А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. Б. Полонский
М. С. Якир

11

АЛГЕБРА

АКАДЕМИЧЕСКИЙ УРОВЕНЬ
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ГІМНАЗІЯ

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721
М52

Рекомендовано
Министерством образования и науки, молодежи и спорта Украины
(приказ от 16.03.2011 № 235)

Научную экспертизу проводил
Институт математики Национальной академии наук Украины

Психолого-педагогическую экспертизу проводил
Институт педагогики
Национальной академии педагогических наук Украины

Це видання — підручник з алгебри і початків аналізу для учнів 11 класів, які навчаються за програмою академічного або профільного рівня. Книга містить увесь необхідний теоретичний матеріал, передбачений державною програмою. Цей матеріал супроводжується великою кількістю розв'язаних прикладів типових задач. Книга містить також обширний дидактичний матеріал. Для більшості вправ у підручнику наведено відповіді або вказівки.

Підручник адресовано учням загальноосвітніх навчальних закладів, учителям математики, керівникам математичних гуртків, студентам.

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра. 11 класс : учебник для общеобразоват. учеб. заведений : академ. уровень, профил. уровень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский, М. С. Якир. — Х. : Гимназия, 2011. — 431 с. : ил.
ISBN 978-966-474-176-4.

Это издание — учебник по алгебре и началам анализа для учеников 11 классов, обучающихся по программе академического или профильного уровня. В книге предоставлен весь необходимый теоретический материал, предусмотренный государственной программой. Этот материал сопровождается большим количеством решенных примеров типовых задач. Книга содержит также обширный дидактический материал. К большинству упражнений в учебнике приведены ответы или указания.

Учебник адресован учащимся общеобразовательных учебных заведений, учителям математики, руководителям математических кружков, студентам.

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721

ISBN 978-966-474-176-4

От авторов

ДОРОГИЕ ОДИННАДЦАТИКЛАССНИКИ!

В этом учебном году вы оканчиваете школу, и мы надеемся, что полученные знания станут для вас надежной основой в освоении будущей профессии. Надеемся, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках. Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Текст учебника разделен на шесть параграфов, каждый из которых состоит из пунктов. В пунктах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным *шрифтом***. Также обращайте внимание на слова, напечатанные *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому пункту подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи. Свои знания можно проверить, выполняя задания в тестовой форме из рубрики «Проверь себя».

Обратим внимание на то, что текст учебника структурирован согласно двум уровням — академическому и профильному. Текст, обязательный для изучения только учащимися классов профильного уровня, отмечен пунктирной линией . Соответствующие части учебника отделены также пиктограммами . Учащиеся классов академического уровня могут использовать этот материал для самообразования. Подчеркнем, что для учащихся классов профильного уровня обязательным для изучения является весь учебный материал книги.

Кроме учебного материала, в учебнике вы сможете найти рассказы об истории математики, в частности о деятельности выдающихся украинских математиков.

Желаем успехов!

УВАЖАЕМЫЕ КОЛЛЕГИ!

Эта книга является двухуровневым учебником, текст которого предусматривает возможность организации учебного процесса в классах как академического, так и профильного уровней изучения математики.

Государственная программа по алгебре и началам анализа профильного уровня по сравнению с соответствующей программой академического уровня предусматривает изучение более широкого перечня учебных тем, а также существенно более высокие требования к учебным достижениям учащихся.

В учебнике части текста теоретического материала и упражнений, соответствующие требованиям программы только профильного уровня, отмечены пиктограммой  и пунктирной линией.
Учителя, работающие в классах академического уровня, могут использовать этот материал для формирования индивидуальных заданий, а также для организации работы математического кружка и факультативных занятий.

Красным цветом отмечены номера задач, которые рекомендуются для домашней работы, **синим** цветом — номера задач, которые с учетом индивидуальных особенностей учащихся класса на усмотрение учителя можно решать устно.

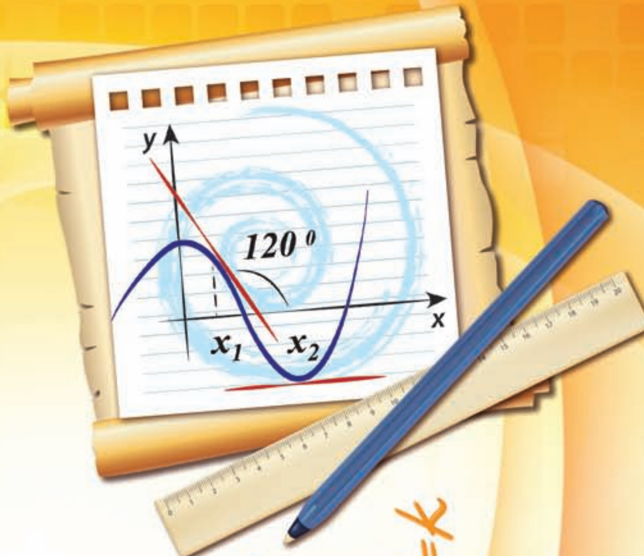
Все задачи классифицированы в соответствии с их сложностью. Уровни сложности соответствуют требованиям программы для классов с соответствующим уровнем изучения математики.

Условные обозначения

n°	задания, соответствующие начальному и среднему уровням учебных достижений;
$n^{\bullet}$	задания, соответствующие достаточному уровню учебных достижений;
$n^{\bullet\bullet}$	задания, соответствующие высокому уровню учебных достижений;
n^{*}	задачи для математических кружков и факультативов;
⊙	доказательство теоремы, соответствующее достаточному уровню учебных достижений;
⊙⊙	доказательство теоремы, соответствующее высокому уровню учебных достижений;
▲	окончание доказательства теоремы;
●	окончание решения примера;
	задачи, результат которых может быть использован при решении других задач;
	материал, соответствующий программе профильного уровня;
	рубрика «Когда сделаны уроки».

§ 1

Производная и ее применение



1. Предел числовой последовательности

Рассмотрим последовательность (a_n), заданную формулой n-го члена $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (также говорят, что эта последовательность задана **формулой общего члена**).

Выпишем несколько первых членов этой последовательности:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \frac{7}{8},\ \frac{8}{9},\ \dots .$$

Если члены этой последовательности изображать точками на координатной прямой, то эти точки будут располагаться все ближе и ближе к точке с координатой 1 (рис. 1.1).

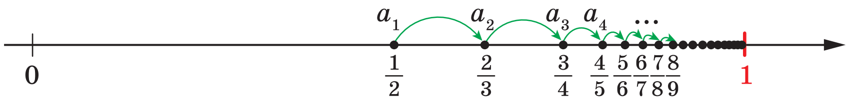


Рис. 1.1

Иными словами, значение выражения $|a_n - 1|$ с увеличением номера n становится все меньшим и меньшим. Имеем:

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Тогда, например, решив неравенство $\dfrac{1}{n+1} < 0{,}1$, устанавливаем, что $|a_n - 1| < 0{,}1$ при $n \geqslant 10$, а решив неравенство $\dfrac{1}{n+1} < 0{,}0001$, устанавливаем, что $|a_n - 1| < 0{,}0001$ при $n \geqslant 10\,000$, и т. д. Вообще, начиная с некоторого номера n_0, значение выражения $|a_n - 1|$ становится *меньше любого наперед заданного положительного числа* ε (читают «эпсилон»). Найти n_0 можно, решив неравенство $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$.

В этом случае говорят, что число 1 является **пределом последовательности** (a_n). Говорят также, что с увеличением номера n члены последовательности (a_n) **стремятся** к числу 1.

Рассмотрим последовательность (b_n), заданную формулой n-го члена $b_n = \dfrac{1}{n}$.

Выпишем несколько первых членов этой последовательности:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \ldots .$$

С увеличением номера n члены последовательности стремятся к числу 0 (рис. 1.2).

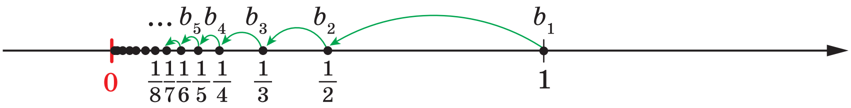


Рис. 1.2

Это означает, что для любого положительного числа ε можно указать такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|b_n - 0| < \varepsilon$. Поскольку $|b_n - 0| = \frac{1}{n}$, то номер n_0 можно найти, решив неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Определение. Число a называют пределом последовательности (a_n), если для любого положительного числа ε существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (тут *lim* — это начальные буквы французского слова *limite* — предел). Для примеров, рассмотренных выше, можно записать: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Последовательность, имеющую предел, называют **сходящейся.**

Можно доказать, что каждая сходящаяся последовательность имеет только один предел.

ПРИМЕР 1 Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 4$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Решение. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$. Действительно, $|a_n - 4| = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому для произвольного положительного числа ε и для всех $n \geqslant 1$ выполняется неравенство $|a_n - 4| < \varepsilon$. Отсюда $n_0 = 1$.

Ответ: 4.

Последовательность (a_n), все члены которой равны, называют **стационарной**. Аналогично примеру 1 можно доказать, что *каждая стационарная последовательность* (a_n), *где* $a_n = c$, *имеет предел, равный числу* c.

Понятие предела последовательности имеет простую геометрическую интерпретацию[1].

Неравенство вида $|a_n - a| < \varepsilon$ равносильно неравенствам $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, то есть

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Это означает, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0, начиная с которого все члены последовательности принадлежат интервалу $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$. Иными словами, каким бы малым не был интервал $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, члены последовательности, сходящейся к числу a, рано или поздно попадут в этот интервал и уже никогда не выйдут за его границы, то есть *вне указанного интервала может находиться только конечное количество членов последовательности* (a_n).

Последовательность, не имеющую предела, называют **расходящейся**.

Например, последовательность (c_n), заданная формулой $c_n = n$, является расходящейся, так как любой интервал $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$ содержит только конечное количество членов последовательности (a_n) (рис. 1.3).

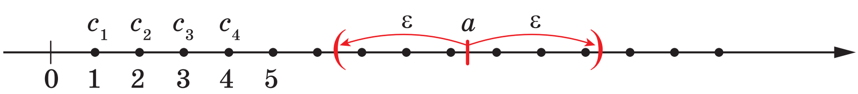


Рис. 1.3

Расходящейся является и последовательность (d_n), заданная формулой $d_n = (-1)^n$. Действительно, предположим, что последовательность (d_n) является сходящейся и $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = a$. Тогда для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ вне интервала $\left(a - \frac{1}{2};\ a + \frac{1}{2}\right)$, длина которого равна 1, должно находиться только конечное количество

[1] Обращаясь к геометрической интерпретации, промежуток вида $(a;\ b)$ часто называют **интервалом**, а промежуток вида $[a;\ b]$ — **отрезком.**

членов последовательности (d_n). Выписав несколько первых членов последовательности (d_n):

$$d_1 = -1,\ d_2 = 1,\ d_3 = -1,\ d_4 = 1,\ \ldots,$$

видим, что ни при каком a интервал $\left(a-\frac{1}{2};\, a+\frac{1}{2}\right)$ не может содержать числа -1 и 1 одновременно (рис. 1.4). Это означает, что вне интервала $\left(a-\frac{1}{2};\, a+\frac{1}{2}\right)$ находится бесконечное количество членов последовательности: или d_1, d_3, d_5, ..., или d_2, d_4, d_6, ...

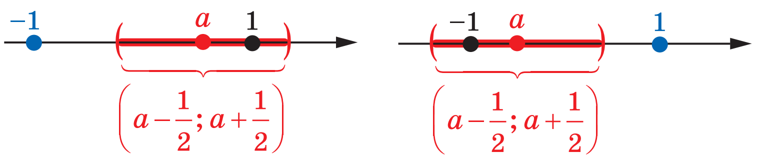


Рис. 1.4

Следовательно, (d_n) — расходящаяся последовательность.

Находить пределы числовых последовательностей помогает следующая теорема.

Теорема 1.1 (об арифметических действиях с пределами последовательностей). ***Если последовательности (a_n) и (b_n) — сходящиеся, то последовательности $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, (a_nb_n) также являются сходящимися, причем***

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Если, кроме этого, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ и $b_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то сходящейся также является последовательность $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, причем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Доказательство теоремы проведем только для последовательности $(a_n + b_n)$. Для последовательностей $(a_n - b_n)$, $(a_n b_n)$ и $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ с доказательством теоремы вы сможете ознакомиться, например, по учебнику «Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса с углубленным изучением математики»[1], п. 46.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0', что для всех $n \geqslant n_0'$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, то есть

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon. \qquad (1)$$

Аналогично, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0'', что для всех $n \geqslant n_0''$ выполняется неравенство $|b_n - b| < \varepsilon$, то есть

$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon. \qquad (2)$$

Выберем такой номер n_0, что $n_0 \geqslant n_0'$ и $n_0 \geqslant n_0''$. Тогда для всех $n \geqslant n_0$ одновременно выполняются неравенства (1) и (2). Сложив эти неравенства, получим

$$(a + b) - 2\varepsilon < a_n + b_n < (a + b) + 2\varepsilon,$$
$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\varepsilon.$$

Если для любого числа $\varepsilon_1 > 0$ выбрать $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$, то последнее неравенство можно переписать в виде

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon_1. \qquad (3)$$

Таким образом, для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство (3). Это значит, что последовательность $(a_n + b_n)$ является сходящейся и

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n. \ \blacktriangle$$

[1] А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский, М. С. Якир. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса с углубленным изучением математики. — Харьков: Гимназия, 2010. Далее будем ссылаться на этот учебник «Алгебра-10 с углубленным изучением математики».

ПРИМЕР 2 Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n}$.

Решение. Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{n}+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$.

Последовательность с общим членом $a_n=\dfrac{2n+1}{n}$ представлена в виде суммы двух сходящихся последовательностей с общими членами $x_n = 2$ и $y_n=\dfrac{1}{n}$. Тогда можно записать:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=2+0=2.$$

ПРИМЕР 3 Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+3}{11-4n}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{5n+3}{11-4n}$ на n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{11-4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\frac{11}{n}-4}.$$

В числителе и знаменателе полученной дроби записаны общие члены сходящихся последовательностей. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\frac{11}{n}-4}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{11}{n}-4\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{11}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}4}=\frac{5+0}{0-4}=-\frac{5}{4}.$$

Теорема 1.2. ***Если последовательность*** (a_n) ***является сходящейся и*** $a_n \geqslant 0$ **при всех** $n \in \mathbb{N}$, ***то последовательность с общим членом*** $\sqrt{a_n}$ ***также является сходящейся, причем*** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$.

С доказательством теоремы вы сможете ознакомиться, например, по учебнику «Алгебра-10 с углубленным изучением математики», п. 45.

ПРИМЕР 4 Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-2n)$.

Решение. Проведем тождественные преобразования:

$$\sqrt{4n^2+n}-2n=\frac{\left(\sqrt{4n^2+n}+2n\right)\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)}{\sqrt{4n^2+n}+2n}=$$

$$=\frac{(4n^2+n)-4n^2}{\sqrt{4n^2+n}+2n}=\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}=\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}.$$

Теперь получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Упражнения

1.1.° Укажите (без обоснования), какое число является пределом последовательности с общим членом x_n:

1) $x_n=3+\frac{1}{n}$; 2) $x_n=\frac{7}{\sqrt{n+1}}$; 3) $x_n=\frac{3+\frac{1}{n}}{5-\frac{2}{n}}$; 4) $x_n=\frac{\sin n}{n^5}$.

1.2.° Укажите (без обоснования), какое число является пределом последовательности с общим членом x_n:

1) $x_n=-\frac{1}{n}+4$; 2) $x_n=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$; 3) $x_n=\cos n-\cos n$.

1.3.• Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5}{n+4}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1000n}{n^2+1}$.

1.4.• Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-4}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100n}{n^2+2n}$.

1.5.• Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+15}{2n^2-n+100}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3n^2+44}{n^2+5n-7}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^5+5n^4+3n-2}{9n^5+n^3-1}$.

1.6.• Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-2n^2+7n+1}{n^2+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-n}{n^2+3n-8}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4-n^3-n^2-1}{-3n^4+n^2+12n}$.

1.7.• Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{3-2n}\cdot\dfrac{n+3}{4n+5}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n(3n-1)(n+4)}{(4+5n)(2n+1)(n+1)}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n-2)(2n+3)}{(4n-1)(n+3)(5n-2)}$.

1.8.• Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)(3n-1)}{2n^2-3}$.

1.9.• Приведите примеры трех последовательностей, сходящихся к числу: 1) 3; 2) $-\sqrt{2}$.

1.10.• Для каждого ли числа a существует последовательность, сходящаяся к a?

1.11.•• Учитель предложил вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} 1$. Ученик Вася Ошибочкин решил задачу так:

$$\lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{n\ \text{слагаемых}} =$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\ldots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{n\ \text{слагаемых}} = \underbrace{0+0+\ldots+0}_{n\ \text{слагаемых}} = 0.$$

Согласны ли вы с решением Васи?

1.12.• Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{n+3}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2+n^2}}$.

1.13.$^{\bullet}$ Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{4n^2+1}}$.

1.14.$^{\bullet\bullet}$ Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+2n^2}-\sqrt{n^3}}{\sqrt{n+1}}$.

1.15.$^{\bullet\bullet}$ Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+3}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+3n}\right)$.

1.16.$^{\bullet\bullet}$ Пусть при любом $\varepsilon > 0$ интервал $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$ содержит бесконечно много членов последовательности (a_n). Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$?

1.17.$^{\bullet\bullet}$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Могут ли в этой последовательности:

1) быть члены, большие 1 000 000;
2) все члены быть отрицательными?

1.18.$^{\bullet\bullet}$ Из сходящейся последовательности удалили все члены с четными номерами. Является ли полученная последовательность сходящейся?

1.19.$^{\bullet\bullet}$ В сходящейся последовательности изменили 5 первых членов. Останется ли последовательность сходящейся? Может ли измениться предел последовательности?

1.20.$^{\bullet\bullet}$ Последовательность $(\sin a_n)$ является сходящейся. Верно ли, что последовательность (a_n) также является сходящейся?

1.21.$^{\bullet\bullet}$ Известно, что последовательность $(|a_n|)$ является сходящейся. Верно ли, что последовательность (a_n) также является сходящейся?

1.22.$^{\bullet\bullet}$ Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = a^2$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{15} = a^{15}$.

1.23.$^{\bullet\bullet}$ Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Найдите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n a_{n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2 a_n + a_{n+2}}{(a_n - n)^2 + 1}$.

1.24.•• Последовательность (a_n) стремится к числу 3. Найдите предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1})(a_n - 2)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+3}-1}{a_n^2+5}$.

2. Представление о пределе функции в точке и о непрерывности функции в точке

Рассмотрим функцию $f(x) = x + 1$ и точку $x_0 = 1$. Если значения аргумента x стремятся к числу 1 (обозначают $x \to 1$), то соответствующие значения функции f стремятся к числу 2 (обозначают $f(x) \to 2$) (рис. 2.1).

Иными словами: если значения аргумента выбирать все ближе и ближе к числу 1, то соответствующие значения функции f будут все меньше и меньше отличаться от числа 2.

В этом случае говорят, что число 2 является **пределом функции f в точке** 1, и записывают

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

или

$$\lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Также используют такую запись: $f(x) \to 2$ при $x \to 1$.

Например, с помощью рисунка 2.2 можно сделать вывод, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x = 1$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\sin x = -1$.

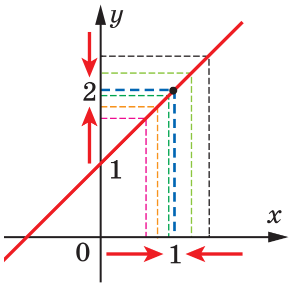


Рис. 2.1

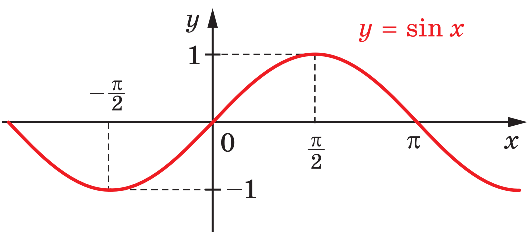


Рис. 2.2

Если обратиться к рисунку 2.3, то можно записать:

$$\lim_{x\to 1}\arccos x = 0, \quad \lim_{x\to -1}\arccos x = \pi.$$

На рисунке 2.4 изображен график функции $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. Эта функция не определена в точке $x_0 = 1$, а во всех других точках совпадает с функцией $y = x + 1$ (сравните рис. 2.1 и рис. 2.4). Однако если значения аргумента x, где $x \neq 1$, стремятся к числу 1, то соответствующие значения функции $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ стремятся к числу 2, то есть $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

Этот пример показывает, что функция может быть не определена в точке, но иметь предел в этой точке.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$. При $x > 0$ получаем $f(x) = 1$, при $x < 0$ получаем $f(x) = -1$. График функции f изображен на рисунке 2.5.

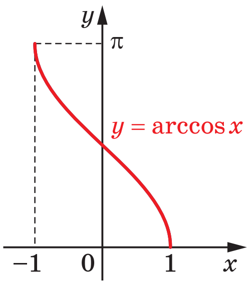


Рис. 2.3

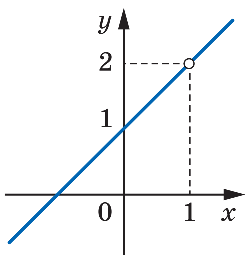


Рис. 2.4

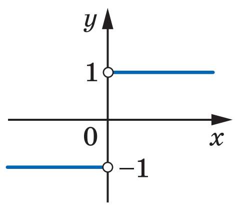


Рис. 2.5

Если значения аргумента x, где $x \neq 0$, стремятся к 0, то невозможно утверждать, что значения функции f стремятся к какому-нибудь определенному числу. Действительно, если значения аргумента стремятся к нулю, оставаясь отрицательными, то соответствующие значения функции стремятся к -1, а если значения аргумента стремятся к нулю, оставаясь положительными, то соответствующие значения функции стремятся к 1.

Поэтому функция $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ в точке $x_0 = 0$ не имеет предела.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (рис. 2.6). Если значения x, где $x \neq 0$, стремятся к 0, то соответствующие значения функции становятся все бо́льшими и бо́льшими. Поэтому не существует числа, к которому стремятся значения функции f при условии, что значения аргумента стремятся к 0.

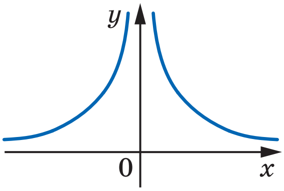


Рис. 2.6

Следовательно, функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

Мы привели примеры двух функций, которые не определены в некоторой точке и не имеют предела в этой точке.

Ошибочным было бы считать, что если функция определена в некоторой точке x_0, то она обязательно имеет предел в этой точке. На рисунке 2.7 изображен график функции f, которая определена в точке x_0, но не имеет предела в этой точке.

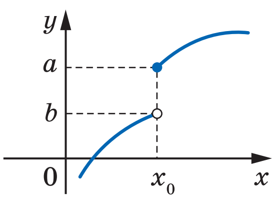


Рис. 2.7

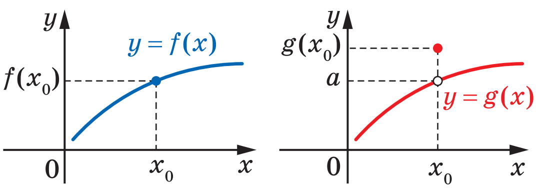


Рис. 2.8

На рисунке 2.8 изображены графики функций f и g, которые определены в точке x_0 и имеют предел в этой точке. Однако поведение этих функций в точке x_0 существенно различается. График функции g, в отличие от графика функции f, в точке x_0 имеет *разрыв*. Такое различие поведения функций f и g в точке x_0 можно охарактеризовать с помощью предела.

Для функции g имеем: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$. Для функции f можно записать: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Иными словами: *предел функции f в точке x_0 равен значению функции в этой точке.*

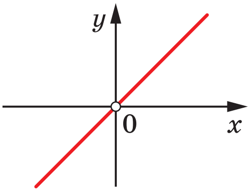


Рис. 2.9

В таком случае говорят, что **функция f является непрерывной в точке x_0.**

Из равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ следует, что если функция f не имеет предела в точке x_0 или не определена в этой точке, то она не может быть непрерывной в точке x_0.

Например, функция, график которой изображен на рисунке 2.7, не является непрерывной в точке x_0. Также не является непрерывной в точке $x_0 = 0$ функция $y = \frac{x^2}{x}$ (рис. 2.9).

Если функция f является непрерывной в каждой точке некоторого множества $M \subset \mathbb{R}$, то говорят, что она **непрерывна на множестве M.**

Например, функция $y = x^2$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а функция $y = \frac{1}{x^2}$ является непрерывной на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Если функция f является непрерывной на $D(f)$, то такую функцию называют **непрерывной.**

Упражнения

2.1.° Построив график функции f, выясните, имеет ли функция f предел в точке x_0:

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 2$;
5) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$;
6) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$;
7) $f(x) = k$, где k — некоторое число, $x_0 = 3$;
8) $f(x) = \frac{|x - 2|}{2 - x}$, $x_0 = 2$.

2.2.° Построив график функции f, выясните, имеет ли функция f предел в точке x_0:

1) $f(x) = 2x + 1$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = 2x + 1$, $x_0 = -2$;

3) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x_0=-1$; 5) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$, $x_0=2$;

4) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x_0=-3$; 6) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$, $x_0=1$.

2.3.° С помощью графика функции f (рис. 2.10) выясните, имеет ли функция f предел в точке x_0:

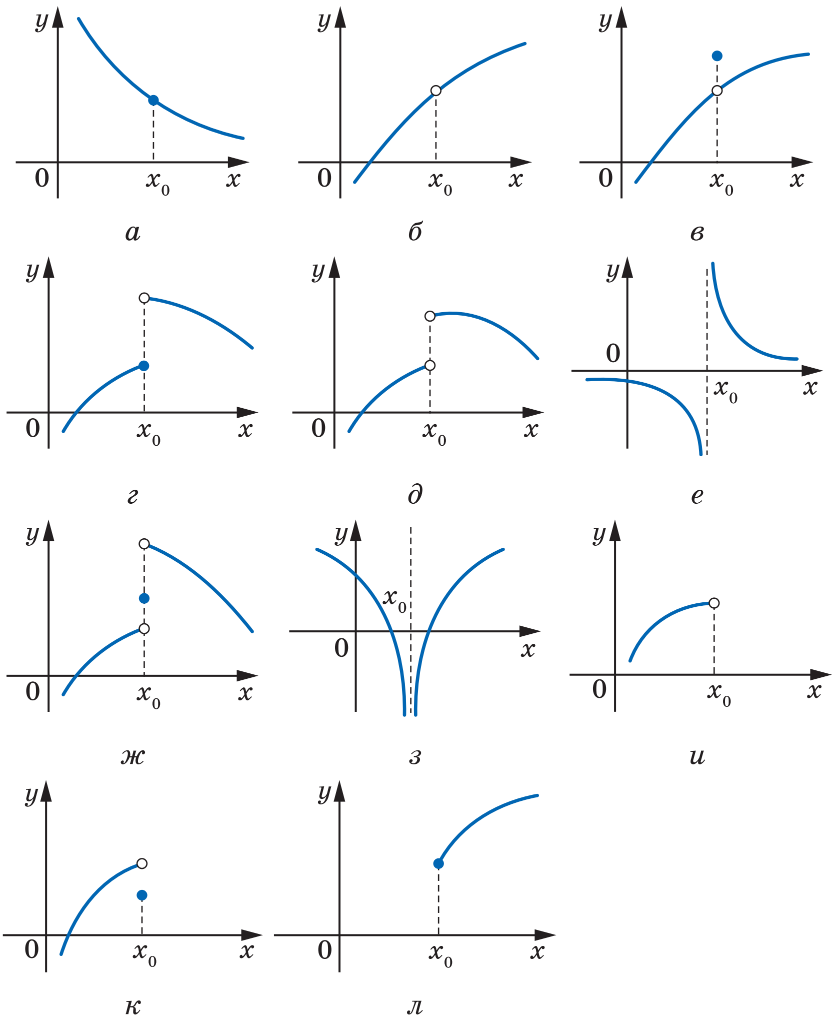


Рис. 2.10

2.4.° На рисунке 2.11 изображен график функции $y = f(x)$.

1) Чему равно значение функции f в точке $x_0 = 1$?

2) Существует ли предел функции f в точке $x_0 = 1$? В случае утвердительного ответа запишите с использованием соответствующей символики, чему он равен.

3) Существует ли предел функции f в точке $x_0 = 2$? В случае утвердительного ответа запишите с использованием соответствующей символики, чему он равен.

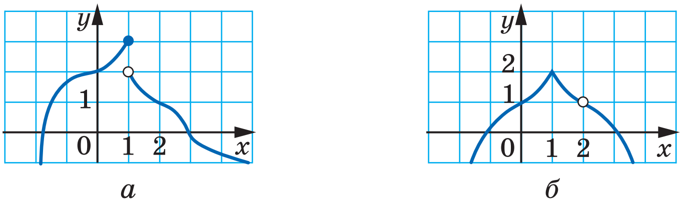


Рис. 2.11

2.5.° Значения аргумента функции f стремятся к числу x_0. Выясните, к какому числу стремятся соответствующие значения функции f:

1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = x + 1$, $x_0 = -2$;

3) $f(x) = \dfrac{x}{x}$, $x_0 = 0$;

4) $f(x) = k$, $x_0 = a$, где k и a — некоторые числа.

2.6.° Выясните, является ли непрерывной функция f в точке x_0:

1) $f(x) = x^2 - 1$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;

3) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = \sqrt{-x}$, $x_0 = -1$.

2.7.• Выясните, является ли непрерывной функция f в точке x_0:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 2, \\ x + 2, & \text{если } x \geqslant 2, \end{cases}$ $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x}, \text{ если } x \neq 0, \\ 1, \text{ если } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0;$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x > 1, \\ x - 2, \text{ если } x \leqslant 1, \end{cases}$ $x_0 = 1.$

2.8.• Является ли непрерывной функция f в точке x_0:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x}, \text{ если } x < -2, \\ x - 1, \text{ если } x \geqslant -2, \end{cases}$ $x_0 = -2;$

2) $f(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2, \text{ если } x \leqslant -1, \\ x + 3, \text{ если } x > -1, \end{cases}$ $x_0 = -1?$

Готовимся к изучению новой темы

2.9. Чему равен угловой коэффициент прямой:

1) $y = 2x - 7;$ 3) $y = x + 10;$ 5) $y = 4;$
2) $y = -3x;$ 4) $y = 5 - x;$ 6) $3x - 2y = 4?$

2.10. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку A $(-3;\ 7)$ и угловой коэффициент которой равен: 1) 4; 2) -3; 3) 0.

2.11. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс прямая:

1) $y = x - 6;$ 2) $y = 1 - x;$ 3) $y = 3?$

2.12. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку A $(2;\ 6)$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол: 1) $60°$; 2) $120°$.

3. Определение предела функции в точке

В предыдущем пункте вы получили представление о пределе функции в точке. Перейдем к формированию строгого определения.

На рисунке 3.1 изображен график функции f и на осях абсцисс и ординат отмечены соответственно точки x_0 и a. Заметим, что $f(x_0) \neq a$.

Пусть ε — некоторое положительное число. На оси ординат рассмотрим интервал $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$. На оси абсцисс ему соответствует такой интервал I, содержащий точку x_0, что для любого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, соответствующие значения функции f принадлежат промежутку $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, то есть выполняются неравенства $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$. Иными словами, для любого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

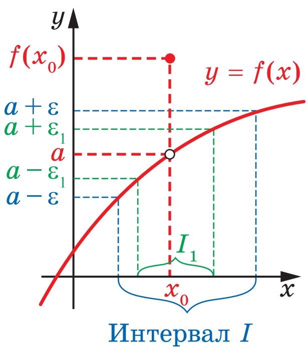


Рис. 3.1

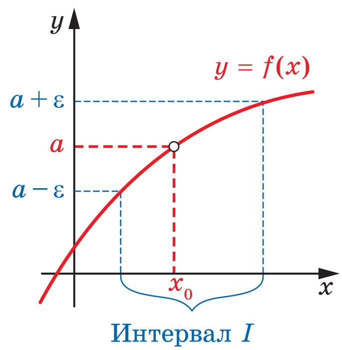


Рис. 3.2

Сузим промежуток на оси ординат, то есть рассмотрим интервал $(a - \varepsilon_1;\ a + \varepsilon_1)$, где $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Тогда для числа ε_1 можно указать такой интервал I_1 оси абсцисс, содержащий точку x_0, что для любого $x \in I_1 \cap D(f)$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon_1$ (рис. 3.1).

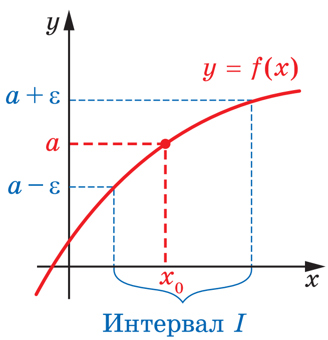


Рис. 3.3

На рисунке 3.2 изображен график такой функции f, что $x_0 \notin D(f)$. Рисунок 3.3 соответствует функции f, для которой $f(x_0) = a$.

В каждом из случаев, изображенных на рисунках 3.1–3.3, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой интервал I, содержащий точку x_0, что для всех $x \in I \cap D(f)$ и $x \neq x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Приведенные соображения позволяют дать такое определение предела функции f в точке x_0.

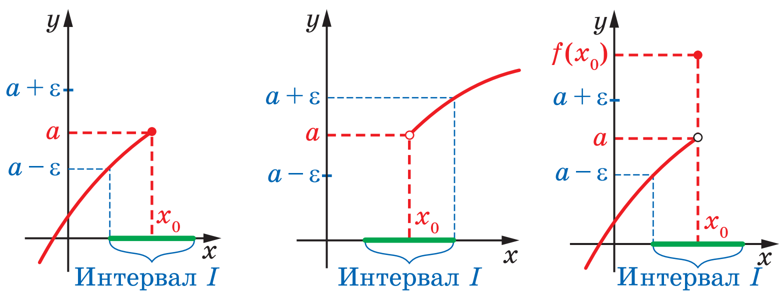
Определение. **Число a называют пределом функции f в точке x_0, если для любого положительного числа ε существует такой интервал I, содержащий точку x_0, что для любого $x \in I \cap D(f)$ и $x \neq x_0$ выполняется неравенство**

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Заметим, что предел функции в точке x_0 характеризует значения функции вокруг точки x_0, в то время как поведение функции в самой точке x_0 не влияет на значение предела (обратите внимание на условие $x \neq x_0$ в определении предела). Поэтому для каждой из функций f, графики которых изображены на рис. 3.1–3.3, можно записать

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

На рисунке 3.4 точка x_0 такова, что слева (справа) от нее нет точек, принадлежащих области определения функции f.



а *б* *в*

Рис. 3.4

В каждом из случаев, изображенных на этом рисунке, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой интервал I, содержащий точку x_0, что для всех $x \in I \cap D(f)$ и $x \neq x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Это означает, что число a является пределом функции f в точке x_0.

Если интервал I содержит точку x_0, то существует такое положительное число δ, что промежуток $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$

принадлежит I (рис. 3.5). Интервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ называют **δ-окрестностью точки** x_0. Объединение интервалов $(x_0 - \delta;\ x_0) \cup (x_0;\ x_0 + \delta)$ называют **проколотой δ-окрестностью точки** x_0 (рис. 3.6).

Очевидно, что при $\delta > 0$ множеством решений неравенства $|x - x_0| < \delta$ является δ-окрестность точки x_0, а множеством решений двойного неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$ является проколотая δ-окрестность точки x_0.

Тогда, если точка x_0 принадлежит интервалу I, то этот интервал содержит некоторую проколотую δ-окрестность точки x_0, то есть множество, являющееся решением двойного неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$, где δ — некоторое положительное число (рис. 3.7).

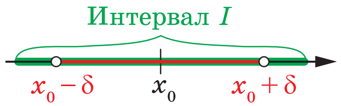


Рис. 3.5

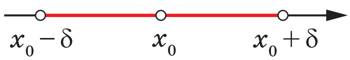


Рис. 3.6

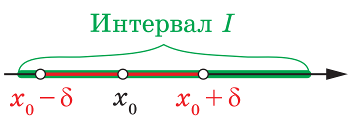


Рис. 3.7

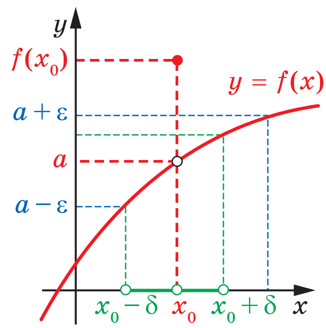


Рис. 3.8

Теперь приведенное определение предела функции f в точке можно переформулировать так.

Определение. Число a называют пределом функции f в точке x_0, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех $x \in D(f)$ из неравенств $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Рисунок 3.8 иллюстрирует это определение.

Замечание. Если существует проколотая δ-окрестность точки x_0, в которой функция не определена (рис. 3.9), то предел функции в точке x_0 не определяют.

ПРИМЕР 1 С помощью определения предела функции в точке докажите, что $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$.

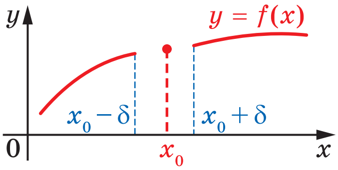


Рис. 3.9

Решение. Для каждого положительного числа ε рассмотрим неравенство $|(2x+3)-5|<\varepsilon$. Преобразовав его, запишем $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$. Полученное неравенство подсказывает, каким образом для данного $\varepsilon>0$ можно найти подходящее число $\delta>0$.

Пусть $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда из условия $0<|x-1|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ следует, что $|2x-2|<\varepsilon$. Отсюда $|(2x+3)-5|<\varepsilon$. Сказанное означает, что число $a=5$ является пределом функции $y=2x+3$ в точке $x_0=1$. ●

ПРИМЕР 2 Докажите, что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{9x^2-1}{3x-1}=2$.

Решение. Функция $y=\frac{9x^2-1}{3x-1}$ при $x\neq\frac{1}{3}$ совпадает с функцией $y=3x+1$. А поскольку значение предела функции в точке не зависит от того, определена ли функция в этой точке, то достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}(3x+1)=2$.

Рассмотрим неравенство $|(3x+1)-2|<\varepsilon$, где ε — некоторое положительное число. После преобразований получаем $\left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$. Теперь понятно, как можно выбрать δ. Возьмем $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$. Тогда из условия $0<\left|x-\frac{1}{3}\right|<\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ следует, что $|3x-1|<\varepsilon$. Отсюда $|(3x+1)-2|<\varepsilon$. Тем самым доказано, что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}(3x+1)=2$. ●

ПРИМЕР 3 Докажите, что функция $f(x)=\frac{|x|}{x}$ не имеет предела в точке $x_0=0$.

Решение. Предположим, что предел функции f в точке $x_0 = 0$ существует и равен a. Покажем, что, например, для $\varepsilon = 1$ невозможно подобрать такое $\delta > 0$, чтобы из неравенств $0 < |x - 0| < \delta$ следовало неравенство $\left|\frac{|x|}{x} - a\right| < 1$.

Если $0 < x < \delta$, то неравенство $\left|\frac{|x|}{x} - a\right| < 1$ становится таким: $|1 - a| < 1$. Отсюда $0 < a < 2$.

Если $-\delta < x < 0$, то неравенство $\left|\frac{|x|}{x} - a\right| < 1$ становится таким: $|-1 - a| < 1$. Отсюда $-2 < a < 0$.

Поскольку не существует значений a, которые бы удовлетворяли каждому из неравенств $0 < a < 2$ и $-2 < a < 0$, то функция f в точке $x_0 = 0$ не имеет предела. ●

Упражнения

3.1.° С помощью определения предела функции в точке докажите равенство:

1) $\lim\limits_{x \to -1} (2x + 1) = -1$;
2) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$;
3) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = -5$.

3.2.° С помощью определения предела функции в точке докажите равенство:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 2) = 8$;
2) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$;
3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = -2$.

3.3.° Докажите, что $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, где c — некоторое число.

3.4.•• Докажите, что $\lim\limits_{x \to x_0} (kx + b) = kx_0 + b$.

3.5.•• Докажите, что функция $f(x) = \frac{x - 2}{|x - 2|}$ не имеет предела в точке $x_0 = 2$.

3.6.•• Докажите, что функция $f(x) = \frac{|x + 1|}{x + 1}$ не имеет предела в точке $x_0 = -1$.

4. Теорема об арифметических действиях с пределами функций в точке

Находить предел функции в точке с помощью определения предела — задача трудоемкая. Облегчить процесс поиска предела позволяет теорема об арифметических действиях с пределами функций[1].

Теорема 4.1 (об арифметических действиях с пределами функций). ***Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют предел в точке x_0, то функции $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)\,g(x)$ также имеют предел в точке x_0, причем***

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)\,g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Если, кроме этого, предел функции $y = g(x)$ в точке x_0 отличен от нуля, то функция $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ также имеет предел в точке x_0 и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

С доказательством теоремы вы можете ознакомиться, например, по учебнику «Алгебра. Учебник для 11 класса с углубленным изучением математики»[2], п. 2.

Фактически теорема 4.1 состоит из четырех теорем, которые называют теоремами о пределе суммы, пределе разности, пределе произведения и пределе частного.

---

[1] В теореме рассматриваются функции, которые определены в одних и тех же точках некоторой проколотой δ-окрестности точки x_0.

[2] А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский, М. С. Якир. Алгебра. Учебник для 11 класса с углубленным изучением математики. — Харьков: Гимназия, 2011. Далее будем ссылаться на этот учебник «Алгебра-11 с углубленным изучением математики».

Следствие. ***Если функция f имеет предел в точке x_0 и k — произвольная постоянная, то функция $y = kf(x)$ также имеет предел в точке x_0, причем***

$$\lim_{x \to x_0} kf(x) = k \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Справедливость следствия следует из теоремы о пределе произведения и ключевой задачи 3.3.

ПРИМЕР 1 Докажите, что $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$.

Решение. Из ключевой задачи 3.4 следует, что $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. Тогда, если функцию $y = x^2$ представить в виде $y = x \cdot x$, то можно применить теорему о пределе произведения. Имеем:

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = \lim_{x \to x_0} (x \cdot x) = \lim_{x \to x_0} x \cdot \lim_{x \to x_0} x = x_0^2. \; \bullet$$

ПРИМЕР 2 Найдите $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 4) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 - \lim\limits_{x \to 2} 4 = 2^2 - 4 = 0$, то нельзя применить теорему о пределе частного к функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$. Преобразуем выражение $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$.

Имеем:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x - 3}{x + 2},$$

где $x \neq 2$ и $x \neq -2$.

Рассмотрим функцию $g(x) = \dfrac{x - 3}{x + 2}$. Так как функции f и g отличаются только поведением в точке $x_0 = 2$, то $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} g(x)$. Используя теорему об арифметических действиях с пределами функций, получаем

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 3}{x + 2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(x - 3)}{\lim\limits_{x \to 2}(x + 2)} = \frac{2 - 3}{2 + 2} = -\frac{1}{4}. \; \bullet$$

ПРИМЕР 3 Найдите $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ если } x \neq \dfrac{1}{2}, \\ 3, \qquad \text{ если } x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим функцию $g(x) = x^2 - 2x$. Поскольку в любой проколотой δ-окрестности точки $x_0 = \dfrac{1}{2}$ функции f и g совпадают (рис. 4.1), то достаточно найти $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (x^2 - 2x)$. Используя теорему об арифметических действиях с пределами функций, запишем:

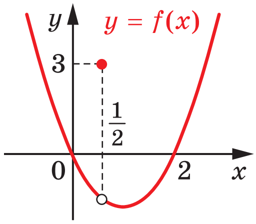


Рис. 4.1

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} (x^2 - 2x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} x^2 - \lim_{x \to \frac{1}{2}} 2x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Упражнения

4.1.° Найдите:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 - 3x - 1)$;
2) $\lim\limits_{x \to -1} x^4$;
3) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 3x - 2)$;
4) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x - 1}{3x - 2}$;
5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x^2 + 2x - 1}$;
6) $\lim\limits_{x \to -2} \left(x^2 - \dfrac{1}{x} + 2x - 3\right)$.

4.2.° Найдите:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 + 3x + 5)$;
2) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 3x^2 + 2x + 2)$;
3) $\lim\limits_{x \to -2} (2x^3 - 3x^2 + 6)$;
4) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{7x - 5}{10 + 2x}$;
5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$;
6) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + 1}{(x - 2)^{20}}$.

4.3.$^{\bullet}$ Найдите:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3-8}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^4-5x^2-12x-4}{x^2-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x+1}$.

4.4.$^{\bullet}$ Найдите:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^4-(1+4x)}{x^2+x^4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$.

4.5.$^{\bullet}$ Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{x^2-2x}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

4.6.$^{\bullet}$ Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{6}{x^2-9}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{2x^2-5x+2}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$.

4.7.$^{\bullet}$ Найдите $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2, & \text{если } x\neq 0,\\ -1, & \text{если } x=0.\end{cases}$

4.8.$^{\bullet}$ Найдите $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}-x^2+3x, & \text{если } x\neq 3,\\ 2, & \text{если } x=3.\end{cases}$

4.9.$^{\bullet\bullet}$ Найдите $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^m+1}{x^n+1}$, где m и n — нечетные натуральные числа.

4.10.$^{\bullet\bullet}$ Найдите $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, где m и n — натуральные числа.

5. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций

В пункте 2 вы получили представление о функциях, непрерывных в точке. Рассмотрим это понятие глубже и детальнее.

На рисунке 5.1 изображены графики функций f и g, которые определены в точке x_0 и имеют предел в этой точке.

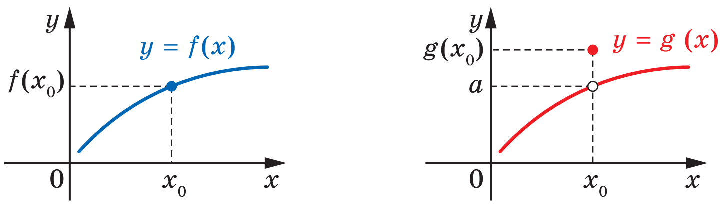


Рис. 5.1

Для функции g имеем: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$. Для функции f можно записать: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение. **Если выполняется равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функцию f называют *непрерывной в точке* x_0.**

Если в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция f определена только в точке x_0 (рис. 5.2), то предел такой функции в точке x_0 не определяют. Поэтому равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ проверить невозможно. Однако договорились и такую функцию f считать непрерывной в точке x_0.

Например, функция $y = \sqrt{-x^2}$ является непрерывной в точке $x_0 = 0$, а функция $y = \sqrt{-\sin^2 x}$ является непрерывной в каждой из точек вида $x_0 = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

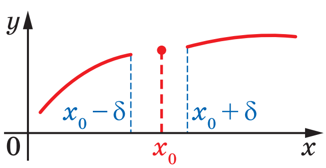


Рис. 5.2

Из теоремы об арифметических действиях с пределами функций следует, что если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, то:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = f(x_0) - g(x_0)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)\, g(x)) = f(x_0)\, g(x_0)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$ при условии, что $g(x_0) \neq 0$.

Используя эти равенства, можно доказать следующую теорему.

Теорема 5.1 (об арифметических действиях с непрерывными функциями). ***Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывными являются и функции $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)\, g(x)$ и $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (последняя при условии, что $g(x_0) \neq 0$).***

Используя теорему об арифметических действиях с непрерывными функциями, получаем, что каждая из функций $y = f(x)$ и $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$, $g(x)$ — многочлены[1], является непрерывной.

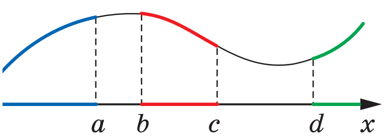


Рис. 5.3

Заметим, что если функция непрерывна на $\mathbb{R}$, то она непрерывна на любом числовом промежутке (рис. 5.3).

Можно показать[2], что для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ выполняется ра-

[1] Функцию вида $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, называют **рациональной**.

[2] С доказательством этого факта вы можете ознакомиться в рассказе на с. 41, 42.

венство $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$. Это означает, что функция $y = \sin x$ непрерывна.

Пусть функции f и g определены на некоторых промежутках. Из наглядных соображений очевидно, что если графики функций f и g являются равными фигурами и функция f непрерывна, то функция g также непрерывна.

В 10 классе было показано, что график функции $y = \cos x$ можно получить из графика функции $y = \sin x$ в результате параллельного переноса на вектор с координатами $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (рис. 5.4). Таким образом, непрерывность функции $y = \cos x$ следует из непрерывности функции $y = \sin x$.

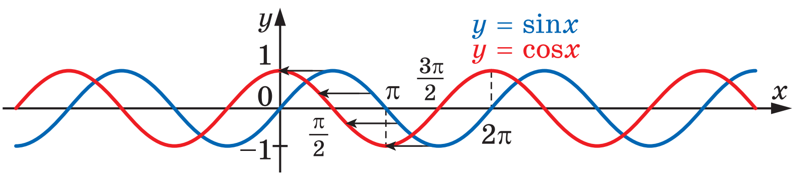


Рис. 5.4

Поскольку функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ — непрерывные, то из теоремы об арифметических действиях с непрерывными функциями следует, что функции $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$ также являются непрерывными.

Вы знаете, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Поэтому если обратимая функция f определена на некотором промежутке и непрерывна, то обратная к ней функция g также будет непрерывной.

Как было установлено выше, функция $y = x^2$ является непрерывной. Тогда и обратимая функция $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, — непрерывная. Следовательно, обратная к ней функция $g(x) = \sqrt{x}$ также является непрерывной.

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что функция $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, — непрерывная. Таким же образом устанавливаем, что непрерывными являются и функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$ и $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

ПРИМЕР 1 Выясните, является ли функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4}, & \text{если } x \neq 4, \\ 2, & \text{если } x = 4, \end{cases}$$

непрерывной в точке $x_0 = 4$.

Решение. Имеем: $f(4) = 2$.

Вычислим $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$. Запишем:

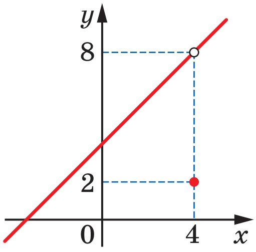


Рис. 5.5

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x \to 4} (x+4) = 8.$$

Получили, что $\lim\limits_{x \to 4} f(x) \neq f(4)$. Следовательно, функция f в точке $x_0 = 4$ не является непрерывной. Полученный вывод проиллюстрирован на рисунке 5.5. ●

Рассмотрим ряд важных свойств непрерывных функций[1].

Теорема 5.2 (о непрерывности сложной функции). ***Если функция $t = g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(t)$ непрерывна в точке t_0, где $t_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.***

Например, функция $t = 2x - 1$ непрерывна в точке $x_0 = 5$, функция $y = \sqrt{t}$ непрерывна в точке $t_0 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$. Тогда сложная функция $y = \sqrt{2x-1}$ непрерывна в точке $x_0 = 5$. Рассуждая аналогично, можно показать, что сложная функция $y = \sqrt{2x-1}$ непрерывна в каждой точке своей области определения.

Еще примеры. Функции $y = \sin x$ и $y = 5x$ непрерывны. Тогда сложная функция $y = \sin 5x$ также является непрерывной.

Каждая из функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ является непрерывной. Тогда сложная функция $y = \sqrt{x^2}$, то есть функция $y = |x|$, также является непрерывной.

[1] Доказательство этих свойств выходит за пределы школьной программы.

ПРИМЕР 2 Вычислите $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$.

Решение. Поскольку функция $f(x) = \sqrt{2x+1} - 3$ является непрерывной, то $\lim\limits_{x \to 4} \left(\sqrt{2x+1} - 3\right) = \sqrt{2 \cdot 4 + 1} - 3 = 0$. Следовательно, применить теорему о пределе частного нельзя.

Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела:

$$\frac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3} = \frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)} = \frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(2x+1)-9} =$$

$$= \frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2(x-4)} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}+3\right).$$

Поскольку функция $g(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}+3\right)$ является непрерывной, то можно записать

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}+3\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2 \cdot 4 + 1}+3\right) = 3. \quad \bullet$$

Теорема 5.3 (теорема Больцано–Коши). ***Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков, то существует такая точка $c \in (a; b)$, что $f(c) = 0$.***

Чешский математик, философ и логик. Возглавлял кафедру истории религии в Пражском университете. При жизни напечатал (анонимно) только 5 небольших математических трудов, основную часть его рукописного наследия ученые исследовали уже после его смерти. Трактат «Учение о функциях», написанный в 1830 г., увидел свет только через 100 лет. В нем Больцано, за много лет до Вейерштрасса и Коши, формулирует и доказывает ряд положений математического анализа. В работе «Парадоксы бесконечности» Больцано рассматривал вопросы мощности бесконечных множеств; в работе «Науко055ведение» выдвинул ряд идей, предшествовавших математической логике.

Бернард Больцано (1781–1848)

Эта теорема наглядно очевидна. Действительно, если точки, лежащие в разных полуплоскостях относительно оси абсцисс, соединить непрерывной кривой, то эта кривая обязательно пересечет ось абсцисс (рис. 5.6).

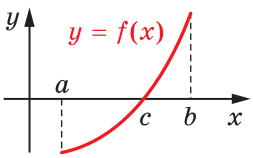


Рис. 5.6

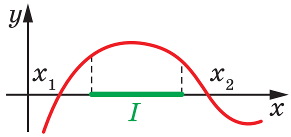


Рис. 5.7

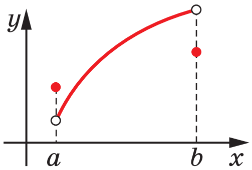


Рис. 5.8

Следствие. ***Если функция непрерывна и не имеет нулей на некотором промежутке I, то она на этом промежутке сохраняет знак*** (рис. 5.7).

Доказательство. Предположим, что данная функция f на промежутке I не сохраняет знак, то есть существуют такие $a \in I$ и $b \in I$, где $a < b$, что числа $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки (рис. 5.6). Тогда по теореме Больцано–Коши существует точка $c \in (a; b) \subset I$ такая, что $f(c) = 0$. Получили противоречие. ▲

Напомним, что это следствие лежит в основе метода интервалов для решения неравенств.

ПРИМЕР 3 Докажите, что уравнение $x^5 + 2x^2 - 11 = 0$ имеет корень.

Решение. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x) = x^5 + 2x^2 - 11$.

Огюстен Луи Коши (1789–1857)

Французский математик. Опубликовал более 800 работ по арифметике, теории чисел, алгебре, математическому анализу, дифференциальным уравнениям, теоретической и небесной механике, математической физике; занимался также исследованиями в области тригонометрии, теории упругости, оптики, астрономии. Был членом Парижской академии наук, Лондонского королевского общества и почти всех академий наук мира.

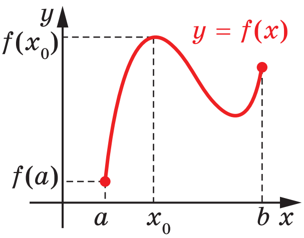
Имеем: $f(0) = -11$, $f(2) = 29$. Следовательно, по теореме Больцано–Коши на отрезке $[0; 2]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет корень. ●

Не каждая функция, определенная на отрезке $[a; b]$, достигает на этом промежутке своих наибольшего и наименьшего значений. Это иллюстрирует рисунок 5.8.

Однако для непрерывных функций имеет место такая теорема.

Теорема 5.4 (теорема Вейерштрасса). ***Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она на этом отрезке принимает свои наибольшее и наименьшее значения.***

Эта теорема наглядно очевидна. Если две точки на координатной плоскости соединить непрерывной кривой, то на этой кривой найдутся точки с наибольшей и наименьшей ординатами (рис. 5.9).



$$\max_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$$
$$\min_{[a;b]} f(x) = f(a)$$

Рис. 5.9

Отметим, что если в теореме Вейерштрасса отрезок $[a; b]$ заменить промежутком другого вида, например интервалом $(a; b)$, то эта теорема может не выполняться. Так, функция $y = x$, непрерывная на промежутке $(0; 1)$, не достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений.

Немецкий математик, член Берлинской академии наук, Парижской академии наук, почетный член Петербургской академии наук. Одним из важнейших его достижений является система логического обоснования математического анализа, основанная на построенной им теории действительных чисел. Вейерштрасс уделял большое внимание применению математики в механике и физике и поощрял к этому своих учеников.

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897)

Покажем, как понятие непрерывности помогает находить область значений функции.

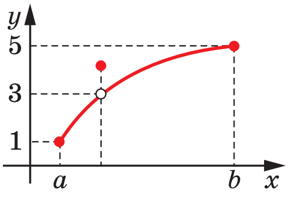


Рис. 5.10

Пусть о функции f известно, что $\min\limits_{D(f)} f(x) = 1$, $\max\limits_{D(f)} f(x) = 5$. Верно ли, что $E(f) = [1; 5]$? Рисунок 5.10 показывает, что ответ на этот вопрос отрицательный: число 3 не принадлежит области значений этой функции.

Однако если областью определения непрерывной функции является некоторый промежуток, то ответ на поставленный вопрос будет положительным.

Теорема 5.5. ***Если областью определения непрерывной функции f является некоторый промежуток и $\min\limits_{D(f)} f(x) = a$, $\max\limits_{D(f)} f(x) = b$ и $a \neq b$, то $E(f) = [a; b]$.***

Доказательство. Пусть числа x_1 и x_2 таковы, что $f(x_1) = a$, $f(x_2) = b$ и $x_1 < x_2$ (случай, когда $x_2 < x_1$, рассматривают аналогично).

Рассмотрим произвольное число $c \in (a; b)$, то есть $a < c < b$. Докажем, что существует точка $x_0 \in D(f)$, для которой $f(x_0) = c$. Тем самым будет показано, что $c \in E(f)$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - c$. Функция g является непрерывной на $D(g) = D(f)$, следовательно, она непрерывна на отрезке $[x_1; x_2]$.

Имеем: $g(x_1) = f(x_1) - c = a - c < 0$;

$g(x_2) = f(x_2) - c = b - c > 0$.

Следовательно, согласно теореме Больцано–Коши существует точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ такая, что $g(x_0) = 0$, то есть $f(x_0) - c = 0$; $f(x_0) = c$. ▲

ПРИМЕР 4 Найдите область значений функции $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^4}$.

Решение. Имеем: $\dfrac{x^2}{1 + x^4} \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Поскольку $f(0) = 0$, то $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$.

Применив неравенство Коши, запишем

$$\frac{x^2}{1 + x^4} \leqslant \frac{x^2}{2\sqrt{1 \cdot x^4}} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Так как $f(1)=\frac{1}{2}$, то $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=\frac{1}{2}$.

Функция f непрерывна на $\mathbb{R}$. Из теоремы 5.5 следует, что $E(f)=\left[0;\frac{1}{2}\right]$. ●

Упражнения

5.1.° Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x}$;
2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x$;
3) $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}\operatorname{tg} x$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x$;
5) $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{arctg} x$.

5.2.° Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x}$;
2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x$;
3) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\operatorname{ctg} x$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\arccos x$;
5) $\lim\limits_{x\to -1}\operatorname{arcctg} x$.

5.3.° Объясните, почему является непрерывной функция:

1) $f(x)=\sqrt{x}+3$;
2) $f(x)=\sqrt{x}-x^2$;
3) $f(x)=\sqrt{5x+2}$;
4) $f(x)=\sqrt{x}\sin x$;
5) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

5.4.° Объясните, почему является непрерывной функция:

1) $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$;
2) $f(x)=\sin x+\operatorname{ctg} x$;
3) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\cos x}$;
4) $f(x)=\operatorname{ctg} 5x$.

5.5.° Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2x-1}$;
2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin 3x$;
3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{5}}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{5}\right)$;
4) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\cos^2 x$.

5.6.° Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-3x}$;
2) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\cos 4x$;

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}+1}{x}$;　　4) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5.7.• Является ли непрерывной в точке x_0 функция:

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{если } x \neq 3, \\ 6, & \text{если } x=3, \end{cases}$　$x_0=3$;

2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{\cos x}, & \text{если } x \neq \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если } x=\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$　$x_0=\dfrac{\pi}{2}$?

5.8.• Является ли непрерывной в точке x_0 функция:

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x+1}, & \text{если } x \neq -1, \\ 0, & \text{если } x=-1, \end{cases}$　$x_0=-1$;

2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{\sin x}, & \text{если } x \neq \pi, \\ -2, & \text{если } x=\pi, \end{cases}$　$x_0=\pi$?

5.9.• Вычислите:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$;　2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$;　3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

5.10.• Вычислите:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sqrt{x}-3x}{3\sqrt{x}-2x}$;　2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}}$;　3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

5.11.• Вычислите:

1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$;　4) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$;

2) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2+x}{1-\sqrt{x^2-3}}$;　5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;　6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

5.12.$^\bullet$ Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

5.13.$^\bullet$ Докажите, что уравнение имеет корень:

1) $x^6 + 2x - 13 = 0$; 2) $3\sin x = 2x - 1$.

5.14.$^\bullet$ Докажите, что уравнение имеет корень:

1) $x^3 + 3x - 8 = 0$; 2) $2\cos x = x^2 + 4x - 6$.

5.15.$^\bullet$ Найдите область значений функции:

1) $y = \sin x + 2$; 2) $y = \cos x - 3$; 3) $y=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$.

5.16.$^\bullet$ Найдите область значений функции:

1) $y = \sin x - 4$; 2) $y = 3 + \cos x$; 3) $y = \pi - \arccos x$.

5.17.$^{\bullet\bullet}$ Найдите область значений функции $y=\dfrac{x^2}{9x^4+1}$.

5.18.$^{\bullet\bullet}$ Найдите область значений функции $y=\dfrac{x^2}{4x^4+3x^2+1}$.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Первый замечательный предел

Покажем, что функция $y = \sin x$ — непрерывная. Для этого докажем такое вспомогательное утверждение.

Лемма 5.1. ***Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|\sin x| \leqslant |x|$.***

Доказательство. Если $x = 0$ или $|x| \geqslant 1$, то доказываемое неравенство очевидно.

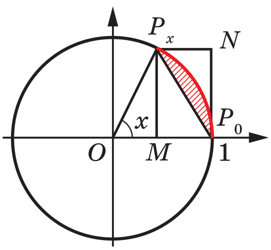


Рис. 5.11

Пусть $x \in (0; 1)$. На рисунке 5.11 точка P_x получена в результате поворота точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x радиан. Так как $x \in (0; 1)$, то есть $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, то точка P_x находится в первой четверти.

Площадь треугольника P_xOP_0 меньше площади сектора P_xOP_0. Имеем:

$$S_{\Delta P_xOP_0} = \frac{1}{2} OP_0^2 \sin x = \frac{1}{2} \sin x;$$

$$S_{\text{сект } P_xOP_0} = \frac{1}{2} OP_0^2 \; x = \frac{1}{2} x.$$

Тогда $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x$. Получаем $\sin x < x$.

Пусть $x \in (-1; 0)$. Тогда $-x \in (0; 1)$ и можно записать, что $\sin(-x) < -x$. Отсюда $\sin x > x$.

Следовательно, если $x \in (0; 1)$, то $0 < \sin x < x$. Поэтому $|\sin x| < |x|$.

Если $x \in (-1; 0)$, то $0 > \sin x > x$. Поэтому $|\sin x| < |x|$. ▲

Покажем, что число $\sin x_0$ является пределом функции $y = \sin x$ в точке x_0, где $x_0 \in \mathbb{R}$.

Используя неравенство леммы 5.1, имеем:

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot \left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Так как $|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0|$, то из неравенств $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ следует, что $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$.

Если положить $\delta = \varepsilon$, то получим: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из неравенств $0 < |x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$. Это означает, что

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

Таким образом, функция $y = \sin x$ непрерывна в каждой точке x_0, а следовательно, эта функция непрерывна на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Эта функция не определена в точке $x_0 = 0$. Однако в этой точке существует предел функции f. Докажем, что имеет место такое равенство:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \qquad (1)$$

Лемма 5.2. ***Если* $|\,x\,| < 1$ *и* $x \neq 0$, *то***

$$\mathbf{0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.}$$

Доказательство. Пусть $x \in (0;\ 1)$. Опять обратимся к рисунку 5.11. Построим прямоугольник MP_xNP_0, для которого отрезок P_xP_0 является диагональю.

Поскольку $P_xM = \sin x$ и $OM = \cos x$, то

$$S_{\Delta P_xNP_0} = \frac{1}{2}\sin x\,(1 - \cos x) = \sin x \sin^2\frac{x}{2}.$$

Поскольку $x \in (0;\ 1)$, то $\sin x > 0$. Тогда из леммы 5.1 получаем: $\sin x \leqslant x$; $\sin^2\frac{x}{2} \leqslant \left(\frac{x}{2}\right)^2$.

Следовательно, $S_{\Delta P_xNP_0} = \sin x \cdot \sin^2\frac{x}{2} \leqslant x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{4}$.

Очевидно, что площадь заштрихованного сегмента меньше площади треугольника P_xNP_0.

Имеем: $S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сект } P_xOP_0} - S_{\Delta\, P_xOP_0} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x$.

Теперь можно записать: $0 < \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x < \frac{x^3}{4}$.

Отсюда с учетом того, что $x \in (0;\ 1)$, получаем

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Поскольку функции $y = 1 - \frac{\sin x}{x}$ и $y = \frac{x^2}{2}$ — четные, то последнее двойное неравенство выполняется также для всех x из промежутка $(-1;\ 0)$. ▲

Теперь докажем равенство (1).

Используя лемму 5.2, для $|\,x\,| < 1$ и $x \neq 0$ имеем:

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2} < x^2 < |\,x\,| = |\,x - 0\,|,$$

то есть

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |\,x - 0\,|.$$

Пусть ε — произвольное положительное число.

Если $0 < \varepsilon < 1$, то положим $\delta = \varepsilon$. Тогда из неравенств $0 < | x - 0 | < \delta$ будет следовать, что $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < | x - 0 | < \delta = \varepsilon$.

Если $\varepsilon \geqslant 1$, то в качестве δ выберем любое число из промежутка $(0; 1)$. Так как в этом случае $\delta < \varepsilon$, то из неравенств $0 < | x - 0 | < \delta$ будет следовать, что $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < | x - 0 | < \delta < \varepsilon$.

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что из неравенства $0 < | x - 0 | < \delta$ следует неравенство

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Это равенство называют **первым замечательным пределом.** Оно показывает, что при достаточно малых значениях x выполняется приближенное равенство $\sin x \approx x$. Более того, из леммы 5.2 следует, что если $| x | < 1$, то выполняется неравенство $| x - \sin x | < \frac{| x |^3}{2}$. Поэтому абсолютная погрешность приближенной формулы $\sin x \approx x$, где $|x| < 1$, не превышает $\frac{| x |^3}{2}$. Например, если $x = 0{,}1$, то $\sin 0{,}1 \approx 0{,}1$ с точностью не менее чем $\frac{0{,}1^3}{2} = 0{,}0005$.

ПРИМЕР 1 Вычислите предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3$. ●

ПРИМЕР 2 Вычислите предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$. ●

ПРИМЕР 3 Вычислите предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

Решение

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x \to 0} \frac{m \cdot \dfrac{\sin mx}{mx}}{n \cdot \dfrac{\sin nx}{nx}} = \frac{m \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin mx}{mx}}{n \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin nx}{nx}} = \frac{m}{n}.$$

ПРИМЕР 4 Вычислите предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{1 - \cos x}$.

Решение

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{2 \sin^2 \dfrac{x}{2}} = 6 \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^2}{4}}{\sin^2 \dfrac{x}{2}} =$$

$$= 6 \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} \right)^2} = \frac{6}{1^2} = 6.$$

Упражнения

5.19. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{2x}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{\sin 3x}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{x \operatorname{tg} x}$;

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 10x - \cos x}{4x^2}$;

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 13x}{\sin^2 x}$.

6. Приращение функции. Задачи, приводящие к понятию производной

Если функция является математической моделью реального процесса, то часто возникает потребность находить разность значений этой функции в двух точках. Например, обозначим $f(t)$ и $f(t_0)$ суммы средств, которые накопились на депозитном[1] счете вкладчика к моментам времени t и t_0. Тогда разность $f(t) - f(t_0)$, где $t > t_0$, показывает прибыль, которую получит вкладчик за время $t - t_0$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть x_0 — фиксированная точка из области определения функции f.

Если x — произвольная точка области определения функции f такая, что $x \neq x_0$, то разность $x - x_0$ называют **приращением аргумента функции f в точке** x_0 и обозначают Δx (читают: «дельта икс»)[2]. Имеем:

$$\Delta x = x - x_0. \text{ Отсюда } x = x_0 + \Delta x.$$

Говорят, что аргумент **получил приращение Δx в точке x_0.**

Отметим, что приращение аргумента может быть как положительным, так и отрицательным: если $x > x_0$, то $\Delta x > 0$; если $x < x_0$, то $\Delta x < 0$.

Если аргумент в точке x_0 получил приращение Δx, то значение функции f изменилось на величину

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Эту разность называют **приращением функции f в точке** x_0 и обозначают Δf (читают: «дельта эф»).

Имеем: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ или $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Для приращения функции $y = f(x)$ также принято обозначение Δy, то есть

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ или}$$
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

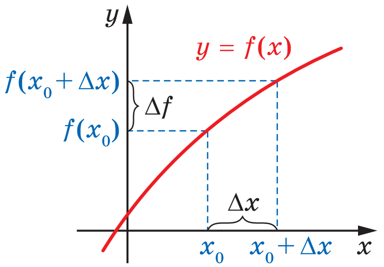


Рис. 6.1

Приращение Δx аргумента в точке x_0 и соответствующее приращение Δf функции показано на рисунке 6.1.

Отметим, что для фиксированной точки x_0 приращение функции f в точке x_0 является функцией с аргументом Δx.

[1] Депозит (банковский вклад) — деньги, которые вкладчик помещает в банк на некоторый срок, за что банк выплачивает вкладчику проценты.

[2] Говоря о приращении аргумента функции f в точке x_0, здесь и дальше будем предполагать, что в любом интервале $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ есть точки области определения функции f, отличные от x_0.

ПРИМЕР 1 Найдите приращение функции $y = x^2$ в точке x_0, которое соответствует приращению Δx аргумента.

Решение. Имеем:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Ответ: $2x_0\Delta x + \Delta x^2$.

Задача о мгновенной скорости

Пусть автомобиль, двигаясь по прямолинейному участку дороги в одном направлении, за 2 ч преодолел путь 120 км. Тогда его средняя скорость движения равна $v_{\text{ср}} = \frac{120}{2} = 60$ (км/ч).

Найденная величина дает неполное представление о характере движения автомобиля: на одних участках пути автомобиль мог двигаться быстрее, на других — медленнее, иногда мог останавливаться.

Вместе с тем в любой момент времени спидометр автомобиля показывал некоторую величину — скорость в данный момент времени. Значение скорости в разные моменты более полно характеризует движение автомобиля.

Рассмотрим задачу о поиске скорости в данный момент времени на примере равноускоренного движения.

Пусть материальная точка двигается по координатной прямой и через время t после начала движения имеет координату $s(t)$. Тем самым задана функция $y = s(t)$, позволяющая определить положение точки в любой момент времени. Поэтому эту функцию называют **законом движения** точки.

Из курса физики известно, что закон равноускоренного движения задается формулой $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где s_0 — координата точки в начале движения (при $t = 0$), v_0 — начальная скорость, a — ускорение.

Пусть, например, $s_0 = 0$, $v_0 = 1$ м/с, $a = 2$ м/с^2. Тогда $s(t) = t^2 + t$.

Зафиксируем какой-нибудь момент времени t_0 и придадим аргументу в точке t_0 приращение Δt, то есть рассмотрим промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$. За этот промежуток времени материальная точка осуществит перемещение Δs, где

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s(t_0+\Delta t)} - \underbrace{(t_0^2 + t_0)}_{s(t_0)} =$$

$$= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2.$$

Средняя скорость $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ движения точки за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ равна отношению

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t,$$

то есть $v_{\text{ср}}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t$.

Обозначение для средней скорости $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ подчеркивает, что при заданном законе движения $y = s(t)$ и фиксированном моменте времени t_0 значение средней скорости зависит только от Δt.

Если рассматривать достаточно малые промежутки времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, то из практических соображений понятно, что средние скорости $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ за такие промежутки времени мало отличаются друг от друга, то есть величина $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ почти не изменяется. Чем меньше Δt, тем ближе значение средней скорости к некоторому числу, определяющему скорость в момент времени t_0. Иными словами, если при $\Delta t \to 0$ значения $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ стремятся к числу $v(t_0)$, то число $v(t_0)$ называют **мгновенной скоростью** в момент времени t_0.

В нашем примере, если $\Delta t \to 0$, то значения выражения $2t_0 + 1 + \Delta t$ стремятся к числу $2t_0 + 1$, которое является значением мгновенной скорости $v(t_0)$, то есть

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0}(2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Этот пример показывает, что если материальная точка двигается по закону $y = s(t)$, то ее мгновенную скорость в момент времени t_0 определяют с помощью формулы

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}(\Delta t), \text{ то есть}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}}}$$

Задача о касательной к графику функции

Известное определение касательной к окружности как прямой, которая имеет с окружностью только одну общую точку, неприменимо в случае произвольной кривой.

Например, ось ординат имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку (рис. 6.2). Однако интуиция подсказывает, что неестественно считать эту прямую касательной к этой параболе. Вместе с тем в курсе алгебры мы нередко говорили, что парабола $y = x^2$ касается оси абсцисс в точке $x_0 = 0$.

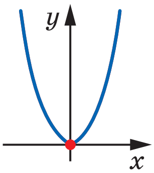


Рис. 6.2

Уточним наглядное представление о касательной к графику функции.

Пусть M — некоторая точка, лежащая на параболе $y = x^2$. Проведем прямую OM, которую назовем секущей (рис. 6.3). Представим себе, что точка M, двигаясь по параболе, приближается к точке O. При этом секущая OM будет вращаться вокруг точки O. Тогда угол между прямой OM и осью абсцисс будет становиться все меньше и меньше, и секущая OM будет стремиться занять положение оси абсцисс.

Прямую, положение которой стремится занять секущая OM при приближении точки M к точке O, будем называть касательной к параболе $y = x^2$ в точке O.

Рассмотрим график некоторой непрерывной в точке x_0 функции f и точку $M_0(x_0; f(x_0))$. В точке x_0 придадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике точку $M(x; f(x))$, где $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 6.4).

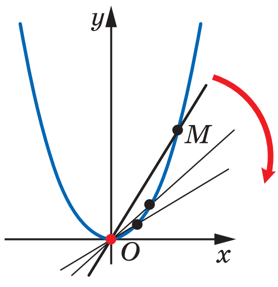


Рис. 6.3

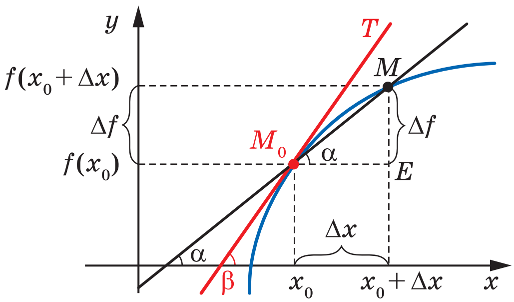


Рис. 6.4

Из рисунка видно, что если Δx становится все меньше и меньше, то точка M, двигаясь по графику, приближается к точке M_0. Если при $\Delta x \to 0$ секущая M_0M стремится занять положение некоторой прямой (на рисунке 6.4 это прямая M_0T), то такую прямую называют **касательной к графику функции f в точке M_0.**

Пусть секущая M_0M имеет уравнение $y = kx + b$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол α. Как известно, угловой коэффициент k прямой M_0M равен $\operatorname{tg} \alpha$, то есть $k = \operatorname{tg} \alpha$. Очевидно, что $\angle MM_0E = \alpha$ (рис. 6.4). Тогда из ΔMM_0E получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Введем обозначение $k_{\text{сек}}(\Delta x)$ для углового коэффициента секущей M_0M, тем самым подчеркивая, что для данной функции f и фиксированной точки x_0 угловой коэффициент секущей M_0M определяется через приращение Δx аргумента.

Имеем: $k_{\text{сек}}(\Delta x) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Пусть касательная M_0T образует с положительным направлением оси абсцисс угол β ($\beta \neq 90°$). Тогда ее угловой коэффициент $k\,(x_0)$ равен $\operatorname{tg} \beta$.

Естественно считать, что чем меньше Δx, тем меньше значение углового коэффициента секущей отличается от значения углового коэффициента касательной. Иными словами, если $\Delta x \to 0$, то $k_{\text{сек}}(\Delta x) \to k\,(x_0)$. Вообще, угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0 определяют с помощью формулы

$$k\,(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}(\Delta x), \text{ то есть}$$

$$\boxed{k\,(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0 + \Delta x) - f\,(x_0)}{\Delta x}}$$

ПРИМЕР 2 Найдите формулу для вычисления углового коэффициента касательной к графику функции $f\,(x) = -x^2$ в точке с абсциссой x_0. Какой угол с положительным направлением оси абсцисс образует касательная, проведенная к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = -\dfrac{1}{2}$?

Решение. Имеем:

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -(x_0 + \Delta x)^2 - (-x_0^2) = -2x_0 \Delta x - \Delta x^2.$

Тогда, воспользовавшись формулой для вычисления углового коэффициента касательной, можно записать:

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x_0 \Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-2x_0 - \Delta x).$$

Если $\Delta x \to 0$, то значения выражения $-2x_0 - \Delta x$ стремятся к числу $-2x_0$, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (-2x_0 - \Delta x) = -2x_0$. Отсюда $k(x_0) = -2x_0$.

Эта формула позволяет вычислить угловой коэффициент касательной к параболе $y = -x^2$ в любой точке, в частности, в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Имеем: $k\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$

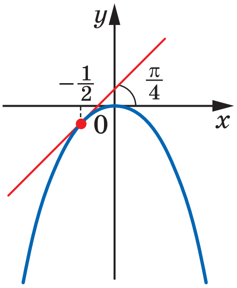


Рис. 6.5

Пусть касательная к параболе в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{1}{2}$ образует угол α ($0 \leqslant \alpha < \pi$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$) с положительным направлением оси абсцисс. Тогда ее угловой коэффициент равен $\operatorname{tg} \alpha$. Выше мы установили, что $k\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$. Отсюда $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Поскольку $0 \leqslant \alpha < \pi$, то $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (рис. 6.5). ●

Упражнения

6.1.° Найдите приращение функции f в точке x_0, если:

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}2$;
2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;
3) $f(x) = \frac{6}{x}$, $x_0 = 1{,}2$, $\Delta x = -0{,}3$.

6.2.° Найдите приращение функции f в точке x_0, если:

1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}3$;
2) $f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}8$.

6.3.° Для функции $f(x) = x^2 - 3x$ выразите приращение Δf функции f в точке x_0 через x_0 и x. Найдите Δf, если: 1) $x_0 = 3$, $x = 2,5$; 2) $x_0 = -2$, $x = -1$.

6.4.° Для функции $f(x) = x^3$ выразите приращение Δf функции f в точке x_0 через x_0 и x. Найдите Δf, если $x_0 = 0,5$, $x = 0,4$.

6.5.• Для функции $f(x) = x^2 - x$ и точки x_0 найдите $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

6.6.• Для функции $f(x) = 5x + 1$ и точки x_0 найдите $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

6.7.• Материальная точка двигается по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^2 + 3$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите мгновенную скорость материальной точки в момент $t_0 = 2$ с.

6.8.• Тело двигается по координатной прямой по закону $s(t) = 5t^2$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите: 1) среднюю скорость тела при изменении времени от $t_0 = 1$ с до $t_1 = 3$ с; 2) мгновенную скорость тела в момент $t_0 = 1$ с.

6.9.• Найдите угловой коэффициент:
1) секущей графика функции $y = x^2$, проходящей через точки графика с абсциссами $x_0 = 1$ и $x_1 = 1,6$;
2) касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

6.10.• Найдите угловой коэффициент:
1) секущей графика функции $y = x^3$, проходящей через точки графика с абсциссами $x_0 = 2$ и $x_1 = 1$;
2) касательной к графику функции $y = x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

7. Понятие производной

В предыдущем пункте, решая две разные задачи о мгновенной скорости материальной точки и об угловом коэффициенте касательной, мы пришли к одной и той же математической модели: пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

К аналогичным формулам приводит решение целого ряда задач физики, химии, биологии, экономики и т. д. Это свидетельствует о том, что рассматриваемая модель заслуживает особого внимания. Ей стоит присвоить название, ввести обозначение, изучить ее свойства и научиться их применять.

Определение. Производной функции f в точке x_0 называют число, равное пределу отношения приращения функции f в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначают так: $f'(x_0)$ (читают: «эф штрих от икс нулевого») или $y'(x_0)$. Тогда можно записать:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

или

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Производную функции f в точке x_0 можно вычислить по такой схеме:

1) придав в точке x_0 аргументу приращение Δx, найти соответствующее приращение Δf функции:
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

2) найти отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$;

3) выяснить, к какому числу стремится отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то есть найти предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

ПРИМЕР 1 Найдите производную функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Придерживаясь вышеприведенной схемы, запишем:

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \dfrac{1}{x_0 + \Delta x} - \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{1+\Delta x} - \dfrac{1}{1} = \dfrac{-\Delta x}{1+\Delta x}$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = -\dfrac{1}{1+\Delta x}$;

3) при $\Delta x \to 0$ значения выражения $-\dfrac{1}{1+\Delta x}$ стремятся к числу -1, то есть $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(-\dfrac{1}{1+\Delta x}\right) = -1$.

Ответ: -1.

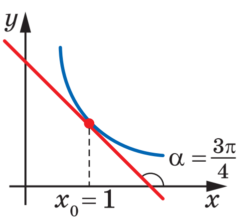


Рис. 7.1

Отметим, что, найдя значение $f'(1)$, мы тем самым нашли угловой коэффициент $k(x_0)$ касательной, проведенной к графику функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Он равен -1, то есть $k(1) = -1$. Тогда, обозначив через α угол, образованный этой касательной с положительным направлением оси абсцисс, можем записать: $\operatorname{tg} \alpha = -1$. Отсюда $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ (рис. 7.1).

Вообще, можно сделать такой вывод: *угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, равен производной функции f в точке x_0*, то есть

$$\boxed{k(x_0) = f'(x_0)}$$

Это равенство выражает **геометрический смысл производной.**

Также понятно, что *если* $y = s(t)$ *— закон движения материальной точки* по координатной прямой, *то ее мгновенная скорость в момент времени* t_0 *равна производной функции* $y = s(t)$ *в точке* t_0, то есть

$$\boxed{v(t_0) = s'(t_0)}$$

Это равенство выражает **механический смысл производной.**

Если функция f имеет производную в точке x_0, то эту функцию называют **дифференцируемой в точке** x_0.

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Из геометрического смысла производной следует, что к графику функции f в точке с абсциссой x_0 можно провести *невертикальную* касательную (рис. 7.2). И наоборот, если к графику функции f в точке с абсциссой x_0 можно провести невертикальную касательную, то функция f дифференцируема в точке x_0.

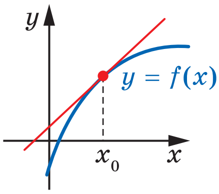


Рис. 7.2

На рисунке 7.3 изображены графики функций, которые в точке x_0 имеют разрыв или «излом». К их графикам в точке с абсциссой x_0 невозможно провести касательную. Эти функции не дифференцируемы в точке x_0.

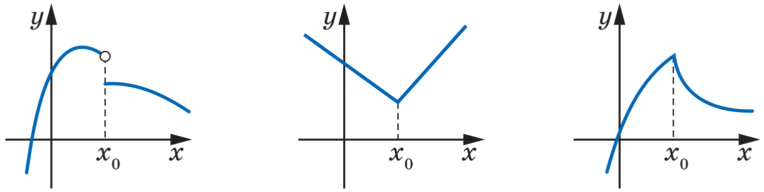


Рис. 7.3

На рисунке 7.4 изображены графики функций, которые в точке с абсциссой x_0 имеют вертикальную касательную. Поэтому эти функции не дифференцируемы в точке x_0.

Рис. 7.4

Покажем, например, что функция $f(x) = |x|$, график которой имеет «излом» в точке $x_0 = 0$, не является дифференцируемой в этой точке. Имеем:

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |x_0 + \Delta x| - |x_0| =$
$= |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$;

3) в примере 3 пункта 3 было показано, что функция $g(t) = \dfrac{|t|}{t}$ не имеет предела в точке $t_0 = 0$; это означает, что не существует предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, то есть функция f не является дифференцируемой в точке $x_0 = 0$.

Теорема 7.1. ***Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.***

Доказательство. Так как функция f дифференцируема в точке x_0, то можно записать $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Имеем: $\Delta x = x - x_0$. Очевидно, что если $\Delta x \to 0$, то $x \to x_0$. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Имеем:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$. Отсюда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это означает, что функция f является непрерывной в точке x_0. ▲

Отметим, что непрерывная в точке $x_0 = 0$ функция $f(x) = |x|$ не является дифференцируемой в этой точке. Этот пример показывает, что непрерывность функции в точке является необходимым, но не является достаточным условием дифференцируемости функции в этой точке (рис. 7.5).

Пусть M — множество точек, в которых функция f дифференцируема. Каждому числу $x \in M$ поставим в соответствие число $f'(x)$. Тем самым задана функция с областью определения M. Эту функцию называют **производной функции** $y = f(x)$ и обозначают f' или y'.

Если функция f дифференцируема в каждой точке некоторого множества M, то говорят, что она **дифференцируема на множестве** M. Например, на рисунке 7.6 изображен график функции, дифференцируемой на промежутке I. На промежутке I этот график не имеет разрывов и изломов.

Рис. 7.5

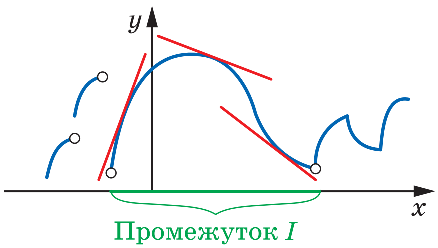


Рис. 7.6

Если функция f дифференцируема на $D(f)$, то ее называют **дифференцируемой**.

Нахождение производной функции f называют **дифференцированием** функции f.

ПРИМЕР 2 Продифференцируйте функцию $f(x) = kx + b$.

Решение. Найдем производную функции f в точке x_0, где x_0 — произвольная точка области определения функции f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta x}{\Delta x} = k$;

3) по определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k$.

Следовательно, $f'(x_0) = k$.

Так как x_0 — произвольная точка области определения функции f, то последнее равенство означает, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $f'(x) = k$. ●

Вывод о том, что производная линейной функции $f(x) = kx + b$ равна k, также принято записывать так:

$$\boxed{(kx + b)' = k} \tag{1}$$

Если в формулу (1) подставить $k = 1$ и $b = 0$, то получим

$$\boxed{(x)' = 1}$$

Если же в формуле (1) положить $k = 0$, то получим

$$\boxed{(b)' = 0}$$

Последнее равенство означает, что производная функции, являющейся константой, в каждой точке равна нулю.

ПРИМЕР 3 Найдите производную функции $f(x) = x^2$.

Решение. Найдем производную функции f в точке x_0, где x_0 — произвольная точка области определения функции f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$;

3) если $\Delta x \to 0$, то при любом $x_0 \in \mathbb{R}$ значения выражения $2x_0 + \Delta x$ стремятся к числу $2x_0$. Следовательно,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Так как x_0 — произвольная точка области определения функции $f(x) = x^2$, то для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f'(x) = 2x. \text{ ●}$$

Последнее равенство также принято записывать в виде

$$\boxed{(x^2)' = 2x} \tag{2}$$

ПРИМЕР 4 Найдите производную функции $f(x) = x^3$.

Решение. Найдем производную функции f в точке x_0, где x_0 — произвольная точка области определения функции f.

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0{}^3 = (x_0 + \Delta x - x_0)((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0{}^2) = \Delta x\ ((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0{}^2)$;

2) $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x\left((x_0+\Delta x)^2+(x_0+\Delta x)x_0+x_0^2\right)}{\Delta x} =$$
$$= (x_0+\Delta x)^2+(x_0+\Delta x)x_0+x_0^2;$$

3) если $\Delta x \to 0$, то значения выражения $(x_0+\Delta x)^2+(x_0+\Delta x)x_0+x_0^2$ стремятся к числу $3x_0^2$. Следовательно, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=3x_0^2$.

Так как x_0 — произвольная точка области определения функции f, то для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f'(x) = 3x^2.$$ ●

Последнее равенство можно записать так:

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2} \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) — частные случаи более общей формулы:

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1} \qquad (4)$$

Например, $(x^5)' = 5x^4$, $(x^7)' = 7x^6$.

ПРИМЕР 5 Докажите, что производная функции $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, равна nx^{n-1}.

Решение. Найдем производную функции f в точке x_0, где x_0 — произвольная точка области определения функции f.

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n$.

2) Напомним, что $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})$. Тогда можно записать:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} =$$
$$= \frac{(x_0+\Delta x - x_0)\left((x_0+\Delta x)^{n-1}+(x_0+\Delta x)^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-1}\right)}{\Delta x} =$$
$$= (x_0+\Delta x)^{n-1}+(x_0+\Delta x)^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-1}.$$

3) $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\left((x_0+\Delta x)^{n-1}+(x_0+\Delta x)^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-1}\right) =$$
$$= \underbrace{x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+\ldots+x_0^{n-1}}_{n\ \text{слагаемых}} = nx_0^{n-1}.$$

Так как x_0 — произвольная точка области определения функции f, то для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Формула (4) остается справедливой для любого $n \in \mathbb{Z}$ и $x \neq 0$, то есть

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{Z}} \qquad (5)$$

Например, воспользуемся формулой (5) для нахождения производной функции $f(x) = \frac{1}{x}$. Имеем:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Следовательно, для любого $x \neq 0$ выполняется равенство $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ или

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

ПРИМЕР 6 Продифференцируйте функцию $f(x) = \sqrt{x}$.

Решение. Пусть x_0 — произвольная точка области определения функции f, то есть $x_0 \geqslant 0$.

1) $\Delta f = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$.

2) Имеем: $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_0}\right)^2}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} =$$

$$= \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$

3) Найдем предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. При $x_0 > 0$ имеем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

При $x_0 = 0$ имеем, что $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$. Поэтому при $\Delta x \to 0$ значения выражения $\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$ становятся все бóльшими и бóльшими. Значит, не существует числа, к которому стремятся значения выражения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Следовательно, предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ не существует.

Таким образом, функция $f(x) = \sqrt{x}$ является дифференцируемой на множестве $(0; +\infty)$, причем $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Отметим, что в точке $x_0 = 0$ функция $f(x) = \sqrt{x}$ не является дифференцируемой. ●

Формулу (5) также можно обобщить для любого $r \in \mathbb{Q}$ и $x > 0$:

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1},\ r \in \mathbb{Q}} \qquad (6)$$

Например, найдем производную функции $f(x) = \sqrt{x}$, воспользовавшись формулой (6). Имеем:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Следовательно, для $x > 0$ можно записать: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

или
$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Вообще, производную функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, можно находить по формуле

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}} \qquad (7)$$

Если n — нечетное натуральное число, то формула (7) позволяет находить производную функции f во всех точках x таких, что $x \neq 0$.

Если n — четное натуральное число, то формула (7) позволяет находить производную функции f для всех положительных значений x.

Обратимся к тригонометрическим функциям $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Эти функции являются дифференцируемыми, и их производные находят по таким формулам:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

Как доказывать эти формулы, вы сможете узнать в разделе «Когда сделаны уроки».

При вычислении производных удобно пользоваться таблицей производных, расположенной на форзаце 2.

ПРИМЕР 7 Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 1, \\ 2x - 1, & \text{если } x \geqslant 1 \end{cases}$ является дифференцируемой в точке $x_0 = 1$. Найдите $f'(1)$.

Решение. Имеем: $f(x_0) = f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Если $\Delta x < 0$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 2 + \Delta x$.

Если $\Delta x > 0$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(2(1 + \Delta x) - 1) - 1}{\Delta x} = 2$.

Теперь видим, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2$, то есть $f'(1) = 2$. ●

Упражнения

7.1.° Найдите производную функции:

1) $y = 5x - 6$; 2) $y = \frac{1 - x}{3}$; 3) $y = 9$.

7.2.° Найдите производную функции:

1) $y = x^4$; 3) $y = x^{-15}$; 5) $y = x^{-2,8}$;

2) $y = x^{20}$; 4) $y = \frac{1}{x^{17}}$; 6) $y = x^{\frac{1}{5}}$.

7.3.° Найдите производную функции:

1) $y = x^{10}$;
2) $y = x^{-6}$;
3) $y = \frac{1}{x^8}$;
4) $y = 8 - 3x$;
5) $y = x^{\frac{7}{6}}$;
6) $y = x^{-0,2}$.

7.4.° Продифференцируйте функцию:

1) $y = \sqrt[4]{x}$;
2) $y = \sqrt[8]{x^7}$;
3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
4) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$.

7.5.° Продифференцируйте функцию:

1) $y = \sqrt[9]{x}$;
2) $y = \sqrt[6]{x^5}$;
3) $y = \frac{1}{\sqrt[12]{x^7}}$.

7.6.° Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$;
2) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

7.7.° Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$;
2) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

7.8.• Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = x\sqrt{x},\ x_0 = 81$;
2) $f(x) = x^3\sqrt[4]{x},\ x_0 = 1$;
3) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}},\ x_0 = 16$;
4) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[6]{x}},\ x_0 = 64$.

7.9.• Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = x\sqrt[4]{x},\ x_0 = 256$;
2) $f(x) = \sqrt[8]{x\sqrt{x}},\ x_0 = 1$.

7.10.• Пользуясь определением производной, найдите $f'(x)$, если:

1) $f(x) = \frac{3}{x}$;
2) $f(x) = 4 - x^2$.

7.11.• Пользуясь определением производной, найдите $f'(x)$, если:

1) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$;
2) $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

7.12.• Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

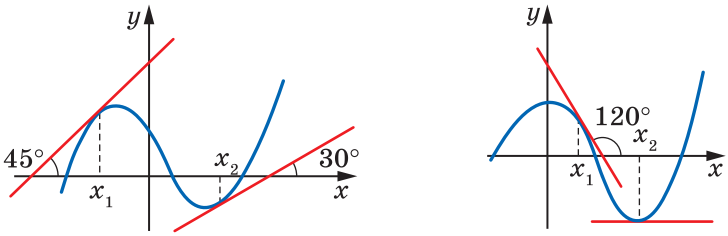
1) $f(x) = x^3,\ x_0 = -1$;
2) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 4$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^2},\ x_0 = 2$;
4) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0$.

7.13.• Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = x^4$, $x_0 = -2$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x_0 = -3$;

2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$; 4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

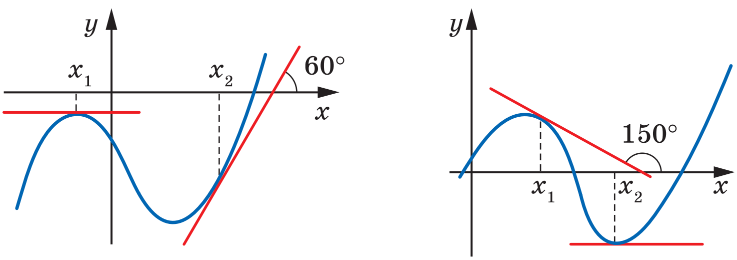
7.14.• Найдите с помощью графика функции f (рис. 7.7) значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.



а *б*

Рис. 7.7

7.15.• Найдите с помощью графика функции f (рис. 7.8) значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.



а *б*

Рис. 7.8

7.16.• На рисунке 7.9 изображен график функции f. Укажите несколько значений аргумента x, для которых:
1) $f'(x) > 0$; 2) $f'(x) < 0$; 3) $f'(x) = 0$.

7.17.• К графику функции f в точке с абсциссой x_0 проведена касательная (рис. 7.10). Найдите $f'(x_0)$.

7.18.• К графику функции f в точке с абсциссой x_0 проведена касательная (рис. 7.11). Найдите $f'(x_0)$.

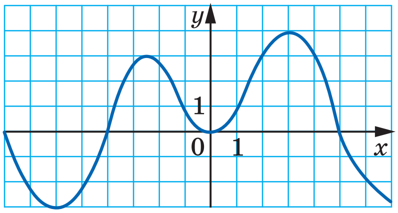


Рис. 7.9

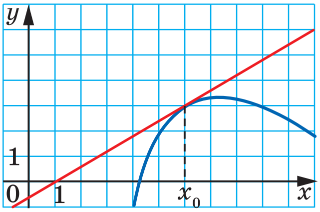


Рис. 7.10

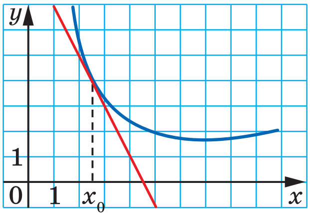


Рис. 7.11

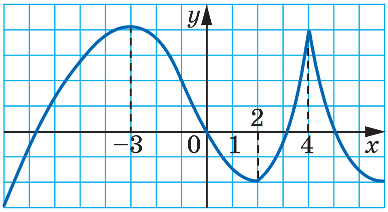


Рис. 7.12

7.19.$^{\bullet}$ На рисунке 7.12 изображен график функции f. Укажите точки, в которых производная равна нулю, и точки, в которых производная не существует.

7.20.$^{\bullet}$ На рисунке 7.13 изображен график функции f. Укажите точки, в которых производная равна нулю, и точки, в которых производная не существует.

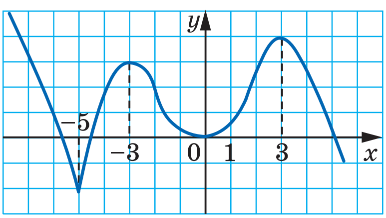


Рис. 7.13

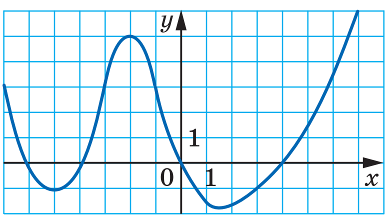


Рис. 7.14

7.21.$^{\bullet}$ На рисунке 7.14 изображен график функции f. Сравните:

1) $f'(-5)$ и $f'(1)$;
2) $f'(-1)$ и $f'(6)$;
3) $f'(-2)$ и $f'(4)$;
4) $f'(0)$ и $f'(5)$.

7.22.• Касательная к графику функции f в точке с абсциссой x_0 имеет угловой коэффициент k. Найдите x_0, если:

1) $f(x) = x^3$, $k = 3$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, $k = \frac{1}{4}$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $k = -\frac{1}{4}$;
4) $f(x) = \sin x$, $k = 0$.

7.23.• Касательная к графику функции f в точке с абсциссой x_0 имеет угловой коэффициент k. Найдите x_0, если:

1) $f(x) = x^4$, $k = -32$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $k = \frac{1}{27}$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $k = -\frac{1}{27}$;
4) $f(x) = \cos x$, $k = 1$.

7.24.• Материальная точка двигается по координатной прямой по закону $s(t) = t^2$. Найдите $s'\left(\frac{1}{2}\right)$. Какой механический смысл имеет найденная величина?

7.25.• Материальная точка двигается по координатной прямой по закону $s(t) = t^3$. Найдите $s'(2)$. Какой механический смысл имеет найденная величина?

7.26.•• Докажите, пользуясь определением, что функция $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geqslant 0 \end{cases}$ является дифференцируемой в точке $x_0 = 0$. Проиллюстрируйте полученный результат графически.

7.27.•• Найдите производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{если } x \leqslant 2, \\ 4x - 6, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 2$.

7.28.•• Докажите, пользуясь определением, что функция $f(x) = x\,|x|$ является дифференцируемой в точке $x_0 = 0$. Проиллюстрируйте полученный результат графически.

7.29.•• Найдите производную функции $f(x) = x^2\,|x|$ в точке $x_0 = 0$.

7.30.•• Докажите, пользуясь определением, что функция $y=\sqrt{1-x^2}$ не является дифференцируемой в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Проиллюстрируйте полученный результат графически.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Доказательство формул производных функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Докажем, что производные функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ можно вычислять по формулам

$$(\sin x)' = \cos x,$$
$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Пусть $f(x) = \sin x$.

Для произвольной точки x_0 имеем:

1) $\Delta f = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}$;

3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right).$$

Воспользовавшись первым замечательным пределом

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1,$$

можно записать:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x_0.$$

Формулу $(\cos x)' = -\sin x$ доказывают аналогично.

8. Правила вычисления производных

Найдем, пользуясь определением, производную функции $f(x) = x^2 + x$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) $\Delta f = \underbrace{(x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)}_{f(x_0+\Delta x)} - \underbrace{(x_0^2 + x_0)}_{f(x_0)} =$

$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + x_0 + \Delta x - x_0^2 - x_0 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x;$

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x + 1;$

3) если $\Delta x \to 0$, то значения выражения $2x_0 + \Delta x + 1$ стремятся к числу $2x_0 + 1$. Следовательно, при любом $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x + 1) = 2x_0 + 1.$$

Так как x_0 — произвольная точка области определения функции $f(x) = x^2 + x$, то для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f'(x) = 2x + 1, \text{ то есть}$$
$$(x^2 + x)' = 2x + 1.$$

Из предыдущего пункта вам известно, что $(x^2)' = 2x$ и $(x)' = 1$. Таким образом, получаем

$$(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)'.$$

Следовательно, производную функции $f(x) = x^2 + x$ можно было найти, не пользуясь определением производной.

Справедлива следующая теорема[1].

Теорема 8.1 (производная суммы). ***В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x) + g(x)$, причем для всех таких точек выполняется равенство***

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

---

[1] Условия теорем 8.1–8.4 предусматривают такое: если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то соответственно функции $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)\,g(x)$, $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $y = f(g(x))$ определены на некотором промежутке, содержащем точку x_0.

Коротко говорят: *производная суммы равна сумме производных*.

Также принята такая упрощенная запись:

$$\boxed{(f+g)' = f' + g'}$$

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка, в которой функции f и g дифференцируемы. Найдем приращение функции $y = f(x) + g(x)$ в точке x_0. Имеем:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) =$$
$$= (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + (g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)) = \Delta f + \Delta g.$$

Запишем: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x} \right).$

Поскольку функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta g}{\Delta x}$. Отсюда получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Следовательно, функция $y = f(x) + g(x)$ является дифференцируемой в точке x_0, причем ее производная в этой точке равна $f'(x_0) + g'(x_0)$. ▲

Теорему 8.1 можно обобщить для любого конечного количества слагаемых:

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'.$$

Две теоремы, приведенные ниже, также упрощают нахождение производной.

Теорема 8.2 (производная произведения). ***В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x)\,g(x)$, причем для всех таких точек выполняется равенство***

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x).$$

Также принята такая упрощенная запись:

$$\boxed{(fg)' = f'g + g'f}$$

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка, в которой функции f и g дифференцируемы. Найдем приращение функции $y = f(x)\, g(x)$ в точке x_0. Учитывая равенства $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$, $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g$, имеем:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x)\, g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\, g(x_0) =$$
$$= (f(x_0) + \Delta f)(g(x_0) + \Delta g) - f(x_0)\, g(x_0) =$$
$$= f(x_0)\, g(x_0) + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g - f(x_0)\, g(x_0) =$$
$$= \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g.$$

Запишем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} \right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x \right).$$

Так как функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$.

Теперь можно записать

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x =$$
$$= f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0) + f'(x_0)\, g'(x_0) \cdot 0 =$$
$$= f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0).$$

Таким образом, функция $y = f(x)\, g(x)$ дифференцируема в точке x_0, причем ее производная в этой точке равна $f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0)$. ▲

Следствие 1. ***В тех точках, в которых дифференцируема функция $y = f(x)$, также является дифференцируемой функция $y = kf(x)$, где k — некоторое число, причем для всех таких точек выполняется равенство***

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Коротко говорят: *постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

Также принята такая упрощенная запись:

$$\boxed{(kf)' = kf'}$$

Доказательство. ⊙ Так как функция $y = k$ дифференцируема в любой точке, то, применяя теорему о производной произведения, можно записать:

$$(kf(x))' = (k)' f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x). \ ▲$$

Следствие 2. ***В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x) - g(x)$, причем для всех таких точек выполняется равенство***

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Доказательство. ⊙ Имеем:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' +$$
$$+ ((-1)\, g(x))' = f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x). \ ▲$$

Теорема 8.3 (производная частного). ***В тех точках, в которых функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы и значение функции g не равно нулю, функция $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ также является дифференцируемой, причем для всех таких точек выполняется равенство***

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - g'(x)\, f(x)}{(g(x))^2}.$$

Также принята такая упрощенная запись:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}}$$

С доказательством теоремы 8.3 вы можете ознакомиться на занятиях математического кружка.

ПРИМЕР 1 Найдите производную функции:

1) $y = \frac{1}{x} - \sin x + 4x^2$;

2) $y = x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)$;

3) $y = x^3 \cos x$;

4) $y = \frac{2x^2 + 1}{3x - 2}$.

Решение

1) Пользуясь теоремой о производной суммы и следствием из теоремы о производной произведения, получаем:

$$y' = \left(\frac{1}{x} - \sin x + 4x^2\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin x)' + 4 \cdot (x^2)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4 \cdot 2x = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x.$$

2) По теореме о производной произведения имеем:

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{2}}(5x-3)\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' \cdot (5x-3) + (5x-3)' \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot (5x-3) + 5 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3-5x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{3-5x+10x}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3+5x}{2\sqrt{x^3}}.$$

3) Имеем: $y' = (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^3 =$
$= 3x^2 \cos x - \sin x \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$

4) По теореме о производной частного получаем:

$$y' = \left(\frac{2x^2+1}{3x-2}\right)' = \frac{(2x^2+1)'(3x-2) - (3x-2)'(2x^2+1)}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{4x(3x-2) - 3(2x^2+1)}{(3x-2)^2} = \frac{12x^2 - 8x - 6x^2 - 3}{(3x-2)^2} = \frac{6x^2 - 8x - 3}{(3x-2)^2}.$$

Используя теорему о производной частного, легко доказать, что:

$$\boxed{\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ (\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}}$$

Действительно,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Формулу $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ докажите самостоятельно.

Если значениями аргумента функции f являются значения функции g, то говорят, что задана **сложная функция** $y = f(g(x))$.

Например, рассмотрим функции $y = f(t)$ и $t = g(x)$, где $f(t) = 2t - 1$ и $g(x) = x^2 + x + 1$. Тогда $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1$. Следовательно, можно говорить, что формула $y = 2x^2 + 2x + 1$ задает сложную функцию $y = f(g(x))$.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Если $f(u) = \sin u$, а $g(x) = 1 - 3x$, то сложная функция $y = f(g(x))$ задается формулой $y = \sin(1 - 3x)$. Функцию $y = \cos^2 x$ можно рассматривать как сложную функцию $y = f(g(x))$, где $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$.

Находить производную сложной функции можно с помощью такой теоремы.

Теорема 8.4 (производная сложной функции). ***Если функция $t = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(t)$ дифференцируема в точке t_0, где $t_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ является дифференцируемой в точке x_0, причем***

$$y'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0).$$

С доказательством этой теоремы вы можете ознакомиться на занятиях математического кружка.

ПРИМЕР 2 Найдите значение производной функции в точке x_0:

1) $y = (3x - 7)^6$, $x_0 = 2$;

2) $y = \sqrt{4x^2 + 1}$, $x_0 = 0$;

3) $y = \sin \dfrac{x}{2}$, $x_0 = \pi$;

4) $y = \operatorname{tg}^3 5x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{15}$.

Решение

1) Данная функция $y = (3x - 7)^6$ является сложной функцией $y = f(g(x))$, где $f(t) = t^6$, $g(x) = 3x - 7$. Так как $f'(t) = 6t^5$, а $g'(x) = 3$, то по теореме о производной сложной функции можно записать:

$$y'(x) = f'(t)\, g'(x) = 6t^5 \cdot 3 \text{ при } t = 3x - 7,$$

то есть

$$y'(x) = 6(3x-7)^5 \cdot 3 = 18(3x-7)^5;$$
$$y'(2) = 18 \cdot (3 \cdot 2 - 7)^5 = -18.$$

Решение этой задачи можно оформить и так:

$$y' = ((3x-7)^6)' = 6(3x-7)^5 \cdot (3x-7)' =$$
$$= 6(3x-7)^5 \cdot 3 = 18(3x-7)^5;\ y'(2) = -18.$$

2) $y' = \left(\sqrt{4x^2+1}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{4x^2+1}} \cdot (4x^2+1)' = \dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}} = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+1}};$

$y'(0) = 0.$

3) $y' = \left(\sin\dfrac{x}{2}\right)' = \cos\dfrac{x}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2};\qquad y'(\pi) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2} = 0.$

4) $y' = \left(\operatorname{tg}^3 5x\right)' = 3\operatorname{tg}^2 5x \cdot \left(\operatorname{tg} 5x\right)' = 3\operatorname{tg}^2 5x \cdot \dfrac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \dfrac{15\operatorname{tg}^2 5x}{\cos^2 5x};$

$$y'\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{15\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{3}}{\cos^2\dfrac{\pi}{3}} = 15 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 45 : \frac{1}{4} = 180.$$

Ответ: 1) –18; 2) 0; 3) 0; 4) 180.

Упражнения

8.1.° Найдите производную функции:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10;$
2) $y = 4x^6 + 20\sqrt{x};$
3) $y = x^8 + 7x^6 + \dfrac{4}{x} - 1;$
4) $y = 4\sin x - 5\cos x;$
5) $y = -\dfrac{1}{6}x^3 + 0{,}5x^2 + 2x;$
6) $y = \operatorname{tg} x - 9x;$
7) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{8} + 2;$
8) $y = 2x^{-2} + 3x^{-3}.$

8.2.° Найдите производную функции:

1) $y = 2x^5 - x;$
2) $y = x^7 - 4\sqrt{x};$
3) $y = -3\sin x + 2\cos x;$
4) $y = \dfrac{2}{3}x^3 - x^2 - 7x;$
5) $y = x - \dfrac{5}{x};$
6) $y = 12 - \operatorname{ctg} x;$
7) $y = 0{,}4x^{-5} + \sqrt{3}.$

8.3.° Найдите производную функции:

1) $y = (x + 2)(x^2 - 4x + 5)$;
2) $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$;
3) $y = x^2 \sin x$;
4) $y = x \operatorname{ctg} x$;
5) $y = (2x+1)\sqrt{x}$;
6) $y = \sqrt{x} \cos x$.

8.4.° Найдите производную функции:

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$;
2) $y = (x+5)\sqrt{x}$;
3) $y = x^4 \cos x$;
4) $y = x \operatorname{tg} x$.

8.5.° Найдите производную функции:

1) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$;
2) $y = \dfrac{2x-3}{4-5x}$;
3) $y = \dfrac{5}{3x-2}$;
4) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$;
5) $y = \dfrac{5x^2-x-2}{x}$;
6) $y = \dfrac{x^3}{\cos x}$;
7) $y = \dfrac{3-x^2}{4+2x}$;
8) $y = \dfrac{x^2-5x}{x-7}$.

8.6.° Найдите производную функции:

1) $y = \dfrac{3x+5}{x-8}$;
2) $y = \dfrac{7}{10x-3}$;
3) $y = \dfrac{2x^2}{1-6x}$;
4) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;
5) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;
6) $y = \dfrac{x^2+6x}{x+2}$.

8.7.° Чему равно значение производной функции f в точке x_0, если:

1) $f(x) = x^8 - 3x^4 - x + 6$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \dfrac{8}{x} + 5x - 2$, $x_0 = 2$;
3) $f(x) = \dfrac{2-3x}{x+2}$, $x_0 = -3$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2} - 2\sin x$, $x_0 = 0$;
5) $f(x) = (1+3x)\sqrt{x}$, $x_0 = 9$;
6) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x}$, $x_0 = 1$;
7) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)\cos x$, $x_0 = 0$;
8) $f(x) = x \sin x$, $x_0 = 0$?

8.8.° Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x)=\sqrt{x}-16x,\ x_0=\frac{1}{4}$;

2) $f(x)=\frac{\cos x}{1-x},\ x_0=0$;

3) $f(x)=x^{-2}-4x^{-3},\ x_0=2$;

4) $f(x)=\frac{2x^2-3x-1}{x+1},\ x_0=1$.

8.9.° Задайте с помощью формул сложные функции $y=f(g(x))$ и $y=g(f(x))$, если:

1) $f(x)=\sin x,\ g(x)=x^2-1$;

2) $f(x)=x^4,\ g(x)=5x+2$;

3) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\frac{x}{x-1}$;

4) $f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=2x^2-3x+1$.

8.10.° Задайте с помощью формул сложные функции $y=f(g(x))$ и $y=g(f(x))$, если:

1) $f(x)=x^2,\ g(x)=\operatorname{tg} x$;
2) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ g(x)=\frac{x+1}{x+2}$.

8.11.• Могут ли две разные функции иметь равные производные? Ответ проиллюстрируйте примерами.

8.12.• Найдите производную функции:

1) $y=(2x+3)^5$;

2) $y=\left(\frac{1}{3}x-6\right)^{18}$;

3) $y=\cos 2x$;

4) $y=\sin^2 x$;

5) $y=3\operatorname{ctg}\frac{x}{5}$;

6) $y=\sqrt{2x+1}$;

7) $y=\sqrt[3]{1-x}$;

8) $y=\sqrt{x^2+1}$;

9) $y=\sqrt{x^3-3x}$;

10) $y=\frac{1}{4x+5}$;

11) $y=(6-7x)^{-4}$;

12) $y=\left(\frac{x^2}{2}+4x-1\right)^{-6}$;

13) $y=\sqrt{\sin x}$;

14) $y=\sin\sqrt{x}$.

8.13.• Найдите производную функции:

1) $y = (3x - 5)^6$;
2) $y = (2x^2 - 3x + 4)^3$;
3) $y = \sin \frac{x}{3}$;
4) $y = \cos^2 x$;
5) $y = 2 \operatorname{tg} 4x$;
6) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;
7) $y = \sqrt{1 - x^2}$;
8) $y = \sqrt[4]{6x + 8}$;
9) $y = (9x - 2)^{-3}$;
10) $y = \sqrt{\cos x}$.

8.14.• Вася Ошибочкин находит производную функции $y = \sin 2x$ так:

1) делает замену $2x = t$ и получает функцию $y = \sin t$;
2) далее пишет: $y' = (\sin t)' = \cos t$;
3) потом подставляет значение $2x = t$ и делает вывод, что $(\sin 2x)' = \cos 2x$.

В чем состоит ошибка Васи?

8.15.• Тело двигается по координатной прямой по закону $s(t) = \sqrt{4t^2 - 6t + 11}$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите скорость движения тела в момент времени $t_0 = 5$ с.

8.16.• Материальная точка двигается по координатной прямой по закону $s(t) = (t + 2)^2 (t + 5)$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите ее скорость движения в момент времени $t_0 = 3$ с.

8.17.• Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $x_0 = -3$;
2) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
3) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

8.18.• Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \sqrt{4 - 3x}$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$;
3) $f(x) = \operatorname{ctg}^4 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

8.19.• Решите неравенство $f'(x) > 0$, если:

1) $f(x) = 6x - 3x^2$;
2) $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2 - 1$;
3) $f(x) = x^4 - 2x^2$;
4) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 7$;
5) $f(x) = \frac{1}{2}x - \cos x$;
6) $f(x) = x + \operatorname{tg} x$.

8.20.• Решите неравенство $f'(x) \leqslant 0$, если:

1) $f(x) = x^2 - 3x + 1$;
2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$;
3) $f(x) = 3x^2 - x^3$;
4) $f(x) = x^4 + 2x^2$;
5) $f(x) = 2\sin x + 1$;
6) $f(x) = x - \cos x$.

8.21.• Найдите производную функции:

1) $y = \frac{1}{x^9} - \frac{3}{x^3}$;
2) $y = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^5}$;
3) $y = x\sqrt{2x+1}$;
4) $y = \sin x \cos 2x$;
5) $y = \operatorname{tg} x \sin(2x + 5)$;
6) $y = \frac{\cos 3x}{x-1}$;
7) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$;
8) $y = (x + 1)^3 (x - 2)^4$;
9) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

8.22.• Найдите производную функции:

1) $y = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^8}$;
2) $y = \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{5}{x^6}$;
3) $y = x\sqrt{x+3}$;
4) $y = \sin 2x \cos x$;
5) $y = (x + 2)^5 (x - 3)^4$;
6) $y = \frac{2x-3}{\sin\frac{x}{4}}$.

8.23.• Решите неравенство $f'(x) \leqslant 0$, если:

1) $f(x) = \frac{2x+5}{x+2}$;
2) $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$;
3) $f(x) = (x - 2)^2 (x + 3)$;
4) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
5) $f(x) = 2\sin^2 x - \sqrt{2}\,x$;
6) $f(x) = \sin 2x - x\sqrt{3}$.

8.24.$^{\bullet}$ Решите неравенство $f'(x) > 0$, если:

1) $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$;
2) $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x+2}$;
3) $f(x)=\dfrac{4}{x}+2x$;
4) $f(x) = (x + 2)^2 (x - 3)$;
5) $f(x) = \cos 2x$;
6) $f(x) = 2x - \cos 4x$.

8.25.$^{\bullet}$ Материальная точка массой 4 кг двигается по координатной прямой по закону $s(t) = t^2 + 4$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите импульс $p(t) = mv(t)$ материальной точки в момент времени $t_0 = 2$ с.

8.26.$^{\bullet}$ Тело массой 2 кг двигается по координатной прямой по закону $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите кинетическую энергию $E(t)=\dfrac{mv^2(t)}{2}$ тела в момент времени $t_0 = 4$ с.

8.27.$^{\bullet}$ Тело двигается по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^2 - 8t + 15$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Определите координату тела в момент времени, когда его кинетическая энергия равна нулю.

8.28.$^{\bullet\bullet}$ Найдите производную функции:

1) $y = \cos^3 2x$;
2) $y=\sqrt{\sin\left(\dfrac{x}{5}-\dfrac{\pi}{4}\right)}$;
3) $y=\left(\sin\dfrac{x}{3}-5\right)^6$.

8.29.$^{\bullet\bullet}$ Вычислите:

1) $f'(0)$, если $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2x-1}}$;
2) $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, если $f(x)=\sin^2\dfrac{x}{2}$;
3) $f'(0)$, если $f(x) = (\cos 3x + 6)^3$.

8.30.$^{\bullet\bullet}$ В точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$ найдите производную функции:
1) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$;
2) $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$.

8.31.$^{\bullet\bullet}$ В точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$ найдите производную функции:
1) $f(x) = x^2 - 6|x| + 5$;
2) $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$.

8.32.•• Решите уравнение:

1) $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, если $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 18x$, $g(x) = 2\sqrt{x}$;

2) $f'(x)\,g'(x) = 0$, если $f(x) = x^3 - 6x^2$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{3}$.

8.33.•• Решите уравнение:

1) $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, если $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$;

2) $f'(x)\,g'(x) = 0$, если $f(x) = x^3 - x^2$, $g(x) = 2\sqrt{x}$.

8.34.•• Докажите, что производная периодической функции является периодической функцией. Приведите примеры.

8.35.•• Докажите, что производная четной функции является нечетной функцией. Приведите примеры.

8.36.•• Докажите, что производная нечетной функции является четной функцией. Приведите примеры.

8.37.•• Функции f и g определены на $\mathbb{R}$. Что можно утверждать о дифференцируемости функции $y = f(x) + g(x)$ в точке x_0, если:

1) f дифференцируема в точке x_0, а g — нет;

2) f и g не дифференцируемы в точке x_0?

8.38.•• Функции f и g определены на $\mathbb{R}$. Что можно утверждать о дифференцируемости функции $y = f(x)g(x)$ в точке x_0, если:

1) f дифференцируема в точке x_0, а g — нет;

2) f и g не дифференцируемы в точке x_0?

Готовимся к изучению новой темы

8.39. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; -3)$ и параллельной оси абсцисс.

8.40. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $M(1; -4)$ и угловой коэффициент которой равен: 1) 4; 2) 0; 3) −1.

8.41. Среди прямых, заданных уравнениями, укажите пары параллельных:

1) $y = 3x - 5$; 3) $y = -3x$; 5) $y - 3x + 2 = 0$;

2) $y = -3x - 5$; 4) $y = 7 - 3x$; 6) $y = \frac{1}{3}x + 7$.

8.42. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A $(-1;\ 9)$ и параллельной прямой $y = 9x - 16$.

8.43. Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 4x + 2$ и пересекает прямую $y = -8x + 9$ в точке, принадлежащей оси ординат.

9. Уравнение касательной

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда к графику функции f в точке с абсциссой x_0 можно провести невертикальную касательную (рис. 9.1).

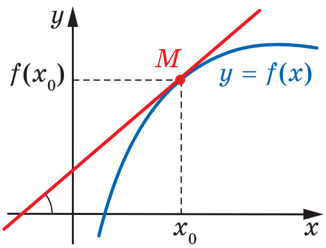


Рис. 9.1

Из курса геометрии 9 класса вы знаете, что уравнение невертикальной прямой имеет вид

$y = kx + b$, где k — угловой коэффициент этой прямой.

Исходя из геометрического смысла производной, получаем $k = f'(x_0)$.

Тогда уравнение касательной можно записать так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \qquad (1)$$

Эта прямая проходит через точку M $(x_0;\ f(x_0))$. Следовательно, координаты этой точки удовлетворяют уравнению (1). Имеем: $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$.

Отсюда $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Тогда уравнение (1) можно переписать так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Следовательно, **уравнение касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0**, имеет вид:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

ПРИМЕР 1 Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

Решение. Имеем:

$$f(x_0) = f(-2) = 2 - 4\cdot(-2) - 3\cdot(-2)^2 = -2;\ f'(x) = -4 - 6x;$$
$$f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6\cdot(-2) = 8.$$

Подставив найденные числовые значения в уравнение касательной, получаем: $y = 8(x + 2) - 2$, то есть $y = 8x + 14$.

Ответ: $y = 8x + 14$.

ПРИМЕР 2 Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 - 6x$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

Решение. Решив уравнение $2x^2 - 6x = 0$, найдем абсциссы точек пересечения графика функции f с осью абсцисс. Имеем: $2x(x - 3) = 0$; $x = 0$ или $x = 3$.

Запишем уравнение касательной в каждой из найденных точек.

1) Если $x_0 = 0$, то $f(0) = 0$; $f'(x) = 4x - 6$; $f'(0) = -6$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y = -6x$.

2) Если $x_0 = 3$, то $f(3) = 0$; $f'(3) = 4\cdot 3 - 6 = 6$. Тогда искомое уравнение имеет вид $y = 6(x - 3)$, то есть $y = 6x - 18$.

Ответ: $y = -6x$, $y = 6x - 18$.

ПРИМЕР 3 Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{x+4}{x-4}$, если эта касательная параллельна прямой $y = -2x + 4$.

Решение. Имеем:

$$f'(x) = \frac{(x+4)'(x-4)-(x-4)'(x+4)}{(x-4)^2} = \frac{(x-4)-(x+4)}{(x-4)^2} = -\frac{8}{(x-4)^2}.$$

Если касательная параллельна прямой $y = -2x + 4$, то ее угловой коэффициент k равен -2.

Так как $f'(x_0) = k$, где x_0 — абсцисса точки касания искомой прямой к графику функции f, то $f'(x_0) = -2$, то есть $-\dfrac{8}{(x_0-4)^2} = -2$. Отсюда

$$(x_0 - 4)^2 = 4;\ \left[\begin{array}{l} x_0 - 4 = 2, \\ x_0 - 4 = -2; \end{array}\right. \ \left[\begin{array}{l} x_0 = 6, \\ x_0 = 2. \end{array}\right.$$

Следовательно, на графике функции $f(x)=\dfrac{x+4}{x-4}$ существуют две точки, касательные в которых параллельны данной прямой.

При $x_0 = 6$ имеем: $f(x_0) = 5$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y = -2(x - 6) + 5$; $y = -2x + 17$.

При $x_0 = 2$ получаем: $f(x_0) = -3$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y = -2(x - 2) - 3$; $y = -2x + 1$.

Ответ: $y = -2x + 17$ и $y = -2x + 1$.

ПРИМЕР 4 Найдите абсциссу точки графика функции $f(x)=\sqrt{2x-1}$, в которой проведенная к нему касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45°.

Решение. Имеем:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot(2x-1)'=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

Так как касательная образует угол 45° с положительным направлением оси абсцисс, то ее угловой коэффициент k равен $\operatorname{tg} 45°$, то есть $k = 1$. Пусть x_0 — абсцисса точки касания. Тогда $f'(x_0) = 1$.

Получаем $\dfrac{1}{\sqrt{2x_0-1}}=1$. Отсюда $\sqrt{2x_0-1}=1$; $2x_0 - 1 = 1$; $x_0 = 1$.

Ответ: 1.

ПРИМЕР 5 Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 - 5x - 6$, проходящей через точку $M(-1; -1)$.

Решение. Заметим, что $f(-1) \neq -1$. Из этого следует, что точка $M(-1; -1)$ не принадлежит графику функции f.

Пусть $A(x_0; f(x_0))$ — точка касания искомой прямой к графику функции f. Так как $f(x_0)=-x_0^2-5x_0-6$ и $f'(x_0) = -2x_0 - 5$, то уравнение касательной имеет вид

$$y=(-2x_0-5)(x-x_0)+(-x_0^2-5x_0-6).$$

Учитывая, что координаты точки $M(-1; -1)$ удовлетворяют полученному уравнению, имеем

$$-1=(-2x_0-5)(-1-x_0)+(-x_0^2-5x_0-6).$$

Отсюда, раскрыв скобки и решив квадратное уравнение, получим $x_0 = 0$ или $x_0 = -2$. Таким образом, через точку M проходят две касательные к графику функции f: $y = -5x - 6$ и $y = -x - 2$.

Ответ: $y = -5x - 6$, $y = -x - 2$.

Упражнения

9.1.° Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = x^3 - 27$, $x_0 = 2$;
3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;
4) $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$, $x_0 = 9$;
5) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$;
6) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$;
7) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
8) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x_0 = -2$;
9) $f(x) = \sqrt{2x+5}$, $x_0 = 2$.

9.2.° Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 2$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{5\pi}{2}$;
5) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$;
6) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x}$, $x_0 = -1$;
7) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$, $x_0 = 3$.

9.3.• Запишите уравнение касательной к графику данной функции в точке его пересечения с осью ординат:

1) $f(x) = x^2 - 3x - 3$;
2) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

9.4.• Запишите уравнение касательной к графику данной функции в точке его пересечения с осью ординат:

1) $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$; 2) $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

9.5.• Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке его пересечения с осью абсцисс:

1) $f(x) = 8x^3 - 1$; 2) $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

9.6.• Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке его пересечения с осью абсцисс:

1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$; 2) $f(x) = 3x - x^2$.

9.7.• Найдите координаты точки параболы $y = 2x^2 - x + 1$, в которой касательная к ней параллельна прямой $y = 7x - 8$.

9.8.• В каких точках касательные к графику функции $y = \frac{1}{x}$ параллельны прямой $y = -x$?

9.9.• К графику функции $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ проведены касательные в точках с абсциссами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Каково взаимное расположение этих касательных?

9.10.• Найдите такую точку графика функции f, что проведенная в этой точке касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол α, если:

1) $f(x) = x^2 - 7x + 3$, $\alpha = 45°$;
2) $f(x) = -3x^2 + 2\sqrt{3}x - 2$, $\alpha = 60°$;
3) $f(x) = \sqrt{3x+2}$, $\alpha = 45°$;
4) $f(x) = \frac{x+7}{x-2}$, $\alpha = 135°$.

9.11.• Найдите такую точку графика функции f, что проведенная в этой точке касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол α, если:

1) $f(x) = \sqrt{3}x - \frac{x^3}{3}$, $\alpha = 60°$;
2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, $\alpha = 45°$.

9.12.• Докажите, что любая касательная к графику функции f образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс:

1) $f(x) = 6 - x - x^3$; 2) $f(x)=\frac{5-x}{x-3}$.

9.13.• Докажите, что любая касательная к графику функции f образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс:

1) $f(x) = x^5 + 2x - 8$; 2) $f(x)=\frac{4}{1-x}$.

9.14.• Найдите уравнения горизонтальных касательных к графику функции:

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$; 2) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^2+1$.

9.15.• Найдите уравнения горизонтальных касательных к графику функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$.

9.16.•• Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = x^2 - 5x$, если эта касательная параллельна прямой $y = -x$;

2) $f(x)=x-\frac{1}{x^2}$, если эта касательная параллельна прямой $y = 3x$;

3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 1$, если эта касательная параллельна прямой $y = 2x + 1$.

9.17.•• Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$, если эта касательная параллельна прямой $y = -7x + 3$;

2) $f(x)=\sqrt{x}$, если эта касательная параллельна прямой $y = x$.

9.18.•• Определите, является ли прямая $y = 12x - 10$ касательной к графику функции $f(x) = 4x^3$. В случае утвердительного ответа укажите абсциссу точки касания.

9.19.•• Определите, является ли прямая $y = x$ касательной к графику функции $y = \sin x$. В случае утвердительного ответа укажите абсциссу точки касания.

9.20.•• Определите, является ли прямая $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ касательной к графику функции $y=\sqrt{x}$. В случае утвердительного ответа укажите абсциссу точки касания.

9.21.•• Вычислите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

9.22.•• Вычислите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

9.23.•• Касательной к графику которой из функций $y = x^2 - 2$, $y = x^3 - 2x$, $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ является прямая, изображенная на рисунке 9.2?

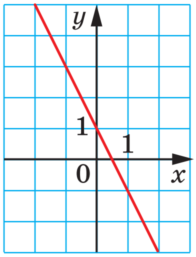


Рис. 9.2

9.24.•• На графике функции $f(x) = -\sqrt{2x+1}$ найдите точку, касательная в которой перпендикулярна прямой $y - 2x + 1 = 0$.

9.25.•• Существуют ли касательные к графику функции $f(x) = x^3 + 2x - 1$, которые перпендикулярны прямой $y = -x$?

9.26.•• При каких значениях b и c парабола $y = x^2 + bx + c$ касается прямой $y = 4x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$?

9.27.•• При каких значениях a и b прямая $y = 7x - 2$ касается параболы $y = ax^2 + bx + 1$ в точке $A\ (1;\ 5)$?

9.28.•• Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 + 2$, если эта касательная проходит через точку $M\ (0;\ 1)$.

9.29.•• Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4$, если эта касательная проходит через точку $M\ (2;\ -1)$.

9.30.•• В какой точке графика функции $f(x) = \dfrac{4x-1}{x}$ надо провести касательную, чтобы эта касательная проходила через начало координат?

9.31.•• В какой точке графика функции $y = x + \frac{3}{x}$ надо провести касательную, чтобы эта касательная пересекла ось ординат в точке (0; 6)?

9.32.* Две перпендикулярные касательные к графику функции $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$ пересекаются в точке A, которая принадлежит оси ординат. Найдите координаты точки A.

9.33.* Две перпендикулярные касательные к графику функции $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}$ пересекаются в точке A, которая принадлежит оси ординат. Найдите координаты точки A.

9.34.* При каких значениях a прямая $y = ax + 1$ является касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{4x+1}$?

9.35.* При каких значениях a прямая $y = 2x + a$ является касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{4x-1}$?

9.36.* Найдите уравнение общей касательной к графикам функций $f(x) = x^2 - 2x + 5$ и $g(x) = x^2 + 2x - 11$.

9.37.* Найдите уравнение общей касательной к графикам функций $f(x) = x^2 + 4x + 8$ и $g(x) = x^2 + 8x + 4$.

Готовимся к изучению новой темы

9.38. Решите неравенство:

1) $x^2 + x - 12 > 0$;

2) $x^2 - 3x - 10 \leqslant 0$;

3) $6x - x^2 \geqslant 0$;

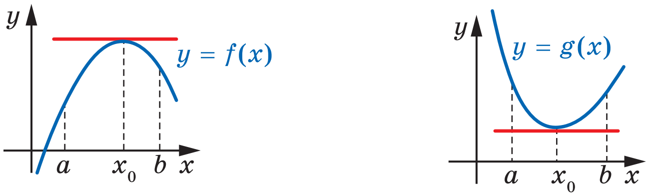
4) $\frac{x^2+10x+9}{x^2-4x+3} < 0$;

5) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+9} \leqslant 0$;

6) $(x+1)^3(x-1)^2(x-3)^6 > 0$.

10. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа

Рассмотрим функцию f и такую точку x_0 интервала $(a; b)$, что $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$ (рис. 10.1, *а*). На рисунке 10.1, *б* изображен график функции g такой, что $\min\limits_{[a;b]} g(x) = g(x_0)$.



а *б*

Рис. 10.1

Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0. Тогда к графикам этих функций в точке с абсциссой x_0 можно провести касательные. Из наглядных соображений очевидно, что эти касательные будут горизонтальными прямыми. Поскольку угловой коэффициент горизонтальной прямой равен нулю, то $f'(x_0) = 0$ и $g'(x_0) = 0$.

Этот вывод можно проиллюстрировать с помощью механической интерпретации.

Если материальная точка двигается по координатной прямой по закону $y = s(t)$, $t \in [a; b]$ и функция $y = s(t)$ принимает в точке $t_0 \in (a; b)$ наибольшее (наименьшее) значение, то это означает, что в момент времени t_0 материальная точка изменяет направление движения на противоположное. Понятно, что в этот момент времени скорость материальной точки равна нулю, то есть $v(t_0) = s'(t_0) = 0$.

Полученные выводы подтверждает такая теорема.

Теорема 10.1 (теорема Ферма). ***Пусть функция f, определенная на промежутке $[a; b]$, в точке $x_0 \in (a; b)$ принимает свое наименьшее (наибольшее) значение. Если функция f является дифференцируемой в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$.***

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$ (случай $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$ рассматривают аналогично).

Пусть $x \in [a;\ b]$, тогда $\Delta f = f(x) - f(x_0) \geqslant 0$. Если $\Delta x = x - x_0 > 0$ (рис. 10.2), то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$. Отсюда $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$.

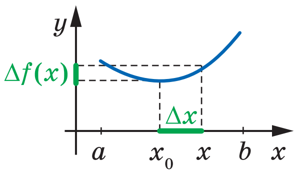


Рис. 10.2

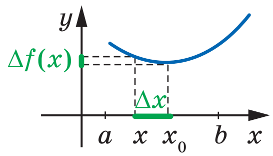


Рис. 10.3

Если $\Delta x < 0$ (рис. 10.3), то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$. Отсюда

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0.$$

Следовательно, доказано, что одновременно выполняются два неравенства: $f'(x_0) \geqslant 0$ и $f'(x_0) \leqslant 0$. Поэтому $f'(x_0) = 0$. ▲

На рисунке 10.4 изображен график функции f, дифференцируемой на отрезке $[a;\ b]$, которая в точках a и b принимает одинаковые значения.

Из рисунка видно: существует по крайней мере одна такая точка $x_0 \in (a;\ b)$, что касательная к графику в точке с абсциссой x_0 является горизонтальной прямой, то есть $f'(x_0) = 0$.

Мишель Ролль (1652–1719)

Французский математик, член Парижской академии наук.

Основные его труды посвящены методам численного решения уравнений. Большинство научных достижений М. Ролля не были замечены при его жизни; их оценили значительно позже.

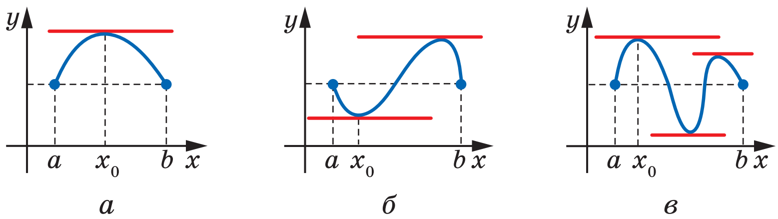


Рис. 10.4

Этот вывод можно проиллюстрировать с помощью механической интерпретации.

Если материальная точка двигается по координатной прямой по закону $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, то равенство $s(a) = s(b)$ означает, что в момент времени $t = b$ материальная точка вернулась в начальное положение. Следовательно, в некоторый момент времени $t_0 \in (a; b)$ она изменила направление движения на противоположное, то есть $v(t_0) = s'(t_0) = 0$.

Полученные выводы подтверждает следующая теорема.

Теорема 10.2 (теорема Ролля). ***Если функция f дифференцируема на отрезке $[a; b]$, причем $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $x_0 \in (a; b)$, что $f'(x_0) = 0$.***

Доказательство. Поскольку функция дифференцируема на отрезке $[a; b]$, то по теореме 7.1 она является непрерывной на этом промежутке. Тогда по теореме Вейерштрасса на отрезке $[a; b]$ существуют такие значения аргумента, при которых функция f достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Иными словами, существуют такие числа m и M, что $\min\limits_{[a;b]} f(x) = m$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = M$. Тогда для любого $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Если $m = M$, то функция f является константой на промежутке $[a; b]$. Следовательно, $f'(x) = 0$ для любого $x \in [a; b]$.

Рассмотрим случай, когда $m \neq M$. Тогда функция f не может на одном конце отрезка $[a; b]$ принимать наибольшее значение, а на другом — наименьшее. Действительно, $f(a) = f(b)$, а $m \neq M$. Следовательно, существует такая точка $x_0 \in (a; b)$, что функция в этой точке принимает свое наибольшее или наименьшее значение. Тогда по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$. ▲

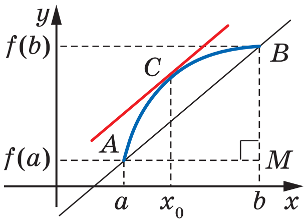


Рис. 10.5

На рисунке 10.5 изображен график функции, дифференцируемой на отрезке $[a; b]$.

Проведем прямую AB. Из треугольника AMB можно найти угловой коэффициент этой прямой:

$$\operatorname{tg} \angle BAM = \frac{BM}{AM} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Из рисунка видно, что на дуге AB существует такая точка C, что касательная к графику в этой точке параллельна прямой AB.

Угловой коэффициент $f'(x_0)$ этой касательной равен угловому коэффициенту прямой AB, то есть существует точка $x_0 \in (a; b)$, такая, что

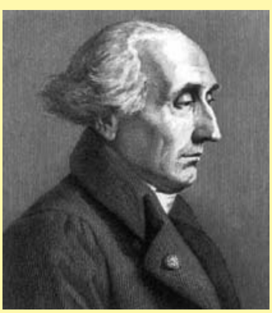
$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Этот вывод иллюстрирует также механическая интерпретация. Если материальная точка двигается по координатной прямой по закону $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, то средняя скорость равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Понятно, что во время движения существует такой момент $t_0 \in (a; b)$, когда мгновенная скорость равна средней, то есть

$$v(t_0) = s'(t_0) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$



Жозеф Луи Лагранж
(1736–1813)

Французский математик, механик и астроном, президент Берлинской академии наук, член Парижской академии наук. Основные труды — в области математического анализа, вариационного исчисления, алгебры, теории чисел, дифференциальных уравнений, механики. Кавалер ордена Почетного легиона.

Полученные выводы подтверждает следующая теорема.

Теорема 10.3 (теорема Лагранжа). ***Если функция f дифференцируема на отрезке $[a; b]$, то существует такая точка $x_0 \in (a; b)$, что***

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - \lambda x$, где $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Очевидно, что функция g является дифференцируемой на отрезке $[a; b]$. Легко проверить (сделайте это самостоятельно), что $g(a) = g(b)$. Следовательно, функция g удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.

Таким образом, существует точка $x_0 \in (a; b)$ такая, что $g'(x_0) = 0$. Так как $g'(x) = f'(x) - \lambda$, то $f'(x_0) - \lambda = 0$. Отсюда

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \ \blacktriangle$$

Заметим, что теоремы Ролля и Лагранжа не указывают, как найти точку x_0. Они лишь гарантируют, что существует точка, обладающая некоторым свойством.

Упражнения

10.1.° Известно, что функция f в точке x_0 принимает наибольшее или наименьшее значение. Проверьте равенство $f'(x_0) = 0$, если:

1) $f(x) = x^6$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

10.2.° Известно, что функция f в точке x_0 принимает наибольшее или наименьшее значение. Проверьте равенство $f'(x_0) = 0$, если:

1) $f(x) = 5 - x^2$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$.

10.3.• Запишите теорему Лагранжа для отрезка $[1; 2]$. На интервале $(1; 2)$ найдите такую точку x_0, для которой выполняется равенство $f(2) - f(1) = f'(x_0)$, если:

1) $f(x) = x^3$;
2) $f(x) = \frac{1}{x}$;
3) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$.

10.4.° Запишите теорему Лагранжа для отрезка [1; 3]. На интервале (1; 3) найдите такую точку x_0, для которой выполняется равенство $\frac{f(3)-f(1)}{2}=f'(x_0)$, если:

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x)=\sqrt{x}$; 3) $f(x)=\cos\frac{\pi x}{4}$.

10.5.° Используя теорему Ферма, докажите, что функция f не принимает в точке x_0 ни наибольшего, ни наименьшего значения, если:

1) $f(x) = x^4 + x + 1$, $x_0 = -0{,}5$;

2) $f(x)=\frac{1}{1-x}-x-\frac{1}{x}$, $D(f) = (1; 3)$, $x_0 = 2$;

3) $f(x) = \sin x + \cos x^2$, $D(f) = [1; 2]$, $x_0 =\frac{\pi}{2}$.

10.6.° Докажите, что функция f не принимает в точке x_0 ни наибольшего, ни наименьшего значения, если:

1) $f(x) = (x^2 + 6x + 8)(x^2 + 14x + 48)$, $x_0 = -3$;

2) $f(x)=\frac{2}{x}+x^2+\frac{1}{x+3}$, $D(f) = (0; +\infty)$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \cos x - \sin x^2$, $D(f) = [0; 2]$, $x_0 =\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

10.7.•• Используя теорему Лагранжа, докажите неравенство:

1) $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$;

2) $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geqslant |x - y|$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

10.8.•• Докажите неравенство:

1) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$;

2) $|\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y| \geqslant |x - y|$, $x \in (0; \pi)$, $y \in (0; \pi)$.

10.9.•• Функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$. Воспользовавшись теоремой Ролля для функции $g(x) = f(x)\sin x$, докажите, что уравнение $f'(x)\sin x + f(x)\cos x = 0$ имеет по крайней мере один корень на отрезке $[0; \pi]$.

10.10.•• Функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$. Докажите, что уравнение $f'(x) = f(x)\operatorname{tg} x$ имеет по крайней мере один корень на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

10.11.•• Вася Ошибочкин хочет доказать, что производная функции $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$ равна нулю. Он говорит, что $f(-1) = f(1)$. Поэтому по теореме Ролля существует точка $x_0 \in (-1; 1)$ такая, что $f'(x_0) = 0$. Однако на интервале $(0; 1)$ такой точки x_0 не существует, поскольку на этом промежутке $f(x) = x$ и $f'(x) = 1$. Из таких же соображений ее нет на интервале $(-1; 0)$. Получается, что $x_0 = 0$. Следовательно, $f'(x_0) = f'(0) = 0$. Прав ли Вася?

11. Признаки возрастания и убывания функции

Вы знаете, что если функция является константой, то ее производная равна нулю. Возникает вопрос: если функция f такова, что для всех x из промежутка I выполняется равенство $f'(x) = 0$, то является ли функция f константой на промежутке I?

Обратимся к механической интерпретации.

Пусть $y = s(t)$ — закон движения материальной точки по координатной прямой. Если в любой момент времени t от t_1 до t_2 выполняется равенство $s'(t) = 0$, то на протяжении рассматриваемого промежутка времени мгновенная скорость равна нулю, то есть точка не двигается и ее координата не изменяется. Это означает, что на рассматриваемом промежутке функция $y = s(t)$ является константой.

Эти соображения подсказывают, что справедлива следующая теорема.

Теорема 11.1 (признак постоянства функции). ***Если для всех x из промежутка I выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция f является константой на этом промежутке.***

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента функции f, взятые из промежутка I, причем $x_1 < x_2$.

Поскольку $[x_1; x_2] \subset I$ и функция f дифференцируема на I, то для отрезка $[x_1; x_2]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа. Тогда существует точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ такая, что

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Поскольку $x_0 \in I$, то $f'(x_0) = 0$. Следовательно, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$. Отсюда $f(x_2) = f(x_1)$. Учитывая, что числа x_1 и x_2 выбраны произвольным образом, можем сделать вывод: функция f является константой на промежутке I. ▲

На рисунке 11.1 изображен график некоторой функции f, которая является дифференцируемой на промежутке $[a; b]$. Этот график имеет такое свойство: любая касательная к графику образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс.

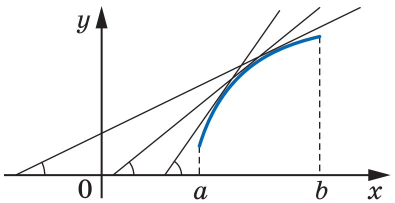


Рис. 11.1

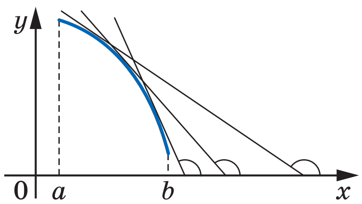


Рис. 11.2

Поскольку тангенс острого угла — положительное число, то угловой коэффициент любой касательной также является положительным. Тогда, исходя из геометрического смысла производной, можно сделать такой вывод: для любого $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$.

Из рисунка 11.1 видно, что функция f возрастает на рассматриваемом промежутке.

На рисунке 11.2 изображен график некоторой функции f, дифференцируемой на промежутке $[a; b]$. Любая касательная к графику образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс.

Поскольку тангенс тупого угла — отрицательное число, то угловой коэффициент любой касательной также является отрицательным. Тогда для любого $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$.

Из рисунка 11.2 видно, что функция f убывает на рассматриваемом промежутке.

Эти примеры показывают, что знак производной функции на некотором промежутке I влияет на то, является ли эта функция возрастающей (убывающей) на промежутке I.

Связь между знаком производной и возрастанием (убыванием) функции можно увидеть и с помощью механической интерпретации. Если скорость, то есть производная функции $y = s(t)$, положительна, то точка на координатной прямой двигается вправо (рис. 11.3). Это означает, что из неравенства $t_1 < t_2$ следует неравенство $s(t_1) < s(t_2)$, то есть функция $y = s(t)$ является возрастающей. Аналогично, если скорость отрицательна, то точка двигается влево, то есть функция $y = s(t)$ является убывающей.

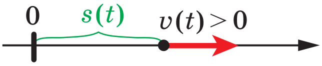


Рис. 11.3

Связь между знаком производной и возрастанием (убыванием) функции устанавливают следующие две теоремы.

Теорема 11.2 (признак возрастания функции). ***Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция f возрастает на этом промежутке.***

Теорема 11.3 (признак убывания функции). ***Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x) < 0$, то функция f убывает на этом промежутке.***

ПРИМЕР 1 Докажите, что функция $f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x - 100$ возрастает на множестве действительных чисел.

Решение. Имеем: $f'(x) = x^4 + x^2 + 1$. Так как $x^4 + x^2 + 1 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то функция f возрастает на множестве действительных чисел. ●

Докажем теорему 11.2 (теорему 11.3 доказывают аналогично).

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента функции f, взятые из промежутка I, причем $x_2 > x_1$.

Поскольку $[x_1; x_2] \subset I$ и функция f дифференцируема на I, то для отрезка $[x_1; x_2]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа. Тогда существует точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ такая, что

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Поскольку $x_0 \in I$, то $f'(x_0) > 0$. Следовательно, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. Тогда из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, то есть функция f возрастает на I. ▲

Заметим, что имеет место и такое утверждение: если дифференцируемая на промежутке I функция f возрастает (убывает), то для всех x из этого промежутка выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$.

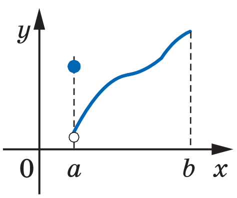


Рис. 11.4

Если функция f определена на промежутке $[a; b)$ и возрастает на интервале $(a; b)$, то это не означает, что она возрастает на промежутке $[a; b)$ (рис. 11.4). Исследовать возрастание и убывание функции на различных промежутках помогает следующая ключевая задача.

ЗАДАЧА Пусть для произвольного $x \in (a; b)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$ и функция f имеет производную в точке a. Докажите, что функция f возрастает на промежутке $[a; b)$.

Решение. Из теоремы 11.2 следует только то, что функция f возрастает на интервале $(a; b)$. Чтобы доказать, что функция f возрастает на промежутке $[a; b)$, нужно дополнительное исследование.

Пусть x — произвольная точка промежутка $(a; b)$. Докажем, что $f(x) > f(a)$. Из теоремы Лагранжа для функции f на отрезке $[a; x]$ следует существование такой точки $x_0 \in (a; x)$, что

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Поскольку $x_0 \in (a; b)$, то $f'(x_0) > 0$. Отсюда $f(x) > f(a)$.

Таким образом, доказано, что функция f возрастает на промежутке $[a; b]$. ●

Замечание 1. На самом деле сформулированное в данной задаче условие можно ослабить, заменив требование дифференцируемости функции f в точке $x = a$ на ее непрерывность в этой точке. То есть, имеет место такое утверждение: если для всех $x \in (a; b)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$ и функция f непрерывна в точке $x = a$, то функция f возрастает на промежутке $[a; b)$.

Замечание 2. Используя соответствующие утверждения, можно обосновать возрастание (убывание) функции f на промежутках другого вида, например, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, $[a; b]$. Например, если для всех $x \in (a; +\infty)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$ и функция f непрерывна в точке $x = a$, то функция f возрастает на промежутке $[a; +\infty)$.

ПРИМЕР 2 Найдите промежутки возрастания (убывания) функции $f(x) = x^2 - 2x$.

Решение. Имеем: $f'(x) = 2x - 2$. Решив неравенства $2x - 2 > 0$ и $2x - 2 < 0$, приходим к такому: $f'(x) > 0$ на промежутке $(1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ на промежутке $(-\infty; 1)$. Следовательно, функция f возрастает на промежутке $(1; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 1)$.

На рисунке 11.5 изображен график функции f. Из рисунка видно, что на самом деле функция f возрастает на промежутке $[1; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 1]$.

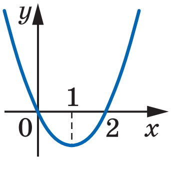


Рис. 11.5

При записи ответа будем руководствоваться таким правилом: если функция f непрерывна в каком-то из концов промежутка возрастания (убывания), то эту точку присоединяют к этому промежутку. В нашем примере функция $f(x) = x^2 - 2x$ непрерывна в точке $x = 1$, поэтому эту точку присоединили к промежуткам $(1; +\infty)$ и $(-\infty; 1)$.

Ответ: возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$.

ПРИМЕР 3 Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$; 3) $f(x)=\frac{x^2+4x-1}{x-1}$;

2) $f(x)=-\frac{3}{4}x^4+4x^3-6x^2+5$; 4) $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$.

Решение. 1) Имеем: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$.

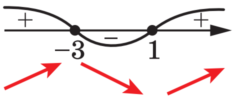


Рис. 11.6

Исследуем знак производной методом интервалов (рис. 11.6) и учтем непрерывность функции f в точках $x = -3$ и $x = 1$. Получаем, что функция f возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -3]$ и $[1; +\infty)$ и убывает на промежутке $[-3; 1]$.

2) Имеем: $f'(x)=-3x^3+12x^2-12x=-3x(x^2-4x+4)=-3x(x-2)^2$.

Исследовав знак производной (рис. 11.7), приходим к выводу, что функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.

3) Имеем: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Найдя производную функции f, получаем:

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}.$$

Исследуем знак функции $y = f'(x)$ (рис. 11.8). Следовательно, данная функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -1]$ и $[3; +\infty)$ и убывает на каждом из промежутков $[-1; 1)$ и $(1; 3]$.

4) Имеем: $D(f) = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$. Найдем производную функции f: $f'(x)=\left(\sqrt{x^2-3x}\right)'=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$. Заметим, что в точках $x = 0$ и $x = 3$ функция f не является дифференцируемой, однако является непрерывной.

Неравенство $\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}>0$ равносильно системе $\begin{cases}2x-3>0,\\ x^2-3x>0.\end{cases}$

Решив ее, получаем, что множеством решений рассматриваемого неравенства является промежуток $(3; +\infty)$.

Далее легко установить, что множеством решений неравенства $\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}<0$ является промежуток $(-\infty; 0)$.

Следовательно, если $x < 0$, то $f'(x) < 0$; если $x > 3$, то $f'(x) > 0$ (рис. 11.9).

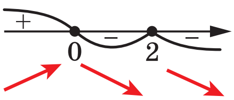


Рис. 11.7

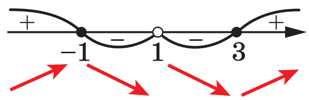


Рис. 11.8

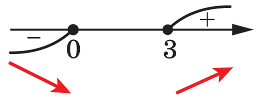


Рис. 11.9

Поэтому функция f возрастает на промежутке $[3; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$. ●

ПРИМЕР 4 Решите уравнение $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4$, $D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. Для всех $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ имеем: $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + \frac{3}{2\sqrt{1-3x}}$. Очевидно, что $f'(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, то есть функция f возрастает на промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. Поскольку функция f непрерывна в точке $x = \frac{1}{3}$, то эта функция возрастает на $D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. Тогда функция f принимает каждое свое значение только один раз, а следовательно, данное уравнение не может иметь более одного корня.

Поскольку $f(-1) = 0$, то $x = -1$ является единственным корнем данного уравнения.

Ответ: -1.

ПРИМЕР 5 Докажите, что для всех $x > -1$ выполняется неравенство $x^9 + 4x + 3 > 2x^5$.

Решение. Докажем, что для всех $x > -1$ выполняется неравенство $x^9 - 2x^5 + 4x + 3 > 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^9 - 2x^5 + 4x + 3$. Так как $f(-1) = 0$, то неравенство можно представить в виде $f(x) > f(-1)$, где $x \in (-1; +\infty)$. Имеем: $f'(x) = 9x^8 - 10x^4 + 4$.

Так как квадратный трехчлен $9t^2 - 10t + 4$ имеет отрицательный дискриминант, то $f'(x) > 0$. Поэтому функция f — возрастающая. Отсюда для любого $x \in (-1; +\infty)$ выполняется неравенство $f(x) > f(-1)$. ●

Упражнения

11.1.° Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;
3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;
4) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;
5) $f(x) = x^3 + 4x - 8$;
6) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$.

11.2.° Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$;
2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$;
3) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$;
4) $f(x) = x^4 + 4x - 20$.

11.3.• Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$;
2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$;
3) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 9x - 6$;
4) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;
5) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;
6) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$;
7) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3 - x}$;
8) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

11.4.• Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 36x^2 - 4$;
2) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;
3) $f(x) = 3x + \frac{12}{x^2}$;
4) $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$;
5) $f(x) = \frac{2x - 9}{x - 5}$;
6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

11.5.° На рисунке 11.10 изображен график производной функции f, дифференцируемой на $\mathbb{R}$. Укажите промежутки убывания функции f.

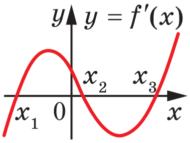


Рис. 11.10

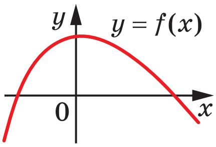
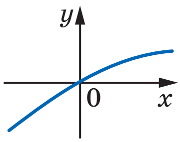
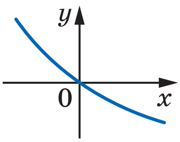


Рис. 11.11

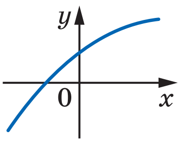
11.6.° На рисунке 11.11 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на $\mathbb{R}$. Среди приведенных на рисунке 11.12 графиков укажите тот, который может быть графиком функции $y = f'(x)$.



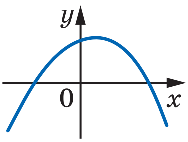
а



б



в



г

Рис. 11.12

11.7.° На рисунке 11.13 изображен график производной функции f, дифференцируемой на $\mathbb{R}$. Укажите промежутки возрастания функции f.

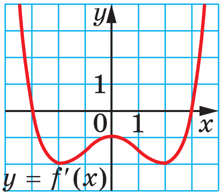
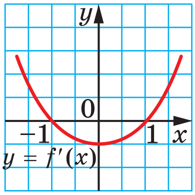
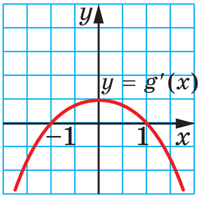


Рис. 11.13

11.8.° На рисунке 11.14 изображены графики производных функций f, g и h, дифференцируемых на $\mathbb{R}$. Какая из функций f, g, h убывает на отрезке $[-1; 1]$?





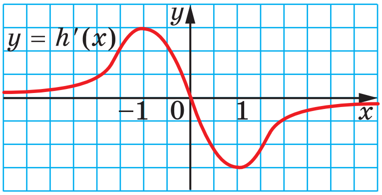


Рис. 11.14

11.9.• На рисунке 11.15 изображены графики производных функций f, g и h. Какая из функций f, g, h убывает на $\mathbb{R}$?

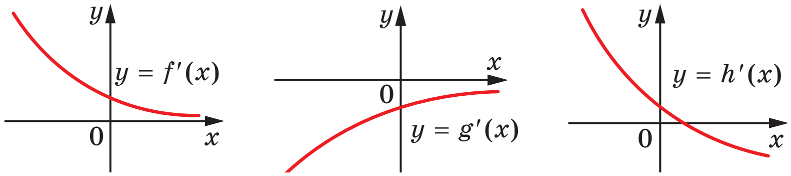


Рис. 11.15

11.10.• Докажите, что функция убывает на множестве действительных чисел:

1) $f(x) = 6 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$;

2) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - 10x + 80$;

3) $f(x) = \sin 2x - 3x$.

11.11.• Докажите, что функция возрастает на множестве действительных чисел.

1) $f(x) = 10x^3 - 9x^2 + 24x - 90$;

2) $f(x) = \sin x + x^3 + x$;

3) $f(x) = \cos 3x + 4x$.

11.12.• Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x\sqrt{2} + \sin x$;

2) $f(x) = x - \cos x$;

3) $y = \cos x + \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

11.13.• Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = \sin x - x$;

2) $f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2} - \sin x$.

11.14.•• Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$;

2) $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$.

11.15.•• Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

11.16.$^\bullet$ На рисунке 11.16 изображены графики функций f и g, определенных на $\mathbb{R}$. Используя эти графики, решите неравенство: 1) $f'(x) \leqslant 0$; 2) $g'(x) \geqslant 0$.

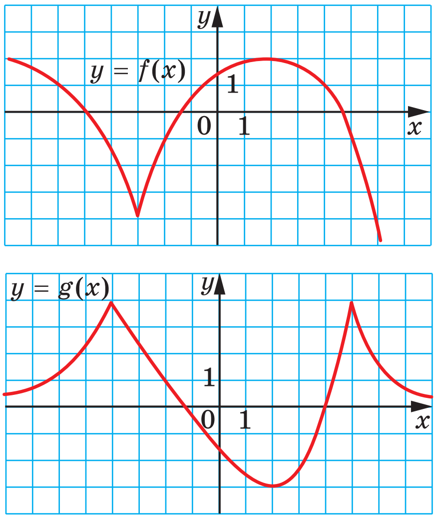


Рис. 11.16

11.17.$^\bullet$ На рисунке 11.17 изображены графики функций f и g, определенных на $\mathbb{R}$. Используя эти графики, решите неравенство: 1) $f'(x) \geqslant 0$; 2) $g'(x) \leqslant 0$.

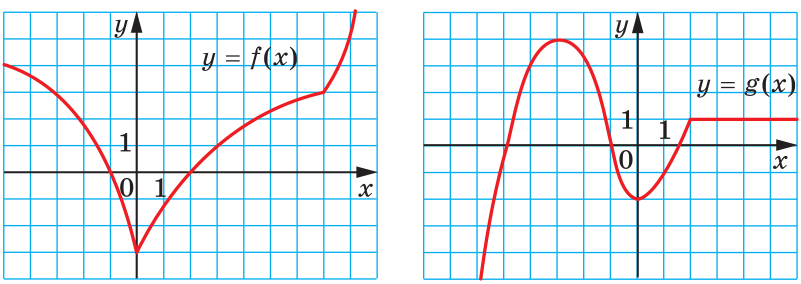


Рис. 11.17

11.18.$^{\bullet\bullet}$ Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \mathrm{tg}\ x - 2x$.

11.19. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \operatorname{ctg} x + 4x$.

11.20. При каких значениях параметра a является возрастающей функция:

1) $y = x^3 - ax$;
2) $y = 3 \sin 4x + ax$;
3) $y = -2\sqrt{1-x} + ax$;
4) $y = \frac{x^3}{3} + 2(a+1)x^2 + 9x - 4$?

11.21. При каких значениях параметра a является убывающей функция:

1) $y = ax - x^5$;
2) $y = 2 \cos 3x + ax$;
3) $y = -2\sqrt{x+3} + ax$;
4) $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - 4x + 21$?

11.22. При каких значениях параметра c функция

$$f(x) = (c - 12)x^3 + 3(c - 12)x^2 + 6x + 7$$

возрастает на $\mathbb{R}$?

11.23. При каких значениях параметра a функция

$$y = (a + 2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$$

убывает на $\mathbb{R}$?

11.24. При каких значениях параметра a функция

$$y = (a + 3)x^3 + 3(a + 3)x^2 - 5x + 12$$

убывает на $\mathbb{R}$?

11.25. Докажите неравенство $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

11.26. Докажите неравенство $x < \operatorname{tg} x$, где $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

11.27. Решите уравнение $3x^7 + x + 7 = \sqrt{1-8x}$.

11.28. Решите уравнение $x^5 + 4x + \cos x = 1$.

11.29. Решите уравнение $x^3 + 2x = \sin x$.

11.30. Решите неравенство $x^7 + 3x > 2x^4 + 2$.

11.31. Решите неравенство $x^5 + 4x < 2x^3 + 3$.

11.32. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = \sin x - \sin y, \\ 3x + 4y = 7. \end{cases}$

11.33. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x - 2y = \cos y - \cos x, \\ x + y = 8. \end{cases}$

12. Точки экстремума функции

Знакомясь с такими понятиями как предел и непрерывность функции в точке, мы исследовали поведение функции поблизости этой точки или, как принято говорить, в ее **окрестности**.

Определение 1. Интервал (a; b), содержащий точку x_0, называют окрестностью точки x_0.

Понятно, что любая точка имеет бесконечно много окрестностей. Например, промежуток (−1; 3) — одна из окрестностей точки 2,5. Вместе с тем этот промежуток не является окрестностью точки 3.

На рисунке 12.1 изображены графики четырех функций. Все эти функции имеют общую особенность: существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

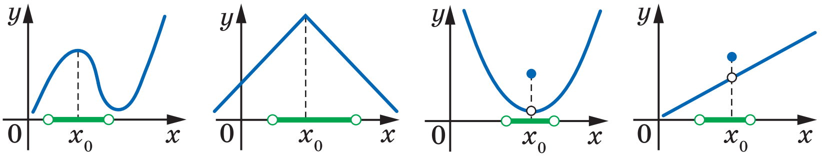


Рис. 12.1

Определение 2. Точку x_0 называют точкой максимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Например, точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ является точкой максимума функции $y = \sin x$ (рис. 12.2). Пишут $x_{\max} = \frac{\pi}{2}$.

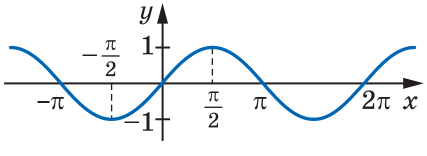


Рис. 12.2

На рисунке 12.1 $x_{\max} = x_0$.

Определение 3. **Точку x_0 называют точкой минимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$.**

Например, точка $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ является точкой минимума функции $y = \sin x$ (рис. 12.2). Пишут $x_{\min} = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунке 12.3 изображены графики функций, для которых x_0 является точкой минимума, то есть $x_{\min} = x_0$.

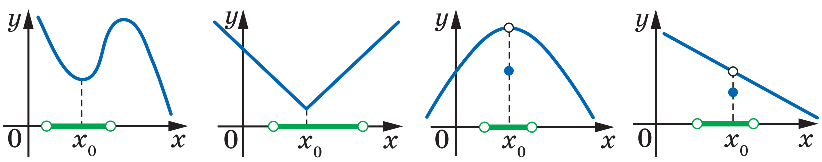


Рис. 12.3

Точки максимума и минимума имеют общее название: их называют **точками экстремума** функции (от латинского *extremum* — крайний).

На рисунке 12.4 точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 являются точками экстремума.

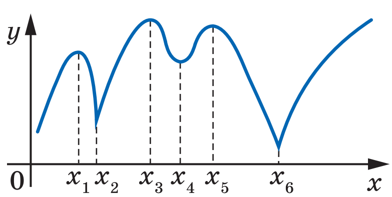


Рис. 12.4

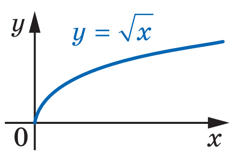


Рис. 12.5

Из определений 2 и 3 следует, что точки экстремума являются внутренними точками[1] области определения функции. Поэтому, например, точка $x_0 = 0$ не является точкой

[1] Точку $x_0 \in M$ называют *внутренней* точкой множества M, если существует окрестность точки x_0, являющаяся подмножеством множества M.

минимума функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 12.5), а точка $x_0 = 1$ не является точкой максимума функции $y = \arcsin x$ (рис. 12.6). Вместе с тем наименьшее значение функции $y = \sqrt{x}$ на множестве $[0; +\infty)$ равно нулю, то есть $\min\limits_{[0;+\infty)} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$, а $\max\limits_{[-1;1]} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

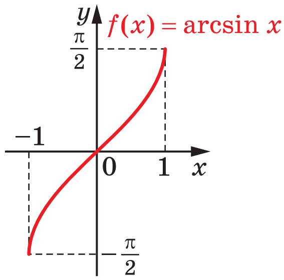


Рис. 12.6

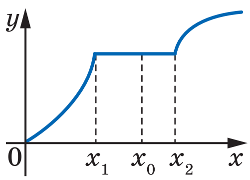


Рис. 12.7

На рисунке 12.7 изображен график некоторой функции f, которая на промежутке $[x_1; x_2]$ является константой. Точка x_1 является точкой максимума, точка x_2 — минимума, а любая точка интервала $(x_1; x_2)$ является одновременно как точкой максимума, так и точкой минимума функции f.

Графики функций, изображенных на рисунках 12.8 и 12.9, показывают, что точки экстремума можно разделить на два вида: те, в которых производная равна нулю (на рисунке 12.8 касательная к графику в точке с абсциссой x_0 является горизонтальной прямой), и те, в которых функция недифференцируема (рис. 12.9).

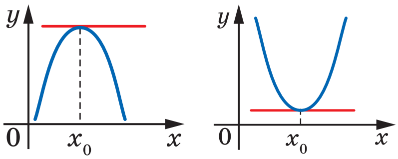


Рис. 12.8

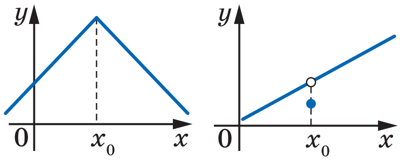


Рис. 12.9

Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 12.1. ***Если x_0 — точка экстремума функции f, то либо $f'(x_0) = 0$, либо функция f не является дифференцируемой в точке x_0.***

Учащиеся профильных классов могут, используя теорему Ферма, доказать теорему 12.1 самостоятельно.

Возникает естественный вопрос: обязательно ли является точкой экстремума внутренняя точка области определения функции, в которой производная равна нулю или не существует?

Ответ на этот вопрос отрицательный.

Например, на рисунке 12.10 изображен график функции, недифференцируемой в точке x_0. Однако точка x_0 не является точкой экстремума.

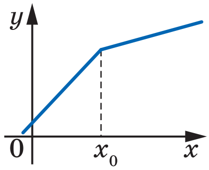


Рис. 12.10

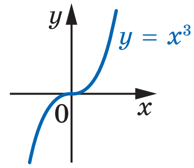


Рис. 12.11

Приведем еще один пример. Для функции $f(x) = x^3$ имеем: $f'(x) = 3x^2$. Тогда $f'(0) = 0$. Однако точка $x_0 = 0$ не является точкой экстремума функции f (рис. 12.11).

Эти примеры показывают, что теорема 12.1 дает необходимое, но не достаточное условие существования экстремума в данной точке.

Определение 4. **Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называют критическими точками функции.**

Например, точка $x_0 = 0$ является критической точкой функций $y = x^3$ и $y = |x|$; точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ является критической точкой функции $y = \sin x$.

Из сказанного выше следует, что *каждая точка экстремума функции является ее критической точкой, но не* *каждая критическая точка является точкой экстремума*. Иными словами, *точки экстремума следует искать среди критических точек*. Этот факт проиллюстрирован на рисунке 12.12.

Рис. 12.12

На рисунке 12.13 изображены графики функций, для которых x_0 является критической точкой.

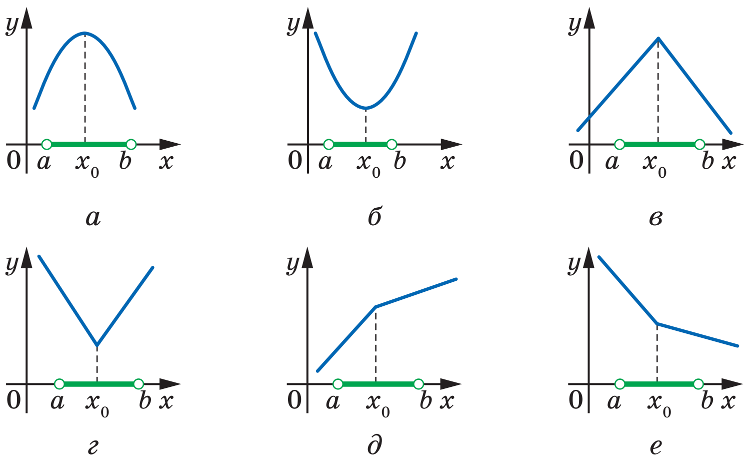


Рис. 12.13

На рисунках 12.13, *а*–*г* критическая точка x_0 является точкой экстремума, на рисунках 12.13, *д*, *е* критическая точка x_0 не является точкой экстремума.

Наличие экстремума функции в точке x_0 связано с поведением функции в окрестности этой точки. Так, для функций, графики которых изображены на рисунках 12.13, *а*–*г*, имеем: функция возрастает (убывает) на промежутке $(a; x_0]$ и убывает (возрастает) на промежутке $[x_0; b)$.

Функции, графики которых изображены на рисунках 12.13, *д*, *е*, таким свойством не обладают: первая из них возрастает на каждом из промежутков $(a; x_0]$ и $[x_0; b)$, вторая убывает на этих промежутках.

Вообще, если область определения непрерывной функции разбита на конечное количество промежутков возрастания и убывания, то легко найти все точки экстремума (рис. 12.14).

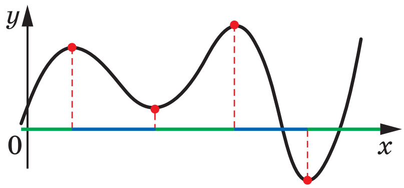


Рис. 12.14

Вы знаете, что с помощью производной можно находить промежутки возрастания (убывания) дифференцируемой функции. Две теоремы, приведенные ниже, показывают, как с помощью производной можно находить точки экстремума функции.

Теорема 12.2 (признак точки максимума функции). ***Пусть функция f дифференцируема на интервале $(a; b)$ и x_0 — некоторая точка этого интервала. Если для всех $x \in (a; x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, а для всех $x \in [x_0; b)$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, то точка x_0 является точкой максимума функции f*** (рис. 12.13, *а*).

Теорема 12.3 (признак точки минимума функции). ***Пусть функция f дифференцируема на интервале $(a; b)$ и x_0 — некоторая точка этого интервала. Если для всех $x \in (a; x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, а для всех $x \in [x_0; b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, то точка x_0 является точкой минимума функции f*** (рис. 12.13, *б*).

Докажем теорему 12.2 (теорему 12.3 доказывают аналогично).

Доказательство. Пусть x_1 — произвольная точка интервала $(a; x_0)$. Из теоремы Лагранжа для отрезка $[x_1; x_0]$ следует существование такой точки $c \in (x_1; x_0)$, что

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}.$$

Поскольку $c \in (a; x_0]$, то $f'(c) \geqslant 0$. Из неравенств $f'(c) \geqslant 0$ и $x_0 - x_1 > 0$ получаем: $f(x_0) \geqslant f(x_1)$.

Аналогично для произвольной точки $x_2 \in (x_0;\ b)$ можно доказать, что $f\ (x_0) \geqslant f\ (x_2)$.

Отсюда следует, что x_0 — точка максимума. ▲

Иногда удобно пользоваться упрощенными формулировками этих двух теорем: *если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума*; *если производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума*.

Для функции f точки экстремума можно искать по такой схеме.

1) Найти $f'(x)$.
2) Исследовать знак производной в окрестностях критических точек.
3) Пользуясь соответствующими теоремами, для каждой критической точки выяснить, является ли она точкой экстремума.

ПРИМЕР 1 Найдите точки экстремума функции:

1) $f\ (x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$;

2) $f\ (x) = 2x^2 - x^4$;

3) $f\ (x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$;

4) $f\ (x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x}}$.

Решение. 1) Имеем: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6\ (x^2 - x - 2) = 6\ (x + 1)(x - 2)$. Методом интервалов исследуем знак производной в окрестностях критических точек $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (рис. 12.15). Получаем, что $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 2$.

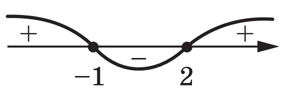


Рис. 12.15

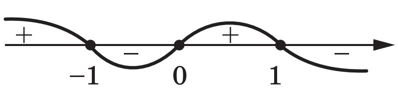


Рис. 12.16

2) $f'(x) = 4x - 4x^3 = -4x\ (x^2 - 1) = -4x\ (x + 1)(x - 1)$. Исследовав знак производной (рис. 12.16), получаем:

$$x_{\max} = -1,\ x_{\min} = 0 \text{ и } x_{\max} = 1.$$

3) Имеем: $f'(x) = \dfrac{(x^2 - x + 4)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} =$

$$= \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}.$$

Исследуем знак производной в окрестностях критических точек $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ (рис. 12.17). Имеем, что $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 3$.

4) Имеем: $f'(x) = \dfrac{(x+2)' \cdot \sqrt{x} - \left(\sqrt{x}\right)' \cdot (x+2)}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x+2)}{x} =$

$$= \frac{2x - (x+2)}{2x\sqrt{x}} = \frac{x-2}{2x\sqrt{x}}.$$

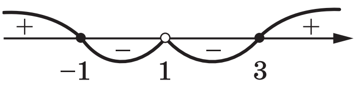


Рис. 12.17

Если $0 < x \leqslant 2$, то $f'(x) \leqslant 0$; если $x \geqslant 2$, то $f'(x) \geqslant 0$. Следовательно, критическая точка $x = 2$ является точкой минимума, то есть $x_{\min} = 2$.

ПРИМЕР 2 Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = \sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} - \frac{x-3}{2}.$$

Решение. Имеем:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}.$$

Найдем критические точки данной функции:

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = 0; \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 4\pi k, \\ x = -\dfrac{4\pi}{3} + 4\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Функция $f'(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) - \dfrac{1}{2}$ является периодической с периодом $T = 4\pi$. Методом интервалов исследуем ее знак на промежутке $[-2\pi; 2\pi]$ длиной в период. Этому промежутку принадлежат две критические точки: $x = 0$ и $x = -\dfrac{4\pi}{3}$.

На рисунке 12.18 показан результат исследования производной на промежутке $[-2\pi; 2\pi]$. Теперь можно сделать вывод:

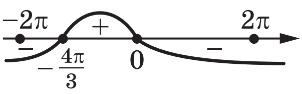


Рис. 12.18

$$x_{\max} = 0, \quad x_{\min} = -\frac{4\pi}{3}.$$

Обобщая полученный результат, записываем ответ: $x_{\max} = 4\pi k,\ x_{\min} = -\frac{4\pi}{3} + 4\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. ●

Упражнения

12.1.° На рисунке 12.19 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-10; 9]$. Укажите: 1) критические точки функции; 2) точки минимума; 3) точки максимума.

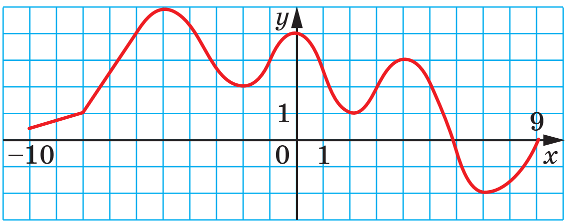


Рис. 12.19

12.2.° На рисунке 12.20 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на промежутке $[-7; 7]$. Укажите: 1) критические точки функции; 2) точки минимума; 3) точки максимума.

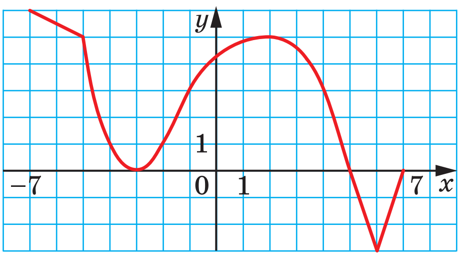


Рис. 12.20

12.3.° На рисунке 12.21 укажите график функции, для которой точка x_0 является точкой минимума.

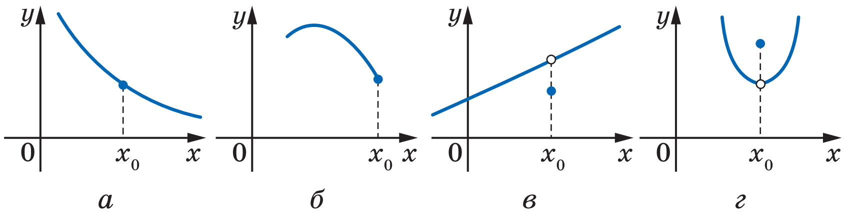


Рис. 12.21

12.4.° Имеет ли критические точки функция:

1) $f(x) = x$;
2) $f(x) = x^5 + 1$;
3) $f(x) = 5$;
4) $f(x) = \sin x$;
5) $f(x) = \operatorname{tg} x$;
6) $f(x) = \sqrt{x}$?

12.5.° На рисунке 12.22 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на множестве действительных чисел. Верно ли равенство:

1) $f'(-3) = 0$;
2) $f'(-2) = 0$;
3) $f'(0) = 0$;
4) $f'(1) = 0$;
5) $f'(2) = 0$;
6) $f'(3) = 0$?

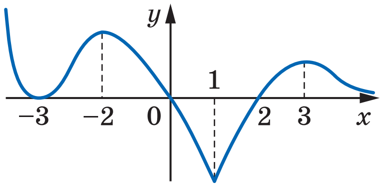


Рис. 12.22

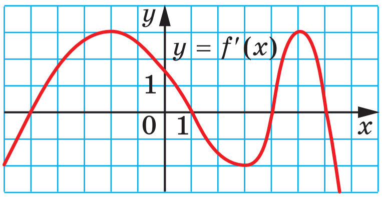


Рис. 12.23

12.6.° Найдите точки минимума и максимума функции:

1) $f(x) = 0{,}5x^4$;
2) $f(x) = x^2 - 6x$;
3) $f(x) = 12x - x^3$;
4) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$;
5) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$;
6) $f(x) = x^2 - \dfrac{x^4}{2}$.

12.7.° Найдите точки минимума и максимума функции:

1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x$;
2) $f(x) = 4x - \dfrac{1}{3}x^3$;
3) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$;
4) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$;

5) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$; 6) $f(x) = 2 + x^2 + 2x^3 - 2x^4$.

12.8.• Функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве действительных чисел. На рисунке 12.23 изображен график ее производной. Укажите точки максимума и минимума функции $y = f(x)$.

12.9.• Функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке 12.24 изображен график функции $y = f'(x)$. Сколько точек экстремума имеет функция $y = f(x)$?

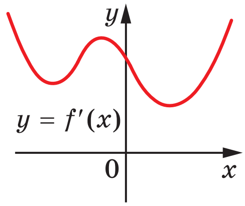


Рис. 12.24

12.10.• Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 7$; 3) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{5}x^5 + x^4 + 3$.

2) $f(x) = (x - 1)^3 (x - 2)^2$;

12.11.• Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 9$; 2) $f(x) = (x + 4)^4 (x - 3)^3$.

12.12.• Докажите, что данная функция не имеет точек экстремума:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 10$; 2) $f(x) = \sin x - x$.

12.13.• Докажите, что данная функция не имеет точек экстремума:

1) $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 20$; 2) $f(x) = \cos x + x$.

12.14.• Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$; 4) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2}$; 7) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16}$;

2) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$; 5) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2}$; 8) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

3) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; 6) $f(x) = -\frac{1}{(x - 3)^2}$;

12.15.° Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-6x}{x+2}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3}$; 5) $f(x)=\dfrac{1}{16-x^2}$;

2) $f(x)=x+\dfrac{9}{x}$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$; 6) $f(x)=2x-\sqrt{x}$.

12.16.° Верно ли утверждение:

1) значение функции в точке максимума может быть меньше значения функции в точке минимума;
2) функция в точке экстремума может быть недифференцируемой;
3) если производная в некоторой точке равна нулю, то эта точка является точкой экстремума функции?

12.17.° Верно ли утверждение:

1) в точке экстремума производная функции равна нулю;
2) если функция в некоторой точке недифференцируема, то эта точка является точкой экстремума функции?

12.18.•• Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x)=\dfrac{x}{2}-\sin x$; 2) $f(x)=\cos 2x-x\sqrt{3}$.

12.19.•• Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x)=\cos x+\dfrac{x}{2}$; 2) $f(x)=\sin 2x-x\sqrt{2}$.

12.20.•• При каких значениях a функция $y=x^3-3ax^2+27x-5$ имеет только одну критическую точку?

12.21.•• При каких значениях a функция $y=\dfrac{1}{3}x^3-2ax^2+4x-15$ имеет только одну критическую точку?

12.22.•• Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x)=x^2\sqrt{1-x}$; 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

2) $f(x)=(1-x)\sqrt{x}$; 4) $f(x)=\dfrac{2x-7}{\sqrt{3-x}}$.

12.23.•• Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x^2\sqrt{x+2}$;

2) $f(x) = (x-2)^2\sqrt{x}$;

3) $f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x-1}}$.

12.24.• Верно ли утверждение: если $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in M$, и функция f дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$?

12.25.• Может ли иметь только одну точку экстремума: 1) четная функция; 2) нечетная функция; 3) периодическая функция?

12.26.• Для всех $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$. 1) Верно ли утверждение, что x_0 — точка минимума функции f? 2) Изменится ли ответ, если $D(f) = \mathbb{R}$?

12.27.•• Точка x_0 — критическая точка функции f. Для всех $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а для всех $x > x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$. Может ли точка x_0 быть точкой минимума?

12.28.•• Точка x_0 — критическая точка функции f. Для всех u и v таких, что $u < x_0$ и $v > x_0$, выполняется неравенство $f'(u)\,f'(v) < 0$. Обязательно ли точка x_0 является точкой экстремума?

12.29.•• Точка x_0 — критическая точка функции f. Для всех u и v таких, что $u < x_0$ и $v > x_0$, выполняется неравенство $f'(u)\,f'(v) > 0$. Может ли точка x_0 быть точкой экстремума?

12.30.•• Найдите точки минимума и максимума функции:

1) $f(x) = \sin x \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $f(x) = \sin x - \cos x + x$;

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x - \dfrac{\sin 2x}{4} - \dfrac{1-\sqrt{3}x}{2}$;

4) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$.

12.31.•• Найдите точки минимума и максимума функции:

1) $f(x)=\cos x\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x-x$;

3) $f(x) = 5\sin x + 12\cos x - 13x$.

12.32.•• При каких значениях параметра a функция

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{3a+1}{2}x^2+(2a^2+2a)x-17$$

имеет положительную точку минимума?

12.33.•• При каких значениях параметра a функция

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{3a-1}{2}x^2+(2a^2-a)x+19$$

имеет положительную точку минимума?

12.34.•• При каких значениях параметра a точка $x_0 = 1$ является точкой минимума функции

$$y=\frac{x^3}{3}+ax^2+(a^2-4)x+7?$$

12.35.•• При каких значениях параметра a точка $x_0 = 0$ является точкой максимума функции $y=\frac{x^3}{3}-ax^2+(a^2-1)x-9$?

12.36.•• При каких значениях параметра a точка $x_0 = 1$ является точкой экстремума функции

$$y = x^3 - ax^2 + (a^2 - 2a)x - 7?$$

12.37.•• При каких значениях параметра a точка $x_0 = 2$ является точкой экстремума функции

$$y = x^3 - 2ax^2 + (2a^2 - 2a)x + 9?$$

Готовимся к изучению новой темы

12.38. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 18x + 2$ на отрезке:

1) $[-1; 4]$; 2) $[-4; 1]$; 3) $[4; 5]$.

12.39. Найдите наибольшее значение функции $y = -x^2 - 8x + 10$ на отрезке:

1) $[-5; -3]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-11; -10]$.

13. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Как добиться наименьшей массы конструкции, не причиняя вреда ее прочности? Как, имея ограниченные ресурсы, выполнить производственное задание в кратчайшее время? Как организовать доставку товара по торговым точкам так, чтобы расход топлива был наименьшим?

Такие и подобные задачи на поиск наилучшего или, как говорят, оптимального решения занимают значительное место в практической деятельности человека.

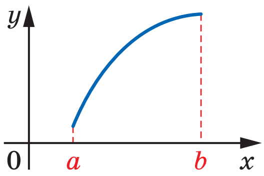
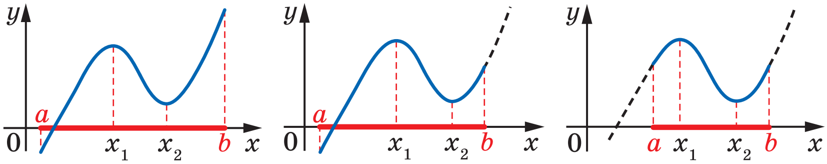


Рис. 13.1

Представим, что известна функция, которая описывает, например, зависимость массы конструкции от ее прочности. Тогда задача сводится к поиску аргумента, при котором функция принимает наименьшее значение.

В этом пункте мы выясним, как можно найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a; b]$. Ограничимся рассмотрением только непрерывных функций.

Заметим, что точка, в которой функция принимает свое наименьшее значение, не обязательно является точкой минимума. Например, на рисунке 13.1 $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, а точек минимума функция f не имеет. Точно так же точка минимума не обязательно является точкой, в которой функция принимает наименьшее значение. На рисунке 13.2, *а* точ-



$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ — *а*

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$ — *б*

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_2)$ $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$ — *в*

Рис. 13.2

ка x_2 — единственная точка минимума, а наименьшее значение $\min\limits_{[a;\,b]} f(x)$ достигается в точке a.

Аналогичное замечание относится к точкам максимума и точкам, в которых функция принимает наибольшее значение.

На рисунке 13.2 представлены разные случаи расположения точек экстремумов и точек, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения.

Тут важно понять, что свойство функции иметь точку экстремума x_0 означает такое: функция принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение по сравнению со значениями функции во всех точках некоторой, возможно, очень малой окрестности точки x_0. Поэтому, если хотят подчеркнуть этот факт, то точки экстремума еще называют **точками локального максимума** или **точками локального минимума** (от латинского *locus* — место).

Непрерывная на отрезке $[a;\, b]$ функция достигает на этом промежутке свои наибольшее и наименьшее значения[1] или на концах отрезка, или в точках экстремума (рис. 13.2).

Тогда для такой функции поиск наибольшего и наименьшего значений на отрезке $[a;\, b]$ можно проводить, пользуясь такой схемой.

1. Найти критические точки функции f, принадлежащие отрезку $[a;\, b]$.
2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах рассматриваемого отрезка.
3. Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Понятно, что этот алгоритм можно реализовать только тогда, когда рассматриваемая функция f имеет конечное количество критических точек на отрезке $[a;\, b]$.

Отметим, что если определить, какие из критических точек являются точками экстремума, то количество точек, в которых следует искать значения функции, можно умень-

---

[1] Учащимся профильных классов напомним, что существование наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции гарантирует теорема Вейерштрасса (теорема 5.4).

шить. Однако выявление точек экстремума, как правило, требует больше технической работы, чем поиск значений функции в критических точках.

ПРИМЕР 1 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ на отрезке $[-2; 0]$.

Решение. Найдем критические точки данной функции:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12;$$
$$12x^2 - 18x - 12 = 0;$$
$$2x^2 - 3x - 2 = 0;\ x = 2 \text{ или } x = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, функция f имеет две критические точки, а промежутку $[-2; 0]$ принадлежит одна: $x = -\frac{1}{2}$.

Имеем: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $f(-2) = -38$, $f(0) = 6$. Следовательно, $\max\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $\min\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f(-2) = -38$.

Ответ: $\frac{37}{4}$; -38.

ПРИМЕР 2 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4\sin 2x - 2\sin 4x$ на промежутке $[0; \pi]$.

Решение. Имеем: $f'(x) = 8\cos 2x - 8\cos 4x = 8(\cos 2x - \cos 4x) = 16\sin 3x \sin x$. Найдем критические точки данной функции:

$$\sin 3x \sin x = 0; \quad \sin 3x = 0 \text{ или } \sin x = 0;$$
$$x = \frac{\pi k}{3} \text{ или } x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Следовательно, точки вида $x = \frac{\pi k}{3}$ являются критическими точками функции f, из них промежутку $[0; \pi]$ принадлежат четыре точки: 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π. Имеем:

$$f(0) = f(\pi) = 0,\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3},\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}.$$

Таким образом,

$$\max_{[0;\,\pi]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3},\quad \min_{[0;\,\pi]} f(x)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-3\sqrt{3}.$$

Ответ: $3\sqrt{3}$, $-3\sqrt{3}$.

ПРИМЕР 3 Представьте число 8 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы сумма куба первого числа и квадрата второго была наименьшей.

Решение. Пусть первое число равно x, тогда второе равно $8 - x$. Из условия следует, что $0 \leqslant x \leqslant 8$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + (8 - x)^2$, определенную на отрезке $[0; 8]$, и найдем, при каком значении x она принимает наименьшее значение.

Имеем: $f'(x) = 3x^2 - 2(8 - x) = 3x^2 + 2x - 16$. Найдем критические точки данной функции:

$$3x^2 + 2x - 16 = 0;$$

$$x = 2 \text{ или } x=-\frac{8}{3}.$$

Среди найденных чисел промежутку $[0; 8]$ принадлежит только число 2. Имеем:

$$f(2) = 44,\ f(0) = 64,\ f(8) = 512.$$

Следовательно, функция f принимает наименьшее значение при $x = 2$.

Ответ: $8 = 2 + 6$.

ПРИМЕР 4 Найдите стороны прямоугольника, вписанного в окружность радиуса R, если площадь прямоугольника принимает наибольшее значение.

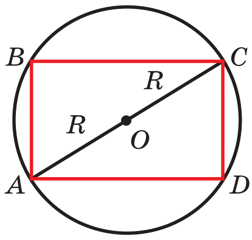


Рис. 13.3

Решение. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, вписанный в окружность радиуса R (рис. 13.3). Пусть $AB = x$, тогда $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{4R^2-x^2}$. Отсюда площадь прямоугольника $ABCD$ равна $x\sqrt{4R^2-x^2}$. Из условия задачи следует, что значения переменной x удовлетворяют неравенству $0 < x < 2R$, то есть принадлежат промежутку $(0; 2R)$.

Таким образом, задача свелась к нахождению наибольшего значения функции $S(x)=x\sqrt{4R^2-x^2}$ на интервале $(0;\ 2R)$. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)=x\sqrt{4R^2-x^2}$, $D(f)=[0;\ 2R]$, и будем искать ее наибольшее значение на отрезке $[0;\ 2R]$.

Найдем критические точки функции f:

$$f'(x)=(x)'\cdot\sqrt{4R^2-x^2}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{4R^2-x^2}}\cdot(4R^2-x^2)'=$$

$$=\sqrt{4R^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=\frac{(4R^2-x^2)-x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=\frac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}.$$

Функция f имеет одну критическую точку $x=R\sqrt{2}$.

Имеем: $f\left(R\sqrt{2}\right)=2R^2$, $f(0)=f(2R)=0$. Следовательно,

$$\max_{[0;\,2R]} f(x)=f\left(R\sqrt{2}\right)=2R^2.$$

Отсюда получаем, что функция $S(x)=x\sqrt{4R^2-x^2}$ на интервале $(0;\ 2R)$ принимает наибольшее значение при $x=R\sqrt{2}$. Тогда $AB=R\sqrt{2}$, $BC=\sqrt{4R^2-2R^2}=R\sqrt{2}$.

Следовательно, среди прямоугольников, вписанных в окружность радиуса R, наибольшую площадь имеет квадрат со стороной $R\sqrt{2}$. ●

ПРИМЕР 5 Решите уравнение $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}$, $D(f)=[2;\ 4]$. Для всех $x\in(2;\ 4)$ имеем:

$$f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}}-\frac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}}.$$

Решим уравнение $f'(x)=0$. Запишем:

$$\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}}-\frac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}}=0.$$

Отсюда легко найти, что $x = 3$. Получили, что функция f на отрезке $[2; 4]$ имеет единственную критическую точку $x = 3$.

Так как функция f непрерывна на отрезке $[2; 4]$, то ее наибольшее и наименьшее значения находятся среди чисел $f(3)$, $f(2)$, $f(4)$. Имеем: $f(3) = 2$, $f(2) = f(4) = \sqrt[4]{2}$.

Следовательно, $\max\limits_{[2;\,4]} f(x) = f(3) = 2$, причем наибольшее значение функция f принимает только при $x = 3$.

Так как нам надо решить уравнение $f(x) = 2$, то получаем, что $x = 3$ является его единственным корнем.

Ответ: 3.

ПРИМЕР 6 Пункты A, B и C расположены в вершинах прямоугольного треугольника ($\angle ACB = 90°$), $BC = 3$ км, $AC = 5$ км. Из пункта A в пункт C ведет шоссейная дорога. Турист начинает движение из пункта A по шоссе. На каком расстоянии от пункта A турист должен свернуть с шоссе, чтобы за наименьшее время дойти из пункта A в пункт B, если скорость туриста по шоссе равна 5 км/ч, а вне шоссе — 4 км/ч?

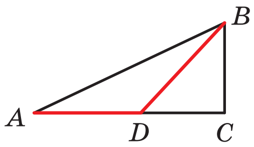


Рис. 13.4

Решение. Обозначим через D точку, в которой турист должен свернуть с шоссе, чтобы быстрее всего преодолеть путь (рис. 13.4).

Пусть $AD = x$ км. Имеем: $DC = (5 - x)$ км, $DB = \sqrt{DC^2 + BC^2} = \sqrt{(5-x)^2 + 9}$. Тогда время, за которое турист преодолеет путь, равно $\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(5-x)^2+9}}{4}$. Теперь понятно, что для решения задачи достаточно найти наименьшее значение функции $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(5-x)^2+9}}{4}$, заданной на отрезке $[0; 5]$. Имеем: $f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{5-x}{4\sqrt{(5-x)^2+9}}$. Решив уравнение $\frac{1}{5} - \frac{5-x}{4\sqrt{(5-x)^2+9}} = 0$ (сделайте это самостоятельно), устанавливаем, что число $x = 1$ является его единственным корнем. Сравнивая числа

$f(0)=\frac{\sqrt{34}}{4}$, $f(1)=\frac{29}{20}$ и $f(5)=\frac{7}{4}$, получаем, что $f(1)=\frac{29}{20}$ — наименьшее значение функции f на отрезке $[0; 5]$.

Ответ: 1 км.

Упражнения

13.1.° Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1; 3]$;
2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $[0; 2]$;
3) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 3$, $[1; 3]$;
4) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$, $[-1; 4]$;
5) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x - 7$, $[-1; 3]$;
6) $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$, $[-3; 0]$.

13.2.° Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$, $[0; 3]$;
2) $f(x) = x - 1 - x^3 - x^2$, $[-2; 0]$;
3) $f(x) = 2x^4 - 8x$, $[-2; 1]$;
4) $f(x)=\frac{x^4}{4}-8x^2$, $[-1; 2]$.

13.3.• Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x)=\sqrt{100-x^2}$, $[-6; 8]$;
2) $f(x)=\sqrt{0,5x^2+3x+5}$, $[2; 4]$;
3) $f(x) = (x + 1)^2 (x - 2)^2$, $[-2; 4]$;
4) $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$, $[-4; -1]$.

13.4.• Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x)=\sqrt{9+8x-x^2}$, $[0; 7]$;
2) $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$, $[-2; 4]$;

3) $f(x) = (x-1)^2(x+5)^2$, $[-3; 2]$;

4) $f(x) = -x - \dfrac{9}{x}$, $[-6; -1]$.

13.5.• Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x) = \sin x - \cos x$, $[0; \pi]$;

2) $f(x) = \sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$;

3) $f(x) = x\sqrt{3} - \cos 2x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

13.6.• Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$, $[0; \pi]$;

2) $f(x) = 2\cos\left(4x + \dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left[-\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

13.7.• Представьте число 8 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы произведение куба одного из этих чисел на второе число было наибольшим.

13.8.• Представьте число 12 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы произведение квадрата одного из этих чисел на удвоенное второе число было наибольшим.

13.9.•• Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x) = 2\sin 2x + \cos 4x$, $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$;

2) $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - 5$, $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$;

3) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

13.10.•• Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x) = 2\cos x - \sin 2x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

2) $f(x) = 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin x$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

13.11.•• Разбейте число 180 на три неотрицательных слагаемых так, чтобы два из них относились как 1 : 2, а произведение всех трех слагаемых было наибольшим.

13.12.•• Представьте число 18 в виде суммы трех неотрицательных чисел так, чтобы два из них относились как 8 : 3, а сумма кубов этих трех чисел была наименьшей.

13.13.•• В треугольник ABC вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на стороне AC, а две другие — на сторонах AB и BC. Найдите наибольшее значение площади такого прямоугольника, если $AC = 12$ см, $BD = 10$ см, где BD — высота треугольника ABC.

13.14.•• В прямоугольный треугольник с гипотенузой 16 см и острым углом $30°$ вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах. Какими должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

13.15.•• В полукруг радиуса 20 см вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите стороны прямоугольника.

13.16.•• В полукруг радиуса 6 см вписан прямоугольник наибольшего периметра. Найдите стороны прямоугольника.

13.17.•• Две вершины прямоугольника принадлежат графику функции $y = 12 - x^2$, $D(y) = \left[-2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}\right]$, а две другие — оси абсцисс. Какую наибольшую площадь может иметь такой прямоугольник?

13.18.•• Две вершины прямоугольника принадлежат графику функции $y = 0{,}5x^2$, $D(y) = \left[-3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2}\right]$, а две другие — прямой $y = 9$. Какую наибольшую площадь может иметь такой прямоугольник?

13.19.•• Периметр равнобедренного треугольника равен 48 см. Какой должна быть длина основания треугольника, чтобы его площадь принимала наибольшее возможное значение?

13.20.•• Вася Ошибочкин решил найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на отрезке $[-1; 1]$.

Он нашел производную $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ и определил, что уравнение $-\frac{1}{x^2} = 0$ не имеет решений. Сравнив значения $f(-1) = -1$ и $f(1) = 1$, Вася утверждает, что наибольшее значение функции f на отрезке $[-1; 1]$ равно 1, а наименьшее равно −1. Верно ли рассуждает Вася?

13.21.•• В трапеции меньшее основание и боковые стороны равны a. Найдите большее основание трапеции, при котором ее площадь принимает наибольшее значение.

13.22.•• В равнобедренный треугольник вписана окружность радиуса r. Каким должен быть угол при основании треугольника, чтобы его площадь была наименьшей?

13.23.•• Каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанной в этот треугольник окружности был наибольшим?

13.24.•• На окружности радиуса R отметили точку A. На каком расстоянии от точки A надо провести хорду BC, параллельную касательной в точке A, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

13.25.•• Фигура ограничена графиком функции $y = \sqrt{x}$, прямой $y = 2$ и осью ординат. В какой точке графика функции $y = \sqrt{x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$ надо провести касательную, чтобы она отсекала от указанной фигуры треугольник наибольшей площади?

13.26.•• На координатной плоскости расположен прямоугольный треугольник ABC ($\angle ABC = 90°$). Вершина A имеет координаты $(-2; 0)$, вершина B принадлежит отрезку $[2; 3]$ оси абсцисс, а вершина C — параболе $y = x^2 - 4x + 1$. Какими должны быть координаты точки C, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

13.27.•• Пункты A, B и C находятся в вершинах прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$), $AC = 285$ км, $BC = 60$ км. Пункты A и C соединяет железная дорога.

В какую точку отрезка AC следует провести грунтовую дорогу из пункта B, чтобы время пребывания в пути от пункта A до пункта B было наименьшим, если известно, что скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а по грунтовой дороге — 20 км/ч?

13.28.•• Завод A расположен на расстоянии 50 км от прямолинейного участка железной дороги, которая ведет в город B, и на расстоянии 130 км от города B. Под каким углом к железной дороге следует провести шоссе от завода A, чтобы доставка грузов из A в B была самой дешевой, если стоимость перевозок по шоссе в 2 раза больше, чем по железной дороге?

13.29.•• Докажите неравенство $-20 \leqslant x^3 - 3x^2 \leqslant 16$, где $x \in [-2; 4]$.

13.30.•• Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -5x^3 + x\,|x - 1|$ на промежутке $[0; 2]$.

13.31.•• Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4x^3 - x\,|x - 2|$ на промежутке $[0; 3]$.

13.32.•• Решите уравнение $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3} = x^2 - 8x + 18$.

13.33.•• Решите уравнение $\sqrt{x+7} + \sqrt{1-x} = x^2 + 6x + 13$.

Готовимся к изучению новой темы

13.34. Начертите график какой-нибудь непрерывной функции такой, что: областью определения является промежуток $[-4; 3]$; областью значений является промежуток $[-5; 3]$; нули функции равны -2 и 2; функция убывает на каждом из промежутков $[-4; -1]$ и $[2; 3]$, возрастает на промежутке $[-1; 2]$.

13.35. Начертите график какой-нибудь дифференцируемой функции такой, что: областью определения является промежуток $[-3; 4]$; областью значений является промежуток $[-2; 3]$; нули функции равны -1 и 2; $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $[-3; 0)$ и $(2; 4]$; $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(0; 2)$.

14. Вторая производная. Понятие выпуклости функции

Пусть материальная точка двигается по закону $y = s(t)$ по координатной прямой. Тогда мгновенная скорость $v(t)$ в момент времени t определяется по формуле $v(t) = s'(t)$.

Рассмотрим функцию $y = v(t)$. Ее производную в момент времени t называют ускорением движения и обозначают $a(t)$, то есть

$$a(t) = v'(t).$$

Таким образом, функция ускорение движения — это производная функции скорость движения, которая в свою очередь является производной функции закон движения, то есть

$$a(t) = v'(t) = (s'(t))'.$$

В таких случаях говорят, что функция ускорение движения $y = a(t)$ является **второй производной функции** $y = s(t)$. Пишут:

$$a(t) = s''(t)$$

(запись $s''(t)$ читают: «эс два штриха от тэ»).

Например, если закон движения материальной точки задан формулой $s(t) = t^2 - 4t$, то имеем:

$$s'(t) = v(t) = 2t - 4;$$
$$s''(t) = v'(t) = a(t) = 2.$$

Мы получили, что материальная точка двигается с постоянным ускорением. Как вы знаете из курса физики, такое движение называют равноускоренным.

Обобщим сказанное.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, дифференцируемую на некотором множестве M. Тогда ее производная также является некоторой функцией, заданной на этом множестве. Если функция f' дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in M$, то производную функции f' в точке x_0 называют **второй производной функции $y = f(x)$ в точке x_0** и обозначают $f''(x_0)$ или $y''(x_0)$. Саму функцию f называют **дважды дифференцируемой в точке x_0**.

Функцию, которая числу x_0 ставит в соответствие число $f''(x_0)$, называют **второй производной функции** $y = f(x)$ и обозначают f'' или y''.

Например, если $y = \sin x$, то $y'' = -\sin x$.

Если функция f дважды дифференцируема в каждой точке множества M, то ее называют **дважды дифференцируемой на множестве** M. Если функция f дважды дифференцируема на $D(f)$, то ее называют **дважды дифференцируемой**.

Вы знаете, что функцию характеризуют такие свойства как четность (нечетность), периодичность, возрастание (убывание) и т. д. Еще одной важной характеристикой функции является выпуклость вверх и выпуклость вниз.

Обратимся к примерам.

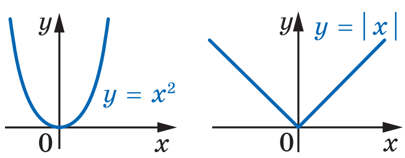


Рис. 14.1

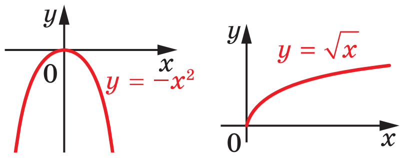


Рис. 14.2

О функциях $y = x^2$, $y = |x|$ говорят, что они являются выпуклыми вниз (рис. 14.1), а функции $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$ являются выпуклыми вверх (рис. 14.2). Функция $y = \sin x$ является выпуклой вверх на промежутке $[0; \pi]$ и выпуклой вниз на промежутке $[\pi; 2\pi]$ (рис. 14.3). Линейную функцию считают как выпуклой вверх, так и выпуклой вниз.

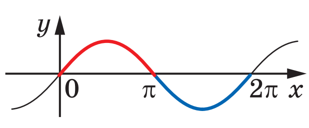


Рис. 14.3

Далее, изучая понятия выпуклости функции на промежутке I, ограничимся случаем, когда функция f дифференцируема[1] на этом промежутке.

[1] В высшей школе понятие выпуклости распространяют и на более широкие классы функций, например непрерывные.

Пусть функция f дифференцируема на промежутке I. Тогда в любой точке ее графика с абсциссой $x \in I$ можно провести невертикальную касательную. Если при этом график функции на промежутке I расположен не выше любой такой касательной (рис. 14.4), то функцию f называют **выпуклой вверх на промежутке** I; если же график на промежутке I расположен не ниже любой такой касательной (рис. 14.5), то — **выпуклой вниз на промежутке** I.

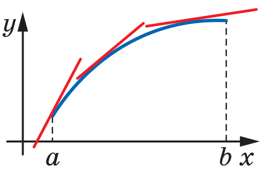


Рис. 14.4

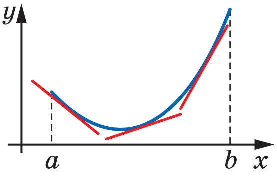


Рис. 14.5

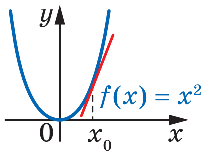


Рис. 14.6

Например, докажем, что функция $f(x) = x^2$ является выпуклой вниз на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Проведем касательную к графику функции $f(x) = x^2$ в точке с абсциссой x_0 (рис. 14.6). Уравнение этой касательной имеет вид:

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2.$$

Рассмотрим разность

$$f(x) - (2x_0(x - x_0) + x_0^2) = x^2 - (2x_0(x - x_0) + x_0^2) =$$
$$= x^2 - 2x_0x + x_0^2 = (x - x_0)^2.$$

Поскольку эта разность принимает только неотрицательные значения, то это означает, что график функции f лежит не ниже любой касательной. Следовательно, функция $f(x) = x^2$ является выпуклой вниз на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Аналогично можно доказать, что функция $y = x^3$ является выпуклой вверх на промежутке $(-\infty; 0]$ и выпуклой вниз на промежутке $[0; +\infty)$ (рис. 14.7).

На рисунке 14.8 изображен график функции f, которая является выпуклой вниз на промежутке $[a; b]$. Из рисунка видно, что с увеличением аргумента x угол наклона соответствующей касательной увеличивается. Это означает, что функция f' возрастает на промежутке $[a; b]$.

Пусть функция f является выпуклой вверх на промежутке $[a; b]$ (рис. 14.9). Из рисунка видно, что с увеличением аргумента x угол наклона соответствующей касательной уменьшается. Это означает, что функция f' убывает на промежутке $[a; b]$.

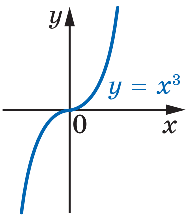
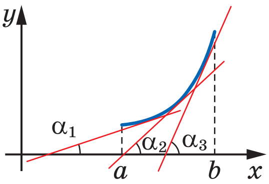
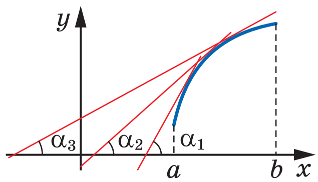


Рис. 14.7



$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots$

Рис. 14.8



$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots$

Рис. 14.9

Эти примеры показывают, что характер выпуклости функции f на некотором промежутке I связан с возрастанием (убыванием) функции f' на этом промежутке.

Для дважды дифференцируемой на промежутке I функции f возрастание (убывание) функции f определяется знаком второй производной функции f на промежутке I. Таким образом, характер выпуклости дважды дифференцируемой функции связан со знаком ее второй производной.

Эту связь устанавливают следующие две теоремы.

Теорема 14.1 (признак выпуклости функции вниз). ***Если для всех $x \in I$ выполняется неравенство $f''(x) \geqslant 0$, то функция f является выпуклой вниз на промежутке I.***

Теорема 14.2 (признак выпуклости функции вверх). ***Если для всех $x \in I$ выполняется неравенство $f''(x) \leqslant 0$, то функция f является выпуклой вверх на промежутке I.***

Докажем теорему 14.1 (теорему 14.2 доказывают аналогично).

Доказательство. В точке с абсциссой $x_0 \in I$ проведем касательную к графику функции f. Уравнение этой касательной имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Рассмотрим функцию

$$r(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)).$$

Значения этой функции показывают, насколько отличается ордината точки графика функции f от ординаты соответствующей точки, которая лежит на проведенной касательной (рис. 14.10).

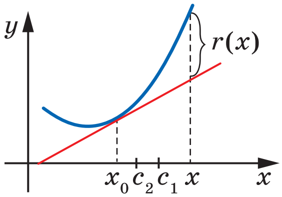


Рис. 14.10

Если мы покажем, что $r(x) \geqslant 0$ для всех $x \in I$, то таким образом докажем, что на промежутке I график функции f лежит не ниже проведенной к нему касательной.

Пусть $x \in I$ и $x > x_0$ (случай, когда $x \leqslant x_0$, рассматривают аналогично).

Имеем: $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Для функции f и отрезка $[x_0; x]$ применим теорему Лагранжа: $f(x) - f(x_0) = f'(c_1)(x - x_0)$, где $c_1 \in (x_0; x)$.

Отсюда $r(x) = f'(c_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$;

$$r(x) = (f'(c_1) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Поскольку функция $y = f'(x)$ является дифференцируемой на отрезке $[x_0; c_1]$, то можно применить теорему Лагранжа: $f'(c_1) - f'(x_0) = f''(c_2)(c_1 - x_0)$, где $c_2 \in (x_0; c_1)$.

Отсюда $r(x) = f''(c_2)(c_1 - x_0)(x - x_0)$.

На рисунке 14.10 показано расположение точек c_1 и c_2.

Из неравенств $x_0 < c_2 < c_1 < x$ следует, что $(c_1 - x_0) \times (x - x_0) > 0$. Поскольку $c_2 \in I$, то с учетом условия теоремы получаем: $f''(c_2) \geqslant 0$. Отсюда для всех $x \in I$ выполняется неравенство $r(x) \geqslant 0$. Поэтому функция f является выпуклой вниз на промежутке I. ▲

ПРИМЕР 1 Исследуйте на выпуклость функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Имеем: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Отсюда

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = (\cos^{-2} x)' = -2(\cos x)^{-3}(\cos x)' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Неравенство $f''(x) \geqslant 0$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется при $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, функция $y = \operatorname{tg} x$ является выпуклой вниз на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 14.11).

Неравенство $f''(x) \leqslant 0$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется при $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$. Следовательно, функция $y = \operatorname{tg} x$ является выпуклой вверх на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ (рис. 14.11). ●

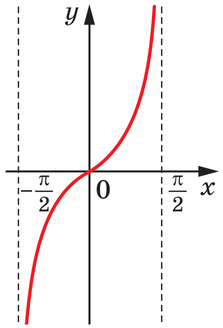


Рис. 14.11

На рисунке 14.12 изображены графики функций и касательные, проведенные к ним в точках с абсциссой x_0. Эти функции на промежутках $(a; x_0]$ и $[x_0; b)$ имеют разный характер выпуклости. Поэтому на этих промежутках график функции расположен в различных полуплоскостях относительно касательной. В этом случае говорят, что точка x_0 является **точкой перегиба** функции.

Рис. 14.12

Например, точка $x_0 = 0$ является точкой перегиба функции $y = x^3$ (рис. 14.7); точки вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, являются точками перегиба функции $y = \cos x$ (рис. 14.13).

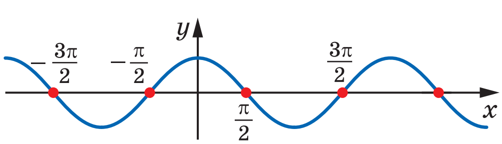


Рис. 14.13

ПРИМЕР 2 Исследуйте характер выпуклости и найдите точки перегиба функции $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12}$.

Решение. Имеем:

$$f'(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3};\ f''(x) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1).$$

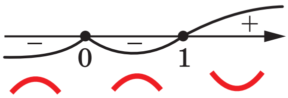


Рис. 14.14

Используя метод интервалов, исследуем знак функции $y = f''(x)$ (рис. 14.14). Получаем, что функция f выпуклая вверх на промежутке $(-\infty; 1]$ и выпуклая вниз на промежутке $[1; +\infty)$.

Функция f на промежутках $(-\infty; 1]$ и $[1; +\infty)$ имеет разный характер выпуклости. В точке с абсциссой $x_0=1$ к графику функции f можно провести касательную. Следовательно, $x_0=1$ является точкой перегиба функции f. ●

Упражнения

14.1.° Найдите вторую производную функции:

1) $y = x^3$;
2) $y = x^2 - 2x + 5$;
3) $y=\frac{1}{x}$;
4) $y=\sqrt{x}$;
5) $y = \cos x$;
6) $y = (2x - 1)^5$;
7) $y = \sin 3x$;
8) $y = \cos^2 x$;
9) $y=\sin\frac{x}{4}$;
10) $y = x \sin x$.

14.2.° Найдите вторую производную функции:

1) $y = x^4$;
2) $y = 3 - 5x + x^3$;
3) $y=\frac{1}{x-1}$;
4) $y=\sqrt[3]{x}$;
5) $y = (1 - 3x)^3$;
6) $y = \cos 2x$;
7) $y = \sin^2 x$;
8) $y = x \cos x$.

14.3.° Чему равно значение второй производной функции $y = 5\sin x - 3\cos 4x$ в точке: 1) $x=\frac{\pi}{6}$; 2) $x=-\frac{\pi}{2}$?

14.4.° Материальная точка двигается по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите ее ускорение в момент времени $t_0 = 2$ с.

14.5.° Одно тело двигается по координатной прямой по закону $s_1(t) = t^3 - t^2 + 3t - 2$, а другое — по закону $s_2(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 5t - 8$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите ускорение каждого тела в момент времени, когда их скорости равны.

14.6.° Тело массой 5 кг двигается по координатной прямой по закону $s(t) = t^3 - 6t + 4$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите силу $F(t) = ma(t)$, действующую на тело через 3 с после начала движения.

14.7.° Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба функции:

1) $y = x^3 - 3x + 2$; 2) $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1$.

14.8.° Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба функции:

1) $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$; 2) $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 3x + 4$.

14.9.° Найдите точки перегиба функции

$$y = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 12x + 3.$$

14.10.° Найдите точки перегиба функции

$$y = 3x^5 + 10x^4 + 10x^3 - 5x - 4.$$

14.11.° Докажите, что функция $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 11x - 7$ является выпуклой вниз на $\mathbb{R}$.

14.12.° Докажите, что функция $f(x) = \sin^2 x - 2x^2$ является выпуклой вверх на $\mathbb{R}$.

14.13.• Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба функции:

1) $y = \frac{x}{1+x^2}$; 2) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$.

14.14.• Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба функции:

1) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$; 2) $y = \frac{x}{(x+1)^2}$.

14.15.• Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба функции $y = x^2 + 4\sin x$.

14.16.• Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба функции $y = x^2 - 4\cos x$.

15. Построение графиков функций

Когда в предыдущих классах вам приходилось строить графики, вы, как правило, поступали так: отмечали на координатной плоскости некоторое количество точек, принадлежащих графику, а затем соединяли их. Точность построения зависела от количества отмеченных точек.

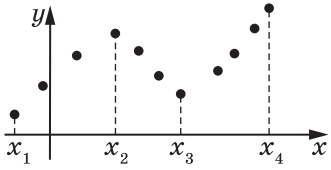


Рис. 15.1

На рисунке 15.1 изображены несколько точек, принадлежащих графику некоторой функции $y = f(x)$. Эти точки можно соединить по-разному, например, так, как показано на рисунках 15.2 и 15.3.

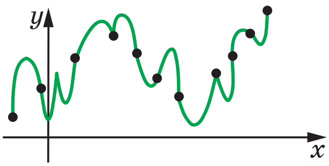


Рис. 15.2

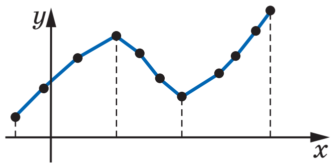


Рис. 15.3

Однако если знать, что функция f возрастает на каждом из промежутков $[x_1; x_2]$ и $[x_3; x_4]$, убывает на промежутке $[x_2; x_3]$ и является дифференцируемой, то, скорее всего, будет построен график, показанный на рисунке 15.4.

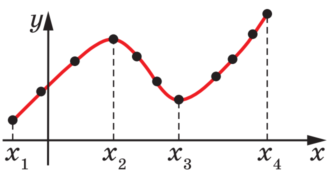


Рис. 15.4

Вы знаете, какие особенности присущи графикам четной, нечетной, периодической функций и т. д. Вообще, чем больше свойств функции удалось определить, тем точнее можно построить ее график.

Исследование свойств функции будем проводить по такому плану.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность.
3. Найти нули функции.
4. Найти промежутки знакопостоянства.

5. Найти промежутки возрастания и убывания.
6. Найти точки экстремума и значения функции в точках экстремума.
7. Выявить другие особенности функции (периодичность функции, поведение функции в окрестностях отдельных важных точек и т. п.).

Заметим, что приведенный план исследования носит характер рекомендаций и не является постоянным и исчерпывающим. Важно при исследовании функции обнаружить такие ее свойства, которые позволят корректно построить график.

ПРИМЕР 1 Исследуйте функцию $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3$ и постройте ее график.

Решение. 1. Функция определена на множестве действительных чисел, то есть $D(f)=\mathbb{R}$.

2. $f(-x)=\frac{3}{2}(-x)^2-\frac{1}{4}(-x)^3=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3$. Отсюда $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, то есть функция $y=f(-x)$ не совпадает ни с функцией $y=f(x)$, ни с функцией $y=-f(x)$. Таким образом, данная функция не является ни четной, ни нечетной.

3–4. Имеем: $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3=\frac{x^2}{4}(6-x)$. Числа 0 и 6 являются нулями функции f. Применив метод интервалов (рис. 15.5), находим промежутки знакопостоянства функции f, а именно: устанавливаем, что $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\,0)\cup(0;\,6)$ и $f(x)<0$ при $x\in(6;\,+\infty)$.

5–6. Имеем: $f'(x)=3x-\frac{3x^2}{4}=\frac{3x}{4}(4-x)$. Исследовав знак производной (рис. 15.6), приходим к выводу, что функция f возрастает на промежутке $[0;\,4]$, убывает на каждом из промежутков $(-\infty;\,0]$ и $[4;\,+\infty)$, $x_{max}=4$, $x_{min}=0$. Имеем: $f(4)=8$, $f(0)=0$.

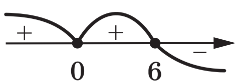


Рис. 15.5

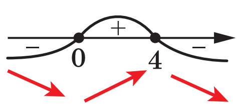


Рис. 15.6

7. Имеем: $f''(x)=3-\frac{3x}{2}$. Исследовав знак второй производной (рис. 15.7), приходим к выводу, что функция f является выпуклой вниз на промежутке $(-\infty; 2]$, выпуклой вверх на промежутке $[2; +\infty)$, $x_0 = 2$ является точкой перегиба и $f(2) = 4$.

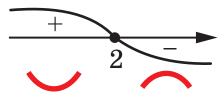


Рис. 15.7

Учитывая полученные результаты, строим график функции (рис. 15.8).

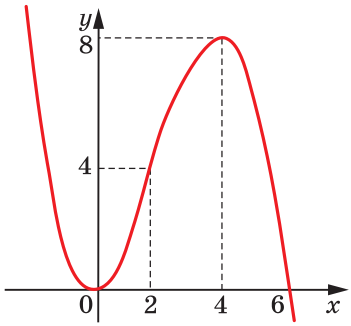


Рис. 15.8

ПРИМЕР 2 Исследуйте функцию $f(x)=\frac{4}{x^2+4x}$ и постройте ее график.

Решение. 1. Функция определена на множестве $(-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Область определения функции несимметрична относительно начала координат, следовательно, данная функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Функция не имеет нулей.

4. $f(x)=\frac{4}{x(x+4)}$. Отсюда $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-4; 0)$ (рис. 15.9).

5–6. Имеем:

$$f'(x)=\frac{(4)'\cdot(x^2+4x)-4\cdot(x^2+4x)'}{x^2(x+4)^2}=-\frac{4(2x+4)}{x^2(x+4)^2}=-\frac{8(x+2)}{x^2(x+4)^2}.$$

Исследовав знак f' (рис. 15.10), приходим к выводу, что функция f убывает на каждом из промежутков $[-2; 0)$ и $(0; +\infty)$, возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -4)$ и $(-4; -2]$, $x_{\max} = -2$, $f(-2) = -1$.

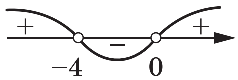


Рис. 15.9

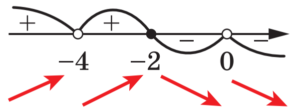


Рис. 15.10

7. Заметим, что если значения аргумента x выбирать все бóльшими и бóльшими, то соответствующие значения функции $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4x}$ все меньше и меньше отличаются от числа 0 и могут стать сколь угодно малыми. Это свойство принято записывать так: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x^2 + 4x} = 0$ или так: $\frac{4}{x^2 + 4x} \to 0$ при $x \to +\infty$. Если $x \to +\infty$, то расстояния от точек графика функции f до прямой $y = 0$ становятся все меньшими и меньшими и могут стать меньше произвольного наперед заданного положительного числа. В этом случае прямую $y = 0$ называют *горизонтальной асимптотой* графика функции f при $x \to +\infty$. Аналогично можно установить, что прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции f при $x \to -\infty$.

Если значения аргумента x стремятся к нулю, оставаясь положительными, то соответствующие значения функции $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4x}$ становятся все бóльшими и бóльшими, то есть расстояния от точек графика функции f до прямой $x = 0$ становятся все меньшими и меньшими и могут стать меньше произвольного наперед заданного положительного числа. В этом случае прямую $x = 0$ называют *вертикальной асимптотой* графика функции f, когда x стремится к нулю справа. Прямая $x = 0$ также является *вертикальной асимптотой* графика функции f, когда x стремится к нулю слева. Функция f имеет еще одну вертикальную асимптоту — прямую $x = -4$, когда x стремится к -4 как слева, так и справа.

Имеем:

$$f''(x) = -\frac{8x^2(x+4)^2 - 8(x+2)(2x(x+4)^2 + 2x^2(x+4))}{x^4(x+4)^4}.$$

Упростив дробь, получим $f''(x) = \dfrac{8(3x^2+12x+16)}{x^3(x+4)^3}$.

Исследовав знак f'' (рис. 15.11), приходим к выводу, что функция f является выпуклой вниз на промежутках $(-\infty; -4)$ и $(0; +\infty)$, выпуклой вверх на промежутке $(-4; 0)$, точек перегиба не имеет.

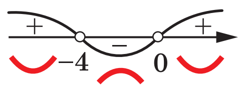


Рис. 15.11

Учитывая полученные результаты, строим график функции f (рис. 15.12). ●

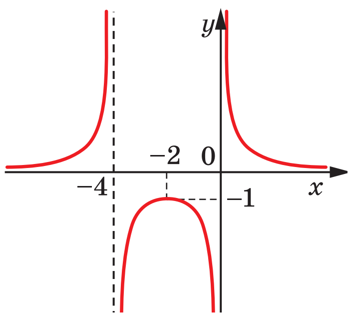


Рис. 15.12

ПРИМЕР 3 Пользуясь графиком функции $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, определите, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a.

Решение. Функция определена на множестве действительных чисел, то есть $D(f) = \mathbb{R}$.

Имеем: $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2) = 4x\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$.

Следовательно, функция f имеет три критические точки: $-\sqrt{2}$; 0; $\sqrt{2}$. Исследовав знак производной (рис. 15.13), получаем: функция f возрастает на промежутках $[-\sqrt{2}; 0]$

и $[\sqrt{2};\ +\infty)$, убывает на промежутках $(-\infty;\ -\sqrt{2}]$ и $[0;\ \sqrt{2}]$, $x_{\min} = -\sqrt{2}$, $x_{\min} = \sqrt{2}$, $x_{\max} = 0$. Имеем $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -1$, $f(0) = 3$.

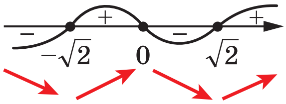


Рис. 15.13

Учитывая полученные результаты, строим график функции (рис. 15.14).

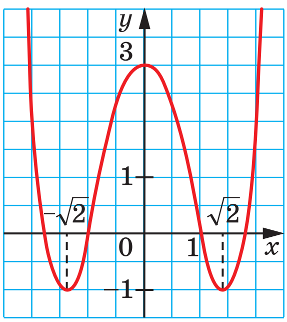


Рис. 15.14

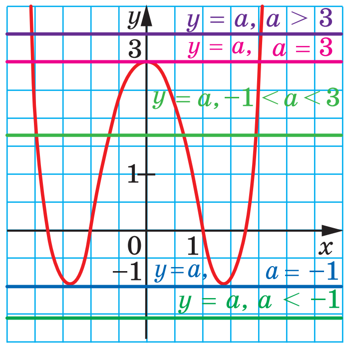


Рис. 15.15

Пользуясь построенным графиком, определяем количество корней уравнения $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a (рис. 15.15):

если $a < -1$, то корней нет;

если $a = -1$ или $a > 3$, то 2 корня;

если $a = 3$, то 3 корня;

если $-1 < a < 3$, то 4 корня.

Замечание. Из решения данной задачи исключены пункты 2–4, 7 плана исследования свойств функции. Свойства функции, которые исследуются в этих пунктах, не используются при определении количества корней уравнения $f(x) = a$. ●

ПРИМЕР 4 Исследуйте функцию $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 - 2}$ и постройте ее график.

Решение

1. Функция определена на множестве $\left(-\infty;\ \sqrt[3]{2}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2};\ +\infty\right)$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Решив уравнение $\frac{x^4}{x^3-2}=0$, определяем, что $x = 0$ — единственный нуль данной функции.

4. $f(x)>0$ при $x\in(\sqrt[3]{2};+\infty)$, $f(x)<0$ при $x\in(-\infty;0)\cup\left(0;\sqrt[3]{2}\right)$.

5–6. Имеем: $f'(x)=\frac{x^6-8x^3}{(x^3-2)^2}=\frac{x^3(x^3-8)}{(x^3-2)^2}$.

Исследовав знак f' (рис. 15.16), приходим к выводу, что функция f убывает на промежутках $[0;\sqrt[3]{2})$ и $(\sqrt[3]{2};2]$, возрастает на промежутках $(-\infty;0]$ и $[2;+\infty)$, $x_{\min}=2$, $f(2)=\frac{8}{3}$, $x_{\max}=0$, $f(0)=0$.

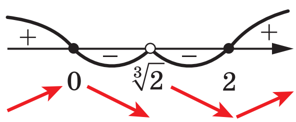


Рис. 15.16

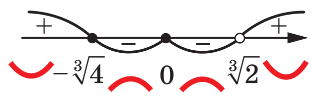


Рис. 15.17

7. Имеем: $f''(x)=\frac{12x^2(x^3+4)}{(x^3-2)^3}$.

Исследовав знак f'' (рис. 15.17), приходим к выводу, что $x=-\sqrt[3]{4}$ — точка перегиба и $f(-\sqrt[3]{4})=-\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$, функция f является выпуклой вниз на промежутках $(-\infty;-\sqrt[3]{4}]$ и $(\sqrt[3]{2};+\infty)$, выпуклой вверх на $[-\sqrt[3]{4};\sqrt[3]{2})$.

Прямая $x=\sqrt[3]{2}$ — вертикальная асимптота графика данной функции.

Имеем: $f(x)=\frac{x^4}{x^3-2}=\frac{(x^4-2x)+2x}{x^3-2}=x+\frac{2x}{x^3-2}$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^3-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2-\frac{2}{x}}=0$, то при $x\to+\infty$ расстояния от точек графика функции f до соответствующих точек прямой $y=x$ становятся все меньшими и меньшими и могут стать меньше произвольного наперед заданного положительного числа. В этом случае прямую $y = x$ называют *наклонной асимптотой* графика функции f при $x \to +\infty$. Также можно показать, что прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика функции f при $x \to -\infty$.

Учитывая полученные результаты, строим график функции (рис. 15.18). ●

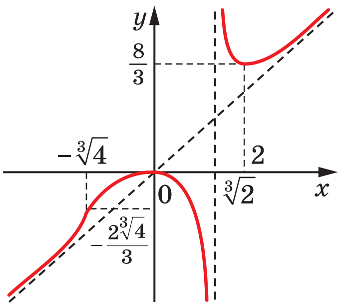


Рис. 15.18

Упражнения

15.1.• Исследуйте данную функцию и постройте ее график:

1) $f(x) = 3x - x^3 - 2$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$;
3) $f(x) = 3x - \frac{x^3}{9}$;
4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;
5) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^3$;
6) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$;
7) $f(x) = (x + 3)^2 (x - 1)^2$.

15.2.• Исследуйте данную функцию и постройте ее график:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2$;
2) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$;
3) $f(x) = x - x^3$;
4) $f(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2$;
5) $f(x) = 8x^2 - 7 - x^4$.

15.3.•• Постройте график функции:

1) $f(x)=\dfrac{4-x}{x+2}$;
2) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$;
3) $f(x)=\dfrac{6x-6}{x^2+3}$;
4) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$;
5) $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$;
6) $f(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}$;
7) $f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x^2}$;
8) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$.

15.4.•• Постройте график функции:

1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$;
2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$;
3) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$;
4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$;
5) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-9}$;
6) $f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)^2}$.

15.5.•• Постройте график функции $f(x) = x^2(2x - 3)$ и определите, пользуясь им, количество корней уравнения $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a.

15.6.•• Постройте график функции $f(x) = -x^2(x^2 - 4)$ и определите, пользуясь им, количество корней уравнения $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a.

15.7.•• Постройте график функции:

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$;
3) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$;
4) $f(x)=\dfrac{x^4-8}{(x+1)^4}$.

15.8.•• Постройте график функции:

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$;
3) $f(x)=\dfrac{x^3-4}{(x-1)^3}$.

Готовимся к изучению новой темы

15.9. Представьте выражение в виде степени или произведения степеней:

1) $\dfrac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$;

2) $(a^2)^{-4} \cdot (a^{-3})^{-2} : (a^{-8})^3$;

3) $\left(\dfrac{a^{10}b^{-7}}{c^6 d^{-14}}\right)^{-2}$;

4) $\dfrac{a^{-\frac{5}{2}} b^{\frac{1}{12}}}{a^{-\frac{17}{4}} b^{\frac{1}{3}}}$;

5) $\left(a^{\frac{5}{9}}\right)^{1,8} \cdot \left(a^{-\frac{3}{8}}\right)^{2,4}$.

15.10. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{3^{10} \cdot 27^3}{9^9}$;

2) $\dfrac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;

3) $\dfrac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$;

4) $\left(4^{-\frac{1}{8}}\right)^{1,6} \cdot 16^{0,6}$;

5) $\dfrac{12^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{6}}} \cdot \dfrac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{\frac{1}{2}}}$;

6) $\left(\dfrac{5^{-\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{15^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{16}{3}}}\right)^{-1,5}$.

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 1

1. Найдите производную функции $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}$.

А) $f'(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{2}$;   В) $f'(x) = x^2 + x$;

Б) $f'(x) = 3x^2 + 2x$;   Г) $f'(x) = x^3 + x^2$.

2. Найдите производную функции $f(x) = \dfrac{5}{x^4}$.

А) $f'(x) = -\dfrac{20}{x^5}$;   В) $f'(x) = \dfrac{5}{4x^3}$;

Б) $f'(x) = -\dfrac{20}{x^3}$;   Г) $f'(x) = \dfrac{5}{4x^5}$.

3. Укажите производную функции $f(x) = \operatorname{tg} 4x$.

А) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 4x}$;   В) $f'(x) = \operatorname{ctg} 4x$;

Б) $f'(x) = \dfrac{4}{\cos^2 4x}$;   Г) $f'(x) = 4 \operatorname{ctg} 4x$.

4. Вычислите значение производной функции $f(x) = (3x - 2)^5$ в точке $x_0 = 1$.

А) 5;   Б) 15;   В) −5;   Г) −15.

5. Найдите производную функции $f(x) = \sqrt{6x - 7}$.

А) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6x-7}}$;   В) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{6x-7}}$;

Б) $f'(x) = \dfrac{6}{\sqrt{6x-7}}$;   Г) $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{6x-7}}$.

6. Найдите производную функции $f(x) = \cos \dfrac{x}{4}$.

А) $f'(x) = \sin \dfrac{x}{4}$;   В) $f'(x) = -\sin \dfrac{x}{4}$;

Б) $f'(x) = \dfrac{1}{4} \sin \dfrac{x}{4}$;   Г) $f'(x) = -\dfrac{1}{4} \sin \dfrac{x}{4}$.

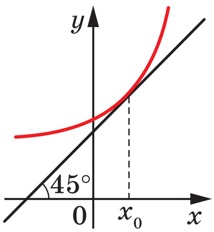
7. Тело двигается по координатной прямой по закону

$$s\ (t) = 3t^2 - 2t + 1$$

(перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Чему равна скорость тела через 3 с после начала движения?

А) 16 м/с; Б) 17 м/с; В) 18 м/с; Г) 20 м/с.

8. На рисунке изображены график функции $y = f\ (x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0.
Найдите $f'\ (x_0)$.



А) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
Б) 1;
В) $\sqrt{3}$;
Г) найти невозможно.

9. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^3 - 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$?

А) –5; Б) –1; В) 5; Г) 1.

10. Какое уравнение имеет касательная к графику функции

$f\ (x) = \dfrac{3x+4}{x-3}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$?

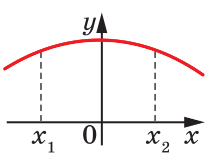
А) $y = 13x - 36$; В) $y = -13x - 36$;
Б) $y = -x - 8$; Г) $y = -13x + 16$.

11. Найдите абсциссу точки графика функции $f\ (x) = x^2 + 4x$, в которой касательная к этому графику параллельна прямой $y = 10x - 6$.

А) 3; Б) –1; В) 7; Г) –5.

12. На рисунке изображен график функции $y = f\ (x)$. Пользуясь графиком, сравните $f'\ (x_1)$ и $f'\ (x_2)$.

А) $f'\ (x_1) > f'\ (x_2)$;
Б) $f'\ (x_1) < f'\ (x_2)$;
В) $f'\ (x_1) = f'\ (x_2)$;
Г) сравнить невозможно.

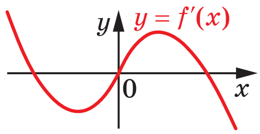


13. Найдите промежутки возрастания функции

$$f(x) = 4 - 3x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

А) $[-3;\ -1]$;
В) $(-\infty;\ 1]$ и $[3;\ +\infty)$;
Б) $[1;\ 3]$;
Г) $(-\infty;\ -3]$ и $[-1;\ +\infty)$.

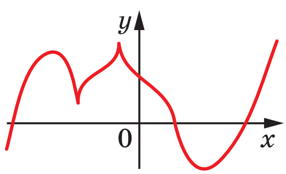
14. Дифференцируемая функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$. Сколько промежутков возрастания имеет функция $y = f(x)$?



А) ни одного;
Б) один;
В) два;
Г) определить невозможно.

15. Сколько критических точек имеет функция $y = f(x)$, $D(f) = \mathbb{R}$, график которой изображен на рисунке?

А) 2;
В) 4;
Б) 3;
Г) ни одной.

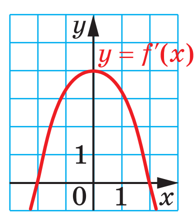


16. Сколько точек экстремума имеет функция

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 8?$$

А) одну;
Б) две;
В) бесконечно много;
Г) ни одной.

17. Дифференцируемая функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$. Найдите точку максимума функции $y = f(x)$.

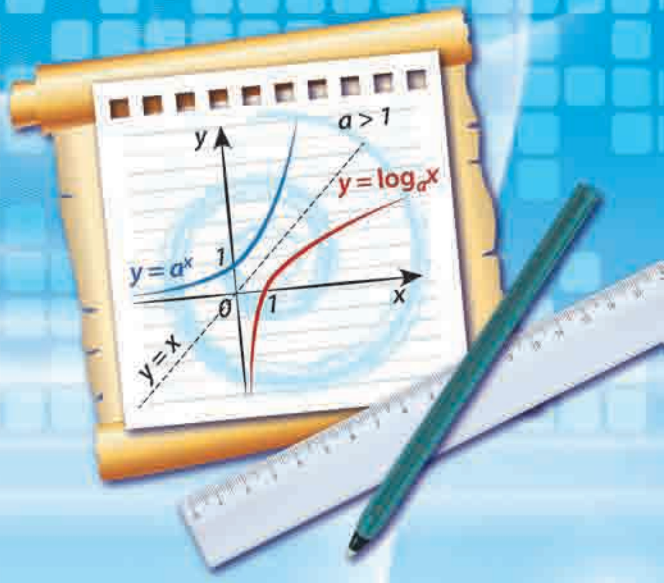


А) -2;
В) 2;
Б) 0;
Г) определить невозможно.

18. Чему равно наименьшее значение функции

$y = x + \frac{4}{x}$ на промежутке $[1;\ 3]$?

А) 3;
Б) 4;
В) $4\frac{1}{3}$;
Г) 5.



§2

Показательная и логарифмическая функции

16. Степень с произвольным действительным показателем. Показательная функция

В 10 классе вы ознакомились с понятием степени положительного числа с рациональным показателем. Теперь мы выясним, что представляет собой степень положительного числа с действительным показателем.

Строгое определение степени с действительным показателем и доказательство ее свойств выходит за пределы школьного курса. Текст этого пункта содержит лишь общие пояснения того, как можно провести необходимые обоснования.

Начнем с частного случая. Выясним, что понимают под степенью числа 2 с показателем π.

Иррациональное число π можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби:

$$\pi = 3{,}1415\ldots .$$

Рассмотрим последовательность рациональных чисел

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots . \qquad (1)$$

Понятно, что эта последовательность сходится к числу π.

В соответствии с последовательностью (1) построим последовательность степеней с рациональными показателями:

$$2^3,\ 2^{3,1},\ 2^{3,14},\ 2^{3,141},\ 2^{3,1415},\ \ldots . \qquad (2)$$

Можно показать, что члены последовательности (2) с увеличением номера стремятся к некоторому положительному числу. Это число и называют степенью числа 2 с показателем π и обозначают 2^{π}.

Аналогично можно действовать в общем случае, определяя смысл выражения b^{α}, где $b > 0$, α — любое действительное число. Для числа α строят сходящуюся к нему последовательность рациональных чисел α_1, α_2, α_3, ... Далее рассматривают последовательность b^{α_1}, b^{α_2}, b^{α_3}, ... степеней с рациональными показателями (напомним, что степень положительного числа с рациональным показателем определена). Можно доказать, что эта последовательность сходится к положительному числу c, которое не зависит от выбора сходящейся к α последовательности рациональных чисел α_1,

α_2, α_3, ... Число c называют степенью положительного числа b с действительным показателем α и обозначают b^α.

Если основание b равно единице, то $1^\alpha = 1$ для всех действительных α.

Если основание b равно нулю, то степень 0^α определяют только для $\alpha > 0$ и считают, что $0^\alpha = 0$. Например, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^\pi = 0$, а выражение $0^{-\sqrt{3}}$ не имеет смысла.

При $b < 0$ выражение b^α, где α — иррациональное число, не имеет смысла.

Степень с действительным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с рациональным показателем.

В частности, для $x > 0$, $y > 0$ и любых действительных α и β справедливы такие равенства:

1) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha + \beta}$;

2) $x^\alpha : x^\beta = x^{\alpha - \beta}$;

3) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;

4) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;

5) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$.

Докажем, например, свойство 1.

Пусть α и β — действительные числа, причем $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n$, $\beta = \lim\limits_{n \to \infty} \beta_n$, где (α_n) и (β_n) — последовательности рациональных чисел. Имеем:

$$\alpha + \beta = \lim_{n \to \infty} \alpha_n + \lim_{n \to \infty} \beta_n = \lim_{n \to \infty} (\alpha_n + \beta_n).$$

Для положительного числа x рассмотрим три последовательности: $(x^{\alpha_n}), (x^{\beta_n})$ и $(x^{\alpha_n} \cdot x^{\beta_n})$.

Имеем: $\lim\limits_{n \to \infty} x^{\alpha_n} = x^\alpha$, $\lim\limits_{n \to \infty} x^{\beta_n} = x^\beta$.

Так как для рациональных показателей α_n и β_n свойство 1 имеет место (мы узнали об этом при изучении свойств степени с рациональным показателем), то $x^{\alpha_n} \cdot x^{\beta_n} = x^{\alpha_n + \beta_n}$.

Последовательность рациональных чисел $\alpha_1 + \beta_1$, $\alpha_2 + \beta_2$, $\alpha_3 + \beta_3$, ... сходится к числу $\alpha + \beta$. Поэтому можно записать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = x^{\alpha+\beta}$.

$$x^{\alpha} \cdot x^{\beta} = \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n} \cdot \lim_{n\to\infty} x^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty}(x^{\alpha_n} \cdot x^{\beta_n}) = \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n+\beta_n} = x^{\alpha+\beta}.$$

ПРИМЕР 1 Упростите выражение $\dfrac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}+1\right)a^{\sqrt{7}}}{\left(a^{3\sqrt{7}}+1\right)a^{\sqrt{7}}} =$$

$$= \frac{a^{3\sqrt{7}}+1}{a^{3\sqrt{7}}+1} = 1.$$

Выберем некоторое положительное число a, отличное от 1. Каждому действительному числу x можно поставить в соответствие положительное число a^x. Тем самым задана функция $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, с областью определения $\mathbb{R}$.

Эту функцию называют **показательной функцией**.

Изучим некоторые свойства показательной функции.

При $a > 0$ и любом x выполняется неравенство $a^x > 0$. Поэтому область значений показательной функции состоит только из положительных чисел.

Можно показать, что для данного числа a, где $a > 0$ и $a \neq 1$, и для любого положительного числа b существует такое число x, что выполняется равенство $a^x = b$.

- Сказанное означает, что *областью значений показательной функции является множество* $(0; +\infty)$.
- *Показательная функция не имеет нулей, и промежуток* $(-\infty; +\infty)$ *является ее промежутком знакопостоянства.*
- *Показательная функция непрерывна.*
- Покажем, что *при* $a > 1$ *показательная функция является возрастающей*. Для этого воспользуемся леммой.

Лемма. ***Если $a > 1$ и $x > 0$, то $a^x > 1$; если $0 < a < 1$ и $x > 0$, то $0 < a^x < 1$.***

Например, $2^{\frac{1}{\pi}} > 1$, $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_2 > x_1$, и функцию $f(x) = a^x$, где $a > 1$.

Поскольку $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Тогда согласно лемме имеем: $a^{x_2 - x_1} > 1$, то есть $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1$. Так как $a^{x_1} > 0$, то $a^{x_2} > a^{x_1}$. Отсюда $f(x_2) > f(x_1)$.

Мы показали, что из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Это означает, что функция f является возрастающей.

- Аналогично можно показать, что *при* $0 < a < 1$ *показательная функция является убывающей*.
- Поскольку показательная функция является либо возрастающей (при $a > 1$), либо убывающей (при $0 < a < 1$), то она *не имеет точек экстремума*.
- *Показательная функция является дифференцируемой*. Подробнее о производной показательной функции вы узнаете в п. 23.

На рисунках 16.1 и 16.2 схематически изображен график показательной функции для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$ соответственно.

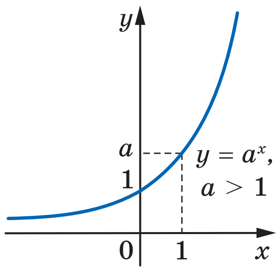


Рис. 16.1

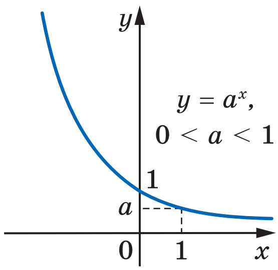


Рис. 16.2

В частности, на рисунках 16.3 и 16.4 изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

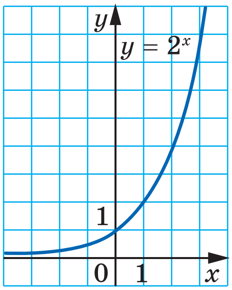


Рис. 16.3

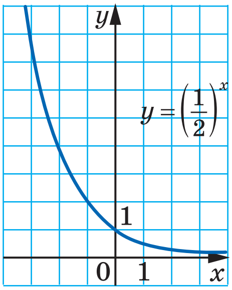


Рис. 16.4

Заметим, что при $a > 1$ график показательной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$. Аналогично при $0 < a < 1$ график показательной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$.

Показательная функция является математической моделью целого ряда процессов, происходящих в природе и в деятельности человека.

Например, биологам известно, что колония бактерий в определенных условиях за равные промежутки времени увеличивает свою массу в одно и то же количество раз.

Это означает, что если, например, в момент времени $t = 0$ масса была равной 1, а в момент времени $t = 1$ масса была равной a, то в моменты времени $t = 2$, $t = 3$, ..., $t = n$, ... масса будет равной соответственно a^2, a^3, ..., a^n, ... Поэтому естественно считать, что в любой момент времени t масса будет равной a^t. Можно проверить (сделайте это самостоятельно), что значения функции $f(t) = a^t$ увеличиваются в одно и то же количество раз за равные промежутки времени.

Таким образом, рассмотренный процесс описывают с помощью показательной функции $f(t) = a^t$.

Из физики известно, что при радиоактивном распаде масса радиоактивного вещества за равные промежутки времени уменьшается в одно и то же количество раз.

Если поместить деньги в банк под определенный процент, то каждый год количество денег на счете будет увеличиваться в одно и то же количество раз.

Поэтому показательная функция описывает и эти процессы.

В таблице приведены свойства функции $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, изученные в этом пункте.

Область определения	$\mathbb{R}$
Область значений	$(0;\ +\infty)$
Нули функции	–
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на $\mathbb{R}$
Возрастание / убывание	Если $a > 1$, то функция возрастающая; если $0 < a < 1$, то функция убывающая
Непрерывность	Непрерывная
Дифференцируемость	Дифференцируемая
Асимптоты	Если $a > 1$, то график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$; если $0 < a < 1$, то график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$

ПРИМЕР 2 Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = 3^x$ на отрезке $[-4;\ 3]$.

Решение. Так как функция f возрастает на отрезке $[-4; 3]$, то наименьшее значение она принимает при $x = -4$, а наибольшее — при $x = 3$.

Следовательно,

$$\min_{[-4;\,3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81},$$

$$\max_{[-4;\,3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Ответ: $\frac{1}{81}$, 27.

ПРИМЕР 3 Решите уравнение $(\sqrt{2}-1)^{|x|}=\sin^2 x+1$.

Решение. Так как $0<\sqrt{2}-1<1$, а $|x|\geqslant 0$, то $(\sqrt{2}-1)^{|x|}\leqslant(\sqrt{2}-1)^0=1$. В то же время $\sin^2 x+1\geqslant 1$. Таким образом, данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{|x|}=1,\\ \sin^2 x+1=1.\end{cases}$

Отсюда $x=0$.

Ответ: 0.

Упражнения

16.1.° Вычислите значение выражения:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2}:3^{2\sqrt{2}}$;

2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2}\cdot 36^{-\sqrt{5}}}$;

4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

16.2.° Найдите значение выражения:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2}:\left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$; 2) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$; 3) $\left(\left(\sqrt[5]{10}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

16.3.° Докажите, что:

1) $\frac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}}=5^{\sqrt{2}}$; 2) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}}=\left(16^{\sqrt{3}}\right)^{-2}$; 3) $\frac{12^{\sqrt{48}}\cdot 2^{4\sqrt{12}}}{4^{\sqrt{108}}\cdot 6^{\sqrt{27}}}=6^{\sqrt{3}}$.

16.4.° Сравните с числом 1 степень:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$;

2) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\pi}$;

3) $0{,}6^{2\sqrt{5}}$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$;

5) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\pi}$;

6) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{6}}$.

16.5.° Какие из данных чисел больше 1, а какие меньше 1?

1) $1{,}8^{\sqrt{1{,}8}}$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{10}}$; 3) $7^{-\sqrt{2}}$; 4) $0{,}3^{-\pi}$.

16.6.° Какая из данных функций является показательной:

1) $y = x^6$; 2) $y = \sqrt[6]{x}$; 3) $y = 6^x$; 4) $y = 6$?

16.7.° На основании какого свойства показательной функции можно утверждать, что:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

16.8.° Укажите, какие из данных функций являются возрастающими, а какие — убывающими:

1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$.

16.9.° Постройте график функции $y = 3^x$. В каких пределах изменяется значение функции, если x возрастает от -1 до 3 включительно?

16.10.° Постройте график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. В каких пределах изменяется значение функции, если x возрастает от -2 до 2 включительно?

16.11.° Сравните:

1) $5^{3,4}$ и $5^{3,26}$; 3) 1 и $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; 5) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}$ и $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$;

2) $0,3^{0,4}$ и $0,3^{0,3}$; 4) $0,17^{-3}$ и 1; 6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7}$ и $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$.

16.12.° Сравните с числом 1 значение выражения:

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0,62^{-0,4}$;

2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; 4) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 6) $3,14^{-0,4}$.

16.13.° Сравните с числом 1 положительное число a, если:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$;

2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

16.14.° Сравните числа m и n, если:

1) $0{,}8^m < 0{,}8^n$;
2) $3{,}2^m > 3{,}2^n$;
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;
4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

16.15.• Упростите выражение:

1) $\left(a^{\sqrt{5}}+2\right)\left(a^{\sqrt{5}}-2\right)-\left(a^{\sqrt{5}}+3\right)^2$;
2) $\frac{a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{3\sqrt{7}}}$;
3) $\frac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$;
4) $\frac{a^{\sqrt[3]{24}}-1}{a^{\sqrt[3]{3}}-1}-\frac{a^{\sqrt[3]{81}}+1}{a^{\sqrt[3]{3}}+1}$.

16.16.• Упростите выражение:

1) $\frac{\left(a^{2\sqrt{6}}-1\right)\left(a^{\sqrt{6}}+a^{2\sqrt{6}}+a^{3\sqrt{6}}\right)}{a^{4\sqrt{6}}-a^{\sqrt{6}}}$;
2) $\left((a^{\pi}+b^{\pi})^2-(a^{\pi}-b^{\pi})^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$.

16.17.• Верно ли утверждение:

1) наибольшее значение функции $y = 0{,}2^x$ на промежутке $[-1; 2]$ равно 5;
2) областью определения функции $y = 4 - 7^x$ является множество действительных чисел;
3) областью значений функции $y = 6^x + 5$ является промежуток $[5; +\infty)$;
4) наименьшее значение функции $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ на промежутке $[-2; 2]$ равно 16?

16.18.• Найдите область значений функции:

1) $y = -9^x$; 2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x+1$; 3) $y = 7^x - 4$; 4) $y = 6^{|x|}$.

16.19.• Найдите наибольшее значение функции $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x$ на промежутке $[-2; 3]$.

16.20.• На каком промежутке наибольшее значение функции $y = 2^x$ равно 16, а наименьшее — $\frac{1}{4}$?

16.21.° На каком промежутке наибольшее значение функции $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ равно 27, а наименьшее — $\dfrac{1}{9}$?

16.22.° Решите неравенство:

1) $2^x > -1$;
2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

16.23.° Решите неравенство $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

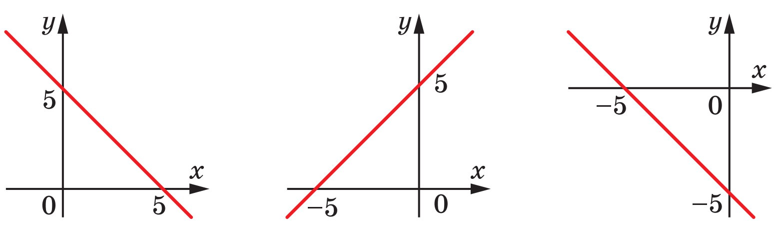
16.24.° Постройте график функции:

1) $y = 2^x - 1$;
2) $y = 2^{x-1}$;
3) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 2$;
4) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+2}$;
5) $y = -2^x$;
6) $y = 5 - 2^x$.

16.25.° Постройте график функции:

1) $y = 3^x + 1$;
2) $y = 3^{x+1}$;
3) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x - 2$;
4) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$;
5) $y = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$;
6) $y = -3^x - 1$.

16.26.° График какой из функций, изображенных на рисунке 16.5, пересекает график функции $y = 5^x$ более чем в одной точке?



а *б* *в*

Рис. 16.5

16.27.• На рисунке 16.6 укажите график функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$.

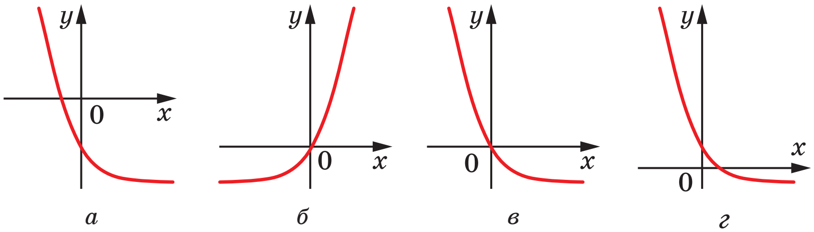


Рис. 16.6

16.28.•• Сравните $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-5,2}$ и $\left(7-4\sqrt{3}\right)^{5,6}$.

16.29.•• Определите графически количество корней уравнения:

1) $2^x = x$;
2) $2^x = x^2$;
3) $2^x = \sin x$;
4) $2^{-x} = 2 - x^2$.

16.30.•• Определите графически количество корней уравнения:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$;
2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

16.31.•• Постройте график функции:

1) $y = 2^{|x|}$;
2) $y = 2^{|x|} + 1$;
3) $y = |2^x - 1|$;
4) $y = \left|\frac{1}{2^x} - 1\right|$.

16.32.•• Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{3^{|x|}}$;
2) $y = 3^{|x|} - 1$;
3) $y = |3^x - 1|$.

16.33.•• Постройте график функции $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

16.34.•• Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$;
2) $y = 3^{|\sin x|} - 2$.

16.35.•• Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = 6^{\cos x}$;
2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{|\cos x|} + 5$.

16.36.• Решите неравенство:

1) $2^{\operatorname{tg} x} > 0$; 2) $2^{\arcsin x} > -\frac{\pi}{4}$; 3) $2^{\arccos x} > \arccos x - \pi$.

16.37.• Решите неравенство:

1) $2^{x} > \sin x - 1$; 2) $2^{x} > \arcsin x - \frac{\pi}{2}$; 3) $2^{\operatorname{ctg} x} > \cos x - 1$.

16.38.• Постройте график функции:

1) $y = |2^{-|x|} - 1|$; 2) $y = \frac{2^{|x|} - 1}{|2^{x} - 1|}$.

16.39.• Постройте график функции:

1) $y = |1 - 3^{|x|}|$; 2) $y = \frac{|1 - 3^{-x}|}{3^{|x|} - 1}$.

16.40.•• Найдите область значений функции $f(x) = 2^{(\sin x + \cos x)^2}$.

16.41.•• Найдите область значений функции $f(x) = 3^{|\sin x \cos x|}$.

16.42.•• Решите уравнение:

1) $2^{\cos x} = x^2 + 2$; 2) $2^{\sqrt{x}} = \cos x$.

16.43.•• Решите уравнение:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = x^2 + 1$; 2) $2^{|x|} = \cos x$.

16.44.•• Решите неравенство:

1) $2^{x^2} \geqslant \sin x$; 2) $2^{-x^2} \geqslant |\sin x| + 1$; 3) $2^{\sqrt{x}} \geqslant 1 - x^2$.

16.45.•• Решите неравенство:

1) $2^{x^2} > \cos x$; 2) $2^{-x^2} \geqslant x^2 + 1$.

16.46.•• Исследуйте на четность функцию $y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$.

16.47.•• Исследуйте на четность функцию $y = \frac{2^x - 3^x}{2^x + 3^x}$.

16.48.•• Исследуйте на четность функцию $y = (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x$.

16.49.•• Исследуйте на четность функцию

$$y = (\sqrt{2} + 1)^x - (\sqrt{2} - 1)^x.$$

16.50.•• Найдите область значений функции $y = \frac{2^x - 1}{2^x - 4}$.

16.51.•• Найдите область значений функции $y = \frac{3^x}{3^x - 9}$.

Готовимся к изучению новой темы

16.52. Представьте числа 1; 4; 8; 16; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{32}$ в виде степени с основанием: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

16.53. Представьте числа 1; 9; 81; $\frac{1}{27}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt[5]{243}$ в виде степени с основанием: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

16.54. Упростите выражение:

1) $7^{x+1} + 7^x$;
2) $10^{x-2} - 10^x$;
3) $2^{x+1} + 2^{x-4}$;
4) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1}$;
5) $2^{x+3} + 3 \cdot 2^{x+2} - 5 \cdot 2^{x+1}$;
6) $\left(\frac{1}{6}\right)^{1-x} + 36^{\frac{x}{2}} - 6^{x+1}$;
7) $9^{x+1} + 3^{2x+1}$;
8) $\sqrt{25^{x-2}} - 2 \cdot 5^x + \left(\sqrt{5}\right)^{2x+4}$.

17. Показательные уравнения

Рассмотрим уравнения $2^x = 8$,

$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$

$$0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}.$$

Во всех этих уравнениях переменная содержится только в показателе степени. Данные уравнения — примеры **показательных уравнений**.

Теорема 17.1. ***При $a > 0$ и $a \neq 1$ равенство $a^{x_1} = a^{x_2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.***

Доказательство. ⊙ Очевидно, что если $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Докажем, что из равенства $a^{x_1} = a^{x_2}$ следует равенство $x_1 = x_2$. Предположим, что $x_1 \neq x_2$, то есть $x_1 < x_2$ или $x_1 > x_2$. Пусть, например, $x_1 < x_2$.

Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$. Она является либо возрастающей, либо убывающей. Тогда из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) или $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Однако по условию выполняется равенство $a^{x_1} = a^{x_2}$. Получили противоречие.

Аналогично рассматривают случай, когда $x_1 > x_2$. ▲

Следствие. ***Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнение***

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \tag{1}$$

равносильно уравнению

$$f(x) = g(x). \tag{2}$$

Доказательство. ⊙ Пусть x_1 — корень уравнения (1), то есть $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$. Тогда по теореме 17.1 получаем, что $f(x_1) = g(x_1)$. Следовательно, x_1 — корень уравнения (2).

Пусть x_2 — корень уравнения (2), то есть $f(x_2) = g(x_2)$. Отсюда $a^{f(x_2)} = a^{g(x_2)}$.

Мы показали, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2) и наоборот, каждый корень уравнения (2) является корнем уравнения (1). Следовательно, уравнения (1) и (2) равносильны. ▲

Рассмотрим примеры решения показательных уравнений.

ПРИМЕР 1 Решите уравнение $(0{,}125)^x = 128$.

Решение. Представим каждую из частей уравнения в виде степени с основанием 2. Имеем: $0{,}125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ и $128 = 2^7$. Запишем: $(2^{-3})^x = 2^7$; $2^{-3x} = 2^7$.

Это уравнение равносильно уравнению

$$-3x = 7.$$

Отсюда $x = -\frac{7}{3}$.

Ответ: $-\frac{7}{3}$.

ПРИМЕР 2 Решите уравнение $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot(10^{x-1})^3$.

Решение. Воспользовавшись свойствами степени, представим каждую из частей уравнения в виде степени с основанием 10. Имеем:

$$(2\cdot 5)^{x^2-3}=10^{-2}\cdot 10^{3x-3};$$

$$10^{x^2-3}=10^{3x-5}.$$

Переходим к равносильному уравнению:

$$x^2-3=3x-5.$$

Отсюда $x^2-3x+2=0$; $x_1=1$, $x_2=2$.

Ответ: 1; 2.

ПРИМЕР 3 Решите уравнение

$$2^{12x-1}-4^{6x-1}+8^{4x-1}-16^{3x-1}=1280.$$

Решение. Имеем:

$$2^{12x-1}-2^{12x-2}+2^{12x-3}-2^{12x-4}=1280;$$

$$2^{12x-4}(2^3-2^2+2^1-1)=1280;\quad 2^{12x-4}\cdot 5=1280;$$

$$2^{12x-4}=256;\quad 2^{12x-4}=2^8;\quad 12x-4=8;\ x=1.$$

Ответ: 1.

ПРИМЕР 4 Решите уравнение

$$2\cdot 3^{x+2}-3^{x+1}=5^{x+1}+4\cdot 5^x.$$

Решение. Имеем:

$$3^x(2\cdot 3^2-3)=5^x(5+4);\quad 3^x\cdot 15=5^x\cdot 9;$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{9}{15};\quad \left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{3}{5};\quad x=1.$$

Ответ: 1.

ПРИМЕР 5 Решите уравнение $25^x+4\cdot 5^x-5=0$.

Решение. Так как $25^x=(5^2)^x=5^{2x}=(5^x)^2$, то данное уравнение удобно решать методом замены переменной.

Пусть $5^x=t$. Тогда данное уравнение можно переписать так:

$$t^2+4t-5=0.$$

Отсюда $t=1$ или $t=-5$.

Если $t=1$, то $5^x=1$. Отсюда $5^x=5^0$; $x=0$.

Если $t=-5$, то $5^x=-5$. Так как $5^x>0$ при любом x, то уравнение $5^x=-5$ не имеет корней.

Ответ: 0.

ПРИМЕР 6 Решите уравнение $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

Решение. Имеем: $4 \cdot 2^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 18 \cdot 3^{2x} = 0$.

Так как $3^{2x} \neq 0$ при любом x, то, разделив обе части уравнения на 3^{2x}, получим уравнение, равносильное данному:

$$4 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0; \quad 4 \cdot \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$. Тогда можно записать: $4t^2 - t - 18 = 0$.

Отсюда $\left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = \frac{9}{4}. \end{array}\right.$ Имеем: $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}. \end{array}\right.$

Так как $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$ при любом x, то первое уравнение совокупности решений не имеет. Второе уравнение совокупности перепишем так:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}. \text{ Отсюда } x = -2.$$

Ответ: -2.

ПРИМЕР 7 Решите уравнение $2^x + 5^x = 7^x$.

Решение. Очевидно, что $x = 1$ — корень данного уравнения. Покажем, что этот корень — единственный.

Разделив обе части исходного уравнения на 7^x, получим:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$. Так как функции $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ и $y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$ — убывающие, то функция f также является убывающей, а следовательно, каждое свое значение она принимает только один раз. Поэтому уравнение $f(x) = 1$ имеет единственный корень.

Ответ: 1.

ПРИМЕР 8 При каких значениях параметра a уравнение $4^x - (a + 3)\,2^x + 4a - 4 = 0$ имеет единственный корень?

Решение. Пусть $2^x = t$. Имеем:

$$t^2 - (a + 3)\,t + 4a - 4 = 0.$$

Отсюда $t_1 = 4$, $t_2 = a - 1$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 4, \\ 2^x = a - 1. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет единственный корень $x = 2$. Второе уравнение совокупности при каждом значении параметра a или имеет один корень, или вообще не имеет корней.

Для выполнения условия задачи второе уравнение совокупности либо должно не иметь корней, либо должно иметь единственный корень, равный 2.

Если $a \leqslant 1$, то есть $a - 1 \leqslant 0$, то уравнение $2^x = a - 1$ корней не имеет.

Число 2 является корнем второго уравнения совокупности, если $2^2 = a - 1$. Отсюда $a = 5$.

Ответ: $a \leqslant 1$ или $a = 5$.

Упражнения

17.1.° Решите уравнение:

1) $4^x = 64$;
2) $3^x = \dfrac{1}{81}$;
3) $0{,}6^{2x-3} = 1$;
4) $10^{-x} = 0{,}001$;
5) $2^{5-x} = 2^{3x-7}$;
6) $8^x = 16$;
7) $0{,}16^x = \dfrac{5}{2}$;
8) $\sqrt{5^x} = 25$;
9) $0{,}25^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$;
10) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{x-1} \cdot \left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1} = \dfrac{2}{3}$;

11) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$;
12) $\left(\frac{4}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{4}\right)^{7x-3}$;
13) $36^x = \left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$;
14) $5^{x^2-2x} = 6^{x^2-2x}$;
15) $3^{x-1} = 6^x \cdot 2^{-x} \cdot 3^{x+1}$.

17.2.° Решите уравнение:

1) $0{,}4^{x^2-x-6} = 1$;
2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3}$;
3) $0{,}7^x = 2\frac{2}{49}$;
4) $9^{-x} = 27$;
5) $\sqrt{2^x} = 8^{-\frac{2}{3}}$;
6) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4{,}5^{x-2}$;
7) $100^x = 0{,}01\sqrt{10}$;
8) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^x = \frac{125}{64}$;
9) $2^{x-1} \cdot 3^{x-1} = \frac{1}{36} \cdot 6^{2x+5}$;
10) $32^{\frac{3}{5}x-2} = 4^{6-\frac{3}{2}x}$;
11) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$;
12) $16^{5-3x} = 0{,}125^{5x-6}$.

17.3.° Решите уравнение:

1) $3^{x+2} + 3^x = 30$;
2) $4^{x+1} + 4^{x-2} = 260$;
3) $2^{x+4} - 2^x = 120$;
4) $7^{x+1} + 4 \cdot 7^x = 77$;
5) $5^x + 7 \cdot 5^{x-2} = 160$;
6) $6^{x+1} - 4 \cdot 6^{x-1} = 192$.

17.4.° Решите уравнение:

1) $5^{x+1} + 5^x = 150$;
2) $2^x + 2^{x-3} = 18$;
3) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$;
4) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52$.

17.5.° Решите уравнение:

1) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$;
2) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$;
3) $25^x - 5^x - 20 = 0$;
4) $100 \cdot 0{,}3^{2x} + 91 \cdot 0{,}3^x - 9 = 0$.

17.6.° Решите уравнение:

1) $6^{2x} - 3 \cdot 6^x - 18 = 0$;
2) $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$.

17.7.• Решите уравнение:

1) $\frac{1}{9} \cdot \sqrt{3^{3x-1}} = 81^{-\frac{3}{4}}$;
2) $4^x \cdot 3^{x+1} = 0{,}25 \cdot 12^{3x-1}$;

3) $4 \cdot 2^{\cos x} = \sqrt{8}$;

4) $0{,}25 \cdot 2^{x^2} = \sqrt[3]{0{,}25 \cdot 4^{2x}}$;

5) $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$;

6) $\sqrt[3]{9^{2x+1}} = \dfrac{3}{\sqrt[5]{3}}$.

17.8.• Решите уравнение:

1) $\dfrac{\sqrt{32}}{16^{x^2}} = 8^{3x}$;

2) $9 \cdot 3^{\sin x} = \sqrt{27}$;

3) $2^{x-1} = 12^{2x} \cdot 3^{-2x} \cdot 2^{x+1}$;

4) $\sqrt[5]{7^{x+1}} = \dfrac{49}{\sqrt{7}}$.

17.9.• Решите уравнение:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56$;

2) $6 \cdot 5^x - 5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-1} = 10$;

3) $2 \cdot 7^x + 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x-1} = 354$;

4) $4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{2x} = 228$;

5) $4 \cdot 9^{1,5x-1} - 27^{x-1} = 33$;

6) $0{,}5^{5-2x} + 3 \cdot 0{,}25^{3-x} = 5$;

7) $2^{2x+1} + 4^x - \left(\dfrac{1}{16}\right)^{1-0,5x} = 47$;

8) $4 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} - 6 \cdot 3^{x-2} = 15 \cdot 9^{x^2-1}$.

17.10.• Решите уравнение:

1) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31$;

2) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17$;

3) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} = 9$;

4) $2 \cdot 3^{2x+1} + 3^{2x-1} - 5 \cdot 3^{2x} = 36$;

5) $6^{x-2} - \left(\dfrac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246$;

6) $5 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-2} - 7 \cdot 2^{x-3} = 8^{x^2-1}$.

17.11.• Решите уравнение:

1) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$;

2) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10$;

3) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3$;

4) $9^x - 6 \cdot 3^{x-1} = 3$;

5) $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28$;

6) $\dfrac{9}{2^x - 1} - \dfrac{21}{2^x + 1} = 2$.

17.12.• Решите уравнение:

1) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$;
2) $2^{3-2x} - 3 \cdot 2^{1-x} + 1 = 0$;
3) $5^x - 0{,}2^{x-1} = 4$;
4) $4^{x+0{,}5} + 7 \cdot 2^x = 4$;
5) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2$;
6) $\dfrac{5}{3^x - 6} + \dfrac{5}{3^x + 6} = 2$.

17.13.•• Решите уравнение:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$;
2) $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} = 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$;
3) $7^x - 5^{x+2} = 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}$.

17.14.•• Решите уравнение:

1) $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8 \cdot 7^{x-2}$;
2) $5^x - 2 \cdot 5^{x-1} = 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2}$;
3) $2^{\sqrt{x}+1} - 3^{\sqrt{x}} = 3^{\sqrt{x}-1} - 2^{\sqrt{x}}$.

17.15.•• Решите уравнение:

1) $27^{\frac{2}{x}} - 2 \cdot 3^{\frac{x+3}{x}} - 27 = 0$;
2) $\sqrt[3]{49^x} - 50\sqrt[3]{7^{x-3}} + 1 = 0$;
3) $2^{\sqrt{x+1}} = 3 \cdot 2^{2-\sqrt{x+1}} + 1$;
4) $3^{\sqrt{x-5}} + 3^{2-\sqrt{x-5}} = 6$;
5) $5 \cdot 2^{\cos^2 x} - 2^{\sin^2 x} = 3$;
6) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$;
7) $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0$.

17.16.•• Решите уравнение:

1) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{2x+3}{x}} - 32 = 0$;
2) $5^{\sqrt{x-2}} - 5^{1-\sqrt{x-2}} - 4 = 0$;
3) $2^{\cos 2x} - 3 \cdot 2^{\cos^2 x} + 4 = 0$.

17.17.•• Решите уравнение:

1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$;
2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0{,}5} = 0$;
3) $7 \cdot 49^x + 3 \cdot 28^x = 4 \cdot 16^x$;
4) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$.

17.18.•• Решите уравнение:

1) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0$;
2) $5 \cdot 2^x + 2 \cdot 5^x = 7 \cdot 10^{\frac{x}{2}}$.

17.19.•• Решите уравнение $\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4 \cdot 2^x - 7}$.

17.20.•• Решите уравнение $\sqrt{1 + 3^x - 9^x} = \sqrt{4 - 3 \cdot 3^x}$.

17.21.•• Решите уравнение $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4.$

17.22.•• Решите уравнение $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=8.$

17.23.•• Решите уравнение:

1) $4^{x+\frac{1}{2}}+\frac{2}{4^x}+14=9\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right);$

2) $9^{x+\frac{1}{2}}+\frac{3}{9^x}+26=16\,(3^x+3^{-x}).$

17.24.•• При каких значениях параметра a уравнение $9^x-(a+1)\cdot 3^x+3a-6=0$ имеет единственный корень?

17.25.•• При каких значениях параметра a уравнение $25^x+5^{x+1}-a^2+a+6=0$ не имеет корней?

17.26.•• При каких значениях параметра a уравнение $4^x-(a+1)\cdot 2^x+2a-2=0$ имеет два различных корня?

17.27.•• Решите уравнение:

1) $2^x=3-x;$

2) $3^x+4^x=5^x;$

3) $7^{6-x}=x+2;$

4) $3^{x-1}+5^{x-1}=34.$

17.28.•• Решите уравнение:

1) $3^x=11-x;$

2) $8^{5-x}=x+4;$

3) $4^{x-2}+6^{x-3}=100;$

4) $3^{x-2}=\frac{9}{x}.$

17.29.* При каких значениях параметра a уравнение $\left(\sqrt{x}-a\right)(3^{2x}-4\cdot 3^x+3)=0$ имеет два различных корня?

17.30.* При каких значениях параметра a уравнение $\left(\sqrt{x}-a\right)(2^{2x}-10\cdot 2^x+16)=0$ имеет два различных корня?

17.31.* Решите уравнение $4^x-(19-3x)\cdot 2^x+34-6x=0.$

17.32.* Решите уравнение $9^x-(14-x)\cdot 3^x+33-3x=0.$

18. Показательные неравенства

Неравенства $0{,}2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$ являются примерами **показательных неравенств.**

При решении многих показательных неравенств используют следующую теорему.

Теорема 18.1. ***При $a > 1$ неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 > x_2$; при $0 < a < 1$ неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 < x_2$.***

Справедливость этой теоремы следует из того, что при $a > 1$ показательная функция $y = a^x$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ — убывающей.

Следствие. ***Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$; если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.***

Воспользовавшись идеей доказательства следствия из теоремы 17.1, докажите это следствие самостоятельно.

Рассмотрим примеры решения показательных неравенств.

ПРИМЕР 1 Решите неравенство $8 \cdot 2^{3x-1} < (0{,}5)^{-1}$.

Решение. Имеем: $2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$; $2^{3x+2} < 2^1$.

Так как основание степеней 2^{3x+2}, 2^1 больше единицы, то последнее неравенство равносильно такому:

$$3x + 2 < 1.$$

Отсюда $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

ПРИМЕР 2 Решите неравенство $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{147}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^x$.

Решение. Имеем:

$$\left(\frac{4}{49}\right)^x \cdot \left(\frac{147}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^x; \quad \left(\frac{4}{49} \cdot \frac{147}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^x;$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \geqslant \left(\left(\frac{3}{5}\right)^4\right)^x; \ \left(\frac{3}{5}\right)^x \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{4x}.$$

Так как $0<\frac{3}{5}<1$, то последнее неравенство равносильно такому: $x \leqslant 4x$; $x \geqslant 0$.

Ответ: $[0; +\infty)$.

ПРИМЕР 3 Решите неравенство $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52$.

Решение. Перепишем данное неравенство так:

$$2^{2x} - 2^{2x-2} + 2^{2x-4} > 52.$$

Отсюда

$$2^{2x-4}(2^4 - 2^2 + 1) > 52;$$
$$2^{2x-4} \cdot 13 > 52; \ 2^{2x-4} > 4;$$
$$2^{2x-4} > 2^2; \ 2x-4 > 2; \ x > 3.$$

Ответ: $(3; +\infty)$.

ПРИМЕР 4 Решите неравенство $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

Решение. Имеем: $(2^2)^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$;

$$2^{-2x+1} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0;$$
$$2 \cdot 2^{-2x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0.$$

Пусть $2^{-x} = t$. Тогда $2t^2 - 7t - 4 < 0$.

Решив это неравенство, получим $-\frac{1}{2} < t < 4$. Отсюда $-\frac{1}{2} < 2^{-x} < 4$.

Так как $2^{-x} > 0$, то $2^{-x} > -\frac{1}{2}$ при всех x. Поэтому достаточно решить неравенство $2^{-x} < 4$.

Имеем: $2^{-x} < 2^2$; $-x < 2$; $x > -2$.

Ответ: $(-2; +\infty)$.

ПРИМЕР 5 Решите неравенство $4^x - 2 \cdot 5^{2x} + 10^x > 0$.

Решение. Имеем: $2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} + 2^x \cdot 5^x > 0$. Так как $5^{2x} > 0$ при любом x, то, разделив обе части последнего неравенства на 5^{2x}, получаем равносильное неравенство

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 2 + \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$. Тогда $t^2 + t - 2 > 0$. Решив это неравенство, получаем $\left[\begin{array}{l} t > 1, \\ t < -2. \end{array}\right.$ Отсюда:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{5}\right)^x > 1, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x < -2. \end{array}\right.$$

Из неравенства $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 1$ находим, что $x < 0$. Неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^x < -2$ не имеет решений.

Ответ: $(-\infty; 0)$.

ПРИМЕР 6 Решите неравенство $3^x + 4^x > 5^x$.

Решение. Имеем: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Заметим, что $f(2) = 1$. Так как функция f — убывающая, то при $x < 2$ выполняется неравенство $f(x) > f(2)$, а при $x > 2$ выполняется неравенство $f(x) < f(2)$. Следовательно, множеством решений неравенства $f(x) > f(2)$, то есть неравенства $f(x) > 1$, является промежуток $(-\infty; 2)$. ●

Упражнения

18.1.° Равносильны ли неравенства:

1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ и $2x + 4 > x - 1$;
2) $0{,}9^{x^2-4} < 0{,}9^{x+2}$ и $x^2 - 4 < x + 2$;
3) $a^x > a^5$, где $a > 1$, и $x > 5$;
4) $a^x < a^{-3}$, где $0 < a < 1$, и $x < -3$?

18.2.° Решите неравенство:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$;
2) $5^x < \frac{1}{5}$;
3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$;
4) $0{,}4^{6x+1} \geqslant 0{,}4^{2x+5}$;
5) $2^{x^2-1} < 8$;
6) $27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$;
7) $0{,}3^{4x-8} > 1$;
8) $0{,}1^{3x-1} < 1000$;
9) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$.

18.3.° Решите неравенство:

1) $6^{7x-1} > 6$;
2) $10^x < 0{,}001$;
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^4$;
4) $3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}$;
5) $49^{x+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x$;
6) $0{,}2^{2x-9} < 1$.

18.4.° Сколько целых решений имеет неравенство:

1) $0{,}2 \leqslant 5^{x+4} \leqslant 125$; 2) $\frac{1}{36} \leqslant 6^{3-x} < 6$; 3) $2 < 0{,}5^{x-1} \leqslant 32$?

18.5.° Найдите сумму целых решений неравенства:

1) $\frac{1}{3} < 3^{x+3} < 9$;
2) $\frac{1}{8} < 2^{2-x} \leqslant 16$.

18.6.° Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}$;
2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2} - 27}}$.

18.7.° Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x - 16}$;
2) $f(x) = \sqrt{1 - 6^{x-4}}$.

18.8.• Решите неравенство:

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$;
2) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$;
3) $0{,}6^{\frac{x+5}{x^2-9}} < 1$;
4) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x-0{,}5} > \sqrt{2}$;
5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3} \leqslant \frac{9}{4}$;
6) $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} \geqslant 0{,}25^{2x}$.

18.9.• Решите неравенство:

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x}<\frac{9}{49}$;

2) $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2}\leqslant\left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$;

3) $0{,}3^{\frac{x^2-4}{x-1}}>1$;

4) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{x-1}>9^{-0{,}5}$.

18.10.• Решите неравенство:

1) $7^{x+2}-14\cdot7^x>5$;

2) $9\cdot3^{x-1}+3^x<36$;

3) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}>56$;

4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}\geqslant26$;

5) $2\cdot6^x+3\cdot6^{x+3}\leqslant650$;

6) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x}-\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}>\frac{3}{16}$.

18.11.• Решите неравенство:

1) $3^{x+2}-4\cdot3^x<45$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\leqslant3$;

3) $5^x+5^{x-1}-5^{x-2}>145$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}<1\frac{2}{3}$.

18.12.• Решите неравенство:

1) $3^{2x}-4\cdot3^x-45>0$;

2) $4^x+2^{x+3}-20<0$;

3) $49^x-8\cdot7^x+7\leqslant0$;

4) $0{,}25^x-12\cdot0{,}5^x+32\geqslant0$;

5) $6^{2x-1}-\frac{1}{3}\cdot6^x-4\leqslant0$;

6) $25^x+5^x-30\geqslant0$.

18.13.• Решите неравенство:

1) $9^{x+1}-2\cdot3^x-7\leqslant0$;

2) $2^x+2^{\frac{x}{2}}-72\geqslant0$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2>0$;

4) $25^x-26\cdot5^x+25\leqslant0$.

18.14.•• Решите неравенство:

1) $\frac{5^x-125}{x^2-4x+4}\leqslant0$;

2) $\frac{2^x-1}{x-1}>0$.

18.15.•• Решите неравенство:

1) $\frac{16-4^x}{9x^2+12x+4}\geqslant0$;

2) $\frac{5^x-0{,}04}{5-x}\geqslant0$.

18.16.•• Решите неравенство:

1) $2^{3x+1}+0{,}25^{\frac{1-3x}{2}}-4^{\frac{3x}{2}}>192$;

2) $2^{2x-1}+2^{2x-3}-2^{2x-5}>2^{7-x}+2^{5-x}-2^{3-x}$.

18.17.•• Решите неравенство:

1) $3^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}+3}>84$; 2) $2\cdot 16^{x}-3\cdot 2^{4x-1}+7\cdot 4^{2x-2}\leqslant 120$.

18.18.•• Найдите множество решений неравенства:

1) $3^{x}-9\cdot 3^{-x}-8>0$;
3) $6^{x+2}+6^{-x}-37\geqslant 0$;
2) $2^{x+3}+2^{1-x}<17$;
4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}\leqslant\frac{6}{5}$.

18.19.•• Найдите множество решений неравенства:

1) $3^{x+1}-2\cdot 3^{1-x}>7$; 2) $4^{1-x}-0{,}5^{1-2x}\geqslant 1$.

18.20.•• Решите неравенство $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}\leqslant 1$.

18.21.•• Решите неравенство $3^{\sqrt{x}}-3^{2-\sqrt{x}}\leqslant 8$.

18.22.•• Решите неравенство:

1) $3\cdot 4^{x}+2\cdot 9^{x}-5\cdot 6^{x}<0$; 2) $5\cdot 25^{\frac{1}{x}}+3\cdot 10^{\frac{1}{x}}\geqslant 2\cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

18.23.•• Решите неравенство:

1) $3\cdot 16^{x}+2\cdot 81^{x}-5\cdot 36^{x}<0$; 2) $2\cdot 49^{\frac{1}{x}}-9\cdot 14^{\frac{1}{x}}+7\cdot 4^{\frac{1}{x}}\geqslant 0$.

18.24.•• Решите неравенство:

1) $x^{2}\cdot 2^{x}+1>x^{2}+2^{x}$; 2) $25\cdot 2^{x}-10^{x}+5^{x}>25$.

18.25.•• Решите неравенство $x^{2}\cdot 3^{x}+9<x^{2}+3^{x+2}$.

18.26.•• Решите уравнение $|3^{x}-1|+|3^{x}-9|=8$.

18.27.•• Решите уравнение $|2^{x}-1|+|2^{x}-2|=1$.

18.28.•• Решите неравенство:

1) $5^{x}>6-x$; 2) $5^{x}+12^{x}<13^{x}$.

18.29.•• Решите неравенство $10^{4-x}>7+x$.

18.30.•• Решите неравенство $(2^{x}-2)\sqrt{x^{2}-x-6}\geqslant 0$.

18.31.•• Решите неравенство $(3^{x}-9)\sqrt{x^{2}-2x-8}\leqslant 0$.

18.32.* Для каждого значения параметра a решите неравенство $(x-a)\sqrt{3\cdot 2^{x}-2\cdot 3^{x}}\geqslant 0$.

18.33.* Для каждого значения параметра a решите неравенство $(x-a)\sqrt{6\cdot 5^{x}-5\cdot 6^{x}}\leqslant 0$.

19. Логарифм и его свойства

Легко решить уравнения $2^x = 4$ и $2^x = 8$. Их корнями будут соответственно числа 2 и 3.

Однако для уравнения $2^x = 5$ сразу указать его корень сложно.

Возникает естественный вопрос: есть ли вообще корни у этого уравнения?

Обратимся к графической интерпретации. На рисунке 19.1 изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = 5$. Они пересекаются в некоторой точке A $(x_0; 5)$. Следовательно, уравнение $2^x = 5$ имеет единственный корень x_0.

Однако графический метод не позволяет определить точное значение x_0.

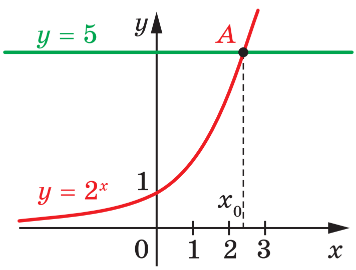


Рис. 19.1

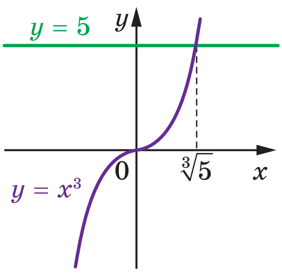


Рис. 19.2

С подобной ситуацией мы встречались, решая в 10-м классе уравнение $x^3 = 5$. Графическая интерпретация также показывает, что это уравнение имеет единственный корень (рис. 19.2). Потребность называть и записывать этот корень в свое время привела к новому понятию «кубический корень» и обозначению $\sqrt[3]{5}$.

Корень уравнения $2^x = 5$ договорились называть **логарифмом числа** 5 **по основанию** 2 и обозначать $\log_2 5$. Таким образом, число $\log_2 5$ — это показатель степени, в которую надо возвести число 2, чтобы получить число 5. Можно записать:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

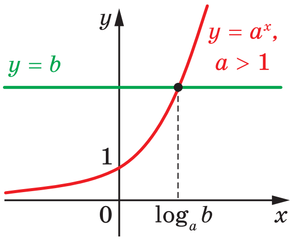


Рис. 19.3

Рассмотрим уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Так как для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $a^x > 0$, то при $b \leqslant 0$ это уравнение не имеет решений. Если $b > 0$, то это уравнение имеет единственный корень (рис. 19.3). Его называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают $\log_a b$.

Определение. Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

Например, $\log_3 9$ — это показатель степени, в которую надо возвести число 3, чтобы получить число 9. Имеем: $\log_3 9 = 2$, поскольку $3^2 = 9$.

Еще несколько примеров:

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, так как $2^{-3} = \frac{1}{8}$;

$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$, так как $25^{\frac{1}{2}} = 5$;

$\log_{17} 17 = 1$, так как $17^1 = 17$;

$\log_{100} 1 = 0$, так как $100^0 = 1$.

Из определения логарифма следует, что при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$ выполняется равенство

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Его называют **основным логарифмическим тождеством.**

Например, $7^{\log_7 3} = 3$, $0{,}3^{\log_{0{,}3} 5} = 5$.

Также из определения логарифма следует, что при $a > 0$ и $a \neq 1$

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Рассмотрим равенство $a^c = b$.

Вы знаете, что действие нахождения числа b по данным числам a и c называют возведением числа a в степень c.

Действие нахождения числа c по данным числам a и b, где $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, называют **логарифмированием числа b по основанию a**. Действительно, $c = \log_a b$.

Отметим, что при $a > 0$ левая часть равенства $a^c = b$ положительна. Следовательно, $b > 0$.

Поэтому при $b \leqslant 0$ выражение $\log_a b$ не имеет смысла.

Логарифм по основанию 10 называют **десятичным логарифмом**. Вместо $\log_{10} b$ пишут $\lg b$.

Используя это обозначение и основное логарифмическое тождество, для каждого $b > 0$ можно записать: $10^{\lg b} = b$.

Рассмотрим основные свойства логарифмов.

Теорема 19.1 (логарифм произведения). ***Если $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, то выполняется равенство***

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Коротко формулируют: *логарифм произведения равен сумме логарифмов*.

Доказательство. Рассмотрим два выражения: $a^{\log_a xy}$ и $a^{\log_a x + \log_a y}$. Докажем, что они равны.

Используя основное логарифмическое тождество, запишем:

$$a^{\log_a xy} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Следовательно, $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Отсюда по теореме 17.1 получаем, что $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. ▲

Теорема 19.2 (логарифм частного). ***Если $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, то выполняется равенство***

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Коротко формулируют: *логарифм частного равен разности логарифмов*.

Воспользовавшись идеей доказательства теоремы 19.1, докажите эту теорему самостоятельно.

Теорема 19.3. ***Если $x > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, то для любого $\beta \in \mathbb{R}$ выполняется равенство***

$$\boxed{\log_a x^\beta = \beta \log_a x}$$

Доказательство. Рассмотрим два выражения: $a^{\log_a x^\beta}$ и $a^{\beta \log_a x}$. Докажем, что они равны.

Имеем: $$a^{\log_a x^\beta} = x^\beta;$$
$$a^{\beta \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^\beta = x^\beta.$$

Следовательно, $a^{\log_a x^\beta} = a^{\beta \log_a x}$. Отсюда по теореме 17.1 получаем: $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$. ▲

Теорема 19.4 (переход от одного основания логарифма к другому). ***Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, то выполняется равенство***

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение $\log_a b \cdot \log_c a$. Преобразуем его, воспользовавшись теоремой 19.3 при $\beta = \log_a b$. Имеем:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Следовательно, $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. Так как $a \neq 1$, то легко показать, что $\log_c a \neq 0$. Теперь можно записать:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \ ▲$$

Следствие 1. ***Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то выполняется равенство***

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Докажите это следствие самостоятельно.

Следствие 2. ***Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то для любого $\beta \neq 0$ выполняется равенство***

$$\boxed{\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b}$$

Доказательство. ⊙ В выражении $\log_{a^\beta} b$ перейдем к основанию a:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^\beta} = \frac{\log_a b}{\beta \log_a a} = \frac{1}{\beta}\log_a b. \ ▲$$

ПРИМЕР 1 Решите уравнение: 1) $3^x = 7$; 2) $0{,}4^{2x-5} = 9$.

Решение. 1) Из определения логарифма следует, что $x = \log_3 7$.

2) Имеем: $2x - 5 = \log_{0,4} 9$; $2x = \log_{0,4} 9 + 5$; $x = \dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$.

Ответ: 1) $\log_3 7$; 2) $\dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$.

ПРИМЕР 2 Вычислите значение выражения:

$$1)\ 10^{2+2\lg 7};\ 2)\ 9^{\log_3 4 - 0,5}.$$

Решение. 1) Применяя свойства степени и основное логарифмическое тождество, получаем:

$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$

2) Имеем:

$$9^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0,5} = (3^{\log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}. \ ●$$

ПРИМЕР 3 При каком значении x выполняется равенство: 1) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$; 2) $\log_x 16 = 4$?

Решение. 1) Выражение $\log_{\frac{1}{2}} x$ определено при $x > 0$. Из определения логарифма следует, что $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} = x$, то есть $x = 32$.

2) Выражение $\log_x 16$ определено при $x > 0$ и $x \neq 1$. Согласно определению логарифма имеем: $x^4 = 16$. Отсюда $x = 2$. ●

ПРИМЕР 4 Вычислите значение выражения:

1) $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$; 2) $\dfrac{1}{2}\log_{36} 9 + \dfrac{1}{3}\log_{36} 8$.

Решение. 1) Используя теоремы о логарифме произведения и логарифме частного, получаем:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2 (20 \cdot 12) - \log_2 15 =$$

$$= \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4.$$

2) Имеем:

$$\frac{1}{2}\log_{36} 9+\frac{1}{3}\log_{36} 8=\frac{1}{2}\log_{36} 3^2+\frac{1}{3}\log_{36} 2^3=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\log_{36} 3+\frac{1}{3}\cdot 3\log_{36} 2=\log_{36} 3+\log_{36} 2=\log_{36} 6=\frac{1}{2}.$$ ●

ПРИМЕР 5 Постройте график функции $f(x)=5^{\log_5 (x-3)}$.

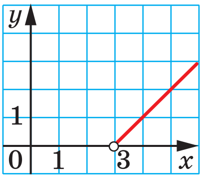


Рис. 19.4

Решение. Данная функция определена на множестве $D(f) = (3;\ +\infty)$. Так как $5^{\log_5 (x-3)}=x-3$ для всех значений $x \in D(f)$, то приходим к выводу, что графиком функции f является часть прямой $y = x - 3$ (рис. 19.4). ●

ПРИМЕР 6 Известно, что $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$. Найдите $\lg 56$.

Решение. Имеем:

$$\lg 56=\lg(8\cdot 7)=\lg 8+\lg 7=\lg 2^3+\frac{\log_2 7}{\log_2 10}=$$

$$=3\lg 2+\log_2 7\cdot\lg 2=3a+ba.$$ ●

Упражнения

19.1.° Верно ли равенство:

1) $\log_7 \frac{1}{49}=-3;$

2) $\log_{25} 5 = 2;$

3) $\log_5 125=\frac{1}{3};$

4) $\log_3 \frac{1}{81}=-4;$

5) $\log_{0,01} 10 = 2;$

6) $\lg 0,0001 = -4;$

7) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3}=\frac{2}{3};$

8) $\log_{\sqrt{5}} 0,2=-2$?

19.2.° Найдите логарифм по основанию 2 числа:

1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $2\sqrt{2}$.

19.3.° Найдите логарифм по основанию 3 числа:

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 81; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{243}$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $3\sqrt{3}$.

19.4.° Найдите логарифм по основанию $\frac{1}{2}$ числа:

1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 0,25; 5) $\frac{1}{16}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt{2}$; 8) 64.

19.5.° Найдите логарифм по основанию $\frac{1}{3}$ числа:

1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 3; 4) 81; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$.

19.6.° Найдите десятичный логарифм числа:

1) 1; 2) 10; 3) 100; 4) 1000; 5) 0,1; 6) 0,01; 7) 0,00001; 8) 0,000001.

19.7.° Чему равен логарифм числа 10 000 по основанию:

1) 10; 2) 100; 3) $\sqrt{10}$; 4) 0,1; 5) 1000; 6) 0,0001?

19.8.° Найдите логарифм числа 729 по основанию:

1) 27; 2) 9; 3) 3; 4) $\frac{1}{27}$; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{3}$.

19.9.° Решите уравнение:

1) $\log_7 x = -1$; 2) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 3) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$; 4) $\log_2 x = 0$; 5) $\log_x 9 = 2$; 6) $\log_x 0{,}25 = -2$; 7) $\log_x 2 = 2$; 8) $\log_x 5 = \frac{1}{3}$.

19.10.° Решите уравнение:

1) $\log_6 x = 2$; 2) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = \frac{3}{2}$; 3) $\log_{0{,}2} x = -3$; 4) $\log_x 6 = 5$; 5) $\log_x 81 = 4$; 6) $\log_x 11 = -1$.

19.11.° Решите уравнение:

1) $6^x = 2$; 2) $5^x = 10$; 3) $0{,}4^x = 9$; 4) $2^{x-3} = 5$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$; 6) $0{,}3^{3x+2} = 7$.

19.12.° Решите уравнение:

1) $3^x = 2$; 2) $10^x = \frac{1}{6}$; 3) $7^{x+5} = 9$; 4) $0{,}6^{5x-2} = 20$.

19.13.° Вычислите:

1) $2^{\log_2 32}$; 3) $7^{2\log_7 2}$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$; 7) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8-2}$;

2) $5^{\log_5 0,45}$; 4) $64^{0,5\log_2 12}$; 6) $6^{1+\log_6 5}$; 8) $6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$.

19.14.° Вычислите:

1) $3^{\log_3 \frac{1}{27}}$; 3) $4^{\log_2 9}$; 5) $10^{2+\lg 8}$;

2) $5^{\frac{1}{2}\log_5 49}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6-3}$.

19.15.° Найдите значение выражения:

1) $\log_6 3+\log_6 2$; 4) $\log_2 5-\log_2 35+\log_2 56$;

2) $\log_5 100-\log_5 4$; 5) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$;

3) $\log_{49} 84-\log_{49} 12$; 6) $2\lg 5+\frac{1}{2}\lg 16$.

19.16.° Вычислите значение выражения:

1) $\lg 8+\lg 12,5$; 3) $\frac{\log_7 125}{\log_7 5}$;

2) $\log_3 162-\log_3 2$; 4) $3\log_6 2+\frac{3}{4}\log_6 81$.

19.17.• Представьте:

1) число 2 в виде степени числа 5;

2) число $\frac{1}{9}$ в виде степени числа 10;

3) число $\sqrt{14}$ в виде степени числа 7;

4) число 0,17 в виде степени числа 18.

19.18.• Представьте:

1) число 3 в виде степени числа 8;

2) число $\sqrt[3]{6}$ в виде степени числа $\frac{1}{2}$.

19.19.• Представьте:

1) число 6 в виде логарифма по основанию 2;

2) число –1 в виде логарифма по основанию 0,4;

3) число $\frac{1}{2}$ в виде логарифма по основанию 9;

4) число $\frac{2}{7}$ в виде логарифма по основанию 10.

19.20.• Представьте:

1) число 4 в виде логарифма по основанию $\frac{1}{3}$;

2) число -2 в виде логарифма по основанию $\sqrt{2}$.

19.21.• Вычислите:

1) $2^{3\log_2 5+4}$;

2) $8^{1-\log_2 3}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2-3}$;

4) $7^{2\log_7 3+\log_{\sqrt{7}} 4}$;

5) $9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}$;

6) $2\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 8-2\lg 2}$;

7) $\lg\left(25^{\log_5 0,8}+9^{\log_3 0,6}\right)$;

8) $27^{\frac{1}{\log_5 3}}+25^{\frac{1}{\log_2 5}}-36^{\frac{1}{\log_9 6}}$.

19.22.• Вычислите:

1) $2^{4\log_2 3-1}$;

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9+2}$;

3) $8^{1-\frac{1}{3}\log_2 12}$;

4) $6^{\frac{1}{2}\log_6 9-\log_{\frac{1}{6}} 3}$;

5) $12^{\log_{144} 4+\log_{12} 5}$;

6) $1000^{\frac{1}{2}\lg 25-3\lg 2}$;

7) $\log_{13}\left(100^{\frac{1}{\log_7 10}}+2^{\log_2 15+3}\right)$;

8) $5^{\log_5 4\cdot\log_2 3}$.

19.23.• Вычислите:

1) $\log_2\log_5\sqrt[8]{5}$;

2) $\log_{\frac{2}{3}}\log_{49} 343$;

3) $\log_9\log_2 8$;

4) $\log_2\sin 135^\circ$;

5) $\log_3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

6) $\log_{\frac{1}{2}}\cos 315^\circ$;

7) $\log_4\sin\frac{\pi}{4}$;

8) $\log_{\frac{1}{3}}\operatorname{tg}(-120^\circ)$.

19.24.• Вычислите:

1) $\log_3\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{125}$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}\log_4 64$;

3) $\log_6 \operatorname{tg} 225°$; 4) $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$.

19.25.• Найдите x, если:

1) $\log_7 x = 2\log_7 8 - 4\log_7 2$;

2) $\lg x = 2 + \lg 3 - \lg 5$;

3) $\log_3 x = \frac{2}{3}\log_3 216 + \frac{1}{2}\log_3 25$;

4) $\lg x = \frac{2}{3}\lg 32 - \frac{1}{3}\lg 128 + 1$;

5) $\log_2 x = 3\log_2 5 - 2\log_2 25 - \lg 10$.

19.26.• Найдите x, если:

1) $\log_a x = 3\log_a 2 + 2\log_a 3$;

2) $\log_a x = \frac{1}{4}\log_a 16 + 3\log_a 0{,}5$;

3) $\lg x = \frac{2}{5}\lg 32 - \frac{1}{3}\lg 64 + 1$.

19.27.• Вычислите значение выражения:

1) $\dfrac{\log_7 27 - 2\log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0{,}2}$; 2) $\dfrac{\log_9 125 + 3\log_9 2}{\log_9 1{,}2 - \log_9 12}$.

19.28.• Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{3\lg 4 + \lg 0{,}5}{\lg 9 - \lg 18}$; 2) $\dfrac{\lg 625 - 8\lg 2}{\frac{1}{2}\lg 256 - 2\lg 5}$.

19.29.• Вычислите значение выражения:

1) $\log_7 \sin\frac{\pi}{5} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{5}} 49$; 2) $\log_3 \cos^2\frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos\frac{\pi}{9}} 9$.

19.30.• Упростите выражение:

1) $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^3$; 2) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_5 8$.

19.31.•• Вычислите значение выражения

$$5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4} + 36\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}.$$

19.32.•• Вычислите значение выражения

$$6^{\frac{6}{\log_{\sqrt{2}} 6} + \frac{1}{3}\log_6 27} - 12\log_7 \sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}.$$

19.33.•• Упростите выражение $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\log_a \dfrac{a}{b}}$.

19.34.•• Упростите выражение $\dfrac{\log_a ab\,(\log_b a-1+\log_a b)}{1+\log_a^3 b}$.

19.35.•• Докажите, что значение выражения $\log_{7+4\sqrt{3}}\left(7-4\sqrt{3}\right)$ является целым числом.

19.36.•• Докажите, что значение выражения $\log_{9-4\sqrt{5}}\left(9+4\sqrt{5}\right)$ является целым числом.

19.37.•• При каких значениях x верно равенство:

1) $\log_2(1-x^2)=\log_2(1-x)+\log_2(1+x)$;

2) $\lg\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\lg(x^2-2x+1)-\lg(x^2+1)$;

3) $\log_5(x^2-4x+4)=2\log_5(2-x)$;

4) $\log_5(x^2-4x+4)=2\log_5|x-2|$?

19.38.•• Чему равно значение выражения:

1) $\lg\sin 1°\cdot\lg\sin 2°\cdot\lg\sin 3°\cdot\ldots\cdot\lg\sin 89°\cdot\lg\sin 90°$;

2) $\lg\operatorname{tg} 10°\cdot\lg\operatorname{tg} 15°\cdot\lg\operatorname{tg} 20°\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg} 75°\cdot\lg\operatorname{tg} 80°$;

3) $\lg(\operatorname{tg} 30°\cdot\operatorname{tg} 32°\cdot\operatorname{tg} 34°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg} 58°\cdot\operatorname{tg} 60°)$;

4) $\lg\operatorname{tg} 1°+\lg\operatorname{tg} 2°+\lg\operatorname{tg} 3°+\ldots+\lg\operatorname{tg} 88°+\lg\operatorname{tg} 89°$?

19.39.•• Упростите выражение $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{10} 9$.

19.40.•• Вычислите значение выражения

$$\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 32.$$

19.41.•• Постройте график функции:

1) $y=\lg\operatorname{tg} x+\lg\operatorname{ctg} x$;

2) $y=\log_x 1$;

3) $y=3^{\log_3(x+3)}$;

4) $y=5^{-\log_5 x}$;

5) $y=10^{\frac{1}{\log_x 10}}$;

6) $y=2^{\log_2 x^2}$;

7) $y=\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$;

8) $y=\log_{\frac{1}{2}}\log_{3-x}(3-x)^4$;

9) $y=2^{\log_4 x^2}$.

19.42.•• Постройте график функции:

1) $y = 7^{\log_7 (x+2)}$;

2) $y = \frac{1}{3}^{\log_{\frac{1}{3}} (x-1)}$;

3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 x^2}$;

4) $y = \log_x x$;

5) $y = \frac{\lg (x^2+1)}{\lg (x^2+1)}$;

6) $y = x^{\log_x 2^x}$;

7) $y = \log_3 \log_{x+1} (x+1)^{27}$;

8) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-2) \cdot \log_{x-2} \frac{1}{3}$.

19.43.•• Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству:

1) $\lg xy = \lg x + \lg y$;

2) $\lg xy = \lg (-x) + \lg (-y)$;

3) $\lg x^2 + \lg y^2 = 2\lg|x| + 2\lg|y|$;

4) $\log_{x^2} y^2 = \log_x (-y)$.

19.44.•• Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству:

1) $\lg \frac{x}{y} = \lg (-x) - \lg (-y)$;

2) $\lg x^2 + \lg y^2 = 2 \lg x + 2 \lg (-y)$;

3) $\log_{x^2} y^2 = \log_x y$.

19.45.•• Члены геометрической прогрессии являются положительными числами. Докажите, что логарифмы последовательных членов этой прогрессии по любому основанию образуют арифметическую прогрессию.

19.46.•• Выразите $\log_{ab} x$ через $\log_a x$ и $\log_b x$.

19.47.•• Докажите, что $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.

19.48.•• Найдите $\log_{ab} b$, если $\log_{ab} a = 4$.

19.49.•• Найдите $\log_{45} 60$, если $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$.

19.50.* Найдите:

1) $\log_8 9$, если $\log_{12} 18 = a$;

2) $\log_5 6$, если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

19.51.* Найдите $\log_{30} 8$, если $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

20. Логарифмическая функция и ее свойства

Выберем положительное число a, отличное от 1. Каждому положительному числу x можно поставить в соответствие число y такое, что $y = \log_a x$. Тем самым задана функция $f(x) = \log_a x$ с областью определения $D(f) = (0; +\infty)$.

Эту функцию называют **логарифмической**.

Покажем, что логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ является обратной к показательной функции $g(x) = a^x$.

Для любого $y_0 \in \mathbb{R}$ уравнение $\log_a x = y_0$ имеет корень (он равен a^{y_0}).

Это означает, что *областью значений логарифмической функции является множество* $\mathbb{R}$.

Имеем: $D(f) = E(g) = (0; +\infty)$;

$E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Для любого $x \in D(f) = (0; +\infty)$ выполняется равенство $a^{\log_a x} = x$. Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$. Сказанное означает, что f и g — взаимно обратные функции.

Так как графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$, то, пользуясь графиком показательной функции $y = a^x$, можно построить график логарифмической функции $y = \log_a x$ (рис. 20.1).

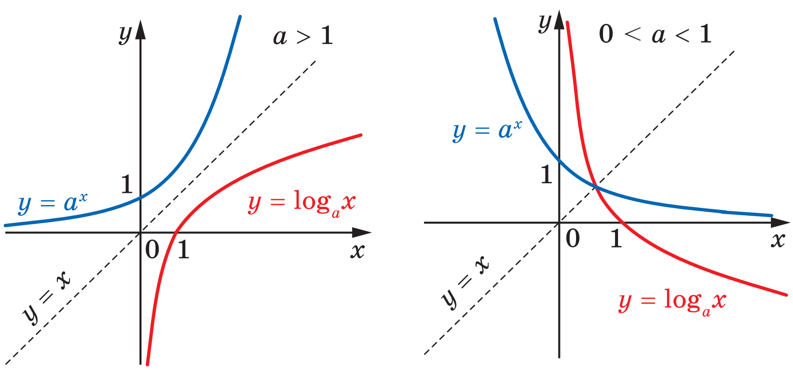


Рис. 20.1

↳ *Функция* $y = \log_a x$ *имеет единственный нуль* $x = 1$.

↳ *Функция* $y = \log_a x$ *имеет два промежутка знакопостоянства.*

Если $a > 1$, *то* $y < 0$ *на* $(0; 1)$; $y > 0$ *на* $(1; +\infty)$;
если $0 < a < 1$, *то* $y < 0$ *на* $(1; +\infty)$; $y > 0$ *на* $(0; 1)$.

Если функция возрастающая (убывающая), то обратная к ней функция является также возрастающей (убывающей). Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей при $a > 1$ и убывающей при $0 < a < 1$.

↳ Поэтому *функция* $y = \log_a x$ *является возрастающей при* $a > 1$ *и убывающей при* $0 < a < 1$.

↳ Так как логарифмическая функция является либо возрастающей (при $a > 1$), либо убывающей (при $0 < a < 1$), то она *не имеет точек экстремума*.

Вы знаете, что если определенная на некотором промежутке функция является обратимой и непрерывной, то обратная к ней функция также непрерывна. Показательная функция $y = a^x$ непрерывна.

↳ Поэтому *функция* $y = \log_a x$ *является непрерывной.*

↳ *Логарифмическая функция дифференцируема.* Подробнее о производной логарифмической функции вы узнаете в п. 23.

↳ *График функции* $y = \log_a x$ *имеет вертикальную асимптоту* $x = 0$, *когда* x *стремится к нулю справа.*

В таблице приведены свойства функции $y = \log_a x$, изученные в этом пункте.

Область определения	$(0; +\infty)$
Область значений	$\mathbb{R}$
Нули функции	$x = 1$
Промежутки знакопостоянства	Если $a > 1$, то $y < 0$ на $(0; 1)$, $y > 0$ на $(1; +\infty)$; если $0 < a < 1$, то $y < 0$ на $(1; +\infty)$, $y > 0$ на $(0; 1)$
Возрастание / убывание	Если $a > 1$, то функция возрастающая; если $0 < a < 1$, то функция убывающая

Непрерывность	Непрерывная
Дифференцируемость	Дифференцируемая
Асимптоты	Прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота, когда x стремится к нулю справа

ПРИМЕР 1 Сравните с единицей основание a логарифма, если известно, что $\log_a 5 < \log_a 4$.

Решение. Если предположить, что $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ является возрастающей. Поэтому $\log_a 5 > \log_a 4$. Но по условию это не так. Значит, $a < 1$. ●

ПРИМЕР 2 Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \log_{0,3}(x^2 + 3x)$; 3) $f(x) = \log_{x-4}(16 - x)$.

2) $f(x) = \dfrac{\lg(9 - x^2)}{\lg(x + 2)}$;

Решение. 1) Так как область определения логарифмической функции — множество положительных чисел, то областью определения данной функции является множество решений неравенства $x^2 + 3x > 0$.

Имеем: $x(x + 3) > 0$; $x < -3$ или $x > 0$.

Следовательно, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Выражение $\lg(9 - x^2)$ имеет смысл при $9 - x^2 > 0$, выражение $\lg(x + 2)$ — при $x + 2 > 0$. Кроме того, знаменатель дроби не может быть равным нулю, поэтому $\lg(x + 2) \neq 0$. Таким образом, область определения $D(f)$ данной функции — это множество решений системы неравенств:

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1. \end{cases}$$

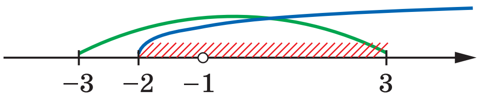


Рис. 20.2

Имеем: $\begin{cases} x^2 < 9, \\ x > -2, \\ x \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x < 3, \\ x > -2, \\ x \neq -1. \end{cases}$ Обратившись к рисунку 20.2, приходим к выводу, что последняя система равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{l}-2<x<-1,\\-1<x<3.\end{array}\right.$$

Следовательно, $D\ (f) = (-2;\ -1) \cup (-1;\ 3)$.

3) Область определения данной функции найдем, решив систему неравенств:

$$\begin{cases}16-x>0,\\x-4>0,\\x-4\neq 1.\end{cases}$$

Тогда $\begin{cases}x<16,\\x>4,\\x\neq 5;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}4<x<5,\\5<x<16.\end{array}\right.$

Отсюда $D\ (f) = (4;\ 5) \cup (5;\ 16)$.

ПРИМЕР 3 Сравните:

1) $\log_2 6$ и $\log_2 7$; 3) $\log_6 7$ и $\log_7 6$; 5) $\log_{\frac{1}{6}} 38$ и -2.

2) $\log_{0,2} 6$ и $\log_{0,2} 7$; 4) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ и 0;

Решение

1) Так как логарифмическая функция $y = \log_2 x$ — возрастающая, то $\log_2 6 < \log_2 7$.

2) Так как логарифмическая функция $y = \log_{0,2} x$ — убывающая, то $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

3) Имеем: $\log_6 7 > \log_6 6$, то есть $\log_6 7 > 1$. Вместе с тем $\log_7 7 > \log_7 6$, то есть $1 > \log_7 6$. Следовательно, $\log_6 7 > > 1 > \log_7 6$.

4) Учитывая, что $0<\frac{\pi}{4}<1$, имеем: $\log_{\frac{\pi}{4}} 4<\log_{\frac{\pi}{4}} 1$. Следовательно, $\log_{\frac{\pi}{4}} 4<0$.

5) Имеем: $-2=\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{6}} 36$.

Так как $\log_{\frac{1}{6}} 38<\log_{\frac{1}{6}} 36$, то $\log_{\frac{1}{6}} 38<-2$.

Упражнения

20.1.° Возрастающей или убывающей является функция:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$;
2) $y = \log_3 x$;
3) $y = \log_{0,1} x$;
4) $y = \lg x$;
5) $y = \log_{\sqrt{5}} x$;
6) $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$;
7) $y = \log_{\sqrt{2}-1} x$;
8) $y = \log_{\frac{\pi}{6}} x$?

20.2.° На основании какого свойства логарифмической функции можно утверждать, что:

1) $\lg 7 > \lg 5$;
2) $\log_{0,6} 4 < \log_{0,6} 3$?

20.3.° Сравните:

1) $\log_{12} 5$ и $\log_{12} 6$;
2) $\log_5 \frac{1}{2}$ и $\log_5 \frac{1}{3}$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ и $\log_{\frac{1}{3}} 4$;
4) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{4}{5}$ и $\log_{\frac{1}{9}} \frac{5}{6}$;
5) $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,7$ и $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,6$;
6) $\log_{\frac{2\pi}{5}} 8,4$ и $\log_{\frac{2\pi}{5}} 8,3$.

20.4.° Сравните:

1) $\log_{0,9} \sqrt{3}$ и $\log_{0,9} \sqrt{2}$;
2) $\log_7 \frac{2}{3}$ и $\log_7 \frac{1}{2}$;
3) $\log_{\frac{2}{3}} 6,8$ и $\log_{\frac{2}{3}} 6,9$;
4) $\lg \frac{\pi}{3}$ и $\lg \frac{\pi}{4}$.

20.5.° Сравните с единицей основание логарифма, если:

1) $\log_a 0,5 > \log_a 0,4$;
2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$;
3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$;
4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$.

20.6.° Сравните с единицей основание логарифма, если:

1) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a \frac{1}{2}$;
2) $\log_a 2 < \log_a \sqrt{3}$.

20.7.° Положительным или отрицательным числом является:

1) $\log_{0,5} 0,6$; 2) $\log_{0,3} 3$; 3) $\log_2 0,27$; 4) $\log_\pi 3$?

20.8.° Сравните с нулем:

1) $\log_4 5$; 2) $\log_2 \frac{1}{3}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 4) $\log_{\frac{\pi}{3}} 2$.

20.9.° Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке:

1) $y = \log_2 x$, $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$;

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{16}; 8\right]$;

3) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$.

20.10.° Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$;

2) $y = \lg x$, $[1; 1000]$.

20.11.° На каком промежутке наибольшее значение функции $y = \log_2 x$ равно 3, а наименьшее равно -1?

20.12.° На каком промежутке наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ равно -1, а наименьшее равно -2?

20.13.° Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \log_3 (x + 1)$;

2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)$;

3) $f(x) = \log_4 (-x)$;

4) $f(x) = \lg x^2$;

5) $f(x) = \log_5 (x^2 + x + 1)$;

6) $f(x) = \log_{0,6} (5x - 6 - x^2)$;

7) $f(x) = 2 \lg x + 3 \lg (2 - x)$;

8) $f(x) = \log_2 \frac{2x-3}{x+7}$.

20.14.° Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \log_7 (6 - x)$;

2) $f(x) = \log_{12} |x|$;

3) $f(x) = \lg (x^2 - 1)$;

4) $f(x) = \log_{0,4} (7x - x^2)$;

5) $f(x) = \lg (x + 2) - 2 \lg (x + 5)$;

6) $f(x) - \lg \frac{2x+1}{x-1}$.

20.15.° Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_2 \frac{1}{x}$. Каково взаимное расположение построенных графиков?

20.16.° Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = \log_3 x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Каково взаимное расположение построенных графиков?

20.17.• Сравните:

1) $\log_9 2$ и 3;
2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ и -2;
3) $\log_{\sqrt{3}} 26$ и 6;
4) $\log_{16} 0{,}1$ и $-\frac{3}{4}$.

20.18.• Сравните:

1) $\log_{0,1} 12$ и 1;
2) $\log_4 3$ и $-\frac{1}{2}$;
3) $\frac{2}{3}$ и $\log_{125} 30$.

20.19.• Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число:

1) $\log_3 10$;
2) $\log_2 5$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$;
4) $\log_{0,1} 2$?

20.20.• Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число:

1) $\log_2 29$;
2) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

20.21.• Сравните:

1) $\log_4 5$ и $\log_5 4$;
2) $\log_{1,5} 1{,}3$ и $\log_{1,3} 1{,}5$;
3) $\log_{0,7} 0{,}8$ и $\log_{0,8} 0{,}7$;
4) $\log_{0,2} 0{,}1$ и $\log_{0,1} 0{,}2$.

20.22.• Сравните:

1) $\log_{1,7} 1{,}8$ и $\log_{1,8} 1{,}7$;
2) $\log_{0,2} 0{,}3$ и $\log_{0,3} 0{,}2$.

20.23.• Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \frac{1}{\lg x}$;
2) $f(x) = \frac{4}{\log_5 (10 - x)}$;
3) $f(x) = \log_2 \cos x$;
4) $f(x) = \log_3 \operatorname{tg} x$.

20.24.• Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{5}{\lg (x+3)}$;
2) $y = \lg \sin x$.

20.25.• Постройте график функции:

1) $y = \log_2 (x - 1)$;
2) $y = \log_2 (x + 3)$;
3) $y = \log_2 x - 1$;
4) $y = \log_2 x + 3$;
5) $y = -\log_2 x$;
6) $y = \log_2 (-x)$.

20.26.• Постройте график функции:

1) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$; 3) $y=\log_{\frac{1}{3}}x-2$; 5) $y=-\log_{\frac{1}{3}}x$;

2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$; 4) $y=\log_{\frac{1}{3}}x+1$; 6) $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x)$.

20.27.• Решите графически уравнение:

1) $\log_2 x = 3 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}x=x-1$; 3) $\log_2 x = -x - 0{,}5$.

20.28.• Решите графически уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{2}}x=x+\frac{1}{2}$; 2) $\log_3 x = 4 - x$.

20.29.• Определите графически количество корней уравнения:

1) $\log_2 x = -x$; 2) $\log_3 x = -x^2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}}x=\sqrt{x}$.

20.30.• Сколько корней имеет уравнение:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\log_2 x$; 2) $\log_2 x=\frac{1}{x}$?

20.31.•• Сравните $\log_2 3 + \log_3 2$ и 2.

20.32.•• Докажите, что $\log_{\frac{1}{3}}4+\log_4\frac{1}{3}<-2$.

20.33.•• Найдите область определения функции:

1) $y = \lg x^2$;

2) $y = \lg(1 - \sin x)$;

3) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(1+x^2)}$;

4) $y=\sqrt{\lg\cos x}$;

5) $y=\frac{1}{\log_6(x-3)}+\sqrt{6-x}$;

6) $y=\frac{4}{\lg(x+2)}+\lg(3-x)$;

7) $y=\sqrt{\frac{(x+1)(3-x)}{\lg(x^2+1)}}$;

8) $y=\log_5(x^2-4x+3)+\frac{1}{\log_5(7-x)}$;

9) $y = \lg(6x - x^2) + \dfrac{1}{\lg(3-x)}$;

10) $y = \log_{x+3}(x^2 + x)$.

20.34.•• Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{1}{\lg(x^2+1)}$;

2) $y = \lg(1 + \sin x)$;

3) $y = \sqrt{\lg(1+x^2)}$;

4) $y = \sqrt{\lg \sin x}$;

5) $y = \lg(x+8) - \dfrac{5}{\lg(-x-1)}$;

6) $y = \lg(10x - x^2) - \dfrac{1}{\lg(8-x)}$;

7) $y = \dfrac{x}{\lg(4-x^2)}$;

8) $y = \lg(9x - x^2) - \dfrac{1}{\lg(5-x)}$;

9) $y = \log_{2-x}(8 + 7x - x^2)$;

10) $y = \sqrt{\dfrac{(x+5)(2-x)}{\lg(x^2+1)}}$.

20.35.•• Постройте график функции:

1) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$;

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} |x|$;

3) $y = \dfrac{|\log_{0,2} x|}{\log_{0,2} x}$;

4) $y = \sqrt{\log_3^2 x} \log_x 3$.

20.36.•• Постройте график функции:

1) $y = |\log_3 x|$; 2) $y = \log_3 |x|$; 3) $y = \dfrac{\log_2 x}{\sqrt{\log_2^2 x}}$.

20.37.•• Найдите наибольшее значение функции:

1) $y = \log_{0,1}(x^2 + 100)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 14)$.

20.38.•• Найдите наименьшее значение функции:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x^2+8}$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{x^2 - 4x + 7}$.

20.39.•• Исследуйте на четность функцию $y = \lg\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

20.40.•• Исследуйте на четность функцию $y = \lg\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$.

21. Логарифмические уравнения

Уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют **простейшим логарифмическим уравнением.**

Поскольку графики функций $y = \log_a x$ и $y = b$ пересекаются в одной точке (рис. 21.1), то простейшее логарифмическое уравнение имеет единственный корень при любом b. Этот корень можно найти, используя определение логарифма. Имеем: $x = a^b$.

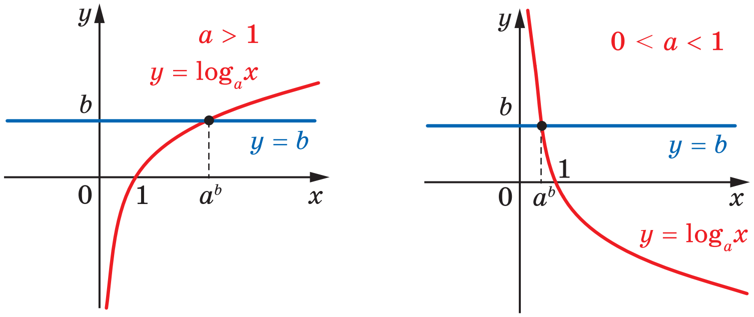


Рис. 21.1

ПРИМЕР 1 Решите уравнение $\log_3 (3x - 1) = 2$.

Решение. По определению логарифма можно записать $3x - 1 = 3^2$. Отсюда $3x - 1 = 9$; $x = \frac{10}{3}$.

Ответ: $\frac{10}{3}$.

Решенное уравнение — частный случай уравнения вида $\log_a f(x) = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Рассуждая, как в примере 1, можно показать, что это уравнение равносильно уравнению $f(x) = a^b$.

При решении многих логарифмических уравнений применяют следующую теорему.

Теорема 21.1. ***Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $x_1 = x_2$, и наоборот, если $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и $x_1 = x_2$, то $\log_a x_1 = \log_a x_2$.***

Поскольку логарифмическая функция является возрастающей или убывающей, то для доказательства этой теоремы можно воспользоваться идеей доказательства теоремы 17.1. Убедитесь в этом самостоятельно.

Следствие. ***Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно любой из систем***

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Выбор соответствующей системы, как правило, связан с тем, какое из неравенств, $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$, решить легче.

Воспользовавшись идеей доказательства следствия из теоремы 17.1, докажите следствие из теоремы 21.1 самостоятельно.

Теперь решение уравнения примера 1 можно оформить и так:

$$\log_3 (3x - 1) = 2 \log_3 3;$$

$$\log_3 (3x - 1) = \log_3 3^2;$$

$$3x - 1 = 3^2; \ x = \frac{10}{3}.$$

ПРИМЕР 2 Решите уравнение

$$\lg (x^2 - 4x + 2) = \lg (2x - 3).$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 2x - 3, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$$

Имеем: $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5, \end{array} \right. \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases}$

Отсюда $x = 5$.

Ответ: 5.

ПРИМЕР 3 Решите уравнение

$$\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)=3.$$

Решение. Естественно преобразовать это уравнение так:

$$\log_3((2x-1)(x-2))=3.$$

Отсюда $(2x-1)(x-2)=3^3$; $2x^2-5x-25=0$;

$$x=5 \text{ или } x=-\frac{5}{2}.$$

Легко убедиться, что число $-\frac{5}{2}$ не является корнем данного уравнения (не входит в его область определения), а число 5 является корнем данного уравнения. Таким образом, данное уравнение решено методом следствий.

Ответ: 5.

Обратим внимание, что сделанный во время решения примера 3 переход от уравнения $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)=3$ к уравнению $\log_3((2x-1)(x-2))=3$ не был равносильным и привел к появлению постороннего корня.

Действительно, область определения исходного уравнения задается системой неравенств $\begin{cases}2x-1>0,\\ x-2>0,\end{cases}$ множеством решений которой является промежуток $(2;+\infty)$. Заменив выражение $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)$ на выражение $\log_3((2x-1)(x-2))$, мы расширили область определения исходного уравнения, так как область определения уравнения $\log_3((2x-1)(x-2))=3$ задается неравенством $(2x-1)(x-2)>0$, множеством решений которого является множество $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

Следовательно, расширение области определения уравнения от множества $(2;+\infty)$ до множества $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$ и стало причиной появления постороннего корня $-\frac{5}{2}$.

На самом деле уравнение $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)=3$ равносильно системе $\begin{cases}\log_3((2x-1)(x-2))=3,\\ 2x-1>0,\\ x-2>0.\end{cases}$

Отсюда $\begin{cases}(2x-1)(x-2)=3^3,\\ x>2;\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-5x-25=0,\\ x>2;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=-\dfrac{5}{2},\end{array}\right.\\ x>2.\end{cases}$

Получаем $x = 5$.

ПРИМЕР 4 Решите уравнение $\log_2 x+\log_x 2=\dfrac{5}{2}$.

Решение. Так как $\log_x 2=\dfrac{1}{\log_2 x}$, то данное уравнение равносильно уравнению $\log_2 x+\dfrac{1}{\log_2 x}=\dfrac{5}{2}$.

Пусть $\log_2 x = t$. Тогда получаем: $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{2}$.

Отсюда $\begin{cases}2t^2-5t+2=0,\\ t\neq 0.\end{cases}$ Следовательно, $\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{2},\\ t=2.\end{array}\right.$

Тогда исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x=\dfrac{1}{2},\\ \log_2 x=2.\end{array}\right. \text{ Отсюда } \left[\begin{array}{l}x=2^{\frac{1}{2}},\\ x=2^2;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2},\\ x=4.\end{array}\right.$$

Ответ: $\sqrt{2}$; 4.

ПРИМЕР 5 Решите уравнение $x^{\frac{\lg x+2}{3}}=10^{2+\lg x}$.

Решение. Так как на области определения уравнения, то есть на множестве $(0;\ +\infty)$, обе его части принимают положительные значения, то можем записать уравнение, равносильное данному: $\lg x^{\frac{\lg x+2}{3}}=\lg 10^{2+\lg x}$.

Далее имеем: $\dfrac{\lg x+2}{3}\cdot\lg x=2+\lg x$. Пусть $\lg x = t$. Тогда $\dfrac{(t+2)\,t}{3}=2+t$. Отсюда $\left[\begin{array}{l}t=-2,\\ t=3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\lg x=-2,\\ \lg x=3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=10^{-2},\\ x=10^3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=0{,}01,\\ x=1000.\end{array}\right.$

Ответ: 0,01; 1000.

ПРИМЕР 6 Решите уравнение

$$2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0. \qquad (1)$$

Решение. Отметим, что переход от уравнения (1) к уравнению

$$2\log_3(x-2)+2\log_3(x-4)=0 \qquad (2)$$

может привести к потере решений.

Действительно, областью определения исходного уравнения является множество $(2; 4)\cup(4; +\infty)$, а область определения уравнения (2) — это множество $(4; +\infty)$. Следовательно, такой переход сужает область определения исходного уравнения на множество $(2; 4)$, которое может содержать корни уравнения (1).

На самом деле уравнение (1) равносильно такому уравнению: $2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0$.

Отсюда $\log_3(x-2)+\log_3|x-4|=0$.

Это уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ \log_3(x-2)+\log_3(4-x)=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \log_3(x-2)+\log_3(x-4)=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Далее имеем: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ \log_3((x-2)(4-x))=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \log_3((x-2)(x-4))=0;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ (x-2)(4-x)=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ (x-2)(x-4)=1;\end{cases}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ x^2-6x+9=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ x^2-6x+7=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ x=3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{2},\\ x=3+\sqrt{2};\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=3+\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $3;\ 3+\sqrt{2}$.

ПРИМЕР 7 Решите уравнение $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3.$

Решение. Перейдем к логарифмам по основанию 2:

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} + \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = 3.$$

Поскольку из условия следует, что $x > 0$, то $\log_2 x^2 = 2 \log_2 x$. Далее имеем:

$$\frac{4}{2\log_2 x} + \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} = 3.$$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда получим $\frac{2}{t} + \frac{6}{1+t} = 3.$

Отсюда $t = 2$ или $t = -\frac{1}{3}$. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2, \\ \log_2 x = -\frac{1}{3}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2^2, \\ x = 2^{-\frac{1}{3}}. \end{array}\right.$$

Ответ: 4; $2^{-\frac{1}{3}}$.

ПРИМЕР 8 Решите уравнение $\log_7 (x + 8) = -x$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = \log_7 (x + 8)$ и $g(x) = -x$. Функция f является возрастающей, функция g — убывающей. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня. Так как $f(-1) = g(-1)$, то $x = -1$ — единственный корень данного уравнения.

Ответ: -1.

ПРИМЕР 9 Решите уравнение $\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} \log_3 (x-2) = 0.$

Решение. Ошибочно считать, что уравнение вида $f(x) \cdot g(x) = 0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$ При таком переходе существует опасность получить в ответе посторонние корни. Например, нет гарантии, что все корни уравнения $f(x) = 0$ принадлежат области определения функции g.

На самом деле уравнение $f(x) \cdot g(x) = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \end{array}\right. \\ x \in D(f), \\ x \in D(g). \end{cases}$$

Воспользовавшись этим, запишем систему, равносильную уравнению $\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} \log_3 (x-2) = 0$:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 (x-2) = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ x > 2, \\ \sin x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Единственным корнем первого уравнения совокупности является число 3. Так как $\sin 3 < \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (рис. 21.2), то $x = 3$ не является корнем исходного уравнения.

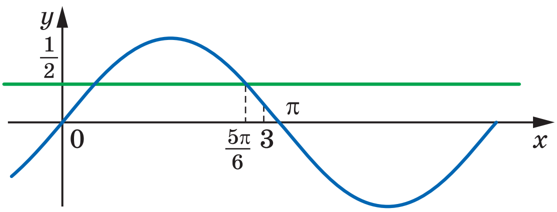


Рис. 21.2

Все числа вида $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, являются корнями второго уравнения совокупности. Среди них следует выбрать только те, которые удовлетворяют условию $x > 2$. Для этого достаточно потребовать, чтобы $n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕР 10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}=32, \\ \log_3(x-y)=1-\log_3(x+y). \end{cases}$$

Решение. Имеем: $\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}}=2^5, \\ \log_3(x-y)+\log_3(x+y)=1. \end{cases}$

Из первого уравнения системы следует, что $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2}$. Отсюда $\frac{x}{y}=2$ или $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$. Следовательно, данная система равносильна совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} \frac{x}{y}=2, \\ \log_3(x-y)+\log_3(x+y)=1. \end{cases}$

Имеем: $\log_3 y+\log_3 3y=1$; $\log_3 y+(\log_3 3+\log_3 y)=1$; $2\log_3 y=0$; $y=1$. Тоди $x=2$.

2) $\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{1}{2}, \\ \log_3(x-y)+\log_3(x+y)=1. \end{cases}$

Легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что эта система решений не имеет.

Ответ: (2; 1).

Упражнения

21.1.° Решите уравнение:

1) $\log_2(x-1)=1$;
2) $\log_3(2x+1)=3$;
3) $\lg(3-2x)=2$;
4) $\log_{\frac{1}{6}}(4x-8)=-2$;
5) $\log_7(x^2-2x-8)=1$;
6) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x-5)=-4$.

21.2.° Решите уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{5}}(x+7)=-3$;
2) $\log_4(2x-5)=0{,}5$;
3) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-5x-3)=2$;
4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)=-1$.

21.3.° Решите уравнение:

1) $\log_\pi (x + 1) = \log_\pi (4x - 5)$;
2) $\log_5 (3x - 5) = \log_5 (x - 3)$;
3) $\lg (x^2 + 2) = \lg (3x + 6)$.

21.4.° Решите уравнение:

1) $\log_9 (4x - 6) = \log_9 (x - 2)$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} (x+7) = \log_{\frac{1}{4}} (x^2+5)$.

21.5.• Решите уравнение:

1) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \frac{1}{x} = 6$;
2) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;
3) $\log_6 x + 2 \log_{36} x + 3 \log_{216} x = 3$;
4) $\log_7 \log_4 (x - 2) = 0$;
5) $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$.

21.6.• Решите уравнение:

1) $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 \sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}$;
2) $\log_5 x - \log_{25} x + \log_{625} x = \frac{3}{4}$;
3) $\lg \lg \lg x = 0$.

21.7.• Решите уравнение:

1) $\log_2 (3^{5x-3} + 1) = 2$;
2) $\log_3 (3^{x-1} + 6) = x$;
3) $\log_2 (2^x + 7) = 3 - x$;
4) $\log_6 (6^{-x} - 5) = x + 1$.

21.8.• Решите уравнение:

1) $\log_6 (6^{x+1} - 30) = x$;
2) $\log_5 (6 - 5^x) = 1 - x$.

21.9.• Решите уравнение:

1) $\lg (x^2 - 2x) = \lg (2x + 12)$;
2) $\log_4 (x - 1) = \log_4 (x^2 - x - 16)$;
3) $\log_{0,5} (x^2 + 3x - 10) = \log_{0,5} (x - 2)$;
4) $\log_6 (x^2 - x - 2) = \log_6 (2 - x)$;
5) $2 \log_{0,4} x = \log_{0,4} (2x^2 - x)$;
6) $2 \log_7 (-x) = \log_7 (x + 2)$;
7) $2 \log_8 (1 - x) = \log_8 (2,5x + 1)$;
8) $2 \log_3 x = 1 + \log_3 (x + 6)$.

21.10.• Решите уравнение:

1) $\log_6 (9 - x^2) = \log_6 (1 - 2x)$;
2) $\lg (x^2 + 2x - 3) = \lg (2x^2 - 2)$;
3) $\log_{0,7} (2x^2 - 9x + 4) = 2 \log_{0,7} (x + 2)$;
4) $2 \log_2 (-x) - \log_2 (3x + 8) = 1$.

21.11.• Решите уравнение:

1) $\frac{1}{2}\log_6 (5x+1) = \log_6 (x-1)$;
2) $\log_5 (25^x - 2 \cdot 5^x) = 2 \log_{25} 15$;
3) $\log_{\sqrt{5}} (16^x - 6) = 2 + \log_{\sqrt{5}} (4^x - 2)$;
4) $x \lg 3 - 1 = 2 \lg 3 - \lg (3^x + 1)$.

21.12.• Решите уравнение:

1) $\frac{1}{2}\log_{0,1} (2x+3) - \log_{0,1} (2x-3) = 0$;
2) $\log_3 (2^{2x} + 2^x) = 2 \log_9 12$;
3) $x - \lg 5 = x \lg 5 + 2 \lg 2 - \lg (1 + 2^x)$.

21.13.• Решите уравнение:

1) $\log_4 (x - 3) + \log_4 x = 1$;
2) $\log_{0,5} (4 - x) + \log_{0,5} (x - 1) = -1$;
3) $\lg (x - 2) + \lg (x - 3) = 1 - \lg 5$;
4) $\log_3 (2x - 1) + \log_3 (x - 4) = 2$;
5) $\lg \sqrt{5x-4} + \lg \sqrt{x+1} = 2 + \lg 0,18$;
6) $\lg (x - 1) + \lg (x - 3) = \lg (1,5x - 3)$;
7) $\log_2 (5 - x) - \log_2 (x - 1) = 1 - \log_2 (x + 2)$;
8) $2 \log_5 (x + 1) - \log_5 (x + 9) = \log_5 (3x - 17)$.

21.14.• Решите уравнение:

1) $\log_7 x + \log_7 (x + 6) = 1$;
2) $\log_3 (5 - x) + \log_3 (3 - x) = 1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} (4x-1) + \log_{\frac{1}{2}} (x+1) = \log_{0,5} 3,5$;
4) $\log_{0,6} (x + 2) + \log_{0,6} (6 - x) = \log_{0,6} (x + 8)$;
5) $\log_2 (2x - 1) - \log_2 (x + 2) = 2 - \log_2 (x + 1)$;
6) $2 \lg (x + 1) - \lg (4x - 5) = \lg (x - 5)$.

21.15.$^{\bullet}$ Решите уравнение:

1) $\log_3(5^x+2)+\log_3(5^x-1)=2+\log_3 2$;
2) $\log_2(2^x+3)+\log_2(5-2^x)=4$.

21.16.$^{\bullet}$ Решите уравнение:

1) $\log_{\sqrt{3}}(2^x-3)+\log_{\sqrt{3}}(2^x-1)=2$;
2) $\lg(3^x-4)+\lg(3^x-2)=1$.

21.17.$^{\bullet}$ Решите уравнение:

1) $\log_2^2 x+3\log_2 x-4=0$;
2) $\log_3^2 x-\log_3 x-2=0$;
3) $\lg^2 x-2\lg x^2+3=0$;
4) $\log_5 x+\log_x 5=2{,}5$;
5) $2\log_{\frac{1}{6}} x+3\sqrt{\log_{\frac{1}{6}} x}-5=0$;
6) $\dfrac{2}{\lg(x+2)-3}+\dfrac{4}{\lg(x+2)+1}=1$.

21.18.$^{\bullet}$ Решите уравнение:

1) $3\log_8^2(-x)-2\log_8(-x)-1=0$;
2) $2\log_7\sqrt{x}=\log_7^2 x-6$;
3) $3\log_3 x+3\log_x 3=10$;
4) $\dfrac{\lg x}{\lg x+2}-\dfrac{2}{\lg x-1}=1$.

21.19.$^{\bullet\bullet}$ Решите уравнение:

1) $\dfrac{2\lg x}{\lg(8x-7)}=1$;
2) $\dfrac{\log_4(x^2+x-2)-1}{\log_4(x-1)}=0$;
3) $\log_x(2x^2-7x+12)=2$;
4) $\log_{x+1}(x+3)=2$;
5) $\log_{x-2}(2x^2-11x+16)=2$.

21.20.$^{\bullet\bullet}$ Решите уравнение:

1) $\dfrac{2\log_2 x}{\log_2(3-2x)}=1$;
2) $\dfrac{\log_5(x^2-9x+25)-1}{\lg(x-3)}=0$;
3) $\log_{x-1}(x^2-5x+7)=1$;
4) $\log_x(x+6)=2$;
5) $\log_{2x-3}(3x^2-7x+3)=2$.

21.21.•• Решите уравнение:

1) $\log_2 (x-5)^2 - 2\log_2 (x+2) = 2$; 2) $\frac{1}{2}\lg x^2 + \lg (x+7) = 1$.

21.22.•• Решите уравнение:

1) $\frac{1}{4}\log_2 x^4 + \log_2 (x+10) = 3 + \log_2 3$;

2) $\frac{1}{2}\log_6 x^2 + \log_6 (5-x) = 1$.

21.23.•• Решите уравнение:

1) $\log_3^2 x^3 + 4\log_3 x - 5 = 0$;

2) $\lg (10x^2) \cdot \lg x = 1$;

3) $\log_4 x^2 \cdot \log_4 \frac{16}{x} = 2$;

4) $\log_2 (4x) \cdot \log_2 (0{,}25x) = 5$;

5) $\lg^2 (100x) + 2\lg x = 20$;

6) $\log_5^2 (5x) + \log_5 \frac{x}{25} = 3$;

7) $\lg (\lg x) + \lg (\lg x^2 - 1) = 0$;

8) $2\lg (\lg x) = \lg (2\lg x + 8)$.

21.24.•• Решите уравнение:

1) $3\lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$;

2) $\log_3 x^2 \cdot \log_3 \frac{x}{27} + 4 = 0$;

3) $\log_7 (7x) \cdot \log_7 \frac{x}{7} = \log_7 x^2 - 1$;

4) $\lg^2 (10x) + \lg (10x) = 6 + 3\lg x$;

5) $\log_6^2 (36x) + \log_6 \frac{x^2}{216} = 8$;

6) $\log_5 (\log_2 x) + \log_5 (\log_2 x^3 - 14) = 1$.

21.25.•• Решите уравнение:

1) $x^{\log_5 x} = 5$;

2) $x^{\lg x + 2} = 1000$;

3) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$;

4) $x^{\log_6 x} = 216x^2$.

21.26.•• Решите уравнение:

1) $x^{\log_3 x}=81$;
2) $x^{\lg x}=100x$;
3) $x^{\log_2 x-2}=256$;
4) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\lg x}=10^{6+\lg x}$.

21.27.•• Решите уравнение:

1) $\log_x 4+\log_{x^2} 64=5$;
2) $3\log_x 16-4\log_{16} x=2\log_2 x$;
3) $\log_x 2\cdot\log_{2x} 2=\log_{4x} 2$;
4) $3\log_{3x} x=2\log_{9x} x^2$;
5) $2\log_{4x} x^3=5\log_{2x} x$;
6) $\log_{4x} 2+\log_2 x=0$.

21.28.•• Решите уравнение:

1) $\log_x (9x^2)\log_3^2 x=4$;
2) $5\log_{\frac{x}{9}} x+\log_{\frac{9}{x}} x^3+8\log_{9x^2} x^2=2$;
3) $\dfrac{2-4\log_{12} 2}{\log_{12}(x+2)}-1=\dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$;
4) $\log_{x+1}(x^3-9x+8)\log_{x-1}(x+1)=3$.

21.29.•• Решите уравнение:

1) $\log_x 9+\log_{x^2} 729=10$;
2) $\log_x (125x)\log_{25}^2 x=1$;
3) $3\log_x 4+2\log_{4x} 4+3\log_{16x} 4=0$.

21.30.•• Докажите, что при $x>0$, $y>0$, $a>0$ и $a\neq 1$ выполняется равенство $x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$.

21.31.•• Решите уравнение:

1) $x^{\lg 5}+5^{\lg x}=250$;
2) $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=18$.

21.32.•• Решите уравнение:

1) $x^{\log_2 10}+10^{\log_2 x}=200$;
2) $7^{\log_7^2 x}+x^{\log_7 x}=14$.

21.33.•• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}9^x-4\cdot 3^{5-y}+27=0,\\ \lg(2y-3x)=\lg(4-4x+y);\end{cases}$
2) $\begin{cases}x^{\log_3 y}+y^{\log_3 x}=18,\\ \log_3 x+\log_3 y=3;\end{cases}$

3) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2}, \\ xy = 27; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 (x+2y) + \log_{\frac{1}{3}} (x-2y) = 1, \\ x^2 + y^2 = 4 + \dfrac{1}{2} y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^{\lg y} = 2, \\ xy = 20. \end{cases}$

21.34.•• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ \lg (3x - 2y) = \lg (5 + x - 3y); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_x (3x + 2y) = 2, \\ \log_y (2x + 3y) = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2\log_2 (x+y), \\ \log_2 (x+y) + \log_2 (x^2 - xy + y^2) = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x+y)\, 3^{y-x} = \dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5 (x+y) = x - y. \end{cases}$

21.35.•• Решите уравнение:

1) $\log_7 (x + 8) = -x$;   2) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$.

21.36.•• Решите уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{3}} (x-5) = x - 9$;

2) $\log_3^2 x + (x-1)\log_3 x = 12 - 3x$.

21.37.•• Решите уравнение

$$\lg^2 (x + 1) = \lg (x + 1) \lg (x - 1) + 2 \lg^2 (x - 1).$$

21.38.•• Решите уравнение

$$2\lg^2(2x-1)=\lg^2(2x+1)-\lg(2x-1)\cdot\lg(2x+1).$$

21.39.•• Решите уравнение:

1) $x^2\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4;$

2) $\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}-2=\lg\sqrt{1-x^2}.$

21.40.•• Решите уравнение:

1) $x\log_{x+1}5\cdot\log_{\sqrt[3]{\frac{1}{5}}}(x+1)=\dfrac{x-4}{x};$

2) $\log_{1+x+\sin x}(x^2+x-1)=\log_{1+x+\sin x}(3x+2).$

21.41.•• Решите уравнение $\sqrt{\operatorname{tg}x+1}\cdot\log_{\frac{1}{2}}(3-x)=0.$

21.42.•• Сколько решений имеет уравнение

$$\left(\log_2(x+1)-3\right)\sqrt{x-a}=0$$

в зависимости от значения параметра a?

21.43.•• Сколько решений имеет уравнение

$$\left(\log_3(x-2)-2\right)\sqrt{x-a}=0$$

в зависимости от значения параметра a?

21.44.•• При каких значениях параметра a уравнение $(x-a)\log_2(3x-7)=0$ имеет единственный корень?

21.45.•• При каких значениях параметра a уравнение $(x+a)\log_3(2x-5)=0$ имеет единственный корень?

22. Логарифмические неравенства

При решении многих логарифмических неравенств используют следующую теорему.

Теорема 22.1. ***При $a>1$ неравенство $\log_a x_1>\log_a x_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1>x_2>0$; при $0<a<1$ неравенство $\log_a x_1>\log_a x_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $0<x_1<x_2$.***

Справедливость этой теоремы следует из того, что при $a>1$ логарифмическая функция $y=\log_a x$ является возрастающей, а при $0<a<1$ — убывающей.

Следствие. ***Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе***

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись идеей доказательства следствия из теоремы 17.1, докажите это следствие самостоятельно.

ПРИМЕР 1 Решите неравенство $\log_2 x > 3$.

Решение. Поскольку $3 = \log_2 2^3$, то можно записать:

$$\log_2 x > \log_2 2^3.$$

Это неравенство равносильно такому: $x > 2^3$. Отсюда $x > 8$.

Ответ: $(8; +\infty)$.

ПРИМЕР 2 Решите неравенство $\log_{0,3} x \geqslant 1$.

Решение. Имеем: $\log_{0,3} x \geqslant \log_{0,3} 0,3$.

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \leqslant 0,3, \\ x > 0. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0,3]$.

ПРИМЕР 3 Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} (3x-4) < \log_{\frac{1}{2}} (x-2).$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x-4 > x-2, \\ x-2 > 0. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases}$ $x > 2$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

ПРИМЕР 4 Решите неравенство

$$\log_2^2 (x-1)^2 - \log_{2^{-1}} (x-1) - 5 > 0.$$

Решение. Так как областью определения данного неравенства является промежуток $(1;\ +\infty)$, то выполняется равенство

$$\log_2 (x-1)^2 = 2\log_2 (x-1).$$

Тогда данное неравенство можно переписать так:

$$4\log_2^2 (x-1) + \log_2 (x-1) - 5 > 0.$$

Пусть $\log_2 (x-1) = t$. Получаем $4t^2 + t - 5 > 0$; $\left[\begin{array}{l} t < -\dfrac{5}{4}, \\ t > 1. \end{array}\right.$

Имеем: $\left[\begin{array}{l} \log_2 (x-1) < -\dfrac{5}{4}, \\ \log_2 (x-1) > 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2 (x-1) < \log_2 2^{-\frac{5}{4}}, \\ \log_2 (x-1) > \log_2 2; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} 0 < x-1 < 2^{-\frac{5}{4}}, \\ x-1 > 2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 1 < x < 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}, \\ x > 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(1;\ 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}\right) \cup (3;\ +\infty).$

ПРИМЕР 5 Решите неравенство $\log_x 3 - \dfrac{5}{2} - \log_{\frac{1}{3}} x > 0.$

Решение. Имеем: $\dfrac{1}{\log_3 x} - \dfrac{5}{2} + \log_3 x > 0.$

Пусть $\log_3 x = t$. Тогда $\dfrac{1}{t} - \dfrac{5}{2} + t > 0$. Отсюда

$$\frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} > 0; \quad \frac{(2t-1)(t-2)}{2t} > 0.$$

Воспользовавшись методом интервалов (рис. 22.1), получаем: $\left[\begin{array}{l} 0 < t < \dfrac{1}{2}, \\ t > 2. \end{array}\right.$

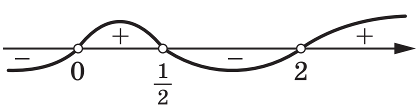


Рис. 22.1

Далее, $\left[\begin{array}{l} 0 < \log_3 x < \dfrac{1}{2}, \\ \log_3 x > 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 1 < x < \sqrt{3}, \\ x > 9. \end{array}\right.$

Ответ: $\left(1; \sqrt{3}\right) \cup (9; +\infty)$.

ПРИМЕР 6 Решите неравенство $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0$.

Решение. Перепишем данное неравенство так: $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1} > \log_x 1$. Это неравенство равносильно совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} < 1. \end{cases}$

Отсюда

$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 3x - 1 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{3} < x < 1, \\ x^2 - 3x + 2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{3} < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < 1; \end{array}\right. \end{cases}$ $\dfrac{1}{3} < x < 1$.

2) $\begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 1. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - 3x + 2 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ 1 < x < 2; \end{cases}$ $1 < x < 2$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$.

ПРИМЕР 7 Решите неравенство $\log_3 (x + 7) < 4 - x$.

Решение. Имеем: $\log_3 (x + 7) + x - 4 < 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \log_3 (x + 7) + x - 4$. Она возрастает на $D(f) = (-7; +\infty)$. Заметим, что $f(2) = 0$. Следовательно, при $x > 2$ получим, что $f(x) > f(2) = 0$, а при $-7 < x < 2$ получим, что $f(x) < f(2) = 0$.

Ответ: $(-7; 2)$.

Упражнения

22.1.° Решите неравенство:

1) $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 9$;
2) $\log_{11} x > \log_{11} 12$;
3) $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 14$;
4) $\log_7 x < \log_7 15$;
5) $\log_{\frac{3}{7}} (x+5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$;
6) $\log_8 (2x - 3) > \log_8 7$;
7) $\log_{\frac{2}{9}} (x-4) > \log_{\frac{2}{9}} 2$;
8) $\lg (1 + 3x) < \lg 16$.

22.2.° Решите неравенство:

1) $\lg x < \lg 4$;
2) $\log_{\frac{5}{6}} x > \log_{\frac{5}{6}} \frac{6}{7}$;
3) $\log_{12} (x - 8) > \log_{12} 3$;
4) $\log_{16} (4x - 6) < \log_{16} 10$;
5) $\log_{\frac{8}{11}} (2-x) < \log_{\frac{8}{11}} 2$;
6) $\log_{0,9} (2x + 1) > \log_{0,9} 5$.

22.3.° Решите неравенство:

1) $\log_7 x > 2$;
2) $\log_5 x \leqslant -1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant 5$;
4) $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$;
5) $\log_2 (5x + 1) > 4$;
6) $\log_{0,6} (x - 2) < 2$;
7) $\log_3 (2x - 1) \leqslant 3$;
8) $\log_7 (9x + 4) \leqslant 2$;
9) $\log_{0,5} (2x + 1) \geqslant -2$;
10) $\log_{0,2} (x + 6) \geqslant -1$.

22.4.° Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{7}} x < -1$;
2) $\log_4 x > 2$;
3) $\lg x < 5$;
4) $\log_{\frac{1}{6}} x > -3$;
5) $\log_{\frac{1}{3}} (2x-3) \geqslant -2$;
6) $\log_9 (5x + 6) \leqslant 2$.

22.5.• Сколько целых решений имеет неравенство:

1) $\log_{0,25} (3x - 5) > -3$;
2) $\log_3 (7 - x) < 3$?

22.6.• Найдите целые решения неравенства:

1) $\log_{0,5} (1 - x) > -1$;
2) $\log_{36} (x + 1) \leqslant 0,5$.

22.7.• Найдите множество решений неравенства:

1) $\lg (2x + 3) > \lg (x - 1)$;
2) $\log_5 2x < \log_5 (x + 1)$;
3) $\log_{0,2} (2x - 1) > \log_{0,2} (3x - 4)$;

4) $\log_{0,4}(x^2-3) < \log_{0,4}(x+3)$;

5) $\log_{0,7}(x^2-2x-3) \leqslant \log_{0,7}(9-x)$;

6) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+31) \leqslant \log_{\frac{1}{3}}(10x+11)$.

22.8. Решите неравенство:

1) $\log_2(2x-3) < \log_2(x+1)$;

2) $\log_{0,6}(3-2x) > \log_{0,6}(5x-2)$;

3) $\lg(x^2-2) \geqslant \lg(4x+3)$;

4) $\log_{0,1}(10-2x) \geqslant \log_{0,1}(x^2-x-2)$.

22.9. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $\log_{\frac{1}{4}}(x+1) > -\frac{3}{2}$;

2) $\log_{\sqrt{3}}(12-x^2) > 2$;

3) $\log_{\frac{1}{7}}(3-x) > -1$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5) > \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$.

22.10. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $\log_{\frac{1}{6}}(x+2) \leqslant 0$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(6-x) > -2$;

3) $\log_{0,3}(4x-3) \geqslant \log_{0,3}(x+3)$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1) \geqslant -1$.

22.11. Найдите множество решений неравенства:

1) $\log_8(x^2-4x+3) \leqslant 1$;

2) $\log_{0,5}(x^2+x) > -1$;

3) $\log_{0,7}(x^2+10x+25) > 0$;

4) $\log_2(x^2-3x) \leqslant 2$;

5) $\log_2\frac{4x-5}{4x+7} > 0$;

6) $\lg\frac{x^2-1}{(x-2)^2} > 0$;

7) $\log_3\frac{2x+5}{x+1} \leqslant 1$;

8) $\log_4\frac{3x-1}{x} \leqslant 0,5$.

22.12. Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7) > 0$;

2) $\log_9(x^2-6x+8) \leqslant 0,5$;

3) $\log_{0,5}(x^2+3x) \geqslant -2$;

4) $\log_{0,3}(x^2-2x+1) \geqslant 0$;

5) $\log_4\frac{3x-1}{x-1} \leqslant 1$;

6) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{3x+1} > 1$.

22.13.° Решите неравенство:

1) $\log_{0,3}(x^2+x-12) \geqslant \log_{0,3}(6x-6)$;

2) $\lg(x^2-x) \leqslant \lg(3x-3)$;

3) $\log_{0,8}(1-x^2) > \log_{0,8}(x^2+5x-2)$;

4) $2\log_2(2x+7) \geqslant 5+\log_2(x+2)$;

5) $\log_3(x^2+2x-3) \leqslant \log_3(x+9)$;

6) $\log_{\frac{1}{7}}(2x^2+3x+1) \geqslant 2\log_{\frac{1}{7}}(1-x)$.

22.14.° Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{2}{3}}(6-2x) < \log_{\frac{2}{3}}(x^2-2x-3)$;

2) $\log_{0,1}(x^2-3x-4) \geqslant \log_{0,1}(x+1)$;

3) $2\log_2(x+5) \leqslant 3+\log_2(11+x)$;

4) $\lg(2x^2-9x+4) \leqslant 2\lg(x+2)$.

22.15.° Решите неравенство:

1) $\lg x+\lg(x-3) > 1$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+\log_{\frac{1}{3}}x < -1$;

3) $\log_2 x+\log_2(x+4) < 5$;

4) $\log_{0,1}(x-5)+\log_{0,1}(x-2) \geqslant -1$;

5) $\log_6(5x+8)+\log_6(x+1) \leqslant 1-\log_6 3$;

6) $\log_3(1-x)+\log_3(-5x-2) \geqslant 2\log_3 2+1$.

22.16.° Решите неравенство:

1) $\log_2(-x)+\log_2(1-x) \leqslant 1$;

2) $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3) \geqslant -1$;

3) $\log_3(x-2)+\log_3(x-10) \geqslant 2$;

4) $\log_7 x+\log_7(3x-8) \geqslant 1+2\log_7 2$.

22.17.° Решите неравенство:

1) $\log_{0,2}^2 x \leqslant 1$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x \geqslant 4$;

3) $\lg^2 x+3\lg x-4 < 0$;

4) $\log_{\frac{1}{4}}^2 x+2\log_{\frac{1}{4}} x-8 \leqslant 0$;

5) $\log_2^2 x-5\log_2 x+6 \geqslant 0$;

6) $2\log_{\frac{1}{9}}^2 x-5\log_{\frac{1}{9}} x+2 \geqslant 0$.

22.18.$^{\bullet}$ Решите неравенство:

1) $\log_{0,5}^2 x \geqslant 9$;
2) $\lg^2 x - 2\lg x - 3 \geqslant 0$;
3) $2\log_4^2 x - \log_4 x - 1 < 0$;
4) $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 2 \leqslant 0$.

22.19.$^{\bullet\bullet}$ Найдите множество решений неравенства:

1) $\log_2^2 (4x) + 2\log_2 x - 11 < 0$;
2) $\log_3^2 (27x) + 3\log_3 x - 19 \geqslant 0$;
3) $\dfrac{\lg^2 x + \lg x - 6}{\lg x} \geqslant 0$;
4) $2\log_5 x - \log_x 5 \leqslant 1$.

22.20.$^{\bullet\bullet}$ Решите неравенство:

1) $\log_7^2 (7x) - \log_7 x \geqslant 3$;
2) $\log_6^2 \dfrac{x}{216} + 8\log_6 x - 12 \leqslant 0$;
3) $\dfrac{\log_3^2 x - 6\log_3 x + 8}{\log_3 x - 1} \geqslant 0$;
4) $\log_{0,5} x - 2\log_x 0,5 \leqslant 1$.

22.21.$^{\bullet\bullet}$ Решите неравенство:

1) $\log_{1,6} \log_{0,5} (x^2 - x - 6) \geqslant 0$;
2) $\log_{0,5} \log_4 (2x^2 + x - 1) < 1$;
3) $\log_{\frac{1}{9}} \log_3 \dfrac{x}{x-1} \geqslant 0$;
4) $\log_{1,5} \log_3 \dfrac{3x-5}{x+1} \leqslant 0$.

22.22.$^{\bullet\bullet}$ Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{7}{4}} \log_5 (x^2 - 2x - 3) \leqslant 0$;
2) $\log_{0,8} \log_2 \dfrac{3x-1}{2-x} > 0$.

22.23.$^{\bullet\bullet}$ Решите неравенство:

1) $\log_{2x-3} x > 1$;
2) $\log_{x-2} (2x - 9) < 0$;
3) $\log_{x+1} (5 - x) > 1$;
4) $\log_{x-2} (2x - 7) < 1$;
5) $\log_x (x + 2) \leqslant 2$;
6) $\log_x (2x^2 - 3x) \leqslant 1$.

22.24.$^{\bullet\bullet}$ Решите неравенство:

1) $\log_{3x-2} x < 1$;
2) $\log_x (x^2 - 7x + 13) > 0$;
3) $\log_{x-1} (4 - x) < 1$;
4) $\log_x (6 - x) \geqslant 2$.

22.25.$^{\bullet\bullet}$ Решите неравенство $\sqrt{2 \cdot 5^x - 1} > 5^x - 2$.

22.26.$^{\bullet\bullet}$ Решите неравенство $\sqrt{20 \cdot 3^x - 11} > 3^x - 4$.

22.27.•• Решите неравенство:

1) $\sqrt{-x^2+7x-10}\log_2(x-3)\leqslant 0$;

2) $\sqrt{4-x^2}\left(\log_3\frac{x+1}{x}+2\right)\leqslant 0$;

3) $(x^2-2,8x+1,8)\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}|x-2|}\geqslant 0$.

22.28.•• Решите неравенство:

1) $\sqrt{-x^2+6x-5}\log_3(x-2)\leqslant 0$; 2) $\frac{\log^2_{\sqrt{2}}(x-3)}{x^2-4x-5}\geqslant 0$.

22.29.* Для каждого значения параметра a решите неравенство $(2^x-a)\sqrt{x-3}\geqslant 0$.

22.30.* Для каждого значения параметра a решите неравенство $(3^x-a)\sqrt{x-2}\leqslant 0$.

22.31.* Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_x(2\sin x+1)\leqslant 0,\\ 0<x<2\pi.\end{cases}$$

22.32.* Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_x(2\cos x+1)\leqslant 0,\\ 0<x<2\pi.\end{cases}$$

23. Производные показательной и логарифмической функций

Существует ли функция, производная которой равна самой функции? Ответить на этот вопрос легко. Например, функция, которая является нулевой константой, обладает этим свойством.

А можно ли указать такую функцию f, определенную на $\mathbb{R}$, отличную от нулевой константы, чтобы $f'(x)=f(x)$ для любого $x\in\mathbb{R}$? Ответ на этот вопрос неочевиден.

Оказывается, что среди показательных функций $f(x)=a^x$ существует единственная функция такая, что $f'(x)=f(x)$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Для этой функции число, которое является основанием степени, обозначают буквой e, а сама функция имеет вид $f(x) = e^x$. Следовательно,

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Установлено, что число e — иррациональное. Его можно записать в виде бесконечной непериодической десятичной дроби:

$$e = 2{,}71828182845\ldots .$$

Функцию $f(x) = e^x$ называют **экспонентой.**

Отметим одну особенность графика экспоненты.

Имеем: $f'(0) = f(0) = e^0 = 1$.

Следовательно, касательная к графику экспоненты в точке с абсциссой, равной нулю, имеет угловой коэффициент, равный 1. То есть эта касательная образует угол 45° с положительным направлением оси абсцисс (рис. 23.1).

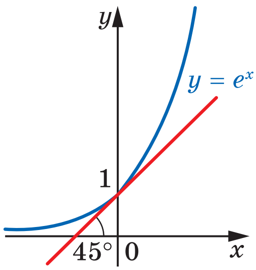


Рис. 23.1

Выведем формулу для нахождения производной показательной функции $f(x) = a^x$.

Имеем: $a = e^{\log_e a}$. Тогда $a^x = e^{x\log_e a}$.

Пользуясь правилом вычисления производной сложной функции, запишем:

$$(a^x)' = (e^{x\log_e a})' = e^{x\log_e a} \cdot (x\log_e a)' = a^x \log_e a.$$

Логарифм по основанию e называют **натуральным логарифмом** и обозначают $\ln a$, то есть $\log_e a = \ln a$.

Тогда при $a > 0$, $a \neq 1$ можно записать:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

Эта формула показывает, что между значением производной показательной функции и соответствующим значением самой функции существует прямая пропорциональная зависимость. Коэффициент пропорциональности равен $\ln a$.

В пункте 20 мы определили, что логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ является дифференцируемой. Найдем формулу для вычисления производной логарифмической функции.

Для любого $x > 0$ выполняется равенство $x = e^{\ln x}$. Тогда функции $f(x) = x$, $D(f) = (0; +\infty)$, и $g(x) = e^{\ln x}$, $D(g) = (0; +\infty)$, представляют собой одну и ту же функцию. Поэтому для любого $x \in (0; +\infty)$ выполняется равенство $f'(x) = g'(x)$, то есть $(x)' = (e^{\ln x})'$.

Левая часть этого равенства равна 1. В правой части получаем: $(e^{\ln x})' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x(\ln x)'$. Тогда $1 = x(\ln x)'$. Отсюда

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Имеем: $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Следовательно,

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

ПРИМЕР 1 Найдите производную функции:

1) $y = e^x(x^2 - 4x)$;
2) $y = x^3 \cdot 3^x$;
3) $y = e^{-7x}$;
4) $y = \frac{x^4}{\ln x}$;
5) $y = \log_6^2 x$;
6) $y = \log_2(3x - 4)$.

Решение. 1) Применяя теорему о производной произведения двух функций, получаем:

$$y' = (e^x)' \cdot (x^2 - 4x) + (x^2 - 4x)' \cdot e^x =$$
$$= e^x(x^2 - 4x) + (2x - 4)e^x = e^x(x^2 - 2x - 4).$$

2) Имеем: $y' = (x^3)' \cdot 3^x + (3^x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot 3^x + 3^x \ln 3 \cdot x^3 = 3^x x^2(3 + x\ln 3)$.

3) Используя теорему о производной сложной функции, запишем: $y' = (e^{-7x})' = e^{-7x} \cdot (-7x)' = -7e^{-7x}$.

4) Имеем:

$$y' = \frac{(x^4)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot x^4}{\ln^2 x} = \frac{4x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot x^4}{\ln^2 x} =$$
$$= \frac{4x^3 \ln x - x^3}{\ln^2 x} = \frac{x^3(4\ln x - 1)}{\ln^2 x}.$$

5) Применив теорему о производной сложной функции, получаем:

$$y' = \left(\log_6^2 x\right)' = 2\log_6 x \cdot (\log_6 x)' = \frac{2\log_6 x}{x\ln 6}.$$

6) Имеем:

$$y' = (\log_2 (3x-4))' = \frac{1}{(3x-4)\ln 2}\cdot(3x-4)' = \frac{3}{(3x-4)\ln 2}.$$

ПРИМЕР 2 Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{3x} + x$, если эта касательная параллельна прямой $y = 4x - 9$.

Решение. Поскольку угловой коэффициент прямой $y = 4x - 9$ равен 4, то угловой коэффициент искомой касательной $k = 4$. Найдем абсциссу x_0 точки касания. Имеем: $f'(x) = 3e^{3x} + 1$. Поскольку $f'(x_0) = 4$, то $3e^{3x_0} + 1 = 4$; $3e^{3x_0} = 3$; $e^{3x_0} = 1$; $x_0 = 0$. Отсюда $f(x_0) = 1$.

Тогда искомое уравнение имеет вид $y = 4x + 1$.

Ответ: $y = 4x + 1$.

ПРИМЕР 3 Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = e^{6x - x^2 + 5}$;

2) $f(x) = x\ln x$;

3) $f(x) = \lg^3 x - 3\lg x + 2$.

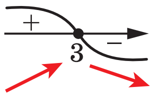


Рис. 23.2

Решение. 1) Имеем:

$$f'(x) = (e^{6x-x^2+5})' = e^{6x-x^2+5}\cdot(6x - x^2 + 5)' = e^{6x-x^2+5}\cdot(6-2x).$$

Исследовав знак производной функции f (рис. 23.2), получаем, что функция f возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$, убывает на промежутке $[3; +\infty)$, $x_{max} = 3$.

2) Имеем:

$$f'(x) = (x)'\cdot\ln x + (\ln x)'\cdot x = \ln x + \frac{1}{x}\cdot x = \ln x + 1.$$

Исследуем знак f' на $D(f) = (0; +\infty)$.

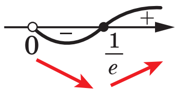


Рис. 23.3

Имеем: $f'(x) > 0$ при $\ln x > -1$. Отсюда $x > \frac{1}{e}$. Аналогично находим, что $f'(x) < 0$ при $0 < x < \frac{1}{e}$.

Получаем, что функция f возрастает на промежутке $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right)$, убывает на промежутке $\left(0; \frac{1}{e}\right]$, $x_{min} = \frac{1}{e}$ (рис. 23.3).

3) Имеем:

$$f'(x) = 3\lg^2 x \cdot (\lg x)' - 3 \cdot \frac{1}{x \ln 10} = \frac{3\lg^2 x}{x \ln 10} - \frac{3}{x \ln 10} =$$

$$= \frac{3(\lg^2 x - 1)}{x \ln 10} = \frac{3(\lg x - 1)(\lg x + 1)}{x \ln 10}.$$

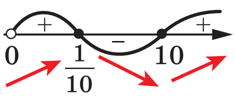


Рис. 23.4

Тогда $f'(x) = 0$ при $\lg x = -1$ или $\lg x = 1$. Следовательно, данная функция имеет две критические точки: $x = \frac{1}{10}$ и $x = 10$. Исследовав знак производной функции f на $D(f) = (0; +\infty)$ (рис. 23.4), приходим к выводу, что функция f возрастает на промежутках $\left(0; \frac{1}{10}\right]$ и $[10; +\infty)$, убывает на промежутке $\left[\frac{1}{10}; 10\right]$, $x_{max} = \frac{1}{10}$, $x_{min} = 10$. ●

ЗАДАЧА Докажите, что:

1) показательная функция $y = a^x$ является выпуклой вниз;

2) при $a > 1$ логарифмическая функция $y = \log_a x$ является выпуклой вверх, а при $0 < a < 1$ — выпуклой вниз.

Решение. 1) Имеем:

$$y' = a^x \ln a, \ y'' = a^x \ln^2 a.$$

Поскольку $y'' \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то показательная функция $y = a^x$ является выпуклой вниз.

2) Запишем:

$$y' = \frac{1}{x \ln a}, \quad y'' = -\frac{1}{x^2 \ln a}.$$

Если $a > 1$, то $\ln a > 0$. Поэтому $y'' \leqslant 0$ для всех $x \in (0; +\infty)$. Следовательно, при $a > 1$ логарифмическая функция $y = \log_a x$ является выпуклой вверх.

При $0 < a < 1$ аналогично доказываем, что $y'' \geqslant 0$ и логарифмическая функция $y = \log_a x$ является выпуклой вниз. ●

Упражнения

23.1.° Найдите производную функции:

1) $y = 4e^x$;
2) $y = e^{5x}$;
3) $y = x^3e^x$;
4) $y = e^x \sin x$;
5) $y = \frac{e^x}{x-2}$;
6) $y = e^x + e^{-x}$;
7) $y = 5^x$;
8) $y = 2^{x^2}$;
9) $y = 7^{2x-3}$;
10) $y = x \cdot 3^x$;
11) $y = \frac{2^x - 3}{2^x + 1}$;
12) $y = 0{,}3^{\operatorname{tg} x}$.

23.2.° Найдите производную функции:

1) $y = e^{-2x}$;
2) $y = x^6e^x$;
3) $y = e^x \cos x$;
4) $y = \frac{x+1}{e^x}$;
5) $y = 6^x$;
6) $y = 3^{4x+1}$;
7) $y = 10^{-x}$;
8) $y = \frac{5^x + 2}{5^x - 1}$;
9) $y = 0{,}7^{\operatorname{ctg} x}$.

23.3.° Найдите производную функции:

) $y = \log_9 x$;
2) $y = \ln 2x$;
3) $y = \lg (x^2 - 4)$;
4) $y = \ln^2 x$;
5) $y = \ln \sin x$;
6) $y = \frac{\ln x}{x^3}$;
7) $y = \log_{0,2} (2x^2 + x - 4)$;
8) $y = \ln (1 - 0{,}2x)$;
9) $y = x^5 \ln x$.

23.4.° Найдите производную функции:

1) $y = \lg x$;
2) $y = \ln (5x - 4)$;
3) $y = \ln^3 x$;

4) $y = \lg \cos x$; 5) $y = \dfrac{x^5}{\ln x}$; 6) $y = \log_2 (x^2 + 6)$.

23.5.° Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = e^{3x} - 3x$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = e^{-2x} \cos 2x$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = 3^{3x - 4x^2 + 2}$, $x_0 = 1$.

23.6.° Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = e^{5x} + e^{-4x}$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = e^{-x} \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = 4^{x^2 - 3x - 4}$, $x_0 = -1$.

23.7.° Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \dfrac{1}{6} \ln(-12x)$, $x_0 = -\dfrac{1}{6}$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{2} x^2 - \ln x^2$, $x_0 = 4$;

3) $f(x) = \log_5 (x^2 + 3x - 2)$, $x_0 = -4$;

4) $f(x) = \ln \sin \dfrac{x}{2}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

23.8.° Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \ln(6x - 5)$, $x_0 = 3$;
2) $f(x) = 8 \ln \dfrac{x}{2}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$;
3) $f(x) = \lg(x^2 - 5x + 8)$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = \ln \cos \dfrac{x}{3}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

23.9.° Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = e^{2x + 1}$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = x - \ln x$, $x_0 = 3$.

23.10.° Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = e^{1 - x}$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = \log_5 (x + 2)$, $x_0 = -1$.

23.11.° Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = e^{-2x}$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = e^x + \sin x$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = x \cdot 2^x$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = 6^{3x + 4}$, $x_0 = -1$;
5) $f(x) = 3x + \ln x$, $x_0 = 1$;
6) $f(x) = \ln(5 + 4x)$, $x_0 = -1$;
7) $f(x) = \log_3 (2x + 1)$, $x_0 = 1$;
8) $f(x) = 2 \ln(x - 2)$, $x_0 = 4$.

23.12.$^{\bullet}$ Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = e^{5x}$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = 2e^x - \cos x$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = 3^{2x-3}$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = 4x - \ln 4$, $x_0 = 1$;
5) $f(x) = \ln(3x - 5)$, $x_0 = 2$;
6) $f(x) = \log_2(x + 3)$, $x_0 = 1$.

23.13.$^{\bullet}$ Найдите уравнение горизонтальной касательной к графику функции:

1) $f(x) = e^x + e^{-x}$;
2) $f(x) = (2^x - 7)(2^x - 9)$.

23.14.$^{\bullet}$ Найдите уравнение горизонтальной касательной к графику функции $f(x) = (5^x - 65)(5^x + 15)$.

23.15.$^{\bullet\bullet}$ Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = e^x$, если эта касательная параллельна прямой $y = ex - 6$;
2) $f(x) = e^{5x+2}$, если эта касательная параллельна прямой $y = 5x + 7$;
3) $f(x) = e^{-2x}$, если эта касательная параллельна прямой $y = -x$;
4) $f(x) = \ln(3x - 2)$, если эта касательная параллельна прямой $y = 3x - 2$.

23.16.$^{\bullet\bullet}$ Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = e^{6-7x}$, если эта касательная параллельна прямой $y = 5 - 7x$;
2) $f(x) = e^x - e^{-x}$, если эта касательная параллельна прямой $y = 2x - 3$;
3) $f(x) = 6x - \ln x$, если эта касательная параллельна прямой $y = x$;
4) $f(x) = \ln(1 - x)$, если эта касательная параллельна прямой $y = 1 - x$.

23.17.$^{\bullet\bullet}$ Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = e^x - x$;
2) $f(x) = xe^{2x}$;
3) $f(x) = (1 - x)e^{x+1}$;
4) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$;
5) $f(x) = 4xe^{2-x}$;
6) $f(x) = e^{x^2}$;

7) $f(x) = e^{4x - x^2 + 1}$;
8) $f(x) = \frac{e^x}{x - 2}$;
9) $f(x) = \frac{4x}{e^x}$;
10) $f(x) = x^3 \ln x$;
11) $f(x) = \ln x - x$;
12) $f(x) = x^2 \lg x$;
13) $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$;
14) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;
15) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
16) $f(x) = x^2 - \ln x^2$;
17) $f(x) = 2 \ln^3 x - 3 \ln^2 x$;
18) $f(x) = \lg^2 x - \lg x$.

23.18.•• Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$;
2) $f(x) = e^{x^4 - 2x^2}$;
3) $f(x) = 5^{-x^3 + 3x + 1}$;
4) $f(x) = (4x - 1)\, e^{2x}$;
5) $f(x) = x^3 \cdot 3^{-x}$;
6) $f(x) = \frac{x + 3}{e^x}$;
7) $f(x) = 0{,}5x^2 - \ln x$;
8) $f(x) = x \ln^2 x$;
9) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;
10) $f(x) = \ln x^2 + \frac{2}{x}$;
11) $f(x) = \ln^3 x - 12 \ln x$;
12) $f(x) = \lg^4 x - 2 \lg^2 x$.

23.19.•• Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = e^x + x$ на промежутке $[-1; 1]$;
2) $f(x) = x^2 e^{2x}$ на промежутке $[-2; 1]$;
3) $f(x) = 7^{x^2 - 2x}$ на промежутке $[0; 2]$;
4) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ на промежутке $[-1; 1]$.

23.20.•• Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = (x - 1)\, e^{-x}$ на промежутке $[1; 3]$;
2) $f(x) = 5^{x^2 + 2x}$ на промежутке $[-2; 1]$.

23.21.•• Исследуйте функцию и постройте ее график:

1) $f(x) = xe^x$; 3) $f(x) = e^{-x^2}$; 5) $f(x) = \ln(9 - x^2)$.

2) $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$; 4) $f(x) = x^2 - 2\ln x$;

23.22.•• Исследуйте функцию и постройте ее график:

1) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$; 2) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$; 3) $f(x) = \log_2(x^2 + x)$.

23.23.•• Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = e^x - x - 1$ и докажите, что при $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $e^x \geqslant 1 + x$.

23.24.•• Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \ln(1 + x) - x$ и докажите, что при $x > -1$ выполняется неравенство $\ln(1 + x) \leqslant x$.

23.25.•• При каких значениях a функция $y = 4\ln x - ax - 7$ является возрастающей?

23.26.•• При каких значениях a функция $y = 2 - 3e^x - ax$ является убывающей?

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Моя любовь — Украина и математика

Это патриотическое высказывание выдающегося украинского математика, академика Михаила Филипповича Кравчука увековечено на гранитном постаменте памятника ученому (см. форзац 1).

Михаил Кравчук родился в с. Човницы на Волыни. Окончив с золотой медалью Луцкую гимназию и затем математическое отделение Киевского университета, Михаил Кравчук остался работать в Киеве.

Благодаря высокой научной работоспособности и продуктивности, оригинальности и гибкости мышления М. Ф. Кравчук получил важные научные результаты в алгебре и теории чисел, теории функций и математическом анализе, дифференциальных и интегральных уравнениях, теории вероятностей и статистике и т. д. Известно, что его научные труды были в значительной степени использованы американскими учеными при создании первого компьютера.

М. Ф. Кравчук принимал активное участие в создании украинской научной терминологии, одним из первых начал писать научные труды на украинском языке, хотя свободно владел русским, французским, немецким, итальянским, польским и другими языками.

М. Ф. Кравчук придавал большое значение работе с молодежью. В частности, по его инициативе в 1935 году была проведена первая Киевская математическая олимпиада для школьников. Попробуйте свои силы в решении задач этой олимпиады.

Задания
первой Киевской математической олимпиады (1935 г.)

1. Вычислите значение выражения $\frac{b^3 - a^3b - b^2c + ca^3}{(b-c)^2} + \sqrt{d}$ при

$a = -\frac{1}{2}$, $b = 0{,}19$, $c = 0{,}18$, $d = 0{,}04$.

2. Решите уравнение $4^{x^2 - \sqrt{x^2 - 9} - 20{,}75} = \sqrt{2}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280. \end{cases}$

4. Положительные числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$ образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}.$$

5. Пусть a и b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза. Докажите, что

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

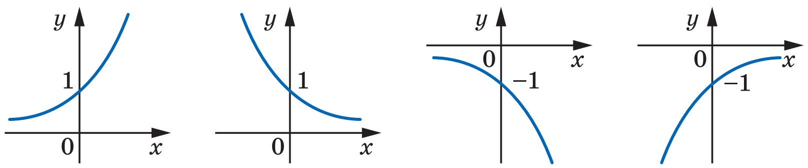
ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 2

1. Какова область определения функции $y=\dfrac{7}{7^x-1}$?

А) $(-\infty;\ +\infty)$; В) $(-\infty;\ 7)\cup(7;\ +\infty)$;
Б) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; Г) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

2. На одном из рисунков изображен график функции $y = 3^{-x}$. Укажите этот рисунок.

А) Б) В) Г)



3. Чему равен корень уравнения $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\cdot\left(\dfrac{15}{4}\right)^x=\dfrac{4}{9}$?

А) 2; Б) −2; В) 1; Г) −1.

4. Найдите множество решений неравенства $(0{,}6)^{x^2}>0{,}6$.

А) $(-\infty;\ 1)$; Б) $(1;\ +\infty)$; В) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; Г) $(-1;\ 1)$.

5. Решите уравнение $3^{x+3}+5\cdot3^{x-1}=86$.

А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3.

6. Вычислите значение выражения $\log_{0,2}25-\log_3\dfrac{1}{27}$.

А) 1; Б) −1; В) 5; Г) −5.

7. Представьте число 3 в виде степени числа 10.

А) $3=10^{\log_3 10}$; В) $3=10^{\lg 3}$;
Б) $3=10^{\log_3 3}$; Г) представить невозможно.

8. Чему равно значение выражения $\log_6 108-\log_6 3$?

А) −1; Б) 2; В) −3; Г) 4.

9. Решите неравенство $\log_{0,2}x>\log_{0,2}5$.

А) $(-\infty;\ 5)$; Б) $(5;\ +\infty)$; В) $(0;5)\cup(5;+\infty)$; Г) $(0;\ 5)$.

10. Через какую из данных точек проходит график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$?

А) (2; 1); Б) (2; –1); В) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; Г) (2; 0).

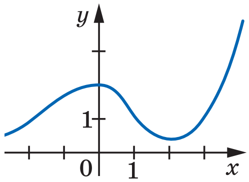
11. При каких значениях a и b выполняется равенство

$$\lg ab = \lg(-a) + \lg(-b)?$$

А) $a > 0$, $b < 0$; В) $a < 0$, $b < 0$;
Б) $a < 0$, $b > 0$; Г) таких значений не существует.

12. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на множестве действительных чисел. Сколько корней имеет уравнение $\ln f(x) = 0$?

А) ни одного корня;
Б) два корня;
В) три корня;
Г) определить невозможно.



13. Укажите наибольшее целое решение неравенства

$$\log_{0,2}(3 - 2x) < -1.$$

А) –2; В) 1;
Б) –1; Г) такого решения не существует.

14. Каково множество решений неравенства $\log_x \sqrt{x} < 1$?

А) $(-\infty; +\infty)$; В) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$;
Б) $(0; +\infty)$; Г) $\varnothing$.

15. Решите уравнение $\log_4(x - 4) + \log_4(x - 1) = 1$.

А) 0; 5; Б) 0; В) 5; Г) 1; 4.

16. Сравните числа $\log_4 5$, $\log_6 4$, $\log_{0,2} 3$.

А) $\log_{0,2} 3 < \log_6 4 < \log_4 5$; В) $\log_{0,2} 3 < \log_4 5 < \log_6 4$;
Б) $\log_6 4 < \log_{0,2} 3 < \log_4 5$; Г) $\log_4 5 < \log_6 4 < \log_{0,2} 3$.

17. Найдите производную функции $y = 5^{2x}$.

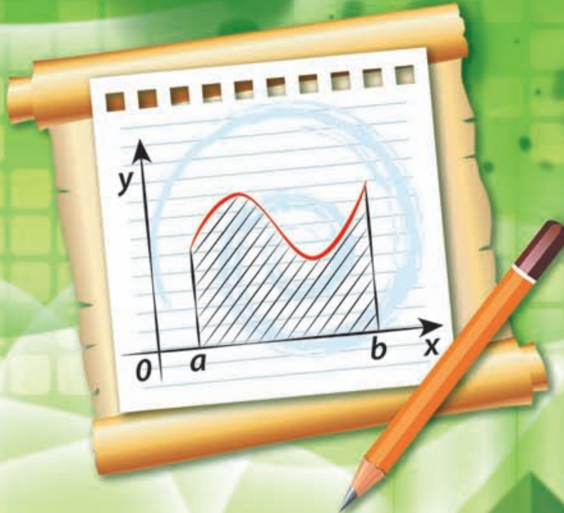
А) $y' = 2 \cdot 5^{2x}$; В) $y' = 2 \cdot 5^{2x} \ln 5$;
Б) $y' = 2x \cdot 5^{2x-1}$; Г) $y' = 5^{2x} \ln 5$.

18. Найдите промежутки убывания функции $y = \frac{x}{\ln x}$.

А) $(-\infty; 0)$, $(1; e]$; В) $(0; e]$;
Б) $(0; 1)$, $(1; e]$; Г) $(0; 1)$.

§3

Интеграл и его применение



$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

24. Первообразная

Вы умеете по заданной функции находить ее производную, знаете, что производная применяется во многих областях. В частности, умея дифференцировать, по данному закону $y = s\ (t)$ движения материальной точки по координатной прямой можно найти закон $y = v\ (t)$ изменения ее скорости, а именно:

$$v\ (t) = s'\ (t).$$

Нередко в механике приходится решать обратную задачу: находить закон движения по известному закону изменения скорости.

Например, из курса физики вам известен такой факт: если скорость изменяется по закону $v\ (t) = gt$ и $s\ (0) = 0$, то закон движения задается формулой $s(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Вы знаете, что нахождение производной заданной функции называют дифференцированием. Обратную операцию, то есть нахождение функции по ее производной, называют **интегрированием**.

Определение. **Функцию F называют первообразной функцией (или коротко первообразной) функции f на промежутке I, если для всех $x \in I$ выполняется равенство**

$$F'\ (x) = f\ (x).$$

Например, функция $F\ (x) = x^2$ является первообразной функции $f\ (x) = 2x$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, поскольку на $\mathbb{R}$ выполняется равенство $(x^2)' = 2x$.

Часто в задачах, связанных с первообразной функции, промежуток I опускают. В таких случаях считают, что $I = (-\infty;\ +\infty)$. Так, функция $F\ (x) = \cos\ x$ является первообразной функции $f\ (x) = -\sin\ x$, поскольку выполняется равенство $(\cos\ x)' = -\sin\ x$.

Рассмотрим еще один пример. Функция $F(x) = \sqrt{x}$ является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке

$(0; +\infty)$, поскольку на этом промежутке выполняется равенство $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Однако на промежутке $[0; +\infty)$ функция $F(x) = \sqrt{x}$ не является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, так как в точке $x_0 = 0$ не выполняется равенство $F'(x_0) = f(x_0)$.

Рассмотрим функции $y = x^2 + 1$ и $y = x^2 - \sqrt{2}$. Каждая из них имеет одну и ту же производную $y = 2x$. Поэтому обе функции $y = x^2 + 1$ и $y = x^2 - \sqrt{2}$ являются первообразными функции $y = 2x$. Понятно, что каждая из функций вида $y = x^2 + C$, где C — любое число, является первообразной функции $y = 2x$. Следовательно, задача нахождения первообразной имеет бесконечно много решений.

Цель интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные на заданном промежутке.

Как связаны между собой все первообразные данной функции, указывает следующая теорема.

Теорема 24.1 (основное свойство первообразной). ***Если функция F является первообразной функции f на промежутке I и C — любое число, то функция***

$$y = F(x) + C$$

также является первообразной функции f на промежутке I.

Любую первообразную функции f на промежутке I можно представить в виде $y = F(x) + C$, где C — некоторое число.

Доказательство. Поскольку функция F — первообразная функции f на промежутке I, то для всех $x \in I$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Тогда

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Следовательно, функция $y = F(x) + C$ является первообразной функции f на промежутке I.

Пусть функция G — одна из первообразных функции f на промежутке I. Тогда $G'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$. Имеем:

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Согласно признаку постоянства функции (теорема 11.1) получаем, что функция $y = G(x) - F(x)$ является константой на промежутке I, то есть $G(x) - F(x) = C$, где C — некоторое число. Отсюда $G(x) = F(x) + C$. ▲

Если функция F является первообразной функции f на промежутке I, то запись $F(x) + C$, где C — любое число, называют **общим видом первообразных** функции f на промежутке I.

Из основного свойства первообразной следует, что графики любых двух первообразных данной функции можно получить друг из друга параллельным переносом вдоль оси ординат (рис. 24.1).

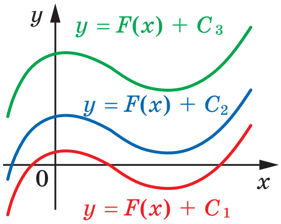


Рис. 24.1

Совокупность всех первообразных функции $y = f(x)$ на промежутке I называют **неопределенным интегралом** и обозначают

$$\int f(x)\,dx$$

(читают: «интеграл эф от икс де икс»).

Например, функция $F(x) = x^3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Из теоремы 24.1 следует, что любую первообразную функции f на промежутке $(-\infty; +\infty)$ можно представить в виде $y = x^3 + C$, где C — некоторое число. Это можно записать так:

$$\int 3x^2dx = x^3 + C.$$

При решении задач на первообразную удобно пользоваться таблицей, приведенной на форзаце 3.

Покажем на примерах, с помощью каких соображений можно обосновать утверждения, приведенные в этой таблице.

ПРИМЕР 1 Найдите общий вид первообразных функции $f(x) = x^5$.

Решение. Поскольку $\left(\dfrac{x^6}{6}\right)' = x^5$, то одной из первообразных функции $f(x) = x^5$ является функция $F(x) = \dfrac{x^6}{6}$. Тогда согласно теореме 24.1 запись $\dfrac{x^6}{6} + C$, где C — любое число, является общим видом первообразных. ●

Из решения примера 1 следует, что

$$\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

ПРИМЕР 2 Найдите общий вид первообразных функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Решение. На промежутке $(0; +\infty)$ имеет место равенство $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; на промежутке $(-\infty; 0)$ имеют место равенства $(\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-x)' = \dfrac{1}{x}$.

Следовательно, функция $y = \ln x$ является первообразной функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$, а функция $y = \ln(-x)$ является первообразной функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$.

Поскольку $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{если } x \in (0; +\infty), \\ \ln(-x), & \text{если } x \in (-\infty; 0), \end{cases}$

то на любом промежутке, не содержащем точку 0, запись

$$\ln|x| + C,$$

где C — любое число, является общим видом первообразных функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$. ●

ПРИМЕР 3 Для функции $f(x) = 2\cos x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{5\pi}{6}; 3\right)$.

Решение. Поскольку $(2\sin x)' = 2\cos x$, то функция $y = 2\sin x$ является одной из первообразных функции $f(x) = 2\cos x$. Следовательно, искомая первообразная имеет вид $F(x) = 2\sin x + C$, где C — некоторое число. Найдем это число.

Из условия следует, что $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3$. Тогда $2\sin\frac{5\pi}{6} + C = 3$. Отсюда $C = 2$.

Таким образом, искомая первообразная имеет вид $F(x) = 2\sin x + 2$. ●

Замечание. Можно доказать, что функция $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, является первообразной функции $f(x) = x^{\alpha}$ на промежутке $(0; +\infty)$. Пользуясь этим, можно найти, например, первообразную функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$. Поскольку $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, то функция $F(x) = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}$ является первообразной функции f на промежутке $(0; +\infty)$. Учитывая равенства $\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{x^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$, можно записать:

$$F(x) = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}.$$

Упражнения

24.1.° Определите, является ли функция F первообразной функции f:

1) $F(x) = 3x^2 + x - 2$, $f(x) = 6x + 1$;
2) $F(x) = x^{-4}$, $f(x) = -4x^{-5}$ на промежутке $(0; +\infty)$;
3) $F(x) = \sin x + 3$, $f(x) = \cos x + 3$;
4) $F(x) = \cos 2x$, $f(x) = -\sin 2x$;

5) $F(x)=\sqrt{2x+1},\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ на промежутке $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$;

6) $F(x)=5^x,\ f(x)=5^x\ln 5$.

24.2.° Докажите, что функция F является первообразной функции f на промежутке I:

1) $F(x)=x^4-2x^2+6,\ f(x)=4x^3-4x,\ I=(-\infty;\ +\infty)$;

2) $F(x)=\dfrac{1}{x^3},\ f(x)=-\dfrac{3}{x^4},\ I=(-\infty;\ 0)$;

3) $F(x)=5-3\sqrt{x},\ f(x)=-\dfrac{3}{2\sqrt{x}},\ I=(0;\ +\infty)$;

4) $F(x)=3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}+6,\ f(x)=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{3}},\ I=\left(-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

24.3.° Является ли функция $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$ первообразной функции $f(x)=-\dfrac{2}{x^3}$ на промежутке:

1) $(0;\ +\infty)$; 2) $(-2;\ 2)$; 3) $(-\infty;\ 0]$; 4) $(-6;\ 0)$?

24.4.° Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x)=5$;

2) $f(x)=x$;

3) $f(x)=x^6$;

4) $f(x)=2^x$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{x^7}$ на промежутке $(-\infty;\ 0)$;

6) $f(x)=\sqrt{x}$ на промежутке $[1;\ +\infty)$;

7) $f(x)=\sqrt[5]{x}$ на промежутке $(-\infty;\ -3)$;

8) $f(x)=x^{-5}$ на промежутке $(0;\ +\infty)$.

24.5.° Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x)=0$;

2) $f(x)=x^8$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{3^x}$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{x^{20}}$ на промежутке $(0;\ +\infty)$;

5) $f(x)=\sqrt[7]{x}$ на промежутке $(4;\ +\infty)$;

6) $f(x)=\sqrt[4]{x}$ на промежутке $[0,5;\ +\infty)$.

24.6.• Проверьте, что:

1) $\int x\cos x\,dx=\cos x+x\sin x+C$; 2) $\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\sqrt{x^2+4}+C$,

где C — произвольное число.

24.7.$^{\bullet}$ Проверьте, что функция $F(x)=\frac{x-2}{3x-1}$ является первообразной функции $f(x)=\frac{5}{(3x-1)^2}$ на каждом из промежутков $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$, и запишите общий вид первообразных функции f на каждом из указанных промежутков.

24.8.$^{\bullet}$ Для функции f найдите первообразную, график которой проходит через указанную точку:

1) $f(x) = x^2$, $A(-1; 3)$;
2) $f(x) = \sin x$, $F(\pi; -1)$;
3) $f(x) = e^x$, $C(0; -6)$.

24.9.$^{\bullet}$ Для функции f найдите первообразную, график которой проходит через указанную точку:

1) $f(x) = x^3$, $M\left(1; \frac{5}{4}\right)$;
2) $f(x) = \cos x$, $N\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{2}\right)$;
3) $f(x) = 3^x$, $K\left(2; \frac{9}{\ln 3}\right)$.

24.10.$^{\bullet}$ Для функции f найдите на промежутке I первообразную F, которая принимает данное значение в указанной точке:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{3}\right)=-9$;

2) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $I=\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$;

3) $f(x)=\frac{1}{x}$, $I = (-\infty; 0)$, $F(-e^3) = 7$;

4) $f(x)=\frac{1}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$, $F\left(-\frac{1}{2}\right)=3$.

24.11.$^{\bullet}$ Для функции f найдите на промежутке I первообразную F, которая принимает данное значение в указанной точке:

1) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$, $I = (0; \pi)$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0;\ +\infty)$, $F(16) = 10$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $I = (0;\ +\infty)$, $F\left(\dfrac{1}{e}\right)=-2$;

4) $f(x) = 2^x$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $F(5) = 1$.

24.12.$^\bullet$ Укажите на рисунке 24.2 график, который может быть графиком первообразной функции $f(x) = \cos 3$.

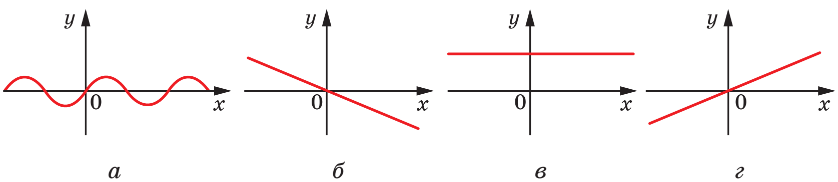


Рис. 24.2

24.13.$^\bullet$ Укажите на рисунке 24.3 график, который может быть графиком первообразной функции $f(x) = \ln 2$.

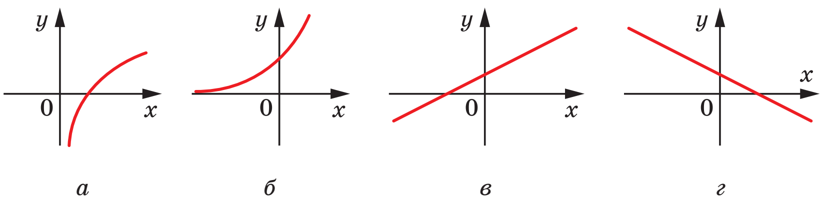


Рис. 24.3

24.14.$^\bullet$ Для функции $f(x)=\sin^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}$ найдите какие-нибудь две первообразные, расстояние между соответствующими точками которых (то есть точками с равными абсциссами) равно 2.

24.15.$^{\bullet\bullet}$ Докажите, что функции $F_1(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ и $F_2(x) = -\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ являются первообразными функции $f(x) = \cos 2x$. При каком значении C верно равенство $F_1(x) = F_2(x) + C$?

24.16.•• Докажите, что функции $F_1(x) = \sin^2 x$ и $F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ являются первообразными функции $f(x) = \sin 2x$. При каком значении C верно равенство $F_2(x) = F_1(x) + C$?

25. Правила нахождения первообразной

При нахождении производных функций вы пользовались не только формулами, записанными в таблице (см. форзац 2), но и правилами дифференцирования. В этом пункте мы рассмотрим три правила нахождения первообразных.

Теорема 25.1. ***Если функции F и G являются соответственно первообразными функций f и g на промежутке I, то на этом промежутке функция $y = F(x) + G(x)$ является первообразной функции $y = f(x) + g(x)$.***

Доказательство. ⊙ Из условия следует, что для любого $x \in I$ выполняются равенства $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$. Тогда для любого x из промежутка I имеем:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x). \quad \blacktriangle$$

Из теоремы 25.1 следует, что

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + G(x) + C,$$

где C — произвольное число.

Аналогично можно доказать, что

$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx = F(x) - G(x) + C.$$

Теорема 25.2. ***Если функция F является первообразной функции f на промежутке I и k — некоторое число, то на этом промежутке функция $y = kF(x)$ является первообразной функции $y = kf(x)$.***

Докажите теорему 25.2 самостоятельно.

Теперь можно записать:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx = kF(x) + C,$$

где C — произвольное число.

Теорема 25.3. ***Если функция F является первообразной функции f на промежутке I и k — некоторое число, от-***

личное от нуля, то на соответствующем промежутке функция $y = \frac{1}{k} F(kx + b)$ является первообразной функции $y = f(kx + b)$.

Доказательство. Используя правило нахождения производной сложной функции, запишем:

$$\left(\frac{1}{k} F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k} F'(kx+b) \cdot (kx+b)' = \frac{1}{k} f(kx+b) \cdot k = f(kx+b).$$ ▲

Коротко записывают:

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C,$$

где C — произвольное число.

ПРИМЕР 1 Найдите общий вид первообразных функции $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Решение. Напомним, что функция $y = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ является первообразной функции $y = x^{\alpha}$ на промежутке $(0; +\infty)$. Поскольку на данном промежутке выполняется равенство $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, то функция $y = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$, то есть функция $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, является первообразной функции $y = \sqrt{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Поскольку $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, то функция $y = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}$, то есть функция $y = -\frac{1}{x}$, является первообразной функции $y = \frac{1}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$. Тогда по теореме 25.2 функция $y = -\frac{2}{x}$ является первообразной функции $y = \frac{2}{x^2}$.

Воспользовавшись теоремой 25.1, получаем, что функция $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x}$ является первообразной заданной в условии функции f. Тогда запись $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{x}+C$ является общим видом первообразных функции f. ●

Решение примера 1 можно записать и так:

$$\int\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\int\sqrt{x}\,dx+\int\frac{2}{x^2}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+2\int x^{-2}\,dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+2\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{x}+C.$$

ПРИМЕР 2 Найдите одну из первообразных функции:

1) $y = \cos(2x + 1)$;

2) $y=\frac{1}{(5x-3)^3}$ на промежутке $\left(\frac{3}{5};+\infty\right)$.

Решение. 1) Поскольку функция $F(x) = \sin x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$, то по теореме 25.3 функция $y=\frac{1}{k}F(kx+b)$, то есть функция $y=\frac{1}{2}\sin(2x+1)$, является первообразной функции $y = \cos(2x + 1)$.

2) Поскольку $\frac{1}{x^3}=x^{-3}$, то первообразной функции $f(x)=\frac{1}{x^3}$ является функция $F(x)=\frac{x^{-3+1}}{-3+1}$, то есть $F(x)=-\frac{1}{2x^2}$. Тогда первообразная функции $y=\frac{1}{(5x-3)^3}$ имеет вид $y=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2(5x-3)^2}\right)$, то есть $y=-\frac{1}{10(5x-3)^2}$. ●

ПРИМЕР 3 Для функции $f(x)=\frac{1}{4x-3}$ найдите первообразную на промежутке $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)$, график которой проходит через точку $M\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Решение. Согласно теореме 25.3 запись $\frac{1}{4}\ln|4x-3|+C$, где C — любое число, является общим видом первообразных функции f на данном промежутке.

На промежутке $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$ искомая первообразная имеет вид $F(x)=\frac{1}{4}\ln(3-4x)+C$, где C — некоторое число. Из условия следует, что $F\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Тогда $\frac{1}{4}\ln\left(3-4\cdot\frac{1}{2}\right)+C=2$, отсюда $C = 2$.

Следовательно, $F(x)=\frac{1}{4}\ln(3-4x)+2$. ●

ПРИМЕР 4 Скорость движения материальной точки по координатной прямой изменяется по закону $v(t)=\frac{3}{\sqrt{2t+1}}$. Найдите закон движения $y = s(t)$, если $s(0) = 3$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах).

Решение. Функция $y = s(t)$ является первообразной функции $y = v(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$. Тогда можно записать

$$s(t)=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2t+1}+C, \text{ то есть } s(t)=3\sqrt{2t+1}+C,$$

где C — некоторое число. Найдем C из условия $s(0) = 3$. Имеем:

$$3\sqrt{2\cdot 0+1}+C=3, \text{ отсюда } C = 0.$$

Тогда искомый закон движения задается формулой

$$s(t)=3\sqrt{2t+1}. \text{ ●}$$

В пункте 8 вы узнали, как найти производные произведения функций, частного функций и производную сложной функции. Наверное, после ознакомления с материалом этого пункта у вас возник вопрос: как найти первообразные функций $y = f(x)\, g(x)$, $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ или $y = f(g(x))$, если известны первообразные функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$? К сожалению, общих правил нахождения первообразных таких функций не существует.

Упражнения

25.1.° Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = 4 - 2x$;
2) $f(x) = 3x^2 - x + 5$;
3) $f(x) = 5\sin x + \cos x$;
4) $f(x) = x^3(2 - x^2)$;
5) $f(x) = 5e^x - 2 \cdot 3^x$;
6) $f(x) = \dfrac{6}{x} - x^3$ на промежутке $(-\infty; 0)$;
7) $f(x) = \dfrac{9}{\sin^2 x} + \dfrac{x^4}{4}$ на промежутке $(0; \pi)$;
8) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + x^3$ на промежутке $(0; +\infty)$;
9) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}$ на промежутке $(-\infty; 0)$;
10) $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{6}{x^5}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

25.2.° Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = x + 3$;
2) $f(x) = x^2 + 4x - 1$;
3) $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$;
4) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^x + 2^x \ln 2$;
5) $f(x) = \dfrac{9}{\cos^2 x} - 3\sin x$ на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$;
6) $f(x) = 5\sqrt[4]{x} - \dfrac{3}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$;
7) $f(x) = 6x^2 - \dfrac{2}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$;
8) $f(x) = \dfrac{9}{x^{10}} + \dfrac{8}{x^9}$ на промежутке $(-\infty; 0)$.

25.3.• Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = \sin 5x$;

2) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2}$;

3) $f(x) = \left(6x + \dfrac{1}{2}\right)^3$;

4) $f(x) = \left(\dfrac{x}{7} - 2\right)^4$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$;

6) $f(x) = 7^{3x}$;

7) $f(x) = -\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

8) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 3x}$ на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right)$;

9) $f(x) = \dfrac{8}{\sin^2 4x}$ на промежутке $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$;

10) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ на промежутке $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$;

11) $f(x) = \sqrt{x+4}$ на промежутке $[-4; +\infty)$;

12) $f(x) = \dfrac{6}{3x+2}$ на промежутке $\left(-\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$;

13) $f(x) = \dfrac{4}{(4x-3)^2}$ на промежутке $\left(-\infty; \dfrac{3}{4}\right)$;

14) $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{x}{2}}$ на промежутке $(-\infty; 2]$.

25.4.• Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = \sin\dfrac{x}{4}$;

2) $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$;

3) $f(x) = e^{5 - \frac{x}{2}}$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{2^{3x+5}}$;

5) $f(x) = (2x - 3)^5$;

6) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$ на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{3\pi}{8}\right)$;

7) $f(x)=\dfrac{3}{(3x-1)^3}$ на промежутке $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$;

8) $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$ на промежутке $(-\infty; 3)$;

9) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{5}}$ на промежутке $(0; 5\pi)$;

10) $f(x)=\sqrt[4]{4x+7}$ на промежутке $\left(-\dfrac{7}{4}; +\infty\right)$.

25.5.$^{\bullet}$ Для функции f на промежутке I найдите первообразную F, удовлетворяющую данному условию:

1) $f(x) = 1 - 2x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(3) = 2$;

2) $f(x) = 3x^2 - 4x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(1) = 4$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(\pi) = 7$;

4) $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$;

5) $f(x)=4-\dfrac{1}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\dfrac{1}{4}\right)=1$;

6) $f(x)=\dfrac{7}{x-4}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$, $I = (4; +\infty)$, $F(5) = 6$;

7) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{6x+1}}$, $I=\left(-\dfrac{1}{6}; +\infty\right)$, $F(4) = 7$;

8) $f(x) = e^{3x}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(0) = 1$;

9) $f(x) = (2 - 3x)^2$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(1) = 0$;

10) $f(x)=\dfrac{4}{\cos^2\left(6x-\dfrac{\pi}{6}\right)}$, $I=\left(-\dfrac{\pi}{18}; \dfrac{\pi}{9}\right)$, $F(0)=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

25.6.$^\bullet$ Для функции f на промежутке I найдите первообразную F, график которой проходит через данную точку:

1) $f(x) = 3 - 6x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $A(-1; 0)$;
2) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$, $I = (-\infty; +\infty)$, $B(1; 5)$;
3) $f(x) = 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$, $C(4; 10)$;
4) $f(x) = 2\sin 3x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $D\left(\dfrac{\pi}{3}; 0\right)$;
5) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{x}{2} - 2}}$, $I = (4; +\infty)$, $E(6; 12)$;
6) $f(x) = e^{2x+1}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M\left(-\dfrac{1}{2}; 4\right)$;
7) $f(x) = \dfrac{1}{4x - 3e^2}$, $I = \left(\dfrac{3e^2}{4}; +\infty\right)$, $K(e^2; 6)$;
8) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{x}{8}}$, $I = (0; 8\pi)$, $N(2\pi; -3)$.

25.7.$^\bullet$ Для функции $f(x) = 4x^3 + 4x$ найдите первообразную F, один из нулей которой равен -1. Найдите остальные нули этой первообразной.

25.8.$^\bullet$ Для функции $f(x) = x^2 - 12$ найдите первообразную F, один из нулей которой равен 3.

25.9.$^\bullet$ Функции F_1 и F_2 являются первообразными функции f на промежутке $(-\infty; +\infty)$. График функции F_1 проходит через точку A, а функции F_2 — через точку B. График какой из функций, F_1 или F_2, расположен выше, если:

1) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$, $A(1; 2)$, $B(0; 5)$;
2) $f(x) = (2x - 1)^2$, $A(2; 6)$, $B(-1; 1)$?

25.10.$^\bullet$ Функции F_1 и F_2 являются первообразными функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5x-1}}$ на промежутке $\left(\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$. График функции F_1 проходит через точку $M(1; 9)$, а функции F_2 — через точку $N(10; 8)$. График какой из функций, F_1 или F_2, расположен выше?

25.11.$^{\bullet}$ Скорость материальной точки, которая двигается по координатной прямой, изменяется по закону $v(t) = t^2 + 2t - 3$. Запишите формулу зависимости ее координаты от времени, если в начальный момент времени $t = 0$ точка находилась в начале координат (скорость движения измеряется в метрах в секунду).

25.12.$^{\bullet}$ Тело двигается по координатной прямой со скоростью, которая определяется в любой момент времени t по формуле $v(t) = 6t^2 + 1$. Найдите формулу, которая выражает зависимость координаты точки от времени, если в момент времени $t = 3$ с тело находилось на расстоянии 10 м от начала координат (скорость движения измеряется в метрах в секунду).

25.13.$^{\bullet}$ Задайте формулой функцию, определенную на промежутке $(-\infty; +\infty)$, график которой проходит через точку $A(-1; 6)$, а угловой коэффициент касательной, проведенной к этому графику в точке с абсциссой x, равен $6x^2 - 5x^4$.

25.14.$^{\bullet}$ Задайте формулой функцию, определенную на промежутке $(0; +\infty)$, график которой проходит через точку $B(4; -5)$, а угловой коэффициент касательной, проведенной к этому графику в точке с абсциссой x, равен $\frac{3}{\sqrt{x}} + 1$.

25.15.$^{\bullet\bullet}$ Найдите:

1) $\int \sin^2 x\, dx$; 2) $\int \sin 5x \cos 3x\, dx$; 3) $\int \sin\frac{7x}{3} \sin\frac{5x}{3} dx$.

25.16.$^{\bullet\bullet}$ Найдите:

1) $\int \cos^2 2x\, dx$; 2) $\int \cos x \cos 8x\, dx$.

25.17.$^{\bullet\bullet}$ Для функции $f(x) = 2x^2 + 3x$ найдите такую первообразную, что прямая $y = 5x - 2$ является касательной к ее графику.

25.18.$^{\bullet\bullet}$ Для функции $f(x) = x^2 - 4$ найдите такую первообразную, что прямая $y = -3$ является касательной к ее графику.

25.19.$^{\bullet\bullet}$ Для функции $f(x) = -2x + 5$ найдите такую первообразную, что ее график имеет только одну общую точку с прямой $y = 2$.

25.20.•• Для функции $f(x) = x + 1$ найдите такую первообразную, что ее график имеет только одну общую точку с прямой $y = -4$.

25.21.•• Вася Ошибочкин ищет первообразную функции $y = \cos x^2$ так:

1) делает замену $x^2 = t$ и получает функцию $y = \cos t$;
2) далее ищет первообразную функции $y = \cos t$ и получает $y = \sin t$;
3) потом вместо t подставляет значение $t = x^2$ и делает вывод, что каждая первообразная имеет вид $y = \sin x^2 + C$, где C — некоторое число.

В чем состоит ошибка Васи?

26. Площадь криволинейной трапеции. Определенный интеграл

Рассмотрим функцию f, которая непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на этом промежутке неотрицательные значения. Фигуру, ограниченную графиком функции f и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$, называют *криволинейной трапецией*.

На рисунке 26.1 приведены примеры криволинейных трапеций.

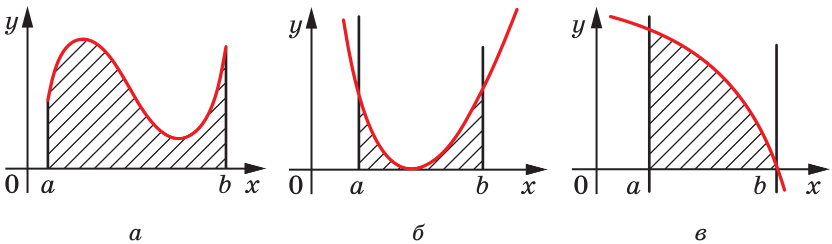


Рис. 26.1

Рассмотрим теорему, которая позволяет вычислять площади криволинейных трапеций.

Теорема 26.1. ***Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, можно вычислить по формуле***

$$S = F(b) - F(a),$$

где F — любая первообразная функции f на отрезке $[a; b]$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $y = S(x)$, где $x \in [a; b]$, которая определена таким правилом.

Если $x = a$, то $S(a) = 0$; если $x \in (a; b]$, то $S(x)$ — это площадь криволинейной трапеции, показанной штриховкой на рисунке 26.2.

Докажем, что $S'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a; b]$.

Пусть x_0 — произвольная точка отрезка $[a; b]$ и Δx — приращение аргумента в точке x_0. Ограничимся рассмотрением случая, когда $\Delta x > 0$ (случай, когда $\Delta x < 0$, рассматривают аналогично).

Имеем: $\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)$.

Получаем, что ΔS — это площадь криволинейной трапеции, заштрихованной на рисунке 26.3.

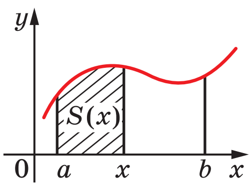


Рис. 26.2

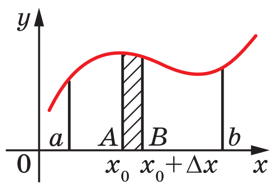


Рис. 26.3

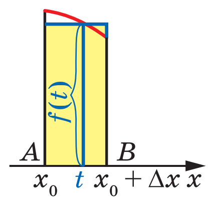


Рис. 26.4

На отрезке AB как на стороне построим прямоугольник, площадь которого равна ΔS (рис. 26.4). Длины сторон этого прямоугольника равны Δx и $f(t)$, где t — некоторая точка промежутка $[x_0; x_0 + \Delta x]$. Тогда $\Delta S = f(t) \cdot \Delta x$. Отсюда $\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(t)$.

Если $\Delta x \to 0$, то $t \to x_0$. Поскольку функция f непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{t \to x_0} f(t) = f(x_0)$. Отсюда, если $\Delta x \to 0$, то $f(t) \to f(x_0)$. Имеем

$$S'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(t) = f(x_0).$$

Поскольку x_0 — произвольная точка области определения функции $y = S(x)$, то для любого $x \in [a; b]$ выполняется равенство $S'(x) = f(x)$. Получили, что функция $y = S(x)$ является одной из первообразных функции f на отрезке $[a; b]$.

Пусть F — некоторая первообразная функции f на отрезке $[a; b]$. Тогда по основному свойству первообразной можно записать

$$F(x) = S(x) + C,$$

где C — некоторое число.

Имеем:

$$F(b) - F(a) = (S(b) + C) - (S(a) + C) = S(b) - S(a) = S(b).$$

По определению функции $y = S(x)$ искомая площадь S криволинейной трапеции равна $S(b)$. Следовательно,

$$S = F(b) - F(a).$$ ▲

ПРИМЕР 1 Найдите площадь S фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = \sin x$ и прямыми $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

Решение. На рисунке 26.5 изображена криволинейная трапеция, площадь которой требуется найти.

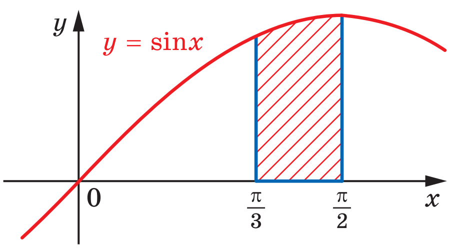


Рис. 26.5

Одной из первообразных функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ является функция $F(x) = -\cos x$. Тогда

$$S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$ ●

ПРИМЕР 2 Найдите площадь S фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = 4x - x^2$ и прямой $y = 0$.

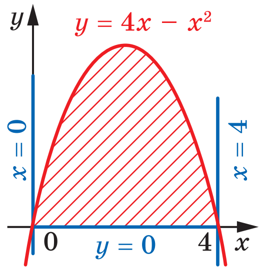


Рис. 26.6

Решение. График функции f пересекает прямую $y = 0$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$ (рис. 26.6). Тогда фигура, площадь которой требуется найти, является криволинейной трапецией, ограниченной графиком функции f и прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

Одной из первообразных функции f на отрезке $[0;\ 4]$ является функция $F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$. Тогда

$$S = F(4) - F(0) = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3}.$$

Определение. **Пусть F — первообразная функции f на промежутке I, числа a и b, где $a < b$, принадлежат промежутку I. Разность $F(b) - F(a)$ называют определенным интегралом функции f на отрезке $[a;\ b]$.**

Определенный интеграл функции f на отрезке $[a;\ b]$ обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (читают: «интеграл от a до b эф от икс де икс»). Следовательно,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)} \qquad (1)$$

где F — произвольная первообразная функции f на промежутке I.

Например, функция $F(x) = x^3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$. Тогда для произвольных чисел a и b, где $a < b$, можно записать:

$$\int\limits_a^b 3x^2\,dx = F(b) - F(a) = b^3 - a^3.$$

Заметим, что значение разности $F(b) - F(a)$ не зависит от того, какую именно первообразную функции f выбрали.

Действительно, каждую первообразную G функции f на промежутке I можно представить в виде $G(x) = F(x) + C$, где C — некоторая постоянная. Тогда

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Равенство (1) называют **формулой Ньютона–Лейбница**.

Следовательно, для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ по формуле Ньютона–Лейбница надо:

1) найти любую первообразную F функции f на отрезке $[a; b]$;
2) вычислить значение первообразной F в точках $x = b$ и $x = a$;
3) найти разность $F(b) - F(a)$.

При вычислении определенных интегралов разность $F(b) - F(a)$ обозначают $F(x)\Big|_a^b$.

Используя такое обозначение, вычислим, например, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx$. Имеем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР 3 Вычислите $\int_1^2 (x^4 + x^2 - 2)\,dx$.

Решение. Имеем:

$$\int_1^2 (x^4 + x^2 - 2)\,dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1\right) = 6\frac{8}{15}.$$ ●

Если функция f имеет первообразную F на отрезке $[a; b]$ и $c \in (a; b)$, то из формулы Ньютона–Лейбница следует такое свойство определенного интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Действительно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \big(F(b) - F(c)\big) + \big(F(c) - F(a)\big) =$$

$$= \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx.$$

Если каждая из функций f и g имеет первообразную на отрезке $[a; b]$, то, используя теоремы 25.1 и 25.2, можно доказать (сделайте это самостоятельно) такие свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$

2) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx,$ где k — некоторое число.

Формула Ньютона–Лейбница позволяет установить связь между определенным интегралом и площадью S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$.

Используя теорему 26.1, можно записать:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Заметим, что в этой формуле рассматриваются непрерывные функции f, которые на отрезке $[a; b]$ принимают только неотрицательные значения. Однако определенный интеграл можно использовать для вычисления площадей более сложных фигур.

Рассмотрим непрерывные на отрезке $[a; b]$ функции f и g такие, что для всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$.

Покажем, как найти площадь S фигуры Φ, ограниченной графиками функций f и g и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 26.7).

Перенесем фигуру Φ вверх на c_0 единиц так, чтобы полученная фигура Φ_1 находилась выше оси абсцисс (рис. 26.8). Фигура Φ_1 ограничена графиками функций $y = f(x) + c_0$ и $y = g(x) + c_0$ и прямыми $x = a$, $x = b$.

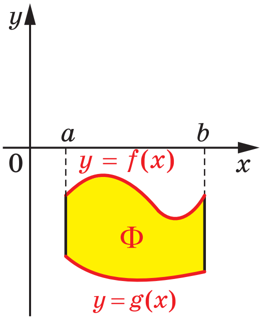


Рис. 26.7

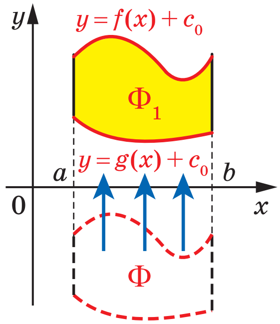
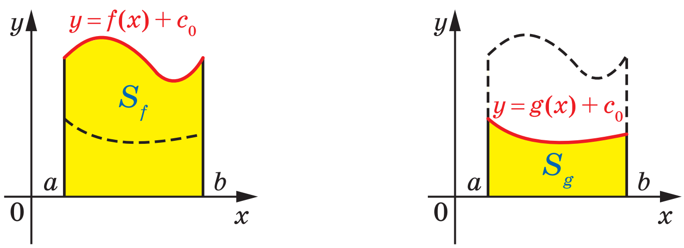


Рис. 26.8

Поскольку фигуры Φ и $Φ_1$ имеют равные площади, то искомая площадь S равна разности $S_f - S_g$,

где S_f — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x) + c_0$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ (рис. 26.9, *а*);

S_g — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = g(x) + c_0$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ (рис. 26.9, *б*)



а *б*

Рис. 26.9

Таким образом, используя свойства определенного интеграла, можем записать:

$$S = S_f - S_g = \int_a^b \left(f(x) + c_0\right) dx - \int_a^b \left(g(x) + c_0\right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\left(f(x) + c_0\right) - \left(g(x) + c_0\right)\right) dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx.$$

Следовательно, *если функции f и g непрерывны на отрезке $[a; b]$ и для всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$, то площадь S фигуры, ограниченной графиками функций f и g и прямыми $x = a$ и $x = b$, можно вычислить по формуле*

$$\boxed{S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$

ПРИМЕР 4 Найдите площадь S фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ и $g(x) = x^2 - 2x$.

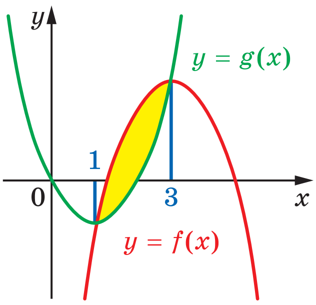


Рис. 26.10

Решение. На рисунке 26.10 изображена фигура, площадь которой требуется найти.

Решив уравнение $f(x) = g(x)$, устанавливаем, что графики функций f и g пересекаются в двух точках с абсциссами $x = 1$ и $x = 3$.

Тогда искомая площадь

$$S = \int\limits_1^3 (f(x) - g(x))\,dx = \int\limits_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)\,dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3\right) - \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1\right) = \frac{8}{3}. \bullet$$

Упражнения

26.1.° Найдите площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 26.11.

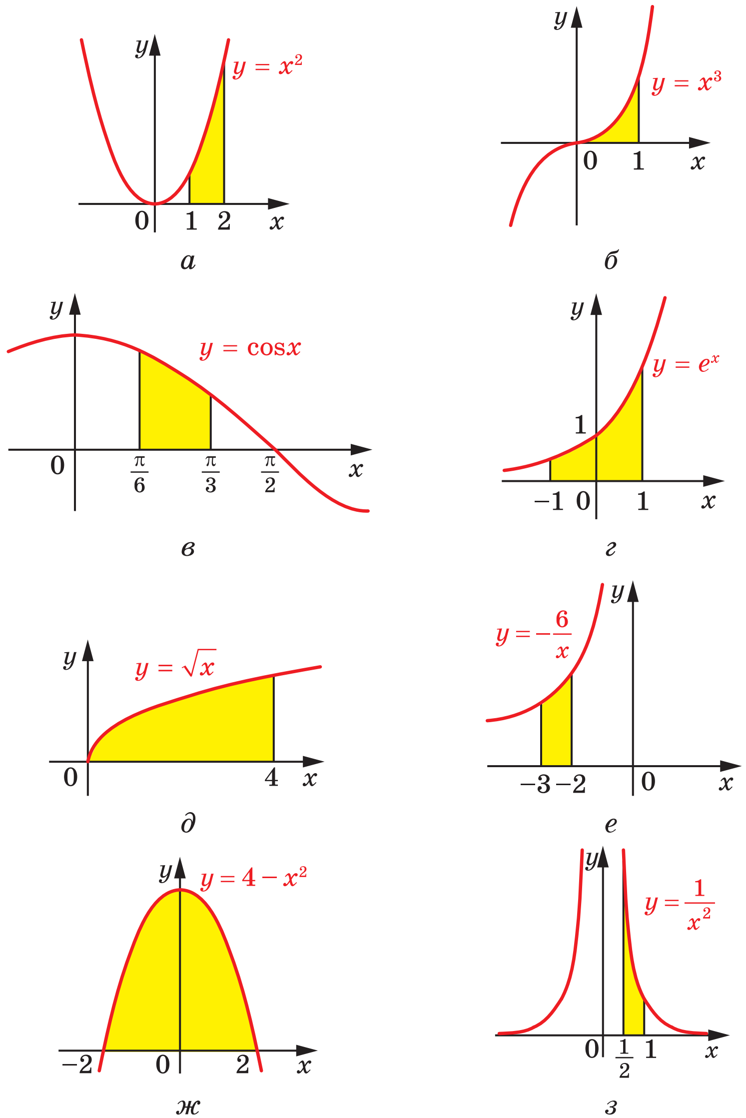


Рис. 26.11

26.2.° Найдите площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 26.12.

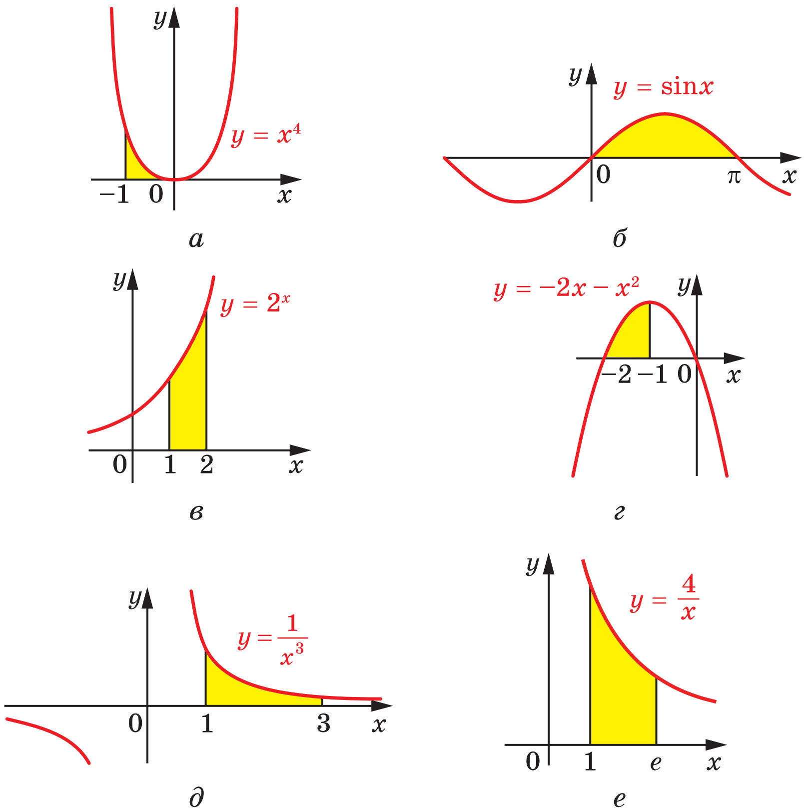


Рис. 26.12

26.3.° Вычислите определенный интеграл:

1) $\int\limits_{5}^{7} x\,dx$;

2) $\int\limits_{3}^{8} dx$;

3) $\int\limits_{-3}^{0} x^2\,dx$;

4) $\int\limits_{-1}^{2} x^4\,dx$;

5) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$;

6) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

7) $\int\limits_{16}^{100} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

8) $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x}$;

9) $\int\limits_{1}^{10} \frac{dx}{x^2}$;

10) $\int\limits_{-2}^{3} 3^x\,dx$;

11) $\int\limits_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$;

12) $\int\limits_{-4}^{-2} (2x+4)\,dx$;

13) $\int\limits_{0}^{6} (3x^2-x)\,dx$;

14) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x+2\cos x)\,dx$.

26.4.° Вычислите определенный интеграл:

1) $\int\limits_{-4}^{-2} 2\,dx$;

2) $\int\limits_{1}^{2} x^3\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;

4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

5) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^4}$;

6) $\int\limits_{0}^{4} e^x\,dx$;

7) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x}$;

8) $\int\limits_{4}^{9} \sqrt{x}\,dx$;

9) $\int\limits_{-1}^{1} (1-5x^4)\,dx$.

26.5.• Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной:

1) параболой $y = x^2 + 1$ и прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

2) косинусоидой $y = \cos x$ и прямыми $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;

3) графиком функции $y = -x^3$ и прямыми $y = 0$, $x = -2$;

4) параболой $y = 3 - 2x - x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;

5) гиперболой $y = \frac{1}{2x}$ и прямыми $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$;

6) параболой $y = 2x - x^2$ и осью абсцисс;

7) синусоидой $y = \sin 2x$ и прямыми $y = 0$, $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{\pi}{4}$;

8) графиком функции $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ и прямыми $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$;

9) графиком функции $y = e^x + 1$ и прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = -2$;

10) графиком функции $y = \sqrt{5-x}$ и прямыми $y = 0$, $x = -4$.

26.6.• Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$;
2) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;
3) $y = -\dfrac{8}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -2$;
4) $y = \dfrac{1}{(x+2)^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;
5) $y = \sqrt{x+4}$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 5$;
6) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x - 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -4$.

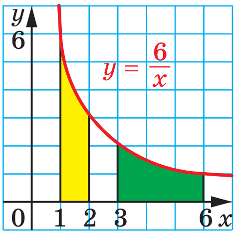


Рис. 26.13

26.7.• Докажите, что криволинейные трапеции, закрашенные на рисунке 26.13, равновелики.

26.8.• Вычислите определенный интеграл:

1) $\int\limits_1^3 (4x^3 - 4x + 3)\,dx$;
2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\dfrac{x}{3}\,dx$;
3) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{3\,dx}{\sin^2 2x}$;
4) $\int\limits_{-2}^{1} (x-3)^2\,dx$;
5) $\int\limits_{\frac{1}{5}}^{1} (5x-3)^5\,dx$;
6) $\int\limits_2^6 \dfrac{dx}{\sqrt{3x-2}}$;
7) $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{3-2x}$;
8) $\int\limits_0^{2\pi} \left(\sin\dfrac{x}{6} + \cos 5x\right) dx$;
9) $\int\limits_0^{2\pi} \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 3x\right) dx$;
10) $\int\limits_{-6}^{0} e^{-\frac{x}{6}}\,dx$;
11) $\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{(4x+1)^3}$;
12) $\int\limits_{12}^{116} \sqrt[3]{\dfrac{x}{4} - 2}\,dx$.

26.9.• Вычислите определенный интеграл:

1) $\int\limits_1^4 \left(\dfrac{4}{x^2} + 2x - 3x^2\right) dx$; 2) $\int\limits_{\frac{4\pi}{3}}^{4\pi} \sin\dfrac{x}{4}\,dx$; 3) $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{dx}{\cos^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)}$;

4) $\int\limits_0^1 (2x-1)^4\,dx$;

5) $\int\limits_4^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$;

6) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} e^{-2x}\,dx$;

7) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{3x+1}$;

8) $\int\limits_1^{\frac{7}{6}} \frac{dx}{(6x-5)^2}$;

9) $\int\limits_1^4 \sqrt{7x-3}\,dx$.

26.10.• Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2$, $y = 4$;

2) $y = 2x^2$, $y = 2x$;

3) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$;

4) $y = \frac{4}{x}$, $y = 1$, $x = 1$;

5) $y = \frac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$;

6) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$;

7) $y = 2 + x - x^2$, $y = 2 - x$;

8) $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$;

9) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$;

10) $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2$;

11) $y = x^3$, $y = x^2$;

12) $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$;

13) $y = \frac{7}{x}$, $x + y = 8$;

14) $y = \frac{2}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 2$;

15) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

26.11.• Найдите площадь фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = x^3$ и прямыми $y = 8$, $x = 1$;

2) параболой $y = 0{,}5x^2$ и прямой $y = -x$;

3) параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 3$;

4) параболой $y = 6 + x - x^2$ и прямой $y = 6 - 2x$;

5) параболами $y = x^2 - 4x + 4$ и $y = 4 - x^2$;

6) гиперболой $y = \frac{3}{x}$ и прямыми $y = 3$, $x = 3$;

7) графиком функции $y = e^{-x}$ и прямыми $y = e$, $x = 0$;

8) гиперболой $y = \frac{5}{x}$ и прямой $x + y = 6$.

26.12.•• При каком положительном значении a определенный интеграл $\int\limits_0^a (6-2x)\,dx$ принимает наибольшее значение?

26.13.•• При каких значениях a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = a$, равна 9?

26.14.•• При каких значениях a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = a$, равна 8?

26.15.•• При каком значении a прямая $x = a$ разбивает фигуру, ограниченную графиком функции $y = \dfrac{2}{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 3$, $x = 12$, на две равновеликие фигуры?

26.16.•• При каком значении a прямая $x = a$ разбивает фигуру, ограниченную графиком функции $y = -x^3$ и прямыми $y = 0$, $x = -2$, на две равновеликие фигуры?

26.17.•• При каких значениях a выполняется неравенство:

1) $\int\limits_0^a (4-2x)\,dx < 3$, где $a > 0$;

2) $\int\limits_{\log_{0,2} 6}^{a} 0,2^x\,dx > \dfrac{19}{\ln 0,2}$, где $a > \log_{0,2} 6$?

26.18.•• При каких положительных значениях a выполняется неравенство $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{a} \left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) dx > 1,5$, где $a > \dfrac{1}{2}$?

26.19.•• Вычислите определенный интеграл:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \operatorname{tg}^2 3x\,dx$;

2) $\int\limits_{-\pi}^{0} 2\sin^2 \dfrac{x}{4}\,dx$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos x\,dx$;

4) $\int\limits_1^2 \dfrac{e^x + x^3}{x^3 e^x}\,dx$.

26.20.•• Вычислите определенный интеграл:

1) $\int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{15\pi}{4}} \operatorname{ctg}^2 \dfrac{x}{5}\,dx$;

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x\,dx$;

3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin 7x \cos 3x\,dx$;

4) $\int\limits_{-2}^{-1} \dfrac{x^2 - e^x}{x^2 e^x}\,dx$.

26.21.•• Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 3x - 4,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3;$

2) $y = -x^2,\ y = x - 2;$

3) $y = x^2 - 4,\ y = 4 - x^2;$

4) $y = x^2 - 2x,\ y = x;$

5) $y = 3\sin x,\ y = -2\sin x,\ x = 0,\ x = \frac{2\pi}{3};$

6) $y = \frac{4}{x} - 2,\ y = 2,\ x = 2,\ x = 4.$

26.22.•• Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 4x,\ y = x - 4;$

2) $y = 3 - x^2,\ y = 2x;$

3) $y = \cos x,\ y = -2\cos x,\ x = -\frac{\pi}{6},\quad x = \frac{\pi}{2};$

4) $y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 2x.$

26.23.•• Найдите площадь фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{если } x < 1, \\ 2x - 1, & \text{если } x \geqslant 1 \end{cases}$ и прямыми $y = 0,\ x = -1,\ x = 2;$

2) графиком функции $y = \begin{cases} \cos x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 - x, & \text{если } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$ и прямой $y = 0.$

26.24.•• Найдите площадь фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = \begin{cases} x + 3, & \text{если } x < -1, \\ x^2 + 1, & \text{если } x \geqslant -1 \end{cases}$ и прямыми $y = 0,\ x = -2,\ x = 0;$

2) графиком функции $y = \begin{cases} x + 2, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2\cos 2x, & \text{если } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{4} \end{cases}$ и прямой $y = 0.$

26.25.•• Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, прямой, которая касается этой параболы в точке с абсциссой $x_0 = 2$, и осями координат.

26.26.•• Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, графиком функции $y = 2x^3$ и прямой, которая касается этого графика в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

26.27.•• Вычислите определенный интеграл, используя его геометрический смысл:

1) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$;
2) $\int\limits_{-3}^{0} \sqrt{9-x^2}\,dx$;
3) $\int\limits_{4}^{8} \sqrt{8x-x^2}\,dx$;
4) $\int\limits_{-5}^{1} \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$;
5) $\int\limits_{-4}^{1} |x|\,dx$;
6) $\int\limits_{0}^{5} |x-2|\,dx$.

26.28.•• Вычислите определенный интеграл, используя его геометрический смысл:

1) $\int\limits_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$;
2) $\int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx$;
3) $\int\limits_{1}^{5} \sqrt{6x-x^2-5}\,dx$;
4) $\int\limits_{-2}^{2} |x+1|\,dx$.

26.29.* Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{1}^{e} \ln x\,dx$.

26.30.* Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x\,dx$.

27. Вычисление объемов тел

В предыдущем пункте вы узнали, как с помощью интегрирования можно вычислять площадь криволинейной трапеции. Напомним, что если фигура ограничена графиками функций f и g и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 27.1), то ее площадь можно вычислить по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Рассмотрим функцию $l(x) = f(x) - g(x)$. Величина $l(x_0) = f(x_0) - g(x_0)$ равна длине отрезка, по которому вертикальная прямая $x = x_0$ пересекает данную фигуру (рис. 27.2). Следовательно, можно записать:

$$S = \int_a^b l(x)\,dx.$$

Оказывается, что последнюю формулу можно обобщить для решения задач на вычисление объемов пространственных тел.

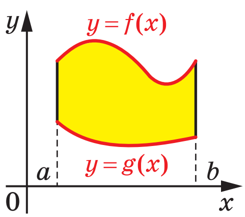


Рис. 27.1

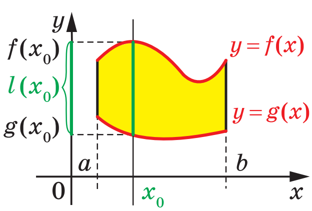


Рис. 27.2

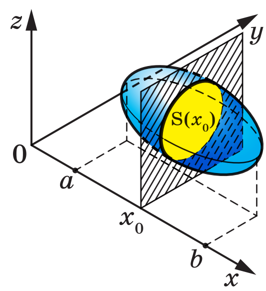


Рис. 27.3

В пространственной прямоугольной декартовой системе координат рассмотрим тело Ф, объем которого равен V. Пусть плоскость $x = x_0$ пересекает тело Ф по фигуре с площадью $S(x_0)$, а проекцией тела Ф на ось абсцисс является отрезок $[a; b]$ (рис. 27.3). Если $y = S(x)$ — непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция, то объем тела Ф можно вычислить по формуле

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$$

Эту формулу можно доказать, используя идею доказательства теоремы 26.1.

Покажем, как с помощью полученной формулы вывести формулу объема пирамиды.

Пусть дана пирамида с высотой OM, равной h, и основанием, площадь которого равна S (рис. 27.4). Докажем, что объем пирамиды равен $V=\frac{1}{3}Sh$. Введем систему координат так, чтобы вершина пирамиды O совпала с началом координат, а высота пирамиды OM принадлежала положительной полуоси абсцисс (рис. 27.5). Тогда основание пирамиды лежит в плоскости $x = h$. Поэтому проекцией пирамиды на ось абсцисс является отрезок $[0; h]$.

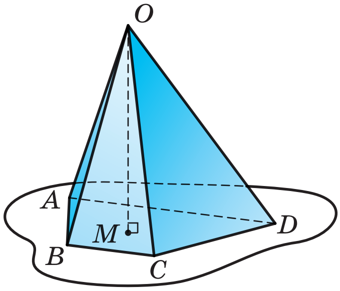


Рис. 27.4

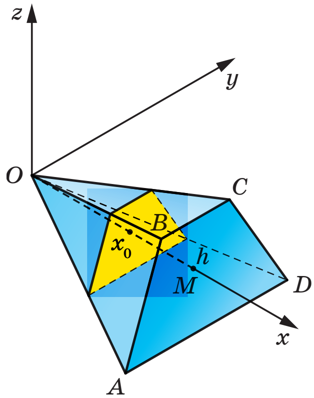


Рис. 27.5

Пусть плоскость $x = x_0$ пересекает пирамиду по многоугольнику с площадью $S(x_0)$. Понятно, что плоскость сечения параллельна плоскости основания пирамиды. Поэтому многоугольник, образованный в сечении, подобен многоугольнику основания пирамиды. При этом коэффициент подобия равен $\frac{x_0}{h}$. Воспользовавшись теоремой об отношении площадей подобных фигур, можно записать:

$$\frac{S(x_0)}{S}=\frac{x_0^2}{h^2}.$$

Отсюда $S(x_0)=\frac{x_0^2}{h^2}S$. Теперь можно записать:

$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\int_0^h \frac{x^2}{h^2}S\,dx=\frac{S}{h^2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}Sh.$$

ПРИМЕР Фигура, ограниченная графиком функции $f(x) = x^2 + 1$ и прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ (рис. 27.6), вращается вокруг оси абсцисс, образуя тело объема V (рис. 27.7). Найдите V.

Решение. При пересечении образовавшегося тела плоскостью $x = x_0$, где $x_0 \in [0; 1]$, получаем круг (рис. 27.8), радиус которого равен $f(x_0)$. Тогда площадь этого круга равна

$$S(x_0) = \pi f^2(x_0) = \pi\left(x_0^2 + 1\right)^2 = \pi\left(x_0^4 + 2x_0^2 + 1\right).$$

Поэтому

$$V = \int_0^1 S(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^4 + 2x^2 + 1)\,dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{28\pi}{15}.$$

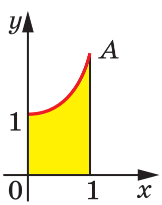


Рис. 27.6

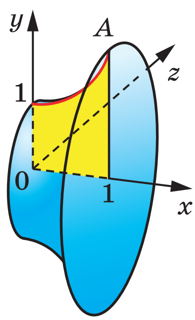


Рис. 27.7

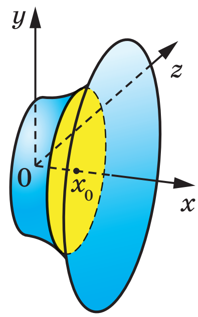


Рис. 27.8

Вообще, имеет место такое утверждение.

Если при вращении фигуры, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции f и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вокруг оси абсцисс образуется тело объема V, то

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Упражнения

27.1.• Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 2x + 1$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$;
2) $y = x^2 + 1$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$;
3) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
4) $y = x^2$, $y = x$;
5) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$, $y = x$.

27.2.• Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \sqrt{\cos x}$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$;
2) $y = x - x^2$, $y = 0$;
3) $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 2$.

27.3.• В шаре радиуса R на расстоянии $\frac{R}{2}$ от центра шара проведена плоскость, которая разбивает шар на две части. Найдите объемы этих частей.

27.4.• Докажите, что объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

27.5.• Выведите формулу для вычисления объема конуса.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

«Разумом он превзошел род человеческий»

Эти величественные слова написаны потомками о знаменитом английском ученом — физике и математике Исааке Ньютоне. В истории науки рядом с И. Ньютоном стоит еще одна гигантская фигура — немецкого ученого Готфрида Вильгельма Лейбница, который оставил после себя неизгладимый след в философии, математике, юриспруденции, логике, дипломатии, истории, политологии. Среди огромного научного наследия этих гениальных ученых особое место занимают результаты, связанные с созданием дифференциального и интегрального исчисления — науки о производных и первообразных.

Надо подчеркнуть, что Ньютон и Лейбниц создавали свои теории в те времена, когда привычные для нас понятия и термины либо вообще не существовали, либо не имели точного смысла. Попробуйте представить себе учебник по алгебре, в котором нет терминов «множество», «функция», «действительное число», «предел» и т. п. Более того, многие удобные современные обозначения тогда еще не стали общеупотребительными. Некоторые из них Ньютону и Лейбницу пришлось самим изобретать, обобщать и приспосабливать к потребностям. Например, Лейбниц начал обозначать операцию умножения точкой (до того использовали символы: $\square$, $\times$, $*$, M и т. д.), операцию деления — двоеточием (ранее часто использовали букву D); Ньютон распространил обозначение для степени a^n на случай целых и дробных значений n, а обозначение $\sqrt{x}$ обобщил до $\sqrt[n]{x}$. Термин «функция» и символ интеграла «$\int$» впервые встречаются в трудах Лейбница.

Исаак Ньютон
(1643–1727)

Готфрид Вильгельм
Лейбниц
(1646–1716)

Вообще, историю развития математики можно смело разделить на эпохи до и после появления производной и интеграла. Открытия Ньютона и Лейбница дали возможность ученым быстро и просто решать задачи, которые раньше считались абсолютно неприступными.

Приведем показательный пример. В первой половине XVII века выдающийся итальянский математик Бонавентура Кавальери предложил новый метод для вычисления площадей. Пользуясь этим методом, Кавальери смог вычислить площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = x^n$, осью абсцисс и вертикальной прямой $x = 1$, при некоторых значениях n (рис. 27.9). Настойчиво работая более 10 лет, с помощью крайне сложных и громоздких рассуждений Кавальери смог решить задачу только для натуральных значений n, меньших 10.

Нечего и говорить, что, используя формулу Ньютона–Лейбница, искомую площадь можно найти в одну строку не только для натуральных, а и для всех положительных значений n:

$$S = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

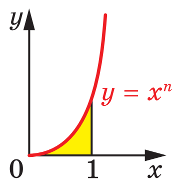


Рис. 27.9

Однако в те времена метод, предложенный Кавальери, имел необычайно важное значение, поскольку до XVII века в течение нескольких тысяч лет все попытки ученых решить такую или подобную задачи были вообще безрезультатными.

Для своих расчетов Кавальери сформулировал такой принцип:

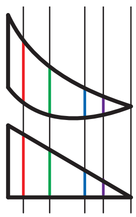


Рис. 27.10

если все прямые, параллельные между собой, пересекают фигуры F_1 и F_2 по отрезкам одинаковой длины (рис. 27.10), *то такие фигуры имеют равные площади.*

Ознакомившись с этим принципом, в 1644 году выдающийся итальянский математик и физик Эванджелиста Торричелли писал: «Без сомнений, геометрический принцип Кавальери — удивительное по своей экономии средство для нахождения теорем... Это — действительно царская дорога среди зарослей математического терновника».

Например, из принципа Кавальери следует, что прямоугольник и параллелограмм с одинаковыми стороной и высотой имеют равные площади (рис. 27.11). Однако принцип Кавальери работает и для более сложных фигур. Например, рассмотрим две фигуры: единичный квадрат и «криволинейный четырехугольник» $ABCD$, ограниченный линиями $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}+1$, $x=0$, $x=1$ (рис. 27.12). Понятно, что каждая вертикальная прямая пересекает обе фигуры по отрезкам единичной длины. Тогда из принципа Кавальери следует, что площадь «криволинейного четырехугольника» $ABCD$ равна площади единичного квадрата, то есть единице. В справедливости этого вывода вы можете убедиться самостоятельно, вычислив площадь «криволинейного четырехугольника» $ABCD$ с помощью формулы Ньютона–Лейбница.

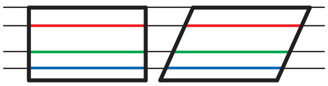


Рис. 27.11

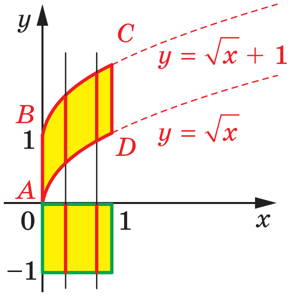


Рис. 27.12

Идеи, близкие к сформулированному принципу Кавальери, натолкнули Ньютона и Лейбница на создание удобной общей теории, которая позволяет просто и быстро строить касательные к сложнейшим кривым, находить наибольшие и наименьшие значения функций, вычислять площади разнообразных фигур, решать многие другие важные и сложные задачи.

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 3

1. Какая из данных функций является первообразной функции $f(x) = x^4$?

А) $F(x) = 4x^3$; Б) $F(x) = \frac{x^5}{5}$; В) $F(x) = x^5$; Г) $F(x) = \frac{x^5}{4}$.

2. В каком из данных случаев функция F является первообразной функции f?

А) $f(x) = \sin x$, $F(x) = \cos x$;

Б) $f(x) = 2^x$, $F(x) = 2^x \ln 2$;

В) $f(x) = x$, $F(x) = 1$;

Г) $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$.

3. Укажите общий вид первообразных функции $f(x) = \frac{4}{x^5}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

А) $-\frac{1}{x^4}$; В) $-\frac{20}{x^6} + C$;

Б) $-\frac{1}{x^4} + C$; Г) $-\frac{2}{3x^6} + C$.

4. Какая из данных функций является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; -1]$?

А) $F(x) = -1 - \ln x$; В) $F(x) = \ln(x - 1)$;

Б) $F(x) = \ln(1 - x)$; Г) $F(x) = \ln(-x) - 1$.

5. Укажите общий вид первообразных функции $f(x) = e^{6x}$.

А) $e^{6x} + C$; В) $\frac{e^{6x+1}}{6x+1} + C$;

Б) $6e^{6x} + C$; Г) $\frac{1}{6}e^{6x} + C$.

6. Функция F является первообразной функции $f(x) = x - 3$. Через какую из данных точек проходит график функции F, если $F(2) = 5$?

А) $(0; 8)$; Б) $(-2; 17)$; В) $(1; 5{,}5)$; Г) $(4; 4)$.

7. Какая из данных функций является первообразной функции $f\ (x) = 7^x$?

А) $F\ (x) = \dfrac{7^x}{\ln 7}$; В) $F\ (x) = 7^x$;

Б) $F\ (x) = 7^x \ln 7$; Г) $F\ (x) = \dfrac{7^{x+1}}{x+1}$.

8. Вычислите интеграл $\int\limits_0^3 x^2\, dx$.

А) 27; Б) 9; В) 6; Г) 3.

9. Вычислите интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\, dx$.

А) $\dfrac{1}{2}$; Б) $-\dfrac{1}{2}$; В) $1\dfrac{1}{2}$; Г) $-1\dfrac{1}{2}$.

10. Вычислите интеграл $\int\limits_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \dfrac{dx}{\sin^2 \dfrac{x}{2}}$.

А) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; Б) $2\sqrt{3}$; В) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; Г) $\sqrt{3}$.

11. Вычислите интеграл $\int\limits_{-2}^{6} \dfrac{dx}{2\sqrt{7-x}}$.

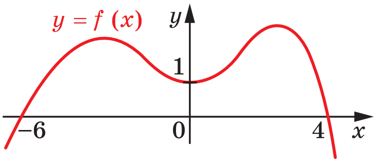
А) -4; Б) 4; В) -2; Г) 2.

12. Вычислите интеграл $\int\limits_{-1}^{4} (f\ (x)+1)\, dx$, если $\int\limits_{-1}^{4} f\ (x)\, dx = 2$.

А) 3; Б) 5; В) 7; Г) 9.

13. На рисунке изображен график функции $y = f\ (x)$. Найдите значение выражения $\int\limits_{-6}^{0} f'\ (x)\, dx - \int\limits_{0}^{4} f'\ (x)\, dx$.

А) 0;
Б) 2;
В) 1;
Г) найти невозможно.



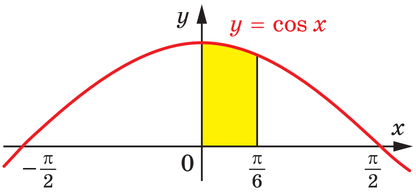
14. Вычислите площадь закрашенной фигуры, изображенной на рисунке.

А) $\frac{\pi}{6}$;

Б) $\frac{1}{2}$;

В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

Г) 1.



15. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 6x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

А) $12\frac{2}{3}$; Б) $14\frac{1}{3}$; В) $14\frac{2}{3}$; Г) $15\frac{1}{3}$.

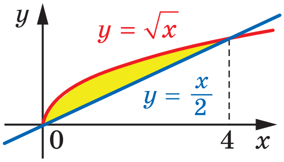
16. Значение какого из данных интегралов равно площади закрашенной фигуры, изображенной на рисунке?

А) $\int\limits_0^4 \frac{x}{2}\,dx$;

Б) $\int\limits_0^4 \sqrt{x}\,dx$;

В) $\int\limits_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) dx$;

Г) $\int\limits_0^4 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right) dx$.



17. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x$.

А) 3,5; Б) 4; В) 4,5; Г) 5.

18. При каком значении a прямая $x = a$ разбивает фигуру, ограниченную графиком функции $y = \frac{10}{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 2$, $x = 8$, на две равновеликие фигуры?

А) 4; Б) 5; В) 10; Г) такого значения не существует.

§4

Элементы теории вероятностей и математической статистики

28. Комбинаторные правила суммы и произведения

Сколькими способами ученики вашего класса могут стать друг за другом в очереди в буфет? Сколькими способами можно выбрать в вашем классе старосту и его заместителя? Сколькими способами могут распределиться золотые, серебряные и бронзовые медали на чемпионате мира по футболу?

Отвечая на эти вопросы, надо подсчитать, сколько различных комбинаций, образованных по определенному правилу, можно составить из элементов данного конечного множества. Область математики, которая занимается решением подобных задач, называют **комбинаторикой**.

В основе решения большинства комбинаторных задач лежат два правила: правило суммы и правило произведения.

Рассмотрим такой пример. Туриста заинтересовали 5 маршрутов в Крыму и 7 маршрутов в Карпатах. Выясним, сколькими способами он может организовать свой отпуск, имея время только на один маршрут.

Поскольку всего имеется $5 + 7 = 12$ различных маршрутов, то один из них можно выбрать 12 способами.

Обобщением этого примера является следующее правило.

Правило суммы. Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b можно выбрать k способами, то выбор «a или b» можно осуществить $m + k$ способами.

Обратимся снова к примеру с выбором маршрутов. Если у туриста есть время на два маршрута и он хочет побывать сначала в Крыму, а затем в Карпатах, то он может организовать свой отдых 35 способами. Действительно, если выбрать один маршрут в Крыму, то парой к нему может быть любой из 7 карпатских маршрутов. Так как маршрутов в Крыму 5, то количество пар (маршрут в Крыму; маршрут в Карпатах) равно $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 5 = 35$.

Эти соображения иллюстрирует следующая таблица:

		Карпатские маршруты						
		1	2	3	4	5	6	7
Крымские маршруты	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

Обобщением этого примера является такое правило.

Правило произведения. Если элемент a можно выбрать m способами и после каждого такого выбора элемент b можно выбрать k способами, то выбор «a и b» в указанном порядке, то есть выбор упорядоченной пары $(a; b)$, можно осуществить mk способами.

ПРИМЕР 1 Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, причем так, чтобы в каждом числе все цифры были разными?

Решение. Первой цифрой в таком четырехзначном числе может быть любая из четырех цифр: 1, 2, 3 или 4. Имеем: 4 варианта.

Поскольку все цифры в этом четырехзначном числе должны быть разными, то какой бы ни была первая цифра, второй цифрой числа может быть любая из трех оставшихся цифр. Следовательно, для каждого из 4 вариантов первой цифры существует 3 варианта для второй цифры. Используя правило произведения, имеем, что первые две цифры четырехзначного числа можно выбрать $4 \cdot 3 = 12$ способами.

Рассуждая аналогично, можно утверждать, что для каждого из этих 12 вариантов выбора первых двух цифр существует два варианта выбора третьей цифры. Действительно, если в качестве первых двух цифр выбраны, например, цифры 1 и 2, то третьей цифрой может быть любая из двух цифр 3 или 4. Используя правило произведения, приходим к выводу, что первые три цифры можно выбрать $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ способами.

Поскольку все цифры в четырехзначном числе должны быть разными, то первые три цифры числа однозначно определяют последнюю четвертую цифру. Поэтому из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ четырехзначных числа так, чтобы в каждом числе все цифры были различными.

Ответ: 24.

При решении примера 1 нам пришлось вычислять произведение $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. В комбинаторных задачах произведение последовательных натуральных чисел от 1 до n встречается так часто, что получило специальное название «факториал» и обозначение $n!$ (запись «$n!$» читают: «эн факториал»):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

ПРИМЕР 2 Для защиты информации на компьютере используют пароль — последовательность букв и цифр длиной от 3 до 5 символов (пароль может содержать несколько одинаковых символов). Сколько различных паролей можно создать, используя 26 букв и 10 цифр?

Решение. Рассмотрим количество различных паролей из трех символов. Первым символом можно выбрать любую букву или любую цифру. Следовательно, имеем 36 вариантов. Аналогично для выбора второго и третьего символов существует по 36 вариантов. Используя правило произведения, имеем, что существует 36^3 различных паролей из трех символов.

Таким же образом доказываем, что количество паролей из четырех символов равно 36^4, а паролей из пяти символов — 36^5.

Поэтому, используя правило суммы, получаем, что общее количество паролей составляет $36^3 + 36^4 + 36^5$. ●

ЗАДАЧА Докажите, что количество подмножеств произвольного n-элементного множества M равно 2^n.

Решение. Пронумеруем все элементы множества M. Имеем:

$$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Рассмотрим конечные последовательности, содержащие n членов и состоящие из нулей и единиц.

Каждому подмножеству A множества M поставим в соответствие одну из таких последовательностей, выбранную по правилу:

- если $a_k \in A$, то на k-м месте в последовательности стоит число 1;
- если $a_k \notin A$, то на k-м месте в последовательности стоит число 0.

Например,

$$A = \{a_2, a_4\} \to 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0$$
$$B = \{a_3\} \to 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0$$
$$C = \{a_n\} \to 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1$$
$$M \to 1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1$$
$$\varnothing \to 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0$$

Ясно, что каждому подмножеству множества M соответствует единственная последовательность и наоборот, каждая последовательность является соответствующей единственному подмножеству множества M. Следовательно, количество подмножеств множества M равно количеству рассматриваемых последовательностей.

При конструировании последовательностей любой член можно выбрать только двумя способами: записать 0 или записать 1. Следовательно, можно сконструировать $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ множителей}} = 2^n$ различных последовательностей. ●

Упражнения

28.1.° Из города A в город B ведут 4 дороги, а из города B в город C ведут 3 дороги (рис. 28.1). Сколькими способами можно проехать из города A в город C?

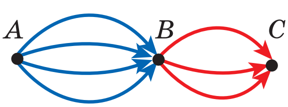


Рис. 28.1

28.2.° Кафе предлагает в меню 3 первых блюда, 6 вторых блюд и 5 третьих блюд. Сколько существует способов выбрать обед из трех блюд (по одному блюду каждого вида)?

28.3.° Будем рассматривать слоги из двух букв, первая из которых является согласной, а вторая — гласной. Сколько таких различных слогов можно составить из букв слова:

1) сабля; 2) шаровары?

28.4.° В корзине лежат 10 яблок и 7 груш. Антон выбирает яблоко или грушу. После этого Максим выбирает яблоко и грушу. В каком случае у Максима больше возможностей для выбора: когда Антон взял яблоко или когда Антон взял грушу?

28.5.° На рисунке 28.2 показана схема дорог, ведущих из города A в город B. Сколькими способами можно проехать из города A в город B?

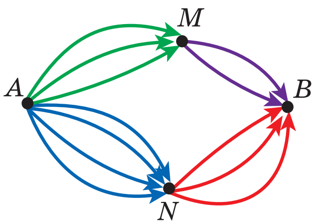


Рис. 28.2

28.6.° Кафе предлагает в меню 3 различных салата, 6 различных мясных блюд и 5 различных десертов. Сколько существует способов выбрать обед из двух блюд разного вида?

28.7.° На вершину горы ведет 5 маршрутов. Сколькими способами альпинист может подняться на гору и спуститься с нее? Ответьте на этот вопрос также при условии, что подъем и спуск должны проходить по разным маршрутам.

28.8.° Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, причем так, чтобы в каждом числе все цифры были различными?

28.9.° Сколько пятизначных чисел, все цифры которых различны, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если эти числа должны начинаться:

1) с цифры 1; 2) с записи «34»?

28.10.° Сколько четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

28.11.° Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых нечетные?

28.12.° Сколько четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

28.13.• Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых четные?

28.14.• Сколько существует семизначных телефонных номеров, которые не начинаются с цифры 0?

28.15.• Монету бросают 4 раза. Сколько различных последовательностей гербов и цифр можно получить?

28.16.• Игральный кубик бросают 3 раза. Сколько различных последовательностей очков можно получить?

28.17.• Сколько трехзначных четных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

28.18.• Сколько трехзначных нечетных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

28.19.• Сколько пятизначных чисел, все цифры которых должны быть различными, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

28.20.• Сколько четных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы в каждом числе цифры были различными?

28.21.• Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся нацело на 5?

28.22.• Сколько существует семизначных чисел, которые делятся нацело на 25?

28.23.•• Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две ладьи (белую и черную) так, чтобы они не били друг друга?

28.24.•• В книжном магазине есть 4 различных издания поэмы «Энеида», 3 различных издания пьесы «Наталка Полтавка» и 2 различных издания пьесы «Москаль-чаривнык». Кроме того, есть 5 различных книг, в которых содержатся поэма «Энеида» и пьеса «Наталка Полтавка», и 6 различных книг, в которых содержатся пьесы «Наталка Полтавка» и «Москаль-чаривнык». Сколькими способами можно сделать покупку, которая содержала бы по одному экземпляру каждого из этих произведений?

28.25.•• Сколько существует семизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую четность?

28.26.•• Для шифрования сообщений используют цифры 0, 1, 2, 3. Слово в сообщении содержит от одной до пяти цифр. Какое наибольшее количество различных слов может содержать сообщение?

28.27.•• Сколькими способами можно распределить заказ на печатание 10 различных учебников между двумя книжными фабриками?

28.28.•• У ученика есть 7 книг по математике, 4 книги по физике и 2 книги по астрономии. Сколькими способами он может расставить эти книги на полке так, чтобы книги по одному предмету стояли рядом?

28.29.•• Пять мальчиков и пять девочек садятся в ряд на 10 стульев. Сколькими способами они могут расположиться так, чтобы мальчики сидели на стульях с четными номерами, а девочки — на стульях с нечетными номерами?

28.30.•• Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна нечетная цифра?

28.31.•• Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

28.32.•• Сколько существует пятизначных чисел, содержащих хотя бы две одинаковые цифры?

28.33.•• Игральный кубик бросают три раза. Сколько различных последовательностей очков, среди которых есть хотя бы одна шестерка, можно получить?

28.34.•• Среди 10 человек двое знакомы. Сколькими способами можно посадить этих людей на 10 стульев так, чтобы знакомые сидели рядом?

28.35.•• Сколько пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы цифры в числе не повторялись и четные цифры не стояли рядом?

28.36.•• Будем считать словом любую конечную последовательность букв русского алфавита. Сколько различных слов можно образовать, переставляя буквы слова: 1) молоко; 2) математика; 3) комбинаторика?

28.37.* Сколько натуральных делителей имеет число $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^6$?

29. Перестановки, размещения, сочетания

Вы знаете, что при записи множества его элементы пишут в произвольном порядке. Например, $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$. Однако в комбинаторике рассматривают также **упорядоченные множества**. Например, запись (b, a, c) задает трехэлементное упорядоченное множество, в котором на первом месте стоит элемент b, на втором — элемент a, а на третьем — элемент c. Запись (c, b, a) задает другое упорядоченное множество из тех же самых элементов a, b и c.

Определение. Перестановкой конечного множества M называют любое упорядоченное множество, образованное из всех элементов множества M.

Например, существует 6 перестановок множества $M = \{a, b, c\}$. Выпишем их:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Перестановки данного конечного множества отличаются только порядком следования элементов.

Теперь задачу о количестве способов, которыми ученики вашего класса могут выстроиться друг за другом в очереди в буфет, можно сформулировать так: «Сколько существует перестановок множества учеников вашего класса?»

Количество перестановок n-элементного множества M обозначают символом P_n, используя первую букву французского слова *permutation* — перестановка. Например, рассматривая множество $M = \{a, b, c\}$, мы установили, что $P_3 = 6$.

Если $M = \{a\}$, то существует только один способ упорядочения этого множества: a — это первый элемент. Поэтому $P_1 = 1$.

Докажем, что для любого натурального n справедлива формула

$$\boxed{P_n = n!}$$

Пусть множество M состоит из n элементов. Записать любую перестановку множества M — это фактически присвоить каждому элементу этого множества некоторый номер от 1 до n. Поэтому количество перестановок множества M равно количеству способов нумерации его элементов.

Выберем некоторый элемент a этого множества. Существует n способов присвоить этому элементу номер. Далее выберем некоторый элемент b из множества M. Так как элементу a номер уже присвоен, то существует $n - 1$ способ присвоить номер элементу b. Понятно, что следующий элемент можно пронумеровать $n - 2$ способами и т. д. Для последнего невыбранного элемента множества M существует только один способ присвоить ему номер, так как к этому моменту $n - 1$ элемент уже получили свои номера.

Следовательно, по правилу произведения можно записать:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \text{ то есть}$$

$$P_n = n!$$

ПРИМЕР 1 Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Для того чтобы ладьи не могли бить друг друга, на каждой горизонтали и на каждой вертикали должна стоять только одна ладья (рис. 29.1).

Рис. 29.1

Пусть a_1 — номер вертикали, на которой стоит ладья с первой горизонтали, a_2 — номер вертикали, на которой стоит ладья со второй горизонтали, ..., a_8 — номер вертикали, на которой стоит ладья с восьмой горизонтали.

Ясно, что $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ — некоторая перестановка множества $\{1, 2, \ldots, 8\}$. Каждой такой перестановке соответствует определенное расположение ладей, соответствующее условию задачи, и наоборот, каждому допустимому расположению ладей соответствует определенная перестановка этого множества.

Следовательно, искомое количество способов равно P_8, то есть $8!$. ●

Рассмотрим еще несколько типовых комбинаторных задач.

ПРИМЕР 2 По правилам *FIFA*[1] в финальной части чемпионата мира по футболу участвуют 32 команды. Сколькими способами могут быть распределены золотые, серебряные и бронзовые медали (три призовых места) между командами?

Решение. На первое место может попасть любая из 32 команд, на второе место — любая из остальных 31 команды, на третье — любая из оставшихся 30 команд. По правилу произведения количество возможных вариантов распределения мест равно $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\ 760$. ●

Решив эту задачу, мы выяснили, сколько существует 3-элементных упорядоченных подмножеств данного 32-элементного множества. Каждое из таких упорядоченных подмножеств называют **размещением из 32 элементов по 3 элемента.**

Определение. Любое k-элементное упорядоченное подмножество данного n-элементного множества называют размещением из n элементов по k элементов.

Количество всех возможных размещений из n элементов по k элементов обозначают символом A_n^k, используя первую букву французского слова *arrangement* — размещение.

Результат, полученный в задаче о распределении призовых мест, позволяет сделать вывод, что

$$A_{32}^3 = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\ 760.$$

Докажем, что при любых натуральных n и k таких, что $k \leqslant n$, справедлива формула

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)} \qquad (1)$$

Рассмотрим n-элементное множество и сформируем его k-элементное упорядоченное подмножество.

[1] Международная федерация футбольных ассоциаций.

Существует n способов выбора первого элемента подмножества. Второй элемент подмножества можно выбрать уже только $n-1$ способами. После выбора первого и второго элементов остается $n-2$ способа для выбора третьего элемента подмножества. Вообще, выбор k-го элемента можно осуществить $n-k+1$ способами.

Следовательно, по правилу произведения можно записать:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

Так как существует только одно n-элементное подмножество данного n-элементного множества, то число A_n^n — это количество перестановок n-элементного множества, то есть

$$\boxed{\boldsymbol{A_n^n = P_n}}$$

Этот факт подтверждает формула (1). Действительно, при $k = n$ получим:

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1) = n!$$

По определению принято считать, что $0! = 1$. Эта договоренность позволяет формулу (1) записать компактнее.

Умножим и разделим выражение, стоящее в правой части формулы (1), на $(n-k)!$ (это возможно, так как $(n-k)! \neq 0$). Имеем:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Получаем формулу

$$\boxed{\boldsymbol{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}}$$

ПРИМЕР 3 Сколько существует правильных дробей, числитель и знаменатель которых — простые числа, меньшие 30?

Решение. Множество $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ состоит из всех простых чисел, меньших 30. Количество 2-элементных упорядоченных подмножеств этого множества равно количеству обыкновенных дробей, отличных от единицы, числитель и знаменатель которых — указанные простые числа. Половина из этих дробей — правильные. Следовательно, искомое число равно $\frac{1}{2}A_{10}^2 = 45$. ●

Рассмотрим такие две задачи. Сколькими способами в классе, в котором 30 учащихся, можно выбрать старосту и его заместителя? Сколькими способами в этом классе можно назначить двух дежурных?

Ответ на первый вопрос вам известен: это количество 2-элементных упорядоченных подмножеств 30-элементного множества, то есть A_{30}^2. Чтобы ответить на второй вопрос, надо определить количество 2-элементных подмножеств 30-элементного множества (именно подмножеств, а не упорядоченных подмножеств). Каждое из таких подмножеств называют **сочетанием (комбинацией)** из 30 элементов по 2 элемента.

Определение. Любое k-элементное подмножество заданного n-элементного множества называют сочетанием (комбинацией) из n элементов по k элементов.

Количество всех возможных сочетаний из n элементов по k элементов обозначают символом C_n^k, используя первую букву французского слова *combinaison* — комбинация.

Так, задачу о количестве способов назначения дежурных можно сформулировать так: чему равно C_{30}^2?

Вычислим значение C_n^k для нескольких очевидных случаев. Например, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$. Действительно, существует n одноэлементных подмножеств и одно n-элементное подмножество заданного n-элементного множества.

Поскольку любое множество имеет только одно подмножество, не содержащее ни одного элемента (речь идет о пустом множестве), то

$$C_n^0 = 1.$$

Также понятно, что

$$C_0^0 = 1.$$

Докажем, что при любых натуральных n и k таких, что $k \leqslant n$, справедлива формула

$$\boxed{A_n^k = C_n^k \cdot P_k} \qquad (2)$$

Рассмотрим некоторое n-элементное множество. Количество его k-элементных подмножеств равно C_n^k. Из каждого такого подмножества можно образовать $k!$ упорядоченных k-элементных подмножеств. Следовательно, количество всех k-элементных упорядоченных подмножеств данного n-элементного множества равно $C_n^k \cdot k!$, то есть $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$.

Из формулы (2) получаем, что $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$.

Отсюда

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}} \qquad (3)$$

Отметим, что эта формула остается справедливой и для случаев, когда $k = 0$ или $n = 0$. Действительно,

$$C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1,$$

$$C_0^0 = \frac{0!}{(0-0)!\,0!} = 1.$$

ПРИМЕР 4 Докажите, что

$$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}} \qquad (4)$$

Решение. Эту формулу можно доказать с помощью формулы (3). Убедитесь в этом самостоятельно.

У формулы (4) есть и другое, комбинаторное, доказательство. Выбирая k-элементное подмножество A n-элементного множества M, мы тем самым однозначно задаем $(n - k)$-элементное подмножество $M \setminus A$. Следовательно, количество способов выбора k-элементного подмножества равно количеству способов выбора $(n - k)$-элементного подмножества, то есть справедлива формула (4). ●

Упражнения

29.1.° Сколькими способами можно расставить на полке 7 различных книг?

29.2.° В школе 20 классов и 20 классных руководителей. Сколькими способами можно распределить классное руководство между учителями?

29.3.° Сколькими способами могут сесть в автомобиль 5 человек, если каждый из них может быть водителем?

29.4.° В футбольной команде, состоящей из 11 игроков, надо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

29.5.° Комиссия, состоящая из 15 человек, должна выбрать председателя, его заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

29.6.° В 9 классе изучают 12 предметов. Дневное расписание содержит 6 уроков. Сколькими способами можно составить дневное расписание так, чтобы все 6 уроков были разными?

29.7.° В финальной части чемпионата Европы по футболу участвуют 16 команд. Сколькими способами могут распределиться золотые, серебряные и бронзовые награды?

29.8.° В классе 32 учащихся. Каждые двое учащихся обменялись друг с другом фотографиями. Сколько всего было подарено фотографий?

29.9.° В классе 29 учащихся. Сколькими способами можно сформировать команду из 5 учащихся для участия в математической олимпиаде?

29.10.° Дан правильный n-угольник. Сколько существует четырехугольников с вершинами, содержащимися среди вершин данного n-угольника?

29.11.° На плоскости отметили 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

29.12.• Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы цифры не повторялись и крайние цифры были четными?

29.13.• Среди 20 рабочих 7 штукатуров. Сколькими способами можно составить бригаду из 5 человек так, чтобы в нее входили ровно 2 штукатура?

29.14.• Для школьной лотереи подготовили 100 билетов, из которых 12 — выигрышные. Первый ученик наугад выбирает 10 билетов. Сколько существует вариантов выбора, при которых он выберет ровно 3 выигрышных билета?

29.15.• На прямой отметили 12 точек, а на параллельной ей прямой — 7 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

29.16.• Прямая и окружность не имеют общих точек. На окружности отметили 9 красных точек, а на прямой — 15 синих точек. Известно, что ни одна прямая, проходящая через две красные точки, не содержит синих точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

29.17.• В классе 30 учащихся, из которых 13 юношей и 17 девушек. Сколькими способами можно сформировать команду из 7 учащихся этого класса, в которую должна входить по крайней мере одна девушка?

29.18.• Для подготовки к экзамену предложен список из 80 вопросов. Ученик знает ответы только на 15 из них. Экзаменационный билет состоит из 6 различных вопросов данного списка. Сколько различных экзаменационных билетов можно составить так, чтобы ученик мог ответить хотя бы на один вопрос билета?

29.19.•• Сколькими способами можно разбить 12 спортсменов на 3 команды по 4 спортсмена в каждой?

29.20.•• Сколькими способами можно разложить 20 различных шаров в 4 одинаковых ящика так, чтобы каждый ящик содержал по 5 шаров?

29.21.•• Сколькими способами можно m белых и n черных шаров ($m \geqslant n$) разложить в ряд так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?

29.22.•• Пять ящиков пронумерованы числами от 1 до 5. Сколькими способами можно разложить в эти ящики 17 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

29.23.•• Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы k натуральных слагаемых (суммы, отличающиеся порядком слагаемых, будем считать разными)?

30. Частота и вероятность случайного события

Напомним основные сведения о частоте и вероятности случайного события, с которыми вы ознакомились в 9 классе.

Нам нередко приходится проводить наблюдения, опыты, участвовать в экспериментах или испытаниях. Часто подобные исследования заканчиваются некоторым результатом, который заранее предсказать нельзя.

Если эксперимент проведен n раз и интересующее нас событие состоялось m раз, то величину $\frac{m}{n}$ называют **частотой случайного события.**

Вероятность случайного события приближенно равна частоте этого события, найденной при проведении большого количества испытаний (*наблюдений*).

Такую оценку вероятности случайного события называют **статистической.**

Для нахождения вероятности некоторых событий не обязательно проводить испытания или наблюдения. Достаточно руководствоваться жизненным опытом и здравым смыслом.

ПРИМЕР 1 Пусть в коробке лежат 15 бильярдных шаров, пронумерованных числами от 1 до 15. Какова вероятность того, что вынутый наугад шар будет иметь номер, кратный 3?

Решение. Понятно, что в этом испытании есть 15 *равновозможных результатов*. Из них существуют 5, которые нас устраивают: когда вынимают шары с номерами 3, 6, 9, 12, 15. Поэтому естественно считать, что вероятность события «вынули шар с номером, кратным 3» равна $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$. ●

Решение многих вероятностных задач можно описать такой схемой.

- Пусть при испытании можно получить один из n равновозможных результатов.
- Рассматривается некоторое событие A, к которому приводят m результатов. Будем называть их **благоприятными.**

- Вероятность события A можно вычислить по формуле:

$$\boxed{p(A) = \frac{m}{n}}$$

Событие, которое при данном комплексе условий обязательно состоится при любом испытании, называют **достоверным**. Вероятность такого события считают равной 1. Событие, которое при данном комплексе условий не может состояться ни при каком испытании, называют **невозможным**. Вероятность такого события считают равной 0.

Заметим, что вероятность $p(A)$ любого события A удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant p(A) \leqslant 1.$$

Для вычисления вероятности случайного события нам приходилось подсчитывать количество равновозможных результатов в данном эксперименте и количество благоприятных результатов.

Часто эти подсчеты связаны с нахождением количества различных комбинаций, которые по некоторому правилу можно составить из элементов данного конечного множества. Поэтому применение правил комбинаторики — эффективный прием для решения многих задач теории вероятностей.

Рассмотрим примеры.

ПРИМЕР 2 На торговом лотке лежат 28 яблок — 15 желтых и 13 красных. Покупатель купил 3 яблока, которые продавец взял наугад. Какова вероятность того, что все купленные яблоки желтые?

Решение. Первое яблоко продавец может выбрать 28 способами, второе — 27, третье — 26 способами. Используя комбинаторное правило произведения, имеем, что продавец может выбрать 3 яблока $n = 28 \cdot 27 \cdot 26$ равновозможными способами.

Вычислим, сколько среди этих способов таких, когда все три яблока — желтые. Первое желтое яблоко можно выбрать 15 способами, второе — 14, третье — 13 способами. Используя комбинаторное правило произведения, имеем, что продавец может выбрать 3 желтых яблока $m = 15 \cdot 14 \cdot 13$ способами.

Следовательно, вероятность случайного события A — выбрать три желтых яблока — равна $p(A)=\frac{15\cdot14\cdot13}{28\cdot27\cdot26}=\frac{5}{36}$. ●

ПРИМЕР 3 В двух урнах лежат шары, которые отличаются только цветом. В первой урне лежат два белых и три черных шара, а во второй — три белых и два черных шара. Из каждой урны наугад достают по одному шару. Какова вероятность того, что хотя бы один из двух шаров окажется белым?

Решение. Этот опыт имеет три результата: либо оба вынутых шара белые, либо оба черные, либо один шар белый, а другой — черный. Однако эти результаты не являются равновозможными (подумайте, почему). Для того чтобы иметь возможность в данном опыте рассматривать равновозможные результаты, пронумеруем все 10 шаров.

Поскольку в каждой урне лежит по 5 шаров, то из них можно составить $5\cdot5=25$ таких пар, что шары в парах взяты из разных урн. Поскольку шары пронумерованы, то мы можем считать, что все 25 пар шаров различны. Шары из урн берут наугад. Поэтому в данном эксперименте существует 25 равновозможных результатов.

Поскольку в первой урне лежат 3 черных шара, а во второй — 2 черных, то существует $3\cdot2=6$ пар шаров черного цвета. Поэтому количество пар шаров, среди которых есть по крайней мере один белый, равно $25-6=19$. Следовательно, количество результатов, благоприятных для события «хотя бы один из шаров окажется белым» (событие A), равно 19.

Итак, $p(A)=\frac{19}{25}$. ●

ПРИМЕР 4 Опыт состоит в одновременном бросании четырех игральных кубиков. Найдите вероятность того, что:

1) выпадет ровно одна шестерка (событие A);
2) выпадут четыре разные цифры (событие B);
3) не выпадет ни одной шестерки (событие C);
4) выпадет хотя бы одна шестерка (событие D).

Решение. Пронумеруем кубики числами от 1 до 4. Любой результат эксперимента будем записывать в виде (a, b, c, d), где a, b, c и d — количества очков, которые выпали соответственно на первом, втором, третьем и четвертом кубиках.

Всего может образоваться $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$ таких четверок. Ни один из результатов не имеет преимущества. Поэтому в данном опыте существует 6^4 равновозможных результатов.

1) Единственная выпавшая шестерка может стоять на любом из четырех мест. Пусть, например, она стоит на первом месте. На остальных трех местах могут стоять любые цифры от 1 до 5. Тогда количество четверок вида $(6, b, c, d)$ равно $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. Общее количество благоприятных вариантов равно $4 \cdot 5^3$. Следовательно,
$$p(A) = \frac{4 \cdot 5^3}{6^4}.$$

2) В этом случае любые выпавшие четыре различные цифры образуют 4-элементное упорядоченное подмножество множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Следовательно, количество результатов, благоприятных для наступления события B, равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Отсюда
$$p(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}.$$

3) На каждом из четырех мест может стоять любая из цифр от 1 до 5. Отсюда количество результатов, благоприятных для наступления события C, равно $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$. Получаем
$$p(C) = \frac{5^4}{6^4}.$$

4) Количество всех результатов равно 6^4. Количество всех результатов, где нет ни одной шестерки, равно 5^4. Тогда $6^4 - 5^4$ — это количество всех результатов, содержащих хотя бы одну шестерку. Отсюда
$$p(D) = \frac{6^4 - 5^4}{6^4}.$$

ПРИМЕР 5 Контролер в партии из 20 деталей наугад выбирает 5 деталей для проверки. Если среди выбранных деталей нет ни одной бракованной, то он принимает всю партию. Какова вероятность того, что контролер примет партию деталей, содержащую 7 бракованных?

Решение. Поскольку контролер выбирает из 20 деталей 5 деталей наугад, то данный эксперимент имеет C_{20}^5 равновозможных результатов.

Поскольку в партии из 20 деталей 7 бракованных, то качественных — 13. Контролер пропускает эту партию (событие A), если 5 деталей будут выбраны из 13 качественных деталей. Следовательно, количество результатов, благоприятных для наступления события A, равно C_{13}^5. Отсюда $p(A) = \frac{C_{13}^5}{C_{20}^5}$. ●

Заметим, что при решении этой задачи можно было рассуждать иначе. Если контролер будет выбирать детали для проверки последовательно, то есть иметь дело с упорядоченным множеством, то данный эксперимент будет иметь A_{20}^5 равновозможных результатов, среди которых A_{13}^5 будут благоприятными.

ПРИМЕР 6 В соревнованиях по баскетболу участвуют 18 команд, из которых 5 команд считаются фаворитами. С помощью жеребьевки команды делят на две группы A и B, по 9 команд в каждой. Какова вероятность попадания в одну группу:

1) пяти команд-фаворитов (событие M);

2) ровно двух команд-фаворитов (событие K)?

Решение. Каждую из групп можно образовать C_{18}^9 способами.

1) Пусть 5 команд-фаворитов попали в группу A. Тогда для доформирования этой группы до 9 команд надо выбрать 4 команды из 13 оставшихся команд. Это можно сделать C_{13}^4 способами. Поскольку пять команд-фаворитов могут попасть как в группу A, так и в группу B, то количество результатов, благоприятных для события M, равно $2 \cdot C_{13}^4$. Следовательно,

$$p(M) = \frac{2C_{13}^4}{C_{18}^9}.$$

2) Понятно, что каждую из групп, содержащих две команды-фаворита, можно образовать $C_5^2 \cdot C_{13}^7$ способами. Отсюда $p(K) = \dfrac{2 \cdot C_5^2 \cdot C_{13}^7}{C_{18}^9}$. ●

Упражнения

30.1.° Вероятность купить бракованный электроприбор равна 0,007. Верно ли, что в любой партии из 1000 электроприборов есть 7 бракованных?

30.2.° Вероятность попасть в мишень составляет 75 %. Может ли быть так, что в серии из 100 выстрелов было 98 попаданий в мишень?

30.3.° В ящике стола лежат 8 синих и 12 красных карандашей. Какова вероятность взять наугад из ящика: 1) ручку; 2) карандаш?

30.4.° Из цифр 2, 4, 6, 8 образуют трехзначное число. Какова вероятность того, что это число будет делиться нацело: 1) на 5; 2) на 2?

30.5.° Какова вероятность того, что, переставив буквы в слове «математика», получим слово «литература»?

30.6.• Эксперимент состоит в бросании двух монет. Проведите этот эксперимент 50 раз. Найдите частоту случайных событий A, B, C:

1) A — выпали два герба;
2) B — выпали один герб и одна цифра;
3) C — выпали две цифры.

Можно ли на основании сделанных наблюдений *предположить*, что событие B более вероятно, чем событие C? Можно ли на основании этих наблюдений *гарантировать*, что событие B более вероятно, чем событие C?

Рис. 30.1

30.7.• Проведите серию, состоящую из 200 экспериментов, в которых подбрасывают крышку от бутылки с напитком (рис. 30.1). Найдите частоту события «крышка упала эмблемой напитка вниз». Оцените вероятность события «крышка упала эмблемой напитка вверх».

30.8. В 2010 году 9788 учащихся г. Киева принимали участие во внешнем независимом оценивании по математике, данные о котором приведены в таблице (см. с. 304).

Оцените вероятность события:

1) выбранный наугад учащийся Голосеевского района получил результат от 136 до 150 баллов;
2) выбранный наугад учащийся Печерского района получил результат более 183 баллов;
3) учащийся, выбранный наугад среди тех, которые получили результат от 195,5 до 200 баллов, учится в Соломенском районе;
4) выбранный наугад участник тестирования учится в Шевченковском районе;
5) выбранный наугад участник тестирования получил результат более 150 баллов.

30.9. В таблице (см. с. 305) приведены данные о количестве дней 2009 года, в которые в г. Харькове на 12:00 были зафиксированы данная температура и данный уровень влажности воздуха.

Подсчитайте частоту наблюдения в 2009 году:

1) температуры воздуха в диапазоне от 11 °С до 20 °С среди тех дней, когда зафиксированная влажность была не более 40 %;
2) влажности воздуха в диапазоне от 71 % до 80 % среди тех дней, когда зафиксированная температура была меньше 0 °С;
3) температуры воздуха в диапазоне от 11 °С до 30 °С и одновременно влажности воздуха в диапазоне от 41 % до 70 %.

30.10. Во время эпидемии гриппа было обследовано 80 000 жителей. Оказалось, что среди них частота больных гриппом составила 12,3 %. Кроме того, было выяснено, что среди заболевших 2245 человек делали прививки против гриппа. Оцените вероятность события «наугад выбранный человек среди тех, кто болен гриппом, делал прививки против гриппа».

Данные об участниках внешнего независимого оценивания по математике в г. Киеве за 2010 год

Диапазон баллов, полученных на тестировании	Район г. Киева										Всего учащихся:
	Голосеевский	Дарницкий	Деснянский	Днепровский	Оболонский	Печерский	Подольский	Святошинский	Соломенский	Шевченковский	
от 100 до 135,5 баллов	95	98	158	165	81	29	61	120	75	74	956
от 136 до 150 баллов	126	156	230	291	151	89	95	181	137	124	1580
от 150,5 до 183 баллов	468	557	653	736	527	597	302	525	769	602	5736
от 183,5 до 195 баллов	102	122	70	151	91	160	58	64	241	106	1165
от 195,5 до 200 баллов	25	23	15	50	23	86	10	14	70	35	351
Всего учащихся:	816	956	1126	1393	873	961	526	904	1292	941	9788

Данные о температуре и влажности воздуха на 12.00 в г. Харькове за 2009 год

Диапазон температуры воздуха	Диапазон влажности воздуха						Всего дней:
	от 0 % до 40 %	от 41 % до 60 %	от 61 % до 70 %	от 71 % до 80 %	от 81 % до 90 %	от 91 % до 100 %	
меньше −11 °C	0	1	1	3	2	0	7
от −10° до −1 °C	0	0	11	15	13	5	44
от 0° до 10 °C	10	19	12	13	19	47	120
от 11° до 20 °C	23	27	15	6	10	2	83
от 21° до 30 °C	57	32	6	2	1	0	98
больше 31 °C	9	4	0	0	0	0	13
Всего дней:	99	83	45	39	45	54	365

30.11.$^{\bullet}$ Учитель математики наблюдал за учеником Петром Ленивцевым в течение 175 учебных дней. Оказалось, что частота опозданий Петра в школу составляет 20 %. Кроме того, учитель заметил, что частота получения плохой оценки Петром в дни опозданий составляет 40 %. Найдите количество плохих оценок, которые получил Петр в дни, когда он опоздал в школу.

30.12.$^{\bullet}$ Какова вероятность того, что, вызывая учащегося к доске в вашем классе, учитель вызовет мальчика?

30.13.$^{\bullet}$ Из множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ наугад выбирают одно число. Какова вероятность того, что это число:

1) равно 2;
2) равно 5;
3) является нечетным;
4) кратно 4;
5) не делится нацело на 3;
6) кратно 11?

30.14.$^{\bullet}$ В коробке было 17 карточек, пронумерованных числами от 1 до 17. Из коробки наугад взяли одну карточку. Какова вероятность того, что на ней записано число:

1) 12;
2) четное;
3) кратное 3;
4) не кратное 5;
5) двузначное;
6) простое?

30.15.$^{\bullet}$ В коробке лежат a синих, b желтых и c красных шариков. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик окажется: 1) желтым; 2) синим; 3) не красным?

30.16.$^{\bullet}$ В мешке Деда Мороза лежат n плюшевых мишек, m конфет и k мандаринов. Какова вероятность того, что выбранный наугад подарок окажется: 1) мишкой; 2) съедобным; 3) не конфетой?

30.17.$^{\bullet}$ Из множества $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ наугад сначала выбирают четную цифру, а затем нечетную. Какова вероятность того, что эти цифры образуют число 27?

30.18.$^{\bullet}$ Из букв А, Б, В, Г, Д, Е последовательно наугад выбирают три разные буквы. Какова вероятность того, что эти буквы, записанные в порядке выбора, образуют слово «ДВА»?

30.19.$^{\bullet}$ Из слова «ГОРА» последовательно наугад выбирают 3 разные буквы. Какова вероятность того, что, последовательно записав выбранные три буквы, составят слово «РОГ»?

30.20.$^{\bullet}$ У ученика есть учебники по геометрии за 7, 8, 9, 10 и 11 классы. Какова вероятность того, что они расставлены на полке в порядке возрастания номера класса, если при последней уборке ученик расставил книги наугад?

30.21.$^{\bullet\bullet}$ На полке лежат 12 тетрадей, из которых 5 в клеточку. Какова вероятность того, что выбранные наугад 2 тетради будут в клеточку?

30.22.$^{\bullet\bullet}$ В коллекции Андрея 40 монет разных стран, среди которых 6 украинских. Андрей взял наугад 3 монеты. Какова вероятность того, что все эти монеты будут украинскими?

30.23.$^{\bullet\bullet}$ На двух параллельных прямых отметили точки — 8 на одной прямой и 12 на другой. Из этих 20 точек наугад выбирают три. Какова вероятность того, что три выбранные точки являются вершинами треугольника?

30.24.$^{\bullet\bullet}$ На торговом лотке лежат яблоки — 20 желтых и 9 красных. Покупатель приобрел 3 яблока, которые продавец выбрал наугад. Какова вероятность того, что все купленные яблоки одного цвета?

30.25.$^{\bullet\bullet}$ В ящике стола лежат карандаши и ручки. Известно, что карандашей на 12 штук меньше, чем ручек. Сколько карандашей лежит в ящике, если вероятность того, что выбранный наугад предмет:

1) является ручкой, равна $\frac{5}{8}$;

2) является карандашом, равна $\frac{1}{6}$?

30.26.$^{\bullet\bullet}$ Подарочный комплект содержит 12 зеленых и несколько красных воздушных шариков. Сколько красных шариков в комплекте, если вероятность того, что выбранный наугад шарик:

1) окажется зеленым, равна $\frac{3}{7}$;

2) окажется красным, равна $\frac{2}{5}$?

30.27.•• Тридцать карточек пронумерованы натуральными числами от 1 до 30. Наугад выбирают две из них. Какова вероятность того, что:

1) произведение номеров выбранных карточек будет простым числом;
2) произведение номеров выбранных карточек будет нечетным числом;
3) сумма номеров выбранных карточек будет нечетным числом;
4) номера выбранных карточек будут последовательными натуральными числами?

30.28.•• Семнадцать карточек пронумерованы натуральными числами от 7 до 21. Наугад выбирают две из них. Какова вероятность того, что сумма номеров выбранных карточек будет нечетным числом?

30.29.•• Для школьной лотереи подготовлено 100 билетов, из которых 9 выигрышные. Ученик выбрал наугад 7 билетов. Какова вероятность того, что среди выбранных будут 2 выигрышных билета и 5 невыигрышных билетов?

30.30.•• В партии из 200 кирпичей есть 5 бракованных. Какова вероятность того, что из 8 выбранных наугад кирпичей этой партии 2 будут бракованными, а 6 — качественными?

30.31.•• На двух параллельных прямых отметили точки — 16 на одной прямой и 10 на другой. Из этих 26 точек наугад выбирают четыре. Какова вероятность того, что эти четыре выбранные точки являются вершинами четырехугольника?

30.32.•• Найдите вероятность появления ровно 6 гербов при подбрасывании 9 монет.

30.33.•• Найдите вероятность того, что в серии из 10 бросков монеты герб первый раз появится на четвертом броске.

30.34.•• Что более вероятно при четырех бросках игрального кубика: появление по крайней мере одной шестерки или отсутствие шестерок вообще?

30.35.•• Опыт состоит в одновременном подбрасывании четырех игральных кубиков. Найдите вероятность того, что выпадут:
1) две пятерки и две тройки;
2) четыре разные цифры;
3) ровно три единицы;
4) только цифры, которые больше четверки.

30.36.•• Игральный кубик бросают три раза подряд. Найдите вероятность того, что:
1) выпадут единица, двойка и пятерка в произвольном порядке;
2) не выпадет ни одной шестерки;
3) выпадут только тройки или двойки;
4) первая шестерка выпадет при втором бросании кубика.

30.37.•• На каждой из 10 тарелок фруктов лежат по одному яблоку, персику, апельсину, груше и сливе. С каждой тарелки наугад взяли по одному плоду. Какова вероятность того, что среди взятых плодов не будет ни яблока, ни груши?

30.38.•• Каждый из 10 тестовых вопросов имеет 4 варианта ответов. Ученик отвечает на тестовые вопросы наугад. Какова вероятность того, что он даст ровно 7 правильных ответов?

30.39.•• Найдите вероятность того, что ни один из 5 наугад выбранных человек не родился в воскресенье.

30.40.•• В ящике лежат 20 красных, 10 желтых и 5 зеленых яблок. Наугад берут 7 яблок. Какова вероятность того, что среди взятых яблок 2 красных, 4 желтых и 1 зеленое?

30.41.•• Для игры было подготовлено 24 карточки — 12 штук из синей бумаги, 8 из желтой и 4 из красной. Наугад выбирают 9 карточек. Какова вероятность того, что среди выбранных карточек 4 синие, 3 желтые и 2 красные?

30.42.•• На складе магазина хранятся 100 пакетов муки с надписью 1 кг, среди которых 15 пакетов весят больше 1,02 кг, 12 пакетов — меньше 0,98 кг, а масса остальных пакетов составляет от 0,98 кг до 1,02 кг. Из этой партии наугад выбирают 5 пакетов. Какова вероятность того, что среди выбранных будет три пакета массой больше 1,02 кг и два пакета массой от 0,98 кг до 1,02 кг?

30.43.•• На двух параллельных прямых отметили точки — n на одной прямой и m на другой, $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$. Найдите вероятность того, что четыре выбранные наугад точки являются вершинами четырехугольника.

30.44.•• Прямая и окружность не имеют общих точек. На окружности отметили n красных точек, а на прямой — m синих точек, $n > 1$, $m > 1$. Известно, что ни одна прямая, проходящая через две красные точки, не содержит синих точек. Найдите вероятность того, что три выбранные наугад точки являются вершинами треугольника.

30.45.•• На трех параллельных прямых l_1, l_2, l_3 отметили точки — n точек на прямой l_1, m точек на l_2 и k точек на l_3. Среди данных точек наугад выбирают три точки. Найдите вероятность того, что каждой из прямых l_1, l_2, l_3 принадлежит по одной из выбранных точек.

30.46.•• Для подготовки к зачетной работе предложены 45 задач. Ученик может решить только 35 задач. Работа состоит из 5 задач, выбранных случайным образом, и будет зачтена, если правильно решить по крайней мере 4 задачи. Какова вероятность того, что ученик сдаст зачетную работу?

30.47.•• В конверте у девочки лежат 50 фотографий, среди которых четыре одинаковые. Девочка собирается подарить одну из этих четырех фотографий подруге. Для этого она наугад достает из конверта 8 фотографий. Какова вероятность того, что среди них будет по крайней мере одна искомая фотография?

30.48.•• Опыт состоит в подбрасывании монеты. Для статистической оценки вероятности события A, состоящем в том, что выпал герб, опыт планируется провести 10 раз и вычислить частоту события A. Какова вероятность того, что вычисленная при этом частота события A окажется меньшей, чем 0,3?

30.49.•• Опыт состоит в подбрасывании 7 монет. Какова вероятность того, что выпадет не более 2 гербов?

31. Статистический анализ данных

В 9 классе вы ознакомились с элементами математической статистики — науки о получении, обработке и анализе данных, характеризующих массовые явления.

В статистике совокупность собранных данных, на основании которых проводят исследование, называют **выборкой**. Фактически сбор данных — это некоторое испытание, которое проводят несколько раз.

Например, для проведения эффективной рекламной кампании некоторая фирма решила составить психологический портрет своего типового клиента. Для этого запланировано опросить некоторое количество наугад выбранных клиентов фирмы (случайный выбор клиента — это некоторое испытание).

В таких случаях говорят, что множество всех клиентов фирмы образует **генеральную совокупность**, а множество тех клиентов, которые будут опрошены, образует выборку.

Вообще, множество всех возможных результатов некоторого испытания в статистике принято называть **генеральной совокупностью.** Соотношение между генеральной совокупностью и выборкой проиллюстрировано на рисунке 31.1.

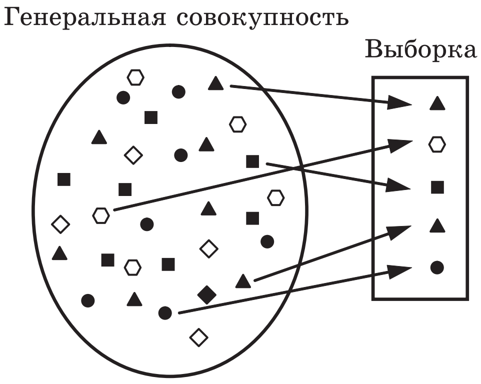


Рис. 31.1

Одна из главных задач статистики состоит в том, чтобы на основании анализа данных выборки сделать вывод обо всей генеральной совокупности. Анализируя собранные данные, выделяют один или несколько общих показателей, которые характеризуют наиболее важные особенности генеральной совокупности. Например, если выборка состоит из числовых данных, то разность между наибольшим и наименьшим значениями данных выборки называют **размахом** выборки. Важными показателями выборки также являются **среднее значение**, **медиана** и **мода**. Напомним и уточним соответствующие определения.

Пусть выборка состоит из числовых данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. **Средним значением** этой выборки (**выборочным средним**) называют число $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Например, в таблице представлены результаты выступлений украинских школьников на Международных математических олимпиадах в течение 2001–2010 гг. (команда участников на Международных математических олимпиадах состоит не более чем из 6 человек).

Год	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Количество медалей	6	4	6	6	6	5	6	6	6	6

Для данной выборки среднее значение равно

$$\bar{x} = \frac{6+4+6+6+6+5+6+6+6+6}{10} = \frac{57}{10} = 5{,}7.$$

Поскольку за год можно завоевать не более 6 медалей, то выборочное среднее 5,7 свидетельствует о том, что команда Украины достойно выступает на этом престижном форуме.

Обратите внимание на то, что среднее значение выборки определяют только в случае, когда собранными данными являются числа.

Рассмотрим выборку, состоящую из таких данных, которые можно сравнивать друг с другом. Если количество данных нечетно и они упорядочены $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1}$, то **медианой** данной выборки называют x_n, то есть то из данных, которое в списке $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ расположено посередине.

Например, во многих университетах Украины внедрена система оценивания знаний студентов не по числовой шкале, а по шкале букв: A, B, C, D, E, F (A — наивысшая, F — самая низкая оценка). Пусть при опросе 9 студентов о результатах сдачи ими последнего экзамена была получена такая выборка (последовательность оценок):

$$F, F, D, D, C, C, C, B, A.$$

Видим, что посередине расположена буква C. Значит, медианой данной выборки является оценка «C».

Если выборка состоит из четного количества данных: $x_1 \leqslant \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n}$, то **медианой** данной выборки называют любое из данных x_n или x_{n+1}, то есть те два данных, которые расположены посередине в списке x_1, x_2, ..., x_{2n}.

Например, если к 9 приведенным выше оценкам студентов добавить еще одну оценку E, то получим такую последовательность:

$$F, F, E, D, D, C, C, C, B, A.$$

Видим, что посередине находятся буквы D и C. Значит, медианой данной выборки являются оценки D и C.

Обратите внимание на то, что в приведенных примерах нахождения медианы выборки исследуемые данные не являются числами.

Если исследуемыми данными являются числа, то в случае четного количества данных $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n}$ **медианой** выборки допускается считать и величину $\frac{x_n + x_{n+1}}{2}$. Например, если рассмотреть выборку из четырех числовых данных:

$$1, 2, 3, 7,$$

то число $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$ можно считать медианой этой выборки.

Пусть выборка состоит из данных x_1, x_2, ..., x_n. **Модой** данной выборки называют то из данных, которое встречается в списке x_1, x_2, ..., x_n чаще всего. Если таких наиболее частых данных несколько, то каждое из них является модой данной выборки. Например, если выборка состоит из пяти различных данных: 1, 2, 3, 4, 5, то каждое из этих пяти чисел является модой данной выборки.

Обратим внимание на то, что моду выборки можно определить для данных любой природы, в отличие от данных, необходимых для нахождения среднего значения (числовые данные) или медианы (данные, которые можно сравнивать друг с другом).

Рассмотрим пример. Пусть в выборах в школьный парламент участвуют три партии: «За математику», «За современную музыку» и «За красавиц девушек». Опросив 30 наугад выбранных учащихся, выяснили, что партию «За математику» поддерживает 7 человек, «За современную музыку» — 14 человек, «За красавиц девушек» — 9 человек. Это означает, что среди 30 полученных данных, образующих выборку, наибольшую поддержку имеет партия «За современную музыку». Поэтому эта партия является модой данной выборки.

Заметим, что в приведенном примере невозможно найти ни среднее значение, ни медиану выборки.

Несмотря на то, что описанные выше обобщающие показатели (среднее значение, медиана, мода) по-разному характеризуют выборку, порой их недостаточно для того, чтобы дать корректную оценку всей генеральной совокупности.

Пусть требуется определить средний уровень заработной платы в Украине. По информации одного из статистических исследований известны такие данные о заработной плате в трех регионах Украины.

Регион Украины	**Уровень заработной платы населения в январе 2011 года**
Центральный регион Украины	2319 грн
Юго-Восточный регион Украины	2410 грн
Западный регион Украины	1934 грн

Если для трех приведенных данных $x_1 = 2319$, $x_2 = 2410$, $x_3 = 1934$ вычислить среднее значение, медиану и моду выборки x_1, x_2, x_3, то получим такие значения:

$$\text{Среднее значение} = \frac{2319+2410+1934}{3} = 2221,$$

$$\text{Медиана} = 2319,$$

$$\text{Мода} = 2319, \text{ или } 2410, \text{ или } 1934.$$

На самом деле ни одно из этих значений не отображает корректно или, как еще говорят, адекватно средний уровень заработной платы в Украине. Причина состоит в том, что в различных регионах живет и работает разное количество людей. Так, в Центральном регионе Украины работает около 7 млн человек, в Юго-Восточном — 10 млн, а в Западном — 5 млн. Это означает, что жители Центрального региона заработали $7x_1$ млн грн, Юго-Восточного — $10x_2$ млн грн, а Западного — $5x_3$ млн грн. Следовательно, в январе 2011 года граждане Украины всего заработали $7x_1 + 10x_2 + 5x_3$ млн грн. Поскольку общее количество работающего населения Украины составляет около $7 + 10 + 5 = 22$ млн человек, то среднюю заработную плату в Украине можно оценить так:

$$\frac{7x_1 + 10x_2 + 5x_3}{22} \approx 2273 \text{ грн.}$$

Величину $\frac{7x_1 + 10x_2 + 5x_3}{22}$ называют **средним взвешенным значением** чисел x_1, x_2, x_3 с **весовыми коэффициентами** 7, 10 и 5 соответственно.

Вообще, **средним взвешенным значением** чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с положительными весовыми коэффициентами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ называют число

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Если среди данных выборки встречаются одинаковые, то для вычисления среднего значения выборки удобно воспользоваться средним взвешенным значением.

Например, пусть выборка состоит из 100 числовых данных, среди которых 40 раз встречается число $x_1 = 2$, 50 раз — число $x_2 = 3$, 10 раз — число $x_3 = 4$. Тогда среднее значение данной выборки из 100 чисел будет равным среднему взвешенному значению чисел $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ и $x_3 = 4$ с весовыми коэффициентами $m_1 = 40$, $m_2 = 50$, $m_3 = 10$. Действительно,

$$\bar{x} = \frac{\underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{40 \text{ слагаемых}} + \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{50 \text{ слагаемых}} + \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{10 \text{ слагаемых}}}{100} =$$

$$= \frac{40 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 10 \cdot 4}{40 + 50 + 10} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

ПРИМЕР 1 В некотором городе для определения величины расходов одного человека на лекарственные средства был проведен опрос 1000 человек, среди которых 400 были младше 20 лет, а 600 — старше 20 лет. Выяснилось, что люди, которые младше 20 лет, в среднем тратят за месяц на лекарственные средства 22 грн, а люди, которые старше 20 лет, — 47 грн. Что в данном статистическом исследовании является генеральной совокупностью? Что является выборкой? Оцените уровень расходов на лекарственные средства в месяц для одного человека.

Решение. В данном статистическом исследовании множество всех жителей города является генеральной совокупностью, а 1000 опрошенных человек образуют выборку.

Найдем среднее значение этой выборки:

$$\overline{x} = \frac{\underbrace{22 + 22 + \ldots + 22}_{400\text{ слагаемых}} + \underbrace{47 + 47 + 47 + \ldots + 47}_{600\text{ слагаемых}}}{1000} = 37.$$

То же самое среднее значение выборки можно вычислить как среднее взвешенное значение чисел 22 и 47 с весовыми коэффициентами 400 и 600 соответственно. Имеем:

$$\overline{x} = \frac{400 \cdot 22 + 600 \cdot 47}{1000} = 37.$$

Число 37 показывает, что среди опрошенных людей средний уровень расходов составляет 37 грн в месяц. ●

Среднее взвешенное значение в статистике часто используют тогда, когда собранные данные не являются равноценными, то есть некоторые данные имеют бóльшую важность (значимость), а некоторые — меньшую.

Например, если в условии примера 1 дополнительно известно, что часть людей в возрасте до 20 лет составляет 24 % всех жителей этого города, то ответ на поставленный в задаче вопрос следует изменить.

Полученные 1000 данных не являются равноценными. Дело в том, что соотношение людей в возрасте до 20 лет и после 20 лет в нашей выборке не соответствует их соотношению в этом городе. Поэтому для расчетов надо подобрать весовые коэффициенты таким образом, чтобы они отображали реальное распределение населения города по этим возрастным группам.

Поскольку в этом городе части людей в возрасте до 20 лет и после 20 лет составляют 24 % и 76 % соответственно, то надо вычислить среднее взвешенное значение чисел 22 грн и 47 грн с весовыми коэффициентами 24 и 76. Имеем:

$$\overline{y} = \frac{24 \cdot 22 + 76 \cdot 47}{100} = 41.$$

Величину 41 грн можно считать оценкой среднего уровня расходов на лекарственные средства для одного человека в месяц в этом городе.

Упражнения

31.1.° Запишите фамилии учащихся, которые были опрошены учителем на вашем последнем уроке во время проверки домашнего задания. Что является генеральной совокупностью и выборкой в статистическом исследовании учителя по проверке домашнего задания?

31.2.° Результатом работы компьютерной программы, которая моделирует статистическое исследование, является некоторое целое число в диапазоне от -128 до 128. В результате пяти последовательных запусков программа выдала такие результаты: 62, -15, 31, 103, -22. Что в данном статистическом исследовании является генеральной совокупностью? Что является выборкой? Найдите размах выборки.

31.3.° Учащихся опросили об их любимом предмете в школе. Какие статистические показатели (среднее значение, среднее взвешенное значение, медиана, мода) можно определить для собранных данных?

31.4.° По заказу предприятий легкой промышленности проведено исследование, результатами которого являются размеры одежды в международном формате (символы: XS, S, M, L, XL, XXL, XXXL). Какие статистические показатели (среднее значение, среднее взвешенное значение, медиана, мода) можно определить для собранных данных?

31.5.° Пользуясь таблицей средних температур воздуха в январе в некоторых городах мира, вычислите размах, среднее значение, медиану и моду данной выборки.

Город	Температура, °C	Город	Температура, °C
Амстердам	3	Москва	–10
Афины	8	Найроби	27
Буэнос-Айрес	23	Нью-Йорк	0
Гонконг	24	Рио-де-Жанейро	30
Иерусалим	8	Рим	8
Киев	–6	Сингапур	27
Монреаль	–11	Токио	3

31.6.° Пользуясь таблицей урожайности семян подсолнечника в Украине, вычислите размах, среднее значение, медиану и моду данной выборки.

Год	Урожайность, ц/га	Год	Урожайность, ц/га
1991	15	2003	11
1993	13	2004	9
1995	14	2005	13
1997	12	2006	14
1999	10	2007	12
2001	9	2008	15
2002	12	2009	15

31.7.° В чемпионате Украины по футболу 2009–2010 гг. команда «Шахтер» сыграла 30 матчей, в которых один раз забила 5 голов, 3 раза — 4 гола, 6 раз — 3 гола, 9 раз — 2 гола, 9 раз — один гол и в 2 матчах не забила ни одного гола. Вычислите, сколько в среднем команда «Шахтер» забивала мячей в одном матче.

31.8.° Студент за время обучения в институте получил 45 оценок, среди которых 7 пятерок, 22 четверки и 16 троек. Вычислите средний балл студента.

31.9.• На ученических олимпиадах, определяя рейтинг команд, индивидуальные результаты участников оценивают таким образом: диплом первой степени приносит команде 5 баллов, диплом второй степени — 3 балла, диплом третьей степени — 1 балл, диплом участника олимпиады — 0 баллов. В таблице представлены данные о результатах некоторой олимпиады. Найдите моду, медиану и среднее значение командных баллов, набранных участниками олимпиады.

Количество баллов, которые участник принес команде	Количество участников
5	14
3	29
1	46
0	88

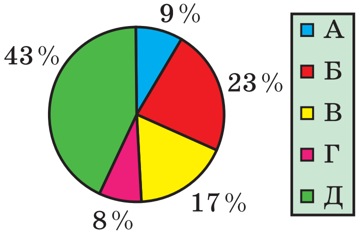
31.10.• На внешнем независимом оценивании школьников по математике 2010 года было предложено тестовое задание:

«Решите неравенство $10 - 3x > 4$.

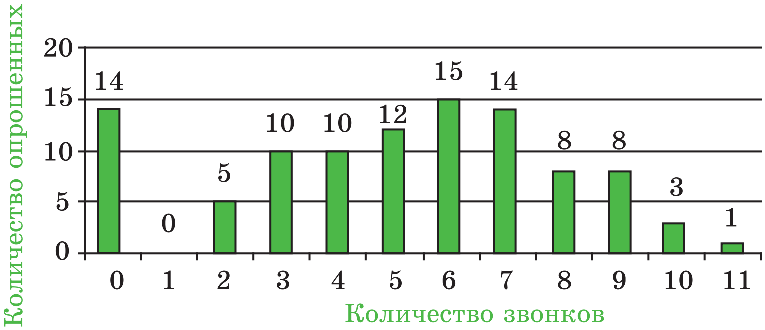
А	Б	В	Г	Д
$(-2; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$(-3; +\infty)$	$(-\infty; -2)$	$(-\infty; 2)$

»

На диаграмме приведены данные о количестве учащихся, которые решали это задание. Найдите моду ответов учащихся. За правильный ответ насчитывался 1 балл, а за неправильный ответ — 0 баллов. Вычислите среднее значение и медиану количества баллов, которое набрали участники тестирования за это задание.



31.11.° Телефонная компания хочет получить информацию о количестве телефонных звонков, которые делает человек в течение суток. Данные о 100 людях представлены на диаграмме. Вычислите размах, среднее значение, медиану и моду этой выборки.



31.12.° На диаграмме приведены данные о количестве книг, которые прочли в течение месяца 50 опрошенных школьников. Вычислите размах, среднее значение, медиану и моду данной выборки.

31.13.[•] В некотором лицее одиннадцатиклассники, которые учатся в классах физического, экономического и филологического профилей, написали контрольную работу по математике по одинаковым текстам. Оказалось, что средний балл учащихся физического профиля равен 8,9, экономического — 7,7, а филологического — 7,1.

1) Оцените средний балл учащихся этого лицея за контрольную работу по математике.
2) Как надо изменить ответ, если дополнительно известно, что в классе физического профиля 23 учащихся, экономического — 25 учащихся, а в двух классах филологического профиля — 46 учащихся?

31.14.[•] В школе опросили некоторых мальчиков и девочек о времени, которое они тратят на помощь родителям по домашнему хозяйству. Оказалось, что мальчики в среднем тратят 1,1 ч в сутки, а девочки — 1,7 ч в сутки.

1) Пользуясь этими данными, оцените среднее время, которое тратит учащийся этой школы в сутки на помощь родителям.
2) Как надо изменить ответ, если дополнительно известно, что в школе учатся 400 девочек и 560 мальчиков?

31.15.[•] В таблице приведены данные о частоте выпадения герба при подбрасывании монеты в опытах, проведенных некоторыми учеными.

Исследователь	Частота выпадения герба
Жорж Бюффон	0,5069
Огастес де Морган	0,5005
Уильям Джевонс	0,5068
Всеволод Романовский	0,4923
Карл Пирсон	0,5005
Уильям Феллер	0,4979

1) На основании этих данных оцените вероятность выпадения герба при подбрасывании монеты.

2) Каким будет ответ, если дополнительно учесть данные о количестве подбрасываний монеты в этих опытах?

Исследователь	Количество подбрасываний монеты
Жорж Бюффон	4040
Огастес де Морган	4092
Уильям Джевонс	20 480
Всеволод Романовский	80 640
Карл Пирсон	24 000
Уильям Феллер	10 000

Ответ дайте с точностью до сотых процента.

31.16.• В таблице приведены размеры процентных ставок некоторых банков Украины по срочным депозитам населения в национальной валюте и суммы вкладов в этих банках.

Номер банка в выборке	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Размер процентной ставки, %	11	17,2	11,3	14,5	14	14	11,9	15,8	12	15,5
Сумма вкладов, млн грн	2242	783	42	4793	2222	239	296	1204	2768	5564

1) Оцените среднее значение выборки размера процентной ставки банков.
2) Какую среднюю прибыль (в процентах) получают вкладчики этих банков от вкладов в национальной валюте?

Ответ дайте с точностью до сотых процента.

31.17.• В третьем столбце таблицы приведены данные Международного валютного фонда о внутреннем валовом продукте (ВВП) некоторых стран в 2010 году на душу населения в денежном эквиваленте.

1) Пользуясь данными только третьего столбца, оцените средний уровень ВВП в 2010 году на душу населения в мире.
2) Как надо изменить ответ, если учесть информацию о количестве населения соответствующих стран (четвертый столбец таблицы)? Ответ дайте с точностью до сотен долларов США.

№	Страна	ВВП на душу населения, тыс. долларов США	Количество населения, млн
1	Гамбия	2,0	1,8
2	Греция	28,8	11,3
3	Индонезия	4,4	237,6
4	Китай	7,5	1341,0
5	Коста-Рика	10,7	4,6
6	Латвия	14,3	2,2
7	Люксембург	80,3	0,5
8	Россия	15,8	141,9
9	США	47,1	311,0
10	Украина	6,7	45,8

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 4

1. В коробке лежат 15 шариков: 10 синих и 5 зеленых. Какова вероятность того, что наугад взятый из коробки шарик окажется желтым?

А) 1; Б) 0,5; В) 0; Г) −1.

2. Пусть вероятность события A равна $p\ (A)$. В каком случае событие A называют достоверным?

А) $p\ (A) = 0$; Б) $p\ (A) > 0$; В) $p\ (A) > 0{,}99$; Г) $p\ (A) = 1$.

3. Вероятность купить бракованную пару сапог некоторой известной фирмы составляет 0,023. Сколько бракованных пар обуви гарантированно содержит партия из 1000 пар сапог этой фирмы?

А) меньше 23; В) ровно 23;
Б) больше 23; Г) ответ дать невозможно.

4. При проведении экзит-пола было опрошено 15 тысяч избирателей, среди которых 600 проголосовали «Против всех». Оцените вероятность события, при котором избиратель голосует «Против всех».

А) 4 %; Б) 0,04 %; В) 25 %; Г) 0,25 %.

5. Набирая номер телефона, абонент забыл вторую цифру номера. Какова вероятность того, что он с первой попытки наберет правильный номер?

А) 0,01; Б) 0,1; В) 0,5; Г) 1.

6. В классе учатся 18 девочек и 12 мальчиков. Наугад выбирают одного учащегося для участия в школьном собрании. Какова вероятность того, что будет выбран мальчик?

А) $\frac{2}{3}$; Б) $\frac{1}{2}$; В) $\frac{3}{5}$; Г) $\frac{2}{5}$.

7. Футболист с вероятностью 0,95 попадает в ворота при выполнении одиннадцатиметрового штрафного удара. Какова вероятность того, что при выполнении такого удара футболист не попадет в ворота?

А) 0; Б) 0,05; В) $\frac{1}{0{,}95}$; Г) $(0{,}95)^2$.

8. Карточки, на которых написаны числа 1, 3, 5, 7, наугад последовательно выкладывают в ряд. Какова вероятность того, что последней положат карточку с числом 5?

А) $\frac{1}{24}$;   Б) $\frac{1}{12}$;   В) $\frac{1}{6}$;   Г) $\frac{1}{4}$.

9. Какова вероятность того, что при подбрасывании двух игральных кубиков на одном из них выпадет единица, а на другом — тройка?

А) $\frac{2}{6}$;   Б) $\frac{1}{6}$;   В) $\frac{2}{36}$;   Г) $\frac{1}{36}$.

10. Чему равна медиана совокупности данных: 2, 2, 3, 4, 5, 6, 13?

А) 5;   Б) 4;   В) 3;   Г) 2.

11. При подбрасывании монеты 20 раз подряд выпал герб. Какова вероятность того, что при следующем подбрасывании снова выпадет герб?

А) 0,5;   Б) $\frac{1}{21}$;   В) $\frac{1}{2^{21}}$;   Г) 0.

12. По данным Всеукраинской переписи населения 2001 года возрастной состав населения характеризовался такими данными:

Возраст	Количество постоянного населения, тыс. человек
0–9	4533,3
10–19	7308,1
20–29	6891,6
30–39	6621,2
40–49	7298,7
50–59	5245,3
60–69	5522,2
70–79	3740,0
80 и старше	1060,8

Какая возрастная группа определяла моду возрастного состава населения Украины в 2001 году?

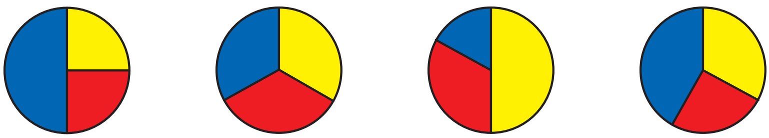
А) 0–9;   Б) 10–19;   В) 40–49;   Г) 80 и старше.

13. Одновременно подбросили три монеты. Какова вероятность того, что ровно на двух из этих монет выпадет герб?

А) $\frac{2}{3}$; Б) $\frac{1}{8}$; В) $\frac{3}{8}$; Г) $\frac{1}{3}$.

14. В совокупных расходах некоторой украинской семьи 33 % занимают расходы на продукты питания, 25 % — коммунальные услуги, 42 % — остальные расходы. Какая из данных круговых диаграмм соответствует структуре расходов этой семьи?

А) Б) В) Г)



15. В ящике лежат яблоки трех сортов: 20 желтых, 10 зеленых и 30 красных. Какое наименьшее количество яблок надо достать из ящика наугад, чтобы гарантированно взять по крайней мере одно желтое и два красных яблока?

А) 3; Б) 13; В) 32; Г) 41.

16. Игральный кубик бросают два раза. Какова вероятность того, что выпадут числа, сумма которых равна 8?

А) $\frac{1}{36}$; Б) $\frac{3}{36}$; В) $\frac{5}{36}$; Г) $\frac{7}{36}$.

17. Монету подбрасывают до тех пор, пока не выпадет герб. Найдите такое натуральное значение k, что вероятность подбросить монету k раз равна $\frac{1}{8}$.

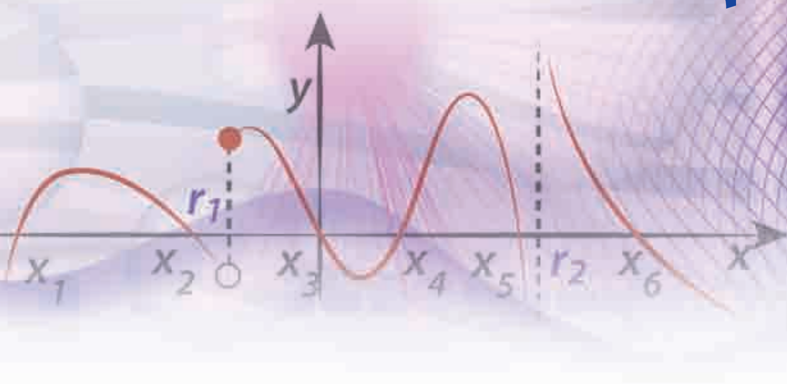
А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

18. В ящике лежат 7 красных, 2 синих и 3 зеленых шара. Наугад берут 6 шаров. Какова вероятность того, что среди выбранных будут 4 красных и 2 зеленых шара?

А) $\frac{5}{44}$; Б) $\frac{3}{55}$; В) $\frac{3}{77}$; Г) $\frac{1}{132}$.

§5

Уравнения и неравенства. Обобщение и систематизация



32. О появлении посторонних корней и потере решений уравнений

Вы знаете, что далеко не каждое преобразование уравнения сохраняет неизменным множество его корней. В одном случае это множество может сузиться, то есть корни будут потеряны, в другом — расшириться, то есть появятся посторонние корни.

Приведем несколько примеров.

- При переходе от уравнения $\log_2(x-1)^2 = 0$ к уравнению $2\log_2(x-1) = 0$ теряется корень $x = 0$.
- Возведение обеих частей уравнения $\sqrt{x} = -x$ в квадрат приводит к появлению постороннего корня $x = 1$.
- Заменяя уравнение $\log_x 4 = 2$ уравнением $x^2 = 4$, получаем посторонний корень $x = -2$.

Метод решения уравнения, при котором данное уравнение заменяют на уравнение-следствие, а затем полученные корни подвергают проверке, называют **методом следствий**. Его применяют тогда, когда выполнить проверку несложно. Однако так бывает не всегда. Например, число $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$ является корнем уравнения $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$, но чтобы в этом убедиться, надо провести довольно большую вычислительную работу.

Для подобных ситуаций возможен другой путь решения — **метод равносильных преобразований**. С этим методом вы ознакомились в 10 классе.

Подчеркнем, что, применяя как метод следствий, так и метод равносильных преобразований, важно знать причины потери корней и появления посторонних корней. Рассмотрим некоторые из этих причин.

Изменение области определения уравнения

Вне области определения уравнения корней нет (рис. 32.1). Поэтому преобразование уравнения, при котором расширяется область его определения, может привести к появлению посторонних корней.

Например, областью определения уравнения $\log_x 4 = 2$ является множество $(0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. Пользуясь определением логарифма, получаем уравнение $x^2 = 4$, областью определения которого является множество $\mathbb{R}$. Расширение области определения исходного уравнения привело к появлению постороннего корня $x = -2$.

Рис. 32.1

ПРИМЕР 1 Решите уравнение

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = \cos^2 x - \sin 2x.$$

Решение. Если дробь в левой части данного уравнения сократить на $(\sin x + \cos x)$, то получим уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = \cos^2 x - \sin 2x$. При таком преобразовании область определения исходного уравнения расширяется на множество чисел, которые являются корнями уравнения $\sin x + \cos x = 0$. Поэтому на самом деле данное в условии уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = \cos^2 x - \sin 2x, \\ \sin x + \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Найдем корни уравнения системы. Имеем:

$$\sin^2 x - \sin x \cos x + \sin 2x = 0;$$

$$\sin^2 x - \sin x \cos x + 2 \sin x \cos x = 0;$$

$$\sin x\,(\sin x + \cos x) = 0.$$

Поскольку $\sin x + \cos x \neq 0$, то получаем $\sin x = 0$. Отсюда $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Осталось заметить, что при $x = \pi n$ значение выражения $\sin x + \cos x$ отлично от нуля.

Ответ: πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Если расширение области определения уравнения может привести к появлению посторонних корней, то ее сужение — возможная причина потери корней.

Например, областью определения уравнения $\log_2(x-1)^2 = 0$ является множество $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, а областью определения уравнения $2\log_2(x-1) = 0$ является множество $(1; +\infty)$. Множество $(-\infty; 1)$ содержит корень $x = 0$ первого уравнения. Поэтому при переходе от уравнения $\log_2(x-1)^2 = 0$ к уравнению $2\log_2(x-1) = 0$ этот корень потерян.

Часто причиной изменения множества корней уравнения является применение равенств, правая и левая части которых имеют разные области определения.

Приведем примеры таких равенств:

- $x = \frac{xy}{y}$;
- $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$;
- $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$;
- $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$;
- $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$;
- $\log_a x^2 = 2\log_a x$.

В каждом из этих равенств область определения выражения, стоящего в правой части, является подмножеством области определения выражения, стоящего в левой части. Поэтому применение этих равенств слева направо может привести к потере корней, а справа налево — к появлению посторонних корней.

ПРИМЕР 2 Решите уравнение $\sqrt{(x-1)^2(x-3)} = x - 1$.

Решение. Областью определения данного уравнения является множество $\{1\} \cup [3; +\infty)$. Очевидно, число 1 является корнем данного уравнения.

Однако применение формулы $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ приводит к уравнению

$$|x-1|\sqrt{x-3} = x-1,$$

область определения которого — множество $[3; +\infty)$. Поэтому число 1 не является корнем полученного уравнения, то есть такой переход ведет к потере этого корня.

Решим данное уравнение методом равносильных переходов.

Данное в условии уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(x-1)^2(x-3)=(x-1)^2, \\ x \geqslant 1.\end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases}(x-1)^2(x-4)=0, \\ x \geqslant 1;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x=1, \\ x=4.\end{array}\right.$

Ответ: 1; 4.

Умножение обеих частей уравнения на выражение, содержащее переменную

Иногда бывает целесообразным умножить обе части уравнения на некоторое выражение. Рассмотрим последствия такого преобразования.

Перейдем от уравнения

$$f(x) = g(x)$$

к уравнению

$$f(x)\,\varphi(x) = g(x)\,\varphi(x).$$

При таком переходе множество корней уравнения может измениться под влиянием двух факторов: области определения функции φ и множества корней уравнения $\varphi(x) = 0$.

Например, если обе части уравнения $x^2 = 4$ умножить на выражение $\sqrt{x}+1$ и перейти к уравнению $x^2\left(\sqrt{x}+1\right)=$ $=4\left(\sqrt{x}+1\right)$, то тем самым теряем корень -2. Если же обе части этого уравнения умножить на $\sqrt{x}$, то теряем корень -2 и одновременно получаем посторонний корень 0.

Следовательно, если при решении уравнения возникла потребность умножить обе его части на выражение $\varphi(x)$, то надо учитывать как область определения этого выражения, так и множество корней уравнения $\varphi(x) = 0$.

ПРИМЕР 3 Решите уравнение

$$\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x.$$

Решение. Умножим обе части данного уравнения на выражение $\sqrt{1+x}-1$. Поскольку $(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}-1)=x$, то получим:

$$x\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x\left(\sqrt{1+x}-1\right). \qquad (1)$$

Это преобразование не изменяет области определения исходного уравнения. Появление же посторонних корней возможно за счет корней уравнения $\sqrt{1+x}-1=0$. Следовательно, полученное уравнение (1) — следствие уравнения, данного в условии.

Уравнение (1) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ \sqrt{1+x}+2x-5=\sqrt{1+x}-1. \end{array}\right.$$

Решим второе уравнение совокупности. Его следствием будет уравнение $2x-5=-1$. Отсюда $x=2$.

Осталось выполнить проверку. Легко убедиться, что число 2 является корнем данного в условии уравнения, а число 0 — нет.

Ответ: 2.

Переход от уравнения $f(x)=g(x)$ к уравнению $\varphi(f(x))=\varphi(g(x))$

Почему уравнения

$$x=2x-1 \quad \text{и} \quad 2^x=2^{2x-1} \qquad (2)$$

равносильны, а уравнения

$$x=2x-1 \quad \text{и} \quad \sin x=\sin(2x-1) \qquad (3)$$

не являются равносильными?

Дело в том, что свойства функции $y=2^t$ отличаются от свойств функции $y=\sin t$.

Если определенная на $\mathbb{R}$ функция $y=\varphi(t)$ обратима, то равенство $t_1=t_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$. Поэтому в этом случае уравнения $f(x)=g(x)$ и $\varphi(f(x))=\varphi(g(x))$ равносильны.

Если же определенная на $\mathbb{R}$ функция $y=\varphi(t)$ не является обратимой, то из равенства $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$ не обязательно следует, что $t_1 = t_2$. Поэтому уравнение $\varphi\ (f\ (x)) = \varphi\ (g\ (x))$ является следствием уравнения $f\ (x) = g\ (x)$.

Так, уравнения (2) равносильны, потому что функция $\varphi\ (t) = 2^t$ обратима. Поскольку функция $\varphi\ (t) = \sin t$ не является обратимой, то уравнения (3) не являются равносильными.

Вы знаете, что возведение обеих частей уравнения в четную степень приводит к уравнению-следствию, а возведение в нечетную степень — к равносильному уравнению.

Это связано с тем, что функция $y = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, не является обратимой, а функция $y = x^{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, — обратимая.

Функция $y = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, обратима на множестве $[0; +\infty)$. В 10 классе вы пользовались этим фактом в виде такой теоремы.

Теорема 32.1. ***Если для любого $x \in M$ выполняются неравенства $f\ (x) \geqslant 0$ и $g\ (x) \geqslant 0$, то уравнения $f\ (x) = g\ (x)$ и $(f\ (x))^{2k} = (g\ (x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, равносильны на множестве M.***

Эту теорему вы использовали при решении иррациональных уравнений.

Рассмотрим пример, в котором появление постороннего корня связано с необратимостью функции $y = \sin t$.

ПРИМЕР 4 Решите уравнение

$$\arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \arccos(5x - 2).$$

Решение. Поскольку определенная на $\mathbb{R}$ функция $y = \sin t$ не является обратимой, то уравнение $\sin\ (\arcsin\ (x\sqrt{3})) = \sin\ (\arccos\ (5x - 2))$ — следствие данного. Поэтому решение уравнения должно завершиться проверкой корней. Следовательно, можно не бояться далее переходить к новым уравнениям-следствиям.

Напомним, что имеют место равенства $\sin\ (\arcsin a) = a$ и $\sin\ (\arccos a) = \sqrt{1-a^2}$. Поэтому можно записать:

$$x\sqrt{3} = \sqrt{1-(5x-2)^2}.$$

Отсюда $3x^2 = 1 - (5x - 2)^2$.

Далее имеем: $28x^2 - 20x + 3 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}, \\ x = \frac{3}{14}. \end{array}\right.$

Проверим полученные корни.

При $x = \frac{1}{2}$ имеем: $\arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$;

$$\arccos(5x - 2) = \arccos\left(\frac{5}{2} - 2\right) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, число $\frac{1}{2}$ — корень исходного уравнения.

При $x = \frac{3}{14}$ имеем: $\arcsin\left(x\sqrt{3}\right) = \arcsin\frac{3\sqrt{3}}{14} < \frac{\pi}{2}$;

$$\arccos(5x - 2) = \arccos\left(\frac{15}{14} - 2\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right) > \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, число $\frac{3}{14}$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Упражнения

32.1.° Равносильны ли уравнения:

1) $x - 5 = 0$ и $x(x - 5) = 0$;

2) $\frac{6}{x} = 0$ и $x^2 = -4$;

3) $x + 1 = 1 + x$ и $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$;

4) $x^{100} = 1$ и $x^{1000} = 1$;

5) $\frac{x}{x} = 1$ и $x = x$;

6) $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$ и $x - 1 = 0$;

7) $\dfrac{x^2-9}{x+2}=0$ и $x^2 - 9 = 0$;

8) $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=2x+5$ и $x + 2 = 2x + 5$;

9) $\sqrt{(x-1)(x-3)}=0$ и $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-3}=0$;

10) $\sin x = 2$ и $2^x = -1$;

11) $\sin x = 0$ и $\cos x = 1$;

12) $\cos x = 0$ и $\sin^2 x = 1$;

13) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=-1$ и $\cos 2x = -1$;

14) $\log_3 x^2 = 2$ и $\log_3 x = 1$;

15) $\log_5 (x^2 - 1) = \log_5 (x - 1)$ и $\log_5 (x + 1) = 0$;

16) $\dfrac{\log_x (x+1)}{\log_x 2}=1$ и $\log_2 (x + 1) = 1$?

32.2.° Равносильны ли уравнения:

1) $x^2 = x$ и $x = 1$;

2) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{2}=0$ и $4x^2 - 1 = 0$;

3) $x^2 + 1 = 0$ и $\dfrac{3}{x-1}=0$;

4) $\dfrac{x+1}{x+1}=1$ и $\dfrac{x^2+1}{x^2+1}=1$;

5) $\dfrac{x+1}{x+1}=0$ и $\dfrac{x^2-1}{x^2-1}=0$;

6) $\cos x = -1{,}2$ и $e^x = 0$;

7) $\cos x = 0$ и $\sin x = 1$;

8) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=0$ и $\sin 2x = 0$;

9) $\sqrt{x^2 (x-1)}=0$ и $|x|\sqrt{x-1}=0$;

10) $\log_{x^2} x^2 = 1$ и $\log_x x = 1$?

32.3.° Будет ли в результате данного преобразования получено уравнение, равносильное данному:

1) в уравнении $3(2x-1)-5(4x+2)=1$ раскрыть скобки и привести подобные слагаемые;

2) в уравнении $x^2+\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-7}=49$ разность $\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-7}$ заменить на нуль;

3) в уравнении $\frac{x^2-1}{x-1}+3x-5=0$ сократить дробь;

4) обе части уравнения $x^3=x$ разделить на x;

5) обе части уравнения $(x+1)(x^2+4)=x^2+4$ разделить на x^2+4;

6) обе части уравнения $\frac{x^2}{x}=2$ умножить на x;

7) обе части уравнения $2x+1=5$ умножить на $x+1$?

32.4.° Какое из двух уравнений является следствием другого:

1) $x^2=x$ и $x=1$;

2) $\frac{x}{x}=1$ и $0x=0$;

3) $x^3=1$ и $x^2=1$;

4) $|x|=1$ и $x^3=1$;

5) $\frac{x^2}{x-6}=\frac{36}{x-6}$ и $x^2=36$;

6) $x^2=4$ и $x^2-\frac{1}{x+2}=4-\frac{1}{x+2}$;

7) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ и $x^2-1=0$;

8) $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x}$ и $x^2-2=3x$;

9) $\sqrt{x^2(x-1)}=x$ и $|x|\sqrt{x-1}=x$;

10) $\sqrt{x+3}=x$ и $x+3=x^2$;

11) $\sin x=3$ и $\log_2 x=1$;

12) $\lg(x^2-1)=\lg(x-1)^2$ и $x^2-1=(x-1)^2$;

13) $\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=0$ и $\operatorname{tg} 2x = 0$;

14) $\frac{1}{\log_x 2}=0$ и $\log_2 x = 0$?

32.5.° Какое из двух уравнений является следствием другого:

1) $\frac{x^2}{x}=1$ и $x^2 = x$;

2) $(x + 1)^2 = 1$ и $x^2 + 1^2 = 1$;

3) $\frac{x^2}{x+8}=\frac{64}{x+8}$ и $x^2 = 64$;

4) $x^2+\frac{1}{x+3}=9+\frac{1}{x+3}$ и $x^2 = 9$;

5) $\sqrt{x^2-x-1}=\sqrt{5x}$ и $x^2 - x - 1 = 5x$;

6) $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x+2}$ и $\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}=\sqrt{x+2}$;

7) $\sqrt{x+7}=-x$ и $x + 7 = x^2$;

8) $\cos x = -2$ и $e^{x^2-x-11}=1$;

9) $\log_3 |x + 2| = 1$ и $\log_x |x + 2| \cdot \log_3 x = 1$?

32.6.• Как может измениться (расшириться или сузиться) множество корней данного уравнения, если:

1) уравнение $(|x| + 3) f(x) = 2|x| + 6$ заменить на уравнение $f(x) = 2$;

2) уравнение $(\operatorname{tg}^2 x + 1) f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 1$ заменить на уравнение $f(x) = 1$;

3) уравнение $\frac{f(x)}{x^2+1}=0$ заменить на уравнение $f(x) = 0$;

4) уравнение $\frac{f(x)}{\lg^2 x+1}=0$ заменить на уравнение $f(x) = 0$;

5) уравнение $(x + 1) f(x) = x + 1$ заменить на уравнение $f(x) = 1$;

6) уравнение $\left(\sqrt{x}-1\right) f(x)=\sqrt{x}-1$ заменить на уравнение $f(x) = 1$;

7) уравнение $\frac{f(x)}{x+1}=\frac{g(x)}{x+1}$ заменить на уравнение $f(x) = g(x)$;

8) уравнение $f(x) = g(x)$ заменить на уравнение

$$(x+1)f(x) = (x+1)g(x);$$

9) уравнение $\log_2 f(x) = 0$ заменить на уравнение $f(x) = 1$;

10) уравнение $\log_x f(x) = 0$ заменить на уравнение $f(x) = 1$?

32.7.• Решите уравнение:

1) $\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{x-5}{2x^2+10x}=\frac{x+25}{2x^2-50}$;

2) $\frac{9x+12}{x^3-64}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x^2+4x+16}$.

32.8.• Решите уравнение:

1) $\frac{4y+24}{5y^2-45}+\frac{y+3}{5y^2-15y}=\frac{y-3}{y^2+3y}$;

2) $\frac{y+2}{8y^3+1}-\frac{1}{4y+2}=\frac{y+3}{8y^2-4y+2}$.

32.9.• Решите уравнение:

1) $x^2+\left(\sqrt{x-2}\right)^2-5=0$;

2) $2x^2+9\left(\sqrt{x+1}\right)^2-27=0$.

32.10.• Решите уравнение:

1) $x^2-\left(\sqrt{x+3}\right)^2-8=0$;

2) $x^2-4\left(\sqrt{x+2}\right)^2-13=0$.

32.11.• Решите уравнение:

1) $\frac{\sin 2x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=0$;

2) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$;

3) $\frac{2\sin^2 x+3\sin x}{1-\cos x}=0$.

32.12.• Решите уравнение:

1) $\frac{\sin 2x}{1+\operatorname{ctg}^2 x}=0$;

2) $\frac{\sin 2x}{1-\sin x}=2\cos x$.

32.13.•• Решите уравнение

$$\sqrt{16-9x^2}\left(3\sin 2\pi x+8\sin \pi x\right)=0.$$

32.14.•• Решите уравнение

$$\sqrt{25-4x^2}\left(\sin \pi x+3\cos \frac{\pi x}{2}\right)=0.$$

32.15.•• Решите уравнение:

1) $\sqrt{2x^2 - x + 4} + \sqrt{2x^2 - 7x + 10} = 3x - 3;$

2) $\left(\sqrt{x+1} + 1\right)\left(\sqrt{x+10} - 4\right) = x.$

32.16.•• Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2 + 3x - 2} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 4x - 3;$

2) $\left(\sqrt{x+1} + 1\right)\left(\sqrt{x+1} + x^2 + x - 7\right) = x.$

32.17.•• Решите уравнение:

1) $\dfrac{1 + \cos x + \sin x}{\cos x} = 0;$ 2) $\dfrac{\cos x + \cos \frac{3x}{2} - 2}{\sin \frac{x}{8}} = 0.$

32.18.•• Решите уравнение:

1) $\dfrac{\sin^2 2x - \sin^2 x}{\cos 3x - 1} = 0;$ 2) $\dfrac{\cos x + \cos 3x + 2}{\sin \frac{x}{2} - 1} = 0.$

32.19.•• Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4} + x\right) = 2\cos\dfrac{2\pi}{3} - 5\operatorname{ctg} x;$

2) $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = -\dfrac{3}{2}\operatorname{ctg} x.$

32.20.•• Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x - \sin 2x = -\dfrac{9}{2}\operatorname{ctg} x.$

32.21.•• Решите уравнение $\log_x \cos 2\pi x = 0.$

32.22.•• Решите уравнение $\log_x \sin \dfrac{\pi x}{2} = 0.$

32.23.•• Решите уравнение $\log_9 \sin 2x = \log_3 \sqrt{\sin x}.$

32.24.•• Решите уравнение $\log_4 \sin 2x = \log_2 \sqrt{-\sin x}.$

32.25.•• Решите уравнение $\arccos\left(x\sqrt{3}\right) = \arcsin(3x - 2).$

32.26.•• Решите уравнение $\arcsin x = \arccos(3x - 1).$

33. Основные методы решения уравнений

В таблице приведены схемы решения некоторых типовых уравнений.

Тип уравнения	Условие, равносильное данному уравнению
$\lvert f(x) \rvert = \lvert g(x) \rvert$	$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$
$\lvert f(x) \rvert = g(x)$	$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$
$a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$	$f(x) = g(x)$
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$	$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Часто решение уравнений сводится к решению типовых уравнений, приведенных в таблице. Это иллюстрируют упражнения №№ 33.1, 33.2. К тем уравнениям, которые не сводятся к типовым, применяют специальные методы и приемы. Рассмотрим некоторые из них.

Метод разложения на множители

Хорошо, если удается левую часть уравнения $f(x) = 0$ представить в виде произведения нескольких выражений. Как правило, этот шаг полезен, поскольку позволяет вместо данного уравнения решить совокупность более простых уравнений.

Рассмотрим примеры.

ПРИМЕР 1 Решите уравнение $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Решение. Очевидно, что число 1 является корнем данного уравнения. Тогда левую часть уравнения можно представить в виде произведения $(x - 1)\, Q(x)$, где $Q(x)$ — квадратный трехчлен. Для нахождения $Q(x)$ разделим «уголком» многочлен $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на двучлен $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3 - x^2 \phantom{{}+11x-6}} & x^2 - 5x + 6 \\ -5x^2 + 11x - 6 & \\ -\underline{-5x^2 + 5x \phantom{{}-6}} & \\ 6x - 6 & \\ -\underline{6x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

Получили, что $Q(x) = x^2 - 5x + 6$.

Имеем: $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$.

Это уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0, \\ x^2 - 5x + 6 = 0. \end{array}\right.$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 2, \\ x = 3. \end{array}\right.$

Ответ: 1; 2; 3.

ПРИМЕР 2 Решите уравнение

$$3\sqrt{x-2} \cdot 2^{x^2-3} + 2x = x \cdot 2^{x^2-3} + 6\sqrt{x-2}.$$

Решение. Имеем:

$$3\sqrt{x-2} \cdot 2^{x^2-3} - x \cdot 2^{x^2-3} + 2x - 6\sqrt{x-2} = 0;$$

$$2^{x^2-3}\left(3\sqrt{x-2}-x\right)-2\left(3\sqrt{x-2}-x\right)=0;$$
$$\left(3\sqrt{x-2}-x\right)(2^{x^2-3}-2)=0.$$

Ошибочным было бы считать, что это уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{aligned}&3\sqrt{x-2}-x=0,\\&2^{x^2-3}-2=0.\end{aligned}\right.$$

Действительно, корень -2 второго уравнения совокупности не входит в область определения исходного уравнения. На самом деле исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\left[\begin{aligned}&3\sqrt{x-2}-x=0,\\&2^{x^2-3}-2=0,\end{aligned}\right.\\x\geqslant 2.\end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases}\left[\begin{aligned}&3\sqrt{x-2}=x,\\&2^{x^2-3}=2,\end{aligned}\right.\\x\geqslant 2;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{aligned}&9x-18=x^2,\\&x^2-3=1,\end{aligned}\right.\\x\geqslant 2;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{aligned}&x=3,\\&x=6,\\&x=2,\\&x=-2,\end{aligned}\right.\\x\geqslant 2.\end{cases}$

Ответ: 2; 3; 6.

Метод замены переменной

ПРИМЕР 3 Решите уравнение

$$x^4-8x^3+15x^2+4x-2=0.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение так:

$$x^4-8x^3+16x^2-x^2+4x-2=0;$$
$$(x^2-4x)^2-(x^2-4x)-2=0.$$

Сделав замену $x^2-4x=t$, получаем уравнение $t^2-t-2=0$.

Отсюда $\left[\begin{aligned}&t=2,\\&t=-1;\end{aligned}\right.$ $\left[\begin{aligned}&x^2-4x=2,\\&x^2-4x=-1.\end{aligned}\right.$

Ответ: $2+\sqrt{6}$; $2-\sqrt{6}$; $2+\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$.

ПРИМЕР 4 Решите уравнение $\dfrac{2x}{x^2-4x+2}+\dfrac{3x}{x^2+x+2}=-\dfrac{5}{4}$.

Решение. Поскольку число 0 не является корнем данного уравнения, то, разделив числитель и знаменатель каждой из дробей левой части уравнения на x, получаем уравнение, равносильное данному:

$$\frac{2}{x-4+\dfrac{2}{x}}+\frac{3}{x+1+\dfrac{2}{x}}=-\frac{5}{4}.$$

Сделаем замену $x+\dfrac{2}{x}=t$. Тогда

$$\frac{2}{t-4}+\frac{3}{t+1}+\frac{5}{4}=0;\quad \frac{t^2+t-12}{(t-4)(t+1)}=0;$$

$$\begin{cases} t^2+t-12=0, \\ (t-4)(t+1)\neq 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} t=-4, \\ t=3. \end{array}\right.$$

Имеем: $\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{2}{x}=-4, \\ x+\dfrac{2}{x}=3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2+4x+2=0, \\ x^2-3x+2=0. \end{array}\right.$

Ответ: $-2+\sqrt{2}$; $-2-\sqrt{2}$; 1; 2.

ПРИМЕР 5 Решите уравнение

$$\sin^2 x+\frac{4}{\sin^2 x}+3\left(\sin x-\frac{2}{\sin x}\right)-2=0.$$

Решение. Пусть $\sin x-\dfrac{2}{\sin x}=t$. Тогда

$$\sin^2 x-4+\frac{4}{\sin^2 x}=t^2.$$

Отсюда $\sin^2 x+\dfrac{4}{\sin^2 x}=t^2+4$. Исходное уравнение принимает вид $t^2+4+3t-2=0$.

Отсюда $t^2+3t+2=0$; $\left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=-2. \end{array}\right.$

Получаем, что исходное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \sin x-\dfrac{2}{\sin x}=-1, \\ \sin x-\dfrac{2}{\sin x}=-2. \end{array}\right.$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} \sin^2 x+\sin x-2=0, \\ \sin^2 x+2\sin x-2=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin x=1, \\ \sin x=-2, \\ \sin x=-1-\sqrt{3}, \\ \sin x=-1+\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Поскольку $|\sin x| \leqslant 1$, то получаем $\left[\begin{array}{l} \sin x=1, \\ \sin x=\sqrt{3}-1. \end{array}\right.$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ x=(-1)^k \arcsin\left(\sqrt{3}-1\right)+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$

ПРИМЕР 6 Решите уравнение

$$\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3.$$

Решение. Пусть $\sqrt[3]{2-x}=a$, $\sqrt[3]{7+x}=b$. Тогда

$\begin{cases} a^2+b^2-ab=3, \\ a^3+b^3=9; \end{cases}$ $\begin{cases} a^2+b^2-ab=3, \\ (a+b)(a^2+b^2-ab)=9; \end{cases}$ $\begin{cases} (a+b)^2-3ab=3, \\ a+b=3; \end{cases}$

$\begin{cases} ab=2, \\ a+b=3; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1, \\ b=2, \end{cases} \\ \begin{cases} a=2, \\ b=1. \end{cases} \end{array}\right.$

Теперь можно записать: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=1, \\ \sqrt[3]{7+x}=2, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=2, \\ \sqrt[3]{7+x}=1; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-6. \end{array}\right.$

Ответ: 1; –6.

Применение свойств функций

Поиск области определения функции f может быть ключом к решению уравнения $f(x) = 0$.

ПРИМЕР 7 Решите уравнение

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_3 x+\sqrt{4x-x^2-3}=1.$$

Решение. Применение любых приемов, связанных с преобразованием левой части данного уравнения, вряд ли приведет к успеху. Вместе с тем нахождение области определения уравнения — путь вполне естественный.

Имеем: $\begin{cases} x^2-4x+3\geqslant 0, \\ 4x-x^2-3\geqslant 0, \\ x>0. \end{cases}$

Решив эту систему, получим, что областью определения рассматриваемого уравнения является двухэлементное множество $\{1, 3\}$. Проверка показывает, что число 1 не подходит, а число 3 является корнем исходного уравнения.

Ответ: 3.

Пусть функции f и g таковы, что для любого $x \in D(f) \cap$ $\cap\, D(g)$ выполняются неравенства $f(x) \leqslant a$ и $g(x) \geqslant a$, где a — некоторое число. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a. \end{cases}$$

С помощью этих очевидных соображений можно решить целый ряд уравнений.

ПРИМЕР 8 Решите уравнение

$$\log_2(5+3\cos 4x)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Решение. Поскольку $\cos 4x \geqslant -1$, то $5 + 3\cos 4x \geqslant 2$. Отсюда $\log_2(5 + 3\cos 4x) \geqslant 1$.

В то же время $\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant 1.$

Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \log_2 (5+3\cos 4x)=1, \\ \sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} \cos 4x=-1, \\ \cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}, \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Вы знаете, что если функция f является возрастающей (убывающей), то уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня. Если удается корень угадать, то решение такого уравнения завершено.

ПРИМЕР 9 Решите уравнение $2x - \sin x = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 2x - \sin x$. Имеем: $f'(x) = 2 - \cos x$. Поскольку для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция f возрастает на $\mathbb{R}$. Следовательно, уравнение $f(x) = 0$ имеет не более одного корня. Очевидно, что число 0 является корнем данного уравнения.

Ответ: 0.

ПРИМЕР 10 Решите уравнение $\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{4x-1}=1$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{4x-1}$. Легко определить, что $D(f)=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Каждая из функций $g(x)=\sqrt{4x^2-1}$ и $h(x)=\sqrt{4x-1}$ является возрастающей на $D(f)$. Следовательно, функция f также возрастает на $D(f)$.

Очевидно, что число $\dfrac{1}{2}$ является корнем исходного уравнения. Этот корень единственный.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Упражнения

33.1.° Решите уравнение:

1) $|x^2 - 7x + 3| = |x - 4|$;
2) $|x^2 - 3x - 1| = x - 1$;
3) $\sqrt{4x^2 - 5x} = \sqrt{3x^2 - 2x - 2}$;
4) $\sqrt{3x + 7} = 7 - x$;
5) $7^{2x + 3} = 7^{3 - x}$;
6) $\log_3 (x^2 - 7) = \log_3 (-x - 1)$.

33.2.° Решите уравнение:

1) $|x^2 - 2x - 5| = |x - 1|$;
2) $|x^2 + 6x - 16| = 8 - 4x$;
3) $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$;
4) $2\sqrt{x + 5} = x + 2$;
5) $2^{8 - 2x^2} = 2^{x^2 - 1}$;
6) $\lg (x^2 + 2x - 10) = \lg (3x + 2)$.

33.3.° Решите уравнение:

1) $x^3 - 7x - 6 = 0$;
2) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 0$;
3) $x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = 0$.

33.4.° Решите уравнение:

1) $x^3 + x^2 + x + 6 = 0$;
2) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$.

33.5.° Решите уравнение:

1) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$;
2) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 4) = -5$;
3) $\dfrac{3x^2 - 9x}{2} - \dfrac{12}{x^2 - 3x} = 3$;
4) $\dfrac{1}{x(x + 2)} - \dfrac{1}{(x + 1)^2} = \dfrac{1}{12}$.

33.6.° Решите уравнение:

1) $(x^2 + 8x + 3)(x^2 + 8x + 5) = 63$;
2) $\dfrac{x^4}{(x - 2)^2} - \dfrac{4x^2}{x - 2} - 5 = 0$;
3) $\dfrac{3}{1 + x + x^2} = 3 - x - x^2$;
4) $\dfrac{6}{(x + 1)(x + 2)} + \dfrac{8}{(x - 1)(x + 4)} = 1$.

33.7.• Решите уравнение:

1) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1}=6;$ 3) $4^{\operatorname{tg}^2 x}+8=3\cdot 2^{\frac{1}{\cos^2 x}}.$

2) $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3;$

33.8.• Решите уравнение:

1) $4^{x^2-x}-17\cdot 2^{x^2-x+2}+256=0;$ 2) $2^{\cos 2x}=3\cdot 2^{\cos^2 x}-4.$

33.9.•• Решите уравнение

$$\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18.$$

33.10.•• Решите уравнение:

1) $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680;$

2) $x(x+3)(x+5)(x+8)=100.$

33.11.•• Решите уравнение:

1) $(x-4)(x+2)(x+8)(x+14)=1204;$

2) $(x+3)(x+1)(x+5)(x+7)=-16.$

33.12.•• Решите уравнение:

1) $(2x^2-5x+2)(2x^2+7x+2)=-20x^2;$

2) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2.$

33.13.•• Решите уравнение:

1) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2=0;$

2) $(x-4)(x+5)(x+10)(x-2)=18x^2.$

33.14.•• Решите уравнение:

1) $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47;$ 2) $2\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{3}\right)=\frac{2}{x^2}+\frac{x^2}{18}+\frac{4}{3}.$

33.15.•• Решите уравнение:

1) $3x^2+5x+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}=16;$ 2) $x^2+\frac{36}{x^2}=\frac{112}{5}\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right).$

33.16.•• Решите уравнение:

1) $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1;$

2) $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{4x}{x^2-12x+15}.$

33.17.•• Решите уравнение:

1) $\frac{3x}{x^2+1-4x}-\frac{2x}{x^2+1+x}=\frac{8}{3};$ 2) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-7x+4}+\frac{x^2-x+4}{x^2+x+4}+\frac{13}{3}=0.$

33.18.•• Решите уравнение:

1) $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$;

2) $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x)$.

33.19.•• Решите уравнение:

1) $x^4+5x^2(x+1)=6(x+1)^2$; 2) $6x^2-5x\sqrt{x+3}+x+3=0$.

33.20.•• Решите уравнение:

1) $3\sin^2 x+2\sin x\cos x=2$; 2) $5\cos^3 x=\sin x-\cos x$.

33.21.•• Решите уравнение $22\cos^2 x+4\sin 2x=7$.

33.22.•• Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=4$;

2) $18\cos^2 x+5(3\cos x+\cos^{-1} x)+2\cos^{-2} x+5=0$.

33.23.•• Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^3 x=4$;

2) $4\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}+4\sin x+\dfrac{2}{\sin x}=11$.

33.24.•• Решите уравнение

$$\sin 2x+3(\sin x+\cos x)+1=0.$$

33.25.•• Решите уравнение

$$\sin 2x+4\sin x-4\cos x-1=0.$$

33.26.•• Решите уравнение:

1) $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$; 2) $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-1}=5$.

33.27.•• Решите уравнение:

1) $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4$; 2) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

33.28.•• Решите уравнение:

1) $2\cos\dfrac{x^2-4x}{3}=x^2-8x+18$;

2) $5\sin x-12\cos x=x^2-2x+14$.

33.29.•• Решите уравнение:

1) $\sin\dfrac{\pi x}{6}=x^2-6x+10$; 2) $\sin 2x=x-x^2-1$.

33.30.•• Решите уравнение:

1) $\cos 2x+\cos\dfrac{5x}{2}=2$; 2) $\sin 6x+\cos\dfrac{12x}{5}=-2$.

33.31.•• Решите уравнение:

1) $\cos\frac{13x}{6}\cos\frac{5x}{6}=1;$ 2) $\sin 2x+\cos\frac{8x}{3}=2.$

33.32.•• Решите уравнение

$$(4x-x^2-3)\log_2(\cos^2\pi x+1)=1.$$

33.33.•• Решите уравнение

$$2^{-|x-2|}\log_2(4x-x^2-2)=1.$$

33.34.•• Решите уравнение:

1) $x^3+2x\sqrt{x-1}=12;$ 2) $\frac{17}{x^2+1}=\frac{\sqrt{x}}{2}.$

33.35.•• Решите уравнение:

1) $2\sqrt{x}+\sqrt{x-5}+\sqrt{2x+7}=13;$ 2) $x^2+5x+15\sqrt{x+2}=44.$

33.36.•• Решите уравнение $\cos x-2x=1.$

33.37.•• Решите уравнение $\sin x-\cos x=2x-1.$

34. Основные методы решения неравенств

В таблице приведены схемы решения некоторых типовых неравенств.

Тип неравенства	Условие, равносильное данному неравенству
$\lvert f(x)\rvert < g(x)$	$\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>-g(x) \end{cases}$
$\lvert f(x)\rvert > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} f(x)>g(x), \\ f(x)<-g(x) \end{array}\right.$
$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)\geqslant 0 \end{cases}$

Тип неравенства	Условие, равносильное данному неравенству
$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{array}\right.$
$a^{f(x)} > a^{g(x)},\ a > 1$	$f(x) > g(x)$
$a^{f(x)} > a^{g(x)},\ 0 < a < 1$	$f(x) < g(x)$
$\log_a f(x) > \log_a g(x),\ a > 1$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$
$\log_a f(x) > \log_a g(x),\ 0 < a < 1$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Часто решение неравенств сводится к решению типовых неравенств, приведенных в таблице. Это иллюстрируют упражнения №№ 34.1–34.10. К тем неравенствам, которые не сводятся к типовым, применяют специальные методы и приемы. Рассмотрим некоторые из них.

Метод равносильных преобразований

ПРИМЕР 1 Решите неравенство $(x^2 - 9)\sqrt{x-2} \geqslant 0$.

Решение. Заметим, что ошибочными являются следующие соображения: «Поскольку при $x \geqslant 2$ выполняется неравенство $\sqrt{x-2} \geqslant 0$, то исходное неравенство равносильно системе $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x^2 - 9 \geqslant 0. \end{cases}$ Отсюда $x \in [3; +\infty)$». Несложно увидеть, что при таком «решении» теряется решение $x = 2$.

Правильным решением данного неравенства является, например, переход к совокупности:

$$\left[\begin{aligned}&(x^2-9)\sqrt{x-2}=0,\\&(x^2-9)\sqrt{x-2}>0.\end{aligned}\right.$$

Решением уравнения совокупности являются числа 2 и 3, множеством решений неравенства — промежуток $(3;+\infty)$.

Ответ: $[3;+\infty)\cup\{2\}$.

ПРИМЕР 2 Решите неравенство $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}>1$.

Решение. Сразу возводить обе части неравенства в квадрат не является рациональным шагом, поскольку этот переход требует учитывать такое дополнительное условие:

$$\sqrt{5x-1}-\sqrt{x+2}\geqslant 0.$$

Данное в условии неравенство целесообразно записать так:

$$\sqrt{5x-1}>1+\sqrt{x+2}.$$

Поскольку обе части последнего неравенства могут принимать только неотрицательные значения, то можно перейти к равносильному неравенству:

$$\left(\sqrt{5x-1}\right)^2>\left(1+\sqrt{x+2}\right)^2.$$

Далее получаем:

$$5x-1>1+2\sqrt{x+2}+(x+2);$$

$$2(x-1)>\sqrt{x+2};$$

$$\begin{cases}4(x-1)^2>x+2,\\x>1,\\x+2\geqslant 0;\end{cases}\qquad\begin{cases}4x^2-9x+2>0,\\x>1.\end{cases}$$

Отсюда $x>2$.

Ответ: $(2;+\infty)$.

Метод интервалов

Пусть нули функции и ее точки разрыва разбивают область определения функции на некоторые промежутки (рис. 34.1). Тогда из следствия из теоремы Больцано–Коши (см. пункт 5) следует, что эти промежутки являются промежутками знакопостоянства функции. Определить знак функции на каждом из таких промежутков можно с помощью «пробных точек».

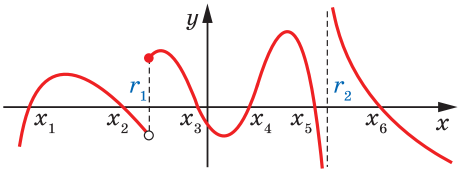


Рис. 34.1

Эти соображения являются основой для решения широкого класса неравенств.

ПРИМЕР 3 Решите неравенство $\sqrt[3]{2-x} > 1-\sqrt{x-1}$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1.$$

Имеем: $D(f)=[1;+\infty)$. Найдем нули функции f. Для этого решим уравнение $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0$.

Сделаем замену: $\sqrt[3]{2-x}=a$, $\sqrt{x-1}=b$. Имеем: $2-x=a^3$, $x-1=b^2$. Отсюда $a^3+b^2=1$. Получаем систему:

$$\begin{cases} a+b-1=0, \\ a^3+b^2=1. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} b=1-a, \\ a^3+(1-a)^2=1; \end{cases}$ $\begin{cases} b=1-a, \\ a^3+a^2-2a=0. \end{cases}$

Эта система имеет три решения: $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(-2; 3)$.

Теперь можно записать: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=0, \\ \sqrt{x-1}=1, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=1, \\ \sqrt{x-1}=0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=-2, \\ \sqrt{x-1}=3. \end{cases} \end{array}\right.$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1, \\ x=10. \end{array}\right.$

Поскольку функция f непрерывна, то ее нули, то есть числа 1, 2, 10, разбивают ее область определения $D(f) = [1; +\infty)$ на промежутки знакопостоянства: $(1; 2)$, $(2; 10)$, $(10; +\infty)$.

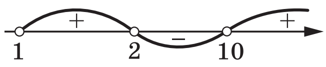


Рис. 34.2

Имеем: $\frac{3}{2} \in (1; 2)$; $f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$;

$3 \in (2; 10)$; $f(3) < 0$;

$17 \in (10; +\infty)$; $f(17) > 0$.

Знаки функции на промежутках знакопостоянства показаны на рисунке 34.2.

Ответ: $(1; 2) \cup (10; +\infty)$.

Применение свойств функций

При решении примера 3 было использовано такое свойство функции, как непрерывность. Нередко ключом к решению могут быть и другие свойства функций: периодичность, четность (нечетность), возрастание (убывание), наибольшее и наименьшее значения функции и т. д.

Например, если $\min\limits_{D(f)} f(x) = a$ и $\max\limits_{D(f)} f(x) = b$, то множеством решений каждого из неравенств $f(x) \geqslant a$ и $f(x) \leqslant b$ является множество $D(f)$ (рис. 34.3).

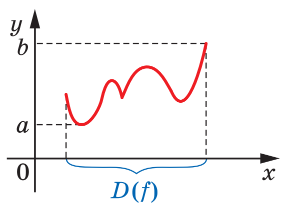


Рис. 34.3

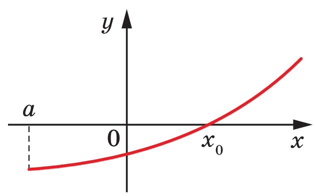


Рис. 34.4

Еще один пример: если функция f возрастает на промежутке $D(f) = [a; +\infty)$ и $f(x_0) = 0$, то множеством решений неравенства $f(x) \geqslant 0$ является промежуток $[x_0; +\infty)$ (рис. 34.4).

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие вышесказанное.

ПРИМЕР 4 Решите неравенство $\sqrt[4]{19-x} + \sqrt[4]{x+13} \leqslant 4$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sqrt[4]{19-x} + \sqrt[4]{x+13}, \quad D(f) = [-13; 19].$$

Имеем: $f'(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(19-x)^3}} + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x+13)^3}}$. Решив уравнение $f'(x) = 0$, получим $x = 3$.

Сравнивая числа $f(-13)$, $f(3)$, $f(19)$, приходим к выводу, что $\max\limits_{[-13;\,19]} f(x) = f(3) = 4$.

Тогда неравенство $f(x) \leqslant 4$ выполняется для всех $x \in D(f)$.

Ответ: $[-13;\ 19]$.

ПРИМЕР 5 Решите неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right)\log_3\left(x^2+x+21\right) \geqslant 6.$$

Решение. Областью определения данного неравенства является промежуток $[2;\ +\infty)$.

Поскольку $\sqrt{x-2}+4 \geqslant 4$, то $\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right) \geqslant \log_2 4 = 2$.

При $x \geqslant 2$ получаем, что $x^2 + x + 21 \geqslant 27$. Тогда $\log_3(x^2 + x + 21) \geqslant 3$.

Имеем: $\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right) \geqslant 2$ и $\log_3(x^2 + x + 21) \geqslant 3$.

Отсюда для всех $x \in [2;\ +\infty)$ выполняется неравенство

$$\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right)\log_3\left(x^2+x+21\right) \geqslant 6.$$

Ответ: $[2;\ +\infty)$.

ПРИМЕР 6 Решите неравенство

$$\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{5x^3+9x+6} \geqslant 5.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sqrt{x-1}+\sqrt[3]{5x^3+9x+6}-5.$$

Легко показать, что эта функция возрастает на $D(f) = [1;\ +\infty)$. Очевидно, что $f(2) = 0$. Тогда множеством решений неравенства $f(x) \geqslant 0$ является промежуток $[2;\ +\infty)$.

Ответ: $[2;\ +\infty)$.

Упражнения

34.1.° Решите неравенство:

1) $|2x-5| \leqslant x$;
2) $|3x-2| > 2x+1$.

34.2.° Решите неравенство:

1) $|3x-1| < \dfrac{x}{2}$;
2) $|3x-5| > 9x+1$.

34.3.° Решите неравенство:

1) $|x^2+3x| < x+4$;
2) $\left|\dfrac{x+1}{2x-1}\right| < 1$;
3) $x^2-x-2 < |5x-3|$;
4) $|x^2+3x| \geqslant 2-x^2$.

34.4.° Решите неравенство:

1) $|4x^2-1| < x+2$;
2) $\left|\dfrac{3x+1}{x-5}\right| \geqslant 1$;
3) $|x^2-3x| \geqslant x+5$.

34.5.° Решите неравенство:

1) $\sqrt{2x^2+5x-6} > \sqrt{-x-3}$;
2) $\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}$;
3) $\sqrt{2x^2+6x+3} \geqslant \sqrt{-x^2-4x}$;
4) $\sqrt{\dfrac{8-x}{x-10}} \leqslant \sqrt{\dfrac{2}{2-x}}$.

34.6.° Решите неравенство:

1) $\sqrt{x^2-7x+5} \geqslant \sqrt{3x-4}$;
2) $\sqrt{x^2+5x} < \sqrt{1-x^2+4x}$;
3) $\sqrt{\dfrac{2x-3}{4x-1}} \geqslant \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$;
4) $\sqrt{3-x} \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$.

34.7.° Решите неравенство:

1) $\sqrt{x+7} < x$;
2) $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x$;
3) $\sqrt{5-|x+1|} \leqslant 2+x$.

34.8.° Решите неравенство:

1) $x+4 > 2\sqrt{4-x^2}$;
2) $\sqrt{x^2-3x-18} \leqslant 4-x$;
3) $\sqrt{(x-3)(2-x)} < 3+2x$.

34.9.$^{\bullet}$ Решите неравенство:

1) $\sqrt{2x+4}>x+3;$

2) $\sqrt{2x^2+5x-6}\geqslant 2-x;$

3) $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}}>x-2.$

34.10.$^{\bullet}$ Решите неравенство:

1) $\sqrt{x^2-2x}>4-x;$

2) $\sqrt{-x^2-8x-12}\geqslant x+4;$

3) $\sqrt{\dfrac{x^3+27}{x}}>x-3.$

34.11.$^{\bullet}$ Решите неравенство:

1) $(x+10)\sqrt{x-4}\leqslant 0;$

2) $(x+1)\sqrt{x+4}\sqrt{x+7}\leqslant 0;$

3) $(x+8)\sqrt{x^2-5x+4}\leqslant 0;$

4) $(x^2+3x-10)\sqrt{2x^2+5x+2}\geqslant 0.$

34.12.$^{\bullet}$ Решите неравенство:

1) $(x-12)\sqrt{x-3}\leqslant 0;$

2) $(x+2)^2(x-1)^2\sqrt{x-7}\geqslant 0;$

3) $(x+3)\sqrt{x^2+x-2}\leqslant 0;$

4) $\dfrac{\sqrt{2x^2+15x-17}}{10-x}\geqslant 0.$

34.13.$^{\bullet}$ Решите неравенство:

1) $\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x}>1;$

2) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+15}\leqslant 5.$

34.14.$^{\bullet}$ Решите неравенство:

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5}>3;$

2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}\leqslant\sqrt{10-x}.$

34.15.$^{\bullet}$ Решите неравенство:

1) $\sin^6 x+\cos^6 x<\dfrac{2}{3};$

2) $2\cos^2 x-\sin x>1;$

3) $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-2>0;$

4) $2+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{ctg} 2x<0.$

34.16.$^{\bullet}$ Решите неравенство:

1) $2\sin^2 x-7\sin x+3>0;$

2) $\sin x+\cos 2x>1;$

3) $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+2<0.$

34.17.•• Решите неравенство:

1) $\cos 2x \operatorname{tg} x < 0$;
2) $\sin^2 x \cos x + \cos^2 x \sin x < 0$;
3) $(\sin x + \cos x)\left(\sqrt{3} \sin x - \cos x\right) > 0$;
4) $\left(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\right) \sin x \leqslant 0$.

34.18.•• Решите неравенство:

1) $\cos x - \sin 2x - \cos 3x < 0$;
2) $\operatorname{ctg} x > \operatorname{ctg} 3x$;
3) $(2 \cos x - 1) \operatorname{ctg} x \geqslant 0$.

34.19.•• Решите неравенство:

1) $\sqrt[3]{3-x} + \sqrt{x-2} \leqslant 1$;
2) $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}} \geqslant \dfrac{21}{x}$.

34.20.•• Решите неравенство:

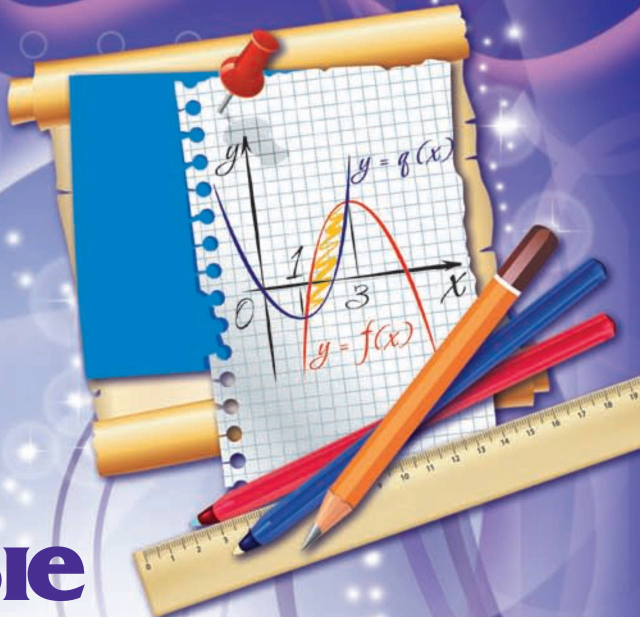
1) $\sqrt[3]{10-x} + \sqrt{x-1} \geqslant 3$;
2) $\dfrac{\sqrt{6+x}+\sqrt{6-x}}{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}} \leqslant \dfrac{6}{x}$.

34.21.•• Решите неравенство:

1) $\sqrt[4]{83-x} + \sqrt[4]{79+x} \leqslant 6$;
2) $\sqrt[4]{11-x} + \sqrt[4]{x+5} \geqslant 2$;
3) $3x^5 + \sqrt[3]{3x^3 + 4x + 1} < 5$;
4) $\left(\sqrt{x+2} + 1\right) \log_3 (x^2 + 4x + 13) \geqslant 2$;
5) $\log_3 \left(\sqrt{x-1} + 3\right) \log_5 (x^2 + x + 3) \geqslant 1$.

34.22.•• Решите неравенство:

1) $\sqrt[6]{71-x} + \sqrt[6]{57+x} \leqslant 4$;
2) $\sqrt[6]{33-x} + \sqrt[6]{31+x} \geqslant 2$;
3) $2\sqrt{x-3} + \sqrt[3]{x^3 + 9x + 10} \geqslant 4$;
4) $\log_2 \left(\sqrt{x+3} + 2\right) \log_3 (x^2 + 6x + 18) \geqslant 2$.



§6

Тестовые задания для повторения курса алгебры

Делимость натуральных чисел и числовые выражения

Задание в тестовой форме «Проверь себя» № 5

1. Какую цифру надо поставить вместо звездочки, чтобы число 1845* делилось нацело на 9, но не делилось нацело на 6?

А) 0; Б) 3; В) 6; Г) 9.

2. Группу туристов можно расположить в маленьких палатках по 4 человека или в больших палатках по 6 человек, причем в обоих случаях свободных мест в палатках не останется. Сколько туристов в группе, если известно, что их больше 40, но меньше 50?

А) 42; Б) 44; В) 46; Г) 48.

3. Какое из данных чисел делится нацело на 3, но не делится нацело ни на 2, ни на 5?

А) 3547; Б) 2601; В) 7335; Г) 6228.

4. Чему равен остаток при делении на 8 значения выражения $(15n + 7) - (7n + 3)$, где n — любое натуральное число?

А) 7; Б) 6; В) 4; Г) 10.

5. Какое наименьшее натуральное число надо прибавить к числу 832, чтобы полученная сумма была кратной одновременно числам 3 и 5?

А) 3; Б) 5; В) 8; Г) 9.

6. На подносе лежат пирожки с мясом и пирожки с вишнями, количества которых относятся как 5 : 2 соответственно. Укажите среди данных чисел то, которым может выражаться общее количество пирожков.

А) 15; Б) 16; В) 21; Г) 24.

7. Какое из данных равенств неверное?

А) $\frac{5}{7} = \frac{35}{49}$; Б) $\frac{14}{24} = \frac{2}{3}$; В) $\frac{7}{9} = \frac{56}{72}$; Г) $\frac{36}{45} = \frac{4}{5}$.

8. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{15}{18}$?

А) (0; 0,25); Б) (0,25; 0,5); В) (0,5; 0,75); Г) (0,75; 1).

9. Укажите, сколько можно составить неравных между собой правильных дробей, числителями и знаменателями которых являются числа 2, 4, 5, 6, 8, 9.

А) 12; Б) 13; В) 14; Г) 15.

10. Определите, на сколько $\frac{3}{7}$ числа 350 больше, чем 0,12 числа 500.

А) 90; Б) 150; В) 160; Г) 170.

11. Один рабочий может выполнить некоторое задание за час, а другой — за полтора часа. За какое время они выполнят это задание, работая вместе?

А) 36 мин; Б) 40 мин; В) 48 мин; Г) 60 мин.

12. Среди данных чисел укажите наибольшее:

А) $\frac{2002}{2001}$; Б) $\frac{2003}{2002}$; В) $\frac{2004}{2003}$; Г) $\frac{2005}{2004}$.

13. Натуральное число a — четное, а натуральное число b — нечетное. Какое из данных равенств возможно?

А) $\frac{a-1}{b+1}=1$; Б) $ab = 35$; В) $\frac{a}{b}=9$; Г) $\frac{a}{b}=4$.

14. Положительное число a меньше 1, а число b больше 1. Какое из выражений принимает наибольшее значение?

А) ab; Б) a^2; В) $a + b$; Г) $\frac{a}{b}$.

15. Из последовательности чисел −9, −7, −5, 2, 3, 6 выбрали два числа и нашли их произведение. Какое наименьшее значение может принимать это произведение?

А) −54; Б) 6; В) −10; Г) 12.

16. Известно, что $a > 0$, $b < 0$. О каком из выражений можно утверждать, что оно принимает только положительные значения?

А) $b^2 - a^2$; Б) $a - b$; В) $(b - a)^3$; Г) $a^4 - b^4$.

17. Поезд прошел 105 км, что составляет $\frac{5}{7}$ всего пути. Сколько километров составляет длина всего пути?

А) 75 км; Б) 140 км; В) 147 км; Г) 210 км.

18. Вычислите значение выражения

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + 2009 - 2010.$$

А) 1005; Б) –1005; В) 2010; Г) –2010.

19. Установите соответствие между данными числами (1–4) и цифрами (А–Д), которые надо подставить вместо звездочек, чтобы данные числа делились нацело на 9.

1) 628*;	А) 5;
2) 57*57;	Б) 3;
3) 7*51;	В) 7;
4) 90*2.	Г) 4;
	Д) 2.

20. Установите соответствие между данными выражениями (1–4) и их значениями (А–Д).

1) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}$;

2) $\left(2{,}5-1\frac{5}{6}\right)\cdot(-1{,}2)$;

3) $2{,}8\cdot\frac{4}{7}-2{,}8:\frac{4}{7}$;

4) $\dfrac{8-\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}{8+\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}$.

А) 0,7;

Б) –0,8;

В) $\frac{1}{7}$;

Г) –3,3;

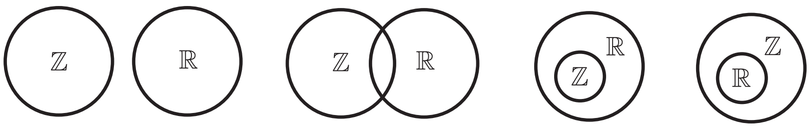
Д) $1\frac{3}{7}$.

Множества, процентные расчеты, элементы статистики

Задание в тестовой форме «Проверь себя» № 6

1. Укажите диаграмму Эйлера, на которой правильно изображено соотношение между множествами $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$.

А) Б) В) Г)



2. Даны три утверждения:

1) любое натуральное число является действительным;
2) любое иррациональное число является действительным;
3) любое действительное число является рациональным или иррациональным.

Сколько из этих утверждений являются правильными?

А) ни одного; Б) одно; В) два; Г) три.

3. Известно, что $A \subset B$ и $A \neq B$. Укажите верное утверждение:

А) $A \cap B = B$; Б) $A \cup B = A$; В) $A \cap B = \varnothing$; Г) $A \cup B = B$.

4. К сплаву массой 400 кг, содержавшему 15 % меди, добавили 25 кг меди. Каким стало процентное содержание меди в новом сплаве?

А) 20 %; Б) 25 %; В) 30 %; Г) 40 %.

5. Добыча угля на некоторой шахте вначале уменьшилась на 20 %, а затем повысилась на 20 %. Увеличилась или уменьшилась добыча угля вследствие этого по сравнению с первоначальным уровнем и на сколько процентов?

А) увеличилась на 4 %; В) увеличилась на 10 %;
Б) уменьшилась на 4 %; Г) не изменилась.

6. Содержание соли в морской воде составляет 5 %. Сколько килограммов пресной воды надо добавить к 30 кг морской воды, чтобы содержание соли в полученном растворе составило 3 %?

А) 10 кг; Б) 15 кг; В) 20 кг; Г) 25 кг.

7. Бригада из 12 рабочих может отремонтировать школу за 36 дней. Сколько требуется рабочих, чтобы отремонтировать школу за 9 дней, если производительность труда всех рабочих одинакова?

А) 3; Б) 24; В) 36; Г) 48.

8. В саду растут яблони и груши, причем яблонь в 4 раза больше, чем груш. Сколько процентов всех деревьев составляют груши?

А) 20 %; Б) 25 %; В) 50 %; Г) определить невозможно.

9. В первый день мальчик прочел 30 % страниц книги, а во второй — 18 %. Сколько страниц в книге, если в первый день он прочел на 6 страниц больше, чем во второй?

А) 200; Б) 500; В) 50; Г) 20.

10. Некоторые величины a, b и c, принимающие только положительные значения, таковы, что $ac = b$. Как изменится величина a, если величину b увеличить в 12 раз, а величину c увеличить в 3 раза?

А) увеличится в 36 раз; В) увеличится в 4 раза;
Б) уменьшится в 4 раза; Г) не изменится.

11. В 160 г воды растворили 40 г соли. Найдите процентное содержание соли в растворе.

А) 20 %; Б) 25 %; В) $33\frac{1}{3}$ %; Г) 40 %.

12. В таблице приведено распределение оценок, полученных учащимися класса за контрольную работу по алгебре и началам анализа.

Оценка	6	7	8	9	10	11
Количество учащихся	3	8	4	5	3	2

Найдите относительную частоту, соответствующую оценке 9 баллов.

А) 36 %; Б) 20 %; В) 25 %; Г) 30 %.

13. Банк выплачивает своим вкладчикам 8 % годовых. Сколько денег надо положить в банк, чтобы через год на счете было 21 600 грн?

А) 20 300 грн; В) 20 100 грн;
Б) 20 200 грн; Г) 20 000 грн.

14. Цена товара составляла 80 грн. Через некоторое время она уменьшилась на 8 грн. На сколько процентов состоялось снижение цены?

А) на 10 %; Б) на 8 %; В) на 12 %; Г) на 15 %.

15. Стул, первоначальная цена которого составляла 400 грн, дважды дешевел, причем каждый раз на 50 %. Сколько теперь стоит стул?

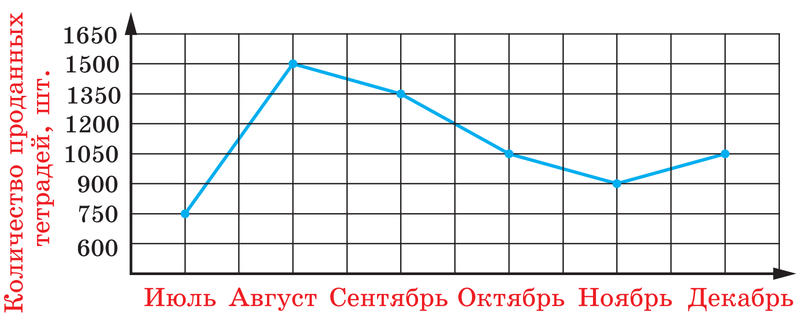
А) 100 грн; Б) 150 грн; В) 200 грн; Г) 250 грн.

16. Известно, что 7 кг печенья стоят столько, сколько 5 кг конфет. Сколько килограммов конфет можно купить вместо 28 кг печенья?

А) 14 кг; Б) 16 кг; В) 10 кг; Г) 20 кг.

17. На графике, изображенном на рисунке, отображены объемы продажи тетрадей в магазине канцтоваров в течение 6 месяцев. Сколько в среднем продавали тетрадей за один месяц?

А) 1050; Б) 1100; В) 1200; Г) 1250.



18. В мае магазин продал прохладительных напитков на сумму m грн, а в июне — на $2m$ грн. На сколько процентов увеличилась выручка магазина от продажи прохладительных напитков в июне по сравнению с маем?

А) на 50 %;
Б) на 100 %;
В) на 200 %;
Г) зависит от числа m.

19. Установите соответствие между данными выборками (1–4) и их медианами (А–Д).

1) 2, 2, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 9;
2) 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9;
3) 2, 4, 4, 6, 9, 3, 8, 9, 10;
4) 3, 10, 4, 9, 13, 9, 19, 3.

А) 7;
Б) 4;
В) 6;
Г) 9;
Д) 5.

20. Установите соответствие между соляным раствором (1–4) и количеством соли, которое он содержит (А–Д).

1) 300 г 4-процентного раствора;
2) 40 г 9-процентного раствора;
3) 20 г 8-процентного раствора;
4) 40 г 6-процентного раствора.

А) 1,6 г;
Б) 12 г;
В) 2,4 г ;
Г) 3,6 г;
Д) 37 г.

Рациональные выражения. Рациональные уравнения

Задание в тестовой форме «Проверь себя» № 7

1. При каком значении переменной не имеет смысла выражение $\frac{4}{3x-21}$?

А) 7; Б) −7; В) 4; Г) −4.

2. Сократите дробь $\frac{12a^{10}b^2}{16a^5b^6}$.

А) $\frac{3a^2}{4b^3}$; Б) $\frac{3a^5b^4}{4}$; В) $\frac{3a^2}{4b^4}$; Г) $\frac{3a^5}{4b^4}$.

3. Сократите дробь $\frac{6m-mn}{18m}$.

А) $\frac{6-mn}{18}$; Б) $\frac{1-mn}{3}$; В) $\frac{6-n}{18}$; Г) $\frac{m-n}{3}$.

4. Представьте в виде дроби выражение $\frac{a-5b}{2b}-\frac{b-5a}{2a}$.

А) $\frac{a^2-b^2}{2ab}$; Б) $\frac{a^2-b^2}{4ab}$; В) $\frac{a-b}{2}$; Г) $\frac{a-b}{4}$.

5. Упростите выражение $\frac{a+b}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$.

А) $\frac{ab}{a+b}$; Б) $\frac{a+b}{ab}$; В) $\frac{ab}{a-b}$; Г) $\frac{a-b}{ab}$.

6. Если $a=2-\frac{b}{c}$, то b равно:

А) $c\ (2-a)$; Б) $c\ (a-2)$; В) $\frac{c}{2-a}$; Г) $\frac{2-a}{c}$.

7. Найдите значение выражения $\frac{2}{a-2}+\frac{a+2}{a^2-10a+25}\cdot\frac{6a-30}{a^2-4}$ при $a = 4{,}75$.

А) 2,5; Б) −2,5; В) 8; Г) −8.

8. Найдите значение выражения $\left(\frac{2a+6}{a^2-1}-\frac{2}{a^2+a}\right)\cdot\frac{a^2-a}{2a+2}$ при $a = 0{,}125$.

А) 1; Б) −0,5; В) 0,25; Г) 0,125.

9. Корнем какого из данных уравнений является любое число?

А) $\frac{x^2-25}{x^2-25}=1$; В) $\frac{x^2+25}{x^2+25}=1$;

Б) $\frac{x^2-25}{x+5}=x-5$; Г) $\frac{x^2-25}{x-5}=x+5$.

10. Сократите дробь $\frac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}$.

А) $\frac{x-3}{x-5}$; Б) $\frac{x+3}{x+5}$; В) $\frac{x+3}{x-5}$; Г) $\frac{x-3}{x+5}$.

11. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 2x - 5 = 0$. Найдите значение выражения $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$.

А) −1,2; Б) 1,2; В) −2,8; Г) 2,8.

12. Какое наибольшее значение принимает выражение $x + y$, если пара чисел $(x;\ y)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} x-3y=4, \\ xy-6y=1? \end{cases}$

А) 10; Б) 8; В) 6; Г) $2\frac{2}{3}$.

13. Пары чисел $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ являются решениями системы уравнений $\begin{cases} 2x-xy=5, \\ y+xy=6. \end{cases}$ Найдите значение выражения $|x_1y_1 - x_2y_2|$.

А) 1; Б) 11; В) 70; Г) 10.

14. Из одного города в другой, расстояние между которыми равно 350 км, выехали одновременно грузовой и легковой автомобили. Скорость грузовика на 20 км/ч меньше скорости легкового автомобиля, из-за чего он прибыл в пункт назначения на 2 ч позже легкового автомобиля. Пусть скорость грузового автомобиля равна x км/ч. Какое из уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии задачи?

А) $\frac{350}{x}-\frac{350}{x+20}=2;$ В) $\frac{350}{x+20}-\frac{350}{x}=2;$

Б) $\frac{350}{x}+\frac{350}{x+20}=2;$ Г) $\frac{350}{x}-\frac{350}{x-20}=2.$

15. Катер проплыл 30 км по течению реки, скорость которой равна 1 км/ч, и вернулся назад, затратив на весь путь 3 ч 10 мин. Пусть собственная скорость катера составляет x км/ч. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

А) $\frac{30}{x+1}+\frac{30}{x-1}=3{,}1;$ В) $\frac{30}{x+1}+\frac{30}{x}=3\frac{1}{6};$

Б) $\frac{30}{x+1}-\frac{30}{x-1}=3{,}1;$ Г) $\frac{30}{x+1}+\frac{30}{x-1}=3\frac{1}{6}.$

16. Два работника вместе могут выполнить компьютерный набор учебника по алгебре за 8 дней. Если первый работник наберет $\frac{2}{3}$ учебника, а затем второй работник завершит набор, то весь учебник будет набран за 16 дней. Пусть первый работник может набрать текст учебника за x дней, а второй— за y дней. Какая из данных систем уравнений соответствует условию задачи?

А) $\begin{cases} x+y=8, \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=16; \end{cases}$ В) $\begin{cases} x+y=8, \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=16; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3x}+\frac{1}{3y}=\frac{1}{16}; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y=16. \end{cases}$

17. Известно, что при некоторых отрицательных значениях a и b выполняются равенства $a^2 + b^2 = 68$, $ab = 16$. Найдите значение выражения $a + b$ при этих же значениях a и b.

А) 10; Б) −10; В) −8; Г) −6.

18. Известно, что $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$. Найдите значение выражения $\left|x - \frac{1}{x}\right|$.

А) $2\sqrt{5}$;
Б) $-2\sqrt{5}$ или $2\sqrt{5}$;
В) 6;
Г) 4.

19. Установите соответствие между данными выражениями (1–4) и выражениями, тождественно им равными (А–Д).

1) $\frac{3a-12}{a^2-16}$;

2) $\frac{1}{a} - \frac{4}{a^2+4a}$;

3) $\frac{a^2+8a+16}{a^2-16} : (a+4)$;

4) $\frac{3a}{a-4} - \frac{a+2}{2a-8} \cdot \frac{96}{a^2+2a}$.

А) $\frac{1}{a-4}$;

Б) $\frac{3a+12}{a}$;

В) $\frac{3}{a+4}$;

Г) $\frac{1}{a+4}$;

Д) $\frac{a+4}{a-4}$.

20. Установите соответствие между данными уравнениями (1–4) и множествами их корней (А–Д).

1) $x^2 - 6x - 16 = 0$;

2) $\frac{x^2-3x}{x+2} = \frac{3x+16}{x+2}$;

3) $x^4 - x^2 - 12 = 0$;

4) $\frac{x+2}{x^2-4} = 0$.

А) $\{-2,\ 8\}$;

Б) $\{-2,\ 2\}$;

В) $\{-2\}$;

Г) $\varnothing$;

Д) $\{8\}$.

Неравенства, степени, иррациональные уравнения

Задание в тестовой форме «Проверь себя» № 8

1. Какое из данных неравенств обязательно выполняется, если $a > b$ и $c < 0$?

А) $ac > b$; Б) $a > bc$; В) $a > b + c$; Г) $a + c > b$.

2. Оцените значение выражения $\frac{a}{b}$, если $3 \leqslant a \leqslant 5$ и $5 \leqslant b \leqslant 6$.

А) $15 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 30$; В) $\frac{1}{2} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 1$;

Б) $\frac{3}{5} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \frac{4}{5}$; Г) $18 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 25$.

3. Какая из данных систем неравенств имеет единственное решение?

А) $\begin{cases} 2x + 6 \geqslant 0, \\ 1 - x \geqslant 3; \end{cases}$ В) $\begin{cases} \frac{x+9}{3} > 2, \\ \frac{x}{4} - \frac{x}{2} > 0,75; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 0,5x > -1, \\ 2x - 5 > 4x + 7; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 1 \leqslant \frac{2}{3}x, \\ 0,7x + 2 \leqslant 0,3x + 0,8. \end{cases}$

4. Сколько натуральных решений имеет неравенство

$$(3x - 2)(3x + 2) - 9x(x - 1) \leqslant 6?$$

А) одно; Б) два; В) ни одного; Г) бесконечно много.

5. Укажите множество решений неравенства $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2}$.

А) $[2; +\infty)$; В) $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$;

Б) $(-\infty; 2]$; Г) $(0; 2]$.

6. Найдите сумму целых решений неравенства

$$(2x + 3)^2 - (x + 2)(x - 5) < 37.$$

А) найти невозможно; В) 15;

Б) –20; Г) –15.

7. Чему равно значение выражения $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{12{,}5}\cdot\sqrt[3]{0{,}016}$?

А) 0,25; Б) 0,5; В) 1; Г) 2.

8. Упростите выражение $\left(1-\sqrt{8}\right)^2+4\sqrt{2}$.

А) 9; Б) $9+8\sqrt{2}$; В) −7; Г) $-7+8\sqrt{2}$.

9. Вычислите значение выражения $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$.

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

10. Найдите значение выражения

$$\frac{3}{2+\sqrt{7}}+\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{13}}+\frac{3}{\sqrt{13}+4}.$$

А) 4; Б) 3; В) 2; Г) 1.

11. При каком из данных условий выполняется равенство

$$\left(\sqrt[4]{a}\right)^4\cdot\sqrt[4]{b^4}=-ab?$$

А) $a>0$ и $b>0$; В) $a<0$ и $b>0$;
Б) $a>0$ и $b<0$; Г) $a<0$ и $b<0$.

12. Найдите значение выражения $\dfrac{3x^{\frac{1}{6}}+x}{x^{\frac{5}{6}}+3}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}}$ при $x=12$, $y=64$.

А) 2; Б) −2; В) 4; Г) −4.

13. Укажите промежуток, которому принадлежит число $\sqrt[3]{32}$.

А) (0; 1); Б) (1; 2); В) (2; 3); Г) (3; 4).

14. Вычислите значение выражения $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-1\right)^3}$.

А) $3-2\sqrt{5}$; Б) $1-2\sqrt{5}$; В) −1; Г) 1.

15. Решите неравенство $\dfrac{x^3}{x}\leqslant 1$.

А) $[-1;\ 0)\cup(0;\ 1]$; В) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1]$;
Б) $(-\infty;\ 1]$; Г) $[-1;\ 1]$.

16. Укажите множество решений уравнения $\left(\sqrt{-x}\right)^2=\sqrt{(-x)^2}$.

А) $\varnothing$; Б) $\{0\}$; В) $(-\infty;\ 0]$; Г) $\{-1,\ 0\}$.

17. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt[6]{x+2}\cdot\sqrt[5]{x+3}\cdot\sqrt[4]{4-x}=0$.

А) 5; Б) 2; В) −1; Г) −3.

18. Решите уравнение $\sqrt{2x+7}-\sqrt{2-x}=2$.

А) 1; Б) −1; В) $-\frac{31}{9}$; 1; Г) −1; $\frac{31}{9}$.

19. Установите соответствие между данными неравенствами (1–4) и их множествами решений (А–Д).

1) $\frac{2x-1}{x}\leqslant 1$;

2) $x\geqslant x^2$;

3) $\frac{x^2+x-2}{x^2}\leqslant 0$;

4) $x^3\leqslant x^2$.

А) $(0;\ 1]$;

Б) $[-2;\ 0)\cup(0;\ 1]$;

В) $[0;\ 1]$;

Г) $(-\infty;\ 1]$;

Д) $[-1;\ 0)\cup(0;\ 1]$.

20. Установите соответствие между данными выражениями (1–4) и выражениями, тождественно им равными (А–Д).

1) $\dfrac{\left(a^{-\frac{5}{4}}\right)^{-8}\cdot a^{2,5}}{a^{-3,5}}$;

2) $\frac{9}{4}a^{-5}b^{-4}\cdot\left(\frac{3}{2}a^{-1}b^{-2}\right)^{-2}$;

3) $\left(\frac{a^3}{b^{-2}}\right)^{-3}:\left(\frac{a^4}{b^{-3}}\right)^{-2}$;

4) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt[4]{a}}\cdot\sqrt[16]{a^{12}}}{\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}$.

А) a^{16};

Б) $\frac{1}{a}$;

В) $\frac{1}{a^3}$;

Г) a;

Д) $\frac{b}{a^3}$.

Функции и последовательности

Задание в тестовой форме «Проверь себя» № 9

1. Найдите область определения функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4x+4}$.

А) $[-1;\ +\infty)$; В) $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$;
Б) $(-1;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$; Г) $[-1;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

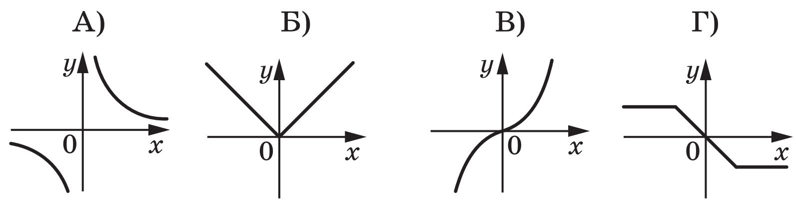
2. Сколько нулей имеет функция $y = x^4 - x^2 - 2$?

А) ни одного; Б) один; В) два; Г) три.

3. График нечетной функции $y = f(x)$ проходит через точку $A\ (2;\ -7)$. Чему равно значение $f\ (-2)$?

А) -7; Б) 7; В) 2; Г) определить невозможно.

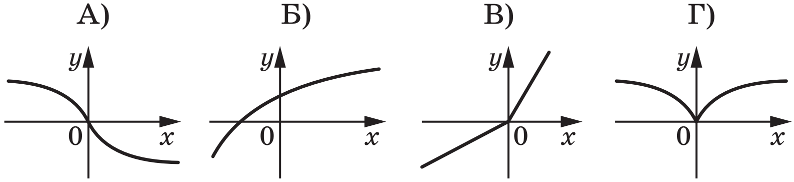
4. На одном из рисунков изображен график четной функции. Укажите этот рисунок.



5. Какая из данных функций убывает на промежутке $(-\infty;\ +\infty)$?

А) $y=\dfrac{1}{x}$; Б) $y = -x^2$; В) $y=-\sqrt{x}$; Г) $y=\sqrt[3]{-x}$.

6. На каком рисунке изображен график необратимой функции?



7. Какая функция является обратной к функции $y = x - 2$?

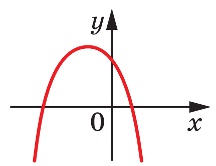
А) $y = -x + 2$; В) $y = x - 2$;
Б) $y = -x - 2$; Г) $y = x + 2$.

8. Чему равно наибольшее значение функции $y = x^{-2}$ на промежутке [3; 5]?

А) $\frac{1}{9}$; Б) $\frac{1}{25}$; В) 9; Г) 25.

9. График линейной функции $y = kx + b$ содержит точки в первой, второй и четвертой координатных четвертях. Укажите верное утверждение.

А) $k > 0$, $b > 0$;
Б) $k > 0$, $b < 0$;
В) $k < 0$, $b > 0$;
Г) $k < 0$, $b < 0$.



10. Графиком какой из данных функций может быть изображенная на рисунке парабола?

А) $y = -x^2 + 2x$;
Б) $y = -x^2 - 2x - 2$;
В) $y = -x^2 - 2x + 2$;
Г) $y = -x^2 + 2x + 2$.

11. При каком значении a наименьшее значение функции

$$y = 2x^2 - 8x + a$$

равно 3?

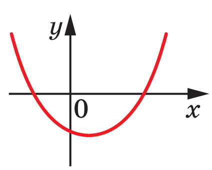
А) 3;
Б) 11;
В) -21;
Г) такого значения не существует.

12. На рисунке изображен график квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

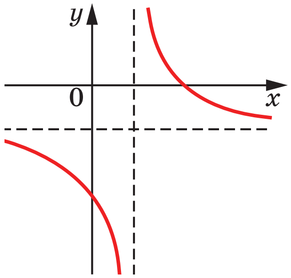
Укажите верное утверждение.

А) $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$;
Б) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$;
В) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$;
Г) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$.



13. На рисунке изображен график функции $y = \dfrac{x+a}{bx-c}$. Укажите верное утверждение.

А) $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$;
Б) $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$;
В) $a > 0,\ b > 0,\ c < 0$;
Г) $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$.



14. Сколько положительных членов содержит арифметическая прогрессия 5,2; 4,9; 4,6; ... ?

А) 17; Б) 18; В) 19; Г) 20.

15. Места в цирке расположены так, что в первом ряду каждого сектора 8 мест, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в одном секторе, если в нем 15 рядов?

А) 270 мест; Б) 330 мест; В) 285 мест; Г) 345 мест.

16. Чему равна сумма тридцати пяти первых членов арифметической прогрессии, если ее восемнадцатый член равен 20?

А) 350; Б) 700; В) 1400; Г) определить невозможно.

17. Второй член геометрической прогрессии с положительным знаменателем равен 48, а восьмой член равен $\dfrac{1}{3}$. Найдите пятый член этой прогрессии.

А) 4; Б) 2; В) $\dfrac{1}{4}$; Г) $\dfrac{1}{2}$.

18. Чему равна сумма бесконечной геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 = -12$, $b_6 = \dfrac{3}{2}$?

А) 24; Б) 48; В) −96; Г) −32.

19. Установите соответствие между данными функциями (1–4) и их областями определения (А–Д).

1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;
2) $y=\sqrt[4]{x+1}$;
3) $y=\sqrt{x^2-1}$;
4) $y=\dfrac{1}{\sqrt[6]{1-x}}$.

А) $(-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$;
Б) $(-\infty;\ 1)$;
В) $(-\infty;\ +\infty)$;
Г) $[-1;\ +\infty)$;
Д) $[1;\ +\infty)$.

20. Установите соответствие между данными функциями (1–4) и их областями значений (А–Д).

1) $y = x^2 + 4$;
2) $y = 4 - |x|$;
3) $y=\sqrt{x+4}$;
4) $y=\sqrt{4-x^2}$.

А) $[0;\ 2]$;
Б) $[2;\ +\infty)$;
В) $[0;\ +\infty)$;
Г) $(-\infty;\ 4]$;
Д) $[4;\ +\infty)$.

Тригонометрические функции

Задание в тестовой форме «Проверь себя» № 10

1. Вычислите значение выражения $2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+4\cos\frac{2\pi}{3}$.

А) −4; Б) 2; В) 0; Г) −1.

2. Укажите верное неравенство.

А) $\sin 160° < 0$; В) $\operatorname{tg} 140° > 0$;
Б) $\cos 250° > 0$; Г) $\operatorname{ctg} 200° > 0$.

3. Какая из данных функций является нечетной?

А) $y=\frac{1}{\cos x}$; В) $y = x + \cos x$;
Б) $y=\sqrt{\cos x}$; Г) $y = x\cos x$.

4. Чему равно наименьшее значение выражения $1 - 2\cos\alpha$?

А) −2; Б) −1; В) 0; Г) 3.

5. Упростите выражение $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

А) −1; Б) 1; В) $\operatorname{tg}^2\alpha$; Г) $\operatorname{ctg}^2\alpha$.

6. Найдите значение выражения $\cos 37°\cos 23° - \sin 37°\sin 23°$.

А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; В) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; Г) 1.

7. Упростите выражение $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)$.

А) $\cos\alpha + \sin\alpha$; Б) $2\sin\alpha$; В) $\cos\alpha - \sin\alpha$; Г) 0.

8. Известно, что $\cos(\alpha + \beta) = 0$ и $\sin\alpha = 1$. Найдите значение $\sin\beta$.

А) 2; Б) 1; В) 0; Г) −1.

9. Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$.

А) 2; Б) $2\cos\alpha$; В) $2\sin\alpha$; Г) $\sin\alpha\cos\alpha$.

10. Вычислите значение выражения $\frac{\cos 20°-\cos 80°}{\sin 20°+\sin 80°}$.

А) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; В) $\sqrt{3}$; Г) $-\sqrt{3}$.

11. Какое из данных уравнений не имеет корней?

А) $\sin x = \frac{1}{7}$; Б) $\cos x = \frac{8}{7}$; В) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{7}$; Г) $\operatorname{ctg} x = \frac{8}{7}$.

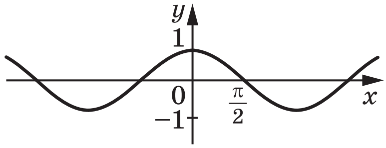
12. График какой функции изображен на рисунке?

А) $y = \sin x$;

Б) $y = \sin(\pi + x)$;

В) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

Г) $y = \sin(2\pi - x)$.



13. Найдите корни уравнения $\operatorname{tg} 2x = 0$.

А) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

Б) $\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$;

В) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

Г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

14. Решите уравнение $\cos \frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

А) $\pm\frac{5\pi}{2} + 6\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

Б) $\pm\frac{\pi}{2} + 6\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

В) $\pm\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$;

Г) $\pm\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

15. Решите уравнение $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0$.

А) $\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$;

Б) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

В) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

Г) корней нет.

16. Укажите множество решений неравенства $\sin x > -\frac{1}{2}$.

А) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

Б) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

В) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

Г) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

17. Найдите $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$.

А) $\frac{7}{8}$; Б) $\frac{3}{4}$; В) $\frac{15}{16}$; Г) $\frac{5}{8}$.

18. Решите уравнение $1 - \cos 6x = \sin 3x$.

А) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; В) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

Б) πk, $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; Г) $\frac{\pi k}{3}$, $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

19. Установите соответствие между данными выражениями (1–4) и выражениями, тождественно им равными (А–Д).

1) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$;
2) $(\sin\alpha + \cos\alpha)(-\cos\alpha + \sin\alpha)$;
3) $\sin 3\alpha \sin\alpha - \cos 3\alpha \cos\alpha$;
4) $\sin 2\alpha + \sqrt{3}\cos 2\alpha$.

А) $\cos 4\alpha$;
Б) $2\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$;
В) $-\cos 4\alpha$;
Г) $-\cos 2\alpha$;
Д) $1 + \sin 2\alpha$.

20. Установите соответствие между тригонометрическими уравнениями (1–4) и их решениями (А–Д).

1) $\cos x = -1$;
2) $\operatorname{ctg} x = -1$;
3) $|\sin x| = 1$;
4) $|\operatorname{tg} x| = 1$.

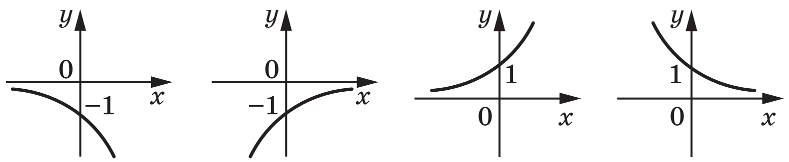
А) πk, $k \in \mathbb{Z}$;
Б) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
В) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
Г) $\frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
Д) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Показательная и логарифмическая функции

Задание в тестовой форме «Проверь себя» № 11

1. На одном из рисунков изображен график функции $y = 2^{-x}$. Укажите этот рисунок.

А) Б) В) Г)

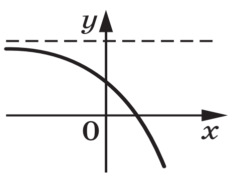


2. Среди данных функций укажите убывающую.

А) $y = \pi^x$; Б) $y = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$; В) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$; Г) $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$.

3. На рисунке изображен график функции $y = a \cdot 3^x + b$. Укажите верное утверждение.

А) $a > 0,\ b > 0$;
Б) $a > 0,\ b < 0$;
В) $a < 0,\ b > 0$;
Г) $a < 0,\ b < 0$.



4. Какова область значений функции $y = 5^{2\sin^2 x - \cos^2 x}$?

А) $[1;\ 5]$; Б) $[5;\ 25]$; В) $\left[\frac{1}{5}; 25\right]$; Г) $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$.

5. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $0{,}2^{3x-2} = 0{,}0016$.

А) $[-1;\ 0]$; Б) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; В) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; Г) $(1;\ 2]$.

6. Найдите множество решений неравенства $\left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \geqslant 6^4$.

А) $(-\infty;\ -4]$; Б) $[-4;\ +\infty)$; В) $(-\infty;\ 4]$; Г) $[4;\ +\infty)$.

7. Решите уравнение $2^{x+2} - 2^x = 96$.

А) 3; Б) 4; В) 5; Г) 6.

8. Найдите значение выражения $0{,}04^{\log_{0,2} 2}$.

А) 0,2; Б) $\sqrt{2}$; В) 2; Г) 4.

9. Чему равно значение выражения $\log_a \sqrt{ab}$, если $\log_a b = 5$?

А) 3; Б) 2; В) 5; Г) определить невозможно.

10. Решите уравнение $2 \cdot 25^x + 5^x - 1 = 0$.

А) -1; $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{1}{5}$; В) $-\log_5 2$; Г) корней нет.

11. Какова область определения функции $y = \frac{e^x}{\ln x}$?

А) $(0; +\infty)$; В) $(1; +\infty)$;

Б) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; Г) $(-\infty; +\infty)$.

12. Решите уравнение $\log_x(x + 2) = 2$.

А) -1; 2; Б) -2; 1; В) 2; Г) 1.

13. Решите уравнение $\log_{0,1}(x + 4) + \log_{0,1}(x + 6) = \log_{0,1} 35$.

А) -11; 1; Б) -1; 11; В) 11; Г) 1.

14. Решите неравенство $\log_5 (x - 3) \leqslant 1$.

А) $(-\infty; 8]$; Б) $(3; 8]$; В) $[3; 8]$; Г) $(-\infty; 3)$.

15. Решите неравенство $\log_7 0{,}4 \cdot \log_7 x < 0$.

А) $(1; 7)$; Б) $(-\infty; 1)$; В) $(1; +\infty)$; Г) $(0; 1)$.

16. Найдите множество решений неравенства

$$\log_{0,3}(x^2 + 2x - 3) > \log_{0,3}(x - 1).$$

А) $(-2; 1)$; В) $(-\infty; +\infty)$;

Б) $(-3; -2) \cup (-2; 1)$; Г) $\varnothing$.

17. Сколько целых решений имеет неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2+6x) \geqslant -2?$$

А) 2; Б) 4; В) 6; Г) 11.

18. Найдите значение выражения $\log_3\left(\sqrt{a+18}-\sqrt{a-9}\right)$, если $\log_3\left(\sqrt{a+18}+\sqrt{a-9}\right)=5$.

А) −2; Б) $\frac{3}{5}$; В) 1; Г) найти невозможно.

19. Установите соответствие между данными функциями (1–4) и их областями определения (А–Д).

1) $y=\dfrac{2}{2^x-4}$;
2) $y=\sqrt{4-2^x}$;
3) $y=\log_{0,2}(2-x)$;
4) $y=\sqrt{\log_{0,2}(2-x)}$.

А) $(-\infty;\ 2)$;
Б) $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$;
В) $(-\infty;\ 2]$;
Г) $(2;\ +\infty)$;
Д) $[1;\ 2)$.

20. Установите соответствие между данными выражениями (1–4) и их значениями (А–Д).

1) $\log_4\sqrt{2}$;
2) $\log_{16}\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$;
3) $\log_6 25-2\log_6\dfrac{5}{6}$;
4) $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 81$.

А) 4;
Б) $-\dfrac{3}{4}$;
В) $\dfrac{1}{4}$;
Г) 2;
Д) 1.

Производная и интеграл. Начала теории вероятностей

Задание в тестовой форме «Проверь себя» № 12

1. Найдите производную функции $f(x)=\dfrac{6}{x^3}$.

А) $f'(x)=-\dfrac{18}{x^2}$; В) $f'(x)=\dfrac{2}{x^2}$;

Б) $f'(x)=-\dfrac{18}{x^4}$; Г) $f'(x)=\dfrac{2}{x^4}$.

2. Укажите производную функции $f(x)=\sqrt{4x+1}$.

А) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}$; В) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{4x+1}}$;

Б) $f'(x)=\dfrac{4}{\sqrt{4x+1}}$; Г) $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$.

3. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x) = x^2 - 5x$, в которой касательная к этому графику образует с положительным направлением оси абсцисс угол $45°$.

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

4. Решите уравнение $f'(x) = g'(x)$, если

$$f(x)=\frac{x^3+2}{x},\quad g(x)=\frac{6x^2+2}{x}.$$

А) 0; −3; Б) 0; 3; В) 3; Г) корней нет.

5. Тело двигается по координатной прямой по закону $s(t) = t^2 + 3t - 2$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). В какой момент времени t скорость движения тела составляет 10 м/с?

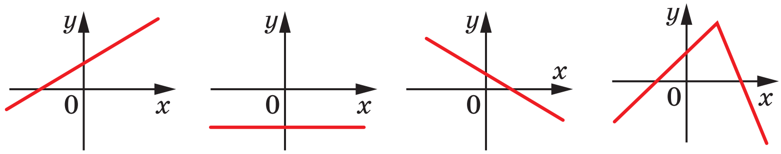
А) $t = 4{,}5$ с; Б) $t = 3{,}5$ с; В) $t = 4$ с; Г) $t = 3$ с.

6. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$ в точке его пересечения с осью ординат?

А) 1; Б) −2; В) −3; Г) 13.

7. Укажите рисунок, на котором может быть изображен график производной функции $y=\dfrac{-x^2+bx+c}{4}$.

А) Б) В) Г)



8. Найдите промежутки убывания функции $f(x) = 3x^2 - x^3$.

А) $[0;\ 2]$; В) $(-\infty;\ 0]$ и $[2;\ +\infty)$;
Б) $[-2;\ 0]$; Г) $(-\infty;\ -2]$ и $[0;\ +\infty)$.

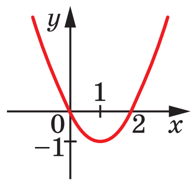
9. Функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел и дифференцируема в каждой точке области определения. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$. Определите точку минимума функции $y = f(x)$.

А) 2;

Б) 1;

В) 0;

Г) определить невозможно.



10. Чему равно наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x$ на промежутке $[-2;\ 0]$?

А) -1; Б) -2; В) 0; Г) 2.

11. Для функции $f(x) = e^{2x} - \cos x$ найдите первообразную F, график которой проходит через начало координат.

А) $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-\sin x-\dfrac{1}{2}$;

Б) $F(x) = e^{2x} - \sin x - 1$;

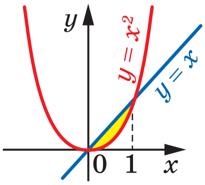
В) $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+\sin x-\dfrac{3}{2}$;

Г) $F(x)=\dfrac{e^{2x+1}}{2x+1}-\sin x-e$.

12. Найдите площадь закрашенной фигуры, изображенной на рисунке.

А) $\frac{1}{3}$; В) $\frac{1}{6}$;

Б) $\frac{2}{3}$; Г) $\frac{1}{4}$.



13. Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos x \, dx$.

А) $\frac{1}{2}$; Б) $-\frac{1}{2}$; В) $\frac{1}{4}$; Г) $-\frac{1}{4}$.

14. Из натуральных чисел от 1 до 18 включительно ученик наугад называет одно. Какова вероятность того, что это число является делителем числа 18?

А) $\frac{1}{4}$; Б) $\frac{1}{3}$; В) $\frac{1}{6}$; Г) $\frac{1}{18}$.

15. В лотерее разыгрывались 12 компьютеров, 18 фотоаппаратов и 120 калькуляторов. Всего было выпущено 15 000 лотерейных билетов. Какова вероятность, приобретя один билет, не выиграть ни одного приза?

А) $\frac{1}{10}$; Б) $\frac{1}{100}$; В) $\frac{9}{10}$; Г) $\frac{99}{100}$.

16. Из двузначных четных чисел наугад выбирают одно число. Какова вероятность того, что это число будет кратным числу 7?

А) $\frac{1}{9}$; Б) $\frac{7}{45}$; В) $\frac{1}{14}$; Г) $\frac{2}{15}$.

17. В коробке лежат 12 белых и 16 красных шариков. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик окажется белым?

А) $\frac{3}{4}$; Б) $\frac{3}{7}$; В) $\frac{1}{12}$; Г) $\frac{4}{7}$.

18. В коробке лежат карандаши, из них 24 карандаша — синие, 8 карандашей — зеленые, а остальные — желтые. Сколько карандашей лежит в коробке, если вероятность того, что выбранный наугад карандаш будет желтым, составляет $\frac{1}{3}$?

А) 48; Б) 54; В) 45; Г) 42.

19. Установите соответствие между данными функциями (1–4) и значениями их производных (А–Д) в точке x_0.

1) $f(x) = 3\sin x - 2\cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;

2) $f(x) = \frac{2}{1-x},\ x_0 = -1$;

3) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - e^{4x-4},\ x_0 = 1$;

4) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

А) 2;

Б) $-\frac{1}{2}$;

В) $\frac{1}{2}$;

Г) −2;

Д) −4.

20. Установите соответствие между данными интегралами (1–4) и их значениями (А–Д).

1) $\int\limits_0^1 dx$;

2) $\int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

3) $\int\limits_0^2 (x^3 - 1)\,dx$;

4) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{4}}$.

А) 2;

Б) $\frac{1}{2}$;

В) 4;

Г) 1;

Д) −4.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

1.3. 1) 2; 2) 1; 3) 0. **1.4.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0. **1.5.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) −3; 3) $\frac{4}{9}$. **1.6.** 1) −2; 2) 0; 3) $-\frac{1}{3}$. **1.7.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) 0,1. **1.8.** 1) 1; 2) 3. **1.10.** Да. **1.11.** Равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{ слагаемых}}=$ $=\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\ldots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{n\text{ слагаемых}}$ ошибочно, поскольку теорему о пределе суммы можно использовать для конечного (фиксированного) количества последовательностей. **1.14.** 1) 0; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 1. **1.15.** 1) 0; 2) $-\frac{3}{2}$. **1.16.** Нет. Например, в любом промежутке $(0-\varepsilon;\ 0+\varepsilon)$ содержится бесконечно много членов последовательности 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... **1.17.** 1) Да; 2) да. **1.18.** Да. **1.19.** Последовательность останется сходящейся; предел не изменится. **1.20.** Нет. *Указание*. Рассмотрите, например, последовательность, заданную формулой $a_n=\pi n$. **1.21.** Нет. **1.22.** 1) *Указание*. Воспользуйтесь теоремой о пределе произведения. **1.23.** 1) 4; 2) 2. **1.24.** 1) 6; 2) $\frac{1}{7}$.

2.10. 1) $y=4x+19$; 2) $y=-3x-2$; 3) $y=7$. **2.11.** 1) 45°; 2) 135°; 3) 0°. **2.12.** 1) $y=x\sqrt{3}+6-2\sqrt{3}$; 2) $y=-x\sqrt{3}+6+2\sqrt{3}$.

4.2. 1) 10; 2) 2; 3) −22; 4) 1,5; 5) 1; 6) 28. **4.3.** 1) 4; 2) 0,75; 3) 16; 4) 5. **4.4.** 1) 0,5; 2) 1; 3) 6. *Указание*. Раскройте скобки в выражении $(1+x)^4$; 4) $\frac{5}{3}$. **4.5.** 1) −1; 2) 0,5. **4.6.** 1) $-\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{9}$. **4.7.** 2. **4.8.** 0. **4.9.** $\frac{m}{n}$. **4.10.** $\frac{m}{n}$.

5.7. 1) Да; 2) нет. **5.8.** 1) Нет; 2) да. **5.9.** 1) -1; 2) $\frac{1}{4}$; 3) -3. **5.10.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) -2; 3) $\frac{2}{3}$. *Указание.* $\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=$ $=\frac{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+1\right)}$. **5.11.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{16}$; 4) 3. *Указание.* $\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}=\frac{\left(\sqrt{6-x}-1\right)\left(\sqrt{6-x}+1\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{\left(3-\sqrt{4+x}\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)\left(\sqrt{6-x}+1\right)}$; 5) 4; 6) 3. *Указание.* $\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\frac{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$. **5.12.** 1) 4; 2) $-\frac{1}{56}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) $\frac{1}{144}$. **5.15.** 1) $[1; 3]$; 2) $[-4; -2]$; 3) $[0; \pi]$. **5.16.** 1) $[-5; -3]$; 2) $[2; 4]$; 3) $[0; \pi]$. **5.17.** $\left[0; \frac{1}{6}\right]$. **5.18.** $\left[0; \frac{1}{7}\right]$. *Указание.* Воспользуйтесь неравенством $\frac{x^2}{4x^4+3x^2+1}\leqslant\frac{x^2}{2\sqrt{4x^4\cdot 1}+3x^2}$. **5.19.** 1) 2; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{9}{2}$; 5) $-\frac{99}{8}$; 6) 84.

6.7. 8 м/с. **6.8.** 1) 20 м/с; 2) 10 м/с. **6.9.** 1) 2,6; 2) 2. **6.10.** 1) 7; 2) 12.

7.6. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **7.7.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.8.** 1) 13,5; 2) $\frac{13}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{176}{3}$. **7.9.** 1) 5; 2) $\frac{3}{16}$. **7.10.** 1) $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$; 2) $f'(x)=$ $=-2x$. **7.11.** 1) $f'(x)=\frac{2}{x^3}$; 2) $f'(x)=2x+3$. **7.12.** 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) 1. **7.13.** 1) -32; 2) $\frac{1}{27}$; 3) $-\frac{1}{27}$; 4) 1. **7.22.** 1) -1; 1; 2) 4; 3) 2; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **7.23.** 1) -2; 2) -27; 27; 3) -3; 3;

4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **7.24.** 1. Величина $s'\left(\frac{1}{2}\right)=1$ задает мгновенную скорость материальной точки в момент времени $t_0=\frac{1}{2}$. **7.25.** 12.

8.15. $\frac{17}{9}$ м/с. **8.16.** 105 м/с. **8.19.** 2) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; 4) $(1; 5)$; 6) все числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **8.20.** 6) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **8.21.** 1) $y'=\frac{9}{x^4}-\frac{9}{x^{10}}$; 2) $y'=\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x^2}-\frac{20}{x^6}$; 3) $y'=\frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$; 4) $y' = \cos x \cos 2x - 2 \sin x \sin 2x$; 5) $y' = \frac{\sin(2x+5)}{\cos^2 x}+2\operatorname{tg} x\cos(2x+5)$; 6) $y'=\frac{3(1-x)\sin 3x-\cos 3x}{(x-1)^2}$; 7) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$; 8) $y' = (x+1)^2(x-2)^3(7x-2)$; 9) $y' = -\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$. **8.22.** 1) $y'=-\frac{4}{x^5}-\frac{8}{x^9}$; 2) $y'=\frac{30}{x^7}-\frac{1}{x^2}-\frac{12}{x^3}$; 3) $y'=\frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$; 4) $y' = 2\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$; 5) $y' = (x-3)^3(x+2)^4(9x-7)$; 6) $y'=\frac{2\sin\frac{x}{4}-\frac{1}{4}(2x-3)\cos\frac{x}{4}}{\sin^2\frac{x}{4}}$.

8.23. 1) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; 2) $[-2; 1) \cup (1; 4]$; 3) $\left[-\frac{4}{3}; 2\right]$; 4) $[-1; 0) \cup (0; 1]$; 5) $-\frac{5\pi}{8}+\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{8}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{12}+\pi k \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{12}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **8.24.** 1) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $(-3; -2) \cup (-2; -1)$; 3) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$; 4) $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$;

5) $\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\pi+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}<x<\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. **8.25.** 16 кг·м/с. **8.26.** 400 Дж. **8.27.** 7 м. **8.28.** 1) $y'=-6\cos^2 2x\sin 2x$; 2) $y'=\frac{\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{4}\right)}{10\sqrt{\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{4}\right)}}$; 3) $y'=2\cos\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3}-5\right)^5$. **8.29.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 3) 0. **8.30.** 1) 2; 0; 2) −6; 0. **8.31.** 1) 2; −2; 2) −10; 2. **8.32.** 1) 3; 2) корней нет. **8.33.** 1) 2; 2) $\frac{2}{3}$. **8.37.** 1) Не дифференцируема; 2) может быть как дифференцируемой, так и недифференцируемой. *Указание*. Рассмотрите, например, функции $f(x)=|x|$, $g(x)=-|x|$. **8.38.** 1) Может быть как дифференцируемой, так и недифференцируемой. *Указание*. Рассмотрите, например, функции $f(x)=0$, $g(x)=|x|$. **8.40.** 1) $y=4x-8$; 2) $y=-4$; 3) $y=-x-3$. **8.42.** $y=9x+18$. **8.43.** $y=4x+9$.

9.1. 1) $y=x-1$; 2) $y=12x-43$; 3) $y=-4x+4$; 4) $y=\frac{2}{3}x+3$; 5) $y=x$; 6) $y=-1$; 7) $y=2x-\pi+1$; 8) $y=x+4$; 9) $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$. **9.2.** 1) $y=3x-4$; 2) $y=-2x+2$; 3) $y=-x+\frac{\pi}{2}$; 4) $y=1$; 5) $y=-2x-\pi-1$; 6) $y=-2{,}5x-1{,}5$; 7) $y=5x-18$. **9.3.** 1) $y=-3x-3$; 2) $y=\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{2}$. **9.4.** 1) $y=-5x+2$; 2) $y=\frac{3\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.5.** 1) $y=6x-3$; 2) $y=2x-2$, $y=2x+2$. **9.6.** 1) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; 2) $y=-3x+9$, $y=3x$. **9.7.** (2; 7). **9.8.** (1; 1), (−1; −1). **9.9.** Касательные пересекаются. **9.10.** 1) (4; −9); 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{5}{4}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{12};\frac{3}{2}\right)$; 4) (5; 4), (−1; −2). **9.11.** 1) (0; 0);

2) (0; –1), $\left(\frac{4}{3};-\frac{23}{27}\right)$. **9.14.** 1) $y=-1$, $y=3$; 2) $y=1$, $y=-7$. **9.15.** $y=-5$, $y=\frac{17}{3}$. **9.16.** 1) $y=-x-4$; 2) $y=3x-3$; 3) $y=2x-8$, $y=2x+19$. **9.17.** 1) $y=-7x-9$; 2) $y=x+\frac{1}{4}$. **9.18.** Нет. **9.19.** Да, $x_0=0$. **9.20.** Да, $x_0=1$. **9.21.** 8. **9.22.** 2. **9.23.** $y=-x^2$. **9.24.** (1,5; –2). *Указание*. Воспользуйтесь тем, что прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда выполняется равенство $k_1k_2=-1$. **9.25.** Нет. **9.26.** $b=c=2$. **9.27.** $a=3$, $b=1$. **9.28.** $y=2\sqrt{2}x+1$, $y=-2\sqrt{2}x+1$. **9.29.** $y=2x-5$, $y=6x-13$. **9.30.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **9.31.** (1; 4). **9.32.** $\left(0;\frac{7}{2}\right)$. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что у перпендикулярных прямых произведение угловых коэффициентов равно –1. **9.33.** (0; –3). **9.34.** 2. **9.35.** 0. **9.36.** $y=8x-20$. *Указание*. Запишите уравнение касательных к графикам функций f и g в точках $A\ (x_1;\ f\ (x_1))$ и $B\ (x_2;\ g\ (x_2))$ соответственно, а затем установите, при каких условиях эти касательные совпадают. **9.37.** $y=8x+4$. **9.38.** 4) $(-9;-1)\cup(1;3)$; 5) $[1;3)\cup(3;4]$; 6) $(-1;1)\cup(1;3)\cup(3;+\infty)$.

10.3. 1) $\sqrt{\frac{7}{3}}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $2-\frac{2}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi}$. **10.4.** 1) 2; 2) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{4}{\pi}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. **10.10.** *Указание*. Рассмотрите функцию $g\ (x)=f\ (x)\cos x$.

11.1. 1) Возрастает на $[-2;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-2]$; 2) возрастает на $(-\infty;0]$ и $[1;+\infty)$, убывает на $[0;1]$; 3) возрастает на $[-1;7]$, убывает на $(-\infty;-1]$ и $[7;+\infty)$; 4) возрастает на $[-1;0]$ и $[1;+\infty)$, убывает на $(-\infty;-1]$ и $[0;1]$; 5) возрастает на $\mathbb{R}$; 6) возрастает на $[2;+\infty)$, убывает на $(-\infty;2]$. **11.2.** 1) Возрастает на $(-\infty;3]$, убывает на $[3;+\infty)$; 2) возрастает на $(-\infty;-3]$ и $[1;+\infty)$, убывает на $[-3;1]$; 3) возрастает на $[-2; 0]$ и $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -2]$ и $[0; 2]$; 4) возрастает на $[-1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$. **11.3.** 1) Возрастает на $[0; 1]$ и $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$ и $[1; 2]$; 2) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$; 3) возрастает на $(-\infty; -3]$, $[-1; 1]$ и $[3; +\infty)$, убывает на $[-3; -1]$ и $[1; 3]$; 4) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$; 5) возрастает на $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$, убывает на $[-3; 0)$ и $(0; 3]$; 6) возрастает на $(-\infty; -3]$ и $[-1; +\infty)$, убывает на $[-3; -2)$ и $(-2; -1]$; 7) возрастает на $[1; 3)$ и $(3; 5]$, убывает на $(-\infty; 1]$ и $[5; +\infty)$; 8) убывает на $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ и $(3; +\infty)$. **11.4.** 1) Возрастает на $[0; 2]$ и $[3; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$ и $[2; 3]$; 2) возрастает на $(-\infty; 3]$, убывает на $[3; +\infty)$; 3) убывает на $(-\infty; 5)$ и $(5; +\infty)$; 4) возрастает на $(-\infty; -2]$ и $[10; +\infty)$, убывает на $[-2; 4)$ и $(4; 10]$; 5) возрастает на $(-\infty; 0)$ и $[2; +\infty)$, убывает на $(0; 2]$; 6) возрастает на $(-\infty; -2)$ и $(-2; 0]$, убывает на $[0; 2)$ и $(2; +\infty)$. **11.5.** $(-\infty; x_1]$ и $[x_2; x_3]$. **11.7.** $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$. **11.12.** 1) Возрастает на $\mathbb{R}$; 2) возрастает на $\mathbb{R}$; 3) возрастает на промежутках вида $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k; \frac{7\pi}{3}+2\pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **11.13.** 1) Убывает на $\mathbb{R}$; 2) возрастает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{7\pi}{4}+2\pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **11.14.** 1) Возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -4]$; 2) возрастает на $[0; 3]$, убывает на $[3; 6]$. **11.15.** Возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$. **11.16.** 1) $(-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -4) \cup [2; 5)$. **11.17.** 1) $(0; 7) \cup (7; +\infty)$; 2) $[-3; 0] \cup [2; +\infty)$. **11.18.** Возрастает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **11.19.** Возрастает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{5\pi}{6}+\pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \pi k\right)$ и $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **11.20.** 1) $(-\infty;\ 0]$; 2) $[12;\ +\infty)$; 3) $[0;\ +\infty)$; 4) $\left[-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right]$. **11.21.** 1) $(-\infty;\ 0]$; 2) $(-\infty;\ -6]$; 3) $(-\infty;\ 0]$; 4) $[-4;\ 4]$. **11.22.** $[12;\ 14]$. **11.23.** $(-\infty;\ -3]$. **11.24.** $\left[-\frac{14}{3};-3\right]$. **11.27.** -1. **11.28.** 0. **11.29.** 0. **11.30.** $(1;\ +\infty)$. *Указание*. Докажите, что функция $f(x) = x^7 - 2x^4 + 3x - 2$ возрастает на $\mathbb{R}$, причем $f(1) = 0$. **11.31.** $(-\infty;\ 1)$. **11.32.** $(1;\ 1)$. *Указание*. Рассмотрите функцию $f(t) = t - \sin t$. Покажите, что эта функция возрастает на $\mathbb{R}$. Тогда из равенства $f(x) = f(y)$ следует, что $x = y$. **11.33.** $(4;\ 4)$.

12.6. 1) $x_{\min} = 0$; 2) $x_{\min} = 3$; 3) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$; 4) $x_{\min} = -2$, $x_{\min} = 2$, $x_{\max} = 0$; 5) $x_{\min} = 5$, $x_{\max} = -1$; 6) $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -1$, $x_{\max} = 1$. **12.7.** 1) $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = -1$; 2) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$; 3) $x_{\max} = 2$; 4) $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = -7$; 5) $x_{\min} = \frac{3}{2}$; 6) $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -\frac{1}{4}$, $x_{\max} = 1$. **12.9.** Ни одной. **12.10.** 1) Возрастает на $[6;\ +\infty)$, убывает на $(-\infty;\ 6]$, $x_{\min} = 6$; 2) возрастает на $\left(-\infty;\frac{8}{5}\right]$ и $[2;\ +\infty)$, убывает на $\left[\frac{8}{5};2\right]$, $x_{\min} = 2$, $x_{\max} = \frac{8}{5}$; 3) возрастает на $[0;\ +\infty)$, убывает на $(-\infty;\ 0]$, $x_{\min} = 0$. **12.11.** 1) Возрастает на $[0;\ +\infty)$, убывает на $(-\infty;\ 0]$, $x_{\min} = 0$; 2) возрастает на $(-\infty;\ -4]$ и $[0;\ +\infty)$, убывает на $[-4;\ 0]$, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -4$. **12.14.** 1) Возрастает на $(-\infty;\ 0)$ и $[2;\ +\infty)$, убывает на $(0;\ 2]$, $x_{\min} = 2$; 2) возрастает на $(-\infty;\ 1]$ и $[3;\ +\infty)$, убывает на $[1;\ 2)$ и $(2;\ 3]$, $x_{\min} = 3$, $x_{\max} = 1$; 3) возрастает на $(-\infty;\ 0]$, убывает на $[0;\ +\infty)$, $x_{\max} = 0$; 4) возрастает на $\left[-\sqrt{6};0\right)$ и $\left[\sqrt{6};+\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty;-\sqrt{6}\right]$ и $\left(0;\sqrt{6}\right]$, $x_{\min} = -\sqrt{6}$, $x_{\min} = \sqrt{6}$; 5) возрастает на $(0;\ 2]$, убывает на $(-\infty;\ 0)$ и $[2;\ +\infty)$, $x_{\max} = 2$; 6) возрастает на $(3;\ +\infty)$, убывает на $(-\infty;\ 3)$, точек экстремума нет; 7) возрастает на $(-\infty;\ -4)$ и $(-4;\ 0]$, убывает на $[0;\ 4)$ и $(4;\ +\infty)$, $x_{\max} = 0$; 8) возрастает на $[0;\ 1]$, убывает на $[1;\ +\infty)$, $x_{\max} = 1$. **12.15.** 1) Возрастает на $(-\infty;\ -6]$ и $[2;\ +\infty)$, убывает на $[-6;\ -2)$ и $(-2;\ 2]$, $x_{\max} = -6$, $x_{\min} = 2$; 2) возрастает на $(-\infty;\ -3]$ и $[3;\ +\infty)$, убывает на $[-3;\ 0)$ и $(0;\ 3]$, $x_{\max} = -3$, $x_{\min} = 3$; 3) возрастает на $[0;\ +\infty)$, убывает на $(-\infty;\ 0]$, $x_{\min} = 0$; 4) возрастает на $(-\infty;\ -1)$, убывает на $(-1;\ +\infty)$, точек экстремума нет; 5) возрастает на $[0;\ 4)$ и $(4;\ +\infty)$, убывает на $(-\infty;\ -4)$ и $(-4;\ 0]$, $x_{\min} = 0$; 6) возрастает на $\left[\frac{1}{16}; +\infty\right)$, убывает на $\left[0; \frac{1}{16}\right]$, $x_{\min} = \frac{1}{16}$. **12.18.** 1) Убывает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$, возрастает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x_{\min} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) возрастает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{3} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k\right]$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.19.** 1) Возрастает на промежутках вида $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $x_{\max} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x_{\min} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) возрастает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{\pi}{8} + \pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{7\pi}{8} + \pi k\right]$, $x_{\max} = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.20.** -3; 3. **12.21.** -1; 1. **12.22.** 1) Возрастает на $\left[0; \frac{4}{5}\right]$, убывает на $(-\infty;\ 0]$ и $\left[\frac{4}{5}; 1\right]$, $x_{\max} = \frac{4}{5}$, $x_{\min} = 0$; 2) возрастает на $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, убывает на $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$, $x_{\max} = \frac{1}{3}$; 3) возрастает на [0; 1], убывает на [1; +∞), $x_{\max} = 1$; 4) возрастает на (−∞; 2,5], убывает на [2,5; 3), $x_{\max} = 2,5$. **12.23.** 1) Возрастает на $\left[-2; -\frac{8}{5}\right]$ и [0; +∞), убывает на $\left[-\frac{8}{5}; 0\right]$, $x_{\max} = -\frac{8}{5}$, $x_{\min} = 0$; 2) возрастает на $\left[0; \frac{2}{5}\right]$ и [2; +∞), убывает на $\left[\frac{2}{5}; 2\right]$, $x_{\max} = \frac{2}{5}$, $x_{\min} = 2$; 3) возрастает на $\left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$, убывает на $\left(1; \frac{7}{3}\right]$, $x_{\min} = \frac{7}{3}$. **12.24.** Нет. **12.25.** 1) Да; 2) нет; 3) нет. **12.26.** 1) Нет; 2) да. *Указание*. Если $D(f) = \mathbb{R}$, то $x_{\min} = x_0$. **12.27.** Может. *Указание*. См. рис. **12.28.** Нет. *Указание*. См. рис.

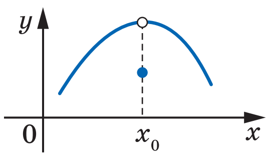


Рис. к задаче 12.27

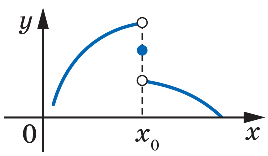


Рис. к задаче 12.28

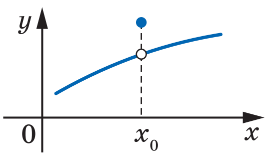


Рис. к задаче 12.29

12.29. Да. *Указание*. См. рис. **12.30.** 1) $x_{\min} = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $x_{\max} = -\frac{3\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_{\max} = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $x_{\min} = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_{\max} = \frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $x_{\min} = \pi k$, $x_{\max} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.31.** 1) $x_{\min} = \frac{2\pi}{3} + \pi k$, $x_{\max} = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $x_{\min} = \pi + 2\pi k$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) точек экстремума нет. **12.32.** (−1; 1) ∪ (1; +∞). **12.33.** (0; 1) ∪ (1; +∞). **12.34.** 1. **12.35.** 1. **12.36.** 1. **12.37.** 2. **12.38.** 1) −25; 2) −13; 3) −22. **12.39.** 1) 26; 2) 17; 3) −10.

13.1. 1) 4; 0; 2) 13; 4; 3) 30; 4; 4) −3; −30; 5) 60; −75; 6) −4; −8. **13.2.** 1) 0; $-\frac{16}{3}$; 2) 1; −2; 3) 48; −6; 4) 0; −28.

13.3. 1) 10; 6; 2) 5; $\sqrt{13}$; 3) 100; 0; 4) −2; −2,5. **13.4.** 1) 5; 3; 2) 2; −2; 3) 81; 0; 4) 10; 6. **13.5.** 1) $\sqrt{2}$; −1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{2+\pi\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2-\pi\sqrt{3}}{2}$. **13.6.** 1) 2; −1; 2) 2; −2. **13.7.** 8 = 6 + 2. **13.8.** 12 = 8 + 4. **13.9.** 1) $\frac{3}{2}$; 1; 2) −3; −4; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; −2. **13.10.** 1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 0; 2) 4; −2. **13.11.** 180 = 40 + 80 + 60. **13.12.** 18 = 8 + 3 + 7. **13.13.** 30 см^2. **13.14.** 8 см и $2\sqrt{3}$ см. **13.15.** $20\sqrt{2}$ см и $10\sqrt{2}$ см. **13.16.** $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ см, $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ см. **13.17.** 32. **13.18.** $12\sqrt{6}$. **13.19.** 16 см. **13.21.** $2a$. **13.22.** $\frac{\pi}{3}$. **13.23.** $\frac{\pi}{3}$. **13.24.** $1{,}5R$. **13.25.** $\left(\frac{16}{9}; \frac{4}{3}\right)$. **13.26.** $\left(\frac{7}{3}; -\frac{26}{9}\right)$. **13.27.** Искомая точка находится на расстоянии 25 км от пункта C. **13.28.** 60°. **13.30.** $\frac{3}{25}$; −38. *Указание*. Исследуйте функцию на отрезках [0; 1] и [1; 2]. **13.31.** 105; $-\frac{11}{27}$. **13.32.** 4. **13.33.** −3.

14.1. 6) $80(2x-1)^3$; 7) $-9\sin 3x$; 8) $-2\cos 2x$; 10) $2\cos x - x\sin x$. **14.2.** 5) $54(1-3x)$; 6) $-4\cos 2x$; 7) $2\cos 2x$; 8) $-2\sin x - x\cos x$. **14.3.** 1) −26,5; 2) 53. **14.4.** 14 м/с^2. **14.5.** 10 м/с^2, 5 м/с^2. **14.6.** 90 Н. **14.7.** 1) Выпуклая вверх на $(-\infty; 0]$, выпуклая вниз на $[0; +\infty)$, $x = 0$ — точка перегиба; 2) выпуклая вверх на [1; 3], выпуклая вниз на $(-\infty; 1]$ и $[3; +\infty)$, $x = 1$ и $x = 3$ — точки перегиба. **14.8.** 1) Выпуклая вверх на $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$, выпуклая вниз на $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$, $x = \frac{2}{3}$ — точка перегиба; 2) выпуклая вверх на [1; 2], выпуклая вниз на $(-\infty; 1]$ и $[2; +\infty)$, $x = 1$ и $x = 2$ — точки перегиба. **14.9.** 0. **14.10.** 0. **14.13.** 1) Выпуклая вверх на каждом из промежутков $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right]$ и $\left[0; \sqrt{3}\right]$, выпуклая вниз на каждом из промежутков $\left[-\sqrt{3}; 0\right]$ и $\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$, $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ — точки перегиба; 2) выпуклая вверх на $(-\infty; -2]$, выпуклая вниз на $[-2; 1)$ и $(1; +\infty)$, $x = -2$ — точка перегиба. **14.14.** 1) Выпуклая вверх на $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, выпуклая вниз на $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ и $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — точки перегиба; 2) выпуклая вверх на $(-\infty; -1)$ и $(-1; 2]$, выпуклая вниз на $[2; +\infty)$, $x = 2$ — точка перегиба. **14.15.** Выпуклая вверх на каждом из промежутков вида $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, выпуклая вниз на каждом из промежутков вида $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, точками перегиба являются точки вида $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **14.16.** Выпуклая вверх на каждом из промежутков вида $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$, выпуклая вниз на каждом из промежутков вида $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$, точками перегиба являются точки вида $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

15.1. Рис. к задаче 15.1. **15.2.** Рис. к задаче 15.2. **15.3.** Рис. к задаче 15.3. **15.4.** Рис. к задаче 15.4. **15.5.** Если $a < -1$ или $a > 0$, то 1 корень; если $a = -1$ или $a = 0$, то 2 корня; если $-1 < a < 0$, то 3 корня. **15.6.** Если $a > 4$, то корней нет; если $a = 4$ или $a < 0$, то 2 корня; если $a = 0$, то 3 корня; если $0 < a < 4$, то 4 корня. **15.7.** Рис. к задаче 15.7. **15.8.** Рис. к задаче 15.8. **15.10.** 2) $-\frac{1}{6}$; 3) $\frac{4}{7}$; 4) 4; 5) 21; 6) $\frac{225}{256}$.

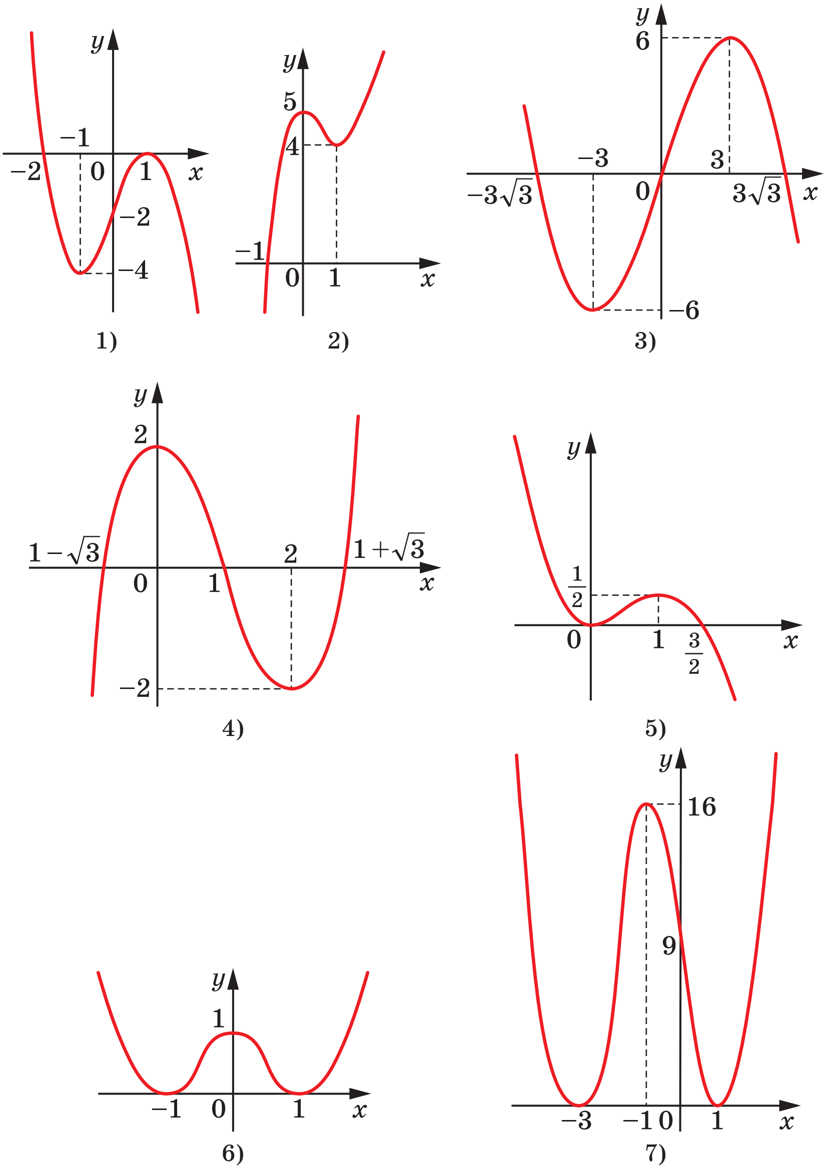


Рис. к задаче 15.1

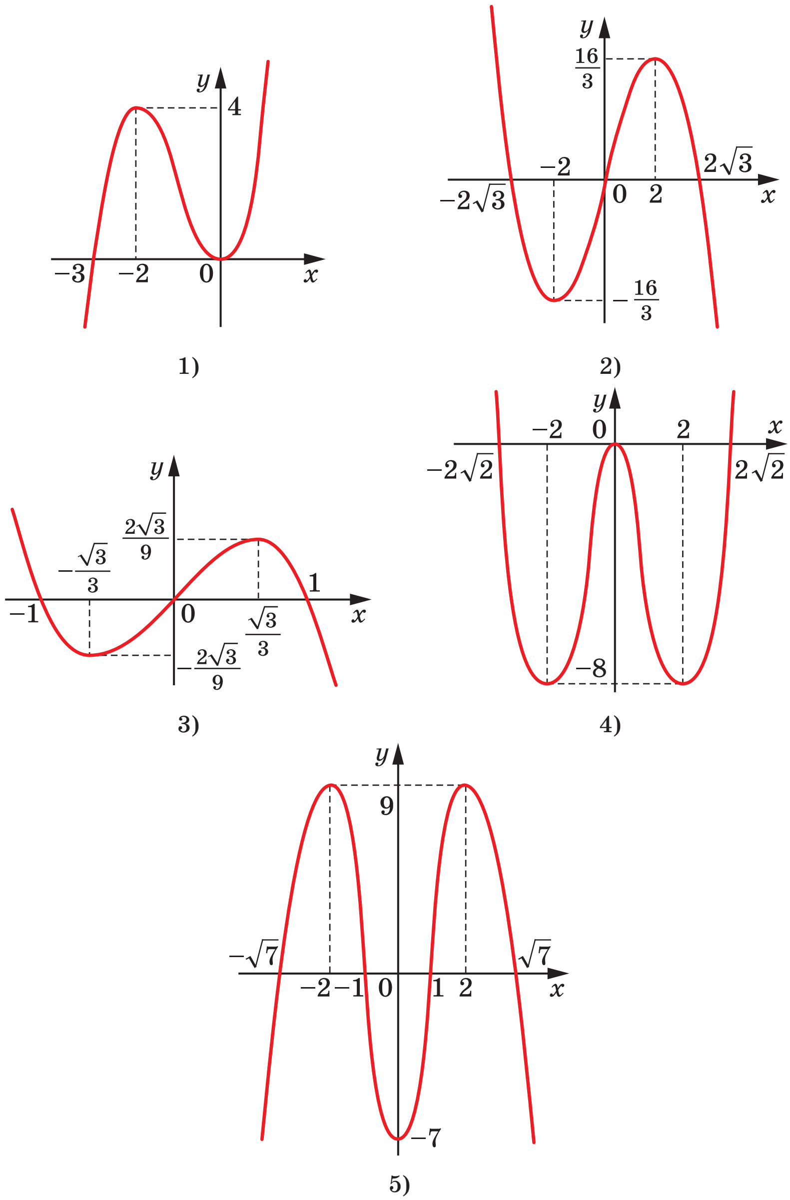


Рис. к задаче 15.2

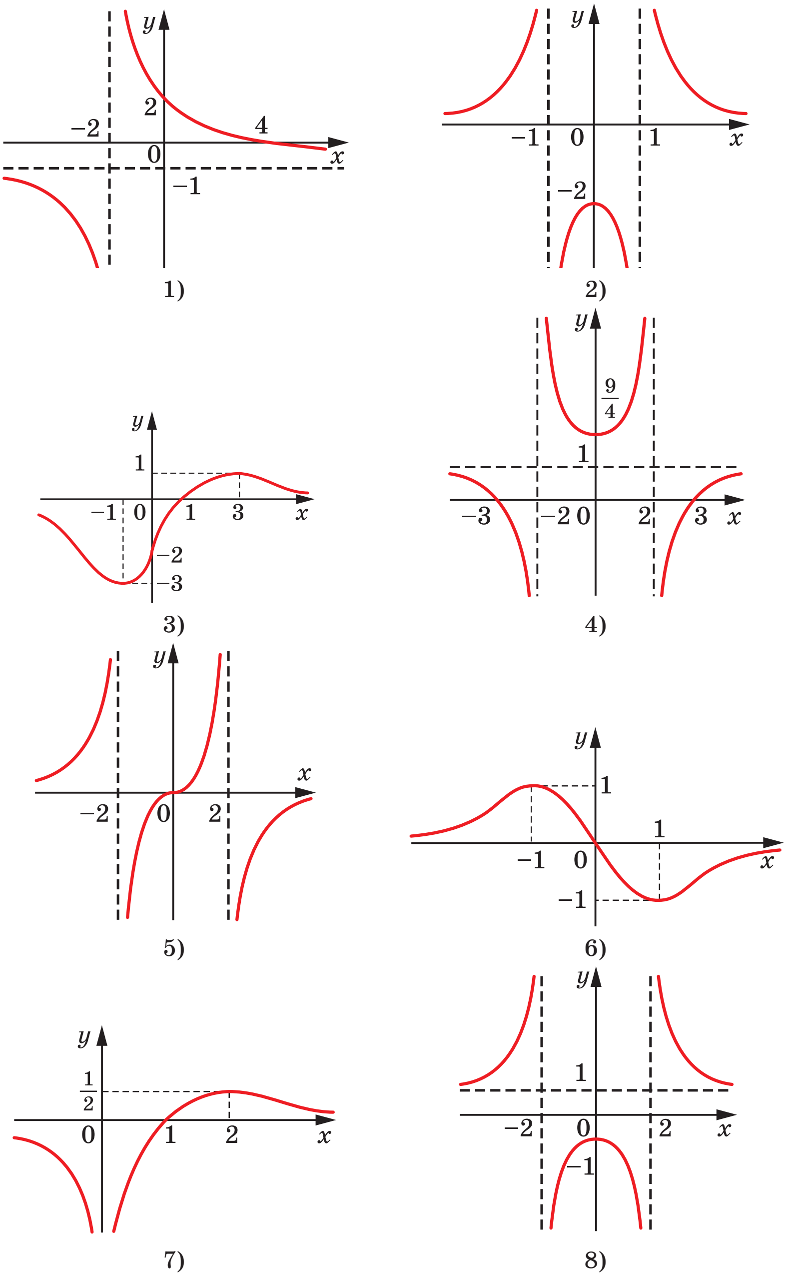


Рис. к задаче 15.3

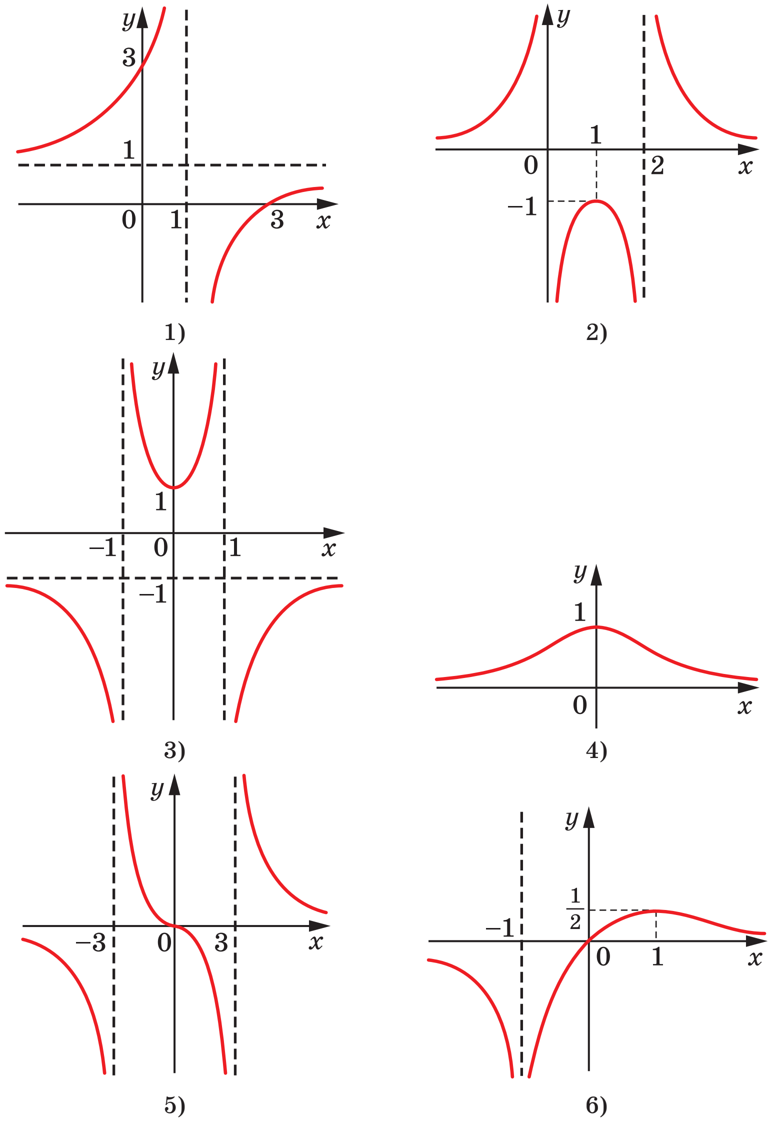


Рис. к задаче 15.4

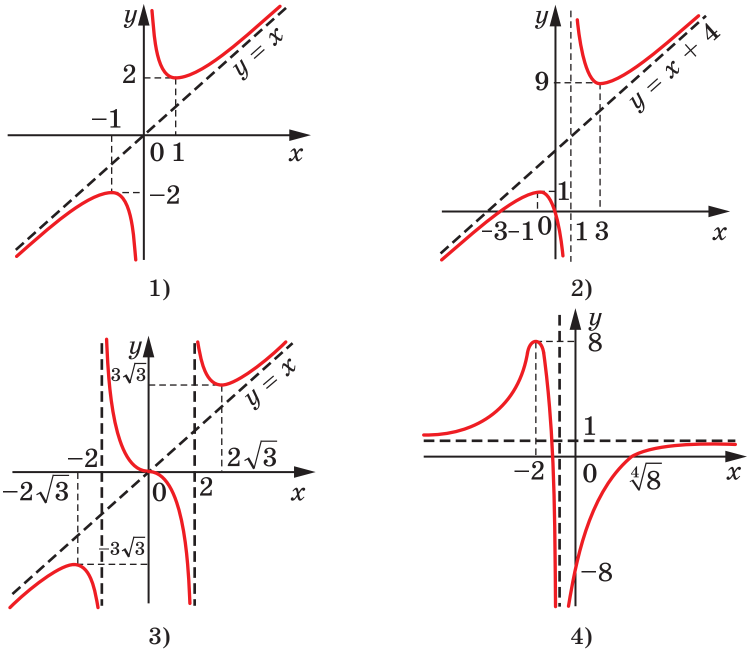


Рис. к задаче 15.7

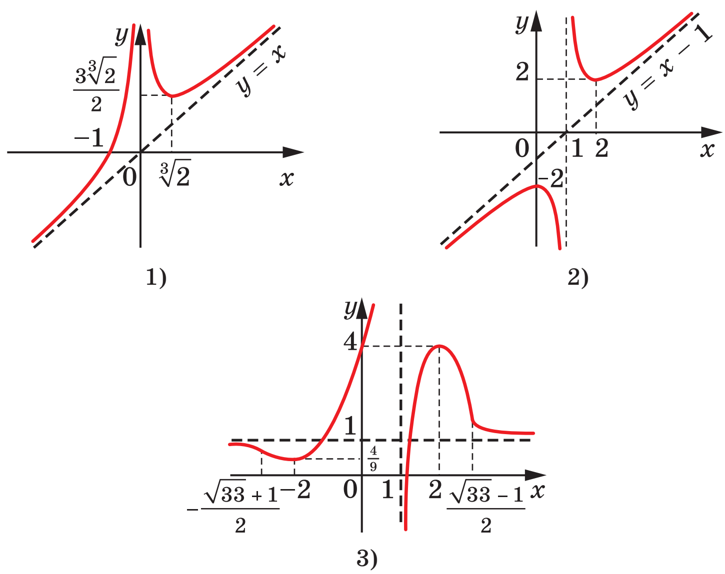


Рис. к задаче 15.8

16.15. 1) $-6a^{\sqrt{5}}-13$; 2) $\frac{1}{a^{2\sqrt{7}}}$; 3) $\frac{2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}}$; 4) $2a^{\sqrt[3]{3}}-a^{2\sqrt[3]{3}}$. **16.16.** 1) $a^{\sqrt{6}}+1$; 2) $4^{\frac{1}{\pi}}ab$. **16.17.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет. **16.18.** 3) $(-4;\ +\infty)$; 4) $[1;\ +\infty)$. **16.19.** 36. **16.20.** $[-2;\ 4]$. **16.22.** 1) $(-\infty;\ +\infty)$; 2) $[0;\ +\infty)$. **16.23.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. **16.28.** $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-5,2}>\left(7-4\sqrt{3}\right)^{5,6}$. *Указание*. Числа $7+4\sqrt{3}$ и $7-4\sqrt{3}$ являются взаимно обратными. **16.29.** 1) Корней нет; 2) 3 корня; 3) бесконечно много корней; 4) 2 корня. **16.30.** 1) 1 корень; 2) бесконечно много корней; 3) 2 корня. **16.33.** *Указание*. Найдите область определения данной функции. **16.34.** 1) 4; $\frac{1}{4}$; 2) 1; –1. **16.35.** 1) 6; $\frac{1}{6}$; 2) 6; $5\frac{1}{5}$. **16.36.** 1) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$; 2) $[-1;\ 1]$; 3) $[-1;\ 1]$. **16.37.** 1) $(-\infty;\ +\infty)$; 2) $[-1;\ 1]$; 3) $\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$. **16.38.** 2) См. рис.

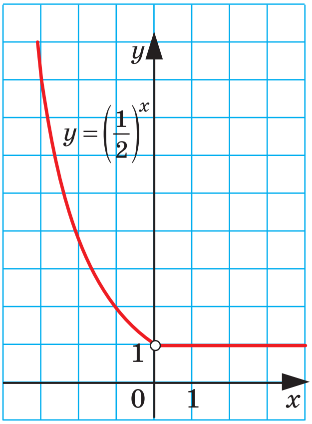


Рис. к задаче 16.38 (2)

16.42. 1) 0. *Указание*. $2^{\cos x}\leqslant 2$, $x^2+2\geqslant 2$; 2) 0. **16.43.** 1) 0; 2) 0. **16.44.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $\{0\}$; 3) $[0;\ +\infty)$. **16.45.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; 2) $\{0\}$. **16.46.** Нечетная. **16.47.** Нечетная. **16.48.** Четная. **16.49.** Нечетная. **16.50.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$. *Указание*. Выясните, при каких значениях параметра a уравнение $\frac{t-1}{t-4}=a$ имеет хотя бы один положительный корень. **16.51.** $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$. **16.54.** 3) $33 \cdot 2^{x-4}$; 4) $13 \cdot 3^{x-1}$; 5) $5 \cdot 2^{x+1}$; 6) $-29 \cdot 6^{x-1}$; 7) $12 \cdot 9^x$; 8) $576 \cdot 5^{x-2}$.

17.3. 1) 1; 2) 3; 3) 3; 4) 1; 5) 3; 6) 2. **17.4.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 3. **17.5.** 1) 1; 2; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **17.6.** 1) 1; 2) −1; 2. **17.7.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 2; 5) −2; 6) $\frac{1}{10}$. **17.8.** 1) $-\frac{5}{2}$; $\frac{1}{4}$; 2) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 6,5. **17.9.** 1) 5; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) $\frac{4}{3}$; 6) 3; 7) 2; 8) 0; $\frac{1}{2}$. **17.10.** 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 4; 6) 0; $\frac{1}{3}$. **17.11.** 1) −1; 1; 2) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) 1; 5) −1; 2; 6) 1. **17.12.** 1) −1; 1; 2) 1; 2; 3) 1; 4) −1; 5) 0; 6) 2. **17.13.** 1) 2; 2) −1; 1; 3) 2. **17.14.** 1) 2; 2) 3; 3) 4. **17.15.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 3; −3; 3) 3; 4) 6; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 7) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **17.16.** 1) 1; 2) 3; 3) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **17.17.** 1) 0; 1; 2) 0; −1; 3) −1; 4) 0. **17.18.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **17.19.** 2. **17.20.** 0. **17.21.** −2; 2. *Указание.* Числа $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ являются взаимно обратными. **17.22.** −2; 2. **17.23.** 1) −1; 0; 1. *Указание.* Пусть $2^x+\frac{1}{2^x}=t$. Тогда $4^x+\frac{1}{4^x}=\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)^2-$ $-2 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2^x}=t^2-2$; 2) −1; 0; 1. **17.24.** $(-\infty;\ 2] \cup \{5\}$. **17.25.** $[-2;\ 3]$. **17.26.** $(1;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$. **17.27.** 1) 1; 2) 2; 3) 5; 4) 3. **17.28.** 1) 2; 2) 4; 3) 5; 4) 3. **17.29.** $(-\infty;\ 0] \cup \{1\}$. **17.30.** $(-\infty;\ 0) \cup$ $\cup \left\{1;\ \sqrt{3}\right\}$. **17.31.** 1; 3. **17.32.** 1; 2.

18.4. 1) 5; 2) 3; 3) 4. **18.5.** 1) −5; 2) 7. **18.6.** 1) $[0;\ +\infty)$; 2) $(1;\ +\infty)$. **18.7.** 1) $(-\infty;\ -2]$; 2) $(-\infty;\ 4]$. **18.8.** 1) $(-\infty;\ 1) \cup$ $\cup (5;\ +\infty)$; 2) $\left[-3;\ \frac{1}{3}\right]$; 3) $(-5;\ -3) \cup (3;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ 0)$; 5) $(0;\ 4]$;

6) $[-1;\ 2]$. **18.9.** 1) $(-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty;\ -2) \cup (1;\ 2)$; 4) $(-1;\ +\infty)$. **18.10.** 1) $(-1;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 2)$; 3) $(5;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -1]$; 5) $(-\infty;\ 0]$; 6) $(-\infty;\ 1)$. **18.11.** 1) $(-\infty;\ 2)$; 2) $[0;\ +\infty)$; 3) $(3;\ +\infty)$; 4) $(1;\ +\infty)$. **18.12.** 1) $(2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 1)$; 3) $[0;\ 1]$; 4) $(-\infty;\ -3] \cup [-2;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ 1]$; 6) $[1;\ +\infty)$. **18.13.** 1) $(-\infty;\ 0]$; 2) $[6;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -1) \cup (0;\ +\infty)$; 4) $[0;\ 2]$. **18.14.** 1) $(-\infty;\ 2) \cup (2;\ 3]$; 2) $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$. **18.15.** 1) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup$ $\cup \left(-\frac{2}{3}; 2\right]$; 2) $[-2;\ 5)$. **18.16.** 1) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; 2) $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$. **18.17.** 1) $(0;\ 1)$; 2) $\left(-\infty; \frac{7}{4}\right]$. **18.18.** 1) $(2;\ +\infty)$; 2) $(-3;\ 1)$; 3) $(-\infty;\ -2] \cup [0;\ +\infty)$; 4) $\{0\}$. **18.19.** 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. **18.20.** $[0;\ 1]$. **18.21.** $[0;\ 4]$. **18.22.** 1) $(0;\ 1)$; 2) $(-\infty;\ -1] \cup (0;\ +\infty)$. **18.23.** 1) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1]$. **18.24.** 1) $(-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$; 2) $(0;\ 2)$. **18.25.** $(-\infty;\ -3) \cup (0;\ 3)$. **18.26.** $[0;\ 2]$. **18.27.** $[0;\ 1]$. **18.28.** 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $(2;\ +\infty)$. **18.29.** $(-\infty;\ 3)$. **18.30.** $[3;\ +\infty) \cup$ $\cup \{-2\}$. **18.31.** $(-\infty;\ -2] \cup \{4\}$. **18.32.** Если $a \geqslant 1$, то $x = 1$; если $a < 1$, то $x \in [a;\ 1]$. **18.33.** Если $a < 1$, то $x \in (-\infty;\ a] \cup \{1\}$; если $a \geqslant 1$, то $x \in (-\infty;\ 1]$.

19.21. 4) 144; 5) 64; 6) 1; 7) 0; 8) 48. **19.22.** 4) 9; 5) 10; 7) 2. **19.23.** 1) -3; 2) -1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{1}{4}$; 8) $-\frac{1}{2}$. **19.24.** 1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) -1. **19.25.** 1) 4; 2) 60; 3) 180; 4) 20; 5) 0,1. **19.26.** 1) 72; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 10. **19.27.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3. **19.28.** 1) -5; 2) -2. **19.29.** 1) 2; 2) 4. **19.30.** 1) 6; 2) 9. **19.31.** 30. **19.32.** 21. **19.33.** $\log_a b$. **19.34.** $\log_b a$. **19.37.** 1) $-1 < x < 1$; 2) $x \neq 1$; 3) $x < 2$; 4) $x \neq 2$. **19.38.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **19.39.** $\lg 2$. *Указание.* В каждом из логарифмов перейдите к основанию 10.

19.40. $\frac{5}{2}$. **19.46.** $\frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_a x + \log_b x}$. *Указание*. $\log_x ab = \log_x a + \log_x b = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x}$. **19.47.** *Указание*. В выражении $\log_{ab} x$ перейдите к логарифму с основанием a. **19.48.** –3. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что $\log_{ab} b + \log_{ab} a = 1$. **19.49.** $\frac{2a+b+1}{2b+1}$. **19.50.** 1) $\frac{2(2a-1)}{3(2-a)}$; 2) $\frac{a+b}{1-a}$. **19.51.** $\frac{3-3a}{b+1}$.

20.19. 1) $2 < \log_3 10 < 3$; 2) $2 < \log_2 5 < 3$; 3) $-2 < \log_{\frac{1}{3}} 7 < -1$; 4) $-1 < \log_{0,1} 2 < 0$. **20.20.** 1) $4 < \log_2 29 < 5$; 2) $-4 < \log_{\frac{1}{2}} 9 < -3$. **20.21.** 1) $\log_4 5 > \log_5 4$; 2) $\log_{1,5} 1,3 < \log_{1,3} 1,5$; 3) $\log_{0,7} 0,8 < \log_{0,8} 0,7$; 4) $\log_{0,2} 0,1 > \log_{0,1} 0,2$. **20.23.** 1) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 9) \cup (9; 10)$; 3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **20.24.** 1) $(-3; -2) \cup (-2; +\infty)$; 2) $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **20.27.** 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$. **20.28.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3. **20.29.** 1) 1 корень; 2) 1 корень; 3) 1 корень. **20.30.** 1) 1 корень; 2) 1 корень. **20.31.** $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$. *Указание*. Числа $\log_2 3$ и $\log_3 2$ являются положительными и взаимно обратными. **20.33.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) все действительные числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\{0\}$; 4) все числа вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $(3; 4) \cup (4; 6]$; 6) $(-2; -1) \cup (-1; 3)$; 7) $[-1; 0) \cup (0; 3]$; 8) $(-\infty; 1) \cup (3; 6) \cup (6; 7)$; 9) $(0; 2) \cup (2; 3)$; 10) $(-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; +\infty)$. **20.34.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) все действительные числа, кроме чисел вида $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\mathbb{R}$; 4) все числа вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $(-8; -2) \cup (-2; -1)$; 6) $(0; 7) \cup (7; 8)$; 7) $\left(-2; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; 2\right)$;

8) **(0; 4)** $\cup$ **(4; 5);** **9)** **(−1; 1)** $\cup$ **(1; 2);** **10)** **[−5; 0)** $\cup$ **(0; 2].** **20.35.** 3) См. рис.; 4) см. рис. **20.36.** 3) См. рис.

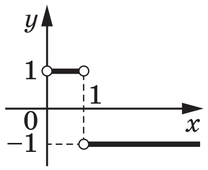


Рис. к задаче 20.35 (3)

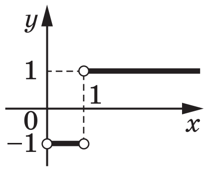


Рис. к задаче 20.35 (4) и 20.36 (3)

20.37. 1) −2; 2) −1. **20.38.** 1) 3; 2) 1. **20.39.** Нечетная. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что $\sqrt{x^2+1}-x=\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{-1}$.

21.5. 1) 16; 2) 64; 3) 6; 4) 6; 5) 512. **21.6.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) 5; 3) 10^{10}. **21.7.** 1) 0,8; 2) 2; 3) 0; 4) −1. **21.8.** 1) 1; 2) 0; 1. **21.9.** 1) −2; 6; 2) 5; 3) корней нет; 4) −2; 5) 1; 6) −1; 7) 0; 8) 6. **21.10.** 1) −2; 2) корней нет; 3) 0; 13; 4) −2. **21.11.** 1) 7; 2) 1; 3) 1; 4) 2. **21.12.** 1) 3; 2) $\log_2 3$; 3) 2. **21.13.** 1) 4; 2) 2; 3; 3) 4; 4) 5; 5) 8; 6) 4; 7) 4; 8) 7. **21.14.** 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{3}{4}$; 4) −1; 4; 5) 3; 6) 8. **21.15.** 1) $\log_5 4$; 2) 0. **21.16.** 1) 2; 2) $\log_3\left(3+\sqrt{11}\right)$. **21.17.** 1) 2; $\frac{1}{16}$; 2) 9; $\frac{1}{3}$; 3) 10; 1000; 4) 25; $\sqrt{5}$; 5) $\frac{1}{6}$; 6) 8; 10^7-2. **21.18.** 1) −8; $-\frac{1}{2}$; 2) 343; $\frac{1}{49}$; 3) 27; $\sqrt[3]{3}$; 4) $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **21.19.** 1) 7; 2) корней нет; 3) 3; 4; 4) 1; 5) 4. **21.20.** 1) Корней нет; 2) 5; 3) 4; 4) 3; 5) 3. **21.21.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) −5; −2; $\frac{\sqrt{89}-7}{2}$. **21.22.** 1) −6; −4; 2; 2) −1; 2; 3. **21.23.** 1) $\frac{1}{3}$; $3^{\frac{5}{9}}$; 2) 0,1; $\sqrt{10}$; 3) 4; 4) 8; $\frac{1}{8}$; 5) 100; 10^{-8}; 6) 5; $\frac{1}{625}$; 7) 10; 8) 10 000. **21.24.** 1) $\sqrt[3]{10}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; 2) 3; 9; 3) 1; 49; 4) 100; $\frac{1}{100}$; 5) 6; 6^{-7}; 6) 32. **21.25.** 1) $\frac{1}{5}$; 5; 2) 0,001; 10; 3) 3; 9; 4) 216; $\frac{1}{6}$.

21.26. 1) $\frac{1}{9}$; 9; 2) $\frac{1}{10}$; 100; 3) 16; $\frac{1}{4}$; 4) 1 000 000; 0,001. **21.27.** 1) 2; 2) $\frac{1}{4}$; 4; 3) $2^{\sqrt{2}}$; $2^{-\sqrt{2}}$; 4) 1; 9; 5) 1; 16; 6) $\frac{1}{2}$. **21.28.** 1) $\frac{1}{9}$; 3; 2) $\sqrt{3}$; 3; 3) 7; 4) 3. **21.29.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{625}$; 5; 3) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$. **21.30.** *Указание.* Рассмотрите произведение $\log_a x \cdot \log_a y$. Воспользовавшись теоремой 19.3, можно записать: $\log_a x \cdot \log_a y = \log_a y^{\log_a x}$ или $\log_a y \cdot \log_a x = \log_a x^{\log_a y}$. Отсюда $\log_a y^{\log_a x} = \log_a x^{\log_a y}$; $y^{\log_a x} = x^{\log_a y}$. **21.31.** 1) 1000; 2) $3^{\sqrt{2}}$; $3^{-\sqrt{2}}$. **21.32.** 1) 4; 2) $\frac{1}{7}$; 7. **21.33.** 1) (1; 3); 2) (9; 3), (3; 9); 3) (8; 2), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$; 4) (3; 9), (9; 3); 5) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; 6) (2; 10), (10; 2). **21.34.** 1) (1,5; 2); 2) (8; 2), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$; 3) (5; 5); 4) (1; 1), $\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{6}}{3}\right)$; 5) (4; 1). **21.35.** 1) −1; 2) $\frac{1}{4}$; 2. *Указание.* Рассмотрите данное уравнение как квадратное относительно $\log_2 x$. **21.36.** 1) 8; 2) 3; $\frac{1}{27}$. **21.37.** 3; $\sqrt{2}$. **21.38.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1,5. **21.39.** 1) 2; 2) корней нет. **21.40.** 1) 1; 2) 3. **21.41.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$. **21.42.** Если $a \leqslant -1$ или $a \geqslant 7$, то одно решение; если $-1 < a < 7$, то 2 решения. **21.43.** Если $a \leqslant 2$ или $a \geqslant 11$, то одно решение; если $2 < a < 11$, то 2 решения. **21.44.** $a = \frac{8}{3}$ или $a \leqslant \frac{7}{3}$. **21.45.** $a = -3$ или $a \geqslant -2,5$.

22.5. 1) 21; 2) 26. **22.6.** 1) 0; 2) 0; 1; 2; 3; 4; 5. **22.7.** 1) (1; +∞); 2) (0; 1); 3) (3; +∞); 4) (−3; −2) ∪ (3; +∞); 5) (−∞; −3] ∪ [4; 9); 6) $\left(-\frac{11}{10}; 4\right] \cup [5; +\infty)$. **22.8.** 1) $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$; 2) $\left(\frac{5}{7}; \frac{3}{2}\right)$; 3) [5; +∞); 4) (−∞; −4] ∪ [3; 5). **22.9.** 1) 6; 2) 2; 3) 2; 4) 5. **22.10.** 1) −1; 2) 3; 3) 1; 4) 0. **22.11.** 1) [−1; 1) ∪ (3; 5]; 2) (−2; −1) ∪ (0; 1);

3) $(-6;\ -5) \cup (-5;\ -4)$; 4) $[-1;\ 0) \cup (3;\ 4]$; 5) $\left(-\infty; -\frac{7}{4}\right)$; 6) $\left(\frac{5}{4}; 2\right) \cup (2; +\infty)$; 7) $(-\infty;\ -2{,}5) \cup [2;\ +\infty)$; 8) $\left(\frac{1}{3}; 1\right]$. **22.12.** 1) $(2;\ 3)$; 2) $[1;\ 2) \cup (4;\ 5]$; 3) $[-4;\ -3) \cup (0;\ 1]$; 4) $[0;\ 1) \cup (1;\ 2]$; 5) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup [3; +\infty)$; 6) $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$. **22.13.** 1) $(3;\ 6]$; 2) $(1;\ 3]$; 3) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; 4) $\left(-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$; 5) $[-4;\ -3) \cup (1;\ 3]$; 6) $[-5; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right]$. **22.14.** 1) $(-3;\ -1)$; 2) $(4;\ 5]$; 3) $(-5;\ 7]$; 4) $\left[0; \frac{1}{2}\right) \cup (4; 13]$. **22.15.** 1) $(5;\ +\infty)$; 2) $(1;\ +\infty)$; 3) $(0;\ 4)$; 4) $(5;\ 7]$; 5) $\left(-1; -\frac{3}{5}\right]$; 6) $\left(-\infty; -\frac{7}{5}\right]$. **22.16.** 1) $[-1;\ 0)$; 2) $(1;\ 2]$; 3) $[11;\ +\infty)$; 4) $\left[\frac{14}{3}; +\infty\right)$. **22.17.** 1) $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$; 2) $\left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [9; +\infty)$; 3) $(0{,}0001;\ 10)$; 4) $\left[\frac{1}{16}; 256\right]$; 5) $(0;\ 4] \cup [8;\ +\infty)$; 6) $\left(0; \frac{1}{81}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **22.18.** 1) $\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [8; +\infty)$; 2) $(0;\ 0{,}1] \cup [1000;\ +\infty)$; 3) $(0{,}5;\ 4)$; 4) $[0{,}04;\ 5]$. **22.19.** 1) $\left(\frac{1}{128}; 2\right)$; 2) $(0;\ 3^{-10}] \cup [3;\ +\infty)$; 3) $[0{,}001;\ 1) \cup [100;\ +\infty)$; 4) $\left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}\right] \cup (1; 5]$. **22.20.** 1) $\left(0; \frac{1}{49}\right] \cup [7; +\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{216}; 6\right]$; 3) $(3;\ 9] \cup [81;\ +\infty)$; 4) $\left[\frac{1}{4}; 1\right) \cup [2; +\infty)$. **22.21.** 1) $\left[\frac{1-\sqrt{27}}{2}; -2\right) \cup \left(3; \frac{1+\sqrt{27}}{2}\right]$; 2) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; 3) $[1{,}5;\ +\infty)$; 4) $(3;\ +\infty)$. **22.22.** 1) $\left[-2; 1-\sqrt{5}\right) \cup \left(1+\sqrt{5}; 4\right]$; 2) $\left(\frac{3}{4}; 1\right)$. **22.23.** 1) $(2;\ 3)$; 2) $(4{,}5;\ 5)$; 3) $(0;\ 2)$; 4) $(3{,}5;\ 5)$;

5) $(0;\ 1) \cup [2;\ +\infty)$; 6) $(1{,}5;\ 2]$. **22.24.** 1) $\left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$; 2) $(1;\ 3) \cup (4;\ +\infty)$; 3) $(1;\ 2) \cup (2{,}5;\ 4)$; 4) $(1;\ 2]$. **22.25.** $\left[\log_5 \frac{1}{2}; 1\right)$. **22.26.** $\left[\log_3 \frac{11}{20}; 3\right)$. **22.27.** 1) $(3;\ 4] \cup \{5\}$; 2) $\left[-\frac{9}{8}; -1\right) \cup \{2; -2\}$; 3) $\left[\frac{9}{5}; 2\right) \cup (2; 3] \cup \{1\}$. **22.28.** 1) $(2;\ 3] \cup \{5\}$; 2) $(5;\ +\infty) \cup \{4\}$. **22.29.** Если $a \leqslant 8$, то $x \in [3;\ +\infty)$; если $a > 8$, то $x \in$ $\in [\log_2 a;\ +\infty) \cup \{3\}$. **22.30.** Если $a \leqslant 9$, то $x = 2$; если $a > 9$, то $x \in [2;\ \log_3 a]$. **22.31.** $(0; 1) \cup \left[\pi; \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right)$. **22.32.** $(0; 1) \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

23.5. 1) 0; 2) -2; 3) $-15 \ln 3$. **23.6.** 1) 1; 2) 1; 3) $-5 \ln 4$. **23.7.** 1) -1; 2) 3,5; 3) $-\frac{5}{2 \ln 5}$; 4) $\frac{1}{2}$. **23.8.** 1) $\frac{6}{13}$; 2) 16; 3) $-\frac{1}{2 \ln 10}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$. **23.9.** 1) $\frac{2}{e}$; 2) $\frac{2}{3}$. **23.10.** 1) -1; 2) $\frac{1}{\ln 5}$. **23.11.** 1) $y = -2x + 1$; 2) $y = 2x + 1$; 3) $y = (2 + 2 \ln 2)x - 2 \ln 2$; 4) $y = 18x \ln 6 + 18 \ln 6 + 6$; 5) $y = 4x - 1$; 6) $y = 4x + 4$; 7) $y = \frac{2x}{3 \ln 3} - \frac{2}{3 \ln 3} + 1$; 8) $y = x - 4 + 2 \ln 2$. **23.12.** 1) $y =$ $= 5x + 1$; 2) $y = 2x + 1$; 3) $y = 6x \ln 3 - 12 \ln 3 + 3$; 4) $y =$ $= 4x - \ln 4$; 5) $y = 3x - 6$; 6) $y = \frac{x}{4 \ln 2} - \frac{1}{4 \ln 2} + 2$. **23.13.** 1) $y = 2$; 2) $y = -1$. **23.14.** $y = -1600$. **23.15.** 1) $y = ex$; 2) $y = 5x + 3$; 3) $y = -x + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2}$; 4) $y = 3x - 3$. **23.16.** 1) $y = -7x + 7$; 2) $y = 2x$; 3) $y = x + 1 + \ln 5$; 4) $y = -x$. **23.17.** 1) Возрастает на $[0;\ +\infty)$, убывает на $(-\infty;\ 0]$, $x_{\min} = 0$; 2) возрастает на $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$, $x_{\min} = -\frac{1}{2}$; 3) возрастает на $(-\infty;\ 0]$, убывает на $[0;\ +\infty)$, $x_{\max} = 0$; 4) возрастает на $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$, убывает на $(-\infty; 0]$ и $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = \frac{2}{\ln 2}$; 5) возрастает на $(-\infty; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 6) возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 7) возрастает на $(-\infty; 2]$, убывает на $[2; +\infty)$, $x_{\max} = 2$; 8) возрастает на $[3; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 2)$ и $(2; 3]$, $x_{\min} = 3$; 9) возрастает на $(-\infty; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 10) возрастает на $\left[e^{-\frac{1}{3}}; +\infty\right)$, убывает на $\left(0; e^{-\frac{1}{3}}\right]$, $x_{\min} = e^{-\frac{1}{3}}$; 11) возрастает на $(0; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 12) возрастает на $\left[e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right)$, убывает на $\left(0; e^{-\frac{1}{2}}\right]$, $x_{\min} = e^{-\frac{1}{2}}$; 13) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(0; 1]$, $x_{\min} = 1$; 14) возрастает на $[e; +\infty)$, убывает на $(0; 1)$ и $(1; e]$, $x_{\min} = e$; 15) возрастает на $(0; e^2]$, убывает на $[e^2; +\infty)$, $x_{\max} = e^2$; 16) возрастает на $[-1; 0)$ и $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $(0; 1]$, $x_{\min} = -1$, $x_{\min} = 1$; 17) возрастает на $(0; 1]$ и $[e; +\infty)$, убывает на $[1; e]$, $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = e$; 18) возрастает на $\left[\sqrt{10}; +\infty\right)$, убывает на $\left(0; \sqrt{10}\right]$, $x_{\min} = \sqrt{10}$. **23.18.** 1) Возрастает на $[-2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -2]$, $x_{\min} = -2$; 2) возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$, $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = -1$, $x_{\min} = 1$; 3) возрастает на $[-1; 1]$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = -1$; 4) возрастает на $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$, $x_{\min} = -\frac{1}{4}$; 5) возрастает на $\left(-\infty; \frac{3}{\ln 3}\right]$, убывает на $\left[\frac{3}{\ln 3}; +\infty\right)$, $x_{\max} = \frac{3}{\ln 3}$; 6) возрастает на $(-\infty; -2]$, убывает на $[-2; +\infty)$, $x_{\max} = -2$; 7) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(0; 1]$, $x_{\min} = 1$; 8) возрастает на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $\left[\frac{1}{e^2}; 1\right]$, $x_{\max} = \frac{1}{e^2}$, $x_{\min} = 1$; 9) возрастает на $(0; e]$, убывает на $[e; +\infty)$, $x_{\max} = e$; 10) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$,

$x_{\min} = 1$; 11) возрастает на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ и $[e^2; +\infty)$, убывает на $\left[\frac{1}{e^2}; e^2\right]$, $x_{\max} = \frac{1}{e^2}$, $x_{\min} = e^2$; 12) возрастает на $\left[\frac{1}{10}; 1\right]$ и $[10; +\infty)$, убывает на $\left(0; \frac{1}{10}\right]$ и $[1; 10]$, $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = \frac{1}{10}$, $x_{\min} = 10$. **23.19.** 1) $e + 1$; $\frac{1}{e} - 1$; 2) e^2; 0; 3) 1; $\frac{1}{7}$; 4) $2\frac{1}{2}$; 2.
23.20. 1) $\frac{1}{e^2}$; 0; 2) 125; $\frac{1}{5}$. **23.21.** См. рис.

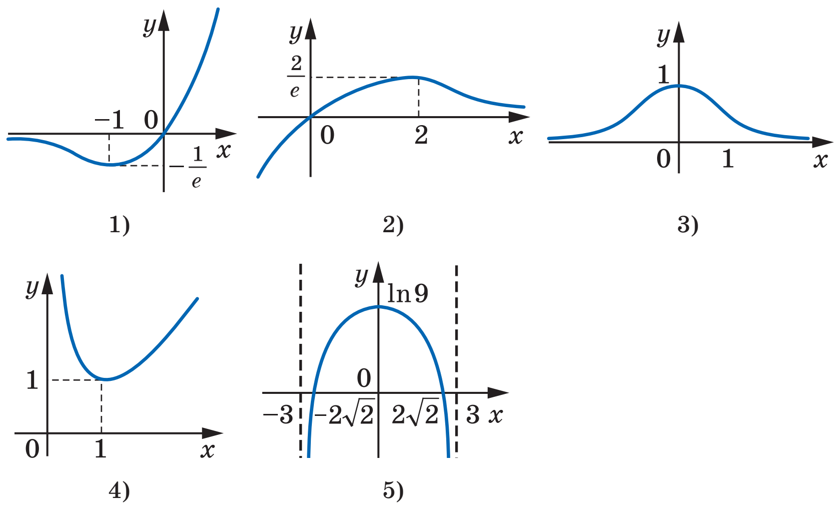


Рис. к задаче 23.21

23.22. См. рис. **23.25.** $a \leqslant 0$. **23.26.** $a \geqslant 0$.

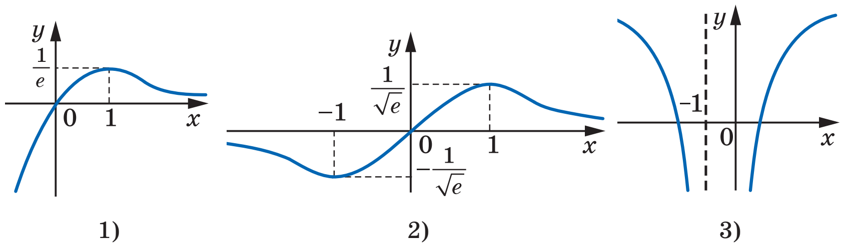


Рис. к задаче 23.22

24.8. 1) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{10}{3}$; 2) $y=-\cos x-2$; 3) $y=e^x-7$. **24.9.** 1) $y=\frac{x^4}{4}+1$; 2) $y=\sin x+2$; 3) $y=\frac{3^x}{\ln 3}$. **24.10.** 1) $y=-\frac{1}{x}-6$; 2) $y=\operatorname{tg} x+2\sqrt{3}$; 3) $y=\ln(-x)+4$; 4) $y=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{3}$. **24.11.** 1) $y=-\operatorname{ctg} x+1$; 2) $y=2\sqrt{x}+2$; 3) $y=\ln x-1$; 4) $y=\frac{2^x+\ln 2-32}{\ln 2}$. **24.15.** $\frac{1}{2}$. **24.16.** $-\frac{1}{2}$.

25.5. 1) $F(x)=x-x^2+8$; 2) $F(x)=x^3-2x^2+5$; 3) $F(x)=-\cos\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{2}+6{,}5$; 4) $F(x)=\frac{1}{3}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{5}{3}$; 5) $F(x)=4x+\frac{1}{x}-4$; 6) $F(x)=7\ln(x-4)+2\sqrt{x+4}$; 7) $F(x)=\sqrt{6x+1}+2$; 8) $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{2}{3}$; 9) $f(x)=\frac{(3x-2)^3}{9}-\frac{1}{9}$; 10) $F(x)=\frac{2}{3}\operatorname{tg}\left(6x-\frac{\pi}{6}\right)$. **25.6.** 1) $F(x)=3x-3x^2+6$; 2) $F(x)=x^4-2x^3+x+5$; 3) $F(x)=x^2-2\sqrt{x}-2$; 4) $F(x)=-\frac{2}{3}\cos 3x-\frac{2}{3}$; 5) $F(x)=8\sqrt{\frac{x}{2}-2}+4$; 6) $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}+3{,}5$; 7) $F(x)=\frac{1}{4}\ln(4x-3e^2)+5{,}5$; 8) $F(x)=-8\operatorname{ctg}\frac{x}{8}+5$. **25.7.** $F(x)=x^4+2x^2-3$, первообразная имеет еще один нуль, равный 1. **25.8.** $F(x)=\frac{x^3}{3}-12x+27$. **25.9.** 1) F_2; 2) F_2. **25.10.** F_1. **25.11.** $s(t)=\frac{t^3}{3}+t^2-3t$. **25.12.** $s(t)=2t^3+t-47$ или $s(t)=2t^3+t-67$. **25.13.** $y=2x^3-x^5+7$. **25.14.** $y=6\sqrt{x}+x-21$. **25.15.** 1) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. *Указание.* Примените формулы понижения степени; 2) $-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$. *Указание.* Примените формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму; 3) $\frac{3}{4}\sin\frac{2x}{3}-\frac{1}{8}\sin 4x+C$. **25.16.** 1) $\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\sin 4x+C$; 2) $\frac{1}{14}\sin 7x+$ $+\frac{1}{18}\sin 9x+C$. **25.17.** $F_1(x)=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+\frac{5}{6}$, $F_2(x)=\frac{2x^3}{3}+$ $+\frac{3x^2}{2}-\frac{323}{24}$. **25.18.** $F_1(x)=\frac{x^3}{3}-4x+\frac{2}{3}$, $F_2(x)=\frac{x^3}{3}-4x-\frac{20}{3}$. **25.19.** $F(x)=-x^2+5x-\frac{17}{4}$. **25.20.** $F(x)=\frac{x^2}{2}+x-3{,}5$.

26.5. 1) $4\frac{2}{3}$; 2) 0,5; 3) 4; 4) $7\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2}\ln 8$; 6) $1\frac{1}{3}$; 7) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{3e^2-1}{e^2}$; 10) 18. **26.6.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $7\frac{1}{3}$; 3) 8 ln 2; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{52}{3}$; 6) $\frac{72-2\ln 3}{\ln 3}$. **26.8.** 1) 70; 2) 1,5; 3) $\sqrt{3}$; 4) 39; 5) 0; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $\frac{1}{2}\ln 5$; 8) 3; 9) 0; 10) $6e-6$; 11) $-\frac{1}{9}$; 12) 240. **26.9.** 1) −45; 2) 6; 3) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{7}{288}$; 7) $\frac{1}{3}\ln 10$; 8) $\frac{1}{12}$; 9) $\frac{78}{7}$. **26.10.** 1) $10\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) e^2-1; 4) 4 ln 4 − 3; 5) 12 − 4 ln 4; 6) $10\frac{2}{3}$; 7) $1\frac{1}{3}$; 8) 4,5; 9) 4,5; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\frac{1}{12}$; 12) 1; 13) 24 − 7 ln 7; 14) 2; 15) $\sqrt{2}-1$. **26.11.** 1) $4\frac{1}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) $2\frac{2}{3}$; 6) 6 − 3 ln 3; 7) 1; 8) 12 − 5 ln 5. **26.12.** 3. **26.13.** 3; −3. **26.14.** 2; −2. **26.15.** 6. **26.16.** $-\sqrt[4]{8}$. **26.17.** 1) (0; 1) ∪ (3; +∞); 2) $(\log_{0,2} 6;\ +\infty)$. **26.18.** (1; +∞). **26.19.** 1) $\frac{4-\pi}{12}$; 2) π − 2; 3) 0; 4) $\frac{3e^2+8e-8}{8e^2}$. **26.20.** 1) $\frac{20-5\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 0,2; 4) $e^2-e-\frac{1}{2}$. **26.21.** 1) 16,5; 2) 4,5; 3) $21\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) 7,5; 6) 8 − 4 ln 2. **26.22.** 1) 4,5; 2) $10\frac{2}{3}$; 3) 4,5;

4) 9. **26.23.** 1) $5\frac{1}{3}$; 2) 1,5. **26.24.** 1) $2\frac{5}{6}$; 2) 3. **26.25.** $1\frac{1}{12}$. **26.26.** $\frac{1}{6}$. **26.27.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{9\pi}{4}$; 3) 4π; 4) $\frac{9\pi}{2}$; 5) 8,5; 6) 6,5. **26.28.** 1) $\frac{25\pi}{2}$; 2) 3π; 3) 2π; 4) 5. **26.29.** 1. *Указание*. Изобразите криволинейную трапецию, площадь которой равна искомому интегралу, и рассмотрите функцию, обратную к подынтегральной функции. **26.30.** $\frac{\pi}{2}-1$.

27.1. 1) $\frac{13\pi}{3}$; 2) $\frac{178\pi}{15}$; 3) $\frac{15\pi}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{15}$; 5) $\frac{19\pi}{24}$. **27.2.** 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) $\frac{\pi}{30}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. **27.3.** $\frac{9}{8}\pi R^3$, $\frac{5}{24}\pi R^3$.

28.3. 1) $3 \cdot 2$; 2) $3 \cdot 3$. **28.4.** Когда Антон взял яблоко. **28.5.** $3 \cdot 2 + 4 \cdot 3$. **28.6.** $3 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 5$. **28.7.** $5 \cdot 5$, $5 \cdot 4$. **28.8.** $5!$. **28.9.** 1) $4!$; 2) $3!$. **28.10.** 6^4. **28.11.** 5^3. **28.12.** $5 \cdot 6^3$. **28.13.** $4 \cdot 5^2$. **28.14.** $9 \cdot 10^6$. **28.15.** 2^4. **28.16.** 6^3. **28.17.** $6 \cdot 7 \cdot 4$. **28.18.** $6 \cdot 7 \cdot 3$. **28.19.** I способ. $4 \cdot 4!$; II способ. $5! - 4!$. **28.20.** $4! \cdot 2$. **28.21.** $9 \cdot 10^3 \cdot 2$. **28.22.** $9 \cdot 10^4 \cdot 4$. **28.23.** $64 \cdot 49$. **28.24.** $4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4$. **28.25.** $5^7 + 4 \cdot 5^6$. **28.26.** $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5$. **28.27.** 2^{10}. **28.28.** $(7! \cdot 4! \cdot 2!) \cdot 3!$. **28.29.** $(5!)^2$. **28.30.** $9 \cdot 10^4 - 4 \cdot 5^4$. *Указание*. Количество всех пятизначных чисел равно $9 \cdot 10^4$. Количество пятизначных чисел, все цифры которых четны, равно $4 \cdot 5^4$. **28.31.** $9 \cdot 10^4 - 5^5$. **28.32.** $9 \cdot 10^4 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. *Указание*. Количество пятизначных чисел, все цифры которых различны, равно $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. **28.33.** $6^3 - 5^3$. **28.34.** $2 \cdot 9!$. *Указание*. Предположим, что знакомые сели на один стул. 9 человек можно разместить на 9 стульях 9! способами. Поскольку знакомые могут сесть справа или слева друг от друга, то всего вариантов $2 \cdot 9!$. **28.35.** $5! - 2 \cdot 4!$. **28.36.** 1) $\frac{6!}{3!}$. *Указание*. Если считать все буквы этого слова различными (это условно можно записать так: $МО_1ЛО_2КО_3$), то получим 6! различных слов. Однако слова, отличающиеся только перестановкой букв $О_1$, $О_2$, $О_3$, на самом деле одинаковы; 2) $\frac{10!}{3!\,2!\,2!}$;

3) $\frac{13!}{(2!)^4}$. **28.37.** 140. *Указание*. Любой делитель данного числа имеет вид $2^{k_1} \cdot 5^{k_2} \cdot 7^{k_3}$, где k_1, k_2, k_3 — целые числа, удовлетворяющие условиям $0 \leqslant k_1 \leqslant 4$, $0 \leqslant k_2 \leqslant 3$, $0 \leqslant k_3 \leqslant 6$. Количество делителей данного числа равно количеству наборов, которые можно составить из чисел k_1, k_2, k_3 (при этом наборы, отличающиеся друг от друга порядком элементов, считаются разными). Число k_1 можно выбрать 5 способами, число k_2 — 4 способами, число k_3 — 7 способами. Следовательно, указанный набор можно составить $5 \cdot 4 \cdot 7 = 140$ способами.

29.1. 7!. **29.2.** 20!. **29.3.** 5!. **29.4.** A_{11}^2. **29.5.** A_{15}^3. **29.6.** A_{12}^6. **29.7.** A_{16}^3. **29.8.** A_{32}^2. **29.9.** C_{29}^5. **29.10.** C_n^4. **29.11.** C_{10}^3. **29.12.** $A_3^2 \cdot A_5^4$. **29.13.** $C_7^2 \cdot C_{13}^3$. **29.14.** $C_{12}^3 \cdot C_{88}^7$. **29.15.** $7 \cdot C_{12}^2 + 12 \cdot C_7^2$. **29.16.** I способ. $C_9^3 + 15 \cdot C_9^2 + 9 \cdot C_{15}^2$; II способ. $C_{24}^3 - C_{15}^3$. **29.17.** $C_{30}^7 - C_{13}^7$. **29.18.** $C_{80}^6 - C_{65}^6$. **29.19.** $\frac{C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{3!}$. **29.20.** $\frac{C_{20}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5}{4!}$. **29.21.** C_{m+1}^n. *Указание*. Расположим в ряд m белых шаров. Черный шар может занять одно из $m + 1$ положений: крайний слева, между любыми двумя белыми шарами, крайний справа (см. рис.). **29.22.** C_{16}^4. *Указание*. Расположим шары в ряд. Четыре «перегородки» делят эти шары на пять групп (см. рис.). Следовательно, количество способов раскладывания шаров по ящикам равно количеству способов размещения 4 перегородок на 16 местах. **29.23.** C_{n-1}^{k-1}. *Указание*. Запишем $n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$. Далее воспользуйтесь идеей решения задачи 29.22.

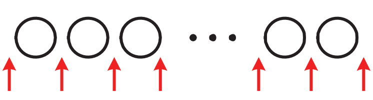


Рис. к задаче 29.21

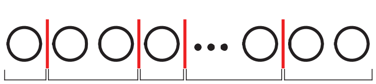


Рис. к задаче 29.22

30.1. Нет. **30.2.** Да. **30.3.** 1) 0; 2) 1. **30.4.** 1) 0; 2) 1. **30.6.** Если частота события B оказалась больше частоты события C, то можно *предположить*, что событие B более вероятно, чем событие C. Однако вывод, сделанный на основании отдельных наблюдений (эксперимент проведен 50 раз), не может *гарантировать*, что событие B более вероятно, чем событие C. **30.8.** 1) 15,4 %; 2) 25,6 %; 3) 19,9 %; 4) 9,6 %; 5) 74,1 %. **30.9.** 1) $\frac{23}{99}$; 2) $\frac{6}{17}$; 3) $\frac{16}{73}$. **30.10.** 22,8 %. **30.11.** 14. **30.13.** 3) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$. **30.14.** 5) $\frac{8}{17}$; 6) $\frac{7}{17}$. **30.15.** 1) $\frac{b}{a+b+c}$; 3) $\frac{a+b}{a+b+c}$. **30.16.** 2) $\frac{m+k}{n+m+k}$. **30.17.** $\frac{1}{12}$. **30.18.** $\frac{1}{120}$. **30.19.** $\frac{1}{24}$. **30.20.** $\frac{1}{120}$. **30.21.** $\frac{5}{33}$. **30.22.** $\frac{1}{494}$. **30.23.** $\frac{72}{95}$. **30.24.** $\frac{68}{203}$. **30.25.** 1) 18; 2) 3. **30.26.** 2) 8. **30.27.** 1) $\frac{2}{87}$; 2) $\frac{7}{29}$; 3) $\frac{15}{29}$; 4) $\frac{1}{15}$. **30.28.** $\frac{8}{15}$. **30.29.** $\frac{C_9^2 \cdot C_{91}^5}{C_{100}^7} \approx 0{,}1$. **30.30.** $\frac{C_5^2 \cdot C_{195}^6}{C_{200}^8} \approx 0{,}01$. **30.31.** $\frac{108}{299}$. **30.32.** $\frac{21}{128}$. **30.33.** $\frac{1}{16}$. **30.34.** Появление по крайней мере одной шестерки. **30.35.** 1) $\frac{1}{216}$; 2) $\frac{5}{18}$; 3) $\frac{5}{324}$; 4) $\frac{1}{81}$. **30.36.** 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{125}{216}$; 3) $\frac{1}{27}$; 4) $\frac{5}{36}$. **30.37.** $\frac{3^{10}}{5^{10}}$. **30.38.** $\frac{C_{10}^7\ 3^3}{4^{10}} \approx 0{,}003$. **30.39.** $\frac{6^5}{7^5}$. **30.40.** $\frac{C_{20}^2\ C_{10}^4\ C_5^1}{C_{35}^7} \approx 0{,}03$. **30.41.** $\frac{C_{12}^4\ C_8^3\ C_4^2}{C_{24}^9} \approx 6 \cdot 10^{-4}$. **30.42.** $\frac{C_{15}^3\ C_{73}^2}{C_{100}^5} \approx 0{,}016$. **30.43.** $\frac{C_n^2\ C_m^2}{C_{n+m}^4}$. **30.44.** $\frac{C_{n+m}^3 - C_m^3}{C_{n+m}^3}$. **30.45.** $\frac{nmk}{C_{n+m+k}^3}$. **30.46.** $\frac{C_{35}^5 + C_{35}^4\ C_{10}^1}{C_{45}^5} \approx 0{,}69$. **30.47.** $\frac{C_{50}^8 - C_{46}^8}{C_{50}^8} \approx 0{,}51$. **30.48.** $\frac{C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2}{2^{10}} \approx 0{,}05$. *Указание*. Указанная частота будет меньше 0,3, если из 10 подбрасываний монеты герб выпадет менее 3 раз. **30.49.** $\frac{29}{128}$.

31.3. Моду. **31.4.** Медиану и моду. **31.7.** $2\frac{1}{15} \approx 2{,}07$ мяча за игру. **31.8.** 3,8. **31.13.** 1) 7,9; 2) 7,7. **31.14.** 1) 1,4 ч/сут.; 2) 1,35 ч/сут. **31.15.** 1) 50,08 %; 2) 49,68 %. **31.16.** 1) 13,72 %. *Указание*. Вычислите среднее значение данных второй строки таблицы; 2) 14,12 %. *Указание*. Вычислите среднее взвешенное значение данных второй строки таблицы с весовыми коэффициентами из третьей строки таблицы. **31.17.** 1) 21,8 тыс. долларов США; 2) 13,7 тыс. долларов США.

32.6. 5) Может сузиться на число -1, то есть может быть утерян корень $x = -1$. Если $-1 \notin D(f)$ или $f(-1) = 1$, то множество корней не изменится; 7) если $-1 \in D(f) \cap D(g)$ и $f(-1) = g(-1)$, то будет получен посторонний корень -1; если $-1 \notin D(f) \cap D(g)$ или $f(-1) \neq g(-1)$, то множество корней не изменится. **32.7.** 1) Корней нет; 2) 0. **32.8.** 1) 0,6; 2) 0. **32.9.** 1) $\frac{\sqrt{29}-1}{2}$; 2) 1,5. **32.10.** 1) $\frac{1+3\sqrt{5}}{2}$; 2) 7. **32.11.** 1) πk, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.12.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.13.** 0; 1; -1; $\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{3}$. **32.14.** $\frac{5}{2}$; $-\frac{5}{2}$; 1; -1. **32.15.** 1) 5. *Указание*. Умножив обе части уравнения на выражение $\sqrt{2x^2 - x + 4} - \sqrt{2x^2 - 7x + 10}$, получим $6(x-1) = 3(x-1) \times$ $\times \left(\sqrt{2x^2 - x + 4} - \sqrt{2x^2 - 7x + 10}\right)$. Отметим, что число 1 не является корнем исходного уравнения. Далее сложим почленно исходное уравнение и уравнение $\sqrt{2x^2 - x + 4} - \sqrt{2x^2 - 7x + 10} = 2$; 2) -1. *Указание*. Умножьте обе части уравнения на выражение $\sqrt{x+1} - 1$. **32.16.** 1) $\frac{7+\sqrt{13}}{6}$; 2) 2. **32.17.** 1) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $4\pi + 8\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. *Указание*. Данное уравнение

равносильно системе $\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos \dfrac{3x}{2} = 1, \\ \sin \dfrac{x}{8} \neq 0. \end{cases}$ **32.18.** 1) $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$;
2) $3\pi + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.19.** 1) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $\operatorname{arctg} \dfrac{5}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
2) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.20.** $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
32.21. k, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. **32.22.** $1 + 4k$, $k \in \mathbb{N}$. **32.23.** $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
32.24. $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **32.25.** Корней нет. **32.26.** $\dfrac{3}{5}$.

33.1. 1) 1; 7; $3+\sqrt{10}$; $3-\sqrt{10}$; 2) 4; $1+\sqrt{3}$; 3) 2; 4) 3; 5) 0; 6) −3. **33.2.** 1) −2; −1; 3; 4; 2) −12; −4; 2; 3) 1; 4; 4) 4; 5) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 6) 4. **33.3.** 1) −2; −1; 3; 2) 1; 3; 3) −1; 2; −3. **33.4.** 1) −2; 2) 1; −2. **33.5.** 1) −6; −4; −1; 1; 2) −1; −3; 1; 3) −1; 1; 2; 4; 4) −3; 1. **33.6.** 1) −6; −2; $-4+2\sqrt{5}$; $-4-2\sqrt{5}$; 3) −2; 1; 3) −2; −1; 0; 1; 4) −3; 0; $\dfrac{-3+\sqrt{73}}{2}$; $\dfrac{-3-\sqrt{73}}{2}$.
33.7. 1) $\dfrac{3}{2}$; 2) $\dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
33.8. 1) −2; −1; 2; 3; 2) πn, $n \in \mathbb{Z}$. **33.9.** 2; 9. **33.10.** 1) −1; 12. *Указание.* $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = (x^2 - 11x + 28) \times$ $\times (x^2 - 11x + 30)$; 2) $-4+\sqrt{21}$; $-4-\sqrt{21}$. **33.11.** 1) $-5+\sqrt{95}$; $-5-\sqrt{95}$; 2) $-4+\sqrt{5}$; $-4-\sqrt{5}$. **33.12.** 1) −2; $-\dfrac{1}{2}$. *Указание.* Представьте данное уравнение в виде $\left(2x-5+\dfrac{2}{x}\right)\left(2x+7+\dfrac{2}{x}\right)=$ $=-20$; 2) −6; −4; $\dfrac{-15+\sqrt{129}}{2}$; $\dfrac{-15-\sqrt{129}}{2}$. **33.13.** 1) −8; $-\dfrac{15}{2}$; $\dfrac{-35+\sqrt{265}}{4}$; $\dfrac{-35-\sqrt{265}}{4}$; 2) −4; 5; $-5+3\sqrt{5}$; $-5-3\sqrt{5}$.

33.14. 1) $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{-11+\sqrt{105}}{4}$; $\frac{-11-\sqrt{105}}{4}$. *Указание*. Замена $x+\frac{1}{x}=t$; 2) $-3+\sqrt{15}$; $-3-\sqrt{15}$. **33.15.** 1) 1; $\frac{-11+\sqrt{85}}{6}$; $\frac{-11-\sqrt{85}}{6}$; 2) $5+\sqrt{31}$; $5-\sqrt{31}$; $\frac{3+\sqrt{159}}{5}$; $\frac{3-\sqrt{159}}{5}$. **33.16.** 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{2}$. *Указание*. Представьте данное уравнение в виде $\frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+$ $+\frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1$; 2) 3; 5; $9+\sqrt{66}$; $9-\sqrt{66}$. **33.17.** 1) $\frac{5+\sqrt{21}}{2}$; $\frac{5-\sqrt{21}}{2}$; 2) 1; 4. **33.18.** 1) 2; 4; -1; $-\frac{1}{2}$. *Указание*. Разделите обе части уравнения на $(x-1)^2$; 2) 3; $\frac{81-9\sqrt{97}}{8}$. **33.19.** 1) $-3+\sqrt{3}$; $-3-\sqrt{3}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; 2) 1; $\frac{1+\sqrt{109}}{18}$. **33.20.** 1) $\operatorname{arctg}\left(-1\pm\sqrt{3}\right)+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $\operatorname{arctg} 2+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. *Указание*. Умножьте правую часть данного уравнения на $\sin^2 x+\cos^2 x$. **33.21.** $\operatorname{arctg}\frac{15}{7}+\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **33.22.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $\pm\left(\pi-\arccos\frac{2}{3}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. *Указание*. $5\left(3\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)+2\left(9\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)+5=0$. Сделайте замену $3\cos x+\frac{1}{\cos x}=y$, тогда $9\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}=$ $=y^2-6$. **33.23.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. *Указание*. $(\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x)+$ $+(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)-4=0$. Сделайте замену $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=y$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, $(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{17}-5}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

33.24. $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. *Указание*. Выполните замену $\sin x+\cos x=t$. **33.25.** $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **33.26.** 1) 8; 2) 10. *Указание*. Замена $\sqrt[3]{x-2}=a,\ \sqrt{x-1}=b$. Тогда $a^3-b^2=-1$. Другое решение можно получить, если учесть возрастание функции $f(x)=\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-1}$. **33.27.** 1) $-\frac{17}{5};\ \frac{63}{5}$; 2) 1; 2; 10. **33.28.** 1) 4; 2) корней нет. **33.29.** 1) 3; 2) корней нет. **33.30.** 1) $4\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$. **33.31.** 1) $6\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{9\pi}{4}+3\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. **33.32.** 2. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что $0\leqslant\log_2(\cos^2\pi x+1)\leqslant 1,\ 4x-x^2-3\leqslant 1$. **33.33.** 2. **33.34.** 1) 2; 2) 4. **33.35.** 1) 9; 2) 2. **33.36.** 0. **33.37.** 0.

34.1. 1) $\left[\frac{5}{3};5\right]$; 2) $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\cup(3;+\infty)$. **34.2.** 1) $\left(\frac{2}{7};\frac{2}{5}\right)$; 2) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **34.3.** 1) $\left(-1-\sqrt{5};-2\right)\cup\left(-2;-1+\sqrt{5}\right)$; 2) $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ +\infty)$; 3) $\left(-5;3+2\sqrt{2}\right)$; 4) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **34.4.** 1) $\left(-\frac{3}{4};1\right)$; 2) $(-\infty;\ -3]\cup[1;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -1]\cup[5;\ +\infty)$. **34.5.** 1) $\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{15}}{2}\right)$; 2) $\left(2;2\sqrt{2}\right]$; 3) $[-4;-3]\cup\left[-\frac{1}{3};0\right]$; 4) решений нет. **34.6.** 1) $[9;\ +\infty)$; 2) $\left[0;\frac{1}{2}\right)$; 3) $[2;\ 4]$; 4) $\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]$. **34.7.** 1) $\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2};+\infty\right)$; 2) $(-\infty;-2]\cup\left[5;\frac{74}{13}\right)$; 3) $[0;\ 4]$. **34.8.** 1) $\left[-2;-\frac{8}{5}\right)\cup(0;2]$; 2) $(-\infty;\ -3]$; 3) $[2;\ 3]$. **34.9.** 1) Решений нет; 2) $(-\infty;\ -10]\cup[1;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -2]\cup(0;\ +\infty)$. **34.10.** 1) $\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$; 2) $\left[-6;-4+\sqrt{2}\right]$; 3) $(-\infty;\ -3]\cup(0;\ +\infty)$. **34.11.** 1) 4; 2) $[-4;\ -1]$; 3) $(-\infty;\ -8]\cup\{1,\ 4\}$; 4) $(-\infty;-5]\cup[2;+\infty)\cup\left\{-2,-\frac{1}{2}\right\}$. **34.12.** 1) $[3;\ 12]$; 2) $[7;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -3]\cup$

$\cup \{-2, 1\}$; 4) $\left(-\infty; -\frac{17}{2}\right] \cup [1; 10)$. **34.13.** 1) $\left[-5; -\frac{9+\sqrt{61}}{8}\right)$; 2) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. **34.14.** 1) $(2; +\infty)$; 2) 5. **34.15.** 1) $\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{9}+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{9}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; -\frac{\pi}{4}+\pi k\right) \cup \left(\operatorname{arctg} 2+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}; \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{2}+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
34.16. 1) $\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \pi+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k; \operatorname{arctg} 2+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
34.17. 1) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k; \pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(-\pi+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k; 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\left[2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \pi+2\pi k\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. **34.18.** 1) $\left(-\pi+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \cup \left(2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\left(\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\left(2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \pi+2\pi k\right) \cup \left[\frac{3\pi}{2}+2\pi k; \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **34.19.** 1) $[3; 11] \cup \{2\}$; 2) $(0; 21] \cup \{-21\}$. **34.20.** 1) $[2; 10] \cup [37; +\infty)$; 2) $[-6; 0) \cup \{6\}$.
34.21. 1) $[-79; 83]$; 2) $[-5; 11]$; 3) $(-\infty; 1)$; 4) $[-2; +\infty)$; 5) $[1; +\infty)$. **34.22.** 1) $[-57; 71]$; 2) $[-31; 33]$; 3) $[3; +\infty)$; 4) $[-3; +\infty)$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

Номер задания	Номер задачи																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	В	А	Б	Б	Г	Г	А	Б	Г	Г	А	А	Б	В	В	А	В	Б
2	Г	Б	Б	Г	Б	А	В	Б	Г	Б	В	В	А	В	В	А	В	Б
3	Б	Г	Б	Г	Г	Б	А	Б	А	А	Г	В	Б	Б	Г	В	В	А
4	В	Г	Г	А	Б	Г	Б	Г	В	Б	А	Б	В	Г	Г	В	В	А

Задание № 5

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ответ	Г	Г	Б	В	В	В	Б	Г	Б	А	А	А	Г	В	А	Б	В	Б

19

	А	Б	В	Г	Д
1					X
2		X			
3	X				
4			X		

20

	А	Б	В	Г	Д
1					X
2		X			
3				X	
4			X		

Задание № 6

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ответ	В	Г	Г	А	Б	В	Г	А	В	В	А	Б	Г	А	А	Г	Б	Б

19

	А	Б	В	Г	Д
1		X			
2					X
3			X		
4				X	

20

	А	Б	В	Г	Д
1		X			
2				X	
3	X				
4			X		

Задание № 7

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ответ	А	Г	В	А	В	А	Г	А	В	Б	В	Б	Б	А	Г	Г	Б	Г

19

	А	Б	В	Г	Д
1			×		
2				×	
3	×				
4		×			

20

	А	Б	В	Г	Д
1	×				
2					×
3		×			
4				×	

Задание № 8

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ответ	В	В	Г	А	Г	Г	В	А	А	В	Б	Б	Г	В	А	В	Б	А

19

	А	Б	В	Г	Д
1	×				
2			×		
3		×			
4				×	

20

	А	Б	В	Г	Д
1	×				
2			×		
3		×			
4				×	

Задание № 9

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ответ	Г	В	Б	Б	Г	Г	Г	А	В	В	Б	Б	Г	Б	Б	Б	А	Г

19

	А	Б	В	Г	Д
1			×		
2				×	
3	×				
4		×			

20

	А	Б	В	Г	Д
1					×
2				×	
3			×		
4	×				

Задание № 10

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ответ	А	Г	Г	Б	Б	А	Г	В	В	А	Б	В	Б	А	В	Б	А	Г

19

	А	Б	В	Г	Д
1					X
2				X	
3			X		
4		X			

20

	А	Б	В	Г	Д
1		X			
2				X	
3			X		
4					X

Задание № 11

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ответ	Г	Г	В	В	Г	А	В	Г	А	В	Б	В	Г	Б	В	Г	Б	А

19

	А	Б	В	Г	Д
1		X			
2			X		
3	X				
4					X

20

	А	Б	В	Г	Д
1			X		
2		X			
3				X	
4	X				

Задание № 12

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ответ	Б	Г	В	В	Б	А	В	В	А	Г	А	В	А	Б	Г	Б	Б	А

19

	А	Б	В	Г	Д
1	X				
2			X		
3				X	
4					X

20

	А	Б	В	Г	Д
1				X	
2		X			
3	X				
4			X		

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 2. Показательная и логарифмическая функции

§ 3. Интеграл и его применение

§ 4. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА
11 клас

Підручник
для загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень,
профільний рівень

(Російською мовою)

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Редактор *О. В. Трефілова*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 27,00.
Тираж 3 000 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003