); **г)** (–∞; 2]. **229. в)** (–∞; 4]; **г)** [–4; +∞). **232. а)** 1; 4; **б)** –3; 3. **233.** –2; 1. **235.** (–8; 0); (0; 16). **236. а)** (–∞; –3)∪(–3; 2)∪(2; +∞); **б)** (–∞; 2)∪(2; 3)∪(3; +∞); **в)** (–∞; –4]; **г)** (–∞; 0,25]; **д)** (–3; +∞); **е)** [0; +∞). **237. а)** (–∞; –9)∪(–9; 1)∪(1; +∞); **б)** $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right]$; **в)** [–0,2; +∞). **240. а)** –7; 1; **б)** –3; **в)** таких значень x не існує. **241. а)** –1; 3; **б)** 1; **в)** таких значень x не існує. **246. а)** $\left[-\frac{2}{3}; 10\right)$; **б)** $\left(-\frac{2}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$. **250. б)** –2,5; $-\sqrt{2}$. **251. б)** Якщо $a > 6$, — два корені; якщо $a < 6$, — коренів немає; рівняння не може мати лише один корінь. **252.** 12 грн.; 8 грн. **253.** Наповниться за 10 хв. **254. а)** –2; –1; **б)** –3; 75; **в)** –1,5; –1. **255.** –3; 3. **259. е)** Нулів немає. **260. б)** –4; 2; **в)** –0,5. **265. б)** –1; 3; **в)** 1. **266. б)** –2. **269. г)** Ні парна, ні непарна; **д)** непарна; **е)** парна. **270. г)** Ні парна, ні непарна; **д)** парна; **е)** непарна. **273. б)** 1. **275. б)** $a = 1$ або $a = -1$; корені: –2, 0 і 2. **277. а)** 2; **б)** 14; **в)** 3; **г)** 4. **279.** 90 км/год. **289. а)** [–1; +∞); **б)** (–4; –2); **в)** (–∞; –3]. **290. а)** [–4; +∞); **б)** (–∞; 0)∪(4; +∞); **в)** [2; +∞). **292. а)** 1; 4; **б)** –2; 3. **293.** 1.

295. $a = 1$. **296.** Якщо $a < 0$ або $a = 1$ — два корені; якщо $a = 0$ — три корені; якщо $0 < a < 1$ — чотири корені; якщо $a > 1$ — коренів немає. **297. а)** $(a - 3)(b + 2)$; **б)** $(x + y)(x - 2)$. **298.** 11,25. **299.** $x^2 + 6x - 2 = 0$. **300.** 72 км/год. **308.** Так. **315.** $\frac{a+2b}{3}$ км/год. **316.** $\frac{3ab}{2a+b}$ км/год. **325. а)** $[-4; +\infty)$; **б)** $(-5; -1)$; **в)** $(-\infty; -3]$. **326. а)** $(-\infty; 4]$; **б)** $(0; 4)$; **в)** $(-\infty; 2]$. **327. а)** $(2; 2)$; $(-0,5; -5,5)$; **б)** $(1; -9)$; $\left(-3\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **328.** $(-0,5; -0,5)$; $(-1,5; 2,5)$. **329. а)** 1; **б)** 4. **330.** 0; 4. **332.** $x = 1$; 5 — найбільше значення. **333.** –6,5. **334.** –0,875. **336. а)** $b = 8$; $c = 18$; **б)** $a = -1\frac{1}{3}$; $b = 2\frac{2}{3}$. **338.** $a > 3$. **339.** 4,5 м. **340.** 50 м; 50 м. **341. а)** –0,5. *Вказівка.* Знайдіть значення x, для якого найменшого значення набуває квадратний тричлен $2x^2 - 2x$, і доведіть, що для цього ж значення x найменшого значення набуває і дана функція. **б)** 0,5. **342. а)** 4; **б)** 1. **343. а)** $\frac{a^2}{2b}$; **б)** $-\frac{3x}{y^2}$. **344. а)** $x > 8$; **б)** $x < -4$; **в)** $x \geq 4,2$; **г)** $-5 < x < 2$. **345. а)** –2; **б)** $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; **в)** –4; 4; **г)** 1; 3; $-2-\sqrt{7}$. **346.** 36 і 45 днів. **347.** Музикантів. **348.** –2; 2.

Завдання для самоперевірки № 2

1. в). **2.** б). **3.** в). **4.** б), г). **5.** в) **6.** а). **7.** $(-\infty; 2,5]$. **8.** –8; 2. **9.** $[-1; +\infty)$ — область значень. **10.** Ні. **11.** Зростає на проміжку $[1; +\infty)$; спадає на проміжку $(-\infty; 1]$. **12.** $[-1,5; 6]$. **13.** Так. **14. а)** $(-\infty; 8]$; **б)** $x < -1$ або $x > 3$; **в)** $[1; +\infty)$. **15.** $x = -2$; –32 — найменше значення. **17.** $\left[0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 6\right) \cup (6; 9]$. **19. а)** $[-4; +\infty)$; **б)** $(0; 4)$. **20.** 4. **21.** Не має.

353. а) $(-4; 1)$; **б)** $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$; **в)** $(0; 1,5)$; **г)** $(-3; 1)$; **д)** $(-\infty; 1) \cup (1,5; +\infty)$; **е)** $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **354. а)** $(-\infty; -4] \cup [-2; +\infty)$; **б)** $[-7; 2]$; **в)** $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$. **355. а)** $(-3; 2)$; **б)** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$; **в)** $(0; 2)$; **г)** $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$; **д)** $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$; **е)** $[-1; 1]$. **358. а)** $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; **б)** $(-1; 1)$; **в)** $[-1; 1]$; **г)** $[0; 5]$. **359. а)** $[-0,8; 1,2]$; **б)** $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$; **в)** $[2; 3]$; **г)** розв'язків немає; **д)** $(-\infty; +\infty)$; **е)** 3. **360. а)** $(-\infty; -1) \cup (1,2; +\infty)$; **б)** розв'язків немає; **в)** $(-\infty; +\infty)$. **361. а)** $(-\infty; -0,5) \cup (1,5; +\infty)$; **б)** $(-3; 5)$; **в)** $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; **г)** $\left[\frac{6-2\sqrt{6}}{3}; \frac{6+2\sqrt{6}}{3}\right]$. **362. а)** $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; **б)** $\left(-1\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

363. а) $(-\infty; -1,5]\cup[1; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -1)\cup(2; +\infty)$; **в)** $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$; **г)** $(1; 4)$. **364. а)** $(-\infty; +\infty)$.

365. $x < 0,3$ або $x > 0,7$. **366.** $x \le -1,5$ або $x \ge -0,5$. **367. а)** $[-6; 2]$; **б)** $(-\infty; -1]\cup\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; **в)** $(-\infty; +\infty)$. **368. а)** $(-\infty; +\infty)$; **б)** $[-12; 2]$. **369. а)** $(-\infty; 1]\cup[9; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -5)\cup(6; +\infty)$; **в)** $[0; 15]$; **г)** $(-\infty; -1,5]\cup[2; +\infty)$; **д)** $0,8$; $1,25$; **е)** $(-3; 6)$; **є)** $(5; +\infty)$; **ж)** $\{-4\}\cup[3; +\infty)$; **з)** $[-4; -1)\cup(-1; 1]$; **и)** $(-\infty; -3)\cup(5; 6)\cup(6; +\infty)$. **370. а)** $(-\infty; -4)\cup(6; 7]$; **б)** $(-2; -1]\cup[3; 4)$; **в)** $[0; 2]$. **371. а)** $(-5; 2]$; **б)** $(-4; -3]$; **в)** $(-\infty; -4)\cup(-4; 0,5)\cup(5; +\infty)$.

372. а) $-\frac{1}{3} < a < 1$; **б)** $-2,5 < a < -0,5$; **в)** $\frac{-3-2\sqrt{3}}{3} \le a \le \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$. **373. а)** $a \le -\frac{5}{8}$; **б)** $a < -\frac{5}{8}$; **в)** $a \le -2$. **374.** $a \le \frac{-5-\sqrt{37}}{2}$. **375. а)** $\frac{a-2c}{2}$; **б)** $\frac{m^2+n}{3m}$. **378. а)** $(1; 1)$; **б)** $(1; -2)$; **в)** $(1; -1)$. **379. а)** -1; 1; **б)** -6; -4; -1; 1. **380.** 12 і 8 деталей. **381. а)** $(-6; 4)$; **б)** $(-\infty; -3,5]\cup[-1; +\infty)$; **в)** $(1; 2)\cup(3; +\infty)$; **г)** $(-\infty; -3]\cup[0; 5]$; **д)** $(-\infty; -4)\cup(-2; 1)\cup(3; +\infty)$. **382. а)** $(2; 3)$; **б)** $[-3; 0,5]\cup[5; +\infty)$; **в)** $[-4; -2]\cup[1; 5]$. **383. а)** $(-\infty; -1)\cup(0,5; +\infty)$; **б)** $[-0,6; 2]$; **в)** $(-1; 2)\cup(3; +\infty)$; **г)** $(-\infty; 0]\cup[1; 2,5]$.

384. а) $(-4; -2)\cup(2; +\infty)$; **б)** $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]\cup[2; +\infty)$. **385. а)** $(-\infty; 2]\cup[4; +\infty)$; **б)** $\left(-3; -\frac{2}{3}\right)\cup(3; +\infty)$. **386. а)** $(-1; 3)$; **б)** $(-2; 1)\cup(8; +\infty)$; **в)** $(-\infty; -3)\cup[0,5; 4)$. **387. а)** $(1; 2,5)$; **б)** $(-1; 2)$; **в)** $(-\infty; -1,5)\cup[-1; +\infty)$. **388. а)** $(1; 5)\cup(7; +\infty)$; **б)** $(-0,4; -0,25)$; **в)** $(-\infty; 0]\cup(3; +\infty)$. **389. а)** $(0; 1)\cup(3; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -2]\cup[1; 2]$; **в)** $(-8; -1)\cup(1; 2)$; **г)** $(-\infty; -2]\cup[1; 2]\cup[5; +\infty)$. **390. а)** $\{-8\}\cup[-6; 1]$; **б)** $(-\infty; -1)\cup\left(\frac{1}{3}; 1\right)\cup(1; +\infty)$. **391. а)** $(-\infty; -2]\cup[5; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -4]\cup[-2; 1]\cup[4; +\infty)$. **392.** Якщо $a < 1$, то $(a; 1)$; якщо $a = 1$, то розв'язків немає; якщо $a > 1$, то $(1; a)$. **393. а)** $(-3; -2)\cup(2; 5)$; **б)** $(-\infty; 1)\cup(1; 2]\cup[6; +\infty)$; **в)** $(-1; 1)\cup(1; 5)$; **г)** $(0,5; 6]$. **394. а)** $(-5; -1)\cup(1; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -1)\cup\left[-\frac{1}{3}; 0\right]\cup(1; +\infty)$; **в)** $(-2; 2)$; **г)** $(-2; -1)\cup(0; 2)$. **395.** $(1; 1)$. **396.** 4. **397.** 20 деталей. **398.** 60 м^3. **404. а)** $(0; 0)$; $(2; 4)$; **б)** $(0; 3)$; $(3; 0)$. **405. а)** $(1; 1)$; $(2; 4)$; **б)** $(3; 1)$; $(-3; -2)$; **в)** $(1; 2)$; $(-1; -2)$; **г)** $(1; 1)$; **д)** $(4; -7)$; $(7; -4)$; **е)** $(0; 2)$. **406. а)** $(0; 1)$; **б)** $(9; 0)$; $(5; 2)$; **в)** $(1; 0)$; $(-2; -6)$ **407. а)** $(1; 3)$; $(-2; 0)$; **б)** $(-1; 2)$; $(1; 2)$; **в)** $(0; 0)$; $(1; 1)$. **408. а)** $(0; 1)$; $(3; 4)$; **б)** $(1; 1)$; **в)** $(-3; -1)$; $(3; -1)$; $(-1; 3)$; $(1; 3)$. **409. а)** Два; **б)** чотири; **в)** три. **410. а)** $(-2; 1)$; $(5; -6)$; **б)** $(8; 2)$; $(2; -1)$; **в)** $(3; -1)$; $\left(-6\frac{1}{3}; 5\frac{2}{9}\right)$; **г)** $(-1; -3)$; $(2; 3)$; **д)** $(2; 2)$; $(10; -6)$; **е)** $(1; 3)$; $\left(\frac{5}{6}; 3\frac{1}{3}\right)$. **411. а)** $(-4; -3)$; $(4; -3)$; $(-4; 3)$; $(4; 3)$; **б)** $(4; 1)$; $(2; 2)$; **в)** $(1; 3)$; $\left(7\frac{1}{2}; -1\frac{1}{3}\right)$; **г)** $(-4; 3)$; $(1; -2)$. **412. а)** $(1; 1)$; **б)** $(6; 2)$. **413. а)** $(1; 0)$; $(-0,2; -0,8)$; **б)** $(1; 5)$; $(5; 1)$; $(-1; -5)$; $(-5; -1)$. **414. а)** $(4; 2)$; **б)** $(1; -1)$; $(1,75; -0,75)$;

в) (2; 1); (0,25; –0,75); **г)** (–2; –3); (2; 3); **д)** $\left(-\frac{4}{9}; -2\frac{1}{3}\right)$; (1; 2); **е)** (3; 3); **є)** (1; –1); $\left(-\frac{5}{7}; 1\frac{2}{7}\right)$; **ж)** (3; 4); (4; 3); (–3; –4); (–4; –3). **417. а)** (0; 0); $\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}; -\sqrt{5}\right)$; **б)** (12; –1); (–12; 1); (4,5; –3,5); (–4,5; 3,5); **в)** (3; 1); (3; –1); (–3; 1); (–3; –1); (1; 3); (1; –3); (–1; 3); (–1; –3); **г)** (1; –2); (–2; 1); (2 – $\sqrt{3,5}$; 2 + $\sqrt{3,5}$); (2 + $\sqrt{3,5}$; 2 – $\sqrt{3,5}$); **д)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -2\sqrt{3}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 2\sqrt{3}\right)$; **е)** (1; 3); (1,5; 2); **є)** (4; 2); (–4; –2); **ж)** (4; –1); $\left(9\frac{5}{7}; 2\frac{3}{7}\right)$; **з)** (3; 1); (3; –1); (–3; 1); (–3; –1); **и)** (4; 2); (–2; –4). **418. а)** a = –0,45; **б)** $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$; **в)** a > 0; **г)** a > 2. **419. а)** $\frac{3b}{a-2b}$; **б)** $x+\sqrt{5}$; **в)** $\frac{9}{a}$; **г)** $3a - c$. **421.** 7. **422.** 66 хв. **423.** 415 км. **424.** 6 грн.; 7 грн. **425.** 50 к.; 1 грн. **426.** 7 см; 8 см. **427.** 4; 7. **428.** 9 і –1 або 1 і –9. **429.** 16 і 4 або –4 і –16. **430.** 5 і –3. **431.** 8 дм; 6 дм. **432.** 8 см; 5 см. **433.** 600 г; 200 г. **434.** 10 грн.; 5 грн. **435.** 10 грн.; 30 грн. **436.** 70 км/год; 60 км/год. **437.** 20 год; 12 год. **438.** 3 дні; 6 днів. **439.** 4 км/год; 3 км/год. **440.** 80 км/год; 60 км/год. **441.** 20 км/год; 16 км/год. **442.** 60 км/год; 90 км/год. **443.** 5 м^3 і 7,5 м^3 або 6,25 м^3 і 6,25 м^3. **444.** 15 год; 30 год. **445.** 4,8 ст/хв; 4 ст/хв. **446.** 6 год; 12 год. **447.** 70 см; 60 см. **448.** 18 учнів. **449.** 25 год; 20 год. **450.** 18 год. **451.** 25 км/год. **452.** 2 км/год. **453.** 20 самоскидів; 6 ходок; 8400 т. **454.** 60 км/год; 120 км/год. **456. б)** $(a - b)(am - b)$. **458. а)** $\frac{1}{3}$; **б)** 1. **460. в)** 2. **461. д)** (–∞; 3)∪(4; +∞); **е)** (–3; 3]. **475. а)** (1; 1); $\left(-\frac{1}{3}; 2\frac{1}{3}\right)$; **б)** (–1; –2); (4; 3). **477. а)** 1; 2; **б)** 1; **в)** 2. **478.** Якщо $a < -1$ або $-0{,}5 < a < 0{,}5$ — два корені; якщо $a = -1$ або $a = -0{,}5$ — три корені; якщо $-1 < a < -0{,}5$ — чотири корені; якщо $a = 0{,}5$ — один корінь; якщо $a > 0{,}5$ — коренів немає. **479. а)** [–5; 5]; **б)** (–∞; –5)∪(5; +∞); **в)** [–10; 10]; **г)** (0; 7); **д)** (–∞; 0]∪[3; +∞); **е)** [0; 9]. **480. а)** (–∞; –2)∪(4; +∞); **б)** (–∞; –5]∪[1; +∞); **в)** $\left(-2\frac{1}{3}; 1\right)$. **481. а)** (–∞; –3)∪(5; +∞); **б)** $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$. **482. а)** (–2; 4); **б)** (–0,5; 1). **483. а)** (–4; 2); **б)** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [2; +\infty)$; **в)** (–∞; –6)∪(–3; 1)∪(8; +∞); **г)** $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[1\frac{3}{4}; 2\right]$. **484. а)** $[-4; -3] \cup [0; 3]$; **б)** $(-\infty; -2] \cup [1; 2]$. **485. а)** (–6; –4)∪(5; +∞); **б)** (3; +∞). **486.** На проміжках (–∞; 0,5) і (5; +∞) функція набуває додатних значень, на проміжку (0,5; 5) — від'ємних значень. **487. а)** (–∞; –1)∪(8; 15]; **б)** (–2; –1]∪[3; 4). **488. а)** a > 1; **б)** $m < -\frac{1}{3}$. **489.** a = 1. **490.** a = 3. **493. а)** (–3; –6); (1; 2); **б)** (1; 0); (4; –1); **в)** (2; –2); (4,4; –5,2); **г)** (1; –1); $\left(\frac{2}{3}; -1\frac{1}{6}\right)$; **д)** (2; 2); (0,75; 4,5); **е)** (0; 3); (4; –1). **494. а)** (–2; –3); (2; 3); **б)** (1; 2); (2; 1); (1; –2); (–2; 1); **в)** (2; 3); (3; 2); **г)** (0; 1); (3; 1); (1,5; 2,5); (1,5; –0,5). **495.** m = 3.

496. $m = 4$, $m = -4$. **497.** 6 см, 8 см або 1 см, 13 см. **498.** 80; 20. **499.** 21 ряд. **500.** 25 км/год. **501.** 3 год; 6 год. **502.** 6 год.

Завдання для самоперевірки № 3

1. в). **2.** в). **3.** в). **4.** г). **5.** а). **6.** б). **7.** $(-\infty; -1)\cup(4; +\infty)$. **9.** (0; 0); (2; 4). **10.** (–3; –2); (1; 2). **11.** 5; 7. **12.** $\left[-2; \frac{1}{4}\right]$. **13.** $[-3; 2)\cup(4; +\infty)$. **14.** (2; 2); (–2; 2). **15.** (5; –1); (–0,2; 0,3). **16.** 20 год. **17.** $\left(-\infty; -1\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}\right)$. **18.** $-10 < a < 2$. **19.** (2; 1); (–2; –1); $\left(3; \frac{2}{3}\right)$; $\left(-3; -\frac{2}{3}\right)$. **20.** 2 розв'язки, якщо $a = 0$; 3 розв'язки, якщо $a = 5$. **21.** 20 км; 10 км/год.

§ 3

508. 18 костюмів. **509.** Від 0,7 г до 0,8 г включно. **510.** 80 см × 80 см. **511.** На 6 км/год. **512.** 1,5 год. **513.** 66 см. **514.** 3 см. **515.** 12 м^2. **516.** 7 комп'ютерів. **517.** 600 об/хв; 200 об/хв. **518.** 120 га і 108 га або 72 га і 60 га. **519.** Від 13,125 км до 17,5 км. **520.** ≈72 м. **521.** 35 діб. **522.** 75 м; 150 м. **523.** 2 м; 1 м. **524.** 49,5 т. **525.** Від 3,125 м до 4 м включно. **526. а)** $x > -\frac{2}{11}$; **б)** $x < \frac{7}{94}$. **528.** $k = 11$. **529.** 75 мл. **535.** 204 кг; 36 кг. **536.** 35%. **537.** 91,875%. **538.** 60 г. **539.** 840 г. **540.** 650 грн. **541.** 1920 грн. **542.** 735,26 грн. **543.** 1331 грн. **544. а)** $6\frac{2}{3}$%; **б)** 2,5%. **545.** 15%. **546.** 1%. **547.** 240 абітурієнтів. **548.** ≈90 г; ≈ 85 г; ≈149 г. **549.** 5700 грн. **550.** 2000 грн. **551.** 60 л; 40 л. **552.** 37566 грн. **553.** 18564 грн. **554.** У другій фірмі. **555.** ≈11,6%. **556.** 212,5 кг. **557.** 25 кг або 10 кг. **558.** $83\frac{1}{3}$ %. **559.** 20%. **560.** Зменшилася на 5,5%. **561.** 3000 грн. **562. а)** (1; –1); (–1; –3); **б)** $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$; $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **563. б)** y. **565.** 20 км/год або 7 км/год. **566.** Якщо $a \le 0$, то розв'язків немає; якщо $a > 0$, то $3 - a < x < 3 + a$. **573. б)** 0; **в)** $\frac{5}{6}$. **574. а)** $\frac{1}{4}$; **б)** $\frac{3}{4}$; **в)** 0. **575.** $\frac{1}{15}$. **576.** $\frac{2}{5}$. **577.** $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{20}$. **578.** $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{9}$. **579. а)** $\frac{9}{25}$; **б)** $\frac{8}{25}$; **в)** $\frac{4}{25}$; **г)** $\frac{16}{25}$. **580. а)** $\frac{1}{10}$; **б)** $\frac{1}{10}$; **в)** $\frac{1}{30}$; **г)** 0. **581.** $\frac{2}{5}$. **582.** $\frac{9}{20}$. **583.** $\frac{1}{3}$. **584.** $\frac{1}{3}$. **585.** $\frac{1}{6}$. **586.** $\frac{1}{6}$. **587.** 540 і 360 мікросхем. **588.** 12 дівчат і 16 хлопців. **589.** $\frac{1}{720}$. **590.** $\frac{1}{125}$. **591.** $\frac{1}{60}$. **592.** $\frac{2}{5}$. **593.** $\frac{3}{5}$. **594.** $\frac{11}{500}$. **595.** $\frac{19}{29}$. **596.** $\frac{7}{12}$. **597. а)** $\frac{3}{8}$; **б)** $\frac{11}{16}$. **599. а)** [–1; 5];

б) $(-\infty; -1,5) \cup (0,5; +\infty)$. **600. а)** $\sqrt{a}-7$; **б)** $\frac{1}{x+2}$. **602.** 37,5 хв. **609.** 3,2 кг. **610.** 392,5 г. **611.** 11,6 тис. грн. **612.** 2 помилки. **616.** 7,5 балів. **617.** 9 очок. **619.** 9%. **620. а)** $\sqrt{\frac{a}{b}}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. **621. а)** (2; 3); (3; 2); **б)** (–3; –2); (3; 2). **622.** $a \le 1$ або $a \ge 2$; $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2-3a+2}$. **623.** 45 с. **625.** 18 км/год; 2 км/год. **626.** До 14 блоків. **627.** 105 деталей. **628.** 2 хв. **629.** ≈266 кг. **630.** 2000 грн. **631.** 12 см; 16 см; 10 см. **632.** 225 г. **633.** 5000 грн. **634.** 8%. **635.** 70 кг. **637. а)** $\frac{1}{2}$; **б)** 1; **в)** $\frac{3}{10}$; **г)** $\frac{1}{10}$. **638.** $\frac{1}{3}$. **639.** $\frac{5}{11}$. **640.** $\frac{1}{4}$. **641.** $\frac{1}{4}$. **642.** $\frac{1}{10}$. **643. а)** $\frac{1}{8}$; **б)** $\frac{3}{8}$. **646.** –1° С. **647.** 8 підтягувань.

Завдання для самоперевірки № 4

1. б). **2.** в). **3.** в). **4.** а). **5.** б). **6.** в). **7.** 3 год. **8.** 28 см; 20 см. **9.** 1210 грн. **10.** $\frac{1}{5}$. **12.** 70 км/год; 50 км/год. **13.** 27 кг. **14.** 1160,5 грн. **15.** $\frac{3}{10}$. **17.** 24 год і 12 год або 20 год і 13 год 20 хв. **18.** $9\frac{1}{11}\%$. **19.** 13500 грн. **20.** $\frac{23}{36}$. **21.** 6 піднімань.

§ 4

656. а) 7; 14; 21; 28; **б)** 3; 7; 11; 15. **659. а)** –5; –3; –1; 23; **б)** 100. **661.** 10; 15. **662.** Ні; так. **663.** Так; ні. **664.** $7n+1$; $7n+2$. **665.** $11n+5$; $11n+3$. **666. а)** –3; –5; –9; –17; –33; **б)** 2; $-\frac{1}{2}$; –6; –2; 7. **667. а)** 5; –10; 20; –40; 80; **б)** 1; 2; 4; 7; 12. **669.** $b_1 = 3$; $b_{n+1} = b_n^2 - 1$; 3; 8; 63; 3968. **670.** 1; $3\frac{1}{2}$; –1; $2\frac{1}{4}$; –3; $1\frac{5}{6}$. **671.** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. **672.** $n > 19$. **673. а)** $(9x-1)(x-1)$; **б)** $(x-3)(x+3)(x^2+4)$. **674. а)** $(-\infty; 3)$; **б)** $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. **675.** 25 год; 20 год. **676.** –5; 2. **684. а)** 10; 15; 20; 25; **б)** 4,5; 4; 3,5; 3. **685. а)** 0,3; 2,6; **б)** 0,2; –2,2. **686. а)** 2,5; 18; **б)** –2; $\sqrt{2}-1$. **688. а)** 6,3; **б)** 2,6. **690.** 46. **691. а)** Ні; **б)** так. **693. а)** 0,95; 0,85; **б)** $\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$. **695.** 27 рибин; 54 рибини. **696.** $m = 18$. **697.** $6\sqrt{3}$. **698.** 22,5. **699.** 60°. **700.** 37 см, 40 см, 43 см. **702. а)** $a = 3$, $d = -2$; $a = 5$; $d = -2$; **б)** (1; –3), (–4,6; 5,4). **703. а)** –7; 1; **б)** 1. **704.** 2 км/год. **707.** 12,5; 28,5. **708. а)** $a_n = 7,8 + 1,1(n-1)$; 16,6; **б)** $a_n = -6 - 7(n-1)$; –62. **710. а)** –14; **б)** 11. **712. а)** 11; **б)** 7. **713.** Ні; так. **714. а)** Так; **б)** ні. **715.** 3 см. **717.** –2; –15. **718.** –1. **719.** –7; 3. **720.** 19;

30; 41; 52. **721.** 0; –2; –4. **722.** –1,5. **723.** 2,4. **724.** 94. **725.** 83. **728.** $\frac{4}{15}$. **732. а)** 68; **б)** –28. **734. а)** 153; **б)** –45. **736.** 820. **737.** 40 см. **738.** 15. **739.** –26. **740.** 1681. **741.** 2550. **742.** 1470. **743.** 3528. **744.** 3417. **745.** 31. **746.** –3; 4. **747.** –3. **748.** 145. **749.** 48. **750.** 6 днів. **751.** 770. **752.** 123300. **753.** –264. **754. а)** $n(n+1)$; **б)** n^2. **755.** 11. **756. а)** 6; **б)** 39. **757.** 470 м. **758. а)** $(-\infty; 8]$; **б)** $x < 0$ або $x > 4$; **в)** $(-\infty; 2]$; $[2; +\infty)$. **759.** 20 кг; 30 кг. **761. а)** (3; –1); (5; –3); **б)** (–1; –1); (7; 3). **771. а)** –3; –54; **б)** 0,5; 0,5. **773. а)** –15 або 15; **б)** –12 або 12. **774.** 64; 3,24. **775. а)** Так; **б)** ні. **776. а)** Так; **б)** так. **777.** 125 см^3. **778.** 8 років. **779. а)** $b_2 = 7$; $b_4 = 343$ або $b_2 = -7$; $b_4 = -343$; **б)** $x = 4$; $y = 1$ або $x = -4$; $y = -1$; **в)** $b_1 = 3$; $b_3 = \frac{3}{4}$; $b_5 = \frac{3}{16}$ або $b_1 = -3$; $b_3 = -\frac{3}{4}$; $b_5 = -\frac{3}{16}$. **780.** $-\sqrt{3}$ або $\sqrt{3}$. **781.** $x = 1$; $y = 1$. **782.** 32. **783. а)** 2; **б)** –6. **784. а)** $(-\infty; 1)$; **б)** $(2; +\infty)$. **785.** 25 см^2. **786.** $0 < a < 4$. **790. а)** 81; **б)** 32. **792. а)** 2; **б)** 3. **794. а)** –2 або 2; **б)** –3 або 3. **795.** –10 або 10. **796.** $-\frac{1}{3}$ або $\frac{1}{3}$. **797.** 64. **798.** –64 або $-\frac{1}{4}$. **799.** 4 см^2. **800.** 4,5 см. **801.** 7; –21; 63; –189 або –14; –42; –126; –378. **802.** 0,9; 1,5; 2,5 або 9; 3; 1. **803.** –3; –6; –12; –24. **804. а)** $\frac{2c^4}{x^4}$; **б)** $\frac{(a+b)(m+n)}{m-n}$. **805. а)** $\left(-\infty; -\frac{5}{16}\right] \cup (0; +\infty)$; **б)** (–11; 5). **806.** $m = 1$. **807.** 20. **810. а)** –160; **б)** –21. **812. а)** 33; **б)** 24,2. **813.** 2. **814.** 128. **815. а)** 6552; **б)** –7,875. **816.** –440. **817.** 2184. **818.** 765 або –255. **819.** 12; 6; 3 або 3; 6; 12. **820.** 384. **821.** 15,5. **822. а)** 2; **б)** 1. **824. а)** $[5; +\infty)$; **б)** $\left[\frac{1}{2}; 25\right)$. **825.** 20 і 30 електродвигунів. **829.** $1\frac{1}{3}$. **830. а)** $4{,}5\sqrt{7}$; **б)** $\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$. **831. а)** 20; **б)** 42. **832. а)** –12; **б)** 16. **833.** $\frac{1}{5}$. **834. а)** 1; **б)** $\frac{x^2}{1+x^2}$. **835. а)** $\frac{3}{4}$; **б)** $\frac{1}{1-a}$. **836.** 12. **837.** 2; $\frac{1}{3}$. **839. а)** 32 см^2; **б)** $(8+4\sqrt{2})\pi$ см. **840.** $\frac{1}{36}$. **841.** $\frac{2}{11}$. **842.** 80 деталей. **843.** $a = -6$. **844. д)** $1\frac{7}{30}$; **е)** $\frac{56}{495}$; **є)** $5\frac{58}{225}$; **ж)** $\frac{437}{3300}$. **845. а)** $\frac{5}{33}$; **б)** $3\frac{7}{9}$; **в)** $6\frac{2}{15}$; **г)** $2\frac{217}{900}$; **д)** $\frac{23}{900}$; **е)** $1\frac{119}{990}$. **846. а)** $9\frac{511}{512}$; **б)** $n(2n+1)$. **847.** 259. **848.** 10; 80. **849.** 1; 120. **850.** 1 м. **851.** 53,9 м. **852.** 21; 4. **853.** 45 м. **854.** 0,5 см. **855. а)** $\frac{2n}{2n+1}$; **б)** $2^{n+1}(n-1)+2$; **в)** $\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$. **856. а)** $\frac{2}{3}$; **б)** 7. **858.** 7 с. **859.** ≈76,2 кПа. **860.** $[-6; +\infty)$. **861.** –7; –6; –5; –4; –3; –2. **862.** $a < 2$. **863.** 2000 грн. **864. а)** –23; –44; –71; –104; **б)** –24; 48; –96; 192. **865.** Так, ні. **866. а)** –5; –7; –11; –19;

б) 3; 5; 19; 85. **867.** 2; 3. **868.** 5. **870. а)** 4; 27; **б)** –2,5; –6,3. **871. а)** $a_n = 13 - 12(n-1)$; **б)** $a_n = -4 + 0{,}5(n-1)$. **872. а)** –3; **б)** –2. **873.** 7. **874.** 55 см. **875.** 43,75 м. **877.** 160. **878.** 15. **879. а)** –4,1; **б)** 4,3. **880.** 2639. **881. а)** 5096; **б)** 2805; **в)** 2460; **г)** 3969; **д)** 6120; **е)** 741. **882.** –18. **884. а)** 4; 320; **б)** $\frac{1}{4}$; 0,025. **885. а)** 81; **б)** $\frac{1}{2\sqrt{10}}$. **886.** $-\frac{3}{5}$ або $\frac{3}{5}$. **887.** $1\frac{21}{64}$. **888.** –1; –5; –25; –125. **889.** 32 см. **890.** 6; 17; 28. **891.** –3; 6; –12. **892. а)** $2\frac{1}{4}$; **б)** $\frac{6-2\sqrt{2}}{3}$. **893.** 16; $-\frac{32}{3}$; $\frac{64}{9}$. **894. а)** $\frac{8}{9}$; **б)** $\frac{4}{33}$; **в)** $51\frac{1}{3}$; **г)** $14\frac{1}{9}$; **д)** $1\frac{29}{90}$; **е)** $\frac{13}{30}$; **є)** $\frac{37}{330}$; **ж)** $24\frac{317}{900}$. **895. а)** $\frac{1}{16}$; **б)** $85\frac{1}{3}$; **в)** 64. **896. а)** 84 см; **б)** 112 см^2. **897. а)** $\frac{n}{4n+1}$; **б)** $2-\frac{n+2}{2^n}$. **898. а)** –0,8; **б)** 10. **900.** (–∞; +∞).

Завдання для самоперевірки № 5

1. в). **2.** б). **3.** в). **4.** б). **5.** г). **6.** б). **7. а)** –7,8; **б)** –21,5. **8.** –20. **9.** $-\frac{3}{8}$. **10.** –124. **11.** 18. **12.** Так. **13.** 1,2; –3. **14.** 1635. **15.** 3; 381. **16.** $\frac{4}{9}$; $5\frac{53}{99}$. **17.** 61. **18.** 108. **19.** 5. **20.** –1,4 або 3. **21.** –18; –12; –8 або –2; –4; –8.

Задачі за курс алгебри 9 класу

911. а) (–∞; –1); **б)** розв’язків немає; **в)** $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$; **г)** (–3; +∞). **912. а)** (4,25; +∞); **б)** $\left(-\infty; 1\frac{7}{12}\right)$; **в)** $\left(-\infty; -\frac{5}{7}\right)$; **г)** $\left[\frac{7}{12}; +\infty\right)$. **913.** 3. **915. а)** $\left(-1; -\frac{5}{6}\right]$; **б)** $\left(4\frac{2}{3}; 5\frac{1}{2}\right)$; **в)** (–∞; –2). **916. а)** (–0,6; 0,6]; **б)** [0,75; 1,05]; **в)** $\left(5\frac{1}{3}; 5\frac{2}{3}\right]$. **917. г)** (–∞; –2,5)∪∪(0,5; +∞). **919.** $x \le 2{,}6$. **920.** $x \le 1\frac{2}{3}$. **921. а)** $a > 0{,}8$; **б)** $a > -3{,}75$. **922. а)** $x > 1{,}5$; **б)** $2 \le x \le 4$; **в)** $3{,}5 \le x < 5$; $x > 5$. **923. а)** (–∞; –3)∪(–3; 1)∪(1; +∞); **б)** (–∞; 3]; **в)** (–∞; –2]∪[6; +∞); **г)** (3; 4); **д)** (0; 1]; **е)** [3; 3,5). **924.** Ні. **932. а)** Ні; **б)** так. **933. а)** 2; **б)** –1. **934.** Якщо $b < 0$, то коренів немає; якщо $b = 0$ — 3 корені; якщо $0 < b < 1$ — 6 коренів; якщо $b = 1$ — 4 корені; якщо $b > 1$ — 2 корені. **936. а)** (–∞; –2)∪(1,5; +∞); **б)** [–1; 4]; **в)** (–∞; –2)∪(4; +∞); **г)** $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$. **937. а)** (–2; 0,5); **б)** [–10; 1]∪[4; +∞); **в)** (–∞; –2)∪(–1,5; 0)∪(1,2; +∞); **г)** (–∞; –5]∪[–2; 4]. **938. а)** [–2; –1]∪[1; 2];

б) $(-\infty; 1)\cup(2; +\infty)$. **939. а)** $(-2; 0)\cup(1; +\infty)$; **б)** $(-2; 8)$; **в)** $(-\infty; -1)\cup(1; 4)$; **г)** $(-\infty; -4)\cup$ $\cup(2; +\infty)$. **940. а)** $(-3; -2)\cup(-2; +\infty)$; **б)** $(-7; -5]\cup(-4; 6)$. **941. а)** $\{2; 5\}$; **б)** $\{-5\}\cup[-2; 3]$. **942. а)** $x < 1$; $x > 1{,}25$; **б)** $1 \le x \le 1{,}25$. **943. а)** $(0; 2]$; **б)** $[-7; -4)\cup(6; 10]$. **944.** $-2 < a < 5$. **945.** $b < -1$. **946. а)** $(-1; 1)$; $(2; -2)$; **б)** $(1; 0)$; **в)** $(-2; 0)$; $(0; 2)$; $(2; 0)$. **94-** **947. а)** $(2; 1)$; $(-0{,}4; -0{,}2)$; **б)** $(-1; 1)$; $(2; -1)$; **в)** $(2; 2)$; $\left(\frac{4}{9}; -2\frac{2}{3}\right)$; **г)** $(-2; 2)$; $(-0{,}5; 1{,}25)$. **948. а)** $(2; 0)$; $(-2; 0)$; $(4; -1)$; $(-4; 1)$; **б)** $(-5; -8)$; $(2; -1)$; **в)** $\left(\sqrt{2}; 1\right)$; $\left(\sqrt{2}; -1\right)$; $\left(-\sqrt{2}; 1\right)$; $\left(-\sqrt{2}; -1\right)$; **г)** $(-2; -2)$; $\left(3\frac{5}{8}; -1\frac{3}{8}\right)$. **949.** $m = 0$. **950.** $a = 0$; $a = 4$. **951.** 2,5 і 1,5. **952.** 18 м; 12 м. **953.** 21 км/год. **954.** 6 днів; 12 днів. **955.** 5 год; 7,5 год. **956.** 3 м/с; 4 м/с. **957.** 8 год; 6 год. **958.** 824 і 428. **959.** 8 км. **960.** 50 спортсменів. **961.** 6083,5 грн. **962.** 40 т; 100 т. **963.** 100 грн.; 30 грн. **964.** 336 деталей; 280 деталей. **965.** $\frac{2}{3}$. **966. а)** $\frac{5}{11}$; **б)** $\frac{6}{11}$; **в)** $\frac{5}{11}$; **г)** $\frac{5}{11}$. **967.** $\frac{1}{100}$. **973.** $x = \frac{4}{9}$. **974. б)** 306. **976. а)** $-1{,}2$; $0{,}4$; **б)** 6,8; **в)** 28,8. **977.** 16. **978.** 5 год. **982.** $m = -2$; $m = \frac{2}{9}$. **983.** 2; -42. **984.** 3125 частин. **985.** 3, 18, 33 або 27, 18, 9. **986.** 1; $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **987.** $2\sqrt{2}$. **989. а)** 1; **б)** $2\sqrt{3}$. **990. а)** 2; **б)** $1\frac{3}{4}$.

Задачі підвищеної складності

996. в) *Розв'язання*. Якщо $n = 1$, то матимемо нерівність $\frac{1}{1+1} \ge \frac{1}{2}$, яка є правильною. Якщо $n > 1$, то використаємо метод підсилення. Оскільки $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$, ..., $\frac{1}{n+n} > \frac{1}{2n}$, то $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}$; **г)** *Вказівка*. $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, де $n > 1$. **1001.** $x = 1$; $y = 1$. *Вказівка*. Доведіть, що $\frac{x+1}{\sqrt{x}} \ge 2$ для $x > 0$, до того ж $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = 2$ лише для $x = 1$. **1003.** 2, 3, 1 і 0 рибин. **1004.** 14 і 18 хлопців. **1005. а)** Якщо $a \le 0$, то розв'язків немає; якщо $a > 0$, то $x > 0$; **б)** якщо $b < -2$ або $b > 3$, то $x \le \frac{b+1}{b-3}$; якщо $b = -2$ або $b = 3$, то x — будь-яке число; якщо $-2 < b < 3$, то $x \ge \frac{b+1}{b-3}$. **1006. а)** $(-\infty; 1]\cup[3; +\infty)$; **б)** $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. **1007.** $a = -2$. **1010.** $a = 3$. **1011.** $x = 5{,}5$.

1012. $\frac{1}{3}$. **1013.** $(-\infty; -3]\cup\{-1\}\cup[1; +\infty)$. **1014.** $a \le -1$ або $a \ge 3$. **1016.** $x < -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ або $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **1017.** $a \le 4$ або $a \ge 5$. **1018.** $a \le -1{,}5$. **1019.** Якщо $a < -1$ або $a = 1$ — один корінь; якщо $-1 \le a < 1$ — два корені; якщо $a > 1$ — коренів немає. **1020.** $a > 1$. **1021. а)** (8; 2); (–8; –2); **б)** (1; 2); (–2,5; –1,5); **в)** (1; 3); (3; 1); **г)** (–2; 3); (3; –2); **д)** (0; 1); **е)** (2; 8); (8; 2); **є)** (2; 3); (–2; –3); **ж)** (8; 2); (–8; –2); (5; –8,5); (–5; 8,5); **з)** $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}; 6\right)$; $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}; -6\right)$; **и)** (3; 1; 2), (1; 3; 2). *Вказівка.* **и)** Додавши до першого рівняння системи третє рівняння, помножене спочатку на 2, а потім на –2, одержимо: $x - y = \pm 2$; $x + y = \pm 2z$. **1022.** $a = -0{,}75$. **1023.** $a = -3$; $a = -1$; $a = 1$; $a = 3$. *Вказівка.* Систему можна записати у вигляді $\begin{cases}(x-2a)^2+(y-1)^2=4;\\(x-a)^2+(y-1)^2=1.\end{cases}$ Перше рівняння системи визначає коло радіуса $r_1 = 2$ із центром у точці $O_1(2a; 1)$, а друге рівняння — коло радіуса $r_2 = 1$ з центром у точці $O_2(a; 1)$. Система матиме один розв'язок тоді й тільки тоді, коли $O_1O_2 = r_1 + r_2$ (зовнішній дотик кіл) або $O_1O_2 = r_1 - r_2$ (внутрішній дотик). **1024.** Якщо $|a| > 2$ або $a = 0$, — 2 розв'язки; якщо $|a| = 2$ або $|a| = \sqrt{3}$, — 3 розв'язки; для решти значень a — 4 розв'язки. **1025.** $a = 4$. **1026.** $a = 1$ або $a = 2$. **1027.** 30 і 20 деталей. **1028.** 2 год. **1029.** 60 л. **1030.** 4 км/год; 5 км/год. **1031.** 48; 35. **1032.** 210 км. **1033.** 5 і 2 деталі. **1034.** 35 учнів. **1035.** 2. **1036.** $15\frac{5}{21}$%. **1037.** $p\left(1-\frac{a}{V}\right)^5$%. **1038.** 40%; 100%. **1039.** 15%; 40%. **1040.** Катер, що пливе притокою. **1041.** 6 с. **1044.** 60. **1045.** Не можуть. **1047.** 17. **1048.** 6. **1049.** 11. **1050.** 13. **1051.** 172. **1052.** 24010000. **1053.** –1; 0; 1; 2 або 0; 0; 0; 0. **1054.** $a = k(k-1)$, де k — натуральне число. **1055.** $-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$ (якщо $a = \frac{2}{27}$). **1056.** $r = 0$, $p = 0$. *Вказівка.* Якщо $a - 1$, a, $a + 1$ — шукані корені, то має місце тотожність $(x-(a-1))(x-a)(x-(a+1)) = x^3 + px^2 - x + r$. **1057.** 3, 6, 12. **1058.** 1. **1059.** 42. **1060.** $\frac{4}{9}$, $\frac{52}{9}$, $\frac{676}{9}$ або 4, 20, 100. **1062.** 744 сторінки. **1064.** Ні. **1066.** Так.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

Василь Ростиславович Кравчук
Марія Василівна Підручна
Галина Михайлівна Янченко

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (наказ №56 від 02.02.2009 року)

Редактори: *Ярослав Гап'юк, Ярослав Гринчишин, Сергій Мартинюк*
Літературне редагування *Людмили Олійник*
Обкладинка *Світлани Демчак*

Підписано до друку 10.05.2009. Формат 60×90/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. 16 ум. др. арк., 15,97 обл.-вид. арк. Тираж 118533
Замовлення №09-182.

Редакція газети «Підручники і посібники». Свідоцтво ТР 189 від 10.01.96.
46010, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел. 8-(0352)-43-10-31, 43-15-15, 43-10-21.
Факс 8-(0352)-43-10-31. E-mail: pp@pp.utel.net.ua
www.pp.unel.net.ua

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Степінь з цілим показником

$a^n = \underbrace{aa...a}_{n}$; $\quad a^0 = 1 \ (a \neq 0)$; $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \ (a \neq 0)$, n — натуральне число.

Властивості степеня з цілим показником

$a^m a^n = a^{m+n}$; $\qquad (ab)^n = a^n b^n$;

$a^m : a^n = a^{m-n}$; $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

$(a^m)^n = a^{mn}$;

($a \neq 0$, $b \neq 0$, m і n — цілі числа.)

Формули скороченого множення

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2;$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $\qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $\qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$; $\qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

Властивості арифметичного квадратного кореня

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \ (a \geq 0, b \geq 0)$; $\qquad \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \ (a \geq 0, b > 0)$;

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \ (a \geq 0)$; $\qquad \sqrt{a^2} = |a|$.

Формула коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{де } D = b^2 - 4ac.$$

Теорема Вієта

Якщо x_1 та x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Розклад квадратного тричлена на множники

Якщо x_1 та x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Властивості числових нерівностей

Якщо $a < b$, то $b > a$.

Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Якщо $a < b$ і c — будь-яке число, то $a + c < b + c$.

Якщо $a < b$ і c — додатне число, то $ac < bc$.

Якщо $a < b$ і c — від'ємне число, то $ac > bc$.

Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Якщо $a < b$ і $c < d$, де a, b, c і d — додатні числа, то $ac < bd$.

Стандартні нерівності

$a + \frac{1}{a} \geq 2$, де $a > 0$;

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, де $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Схеми оцінки суми, різниці, добутку та частки

$$
\begin{array}{r}
a < x < b \\
+\;\; c < y < d \\
\hline
a + c < x + y < b + d
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
a < x < b \\
-\;\; c < y < d \\
\hline
a - d < x - y < b - c
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
a < x < b \\
\times\;\; c < y < d \\
\hline
ac < xy < bd
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
a < x < b \\
:\;\; c < y < d \\
\hline
\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c}
\end{array}
$$

$(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0)$ $\qquad$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0)$

Квадратична функція

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

$$x_{в.} = -\frac{b}{2a}, \quad y_{в.} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad \text{або} \quad y_{в.} = ax_{в.}^2 + bx_{в.} + c.$$

Прогресії

Арифметична прогресія (a_n):

$$d = a_{n+1} - a_n; \qquad a_n = a_1 + (n-1)d; \qquad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2};$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \qquad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

(a_1 — перший член; d — різниця; n — число членів; a_n — n-й член;
S_n — сума перших n членів.)

Геометрична прогресія (b_n):

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}; \qquad b_n = b_1 q^{n-1}; \qquad b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}; \qquad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

(b_1 — перший член; q — знаменник; n — число членів; b_n — n-й член;
S_n — сума перших n членів.)

Нескінченна геометрична прогресія (b_n) зі знаменником $|q| < 1$:

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

(S — сума нескінченної геометричної прогресії.)

Формула складних відсотків

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

(A_0 — початковий капітал, покладений у банк під p% річних;
A_n — нарощений капітал за n років.)

Імовірність випадкової події

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

(n — загальна кількість рівноможливих випадків,
m — число випадків, які сприяють події A.)