

Математика

Г. П. БЕВЗ, В. Г. БЕВЗ



6 класс

ББК 22.1я721
Б36

*Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины
(приказ № 341 от 28.04.2006 г.)*

**Издано за счет государственных средств.
Продажа запрещена**

Перевод с украинского
Н. Е. Зубченко

Бевз Г. П.

Б36 Математика: 6 кл.: Учеб. для общеобразоват. учебн. заведений: Пер. с укр. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К.: Генеза, 2006. — 304 с.: ил.
ISBN 966-504-526-1

ББК 22.1я721

ISBN 966-504-526-1 (рус.)
ISBN 966-504-506-7 (укр.)

© Бевз Г. П., Бевз В. Г., 2006
© Издательство «Генеза»,
художественное оформление, 2006

Уважаемые шестиклассники!

Математика – одна из самых древних, интересных и необходимых наук. Ее изучают в каждом классе общеобразовательной школы, в средних специальных и высших учебных заведениях, поскольку математические знания необходимы каждому специалисту.

Этот учебник поможет вам овладеть математикой за 6-й класс. В каждом его параграфе имеются теоретические сведения и упражнения.

Читая теоретический материал, основное внимание обращайте на слова, напечатанные *курсивом*. Это – *математические термины*. Необходимо понять, что эти слова означают, и запомнить их.

Предложения, напечатанные **жирным шрифтом**, – это правила или другие **важные математические утверждения**, их необходимо помнить и использовать при решении задач.

В каждом параграфе учебника имеется рубрика «Узнайте больше». В ней помещена дополнительная информация для учащихся, которые интересуются математикой.

В рубрике «Выполняем вместе» номерами в кружках (например, ②) обозначены важнейшие упражнения, а кружочком (●) – их решения. Советуем просмотреть эти примеры, прежде чем выполнять задания самостоятельно.

Задания, рекомендованные для домашней работы, напечатаны **пурпурным** цветом.

В учебнике имеются упражнения четырех уровней сложности. Наиболее простые из них (в рубрике «Устные упражнения») советуем решать устно всем учащимся. Для письменного решения предназначены упражнения уровней А и Б.

Для тех учащихся, которые особенно интересуются математикой, предлагаются задачи, обозначенные звездочкой (*). Эти задачи необязательные. Но если вы хотите развивать свое математическое мышление и испытать себя, если вы действительно интересуетесь математикой, – решайте их.

Желаем успехов!

Делимость натуральных чисел



**Математика — царица наук,
а арифметика — царица
математики.**

К. Гаусс

В этом разделе рассматриваются важнейшие сведения из *теории чисел*. Это очень древняя и интересная математическая наука, которая исследует свойства натуральных чисел, связанные с их делением. Кратко основное содержание раздела выглядит так.

- Деление и делители числа.
- Признаки делимости на 10, 5 и 2.
- Признаки делимости на 3 и 9.
- Разложение чисел на простые множители.
- Наибольший общий делитель.
- Наименьшее общее кратное.

Эти темы часто используются в последующих разделах математики. В частности, без их знания невозможно успешно изучать обыкновенные дроби. Поэтому раздел 1 учебника можно считать введением к разделу 2.

§ 1.

Деление и делители числа

Складывать и умножать можно любые числа. Вычитание возможно лишь тогда, когда вычитаемое не больше уменьшаемого. Сложнее с делением. Деление – это действие, обратное умножению.

$$20 : 4 = 5, \text{ потому что } 5 \cdot 4 = 20.$$



Разделить одно число на другое – значит найти такое третье число, которое при умножении на второе дает первое число. То есть, если

$$a : b = k, \text{ то } a = b \cdot k.$$

Вы уже знаете, что иногда при делении одного числа на другое получают неполное частное и остаток. Вы также знаете, что делить можно и дробные числа. В этом разделе мы будем рассматривать деление только натуральных чисел, причем без остатка.

Например, число 21 делится на 7. Говорят, что число 7 является делителем числа 21. Делителями числа 21 являются также числа 1, 3 и 21. Никакое другое число не является делителем числа 21.

Если a делится на b , то число b называют *делителем* числа a .

Например, число 22 имеет четыре делителя: 1, 2, 11 и 22;

число 9 имеет три делителя: 1, 3 и 9;

число 7 имеет два делителя: 1 и 7.

Число, которое имеет только два делителя, называется *простым числом*. Можно сказать и так. *Число, которое делится только на 1 и само на себя, называется простым.*

Простыми являются числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Простых чисел существует бесконечно много. Таблица простых чисел, меньших 1000, представлена на форзаце учебника.

Число, имеющее больше двух делителей, называется *составным*.

Составными, например, являются числа 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14. Составных чисел также бесконечно много.

Число 1 имеет только один делитель: 1. Его не принято называть ни простым, ни составным числом.

В зависимости от количества делителей все натуральные числа делятся на три класса: простые числа, составные числа, число 1.



Простое

$$7 = 1 \cdot 7.$$

Составное

$$14 = 1 \cdot 2 \cdot 7.$$

1 — не простое

и не составное.



Узнайте больше

Если простые числа записать в порядке их возрастания, то образуется *последовательность простых чисел*:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

Последовательность простых чисел имеет много интересных свойств и тайн. Например, еще ученые Древней

Греции заметили, что среди простых чисел много таких, разность которых равна 2, например: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19 и т. д. Такие пары чисел называются простыми числами-близнецами.

Уже более 25 веков математики пытаются выяснить, существуют ли наибольшие числа-близнецы, но и до сих пор ответа на этот вопрос мы не знаем.

Существует также много других проблем (еще не решенных задач), связанных с простыми числами.



Проверьте себя

1. Что значит разделить одно число на другое?
2. Когда говорят, что число p является делителем числа a ?
3. Сформулируйте определение простого числа.
4. Назовите пять первых простых чисел.
5. Назовите пять первых составных чисел.
6. Сколько существует простых чисел? А составных?



Выполняем вместе

- ① Проверьте, является ли число 7 делителем числа 63. А числа 67?

• $63 : 7 = 9$, поэтому число 7 – делитель 63.

$67 : 7 = 9$ (остаток 4), поэтому 7 – не делитель числа 67.

- ② Найдите наибольший делитель и наибольший простой делитель числа 20.

• Делителями числа 20 являются 1, 2, 4, 5, 10, 20. Наибольший из них – 20, наибольший простой делитель – 5.



Устные упражнения

1. Простое или составное число 10? А число 11?
2. Назовите наименьший делитель числа 35. А какой наименьший простой делитель числа 35?
3. Назовите наибольший делитель числа 49.
4. Сколько разных делителей имеет число 17?
5. Число p – простое. Сколько разных делителей оно имеет?
6. Верно ли, что каждое натуральное число, отличное от 1, имеет по крайней мере два делителя?
7. Сколько разных делителей имеет число 4?



Уровень А

8. Является ли 8 делителем числа 40? А числа 60?
9. Сколько делителей имеет число 20? Запишите их.
10. Верно ли, что 1 является делителем каждого числа?
11. Запишите все делители числа 30.
12. Какое однозначное число делится и на 2, и на 3?
13. Существует ли число, которое делится и на 2, и на 7?
14. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится и на 3, и на 8.
15. Число p делится на 8. Делится ли оно на 2? А на 4? Покажите на примерах.
16. Какое из чисел имеет больше делителей: 12 или 13?
17. Является ли число 17 простым? А число 27?
18. Ученик утверждает: «Число, имеющее два делителя, называется простым». Какую ошибку он допустил? Покажите на примерах.
19. Покажите, что число 14 составное. А число 41?
20. Составным или простым является число 49? А число 29?



Уровень Б

21. Какое из утверждений верно:
 - а) каждое натуральное число простое или составное;
 - б) если натуральное число не простое, то оно составное;
 - в) если натуральное число больше 1 и не простое, то оно составное?
22. Найдите сумму всех делителей числа 9.
23. Что больше: сумма всех делителей числа 6 или сумма всех делителей числа 7?
24. Число a – простое. Найдите сумму всех его делителей.
25. Найдите произведение всех делителей числа 10.
26. Число a – простое. Найдите произведение всех его делителей.



Упражнения для повторения

27. Вычислите устно:

а) $45 + 12,$	б) $5,3 + 7,$	в) $12 \cdot 5,$
$37 + 16,$	$0,2 + 3,5,$	$1,3 \cdot 3,$
$82 - 41,$	$4 - 3,8,$	$4,6 : 2,$
$65 - 17;$	$6,7 - 5;$	$3 : 0,3.$

Выполните действия (28–33).

28. а) $385 + 429$, б) $59,7 + 12,9$,
 $805 - 718$, $13,8 - 6,51$,
 $4328 - 3009$; $3,05 - 2,007$;
 в) $2,4 \cdot 3,5$, г) $2,5 \cdot 3,7 \cdot 4$,
 $72,5 \cdot 0,26$, $7,8 \cdot 0,04 \cdot 25$,
 $0,03 : 0,15$; $0,8 \cdot 4,9 \cdot 0,25$.
29. а) $529 : 23$, б) $5,76 : 2,4$, в) $32,5 : 0,5$,
 $3,136 : 112$, $7,84 : 14$, $0,72 : 1,8$,
 $5929 : 110$; $33,64 : 2,9$; $73,96 : 8,6$.
30. а) $7 + 125 : 5$; б) $8 - 23 : 5$; в) $13 : 2 + 15 : 25$.
31. а) $4,8 + 3 : 4$; б) $7,5 - 1 : 25$; в) $6,5 - 6 : 5$.
32. а) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$; б) $\frac{5}{9} - \frac{1}{9}$; в) $2\frac{4}{5} - \frac{3}{5}$.
33. а) $2,5 \cdot 8 + (17 - 0,1) : 26$;
 б) $183 \cdot 0,5 - (6,2 + 1,9) : 5,4$.
34. Какое из чисел больше:
 а) 1,2 или 1,125; б) 3,786 или 3,8;
 в) $\frac{2}{7}$ или $\frac{3}{7}$; г) $\frac{12}{13}$ или $\frac{15}{13}$?
35. Найдите число, которое:
 а) на 1,9 меньше 5,83;
 б) в 4 раза меньше 0,75;
 в) в 2,5 раза больше 0,32.
36. Запишите два числа таких, что:
 а) их сумма равна 30, а разность – 6;
 б) их сумма равна 12,5, а одно из них в 4 раза больше другого;
 в) их разность равна 3,4, а одно из них в 3 раза больше другого;
 г) их полуразность равна 4,5, а полусумма – 45.
37. Найдите число:
 а) которое составляет 2,4 % числа 350;
 б) 20 % которого равны числу 38,4;
 в) которое на 12 % больше числа 8,5.
38. Решите уравнение:
 а) $3x + 17 = 50$; б) $1,5x - 5 = 7,6$.
39. В двух ящиках 53 кг яблок. Сколько яблок в каждом ящике, если в первом их на 5 кг больше, чем во втором?



40. Проволоку длиной 43 м разрезали на две части так, что одна из них оказалась в три раза длиннее другой. Найдите длину большей части.

41. Из городов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 1 ч 30 мин. Найдите расстояние между городами A и B , если скорости автомобилей равны 68 км/ч и 72 км/ч.

42. Начертите две прямые, пересекающиеся под углом 60° . Найдите значение трех иных углов, образованных этими прямыми.

43. Точка K лежит на отрезке AB , длина которого равна 1,7 м. Найдите длину отрезка AK , если $KB = 45$ см.

44. Найдите периметр и площадь прямоугольника, стороны которого равны 6 м и 4,5 м.

45. Во сколько раз площадь квадрата со стороной 12 см больше площади квадрата со стороной 4 см?

46. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 3 см, 4,5 см и 6,7 см.

47. Три одинаковые игральные кости расположены так, как показано на рисунке 1. Найдите сумму очков на всех невидимых гранях этих костей.



Рис. 1

§ 2.

Признаки делимости на 10, 5 и 2

Как узнать, делится ли то или иное число на 10? Очень легко. Нужно лишь посмотреть на его последнюю цифру. Если она 0, то данное число делится на 10. Если же последняя цифра не 0, то это число на 10 не делится. Два последние предложения можно заменить одним, которое называется *признаком делимости чисел на 10*.



На 10 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются цифрой 0.

Используя этот признак, можно сразу (не выполняя деления) сказать, что числа 130, 3700, 4080 делятся на 10, а числа 83, 305, 1001 на 10 не делятся.

Признак делимости на 5 можно сформулировать так.

На 5 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются цифрой 5 или 0.



Например, каждое из чисел 95, 375, 70, 4900 делится на 5, а каждое из чисел 37, 559, 5008 на 5 не делится. Убедитесь в этом, разделив каждое из этих чисел на 5.

На 2 делится каждое натуральное число, которое оканчивается цифрой 0, 2, 4, 6 или 8. Эти цифры называют *четными*. Поэтому *признак делимости на 2* можно сформулировать так.

На 2 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются четной цифрой.



Примеры чисел, которые делятся на 2:

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 376, 11 108.

Числа, которые делятся на 2, называются *четными*.

Цифры 1, 3, 5, 7, 9 называются *нечетными*. Каждое натуральное число, которое оканчивается нечетной цифрой, — *нечетное*. Нечетное число не делится на 2. В зависимости от делимости на 2 все натуральные числа можно разбить на два класса: четные и нечетные числа.

На координатном луче за каждым четным числом следует нечетное, а за каждым нечетным — четное (рис. 2).



Рис. 2



Узнайте больше

Четные и нечетные числа рассматривал древнегреческий ученый Пифагор еще почти 25 веков назад. Ученые Древнего Китая четные числа называли женскими, а нечетные – мужскими.

Если в выражение $2n$ вместо n подставить числа 0, 1, 2, 3, 4, ..., то получим *последовательность четных чисел*:

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

Если в выражение $2n + 1$ подставить вместо n числа 0, 1, 2, 3, 4, ..., то получим *последовательность нечетных чисел*:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

Каждая из этих последовательностей бесконечная.



Проверьте себя

1. Сформулируйте признак делимости чисел на 10.
2. Какие цифры называют четными, а какие – нечетными?
3. Сформулируйте признак делимости чисел на 2; на 5.
4. Какие числа называют четными? Приведите примеры.
5. Сколько существует четных цифр и четных чисел?
6. Сколько существует нечетных цифр и нечетных чисел?



Выполняем вместе

- ① Найдите наибольшее четное трехзначное число.
 - Наибольшее трехзначное число 999 – нечетное. Ему предшествует четное число 998. Следовательно, наибольшее четное трехзначное число 998.
- ② Сколько существует нечетных чисел, которые больше 90 и меньше 100?
 - Такими являются числа 91, 93, 95, 97 и 99. Их всего 5.
- ③ Докажите, что сумма двух нечетных чисел – число четное.
 - Если числа a и b нечетные, то $a = 2n + 1$ и $b = 2m + 1$, где n и m – некоторые натуральные числа.
Тогда $a + b = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$, а это число четное.



Устные упражнения

48. Назовите пять наименьших нечетных чисел.
49. Назовите пять наименьших четных чисел.
50. Назовите пять наименьших чисел, которые делятся на 5.
51. Какое утверждение верно:
 - а) если число делится на 10, то оно делится и на 2;
 - б) если число делится на 10, то оно делится и на 5;
 - в) если число делится на 2, то оно делится и на 10;
 - г) если число делится на 5, то оно делится и на 10?



Уровень А

52. Какие из чисел 35, 270, 3005, 9900, 600 080 делятся на 10? Запишите числа, которые не делятся на 10.
53. Запишите все двузначные числа, которые делятся на 10.
54. Запишите пять наименьших трехзначных чисел, которые делятся на 10.
55. Запишите пять наибольших трехзначных чисел, которые делятся на 10.
56. Найдите сумму всех двузначных чисел, которые делятся на 10.
57. Какие из чисел 5, 95, 130, 54, 108, 5551, 10 000 делятся на 5? Запишите числа, которые не делятся на 5.
58. Запишите пять наименьших натуральных чисел, которые делятся на 5.
59. Запишите пять наименьших трехзначных чисел, которые делятся на 5.
60. Сколько существует двузначных чисел, которые делятся на 5?
61. Какие из чисел 7, 10, 39, 180, 10 005, 22 243 делятся на 2? Запишите их.
62. Какие из чисел 9, 36, 45, 333, 47, 10, 10 008 не делятся на 2? Найдите сумму наибольшего и наименьшего из них.
63. Запишите все четные натуральные числа, которые меньше 20.
64. Запишите все нечетные натуральные числа, которые не больше 21.
65. Запишите все четные двузначные числа, имеющие в записи цифру 7.
66. Найдите сумму всех четных однозначных чисел.
67. Найдите сумму всех нечетных однозначных чисел.

68. Припишите справа к числу 327 такую цифру, чтобы образовалось четырехзначное число, которое делится и на 2, и на 5. Делится ли это число на 10?

69. Покажите на примерах, что сумма двух четных чисел – число четное.

70. Четным или нечетным числом является сумма двух нечетных чисел? Приведите примеры.



Уровень Б

71. Какое утверждение верно:

- а) если число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10;
- б) если число делится на 10, то оно оканчивается цифрой 0;
- в) если последняя цифра числа не 0, то оно не делится на 10;
- г) если число не делится на 10, то его последняя цифра не 0?

72. Запишите наибольшее число, все цифры которого разные и которое не делится на 10.

73. Какое однозначное число нужно прибавить к числу 592, чтобы полученная сумма:

- а) делилась на 10;
- б) делилась на 5, но не делилась на 10?

74. Число a – четное. Каким будет число $a + 1$?

75. Число a – нечетное. Каким будет число $a + 1$?

76. Верно ли, что в последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... за каждым нечетным числом следует четное, а за каждым четным – нечетное?

77. Дети играли в такую игру. Пятиклассник писал многозначные числа и показывал шестикласснику только их последние цифры, а тот угадывал, какое из них делится на 2, 5, 10, а какое не делится (рис. 3). Как он это делал?



Рис. 3

78*. Докажите, что:

- а) сумма двух четных чисел – число четное;
- б) сумма двух чисел разной четности – число нечетное;
- в) сумма трех нечетных чисел – число нечетное.



Упражнения для повторения

79. Вычислите:

- а) $37\,028 + 8672$; б) $65\,006 - 20\,379$;
- в) $383 \cdot 607$; г) $3003 : 39$.

80. Во сколько раз сумма чисел 894 и 892 больше их разности?

81. Найдите 20 % от числа: а) 320; б) 20; в) 6,4; г) 0,5.

82. Решите уравнение:

- а) $2x + 7 = 131$; б) $3x - 17 = 100$.

83. Найдите периметр квадрата, если его сторона равна:

- а) 8 см; б) 3,5 дм; в) a км.

84. Ученик прочитал 0,6 книги, имеющей 235 страниц. Сколько страниц ему осталось прочитать?

§ 3.

Признаки делимости на 3 и 9

Чтобы узнать, делится число на 3 или нет, находят его сумму цифр. Например, сумма цифр числа 21 204 равна 9, поскольку $2 + 1 + 2 + 0 + 4 = 9$. Оказывается, что если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3. Если же сумма цифр числа на 3 не делится, то и число на 3 не делится. Это – *признак делимости на 3*.

На 3 делятся все те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3.



Примеры. Сумма цифр числа 31 104 равна 9, а 9 делится на 3, поэтому и число 31 104 делится на 3. Сумма цифр числа 5051 равна 11, она не делится на 3. Поэтому и число 5051 на 3 не делится. Проверьте!

Аналогично формулируется и *признак делимости на 9*.



На 9 делятся все те и только те числа, сумма цифр которых делится на 9.

Примеры. Число 5742 делится на 9, поскольку сумма его цифр $5 + 7 + 4 + 2 = 18$, а 18 делится на 9. А число 5051 на 9 не делится, так как его сумма цифр $5 + 0 + 5 + 1 = 11$, а 11 на 9 не делится.

Каждое число, которое делится на 9, называется *кратным числа 9*. Каждое число, которое делится на 3, называется *кратным числа 3*.

Вообще, если одно число делится на другое, то первое называется *кратным другому*.

3, 6, 9, 12, 15, 18, ... – последовательность натуральных чисел, кратных 3. Таких чисел бесконечно много. Наименьшее из них число 3, наибольшего не существует.

Говорят: «кратное трех», но «кратно трем».



Узнайте больше

Если число a делится на p , то $a = p \cdot k$. Тогда и $ac = pc \cdot k$. Здесь все буквы обозначают натуральные числа. Итак, если один из множителей делится на какое-то число, то и произведение этих множителей делится на это же число.

Если каждое из чисел a и b делится на p , то $a = pk$ и $b = pm$. Поэтому $a + b = pk + pm = p \cdot (k + m)$. Число $k + m$ натуральное, тогда число $a + b$ также делится на p . Следовательно, если каждое из двух слагаемых делится на какое-то число, то и их сумма делится на это число.

О признаках делимости на 4, 6, 7, 11, 13 читайте на с. 37.



Проверьте себя

1. Сформулируйте признак делимости чисел на 3.
2. Сформулируйте признак делимости чисел на 9.
3. Какие числа называют кратными числа 3?
4. Какие числа называют кратными числа 9?
5. Какие числа называют кратными числа p ?



Выполняем вместе

① Какое утверждение верно:

а) если число делится на 9, то оно делится и на 3.

б) если число делится на 3, то оно делится и на 9?

• Если число делится на 9, то сумма его цифр делится на 9. Эта сумма делится и на 3. Поэтому первое утверждение верно.

Второе утверждение неверно. Например, 30 делится на 3, но не делится на 9.

② Запишите наибольшее четырехзначное число, которое кратно 3, но не кратно 9.

• Наибольшее четырехзначное число 9999. Оно делится и на 9, и на 3. Если это число уменьшить на 3, то получим число 9996. Оно кратно 3, но не кратно 9.



Устные упражнения

85. Какие из чисел 20, 21, 22, 23, 24, 25 делятся на 3?

86. Какие из чисел 33, 44, 45, 46, 54, 64 делятся на 9?

87. Назовите три числа, кратных 3.

88. Назовите три числа, кратных 9.

89. Назовите три числа, кратных 7.

90. Назовите три числа, кратных 12.

91. Число 123 делится на 3 и не делится на 9. Верно ли, что сколько бы нулей или девяток не написать в конце числа 123 или между его цифрами, то каждое полученное таким способом число делится на 3 и не делится на 9?



Уровень А

92. Какие из чисел 504, 735, 1002, 2037, 7236 делятся на 3?

93. Какие из чисел 405, 738, 2001, 3333, 7704 делятся на 9?

94. Припишите справа к числу 11 такую цифру, чтобы полученное трехзначное число делилось на 9.

95. Припишите слева к числу 12 такую цифру, чтобы полученное трехзначное число делилось на 9.

96. Какую цифру нужно записать между цифрами числа 25, чтобы полученное число делилось на 9?

- 97.** Верно ли, что если между цифрами числа 1827 написать произвольное количество нулей, то получится число, кратное 3 и 9?
- 98.** Запишите наименьшее трехзначное число, которое делится на 3.
- 99.** Запишите наибольшее трехзначное число, которое делится на 9.
- 100.** Запишите пять первых натуральных чисел, кратных 9.
- 101.** Запишите пять первых натуральных чисел:
а) кратных 5; б) кратных 10.
- 102.** Найдите сумму всех однозначных чисел, кратных 3.
- 103.** Найдите сумму всех чисел, которые меньше 20 и кратны 3.
- 104.** Какое наименьшее число нужно прибавить к 247, чтобы их сумма делилась на 3?
- 105.** Переставляя цифры 1, 4, 7, можно получить шесть разных трехзначных чисел: 147, 174, 417, 471, 714, 741. Есть ли среди них числа, кратные 3? А кратные 9?



Уровень Б

- 106.** Переставляя цифры 2, 3 и 4, можно получить шесть разных трехзначных чисел. Докажите, что каждое из них делится на 9.
- 107.** Переставляя цифры 1, 2, 3 и 4, можно получить много разных четырехзначных чисел. Докажите, что ни одно из них не делится на 3.
- 108.** Докажите, что если каждое из двух слагаемых делится на 10, то и сумма их делится на 10.
- 109.** Докажите, что если каждое из двух слагаемых делится на 5, то и сумма их делится на 5.
- 110.** Докажите, что если одно слагаемое делится на 10, а другое не делится, то их сумма на 10 не делится.
- 111.** Верно ли, что если число n натуральное, то значение выражения $3n$ кратно 3?
- 112.** Заполните таблицу.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$5n$										

Верно ли, что все числа второй строчки таблицы кратные 5?

- 113.** Докажите, что каждое число, записанное тремя одинаковыми цифрами, делится на 3.
- 114.** Может ли быть простым число, кратное 9? А 10?

115. Запишите наибольшее трехзначное число, которое делится:

- а) на 2 и на 3; б) на 2 и на 9; в) на 2, 3 и 5.



Упражнения для повторения

116. Найдите квадрат числа:

- а) 28; б) 34; в) 2,5; г) 0,21.

117. Найдите куб числа:

- а) 11; б) 12; в) 1,1; г) 0,12.

118. Вычислите значение выражения:

- а) $8,45 - (459 : 9 - 49)$; б) $4^3 - 32 : (2^3 + 8)$.

119. Найдите число, 0,3 которого равны:

- а) 60; б) 3; в) 0,15.

120. Найдите неполное частное и остаток при делении числа 97 на 7.

121. На сколько произведение чисел 3,5 и 2,8 больше их суммы?

122. Четыре девочки стояли по кругу и разговаривали (рис. 4). Девочка в зеленом платье – не Вера и не Алеся. Она стоит между Марийкой и девочкой в голубом платье. А девочка в белом платье стоит между Алесей и девочкой в розовом платье. В каких платьях Вера и Марийка?



Рис. 4

§ 4.

Разложение чисел на простые множители

Какие простые числа нужно умножить, чтобы получить 15? Нетрудно догадаться, что такими числами являются 3 и 5. Следовательно, $15 = 3 \cdot 5$. Такое представление числа 15 называется его *разложением на простые множители*.

Другие примеры:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5; \quad 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5; \quad 88 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11.$$

Каждое составное число можно разложить на два или больше простых множителей.



Как это делать покажем на примере. Пусть нужно разложить на простые множители число 104. Пишем это число, и справа от него проводим вертикальную черту. По признаку делимости определяем, что число 104 делится на 2 – наименьшее простое число. За чертой пишем число 2, а 52 – частное от деления 104 на 2 – записываем под числом 104. То же самое делаем с частным 52 и новым частным 26. Разделив 26 на его наименьший делитель 2, получим простое число 13. Его пишем тоже справа от черты. 13 делится на 13. Частное равно 1. На этом процесс определения простых множителей числа 104 завершен. Все они записаны справа от черты. Итак, $104 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$. Это и есть разложение числа 104 на простые множители.

104	2
52	2
26	2
13	13
1	

В отдельных случаях разложение числа на простые множители можно упростить. Например, число 9000 на простые множители можно разложить так:

$$\begin{aligned}
 9000 &= \\
 &\downarrow \\
 &= 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \\
 &\downarrow \\
 &= 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = \\
 &\downarrow \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5.
 \end{aligned}$$

9000	9	$3 \cdot 3$
1000	10	$2 \cdot 5$
100	10	$2 \cdot 5$
10	10	$2 \cdot 5$
1		

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Число 9000 раскладывается на восемь простых множителей. Каждый из них является делителем числа 9000. Вообще, каждый из множителей, на какие раскладывается число a , является делителем этого числа.

Разных простых делителей число 9000 имеет три: 2, 3 и 5. А разных натуральных делителей это число имеет очень много: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, ..., 4500, 9000.



Узнайте больше


Как вы уже знаете, произведение aa называют *квадратом* числа a , а произведение aaa – *кубом* числа a и обозначают a^2 и a^3 соответственно.

Аналогично,

$$aaaa = a^4, aaaaa = a^5, aaaaaa = a^6.$$

§ 4. Разложение чисел на простые множители

Такие произведения равных чисел называют соответственно четвертой, пятой, шестой степенью числа a .



$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n$$

Произведение n чисел, каждое из которых равно a , называют n -й степенью числа a и обозначают символом a^n .

Здесь a^n – степень, a – основание степени, n – показатель степени.

Используя понятие степени, разложение числа на простые множители можно записать короче:

$$104 = 2^3 \cdot 13, \quad 512 = 2^9, \quad 9000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3.$$

Разложить на простые множители числа, которые делятся на 2, 3, 5, 9, 10, сравнительно несложно. В иных случаях это бывает сделать сложно. Попробуйте, например, разложить на простые множители число 323. Специалисты, которым часто приходится заниматься разложением чисел на множители, пользуются специальными таблицами. Часть такой таблицы (для небольших чисел, которые не делятся на 2, 3, 5) представлена на форзаце учебника. Пользуясь этой таблицей, можно сразу записать: $323 = 17 \cdot 19$.



Проверьте себя

1. На какие простые множители можно разложить число 14?
2. Каждое ли составное число можно разложить на простые множители?
3. На какие простые множители можно разложить число 100? А 1000?
4. Сколько разных простых делителей имеет число 200? А 2000?
5. Как удобнее всего разложить на простые множители число 7000?
6. Верно ли разложено на простые множители число:
а) $900 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9$; б) $47 = 1 \cdot 47$?



Выполняем вместе

- ① Можно ли разложить на простые множители число 1?
- Нет, нельзя. Каждое простое число больше 1. А произведение чисел, каждое из которых больше 1, не может равняться 1.
- ② Можно ли равенство $17 = 1 \cdot 17$ считать разложением числа на простые множители?
- Нельзя. Хотя в произведении $1 \cdot 17$ каждое число – множитель, но первое из них – число не простое.
- ③ Разложите на простые множители число 600.
- $600 = 6 \cdot 100 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$.
- ④ Разложите на простые множители число 266.
- Число 266 делится на 2, поэтому $266 = 2 \cdot 133$. Число 133 не делится ни на какое из чисел 2, 3, 5. Его нет и в таблице простых чисел. Ищем его в таблице разложения чисел на простые множители: $133 = 7 \cdot 19$. Следовательно, $266 = 2 \cdot 7 \cdot 19$.
- ⑤ Какое наименьшее трехзначное число можно разложить на два одинаковых простых множителя?
- $7 \cdot 7 = 49$ – число не трехзначное, $11 \cdot 11 = 121$ – трехзначное. Значит искомое число равно 121.



Устные упражнения

123. На какие простые множители можно разложить число 15?
124. Какое число можно разложить на простые множители 2, 2 и 5?
125. Какое число можно разложить на множители 25 и 28?
126. Найдите наименьший простой делитель числа 40.
127. Найдите наибольший делитель числа 101.
128. Можно ли равенство $7 = 1 \cdot 7$ считать разложением числа 7 на множители? А на простые множители?
129. Чем отличается «разложение числа на множители» от «разложения числа на простые множители»? Приведите примеры.
130. Какому числу соответствует разложение на множители:
- а) $2^3 \cdot 5$; б) $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$?



Уровень А

131. Разложите на простые множители число:

- а) 12; б) 36; в) 50; г) 105.

132. Разложите на простые множители число:

- а) 100; б) 500; в) 2500; г) 3780.

133. Можно ли равенство $1100 = 11 \cdot 100$ считать разложением числа 1100 на множители? Разложите число 1100 на простые множители.

134. Найдите наименьший простой делитель числа 87.

135. Найдите наибольший простой делитель числа 484.

136. Найдите все делители числа: а) 8; б) 81; в) 162.

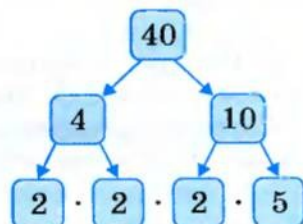
137. Во сколько раз число, которое раскладывается на множители 2, 3, 5 и 7, больше числа, которое раскладывается на множители 2, 3 и 5?

138. Разложение одного числа $3 \cdot 5 \cdot 11$, а другого – $3 \cdot 5 \cdot 13$. На сколько первое число меньше или больше второго?

139. Разложение числа 200 на простые множители можно записать так: $200 = 2^3 \cdot 5^2$. Запишите подобным способом разложения чисел 100, 250, 270, 300, 500.

140. Разложение числа 40 на простые множители можно изобразить в виде схемы. Изобразите подобной схемой разложение на простые множители числа:

- а) 24; б) 50; в) 80.



Уровень Б

141. Какое наибольшее двузначное число можно разложить на три одинаковых простых множителя?

142. Какое двузначное число можно разложить на два простых множителя, разность которых равна 2?

143. На какие числа делится произведение:

- а) $2 \cdot 5 \cdot 7$; б) $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$?

144. Сколько разных делителей имеет квадрат простого числа?

145. Сколько разных делителей имеет куб простого числа?

146. Покажите, что число 28 в два раза меньше суммы всех его делителей. Имеет ли такое свойство число 82?

147*. Число, сумма всех делителей которого в два раза больше самого числа, называется *совершенным*. Найдите наименьшее совершенное число.

148*. Докажите, что число 496 – совершенное.

149. Замените звездочки цифрами так, чтобы равенство было верным:

а) $2 \cdot 9 \cdot * = *0$;

б) $3 \cdot * \cdot 5 = 7*$;

в) $2 \cdot * \cdot 7 \cdot 11 = 77*$;

г) $3 \cdot 3 \cdot * = *3$.

150. На какое одно и то же число делятся 20 и 18? Какое наименьшее натуральное число делится на 20 и на 18?

151*. Найдите сумму всех делителей числа $2^3 \cdot 3^2$.



Упражнения для повторения

152. Сколько существует натуральных чисел, меньших 107? А не больших 107?

153. Сколько существует натуральных значений x таких, что $32 < x < 123$?

154. На сколько сумма квадратов чисел 2,5 и 1,5 меньше квадрата их суммы?

155. Найдите два числа, сумма которых равна 94, а разность 32.

156. Найдите два числа, сумма которых равна 64, а частное 3.

157. Квадрат и прямоугольник имеют равные площади (рис. 5). Найдите периметр квадрата, если стороны прямоугольника равны 4 м и 9 м.

158. Площадь поля прямоугольной формы равна 4 га, его длина – 500 м. Найдите ширину этого поля. (1 га = 10 000 м².)

159*. Среди шести старинных одинаковых монет одна фальшивая, она легче других. Как можно определить ее с помощью двух взвешиваний, не имея никаких гирь?

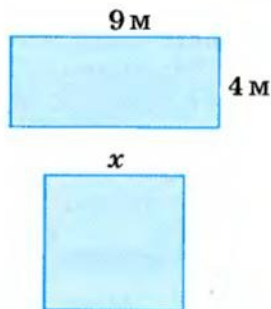


Рис. 5

§ 5.

Наибольший общий делитель

Часто возникает необходимость находить общие делители двух или нескольких чисел. Попробуем найти, например, общие делители чисел 30 и 45.

30 делится на: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30;

45 делится на: 1, 3, 5, 9, 15, 45.

Числа 30 и 45 имеют четыре общих делителя: 1, 3, 5 и 15. Наибольшее из этих четырех чисел 15. Это – наибольший общий делитель чисел 30 и 45.

Наибольшим общим делителем (НОД) нескольких чисел называется наибольшее число, на которое делится каждое из данных чисел.



Найдем, например, НОД (72, 84, 90). Разложим каждое из этих чисел на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ \hline & 1 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ \hline & 1 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

Числа 72, 84, 90 имеют два общих простых делителя: 2 и 3. Умножив их, получим:

$$\text{НОД} (72, 84, 90) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, необходимо разложить их на простые множители и умножить все их общие множители.



Найдем НОД (65, 32). Поскольку

$$65 = 5 \cdot 13, \quad 32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2,$$

то числа 65 и 32 имеют только один общий делитель – число 1. Поэтому $\text{НОД} (65, 32) = 1$.

Два числа, наибольший общий делитель которых равен 1, называются *взаимно простыми*.

Числа 65 и 32 взаимно простые.

Замечание. Не путайте *взаимно простые* числа с *простыми*. Некоторое число может быть простым, но не взаимно простым. (Взаимно – значит с каким-то другим.) Взаимно простыми могут быть и составные числа.



Узнайте больше

Взаимно простыми могут быть не только два числа, но и три, и больше. Например, числа 8, 9 и 25 – взаимно простые. Эти три числа не только взаимно простые, но и попарно взаимно простые, поскольку каждые два из них – числа взаимно простые. А вот числа 6, 8 и 9 – взаимно простые, но не попарно взаимно простые, поскольку $\text{НОД}(6, 8) = 2$, $\text{НОД}(6, 9) = 3$.



Проверьте себя

1. Что такое наибольший общий делитель двух чисел?
2. Как называются числа, НОД которых равен 1?
3. Какие числа называются взаимно простыми?
4. Приведите примеры двух чисел, НОД которых равен 1.
5. Как можно найти НОД нескольких чисел?



Выполняем вместе

① Найдите НОД (72, 156).

• В разложениях чисел 72 и 156 на простые множители общими являются такие простые множители: 2, 2 и 3. Поэтому

$$\text{НОД}(72, 156) = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

② Какое наибольшее количество

одинаковых букетов можно составить из 6 васильков и 9 ромашек?

• Необходимо найти наибольшее число, на которое делится 6 и 9, то есть наибольший общий делитель этих чисел. $\text{НОД}(6, 9) = 3$. Следовательно, можно составить 3 букета (рис. 6).

72		2	156		2
36		2	78		2
18		2	39		3
9		3	13		13
3		3	1		
1					



Рис. 6



Устные упражнения

- 160.** Является ли число 5 общим делителем чисел 100 и 125? А наибольшим общим делителем этих чисел?
- 161.** Назовите несколько чисел, взаимно простых с числом 6.
- 162.** Назовите несколько чисел, не взаимно простых с числом 8.
- 163.** Найдите НОД чисел:
а) 2 и 8; б) 12 и 8; в) 32 и 8; г) 320 и 8.
- 164.** Известно, что $\text{НОД}(12, n) = 6$. Делится ли число n на 2, на 3, на 4, на 6, на 12?



Уровень А

- 165.** Найдите все общие делители чисел:
а) 30 и 40; б) 56 и 98; в) 154 и 165.
- 166.** Найдите НОД чисел:
а) 30 и 70; б) 42 и 48; в) 120 и 160.
- 167.** Вычислите:
а) НОД (125, 400); б) НОД (96, 120);
в) НОД (396, 284); г) НОД (259, 280);
д) НОД (576, 324); е) НОД (133, 221).
- 168.** Найдите НОД трех чисел:
а) 26, 39 и 52; б) 27, 54 и 72; в) 16, 32 и 48.
- 169.** Вычислите:
а) НОД (42, 70, 97); б) НОД (24, 30, 42, 48);
в) НОД (100, 101, 102, 103).
- 170.** Даны разложения чисел на множители: $a = 2 \cdot 2 \cdot 11$, $b = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$, $c = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Найдите:
а) НОД (a, b); б) НОД (a, c);
в) НОД (b, c); г) НОД (a, b, c).
- 171.** Даны разложения чисел на множители:
 $x = 2^3 \cdot 5^2$, $y = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $z = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$.
Найдите:
а) НОД (x, y); б) НОД (x, z);
в) НОД (y, z); г) НОД (x, y, z).
- 172.** Верно ли, что числа 23 и 45 взаимно простые? А числа 23 и 46? Ответ обоснуйте.
- 173.** Какие данные пары чисел взаимно простые:
а) 16 и 9; б) 18 и 81; в) 11 и 121?
- 174.** Взаимно простые ли числа 1002 и 2001? А числа 1001 и 1010?



Уровень Б

- 175.** Число a делится на n . Могут ли эти числа быть взаимно простыми?
- 176.** Число a делится на простое число p . Могут ли эти числа быть взаимно простыми?
- 177.** Приведите примеры чисел a, b, c таких, что $\text{НОД}(a, b) = 2$, $\text{НОД}(a, c) = 3$, $\text{НОД}(b, c) = 5$.
- 178.** Числа a, b, c такие, что $\text{НОД}(a, b) = 2$, $\text{НОД}(b, c) = 3$. Найдите $\text{НОД}(a, b, c)$.
- 179.** Докажите, что числа 9, 10 и a взаимно простые, каким бы не было натуральное число a .
- 180.** Докажите, что при любых натуральных значениях a и b числа 15, 22, a и b взаимно простые.
- 181.** Сколько существует разных трехзначных чисел, записанных разными цифрами 4, 6 и 8? Найдите НОД всех этих чисел.
- 182.** Могут ли быть взаимно простыми любые два числа, записанные четными цифрами?
- 183.** В классе 30 учеников. Во сколько рядов можно построить учеников так, чтобы в каждом ряду их было поровну?
- 184.** Коллекционер хочет расположить 210 марок так, чтобы в каждом ряду было одинаковое число марок. Сколькими способами он может это сделать?
- 185.** Лист бумаги, длина которого равна 35 см, а ширина — 21 см, разрезали на наибольшие из всех возможных равные квадраты. Сколько получили квадратов?



Упражнения для повторения

- 186.** Найдите 30 % от числа:
а) 400; б) 30; в) 1; г) 0,5.
- 187.** Найдите число, 25 % которого равны:
а) 1; б) 160; в) 0,7; г) 15,2.
- 188.** Решите уравнение:
а) $4x - 15 = 45$; б) $0,5x + 3 = 8,7$; в) $9,7 - 0,2x = 1$.
- 189.** Найдите все натуральные числа, удовлетворяющие условию:
а) $x < 9$; б) $34 < x < 41$; в) $2x < 26$.
- 190.** Скорость движения поезда равна 60 км/ч. Сколько километров он проедет за 2,5 ч? За сколько минут он проедет 0,5 км?

191. В двух ящиках всего 65 кг яблок. Сколько яблок в каждом ящике, если в первом на 9 кг больше, чем во втором? Решите задачу, пользуясь рисунком 7.

192*. На рисунке 8 изображена фигура, составленная из пяти равных квадратов. Разрежьте ее на пять частей и сложите из них квадрат.



Рис. 7



Рис. 8

§ 6.

Наименьшее общее кратное

Запишем несколько натуральных чисел, которые делятся на 8: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, ...

Каждое из этих чисел кратно 8. Любое число, которое делится на n , называется кратным числа n . Напомним, что речь идет только о натуральных числах и о делении без остатка.

Числа, кратные 6, — это: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ...

Числа, кратные 4, — это: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ...

Общими кратными чисел 4 и 6 являются: 12, 24, 36 и много других чисел. Наибольшего общего кратного числа 6 и 4 не имеют. А наименьшее существует.

Наименьшим общим кратным (НОК) нескольких чисел называется такое наименьшее натуральное число, которое делится на каждое данное число. $\text{НОК}(4, 6) = 12$.



Наименьшее общее кратное двух чисел можно найти, разложив эти числа на простые множители. Найдем, например, $\text{НОК}(72, 90)$. Для этого разложим числа 72 и 90 на простые множители. Их НОК должно содержать все

простые множители числа 72 и все простые множители числа 90. Следовательно, чтобы найти НОК (72, 90), необходимо простые множители числа 72 дополнить такими простыми множителями числа 90, которых нет в разложении числа 72. В данном случае к произведению $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ надо дописать множитель 5. Имеем:

72	2	90	2
36	2	45	3
18	2	15	3
9	3	5	5
3	3	1	
1			

$$\text{НОК}(72, 90) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 72 \cdot 5 = 360.$$

Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно их произведению. Например, $\text{НОК}(5, 8) = 40$. Почему?

А как найти НОК трех чисел?

Чтобы найти наименьшее общее кратное чисел a , b и c , надо простые множители числа a дополнить такими простыми множителями чисел b и c , которых в a нет, и умножить их.



Найдем, например, НОК чисел 72, 90 и 80. Поскольку

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3,$$

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5,$$

$$\text{то } \text{НОК}(72, 90, 80) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 720.$$



Узнайте больше

Рассмотрим пример. Пусть $a = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, а $b = 33 = 3 \cdot 11$. Их произведение $ab = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11$. Такое же и произведение $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b)$. Проверьте! Это свойство верно для любых значений a и b . Произведение НОД и НОК двух натуральных чисел равно произведению этих чисел. Всегда $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab$.

Поэтому, чтобы найти наименьшее общее кратное двух чисел, можно произведение этих чисел разделить на их наибольший общий делитель.

Из этого утверждения вытекают важные следствия:

1. Если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то $\text{НОК}(a, b) = ab$.
2. Если число a делится на b , то $\text{НОК}(a, b) = a$.



Проверьте себя

1. Какое число называется кратным числа a ?
2. Сколько существует чисел, кратных 5? Есть ли среди них наибольшее?
3. Какое число называют общим кратным чисел a и b ?
4. Сколько существует общих кратных чисел 2 и 3? Есть ли среди них наибольшее?
5. Что обозначает запись НОК (a, b)?
6. Сформулируйте определение НОК чисел a и b .
7. Как найти НОК нескольких чисел?



Выполняем вместе

① Найдите наибольшее двузначное число, кратное чисел 2 и 7.

• Если число x кратно 2 и 7, то $x = 14n$, где n – число натуральное. Если $n = 8$, то $x = 112$ – не двузначное. Если $n = 7$, то $x = 98$.

Ответ. 98.

② Во время тренировки на стадионе два велосипедиста стартовали одновременно. Первый велосипедист проезжает полный круг за 75 с, а второй – за 100 с. Через какое время велосипедисты вновь встретятся на старте?

• Искомый интервал времени должен быть кратным чисел 75 и 100. Найдём НОК (75, 100).

$$75 = 3 \cdot 5 \cdot 5, \quad 100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

$$\text{НОК}(75, 100) = 100 \cdot 3 = 300. \quad 300 \text{ с} = 5 \text{ мин.}$$

Следовательно, спустя 5 мин велосипедисты вновь встретятся на старте.



Устные упражнения

193. Каждое ли число, которое кратно 6, кратно и 3? Каждое ли число, которое кратно 3, кратно и 6?

194. Какое наименьшее натуральное число кратно чисел 3 и 8? А чисел 3 и 9?

195. Вычислите:

- а) НОК (10, 15); б) НОК (14, 7); в) НОК (1, 47).

196. Найдите НОК чисел:

- а) 1, 3 и 5; б) 10, 20 и 30; в) 1, 2, 3 и 4.

197. Число a делится на b . Чему равно НОК (a , b)?

198. Чему равно НОК (a , b), если a и b – взаимно простые числа?

199. Зная, что $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, найдите:

- а) НОК (13, 1001) и НОД (13, 1001);
б) НОК (77, 13) и НОД (77, 13);
в) НОК (1001, 7, 11, 13) и НОД (1001, 7, 11, 13).



Уровень А

200. Найдите пять чисел, кратных:

- а) числа 7; б) числа 9; в) числа 15.

201. Найдите НОК чисел:

- а) 50 и 70; б) 120 и 180; в) 370 и 740.

202. Вычислите:

- а) НОК (90, 145); б) НОК (60, 420);
в) НОК (52, 102); г) НОК (66, 385).

203. На сколько НОК (80, 100) меньше НОК (7, 100)?

204. На сколько НОК (30, 36) больше НОД (30, 36)?

205. Во сколько раз НОК (72, 88) больше НОД (72, 88)?

206. Вычислите:

- а) НОК (2, 3, 16); б) НОК (2, 5, 17).



Уровень Б

207. Дано числа $a = 2^3 \cdot 5^2$, $b = 3^2 \cdot 5$ и $c = 2 \cdot 3^2$. Вычислите:

- а) НОК (a , b); б) НОК (a , c); в) НОК (a , b , c).

208. При каком условии НОК (a , b) = НОД (a , b)?

209. Вычислите:

- а) НОК (124, 648); б) НОК (936, 748);
в) НОК (320, 360, 720); г) НОК (132, 198, 275).

210. Сравните:

- а) НОК (936, 1404) и НОК (936, 748);
б) НОК (124, 648) и НОК (648, 972).

211. Какое наименьшее трехзначное число кратно 5 и 13?

212. Найдите наименьшее трехзначное число, кратное чисел 2, 3 и 5.

213. Найдите длину проволоки, если известно, что она меньше 4 м и что всю проволоку без остатка можно разрезать на куски по 2 дм, по 3 дм и по 5 дм.

214. Сколько существует различных пар натуральных чисел, НОК которых равно 6? Запишите их.

215. Сколько существует различных пар натуральных чисел, НОК которых равно 30?

216. Покажите на примерах, что какими бы не были числа a и b , всегда $\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b) = ab$.

217. Сколько в классе учеников, если их можно построить в шеренги по 2, по 3 и по 5 учеников?

218. Верно ли, что:

- а) каждое число, кратное 3 и 5, равно $15n$, где n – некоторое натуральное число;
- б) каждое общее кратное чисел 6 и 8 равно $48n$, где n – некоторое натуральное число?



Рис. 9

219*. Одна из двух соединенных шестерней имеет 6 зубцов, а другая – 15 (рис. 9). Сколько оборотов должна совершить меньшая шестерня, чтобы их зубцы возвратились в первоначальное положение?



Упражнения для повторения

220. Вычислите:

- а) $4,25 - 3,7(2,6 - 1,1)$; б) $3,2^2 - (0,1^2 + 2,3^2)$;
- в) $4 - \left(\frac{2}{3} + 2\right) + \left(2 - \frac{2}{3}\right)$; г) $2\frac{3}{4} + 2\frac{3}{4} + 2\frac{3}{4} + 2\frac{3}{4}$.

221. Найдите периметр и площадь фигуры, изображенной на рисунке 10, если $a = 3,5$ см.

222. Какое из чисел больше: $0,3$ или $\frac{3}{8}$? Почему?

223. На сколько сумма чисел $\frac{7}{8}$ и $\frac{3}{8}$ больше 4а их разности?

224. Найдите меры углов треугольника, если один из них прямой, а второй составляет половину третьего. (Вспомните, что сумма углов каждого треугольника равна 180° .)

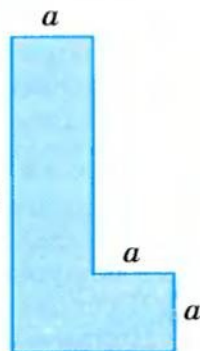


Рис. 10

225. Найдите углы треугольника, если один из них равен 60° , а второй – на 20° больше третьего.



Самостоятельная работа 1

Вариант 1

- 1°. Запишите все простые числа, которые больше 10 и меньше 20.
- 2°. Разложите на простые множители число 420.
- 3°. Найдите НОД (42, 56) и НОК (42, 56).
- 4°. Найдите такое значение x , которое является общим делителем чисел 52 и 78, если $25 < x < 35$.
- 5°. Какое наибольшее двузначное число делится на 13?
- 6°. Найдите сумму всех делителей числа 30.

Вариант 2

- 1°. Запишите все простые числа, которые больше 20 и меньше 30.
- 2°. Разложите на простые множители число 280.
- 3°. Найдите НОД (28, 42) и НОК (28, 42).
- 4°. Найдите такое значение x , которое является общим делителем чисел 52 и 39, если $10 < x < 25$.
- 5°. Какое наименьшее трехзначное число делится на 13?
- 6°. Найдите сумму всех делителей числа 70.

Вариант 3

- 1°. Запишите все простые числа, которые больше 30 и меньше 40.
- 2°. Разложите на простые множители число 540.
- 3°. Найдите НОД (88, 121, 484) и НОК (88, 121, 484).
- 4°. Найдите такие значения x , которые кратны числам 9 и 21, если $100 < x < 200$.
- 5°. Какое наименьшее трехзначное число делится на 17?
- 6°. Найдите сумму всех делителей числа 60.

Вариант 4

- 1°. Запишите все составные числа, которые больше 40 и меньше 50.
- 2°. Разложите на простые множители число 2200.
- 3°. На сколько НОК (42, 56, 70) больше НОД (42, 56, 70)?
- 4°. Найдите такие значения x , которые кратны числам 8 и 14, если $90 < x < 190$.

5*. Какое наименьшее четырехзначное число взаимно простое с числом 42?

6**. Найдите сумму всех делителей числа 50.



Готовимся
к тематическому контролю



Вопросы для самопроверки

1. Что значит разделить одно число на другое?
2. Что такое делитель числа?
3. Какие числа называют простыми?
4. Какие числа называют составными?
5. Сформулируйте признаки делимости на 2, 5 и 10.
6. Сформулируйте признаки делимости на 3 и 9.
7. Назовите четные цифры; нечетные цифры.
8. Какие числа называют четными, а какие – нечетными?
9. Сколько существует четных цифр и сколько четных чисел?
10. Что такое разложение числа на простые множители?
11. Что называют НОД нескольких чисел?
12. Как найти НОД нескольких чисел?
13. Какие числа называют взаимно простыми?
14. Когда говорят, что одно число кратно другому?
15. Что называют НОК нескольких чисел?
16. Как найти НОК трех чисел?
17. Чему равны НОД и НОК двух взаимно простых чисел?

Задания в тестовой форме

1. В какой паре чисел первое число является делителем второго?
а) 3 и 13; б) 7 и 39; в) 6 и 42; г) 11 и 111.
2. На какие из чисел делится число 140?
а) на 3 и 4; б) на 3 и 5; в) на 4 и 5; г) на 3, 4 и 5.
3. Сколько делителей имеет число 17?
а) один; б) два; в) три; г) семь.
4. Какой наименьший простой делитель имеет число 91?
а) 1; б) 9; в) 7; г) 13.
5. Какую цифру нужно записать вместо звездочки в числе $3*4$, чтобы полученное число делилось на 9?
а) 1; б) 2; в) 3; г) 9.

6. Какие из чисел взаимно простые?
а) 18 и 12; б) 26 и 21; в) 15 и 27; г) 14 и 49.
7. Какое наименьшее трехзначное число кратно числам 7 и 11?
а) 117; б) 171; в) 154; г) 145.
8. Сколько в колонне спортсменов, если их можно построить в шеренги по 5, 6 и 7 человек?
а) 567; б) 210; в) 256; г) 120.
9. Какое число является наибольшим общим делителем чисел 60 и 45?
а) 12; б) 5; в) 6; г) 15.
10. Какое число является наибольшим общим кратным чисел 12 и 15?
а) 50; б) 20; в) 60; г) 52.

Типовые задачи

- 1°. Из представленных ниже чисел
39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50
выпишите числа:
а) простые; б) четные;
в) кратные 5; г) которые делятся на 3.
- 2°. Запишите все нечетные числа первого десятка. Найдите их сумму.
- 3°. Разложите на простые множители число:
а) 210; б) 1260.
- 4°. Вычислите:
а) НОД (72, 88); б) НОК (72, 88).
- 5°. Вычислите НОК (175, 280) – НОД (175, 280).
- 6°. Дано числа $a = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$, $b = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, $c = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^4$. Вычислите:
а) НОК (a , b , c); б) НОД (a , b , c).
- 7°. С помощью цифр 0, 1 и 2 запишите все трехзначные числа, которые делятся на 2.
- 8°. Замените звездочки цифрами так, чтобы равенство было верным:
а) $3 \cdot 4 * = **0$; б) $5 \cdot 9 \cdot * = *0$.
- 9°. Какое наибольшее количество новогодних подарков можно составить из 320 орехов, 280 шоколадок и 200 мандаринок?
- 10°. Запишите все разные пары натуральных чисел, НОК которых равно 10.



Исторические сведения

Деление натуральных чисел некоторые ученые древности умели выполнять еще несколько тысячелетий назад. Это математическое действие тогда считалось наиболее трудным, поскольку люди не знали современных правил деления, а числа записывали не так, как их записывают теперь. Попробуйте, например, разделить число \overline{T} на число \overline{K} или $CLIV$ на XIV . Когда-то делили одно число на другое, используя камешки или косточки слив и т. п.

Признаки делимости на 2 и на 9 древнегреческие математики знали еще в III в. до н. э. Только формулировали их не так, как теперь. Издавна известны и другие признаки делимости.

На 4 делятся все те и только те числа, в которых две последние цифры выражают число, которое делится на 4.

На 6 делятся все те и только те числа, которые делятся и на 2, и на 3.

Интересный признак делимости на 7, 11 и 13. Пусть имеется какое-то число, например 1 057 958. Отделив три последние цифры, разобьем данное число на два меньших: 1057 и 958. Если разность образованных таким способом чисел делится на 7, 11 или 13, то и данное число делится соответственно на 7, 11 или 13. Поскольку разность 1057 – 958 равна 99, а 99 делится на 11 и не делится на 7 и 13, то и данное число делится на 11, но не делится на 7 и 13. Проверьте!

Простые числа были известны еще в VI в. до н. э. Евклид в III в. до н. э. доказал, что множество простых чисел бесконечно, то есть последовательность

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

не имеет конца.

Интересный способ составления таблиц простых чисел предложил в III в. до н. э. Эратосфен. Выписав подряд все натуральные числа от 2 до какого-то n , он оставлял число 2 и вычеркивал после него все числа через одно (т. е. 4, 6, 8, ...); оставлял число 3 и вычеркивал после него все числа через два (т. е. 6, 9, 12, ...); оставлял число 5 и вычеркивал после него все числа через четыре (т. е. 10, 15, 20, ...) и т. д. При этом некоторые числа вычеркивались два и больше раз. Все не вычеркнутые числа – простые. Эратосфен писал на доске, покрытой воском, и не вычеркивал числа, а прокалывал. После этого его доска была похожей на решето.

Отсеивание составных чисел образно показано на рисунке 11.

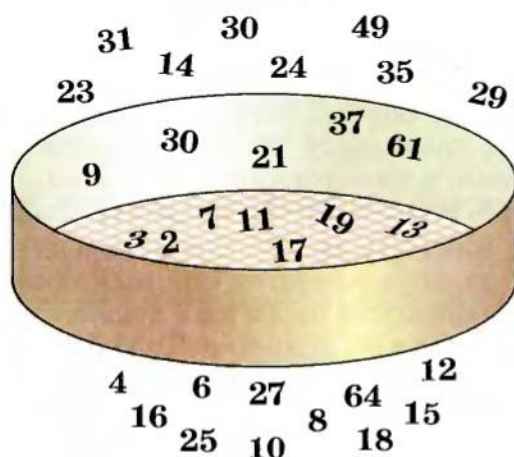


Рис. 11

Поэтому такой способ составления таблиц простых чисел называли «решетом Эратосфена». Ниже показано, как с помощью «решета Эратосфена» можно составить таблицу простых чисел, меньших 40.

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23
24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

Раскладывая числа на простые множители древнегреческие математики умели еще в VI в. до н. э. Интересный способ нахождения НОД предложил Евклид. Пусть, надо найти НОД (517, 141). Для этого делим большее число на меньшее, меньшее – на полученный первый остаток, первый остаток – на второй и т. д. Последний отличный от 0 остаток – искомый НОД.

$$\begin{array}{r}
 517 \overline{) 141} \\
 \underline{423} 3 \\
 141 \overline{) 94} \\
 \underline{94} 1 \\
 94 \overline{) 47} \\
 \underline{94} 2 \\
 0
 \end{array}$$

В данном примере $\text{НОД}(517, 141) = 47$. Математики и теперь часто используют этот способ, его называют *алгоритмом Евклида*.



Главное в разделе 1

Если числа a и b натуральные и a делится на b без остатка, то говорят, что b – **делитель числа a** , а a – **кратное числа b** . Например, число 9 имеет три делителя: 1, 3 и 9. Кратных числа 9 бесконечно много: 9, 18, 27, ...

Каждое число, которое делится только на 1 и на само себя, называют **простым**. Если число имеет более двух делителей, его называют **составным**. Число 1 имеет только один делитель, оно – ни простое, ни составное.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... – **последовательность простых чисел**. Простых чисел бесконечно много.

На 2 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются четной цифрой. Четные цифры: 0, 2, 4, 6, 8. Все остальные цифры (1, 3, 5, 7, 9) – нечетные. Числа, которые делятся на 2, называются **четными**, а которые не делятся на 2, – **нечетными**.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... – последовательность нечетных чисел;

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... – последовательность четных чисел.

На 5 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются цифрой 5 или 0.

На 10 делятся все те и только те числа, которые оканчиваются цифрой 0.

На 3 делятся все те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3.

На 9 делятся все те и только те числа, сумма цифр которых делится на 9.

Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то их сумма тоже делится на это число. Если хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и все произведение делится на это число.

Разложить число на простые множители – это значит представить его в виде произведения простых чисел. Например, $2 \cdot 3 \cdot 5$ – разложение на простые множители числа 30.

Наибольшее число, на которое делится каждое из данных чисел, называется **наибольшим общим делителем** этих чисел (НОД). Чтобы найти НОД нескольких чисел, надо разложить их на простые множители и умножить все их общие множители. Два числа, НОД которых равен 1, называют **взаимно простыми**. Например, числа 15 и 32 – взаимно простые, потому что $\text{НОД}(15, 32) = 1$.

Наименьшим общим кратным нескольких чисел (НОК) называют наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел. Чтобы найти НОК чисел a , b , c , достаточно разложение на простые множители числа a дополнить такими простыми множителями чисел b и c , которых нет в разложении числа a , и умножить их.

Обыкновенные дроби



Нет науки, не связанной
с математикой.

Л. Эйлер

В этом разделе рассматриваются обыкновенные дроби. Вы уже кое-что знаете о них. В 5-м классе складывали и вычитали такие дроби, правда — только если они имели одинаковые знаменатели. Теперь научимся складывать, вычитать, умножать и делить любые обыкновенные дроби, а также использовать их для решения некоторых видов задач. Кратко основное содержание выглядит так.

- Основное свойство дроби.
- Сокращение дробей.
- Приведение дробей к общему знаменателю.
- Сложение и вычитание дробей.
- Умножение и деление дробей.
- Задачи на умножение и деление дробей.
- Преобразование обыкновенных дробей в десятичные.

Все темы очень важны, без их знания нельзя продолжать изучение математики.

§ 7.

Обыкновенные дроби
с равными знаменателями

Повторим важнейшие сведения об обыкновенных дробях, которые рассматривались в предыдущих классах.

Кроме натуральных чисел, существуют также числа дробные. Записывать их можно с помощью обыкновенных или десятичных дробей.

Обыкновенная дробь — это запись вида $\frac{a}{b}$, где a и b — натуральные числа. В такой дроби число a называется *числителем*, а b — *знаменателем*.



Знаменатель показывает, на сколько равных частей разделена единица (что-то единое целое), а **числитель** — сколько таких частей взято.

Например, если торт разделили на 8 равных частей и в тарелку положили 3 такие части, то в тарелке будет $\frac{3}{8}$ торта (рис. 12).

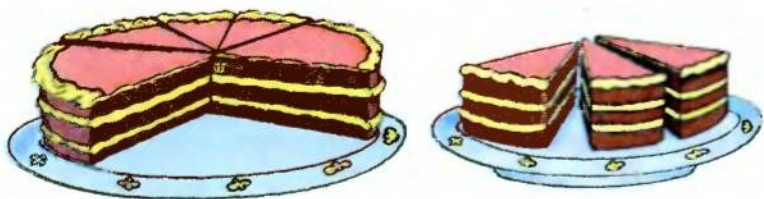


Рис. 12

Черта, отделяющая числитель от знаменателя, называется *чертой дроби*. Числитель и знаменатель называют *членами дроби*.

Если знаменатели двух дробей равны, то больше из них та дробь, числитель которой больше. Например,

$$\frac{5}{8} > \frac{2}{8}; \quad \frac{12}{11} > \frac{10}{11}.$$


Сумма дробей с равными знаменателями равна дроби, в которой знаменатель тот же, а числитель равен сумме числителей данных дробей. То есть, всегда $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Например, $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

Разность дробей с равными знаменателями равна дроби, в которой знаменатель тот же, а числитель равен разности числителей данных дробей. То есть, всегда $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.

Например, $\frac{43}{50} - \frac{34}{50} = \frac{9}{50}$.

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c},$	$\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5+1}{8} = \frac{6}{8}.$
$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c},$	$\frac{13}{77} - \frac{12}{77} = \frac{13-12}{77} = \frac{1}{77}.$



§ 7. Обыкновенные дроби с равными знаменателями

Обыкновенную дробь называют *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя. Если же числитель больше знаменателя или равен знаменателю, то такую дробь называют *неправильной*. Например, дробь $\frac{7}{9}$ — правильная,

а дроби $\frac{8}{5}$ и $\frac{6}{6}$ — неправильные. Значение каждой правильной дроби меньше 1. Если числитель равен знаменателю, то значение такой дроби равно 1.

Например, $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = 1$ (рис. 13).

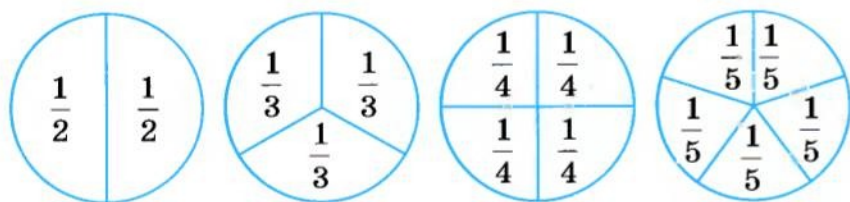


Рис. 13

Если числитель больше знаменателя, то из такой дроби можно выделить целую часть:

$$\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5} = 1\frac{3}{5}.$$

Каждую десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной:

$$0,3 = \frac{3}{10}; \quad 0,76 = \frac{76}{100}; \quad 4,7 = \frac{47}{10}.$$



Узнайте больше

Желательно различать *дроби* и *дробные числа*. Вам уже известны натуральные числа и дробные. Ни одно натуральное число не считается дробным и ни одно дробное — натуральным. А дроби — это специальные символы, которыми обозначают как дробные, так и натуральные числа.

Например, дроби $\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{8}{2}$ обозначают натуральные числа 1, 2, 3, 4. Обратите внимание на то, что одно и то же натуральное или дробное число можно записать многими различными дробями.

Например, разные дроби $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ обозначают одно и то же число: половину. На координатном луче каждой точке соответствует единственное число, а записывать его можно многими различными способами (рис. 14).

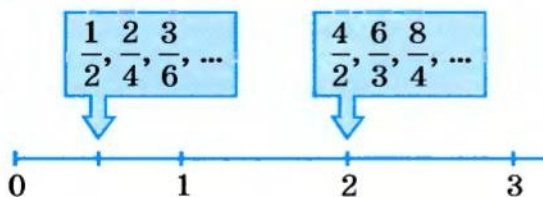


Рис. 14



Проверьте себя

1. Какие бывают числа?
2. Как можно записывать дробные числа?
3. Что такое обыкновенная дробь?
4. Как называются члены обыкновенной дроби?
5. Что показывает знаменатель дроби? А числитель?
6. Как складывают дроби с равными знаменателями?
7. Как вычитают дроби с равными знаменателями?



Выполняем вместе

- ① Сравните числа: а) $\frac{3}{10}$ и 0,5; б) $\frac{17}{100}$ и 0,17.

• а) $0,5 = \frac{5}{10}$, $\frac{3}{10} < \frac{5}{10}$, поэтому $\frac{3}{10} < 0,5$;

б) $\frac{17}{100} = 0,17$, поэтому данные числа равны.

- ② Вычислим значение: а) $0,7 + \frac{1}{10}$; б) $3,15 - 1\frac{7}{100}$.

• а) $0,7 + \frac{1}{10} = 0,7 + 0,1 = 0,8$;

б) $3,15 - 1\frac{7}{100} = 3,15 - 1,07 = 2,08$.



Устные упражнения

226. Назовите числитель и знаменатель дроби:

$$\frac{3}{7}; \frac{4}{25}; \frac{43}{15}.$$

227. Какое число больше:

а) $\frac{3}{5}$ или $\frac{2}{5}$; б) $\frac{7}{18}$ или $\frac{6}{18}$; в) $\frac{12}{7}$ или $\frac{15}{7}$?

228. Выполните сложение:

а) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$; б) $\frac{4}{9} + \frac{1}{9}$; в) $\frac{17}{10} + \frac{3}{10}$.

229. Выполните вычитание:

а) $\frac{3}{5} - \frac{2}{5}$; б) $\frac{4}{9} - \frac{2}{9}$; в) $\frac{10}{17} - \frac{7}{17}$.

230. Какие из дробей правильные, какие неправильные:

$$\frac{2}{7}; \frac{7}{5}; \frac{9}{9}; \frac{13}{15}; \frac{18}{13}; \frac{30}{47}; \frac{43}{43}; \frac{105}{103}; \frac{103}{105}?$$

231. Значение каких дробей меньше 1:

$$\frac{4}{5}; \frac{7}{3}; \frac{5}{9}; \frac{12}{11}; \frac{11}{12}; \frac{31}{41}; \frac{59}{95}; \frac{207}{307}; \frac{702}{703}?$$

232. Значение каких дробей больше 1:

$$\frac{6}{5}; \frac{4}{7}; \frac{3}{8}; \frac{14}{13}; \frac{20}{3}; \frac{3}{20}; \frac{57}{35}; \frac{110}{120}; \frac{210}{120}?$$

233. Значение каких дробей равно 1:

$$\frac{7}{8}; \frac{4}{4}; \frac{10}{10}; \frac{11}{10}; \frac{33}{3}; \frac{17}{17}; \frac{107}{107}; \frac{1023}{1024}; \frac{1257}{1257}?$$



Уровень А

Вычислите значения выражений (234–237).

234. а) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}$; б) $\frac{7}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12}$.

235. а) $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} - \frac{3}{5}$; б) $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} - \frac{6}{8}$.

236. а) $\frac{5}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9}$; б) $\frac{7}{12} - \frac{1}{12} + \frac{5}{12}$.

237. а) $\frac{8}{13} - \frac{4}{13} + \frac{2}{13} - \frac{1}{13}$; б) $\frac{6}{11} + \frac{5}{11} - \frac{4}{11} - \frac{5}{11}$.

238. Запишите в виде обыкновенной дроби число: 0,3; 0,23; 0,08; 0,13.

239. Сравните числа:

а) $\frac{8}{10}$ и 0,3; б) $\frac{2}{10}$ и 0,15; в) 0,07 и $\frac{7}{10}$; г) 1,2 и $\frac{12}{10}$.



Уровень Б

Вычислите значения выражений (240–242).

240. а) $0,5 + \frac{3}{10}$; б) $\frac{7}{100} + 0,12$; в) $2,77 + \frac{23}{100}$.

241. а) $0,8 - \frac{7}{10}$; б) $\frac{43}{100} - 0,27$; в) $3,89 - \frac{19}{100}$.

242. а) $1,3 + \frac{3}{10}$; б) $2,7 - \frac{7}{10}$; в) $2,3 - \frac{23}{100}$.

243. Запишите число 1 в виде дроби со знаменателем: 2; 3; 4; 5; 6.

244. Сколько существует разных обыкновенных дробей, членами которых являются числа 2, 3, 5 и 6? Сколько среди них правильных дробей, сколько неправильных?

245. Запишите все смешанные числа, членами которых являются числа 2, 3, 5 и 6.

246. Вместо звездочек запишите один из знаков «>», «<» или «=»:

а) $\frac{3}{8} * 1$; б) $\frac{9}{8} * 1$; в) $\frac{1}{12} * 1$;

г) $1 * \frac{15}{12}$; д) $1 * \frac{17}{17}$; е) $\frac{8}{2} * 3$.



Упражнения для повторения

247. 87,6 кг сахара расфасовали в два мешка так, что во втором оказалось вдвое больше сахара, чем в первом. На сколько килограммов сахара во втором мешке больше, чем в первом?

248. Трубу длиной 12,3 м разрезали на две части так, что длина первой части на 4,1 м больше второй. Во сколько раз первая часть трубы длиннее второй?

249. Найдите 0,2 от:

а) 35 км; б) 42 кг; в) 50 л; г) 2 га.

250. Найдите 30 % от:

- а) 40 м; б) 600 г; в) 10 ч.

251. а) Во сколько раз 60 % числа x больше 20 % числа x ?

б) На сколько 60 % числа 85 больше 30 % этого же числа?

252. Одна сторона прямоугольника равна 48 см, а другая – на 50 % длиннее. Найдите периметр и площадь прямоугольника.

253*. Фигуру, имеющую форму вазы (рис. 15), разрежьте на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.



Рис. 15

§ 8.

Основное свойство дроби

Разделим число 3 на 10. Получим 0,3 или $\frac{3}{10}$.

Следовательно, $3 : 10 = \frac{3}{10}$. Так же, разделив 28 на

100, получим $\frac{28}{100}$. Всегда $a : b = \frac{a}{b}$, или иначе $\frac{a}{b} = a : b$.

Каждая обыкновенная дробь – это частное от деления ее числителя на знаменатель.

$$\frac{2}{3} = 2 : 3; \quad \frac{5}{7} = 5 : 7; \quad \frac{125}{83} = 125 : 83.$$

Черта дроби – это обозначение знака деления.

Вспомните основное свойство деления. Частное не изменится, если делимое и делитель умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

Например, $10 : 2 = 5$ и $20 : 4 = 5$, и $30 : 6 = 5$. Основное свойство деления справедливо и тогда, когда деление обозначено чертой дроби.



Значение дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

Это – основное свойство дроби.

Умножим, например, числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{3}$ на 2 и на 4. Получим дроби $\frac{4}{6}$ и $\frac{8}{12}$ (рис. 16).

Все эти дроби имеют одно и то же значение. Говорят, что эти дроби равны.

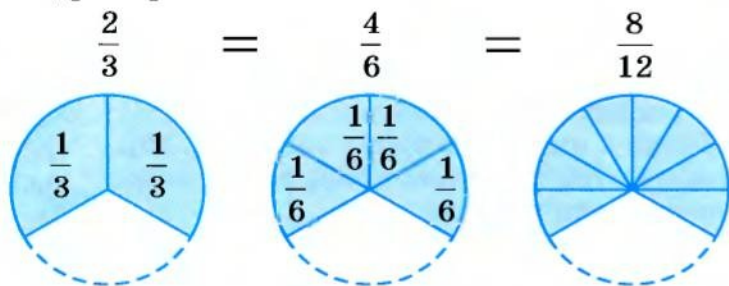


Рис. 16



Узнайте больше

Рассмотрите любую дробь, например $\frac{1}{3}$. Если ее числитель умножить на 2, то значение дроби увеличится вдвое (рис. 17). Вообще, если числитель дроби увеличить в несколько раз, то и значение дроби увеличится во столько же раз. Если же на 2 умножить знаменатель дроби $\frac{1}{3}$, то получим дробь $\frac{1}{6}$, которая вдвое меньше (рис. 18). Вообще, если знаменатель дроби увеличить в несколько раз, то значение дроби уменьшится во столько же раз.

Если же умножить на натуральное число n числитель (значение дроби увеличится в n раз) и знаменатель (значение дроби уменьшится в n раз), то в результате значение дроби не изменится. Это иное обоснование *основного свойства дроби*.

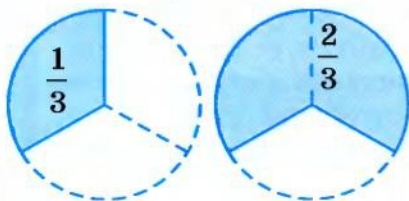


Рис. 17

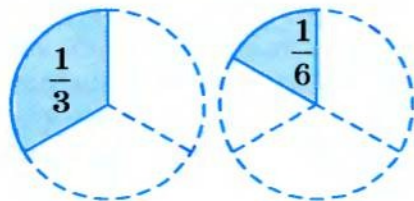


Рис. 18



Проверьте себя

1. Как можно записать частное $a : c$?
2. Сформулируйте основное свойство частного.
3. Сформулируйте основное свойство дроби.
4. Как изменится значение дроби, если ее числитель умножить на число n ?
5. Как изменится значение дроби, если ее знаменатель увеличить в n раз?



Выполняем вместе

- ① Запишите число 5 в виде дроби со знаменателем 1, 2, 3.

$$\bullet \quad 5 = \frac{5}{1}, \quad 5 = \frac{10}{2}, \quad 5 = \frac{15}{3}.$$

- ② Как изменится значение дроби, если ее числитель уменьшить в 3 раза?

• От увеличения числителя дроби в несколько раз значение дроби увеличится во столько же раз. Например, дробь $\frac{12}{5}$ больше $\frac{4}{5}$ в 3 раза. А дробь $\frac{4}{5}$ меньше $\frac{12}{5}$ в 3 раза.

Если числитель дроби уменьшить в несколько раз, то значение дроби уменьшится во столько же раз.

- ③ Вычислите $5 - \frac{2}{7}$.

$$\bullet \quad 5 - \frac{2}{7} = 4\frac{7}{7} - \frac{2}{7} = 4\frac{5}{7}.$$

- ④ Сколько сотых содержится в числе $\frac{3}{5}$?

$$\bullet \quad \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100}.$$

Ответ. 60.



Устные упражнения

254. Верно ли равенство:

а) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$; б) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$; в) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$; г) $\frac{7}{9} = \frac{70}{90}$?

255. Объясните, почему верно равенство:

а) $\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$; б) $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$; в) $\frac{12}{6} = 2$; г) $\frac{8}{2} = 4$.

256. Назовите три разные дроби, каждая из которых равна $\frac{3}{4}$.

257. Если члены дроби $\frac{7}{8}$ умножить на 3, то какую дробь получим?

258. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{8}{12}$ разделить на 4, то какую дробь получим? Сравните ее с данной дробью.



Уровень А

259. Запишите обыкновенную дробь в виде десятичной:

$\frac{3}{10}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{19}{10}$; $\frac{19}{100}$; $\frac{37}{100}$; $\frac{43}{10}$; $\frac{139}{100}$; $\frac{3}{1000}$.

260. Запишите десятичную дробь в виде обыкновенной:

0,7; 0,9; 0,23; 0,015; 1,2; 2,25; 3,07.

261. Запишите дробь в виде частного с помощью двоеточия:

$\frac{8}{9}$; $\frac{17}{19}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{24}{97}$; $\frac{43}{8}$; $\frac{54}{45}$; $\frac{23}{1}$; $\frac{102}{103}$; $\frac{103}{102}$.

262. Запишите частное в виде обыкновенной дроби:

7 : 10; 8 : 9; 13 : 17; 14 : 27; 35 : 100; 27 : 200.

263. Запишите число 2 в виде дроби со знаменателем: 2; 3; 8; 13.

264. Запишите число 3 в виде дроби со знаменателем: 2; 3; 11; 15.

265. Сравните числа:

а) $\frac{13}{5}$ и 2; б) $\frac{13}{5}$ и 3; в) 4 и $\frac{17}{4}$; г) 5 и $\frac{21}{4}$.

266. Вычислите:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } 2 - \frac{1}{2}; & \text{б) } 5 - \frac{2}{3}; & \text{в) } 8 - \frac{8}{9}; & \text{г) } \frac{17}{4} - 3; \\ \text{д) } 12 - \frac{17}{5}; & \text{е) } \frac{36}{5} - 2; & \text{ж) } 34 - \frac{3}{4}; & \text{з) } 15 - \frac{7}{10}. \end{array}$$

267. При каком условии дробь равна своему числителю? Приведите примеры.

268. Какую часть метра составляют: 25 см; 30 см; 75 см?



Уровень В

269. Какую часть суток составляют: 6 ч; 8 ч; 12 ч; 18 ч?

270. Какую часть часа составляют: 6 мин; 8 мин; 12 мин; 18 мин?

271. Отметьте на координатном луче дроби:

$$\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{6}; \frac{4}{6}; 2\frac{1}{5}; 2\frac{1}{10}.$$

272. Сколько десятых содержится в числе: $\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{8}{4}$?273. Сколько шестых содержится в числе: $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}$?274. Замените x таким числом, чтобы верно было равенство:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{x}{3} = \frac{2}{6}; & \text{б) } \frac{5}{7} = \frac{x}{14}; & \text{в) } \frac{12}{x} = \frac{1}{2}; \\ \text{г) } \frac{x+1}{2} = \frac{3}{6}; & \text{д) } \frac{x-2}{12} = \frac{4}{3}; & \text{е) } \frac{x+2}{6} = \frac{15}{18}. \end{array}$$

275. Выразите:

$$\text{а) в центнерах: } \frac{2}{5} \text{ от } 4 \text{ т; } \frac{8}{20} \text{ от } 4 \text{ т;}$$

$$\text{б) в минутах: } \frac{2}{3} \text{ от } 1,5 \text{ ч; } \frac{4}{6} \text{ от } 1,5 \text{ ч.}$$



Результаты сравните.

276. Длина отрезка AB равна s , точки K и P делят его на три равные части (рис. 19). Найдите длины отрезков KP , AP , KB .

Рис. 19

277. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна S . Точки K и P – середины его сторон AB и BC (рис. 20). Найдите площадь прямоугольника $KBPO$ и многоугольника $AKOPCD$.

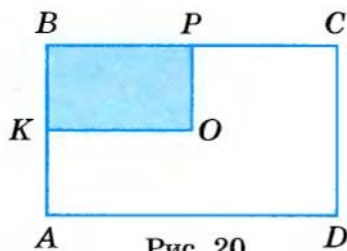


Рис. 20



Упражнения для повторения

278. Выполните действия:

а) $3,4 + 2,5 \cdot (5,7 - 3,3)$;

б) $14,8 - (3,8 - 2,9) : 0,3$;

в) $0,5 + 0,5^2 + 0,5^3$;

г) $1,2 + 1,2^2 - 1,2^3$.

279. Решите уравнение:

а) $2,5x + 3,2 = 13,2$;

б) $3,2 \cdot (x + 0,5) = 6,4$;

в) $5,4 + 3x = 9,9$;

г) $(2 - 3x) \cdot 0,5 = 0$.

280. Начертите равносторонний треугольник, периметр которого равен 1 дм.

281. Произведение двух некоторых натуральных чисел – число нечетное. Четной или нечетной является сумма этих чисел?

282*. Произведение четырех последовательных натуральных чисел равно 3024. Какие это числа?

283. Из порта A в порт B одновременно вышли катер и теплоход, скорости которых соответственно равны 36,5 км/ч и 30,5 км/ч. Какое расстояние между ними будет через 0,5 ч? А через 2 ч?

§ 9.

Сокращение дробей

Из основного свойства дроби следует, что значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель разделить на их общий делитель. Так можно упрощать дроби, не изменяя их значения.

Пусть, например, дана дробь $\frac{50}{70}$. Ее числитель и знаменатель делятся на 10. Разделив их на этот общий делитель, получим $\frac{5}{7}$. Эта дробь имеет то же значение, что и $\frac{50}{70}$, но проще, поскольку записана меньшими числами. Такое

упрощение дроби называется сокращением дроби. В данном случае дробь $\frac{50}{70}$ сокращена на 10, то есть ее числитель и знаменатель разделены на 10.



Поэтому, чтобы сократить дробь, сначала находят наибольший общий делитель числителя и знаменателя, а потом числитель и знаменатель этой дроби делят на этот НОД.

Пусть, например, надо сократить дробь $\frac{48}{60}$. Поступаем так:

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$\text{НОД}(48, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12, \quad \frac{48}{60} = \frac{4 \cdot \cancel{12}}{5 \cdot \cancel{12}} = \frac{4}{5}.$$

Сокращая дробь, некоторые вычисления можно делать устно. Не обязательно сразу сокращать дробь на НОД числителя и знаменателя. Используя признаки делимости,

дробь $\frac{48}{60}$ можно сначала сократить на 2, полученную дробь

сократить на 2, а потом – на 3. Записывать можно так:

$$\frac{48}{60} = \frac{24}{30} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \quad \text{или так: } \frac{48}{60} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

Если числитель и знаменатель дроби – числа взаимно простые, то такую дробь называют *несократимой*.

Несократимыми, например, являются дроби $\frac{3}{7}, \frac{9}{10}, \frac{105}{106}$.

Несократимую дробь сократить нельзя. Если числитель и знаменатель дроби разделить на их наибольший общий делитель, получим несократимую дробь.



Узнайте больше

1. Можно ли сократить дробь $\frac{143}{221}$?

Члены этой дроби не делятся на 2, 3, 5, 7. Может они — простые числа? Нет, в таблице простых чисел их нет. В таблице разложения чисел на простые множители находим:

$$143 = 11 \cdot 13, \quad 221 = 13 \cdot 17.$$

Поэтому

$$\frac{143}{221} = \frac{11 \cdot \cancel{13}}{\cancel{13} \cdot 17} = \frac{11}{17}.$$

2. Можно ли сократить дробь $\frac{441}{22}$?

$22 = 2 \cdot 11$. Поскольку число 441 не делится ни на 2, ни на 11, то эта дробь несократима.



Проверьте себя

1. Сформулируйте основное свойство дроби.
2. Что значит сократить дробь?
3. На какое наибольшее число можно сократить дробь?
4. Какую дробь называют несократимой?
5. Верно ли, что при любом значении числа a дробь $\frac{1}{a}$ несократима?
6. Некоторую дробь можно сократить на 10. Можно ли сократить ее на 2? А на 5? Почему?



Выполняем вместе

- ① Сократите дробь $\frac{6}{646}$.

• $6 = 2 \cdot 3$. Число 646 делится на 2 и не делится на 3. Поэтому данную дробь можно сократить только на 2.

$$\frac{6}{646} = \frac{3}{323}.$$

② Запишите в виде обыкновенной несократимой дроби: а) 0,35; б) 1,44.

• а) $0,35 = \frac{35}{100} = \frac{\cancel{5} \cdot 7}{\cancel{20} \cdot 10} = \frac{7}{20}$;

б) $1,44 = \frac{144}{100} = \frac{4 \cdot 36}{4 \cdot 25} = \frac{36}{25}$.

③ Решите уравнение: а) $\frac{x}{15} = \frac{8}{30}$; б) $\frac{14}{12} = \frac{7}{x}$.

• а) $\frac{x}{15} = \frac{4}{15}$, $x = 4$; б) $\frac{7}{6} = \frac{7}{x}$, $x = 6$.



Устные упражнения

284. Сократите дроби: $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{9}$; $\frac{5}{15}$; $\frac{10}{20}$; $\frac{20}{30}$; $\frac{40}{60}$; $\frac{100}{200}$.

285. Какие из дробей $\frac{4}{5}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{12}{10}$; $\frac{8}{81}$; $\frac{31}{93}$; $\frac{40}{41}$ несократимые?

286. Сравните числа:

а) $1 \text{ и } \frac{1}{2}$; б) $1 \text{ и } \frac{5}{4}$; в) $2 \text{ и } \frac{9}{6}$.

287. На какие числа можно сократить дробь:

а) $\frac{21}{63}$; б) $\frac{36}{72}$?



Уровень А

288. Найдите все общие делители числителя и знаменателя дроби $\frac{54}{72}$. Сократите дробь.

289. Найдите наибольший общий делитель числителя и знаменателя дроби $\frac{42}{140}$. Сократите дробь.

290. Сократите дроби:

$\frac{12}{14}$; $\frac{13}{39}$; $\frac{4}{40}$; $\frac{40}{30}$; $\frac{40}{60}$; $\frac{75}{70}$; $\frac{11}{33}$; $\frac{402}{204}$; $\frac{333}{444}$; $\frac{198}{909}$.

291. Сократите дробь $\frac{a}{b}$ на НОД (a, b):

$$\frac{12}{72}; \frac{24}{40}; \frac{72}{90}; \frac{81}{54}; \frac{98}{42}; \frac{120}{144}; \frac{138}{184}; \frac{315}{378}; \frac{224}{288}.$$

292. Сократите дробь постепенно, используя признаки делимости:

$$\frac{30}{42}; \frac{24}{56}; \frac{54}{90}; \frac{90}{72}; \frac{81}{54}; \frac{84}{120}; \frac{200}{240}; \frac{162}{270}; \frac{243}{810}.$$

293. Сократите дробь каким-либо способом:

$$\frac{10}{15}; \frac{25}{35}; \frac{30}{66}; \frac{66}{99}; \frac{65}{13}; \frac{94}{144}; \frac{93}{115}; \frac{115}{92}; \frac{690}{920}.$$

294. Дробь сначала сократили на 2, потом еще на 2, наконец – на 11. На какое число можно было сократить эту дробь сразу?

295. Напишите пять дробей, которые можно сократить:

а) на 2; б) на 3; в) на 5; г) на 9.

296. Запишите число в виде обыкновенной дроби и сократите ее: 0,4; 0,5; 0,6; 0,25; 0,75; 0,45; 0,08; 0,05; 0,125.

297. Сократите дробное выражение и вычислите его значение:

$$\text{а) } \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7}; \quad \text{б) } \frac{2 \cdot 7 \cdot 19}{7 \cdot 20}; \quad \text{в) } \frac{26 \cdot 45}{3 \cdot 5 \cdot 13}.$$



Уровень Б

298. При каком значении x верно равенство:

$$\text{а) } \frac{20}{x} = \frac{40}{6}; \quad \text{б) } \frac{30}{100} = \frac{x}{10}; \quad \text{в) } \frac{65}{13} = \frac{5}{x}?$$

299. Решите уравнение:

$$\text{а) } \frac{x}{45} = \frac{1}{9}; \quad \text{б) } \frac{6}{50} = \frac{x}{25}; \quad \text{в) } \frac{5}{100} = \frac{x}{300}.$$

300. Сравните числа, сначала сократив дроби:

$$\text{а) } \frac{1}{2} \text{ и } \frac{3}{6}; \quad \text{б) } \frac{3}{5} \text{ и } \frac{27}{45}; \quad \text{в) } \frac{4}{6} \text{ и } \frac{10}{12}; \quad \text{г) } \frac{17}{10} \text{ и } \frac{160}{100}.$$

301. Сложите дроби, сначала сократив их:

$$\text{а) } \frac{2}{3} + \frac{2}{6}; \quad \text{б) } \frac{2}{10} + \frac{3}{5}; \quad \text{в) } \frac{3}{9} + \frac{4}{6}; \quad \text{г) } \frac{30}{100} + \frac{40}{400}.$$

302. Найдите разность дробей:

$$\text{а) } \frac{3}{8} - \frac{2}{16}; \quad \text{б) } \frac{3}{2} - \frac{2}{4}; \quad \text{в) } \frac{5}{10} - \frac{3}{6}; \quad \text{г) } \frac{2}{10} - \frac{3}{30}.$$

303. Упростите дробное выражение и вычислите его значение:

а) $\frac{12 \cdot 5 - 12 \cdot 2}{48}$;

б) $\frac{20 - 1}{19 \cdot 8 + 19 \cdot 2}$.

304. а) Найдите периметр четырехугольника, каждая сторона которого равна $\frac{1}{8}$ м.

б) Найдите периметр прямоугольника, одна сторона которого равна $\frac{1}{3}$ м, а другая — $\frac{1}{6}$ м.

305. Стороны треугольника равны $\frac{5}{6}$ м, $\frac{5}{6}$ м и $\frac{1}{3}$ м. Найдите его периметр.

306. Сократите дробь:

а) $\frac{77}{1001}$;

б) $\frac{91}{1001}$;

в) $\frac{143}{1001}$;

г) $\frac{169}{1001}$.



Упражнения для повторения

307. Вычислите значение выражения:

а) $2x + 15$, если $x = 0,7$; $x = 1,8$; $x = 35,8$;

б) $3y - 4,5$, если $y = 3,2$; $y = 4,7$; $y = 1,5$.

308. Сколько квадратов изображено на рисунке 21?

309. Прямоугольник со сторонами 21 см и 7 см имеет такой же периметр, как и квадрат. Найдите сторону квадрата.

310. Прямоугольник со сторонами 28 дм и 7 см имеет такую же площадь, как и квадрат. Найдите сторону квадрата.

311. На сколько минут полчаса больше четверти часа? А пятой части часа?

312*. В трех складах хранится 1400 т угля. Сколько угля в каждом складе, если в первом его на 300 т больше, чем во втором, и на 200 т меньше, чем в третьем. Решите задачу, используя рисунок 22.

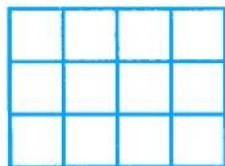


Рис. 21

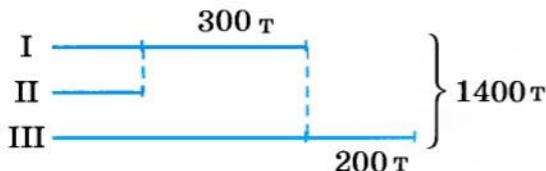


Рис. 22

§ 10.

Приведение дробей
к общему знаменателю

Вы уже умеете сравнивать дроби с равными знаменателями. Например, знаете, что $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$, поскольку $3 > 2$. А как сравнивать дроби с разными знаменателями? Какая из двух дробей больше: $\frac{3}{5}$ или $\frac{7}{10}$? Чтобы ответить на этот вопрос,

надо привести данные дроби к общему знаменателю. Умножим числитель и знаменатель первой дроби на 2. Получим дробь $\frac{6}{10}$, знаменатель которой такой же, как и зна-

менатель второй дроби. А сравнивать дроби $\frac{6}{10}$ и $\frac{7}{10}$ вы уже умеете. Заменяя дроби $\frac{3}{5}$ и $\frac{7}{10}$ на $\frac{6}{10}$ и $\frac{7}{10}$, мы привели их к общему знаменателю 10.

Итак, чтобы сравнивать, складывать или вычитать дроби, надо приводить их к общему знаменателю. Поэтому очень важно уметь преобразовывать дроби.

Можно приводить к общему знаменателю две и больше дробей. Например, чтобы привести к общему знаменателю

дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{12}$, достаточно числитель и знаменатель первой дроби умножить на 6, а второй – на 3. В результате

получим: $\frac{6}{12}$, $\frac{9}{12}$ и $\frac{5}{12}$. Знаменатели этих дробей равны, а значение каждой из них такое же, как и значение соответствующей данной дроби.

Привести несколько дробей к общему знаменателю – это значит заменить их дробями с одинаковыми знаменателями, не изменяя значений самих дробей.

Чаще всего приводят дроби к наименьшему общему знаменателю. Он равен наименьшему общему кратному всех знаменателей данных дробей.

Пример. Приведите к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{10}$.

Решение. НОК (5, 3, 10) = 30, $30 : 5 = 6$, $30 : 3 = 10$, $30 : 10 = 3$. Следовательно, числитель и знаменатель пер-

вой, второй и третьей дроби надо умножить на дополнительные множители 6, 10 и 3 соответственно. Получим:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{18}{30}; \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{20}{30}; \quad \frac{1}{10} = \frac{1 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{3}{30}.$$

Если не требуется, чтобы общий знаменатель был наименьшим, то им может быть произведение знаменателей данных дробей. Например, общим знаменателем дробей $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{10}$ может быть и произведение $5 \cdot 3 \cdot 10$, то есть 150.



Проверьте себя

1. Что значит привести дроби к общему знаменателю?
2. Чему равен наименьший общий знаменатель дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{5}$? А дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{6}$?
3. Дано дроби со знаменателями a и c . Может ли их общим знаменателем быть произведение ac ?
4. Чему равен наименьший общий знаменатель дробей со знаменателями 6 и 9?
5. Для чего надо уметь приводить дроби к общему знаменателю?



Выполняем вместе

- ① Приведите к общему знаменателю дроби $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{6}$.

• Общим знаменателем двух дробей может быть произведение их знаменателей. В данном случае – произведение $4 \cdot 6 = 24$.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24}, \quad \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{4}{24}.$$

- ② Приведите дроби $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{6}$ к наименьшему общему знаменателю.

• Наименьший общий знаменатель данных дробей – НОК их знаменателей. НОК (4, 6) = 12. Поэтому

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}; \quad \frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12}.$$



Устные упражнения

313. К какому наименьшему общему знаменателю можно привести дроби:

а) $\frac{3}{7}$ и $\frac{5}{14}$; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{5}$; в) $\frac{7}{12}$ и $\frac{7}{6}$; г) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$?

314. Приведите к общему знаменателю дроби:

а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{5}$; в) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{7}$;
г) $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{5}$; д) $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{4}$; е) $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{5}$.



Уровень А

315. Запишите число $\frac{1}{6}$ в виде дроби со знаменателем: 12; 18; 42.

316. Приведите к общему знаменателю дроби:

а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{5}$ и $\frac{1}{4}$; в) $\frac{7}{4}$ и $\frac{1}{8}$; г) $\frac{2}{3}$ и $\frac{8}{30}$.

317. Приведите к наименьшему общему знаменателю дроби:

а) $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{2}$ и $\frac{5}{8}$; б) $\frac{4}{9}$ и $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{9}$ и $\frac{5}{6}$;
в) $\frac{7}{13}$ и $\frac{9}{26}$, $\frac{3}{23}$ и $\frac{4}{46}$, $\frac{8}{15}$ и $\frac{14}{25}$; г) $\frac{3}{7}$ и $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{15}$ и $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{14}$.

318. Приведите к наименьшему общему знаменателю дроби:

а) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{9}$ и $\frac{3}{4}$; в) $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{15}$ и $\frac{3}{10}$;
г) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ и $\frac{7}{10}$; д) $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{15}$ и $\frac{5}{6}$; е) $\frac{1}{18}$, $\frac{2}{21}$ и $\frac{3}{14}$.

319. Какое из двух чисел больше:

а) $\frac{2}{3}$ или $\frac{3}{4}$; б) $\frac{5}{6}$ или $\frac{4}{5}$; в) $\frac{1}{3}$ или $\frac{12}{19}$; г) $\frac{81}{85}$ или $\frac{161}{170}$?

320. Сравните числа:

а) $\frac{3}{5}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{7}{8}$ и $\frac{8}{9}$; в) $\frac{12}{15}$ и $\frac{16}{20}$; г) $\frac{13}{14}$ и $\frac{39}{42}$.

321. Поставьте вместо звездочки нужный знак «>», «<» или «=»:

а) $\frac{2}{5} * \frac{3}{7}$; б) $\frac{5}{7} * \frac{5}{8}$; в) $\frac{9}{10} * \frac{10}{11}$; г) $\frac{24}{56} * \frac{27}{63}$.

322. Докажите, что:

а) $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$; в) $\frac{8}{9} > \frac{9}{11}$; г) $\frac{12}{35} > \frac{12}{37}$.

323. Сравните числа:

а) $\frac{3}{4}$ и 0,74; б) $\frac{1}{8}$ и 0,15; в) $\frac{1}{3}$ и 0,3; г) 0,25 и $\frac{1}{5}$.



Уровень Б

324. Разместите числа в порядке их возрастания:

а) $\frac{7}{8}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$; б) $\frac{6}{5}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{8}{7}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{10}{9}$; $\frac{11}{10}$.

325. Сколько содержится:

а) восьмых в $\frac{1}{2}$; б) десятых в $\frac{4}{5}$; в) сороковых в $\frac{3}{5}$?

326. Разместите числа в порядке убывания:

$\frac{9}{6}$; $\frac{10}{7}$; $1\frac{2}{3}$; $1\frac{3}{4}$; 1,59; 1,6.

327. Есть ли среди чисел $\frac{6}{5}$, $1\frac{3}{15}$, $\frac{36}{30}$, $1\frac{1}{5}$, 1,02, 1,2, 1,22 равные?

328. Обоснуйте утверждение. Если знаменатели двух несократимых дробей – числа взаимно простые, то наименьший общий знаменатель этих дробей равен произведению их знаменателей. Приведите примеры.

329. Верно ли утверждение задачи 328 для случая трех дробей? Найдите наименьший общий знаменатель дробей

$\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{15}$.

330. Обоснуйте утверждение. Из двух дробей с равными числителями больше та, знаменатель которой меньше. Приведите примеры.

331. Пятиметровую колоду разрезали на 8 равных частей, а семиметровую – на 14. Части какой колоды длиннее?

332. Один из двух одинаковых тортов разрезали на 8 равных частей, а другой – на 14. Масса чего больше: двух кусков первого торта или трех кусков второго? Решите задачу, сравнивая две дроби. Сделайте рисунок.

333. При каком значении x верно равенство:

а) $2 = \frac{x}{3}$; б) $3 = \frac{x}{5}$; в) $12 = \frac{x}{6}$; г) $13 = \frac{x}{13}$



Упражнения для повторения

334. Найдите 0,6 числа:

а) 1000; б) 46,8; в) 0,3; г) 0.

335. Найдите число, 0,3 которого равны:

а) 15; б) 3; в) 0,6.

336. Что больше: 30 % числа 150 или 40 % числа 120? На сколько?

337. Одна сторона треугольника равна 0,4 м, вторая и третья – на 20 % и 30 % длиннее первой. Найдите периметр треугольника.

338. 25 % поля засеяли просом, а остальное – гречихой. Во сколько раз площадь под гречихой больше площади, занятой просом?

339. Внук приехал к бабушке 29 мая и пробыл у нее 75 дней. Когда он уехал от бабушки?

340. Игорь задумал число. Если его умножить на 2, а произведение увеличить на 26, то получим 84. Какое число задумал Игорь?

341. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2 см, 3 см и 4 см (рис. 23). Найдите площадь его поверхности и объем.

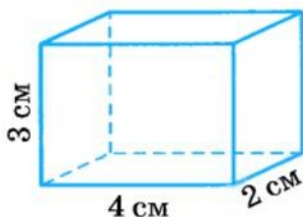


Рис. 23

§11.

Сложение и вычитание дробей

Вспомните, как складывают и вычитают дроби с равными знаменателями.

Примеры.

а) $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{1+2+4}{9} = \frac{7}{9}$; б) $\frac{8}{23} - \frac{2}{23} = \frac{8-2}{23} = \frac{6}{23}$.



Чтобы найти сумму или разность дробей с разными знаменателями, надо сначала привести их к общему знаменателю, а потом — сложить или вычесть по известным уже правилам.

Над числителями можно писать дополнительные множители или только представлять их. Рассмотрим примеры.

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}; \quad \frac{7}{15} - \frac{3}{10} = \frac{14}{30} - \frac{9}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Сумму дроби и натурального числа записывают в виде смешанного числа:

$$7 + \frac{2}{3} = 7\frac{2}{3}; \quad \frac{8}{9} + 2 = 2\frac{8}{9}.$$

Смешанное число можно преобразовать в неправильную дробь. Поскольку $7 = \frac{21}{3}$, то $7\frac{2}{3} = \frac{21}{3} + \frac{2}{3} = \frac{23}{3}$.



Чтобы неправильную дробь преобразовать в смешанное число, надо числитель разделить на знаменатель. Неполное частное — это целая часть, а остаток — числитель дробной части.

Например, чтобы $\frac{32}{5}$ преобразовать в смешанное число, разделим 32 на 5.

$$32 : 5 = 6 \text{ (ост. 2)}. \text{ Поэтому } \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}.$$

Для любых чисел — натуральных или дробных — справедливы переместительный и сочетательный законы сложения.



Для любых чисел a, b, c

$$a + b = b + a;$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Разные случаи вычитания показаны на примерах:

$$\text{а) } 5\frac{1}{9} - \frac{2}{9} = 4\frac{10}{9} - \frac{2}{9} = 4\frac{8}{9}; \quad \text{б) } 8 - 1\frac{2}{3} = 7\frac{3}{3} - 1\frac{2}{3} = 6\frac{1}{3};$$

$$\text{в) } 2,5 - 1\frac{2}{5} = 2\frac{5}{10} - 1\frac{4}{10} = 1\frac{1}{10} = 1,1.$$



Проверьте себя

1. Как сложить или вычесть дроби с равными знаменателями?
2. Как найти сумму дробей с разными знаменателями?
3. Как найти разность дробей с разными знаменателями?
4. Как преобразовать неправильную дробь в смешанное число?
5. Каждую ли неправильную дробь можно преобразовать в смешанное число?
6. Сформулируйте законы сложения для дробных чисел.



Выполняем вместе

- ① Сложите дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{6}$.

• НОК (8, 6) = 24. Дополнительные множители – 3 и 4, поскольку $24 : 8 = 3$, $24 : 6 = 4$. Поэтому

$$\frac{3^{\sqrt{3}}}{8} + \frac{5^{\sqrt{4}}}{6} = \frac{9}{24} + \frac{20}{24} = \frac{29}{24} = 1\frac{5}{24}.$$

Можно записать и так:

$$\frac{3^{\sqrt{3}}}{8} + \frac{5^{\sqrt{4}}}{6} = \frac{9+20}{24} = \frac{29}{24} = 1\frac{5}{24}.$$

- ② Найдите разность чисел: а) $3\frac{2}{5}$ и $1\frac{3}{10}$; б) $4\frac{1}{3}$ и $1\frac{7}{15}$.

• а) $3\frac{2}{5} - 1\frac{3}{10} = (3-1) + \left(\frac{2^{\sqrt{2}}}{5} - \frac{3}{10}\right) = 2 + \left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}\right) = 2\frac{1}{10};$

б) поскольку $\frac{1}{3} < \frac{7}{15}$, то

$$4\frac{1}{3} - 1\frac{7}{15} = 3\frac{4^{\sqrt{5}}}{3} - 1\frac{7}{15} = 3\frac{20}{15} - 1\frac{7}{15} = 2\frac{13}{15}.$$



Устные упражнения

Вычислите значения выражений (342–344).

342. а) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$; б) $\frac{6}{11} + \frac{7}{11}$; в) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$;

г) $\frac{4}{9} + \frac{5}{9}$; д) $\frac{5}{4} - \frac{3}{4}$; е) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$;

ж) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}$; з) $\frac{8}{13} - \frac{7}{13}$; и) $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$.

343. а) $1 + \frac{2}{3}$; б) $3 + \frac{1}{5}$; в) $4 + \frac{2}{3}$;

г) $\frac{3}{4} + 2$; д) $\frac{1}{5} + 1$; е) $\frac{4}{7} + 3$.

344. а) $2\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$; б) $1\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$; в) $2\frac{1}{8} + 7\frac{7}{8}$;

г) $3,8 + 7\frac{1}{5}$; д) $4,5 + 1\frac{1}{2}$; е) $1\frac{1}{4} + 4\frac{3}{4}$.



Уровень А

Выполните действия (345–352).

345. а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$; в) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$;

г) $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$; д) $\frac{1}{7} + \frac{1}{3}$; е) $\frac{1}{13} + \frac{1}{2}$.

346. а) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$; б) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2}$; в) $\frac{4}{7} - \frac{1}{3}$;

г) $\frac{5}{8} - \frac{1}{3}$; д) $\frac{6}{7} - \frac{2}{3}$; е) $\frac{10}{11} - \frac{1}{2}$.

347. а) $\frac{5}{6} + \frac{3}{10}$; б) $\frac{5}{7} - \frac{3}{14}$; в) $\frac{3}{8} + \frac{1}{12}$;

г) $\frac{5}{9} - \frac{1}{15}$; д) $\frac{5}{14} - \frac{1}{4}$; е) $\frac{5}{6} - \frac{4}{9}$.

348. а) $\frac{13}{11} - \frac{11}{13}$; б) $\frac{1}{6} + \frac{7}{15}$; в) $\frac{23}{6} - \frac{2}{9}$;

г) $\frac{1}{12} + \frac{4}{15}$; д) $\frac{1}{10} + \frac{2}{15}$; е) $\frac{8}{7} - \frac{7}{8}$.

349. а) $3\frac{4}{9} + \frac{1}{6}$;

б) $2\frac{2}{3} - \frac{5}{9}$;

в) $\frac{3}{4} + 1\frac{3}{8}$;

г) $1\frac{5}{8} - \frac{3}{4}$;

д) $2\frac{1}{3} - \frac{5}{6}$;

е) $\frac{6}{5} - 1\frac{1}{8}$.

350. а) $5\frac{1}{7} - \frac{9}{14}$;

б) $3\frac{1}{6} + \frac{5}{18}$;

в) $\frac{13}{5} - 1\frac{1}{3}$;

г) $12\frac{5}{8} - 8\frac{3}{28}$;

д) $4\frac{2}{3} - 3\frac{3}{4}$;

е) $\frac{34}{3} - 11\frac{1}{4}$.

351. а) $0,5 - \frac{1}{3}$;

б) $0,3 + \frac{5}{6}$;

в) $1,7 + \frac{7}{9}$;

г) $1,8 - 1\frac{1}{4}$;

д) $0,25 + 3\frac{3}{4}$;

е) $\frac{2}{3} + 2,3$.

352. а) $6,4 + 1\frac{1}{5} - 2\frac{3}{8}$;

б) $4,7 - 2\frac{2}{3} + 9\frac{5}{6}$.

Вычислите значения выражений (353–356).

353. а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6}$;

б) $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{15}$;

в) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$.

354. а) $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} + \frac{5}{12}$;

б) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{2}{15}$;

в) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{2}{15}$.

355. а) $3\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\frac{1}{4}$;

б) $5\frac{2}{3} - 1\frac{1}{6} + \frac{1}{9}$;

в) $4\frac{1}{4} - 1\frac{1}{9} - \frac{5}{6}$;

г) $12 - 1\frac{3}{5} + 0,2$;

д) $2,5 - \frac{5}{6} + 1\frac{1}{3}$;

е) $\frac{1}{5} + 3,2 - \frac{7}{5}$.

356. а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$;

б) $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} - \frac{3}{8}$;

в) $\frac{4}{5} - \frac{4}{15} + 1\frac{1}{3} - \frac{4}{9}$;

г) $3\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$.

357. Заполните таблицы.

Слагаемое		$\frac{1}{15}$		$1\frac{6}{17}$	
Слагаемое	$\frac{3}{5}$		$1\frac{1}{2}$		$2\frac{3}{11}$
Сумма	$\frac{13}{10}$	$1\frac{4}{5}$	2,7	$2\frac{11}{34}$	$3\frac{16}{33}$

Уменьшаемое	$4\frac{19}{20}$	$1\frac{4}{7}$			3,2
Вычитаемое			$\frac{5}{24}$	$1\frac{7}{25}$	
Разность	2,7	$\frac{9}{14}$	$\frac{1}{30}$	$1\frac{4}{5}$	$\frac{16}{5}$

358. Один арбуз весит $3\frac{1}{2}$ кг, а другой – $2\frac{3}{4}$ кг. Сколько килограммов весят два арбуза вместе?

359. Арбуз весит $3\frac{1}{5}$ кг, а дыня – на $\frac{3}{4}$ кг меньше. Сколько килограммов весят арбуз и дыня вместе?

360. Масса одной книги трехтомника равна $\frac{3}{4}$ кг, второй – $\frac{5}{6}$ кг, а третьей – $\frac{2}{3}$ кг. Найдите массу трехтомника. На сколько килограммов первый том легче или тяжелее второго и третьего томов?

361. Семиметровую трубу разрезали на две части. Длина одной части равна $2\frac{5}{8}$ м. Найдите длину другой части трубы.

362. В первый день заасфальтировали $\frac{5}{16}$ км дороги, а во второй – на $\frac{1}{8}$ км больше. Сколько километров дороги заасфальтировали за два дня?

363. В одном ящике 5,3 кг винограда, а в другом – на $1\frac{3}{5}$ кг больше. Сколько килограммов винограда в обоих ящиках вместе?

364. От мотка проволоки длиной 30 м сначала отрезали $7\frac{1}{2}$ м, а потом еще $8\frac{4}{5}$ м. Сколько метров проволоки осталось в мотке?



Уровень Б

Вычислите значения выражений (365–368).

365. а) $0,7 + \frac{2}{5} - \frac{2}{3}$;

б) $\frac{2}{3} + 3,2 - 2\frac{1}{9}$;

в) $0,7 + 1\frac{1}{2} - \frac{7}{8}$;

г) $3,45 - 2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{5}$.

366. а) $4\frac{7}{25} + \left(\frac{18}{25} - \frac{4}{15}\right)$;

б) $\frac{7}{45} + \left(\frac{43}{45} - \frac{7}{9}\right)$;

в) $4\frac{8}{39} + \left(1\frac{7}{24} - \frac{1}{32}\right)$;

г) $\frac{7}{8} - 0,25 + 2,125$.

367. а) $4\frac{6}{17} - \left(3\frac{11}{12} + \frac{6}{17}\right)$;

б) $8\frac{19}{24} - \left(\frac{35}{36} + \frac{7}{24}\right)$;

в) $\left(\frac{23}{27} + 1\frac{5}{6}\right) - \frac{14}{27}$;

г) $3\frac{1}{2} - \left(3\frac{3}{4} - 2\frac{2}{5}\right)$.

368. а) $3,6 - \left(\frac{6}{35} + \frac{3}{5}\right)$;

б) $2\frac{1}{3} + \left(2,08 - 1\frac{2}{6}\right)$;

в) $3,7 + \left(\frac{7}{8} + 0,3\right)$;

г) $\left(8,5 + \frac{7}{9}\right) - 2,5$.

Решите уравнения (369–370).

369. а) $\frac{6}{25} + x = \frac{4}{5}$;

б) $x - \frac{4}{15} = \frac{4}{5}$;

в) $x + \frac{7}{15} = \frac{2}{3}$;

г) $x + \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$.

370. а) $x + \frac{8}{15} = 1\frac{3}{4}$;

б) $1\frac{1}{8} - x = \frac{13}{16}$;

в) $x - 7\frac{1}{2} = 3\frac{3}{4}$;

г) $2,8 - x = \frac{3}{4}$.



371. На покраску окон ушло $2\frac{5}{6}$ кг краски, на покраску по-

ла – $10\frac{7}{12}$ кг, на покраску дверей – на $4\frac{1}{3}$ кг меньше, чем на

покраску пола. Сколько всего израсходовали краски?

372. На токарном станке деталь обрабатывали $1\frac{2}{3}$ ч, на фрезервальном — в 2 раза дольше. Сколько времени ушло на изготовление детали на этих двух станках?

373. Бригада выполнила задание за 3 дня. В первый день она выполнила $\frac{1}{3}$ всей работы, во второй — $\frac{2}{5}$ всей работы.

Какую часть работы бригада выполнила в третий день?

374. На токе было $8\frac{1}{2}$ т зерна. Сколько зерна стало на токе

после того, как завезли $2\frac{1}{3}$ т, а потом вывезли $3\frac{2}{5}$ т?

375. Найдите число, которое меньше $5\frac{2}{3}$ на столько, на сколько

ко $6\frac{1}{2}$ больше $3\frac{3}{4}$.

376. После того как из одного ящика переложили в дру-

гой $2\frac{3}{4}$ кг груш, в каждом ящике их стало по 18 кг. Сколько килограммов груш было в каждом ящике вначале?

377. На сколько сумма чисел 0,5 и $\frac{1}{3}$ больше их разности?

378. Найдите периметр прямоугольника, одна сторона которого равна $1\frac{3}{5}$ м, а вторая — $\frac{1}{2}$ м.

379. Найдите периметр равнобедренного треугольника, основание которого равно $\frac{3}{4}$ дм, а боковая сторона — $\frac{3}{5}$ дм.

380. Периметр равнобедренного треугольника равен $\frac{8}{9}$ дм, а боковая сторона — $\frac{1}{3}$ дм. Найдите длину его основания.

381. На рисунке 24 $AB = 3\frac{1}{2}$ м, $BC = 1\frac{4}{5}$ м, $DE = \frac{5}{6}$ м.

Вычислите периметр фигуры.

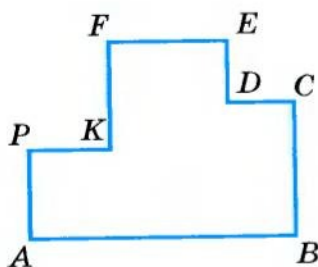


Рис. 24

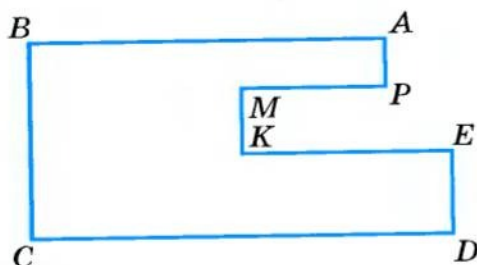


Рис. 25

382*. Найдите периметр фигуры (рис. 25), если $BC = \frac{5}{6}$ дм, $CD = 1\frac{3}{4}$ дм, $MP = \frac{3}{5}$ дм.

383. Покажите, что для любых натуральных чисел a и b всегда $\frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$.

384. Как изменится значение дроби, если ее знаменатель не изменять, а к числителю прибавить число, равное знаменателю?

385*. Дробь $\frac{a}{b}$ правильная. Какая из дробей больше: $\frac{a}{b}$ или

$\frac{a+1}{b+1}$? Покажите на примерах.



Упражнения для повторения

386. Выполните деление с остатком:

а) $57 : 7$; б) $82 : 26$; в) $40 : 37$.

387. Какие из чисел 1323, 3895, 83 325, 88 008 делятся на 3, а какие – на 9?

388. Разложите на простые множители число:

а) 2704; б) 7007.

389. Выпишите все делители числа:

а) 18; б) 144; в) 882.

390. Найдите НОД и НОК чисел:

а) 60 и 90; б) 12, 28 и 36.

391. Когда из канистры отлили 8 л бензина, в ней осталось 75 % того бензина, который был в канистре сначала. Сколько бензина осталось в канистре?

392. Периметр треугольника равен 4,5 дм. Одна его сторона меньше периметра на 3,2 дм, а другая — на 3,1 дм. Найдите третью сторону треугольника.

393. Найдите углы прямоугольного треугольника, если наименьший из них меньше наибольшего угла на 57° .

394*. Сколько кубиков недостает на рисунке 26, чтобы сложить из них большой куб?

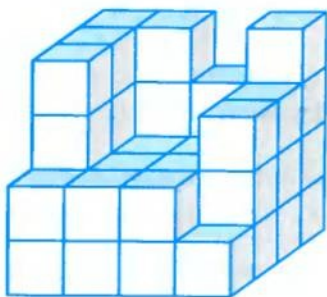


Рис. 26



Самостоятельная работа 2

Вариант 1

1°. Вычислите:

а) $\frac{3}{5} + \frac{7}{15}$;

б) $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$;

в) $3\frac{7}{8} - \left(4 - 2\frac{5}{6}\right)$.

2°. На сколько сумма чисел 0,6 и $\frac{5}{13}$ больше их разности?

3°. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{6} + x = 1\frac{1}{8}$;

б) $\frac{9}{8} - x = \frac{8}{9}$;

в) $x - \frac{4}{15} = \frac{7}{20}$.

4°. Одна деталь весит 1,4 кг, а другая — на $\frac{1}{4}$ кг меньше.

Сколько весят обе детали вместе?

5°. Найдите периметр прямоугольника, одна сторона которого равна $3\frac{1}{5}$ м, а другая — на $\frac{3}{4}$ м длиннее.

Вариант 2

1°. Вычислите:

а) $\frac{3}{8} - \frac{1}{12}$;

б) $3\frac{3}{5} + 1\frac{1}{15}$;

в) $2\frac{5}{9} - \left(3 - 2\frac{5}{6}\right)$.

2°. На сколько сумма чисел $\frac{2}{3}$ и 0,2 больше их разности?

3°. Решите уравнение:

а) $x + \frac{1}{8} = 1\frac{3}{4}$; б) $\frac{8}{7} - x = \frac{7}{8}$; в) $x - \frac{5}{12} = \frac{4}{3}$.

4°. Автомобиль весит $1\frac{2}{5}$ т, а прицеп – на 0,75 т меньше.

Сколько весит автомобиль вместе с прицепом?

5°. Найдите периметр прямоугольника, стороны которого равны $1\frac{1}{4}$ м и $\frac{4}{5}$ м.

Вариант 3

1°. Вычислите:

а) $\frac{33}{34} - \frac{9}{17}$; б) $\frac{7}{15} + \frac{16}{25} - \frac{11}{75}$; в) $\frac{9}{16} - \left(\frac{11}{32} - \frac{1}{4}\right)$.

2°. На сколько сумма $\frac{8}{9} + \frac{1}{18} + \frac{2}{3}$ меньше разности $2,5 - \frac{1}{5}$?

3°. Решите уравнение:

а) $\frac{2}{5} + x = 1\frac{2}{15}$; б) $x - \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$; в) $\left(x - \frac{2}{5}\right) - 0,3 = 2\frac{1}{4}$.

4°. Одна деталь весит 2,3 кг, вторая – на $\frac{1}{6}$ кг тяжелее, а третья – на $\frac{2}{3}$ кг легче второй. Сколько весят три детали вместе?

5°. Найдите периметр прямоугольника, одна сторона которого равна $3\frac{7}{8}$ м, а другая – на 1,25 м короче.

Вариант 4

1°. Вычислите:

а) $\frac{11}{12} - \frac{7}{30}$; б) $\frac{9}{13} - \frac{19}{65} + \frac{3}{5}$; в) $\frac{11}{12} - \left(\frac{17}{30} - \frac{19}{60}\right)$.

2°. На сколько разность $1,3 - \frac{1}{3}$ больше суммы $\frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3}$?

3°. Решите уравнение:

а) $x + \frac{3}{14} = 2\frac{1}{7}$; б) $\frac{5}{8} - x = \frac{1}{12}$; в) $\left(x - \frac{1}{6}\right) - 0,5 = 1\frac{2}{3}$.

4°. Одна дыня весит 3,5 кг, вторая – на $\frac{1}{3}$ кг легче, а третья – на $1\frac{2}{5}$ кг тяжелее, чем вторая. Сколько весят три дыни вместе?

5°. Стороны одного прямоугольника равны $2\frac{1}{2}$ м и $3\frac{1}{5}$ м, а другого – 3,5 м и 2,1 м. На сколько метров периметр первого прямоугольника больше или меньше периметра второго?



Готовимся
к тематическому контролю

Вопросы для самопроверки

1. Что называют обыкновенной дробью?
2. Что показывают числитель и знаменатель обыкновенной дроби?
3. Какие обыкновенные дроби называют правильными? Неправильными?
4. Как преобразовать десятичную дробь в обыкновенную?
5. При каком условии обыкновенная дробь больше 1?
6. Сформулируйте основное свойство дроби.
7. Что значит сократить дробь?
8. Как сократить обыкновенную дробь? Приведите примеры.
9. Какие дроби называют несократимыми?
10. Что значит привести дроби к общему знаменателю?
11. Как сложить дроби с равными знаменателями?
12. Как найти разность дробей с равными знаменателями?
13. Как сложить или вычесть дроби с разными знаменателями?
14. Как из неправильной дроби выделить целую часть?
15. Как преобразовать смешанное число в неправильную дробь?

Задания в тестовой форме

1. Какая из представленных ниже дробей правильная?

а) $\frac{5}{4}$; б) $\frac{5}{5}$; в) $\frac{5}{7}$; г) $\frac{3}{2}$.

2. В виде какого смешанного числа можно записать дробь $\frac{21}{5}$?

- а) $2\frac{1}{5}$; б) $5\frac{1}{2}$; в) $5\frac{1}{4}$; г) $4\frac{1}{5}$.

3. Какое из чисел 1 , $2\frac{1}{5}$, $5\frac{1}{2}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{2}$ наименьшее?

- а) 1 ; б) $2\frac{1}{5}$; в) $\frac{5}{7}$; г) $\frac{3}{2}$; д) $5\frac{1}{2}$.

4. Какой знак надо поставить вместо звездочки в записи

$$1,25 * \frac{3}{2}?$$

- а) «>»; б) «=»; в) «<»; г) «≥».

5. Какой вид будет иметь дробь $\frac{30}{42}$ после сокращения?

- а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{3}{2}$; в) $\frac{5}{7}$; г) $\frac{21}{5}$.

6. Решите уравнение $x + \frac{1}{4} = 1$.

- а) 1 ; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{4}$; г) 4 .

7. Вычислите сумму $\frac{3}{2} + \frac{5}{7}$.

- а) $2\frac{1}{5}$; б) $2\frac{3}{14}$; в) $\frac{21}{5}$; г) $2\frac{1}{2}$.

8. При каких значениях x равенство $\frac{x}{6} = 3$ верно?

- а) 30 ; б) 15 ; в) 18 ; г) 24 .

9. Найдите наименьший общий знаменатель дробей

$$\frac{7}{36} \text{ и } \frac{5}{24}.$$

- а) 3 ; б) 6 ; в) 9 ; г) 72 .

Типовые задачи

1°. Выполните действие: а) $\frac{2}{11} + \frac{7}{11}$; б) $\frac{6}{13} - \frac{3}{13}$.

2°. Сократите дробь: а) $\frac{15}{45}$; б) $\frac{12}{20}$; в) $\frac{91}{130}$.

3°. Сравните дроби: а) $\frac{2}{7}$ и $\frac{5}{7}$; б) $\frac{3}{4}$ и $\frac{3}{8}$; в) $\frac{3}{7}$ и $\frac{2}{5}$.

4°. Запишите в виде обыкновенной дроби число: а) 0,4; б) 2,5.

5°. Вычислите: а) $\frac{3}{8} + \frac{5}{24}$; б) $\frac{8}{9} - \frac{5}{6}$; в) $\frac{11}{12} + 1\frac{7}{15}$.

6°. Решите уравнение: а) $\frac{3}{8} - x = \frac{1}{12}$; б) $\left(x - \frac{5}{7}\right) - 0,3 = 2\frac{1}{5}$.

7°. Масса пустой банки равна $\frac{3}{4}$ кг, а заполненной медом — $6\frac{1}{2}$ кг.

Сколько килограммов меда в банке?

8°. Даша в первый день прочитала $\frac{5}{9}$ книги, а во второй —

на $\frac{1}{7}$ меньше. Какую часть книги она прочитала во второй день? Успела ли она за два дня прочесть всю книгу?

§ 12.

Умножение дробей

Существует много задач, для решения которых надо уметь умножать обыкновенные дроби. Например, если

стороны прямоугольника равны $\frac{7}{10}$ дм и $\frac{3}{10}$ дм (рис. 27),

то, чтобы найти его площадь, нужно умножить эти дроби. Это нетрудно сделать, если вспомнить, как умножают десятичные дроби:

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21 = \frac{21}{100}$$

Обратите внимание: произведение числителей $7 \cdot 3 = 21$, а произведение знаменателей $10 \cdot 10 = 100$. Произведением данных дробей является дробь, числитель которой равен произведению их числителей, а знаменатель — произведению знаменателей. Любые другие обыкновенные дроби умножают подобным образом.

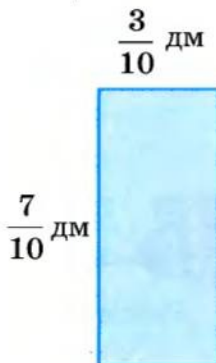


Рис. 27

Произведение двух дробей равно дроби, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель – произведению их знаменателей.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$



Подобным образом умножают три и больше дробей:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot c \cdot m}{b \cdot d \cdot n}$$

Примечание. Множители числителя и знаменателя желательно сократить еще до их умножения. Например,

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{11} = \frac{\cancel{3} \cdot 5 \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot 6 \cdot 11} = \frac{5}{22}$$

Чтобы перемножить обыкновенные дроби, натуральные числа, десятичные дроби или смешанные числа, их надо преобразовать в обыкновенные дроби. Например,

$$\frac{5}{8} \cdot 3 = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{1} = \frac{15}{8}, \quad \frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1, \quad \frac{5}{7} \cdot 0,5 = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$$

Для любых дробных чисел, как и для натуральных, всегда выполняются переместительный, сочетательный и распределительный законы умножения.

То есть, какие не были бы числа a, b, c , всегда

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Надо также помнить, что какой бы не была обыкновенная дробь $\frac{m}{n}$, всегда

$$\frac{m}{n} \cdot 1 = \frac{m}{n}, \quad \frac{m}{n} \cdot 0 = 0.$$



Узнайте больше

Рассмотрите два произведения:

а) $15 \cdot \frac{4}{3} = 20$, здесь $20 > 15$; б) $15 \cdot \frac{1}{5} = 3$, здесь $3 < 15$.

Верным является и общее утверждение. Пусть a – произвольное число больше 0. При умножении числа a на неправильную дробь получаем произведение больше a , а при умножении на правильную дробь – произведение меньше a . Произведение нескольких правильных дробей меньше каждой из этих дробей.



Проверьте себя

1. Чему равно произведение нескольких дробей?
2. Как перемножить дробь и натуральное число?
3. Как умножить смешанные числа?
4. Справедливы ли законы умножения для дробных чисел? Сформулируйте их.
5. При каком условии произведение двух дробей меньше каждой из них? А при каком – больше каждой из них?



Выполняем вместе

- ① Вычислите произведение чисел:

а) $\frac{8}{21}$ и $\frac{7}{16}$; б) $\frac{6}{25}$, $2\frac{1}{2}$ и $1\frac{2}{3}$.

• а) $\frac{8}{21} \cdot \frac{7}{16} = \frac{8 \cdot 7}{21 \cdot 16} = \frac{1}{6}$;

б) $\frac{6}{25} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 5}{25 \cdot 2 \cdot 3} = 1$.

- ② Умножьте $2\frac{3}{7}$ на 2.

• Первый способ. $2\frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{17}{7} \cdot 2 = \frac{34}{7} = 4\frac{6}{7}$.

Второй способ. $2\frac{3}{7} \cdot 2 = \left(2 + \frac{3}{7}\right) \cdot 2 = 4 + \frac{6}{7} = 4\frac{6}{7}$.

- ③ Найдите квадрат и куб числа $1\frac{3}{4}$.

• $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{49}{16} = 3\frac{1}{16}$;

$$\left(1\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{343}{64} = 5\frac{23}{64}.$$



Устные упражнения

395. Вычислите:

а) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7};$

б) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}, \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}, \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5};$

в) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7}, \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2};$

г) $\frac{7}{8} \cdot 4, \frac{9}{5} \cdot 10, \frac{3}{7} \cdot 6.$

396. Вычислите, применив распределительный закон умножения:

а) $3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right), 5 \cdot \left(3 + \frac{2}{5}\right), 7 \cdot \left(1 + \frac{5}{7}\right);$

б) $\left(\frac{2}{5} + 3\right) \cdot 5, \left(2 + \frac{3}{4}\right) \cdot 4, \left(4 + \frac{1}{5}\right) \cdot 10;$

в) $1\frac{1}{5} \cdot 5, 2\frac{3}{8} \cdot 8, 6 \cdot 1\frac{1}{6}.$

397. Всегда ли при умножении числа на правильную дробь число уменьшается? Приведите примеры.

398. Всегда ли при умножении числа на неправильную дробь число увеличивается? Приведите примеры.



Уровень А

Вычислите произведения (399–402).

399. а) $\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{12};$

б) $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5};$

в) $\frac{7}{8} \cdot \frac{2}{7};$

г) $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{10};$

д) $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4};$

е) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10}.$

400. а) $\frac{18}{25} \cdot \frac{5}{9};$

б) $\frac{12}{35} \cdot \frac{21}{9};$

в) $\frac{25}{36} \cdot \frac{27}{50};$

г) $\frac{14}{15} \cdot \frac{45}{49};$

д) $\frac{9}{14} \cdot \frac{21}{29};$

е) $\frac{45}{52} \cdot \frac{13}{15}.$

401. а) $1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3};$

б) $1\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8};$

в) $1\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5};$

г) $2\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{11};$

д) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7};$

е) $3\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{10}.$

402. а) $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3}$; б) $2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$; в) $3\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{7}$;
 г) $12\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{5}$; д) $3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{7}$; е) $1\frac{4}{5} \cdot 1\frac{1}{9}$.

Вычислите значения выражений (403–408).

403. а) $\frac{7}{10} + \frac{7}{9} \cdot \frac{27}{35}$; б) $\frac{5}{14} + \frac{5}{8} \cdot \frac{16}{35}$;

в) $\frac{2}{3} + \frac{5}{27} \cdot \frac{9}{10}$; г) $\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{15} - \frac{2}{7}$.

404. а) $\frac{5}{6} - \frac{6}{13} \cdot \frac{13}{18}$; б) $\frac{3}{4} - \frac{8}{17} \cdot \frac{51}{64}$;

в) $\frac{5}{12} - \frac{8}{21} \cdot \frac{7}{16}$; г) $\frac{5}{8} \cdot \frac{6}{35} - \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{16}$.



405. а) $1 + \frac{3}{5} \cdot 1\frac{5}{6}$; б) $2 + \frac{3}{8} \cdot 16$; в) $1 + 2\frac{1}{3} \cdot 6$.

406. а) $5 - 4\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{13}$; б) $2 - \frac{7}{8} \cdot 1\frac{1}{7}$; в) $1 - \frac{9}{22} \cdot 1\frac{5}{6}$.

407. а) $\left(2\frac{13}{50} - 2\frac{1}{20}\right) \cdot 3\frac{4}{7}$; б) $\left(2\frac{3}{5} + 0,7\right) \cdot \frac{15}{22}$.

408. а) $\left(11\frac{1}{3} - 0,5\right) \cdot \frac{1}{13}$; б) $\left(20,6 - 8\frac{3}{4}\right) \cdot 8$.

409. Значение какого выражения больше:

а) $\frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16}$ или $1\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5}$; б) $\frac{9}{14} \cdot 0,6$ или $\frac{6}{11} \cdot \frac{5}{7}$?

410. Вспомните, что такое квадрат числа ($a^2 = a \cdot a$).

Возведите в квадрат числа:

$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{7}{10}$; $1\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{3}$.

411. Вспомните, что такое куб числа ($a^3 = a \cdot a \cdot a$). Возведите в куб числа:

$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{3}$.

Вычислите значения выражений (412–413).

412. а) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$; б) $\left(\frac{2}{7}\right)^2$; в) $\left(\frac{5}{8}\right)^2$; г) $\left(1\frac{1}{5}\right)^2$.

413. а) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$; б) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; в) $\left(\frac{4}{3}\right)^3$; г) $\left(1\frac{1}{4}\right)^3$.

414. Что больше: сумма чисел $\frac{3}{4}$ и $\frac{8}{8}$ или их произведение?

415. На сколько произведение чисел $3\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{8}$ больше или меньше их разности?

416. Найдите длину ломаной, если длина каждого из ее двенадцати звеньев равна $\frac{2}{3}$ дм.

417. Найдите периметр шестиугольника, каждая сторона которого равна $2\frac{2}{3}$ см.

418. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна $\frac{7}{9}$ см.

419. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны:

а) $\frac{5}{6}$ м и $\frac{3}{4}$ м; б) $3\frac{1}{2}$ дм и $2\frac{3}{4}$ дм; в) $1\frac{1}{7}$ м и 0,7 м.



Уровень Б

Выполните действия (420–424).

420. а) $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{8}{21}$; б) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{6}{25}$; в) $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{8}{9}$.

421. а) $1\frac{4}{11} \cdot 18\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}$; б) $2\frac{3}{11} \cdot \frac{7}{20} \cdot \frac{11}{25}$;

в) $\frac{4}{13} \cdot 1\frac{7}{18} \cdot \frac{26}{15}$; г) $3\frac{1}{2} \cdot 12\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{7}$.

422. а) $\left(1\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} + 25,7\right) \cdot \frac{10}{89}$; б) $\left(3\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} - 1,4\right) \cdot 25$.

423. а) $\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{15} + 0,3 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16}$; б) $\frac{8}{21} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{9}{16} - \frac{11}{13} \cdot \frac{26}{121}$.

424. а) $4\frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{25} \cdot \frac{15}{28}\right)$; б) $2,5 - \frac{21-8}{26} \cdot \frac{39}{17+2}$.

425. На сколько площадь квадрата со стороной a больше площади квадрата со стороной b , если $a = 3\frac{1}{2}$ м, $b = 2\frac{1}{2}$ м?

426. Найдите объем куба, ребро которого равно:

- а) $\frac{1}{2}$ м; б) $1\frac{1}{3}$ см; в) $2\frac{2}{3}$ дм.

427. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны:

- а) $\frac{1}{2}$ м, $\frac{2}{3}$ м и $\frac{3}{5}$ м; б) $1\frac{3}{5}$ см, $2\frac{1}{2}$ см и $3\frac{1}{3}$ см.

428. На сколько объем куба с ребром a больше объема куба с ребром b , если $a = \frac{1}{2}$ м, $b = \frac{1}{3}$ м?

429. Из прямоугольного листа жести размером $2\frac{1}{4}$ м на $\frac{2}{3}$ м вырезали три одинаковых квадрата со стороной $\frac{1}{3}$ м (рис. 28).

Чему равна площадь оставшейся части листа?



Рис. 28



Рис. 29

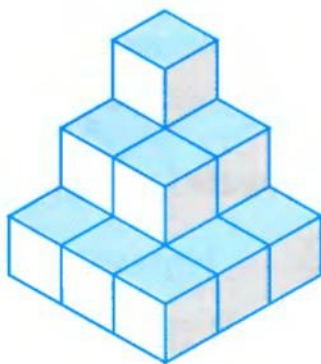


Рис. 30

430. Из прямоугольного листа картона размером $1\frac{1}{2}$ м на $\frac{4}{5}$ м при каждом его угле вырезали равные квадраты со стороной $\frac{1}{5}$ м (рис. 29). Чему равна площадь оставшейся части листа?

431. Найдите объем фигуры (рис. 30), сложенной из одинаковых кубиков. Ребро кубика равно $\frac{2}{3}$ дм.

Выполните действия (432–434).

432. а) $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 0,8$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 2,7 - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

433. а) $\left(1,6 - \frac{2}{5}\right)^2 - 0,75 \cdot \frac{1}{3}$; б) $\left(\frac{3}{4} - 0,3\right)^2 - \left(1 - \frac{3}{7} \cdot 1\frac{3}{4}\right)^2$.

434. а) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$; б) $1\frac{2}{9} - 0,3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3$.

435. Упростите выражение:

а) $\frac{2}{3} \cdot 0,9x$; б) $\frac{5}{7} \cdot 1\frac{2}{5}a$; в) $\frac{4}{5} \cdot 0,25n$; г) $1\frac{1}{3} \cdot 0,75x$.

436. Вычислите значение выражения:

а) $\frac{2}{5} \cdot 2,5x$, если $x = 2\frac{5}{7}$; б) $2 - 3,5 \cdot \frac{2}{7}a$, если $a = 1\frac{3}{8}$;

в) $1\frac{2}{3} \cdot 0,6x^2$, если $x = 0,2$.

437. Решите уравнение:

а) $4\frac{3}{4} + x = 8 \cdot 2\frac{7}{8}$; б) $\frac{7}{8} + x = 5 \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{5}\right)$;

в) $0,125 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - x$; г) $x - 0,12 \cdot \frac{2}{5} = 4^2 \cdot 0,5$.



Упражнения для повторения

438. Округлите десятичные дроби: 2,785; 14,007; 0,9876; 135,609:

а) до единиц; б) до десятых; в) до сотых.

439. Найдите расстояние между городами А и В, если на карте расстояние между ними равно 12 см, а масштаб карты 1 : 500 000.

440. Найдите три наименьшие натуральные значения x , которые удовлетворяют неравенству $x > 13,9$.

441. Найдите все натуральные числа, которые удовлетворяют двум неравенствам одновременно: $x < 54,2$ и $x > 49,8$.

442. Решите уравнение:

а) $12,5x + 4,7 = 7,2$; б) $8 - 0,8x = 3$.

443*. За 10 яблок, 5 груш и 3 лимона уплатили 11 грн., за 10 яблок, 3 груши и 1 лимон – 7,8 грн., за 2 груши и 1 лимон – 2,2 грн. Сколько стоят отдельно яблоко, груша и лимон?

§ 13.

Деление дробей

Делить десятичные дроби вы уже умеете. Знаете, например, что $0,35 : 0,5 = 0,7$, то есть $\frac{35}{100} : \frac{5}{10} = \frac{7}{10}$.

Сравните это равенство с таким: $\frac{35}{100} \cdot \frac{10}{5} = \frac{7}{10}$.

Как видим, разделить ли число на $\frac{5}{10}$ или умножить его на $\frac{10}{5}$, результаты получаем одинаковые. Оказывается, что подобное свойство сохраняется и при делении любого числа на любую дробь $\frac{m}{n}$. Всегда

$$a : \frac{m}{n} = a \cdot \frac{n}{m}.$$

Ведь разделить число a на $\frac{m}{n}$ — это значит найти такое число, которое при умножении на $\frac{m}{n}$ дает a . А равенство $\left(a \cdot \frac{n}{m}\right) \cdot \frac{m}{n} = a$ верно.

Дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{n}{m}$ называются *взаимно обратными*. Вообще, два числа взаимно обратные, если их произведение равно 1. Взаимно обратными, например, являются числа $\frac{1}{3}$ и 3 , $\frac{12}{13}$ и $\frac{13}{12}$.

Из сказанного вытекает такое правило.

Чтобы разделить число на дробь, надо умножить его на число, обратное делителю.

$$a : \frac{m}{n} = a \cdot \frac{n}{m}$$

$$\text{■} : \frac{\text{■}}{\text{■}} = \text{■} \cdot \frac{\text{■}}{\text{■}}$$



Примеры.

$$\text{а) } \frac{7}{15} : \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot \cancel{3}}{\cancel{15} \cdot 2} = \frac{7}{10};$$

$$\text{б) } 4 : \frac{2}{5} = 4 \cdot \frac{5}{2} = \frac{20}{2} = 10;$$

$$\text{в) } \frac{8}{9} : 3 = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{27};$$

$$\text{г) } \frac{1}{2} : 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

На 0 делить нельзя!



Узнайте больше

Деление можно обозначать двоеточием или чертой дроби. Например, частное $2 : 3$ и дробь $\frac{2}{3}$ обозначают одно и то же число. Так же выражение $3,5 : \left(2\frac{1}{2} - 1\right)$ можно записать в виде $\frac{3,5}{2\frac{1}{2} - 1}$.

Это – пример *дробного выражения*. Его можно считать и дробью, но не обыкновенной. Числитель и знаменатель обыкновенной дроби – числа натуральные. А в рассматриваемой дроби числитель 3,5 и знаменатель $2\frac{1}{2} - 1$ – числа не натуральные.

Другие примеры дробных выражений:

$$4\frac{2}{3} + \frac{1}{2,6 - 2}; \quad \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}; \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}.$$

Для вычисления значения таких дробных выражений упрощают их числители и знаменатели, заменяют черту дроби двоеточием и используют другие свойства обыкновенных дробей. Например,

$$\text{а) } 5\frac{3}{7} - \frac{2}{5,5 - 2} = 5\frac{3}{7} - \frac{2}{3,5} = \frac{38}{7} - \frac{4}{7} = \frac{34}{7} = 4\frac{6}{7};$$

$$\text{б) } 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 1 + 1 : \frac{7}{3} = 1 + \frac{3}{7} = 1\frac{3}{7}.$$



Проверьте себя

1. Какие числа называют взаимно обратными?
2. Сформулируйте правило деления числа на дробь.
3. Можно ли число 0 делить на дробь?
4. Можно ли какую-либо дробь делить на 0?



Выполняем вместе

- ① Вычислите значение выражения $2\frac{1}{3} : 5\frac{1}{4}$.

- Заменим смешанные числа неправильными дробями:

$$2\frac{1}{3} : 5\frac{1}{4} = \frac{7}{3} : \frac{21}{4} = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{21} = \frac{\cancel{7} \cdot 4}{3 \cdot \cancel{21}_{/3}} = \frac{4}{9}.$$

- ② Площадь прямоугольника равна 2 м^2 , а одна из его сторон — $1\frac{2}{3}\text{ м}$. Найдите длину второй стороны.

• $2 : 1\frac{2}{3} = 2 : \frac{5}{3} = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} (\text{м}).$



Устные упражнения

444. Докажите, что взаимно обратными являются числа:

а) $\frac{5}{6}$ и $\frac{6}{5}$; б) $\frac{7}{12}$ и $\frac{12}{7}$; в) $\frac{1}{5}$ и 5; г) $0,7$ и $1\frac{3}{7}$.

445. Являются ли взаимно обратными числа:

а) $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{4}$; б) $\frac{10}{6}$ и $\frac{3}{5}$; в) $\frac{3}{18}$ и 6; г) $1\frac{2}{3}$ и $1\frac{3}{2}$?

446. Назовите число, обратное числу: $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{23}{18}$; $\frac{1}{13}$; 7.

Выполните действия (447–449).

447. а) $\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$, $\frac{7}{4} : \frac{7}{4}$, $\frac{1}{2} : 0,5$; б) $\frac{3}{4} : 1$, $\frac{8}{7} : 1$, $1\frac{1}{3} : 1$;
в) $1 : \frac{2}{7}$, $1 : \frac{8}{9}$, $1 : \frac{7}{10}$; г) $0 : \frac{2}{5}$, $0 : \frac{10}{8}$, $0 : 3\frac{1}{5}$.

448. а) $\frac{1}{3}:2$, $\frac{5}{6}:3$, $\frac{4}{3}:5$;

б) $\frac{6}{7}:3$, $\frac{8}{9}:4$, $\frac{5}{8}:5$;

в) $\frac{14}{15}:7$, $\frac{40}{13}:8$, $\frac{18}{19}:9$;

г) $1\frac{1}{3}:\frac{4}{3}$, $1\frac{2}{5}:\frac{7}{5}$, $\frac{8}{3}:2\frac{2}{3}$.

449. а) $\frac{4}{5}:\frac{2}{5}$, $\frac{6}{7}:\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}:\frac{1}{9}$;

б) $\frac{6}{11}:\frac{3}{11}$, $\frac{12}{13}:\frac{4}{13}$, $\frac{16}{17}:\frac{8}{17}$;

в) $\frac{1}{7}:\frac{1}{5}$, $\frac{1}{13}:\frac{1}{8}$, $\frac{3}{7}:\frac{3}{4}$;

г) $\frac{2}{5}:0,4$, $\frac{3}{5}:0,6$, $1,5:\frac{3}{2}$.



Уровень А

Выполните действия (450–454).

450. а) $\frac{6}{13}:\frac{9}{26}$;

б) $\frac{7}{44}:\frac{21}{22}$;

в) $\frac{15}{16}:\frac{25}{64}$;

г) $\frac{76}{77}:\frac{38}{99}$.

451. а) $56:\frac{4}{9}$;

б) $87:\frac{29}{30}$;

в) $56:\frac{7}{11}$;

г) $39:\frac{13}{35}$.

452. а) $\frac{12}{13}:\frac{2}{39}$;

б) $\frac{15}{8}:\frac{3}{40}$;

в) $\frac{24}{25}:\frac{8}{35}$;

г) $\frac{16}{21}:\frac{24}{35}$.

453. а) $4\frac{5}{8}:37$;

б) $1\frac{5}{13}:6$;

в) $5\frac{5}{11}:30$;

г) $3\frac{1}{16}:49$.

454. а) $\frac{6}{65}:1\frac{5}{13}$;

б) $\frac{7}{9}:2\frac{1}{3}$;

в) $2\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}$;

г) $9\frac{4}{5}:4\frac{2}{3}$.

Вычислите значения выражений (455–456).

455. а) $\frac{16}{17}:\frac{8}{51}-\frac{3}{4}$;

б) $\frac{24}{25}:\frac{12}{15}-\frac{4}{5}$.

456. а) $\left(2\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\right):2\frac{1}{2}$;

б) $\left(3\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\right):1\frac{7}{9}$.

Решите уравнения (457–460).

457. а) $\frac{8}{19}x=\frac{3}{38}$;

б) $\frac{8}{27}x=\frac{2}{81}$.

458. а) $4\frac{1}{2}x=\frac{9}{16}$;

б) $\frac{2}{9}x=3\frac{1}{3}$.

459. а) $x:\frac{2}{7}=\frac{7}{10}$;

б) $\frac{4}{11}:x=\frac{16}{33}$.

460. а) $x:3\frac{2}{3}=1\frac{4}{11}$;

б) $8\frac{1}{6}:x=\frac{49}{54}$.



461. Заполните таблицу.

a	1	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{2}{11}$	$9\frac{1}{9}$
b	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{16}$	4	$\frac{41}{45}$
$a : b$						

462. Верно ли, что число увеличится, если разделить его на правильную дробь? Приведите примеры.

463. Значение какого выражения больше:

а) $\frac{3}{5} : \frac{1}{2}$ или $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$;

б) $\frac{6}{7} : \frac{3}{2}$ или $\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{2}$;

в) $19 : \frac{38}{45}$ или $16 : \frac{24}{31}$;

г) $2\frac{3}{5} : 1,3$ или $3,2 : 1\frac{3}{5}$?

464. Разделите $\frac{12}{13}$ м на 2, 3, 4, 5 и 6 равных частей.

465. Разделите $1\frac{5}{12}$ ч на 2, 3, 4, 5 и 6 равных частей.

466. Проволоку, длина которой равна $14\frac{1}{2}$ м, разрезали на 3 равные части. Найдите длину одной части.

467. Торт, масса которого равна 0,8 кг, разрезали на 6 равных частей. Найдите массу одной части торта.

468. Найдите длину стороны квадрата, периметр которого равен $\frac{6}{11}$ м.



Уровень В

Выполните действия (469–471).

469. а) $3 - \frac{7}{8} : 2$;

б) $1\frac{1}{4} - \frac{3}{7} : \frac{1}{2}$.

470. а) $\frac{5}{12} : 5 + \frac{1}{6} : 2$;

б) $\frac{8}{13} : 4 - \frac{3}{13} : 2$.

471. а) $2\frac{2}{3} : \frac{4}{9} + 1\frac{17}{18} : \frac{7}{9}$;

б) $4\frac{2}{3} : \frac{14}{15} - 2\frac{8}{21} : \frac{4}{7}$.

472. Найдите число, обратное:

а) сумме чисел $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{4}$;

б) их разности;

в) их произведению;

г) их частному.

473. Найдите частное от деления суммы чисел $\frac{5}{12}$ и $\frac{3}{8}$ на их разность.

474. Найдите частное от деления произведения чисел $\frac{1}{7}$ и $\frac{7}{8}$ на их сумму.

475. Вычислите значение выражения:

а) $2x - 0,4$, если $x = \frac{5}{6}$;

б) $\frac{4}{5}a + \frac{1}{3}$, если $a = \frac{3}{2}$;

в) $x^2 + 0,3$, если $x = \frac{1}{3}$;

г) $2c^2 - c$, если $c = \frac{2}{3}$.

476. Выполните действия:

а) $1\frac{1}{6} - \frac{5}{18} : 5 + 4,5 : \frac{1}{2}$;

б) $1 : 1,2 + \frac{5}{3} \cdot \left(3,7 - 1\frac{4}{5}\right)$;

в) $\left(1,75 - 1\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) : \frac{9}{16} + \frac{2}{3}$;

г) $\left(2\frac{4}{5} + 2,5\right) : \left(1,35 - \frac{8}{15}\right)$.

477. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{4}x = 1\frac{3}{4} - 0,5$;

б) $x : \frac{3}{14} = \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{3}$;

в) $\frac{3}{7} : x = 3\frac{3}{4} : 0,5 - 6\frac{1}{2}$;

г) $\left(\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{4}\right) : \frac{2}{3} = 9$.

478. Вычислите значение выражения:

а) $\frac{3}{5} : \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 1,6$;

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \frac{5}{6} + 0,6$;

в) $0,5 : \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^3 : \frac{4}{9}$;

г) $\frac{1}{5} : \left(\frac{2}{5}\right)^3 - \frac{1}{4} : 0,25$.

479. Найдите длину стороны квадрата, если она меньше периметра этого квадрата на $1\frac{1}{5}$ м.

480. Периметр шестиугольника, все стороны которого равны, равен $4\frac{1}{2}$ м. Найдите длину его стороны.

481. Площадь прямоугольника равна $\frac{8}{15}$ дм², а одна из его сторон — $\frac{2}{3}$ дм. Найдите длину другой стороны.

482. Периметр прямоугольника равен 10 м. Найдите длины его сторон, если одна из них на $\frac{1}{3}$ м длиннее другой.

483. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 1 дм³, а длины его двух ребер — $\frac{7}{8}$ дм и $\frac{4}{5}$ дм. Найдите длину третьего ребра.

484. Заполните пустые клеточки квадрата (рис. 31) так, чтобы произведения чисел каждого ряда, каждого столбика и диагоналей равнялись друг другу.

$\frac{1}{32}$		
	$\frac{1}{16}$	
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{8}$

а

$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$
	1	

б

Рис. 31

485. Задача-шутка. Если в $23\frac{1}{2}$ ч идет дождь, то можно ли надеяться, что через $23\frac{1}{2}$ ч будет солнечная погода?



Упражнения для повторения

486. Поезд движется со скоростью 65 км/ч. Какое расстояние он пройдет за 3,4 ч? За какое время он пройдет 195 км?

487. Автомобиль за 2,5 ч проходит 175 км. За какое время он пройдет 315 км?

488. Найдите стороны треугольника, если одна из них длиннее другой на 4 м, короче третьей на 4 м и на 36 м короче периметра.

489. Найдите углы треугольника, если один из них больше другого на 10° и меньше третьего на 40° .

490. На сколько длина прямоугольника больше его ширины, если ширина равна 45 см, а его площадь — 27 дм^2 ?

491*. Сколько лет Максиму, если 3 года назад он был старше сестры в 7 раз, а в прошлом году — только в 3 раза?

492*. В классе — 30 учеников. Из них 18 тренируются в секции легкой атлетики, 10 — в секции плавания, 3 — в обеих секциях. Сколько учеников класса не посещают ни одной из этих секций?

§ 14.

Задачи на умножение
и деление дробей

Умножением на дробь чаще всего решают задачи на нахождение части числа (дроби от числа или процентов от числа). Обратные им задачи (нахождение числа по известной его части или по процентам) решают делением. Все эти виды задач рассматривались в 5-м классе для десятичных дробей. Также можно решать задачи и с обыкновенными дробями.

Задача. В книге 200 страниц. Ученик прочитал $\frac{2}{5}$ книги. Сколько страниц прочитал ученик?

Решение. $200 \cdot \frac{2}{5} = 80$.

Ответ. Ученик прочитал 80 страниц.

В этой задаче 200 — данное число, 80 — его часть, которая соответствует дроби $\frac{2}{5}$.

Дробь от числа находят умножением.

$$\frac{m}{n} \text{ от } a \text{ равно } a \cdot \frac{m}{n}.$$



Обратная задача. Ученик прочитал 80 страниц, что составляет $\frac{2}{5}$ всей книги. Сколько всего страниц в книге?

§ 14. Задачи на умножение и деление дробей

Решение. Пусть в книге x страниц. Тогда

$$x \cdot \frac{2}{5} = 80, \quad x = 80 : \frac{2}{5}, \quad x = 200.$$

Ответ. В книге 200 страниц.

Число по известной дроби находят делением.

Если $\frac{m}{n}$ от x равно c , то $x = c : \frac{m}{n}$.

Рассмотренные задачи наиболее простые. Их можно решать одним действием. Несколько сложнее, например, такая задача.

Задача. В книге 200 страниц. Ученик прочитал $\frac{2}{5}$ книги.

Сколько страниц еще осталось ему прочитать?

Решение. Рассмотрим два способа.

Первый способ.

1) Сколько страниц ученик прочитал?

$$200 \cdot \frac{2}{5} = 80.$$

2) Сколько страниц осталось прочитать?

$$200 - 80 = 120.$$

Второй способ.

1) Какую часть книги осталось прочитать?

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

2) Сколько страниц осталось прочитать?

$$200 \cdot \frac{3}{5} = 120.$$

Ответ. Осталось прочитать 120 страниц.



Узнайте больше

Подобные рассмотренным выше задачам и задачи на проценты. Решая их, проценты надо заменить дробями.

Задача. Площадь поля равна 300 га. В первый день комбайнеры убрали 28 % этой площади. Сколько гектаров им осталось убрать?

Решение. Рассмотрим два способа.

Первый способ.

$$300 \cdot \frac{28}{100} = 84 \text{ (га)}, \quad 300 - 84 = 216 \text{ (га)}.$$

Второй способ.

$$100 \% - 28 \% = 72 \%, \quad 300 \cdot \frac{72}{100} = 216 \text{ (га)}.$$

Ответ. 216 га.



Проверьте себя

1. Как найти половину числа? А третью часть числа?
2. Как найти дробь от числа?
3. Как найти число, если известна его половина?
4. Как найти число по известному значению его дроби?



Выполняем вместе

① Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. Они двигались со скоростями 60 км/ч и 75 км/ч и встретились через $1\frac{1}{3}$ ч. Найдите расстояние между городами.

• *Первый способ.* За $1\frac{1}{3}$ ч один автомобиль проедет

$$60 \cdot 1\frac{1}{3} = 80 \text{ (км)}, \text{ а другой} - 75 \cdot 1\frac{1}{3} = 100 \text{ (км)},$$

$$80 \text{ км} + 100 \text{ км} = 180 \text{ км}.$$

Второй способ. За 1 ч автомобили сближались на

$$60 \text{ км} + 75 \text{ км} = 135 \text{ км}. \quad 135 \cdot 1\frac{1}{3} = 180 \text{ (км)}.$$

Ответ. 180 км.

② Один трактор может вспахать поле за 20 ч, другой – за 30 ч. За сколько часов они могут вспахать поле, работая вместе?

• Первый трактор за 1 ч может вспахать $\frac{1}{20}$ часть поля,

другой — $\frac{1}{30}$ часть поля, а вместе $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ часть.

Все поле они могут вспахать вместе за 12 ч, поскольку

$$1 : \frac{1}{12} = 12 \text{ (ч)}.$$

Задачи такого типа называют *задачами на совместную работу*.

③ На линию вышло 35 автобусов, что составляет 70 % всех автобусов автопарка. Сколько в автопарке автобусов?

• 70 % = 0,7. Если всего автобусов x , то $0,7x = 35$, $x = 35 : 0,7 = 50$.

Ответ. 50 автобусов.



Устные упражнения

493. Сколько копеек составляют $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{3}{4}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}$ гривен?

494. Сколько килограммов составляют $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{3}{4}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}$ тонны?

495. Сколько метров составляют $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{3}{4}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}$ километра?

496. Сколько минут составляет $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}$ часа?



Уровень А

497. Найдите:

а) $\frac{3}{7}$ от 350 кг; б) $\frac{3}{5}$ от 15 м; в) $\frac{5}{12}$ от 24 ч.

498. В селе 120 домов, $\frac{2}{3}$ из них — кирпичные. Сколько кирпичных домов в селе?

499. Дети собрали 130 грибов, из них $\frac{3}{13}$ — белые. Сколько белых грибов собрали дети?

500. В школьной библиотеке всего 2500 книг, $\frac{2}{5}$ из них – учебники. Сколько учебников в школьной библиотеке?

501. Чебурашка подарил крокодилу Гене 18 порций мороженого, $\frac{2}{9}$ из них – эскимо. Сколько эскимо подарил Чебурашка?

502. Учащиеся высадили возле школы 140 кустов, из них $\frac{2}{7}$ кусты розы. Сколько кустов розы высадили учащиеся?

503. Периметр треугольника равен 240 см. Найдите его основание, если оно составляет $\frac{5}{12}$ периметра треугольника.

504. У детей было 30 грн., $\frac{1}{5}$ этих денег они истратили на конфеты. Сколько денег осталось?

505. Рабочий должен изготовить 200 деталей, а изготовил $\frac{3}{4}$ запланированного количества. Сколько деталей ему осталось сделать?

506. От стометрового мотка проволоки отрезали $\frac{2}{5}$ его. Сколько метров проволоки осталось в мотке?

507. Автомобиль за 1 ч проходит 72 км. Сколько километров он проходит за $\frac{1}{3}$ ч; за $\frac{5}{6}$ ч; за 1 мин; за 15 мин?

508. Площадь одного поля равна 27 га, а другого – в $2\frac{1}{3}$ раза больше. Найдите площадь другого поля.

509. Вычислите высоту горы Ай-Петри, если она составляет $\frac{3}{5}$ высоты Говерлы, а высота Говерлы – 2060 м.

510. Цена одной книги равна $\frac{3}{2}$ цены другой. Сколько стоят эти книги вместе, если книга с меньшей ценой стоит 3,2 грн.?

511. Одна бригада может заасфальтировать дорогу за 6 недель, другая – за 3 недели. За сколько недель заасфальтируют эту дорогу обе бригады, работая вместе?

512. Мастер может выполнить определенную работу за полчаса, а ученик – за 70 мин. За какое время они смогут выполнить ее, работая вместе?

513. Сколько градусов составляют $\frac{3}{5}$ прямого угла (рис. 32)?

514. На сколько градусов $\frac{5}{9}$ развернутого угла больше чем $\frac{5}{9}$ прямого угла?

515. $\frac{2}{5}$ части сплава – медь. Сколько меди в 35 кг такого сплава?

516. $\frac{3}{25}$ массы раствора – соль. Сколько соли содержится в 5 кг такого раствора?

517. Телевизор стоит 1080 грн., а видеомэгнитофон – $\frac{1}{4}$ стоимости телевизора. Во сколько раз видеомэгнитофон дешевле телевизора?

518. Компьютер стоит 3000 грн., принтер – $\frac{2}{15}$ его стоимости, а сканер – $\frac{4}{5}$ стоимости принтера. Сколько стоят все эти предметы вместе?

519. На сколько треть числа 120 меньше его половины?

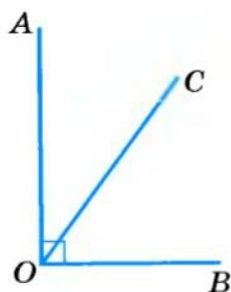


Рис. 32



Уровень В

520. На сколько $\frac{3}{5}$ числа $\frac{2}{3}$ больше числа $\frac{3}{20}$?

521. На сколько $\frac{3}{5}$ числа $\frac{2}{3}$ больше, чем $\frac{3}{20}$ его?

522. Из одного села в одном направлении одновременно выехали два велосипедиста со скоростями 12 км/ч и 14 км/ч.

Какое расстояние между ними будет через $\frac{1}{4}$ ч? А через $1\frac{3}{4}$ ч?

523. Два поезда движутся навстречу друг другу со скоростями 60 км/ч и 56 км/ч. Расстояние между ними – 85 км. Какое будет расстояние между поездами через $\frac{1}{4}$ ч?

А через $\frac{3}{8}$ ч?

524. Мотоциклист догоняет велосипедиста. Они движутся со скоростями 36 км/ч и 14 км/ч. Расстояние между ними 25 км. Какое будет расстояние между ними через $\frac{10}{11}$ ч?

525. Скорость катера в стоячей воде равна 18 км/ч, а скорость течения реки – $1\frac{2}{3}$ км/ч. Сколько километров пройдет катер против течения за полтора часа?

526. Катер шел $\frac{3}{5}$ ч по течению и $1\frac{1}{2}$ ч против течения реки. Какое расстояние прошел катер за все это время, если его скорость в стоячей воде равна 24 км/ч, а скорость течения – $2\frac{1}{2}$ км/ч?

527. Найдите число:

а) $\frac{2}{3}$ которого составляют 35 % числа 60;

б) $\frac{3}{5}$ которого составляют 12 % числа 0,5.

528. Одна сеялка может засеять поле за 26 ч, другая – за 39, третья – за 52 ч. За сколько часов засеют это поле три сеялки, работая вместе?

529. Две бригады, работая вместе, выполняют определенное задание за 20 рабочих дней, первая бригада – за 36 рабочих дней. За какое время это задание смогла бы выполнить вторая бригада?

530. Периметр прямоугольника равен $1\frac{1}{2}$ м. Найдите длину его основания, если оно в два раза длиннее высоты прямоугольника.

531. На сколько $6\frac{1}{2}$ % числа 3000 больше $2\frac{1}{6}$ % этого числа?

532. У ученика было 6 грн. $20\frac{2}{3}\%$ денег он уплатил за обед. Сколько денег осталось у ученика?

533. Морская вода содержит $3\frac{2}{5}\%$ соли. Сколько соли растворено в 10 кг морской воды?

534. Сторона квадрата равна 5 дм. Как изменится его площадь, если каждую его сторону увеличить на $\frac{1}{5}\%$?

535. Товар стоит 350 грн. Сколько он будет стоить после того, как его цена:

- а) увеличится на $3\frac{1}{2}\%$; б) уменьшится на $5\frac{1}{5}\%$?

536. Ширина прямоугольника равна 36 см, что составляет $\frac{4}{7}$ его длины. Найдите площадь прямоугольника.

537. Длина прямоугольника равна 49 см, что составляет $\frac{7}{5}$ его ширины. Найдите периметр прямоугольника.

538. В первый день комбайнер ско-
сил 24 га пшеницы, что составляет $\frac{1}{5}$

часть пшеничного поля (рис. 33).
Сколько на этом поле осталось еще
нескошенной пшеницы?

539. Магазин продал 870 кг картофеля,
что составляет 60 % всего завезенного
картофеля. Сколько непроданного
картофеля осталось в магазине?

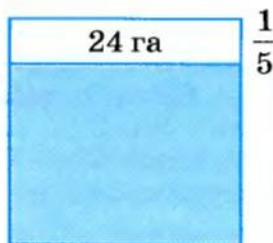


Рис. 33

540. После того как ученик истратил $\frac{2}{9}$ всех своих денег,
у него осталось 2,1 грн. Сколько денег было у ученика
сначала?

541. Проехав $\frac{2}{5}$ расстояния от пункта А до В, водитель под-
считал, что ехать ему до В осталось на 52 км больше, чем он
уже проехал. Найдите расстояние между пунктами А и В.

542. Один повар может слепить 100 вареников за 40 мин,
а второй – за 1 ч. За какое время могут слепить 100 варе-
ников оба повара, работая вместе?

543. Одна труба может заполнить резервуар водой за 2 ч, а другая – за 3 ч (рис. 34). За сколько часов наполнится резервуар, если открыть обе трубы?

544. После того как тракторист вспахал 12 % всего поля, не вспаханнкими остались 110 га. Найдите площадь всего поля.

545. При варке мясо теряет примерно 36 % своей массы. Сколько надо взять сырого мяса, чтобы получить 1 кг вареного?

546. При сушке сливы теряют 88 % своей массы. Сколько надо взять свежих слив, чтобы получить 30 кг сушеных?

547. Сберегательный банк выплачивает своим вкладчикам 12 % годовых. Сколько денег надо положить в банк, чтобы через год получить 162 грн. прибыли?

548. Автобусы составляют 30 % всех машин автопарка, грузовые машины – 40 % остатка. Остальные 42 машины – легковые. Сколько всего машин в автопарке?

549. Один тракторист вспахал 40 % поля, второй – 35 % поля, третий – остальные 90 га. Найдите площадь всего поля.

550. После того как цену телевизора снизили на 15 %, он стал стоить 850 грн. Сколько стоил этот телевизор до снижения цены?

551. Сначала товар стоил 180 грн. Через некоторое время его цену повысили на 20 %, а потом снизили на 10%. Какой стала цена товара после этих двух переоценок?

552. Бригада косарей в первый день скосила половину луга и еще 2 га, во второй – 25 % оставшейся части и еще остальные 6 га. Найдите площадь луга. Воспользуйтесь рисунком 35 и решите задачу устно.

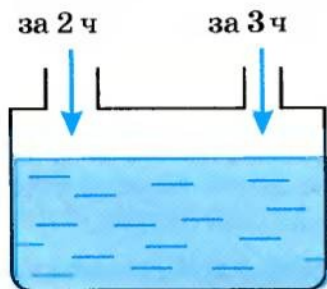


Рис. 34

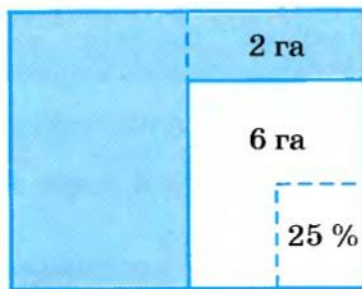


Рис. 35

553. Один комбайнер скосил 30% пшеничного поля, второй – 40% остатка, а третий – на 28 га больше, чем второй. Найдите площадь всего поля.



Упражнения для повторения

554. Сравните числа:

а) $0,3$ и $\frac{1}{3}$; б) $0,35$ и $\frac{3}{5}$; в) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$.

555. Вычислите:

а) $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3} + 0,35$; в) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$.

556. Решите уравнение:

а) $2,4x + 1,8 = 7,8$; б) $35,7 - 4x = 0,1$.

557. Запишите в виде десятичной дроби: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{20}$.558. На сколько сумма чисел $3,89$ и $2,98$ больше их разности?559. На сколько сумма чисел $0,2$ и $0,3$ больше суммы их квадратов?560. На сколько квадрат суммы чисел $1,5$ и $0,6$ больше суммы их квадратов?561. Во сколько раз площадь квадрата со стороной $1,5$ см меньше площади квадрата со стороной 15 см?

§15.

Преобразование обыкновенных дробей в десятичные

Как преобразовывать десятичные дроби в обыкновенные, вы уже знаете. А преобразовывать обыкновенные дроби в десятичные? Из того что дробь $\frac{a}{b}$ — это частное

$a : b$, вытекает такое правило преобразования обыкновенной дроби в десятичную.

Чтобы преобразовать обыкновенную дробь в десятичную, достаточно ее числитель разделить на знаменатель.



Преобразуем, например, в десятичную дробь $\frac{7}{25}$. Разде-

лив 7 на 25 , получим $0,28$. Следовательно, $\frac{7}{25} = 0,28$.

Можно поступить иначе: умножить числитель и знаменатель данной дроби на такое число, чтобы знаменатель стал числом, записанным единицей с нулями. Например,

$$\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{15}{100} = 0,15.$$

Не каждую обыкновенную дробь можно преобразовать в десятичную. Попробуем, например, преобразовать в десятичную дробь $\frac{2}{3}$. Делить 2 на 3 можно бесконечно,

поскольку остаток 2 периодически повторяется. В результате получим бесконечную периодическую десятичную дробь $\frac{2}{3} = 0,666... \text{ (рис. 36).}$

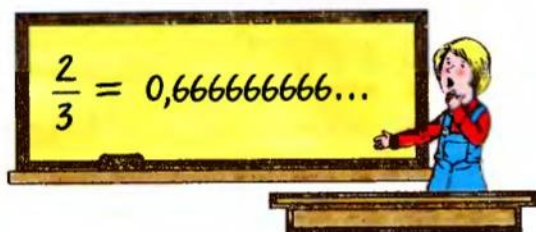


Рис. 36

Бесконечную периодическую десятичную дробь 0,666... короче записывают так: 0,(6). Читают: «0 целых 6 в периоде». А бесконечную периодическую десятичную дробь 1,2333... записывают 1,2(3) и читают «1 целая 2 десятых и 3 в периоде». Цифру или группу цифр, которые повторяются, называют *периодом* периодической десятичной дроби.

Выполнять действия над бесконечными десятичными дробями неудобно, поэтому их округляют, отбрасывая «хвосты» цифр. Подробнее об этом – в следующем параграфе.

Как узнать, превращается ли данная обыкновенная дробь в десятичную или в бесконечную десятичную дробь? Если дробь сократима, то ее надо сначала сократить. Если разложение знаменателя несократимой дроби содержит только простые множители 2 и 5, то такая обыкновенная дробь преобразуется в конечную десятичную дробь. Потому что члены этой дроби можно умножить на такое число, что знаменателем станет число, записанное единицей с нулями. Например,

$$\frac{3}{50} = \frac{3}{2 \cdot 5^2} = \frac{3 \cdot 2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{6}{100} = 0,06.$$

§ 15. Преобразование обыкновенных дробей в десятичные

Если в разложении на простые множители знаменателя несократимой дроби есть простые множители, отличные от 2 и 5, то такая дробь преобразуется в бесконечную периодическую десятичную дробь.



Узнайте больше

Бесконечные периодические десятичные дроби бывают двух видов: чистые и смешанные. Чистые – это те, у которых период начинается сразу же после запятой, например $0,333\ldots$ или $21,424242\ldots$.

Дробная часть чистой бесконечной периодической десятичной дроби равна обыкновенной дроби, в которой числитель равен периоду, а знаменатель – числу, записанному столькими девятками, сколько цифр в периоде. Например,

$$0,3333\ldots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}; \quad 21,45454545\ldots = 21\frac{45}{99} = 21\frac{5}{11}.$$

Более подробно бесконечные периодические десятичные дроби изучаются в старших классах.



Проверьте себя

1. Как преобразовать десятичную дробь в обыкновенную?
2. Как преобразовать обыкновенную дробь в десятичную?
3. Каждую ли обыкновенную дробь можно преобразовать в конечную десятичную дробь?
4. Какие обыкновенные дроби преобразуются в конечные десятичные дроби?
5. Каждая ли обыкновенная дробь преобразуется в конечную десятичную или в бесконечную периодическую десятичную дробь?
6. Что такое период бесконечной периодической десятичной дроби?



Выполняем вместе

- ① Преобразуйте в десятичную дробь $\frac{13}{50}$.

• Первый способ. $13 : 50 = 0,26$.

Второй способ. $\frac{13}{50} = \frac{13 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{26}{100} = 0,26$.

② Запишите в виде десятичной дроби число $3\frac{7}{40}$.

• *Первый способ.* Поделите 7 на 40. $7 : 40 = 0,175$.
Поэтому $3\frac{7}{40} = 3,175$.

Второй способ. $\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 25}{8 \cdot 5 \cdot 25} = \frac{175}{1000} = 0,175$.
Поэтому $3\frac{7}{40} = 3,175$.



Устные упражнения

562. Прочитайте числа: 0,7; 2,(3); 0,(21); 4,2(6); 3,45(61).

563. Какие из обыкновенных дробей $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{9}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{26}{25}, \frac{3}{16}$ преобразуются в конечные десятичные дроби, а какие – в бесконечные периодические?

564. Какие из смешанных чисел $3\frac{1}{2}, 2\frac{3}{5}, 12\frac{1}{4}, 4\frac{1}{3}, 2\frac{5}{6}, 1\frac{1}{7}$ преобразуются в конечные десятичные дроби, а какие – в бесконечные периодические?



Уровень А

565. Запишите обыкновенной дробью число:
0,5; 0,13; 0,39; 1,2; 2,75; 12,3; 3,08; 11,11.
Преобразуйте в десятичные дроби (566 – 569).

566. $\frac{3}{10}, \frac{17}{10}, \frac{9}{100}, \frac{103}{100}, \frac{5}{1000}, \frac{7}{20}, \frac{3}{50}, \frac{17}{50}$.

567. $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{2}{4}, \frac{15}{25}, \frac{18}{12}, \frac{10}{25}, \frac{4}{8}$.

568. $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{5}, 3\frac{2}{5}, 1\frac{3}{4}, 4\frac{1}{25}, 1\frac{3}{55}, 5\frac{1}{8}, 7\frac{3}{8}$.

569. $\frac{3}{6}, \frac{6}{15}, \frac{9}{12}, \frac{9}{18}, \frac{9}{6}, \frac{18}{15}, \frac{45}{36}, \frac{14}{35}, 2\frac{3}{6}$.



§ 15. Преобразование обыкновенных дробей в десятичные

Выполните действия, предварительно преобразовав обыкновенные дроби в десятичные (570–572).

570. а) $\frac{1}{4} + 0,75$; б) $\frac{3}{5} + 0,4$; в) $\frac{1}{5} + 0,8$.

571. а) $3\frac{1}{2} - 0,5$; б) $4\frac{2}{5} - 0,2$; в) $5,3 - 2\frac{1}{5}$.

572. а) $\frac{7}{20} + 1,05$; б) $2,4 - \frac{3}{25}$; в) $4,125 - 2\frac{1}{8}$.

573. Длина прямоугольника равна $2\frac{1}{4}$ м, а ширина – на 1,5 м меньше. Найдите периметр прямоугольника.

574. Скорость катера в стоячей воде равна 27,5 км/ч, скорость течения реки – $2\frac{3}{5}$ км/ч. Найдите скорость катера по течению реки и против течения.

575. Найдите полусумму чисел:

а) 3,4 и $\frac{3}{5}$; б) 0,02 и $\frac{9}{50}$.



Уровень Б

576. Запишите десятичной дробью число:

а) $3\frac{7}{25}$; б) $12\frac{1}{16}$; в) $\frac{126}{125}$; г) $\frac{17}{32}$.

577. Запишите в виде бесконечной десятичной дроби:

а) $\frac{4}{15}$; б) $\frac{11}{12}$; в) $\frac{25}{24}$; г) $1\frac{1}{18}$.

578. Найдите полусумму чисел:

а) $1\frac{3}{4}$ и 2,25; б) $2\frac{1}{8}$, $3\frac{3}{4}$ и 5,125.

579. Найдите среднее арифметическое чисел:

а) 4,25 и $2\frac{1}{4}$; б) $3\frac{2}{5}$, $2\frac{3}{20}$ и 1,15.

580. На сколько сумма чисел $3\frac{7}{8}$ и 2,25 больше их полуразности?

581. Шнур длиной $3\frac{5}{6}$ м разрезали на две части так, что одна оказалась на полметра длиннее другой. Найдите длину большей части.

582. Из пунктов A и B , расстояние между которыми $9\frac{3}{4}$ км,

одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода и встретились через 40 мин. Найдите скорость одного из них, если скорость другого равна 5,1 км/ч.

583*. Преобразуйте в обыкновенную дробь бесконечную периодическую десятичную дробь:

- а) 0,(4); б) 3,(8); в) 0,(21); г) 8,0(3).



Упражнения для повторения

584. Сравните значения выражений $(3,7 - 1,5) : 4,4$ и $16 - 1,3^2$.

585. Решите уравнение:

- а) $2,5x = 4,8$; б) $43 - 2,4x = 13$; в) $x : 2,5 = 1,4$.

586. Найдите значение выражения $a + 1 : a$, если $a = 4$; $a = 0,25$.

587. Периметр равнобедренного треугольника равен 63 см. Найдите его основание, если длина его на 3 см больше длины боковой стороны.

588. Периметр равнобедренного треугольника равен 40 см. Найдите его боковую сторону, если ее длина на 5 см больше длины основания.

589. Найдите меры углов треугольника, если один из них равен сумме двух других и на 30° больше третьего.

590. Компьютер стоит 1500 грн. Сколько он будет стоить, если цена снизится на 10 % ?

591*. Ни одни из трех часов, изображенных на рисунке 37, не идут точно. Одни отстают на полчаса, другие спешат на 40 мин, а третьи давно не работают. Сколько времени сейчас?



Рис. 37

§ 16.

Приближенные значения и действия с ними

Сколько людей живет в Киеве? Назвать точное число жителей Киева невозможно, ведь каждый день сотни людей приезжают, сотни отъезжают, кто-то рождается, а кто-то умирает. Сейчас в Киеве примерно 2,6 млн человек. И когда измеряют длины, площади, объемы, температуру, время, скорости и другие величины, то их значения тоже приближенные. При округлении бесконечных десятичных дробей тоже получают их *приближенные значения*.

Например, зная, что $\frac{2}{3} = 0,6666\dots$, пишут $\frac{2}{3} \approx 0,667$.

Здесь 0,667 – десятичное приближение числа $\frac{2}{3}$ до тысячных. Подобные приближенные значения величин (приближенные числа) приходится складывать, вычитать, умножать, делить. Понятно, что и результаты таких действий приближенные.

Выполняя действия с приближенными числами, желательно придерживаться определенных правил. Самые простые из них – правила подсчета цифр. Здесь идет речь о десятичных знаках и значащих цифрах.

Десятичными знаками числа называют все его цифры, какие стоят справа от десятичной запятой. *Значащие* цифры числа – все его цифры, кроме нулей слева, а также кроме нулей справа, записанных вместо цифр, отброшенных при округлении. Например, в числе 0,00476 – пять десятичных знаков и три значащие цифры. Когда пишут, что диаметр планеты Венера равен 12 400 км, то в этом числе десятичных знаков нет, а значащих цифр три: 1, 2 и 4. Два последние нуля стоят вместо цифр, отброшенных при округлении.

Как выполнять действия с приближенными числами? Пусть, например, надо найти сумму приближенных чисел 3,24 и 2,5. Если бы эти значения были точными, то их сумма равнялась бы 5,74. Но они приближенные, то есть получены в результате отбрасывания последующих неизвестных цифр, которые обозначим вопросительными знаками. Следовательно, имеются в виду 3,24? и 2,5?. Найдём сумму и разность этих чисел:

$$\begin{array}{r} + 3,24? \\ 2,5? \\ \hline 5,7?? \end{array} \quad \begin{array}{r} - 3,24? \\ 2,5? \\ \hline 0,7?? \end{array}$$

Рассматривая подобные примеры, приходим к такому правилу.



В данных примерах наименьше десятичных знаков имеет число 2,5. У него всего один десятичный знак. Поэтому полученные сумму и разность нужно записывать с одним десятичным знаком: $3,24 + 2,5 \approx 5,7$; $3,24 - 2,5 \approx 0,7$.

Умножим эти же приближенные числа 3,24? и 2,5?:

$$\begin{array}{r} \times 3,24? \\ 2,5? \\ \hline ???? \\ 1620? \\ 648? \\ \hline 8,1???? \end{array}$$



Подобным правилом пользуются также и при делении приближенных чисел. Итак, если числа 3,24 и 2,5 – приближенные, то $3,24 \cdot 2,5 \approx 8,1$; $3,24 : 2,5 \approx 1,3$.

Приведенные выше правила называют *правилами подсчета цифр*. Они не обеспечивают высокой точности вычислений, но для большинства практических применений такой точности вполне достаточно.



Проверьте себя

1. Что такое десятичные знаки числа?
2. Какие цифры называют значащими?
3. Назовите десятичные знаки и значащие цифры числа 0,308.

4. Сформулируйте правила сложения и вычитания приближенных чисел.
5. Сформулируйте правила умножения и деления приближенных чисел.



Выполняем вместе

- ① Найдите приближенное значение числа $\frac{5}{12}$ до тысячных.

• Разделив 5 на 12, имеем бесконечную периодическую десятичную дробь $0,41666\dots$

Следовательно, $\frac{5}{12} \approx 0,42$ – округлено до сотых;

$\frac{5}{12} \approx 0,417$ – округлено до тысячных.

- ② Найдите периметр и площадь прямоугольника со сторонами a и b , если $a \approx 8,52$ см, $b \approx 12,2$ см.

• $P = (a + b) \cdot 2$; $S = a \cdot b$.

$P = (8,52 + 12,2) \cdot 2 = 20,72 \cdot 2 = 41,44 \approx 41,4$ (см).

$S = 8,52 \cdot 12,2 = 103,944 \approx 104$ (см²).



Устные упражнения

592. Округлите до десятков, сотен, тысяч число:

а) 28 532; б) 63 082,7.

593. Округлите до десятых, сотых, тысячных число:

а) 0,2222...; б) 3,7777...; в) 5,(3); г) 4,0(38).



Уровень А

594. Дробь $\frac{9}{11}$ преобразуйте в десятичную и округлите ее до сотых, тысячных.

595. Найдите десятичное приближение до сотых:

а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{11}$; в) $1\frac{5}{9}$; г) $8\frac{1}{12}$.

596. Вычислите значение выражения, округлив до сотых:

а) $3,5 + \frac{2}{3}$; б) $\frac{12}{15} - 0,235$; в) $3,7 + \frac{4}{9}$.

597. Вычислите, округлив до тысячных:

а) $6,7569 + \frac{5}{6}$; б) $2\frac{1}{3} - 0,3747$; в) $3,1807 - 1\frac{3}{17}$.

598. Найдите сумму приближенных чисел:

а) 32,5 и 9,437; б) 0,234 и 1,72.

599. Найдите разность приближенных чисел 34,256 и 21,8.



Уровень Б

600. Найдите сумму, произведение и частное приближенных чисел:

а) 2,31 и 1,407; б) 5,321 и 0,04; в) 127,5 и 0,012.

601. Найдите периметр и площадь прямоугольника, длины сторон которого имеют такие приближенные значения:

а) 3,41 м и 2,85 м; б) 5,8 дм и 4,25 дм.

602*. Найдите периметр и площадь прямоугольника, стороны которого равны x и y , если $2,8 < x < 2,9$ и $4,3 < y < 4,4$ (все размеры – в сантиметрах).

603. Найдите корень уравнения, округлив его до сотых:

а) $6x = 19$; б) $11y = 5$; в) $12c = 7$; г) $0,6x = 1,3$.

604. Практическое задание. Выполнив необходимые измерения, вычислите площадь обложки учебника по математике. Со сколькими значащими цифрами надо записать ответ?



Упражнения для повторения

605. Найдите значение выражения:

а) $8,3a - 4$, если $a = 2,83$;

б) $0,28c + 0,3$, если $c = 1,04$;

в) $15,7x - 2,1$, если $x = 3,24$.

606. Какие натуральные значения x удовлетворяют неравенству:

а) $0,8 < x < 17,8$;

б) $3,78 < x < 12,3$;

в) $4 < 2x < 15$?

607. Найдите 35 % от:

а) 34 км; б) 86 кг;

в) 320 га; г) 83,4 грн.

608. Найдите острые углы прямоугольного треугольника (рис. 38), если один из них:



Рис. 38

- а) в два раза больше другого;
 б) на 50 % больше другого.

609. Сколько гектаров имеет поле прямоугольной формы, если его периметр равен 0,6 км, а одна из сторон в два раза длиннее другой?



Самостоятельная работа 3

Вариант 1

1°. Вычислите:

а) $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7}$; б) $1\frac{2}{5} : \frac{7}{15}$; в) $3,2 - \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$.

2°. Решите уравнение:

а) $\frac{2}{3}x = 46$; б) $1 - \frac{x}{5} = 0,5$.

3°. На сколько $\frac{2}{3}$ числа 450 больше 15 % числа 480?

4°. Найдите число, 80 % которого равны $\frac{3}{5}$.

5°. Сторона квадрата меньше его периметра на $2\frac{2}{5}$ м.

Найдите площадь квадрата.

Вариант 2

1°. Вычислите:

а) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}$; б) $2\frac{1}{3} : \frac{7}{9}$; в) $2,4 - \frac{3}{5} : \frac{2}{5}$.

2°. Решите уравнение:

а) $\frac{3}{4}x = 18$; б) $1,3 - \frac{x}{5} = 1$.

3°. На сколько 45 % числа 120 больше $\frac{1}{7}$ числа 210?

4°. Найдите число, 75 % которого равны $\frac{1}{2}$.

5°. Периметр квадрата больше его стороны на $2\frac{1}{4}$ м.
 Найдите площадь квадрата.

Вариант 3

1°. Вычислите:

а) $1,2 \cdot \frac{5}{8}$; б) $2,1 : 1\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} : \frac{7}{15}$.

2°. Решите уравнение:

а) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{3} = 2$; б) $\frac{1}{3}(x-2) = 0,5$.

3°. На сколько $\frac{3}{400}$ числа 260 меньше, чем 120 % числа 2,4?4°. Найдите число, $3\frac{1}{3}\%$ которого равны $\frac{1}{2}$.5°. Ширина прямоугольника равна $2\frac{5}{6}$ м, что составляет $\frac{2}{3}$ его длины. Найдите площадь прямоугольника.**Вариант 4**

1°. Вычислите:

а) $2\frac{6}{7} \cdot 1,4$; б) $5\frac{1}{2} : 2,2$; в) $\frac{5}{12} - \frac{3}{7} : 1\frac{13}{14}$.

2°. Решите уравнение:

а) $1,25x - 3 = \frac{1}{8}$; б) $\frac{3}{4}(x+2) = 2,4$.

3°. На сколько 3,5 % числа 32 меньше, чем $\frac{3}{5}$ числа $3\frac{1}{3}$?4°. Найдите число, $2\frac{2}{3}\%$ которого равны $\frac{6}{25}$.5°. Длина прямоугольника равна $3\frac{1}{3}$ м, что составляет $\frac{5}{4}$ его ширины. Найдите площадь прямоугольника.

Готовимся
к тематическому контролю

**Вопросы для самопроверки**

1. Сформулируйте правило умножения?
2. Как умножить смешанные числа?
3. Какие числа называют взаимно обратными?

4. Сформулируйте правило деления обыкновенных дробей.
5. Как разделить дробь на натуральное число? Натуральное число на дробь?
6. Как найти дробь от числа?
7. Как найти число по известной дроби?
8. Как найти несколько процентов от числа?
9. Как найти число, если известны его проценты?
10. Приведите пример бесконечной периодической десятичной дроби.
11. Как можно получить число $0,6666\dots$?
12. Как обыкновенные дроби преобразовать в десятичные?
13. Сформулируйте правила сложения и вычитания приближенных значений.

Задания в тестовой форме

1. Вычислите произведение $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{7}$.
 а) $4\frac{1}{5}$; б) $2\frac{1}{10}$; в) $\frac{14}{15}$; г) $1\frac{1}{14}$.
2. Чему равен квадрат числа $\frac{3}{4}$?
 а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{9}{16}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{6}{8}$.
3. Вычислите объем куба, ребро которого равно $1\frac{1}{2}$ см.
 а) $\frac{27}{8}$ см; б) $1\frac{1}{8}$ см³; в) $1\frac{1}{4}$ см; г) $3\frac{3}{8}$ см³.
4. Назовите число, обратное числу $\frac{6}{8}$.
 а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{8}{6}$; г) $\frac{5}{7}$.
5. Найдите частное $\frac{3}{8} : \frac{1}{12}$.
 а) $4\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $4\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{32}$.
6. Какой знак надо поставить вместо звездочки в записи $\left(\frac{1}{2}\right)^3 * \left(\frac{1}{2}\right)^2$?
 а) «>»; б) «=»; в) «<»; г) «≥».

7. Чему равна $\frac{1}{12}$ развернутого угла?

- а) 17° ; б) 15° ; в) 20° ; г) 14° .

8. Запишите десятичной дробью число $4\frac{1}{4}$.

- а) 4,4; б) 4,14; в) 4,25; г) 0,425.

9. Найдите десятичное приближение до сотых числа $\frac{7}{9}$.

- а) 0,77; б) 0,88; в) 0,78; г) 0,8.

Типовые задачи

1°. Вычислите:

- а) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$; б) $\frac{3}{4} : \frac{7}{9}$.

2°. Преобразуйте в десятичную дробь:

- а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{21}{5}$.

3°. Найдите $\frac{3}{4}$ числа 120.

4°. Решите уравнение:

- а) $3x = \frac{3}{4}$; б) $\frac{3}{5}x = 15$.

5°. Юбка стоит 50 грн. и составляет $\frac{2}{5}$ стоимости всего костюма. Сколько стоит костюм?

6°. Выполните действия:

- а) $4\frac{1}{4} : 6\frac{3}{8}$; б) $3\frac{3}{8} \cdot 64$.

7°. Найдите значение выражения:

- а) $12\frac{8}{9} : 3\frac{2}{9} - 3\frac{2}{9}$; б) $\left(1\frac{3}{4} - 0,6\right) \cdot 1\frac{7}{23}$.

8°. По лыжной трассе в одном направлении идут два лыжника. Сейчас расстояние между ними 3,4 км. Скорость лыжника, идущего спереди, равна $9\frac{1}{3}$ км/ч, что составляет

70 % скорости лыжника, идущего сзади. Через какое время второй лыжник догонит первого?



Исторические сведения

Дробные числа в Египте были известны еще 4000 лет назад. Записывали их тогда только единичными дробями (такими, числители которых равны 1) или суммами единичных дробей. Например, вместо современных $\frac{2}{5}$ и $\frac{2}{13}$

египтяне писали $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ и $\frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$.

Приводим одну задачу с папируса Ахмеса (XVI в. до н. э.): «Надо поровну разделить 7 буханок хлеба между 8 людьми». Сейчас мы записали бы, что каждому человеку надо дать $\frac{7}{8}$ бухан-

ки. А в папирусе дан иной ответ:

$$\left\langle \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \text{ буханки} \right\rangle.$$

Египтяне обозначали дроби, как показано на рисунке 39.

В Вавилоне 4000 лет назад использовали единичные дроби со знаменателями 60 , 60^2 , 60^3 . Со временем такие дроби использовали астрономы, поэтому их называли астрономическими дробями.

Древнегреческие математики рассматривали числа, которые сейчас записывают в виде дробей $\frac{m}{n}$, но называли

их отношениями. И читали их не так, как теперь. Например, Эратосфен (III в. до н. э.) писал не « $\frac{11}{83}$ меридиана», а «11 таких частей, каких весь меридиан содержит 83».

Римляне пользовались дробями со знаменателем 12, которые называли унциями. Когда говорили «5 унций» или «13 унций», то имели в виду $\frac{5}{12}$ или $\frac{13}{12}$.

Индийские математики обыкновенные дроби вида $\frac{m}{n}$, например $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{8}$ и другие, рассматривали еще в IV в. до н. э.

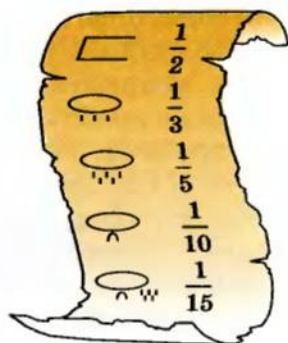


Рис. 39

В VII в. они формулировали правила действий: «Произведение дробей – это произведение числителей, разделенное на произведение знаменателей» и др. А вот арабам обыкновенные дроби не нравились. Они писали, что дроби

вида $\frac{m}{n}$ плохие, поэтому «деловые люди не любят таких

дробей и выражают их суммами долей (единичных дробей)».

В Киевской Руси наиболее известным вычислителем был монах Кирик. Он вычислял, используя единичные дроби со знаменателями 12, 60, 300, 1500, 7500, 37 500, 187 500, 937 500. Писал, что «более сего не бывает».

Дроби, отличные от единичных, в европейских учебниках появились только с XVIII в. Их изучение считалось очень неприятным делом. Появилась даже поговорка: «Попал в дроби» (то есть попал в переделку). Обыкновенные дроби тогда называли «ломаными числами».

Слова «числитель» и «знаменатель» впервые появились в XIII в., «сокращение дробей» и «приведение дробей к общему знаменателю» – в XV в., а «правильные» и «неправильные» дроби – в XVIII в. Чтобы разделить дробь на дробь, раньше обязательно приводили их к общему знаменателю, а потом числитель одной дроби делили на числитель другой.

В Украине тоже сначала использовали только единичные дроби. Еще и сейчас дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ называют «половиной»,

«третью», «четвертиной», а в начале XX в. украинцы говорили «пяти́на», «восьми́на», «девяти́на», «десяти́на».

Числа $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$ называли соответственно: «полтора́», «полтрéтья», «полпята́я», «полшестая́», «полседьмая́», «полдевя́тая».

Индийские авторы, изображая обыкновенные дроби, знаменатель писали под числителем, но без черты дроби. Черта дроби введена была только в XVI в. С середины XIX в. некоторые авторы предлагали записывать обыкновенные дроби в одну строку m/n . Такая форма записи особенно удобна для печатных аппаратов и вычислительных машин. Но пока что она не стала общепринятой.



Главное в разделе 2

Обыкновенная дробь $\frac{a}{b}$ – это частное при делении натуральных чисел a и b . Числитель a и знаменатель b вместе называют членами дроби. Дальше вместо *обыкновенная дробь* будем писать короче: *дробь*.

Дробь называют **правильной**, если ее числитель меньше знаменателя. Все другие дроби – **неправильные**. Значение каждой правильной дроби меньше 1, а неправильной – больше или равно 1. Из неправильной дроби можно выделить целую часть и записать в виде смешанного или натурального числа.

Например, $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$; $\frac{21}{7} = 3$.

Основное свойство дроби. Значение дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля. Используя это свойство, дроби можно сокращать или приводить к общему знаменателю.

Дробь называют несократимой, если ее числитель и знаменатель – взаимно простые числа.

Дроби с равными знаменателями складывают и вычитают согласно формулам:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}, \quad \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

Чтобы найти сумму или разность дробей с разными знаменателями, их сначала приводят к общему знаменателю.

Чтобы умножить дробь на дробь, надо отдельно умножить их числители и их знаменатели и первое произведение записать числителем, а второе – знаменателем произведения данных дробей.

Две дроби называют **взаимно обратными**, если их произведение равно 1.

Чтобы разделить одну дробь на другую, надо первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Всегда верны равенства:

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{cn}, \quad \frac{a}{c} : \frac{m}{n} = \frac{a}{c} \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{cm}.$$

Чтобы преобразовать обыкновенную дробь в десятичную, надо ее числитель разделить на знаменатель. При этом может образоваться или десятичная дробь, или бесконечная периодическая десятичная дробь. Например,

$$\frac{3}{4} = 0,75; \quad \frac{5}{3} = 1,66666... = 1,(6).$$

Отношения и пропорции



Математика — наука молодых.

Н. Винер

В этом разделе речь идет о вещах, уже известных вам. Отношение – это частное, пропорция – равенство двух отношений. Например, $a : c$ – отношение, $a : c = m : n$ – пропорция. Но теперь обратим внимание на такие свойства частного и равенства двух частных, какие раньше не рассматривали. А еще введем новые термины: *отношение, пропорция, вероятность* и другие. Основное содержание раздела такое.

- Основное свойство отношения.
- Вероятность случайного события.
- Пропорции.
- Процентное отношение.
- Пропорциональные величины.
- Окружность, круг, диаграммы.

Эти темы важны не только для математики и других наук, они часто используются в практической деятельности миллионов людей.

§17.

Отношения

Частное от деления одного числа на другое называют также *отношением* этих чисел. Записывают отношение с помощью двоеточия или черты дроби. Примеры отношений:

$$3 : 5; \quad \frac{43}{54}; \quad 2,7 : 0,4; \quad \frac{3}{7} : \frac{4}{8}.$$



$\frac{3}{4}$ – это и дробь «три четвертых», и «частное от деления 3 на 4», и «отношение чисел 3 и 4». Поскольку отношение $m : n$ – это

то же самое, что и дробь $\frac{m}{n}$, а к каждой дроби можно применить основное свойство дроби, поэтому это свойство верно и для каждого частного, и для отношения.

Основное свойство отношения
Отношение двух чисел не изменится, если каждое из них умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.



Используя это свойство, отношения можно упрощать.

Оба члена отношения можно разделить на их общий делитель. Например, отношение $3000 : 5000$ можно заменить равным ему отношением $3 : 5$.

Отношение дробных чисел можно заменить отношением натуральных чисел.

Для этого надо данные дроби привести к общему знаменателю и отбросить его. Например, $\frac{8}{9} : \frac{5}{6} = \frac{16}{18} : \frac{15}{18} = 16 : 15$.

Одним из примеров использования отношений является масштаб. Если, например, на географической карте указан масштаб $1 : 5\,500\,000$, то это означает, что все расстояния на карте в $5\,500\,000$ раз меньше соответствующих расстояний на земной поверхности. То есть одному сантиметру на карте соответствует $5\,500\,000$ см (или 55 км) на местности.

Можно говорить не только об отношении чисел, а и об отношении значений величин. Если два значения какой-то величины выражены в одинаковых единицах измерения, то отношением этих значений называют отношение соответствующих чисел. Например, $3\text{ м} : 5\text{ м} = 3 : 5$; $18\text{ кг} : 9\text{ кг} = 18 : 9$.

Но $2\text{ м} : 37\text{ см} = 200\text{ см} : 37\text{ см} = 200 : 37$.



Узнайте больше

Иногда рассматривают и отношение значений разнотипных величин. Например, если высота, площадь основания и объем прямоугольного параллелепипеда равны соответственно 2 м , 8 м^2 , 16 м^3 , то отношение $16\text{ м}^3 : 8\text{ м}^2$

равно высоте параллелепипеда, а отношение $16 \text{ м}^3 : 2 \text{ м}$ — площади основания данного параллелепипеда.

А если самолет пролетает расстояние 1400 км за 2 ч, то его скорость равна отношению расстояния ко времени: $1400 \text{ км} : 2 \text{ ч} = 700 \text{ км/ч}$.

Вообще, если какое-то тело движется равномерно, то его скорость — это отношение пройденного пути ко времени.

Со временем в физике вы будете рассматривать плотность вещества — отношение массы тела к объему, давление — отношение силы к площади и т. п.



Проверьте себя

1. Что такое частное?
2. Что такое отношение?
3. Верно ли, что обыкновенная дробь — это отношение его числителя к знаменателю?
4. Сформулируйте основное свойство отношения.
5. Сформулируйте следствия, вытекающие из основного свойства отношения.



Выполняем вместе

- ① Упростите отношение $400 : 600$.

• НОД $(400, 600) = 200$. Разделим каждый член данного отношения на 200. Имеем $400 : 600 = 2 : 3$.

- ② Замените отношение $\frac{8}{15} : \frac{7}{10}$ отношением натуральных чисел.

- Приведем заданные дроби к общему знаменателю 30.

$$\frac{8}{15} : \frac{7}{10} = \frac{8 \cdot 2}{15 \cdot 2} : \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{16}{30} : \frac{21}{30} = 16 : 21.$$

- ③ Упростите отношение $2\frac{1}{3} : 3\frac{1}{2}$.

• $2\frac{1}{3} : 3\frac{1}{2} = \frac{7}{3} : \frac{7}{2} = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} = 2 : 3.$



Устные упражнения

610. Найдите отношение:

- а) 20 к 4; б) 15 к 30; в) 0,5 к 2; г) 0,1 к 1.

611. Назовите несколько пар чисел, отношение которых равно:

- а) 2; б) 12; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{11}{12}$.

612. На катке юношей в 2 раза больше, чем девушек. Найдите отношение числа юношей к числу всех конькобежцев.

613. Найдите отношение:

- а) 20 см к 40 см; б) 300 кг к 30 кг;
в) 15 ч к 5 ч; г) 100 км к 2 ч.



Уровень А

614. Запишите с помощью двоеточия отношение чисел:

- а) 3 и 5; б) 12 и 7; в) 0,5 и 2,5; г) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{5}$.

615. Запишите с помощью черты дроби отношение чисел:

- а) 2 и 7; б) 13 и 9; в) 0,6 и 0,7; г) $1\frac{3}{7}$.

616. Чему равно отношение:

- а) 204 к 60; б) 260 к 104; в) 2002 к 77?

617. Вычислите отношение:

- а) 0,5 к 0,4; б) 0,7 к 3,5; в) 4,5 к 0,15.

618. Найдите значение отношения:

- а) $\frac{1}{2}$ к $\frac{1}{5}$; б) $\frac{5}{6}$ к $\frac{1}{3}$; в) $2\frac{1}{6}$ к 1,3.

619. Найдите отношение значений величин:

- а) 3 км к 4 км; б) 15 кг к 45 кг; в) 7 г к 140 г.

620. Упростите отношение чисел:

- а) 34 : 102; б) 130 : 225; в) 224 : 48; г) 101 : 505.

Замените отношение дробных чисел отношением натуральных чисел (621–623).

621. а) $0,2 : 0,9$; б) $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$; в) $3,2 : \frac{1}{2}$; г) $2\frac{1}{3} : \frac{5}{6}$.

622. а) $0,05 : 0,25$; б) $\frac{3}{5} : \frac{4}{15}$; в) $0,3 : \frac{1}{3}$; г) $1 : 1\frac{1}{3}$.

623. а) $1,2:24$; б) $\frac{7}{8}:\frac{8}{7}$; в) $\frac{2}{5}:0,2$; г) $3\frac{2}{5}:5\frac{2}{3}$.

624. Какое отношение больше:

а) $4:5$ или $5:6$; б) $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$?



Уровень Б

625. Вычислите отношение значений величин:

а) $3\text{ м}:2\text{ м}$; б) $1\text{ м}:4\text{ дм}$; в) $700\text{ г}:3,5\text{ кг}$;
г) $10\text{ м}^2:5\text{ м}$; д) $3\text{ см}^3:0,6\text{ см}^2$; е) $5\text{ км}:0,5\text{ ч}$.

626. Точка C делит отрезок AB в отношении $AC:CB=2:3$.
Найдите отношение:

а) $AC:AB$; б) $CB:AB$.

627. Найдите два числа, сумма которых равна 120, а отношение:

а) 2; б) 0,5; в) $\frac{2}{3}$; г) $3\frac{4}{5}$.

628. В классе 12 девочек и 18 мальчиков. Какую часть составляют:

- а) девочки от учащихся всего класса;
- б) мальчики от учащихся всего класса;
- в) девочки относительно мальчиков?

629. Сколько километров от Киева до Одессы, если на карте с масштабом $1:4\,000\,000$ этому расстоянию соответствует 11 см?

630. Расстояние от Киева до Полтавы примерно 300 км. На карте этому расстоянию соответствует 6 см. Какой масштаб карты?

631. На плане, масштаб которого $1:2000$, поле изображено в виде прямоугольника (рис. 40). Сделайте необходимые измерения и вычислите площадь поля.

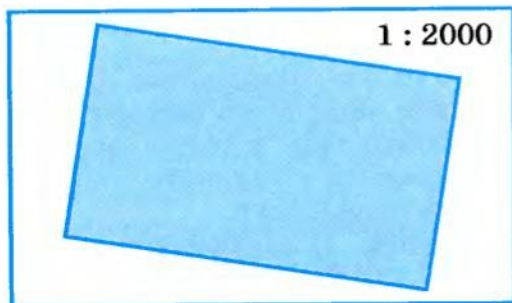


Рис. 40

632. Числовой масштаб 1 : 200 000 соответствует изображенному на рисунке 41 линейному масштабу. Начертите линейный масштаб, который соответствует числовому масштабу 1 : 500 000.

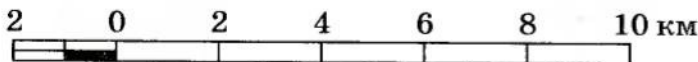


Рис. 41

633. Какой числовой масштаб соответствует линейному масштабу, изображенному на рисунке 42?

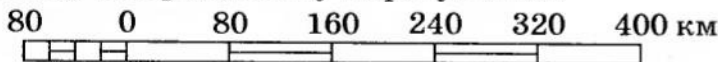


Рис. 42



Упражнения для повторения

634. Найдите 2, 5, 10, 40 и 120 процентов числа 2400.

635. Вычислите удобным способом значение выражения:

а) $3,27 \cdot 12,5 - 3,27 \cdot 2,5 - 32,7$;

б) $(56,2 \cdot 35,4 + 43,8 \cdot 35,4) : 35,4$.

636. Решите уравнение:

а) $\frac{2}{3}x + 4,5 = 6\frac{1}{2}$; б) $12,7 - 3x = \frac{1}{5}$.

637. Мотоциклист, двигаясь со скоростью 40 км/ч, преодолевает расстояние между двумя городами за 3 ч. За какое время преодолеет это расстояние автомобиль, скорость которого 60 км/ч?

§18.

Вероятность случайного события

Отношение часто используют для определения вероятностей случайных событий.

Событие — это то, что совершается, происходит, случается. В математике чаще всего рассматривают события, какие еще не совершались, а только возможно произойдут. При этом стараются установить степень уверенности в том, что событие произойдет.

Примеры событий: 1) подброшенная монета упадет гербом вверх (рис. 43); 2) приобретенный лотерейный билет выиграет; 3) после ночи наступит утро; 4) игральная кость упадет кверху семеркой.



Рис. 43



Рис. 44

Последнее событие *невозможно*, поскольку на гранях кости семерки нет. Событие 3) *достоверное*, ведь после ночи всегда наступает утро. События 1) и 2) – *случайные*. Событие называется случайным, если оно может произойти или не произойти.

Степень уверенности в том, что случайное событие произойдет, можно характеризовать числом. Рассмотрим пример. При падении подброшенной игральной кости (рис. 44) может произойти 6 различных событий:

событие А: выпадет 1 очко; событие В: выпадет 2 очка;
событие В: выпадет 3 очка; событие Г: выпадет 4 очка;
событие Д: выпадет 5 очков; событие Е: выпадет 6 очков.

Все эти шесть событий имеют одинаковые шансы произойти (если кость правильной формы и изготовлена из одного материала). Такие события называют *равновероятными*. Дальше речь пойдет только о равновероятных событиях.

Вероятностью события называют отношение количества благоприятных для этого события результатов к количеству всех возможных результатов.

Вероятность события А обозначают так: $P(A)$. В рассмотренном выше случае 6 равновероятных событий, поэтому вероятность каждого из них равна $\frac{1}{6}$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}, P(\Gamma) = \frac{1}{6}, P(D) = \frac{1}{6}, P(E) = \frac{1}{6}.$$

Вероятность достоверного события принимается за 1, а невозможного – за 0. Вероятность можно выражать обыкновенной и десятичной дробью или процентами.

Задача 1. Какова вероятность того, что при падении игральной кости выпадет число очков, кратное 3?

Решение. Количество всех возможных событий равно 6. Среди чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6 только два (3 и 6) делятся на 3. Поэтому вероятность равна $\frac{2}{6}$, или $\frac{1}{3}$.

Задача 2. Найдите вероятность того, что ваш товарищ родился в воскресенье.

Решение. Всего в неделе 7 дней. Нас интересует событие: «Мой товарищ родился в воскресенье» (событие A). Поскольку воскресенье только 1 раз в неделю, то $P(A) = \frac{1}{7}$.



Узнайте больше

Наведенная выше трактовка понятия вероятности верна только для равновероятных событий. Такое понимание вероятности называют *классическим*. Его чаще всего применяют при решении задач на азартные игры.

Намного важнее понятие *статистической вероятности*.

Для примера рассмотрим два похожих события: подброшенная монета упадет кверху гербом (A), подброшенная пуговица упадет кверху петелькой (B). Монета почти одинаковая с обеих сторон, поэтому оба события (монета упадет гербом кверху или книзу) равновероятные. Вероятность

каждого из этих событий равна $\frac{1}{2}$.



Рис. 45

Пуговица с одной стороны не такая, как с другой (рис. 45). Поэтому два события (пуговица упадет петелькой кверху или книзу) не равновероятные. Вероятность каждого из них можно определить только экспериментально. Такие вероятности (статистические) вы будете изучать в старших классах.



Проверьте себя

1. Что такое событие? Приведите примеры.
2. Какие события называют достоверными, невозможными, случайными?
3. Что такое вероятность случайного события?
4. Как обозначают вероятность события A ?
5. Чему равна вероятность достоверного события? А невозможного?



Выполняем вместе

① Набирая номер телефона, ученик забыл последнюю цифру и решил набрать ее наугад. Какова вероятность того, что он сразу наберет нужный номер телефона?

• Поскольку цифр всего 10, то и возможных испытаний 10, благоприятное из них лишь одно. Поэтому искомая вероятность равна 0,1.

② В мешочке находятся 5 голубых и 7 желтых шаров. Какова вероятность того, что, вынимая наугад, вы достанете:

- а) голубой шар; б) желтый шар?

• Всего в мешочке $5 + 7 = 12$ шаров. Вынуть голубой шар есть 5 шансов из 12, а желтый – 7 из 12. Поэтому искомые вероятности:

- а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{7}{12}$.



Устные упражнения

638. Какова вероятность того, что при падении игральной кости выпадет 5 очков?

639. Какова вероятность того, что подброшенная монета упадет гербом книзу?

640. В пакете находится 8 конфет, из них 5 в красных обертках. Какова вероятность того, что взятая наугад конфета окажется не в красной обертке?

641. Какова вероятность того, что Баба Яга родилась в пятницу?

642. Какова вероятность того, что названное наугад двузначное число окажется меньше 100?

643. Какова вероятность того, что, переставив местами буквы в слове ИСТОРИЯ, вы получите слово ТЕОРИЯ?



Уровень А

644. На четырех карточках написано по одной букве, и из них сложено слово ЛАПА. Какова вероятность того, что, перевернув и перемешав эти карточки, вы сразу же возьмете:

- а) букву А; б) букву Л?

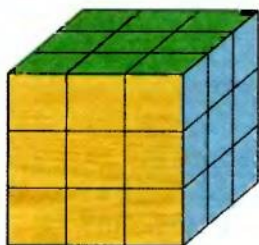


Рис. 46

645. Окрашенный со всех сторон деревянный куб разрезали на 27 равных кубиков (рис. 46) и положили их в мешочек. Какова вероятность того, что у взятого наугад кубика будет окрашена только:

- а) 1 грань; б) 2 грани;
в) 3 грани; г) 4 грани;
д) 0 граней; е) 5 граней?

646. На экзамене всего 28 билетов. Борис не знает ответов на вопросы двух билетов. Какова вероятность того, что он возьмет несчастливый билет?

647. В лотерее разыгрывается 250 билетов, из которых выигрышных только 10. Какова вероятность выиграть в этой лотерее, купив только один билет?

648. В кармане есть 5 монет (рис. 47). Какова вероятность взять монету стоимостью:

- а) меньше 50 к.;
б) больше 10 к.;
в) с четным числом копеек?



Рис. 47



Уровень Б

649. Какова вероятность того, что взятая наугад перевернутая косточка домино будет иметь:

- а) 2 очка; б) 5 очков; в) 11 очков; г) 15 очков?

650. Все грани кубика окрашены в два цвета: красный или синий. Вероятность падения кубика на красную грань равна $\frac{1}{3}$. Сколько кубик имеет синих граней?

651. В папке находятся карточки с номерами от 1 до 20. Какова вероятность того, что на взятой наугад карточке будет написано число, которое не делится на 3?

652. В коробке половина всех конфет в красных обертках, треть – в желтых, остальные – в синих. Вы берете наугад одну конфету. Какова вероятность того, что она в синей обертке?

653. В столовой приготовили на обед 2 первых блюда, 3 вторых и 2 третьих. Какова вероятность того, что, заказав обед для товарища, вы угадаете его желание?

654. Практическое задание. Подбросьте 20 раз монету и запишите, сколько раз она упадет гербом вверх. Подбросьте 20 раз пуговицу и запишите, сколько раз она упадет вверх петелькой или опуклостью. Повторите опыт и определите закономерность.



Упражнения для повторения

655. Разложите на простые множители числа: 2006, 2007 и 2008. Найдите их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

656. Сколько существует разных двузначных чисел? Найдите их сумму.

657. Представьте себе произведение всех натуральных чисел от 1 до 99. Запишите 20 последних цифр этого произведения.

658. «Какое число делится без остатка на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9?» – спросили одного араба-мудреца. Он ответил: «Умножьте число месяцев в году на число дней в месяце (30) и число дней в неделе, и вы получите ответ». Действительно ли это так?

659. Теннисисты Андрей, Борис и Виктор приехали из трех городов Украины. Первую партию играли Андрей и теннисист из Гайсина, вторую – Борис и теннисист из Донецка. Теннисист из Винницы наблюдал за их игрой. Кто из какого города приехал?

§ 19.

Пропорции

Отношения $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{6}$ равны друг другу. Поэтому их можно

соединить знаком равенства: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, или $1 : 2 = 3 : 6$. Такие равенства называют *пропорциями*.

Пропорция – это равенство двух отношений.

$$a : b = c : d, \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ при } b \neq 0 \text{ и } d \neq 0.$$



В пропорции $a : b = c : d$ числа a и d называют *крайними членами*, а b и c – *средними членами* пропорции.

Произведение крайних членов каждой пропорции равно произведению ее средних членов.

$$\text{Если } a : b = c : d, \text{ то } a \cdot d = b \cdot c.$$

$$4 : 2 = 8 : 4, \quad 4 \cdot 4 = 2 \cdot 8.$$



Это – *основное свойство пропорции*. Его можно проиллюстрировать на примерах. Если $1 : 2 = 3 : 6$, то $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$; если $0,3 : 1 = 2,1 : 7$, то $0,3 \cdot 7 = 1 \cdot 2,1$. А можно и доказать.

Пусть дано произвольную пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Умножив обе части этого равенства на произведение $b \cdot d$, получим $\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}$. Сократив первую дробь на b , а вторую – на d , получим равенство $a \cdot d = c \cdot b$. Таким образом, если $a : b = c : d$, то $a \cdot d = b \cdot c$.

Поскольку делить на 0 нельзя, то в пропорции $a : b = c : d$ b и d отличные от 0. В дальнейшем будем считать, что все члены пропорции отличные от нуля.

Любой член пропорции можно определить, если известны три других ее члена. Например, если $x : 2 = 10 : 5$, то $x \cdot 5 = 2 \cdot 10$. Отсюда $x = (2 \cdot 10) : 5$, или $x = 4$.

Чтобы найти неизвестный крайний член пропорции, достаточно произведение ее средних членов разделить на известный крайний. Чтобы найти неизвестный средний член пропорции, достаточно произведение ее крайних членов разделить на известный средний.



Основное свойство пропорции используют при решении уравнений, имеющих вид пропорции. Приведем примеры решения таких уравнений:

а) $\frac{x}{21} = \frac{5}{7};$

б) $\frac{3}{2} = \frac{x}{6};$

в) $8 : x = 4 : 0,5.$

Решение.

а) $x \cdot 7 = 21 \cdot 5$,

$$x = \frac{21 \cdot 5}{7},$$

$$x = 15;$$

б) $2 \cdot x = 3 \cdot 6$,

$$x = \frac{3 \cdot 6}{2},$$

$$x = 9;$$

в) $4 \cdot x = 8 \cdot 0,5$,

$$x = \frac{0,5 \cdot 8}{4},$$

$$x = 1.$$

Подобным способом можно решать, например, и уравнение $\frac{3,5}{x} = 7$, если заменить его (устно) таким: $\frac{3,5}{x} = \frac{7}{1}$.

Отсюда $x = \frac{3,5 \cdot 1}{7}$, $x = 0,5$.



Узнайте больше

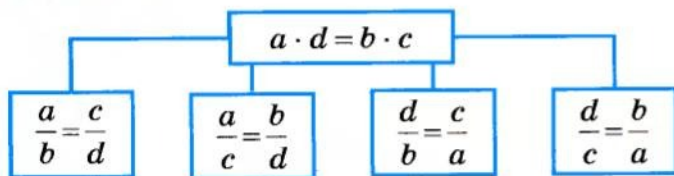
Если пропорция $a : b = c : d$ верна, то верно и равенство $ad = bc$. Разделив обе его части на cd , получим

$$\frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd}. \text{ Отсюда } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \text{ или } a : c = b : d.$$

Следовательно, средние члены пропорции можно менять местами. Так же можно показать, что местами можно менять и крайние члены пропорции.

Например, поскольку $0,2 : 0,3 = 2 : 3$, то верны также пропорции $0,2 : 2 = 0,3 : 3$ и $3 : 0,3 = 2 : 0,2$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} : \frac{4}{2} = \frac{16}{8}, \quad \frac{4}{16} = \frac{2}{8}, \quad \frac{8}{2} = \frac{16}{4}, \quad \frac{8}{16} = \frac{2}{4}.$$



Проверьте себя

1. Сформулируйте определение пропорции.
2. Какие в пропорции $a : b = c : d$ члены средние, а какие крайние?
3. Сформулируйте основное свойство пропорции.
4. Приведите пример уравнения, имеющего вид пропорции. Как решать уравнения такого вида?



Выполняем вместе

- ① Составьте пропорцию из чисел 3, 4, 8 и 6.
 • Поскольку $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$, то числа 3 и 8 могут быть средними членами, а другие – крайними. Или наоборот. Поэтому верны пропорции:

$$4 : 3 = 8 : 6, \quad 4 : 8 = 3 : 6, \quad 8 : 4 = 6 : 3, \quad 3 : 4 = 6 : 8.$$

② Решите уравнение $\frac{3}{x} = \frac{5}{2}$.

- Поскольку произведение средних членов пропорции равно произведению крайних, то $5x = 6$. Отсюда $x = 6 : 5$, или $x = 1,2$.



Устные упражнения

660. Равны ли отношения:

- а) $10 : 2$ и $15 : 3$; б) $30 : 3$ и $45 : 5$; в) $1 : 3$ и $0,5 : 1,5$?

661. Является ли верной пропорцией равенство:

- а) $60 : 3 = 40 : 2$; б) $4 : 20 = 3 : 15$; в) $0,5 : 10 = 1 : 20$?

662. Назовите средние и крайние члены пропорции:

- а) $3 : 21 = 5 : 35$; б) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = 2 : 3$; в) $2,4 : 6 = 3 : x$.



Уровень А

663. Равны ли отношения:

- а) $3 : 5$ и $6 : 20$; б) $7 : 6$ и $3,5 : 3$?

664. Является ли равенство $\frac{45}{105} = \frac{3}{7}$ верной пропорцией? Запишите ее крайние члены.

665. Почему равенство $2 : 3 = 4 : 5$ не является пропорцией?

666. Проверьте, верна ли пропорция:

- а) $7 : 3 = 21 : 9$; б) $12 : 4 = 15 : 5$; в) $1 : 6 = 2 : 3$;

г) $\frac{8}{6} = \frac{12}{9}$; д) $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$; е) $\frac{7}{3} = \frac{13}{7}$.

667. Запишите несколько пропорций, поменяв местами члены пропорции $\frac{7}{8} = \frac{x}{9}$.

668. Из данных отношений: $7:3$, $8:4$, $5:6$, $6:3$, $28:12$, $20:24$ составьте три пропорции.

669. Составьте шесть пропорций, используя равенство $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$.

670. Допишите соответствующий член пропорции:

а) $\frac{3}{5} = \frac{\quad}{10}$; б) $\frac{7}{4} = \frac{21}{\quad}$.

671. Составьте пропорцию из чисел:

а) 2, 6, 3 и 4; б) 6, 6, 4 и 9.

Используя основное свойство пропорции, решите уравнения (672–674).

672. а) $\frac{x}{7} = \frac{20}{35}$; б) $\frac{3}{x} = \frac{5}{15}$; в) $\frac{9}{2} = \frac{18}{x}$; г) $\frac{2}{3} = \frac{x}{12}$.

673. а) $\frac{x}{5} = \frac{1}{8}$; б) $\frac{3}{x} = \frac{2}{7}$; в) $\frac{5}{8} = \frac{x}{3}$; г) $\frac{7}{3} = \frac{5}{x}$.

674. а) $\frac{x}{3} = 7$; б) $\frac{15}{x} = 3$; в) $9 = \frac{4}{x}$; г) $8 = \frac{x}{5}$.

675. Найдите число, которое относится к 6 так, как 2 к 3.

676. Найдите число, которое больше 18 во столько раз, во сколько 15 больше 9.



Уровень Б

Решите уравнения (677–678).

677. а) $\frac{2x}{3} = \frac{7}{5}$; б) $\frac{5}{3x} = \frac{1}{6}$; в) $\frac{3}{4} = \frac{6}{5x}$; г) $\frac{1}{2} = \frac{2x}{3}$.

678. а) $\frac{4x}{3} = 8$; б) $\frac{1}{2x} = 5$; в) $\frac{x-1}{2} = \frac{5}{6}$; г) $\frac{1}{x+3} = 0,1$.

679. Останется ли верной пропорция $32:27 = 64:54$, если разделить оба члена первого отношения на 3, а второго – на 4?

680. Останется ли верной пропорция $4:6 = 10:15$, если один из ее крайних членов и один из средних членов умножить на 7?

681. Стороны двух квадратов относятся как $5:6$. Как относятся их периметры? А площади?

682. Найдите расстояние между городами А и В, если от В до С 60 км и $AB:BC = 5:3$.

683. Прямоугольники $ABCD$ и $KLPT$ такие, что $AB : BC = KL : LP$ (рис. 48). Найдите KL , если $AB = 3$ см, $AD = 2$ см, $LP = 3$ см. Верна ли пропорция $AB : KL = AD : KT$?

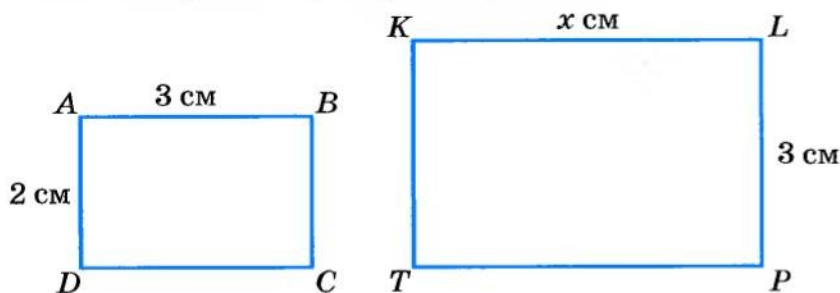


Рис. 48

684. Для каждого ли натурального числа m верно утверждение:

а) если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{am}{b} = \frac{cm}{d}$; б) если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{bm} = \frac{c}{dm}$?

685. На рисунке 49 изображен план поля, ширина которого равна 85 м. Сделав необходимые измерения, найдите длину поля.

686. На рисунке 50 изображен план детали в масштабе $1 : 5$. Сделав необходимые измерения, найдите периметр и площадь этой детали.

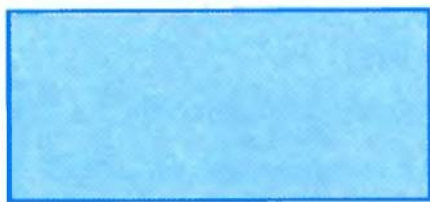


Рис. 49



Рис. 50

687. Покажите на примерах, что всегда:

а) если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$;

б) если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d}$.

Попытайтесь доказать эти утверждения для любых натуральных чисел a, b, c, d .

688*. Докажите, что когда $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.



Упражнения для повторения

689. Выполните действия:

а) $45,3 \cdot 99 + 453 : 10$; б) $2002 : (3,7 - 3) - 110 \cdot 1,3$.

690. Сравните значения выражения $a + \frac{1}{a}$ при $a = 5$ и $a = 0,2$.

691. Найдите значение выражения $35,2x + 64,8y$, если $x = y = 1,4$.

692. Найдите периметр равнобедренного треугольника, одна сторона которого равна 2,5 см, а другая – в 3 раза длиннее.

693. Начертите прямоугольник, одна сторона которого равна 3,5 см, а периметр – 15 см. Найдите его площадь.

694. Два покупателя хотели купить дом. Один имел $\frac{3}{8}$ суммы, которую просил продавец, а второй – $\frac{3}{5}$. Когда они сложили вместе все свои деньги, то оказалось, что не достает 2250 грн. Сколько стоил дом?

§ 20.

Процентное отношение

Один процент – это одна сотая часть.

$$1 \% = 0,01;$$

$$100 \% = 1;$$

$$50 \% = 0,5;$$

$$200 \% = 2.$$



Если отношение двух чисел выражают в процентах, то его называют *процентным отношением*.

Например, отношение 2 к 5 равно $\frac{2}{5}$, или 0,4, или 40%;

отношение 32 к 25 равно $\frac{32}{25}$, или 1,28, или 128%.

Существуют задачи, в которых требуется найти, сколько процентов составляет одно число относительно другого, или одно значение величины относительно другого. Их называют задачами на нахождение процентного отношения.

Задача. Возле школы растет 20 деревьев, из них 8 – липы. Сколько процентов этих деревьев составляют липы?

Решение. Отношение лип ко всем деревьям возле школы равно $\frac{8}{20}$, или 0,4, или 40 %. Таким образом, липы составляют 40 % всех деревьев, растущих возле школы.

Учитывая сказанное выше и два известных вам вида задач на проценты с 5-го класса, можно подвести итоги.

Существует три основных вида задач на проценты:

- ① *нахождение процентов от числа;*
- ② *нахождение числа по процентам;*
- ③ *нахождение процентного отношения двух чисел.*

Рассмотрим примеры таких задач.

① Надо вспахать поле, площадь которого равна 300 га. В первый день трактористы выполнили 40 % задания. Сколько гектаров они вспахали в первый день?

② В первый день трактористы вспахали 120 га, что составляет 40 % всего поля. Найдите площадь всего поля.

③ Надо вспахать поле, площадь которого равна 300 га. В первый день трактористы вспахали 120 га. Сколько процентов всего поля они вспахали в первый день?

Попытайтесь решить каждую из этих задач несколькими способами, заменив 40 % дробью 0,4 или $\frac{2}{5}$. Сопоставьте эти задачи с основными задачами на дроби (см. § 14).

Такие задачи удобно решать *способом пропорции*. Оформлять решение приведенных выше задач можно так.

$$\begin{array}{l} \text{① } 300 \text{ га} - 100 \%, \\ x \text{ га} - 40 \%. \end{array} \quad \frac{300}{x} = \frac{100}{40}, \quad x = \frac{300 \cdot 40}{100} = 120 \text{ (га)}.$$

$$\begin{array}{l} \text{② } 120 \text{ га} - 40 \%, \\ x \text{ га} - 100 \%. \end{array} \quad \frac{120}{x} = \frac{40}{100}, \quad x = \frac{120 \cdot 100}{40} = 300 \text{ (га)}.$$

$$\begin{array}{l} \text{③ } 300 \text{ га} - 100 \%, \\ 120 \text{ га} - x \%. \end{array} \quad \frac{300}{120} = \frac{100}{x}, \quad x = \frac{120 \cdot 100}{300} = 40 (\%).$$



Узнайте больше

Кроме трех основных видов задач, существуют более сложные задачи на проценты. Прежде всего, это задачи, в которых говорится об увеличении или уменьшении чего-либо на несколько процентов, и обратные им. Решая такие задачи, уточняйте, от чего надо брать проценты. Об этом в задаче прямо не сказано, но существуют договоренности о понимании тех или иных высказываний.

Для примера рассмотрим задачу.

Задача. Сначала цену на товар подняли на 10 %, а потом снизили на 10 %. Как изменилась цена на этот товар в результате двух переоценок?

Обратите внимание, что первый раз речь идет о 10 % от начальной цены, а во второй раз – о 10 % от повышенной цены. А они не равны.

Решение. Пусть сначала товар стоил a грн.

После повышения цены на 10 % он стал стоить a грн. + $+0,1a$ грн., или $1,1a$ грн.

10 % от повышенной цены составляют $(1,1a \cdot 0,1)$ грн., или $0,11a$ грн. После снижения стоимости, цена товара стала $(1,1a - 0,11a)$ грн., или $0,99a$ грн.

Таким образом, сначала товар стоил a грн., а после двух переоценок он стал стоить $0,99a$ грн., то есть на $0,01a$ грн. меньше. Это составляет $0,01a : a = 0,01$, или 1 %.

Ответ. После двух переоценок начальная цена товара снизилась на 1 %.

П р и м е ч а н и е. Вместо слов «сколько процентов» иногда говорят «какой процент» (см. задачи 700, 701).



Проверьте себя

1. Что такое процент? А процент от числа?
2. Что такое процентное отношение двух чисел?
3. Назовите три основных вида задач на проценты.
4. Как найти несколько процентов от числа?
5. Как найти число по процентам?
6. Как найти процентное отношение двух чисел?
7. Каким способом удобно решать задачи на проценты?



Выполняем вместе

① В классе всего 27 учеников, два из них отсутствуют. Сколько процентов составляют отсутствующие? Сколько процентов составляют присутствующие?

$$\bullet \quad 2 : 27 \approx 0,074, \quad 0,074 = 7,4 \% ; \\ 25 : 27 \approx 0,926, \quad 0,926 = 92,6 \% .$$

Ответ. $\approx 7,4 \% ; \approx 92,6 \% .$

Примечание. Вторую часть задачи можно решить проще: $100 \% - 7,4 \% = 92,6 \% .$

② Рабочий за смену изготавливал 250 деталей, а теперь изготавливает 270 таких деталей. На сколько процентов повысилась его производительность труда?

• *Первый способ.*

$$270 : 250 = 1,08 = 108 \% ; \quad 108 \% - 100 \% = 8 \% .$$

Второй способ.

$$270 - 250 = 20 \text{ (деталей)}; \quad 20 : 250 = 0,08 = 8 \% .$$

Ответ. На 8 %.



Устные упражнения

695. Найдите 10 % от числа: 120; 6000; 40; 8; 0,7.

696. Найдите число, 50 % которого равны 8; 10; 3000; 1.

697. Выразите в процентах отношение:

$$3 : 100; \quad 5 : 10; \quad 7 : 20; \quad 13 : 10; \quad \frac{7}{100}; \quad \frac{3}{50}; \quad \frac{61}{10}.$$



Уровень А

698. Сколько процентов составляют:

а) 7 от 20;

б) $\frac{2}{3}$ от $\frac{8}{15}$;

в) $\frac{2}{13}$ от $\frac{5}{26}$;

г) $1\frac{1}{2}$ от $1\frac{1}{5}$?

699. Сколько процентов составляют:

а) 3 см от 5 см;

б) 2 см от 1 дм;

в) 35 г от 1 кг;

г) 15 мин от 1 ч;

д) 0,1 м от 1 м;

е) 0,5 г от 1 кг;

ж) 9 с от 1 ч;

з) 9 ц от 1 т?

700. Из 50 высеванных горошин взошло 46. Какой процент составляют проросшие горошины?

701. Должностная ставка служащего – 590 грн. Он получил 240 грн. аванса. Какой процент от ставки составляет аванс?

702. Сколько процентов площади квадрата $ABCD$ составляет площадь прямоугольника $ATPK$ (рис. 51)? А площадь прямоугольника $TBMP$?

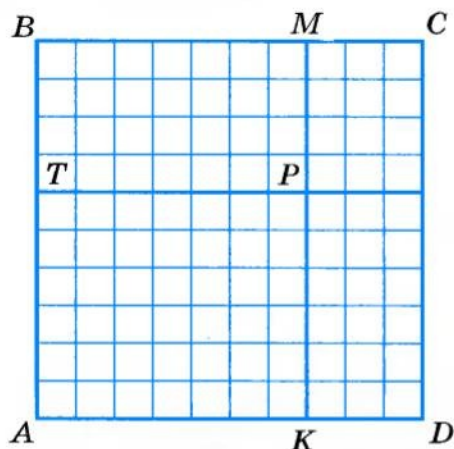


Рис. 51



703. Найдите процент соли в растворе, если в 250 г раствора содержится 20 г соли.

704. Смешали 4 кг воды и 1 кг уксусной кислоты. Найдите процент кислоты в растворе.

705. Цену 1 кг печенья увеличили с 10 грн. 80 к. до 11 грн. 34 к. На сколько процентов поднялась цена?

706. Результаты контрольной работы шестиклассников записали в таблицу.

Количество баллов	1 – 3	4 – 6	7 – 9	10 – 12	Всего
Количество учеников	2	7	12	4	
Отношение (%)					

Заполните пустые клеточки таблицы.

707. После окончания зимнего сезона цена на обувь снизилась на 18 % и детские сапоги стали стоить 98 грн. 40 к. Какова начальная цена сапог?

708. Семья для приобретения стиральной машины взяла в банке кредит 1800 грн. сроком на два года под 12 % годовых. Какую прибыль получит банк через два года?



Уровень Б

709. На сколько процентов: а) число 25 больше 20; б) число 20 меньше 25? Почему ответ к задаче б) не такой, как к задаче а)?

710. На сколько процентов увеличится число, если его увеличить:

- а) в 2 раза; б) в 1,6 раза; в) в 10 раз?

711. На сколько процентов уменьшится число, если его уменьшить:

- а) в 2 раза; б) в 1,6 раза; в) в 10 раз?

712. Первое число составляет 40 % второго. Сколько процентов составляет второе число от первого?

713. Кот в сапогах за первую минуту пробежал 250 м, за вторую – на 60 % больше. Какой процент расстояния он пробежал за третью минуту, если весь его путь равен 1 км?

714. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если одну из его сторон увеличить на 10 %, а другую – на 20 %? Рассмотрите случаи, когда стороны равны:

- а) 2 см и 5 см; б) 12 м и 25 м; в) x м и y м.

Зависит ли ответ от заданных длин сторон?

715. Цену на товар сначала снизили на 10 %, а через некоторое время еще на 10 %. Такой ли была бы цена этого товара, если бы ее сразу снизили на 20 %?

716. Газета повысила плату за рекламу на 20 %, а потом новую цену снизила на 10 %. На сколько процентов увеличилась начальная цена рекламы?

717. Цену на товар снизили на 25 %. На сколько процентов надо повысить новую цену, чтобы получить первоначальное ее значение?

718. Ежемесячная прибыль семьи составляет 1300 грн. В марте расходы на питание составили 715 грн., а на оплату коммунальных услуг – 390 грн. На сколько процентов больше было израсходовано денег на питание?

719*. Вкладчик внес в банк 6000 грн. под 8 % годовых. Какую сумму он будет иметь на счете через 1 год; через 2 года, если банк насчитывает проценты на проценты?

720. В одном городе жители разговаривают на украинском и русском языках. 85 % из них знают украинский язык, 75 % – русский. Сколько процентов жителей знают оба языка?



Упражнения для повторения

721. На двух складах вместе хранится 1400 т угля. Сколько тонн угля на втором складе, если на первом его в 2,5 раза больше, чем на втором?

722. На двух токах находится 564 т зерна, на первом току – $\frac{2}{3}$ массы зерна, которая находится на втором. Сколько тонн зерна находится на втором току?

723. Найдите среднее арифметическое чисел:

а) 3,7, 12,6 и $8\frac{3}{5}$; б) 0,12, $\frac{4}{7}$ и 1,88.

724. Во сколько раз среднее арифметическое чисел a , x и y меньше суммы этих чисел?

725. Найдите два числа, среднее арифметическое которых меньше первого числа на 2 и меньше суммы этих чисел на 3.



§ 21. Пропорциональные величины

Пусть 1 кг яблок стоит 3 грн. Сколько стоят 2 кг, 3 кг, 4 кг, 5 кг, 6 кг таких яблок? Ответ можно записать в виде таблицы.

Масса яблок (кг)	1	2	3	4	5	6
Стоимость (грн.)	3	6	9	12	15	18

Здесь две величины: масса и стоимость. Возьмем какие-либо два значения массы, например 3 кг и 5 кг. Соответствующие им значения стоимости: 9 грн. и 15 грн. Из этих четырех чисел можно составить пропорцию $3 : 5 = 9 : 15$ или $3 : 9 = 5 : 15$. Такие величины называют *пропорциональными*. Стоимость яблок пропорциональна их массе. Чем больше покупают яблок, тем больше за них платят. Во столько же раз!



Две величины называют пропорциональными, если с увеличением значений одной из них в несколько раз значения второй увеличиваются во столько же раз.

Другие примеры пропорциональных величин: объем бензина и его масса, время полета самолета и пройденное им расстояние, длина стороны квадрата и его периметр. А вот площадь квадрата не пропорциональна длине его стороны. Почему? Если каждую сторону квадрата увеличить, например, в 3 раза, то его площадь увеличится не в 3 раза, а в 9 раз.

Если величины x и y пропорциональные, то их соответствующие значения удовлетворяют равенству

$$y = kx,$$

где k – некоторое число (коэффициент пропорциональности).

Много задач на пропорциональные величины можно решать с помощью пропорций.

Задача. Масса 5 л растительного масла равна 4 кг. Какова масса 12 л этого масла?

Решение.

Первый способ (приведение к единице). Если масса 5 л масла равна 4 кг, то масса 1 л – в 5 раз меньше, то есть 0,8 кг. Масса 12 л масла в 12 раз больше: $0,8 \text{ кг} \cdot 12 = 9,6 \text{ кг}$.

Второй способ (способ пропорции). 5 л – 4 кг,
12 л – x кг.

Имеем пропорцию $\frac{5}{12} = \frac{4}{x}$. Отсюда $x = \frac{12 \cdot 4}{5} = 9,6 \text{ (кг)}$.



Узнайте больше

Кроме пропорциональных величин, часто рассматривают *обратно пропорциональные величины*. Две величины называют *обратно пропорциональными*, если с увеличением в несколько раз значений одной величины значения другой уменьшаются во столько же раз. Такими, например, являются скорость и время (при постоянном расстоянии). Поскольку, если скорость движения увеличить в

несколько раз, то это же расстояние можно пройти во столько же раз быстрее. Если величины x и y обратно пропорциональны, то их соответствующие значения удовлетворяют равенству

$$y = \frac{k}{x},$$

где k – некоторое число (k и x – отличные от нуля).

Обратно пропорциональные величины изучают в курсе алгебры. Чтобы различать пропорциональные величины и обратно пропорциональные, первые также называют *прямо пропорциональными величинами*. Таким образом, пропорциональные величины и прямо пропорциональные величины – одно и то же понятие.



Проверьте себя

1. Приведите примеры величин, пропорциональных величин.
2. Какие две величины называют пропорциональными?
3. Каким равенством связаны значения пропорциональных величин x и y ?
4. Каким способом решают задачи с пропорциональными величинами?
5. Приведите пример решения задачи способом приведения к единице.
6. Приведите пример решения задачи способом пропорции.
7. Приведите примеры обратно пропорциональных величин.



Выполняем вместе

① Насос за 8 ч откачивает 160 м^3 воды. Сколько воды он сможет откачать за 10 ч?

● *Первый способ.* За 1 ч насос откачивает $160 : 8 = 20 (\text{м}^3)$. За 10 ч – в 10 раз больше: $20 \cdot 10 = 200 (\text{м}^3)$.

Второй способ.

$$8 \text{ ч} - 160 \text{ м}^3,$$

$$10 \text{ ч} - x \text{ м}^3.$$

Имеем пропорцию $\frac{8}{10} = \frac{160}{x}$. Отсюда $x = \frac{10 \cdot 160}{8} = 200 (\text{м}^3)$.



Устные упражнения

726. Пропорциональны ли величины, указанные в таблице?

Объем изделия из бетона (м ³)	1	2	3	4	5
Масса (т)	2,1	4,2	6,3	8,4	10,5

727. Пропорциональны ли величины, указанные в таблице?

Возраст сына (г.)	1	2	3	4	5	6
Возраст отца (г.)	31	32	33	34	35	36

728. Какие величины пропорциональны:

- масса товара и его стоимость;
- длина проволоки и ее масса;
- масса тела и его объем;
- периметр квадрата и длина его стороны;
- площадь квадрата и длина его стороны;
- длина ребра куба и его объем?

729. Одна величина пропорциональна другой. Пропорциональна ли вторая величина первой? Приведите пример.

730. Автомобиль за 2 ч проехал 120 км. Сколько километров он проедет с такой же скоростью за 1 ч; 3 ч; 4 ч; 5 ч; 6 ч; 0,5 ч; 0,1 ч?

731. 20 тетрадей стоят 10 грн. Сколько стоят 2, 3, 4, 5, 7, 10, 30, 50 таких тетрадей?



Уровень А

732. Масса 1 л растительного масла равна 0,8 кг. Найдите массу 2 л, 3 л, 4 л, 5 л, 6 л, 7 л масла. Составьте таблицу и запишите значения величин.

733. Из 0,5 т руды можно выплавить 0,3 т чугуна. Сколько тонн чугуна можно выплавить из 1 т, 2 т, 3 т, 100 т такой руды?

734. Масса 2 м³ дров равна 1600 кг. Найдите массу 112 кубометров таких дров.

735. Из 10 кг ржи получается 9 кг муки. Сколько килограммов ржи надо смолоть, чтобы получить 900 кг муки?

736. Велосипедист за 0,3 ч проехал 4,2 км. Сколько километров он проедет за 2 ч, двигаясь с такой же скоростью?

737. Из 100 кг свежих яблок можно получить 5,8 кг сушеных. Сколько сушеных яблок получится из 750 кг свежих?

738. За 8 м ткани уплатили 96 грн. Сколько стоят 15 м такой ткани?

739. На пошив 12 костюмов израсходовали 28,8 м ткани. Сколько таких костюмов можно сшить из 146,4 м ткани?

740. Расстояние на карте между двумя городами равно 15 см. Какое расстояние между этими городами, если масштаб карты 1 : 200 000?

741. Масса 3 м³ льда равна 2,7 т. Найдите массу 20 м³ льда.



Уровень Б

742. Масса 0,25 дм³ бронзы равна 2,2 кг. Найдите: а) массу 2 м³ бронзы; б) объем бронзовой детали, если ее масса равна 4,4 кг.

743. Из 20 кг морской воды можно получить 0,5 кг соли. Сколько надо взять морской воды, чтобы получить 45 кг соли?

744. За 24 мин насос откачивает 144 м³ воды. За какое время он откачает 4260 м³ воды?

745. Для покраски 7,5 м² пола надо 0,75 кг краски. Сколько краски нужно, чтобы покрасить пол, размеры которого 3,15 м и 4,2 м?

746. На пошив 7 костюмов израсходовали 21,7 м ткани. Сколько нужно ткани для пошива 17 таких костюмов? Сколько костюмов можно сшить из 16 м ткани?

747. За 3 ч турист прошел 16 км. За какое время он пройдет 30 км, двигаясь с такой же скоростью?

748. Сколько надо взять картофеля, чтобы получить 100 кг крахмала, если из 30 кг картофеля получается 5,4 кг крахмала?

749. Чтобы получить 60 кг мельхиора, надо сплавить 9 кг никеля, 12 кг цинка, остальное – медь. Сколько килограммов каждого из этих металлов надо взять, чтобы получить 100 кг мельхиора?



Упражнения для повторения

750. Решите уравнение:

а) $5,2x - 3,8 = 17$; б) $3,9 - 1,2x = 0,3$.

751. При каких натуральных значениях n верны неравенства:

а) $n < 4,7$; б) $2,6 < n < 8,4$; в) $0 < n < 67,8$?

752. Сумма углов треугольника больше одного из них на 150°, а другого – на 75°. Найдите градусную меру третьего угла этого треугольника.

753. Найдите периметр треугольника, если он больше одной стороны на 35 см, другой – на 45 см, а третьей – на 50 см.

754. Сколько оборотов сделает колесо за 1 мин, вращаясь равномерно со скоростью 20° за секунду?

755. Коля идет со школы домой 30 мин, а его брат Витя – 40 мин. Однажды Витя ушел домой на 5 мин раньше. Через сколько минут его догонит брат?

756. Джек выше Райда и ниже Барби, с которой сидит рядом, а Альма выше Барби, но ниже Тома (рис. 52). Кого как звать?



Рис. 52

§ 22.

Задачи на пропорциональное деление

Существует много задач, в которых требуется разделить какое-то число или значение величины на части, пропорциональные нескольким данным числам. Рассмотрим одну из таких задач.

Задача. Проволоку длиной 60 м разрезали на три части, длины которых пропорциональны числам 2, 3 и 5. Найдите длины этих частей проволоки.

Решение. Если искомые длины пропорциональны числам 2, 3 и 5, то они равны $2n$, $3n$ и $5n$, где n – некоторое число (рис. 53). Следовательно, $2n + 3n + 5n = 60$, $10n = 60$, $n = 6$. Длины частей проволоки равны 12 м, 18 м и 30 м.



Рис. 53

Чтобы понять общее правило решения задач на пропорциональное деление, уравнение $2n + 3n + 5n = 60$ преобразуем так:

$$(2+3+5)n = 60, \quad n = \frac{60}{2+3+5}.$$

Тогда искомые значения $2n$, $3n$ и $5n$ соответственно равны:

$$\frac{60 \cdot 2}{2+3+5}, \quad \frac{60 \cdot 3}{2+3+5}, \quad \frac{60 \cdot 5}{2+3+5}.$$

Чтобы разделить число на части, пропорциональные данным числам, надо разделить его на сумму данных чисел и найденное частное умножить на каждое из них.



Отдельным видом задач на пропорциональное деление являются задачи на нахождение двух чисел по их сумме и отношению. Сравните две такие задачи.

Задача 1. Поле площадью 100 га разделили на две части, площади которых пропорциональны числам 2 и 3. Найдите площади этих частей поля.

Задача 2. Поле площадью 100 га разделили на две части, площади которых относятся как 2 : 3. Найдите площади этих частей поля.

Решать такие задачи можно двумя способами.

Решение.

Первый способ. Если площади частей поля пропорциональны числам 2 и 3 (или относятся как 2 : 3), то они равны $2x$ и $3x$, где x — некоторое число. Общая площадь поля равна 100 га, поэтому

$$2x + 3x = 100, \quad 5x = 100.$$

Отсюда $x = 20$. Следовательно,

$$2x = 40, \quad 3x = 60.$$

Ответ. 40 га и 60 га.

Второй способ. По правилу деления числа на части, пропорциональные данным числам, сразу определяем площади частей поля:

$$\frac{100 \cdot 2}{2+3} = 40, \quad \frac{100 \cdot 3}{2+3} = 60.$$

Ответ. 40 га и 60 га.



Узнайте больше

Иногда говорят о делении числа на части, *обратно пропорциональные* данным числам. Поделить число на части, *обратно пропорциональные* данным числам, — это значит разделить данное число на части пропорционально числам, обратным данным. Например, разделим число 190 на три части, *обратно пропорциональные* числам 2, 4 и 5. Обратные им числа — $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. Если привести эти дроби

к общему знаменателю и отбросить его, то получим 10, 5 и 4. Теперь надо число 190 разделить на части, пропорциональные числам 10, 5 и 4. Имеем:

$$190 : (10 + 5 + 4) = 10;$$

$$10 \cdot 10 = 100; 10 \cdot 5 = 50; 10 \cdot 4 = 40.$$

Ответ. 100, 50 и 40.



Проверьте себя

1. Какие величины называют пропорциональными?
2. Приведите пример задачи на пропорциональное деление.
3. Что значит разделить число 100 на части, пропорциональные числам 3 и 7? Как это сделать?
4. Как найти два числа по их сумме и отношению?



Выполняем вместе

① Разность двух чисел равна 13, а относятся они как 7 : 5 (рис. 54). Найдите эти числа.

● По условию задачи искомые числа равны $7a$ и $5a$, где a — некоторое число. Кроме того, $7a - 5a = 13$, $2a = 13$. Отсюда $a = 6,5$. Поэтому $7a = 45,5$, $5a = 32,5$.

Ответ. 45,5 и 32,5.



Рис. 54

② Кабель длиной 92 м разрезали на три части так, что первая и вторая части относятся как 2 : 3, а вторая и третья – как 5 : 7. Найдите длины этих частей кабеля.

• Умножим оба члена первого отношения на 5, а второго на 3, получим отношения 10 : 15 и 15 : 21. Следовательно, длины частей кабеля пропорциональны числам 10, 15 и 21, то есть равны $10x$, $15x$ и $21x$, где x – некоторое число. Поскольку сумма этих длин равна 92 м, то имеем уравнение $10x + 15x + 21x = 92$, $46x = 92$. Отсюда $x = 2$. Тогда $10x = 20$, $15x = 30$, $21x = 42$.

Ответ. 20 м, 30 м и 42 м.



Устные упражнения

757. Разделите число 30 на части, пропорциональные числам 1 и 2.

758. Разделите число 50 на части, пропорциональные числам 2 и 3.

759. Разделите число 60 на части, пропорциональные числам:
а) 1 и 2; б) 2 и 3; в) 1 и 9; г) 3 и 7; д) 5 и 7.

760. Разделите число 100 на части, которые относились бы как:
а) 2 : 8; б) 3 : 7; в) 1 : 4; г) 2 : 3; д) 7 : 13.

761. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если они пропорциональны числам 2 и 7.

762. Градусные меры смежных углов пропорциональны числам 1 и 8. Найдите их.

763. Найдите меры углов треугольника, если известно, что их градусные меры пропорциональны числам 1, 2 и 3.



Уровень А

764. Веревку длиной 12 м разрезали на две части, длины которых относятся как 2 : 3. Найдите длины частей веревки.

765. Рельс длиной 18 м разрезали на две части, длины которых пропорциональны числам 4 и 5. Найдите длины частей рельса.

766. Разделите число 3000 на две части, пропорциональные числам 2 и 3.

767. Разделите число 1001 на три части, пропорциональные числам 1, 2 и 4.

768. Найдите три числа, пропорциональные числам 3, 5 и 8, если наибольшее из них равно 224.

769. Число 9600 разделили на четыре части, пропорциональные числам 2, 3, 8 и 11. Найдите эти числа.

770. Для изготовления фарфора берут 25 частей белой глины, 2 части песка и 1 часть гипса. Сколько каждого из этих материалов надо взять, чтобы получить 280 кг смеси, из которой изготавливают фарфор?

771. Найдите длины сторон треугольника, если они пропорциональны числам 2, 3 и 4, а периметр треугольника равен 36 см.

772. Найдите длины сторон четырехугольника, если они пропорциональны числам 2, 3, 4 и 5, а периметр четырехугольника равен 105 см.



Уровень Б

773. Чтобы изготовить замазку, берут известь, ржаную муку и масляный лак в соотношениях, указанных на диаграмме (рис. 55). Сколько надо взять каждого материала, чтобы изготовить 4,2 кг замазки?

774. Число 200 разделите на три части, пропорциональные числам:

а) $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$.

775. Сумма двух чисел равна 600, а относятся они как $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$. Найдите эти числа.

776. Найдите длины сторон четырехугольника, если они пропорциональны числам 1, 3, 3 и 5 (рис. 56), а самая длинная сторона больше самой короткой на 12 см.



Рис. 55

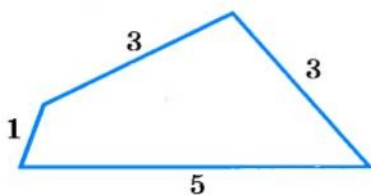


Рис. 56

777. Найдите меры углов треугольника, если они пропорциональны числам 1, 3 и 5.

778. Найдите меры углов треугольника, если один из них в 2 раза больше второго и в 3 раза меньше третьего.

779. Сумма трех чисел равна 24,8. Найдите эти числа, если первое из них относится ко второму как 3 : 5, а второе к третьему как 2 : 3.

780. 10 коням на 30 дней нужно 9 ц овса. Сколько овса нужно 24 коням на 36 дней?

781. Найдите три числа, пропорциональные числам 2, 4 и 7, среднее арифметическое которых равно 52.

782. Карту, выполненную в масштабе 1 : 25 000, переделали на карту с масштабом 1 : 10 000. Найдите длину железной дороги на новой карте, если на старой она изображена отрезком длиной 15 см.



Упражнения для повторения

783. Округлите числа 2,3094 и 8,7088 до тысячных, сотых, десятых.

784. Найдите сумму, разность, произведение и частное приближенных чисел 0,912 и 1,07.

785. Просклоняйте словосочетание *девять процентов*.

786. На сколько процентов сумма чисел 3,5 и 2,5 больше их разности?

787. Найдите площадь поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 26 см, 3 дм и 0,4 м.

788. Вчера в классе присутствовало в 8 раз больше учеников, чем отсутствовало. Сегодня не пришли еще 2 ученика, поэтому отсутствующие ученики составляют уже 20 % от присутствующих. Сколько всего учеников в этом классе?

§ 23.

Окружность и круг

Окружность можно начертить циркулем (рис. 57). Если острие циркуля, каким начерчена окружность, находится в точке O , то эта точка – *центр* данной окружности. Отрезок, соединяющий любую точку окружности с ее центром, называется *радиусом* окружности. А отрезок, который соединяет две точки окружности и проходит через ее центр, – *диаметром*. На рисунке 58 точка O – центр окружности, AB – диаметр, OA и OB – радиусы. В окружности можно провести бесконечно много радиусов и диаметров. Каждый диаметр в 2 раза длиннее радиуса, то есть $d = 2r$.



Рис. 57

Форму окружности имеет обруч, обод стакана, экватор и параллели на глобусе и т. п. Чтобы измерить длину окружности, можно вдоль нее положить нить, а потом измерить ее длину. А можно длину окружности не измерять, а вычислять. Ученые еще в древние времена установили, что отношение длины каждой окружности к длине ее диаметра равно одному и тому же числу, приближенное значение которого равно 3,14. Это число во всем мире обозначают буквой π (пи) (см. с. 168).

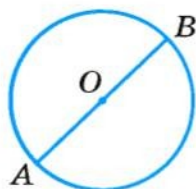
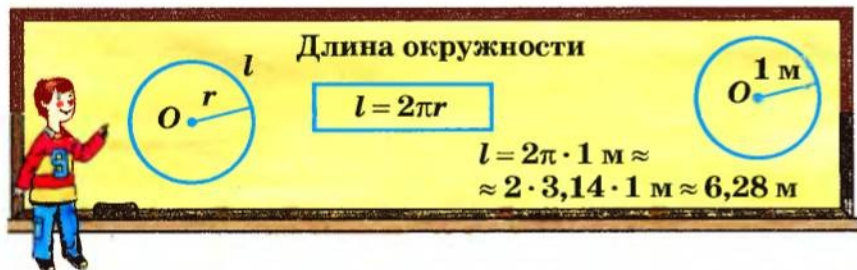


Рис. 58

Следовательно, если длина окружности l , а ее диаметр d , то $l : d = \pi$. Отсюда $l = \pi d$. Поскольку $d = 2r$, то

$$l = 2\pi r.$$

Это – формула длины окружности.



Например, если радиус окружности равен 5 см, то ее длина

$$l \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \approx 31,4 \text{ (см)}.$$

Ответ приближенный, поскольку $\pi \approx 3,14$.

Окружность на плоскости разбивает ее на две области: внутреннюю и внешнюю. Объединение окружности и ее внутренней области называют *кругом* (рис. 59). *Центр, радиус, диаметр круга* – это соответственно центр, радиус, диаметр окружности, которая ограничивает данный круг. Площадь круга, как и длина окружности, зависит от длины его радиуса. Доказано, что площадь каждого круга радиуса OA в π раз больше площади квадрата со стороной OA (рис. 60). То есть, если радиус круга равен r , то его площадь

$$S = \pi r^2.$$

Это – формула площади круга.

Например, если радиус круга равен 10 см, то площадь этого круга $S \approx 3,14 \cdot 10^2$; $S \approx 314 \text{ (см}^2\text{)}$.



Часть круга, ограниченная его двумя радиусами, называется *круговым сектором*. На рисунке 61 изображен круг, разделенный на 3 равные сектора. Подумайте, как можно найти площадь каждого из них, если радиус круга равен 2 см.

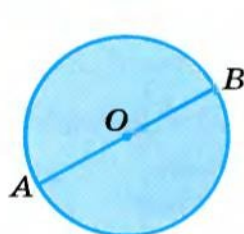


Рис. 59

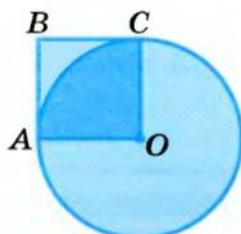


Рис. 60



Рис. 61



Узнайте больше

Если круг вращать вокруг его диаметра, то образуется *шар*.

Все точки поверхности шара одинаково удалены от *центра шара*. Отрезок, соединяющий центр шара с любой точкой его поверхности, называется *радиусом шара*. Отрезок, который соединяет две точки поверхности шара и проходит через его центр, — *диаметром шара*. Диаметр шара равен двум его радиусам. На рисунке 62 изображен шар с центром O и радиусом OA.

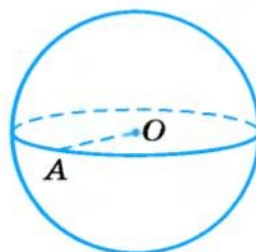


Рис. 62

Если через центр шара провести плоскость, то она пересечет шар по кругу, а поверхность шара — по окружности. На географическом глобусе такими окружностями являются *экватор* и *линии меридианов*. Поскольку длина окружности радиуса r равна $2\pi r$, то длина экватора шара радиуса r равна $2\pi r$.

Кругами являются также основания цилиндра (рис. 63, а). Разрезав поверхность цилиндра вдоль некоторых линий (каких?), ее можно развернуть. В результате образуется *развертка поверхности цилиндра* (рис. 63, б). Боковая поверхность цилиндра разворачивается в прямоугольник. Основание этого прямоугольника равно длине окружности основания цилиндра. Если радиус основания цилиндра равен r , то длина окружности основания цилиндра — $2\pi r$. Поэтому основание прямоугольника, в который разворачивается боковая поверхность цилиндра, тоже равно $2\pi r$. Высота этого прямоугольника h — это *высота* данного цилиндра. Площадь развертки боковой поверхности цилиндра равна $2\pi rh$. Такая же площадь боковой поверхности цилиндра: $S_6 = 2\pi rh$.

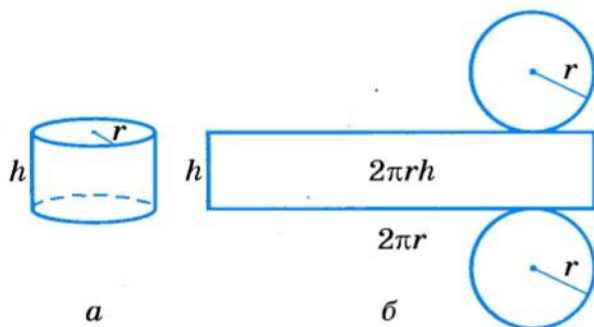


Рис. 63

Чтобы найти площадь всей поверхности цилиндра, надо к площади его боковой поверхности прибавить площади двух его оснований. Поскольку площадь круга радиуса r равна πr^2 , то площадь поверхности цилиндра $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$.



Проверьте себя

1. Что такое радиус окружности? Диаметр?
2. Чему равно отношение длины окружности к ее диаметру? А к радиусу?
3. Запишите формулу длины окружности.
4. Чему приближенно равно число π ?
5. Что такое круг?
6. Что такое центр, радиус, диаметр круга?
7. Запишите формулу площади круга.
8. Что называют круговым сектором?



ВЫПОЛНЯЕМ ВМЕСТЕ

① Какой путь проходит за 1 ч конец часовой стрелки, длина которой равна 30 см (рис. 64)?

• Длина окружности, описанной концом стрелки, равна

$$2\pi \cdot 30 \text{ см} \approx 188,4 \text{ см.}$$

За час стрелка опишет $\frac{1}{12}$ часть окруж-

ности. Поэтому $\frac{1}{12} \cdot 188,4 \text{ см} = 15,7 \text{ см.}$

Ответ. $\approx 15,7 \text{ см.}$



Рис. 64



Устные упражнения

789. Чему равна длина окружности радиуса 1 см? А радиуса 1 м?

790. Что больше: длина отрезка 6 дм или длина окружности радиуса 1 дм?

791. Чему равна длина полуокружности (рис. 65) радиуса 1 м?

792. Что больше: площадь квадрата со стороной 1 м или площадь круга радиуса 2 м?

793. Во сколько раз длина окружности радиуса 4 см длиннее длины окружности радиуса 1 см?

794. Каждая вершина квадрата лежит на окружности (рис. 66). Что больше:

а) периметр квадрата или длина окружности;

б) площадь квадрата или площадь круга, ограниченного этой окружностью?



Рис. 65

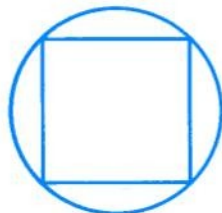


Рис. 66

795. Разгадайте ребусы.



Уровень А

796. Начертите окружность радиуса 3 см. Обозначьте буквой ее центр, проведите радиус, диаметр.

797. Найдите диаметр окружности, если ее радиус равен:
а) 2,5 м; б) 3,4 см.

798. Найдите радиус окружности, диаметр которой равен:
а) 7 м; б) 0,35 дм.

799. Начертите окружность. Проведите в ней два взаимно перпендикулярных диаметра.

800. Начертите окружность. Проведите в ней три радиуса так, чтобы они образовали три равных угла.

801. Найдите длину окружности, диаметр которой равен:
а) 10 см; б) 4 м; в) 0,5 дм; г) с км.

802. Найдите длину окружности, радиус которой равен:
а) 15 мм; б) 12 м; в) 2,5 дм; г) $\frac{3}{4}$ км.

803. Найдите диаметр окружности, длина которой равна:
а) 314 см; б) 62,8 дм; в) 0,314 км.

804. Найдите радиус окружности, длина которой равна:
а) 31,4 м; б) 0,942 м; в) 0,628 км.

805. Вычислите площадь круга, радиус которого равен:
а) 20 см; б) 0,4 м; в) 0,5а дм.

806. Вычислите площадь круга, диаметр которого равен:
а) 8 дм; б) 15 см; в) 0,2 м; г) 0,02 км.

807. Площадь круга равна 314 см^2 . Найдите длину его радиуса.



Уровень Б

808. Найдите диаметр круга, площадь которого равна $78,5 \text{ м}^2$.

809. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью длиной 6,28 см.

810. Начертите круг радиуса 2 см и разделите его на четыре равные сектора. Найдите площадь одного сектора.

811. Какой путь проходит за 2 ч конец минутной стрелки, длина которой равна 1,5 см?

812. Найдите длину ремня, натянутого на два шкива, если радиус каждого из них равен $0,4$ м, а расстояние между их центрами – $2,5$ м (рис. 67).

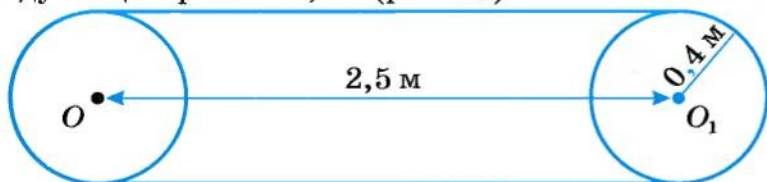


Рис. 67

813. Чтобы вытянуть ведро воды, надо ручку коловорота повернуть 15 раз. Найдите глубину колодца, если диаметр барабана равен 26 см.

814. На катушку, диаметр которой равен 5 см, намотано 20 витков проволоки. Найдите длину этой проволоки.

815. Диаметр велосипедного колеса равен 8 дм. Сколько оборотов сделает это колесо, если велосипедист проедет 1 км?

816. Модель самолета летает по окружности радиуса 30 м. Какое расстояние пролетит эта модель за 40 оборотов?

817. Радиус одного круга равен диаметру другого. Найдите отношение площадей этих кругов.

818. Сделав необходимые измерения, вычислите площади фигур, изображенных на рисунке 68.

819. Вычислите площадь прокладки, изображенной на рисунке 69, если $OB = 1$ см, $OC = 2$ см, $OO_1 = 6$ см.

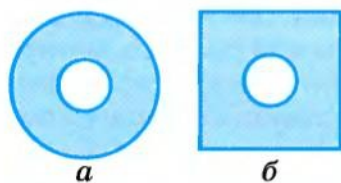


Рис. 68

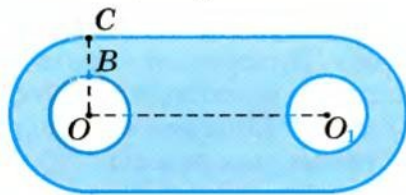


Рис. 69

820. Практическое задание. При помощи нити и линейки или сантиметровой ленты измерьте диаметр и длину обода: а) стакана; б) блюда; в) банки; г) тарелки. Найдите их отношение. Результаты запишите в форме таблицы.



Упражнения для повторения

821. В трех ящиках всего 58 кг яблок. Сколько килограммов яблок в первом ящике, если в нем столько же яблок, как и во втором, и на 2 кг больше, чем в третьем?

822. Тракторист в первый день вспахал 12 га поля, во второй – на 10 % больше, а в третий – на 2 га меньше, чем во второй день. Сколько гектаров он вспахал за три дня?

823. Решите уравнение:

а) $3,2x + 2,5 = 17,5$; б) $1,3^2 - 1,3x = 0$.

824. Надя взяла у подруги книгу на 3 дня. В первый день она прочитала половину книги, во второй – третью часть оставшихся страниц, а в третий – половину того, что прочитала за первые два дня. Успела ли она прочитать книгу?

825. Когда купленные на праздник конфеты сестрички раскладывали по две, по три, по четыре, то каждый раз оставалась одна конфета, а когда раскладывали по пять, остатка не было. Сколько всего было конфет?

826. Задача-шутка. Крестьянка продавала яйца. Первый покупатель купил у нее половину всех яиц и еще пол-яйца, второй – половину остатка и еще пол-яйца. После этого осталось одно надбитое яйцо. Сколько яиц продано?

§ 24.

Диаграммы

Рисунки воспринимаются и запоминаются лучше, чем слова и цифры. Для наглядного изображения числовых значений различных величин используют диаграммы. Это слово греческого происхождения, оно обозначает «рисунок». Диаграмма – это символический рисунок, который наглядно иллюстрирует соотношение между значениями величин. Чаще всего используют линейные, столбчатые и круговые диаграммы.

Линейная диаграмма, как правило, состоит из нескольких отрезков. Например, изображенная на рисунке 70 диаграмма позволяет наглядно сравнить длины наибольших рек Европы. Большшему значению длины реки соответствует

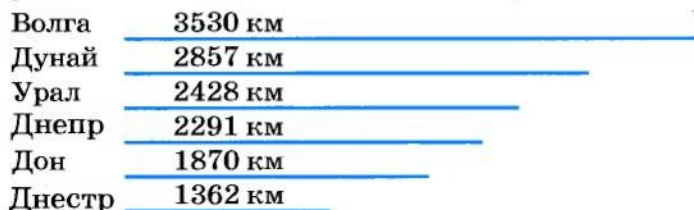


Рис. 70

более длинный отрезок. На этой диаграмме отрезки расположены горизонтально. На других диаграммах их изображают вертикально. Линейная диаграмма на рисунке 71 иллюстрирует, как с годами увеличивалось население Земли (в миллионах). В 1750 г. людей было примерно 730 миллионов, в 1800 г. — 950 миллионов и т. д. В 2000 г. было примерно 6 миллиардов человек.

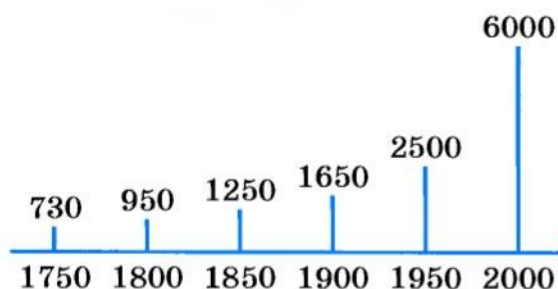


Рис. 71

Столбчатая диаграмма отличается от линейной тем, что в ней отрезки заменены прямоугольниками. Такой является диаграмма, изображенная на рисунке 72. На ней

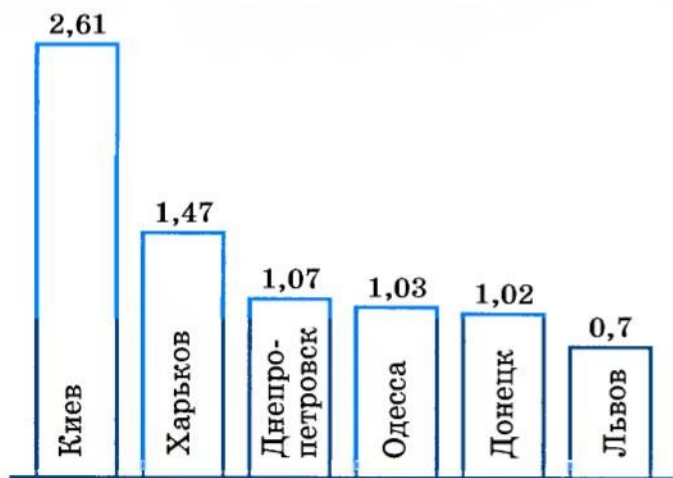


Рис. 72

сравнивается численность населения наибольших городов Украины (в миллионах; по данным Всеукраинской переписи 2001 г.).

Круговая диаграмма имеет вид круга, разделенного радиусами на части (секторы). Поэтому такие диаграммы

называют также *секторными*. На рисунке 73 изображена диаграмма, которая показывает, сколько процентов живет в Украине украинцев, русских и людей других национальностей (данные за 2001 г.). Весь круг соответствует 100 процентам.

Иногда диаграмма помогает решить задачу. Пусть, например, надо найти два числа, сумма которых равна 27, а разность – 7. Этой задаче соответствует диаграмма, изображенная на рисунке 74. Первое число больше второго на 7. Если из первого вычесть 7, получим 20 – удвоенное второе число. Таким образом, второе число равно 10, а первое – 17. Так, пользуясь диаграммой, задачу можно решить устно.



Рис. 73



Рис. 74



Узнайте больше

Иногда на диаграммах вместо столбиков изображают прямоугольные параллелепипеды или цилиндры (рис. 75). При этом придерживаются таких требований: основания таких фигур должны быть равны, а высоты – пропорциональны соответствующим значениям величин.

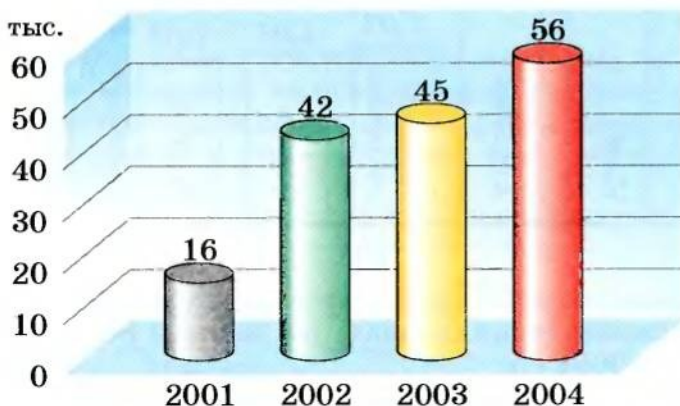


Рис. 75

Когда хотят изобразить наглядно соотношения между сродными объектами, пользуются кругами, овалами и т. п. Например, соотношения между четырехугольниками, прямоугольниками и квадратами можно изобразить так, как показано на рисунке 76. Такие схематические изображения называют *диаграммами Эйлера* – в честь известного швейцарского математика Леонарда Эйлера (1707–1783).



Рис. 76



Проверьте себя

1. Что такое диаграмма?
2. Какие бывают диаграммы?
3. Приведите примеры линейной диаграммы.
4. Приведите примеры секторной диаграммы.



Выполняем вместе

① Постройте столбчатую диаграмму, отображающую площади океанов по данным таблицы.

	Название океана	Площадь, млн кв. км
1	Тихий	179
2	Атлантический	90
3	Индийский	76
4	Северный Ледовитый	16

• Построим на одной прямой равные основания четырех прямоугольников. Пусть площади 10 млн кв. км соответствует прямоугольник, высота которого равна одной клеточке тетради (0,5 см). Высоту столбика, который соответствует площади Тихого океана, найдем из пропорции $10 : 0,5 = 179 : x$. Отсюда $x \approx 9$ см. Высоты других столбиков: 4,5 см, 3,8 см и 0,8 см. Строим диаграмму (рис. 77).

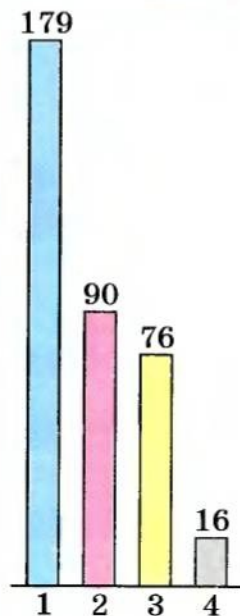
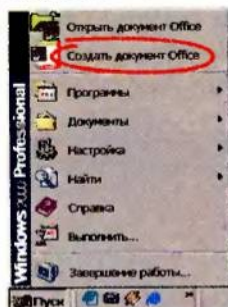


Рис. 77

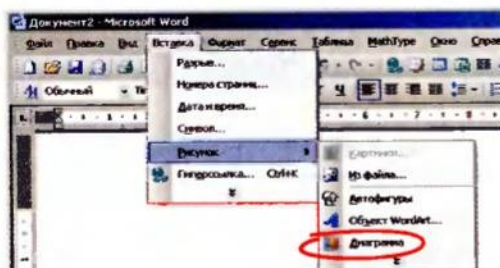
② Постройте при помощи компьютера секторную диаграмму, которая отображает состав винегрета (картофель – 40 г, свекла – 40 г, морковь – 24 г, лук – 10 г, огурец квашеный – 20 г, растительное масло – 4 г).

• 1. Включите компьютер, при помощи кнопки «Пуск» создайте новый документ (рис. 78, а).

2. В открытом окне последовательно нажмите кнопки «Вставка» → «Рисунок» → «Диаграмма» (рис. 78, б).



а



б

Рис. 78

3. В новом окне нажмите последовательно кнопки «Диаграмма» → «Тип диаграммы» и выберите в меню «Круговая».

4. Введите в таблицу заданные значения (рис. 79).

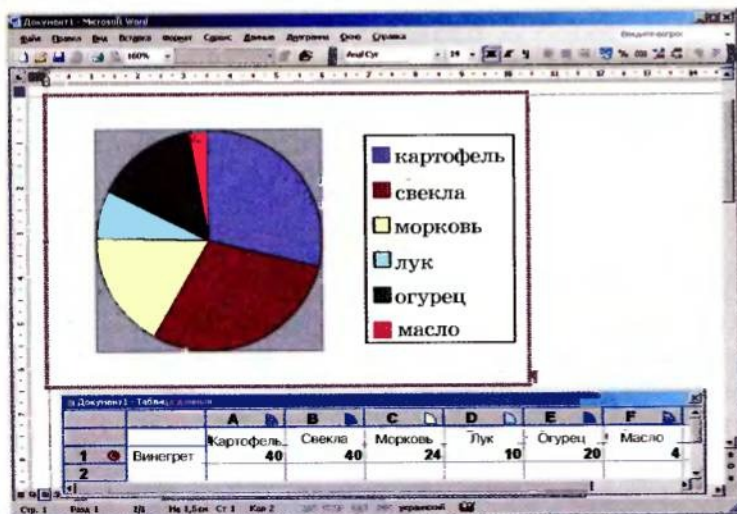


Рис. 79

5. Сохраните и распечатайте полученное изображение. Оно может быть таким, как на рисунке 79.



Устные упражнения

827. На рисунке 75 изображена диаграмма, которая отображает количество футбольных мячей, поступивших в общеобразовательные школы Украины в последние годы. Проанализируйте ее.

828. Найдите значения x , y и z , которые соответствуют диаграмме, изображенной на рисунке 80.

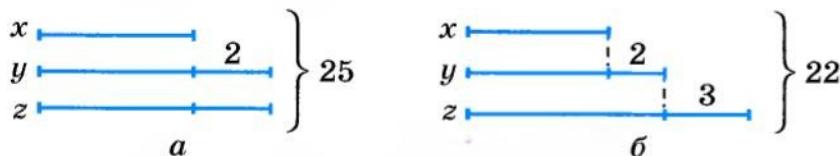


Рис. 80

829. Проанализируйте диаграмму, которая показывает химический состав пищевых продуктов (рис. 81).

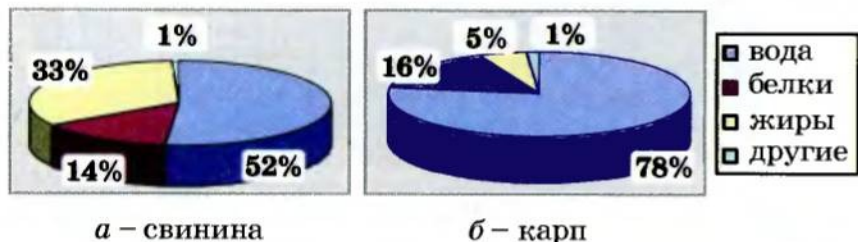


Рис. 81



Уровень А

830. Постройте столбчатую диаграмму численности жителей городов мира по таким данным: население Токио – 26,8 млн, Сан-Пауло – 16,4 млн, Нью-Йорка – 16,3 млн.

831. Постройте линейную диаграмму наибольших лиманов и озер Украины по таким данным: Днестровский лиман имеет площадь 360 км^2 , озеро Сасик (Кундук) – 210 км^2 , Молочный лиман – 170 км^2 , Тилигульский лиман – 160 км^2 , озеро Ялпуг – 149 км^2 .

832. В математическом конкурсе участвовало 2720 учеников 5–6-х классов. На диаграмме (рис. 82) показана зависимость количества участников (в %), которые правильно решили задачу, от номера задачи. При помощи этой диаграммы установите:

- а) какая задача оказалась самой трудной;
 б) были ли задачи, которые не решил ни один участник;
 в) какую задачу правильно решили почти все участники;
 г) какие задачи решили менее 20 % участников;
 д) какие задачи решили более 80 % участников;
 е) какой процент составляют ученики, решившие задачи № 2 и 13;
 ж) сколько учеников решили задачи № 9, 22, 27?

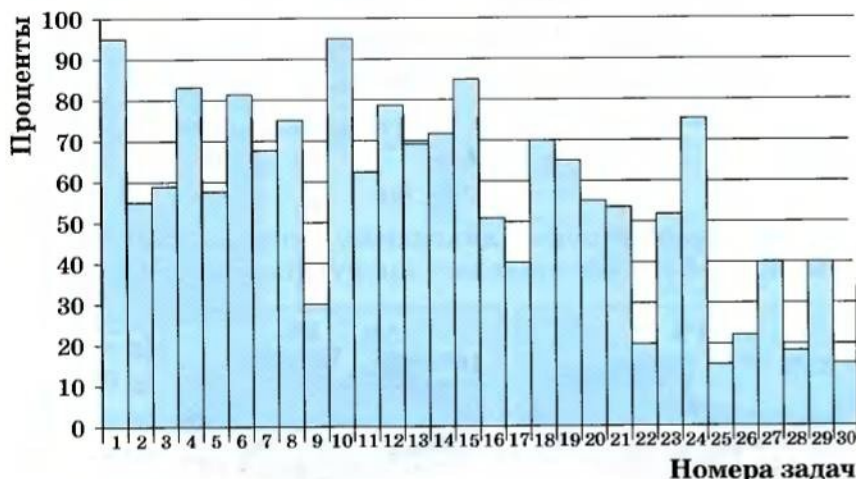


Рис. 82

833. Измерьте рост всех членов своей семьи и постройте соответствующую линейную диаграмму.

834. Постройте столбчатую диаграмму учитывая возраст всех членов вашей семьи.

835. В классе обучаются 32 ученика. Из них шесть учатся на «10–12», двенадцать – на «9–11», четверо – на «3–5», остальные – на «6–8». Постройте:

а) столбчатую диаграмму; б) круговую диаграмму.

836. Одно число больше другого на 5 и меньше третьего на 6, а их сумма равна 52. Найдите эти числа. По условию задачи постройте диаграмму. Решите задачу, пользуясь этой диаграммой.



Уровень Б

837. Дневную норму пищи врачи рекомендуют распределять так: первый завтрак – 25 %, второй – 15 %, обед – 45 % и ужин – 15 %. Изобразите это при помощи круговой диаграммы.

838. Постройте секторную или столбчатую диаграмму распределения посевных площадей в Украине, если в среднем они такие:

- 1) озимая пшеница – 23,3 %;
- 2) другие зерновые – 21,8 %;
- 3) технические культуры – 11,5 %;
- 4) кормовые культуры – 37,1 %;
- 5) картофель и овощи – 6,3 %.

839. На китайском языке разговаривает 701 млн человек, на английском – 386 млн, на русском – 265 млн, на испанском – 245 млн, на хинди – 237 млн, на арабском – 147 млн, на немецком – 119 млн, на французском – 103 млн. Постройте по этим данным столбчатую диаграмму.

840. С помощью географической карты определите расстояние от Киева до областных центров Украины и по этим данным постройте линейную диаграмму.

841. Изобразите при помощи диаграммы Эйлера соотношение между такими объектами:

- а) животные, собаки, коты, бульдоги;
- б) треугольники, прямоугольные треугольники, равносторонние треугольники, равнобедренные треугольники.

842. Практическое задание. Подсчитайте, сколько часов в сутки вы спите, сколько проводите в школе, сколько выполняете домашние задания, сколько занимаетесь другими делами, и постройте соответствующую круговую диаграмму.



Упражнения для повторения

843. Разместите числа 3,4, 3,39, $\frac{7}{2}$, $3\frac{1}{9}$ в порядке возрастания.

844. Весной молодой тополь имел высоту 3,5 м, а за полгода вырос на 25 см. На сколько процентов он вырос за полгода?

845. Из двух городов, расстояние между которыми 400 км, одновременно выехали навстречу друг другу два грузовых автомобиля и встретились через 4 ч. Скорость одного из них 52 км/ч. Найдите скорость другого автомобиля.

846. Площадь квадрата равна 81 см^2 . Найдите его периметр.

847. Ученик утверждает: «Еще позавчера мне было 12 лет, а в следующем году мне будет 15». При каком условии это возможно?



Самостоятельная работа 4

Вариант 1

1°. Замените отношением натуральных чисел отношение:

а) $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$; б) $0,7 : \frac{3}{4}$; в) $1\frac{1}{2} : 2,3$.

2°. На сколько процентов:

а) число 63 больше 50; б) число 80 меньше 200?

3°. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{12} = \frac{17}{30}$; б) $\frac{5}{x} = 1,3$.

4°. Масса 25 м проволоки равна 12 кг. Чему равна масса 40 м такой проволоки?

5°. Найдите длины сторон треугольника, если они пропорциональны числам 3, 5 и 6, а периметр треугольника равен 2,8 дм.

Вариант 2

1°. Замените отношением натуральных чисел отношение:

а) $\frac{3}{5} : \frac{2}{7}$; б) $0,6 : \frac{3}{4}$; в) $2\frac{1}{3} : 3,5$.

2°. На сколько процентов:

а) число 53 больше 40; б) число 75 меньше 125?

3°. Решите уравнение:

а) $\frac{12}{x} = \frac{15}{16}$; б) $2,5 = \frac{5}{x}$.

4°. Масса 5 м³ мела равна 12 т. Чему равна масса 24 м³ мела?

5°. Найдите длины сторон четырехугольника, если они пропорциональны числам 2, 3, 3 и 4, а периметр четырехугольника равен 75 см.

Вариант 3

1°. Замените отношением натуральных чисел отношение:

а) $\frac{5}{8} : \frac{3}{14}$; б) $1,2 : \frac{3}{4}$; в) $2\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3}$.

2°. На сколько процентов:

а) число 2,3 больше 1,6; б) число $\frac{1}{2}$ меньше $\frac{2}{3}$?

3°. Решите уравнение:

а) $\frac{12}{7} = \frac{x}{3,5}$; б) $\frac{6}{x} = 1\frac{1}{7}$.

4°. Масса 8 см³ серебра равна 84 г. Чему равна масса 0,5 дм³ серебра?

5°. Найдите длины сторон четырехугольника, если они пропорциональны числам 3, 4, 5 и 7, а периметр четырехугольника равен 3,8 см.

Вариант 4

1°. Замените отношением натуральных чисел отношение:

а) $\frac{4}{5} : \frac{7}{8}$; б) $\frac{2}{3} : 2,5$; в) $3\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3}$.

2°. На сколько процентов сумма чисел $\frac{7}{5}$ и $\frac{1}{5}$:

а) больше их разности; б) меньше их частного?

3°. Решите уравнение:

а) $\frac{1,2}{x} = \frac{7}{5}$; б) $\frac{1,2}{x} = 2\frac{1}{2}$.

4°. Масса 4 м³ антрацита равна 6 т. Чему равен объем 16,5 т антрацита?

5°. Найдите длины сторон четырехугольника, если они пропорциональны числам 2, 3, 5 и 7, а наиболее длинная сторона на 85 см длиннее самой короткой.



Готовимся
к тематическому контролю



Вопросы для самопроверки

1. Что такое отношение двух чисел?
2. Сформулируйте основное свойство отношения.
3. Что такое процентное отношение?
4. Как найти процентное отношение?
5. Сформулируйте определение пропорции.
6. Сформулируйте основное свойство пропорции.
7. Какие величины называют пропорциональными?
8. Приведите примеры пропорциональных величин.
9. Какими способами решают задачи на пропорциональное деление?

Задания в тестовой форме

1. Упростите отношение $0,12 : 0,3$.
а) $12 : 3$; б) 4 ; в) $2 : 5$; г) $5 : 2$.
2. Вычислите отношение величин $3 \text{ м} : 20 \text{ см}$.
а) $1,5$; б) 15 ; в) $3,2$; г) 32 .
3. Какова вероятность того, что Красная Шапочка родилась в январе?
а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{30}$; г) $\frac{1}{7}$.
4. На каждой грани куба написана одна буква из слова «МОЛОКО». Какова вероятность того, что куб упадет на грань с буквой «О»?
а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{5}{6}$.
5. Какое число относится к 14 так, как 5 к 7?
а) 10; б) 140; в) 7; г) 50.
6. Найдите неизвестный член пропорции $4 : 1,5 = 6 : x$.
а) 4,5; б) 1; в) 22,5; г) 2,25.
7. Какой процент всхожести ржи, если из 200 высеванных зерен взошло 188?
а) 98 %; б) 96 %; в) 94 %; г) 92 %.
8. На сколько процентов число 45 меньше числа 50?
а) на 5 %; б) на 10 %; в) на 15 %; г) на 20 %.
9. Разделите число 120 на части, пропорциональные числам 3 и 5.
а) 40 и 80; б) 45 и 75; в) 35 и 85; г) 30 и 50.
10. Найдите длину окружности, радиус которой равен 2 см.
а) $\approx 1,256 \text{ см}$; б) $\approx 6,28 \text{ см}$; в) $\approx 12,56 \text{ см}$; г) $\approx 62,8 \text{ см}$.

Типовые задачи

- 1°. Составьте пропорцию из чисел 3, 5, 6 и 10.
- 2°. Решите уравнение, используя основное свойство пропорции:
а) $x : 3 = 8 : 5$;
б) $1,2 : x = 0,3 : 2,5$;
в) $3,2 : 0,6 = 40x : 5$.
- 3°. Вычислите площадь круга радиуса 5 см.
- 4°. В мешочке 8 белых и 7 красных шариков. Какова вероятность того, что взятый наугад шарик окажется красным?
- 5°. Найдите диаметр окружности, длина которой 62,8 см.
- 6°. За 5 ч трактор может вспахать 4 га поля. Сколько гектаров поля он вспашет за 7 ч?

7°. Сплавляли 1,2 кг цинка и 3,8 кг меди. Какой процент сплава составляет цинк?

8°. В классе 36 учеников. В первом семестре по математике четыре из них получили 12 баллов, три – 10 баллов, десять – 9 баллов, девять – 8 баллов, пять – 7 баллов, а остальные – 5 баллов. Постройте соответствующую секторную или столбчатую диаграмму.

9°. Семья получила новое жилье в 80-квартирном доме. Какова вероятность того, что номер новой квартиры будет содержать цифру 5?

10°. Для праздничной распродажи цену на товар снизили сначала на 10 %, а потом еще на 20 %. На сколько процентов снизилась цена после двух переоценок?



Исторические сведения

Отношения чисел интересовали ученых Египта и Вавилона еще 4000 лет назад. Математики Древней Греции исследовали в основном отношения отрезков. А поскольку длины отрезков выражаются числами, то все их знания об отношении отрезков верны и для отношения чисел.

Пропорции также были хорошо известны египтянам, вавилонянам и грекам. В знаменитом труде «Начала» Евклида (IV в. до н. э.) им посвящена вся пятая книга. В частности, в ней обосновано и много «производных пропорций», которые вытекают из какой-то данной.

Самой прекрасной пропорцией древние греки считали «золотую пропорцию», когда отрезок длиной $m + n$ делят на две части m и n так, что $(m + n) : m = m : n$ (рис. 83). При этом $m : n \approx 1,618$. Такую пропорцию называли также «божественной пропорцией»; считали, что ей соответствуют наиболее совершенные творения природы и шедевры художников.



Рис. 83

Окружность и круг людям были известны еще в древние времена. Раньше люди не различали окружность и круг. Например, пели: «Ой зійди, зійди, ясен місяцю, як млинове коло». Хотя «повний місяць» и «млиновий камінь» имеют форму круга, а не окружности. Происхождение слова «коло» украинское и очень древнее.

В наших краях еще несколько тысячелетий назад женщины носили украшения, которые имели детали в виде окружностей (рис. 84). И колеса колесниц мастера-люди умели изготавливать еще несколько тысячелетий до новой эры.

Изобретение колеса – большое открытие. Сначала люди пользовались катками, потом, чтобы катки не переносить, додумались вставлять их в прорезы, словно в подшипники. Со временем колеса начали изготавливать отдельно от оси, но из сплошного дерева. Только позже научились изготавливать колеса со спицами, которые были больше, легче и крепче. Схематически историю изобретения колеса показано на рисунке 85.



Рис. 84



Рис. 85

Интересная история числа π – отношения длины окружности к ее диаметру. Ученые Вавилона считали, что $\pi = 3$. Древние египтяне знали более точное значение этого числа: 3,16.

Древнегреческий ученый Архимед нашел, что $\pi \approx \frac{22}{7}$, поэтому это число называют архимедовым. Приблизительно оно равно 3,14. Для решения большинства практических задач такой точности достаточно. Но со временем китайские, европейские и другие математики находили все больше и больше десятичных знаков числа π . Сейчас доказано, что оно выражается бесконечной непериодической десятичной дробью:

$$\pi = 3,1415926536\dots$$



Главное в разделе 3

Частное от деления двух чисел называют также их **отношением**. Отношение чисел a и b – это $a : b$, или $\frac{a}{b}$. Каждая обыкновенная дробь является отношением ее числителя к знаменателю.

Основное свойство отношения. Значение отношения не изменится, если оба члена умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля. Например, $300 : 500 = 3 : 5$.

Отношение дробных чисел всегда можно заменить отношением натуральных чисел. Например,

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{7} = \frac{14}{21} : \frac{12}{21} = 14 : 12 = 7 : 6.$$

Процентным отношением называют отношение, выраженное в процентах. Например, $3 : 15 = 0,2 = 20\%$.

Вероятностью события называют отношение количества благоприятных для него результатов к количеству всех возможных результатов. Например, вероятность того, что подброшенная монета упадет вверх гербом, равна 0,5.

Отношение длины каждой окружности к ее диаметру равно числу π , которое приближенно равно 3,14. Длину l окружности и площадь S круга находят по формулам $l = 2\pi r$, $S = \pi r^2$, где r – радиус.

Равенство двух отношений называют **пропорцией**. Примеры пропорций: $6 : 8 = 3 : 4$; $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$; $\frac{1}{x} = \frac{4}{15}$; $12 : (a - 2) = 4 : 7$.

Основное свойство пропорции. Если пропорция верна, то произведение ее крайних членов равно произведению средних. То есть, если

$$a : b = c : d, \text{ то } ad = bc.$$

Две величины называют **пропорциональными** (прямо пропорциональными), если с увеличением значений одной из них в несколько раз значения другой увеличиваются во столько же раз. Например, стоимость товара пропорциональна его количеству, пройденный автомобилем путь (при равномерном движении) пропорциональный времени движения. Если величины x и y пропорциональные, то $y = kx$.

Чтобы разделить число на части, пропорциональные данным числам, надо разделить его на сумму данных чисел и умножить на каждое из них. Разделим, например, число 540 на три части, пропорциональные числам 2, 3 и 5.

$$2 + 3 + 5 = 10, 540 : 10 = 54.$$

Умножив 54 на 2, на 3 и на 5, имеем: 108, 162 и 270.

Рациональные числа



**Число высвечивает глубину
мироздания.**

Г. Лейбниц

Этот раздел содержит очень важный и нужный материал. Натуральные и дробные числа, с которыми вы имели дело до сих пор, были известны людям более 4 тысячелетий назад. А отрицательные числа вошли в математику намного позже — несколько веков назад. Основное содержание этого раздела такое.

- Положительные и отрицательные числа.
- Действия с положительными и отрицательными числами.
- Преобразование простейших выражений.
- Перпендикулярные и параллельные прямые.
- Координатная плоскость и графики.

Весь этот материал является фундаментом математики, физики и других наук, которые вы будете изучать в последующих классах.

§ 25.

Положительные и отрицательные числа

Существуют числа, значения которых меньше 0. Их называют *отрицательными числами*. Например, отрицательными числами обозначают значение температуры.

Температура, при которой начинает замерзать вода — 0 градусов по Цельсию ($^{\circ}\text{C}$). А бывает еще холодней. Тогда столбик ртути в термометре опускается ниже отметки 0°C . Если столбик ртути размещен так, как на рисунке 86, то говорят, что термометр показывает «4 градуса мороза», или «4 градуса ниже нуля», или «минус 4 градуса». Пишут: -4°C . Иногда передают такие сведения о погоде: «В Ялте сегодня 5 градусов, в Одессе — 0 градусов, в Харькове — минус 2 градуса, в Киеве — минус 3 градуса». Эти значения температуры можно записать так: 5, 0, -2 , -3 градуса. Числа 5 и 0 вам уже известны. А числа -2 и -3 — примеры отрицательных чисел.

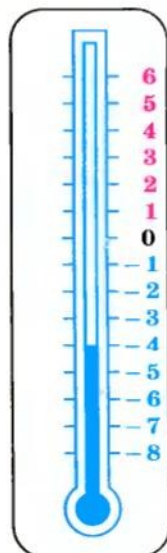


Рис. 86

Отрицательные числа записывают со знаком минус «-». Приводим еще примеры отрицательных чисел:

$$-6; -7; -12; -137; -\frac{3}{7}; -5\frac{1}{3}; -3,2; -0,08.$$

Те числа, что рассматривались раньше (кроме 0), теперь будем называть *положительными числами*. Иногда положительные числа пишут со знаком плюс «+». Число 0 – ни положительное, ни отрицательное.

Все положительные числа вместе с нулем называют *неотрицательными*.

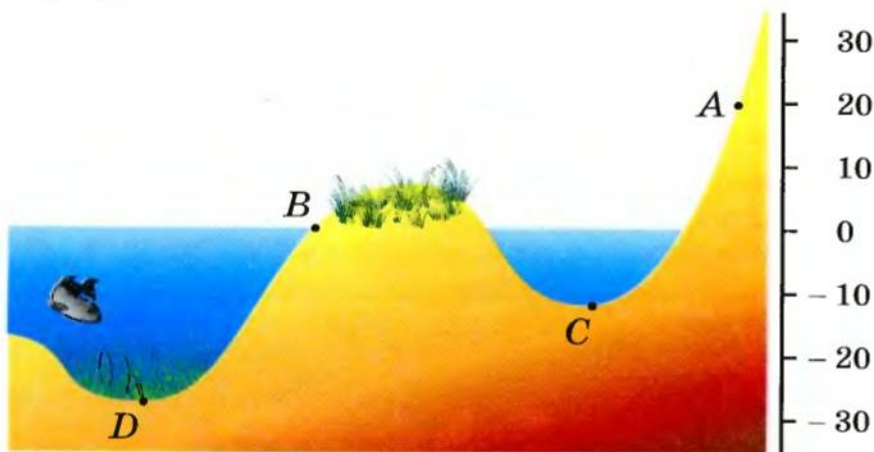


Рис. 87

Отрицательными и положительными числами обозначают не только значения температуры, но и расположение местности над уровнем моря (рис. 87), изменение количества денег в кассе (задача 857), они используются также во многих других случаях.



Узнайте больше

Обратите внимание на правильное произношение положительных и отрицательных чисел. Например,

- $a = 10$ – a равно десяти;
- $x = -14$ – x равно минус четырнадцать;
- $c > 2,5$ – c больше двух целых пяти десятых;
- $n < -7$ – n меньше минус семи.

Названия знаков чисел («+» и «-») не склоняются. Например, минус три, минус трех, минус трем и т. п.



Проверьте себя

1. Приведите примеры отрицательных чисел.
2. При какой температуре начинает замерзать вода?
3. Положительное или отрицательное число 0?
4. Какие числа называют неположительными?
5. Как называют вместе положительные числа и число 0?



Выполняем вместе

① Просклоняйте словосочетание «положительная разность», «минус семь».

- | | |
|-----------------------------|-------------|
| • И. положительная разность | минус семь |
| Р. положительной разности | минус семи |
| Д. положительной разности | минус семи |
| В. положительную разность | минус семь |
| Т. положительной разностью | минус семью |
| П. положительной разности | минус семи |



Устные упражнения

848. Прочитайте числа 3, -7, -12, 52, 0,3, $\frac{2}{3}$, $-\frac{7}{12}$, -2,9. Какие из них положительные, а какие – отрицательные?

849. Сколько градусов показывает термометр, изображенный на рисунке 88? Сколько он будет показывать, если температура снизится на 3 °С? А если на 5 °С?

850. Просклоняйте словосочетания «положительное число», «отрицательный множитель».

851. Верно ли, что число 0 – число неположительное? Является ли число 0 неотрицательным?

852. На географических картах возле горы Говерлы и берега Каспийского моря написаны числа 2061 и -28. Что они означают?

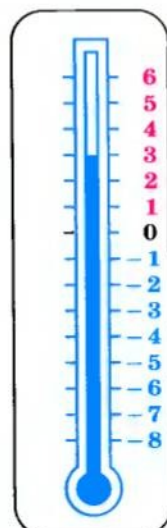


Рис. 88

853. Поворот шкива на 80° в направлении вращения часовой стрелки обозначают так: $+80^\circ$. А как обозначить поворот шкива на 90° в противоположном направлении (рис. 89)?

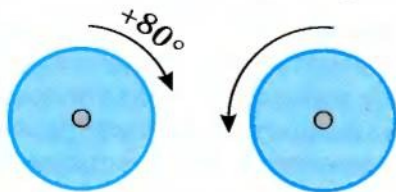


Рис. 89



Уровень А

854. Какие из чисел $3, -8, -109, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{8}, 0, -2\frac{1}{3}, -32,6$ отрицательные? Выпишите их.

855. Нарисуйте схематически термометр, который показывает -7°C . Сколько градусов он будет показывать, если температура повысится на 4°C ? А если снизится на 3°C ?

856. Запишите, используя отрицательные числа: а) 17 градусов мороза; б) 100 м ниже уровня моря; в) 5 градусов ниже нуля.

857. Деньги, вложенные вкладчиком в банк, кассир записывает со знаком «+», а взятые из банка — со знаком «-». Как изменилась сумма денег в кассе после того, как кассир обслужил пять вкладчиков (см. таблицу)?

Вкладчик	Денежная операция
1	+300
2	-250
3	-200
4	+700
5	-400

858. Просклоняйте словосочетания «минус двести», «минус три седьмых».



Уровень Б

859. В школу за год поступило a учащихся, а выбыло из нее b учащихся. На сколько изменилось количество учащихся за год? Объясните смысл ответа, если:

а) $a = 40, b = 23$; б) $a = 37, b = 45$; в) $a = 53, b = 53$.

860. Каждый ученик должен отрезать планку длиной 250 мм. Измерив отрезанные учениками планки, учитель записал результаты в таблицу. Объясните, что обозначают эти записи. Кто из учеников допустил наибольшую погрешность? Какой длины планку отрезал каждый ученик?

Ученик	Погрешность (мм)
Адамчук	-2
Белый	+1
Бойко	+2
Величко	-3
Гришко	-1

861. Практическое задание. Измерьте толщину своих учебников в миллиметрах (без обложки), запишите данные в таблицу. Найдите среднее значение толщины учебника и определите, на сколько толщина каждого учебника отличается от среднего значения.

	Математика	История	Русский язык	Иностранный язык	Среднее значение
Толщина					
Разность					



Упражнения для повторения

862. Постройте прямоугольный треугольник, меньшие стороны которого равны 3 см и 4 см. Найдите его площадь.

863. От поля, площадь которого равна 12 га, отделили участок в форме прямоугольника, размеры которого равны 60 м и 50 м. Найдите площадь оставшегося участка.

864. При каком значении c значения выражений $5,8$ и $3,7c - 2$ равны?

865. Сколько суток прошло от 1 января 2000 г. до сегодняшнего дня?

866. Можно ли выбрать из таблицы

1	3	5	7
9	11	13	15

пять чисел, сумма которых равна 30?

867. Существует ли прямоугольный параллелепипед, длина ребер и площадь поверхности которого выражаются нечетными натуральными числами?

868. а) Начертите прямой угол AOB и проведите всередине него луч OC так, чтобы меры углов AOC и COB относились как $2 : 3$.

б) Начертите прямой угол KPT и проведите луч PM так, чтобы меры углов KPM и MPT относились как $1 : 3$. Рассмотрите все случаи.

§26.

Координатная прямая

Посмотрите на линейку с делениями. Ее штрихи (черточки) делят линейку на равные *деления*. Большие штрихи обозначают числа $0, 1, 2, 3, \dots$. Расстояние между каждыми двумя соседними большими штрихами равно 1 см. Малым штрихам также соответствуют числа, но дробные (рис. 90). Все нанесенные на линейку штрихи образуют *шкалу*. Шкала линейки содержит штрихи, которым соответствуют только неотрицательные числа. А на шкале термометра есть штрихи, которым соответствуют и отрицательные числа (см. рис. 88).

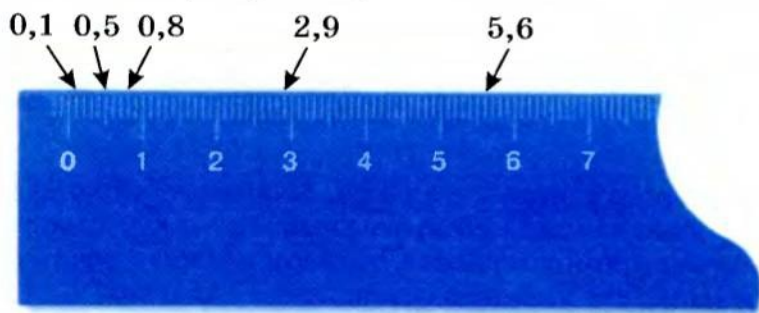


Рис. 90

Для математики наиболее пригодна прямолинейная шкала с равными делениями, бесконечная в обе стороны.

Вы уже знаете, что такое *координатный луч* (вспомните!). На координатный луч чем-то похожа и *координатная прямая*. Представим себе прямую (бесконечную). Обозначим на ней какую-либо точку O – это *начало отсчета*. Справа от нее на равных расстояниях друг от друга обозначим точки и поставим им в соответствие числа: $1, 2, 3, 4, \dots$. На таких же расстояниях друг от друга обозначим на прямой точки слева от точки O и поставим им в соответ-

ствие числа: $-1, -2, -3, -4, \dots$ (рис. 91). Такую прямую называют *координатной прямой*.

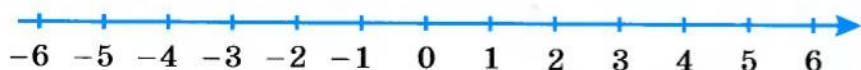


Рис. 91

Направление вправо от начала отсчета называют *положительным*, на координатной прямой его обозначают стрелкой.

Каждому числу на координатной прямой соответствует определенная единственная точка. Например, на координатной прямой, изображенной на рисунке 92, числу 2 соответствует точка A , числу -3 – точка B , числу $\frac{1}{2}$ – точка C , числу $3\frac{1}{3}$ – точка D . Говорят, что координата точки A равна 2, координата точки B равна -3 и т. д. Пишут:

$$A(2); B(-3); C\left(\frac{1}{2}\right); D\left(3\frac{1}{3}\right); O(0).$$

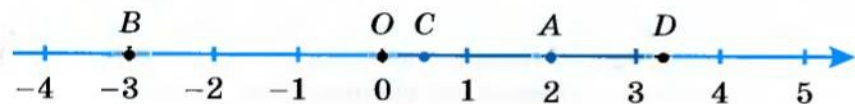


Рис. 92

Координата точки O – число 0. Это – *начало координат*. Отрезок, концы которого имеют координаты 0 и 1, принимают за *единичный отрезок* (рис. 93).



Рис. 93

Расстояние между точкой $O(0)$ и точкой $B(-3)$ (рис. 92) равно трем единичным отрезкам. Пишут $OB = 3$ ед. отр. Если длина единичного отрезка равна 1 см, то $OB = 3$ см.

За единичный отрезок можно взять и любой другой, в частности, длиной 1 дм, 5 мм. Например, на рисунке 93 длина единичного отрезка равна 1,7 см.



Узнайте больше

Своеобразной координатной прямой является *лента времени*, на которой изображают годы и столетия (рис. 94). Христиане за начало отсчета времени берут день рождения Иисуса Христа (Рождество Христово). Время после этого дня называют *новой эрой*, а до него – *до новой эры*. Вместо *до новой эры* сокращенно пишут *до н. э.* или *до Р. Х.*



Рис. 94

В Западной Европе такой отсчет времени введен с XVI в., а у нас (бывшей Российской империи) – только в 1700 г. До этого восточные славяне счет годам вели «от сотворения мира». Считали, что мир был создан 5508 лет до н. э.



Проверьте себя

1. Что вы знаете о штрихах и делениях на шкале линейки?
2. Как можно начертить координатную прямую?
3. Как на координатной прямой обозначают положительное направление?
4. Какую координату имеет начало координат?
5. Что такое единичный отрезок координатной прямой?



Выполняем вместе

① Длина единичного отрезка координатной прямой равна 2 см.

- а) Чему равно расстояние между точками $A(-2)$ и $B(3)$?
- б) Найдите координату точки C – середины отрезка AB .

• а) Начертим координатную прямую и обозначим на ней точки $A(-2)$ и $B(3)$ (рис. 95). Видим, что в отрезке AB

вмещается ровно 5 единичных отрезков. Поэтому $AB = 2 \text{ см} \cdot 5 = 10 \text{ см}$.

б) Точка C – середина отрезка AB – расположена так, как изображено на рисунке 95. Координата точки C равна 0,5.

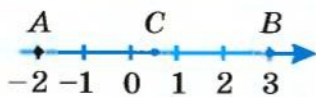


Рис. 95



Устные упражнения

С помощью координатной прямой (рис. 96) дайте ответы на вопросы (869–874).

869. Какие координаты точек: A , B , C , K , P ?

870. Есть ли точки с отрицательными координатами на отрезке: AB , AC , BP ?

871. Какая координата середины отрезка: CB , AK , BP , CK ?

872. Сколько единичных отрезков содержит отрезок: AB , AK , CK ?

873. Какой отрезок длиннее: AB или CK ?

874. Какая координата точки X , если точка O – середина отрезка XB ?

875. Чему равна длина отрезка AB (рис. 97)?

876. Имеет ли шкалу кантар (безмен) – ручные пружинные весы (рис. 98)? Определите массу груза.

877. Почему на шкалах весов нет штрихов с отрицательными числами? Может ли масса какого-то предмета выражаться отрицательным числом?

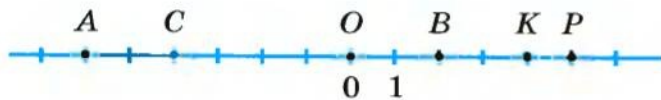


Рис. 96

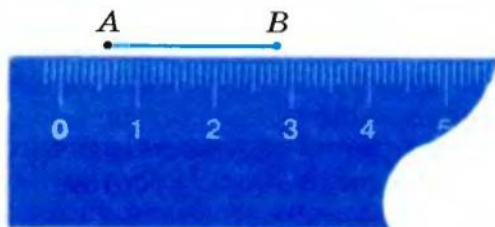


Рис. 97

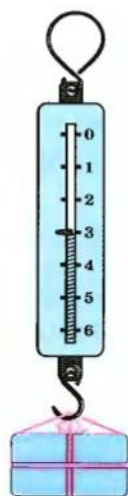


Рис. 98



Уровень А

878. Начертите координатную прямую и обозначьте на ней точки с координатами: 2, 5, -1, -3, -5.

879. Начертите координатную прямую и обозначьте на ней точки $A(3)$, $B(5)$, $C(-2)$, $D(-4)$.

880. Длина единичного отрезка координатной прямой равна 1 см. Чему равно расстояние между точками:

- а) $A(2)$ и $B(5)$; б) $K(-1)$ и $P(3)$; в) $M(-5)$ и $N(-3)$?

881. Длина единичного отрезка координатной прямой равна 5 мм. Чему равно расстояние между точками:

- а) $K(-2)$ и $T(4)$; б) $M(6)$ и $C(-3)$; в) $P(-4)$ и $Q(-1)$?

882. На координатной прямой даны точки $A(-1)$ и $B(7)$. Найдите координату середины отрезка AB .

883. Какая из точек $K(-4)$, $P(-3)$, $T(3)$, $M(2)$ расположена ближе всех к точке $O(0)$? А к точке $C(-2)$?

884. Дано точки $A(2)$ и $M(4)$ (рис. 99). Найдите координату такой точки B , для которой:

- а) B – середина отрезка AM ;
б) A – середина отрезка BM ;
в) M – середина отрезка AB .

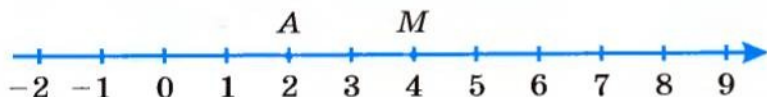


Рис. 99

885. Дано точки $K(-3)$ и $M(0)$. Найдите координату такой точки P , для которой:

- а) K – середина отрезка PM ;
б) P – середина отрезка KM ;
в) M – середина отрезка KP .



Уровень Б

886. Дано точки $A(-3)$, $B(-1)$, $O(0)$, $C(4)$. Длина какого из отрезков AB , AO , AC , BO , BC , OC наибольшая, а какого – наименьшая? Сделайте рисунок.

887. На координатной прямой обозначены точки $M(4)$ и $N(6)$. Длина отрезка MN равна 5 см. Найдите:

- а) длину единичного отрезка этой координатной прямой;
б) длину отрезков OM и ON ;

в) расстояние между точками $K(9)$ и $H(6)$;

г) расстояние между точками $P(-4)$ и $K(9)$.

888. Дано точки $A\left(\frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{1}{3}\right)$ и $C\left(2\frac{2}{3}\right)$. Найдите длины

отрезков AB , AC и CB , если длина единичного отрезка равна 1 см.

889. Длина единичного отрезка координатной прямой равна 2 см. Найдите расстояние между точками:

а) $A\left(\frac{1}{2}\right)$ и $B\left(-\frac{3}{2}\right)$; б) $K\left(-3\frac{2}{5}\right)$ и $P\left(2\frac{3}{5}\right)$.

890. Точки A и B называются *симметричными относительно точки M* , если точка M – середина отрезка AB . Обозначьте на координатной прямой точки K и P , симметричные точкам $A(-2)$ и $C(4)$ относительно начала координат.

891. Сравните отрезки KP и AC задачи 890. Симметричны ли относительно точки $O(0)$ середины этих отрезков?

892. Дано точки $A(-3)$ и $B(2)$. Укажите на координатной прямой точку C , симметричную точке A относительно B . Найдите координату точки C и отношение длин отрезков AC и BC .

893. Перерисуйте в тетрадь рисунок 96. Обозначьте точки, симметричные заданным, относительно начала координат.

894. Практическое задание. Нарисуйте в тетради шкалу одного из домашних бытовых приборов, используемых для измерения величин, которые могут иметь как положительные, так и отрицательные значения.



Упражнения для повторения

895. На сколько сумма чисел 3,6 и $\frac{3}{4}$ больше:

а) их разности;

б) их произведения?

896. Постройте треугольник по двум его сторонам, длины которых равны 4 см и 5 см, и углу 60° между ними.

897. Существует ли треугольник со сторонами, длины которых равны 2,5 м, 4,7 м и 3,7 м? Почему?

898. Какое наименьшее значение может иметь выражение $x^2 + 16$? А выражение $(x + 16)^2$?

899. Два товарных поезда длиной 250 м каждый едут навстречу друг другу со скоростями 50,5 км/ч. Через сколько секунд после встречи их машинистов встретятся кондуктора последних вагонов?

§27.

Целые и дробные числа

Числа 3 и -3 отличаются только знаками. Точки с такими координатами расположены по разные стороны от точки 0 и на одинаковых расстояниях от нее. Такие числа называются *противоположными*: число 3 противоположно числу -3 , а -3 противоположно числу 3. Противоположными являются также числа:

$$-15 \text{ и } 15, \quad \frac{2}{3} \text{ и } -\frac{2}{3}, \quad 6,7 \text{ и } -6,7, \quad -2\frac{1}{3} \text{ и } 2\frac{1}{3}.$$

Для каждого числа существует только одно противоположное ему число (рис. 100). Число 0 противоположно самому себе.



Рис. 100

Противоположными натуральным числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... являются числа $-1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots$

Натуральные числа, противоположные им и число 0 вместе называют целыми числами.

Существуют три вида целых чисел: *целые положительные* (натуральные), *целые отрицательные* ($-1, -2, -3, -4, \dots$) и 0. Кроме них, есть и *дробные положительные* и *отрицательные* числа. Например, $\frac{1}{2}; -\frac{3}{5}; 2\frac{3}{4}; -8,5$.

Целые и дробные числа вместе называют рациональными числами (рис. 101).



Рис. 101

Соотношения между упомянутыми видами чисел можно изобразить такой схемой.



Примечание. Числа $\frac{6}{3}$ и $-\frac{10}{5}$ записаны в виде дробей, но они не являются дробными числами. Это целые числа 2 и -2 . Ни одно дробное число не является целым, и ни одно целое число не является дробным.



Узнайте больше

Все целые числа образуют *множество целых чисел*. На координатной прямой целым числам соответствуют точки, которые расположены равномерно и бесконечно далеко вправо и влево от начала координат.

Множество рациональных чисел – это совокупность целых и дробных чисел. Каждому рациональному числу на координатной прямой соответствует единственная точка. Точки с рациональными координатами расположены на координатной прямой очень плотно, между любыми двумя из них находится бесконечно много других точек с рациональными координатами. И все же на координатной прямой точек, координаты которых – не рациональные числа, еще больше. Об этом вы узнаете в 8-м классе.



Проверьте себя

1. Какое число противоположно числу 7? А числу -7 ?
2. Как называют числа, противоположные натуральным числам?
3. Какие числа называют целыми отрицательными? А целыми неотрицательными?
4. Какие числа называют целыми?
5. Какие числа называют рациональными?



Выполняем вместе

① Противоположные ли числа $0,2$ и $-\frac{1}{5}$?

• $0,2$ и $\frac{1}{5}$ – разные обозначения одного и того же числа,

$0,2 = \frac{1}{5}$. Поэтому числа $0,2$ и $-\frac{1}{5}$ противоположные.

② Точки $A(x)$ и $B(-3)$ имеют противоположные координаты. Найдите значение x . Сколько единичных отрезков содержится в отрезке AB ?

• Поскольку числа x и -3 противоположные, то $x = 3$. Начертим координатную прямую и обозначим на ней точки $A(3)$ и $B(-3)$ (рис. 102). С рисунка видно, что отрезок AB содержит 6 единичных отрезков.

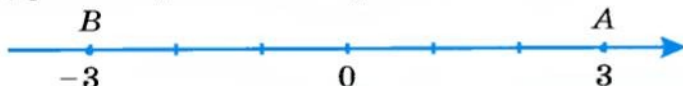


Рис. 102



Устные упражнения

900. Какие из утверждений верные:

- а) каждое натуральное число – число целое;
- б) каждое натуральное число – число рациональное;
- в) каждое целое число – число рациональное;
- г) если рациональное число не целое, то оно дробное;
- д) если рациональное число не дробное, то оно целое?

901. Противоположны ли числа $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$? А числа $\frac{2}{3}$ и $-\frac{3}{2}$?

902. На координатной прямой (рис. 103) обозначены точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$. Какие из чисел a , b и c противоположны друг другу?

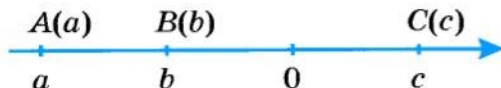


Рис. 103

903. Верно ли, что числа x и $-x$ противоположны при каждом значении x ?



Уровень А

904. Запишите числа, противоположные числам $-0,08$, 19 , -37 , -435 , 1015 , $-5,1$, $-\frac{2}{15}$, $-\frac{7}{9}$, $-3\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{5}$.

905. Запишите все натуральные числа, меньшие, чем 4 , и противоположные им числа.

906. Напишите пять целых чисел, которые не являются натуральными, а также противоположные им.

907. Запишите число:

а) противоположное числу $\frac{5}{6}$; б) обратное числу $\frac{5}{6}$.

908. Противоположные ли числа:

а) $0,4$ и $-\frac{2}{5}$; б) $1,5$ и $\frac{3}{2}$; в) $-1,2$ и $\frac{6}{5}$; г) $-1,5$ и $-\frac{3}{2}$?

909. Выберите и запишите пары противоположных чисел:

24 ; $2\frac{1}{4}$; $-\frac{2}{5}$; $2,25$; $-0,1$; -24 ; $\frac{5}{2}$; $-2\frac{1}{4}$; $0,9$; $3,4$; $\frac{2}{5}$; $0,1$.

910. Найдите координату середины отрезка с концами в точках $A(a)$ и $B(b)$, если числа a и b противоположные. Сделайте рисунок.

911. Обозначьте на координатной прямой точки с координатами: а) 3 ; $\frac{6}{2}$; $\frac{24}{8}$; б) $\frac{15}{10}$; $-\frac{12}{8}$; $1,5$; $-\frac{3}{2}$.



Уровень Б

912. Пользуясь координатной прямой, обоснуйте утверждение:

а) число, противоположное положительному, — отрицательное;

б) число, противоположное отрицательному, — положительное;

в) если число a противоположно числу b и число b противоположно числу c , то $a = c$.

913. Верно ли равенство:

а) $-(+1,7) = -1,7$;

б) $-(-5) = +5$;

в) $-(-2,5) = 2,5$;

г) $-(+129) = -129$?

914. Вычислите значение выражения $-a$, если:

а) $a = 3$; б) $a = -5$; в) $a = -1,7$; г) $a = 297$.

915. Какие из чисел $3, -17, \frac{8}{4}, 0,7, 2,4, -1001, -3\frac{1}{2}, \frac{5}{5}$ целые?

916. Какие из чисел $\frac{4}{2}, -\frac{10}{5}, \frac{27}{3}, 3\frac{2}{3}, -\frac{18}{9}$ дробные?

917. Натуральным, целым или дробным является число:

а) -5 ; б) $1\ 234\ 567$; в) $-\frac{102}{34}$; г) $\frac{135}{15}$; д) $-3,5$?

918. Сколько существует точек с целыми координатами на координатной прямой между точками $A(-4)$ и $B(5)$?

919. Сколько существует точек с целыми координатами на координатной прямой слева от точки $O(0)$? А справа от точки $M(1000)$? Приведите примеры.

920. Найдите x , если:

а) $-x = 5,1$; б) $-x = -293$; в) $-(-x) = 45$;

г) $-x = -5\frac{1}{3}$; д) $-(-x) = \frac{21}{39}$; е) $-x = 53\frac{1}{7}$.



Упражнения для повторения

921. Вычислите:

а) $\left(6,5 + \frac{3}{4}\right) \cdot 0,8 + 4,2^2$; б) $0,3^2 - 0,3^3 - 0,3 \cdot 0,3^3$.

922. На сколько треть числа $22,8$ меньше его половины?

923. Сколько процентов составляют:

а) 12 от 240 ; б) 35 см от 4 дм; в) 3 т от 25 ц?

924. Найдите число, $0,5\%$ которого составляют: а) $0,5$; б) 1 .

925. Найдите все целые числа, которые больше $\frac{5}{37}$ и меньше

$\frac{37}{5}$. Сколько среди них натуральных чисел, сколько простых?

926. Периметр прямоугольника равен 38 дм, а стороны относятся как $9 : 10$. Найдите его площадь.

927*. Перерисуйте в тетрадь рисунок 104. Запишите в пустых клеточках такие числа, чтобы суммы чисел в каждой строке и в каждом столбике равнялись 10 .

3		
	7	
		4

Рис. 104

§ 28.

Модуль числа

Расстояние от начала координат до точки с координатой a называется *модулем числа a* . При этом считается, что за единицу длины принято длину единичного отрезка. Например, модулем числа 4 является число 4, модулем числа -4 также является число 4 (рис. 105).

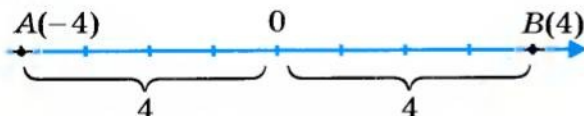
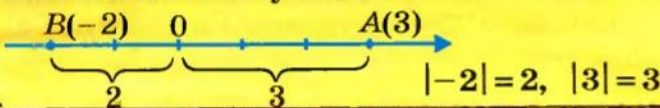


Рис. 105

Какими бы не были противоположные числа, их модули равны. Например, модуль каждого из чисел -12 и 12 равен 12 , модуль каждого из чисел $0,9$ и $-0,9$ равен $0,9$.

Модулем неотрицательного числа является само число, модулем отрицательного числа является противоположное ему число.



Модуль числа a обозначают так: $|a|$. Например,

$$|-26| = 26; |3,8| = 3,8; \left| -\frac{5}{7} \right| = \frac{5}{7}; |0| = 0.$$

Модуль любого числа – число неотрицательное.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если число } a \text{ неотрицательное;} \\ -a, & \text{если число } a \text{ отрицательное.} \end{cases}$$

Понятие модуля в математике используют очень часто. В частности решают уравнения и неравенства с модулями.

Уравнение $|x| = 3$ имеет два решения: 3 и -3 . На координатной прямой решения обозначены точками (рис. 106).

Неравенству $x < 3$ удовлетворяет каждое число, меньше 3, но больше -3 . На координатной прямой точки, которым соответствуют эти числа, изображены утолщенным отрезком без концов (рис. 107).

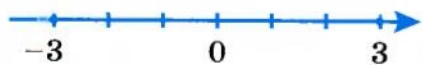


Рис. 106

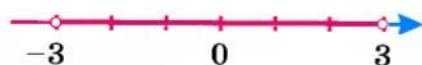


Рис. 107



Узнайте больше

Слово *модуль* латинского происхождения: «modulus» – *мера*. Это слово в разных значениях используют не только в математике, но и в технике, архитектуре, во многих других науках и отраслях производства. От этого слова происходят также слова *мода*, *модель*.

Еще совсем недавно вместо «модуль числа» говорили *абсолютная величина числа*. Так раньше называли «числа без знаков», противопоставляя им относительные числа – числа со знаками. Теперь термины «относительные числа» и «абсолютная величина числа» устарели.



Проверьте себя

1. Что такое модуль числа?
2. Модуль какого числа равен 0?
3. Чему равен x , если $|x| = 6$?
4. Верно ли, что модуль любого числа – число положительное? Приведите контрпример.



Выполняем вместе

- ① Вычислите значение $|x + 5|$, если: а) $x = 2$; б) $x = 0$.

• а) Если $x = 2$, то $|x + 5| = |7| = 7$;

б) если $x = 0$, то $|0 + 5| = |5| = 5$.

- ② Найдите два решения уравнения $|x| = 15$.

• $|15| = 15$ и $|-15| = 15$, поэтому числа 15 и -15 являются решениями этого уравнения.



Устные упражнения

928. Какие из утверждений верны: а) если модули двух чисел равны, а их знаки разные, то эти числа противоположные; б) числа с неравными модулями не могут быть противоположными; в) если модули двух чисел равны, то эти числа равны или противоположны?

929. Найдите модули чисел: 6 ; -9 ; -37 ; $4,5$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{9}{13}$; $-1\frac{1}{3}$.

930. Просклоняйте слово *модуль*.

931. Вычислите: а) $|-3| + |3|$; б) $|-2| \cdot |-3|$; в) $|5| \cdot |-4|$.



Уровень А

932. Имеет ли решение уравнение: а) $|x| = -1$; б) $|-x| = 2$?

933. Существует ли такое значение x , при котором:

а) $|x| < 0$; б) $|x| < -1$; в) $|x| > 1\,000\,000$?

934. Найдите сумму, разность, произведение и частное модулей чисел -5 и 2 .

935. Вычислите значение выражения:

а) $|-2| + |-7|$; б) $|-4| \cdot |-15|$; в) $|-18| : |-9|$.

936. Запишите отрицательное число, модуль которого равен:

а) 7 ; б) $0,12$; в) 305 .

937. Верно ли, что расстояние между точками $A(-8)$ и $O(0)$ равно $|-8|$? Чему равно расстояние между точками:

а) $O(0)$ и $B(0,25)$; б) $C(-0,25)$ и $B(0,25)$?

938. Чему равен $|x|$, если $|-x| = 203$?

939. Какая из точек $K\left(-\frac{2}{3}\right)$ или $P\left(-\frac{3}{4}\right)$ расположена ближе к точке $O(0)$? Покажите на рисунке.

940. Какие неравенства верны:

а) $|-2| < |3|$; б) $|5| < |-17|$; в) $\left|-\frac{10}{11}\right| < \left|-\frac{11}{12}\right|$?

941. При каких значениях x верно неравенство $x < |x|$?

942. Существует ли такое значение x , для которого верно неравенство $x > |x|$?

943. Решите уравнение: а) $|x| = 6$; б) $|x| = 8$; в) $|x| = 0$.

944. Вычислите:

а) $3 \cdot |-1,5| + 4$; б) $2,5 \cdot |-12| - 5$;
в) $24 : |-16| + 3,5$; г) $|-8| \cdot |-4| - |-56| : 7$.

945. Вычислите значение выражения:

а) $8 + 5 \cdot |x|$, если: 1) $x = 0,7$; 2) $x = -0,7$;

б) $13 - 14 \cdot |x|$, если: 1) $x = \frac{2}{7}$; 2) $x = -\frac{2}{7}$.



Уровень Б

946. Вычислите значение выражения:

а) $3|a| - |b| - |2a| + 2|b|$, если $a = 27,3$, $b = -44,4$;

б) $|5m| + 2|n| - 2|m| - 3|m|$, если $m = -17,17$, $n = -7,1$;

в) $|x + 7| - |x - y| + xy$, если $x = 5,2$, $y = 2,5$.

947. Сколько существует целых чисел, которые удовлетворяют неравенству $|x| < 5$? Обозначьте их на координатной прямой.

948. Обозначьте на координатной прямой множество всех значений x , которые удовлетворяют неравенству $|x| < 5$.

949. Сколько существует натуральных чисел, которые удовлетворяют неравенству $|x| < 12$? Сколько целых отрицательных чисел? Сколько целых чисел?

950*. Обозначьте на координатной прямой множество всех значений x , которые удовлетворяют неравенству $|x| > 3$.

951. При каких значениях x выполняется равенство:

а) $|x| = x$; б) $|x| = -x$; в) $x = -|x|$?

952. Какое из утверждений всегда верно:

а) если $|x| = |y|$, то $x = y$; б) если $x = y$, то $|x| = |y|$;

в) если $|a| < b$, то $a < b$; г) если $|a| > |b|$, то $a < b$?

953. Решите уравнение:

а) $|x| - 6 = 4$; б) $|x| + 2 = 3$; в) $3|x| - 7 = 5$.



Упражнения для повторения

954. Вычислите: а) $3,2^2 - 1,3^3$; б) $1,2^3 - 0,8^3$.

955. Решите уравнение:

а) $(x - 5)(x - 7) = 0$; б) $3x(x - 4) = 0$.

956. Петя и Галя собрали вместе 12,4 кг клубники. Сколько клубники собрал Петя, если Галя собрала на 2 кг больше?

957. Карлсон купил 15 пирожных по 10 крон и по 14 крон, уплатив всего 190 крон. Сколько пирожных каждого вида купил Карлсон?

958*. Поставьте между цифрами знаки действий или скобки так, чтобы равенство было верным:

а) $5 \ 5 \ 5 = 5$; б) $5 \ 5 \ 5 = 0$; в) $5 \ 5 \ 5 = 4$.

959*. Бóльший из двух квадратов разрезали на 4 треугольника (рис. 108). Как из них и меньшего квадрата сложить один большой квадрат?



Рис. 108

§29.

Сравнение рациональных чисел

Сравнить два числа – это значит установить, какое из них больше, какое меньше, или показать, что они равны.

Сравнивать положительные числа вы уже умеете. Например, $2 < 5$; $0,8 > 0,27$; $\frac{2}{3} < 1$. А как сравнивать отрицательное число с отрицательным или положительным?

Из двух положительных чисел меньше то, которому на координатной прямой соответствует точка, расположенная левее. Например, точка $A(3)$ расположена левее точки $B(5)$ и $3 < 5$ (рис. 109). Это свойство (признак) распространяется и на все рациональные числа.

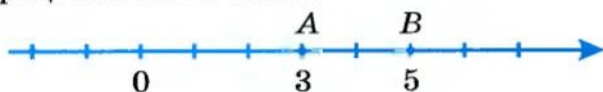


Рис. 109

Из двух рациональных чисел меньшим считается то, которому на координатной прямой соответствует точка, расположенная левее.

Например, точка $K(-5)$ расположена левее точки $O(0)$ и любой точки с положительной координатой. То же самое можно сказать о точке $P(-3)$ и о любой другой точке с отрицательной координатой (рис. 110).

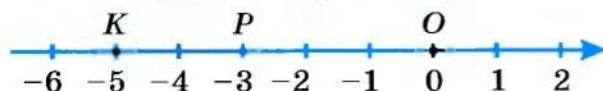


Рис. 110

Поэтому каждое отрицательное число меньше 0 и любого положительного числа.

Например, $-7 < 0$; $-1508 < 5$; $-0,3 < 0,2$; $-\frac{1}{2} < 4\frac{1}{2}$.

Точка $K(-5)$ на координатной прямой расположена левее точки $P(-3)$ (рис. 110), поэтому $-5 < -3$. То же самое справедливо относительно любых отрицательных чисел.

Из двух отрицательных чисел меньше то, модуль которого больше.

$$-14 < -8; -67 < -66; -0,1 < -0,0987; -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}.$$



Если одно число меньше другого, то второе число больше первого. Если $a < b$, то $b > a$.

Поскольку каждое отрицательное число меньше 0, а каждое положительное число больше 0, то:

- запись $x > 0$ означает, что число x – положительное;
- запись $x < 0$ означает, что число x – отрицательное.



Узнайте больше

Знак « \geq » обозначает (читается) «больше или равно», знак « \leq » – меньше или равно. Например, если число a больше 0 или равно 0, то пишут $a \geq 0$. Такие числа называют неотрицательными. Если число c меньше 5 или равно 5, то пишут $c \leq 5$.



Проверьте себя

1. Что значит сравнить два числа?
2. Как сравнить два положительных числа?
3. Какое из двух отрицательных чисел больше?
4. Как сравнить любые рациональные числа?
5. Прочитайте записи $x > 0$ и $c < 0$, не произнося слов *больше*, *меньше*.
6. Что обозначает запись $a \geq 0$? А запись $a \leq 0$?



Выполняем вместе

① Между какими соседними целыми числами на координатной прямой находится число $-2,4$? Запишите это при помощи знака « $<$ ».

• Начертим часть координатной прямой (рис. 111). Видим, что число $-2,4$ находится между соседними целыми числами -3 и -2 . Следовательно, $-3 < -2,4 < -2$.

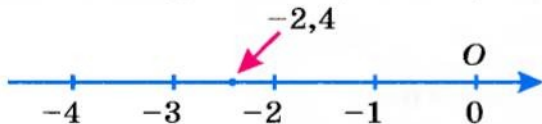


Рис. 111

② Какое из чисел больше: $-3,4$ или $-\pi$?

• $\pi \approx 3,14$, а $3,14 < 3,4$. Поэтому $\pi < 3,4$, а $-\pi > -3,4$.



Устные упражнения

960. Какое из чисел больше: а) 10 001 или 9009; б) 0,1 или 0,0999?

961. Сравните числа:

а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{7}$ и $-\frac{7}{5}$; в) $\frac{3}{4}$ и -1 ; г) $\frac{7}{8}$ и -78 .

962. Между какими соседними целыми числами находится число:

а) 0,1; б) $-0,2$; в) $-8,5$; г) $-\frac{6}{7}$; д) $-4\frac{2}{3}$?

963. Положительным или отрицательным является число p , если: а) $p < 0$; б) $0 < p$?



Уровень А

964. Поставьте вместо звездочки знак « $<$ » или « $>$ » так, чтобы неравенство было верно:

а) $-9 * 0$, $0 * -17$, $-8 * -7$;
б) $-0,5 * 0,5$, $2,3 * -23$, $-2,3 * -3$.

965. Сравните числа:

а) 0,3 и $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{4}{3}$ и $-\frac{5}{4}$; в) $-0,2$ и $-\frac{1}{5}$.

966. Поставьте вместо звездочки знак «<», «>» или «=» так, чтобы неравенство или равенство было верно:

а) $\frac{2}{3} * \frac{5}{6}$, $\frac{2}{7} * \frac{4}{14}$, $\frac{9}{2} * 4$, $-\frac{9}{2} * 4$;

б) $-4 * 3\frac{1}{2}$, $-\frac{6}{3} * -2$, $-\frac{3}{4} * -\frac{4}{3}$, $-\frac{10}{3} * \frac{8}{4}$.

967. Какое из чисел $-0,7$, $-\frac{3}{5}$ и $-\frac{2}{3}$ наибольшее, а какое наименьшее?

968. Запишите в виде неравенства предложение:

- а) $0,4$ – число положительное;
 б) $-5,7$ – число отрицательное;
 в) n – число отрицательное;
 г) $5x$ – число положительное.

969. Расположите числа 0 , $\frac{1}{2}$, -2 , $-1,99$, $-3\frac{1}{3}$, $0,2$, $-3,3$ в порядке возрастания.

970. Расположите числа $2\frac{1}{2}$, $-3,2$, $-\pi$, π , -1 , $3,2$, $-3\frac{1}{2}$, 1 в порядке убывания.

971. Проведите на рисунке 112 стрелки от меньшего числа к большему.



Рис. 112

972. Запишите все целые числа, которые:

- а) больше -7 и меньше 3 ;
 б) больше $-5,6$ и меньше $4,8$;
 в) меньше $-2,5$ и больше $-8\frac{2}{3}$.

973. Какие целые числа удовлетворяют неравенству:

- а) $-6 < x < 3$; б) $-24 < x < -19$; в) $-\pi < x < \pi$?



Уровень Б

974. Запишите все целые числа, модули которых меньше $3,5$.

975. На координатной прямой обозначьте буквами точки, координаты которых целые числа больше $-2,6$ и меньше $3,8$.

976. Обозначьте на координатной прямой множество точек, которые соответствуют таким значениям x , при которых $|x| < 4$.

977. Известно, что a и b – положительные числа, а x и y – отрицательные. Сравните:

- а) a и 0 ; б) 0 и x ; в) a и x ; г) a и y ;
д) b и x ; е) b и y ; ж) $|x|$ и y ; з) $-a$ и b .

978. На координатной прямой обозначены точки $A(a)$, $B(b)$ и $C(c)$ (рис. 113). Модуль какого из чисел a , b и c наибольший, а какого наименьший? Какое из чисел a , b и c наибольшее, а какое – наименьшее?

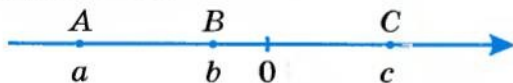


Рис. 113

979. Запишите вместо звездочки такую цифру, чтобы неравенство было верно:

- а) $-181 < -18*$; б) $-*6,4 > -26,4$;
в) $-3*41 > -3141$; г) $-35,*2 > -35,12$.



Упражнения для повторения

980. Какое наименьшее значение может принимать выражение:

- а) $x^2 + 8$; б) $(x^2 + 8)^2$; в) $|x - 12|$?

981. Сколько центнеров сена получится из 9,8 ц травы, если при сушке трава теряет $\frac{3}{4}$ своей массы?

982. Сколько соли надо добавить до 8 кг чистой воды, чтобы получить десятипроцентный раствор соли?

983. Наименьшая сторона треугольника короче второй на 3,5 см, а третьей – на 2,8 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 2,7 дм.

984. Сколько стоит книга, если за нее уплатили 2 грн. и еще половину ее стоимости?

985. Проехав половину всего пути, пассажир поезда лег спать и спал до тех пор, пока ему не оставалось проехать половину того расстояния, которое он проехал спящим. Какую часть пути он проехал во время сна?

986. Старинная задача. Лев может съесть овцу за 2 ч, волк – за 3 ч, собака – за 6 ч. За сколько часов они съели бы овцу все вместе?



Самостоятельная работа 5

Вариант 1

1°. Какие из чисел -83 , $\frac{12}{4}$, $-2\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{6}$:

а) целые; б) дробные; в) натуральные?

Запишите их в порядке убывания.

2°. Обозначьте на координатной прямой точки $A(-6)$ и $B(3)$. Найдите длину отрезка AB и координату точки M – середины отрезка AB .

3°. Найдите модуль разности чисел $3,8$ и $0,4$, а также сумму их модулей.

4°. Решите уравнение: а) $|x| = 5$; б) $2|x| = 6$.

5°. Запишите все целые значения x такие, что $|x| < 3$.

Вариант 2

1°. Какие из чисел $\frac{3}{7}$, -74 , $-\frac{8}{4}$, 34 , $-0,2$:

а) целые; б) дробные; в) натуральные?

Запишите их в порядке возрастания.

2°. Обозначьте на координатной прямой точки $K(-5)$ и $P(5)$. Найдите длину отрезка KP и координату точки C – середины отрезка KP .

3°. Найдите сумму и произведение модулей чисел -12 и $1,2$.

4°. Решите уравнение: а) $|x| = 3$; б) $3|x| = 6$.

5°. Запишите все целые значения x такие, что $|x| < 5$.

Вариант 3

1°. Какие из чисел $-4,4$, $-\frac{2}{3}$, $2\frac{3}{7}$, $\frac{6}{30}$, $32\frac{4}{2}$: а) целые;

б) дробные; в) натуральные; г) положительные? Запишите их в порядке убывания.

2°. Обозначьте на координатной прямой точки $A(-5)$ и $B(-1)$. Найдите координату такой точки K , чтобы точка B была серединой отрезка AK .

3°. На сколько сумма модулей чисел $-6,4$ и $4,6$ больше, чем $|6,4 - 4,6|$?

4°. Решите уравнение: а) $|x| = 8$; б) $5|x| - 1 = 3$.

5°. Запишите все целые значения x , которые удовлетворяют неравенству $|x| < 7$.

Вариант 4

- 1°. Какие из чисел $7\frac{1}{2}$, $-8,5$, $\frac{1}{13}$, $-\frac{12}{4}$, $\frac{15}{3}$: а) натуральные; б) целые; в) дробные; г) положительные? Запишите их в порядке возрастания.
- 2°. Обозначьте на координатной прямой точки $K(-5)$ и $P(1)$. Найдите координату точки M – середины отрезка KP – и расстояние от нее до точки $O(0)$.
- 3°. На сколько сумма модулей чисел $5,7$ и $-7,5$ больше, чем $|7,5 - 5,7|$?
- 4°. Решите уравнение: а) $|x| = 4$; б) $4|x| + 3 = 5$.
- 5°. Запишите все целые значения x такие, что $|x| < 6$.



Готовимся
к тематическому контролю

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры величин, значения которых бывают отрицательными.
2. Положительное или отрицательное число 0?
3. Какие числа называются неотрицательными, неположительными?
4. Какие числа называются противоположными?
5. Какие числа называются целыми?
6. Какие числа называются рациональными?
7. Какими бывают рациональные числа?
8. Что такое модуль числа? Приведите примеры.
9. Какое из двух отрицательных чисел меньше?
10. Как сравнить рациональные числа?
11. Что обозначает запись $x > 0$, $x < 0$?

Задания в тестовой форме

1. Какая из точек $A(1)$, $B(-0,7)$, $C(2)$, $D(-3)$ ближе всего расположена к точке $O(0)$?
а) A ; б) B ; в) C ; г) D .
2. Укажите пару противоположных чисел:
а) 3 и $\frac{1}{3}$; б) 3 и -3 ; в) 5 и $0,5$; г) 17 и -71 .
3. Вычислите значение выражения $|13| + |-13|$.
а) 0 ; б) -13 ; в) 13 ; г) 26 .

4. Какое из чисел $2,5$, $-3,2$, $-\frac{144}{12}$, $\frac{13}{12}$ целое?
- а) $-\frac{144}{12}$; б) $2,5$; в) $\frac{13}{12}$; г) $-3,2$.
5. Какое из чисел $0,5$, $-0,5$, $0,1$, -1 наименьшее?
- а) $0,5$; б) $-0,5$; в) $0,1$; г) -1 .
6. Между какими соседними целыми числами находится число $-0,9$?
- а) 0 и -1 ; б) 0 и 1 ; в) 1 и 2 ; г) -1 и -2 .
7. Запишите вместо звездочки такую цифру, чтобы неравенство $-123 > -12*$ было верно.
- а) 4 ; б) 0 ; в) 2 ; г) 1 .
8. Найдите x , если $-(-x) = -5$.
- а) 0 ; б) 5 ; в) -5 ; г) 10 .
9. Решите уравнение $|x| = -3$.
- а) 3 ; б) 0 ; в) -3 ; г) решений нет.
10. Сколько существует целых чисел, которые удовлетворяют неравенству $|x| < 5$?
- а) 5 ; б) 10 ; в) 9 ; г) 11 .

Типовые задачи

1°. Какие из чисел 11 , $0,7$, -4 , $\frac{13}{12}$, $-0,5$, $-\frac{1}{3}$, 0 , -327 положительные, а какие отрицательные?

2°. Начертите координатную прямую и обозначьте на ней точки $A(2)$, $B(-3)$, $C(-0,5)$, $D(2,5)$.

3°. Запишите число, противоположное числу: а) 35 ; б) $-\frac{3}{5}$.

4°. Сравните числа: а) $3,9$ и $-9,3$; б) $-2,75$ и $-2,57$.

5°. Вычислите значение выражения $27 - 1,5 \cdot |x|$, если:

а) $x = -10$; б) $x = -0,4$.

6°. Длина единичного отрезка координатной прямой равна $0,5$ см. Найдите расстояние между точками $A(-0,2)$ и $B(2,8)$.

7°. Решите уравнение:

а) $|x| = 3,1$; б) $|x| = -1,3$; в) $|x| + 4 = 1,2 : 0,3$.

8°. Запишите все целые значения a такие, что $-5,3 < a < 3,5$.

9°. Дано точки $A(-1)$ и $B(3)$. Обозначьте на координатной прямой точку C , симметричную A относительно точки B . Найдите координату точки C и отношение длин отрезков AC и CB .

10°. Найдите все корни уравнения $5|x - 1| - 27 = 3$.

§ 30.

Сложение рациональных чисел

Складывать положительные числа вы уже умеете. И отрицательные числа складывать нетрудно. Например,

$$(-2) + (-3) = -5; \quad (-0,3) + (-1,2) = -1,5.$$

Чтобы сложить два отрицательных числа, надо сложить их модули и перед результатом поставить знак минус.

Чтобы сложить положительное и отрицательное числа, надо найти разность их модулей и перед результатом поставить знак числа с большим модулем.



Пусть, например, надо сложить числа $-2,7$ и 3 . Их модули $2,7$ и 3 . Вычтем из большего модуля меньший, получим $0,3$. Знак числа с большим модулем – плюс, поэтому $-2,7 + 3 = 0,3$. Другой пример: $18 + (-20) = -2$.

Почему именно по таким правилам складывают положительные и отрицательные числа? Потому что отрицательными числами обозначают, как правило, уменьшение чего-либо. Например, если уровень воды в реке снизился на 2 см, то говорят, что он изменился на -2 см. И если в один день он изменился на -2 см, а во второй на -3 см, то за эти два дня он изменился на -5 см (рис. 114). Поэтому и считают, что $-2 + (-3) = -5$.

Если в первый день уровень воды изменился на -2 см, а во второй – на 5 см (то есть поднялся на 5 см), то за эти два дня он изменился на 3 см (рис. 115). Следовательно $-2 + 5 = 3$.

Если в первый день уровень воды в реке изменился на -6 см, а во второй – на 2 см, то за два дня он изменился на -4 см (рис. 116). Поэтому $-6 + 2 = -4$.

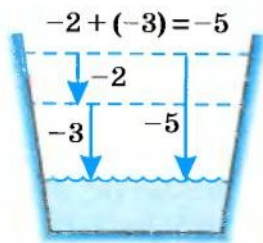


Рис. 114

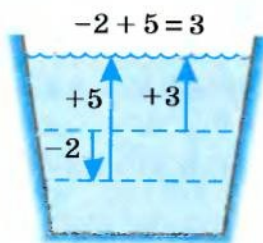


Рис. 115

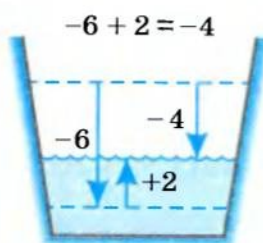


Рис. 116

Много и других подобных задач (об изменении температуры, прибыли и т. п.) стали основанием сформулированных выше правил сложения рациональных чисел.



Узнайте больше

Раньше отличали знаки чисел от знаков сложения и вычитания. Некоторые европейские математики даже в начале XX в. знаки действий сложения и вычитания писали только между числами. А положительные и отрицательные числа обозначали стрелочками или знаками «+» и «-» над числами. Например, $\overset{+}{2} + \overset{+}{5} = \overset{+}{3}$, $\overset{+}{7} + \overset{+}{8} = \overset{+}{15}$. Такие записи были неудобными и от них отказались.

При сложении рациональных чисел справедливы переместительный и сочетательный законы. О них речь пойдет на с. 222. Там вы узнаете, как можно упростить сложение трех и более рациональных чисел.



Проверьте себя

1. Как называют числа, которые складывают?
2. Как сложить два отрицательных числа?
3. Как найти сумму положительного и отрицательного чисел?
4. Чему равна сумма двух противоположных чисел?
5. Может ли сумма двух чисел равняться одному из них?



Выполняем вместе

① Может ли сумма двух чисел быть больше каждого из этих чисел? Когда это возможно?

● Может. Это возможно только тогда, когда эти числа положительные. Ведь, если $a + b > a$, то $b > 0$, а если $a + b > b$, то $a > 0$.

② Найдите сумму чисел: а) 1,3 и $-\frac{2}{5}$; б) -4,7 и $2\frac{1}{2}$.

● а) $1,3 + \left(-\frac{2}{5}\right) = 1,3 + (-0,4) = 1,3 - 0,4 = 0,9$;

б) $-4,7 + 2\frac{1}{2} = -4,7 + 2,5 = -(4,7 - 2,5) = -2,2$.



Устные упражнения

987. Вычислите:

$$13 + 5; \quad -12 + (-8); \quad -0,7 + 0,7; \quad -\frac{4}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right).$$

988. Заполните таблицу.

a	10	-7	-3	-12	-427	3,8
x	-3	6	-8	13	27	-2,1
$a + x$	7	-1	-11	1	-400	1,7

989. Найдите сумму чисел $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

990. Можно ли утверждать, что два числа противоположные, если их сумма равна нулю?

991. Как изменится рациональное число, если к нему прибавить:

- а) положительное число; б) отрицательное число?

992. Может ли сумма двух чисел быть меньше одного из слагаемых? А меньше каждого слагаемого? Приведите примеры.

993. Найдите значение суммы:

а) $-2 + (-1),$ $-9 + (-12),$ $-16 + (-38);$

б) $-7 + 3,$ $-60 + 20,$ $-97 + 90;$

в) $5 + (-8),$ $27 + (-47),$ $84 + (-48).$



Уровень А

994. Найдите сумму чисел:

а) 17 и $-8,$ -9 и 57, -6 и 300;

б) -23 и 56, -48 и 8, 710 и 28;

в) 85 и $-94,$ -19 и 76, -94 и 0.

Вычислите значения выражений (995–998).

995. а) $-0,3 + 0,2;$ б) $2,4 + (-1,6);$

в) $-1,8 + (-2,9);$ г) $9,6 + (-3,5).$

996. а) $-1,3 + 2,7;$ б) $4,8 + (-3,9);$

в) $0,7 + (-4,9);$ г) $-5 + (-2,3).$

997. а) $-0,28 + (-1,4);$ б) $45,7 + (-8,5);$

в) $0,09 + (-0,17);$ г) $-0,8 + (+2,4).$

998. а) $3,9 + (-8,53);$ б) $-12 + (-7,46);$

в) $-0,245 + (-10);$ г) $2,9 + (-9,2).$

999. Найдите сумму двух чисел, одно из которых противоположное числу 2, а второе – обратное числу 2.

1000. Вычислите значение выражения $m + (-1,6)$, если:

а) $m = 4,2$; б) $m = -2,6$; в) $m = \frac{1}{3}$.

1001. Какие из неравенств верны:

а) $30 + (-27) > 0$; б) $-27 + 23 < 0$; в) $-9 + (-17) < 1?$

1002. Какая сумма больше: $-9,3 + 4,8$ или $-4,8 + 3,9$?

Выполните действия (**1003–1005**).

1003. а) $\frac{2}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)$; б) $-\frac{5}{7} + \left(-\frac{2}{7}\right)$; в) $-\frac{4}{9} + \frac{5}{9}$;

г) $\frac{3}{7} + \left(-\frac{5}{7}\right)$; д) $-\frac{2}{3} + 1$; е) $-5 + \frac{3}{4}$.

1004. а) $\frac{1}{7} + \left(-\frac{3}{7}\right)$; б) $-\frac{4}{7} + \frac{7}{7}$; в) $-2 + \left(-\frac{3}{8}\right)$;

г) $12 + \left(-\frac{2}{3}\right)$; д) $-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)$; е) $-\frac{2}{3} + \left(-\frac{5}{6}\right)$.

1005. а) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$; б) $\frac{5}{6} + \left(-\frac{2}{3}\right)$; в) $-\frac{7}{8} + \left(-\frac{7}{10}\right)$;

г) $\frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right)$; д) $-\frac{4}{15} + \frac{5}{12}$; е) $\frac{5}{7} + \left(-\frac{3}{5}\right)$.



Уровень Б

Выполните действия (**1006–1009**).

1006. а) $-2\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$; б) $3\frac{2}{5} + \left(-\frac{3}{7}\right)$; в) $-4\frac{3}{4} + \left(-5\frac{1}{2}\right)$;

г) $1\frac{1}{2} + \left(-1\frac{1}{3}\right)$; д) $-3\frac{1}{6} + \frac{1}{2}$; е) $-4\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2}$.

1007. а) $\frac{3}{4} + (-0,5)$; б) $\frac{3}{5} + 1,2$; в) $-\frac{3}{5} + (-1,8)$;

г) $0,7 + \left(-\frac{9}{10}\right)$; д) $-5\frac{2}{5} + 0,5$; е) $5\frac{2}{3} + (-0,5)$.

1008. а) $\frac{1}{3} + (-2,3)$; б) $-\frac{2}{3} + (-0,3)$; в) $2,05 + \left(-\frac{1}{8}\right)$;

г) $1,5 + \left(-\frac{4}{5}\right)$; д) $-\frac{2}{3} + \left(-\frac{5}{7}\right)$; е) $-\frac{1}{3} + 0, (3)$.

1009. а) $-1,2 + 3\frac{5}{6}$; б) $1\frac{5}{6} + 0,05$; в) $-2\frac{3}{4} + (-1,4)$;
 г) $-\frac{7}{10} + \left(-1\frac{1}{3}\right)$; д) $-3,35 + \left(-\frac{3}{5}\right)$; е) $3,8 + \left(-\frac{3}{8}\right)$.

1010. Заполните таблицу.

a	3	-2,5	-5,7	-1,9	3,8	8,12	0,09
b	-7	-12,5	-3,4	2,31	-9,42	-3,49	-12
$a + b$							

1011. Вычислите значение выражения $m + n + 1$, если:

а) $m = -11,5$, $n = -5,5$; б) $m = -0,3$, $n = 0,3$.

1012. Решите уравнение:

а) $x - 5 = -1$; б) $3x - 16 = -10$.

1013. Какое из выражений $|a| + |b|$ и $|a + b|$ является модулем суммы, а какое – суммой модулей чисел a и b ? Вычислите модуль суммы чисел $-3,27$ и $2,5$, а также сумму их модулей.

1014*. При каком условии $|a + b| = |a| + |b|$, $|a + b| < |a| + |b|$?

1015. Подберите два числа, удовлетворяющих уравнению:

а) $|1 + x| = 2$; б) $|-2 + x| = 5$; в) $|x - 3| = 5$.



Упражнения для повторения

1016. Два автомобиля, расстояние между которыми равно 350 км, сближаются со скоростью 120 км/ч. Какое расстояние между ними будет: а) через полчаса; б) через 2 ч?

1017. С какой скоростью должен ехать автомобиль, чтобы через 1 ч догнать мотоцикл, который находится на расстоянии 30 км от автомобиля и движется со скоростью 45 км/ч?

1018. Найдите длину окружности и площадь круга радиуса 2,5 дм.

1019. Найдите площадь кольца, внутренний и внешний радиусы которого равны 1,3 дм и 3,7 дм соответственно.

1020. На сколько процентов число 3,2 больше 2,3?

1021. Решите уравнение:

а) $x^2 = 64$; б) $(x - 2)^2 = 25$.

1022*. Центры четырех окружностей, каждая из которых касается двух других, расположены на одной прямой как изображено на рисунке 117. Верно ли, что сумма длин трех меньших окружностей равна длине наибольшей?

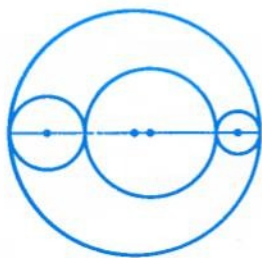


Рис. 117

§31.

Вычитание рациональных чисел

Вычитание – действие, обратное сложению. **Вычесть** из одного числа другое – означает найти такое третье число, которое в сумме с другим дает первое.

Пусть, например, надо найти разность чисел 7 и -5 . Она равна такому числу x , что $x + (-5) = 7$. Этому равенству удовлетворяет число 12. Следовательно, $7 - (-5) = 12$.

Разность чисел -5 и 3 равна такому числу x , что $x + 3 = -5$. Этому равенству удовлетворяет число -8 . Поэтому, $-5 - 3 = -8$.

Обратите внимание: $7 - (-5) = 12$ и $7 + 5 = 12$,
 $-5 - 3 = -8$ и $-5 + (-3) = -8$.

Вычесть ли число -5 или прибавить число 5 – результаты одинаковые. Это верно для любых рациональных чисел. Ведь, если $a - b = x$, то $x + b = a$, а последнему равенству удовлетворяет значение $x = a + (-b)$. Поскольку $a + (-b) + b = a + 0 = a$. Таким образом, всегда $a - b = a + (-b)$.

Чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.



Примеры.

$$13 - 17 = 13 + (-17) = -4;$$

$$-4,9 - (-3) = -4,9 + 3 = -1,9;$$

$$\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Вычитание рациональных чисел всегда можно заменить сложением:

$$a - b = a + (-b), \quad a - (-c) = a + c.$$



Любое рациональное число можно вычесть из любого другого. Ведь вычитание рациональных чисел всегда можно заменить сложением, а действие сложения всегда возможно.



Узнайте больше

Подставляя вместо букв a и b разные рациональные числа, можно убедиться в том, что *разность $a - b$ положительная, если $a > b$.*

Чтобы найти длину отрезка AB на координатной прямой, надо из координаты его правого конца вычесть координату левого конца. Например, если на координатной прямой даны точки $A(a)$ и $B(b)$, то расстояние AB в единичных отрезках равно $b - a$, если $a < b$, или $a - b$, если $a > b$ (рис. 118). Эти два случая можно объединить в один. Какими бы не были точки $A(a)$ и $B(b)$ координатной прямой, расстояние между ними $AB = |a - b|$.

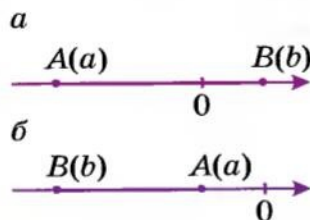


Рис. 118



Проверьте себя

1. Что означает вычесть из одного числа другое?
2. Как называются компоненты действия вычитания?
3. Как из одного рационального числа вычесть другое?
4. Каким действием можно проверить вычитание?
5. Всегда ли возможно вычитание рациональных чисел?



Выполняем вместе

① Вычислите $-4 - (-7)$. Где здесь уменьшаемое, а где вычитаемое?

• -4 — уменьшаемое, -7 — вычитаемое.

$$-4 - (-7) = -4 + 7 = 3.$$

② Решите уравнение: а) $x + 24 = -17$; б) $|x + 3| = 5$.

• а) Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы вычесть известное слагаемое. $-17 - 24 = -41$.

Проверка: $-41 + 24 = -17$. Следовательно, $x = -41$.

б) Если модуль числа $x + 3$ равен 5, то возможны два случая: или $x + 3 = 5$, тогда $x = 2$, или $x + 3 = -5$, тогда $x = -8$.

Проверка: $|2 + 3| = |5| = 5$, $|-8 + 3| = |-5| = 5$. Итак, уравнение имеет два корня: 2 и -8 .



Устные упражнения

1023. Вычислите:

- а) $5 - 2$, б) $-3 - 1$, в) $2 - (-3)$, г) $-1 - (-7)$,
 $2 - 5$, $-1 - 3$, $5 - 19$, $-9 - (-5)$,
 $0 - 8$; $-6 - 0$; $0 - (-8)$; $0 - 0$.



Уровень А

1024. Представьте в виде суммы и вычислите:

- а) $13 - 28$; б) $59 - (-17)$;
 в) $-42 - 97$; г) $-89 - (-53)$.

Выполните действия (1025–1034).

- 1025.** а) $6 - 95$; б) $24 - 96$; в) $-9 - 57$;
 г) $-8 - 84$; д) $-6 - 17$; е) $-1 - 297$.

- 1026.** а) $7 - (-53)$; б) $9 - (-28)$;
 в) $1 - (-77)$; г) $3 - (-152)$.

- 1027.** а) $-8 - (-9)$; б) $-7 - (-3)$;
 в) $-5 - (-5)$; г) $-4 - (-69)$.

- 1028.** а) $0,7 - 1,2$; б) $2,9 - 4,7$;
 в) $10,6 - 38,5$; г) $4,8 - 0,48$.

- 1029.** а) $12,6 - 83,9$; б) $0,6 - 1,3$;
 в) $1,3 - 2,007$; г) $0,53 - 5,4$.

- 1030.** а) $-0,6 - 3,9$; б) $-2,4 - 3,46$;
 в) $0,5 - 3,67$; г) $-3,7 - (-3,6)$.

- 1031.** а) $2,7 - (-4,9)$; б) $-0,8 - (-1,6)$;
 в) $-27 - (-3,067)$; г) $-0,08 - (-0,8)$.

- 1032.** а) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$; в) $\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right)$.

- 1033.** а) $\frac{3}{4} - 3\frac{1}{4}$; б) $-\frac{6}{7} - 2\frac{3}{7}$; в) $-4\frac{3}{4} - 5\frac{1}{4}$.

- 1034.** а) $\frac{1}{3} - 3,5$; б) $-\frac{2}{3} - 1,8$; в) $3,4 - 4\frac{1}{9}$.

1035. Найдите разность чисел:

- а) $7,53$ и $-3,45$; б) $-26,8$ и $47,9$;
 в) $-0,235$ и $-2,35$; г) $12,34$ и $-123,4$.



1036. Заполните таблицу.

a	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
b	5,73	-3,24	8,96	-4,9	8,6	-3,28	-6,7	9,07
$a - b$								

1037. На сколько число m больше или меньше числа n , если:

- а) $m = -5$, $n = 3$; б) $m = 7$, $n = -10$;
 в) $m = 0,3$, $n = -0,7$; г) $m = -3,8$, $n = -8,3$?

1038. Каждое из чисел -16 , -7 , 0 , 3 , 9 , 12 уменьшите на 10 .1039. Каждое из чисел $-0,05$, $-0,37$, $1,54$, $8,48$ уменьшите на $2,5$.1040. Верно ли, что $3,8 - 7,5$ и $7,5 - 3,8$ — противоположные числа?1041. Число m противоположное числу $2,7$. Найдите значение выражения $5,2 - m$.1042. В полдень температура воздуха была 4°C , а в полночь -3°C . На сколько изменилась температура воздуха за полсуток?1043. За день температура воздуха изменилась на -7°C . Какой она была утром, если вечером термометр показывал -2°C ?

Уровень В

Вычислите (1044–1045).

1044. а) $(3,7 + 9,1) - (4,8 - 2,5) + 4,9$;б) $(-12 + 3,2) - (-2,8 - 5,6)$.1045. а) $(10,5 - 13,6) + (4,1 - (-2,7))$;б) $(-4,3 - 5,8) + (-3,9 + 7,7)$.1046. Обозначьте на координатной прямой точки $A(-3)$ и $B(4)$. Найдите расстояние между точками A и B . Верно ли, что:а) $AB = |-3 - 4|$; б) $AB = |4 - (-3)|$?1047. Найдите расстояние между точками $K(k)$ и $P(p)$, если:а) $k = -5$, $p = 8$; б) $k = -6$, $p = -32$;в) $k = 40$, $p = -7$; г) $k = 27,9$, $p = -35,8$.1048. Известно, что $a = -3,1$, $b = 5,7$ и $c = -4,8$. Вычислите:а) $a + b + c$; б) $|a + b + c|$; в) $|a| + |b| + |c|$.1049. Верно ли, что равенство $|a - b| = |b - a|$ выполняется всегда? Покажите на примерах.

1050. Может ли модуль разности двух чисел равняться сумме их модулей? Покажите на примерах.

1051. Решите уравнение:

а) $-2 + x = 5$; б) $x - 7 = -3$; в) $5 - x = 9$.

- 1052.** На рисунке 119 схематически изображен разрез берега моря. Определите, как расположены точки A, B, C, K и P :
- а) относительно уровня моря; б) относительно друг друга.

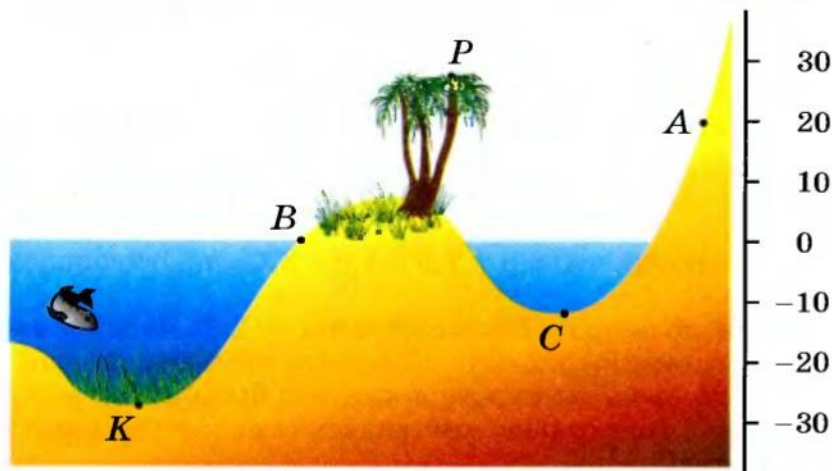


Рис. 119

- 1053.** Зимой при температуре воздуха -23°C в шахте температура достигает 24°C . Найдите разность температур.
- 1054.** Вычислите значение выражения $12,9 - a - x$, если:
- а) $a = -8,7, x = 6,7$; б) $a = -0,73, x = -6,4$.
- 1055.** Заполните таблицу.

a	8,13	3,27	0,52	-4,31	-16,35	28,6
b	9,09	-5,83	-4,8	-8,07	362,6	906,83
$1 - a - b$						

- 1056.** а) Какие из чисел 5, 6, 7, 8, 9, 10 являются корнями уравнения $|x - 7| = |x| - 7$?
- б) Какие из чисел -5, -4, -3, -2, -1 являются корнями уравнения $|x + 3| = x + 3$?
- 1057.** Решите уравнение:
- а) $|3 + x| = 5$; б) $|x - 8| = 2$; в) $6 + |4 - x| = 9$.
- 1058.** Считается, что город Рим основан в 753 г. до н. э. Сколько ему лет сейчас?
- 1059.** Сколько прошло лет от середины 3-го года до новой эры до середины 3-го года новой эры. Покажите на координатной прямой.
- 1060.** Известный древнегреческий ученый Аристотель родился в 384 г. до н. э. В каком году будет отмечаться его 2400-летие?

1061. Впишите в пустые клеточки квадратов (рис. 120) такие числа, чтобы суммы чисел каждой вертикали, горизонтали и диагонали равнялись друг другу.

	-2			-1		
	0				4	-8
-7	2					9
<i>a</i>			<i>б</i>			

Рис. 120



Упражнения для повторения

1062. Найдите 7,5 % числа: а) 3000; б) 12; в) 0,75.

1063. Найдите число, 7,5 % которого составляют:

а) 27; б) 34,8; в) 7,5.

1064. Найдите процентное отношение чисел:

а) 3,8 к 380; б) 1 к 20 000; в) 0,4 к 1.

1065. На сколько процентов число 8 меньше 40? А на сколько процентов число 40 больше 8?

1066. Постройте квадраты со сторонами 2 см и 4 см. На сколько процентов площадь первого квадрата меньше площади второго? На сколько процентов площадь второго квадрата больше площади первого квадрата?

1067*. Велосипедист ехал из села в город со скоростью 15 км/ч, а возвращался со скоростью 10 км/ч. Найдите его среднюю скорость.

§ 32.

Умножение рациональных чисел

Что значит умножить число -3 на 5 ? Это означает найти сумму пяти слагаемых, каждое из которых равно -3 :

$$(-3) \cdot 5 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15.$$

Итак, $(-3) \cdot 5 = -15$.

Чтобы выполнялся переместительный закон умножения, считают, что $5 \cdot (-3) = -15$. Рассуждая точно так же относительно чисел -12 и 10 , имеем:

$$(-12) \cdot 10 = -120 \text{ и } 10 \cdot (-12) = -120.$$

Чтобы умножить отрицательное число и положительное, надо умножить их модули и перед результатом поставить знак минус.



Примеры.

$$(-1,5) \cdot 40 = -60; \quad 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -2; \quad \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$$



Чтобы умножить два отрицательных числа, надо умножить их модули.

Примеры.

$$(-2) \cdot (-7) = 14; \quad (-1,2) \cdot (-5) = 6; \quad -\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}.$$

Почему именно по таким правилам умножают отрицательные числа, станет понятно позже. В общем виде эти правила записывают так:

$$(-a) \cdot (-b) = ab$$

$$(-a) \cdot b = -ab$$



Знак произведения определяется знаками множителей, как показано в таблице.

Знак числа a	Знак числа b	Знак произведения $a \cdot b$
+	+	+
-	-	+
-	+	-
+	-	-

Обратите внимание на отдельные случаи умножения. Каким бы ни было рациональное число a , всегда:

$$\begin{array}{lll} a \cdot 0 = 0, & a \cdot 1 = a, & a \cdot (-1) = -a, \\ 0 \cdot a = 0, & 1 \cdot a = a, & (-1) \cdot a = -a. \end{array}$$



Узнайте больше

Раньше ученые пытались обосновать правило умножения отрицательных чисел. Хотели понять, почему $(-a) \cdot (-b) = ab$. Приводили различные обоснования этого правила, но со временем они оказались неубедительными. Поэтому на протяжении нескольких столетий правила умножения и деления отрицательных чисел считались незаконными, а отрицательные числа называли ошибочными, абсурдными, не настоящими и т. п. Только со временем ученые поняли, что такие правила нужно не выводить из других, уже известных правил, а считать их правильными по договоренности.

В современной математике равенство $(-a) \cdot (-b) = ab$ принимается без доказательств и обоснований. Только при такой договоренности рациональные числа становятся полезными и удобными для применения.

А если бы не условились считать, что произведение $(-a) \cdot (-b)$ всегда равно ab , то все учение об отрицательных числах было бы очень примитивным и неинтересным. Его нельзя было бы использовать в математике и в других науках.



Проверьте себя

1. Сформулируйте правило умножения двух отрицательных чисел.
2. Как умножить два числа с разными знаками?
3. Любые ли два рациональных числа можно умножить?
4. Когда произведение двух рациональных чисел больше каждого множителя?



Выполняем вместе

- ① Найдите произведение чисел: а) 3,7 и $-0,2$; б) $-\frac{2}{3}$ и $-1\frac{1}{2}$.

• а) $3,7 \cdot (-0,2) = -(3,7 \cdot 0,2) = -0,74$;

$$6) \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1.$$

② При каком условии произведение двух рациональных чисел равно одному из них?

• Если $ab = a$, то возможны два случая:

1) $b = 1$, а a — произвольное число;

2) $a = 0$, а b — произвольное число.



Устные упражнения

1068. Выполните умножение:

- а) $14 \cdot 10$, $(-3) \cdot 10$, $(-8) \cdot (-5)$;
 б) $(-2) \cdot 10$, $10 \cdot (-4)$, $(-9) \cdot (-11)$;
 в) $(-0,5) \cdot 2$, $(-4) \cdot 0,6$, $(-2,5) \cdot 4$;
 г) $2,5 \cdot 0,4$, $(-20) \cdot (-7)$, $(-50) \cdot (-20)$.

1069. Вычислите:

- а) $(-3,25) \cdot 0$, $0 \cdot (-3,17)$, $\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot 0$;
 б) $(-5,97) \cdot 1$, $1 \cdot (-0,8)$, $\left(-3\frac{1}{2}\right) \cdot 1$;
 в) $0 \cdot (-195)$, $(-1) \cdot (-1)$, $(-1) \cdot 0$.

1070. При каком условии произведение двух рациональных чисел равно числу, противоположному одному из множителей? Приведите примеры.

1071. При каком условии произведение двух рациональных чисел равно нулю?



Уровень А

1072. Запишите сумму в виде произведения и вычислите его:

- а) $16 + 16 + 16 + 16 + 16$;
 б) $3,2 + 3,2 + 3,2 + 3,2 + 3,2 + 3,2$;
 в) $(-9) + (-9) + (-9) + (-9) + (-9) + (-9) + (-9)$;
 г) $\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)$.

1073. Запишите выражение в виде произведения и вычислите его:

- а) $-4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4$;
 б) $-0,3 - 0,3 - 0,3 - 0,3 - 0,3 - 0,3$;

в) $-(-5) - (-5) - (-5) - (-5) - (-5) - (-5) - (-5);$

г) $-\frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9}.$

1074. Найдите сумму сорока слагаемых, каждое из которых равно -25 .

1075. Найдите сумму ста слагаемых, каждое из которых равно:

а) -7 ; б) $-\frac{1}{2}$; в) $2 - 5$; г) $2^3 - 9$.

1076. Упростите выражение:

а) $-a - a - a - a - a - a - a - a;$

б) $-2x - 2x - 2x - 2x - 2x - 2x;$

в) $-\frac{1}{3}c - \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}c.$



Вычислите действия (**1077–1081**).

1077. а) $(-1,4) \cdot (-5);$ б) $3,74 \cdot (-0,5);$

в) $23,7 \cdot (-40);$ г) $2,25 \cdot (-0,04).$

1078. а) $(-3,5) \cdot (-42);$ б) $(-64) \cdot (-2,25);$

в) $(-367) \cdot (-89);$ г) $(-3,8) \cdot (-2,5).$

1079. а) $23,8 \cdot (-1,03);$ б) $(-135) \cdot (-8,6);$

в) $70,2 \cdot (-9,5);$ г) $(-0,07) \cdot (-25,8).$

1080. а) $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{6}{7}\right);$ б) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right);$ в) $\left(-\frac{4}{7}\right) \cdot \frac{21}{24}.$

1081. а) $15 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right);$ б) $\frac{5}{9} \cdot (-18);$ в) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-25);$

г) $\frac{6}{13} \cdot (-26);$ д) $0,5 \cdot \left(-\frac{8}{9}\right);$ е) $\frac{4}{5} \cdot (-2,5).$

1082. Решите уравнение:

а) $(-4) \cdot x = 0;$ б) $-2,3x = 0;$ в) $-\frac{1}{7}x = 0.$

1083. Вычислите значение выражения $(-5) \cdot m$, если:

а) $m = 3,8;$ б) $m = -4,4;$ в) $m = -0,72.$

1084. Заполните таблицу.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$(-4,6) \cdot x$								

1085. Умножьте сумму чисел $-8,5$ и $4,2$: а) на меньшее из них; б) на большее из них; в) на их разность.

1086. Умножьте разность чисел $-3,2$ и $4,3$: а) на меньшее из них; б) на большее из них; в) на их сумму.



Уровень Б

Выполните действия (1087–1089).

1087. а) $(-2,5) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$; б) $3,6 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$; в) $3,6 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)$;

г) $(-2,7) \cdot \frac{5}{9}$; д) $1\frac{1}{2} \cdot (-0,6)$; е) $-5 \cdot 1\frac{3}{5}$.

1088. а) $(-3) \cdot \left(-2\frac{1}{3}\right)$; б) $1\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$; в) $\left(-1\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$;

г) $2\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{9}{8}\right)$; д) $1,2 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$; е) $-3\frac{1}{2} \cdot (-0,2)$.

1089. а) $\left(-1\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{5}\right)$; б) $\left(-1\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-5\frac{1}{3}\right)$; в) $-9 \cdot 5\frac{2}{3}$;

г) $\left(-3\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{3}\right)$; д) $\left(-3\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{4}\right)$; е) $1\frac{5}{7} \cdot (-7,7)$.

1090. Заполните таблицу.

a	-3,4	-0,7	2,9	5,8	14	27	84	108
b	-7,5	26,4	-94	-67	-73	-0,9	-3,8	-10,8
ab								

1091. На сколько произведение чисел 5,8 и -2,3 меньше:
а) меньшего из них; б) большего из них; в) их суммы?

1092. На сколько произведение чисел -2,7 и -5 больше:
а) большего из них; б) меньшего из них; в) их суммы?

1093. Запишите в виде равенства такое утверждение:
модуль произведения чисел a и b равен произведению их модулей. Всегда ли это утверждение верно?

1094. Найдите значение выражения:

а) $x + 3 + x + 3 + x + 3 + x + 3 + x + 3$, если $x = -3,1$;

б) $c - 1 + c - 1 + c - 1 + c - 1 + c - 1 + c - 1$, если $c = 0,75$.

Выполните действия (1095–1096).

1095. а) $-0,6 \cdot 7 + 3,6 \cdot 0,4$; б) $(3,7 - 4,8) \cdot 3,5$;

в) $1 - 3,5 \cdot (2 - 2,4)$; г) $(-0,5)^2 - 0,4 \cdot 2,8$;

д) $1,3^2 - (-3) \cdot 1,8$; е) $-3 - (1,5 - 2,7)^2$.

1096. а) $-\frac{2}{3} \cdot 0,4 + 2\frac{1}{2} \cdot (-5)$; б) $\left(1\frac{1}{2} - 2\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)$;

в) $\left(-2\frac{2}{5}\right)^2 - 3\frac{1}{5} + 2,2$; г) $\left(\frac{3}{7} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\right)$.

1097. Решите уравнение:

а) $3(x + 1) = 0$; б) $(-7) \cdot (5 - x) = 0$; в) $|x - 3| = 0$.

1098. Угадайте, чему равен корень уравнения, и выполните проверку:

а) $(-8) \cdot x = 40$; б) $12x = -60$; в) $0,5x = -30$.

1099. Решите уравнение:

а) $0 - 2,3x = 0$; б) $(-2,5) \cdot x = 10$;
 в) $|x| \cdot (-4,8) = 0$; г) $|x - 3| \cdot (-5) = 0$;
 д) $2 - x + 2 - x + 2 - x + 2 - x = 8$.

1100. При каждом ли x значения выражений $(-3) \cdot x$ и $0 - 3x$ равны? А значения выражений $0 - 0,4x$ и $(-0,4) \cdot x$?

1101. Положительное или отрицательное число a , если:

а) $(-5) \cdot a > 0$; б) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot a < 0$; в) $(-4,3) \cdot (a - 7) < 0$?

1102. При каждом ли значении c верно равенство:

а) $(c - 1)^2 = (1 - c)^2$; б) $|c - 1| = |1 - c|$?

1103. Какое число больше: a или c , если $-5(a - c) > 0$?



Упражнения для повторения

1104. Вычислите: а) $21 \cdot 125 \cdot 8 \cdot 3$; б) $\frac{2}{15} \cdot \frac{3}{7} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 2,1$.

1105. Запишите сумму выражений $2x + 5$ и $4x$ и упростите ее.

1106. Решите уравнение:

а) $5,2x - 7 = 6$; б) $4 + 5x = 10$.

1107. Два автомобиля движутся навстречу друг другу со скоростями 60 км/ч и 85 км/ч. Какое расстояние между ними будет за 1 ч до встречи? А через 0,5 ч после встречи?

1108. На сколько среднее арифме-

тическое чисел $3\frac{5}{6}$, 2,4 и $-1,9$ мень-

ше их полусуммы?

1109. Каждое простое число имеет только два делителя. А какие числа имеют только три делителя?

1110*. Можно ли изображенную на рисунке 121 часть шахматной доски разрезать на прямоугольники, состоящие из двух клеточек?

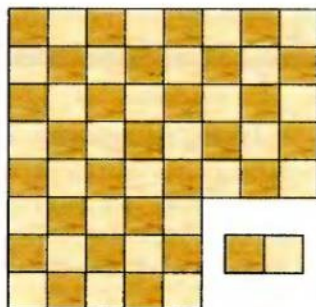


Рис. 121

§33.

Деление рациональных чисел

Деление – действие, обратное умножению. Разделить одно число на другое – это означает найти такое третье число, которое при умножении на второе дает первое.



Если $a : b = x$, то $x \cdot b = a$.

Рассмотрим несколько примеров.

Примеры.

а) $20 : 2 = 10$, поскольку $10 \cdot 2 = 20$;

б) $-8 : 2 = -4$, поскольку $-4 \cdot 2 = -8$;

в) $10 : (-5) = -2$, поскольку $(-2) \cdot (-5) = 10$;

г) $-15 : (-3) = 5$, поскольку $5 \cdot (-3) = -15$.

В каждом из рассмотренных примеров модуль частного равен частному от деления модулей делимого и делителя. Частное отрицательное, если знаки делимого и делителя разные; если знаки делимого и делителя одинаковые, то частное положительное. К таким выводам приходили ученые, рассматривая любые другие примеры. Поэтому пользуются таким правилом.

Чтобы разделить одно рациональное число на другое, надо разделить их модули; если знаки делимого и делителя разные, то перед результатом нужно поставить знак минус.



Пусть, например, нужно найти частные $-3,6 : 3$; $3,6 : (-3)$; $-3,6 : (-3)$. Модуль каждого частного равен 1,2. В первых двух примерах знаки делимого и делителя разные, поэтому частное отрицательное. В третьем примере знаки делимого и делителя одинаковые, поэтому частное положительное. Итак,

$$-3,6 : 3 = -1,2,$$

$$3,6 : (-3) = -1,2, \text{ но}$$

$$-3,6 : (-3) = 1,2.$$

Знак числа a	Знак числа b	Знак частно- го $a : b$
+	+	+
—	—	+
—	+	—
+	—	—

При делении 0 на любое число, отличное от нуля, получают нуль. Делить на 0 нельзя! Почему? Ведь, если бы, например, «частное» $5 : 0$ равнялось какому-то числу x , то было бы верно равенство $x \cdot 0 = 5$, что невозможно при любом значении x . И «частное» $0 : 0$ не может равняться какому-то одному числу x , ибо тогда было бы, что $x \cdot 0 = 0$, а этому равенству удовлетворяет любое число x . Итак,

делить на нуль нельзя!



Узнайте больше

Если числа a и b натуральные, то $a : b = \frac{a}{b}$. Это равенство распространяют и на дробные числа a и b . Например,

$$-3 : 4 = -\frac{3}{4}; \quad 0,3 : (1 - 2,6) = \frac{0,3}{1 - 2,6}.$$

Выражения, записанные в правых частях последних равенств, — *дроби*. Но не обыкновенные. Числитель и знаменатель дроби может быть любым числом и любым выражением. Более детально дроби изучают в алгебре, а здесь подчеркнем, что обыкновенные дроби — это простейшие дроби. Соотношение между понятиями «дроби» и «обыкновенные дроби» можно показать на диаграмме (рис. 122).



Рис. 122

Чтобы вычислить значение любой дроби, достаточно ее числитель разделить на знаменатель. Например,

$$\frac{0,5 - 3}{3,5 - 2^2} = (0,5 - 3) : (3,5 - 4) = -2,5 : (-0,5) = 5.$$



Проверьте себя

1. Что означает разделить число a на число b ?
2. Как называются компоненты действия деления?
3. Сформулируйте правило деления рациональных чисел?
4. Какими знаками можно обозначать действие деления?
5. Можно ли делить на 0? Почему?
6. Чем отличаются понятия «дробь» и «обыкновенная дробь»?



Выполняем вместе

① Разделите: а) -27 на 54 ; б) $\frac{7}{9}$ на $-1\frac{1}{6}$.

• а) $-27 : 54 = -(27 : 54) = -0,5$;

б) $\frac{7}{9} : \left(-1\frac{1}{6}\right) = -\left(\frac{7}{9} : 1\frac{1}{6}\right) = -\left(\frac{7}{9} \cdot \frac{6}{7}\right) = -\frac{2}{3}$.

② Найдите отношение чисел $-2,5$ и $-\frac{1}{2}$.

• $-2,5 : \left(-\frac{1}{2}\right) = 2,5 : \frac{1}{2} = 2,5 \cdot 2 = 5$.



Устные упражнения

1111. Вычислите:

- | | | | |
|-------------------|--------------|---------------|----------------|
| а) $48 : 12$, | $-9 : 3$, | $81 : (-9)$, | $-30 : 15$; |
| б) $-6 : (-3)$, | $-40 : 8$, | $60 : (-3)$, | $1 : (-5)$; |
| в) $35 : (-7)$, | $-28 : 4$, | $-36 : 18$, | $200 : (-5)$; |
| г) $-20 : (-4)$, | $-13 : 13$, | $0 : (-67)$, | $-1 : (-5)$. |



Уровень А

Вычислите (1112 – 1120).

1112. а) $105 : (-21)$; б) $-114 : 19$;

в) $924 : (-22)$; г) $-111 : 37$.

1113. а) $-432 : 18$; б) $-504 : 21$;

в) $-969 : (-17)$; г) $-141 : 47$.

1114. а) $72,5 : (-29)$; б) $70,2 : (-26)$;
 в) $-5,98 : (-23)$; г) $-5,4 : 3,6$.
 1115. а) $-377 : (-2,9)$; б) $-83,7 : 2,7$;
 в) $-55,5 : (-3,7)$; г) $-19,6 : (-1,4)$.
 1116. а) $-3 : 0,25$; б) $-6 : 0,15$;
 в) $-7 : (-0,25)$; г) $-169 : (-1,3)$.
 1117. а) $0,2 : (-5)$; б) $-0,6 : (-0,75)$;
 в) $-1 : (-2,5)$; г) $324 : (-0,18)$.

1118. а) $-\frac{3}{7} : (-3)$; б) $-\frac{7}{9} : (-7)$; в) $\frac{4}{5} : (-4)$.

1119. а) $-\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$; б) $-\frac{6}{7} : \left(-\frac{3}{7}\right)$; в) $-\frac{3}{5} : \left(-\frac{9}{20}\right)$.

1120. а) $(-2) : \frac{1}{2}$; б) $3\frac{1}{3} : (-2)$; в) $-2\frac{1}{2} : \left(-1\frac{1}{4}\right)$.

1121. Заполните таблицу.

x	-3	-2	-1	2	3	0,6	1,5
$6 : x$							
$x : (-5)$							

1122. Вычислите отношение:

а) $\frac{3,5}{2,8}$; б) $\frac{-5}{0,2}$; в) $\frac{-3}{1,5}$; г) $\frac{2,4}{-15}$; д) $\frac{0,36}{4,5}$.

Вычислите значения выражений (1123–1125).

1123. а) $335 : (-67) + 13$; б) $189 : (-63) - 28$;
 в) $25 - 2,5 : (-0,5)$; г) $32,4 + 6 : (-0,15)$.
 1124. а) $22,8 : (-5,7) - 23$; б) $-30,5 : (-6,1) - 2,8$;
 в) $2,2 : (-0,5) + \frac{1}{4}$; г) $-6,3 : \frac{7}{9} + 1\frac{1}{7}$.
 1125. а) $17 - 36,6 : (-6,1)$; б) $11 - 4,84 : (-0,11)$;
 в) $5,4 - 5,4 : (-36)$; г) $-2,5 + 2,5 : (-1)$.
 1126. Найдите неизвестный член пропорции:
 а) $7 : x = -7 : 13$; б) $x : (-5) = -12 : 100$;
 в) $-25 : 8 = x : (-n)$; г) $26 : 5 = 39 : (-x)$.

1127. Вычислите значение выражения:

- а) $-12 : x - 3,5$, если $x = -0,36$;
 б) $2,8 + a : (a + 2)$, если $a = -2,5$.

1128. Решите уравнение:

- а) $-3x = 9$; б) $5x = -35$; в) $4x + 20 = 8$;
 г) $0,5x + 13 = 8$; д) $19 - 8x = 23$; е) $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{5}$.



Уровень Б

Выполните действия (1129–1134).

1129. а) $78 : (-26) + 115 : (-23)$;

б) $-87 : 2,9 - 102 : (-1,7)$.

1130. а) $3,8 - 51 : (21 - 4)$;

б) $8,7 - (99 - 31) : (-17)$.

1131. а) $-2,7 \cdot 3,8 - 95 : (-19)$;

б) $-5,7 : 19 + 2,5 \cdot 3,4$.

1132. а) $(-1,2)^2 - 111 : (-37)$;

б) $12,4 : (-31) - (-1,1)^2$.

1133. а) $-18 : (-6)^2 - 0,5$;

б) $-4,7 - (-2,1)^2 : (-7)$.

1134. а) $-\frac{2}{3} : \frac{4}{9} - \frac{2}{5} : \left(-\frac{4}{15}\right)$; б) $-1\frac{1}{2} : 0,6 - \frac{2}{7} : \left(-\frac{1}{14}\right)$.

1135. Заполните таблицу.

a	-2	$-2,5$	$0,2$	$0,3$	$1,6$	$3,6$
b	$0,5$	$-0,1$	$-0,04$	-6	$-0,8$	$-0,45$
$a : b$						
$b : a$						

1136. Решите уравнение:

а) $2(3 - x) = 24$;

б) $4(x + 7) = 22$;

в) $\frac{2}{5}x + 14 = \frac{3}{5}$;

г) $2 - \frac{1}{3}(x - 6) = 11$.

1137. Найдите неизвестный член пропорции:

а) $-3 : x = \frac{2}{5} : \frac{4}{9}$;

б) $x : \left(-\frac{2}{3}\right) = (-3) : \frac{1}{2}$.

1138. Найдите отношение $-3,5 : 0,07$; $6,3 : (-0,9)$;

$-0,75 : \left(-\frac{3}{5}\right)$; $-\frac{2}{5} : 0,25$; $1\frac{3}{4} : \left(-2\frac{2}{7}\right)$.

1139. Найдите отношение квадратов чисел $-0,2$ и $-0,4$.

1140. Найдите отношение кубов чисел -1 и $-0,5$.

1141. Вычислите значение выражения:

а) $\frac{2,4}{0,6} + \frac{1}{0,25}$;

б) $\frac{1}{0,4} + \frac{-4}{0,5}$;

в) $\frac{3}{0,8} + \frac{3}{-0,4}$;

г) $\frac{5,6}{3,5} + (-0,6)$;

д) $\frac{5 \cdot 0,3 - 3,2}{1 : 0,5 - 0,3}$;

е) $(-0,3)^2 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2$.



1142. Могут ли значения выражений $(a \cdot c) : a$ и $a \cdot (c : a)$ не равняться друг другу? Приведите примеры.

1143. При каком условии значения выражений $a : (c \cdot a)$ и $a \cdot (c : a)$ равны друг другу? А выражений $a : (c \cdot a)$ и $(a : c) \cdot a$?

1144. При любых ли рациональных значениях a и b ($b \neq 0$) верно равенство $|a : b| = |a| : |b|$? А равенство $|a| : |b| = a : b$?

1145. Какими могут быть значения выражений $a : |a|$, $|a| : a$?

1146. Может ли быть положительным или отрицательным значение выражения $\frac{a}{|a|} - \frac{|a|}{a}$?

1147. Решите ребусы (рис. 123).



Рис. 123



Упражнения для повторения

1148. Найдите площадь квадрата, периметр которого равен 8,4 дм.

1149. Найдите площадь круга, диаметр которого равен 0,8 м.

1150. Найдите длину окружности, радиус которой равен 4 м, и площадь круга, ограниченного этой окружностью.

1151. Найдите площадь кольца, изображенного на рисунке 124, если $r = 8$ см, а $r_1 = 4$ см.

1152. Одно число составляет 25 % другого, а их разность равна 37. Найдите эти числа.

1153*. Мама предложила дочерям разложить конфеты по трем вазам: в большую положить половину всех конфет и еще 3, во вторую – половину остатка и еще 3, а в третью – половину нового остатка и еще 3, а те 4 конфеты, которые остались, взять себе. Сколько всего было конфет?

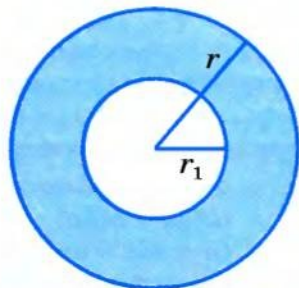


Рис. 124

§34.

Свойства
сложения и умножения

Как известно, для положительных чисел выполняются переместительный и сочетательный законы сложения. Эти законы всегда выполняются и для любых рациональных чисел a, b, c :



$a + b = b + a$ — переместительный закон,
 $a + (b + c) = (a + b) + c$ — сочетательный закон.

Примеры.

а) $-2 + (-3) = -5$ и $-3 + (-2) = -5$.

Значит $-2 + (-3) = -3 + (-2)$;

б) $(3 + (-5)) + (-8) = -2 + (-8) = -10$ и

$3 + (-5 + (-8)) = 3 + (-13) = -10$.

Значит $(3 + (-5)) + (-8) = 3 + (-5 + (-8))$.

Используя переместительный и сочетательный законы сложения, можно упрощать вычисления сумм трех и большего количества рациональных чисел. Например, переставив местами слагаемые и сгруппировав их в две группы, можно отдельно сложить все положительные слагаемые и отдельно — отрицательные. Если среди слагаемых есть противоположные числа, их можно не учитывать, поскольку сумма противоположных чисел равна нулю.

Примеры.

а) $2 + (-81) + 3 + (-17) = 2 + 3 + (-81) + (-17) = 5 + (-98) = -93$;

б) $17 + (-14) + 8 + (-17) + (-8) = 17 + (-17) + 8 + (-8) + (-14) = -14$.

Для любых рациональных чисел верны переместительный, сочетательный и распределительный законы умножения. То есть, какими бы не были рациональные числа a, b и c , всегда:

$ab = ba$ — переместительный закон,
 $(ab)c = a(bc)$ — сочетательный закон,
 $(a + b)c = ac + bc$ — распределительный закон.



Убедитесь в правильности указанных равенств для случая, когда, например, $a = -2$, $b = 3$, $c = -4$.

Переместительный и сочетательный законы умножения позволяют упрощать вычисление произведения трех и больше множителей. Множители не обязательно умножать в той последовательности, в которой они записаны, а можно переставлять и объединять их в группы. Например, произведение $0,25 \cdot (-317) \cdot 4$ можно вычислить устно, если сначала умножить $0,25$ и 4 .

Обратите внимание! Произведение любых двух отрицательных чисел – число положительное.

Если произведение содержит четное число отрицательных множителей, то оно положительное, а если нечетное число отрицательных множителей, то оно отрицательное (при условии, что ни один из множителей – не нуль).

Например, произведение $3 \cdot (-2) \cdot (-5) \cdot (-7) \cdot 9 \cdot (-11)$ положительное, а $(-4) \cdot 5 \cdot (-6) \cdot (-9) \cdot 12$ – отрицательное.

Квадрат отрицательного числа – число положительное, куб отрицательного числа – число отрицательное.

Примеры.

$$a) (-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25;$$

$$б) (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8.$$

Если число a отрицательное, то a^3 , a^5 , a^7 – числа отрицательные, а a^2 , a^4 , a^6 – положительные.



Узнайте больше

Равенство $(a + b)c = ac + bc$ выражает распределительный закон умножения относительно суммы двух чисел. Похожее свойство умножения верно и относительно разности: всегда $(a - b)c = ac - bc$. Докажем это. Поскольку разность всегда можно записать в виде суммы, то

$$(a - b)c = (a + (-b))c = ac + (-b)c = ac - bc.$$

Распределительный закон умножения верный также для любого количества положительных или отрицательных слагаемых. Например, всегда верно равенство $(a + b - d)c = ac + bc - dc$. Действительно, если сумма $a + b$ равна некоторому числу m , то $(a + b - d)c = (m - d)c = mc - dc = (a + b)c - dc = ac + bc - dc$.

Какими бы не были рациональные числа a , b и c ($c \neq 0$), всегда верно равенство $(a + b) : c = a : c + b : c$. Действитель-

но, согласно распределительному закону умножения верно равенство

$$(a+b):c = (a+b) \cdot \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = a:c + b:c.$$

Из законов сложения и умножения можно вывести много важных и интересных следствий. С ними вы познакомитесь на уроках алгебры.



Проверьте себя

1. Сформулируйте переместительный закон сложения.
2. Сформулируйте сочетательный закон сложения.
3. Всегда ли верно равенство $a + (-c) = -c + a$?
4. Чему равна сумма трех чисел, два из которых противоположны друг другу?
5. Сформулируйте переместительный и сочетательный законы умножения.
6. Сформулируйте распределительный закон умножения.



Выполняем вместе

① Вычислите $-17,3 + 7 \cdot \left(1\frac{2}{7} - 3,2\right) - 13,7$.

$$\begin{aligned} & \bullet -17,3 + 7 \cdot \left(\frac{9}{7} - 3,2\right) - 13,7 = -17,3 + 7 \cdot \frac{9}{7} - 7 \cdot 3,2 + (-13,7) = \\ & = -17,3 + (-13,7) + 9 - 22,4 = -31 - 22,4 + 9 = \\ & = -53,4 + 9 = -44,4. \end{aligned}$$

② На сколько сумма квадратов чисел 6 и -4 больше квадрата их суммы?

$$\bullet 6^2 + (-4)^2 - (6 + (-4))^2 = 36 + 16 - 4 = 48.$$

Ответ. На 48.



Устные упражнения

1154. Вычислите:

а) $1,2 + 7,5 + (-1,2)$,

$$\frac{2}{3} + 3\frac{1}{7} + \left(-\frac{2}{3}\right);$$

б) $0,8 + 1,23 + (-1,23)$,

$$-\frac{4}{7} + 2\frac{1}{3} + \left(-\frac{3}{7}\right).$$

1155. Вычислите:

$$\begin{aligned} \text{а) } & -2 \cdot 7,5 \cdot (-5), \\ & 0,5 \cdot (-841) \cdot 2, \\ & 9,6 \cdot (-7,4) \cdot 0, \\ & 3 \cdot (-657) \cdot \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } & 4 \cdot (-8,7) \cdot 0,25, \\ & 0,4 \cdot 851 \cdot (-2,5), \\ & 25 \cdot (-833) \cdot (-4), \\ & -7 \cdot (-477) \cdot \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

1156. Положительное или отрицательное произведение:

$$\begin{aligned} \text{а) } & -7 \cdot 13 \cdot (-8) \cdot 49 \cdot (-16) \cdot 35 \cdot (-47) \cdot (-19); \\ \text{б) } & 3,7 \cdot (-42) \cdot 36 \cdot (-54) \cdot (-0,8) \cdot 87,9? \end{aligned}$$

1157. Найдите произведение ста чисел, каждое из которых равно -1 .

Уровень А

1158. Проверьте правильность равенства $a + b = b + a$, если:

$$\text{а) } a = 7,8, b = -2,5; \quad \text{б) } a = -2,9, b = 4,8.$$

1159. Найдите сумму чисел:

$$\text{а) } 21, -35, 38, -62; \quad \text{б) } 57, -49, 38, 79, -86.$$

Вычислите (1160–1161).

$$\text{1160. а) } 38 + (-27) + (-83) + 42;$$

$$\text{б) } (-19) + 47 + (-29) + 53.$$

$$\text{1161. а) } (-5,7) + 3,9 + (-1,2) + 4,1;$$

$$\text{б) } 13,8 - 17,1 + (-1,7) + (-3,3).$$

1162. Найдите сумму всех целых чисел, которые больше -10 и меньше 7 .**1163.** Верно ли равенство:

$$\text{а) } 3,5 + (-2,7) = 3,5 - 2,7;$$

$$\text{б) } 1,3 - 3,1 = 3,1 - 1,3;$$

$$\text{в) } 4,8 + (-3,9) = 4,8 - 3,9;$$

$$\text{г) } -7,1 + 1,7 = 1,7 - 7,1?$$

1164. Заполните таблицу.

a	3	-4	-5	43	-56	-83	-97
b	-2	38	-76	-73	138	297	388
c	-9	-43	96	-89	-95	-49	-138
$a + b + c$							

1165. Убедитесь в правильности переместительного, сочетательного и распределительного законов умножения на примере чисел -5 , -2 и $-0,5$.

Вычислите значения выражений (1166–1173).

$$\text{1166. а) } (-7) \cdot (-8) \cdot 0,5;$$

$$\text{б) } 2,5 \cdot (-6) \cdot 40.$$

$$\text{1167. а) } (-2,5) \cdot (-12) \cdot (-10);$$

$$\text{б) } -23 \cdot 0,75 \cdot (-4).$$

$$\text{1168. а) } (-3) \cdot 20 \cdot (-8) \cdot 0,5;$$

$$\text{б) } 12 \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot (-0,5).$$

$$\text{1169. а) } -\frac{1}{16} \cdot (-32) \cdot 8;$$

$$\text{б) } \frac{1}{2} \cdot (-6) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-0,1).$$

1170. а) $(-12) \cdot 5 + 20 \cdot 4$; б) $25 \cdot (-2) - 75 \cdot (-1)$.

1171. а) $13 - (-4) \cdot 25 \cdot 0,1$; б) $-3 \cdot (-5) \cdot 8 - 85,3$.

1172. а) $\frac{1}{3} - 6 \cdot (-6) \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$; б) $6\frac{1}{2} + 35 \cdot (-2) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$.

1173. а) $(-4)^2, (-6)^2, (-7)^2, (-11)^2, (-3)^2, (-4)^3, (-5)^3$;

б) $(-0,1)^2, (-0,2)^2, (-0,6)^2, (-0,1)^3, (-0,2)^3$;

в) $\left(-\frac{1}{5}\right)^2, \left(-\frac{3}{7}\right)^2, \left(-\frac{2}{9}\right)^2, \left(-\frac{1}{3}\right)^3, \left(-1\frac{1}{2}\right)^3, \left(-2\frac{2}{3}\right)^2$.

1174. Выполните действия:

а) $(-3)^2 + 7$; б) $(-5)^2 - 2^2$; в) $(-4) + (-2 + 6)^2$.

1175. Найдите сумму квадратов чисел:

а) -7 и 3 ; б) $0,6$ и $-0,4$; в) $1,2$ и $-2,1$.

1176. Найдите квадрат суммы чисел:

а) 5 и 12 ; б) $-3,4$ и $3,2$; в) $12,7$ и $-11,7$.

1177. Найдите сумму кубов и куб суммы чисел:

а) -4 и -3 ; б) 5 и -2 ; в) $-3,1$ и 3 .



Уровень В

Вычислите (1178–1181).

1178. а) $-3,6 + (-2,7) + 8,9 + (-7,5) + 44$;

б) $(-8,76) + 3,21 + (-8,42) + (-7,56) + 9,82$.

1179. а) $67 + (-87,5) + 56,8 + (-46,9) + (-28,7)$;

б) $-0,74 + 0,72 + 1,21 + (-0,95) + (-1,7)$.

1180. а) $\frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{4}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) + 3\frac{2}{3} + \left(-2\frac{1}{3}\right)$;

б) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{5}{8}\right) + \frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2}\right)$.

1181. а) $0,5 + \left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right) + 3\frac{1}{2} + \left(-1\frac{1}{2}\right)$;

б) $-\frac{5}{6} + 0,2 + \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{6}\right) + 0,8 + \left(-\frac{2}{3}\right)$.

1182. К сумме чисел $-3,8$ и $5,2$ прибавьте сумму чисел 37 и -84 .

1183. К сумме $5,2 + (-3,7) + (-5,4)$ прибавьте сумму $(-3,7) + (-5,2)$.

1184. Найдите модуль суммы и сумму модулей чисел 32 , -8 , -17 и -12 .

1185. Разность между доходами и расходами называется *сальдо*. Используя данные таблицы, вычислите при помощи положительных и отрицательных чисел сальдо (в гривнях) за каждый месяц и за пять месяцев.

Месяц	Доход	Расход	Сальдо
Январь	3152	2675	
Февраль	4533	6473	
Март	2453	2316	
Апрель	2085	2347	
Май	5642	5804	
Всего			

1186. Вычислите значение суммы $x + y + z + (-2)$, если:

а) $x = -2,3$, $y = 3,8$, $z = -0,5$;

б) $x = 0,207$, $y = 0,875$, $z = -1,67$.

1187. На сколько куб суммы чисел -3 и -5 больше или меньше суммы их кубов?

1188. На сколько сумма кубов чисел $0,1$ и $-0,2$ больше или меньше суммы их квадратов?

1189. Найдите значение выражения:

а) $8,6 \cdot 9,7 - 3,4 \cdot 7,1 - 6,8 \cdot 3,6$;

б) $-3,9 \cdot 4,2 + 2,5 \cdot 7,9 - 8,3 \cdot 4,1$;

в) $-2,5 \cdot (-3,2) + (-8) \cdot (-0,25) - 3,7 \cdot (-2,5)$.

1190. Вычислите произведение:

а) $-\frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot (-8)$;

б) $-\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5)$;

в) $\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)$.

1191. Найдите произведение всех целых чисел, которые больше -13 и меньше 13 .

1192. Проверьте правильность равенства $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b$ для:

а) $a = -3$, $b = -5$; б) $a = -0,3$, $b = -\frac{1}{3}$.

1193. При любых ли значениях a , b и c верны равенства:

а) $(-a) \cdot bc = a(-b) \cdot c = ab \cdot (-c)$;

б) $(a + b)cd = acd + bcd$;

в) $(a + b + d + e)c = ac + bc + dc + ec$;

$$\text{г)} (a - b - d + e)c = ac - bc - dc + ec;$$

$$\text{д)} (a + b - d) : c = a : c + b : c - d : c?$$

Приведите примеры. Попробуйте доказать эти равенства.

1194. Найдите значение выражения:

$$\text{а)} 3x^2 - 1, \text{ если } x = -5;$$

$$\text{б)} (2x)^2 + 3, \text{ если } x = -0,6;$$

$$\text{в)} \frac{2}{9}x^3 + 10, \text{ если } x = -3.$$

1195. Разместите числа $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ в кругах (рис. 125) так, чтобы сумма чисел на каждой стороне «треугольника» равнялась -1 . А теперь переставьте числа так, чтобы каждая из сумм равнялась -2 .

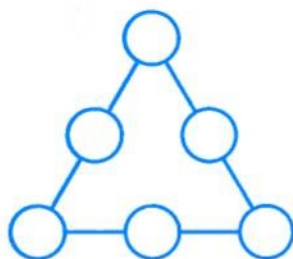


Рис. 125



Упражнения для повторения

1196. Найдите неизвестный член пропорции:

$$\text{а)} 3,8 : x = 4,7 : 94;$$

$$\text{б)} 4,08 : 5,1 = 0,7 : x;$$

$$\text{в)} \frac{14,4}{1,2} = \frac{x}{4,8};$$

$$\text{г)} \frac{3,1}{0,5} = \frac{0,124}{t}.$$

1197. В школьной библиотеке всего 3600 книг. $\frac{3}{4}$ их об-

щего количества – учебники, 3 % остатка – справочники. Сколько справочников в этой библиотеке?

1198. Один насос может откачать воду из котлована за полчаса, другой – за 20 мин. За какое время могут откачать воду из котлована оба насоса, работая вместе?

1199. Найдите длины сторон четырехугольника, если они пропорциональны числам 4, 5, 6 и 7, а наибольшая из них равна 3,5 дм.

1200. Если бы человек двухметрового роста смог обойти земной шар по экватору или меридиану, то его голова описала бы окружность большего радиуса (рис. 126). Прикиньте, на сколько длина этой окружности больше длины экватора или меридиана. Вычислите эту разность.



Рис. 126



Самостоятельная работа 6

Вариант 1

1°. Выполните действия:

а) $-2,75 - 3,8$; б) $2,4 \cdot (-3,5)$; в) $-7 : 2,1$.

2°. Решите уравнение:

а) $x - 8 = -14$; б) $-6x = 15$; в) $0,2x + 7 = 5$.

3°. На сколько сумма квадратов чисел $-0,2$ и $0,3$ больше куба их суммы?

4°. Вычислите:

а) $5,4 - 8,2 + 2,6 - (-3,7) + (-4,9)$;

б) $-5,3 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 7 - 1,7 \cdot (-0,2) + 3,8 : 2$.

Вариант 2

1°. Выполните действия:

а) $-4,6 - 7,85$; б) $3,8 \cdot (-2,5)$; в) $3,8 : (-76)$.

2°. Решите уравнение:

а) $x - 12 = -37$; б) $8x = -4$; в) $0,3x + 10 = 7$.

3°. На сколько сумма квадратов чисел -2 и $1,7$ больше куба их суммы?

4°. Вычислите:

а) $-2,6 + 3,9 - 7,4 + 2,6 - (-2,8) + (-3,5)$;

б) $-0,8 \cdot 1,4 + 1,4 \cdot (-0,5) - 1,3 \cdot (-1,4) - 5,6 : (-8)$.

Вариант 3

1°. Выполните действия:

а) $-1,53 + 0,75$; б) $3,6 \cdot (-6,25)$; в) $6 : (-0,3)$.

2°. Решите уравнение:

а) $13 + x = -48$; б) $-0,6x = 30$; в) $0,4x - 7 = -5$.

3°. На сколько сумма кубов чисел $-0,2$ и $0,3$ больше куба их суммы?

4°. Вычислите:

а) $3,27 - 8,06 + (-2,73) - (-8,4) - 4,62$;

б) $-3,2 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 7 - 0,2 \cdot (-0,5) + 3,8 : (-1,9)$.

Вариант 4

1°. Выполните действия:

а) $-0,75 + 1,26$; б) $-2,75 \cdot 1,4$; в) $-6,5 : (-13)$.

2°. Решите уравнение:

а) $24 - x = -13$; б) $-6,7x = -33,5$; в) $0,6x + 17 = 5$.

3*. На сколько сумма квадратов чисел $-3,7$ и 4 больше куба их суммы?

4*. Вычислите:

а) $-5,24 - 3,57 + (-6,92) - 8,5 - (-4,24)$;

б) $-4,8 \cdot 2,7 + 2,7 \cdot (-5) + 2,7^2 + 2,7 : (-5,4)$.



Готовимся
к тематическому контролю

Вопросы для самопроверки

1. Как сложить два отрицательных числа?
2. Как найти сумму положительного и отрицательного чисел?
3. Чему равна сумма двух противоположных чисел?
4. Как из одного рационального числа вычесть другое?
5. Всегда ли возможно вычитание рациональных чисел?
6. Сформулируйте правило сложения двух отрицательных чисел.
7. Как умножить два числа с разными знаками?
8. Сформулируйте правило деления рациональных чисел.
9. Сформулируйте законы сложения.
10. Сформулируйте законы умножения.

Задания в тестовой форме

1. Чему равна сумма чисел $-2,5$ и $5,2$?
а) 0; б) $-7,7$; в) $7,7$; г) $2,7$.
2. Чему равно произведение чисел $1,1$ и -11 ?
а) $-111,1$; б) $11,11$; в) $-12,1$; г) $12,1$.
3. Решите уравнение $5x = -100$.
а) 20; б) -20 ; в) -95 ; г) -500 .
4. Чему равен квадрат числа $-0,7$?
а) 4,9; б) $-4,9$; в) 0,49; г) $-0,49$.
5. Чему равен куб числа $-0,2$?
а) 0,08; б) 0,008; в) $-0,008$; г) $-0,08$.
6. Вычислите $-2,5 \cdot 5,2 - 1,2 \cdot (-2,5)$.
а) -13 ; б) 10; в) -10 ; г) 3.
7. Какой знак надо поставить вместо звездочки в записи $(-2)^3 * (-2)^2$?
а) «>»; б) «<»; в) «=»; г) «>>».
8. Найдите корни уравнения $|x - 5| = 5$.
а) 5 и -5 ; б) 0 и 10; в) 10 и 15; г) -10 и 5.

9. Вычислите произведение $-2,99 \cdot 0$.

- а) 2,99; б) $-2,99$; в) 0; г) $-0,99$.

10. Вычислите значение выражения $0,25xy$, если $x = -24$, $y = -23$.

- а) 1,38; б) -183 ; в) -138 ; г) 138.

Типовые задачи

1°. Выполните действия:

- а) $1,15 - 7,26$; б) $-2,25 \cdot (-1,4)$; в) $19,5 : (-13)$.

2°. Решите уравнение:

- а) $34 + x = -13$; б) $0,7x = -3,5$.

3°. Найдите квадрат и куб числа $-1,2$.

4°. Вычислите:

- а) $-59 + 37 + (-42) - (-41)$; б) $-2 \cdot (-7) \cdot (-5)$.

5°. Вычислите значение выражения $a^2 + 6a + 9$, если $a = -3\frac{1}{3}$.

6°. Найдите расстояние между точками $A(-7,5)$ и $M(-5,7)$.

7°. Найдите неизвестный член пропорции

$$x : (-3,2) = -4,8 : \frac{4}{5}.$$

8°. Вычислите $A - B$, если:

$$A = -2\frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{7} + 5\frac{2}{3} : (-1,25) - 1 : (-3), \quad B = 3,25 - 11 : (-4).$$

9°. Найдите корни уравнения $|5y - 1,3| = 2,7$.

10°. Назовите такие два числа, чтобы модуль их суммы был меньше суммы их модулей. Запишите соответствующее неравенство в общем виде.

§35.

Преобразование простейших выражений

Если одно выражение заменить другим, имеющим такие же числовые значения, то такую замену называют *преобразованием выражения*. Рассмотрим несколько наиболее важных преобразований, которые выполняются на основании законов сложения и умножения.

1. Раскрытие скобок.

Раскрыть в выражении скобки – это значит заменить его выражением без скобок.

Если выражение со скобками содержит только действие умножения, то для его преобразования используют переместительный и сочетательный законы умножения.

Пример. $5x^2 \cdot (-3) \cdot y = 5 \cdot (-3) \cdot x^2 \cdot y = -15x^2y$.

Если произведение содержит только числовой и буквенные множители, то числовой множитель пишут первым и называют его *коэффициентом*.



Пример. В выражениях $2x$, $-5cx$, $-0,8n^2$, ac , $-p$ коэффициентами являются числа 2 , -5 , $-0,8$, 1 , -1 . Коэффициенты 1 и -1 обычно не пишут.

Раскрывать скобки в выражениях, содержащих действия умножения, сложения и вычитания, можно на основании распределительного закона умножения и следствий из него.

Пример. $5(x + 2y - 0,5t) = 5x + 10y - 2,5t$.

Особенно часто приходится раскрывать скобки, перед которыми стоит знак «+» или «-», то есть умножать выражение в скобках на $+1$ или -1 . В этом случае не обязательно каждый раз применять распределительный закон умножения, а можно использовать такие правила.

Чтобы раскрыть в выражении скобки, перед которыми стоит знак «+», достаточно опустить скобки и знак перед ними.

Пример. $2a + (x - y + z) = 2a + x - y + z$.

Всегда верно равенство $a - (x + y) = a - x - y$, поскольку разность $a - x - y$ в сумме с вычитаемым $x + y$ дает a .

Из последнего равенства следует такое правило.

Чтобы раскрыть в выражении скобки, перед которыми стоит знак «-», достаточно опустить скобки и знак перед ними, а знаки слагаемых, которые были в скобках, изменить на противоположные.

Эти правила верны и для выражений, все слагаемые которых находятся в скобках. Например,

$$+(a - c) = a - c, \quad -(a - c) = -a + c.$$

Примеры. $-(3 + 4 - 9) = -3 - 4 + 9;$
 $4 - (x - a + c) = 4 - x + a - c.$

2. Приведение подобных слагаемых.

Выражение $5x - 3x + 2x$ — это сумма трех слагаемых: $5x$, $-3x$ и $2x$. Слагаемые, отличающиеся только числовым множителем, называются *подобными*. Согласно распределительному закону умножения $5x - 3x + 2x = (5 - 3 + 2)x = 4x$.

Такое упрощение выражения называют *приведением подобных слагаемых*.

Чтобы привести подобные слагаемые, надо сложить их коэффициенты и полученный результат умножить на их общий буквенный множитель.

Раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых позволяют значительно упростить выражения.

Пример. $2(m + n - 3) - (2m + 5n - 7) =$
 $= \underline{2m} + \underline{2n} - 6 - \underline{2m} - \underline{5n} + 7 = -3n + 1 = 1 - 3n.$



Узнайте больше

Раньше вы знали: если выражение содержит скобки, то сначала надо выполнять действия в скобках. Умея раскрывать скобки, вы можете упростить вычисление некоторых выражений. Например, чтобы вычислить значение выражения $3,28 - \left(2\frac{2}{5} + 3,28\right)$, не обязательно выполнять действия в скобках. Лучше сначала раскрыть их:

$$3,28 - \left(2\frac{2}{5} + 3,28\right) = 3,28 - 2\frac{2}{5} - 3,28 = -2\frac{2}{5}.$$



Проверьте себя

1. Сформулируйте распределительный закон умножения.
2. Из какого закона умножения следует равенство $m(a + b) = ma + mb$?
3. Сформулируйте правила раскрытия скобок.
4. Какие слагаемые называют подобными?
5. Из какого закона умножения следует правило приведения подобных слагаемых?



Выполняем вместе

① Вычислите значение выражения $5\frac{2}{3} + \left(6,8 - 4\frac{2}{3}\right).$

$$\bullet 5\frac{2}{3} + \left(6,8 - 4\frac{2}{3}\right) = 5\frac{2}{3} + 6,8 - 4\frac{2}{3} = 6,8 + 1 = 7,8.$$

② Найдите значение выражения $6x - (3 - 4x)$, если $x = 3,7$.

$$\bullet 6x - (3 - 4x) = 6x - 3 + 4x = 10x - 3.$$

Если $x = 3,7$, то $10x - 3 = 37 - 3 = 34$.

③ Упростите выражение $3(a + b) - (a + 3b + 5)$.

$$\bullet 3(a + b) - (a + 3b + 5) = 3a + 3b - a - 3b - 5 = 2a - 5.$$



Устные упражнения

1201. Раскройте скобки:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } -(x + y), & \text{б) } +(a + b), & \text{в) } x - (x - y), \\ & +(-a + b), & y - (x + y), \\ & + (b - a); & x + (y - x). \end{array}$$

1202. Вычислите:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 2 + (7 - 4), & \text{б) } 18 - (9 - 3), \\ 12 + (18 - 12), & 37 - (-37 + 2), \\ -4 + (-1 + 4), & -(8 - 27) + 8, \\ 3\frac{4}{7} + \left(\frac{2}{3} - 3\frac{4}{7}\right); & -\left(5\frac{2}{3} + 3,6\right) + 5\frac{2}{3}. \end{array}$$



Уровень А

1203. Приведите подобные слагаемые:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 2x + 3x, & \text{б) } 5a - 3a, & \text{в) } 17c - 2c, \\ -x + 6x, & 6p - 12p, & -4a - 10a, \\ 8x - 2x + 2, & 5 - 7c + 2c, & 4n + 3 - 3n, \\ 0,5x + 0,3x; & -2y + 0,5y; & 0 - 3c + 5c. \end{array}$$

1204. Запишите коэффициент выражения:

$$\text{а) } -6xy^2; \quad \text{б) } 5,2x; \quad \text{в) } -y; \quad \text{г) } xyz; \quad \text{д) } -71a.$$

1205. Упростите выражение:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 2x \cdot 3y; & \text{б) } -x \cdot 8y; & \text{в) } 2x \cdot (-0,5y); \\ \text{г) } -5x \cdot (-y); & \text{д) } y \cdot 7y^2; & \text{е) } 3,3x \cdot (-10x). \end{array}$$

Раскройте скобки (**1206–1208**).

$$\begin{array}{lll} \text{1206. а) } 2(x - y); & \text{б) } 0,5(2 + c); & \text{в) } 4(2a + 3b); \\ & \text{г) } -5(x - y); & \text{д) } -2(2 + c); & \text{е) } -3(a - 2b). \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{1207. а) } 9 + (a - x); & \text{б) } c - (x - 3); & \text{в) } 23 - (x - a); \\ & \text{г) } x - (2 + y); & \text{д) } x + (3 - a); & \text{е) } 0,5 + (x - y). \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{1208. а) } -(x + 2) - y; & \text{б) } -(5c - 2) + 1; & \text{в) } 1 - (a + c + x); \\ & \text{г) } 5 - (x + 2); & \text{д) } x - (5c - 2); & \text{е) } (a + 1) - (x + y). \end{array}$$

Раскройте скобки и найдите значения выражений (1209–1211).

1209. а) $81 - (35 + 19)$; б) $-(43 + 12) + 43$;
в) $4,5 - (7,2 - 10,8)$; г) $3,4 + (2,7 - 3,4)$.

1210. а) $4,3 + (2 - 3,5)$; б) $5,2 - (-6 + 9,4)$;
в) $0 - (9,45 - 4,4)$; г) $11 - (7,3 - 9)$.

1211. а) $-4 - \left(\frac{3}{8} - 2\frac{1}{2} + 1\right)$; б) $-\left(5\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 2\right)$;
в) $3 - \left(-2\frac{1}{3} + 1\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right)$; г) $\left(3\frac{1}{5} - 2\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\right) - \frac{6}{7}$.

1212. Приведите подобные слагаемые:

а) $2x + 5 - 3x$; б) $3a - 2b + 7a$;
в) $5 - 7x + 11$; г) $-5b - b + a$.

Раскройте скобки и упростите выражения (1213–1214).

1213. а) $3 + (a - 5)$; б) $7 - (2 - c)$;
в) $x - (2 - x)$; г) $-5 - (y - 4,3)$.

1214. а) $-(a - c) + (3 - c)$; б) $-2 - (x - a - 2)$;
в) $(5 + x) - (x - 5)$; г) $(x + y + z) - (x - y)$.

1215. Найдите значение выражения $3,7 - (c - 2,3)$, если:

а) $c = -19$; б) $c = 0,9$; в) $c = 1,9$; г) $c = 9,9$.



Уровень В

1216. Упростите выражение и назовите его коэффициент:

а) $0,2x \cdot (-3y)$; б) $-5x \cdot 0,8x$; в) $-2x \cdot (-0,5y)$;
г) $5x^3 \cdot (-0,1y)$; д) $-2y \cdot 7y^2$; е) $-3x \cdot (-10x^2)$.

1217. Найдите значение выражения A , если $x = -2$:

а) $A = -4,2 - (3,7 - x) - 2x$; б) $A = -(3,5 - x) - 1,4x$;
в) $A = -\left(5\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + x\right) + x$; г) $A = 3x - (4,5 - 2x)$.

1218. Приведите подобные слагаемые:

а) $2x + 3y - 5y + 5x$; б) $3a + 3b - a - 3b$;
в) $-m + 7m + n - 5n$; г) $4 + 5x + 4x - 9$.

1219. Раскройте скобки и упростите выражение:

а) $2(x - 3,8) - 2x$; б) $-4a + 2(-0,5 + 2a)$;
в) $-3(5 - c) + 3c - 5$; г) $6 - a - x - (3 - a - x)$.

Упростите выражения (1220–1222).

1220. а) $-14 + x + (-42) + 15 + 2x$;
б) $1,2 - c + (-c - 2,8 + 2c)$;
в) $-m - (-2m - 3,7) - 3m$.

1221. а) $2x - 8x + 3x + x^2$;

в) $-2x + 7x - x + 3$;

1222. а) $3x - 2(x - 3)$;

в) $12 + 3(a - 4)$;

б) $5a + 7a^3 - 14a$;

г) $-6n + 2n - n + 5n^2$.

б) $5a - 6(a + 0,5)$;

г) $26 - 13(2 - 3c)$.

1223. Расставьте скобки так, чтобы равенство было верным:

а) $a - b - a + b = 2(a - b)$; б) $x - y - x + y = 2x$.

1224. Раскройте скобки и найдите значение выражения:

а) $5(3c - 2) + 2(4 - 7c)$ при $c = 12,3$;

б) $3(2y - 8) - 4(3y - 5) + 5y$ при $y = -17,71$.



Упражнения для повторения

1225. Вычислите:

а) $3,5^2 - 3,5 \cdot 2,5$;

б) $6,7 \cdot 5,7 - 5,7^2$.

1226. Луч делит развернутый угол на два угла, меры которых относятся как 4 к 5. Найдите меры этих углов.

1227. Точки K и P делят отрезок AB на три части, пропорциональные числам 2, 3 и 5. Найдите длины этих частей, если:

а) $AB = 120$ см;

б) $AB = 0,1$ м.

1228. В четырехугольнике $ABCD$ каждый из углов A , B , C равен 80° . Найдите меру угла D .

1229*. Прибыло 100 туристов. 10 из них не знают ни английского, ни французского языка; 83 – знают английский язык, 75 – французский. Сколько туристов знают оба языка?

1230. Заполните пустые клеточки схем (рис. 127, 128).

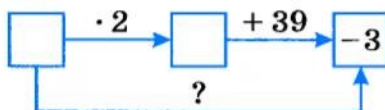


Рис. 127

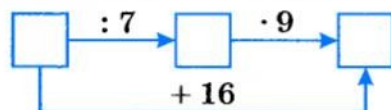


Рис. 128

§36.

Стандартный вид числа

Масса Земли равна 5 980 000 000 000 000 000 000 т, а масса Луны – 73 500 000 000 000 000 000 т. На сколько тонн масса Земли превышает массу Луны?

Попробуйте решить задачу с помощью калькулятора. По-видимому, вы не сможете даже вывести эти числа на дис-

плей обыкновенного калькулятора, ибо он рассчитан на значительно меньшее количество знаков. Выполнять вычисления в столбик с такими большими числами также неудобно:

$$\begin{array}{r} 5\,980\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \\ - 73\,500\,000\,000\,000\,000\,000 \\ \hline 5\,906\,500\,000\,000\,000\,000\,000 \end{array}$$

Для упрощения записей больших чисел и выполнения действий над ними используют специальные правила их записи. Очень большие числа со многими нулями записывают при помощи степеней числа 10. Например,

$$1\,000\,000\,000 = 10^9;$$

$$6\,000\,000\,000 = 6 \cdot 1\,000\,000\,000 = 6 \cdot 10^9.$$

Десятичные дроби со многими нулями после запятой тоже записывают при помощи степеней числа 10, но только с отрицательным показателем степени. Более детально такие степени вы будете изучать в старших классах, а пока поймите самое главное.

Рассмотрим две последовательности чисел:

$$1000; 100; 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \dots$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ 10^3; & 10^2; & 10^1; & 10^0; & 10^{-1}; & 10^{-2}; & 10^{-3}; & 10^{-4}; & \dots \end{array}$$

Первым трем числам первой последовательности соответствуют степени числа 10: 10^3 , 10^2 , 10^1 . Обратите внимание: если показатель степени числа 10 уменьшить на 1, то степень уменьшится в 10 раз. Распространяя это свойство на последующие члены первой последовательности, можно рассматривать степени с целыми отрицательными показателями, в частности:

$$10^0 = 1, \quad 10^{-1} = 0,1, \quad 10^{-2} = 0,01, \quad 10^{-3} = 0,001 \text{ и т. д.}$$

Понять целесообразность таких обозначений поможет представление десятичных дробей в виде обыкновенных дробей и их степеней.

$$0,1 = \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^1 = 10^{-1}; \quad 0,01 = \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 10^{-2};$$

$$0,001 = \frac{1}{1000} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = 10^{-3}; \quad 0,0001 = \frac{1}{10000} = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = 10^{-4}.$$

Очень малые числа со многими нулями после запятой удобно записывать при помощи степеней числа 10^{-1} .

Пример.

$0,000000001 = 10^{-8}$, тогда

$$0,000000003 = 3 \cdot 0,000000001 = 3 \cdot 10^{-8}.$$

Запись числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$, n – целое, называют *стандартным видом числа*. Число n в такой записи называют *порядком данного числа*.

Запишем в стандартном виде числа, какими выражаются массы Земли, Луны и маленького муравья.

$$5\,980\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,\tau = 5,98 \cdot 10^{21} \tau,$$

73 500 000 000 000 000 000 T = 7,35 · 10¹⁹ T,

$$0,0000015 \text{ кг} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ кг.}$$

Числа, записанные в стандартном виде, используют физики, астрономы, инженеры, микробиологи и другие специалисты. Записанные так числа можно умножать, делить, складывать и вычитать.

Рассмотрим сначала, как можно умножать и делить степени числа 10.

1) $10^3 \cdot 10^2 = 1000 \cdot 100 = 100000 = 10^5 = 10^{3+2}$.

2) $10^3 : 10^2 = 1000 : 100 = 10 = 10^1 = 10^{3-2}$.

3) $10^{-5} \cdot 10^{-3} = 0,00001 \cdot 0,001 = 0,00000001 = 10^{-8} = 10^{-5+(-3)}$.

4) $10^{-5} : 10^{-3} = 0,00001 : 0,001 = 0,01 = 10^{-2} = 10^{-5 - (-3)}$.

Рассмотренные примеры можно обобщить.

Для любых целых чисел m и n верны равенства:

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}; \quad 10^m : 10^n = 10^{m-n}; \quad (10^m)^n = 10^{m \cdot n}.$$

Используя эти свойства степеней и законы действий, числа, записанные в стандартном виде, можно складывать, вычитать, умножать и делить. Например, если $a = 4,2 \cdot 10^5$ и $b = 1,5 \cdot 10^5$, то

$$a + b = 4,2 \cdot 10^5 + 1,5 \cdot 10^5 = (4,2 + 1,5) \cdot 10^5 = 5,7 \cdot 10^5;$$

$$a - b = 4,2 \cdot 10^5 - 1,5 \cdot 10^5 = (4,2 - 1,5) \cdot 10^5 = 2,7 \cdot 10^5;$$

$$a \cdot b = 4,2 \cdot 10^5 \cdot 1,5 \cdot 10^5 = (4,2 \cdot 1,5) \cdot 10^5 \cdot 10^5 = 6,3 \cdot 10^{10};$$

$$a : b = (4,2 \cdot 10^5) : (1,5 \cdot 10^5) = 4,2 : 1,5 = 2,8.$$

В последнем примере использовано основное свойство отношения.



Узнайте больше

Сейчас на Земле живет примерно $6,5 \cdot 10^9$ человек. Можно ли считать точным это число, то есть 6 500 000 000? Нет, это приближенное значение, округленное до милли-

ардов. Все нули в числе $6\,500\,000\,000$ – цифры не точные, а полученные в результате округления. В нем только две значащие цифры – 6 и 5. Все другие цифры не значащие. Если значение величины записано в стандартном виде $a \cdot 10^n$, то число a – точное, все его цифры значащие. А все нули, которые получены при умножении a на 10^n , являются результатом округления. Число $2,5 \cdot 10^7$ содержит только две значащие цифры 2 и 5.



Проверьте себя

1. Что такое стандартный вид числа?
2. Что такое порядок числа?
3. Какие действия можно выполнять над числами, записанными в стандартном виде?
4. Как найти произведение степеней числа 10?
5. Как найти частное степеней числа 10?



Выполняем вместе

① Масса Земли равна $5,98 \cdot 10^{21}$ т, а масса Луны – $7,35 \cdot 10^{19}$ т. Во сколько раз масса Земли больше массы Луны?

$$\bullet (5,98 \cdot 10^{21}) : (7,35 \cdot 10^{19}) = (5,98 \cdot 10^2 \cdot 10^{19}) : (7,35 \cdot 10^{19}) = 5,98 \cdot 10^2 : 7,35 = 598 : 7,35 \approx 81.$$

Ответ. Масса Земли примерно в 81 раз больше массы Луны.

② Сравните числа $a = 6,37 \cdot 10^6$ и $c = 6,04 \cdot 10^7$.

● Поскольку показатель степени числа 10^7 на 1 больше показателя степени 10^6 , то говорят, что число c на порядок выше числа a . На порядок – это означает примерно в 10 раз, на 2 порядка – примерно в 100 раз.

③ Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел $3 \cdot 10^{-7}$ и $2,5 \cdot 10^{-7}$.

$$\begin{aligned} \bullet a + b &= 3 \cdot 10^{-7} + 2,5 \cdot 10^{-7} = (3 + 2,5) \cdot 10^{-7} = 5,5 \cdot 10^{-7}; \\ a - b &= 3 \cdot 10^{-7} - 2,5 \cdot 10^{-7} = (3 - 2,5) \cdot 10^{-7} = 0,5 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-8}; \\ a \cdot b &= 3 \cdot 10^{-7} \cdot 2,5 \cdot 10^{-7} = (3 \cdot 2,5) \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-7} = 7,5 \cdot 10^{-14}; \\ a : b &= (3 \cdot 10^{-7}) : (2,5 \cdot 10^{-7}) = 3 : 2,5 = 1,2. \end{aligned}$$



Устные упражнения

- 1231.** Назовите числа, записанные в стандартном виде:
 $33,3 \cdot 10^5$; $4 \cdot 10^{-7}$; $0,006 \cdot 10^7$; $1,2 \cdot 10^{71}$; $10 \cdot 10^{-7}$.
- 1232.** Представьте число в стандартном виде:
 3000; 1500; 0,011; 0,006; 3450.
- 1233.** Выполните действия:
 а) $10^4 \cdot 10^5$; б) $10^6 : 10^2$; в) $10^{-4} \cdot 10^{-5}$; г) $10^6 : 10^{-2}$.



Уровень А

Запишите в стандартном виде числа (1234 – 1236).

- 1234.** а) 1 000 000; б) 120 000 000;
 в) 71 000 000; г) 12 300 000.
- 1235.** а) 0,00005; б) 0,0067;
 в) 0,0000017; г) 0,001.
- 1236.** а) 0,0032; б) 3 200 000;
 в) 100 000 000; г) 0,00001.
- 1237.** Запишите в обычном виде число:
 а) $4,8 \cdot 10^5$; б) $1,5 \cdot 10^3$; в) $9 \cdot 10^7$;
 г) $1,5 \cdot 10^{-3}$; д) $2,9 \cdot 10^{-4}$; е) $7 \cdot 10^{-5}$.
- 1238.** Запишите в стандартном виде приближенные значения таких величин:



- а) радиус Солнца – 696 000 000 м;
 б) скорость света – 300 000 000 м/с;
 в) толщина пленки мыльного пузыря – 0,00000006 см.

Выполните действия (1239 – 1242).

- 1239.** а) $(2 \cdot 10^3) \cdot (3 \cdot 10^6)$; б) $(3 \cdot 10^5) \cdot (2 \cdot 10^4)$;
 в) $(5 \cdot 10^7) \cdot (2 \cdot 10^2)$.
- 1240.** а) $(8 \cdot 10^9) : (5 \cdot 10^6)$; б) $(3 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^4)$;
 в) $(5 \cdot 10^7) : (2 \cdot 10^2)$.
- 1241.** а) $2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3$; б) $3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4$;
 в) $5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2$.
- 1242.** а) $4 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^3$; б) $3 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^5$;
 в) $5 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^2$.



Уровень Б

- 1243.** Найдите произведение и частное чисел:
 а) $4,2 \cdot 10^6$ и $2,4 \cdot 10^6$; б) $2,1 \cdot 10^{-3}$ и $4,2 \cdot 10^{-3}$;
 в) $5,8 \cdot 10^7$ и $5,8 \cdot 10^6$; г) $6,8 \cdot 10^5$ и $8,5 \cdot 10^{-4}$.

1244. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:

- а) $3,3 \cdot 10^2$ и $1,5 \cdot 10^2$; б) $1,1 \cdot 10^4$ и $2,2 \cdot 10^4$;
в) $1,7 \cdot 10^7$ и $2 \cdot 10^7$; г) $3,9 \cdot 10^5$ и $1,3 \cdot 10^5$.

Сравните числа, указав, на сколько порядков или во сколько раз одно из них больше или меньше другого (1245–1246).

- 1245.** а) $3 \cdot 10^5$ и $1,5 \cdot 10^2$; б) $1,1 \cdot 10^5$ и $2 \cdot 10^4$;
в) $4,2 \cdot 10^4$ и $3 \cdot 10^5$; г) $1,7 \cdot 10^7$ и $2 \cdot 10^5$.

- 1246.** а) $3,9 \cdot 10^{-3}$ и $1,3 \cdot 10^{-3}$; б) $1,56 \cdot 10^4$ и $2,6 \cdot 10^{-4}$;
в) $3 \cdot 10^{-4}$ и $2 \cdot 10^{-3}$; г) $1,4 \cdot 10^5$ и $7 \cdot 10^4$.

1247. Порядок числа a равен 5. Какой порядок числа:

- а) $1000a$; б) $0,0001a$; в) $a \cdot 10^4$; г) $a \cdot 10^{-4}$?



Упражнения для повторения

1248. Найдите наибольший общий делитель чисел 54 и 72.

1249. Вычислите $3,7 \text{ м} - 2,4 \text{ см} \cdot 3$.

1250. Найдите значение x , если $-3,5 : x = 7 : (-4)$.

1251. Периметр треугольника равен 24 дм. Найдите длины его сторон, если они пропорциональны числам 3, 4 и 5.

1252. На заводе всего 260 работников, женщин – в 3 раза меньше, чем мужчин. Сколько процентов работников завода составляют женщины?

§37.

Решение уравнений

Как вы уже знаете, уравнение – это равенство, которое содержит неизвестные числа, обозначенные буквами. *Корнем* (или *решением*) уравнения называют то значение неизвестного, при котором уравнение превращается в верное равенство. *Решить уравнение* – это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Зная отрицательные числа, можно решать и такие уравнения, какие раньше вы решать не умели.

Напомним, если к равным числам прибавить одно и то же число, то суммы будут равными. То есть, если

$$a = b, \text{ то и } a + m = b + m.$$

Уравнение – также равенство. И к обеим частям уравнения можно прибавить одно и то же число. Полученное уравнение имеет такой же корень, как и данное уравнение.

Например, уравнение $2x + 7 = 1$ имеет корень -3 . Если к обеим его частям прибавим число -7 , то получим уравнение $2x = 1 - 7$, корень которого тоже равен -3 . Полученное уравнение от данного отличается только местом слагаемого 7 . Это слагаемое перенесено с левой части уравнения в правую с противоположным знаком.



Любое слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив его знак на противоположный.

Переносить из одной части уравнения в другую можно и неизвестные слагаемые. Например, решая уравнение $5x = 21 - 2x$, можно его слагаемое $-2x$ перенести из правой части в левую. Уравнение $5x + 2x = 21$ имеет тот же корень, что и данное уравнение.

Обе части числового равенства можно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, которое имеет те же корни, что и данное.



Выделенные выше два утверждения – *основные свойства уравнений*. Они доказываются в старших классах. С их помощью можно решать много уравнений.

Пример. Решите уравнение $8,5x + 38 = 5x + 3$.

Решение. $8,5x + 38 = 5x + 3$,
 $8,5x - 5x = 3 - 38$,
 $3,5x = -35$,
 $x = -35 : 3,5$,
 $x = -10$.

Описывать в решении, куда переносим то или иное слагаемое, не обязательно. Способ решения уравнений на основании их свойств удобней и более общий, чем способ решения уравнений на основании зависимостей между компонентами действий, каким вы пользовались до сих пор.



Узнайте больше

Чтобы решить уравнение, содержащее обыкновенные дроби, можно воспользоваться вторым свойством.

Решим к примеру уравнение $\frac{1,5}{7}x + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{14}$. Умножим обе его части на 14. Имеем
 $3x + 7(x-1) = 1$, $3x + 7x - 7 = 1$, $10x = 8$, $x = 0,8$.



Проверьте себя

1. Что такое уравнение? Приведите примеры.
2. Что такое корень уравнения?
3. Какие способы решения уравнений вы знаете?
4. Сформулируйте основные свойства уравнений.



Выполняем вместе

① Проволоку длиной 250 м разрезали на три части так, что одна из них оказалась на 25 м короче другой и на 45 м длиннее третьей. Найдите длины этих частей проволоки.

● Длину первой части проволоки обозначим x м, тогда длина второй части проволоки равна $(x + 25)$ м, а третьей — $(x - 45)$ м. Так как сумма этих длин равна 250 м, то $x + (x + 25) + (x - 45) = 250$, или $3x - 20 = 250$. Тогда

$$3x = 270, \quad x = 90, \quad x + 25 = 115, \quad x - 45 = 45.$$

Ответ. 90 м, 115 м и 45 м.

② Найдите два числа, сумма которых равна -3 , а половина первого равна четвертой части второго.

● Пусть первое число равно x . Тогда второе равно $-3 - x$.

Половина первого числа $\frac{1}{2}x$, а четвертая часть второго

$\frac{1}{4}(-3 - x)$. Согласно условию задачи $\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}(-3 - x)$. Умно-

жим обе части уравнения на 4.

$$2x = -3 - x, \quad 3x = -3, \quad x = -1, \quad -3 - x = -2.$$

Ответ. -1 и -2 .



Устные упражнения

Решите уравнения (1253–1254).

1253. а) $x + 5 = 7$; б) $x + 12 = 32$;

в) $y + 0,5 = 1,5$; г) $2x = 42$;

д) $3y = 96$; е) $5c = 100$.

1254. а) $3,27x = 0$; б) $x - 12 = 12$;

в) $y - 135 = 0$; г) $2(x - 5) = 0$;

д) $(c + 4) : 2 = 0$; е) $(4 - 12)x = 0$.

1255. Составьте и решите задачи по рисункам 129 и 130.

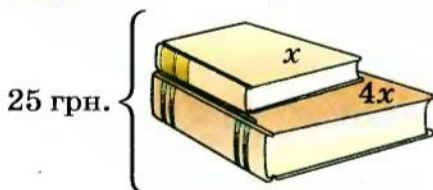


Рис. 129

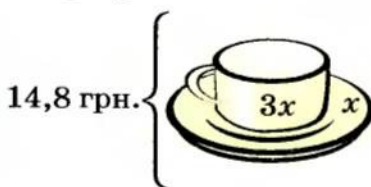


Рис. 130



Уровень А

1256. Решите уравнение:

а) $2x + 10 = 7 + 5x$; б) $0,3 - x = 2,8 - 1,5x$.

1257. Перенесите слагаемые с неизвестными в левую часть уравнения:

а) $3x = 24 - x$, $9y = 3,7 + y$, $-7z = -3 + 1,5z$;

б) $-5x = 17 + 2x$, $-18y = 3y + 12$, $14 + z = 6z$.

1258. Перенесите все неизвестные члены уравнения в левую часть, а известные – в правую:

а) $8x + 12 = x + 9$, $15c - 7 = c - 6$, $62 - 13x = 18x$;

б) $6x + 18 = 5 - x$, $19 - 5n = 7 + 3n$, $51x + 41 = 45 - 51x$.

1259. Одни ли и те же корни имеют уравнения:

а) $2x + 5 = x + 5$ и $2x = x$; б) $3m - 7 = 6m - 7$ и $3m = 6m$?

1260. Обоснуйте утверждение: если обе части уравнения имеют равные слагаемые, их можно опустить.

Решите уравнения (1261–1267).

1261. а) $3x + 7 = x + 5$; б) $2x - 9 = 3x + 8$.

1262. а) $5 - 4x = x + 20$; б) $9 - x = 35 - 2x$.

1263. а) $0,3 - 2x = 0,5 + 3$; б) $2,4 = 3x - 4,2$.

1264. а) $5 - 1,2x = x - 5$; б) $4,7 - 3x = 3x + 4,7$.

1265. а) $\frac{1}{2}x - 13 = \frac{3}{4}x + 7$; б) $\frac{2}{3}c - 1,5 = \frac{1}{6}c + 3,5$.

1266. а) $\frac{3}{5}z + \frac{1}{2} = 1 - 0,5z$;

б) $\frac{3}{4}y - 0,2 = 1,3 + y$.

1267. а) $3(n + 3) = 5 - 2n$;

б) $8(x - 5) = 3x - 40$.

1268. Решите уравнение, воспользовавшись свойством пропорции:

а) $x : 5 = 12 : (-10)$;

б) $6 : x = (-5) : 2,5$;

в) $3,5 : (-0,7) = x : 1,8$;

г) $-3 : (-1,5) = -32 : x$.

1269. Сын в 3 раза моложе отца. Сколько лет отцу, если он старше сына на 28 лет?

1270. Грузовой автомобиль загрузили в 4 раза больше, чем прицеп. Сколько центнеров погрузили в прицеп, если на нем было на 12 ц меньше, чем на автомобиле?

1271. Грузовой автомобиль загрузили в 4 раза больше, чем прицеп. Сколько центнеров погрузили в автомобиль, если в автомобиль и прицеп загрузили вместе 40 ц?

1272. Периметр прямоугольника равен 18,8 м, одна из его сторон на 4 см короче другой. Найдите длины сторон прямоугольника.

1273. Боковая сторона равнобедренного треугольника на 3 см длиннее основания. Найдите их длины, если периметр треугольника равен 54 см.

1274. а) Проволоку длиной 350 м разрезали на две части так, что одна из них оказалась в 6 раз короче другой. Найдите их длины.

б) Проволоку длиной 350 м разрезали на две части так, что одна из них оказалась на 6 м короче другой. Найдите их длины.

1275. Проволоку длиной 305 м разрезали на три части так, что одна из них оказалась в 3 раза длиннее второй и на 60 м короче третьей. Найдите длину каждой части проволоки.



Уровень Б

Решите уравнения (1276–1281).

1276. а) $2 - 3(x + 1) = 3 - 2(x + 5)$;

б) $x - 0,4(x - 14) = 3,1(3x - 1)$.

1277. а) $3x + 0,4 = 0,8(0,5 - 2x)$;

б) $0,4 - 0,5(c + 3) = 1 - 0,2(c - 3)$.

1278. а) $-30 + 2x + 1 = -5(7 - x)$;

б) $-3(n + 1) + 2 = 3 - 2(n + 5)$;

в) $-5(y - 3) = 7 - 2(3 - y)$.

1279. а) $\frac{1}{3} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 4x$;

б) $\frac{2}{5} = \frac{1}{2} - (3 - x)$.

1280. а) $\frac{1}{5}(2 - 3x) = 0,4 - 0,1x + 3$; б) $\frac{1}{2}(2x + 4) = 3\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$.

1281. а) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{3} - 2x = \frac{1}{5}(3x - 5)$; б) $x - 3 = 2\left(x - 1\frac{1}{2}\right) + x$.

1282. Ручка дороже карандаша на 45 к., а 7 карандашей стоят столько же, сколько 2 ручки. Сколько стоит одна ручка?

1283. Килограмм конфет дороже килограмма печенья на 2,6 грн., а 4 кг конфет стоят столько, сколько 6 кг печенья. Сколько стоит 1 кг конфет и 2 кг печенья?

1284. Заполните таблицу.

$5x - 7$	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x								

1285. Сумма двух чисел равна 90. Известно, что половина первого числа равна третьей части второго. Найдите эти числа.

1286. Сумма двух чисел равна 45. Найдите эти числа, если 0,4 первого числа равны 0,6 второго.

1287. Сумма двух чисел равна 21. Найдите эти числа, если 30 % первого числа равны 40 % второго.

1288. Разность двух чисел равна 2,5. Найдите эти числа, если третья часть большего из них равна половине меньшего.

1289. Разность двух чисел равна 0,8. Найдите эти числа, если они относятся как 5 : 3.

1290. При каком значении x значения дробей $\frac{x+1}{18}$ и $\frac{10-x}{15}$

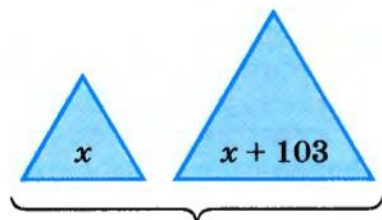
равны между собой?

1291. Среднее арифметическое двух чисел равно 3. Найдите эти числа, если известно, что одно из них в 3 раза больше другого.

1292. Сумма двух чисел равна 1, а разность 0,6. Найдите эти числа.

1293. Задача-шутка.

Тане с Колей – двадцать лет,
Таня старше втрое.
Сколько лет ей?
Кто секрет нам ее раскроет?

1294. Составьте и решите задачи по рисункам 131 и 132.

157 т
Рис. 131

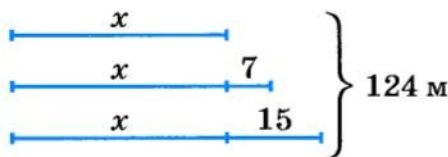


Рис. 132



Упражнения для повторения

1295. На сколько сумма чисел 4 и -5 меньше их разности?

1296. На сколько сумма чисел a и x больше или меньше их разности, если:

- а) $a = 15$, $x = -7$; б) $a = -8$, $x = 19$?

1297. Вычислите:

- а) $5,25 + (-3,5)$; б) $-8,4 - (-3,5)$; в) $-5,9 - 4,2$.

1298. Решите уравнение:

- а) $|x| = 3$; б) $|2x| = 8$; в) $|x - 3| = 2$.

1299. Какие целые значения x удовлетворяют неравенству:

- а) $|x| < 3$; б) $|2x| < 4$; в) $|x - 3| < 1$; г) $|x + 2| < 5$?

1300. Разделите число 1000 на четыре части, пропорциональные числам 2, 3, 5 и 10.

1301. Найдите два числа, сумма которых равна 1000, а 30 % первого на 200 больше 20 % второго.

1302*. Наде сейчас в 2 раза больше лет, чем будет Алесе тогда, когда Вере станет столько лет, сколько сейчас Наде. Кто из них самая старшая, а кто – самая младшая?

§38.

Перпендикулярные и параллельные прямые

Две прямые образуют при пересечении четыре угла (рис. 133). Если один из этих углов прямой, то и все другие – тоже прямые. Если $\angle 1 = 90^\circ$, то $\angle 2 = 90^\circ$, $\angle 3 = 90^\circ$ и $\angle 4 = 90^\circ$ (рис. 134). Почему?

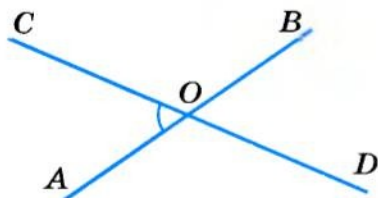


Рис. 133

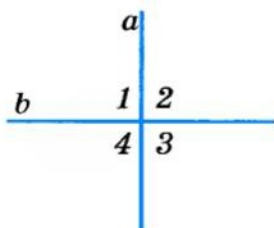


Рис. 134

Две прямые, которые при пересечении образуют прямые углы, называются *перпендикулярными прямыми*. Прямые a и b , изображенные на рисунке 134, перпендикулярные. Пишут $a \perp b$ или $b \perp a$.

Отрезки и лучи называются *перпендикулярными*, если они лежат на перпендикулярных прямых. Например, стороны AB и AD прямоугольника $ABCD$ перпендикулярные (рис. 135). Стороны прямого угла также перпендикулярны.



Рис. 135

Через данную точку P всегда можно провести прямую, перпендикулярную данной прямой a . Это можно сделать при помощи угольника (рис. 136).

Две прямые могут и не пересекаться (рис. 137).

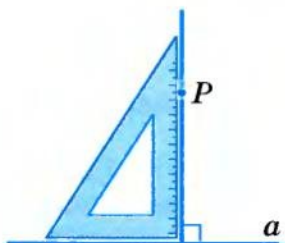


Рис. 136



Рис. 137

Две прямые, которые не пересекаются и лежат в одной плоскости, называются *параллельными прямыми*.

Параллельными, например, являются линии тетради «в линейку», линии нотного стана, рельсы железнодорожного пути. Если прямые a и b параллельные, то пишут $a \parallel b$ или $b \parallel a$.

Два отрезка или луча называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых. Например, если $ABCD$ – прямоугольник (см. рис. 135), то $AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$.

Через любую точку P , которая не лежит на прямой a , можно провести прямую, параллельную прямой a . Для этого можно через точку P провести прямую c , перпендикулярную прямой a , а потом прямую b , перпендикулярную прямой c (рис. 138). При таком построении всегда $b \parallel a$. Можно воспользоваться линейкой и угольником (рис. 139).

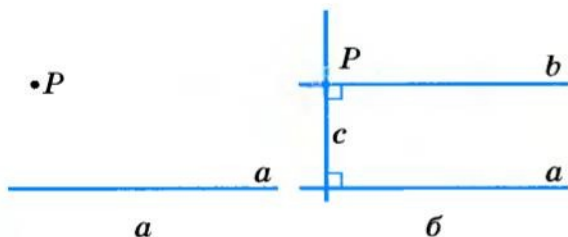


Рис. 138

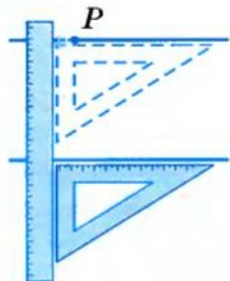


Рис. 139



Узнайте больше

Четырехугольник, в котором каждая сторона параллельна противоположной стороне, называется *параллелограммом* (рис. 140). Каждая сторона параллелограмма равна противоположной стороне. Каждый угол параллелограмма равен противолежащему углу.

Параллелограмм с прямыми углами – *прямоугольник*, параллелограмм с равными сторонами – *ромб* (рис. 141, а). Прямоугольник с равными сторонами (или ромб с прямыми углами) – *квадрат* (рис. 141, б).



Рис. 140

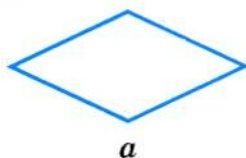
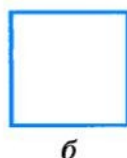


Рис. 141



Каждые ли две прямые, которые не пересекаются, являются параллельными? Нет. Прямые a и c , одна из которых лежит в плоскости, а вторая пересекает эту плоскость (рис. 142), не параллельны. Так же не параллельны ребра AK и BC куба, изображенного на рисунке 143. Так как они не лежат в одной плоскости.

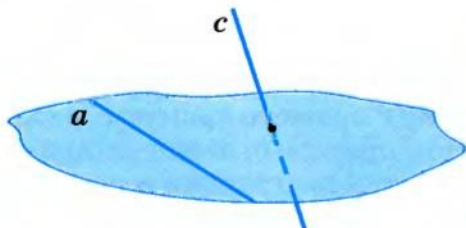


Рис. 142



Проверьте себя

1. Сформулируйте определение перпендикулярных прямых.
2. Какие отрезки называются перпендикулярными?
3. Какие две прямые называются параллельными?
4. Какие отрезки называются параллельными?
5. При помощи каких чертежных инструментов можно провести прямую, перпендикулярную данной прямой? Как это делают?
6. Как можно провести прямую, параллельную данной прямой?



Выполняем вместе

① На рисунке 143 изображен куб $ABCDKPTM$. Параллельны ли прямые AK и BP ? А отрезки AK и BP ? Перпендикулярны ли прямые AK и AB ?

• Прямые AK и BP лежат в одной плоскости (в плоскости квадрата $ABPK$) и не пересекаются. Поэтому $AK \parallel BP$. Отрезки AK и BP лежат на параллельных прямых, поэтому параллельны.

Прямые AK и AB пересекаются в точке A под прямым углом, поскольку все углы квадрата прямые. Следовательно, $AK \perp AB$.

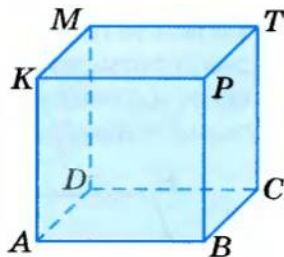


Рис. 143



Устные упражнения

1303. Какие из отрезков, изображенных на рисунке 143, перпендикулярные? А какие параллельные?

1304. Какие из прямых, изображенных на рисунке 144, параллельны друг другу? А какие перпендикулярны?

1305. Параллельны ли прямые a и b , если каждая из них параллельна некоторой прямой c ?

1306. Перпендикулярны ли прямые a и b , если каждая из них перпендикулярна некоторой прямой c ?

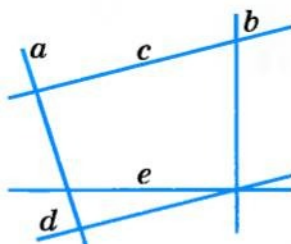


Рис. 144



Уровень А

1307. Определите сначала на глаз, а потом проверьте с помощью угольника, какие из прямых перпендикулярные (рис. 144).

1308. Начертите два перпендикулярных отрезка, которые:

- пересекаются;
- не пересекаются;
- имеют общий конец.

1309. Постройте две перпендикулярные прямые при помощи транспортира.

1310. Используя рисунок 143 и символы \perp и \parallel , заполните пропуски:

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| а) $AB \dots BC$; | б) $AB \dots CD$; | в) $AB \dots AD$; |
| г) $BC \dots AD$; | д) $BC \dots CD$; | е) $AD \dots DC$. |

1311. Начертите прямую a и обозначьте точку P вне ее. Проведите через точку P прямую, параллельную прямой a . Сколько таких прямых можно провести?

1312. Начертите треугольник ABC . Через его вершину A проведите на глаз прямую, параллельную противоположной стороне треугольника.

1313. Прямые AB и CD пересекаются в точке O так, что $\angle AOC = 100^\circ$ (рис. 145). Вычислите меры углов COB , BOD и AOD .

1314. При помощи угольника постройте две перпендикулярные прямые.

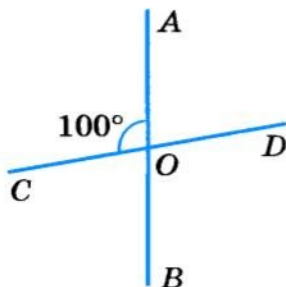


Рис. 145

1315. Начертите остроугольный треугольник ABC . Через каждую его вершину проведите прямую, перпендикулярную противоположной стороне.

1316. Начертите три прямые, параллельные друг другу.



Уровень Б

1317. Начертите в тетради отрезок AB и обозначьте точку K (рис. 146). Сколько разных отрезков, перпендикулярных AB , можно провести через точку K ? А сколько параллельных?

1318. Изображенные на рисунке 147 прямые OA и OB перпендикулярны, лучи OK и OP также перпендикулярны, а $\angle AOK = 30^\circ$. Вычислите меры углов $\angle BOK$ и $\angle BOP$.

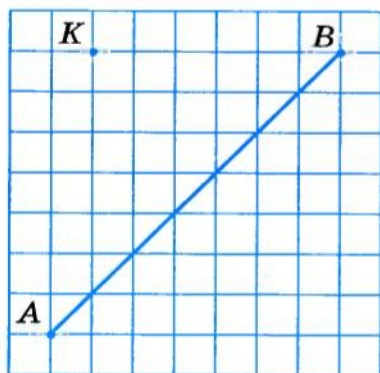


Рис. 146

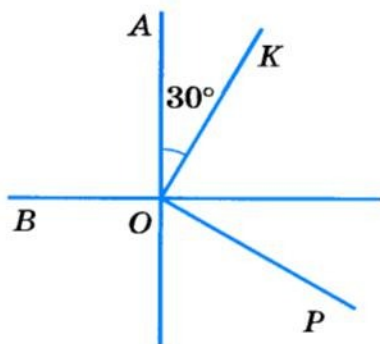


Рис. 147

1319. Найдите градусные меры углов, образованных пересечением двух прямых, если один из углов:

- в 3 раза больше другого;
- на 20° меньше другого;
- равен пятой части другого.

1320. Начертите две перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O . На одной из них обозначьте точки A и C , а на другой — точки B и D так, чтобы $OA = OB = OC = OD$. Найдите расстояния AB , BC и CD , если $AD = 3$ см.

1321. Практическое задание. Покажите, как сгибанием листа бумаги можно получить:

- перпендикулярные отрезки;
- параллельные отрезки;
- прямоугольник;
- углы 45° и 135° .



Упражнения для повторения

1322. Найдите значение выражения:

а) $(-35) \cdot 203 + 37 \cdot 2003 + 3003 : 77$;

б) $43,8 \cdot (-3,5) - 3,24 \cdot (-2,5) + 12,08$;

в) $-3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{15} + \frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) + 30,5$.

1323. Найдите все целые значения x , при которых:

а) $-3,4 < x < 2,4$; б) $-4,1 < x < 2,7$.

1324. Начертите треугольник ABC , в котором:

а) $AB = 3$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 45^\circ$;

б) $AB = BC = 5$ см, $\angle B = 60^\circ$.

1325. На сколько процентов расстояние 7 дм меньше 1 м?

1326. Найдите числа a , b и c , если $a : b = 3 : 4$, $b : c = 5 : 6$, а наименьшее из них равно 21.

1327. Сумма трех некоторых натуральных чисел – число четное. Четным или нечетным числом является произведение этих чисел?

§ 39.

Координатная плоскость

Как известно, каждому рациональному числу на координатной прямой отвечает определенная точка. Например, на координатной прямой, изображенной на рисунке 148, числу -2 соответствует точка A , а числу $2,5$ – точка B . Говорят и так: точке A соответствует число -2 , а точке B – число $2,5$. То есть место точки на прямой можно однозначно задать числом. Подобно этому можно определять числами и место точки на плоскости, на глобусе, на географической карте. Только в этих случаях надо указать не одно число, а пару чисел. Например, определяя место какого-нибудь пункта на географической карте, указывают два числа: долготу и широту.



Рис. 148

Рассмотрим, как можно задать парой чисел точку на плоскости. Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные координатные прямые, которые пересекаются

в их общем начале координат – точке O (рис. 149). Одну из этих координатных прямых, которая расположена горизонтально, обозначают буквой x и называют *осью абсцисс*.

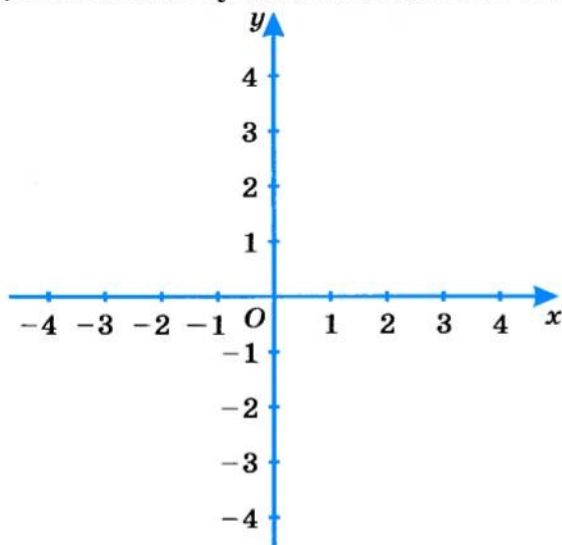


Рис. 149

Вертикальную координатную прямую y называют *осью ординат*. Их положительные направления указаны стрелками. Точку O называют *началом координат*. Единичные отрезки на обеих осях в большинстве случаев считаются равными. Объединение двух таких координатных

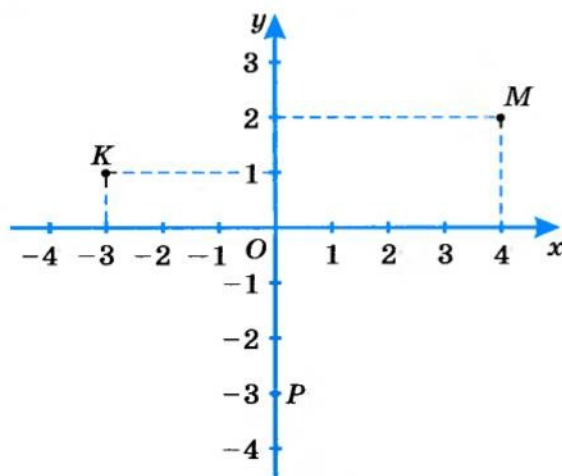


Рис. 150

прямых называют *системой координат*. Если на плоскости есть система координат, то ее называют *координатной плоскостью*.

Каждой паре рациональных чисел на координатной плоскости соответствует определенная точка. Например, паре чисел 4 и 2 соответствует точка M (рис. 150). Говорят, что *абсцисса* точки M равна 4, а *ордината* 2. Пишут: $M(4; 2)$. Точка K имеет абсциссу -3 и ординату 1, точка P — абсциссу 0 и ординату -3 . Пишут: $K(-3; 1)$, $P(0; -3)$. Первой всегда пишут абсциссу. Абсциссу и ординату вместе называют *координатами точки*.



Узнайте больше

Рассмотренную систему координат впервые использовал французский ученый Р. Декарт. Поэтому ее называют *декартовой системой координат*. Она состоит из двух прямолинейных осей, пересекающихся под прямым углом в точке $O(0; 0)$. Единичные отрезки на обеих ее осях равны. Хотя со временем вы ознакомитесь и с такими системами координат, у которых координатные оси имеют разные масштабы. Существуют также другие системы координат. Их рассматривают в старших классах и высших учебных заведениях.

Своеобразную систему координат — сетку из параллелей и меридианов — используют географы. Географические координаты — долготу и широту — обычно выражают в градусах. Начало географической системы координат — точка O — это точка пересечения экватора с начальным меридианом, который проходит вблизи Лондона (рис. 151). Меридиан, который проходит через Киев, пересекает экватор в такой точке A , что углы OCA и ACK равны примерно $30,5^\circ$ и $50,5^\circ$. Поэтому говорят, что географические координаты Киева равны примерно $30,5^\circ$ восточной долготы и $50,5^\circ$ северной широты.

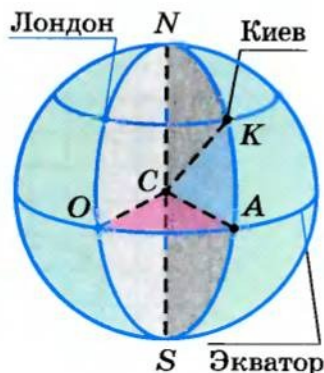


Рис. 151



Проверьте себя

1. Как называют оси координат?
2. Что такое начало координат? Какие его координаты?
3. Что такое координатная плоскость?
4. Что такое координаты точки? Назовите их.
5. Как записывают координаты точки на плоскости?



Устные упражнения

1328. а) Назовите координаты точек, обозначенных буквами на рисунке 152.

б) Чему равны ординаты точек K , P , T , X ?

в) Назовите абсциссы точек, которые принадлежат оси ординат.

г) Абсциссы каких точек отрицательные?

д) Ординаты каких точек неположительные?



Уровень А

1329. Начертите систему координат, единичный отрезок которой равен 1 см. Обозначьте точки $A(2; 4)$, $B(-3; -2)$, $C(0; -2)$, $D(-1; 3)$, $E(3; 4)$, $F(1; 0)$.

1330. Определите координаты точек M , K , P , T , обозначенных на рисунке 152.

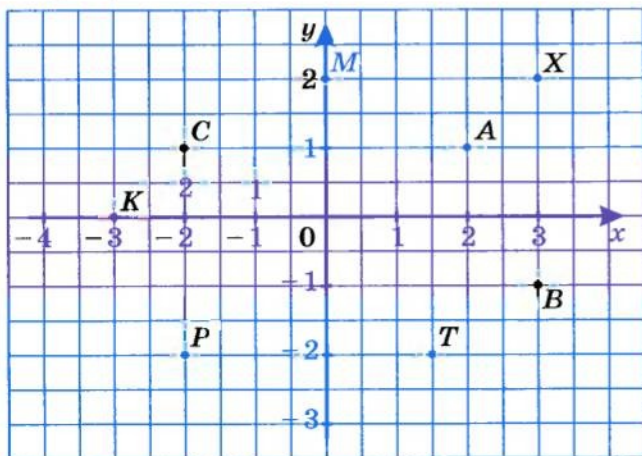


Рис. 152

1331. Отметьте на координатной плоскости точки $A(2; 5)$, $B(2; 3)$, $C(2; 0)$, $K(2; -1)$, $P(2; -3)$. Верно ли, что все они лежат на одной прямой?

1332. Отметьте на координатной плоскости точки $A(-3; 2)$, $B(0; 2)$, $C(4; 2)$. Верно ли, что они лежат на одной прямой? Проведите эту прямую.

1333. Проведите на координатной плоскости прямую, которая проходит через точки $K(-3; 4)$ и $P(-3; -3)$. Проходит ли эта прямая через точку $T(-3; 1)$? А через точку $M(-2; 0)$?

1334. Проведите на координатной плоскости прямую, которая проходит через начало координат и точку $A(4; 3)$. Проходит ли эта прямая через точку $K(1; 2)$?

1335. Три вершины прямоугольника $ABCD$ имеют такие координаты: $A(-2; 2)$, $B(4; 2)$, $C(4; -3)$. Найдите координаты точки D .

1336. Точки $A(1; 0)$, $B(1; 3)$, $C(5; 3)$ – три вершины прямоугольника $ABCD$. Найдите координаты четвертой вершины прямоугольника, а также его периметр и площадь, считая, что длина единичного отрезка равна 1 см.

1337*. Считая, что длина единичного отрезка равна 1 см, найдите площадь:

- а) треугольника с вершинами $A(0; 3)$, $O(0; 0)$ и $B(6; 0)$;
- б) треугольника с вершинами $K(1; 1)$, $P(4; 1)$ и $T(4; 4)$;
- в) ромба с вершинами $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$, $C(3; 0)$ и $D(0; 4)$;
- г) параллелограмма с вершинами $A(-2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(4; 3)$ и $D(2; 0)$.

1338. Точки A и B называются *симметричными относительно точки M* , если M – середина отрезка AB (рис. 153). Покажите, что точки $A(0; 5)$ и $B(0; 1)$ симметричны относительно точки $M(0; 3)$, а точки $K(-3; 2)$ и $P(3; 2)$ симметричны относительно точки $T(0; 2)$.



Рис. 153

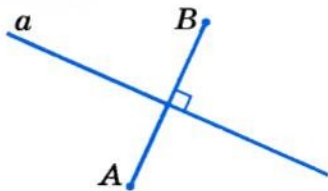


Рис. 154

1339. Точки A и B называются *симметричными относительно прямой a* , если прямая a перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину (рис. 154). Симметричны ли относительно оси абсцисс точки $A(2; 4)$ и $B(2; -4)$?

1340. Дано точку $C(-3; 2)$. Отметьте на координатной плоскости точку K , симметричную относительно точки $M(1; 2)$. Какие координаты точки K ?

1341. Дано точку $C(-2; -3)$. Отметьте на координатной плоскости точку K , симметричную точке C относительно оси x , и точку P , симметричную точке C относительно оси y . Найдите координаты точек K и P .

1342. Какие координаты точки, симметричной точке $A(-4; 7)$ относительно начала координат? А относительно точки $M(1; 3)$?

1343. Дано точки $A(-2; 3)$ и $B(5; 3)$. Найдите длину отрезка AB в единичных отрезках.

1344. Дано точки $K(-3; -3)$ и $P(-5; -3)$. Найдите координаты точки M – середины отрезка KP – и расстояние KM .



Уровень Б

1345. Верно ли, что точки $A(-2; -2)$, $B(1; 1)$ и $C(4; 4)$ лежат на одной прямой? Каждая ли точка этой прямой имеет ординату, равную абсциссе?

1346. Зарисуйте часть координатной плоскости, каждая точка которой имеет положительную абсциссу и положительную ординату.

1347. Зарисуйте часть координатной плоскости, каждая точка которой имеет:

- а) положительную абсциссу и отрицательную ординату;
- б) отрицательную абсциссу и положительную ординату;
- в) отрицательную абсциссу и отрицательную ординату.

1348. Какая точка расположена ближе к началу координат: $A(0; 5)$ или $B(-6; 0)$?

1349. Через точку $M(4; -3)$ проведите прямые, перпендикулярные осям координат. Найдите координаты точек пересечения этих прямых с осью абсцисс и осью ординат.

1350. Начертите на координатной плоскости шестиугольник с вершинами в точках $O(0; 0)$, $A(0; 5)$, $B(3; 5)$, $C(3; 3)$, $D(5; 3)$, $E(5; 0)$. Найдите его периметр и площадь, если $OA = 5$ см.

1351. На координатной плоскости проведена линия (рис. 155). Обозначьте буквами точки пересечения этой линии с осями координат. Найдите координаты этих точек.

1352. По географической карте определите координаты Киева, Львова, Харькова.

1353. Отметьте на координатной плоскости точки $A(0; 5)$, $B(3; 4)$, $C(4; 3)$, $D(5; 0)$, $E(4; -3)$, $K(3; -4)$, $P(0; -5)$, $T(-3; -4)$. Проведите окружность с центром в точке $O(0; 0)$ и радиу-

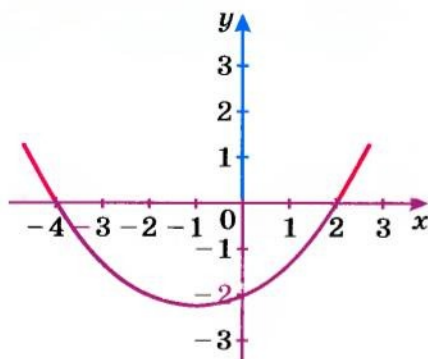


Рис. 155

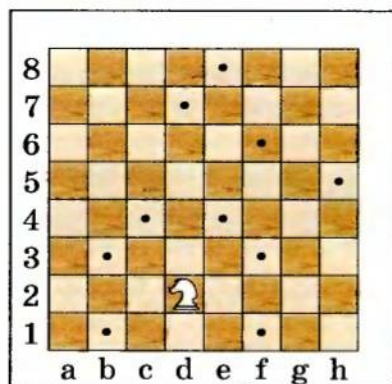


Рис. 156

сом 5 единичных отрезков и убедитесь в том, что все указанные точки лежат на этой окружности. Назовите еще координаты нескольких точек, лежащих на этой окружности.

1354. Зарисуйте часть координатной плоскости, на которой расположены все точки $M(x; y)$ такие, что:

- а) $x > 0$ и $y > 0$; б) $x < 0$ и $y = 0$;
 в) $x = 3$ и $y > 0$; г) $|x| < 1$ и $|y| < 2$.

1355. На шахматной доске координаты полей обозначают латинскими буквами и числами. Например, поле, на котором стоит конь (рис. 156), обозначают так: d2. Запишите координаты полей, отмеченных точками.

1356. Вспомните игру «морской бой». Сделайте соответствующий рисунок и запишите координаты «кораблей».



Упражнения для повторения

1357. В трех ящиках 40 кг помидоров, причем в первом ящике на 2 кг больше, чем во втором, и на 3 кг меньше, чем в третьем. Сколько помидоров в каждом ящике?

1358. Периметр треугольника равен 43 см. Первая сторона в 2 раза длиннее второй и на 3 см короче третьей. Найдите длины сторон треугольника.

1359. Сумма трех чисел равна 100. Найдите их, если первое число составляет 50 % второго, а второе – 40 % третьего числа.

1360. Половина суммы трех чисел равна первому из них, которое на 2 меньше второго и на 3 – третьего. Найдите первое из этих чисел.

1361. Найдите два числа, разность и отношение которых равны соответственно 10 и 10.

1362. Замените буквы цифрами так, чтобы выполнялось равенство $икс + фикс = 1468$.

§40.

Графики

Координатную плоскость часто используют для построения графиков. Рассмотрим к примеру график изменения температуры.

Представим себе, что температуру воздуха измеряли в течение суток каждые два часа. Результаты измерений записали в таблицу.

Часы (ч)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Градусы ($^{\circ}\text{C}$)	3	1	0	-2	-3	-1	1	4	5	6	5	4	3

Данные этой таблицы показывают соответствие между временем и температурой воздуха: в полночь температура была 3°C , в два часа термометр показывал 1°C и т. д. Чтобы лучше видеть, как изменялась температура, строят ее *график*. Для этого проведем оси координат. На оси абсцисс будем обозначать время (часы, в которые измеряли температуру), а на оси ординат – соответствующие показания термометра. Отмечаем точки, координаты которых – пары чисел из приведенной выше таблицы: паре чисел 0 и 3 соответствует точка с координатами 0 и 3 и т. д. (рис. 157).

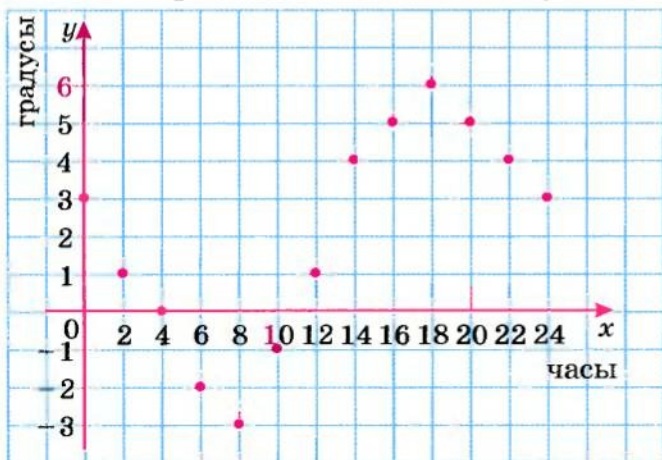
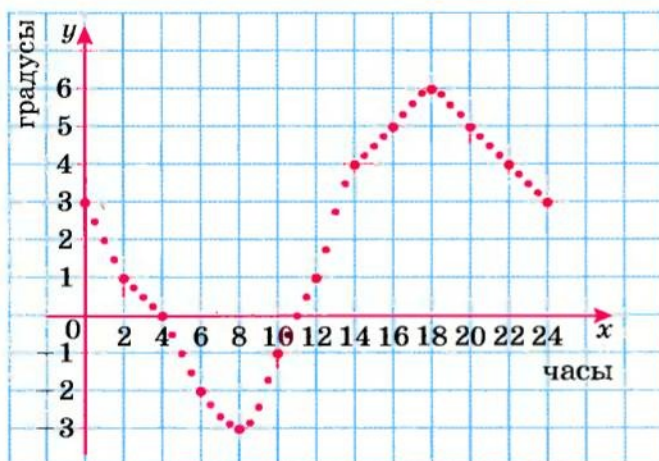


Рис. 157

Представим теперь, что температуру воздуха измеряли не через каждые два часа, а через каждые полчаса. Тогда в таблице было бы больше пар чисел, а на координатной плоскости – больше точек (рис. 158, а). А если бы температуру воздуха измеряли непрерывно, то все точки на координатной плоскости слились бы в непрерывную линию (рис. 158, б). Эта линия – *график температуры* воздуха. Из графика наглядно видно, что до 8-и часов температура снижалась, от 8-и до 18-и – повышалась, а потом снова снижалась; что в промежутке между 4-я и 11-ю часами она была «минусовой» и т. д.



а



б

Рис. 158

Графики бывают различными, чаще всего – это линия на координатной плоскости. Такой график наглядно показывает, как изменяются значения одной величины от изменения значений другой величины. Масштабы на осях могут быть разными. Рассмотренный график изменения температуры воздуха со временем – кривая линия. А некоторые графики – прямые, лучи, отрезки, ломаные или объединение таких линий с кривыми. Например, графиком прямой пропорциональности является прямая или часть прямой, которая проходит через начало координат. Рассмотрим пример.

Если человек 4 ч движется равномерно со скоростью 5 км/ч, то графиком его движения является отрезок, изображенный на рисунке 159.

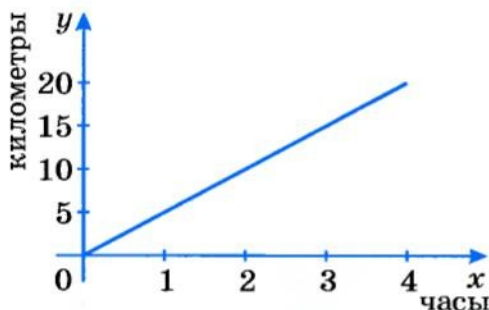


Рис. 159



Узнайте больше

Как вы уже знаете, две величины называются *обратно пропорциональными*, если с увеличением значений одной из них в несколько раз значения другой уменьшаются во столько же раз. Например, скорость движения v и время t , в течение которого тело проходит определенное расстояние s , – величины обратно пропорциональные: $t = \frac{s}{v}$. За

какое время можно преодолеть расстояние 100 км, если двигаться с различными скоростями? Это видно из таблицы:

v , км/ч	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
t , ч	10	5	$3\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{2}$	2	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{3}{7}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{9}$	1

Если нанести на координатную плоскость точки, координаты которых отвечают данным этой таблицы, и провести через них плавную кривую, получим график рассматриваемой зависимости (рис. 160). Графиком каждой обратно пропорциональной зависимости величин является аналогичная кривая линия.

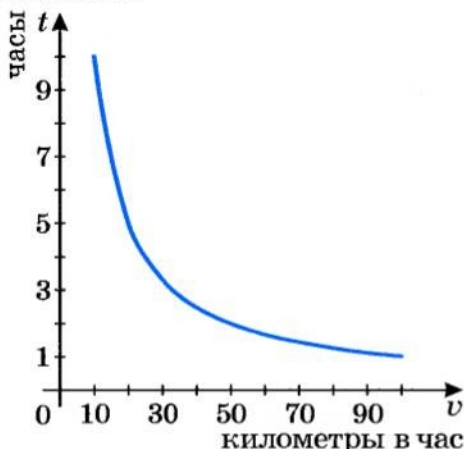


Рис. 160

Существуют приборы (термограф, барограф, кардиограф и др.), которые сами вычерчивают графики, специалисты должны уметь их «читать». Больше о различных графиках вы узнаете в старших классах.



Проверьте себя

1. Что такое график?
2. Какие бывают графики?
3. Какой вид имеет график прямой пропорциональной зависимости?
4. Для чего нужны графики специалистам?
5. Как строят график «по точкам»?



Выполняем вместе

① Построим график движения велосипедиста, который 2 ч ехал со скоростью 10 км/ч, потом 1 ч отдыхал, после чего с такой же скоростью ехал еще 2 ч.

• Описанной ситуации отвечает приведенная ниже таблица.

Нанесем на координатную плоскость точки, координаты которых отвечают данным этой таблицы, соединим их отрезками и получим график движения велосипедиста (рис. 161).

Время (ч)	Расстояние (км)
0	0
1	10
2	20
3	20
4	30
5	40

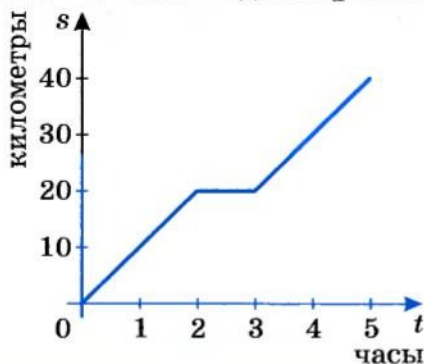


Рис. 161



Устные упражнения

1363. На рисунке 162 изображен график изменения температуры воздуха в течение суток.

- Какой была температура воздуха в 4 часа; в 20 часов?
- В котором часу она была самой высокой; в котором – самой низкой?
- В котором часу она была нулевой?

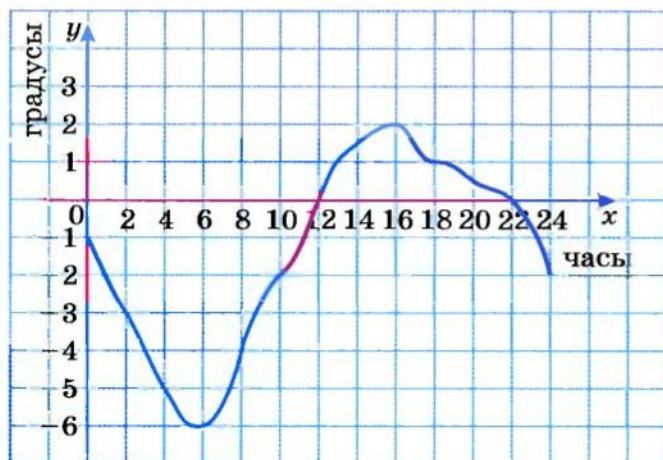


Рис. 162

- г) В какое время температура была положительной, а в какое – отрицательной?
 д) В какое время температура воздуха повышалась, а в какое – снижалась?
 е) В котором часу температура воздуха была 2°C ? А -2°C ?
 ж) Сколько раз в сутки температура была 1°C ? А -1°C ?



Уровень А

1364. Постройте график температуры по данным таблицы.

Часы (ч)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Градусы ($^{\circ}\text{C}$)	2	0	-1	-2	-3	-1	0	1	3	4	6

1365. На рисунке 163 изображен график движения автомобиля в течение пяти часов.

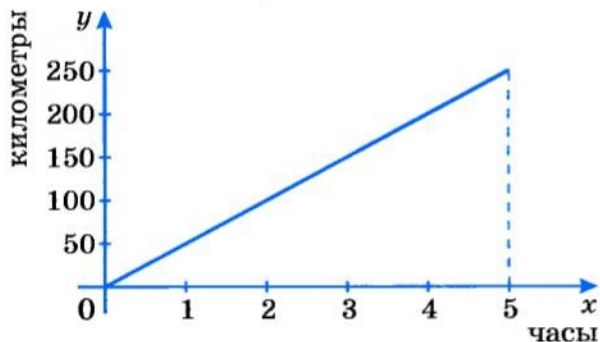


Рис. 163

- а) Какое расстояние проехал автомобиль за 2 ч; за 5 ч?
 б) С какой скоростью он двигался?
 в) Заполните таблицу, которая отвечает этому графику.

Время движения (ч)	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Расстояние (км)										

1366. Постройте график движения велосипедиста по данным таблицы.

Время движения (ч)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Расстояние (км)	7	14	21	28	35	42

1367. Мотоцикл двигался 5 ч со скоростью 50 км/ч. Составьте соответствующую таблицу и постройте график движения мотоцикла.

1368. Высота сосны изменялась в зависимости от ее возраста так:

Возраст (г.)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Высота (м)	0	3	6	9	12	15	16	17	17

Постройте график зависимости высоты сосны от ее возраста. По графику определите:

- а) высоту сосны в 15 лет, 23 года, 77 лет;
- б) в каком возрасте высота сосны была 8 м;
- в) на сколько метров сосна выросла за первые 20 лет.



Уровень Б

1369. Известно, что площадь квадрата $S = a^2$, где a – длина его стороны. Составьте таблицу зависимости площади квадрата от длины его стороны, если a равно: 0 см, 1 см, 2 см, 3 см, 4 см. Постройте график этой зависимости.

1370. Велосипедист 2 ч ехал со скоростью 14 км/ч, а после часового отдыха с такой же скоростью еще 3 ч. Соответствует ли его движению график, изображенный на рисунке 164? Сколько всего километров он проехал?

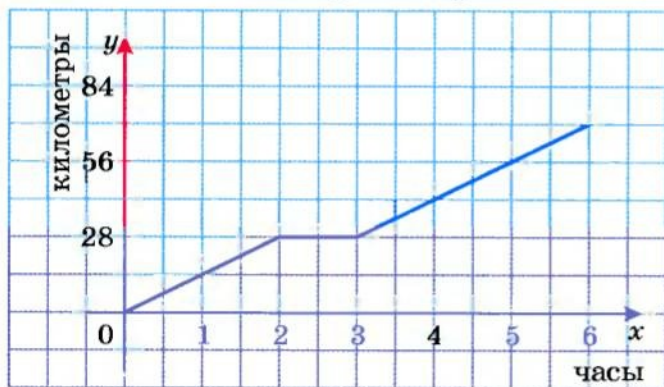


Рис. 164

1371. Велосипедист 3 ч ехал со скоростью 25 км/ч. Отдохнув 1 ч, он с такой же скоростью проехал еще 30 км. Постройте график движения велосипедиста. Сколько всего километров он проехал?

1372. На рисунке 165 изображен график движения группы туристов. Сколько часов туристы были в пути? Сколько километров они прошли? Сколько раз они отдыхали и

по сколько часов? С какими скоростями шли туристы в первые и последние часы похода?

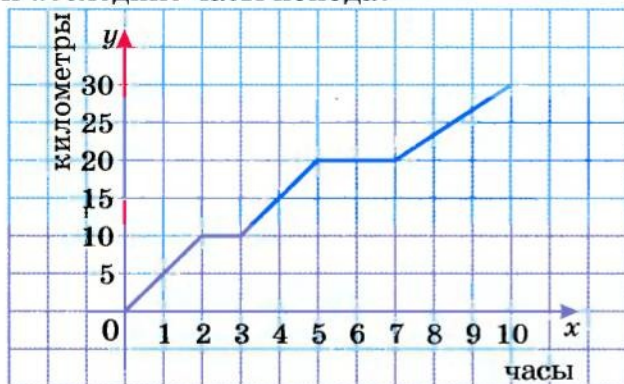


Рис. 165

1373*. У Аленки было 12 грн. Сколько одинаковых игрушек она может купить, если стоимость каждой из них: 1 грн., 2 грн., 3 грн., 4 грн., 6 грн., 12 грн. Составьте соответствующую таблицу и постройте график. Будет ли этот график сплошной линией?



Упражнения для повторения

1374. Найдите площадь круга, радиус которого равен:

- а) 2 м; б) 0,5 дм; в) a мм.

1375. Найдите три числа, среднее арифметическое которых равно 63 и которые пропорциональны числам 3, 4 и 8.

1376. Решите уравнение: а) $x^2 + 3 = 28$; б) $|x + 4| = 16$.



Самостоятельная работа 7

Вариант 1

1°. Упростите выражение:

- а) $26x - 15x$; б) $0,2x + 7(0,5x - 3)$.

2°. Решите уравнение:

- а) $5 - x = -13$; б) $3x - 2 = 1 - 5(1,2 - x)$.

3°. На двух складах хранится 2880 т угля. Сколько угля на каждом складе, если на первом складе его на 400 т меньше, чем на втором?

4°. Отметьте на координатной плоскости точки $A(-4; -2)$, $B(-4; 3)$, $C(3; 3)$ и $D(3; -2)$. Найдите периметр и площадь четырехугольника $ABCD$.

5°. Мотоциклист в течение 6 ч двигался со скоростью 40 км/ч. Постройте график его движения.

Вариант 2

1°. Упростите выражение:

а) $35x - 9x$;

б) $0,5x + 2(0,3x - 1)$.

2°. Решите уравнение:

а) $7 - x = 19$;

б) $2x - 3,8 = 3 - 4(3 - x)$.

3°. Трубу длиной 12 м разрезали на две части так, что одна из них оказалась на 3 м короче другой. Найдите длины этих частей трубы.

4°. Отметьте на координатной плоскости точки $K(-3; -4)$, $P(-3; 2)$, $T(4; 2)$ и $M(4; -4)$. Найдите периметр и площадь четырехугольника $KPTM$.

5°. Велосипедист в течение 5 ч двигался со скоростью 15 км/ч. Постройте график его движения.

Вариант 3

1°. Упростите выражение:

а) $-3,5x + 4,2x$;

б) $2,3x - 3,2(1 - 5x)$.

2°. Решите уравнение:

а) $39 - 2x = 17$;

б) $7x - 2,8 = 1 - 3(4 - x)$.

3°. Комбайнер скосил 129 га пшеницы и ячменя вместе. Сколько он скосил ячменя, если пшеницы он скосил на 65 га больше?

4°. Отметьте на координатной плоскости точки $A(-2; 5)$, $B(3; 5)$, $C(3; -1)$ и $K(-2; -1)$. Найдите периметр и площадь четырехугольника $ABCK$.

5°. Турист в течение 5 ч шел со скоростью 6 км/ч. Постройте график его движения.

Вариант 4

1°. Упростите выражение:

а) $-5,7x - 1,5x$;

б) $4,7a - 2,7(1 - 2a)$.

2°. Решите уравнение:

а) $10 - 0,5x = 16$;

б) $9x - 0,7 = 2 - 4(1 + x)$.

3°. Телевизор вместе с видеоманитофоном стоит 2050 грн. Сколько стоит видеоманитопон, если он дешевле телевизора на 520 грн.?

4°. Отметьте на координатной плоскости точки $K(3; 2)$, $P(3; -4)$, $T(-3; -4)$ и $M(-3; 2)$. Найдите периметр и площадь четырехугольника $KPTM$.

5°. Автобус в течение 4 ч ехал со скоростью 60 км/ч. Постройте график его движения.



Готовимся
к тематическому контролю



Вопросы для самопроверки

1. Как раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «+»? А знак «-»?
2. Какие слагаемые называют подобными?
3. Что такое уравнение?
4. Что такое корень уравнения?
5. Сформулируйте основные свойства уравнений.
6. Как переносить слагаемые из одной части уравнения в другую?
7. Какие две прямые называют перпендикулярными?
8. Какие две прямые называют параллельными?
9. Как построить систему координат?
10. Как называют оси координат?
11. Что такое координатная плоскость?

Задания в тестовой форме

1. Вычислите $2,37 - (7,32 + 2,37)$.
а) 0; б) $-7,32$; в) $7,32$; г) $2,37$.
2. Чему равен коэффициент выражения $-6x^2y^3$?
а) 2; б) 3; в) -6 ; г) -2 .
3. Упростите выражение $2x - 10x + 12x - 3x$.
а) $-x$; б) $19x$; в) x ; г) $-19x$.
4. Решите уравнение $0,5 + 3x = 1,5x - 1$.
а) $-1,5$; б) 3; в) 1; г) -1 .
5. Как записывают, что прямые a и c – перпендикулярные?
а) $a \vdash c$; б) $a \perp c$; в) $a \perp c$; г) $a \perp c$.
6. Как записывают, что прямые m и n – параллельные?
а) $m = n$; б) $m \parallel n$; в) $m \equiv n$; г) $m \parallel n$.
7. Найдите координаты точки A , симметричной точке $B(3; 0)$ относительно начала координат.
а) $A(0; 3)$; б) $A(0; -3)$;
в) $A(3; 0)$; г) $A(-3; 0)$.
8. Найдите координаты точки M , симметричной точке $N(2; 1)$ относительно оси абсцисс.
а) $M(-2; 1)$; б) $M(2; -1)$;
в) $M(-1; 2)$; г) $M(1; -2)$.

9. Найдите значение выражения $a(a + 2b) - 2ab$, если

$$a = -\frac{2}{5}, \quad b = 5\frac{2}{3}.$$

а) 5; б) $\frac{4}{9}$; в) $-\frac{2}{5}$; г) $\frac{4}{25}$.

10. При каком значении x значения дробей $\frac{x-1}{5}$ и $\frac{10-x}{10}$

равны друг другу?

а) 3; б) 4; в) 5; г) -10.

Типовые задачи

1°. Упростите выражение:

а) $3a \cdot (-2c)$; б) $2x + 7x - 5x$; в) $-5(1 - n)$.

2°. Решите уравнение:

а) $13 + 7x = 2x - 12$; б) $2(x - 3) + 5 = x$.

3°. Начертите два параллельных отрезка длиной 3 см каждый.

4°. Отметьте на координатной плоскости точки $A(-2; 3)$ и $B(6; -1)$. Проведите отрезок AB и запишите координаты точек пересечения отрезка AB с осями координат.

5°. Найдите значение выражения

$$4 \cdot 1,3 - 2 \left(1,25 + 2 \cdot 1\frac{3}{10} \right) + 2,5.$$

6°. Упростите выражение

$$2,5(3a - 4) - 5(2 + 3,1a) + (a - 7) \cdot 3$$

и вычислите его значение при $a = 100,2$.

7°. Решите уравнение:

а) $(2 - x) : 1,8 = 3,8 : (-0,6)$;

б) $-0,4(3x - 0,5) - 0,7 = 1,3(2x - 15)$.

8°. За 4 кг яблок и 3 кг картофеля уплатили на 2,5 грн. больше, чем за 6 кг картофеля и 2 кг яблок. Сколько стоит 1 кг яблок, если 1 кг картофеля дешевле на 2 грн.?

9°. Составьте таблицу зависимости периметра квадрата (P) от длины его стороны (a), если a равно: 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3. Постройте график этой зависимости.

10°. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если 50 % одного из них равны 40 % другого.



Исторические сведения

Отрицательные числа рассматривали китайские математики еще в V в. до н. э. Положительные числа они писали красной краской, а отрицательные – черной. Однако отрицательные числа сначала использовали только некоторые ученые.

В Индии начиная с VII в. отрицательные числа связывали с долгом, а положительные – с имуществом. Правила действий с отрицательными и положительными числами формулировали так: «сумма двух долгов есть долг», «сумма имущества и долга равна их разности», «произведение двух долгов является имуществом».

В Европе отрицательные числа стали известными только в XV в. Пользовались ими очень редко. Большинство европейских математиков называли их ненастоящими, вымышленными, абсурдными, ложными числами. Только начиная с XVII в., когда ученые все чаще стали использовать координаты точек, они постепенно смирились с отрицательными числами. Теперь математика, физика и другие науки не могут обойтись без отрицательных чисел.

Название рациональные числа происходит от латинского слова «ratio», которое означает *отношение*. Ведь каждое рациональное число равно отношению некоторых двух целых чисел.

Латинские слова «plus» и «minus» означают соответственно *больше* и *меньше*.

Системы координат и графики уравнений первым стал рассматривать французский математик XVII в. Рене Декарт (1596–1650). Поэтому часто говорят о декартовой системе координат. Такие системы координат, графики и диаграммы сейчас используются во всех науках.



Р. Декарт

Простейшие уравнения ученые Древнего Египта решали почти 4 тысячи лет назад. Неизвестное число в уравнении они называли словом *куча* и предлагали, например, такие задачи.

Куча и ее седьмая часть составляют 19. Найдите кучу.

Этой задаче отвечает уравнение $x + \frac{1}{7}x = 19$.

Обратите внимание на свойство, сформулированное на с. 242. Любое слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив его знак на противоположный.



Мухаммед
аль-Хорезми

Это очень важное свойство, оно позволяет сравнительно легко решать много уравнений, которые без знания этого свойства решать очень трудно. Впервые это свойство обнаружил арабский математик IX в. Муххамед аль-Хорезми (Муххамед из Хорезма). Назвал он его словом «аль-джебр», которое означает *восстановление*. Дело в том, что раньше отрицательные числа считались ненастоящими. Если же отрицательное число перенести из одной части уравнения в другую, оно перехо-

дило из ненастоящего в настоящее, в этом усматривали его восстановление. Название книги, где впервые рассматривалось это свойство, начиналось словом *Аль-джебр*. Европейцы, сделав перевод книги на латинский язык, назвали ее словом *Algebr*. Вот так и возникла новая математическая наука – *алгебра*.

Перпендикулярные и параллельные прямые грамотные и мастеровые люди рассматривали еще несколько тысячелетий назад. Две прямые могут быть не только перпендикулярными или параллельными, но могут пересекаться под острыми углами или быть скрещивающимися. Более детально это и взаимное расположение других геометрических фигур рассматривает наука *геометрия*.

Самым древним разделом математики является *арифметика* – наука о числах и действиях с ними. В переводе с греческого «арифмос» означает *число*. Арифметика, как и геометрия, возникла в Древней Греции, еще до новой эры в процессе практической деятельности людей, связанной со счетом и измерениями. Учебный предмет с названием арифметика еще совсем недавно изучали в школе до 6-го класса.

Во всех старших классах средних школ изучают алгебру и геометрию. Это очень важные, полезные и интересные учебные дисциплины. Раздел «Рациональные числа» этого учебника – естественное введение в алгебру и геометрию, которые вы будете изучать, начиная с 7-го класса.



Главное в разделе 4

В этом разделе вы ознакомились со множеством **рациональных чисел**. Это множество содержит все целые и дробные числа. **Целые числа** – это все натуральные числа, противоположные им числа (целые отрицательные) и нуль:

... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Любые два целых числа можно складывать, вычитать, умножать; в результате каждый раз будем получать целое число.

Модулем рационального числа называется это же число, если оно неотрицательное, или противоположное ему число, если оно отрицательное.

Каждое отрицательное число меньше нуля и каждого положительного числа; из двух отрицательных больше то, модуль которого меньше.

Любые два рациональных числа можно сложить, вычесть, умножить или разделить (за исключением деления на 0); в результате каждый раз получим рациональное число.

Чтобы сложить два отрицательных числа, надо сложить их модули и перед результатом поставить знак минус.

Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо найти разность их модулей и перед результатом поставить знак слагаемого с большим модулем.

Чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Выражение, содержащее сложение и вычитание рациональных чисел, можно заменить суммой.

Чтобы умножить два отрицательных числа, достаточно умножить их модули.

Произведение двух чисел с разными знаками равно произведению их модулей, взятому со знаком минус.

Произведение, которое содержит четное число отрицательных множителей, – положительное, а содержащее нечетное число отрицательных множителей, – отрицательное.

Частное двух рациональных чисел с одинаковыми знаками равно частному их модулей. Если знаки делимого и делителя разные, то перед частным их модулей надо поставить знак минус. Делить на 0 нельзя.

Основное свойство уравнения. Любой член уравнения можно перенести из одной его части в другую с противоположным знаком. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, корни которого те же, что и данного.

Графиком (в простейших случаях) называют линию на координатной плоскости, которая показывает, как изменяются значения одной величины с изменением значений другой.



Упражнения для повторения за год

Делимость чисел

1377. Запишите все простые числа, которые больше 15 и меньше 35.

1378. Запишите такие составные числа x , которые удовлетворяют условию $21 < x < 31$.

1379. Запишите все такие натуральные числа, которые делятся на 9 и меньше 40.

1380. Припишите к числу 278 слева такую цифру, чтобы образовалось четырехзначное число, кратное 9.

1381. Разложите на множители число: а) 240; б) 350.

1382. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел:

а) 18 и 32; б) 42 и 105; в) 60, 80 и 140.

1383. Во сколько раз НОД чисел 36 и 48 меньше их НОК?

1384. Разложите на множители числа 140, 175, 210 и найдите:

а) НОД (140; 175), НОД (140; 210), НОД (140; 175; 210);

б) НОК (140; 175), НОК (175; 210), НОК (140; 175; 210);

в) сумму всех простых делителей числа 210;

г) сумму всех делителей числа 175.

1385. При помощи цифр 1, 2, 3 напишите все трехзначные числа, в которых каждая цифра встречается только один раз. Сколько из них четных, нечетных, кратных 3, 6, 9?

1386. Найдите сумму чисел, которые меньше 20 и взаимно простые с числом 20?

1387. Найдите числа, которые меньше 40 и взаимно простые с числом 60?

1388. Запишите пять четных натуральных чисел, кратных 7.

1389. Может ли сумма четырех последовательных натуральных чисел быть простым числом?

Дробные числа

1390. Какие из чисел $0,9$, $\frac{70}{35}$, $-\frac{3,8}{1,9}$, $\frac{3}{4}$, $-0,75$, $2\frac{2}{3}$ дробные?

1391. Запишите обыкновенной дробью число:

а) 0,8; б) 1,2; в) 2,25; г) 0,(3).

1392. Найдите 0,72 числа: а) 300; б) 72; в) 0,2; г) 0,72.

1393. Найдите $\frac{4}{7}$ числа: а) 140; б) 10; в) 1; г) $\frac{4}{7}$.

1394. Найдите число, 0,6 которого равны:

а) 102; б) 39; в) 0,6; г) 1.

Вычислите (1395–1401).

1395. а) $\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{2} : 4 \right) : 1\frac{3}{4}$; б) $2\frac{1}{6} : 13 + \left(3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{6} \right) : 2\frac{3}{5}$.

1396. а) $2\frac{2}{3} : 4 + \left(14\frac{4}{5} + \frac{4}{15} \right) : 22\frac{3}{5}$; б) $23 + \left(7\frac{1}{3} - 6\frac{7}{8} \right) : \frac{3}{4} - 5\frac{1}{4}$.

1397. а) $32 + \left(4\frac{5}{12} - 3\frac{13}{24} \right) : 1\frac{3}{4} + 3\frac{1}{18}$;

б) $0, (1) + 0, (6) : 1, (3)$.

1398. а) $4\frac{1}{2} + \frac{6}{7} \cdot \left(7\frac{2}{3} : \frac{7}{36} \right)$; б) $\frac{14}{63} \cdot \left(1\frac{29}{55} : \frac{4}{15} \right) \cdot \frac{11}{20}$.

1399. а) $6\frac{1}{4} : 1\frac{2}{3} + \frac{3}{4} : \frac{9}{31}$; б) $\frac{42}{95} \cdot \left(1\frac{3}{14} : \frac{3}{5} \right) : 2$.

1400. а) $5\frac{5}{7} - \frac{2}{5} \cdot \left(5\frac{1}{4} : 1\frac{1}{6} \right)$; б) $\frac{85}{91} \cdot 5\frac{6}{17} : \left(\frac{5}{7} : 8 \right)$.

1401. а) $\left(15 : \frac{5}{15} \right) : \left(3\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{27} \right)$; б) $15 \cdot \left(\frac{8}{45} : 16 \right) \cdot 24\frac{1}{2}$.

1402. Павлик выполнил домашнее задание по языку, истории и математике за 2,5 ч. Задание по математике он выполнил в $1\frac{1}{3}$ раза быстрее, чем по языку, а задание по

истории – на полчаса быстрее, чем задание по языку. Сколько времени он затратил на выполнение каждого задания?

1403. Одна бригада может выполнить некоторую работу за 10,5 дня, а другая – за 7 дней. За сколько дней выполнят эту работу две бригады, работая совместно?

1404. Резервуар наполняется нефтью через одну трубу за 4 ч, через другую вся нефть из него выливается за 4,5 ч. За сколько часов наполнится резервуар, если одновременно открыть обе трубы?

1405. Велосипедист проехал 36,75 км, двигаясь по ровной дорогой, на подъеме и спуске. Расстояние, которое

он проехал на подъем, в $2\frac{1}{3}$ раза больше того, которое он проехал по ровной дороге. Спуск на 2,75 км длиннее подъема. Сколько километров проехал велосипедист на подъеме и сколько на спуске?

1406. У ученика было 43,5 грн. На покупку мяча он израсходовал 80 % всех денег. Сколько стоит мяч?

1407. Масса муки составляет 0,7 массы выпеченного из нее хлеба. Сколько можно испечь хлеба из 10 т муки? Сколько нужно муки, чтобы испечь 0,1 т хлеба.

1408. Составьте и решите задачу о движении двух велосипедистов, решение которой свелось бы к уравнению

$$\frac{x}{10} - \frac{x}{15} = 1.$$

1409. На одном и том же расстоянии одно колесо кареты совершает 490 оборотов, а другое, обод которого на 0,4 м меньше, — 560 оборотов. Найдите длину обода каждого колеса.

Отношения и пропорции

1410. Упростите отношение:

а) $20 : 60$; б) $0,4 : 1,2$; в) $1 : 0,125$;

г) $\frac{2}{3} : \frac{3}{5}$; д) $1\frac{4}{5} : 2\frac{1}{2}$.

1411. Напишите несколько пропорций, составленных из чисел 2, 4, 3 и 1,5.

1412. Найдите неизвестный член пропорции:

а) $x : 3 = 7 : 6$; б) $1,2 : 5 = x : 15$;

в) $11 : 1001 = 0,3 : x$.

1413. Найдите отношение:

1) суммы чисел $\frac{5}{6}$ и $\frac{2}{5}$ к их разности;

2) суммы чисел $\frac{2}{5}$ и $2\frac{1}{3}$ к их произведению;

3) разности чисел $\frac{3}{5}$ и 0,5 к их произведению;

4) полуразности чисел $\frac{5}{6}$ и $\frac{1}{3}$ к их сумме.

1414. Найдите:

- | | |
|----------------------|--|
| 1) 20 % от 350; | 2) 30 % от 56 000; |
| 3) 12 % от 0,75; | 4) 125 % от 1,4; |
| 5) 15 % от 124 грн.; | 6) 48 % от 3,5 м; |
| 7) 2,5 % от 10 л; | 8) 4,2 % от 50 см ³ ; |
| 9) 0,5 % от 84 га; | 10) $\frac{3}{4}$ % от 7,5 км ² . |

1415. Найдите число, если:

- 1) 20 % его составляют 344;
- 2) 125 % его составляют 4800;
- 3) 2,5 % его составляют 640;
- 4) $\frac{1}{2}$ % его составляют $6\frac{1}{2}$.

1416. Сколько процентов составляют:

- | | |
|----------------------|---------------------------------|
| 1) 20 от 100; | 2) 15 от 4500; |
| 3) 6 от 7,2; | 4) 10 от 8; |
| 5) 3 кг от 60 кг; | 6) 100 км от 800 км; |
| 7) 35 см от 7 дм; | 8) 40 ар от 0,5 га; |
| 9) 7,2 мин от 1,2 ч; | 10) 30 м ² от 10 ар? |

1417. За 2,5 ч поезд прошел 160 км. Какой путь он пройдет за 4 ч, если будет двигаться с той же скоростью?

1418. Периметр четырехугольника равен 2,25 дм. Найдите длины его сторон, если они пропорциональны числам 4, 6, 7 и 8.

1419. В первый год проложили $\frac{4}{9}$ всей дороги, во второй – $\frac{8}{27}$ дороги, а в третий – остальные 5,25 км. Найдите длину всей дороги.

1420. В трех ящиках 86 кг гвоздей. В первом ящике – 30,4 кг, а во втором – на 1,2 кг больше, чем в третьем. Сколько гвоздей в третьем ящике?

1421. Найдите периметр треугольника, если его стороны пропорциональны числам 3, 5 и 7, а наименьшая сторона короче самой длинной на 16 см.

1422. Один насос может откачать воду из резервуара за 2 ч, другой – за 3 ч. За сколько часов они смогут откачать воду из резервуара, работая вместе?

1423. Два трактора могут вспахать поле за 8 ч. За сколько часов смог бы вспахать поле второй трактор, если первый может вспахать его за 12 ч?

1424. Расстояние 250 км на карте изображено отрезком длиной 5 см. Каким отрезком при этом масштабе изображается расстояние в 800 км?

1425. Разность двух чисел равна 4,8. Найдите эти числа, если одно из них в 5 раз больше другого.

1426. Разделите число 760 на части, пропорциональные числам m , n и k так, чтобы $m : n = 1 : 5$, $n : k = 3 : 4$.

1427. Найдите два числа, пропорциональные числам 3 и 5, если их разность равна $\frac{3}{4}$.

1428. Сумма двух чисел равна 14. Найдите эти числа, если $\frac{1}{2}$ первого равна $\frac{2}{3}$ второго.

1429. Из букв, написанных на отдельных карточках, сложили слово МАТЕМАТИКА. Потом карточки перевернули и перетасовали. Какова вероятность того, что на взятой наугад карточке окажется:

- 1) буква М; 2) буква А;
3) буква Е; 4) буква О?

1430. Окрашенный со всех сторон прямоугольный параллелепипед с измерениями 2 см, 3 см и 4 см разрезали на кубики объемом 1 см^3 . Какова вероятность того, что на взятом наугад кубике окажутся окрашенными:

- а) 1 грань; б) 2 грани;
в) 3 грани; г) 4 грани?

1431. Число m больше 40 на 25 %. На сколько процентов число 40 меньше числа m ?

1432. Сумма двух чисел равна 2. Найдите эти числа, если 20 % первого равны 30 % второго.

1433. Составьте задачу, в которой требуется найти два числа: а) по их сумме и отношению; б) по их разности и отношению; в) по их сумме и разности.

Задачи экономического содержания

1434. Заработная плата рабочего пропорциональна числу отработанных им часов. В первый месяц он работал 160 ч и получил 960 грн. Сколько часов он работал во втором месяце, если получил за работу 1080 грн.?

1435. Общий статутный фонд четырех банков составляет 180 млн грн. Какой статутный фонд каждого из них, если фонды банков пропорциональны числам 2, 2, 3 и 5?

1436. Капитал пяти основных страховых компаний Украины составляет 8 млрд грн. Из них наибольшая компания имеет 3 млрд грн., две другие – по 2 млрд грн., а еще две другие – поровну. Составьте круговую диаграмму распределения капитала страховых компаний.

1437. На 1 января 2000 г. уровень безработицы в Украине составлял 4,5 % трудоспособного населения, а число трудоспособных жителей – 26 млн. Сколько тогда было в Украине безработных?

1438. По существующей в Украине системе налогообложения налог на прибыль из дохода 2000 грн. отчисляется в размере 260 грн. Какой налог надо уплатить из 5000 грн.?

Задачи геометрического содержания

1439. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 2 м, а одна из сторон длиннее другой на 2 дм.

1440. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 26 дм, а стороны пропорциональны числам 2 и 3.

1441. Постройте прямоугольный треугольник, меньшие стороны которого равны 3 см и 4 см. Измерьте третью сторону треугольника и найдите его периметр и площадь.

1442. Постройте прямоугольник, стороны которого равны 4 см и 2 см. Найдите его площадь.

1443. Постройте равнобедренный треугольник, основание которого равно 5 см, а высота – 4 см. Вычислите его площадь.

1444. Найдите площадь поверхности и объем куба, ребро которого равно 3 дм.

1445. Найдите площадь поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны 2 м, 2 м, а высота – 2,5 м.

1446. Проведите две параллельные прямые на расстоянии 3 см друг от друга. Поместится ли между ними окружность радиуса 3 см? А окружность радиуса 1 см?

1447. Начертите квадрат со стороной 6 см и окружность, которая касается всех сторон квадрата. В каком отношении эта окружность делит площадь квадрата?

1448. Начертите окружность, радиус которой равен 3 см, и квадрат, все вершины которого лежат на этой окружности. В каком отношении квадрат делит площадь круга, ограниченного данной окружностью?

Рациональные числа

Вычислите (1449–1452).

1449. 1) $|-2,7| + 2,4$;

3) $|-3,5| : 7 - 3,2$;

5) $|\frac{1}{2}| : \frac{1}{2} - 1,2^2$;

7) $|\frac{1}{2}| : \frac{4}{5} - |1,25| + \frac{1}{4}$;

2) $-2,4 + |-2,3|$;

4) $4,8 - |3,2| : |0,8|$;

6) $|2,5| : |0,5|^2 - 200$;

8) $|-2\frac{1}{3}| : |\frac{7}{5}| - \frac{2}{3}$.

1450. 1) $3,7 - 1,2 : 0,4$;

3) $(7 - 8,5) : 0,5$;

5) $3 : 0,2 + 8 \cdot 2,5$;

7) $0,2^3 + 0,3^2$;

9) $(3 - 1,4) : 0,2^2$;

2) $2,8 + 8,1 : 2,7$;

4) $-4,9 : (2,3 - 1,6)$;

6) $12,1 : 0,11 + 1 : (-0,2)$;

8) $(-0,4)^2 - 1,2^2$;

10) $(2 - 3,5)^2 : 0,9$.

1451. 1) $(2 - \frac{3}{4}) \cdot 0,2$;

3) $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) : \frac{5}{6}$;

5) $(-\frac{1}{2} + 1) : (2 - 1,5)$;

2) $(1 - \frac{2}{3}) : \frac{2}{3}$;

4) $(0,6 - \frac{3}{5}) : 12\frac{7}{8}$;

6) $3\frac{2}{3} : (0 - 2\frac{1}{5})$.

1452. 1) $-\frac{1}{4} + (-\frac{3}{4}) - \frac{2}{9} + (-\frac{2}{3})^2$;

2) $(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}) \cdot (-2)^3 - 3\frac{1}{4} : (-\frac{1}{2})^2$;

3) $6 - (-0,2) : 0,4 + 0,8 - 2,4 : 6$;

4) $-2\frac{3}{5} - 6 : (-1,5) + (3,2 - 0,2 \cdot 6)^2$.

Раскройте скобки и упростите выражения (1453–1455).

1453. 1) $2(a - 3) + 6$;

3) $x - 3(2 - x) + 7$;

5) $(2c - 1) - (3c - 2)$;

7) $x^2 - x(8 + x)$;

2) $-3(x - 5) + 6x$;

4) $-(a - 5) + 2a - 4$;

6) $-(1 - 2a) + 3(1 - a)$;

8) $x^2 - 2x + x(2 - x)$;

9) $-0,5(3 - 2x) - x$;

10) $2a - a(1 - \frac{1}{2})^2 - 0,25a$.

1454. 1) $6 : (-1,5) - 4,6 + 5(2a - 3)$;

2) $(-1,6c + 0,4) - (0,5 - 0,8)c$;

$$3) (2x - 3y + 4) - (3x - 2y + 4);$$

$$4) 1 - (1,5x - 2) - 4(0,5x - 1,1).$$

1455. 1) $\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 - 3a^2 - a(1 - 3a) - 1,5^2;$

$$2) \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x - y + \frac{1}{3}\right);$$

$$3) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{4}{3}a - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16} - a;$$

$$4) \left(-\frac{3}{7} + \frac{5}{17}x + \frac{1}{27}y\right) - \left(\frac{3}{7} + \frac{5}{17}x + \frac{1}{27}y\right).$$

1456. Найдите значение выражения:

1) $2x - 3$, если $x = 3,5$;

2) $15 - 7x$, если $x = 4,2$;

3) $8,5a + 0,7$, если $a = -0,4$;

4) $x - 5y + 2$, если $x = 3$, $y = -4$;

5) $2ax - x$, если $a = 3$, $x = -0,5$;

6) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}xy - 1$, если $x = 6$, $y = 0$;

7) $a(a - x) + ax$, если $a = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{7}{13}$.

1457. Решите уравнение:

1) $x + 27 = 39$;

2) $1,5 + x = 2,7$;

3) $-5 + \frac{2}{3} = x$;

4) $1,8 - \frac{1}{2} = x$;

5) $2x + 3 = 45$;

6) $3x + 4 = 1$;

7) $5 + 4x = 65$;

8) $0,2x + 1 = 3$;

9) $(x + 2) + 3 = 43$;

10) $0,5 + (x + 1) = 3$;

11) $\frac{1}{2} + x = \frac{3}{4}$;

12) $5x + \frac{2}{3} = -1$;

13) $3 - x = 2,5$;

14) $1,2 - x = -0,8$;

15) $2 : x = 7 : 10$;

16) $1 : 4 = 3 : (x + 2)$;

17) $3x + 5 = x - 1$;

18) $7 - 2x = 3(x - 1)$;

19) $-1,5x = 4 - 3(x - 5)$;

20) $-(3x - 1) + \frac{1}{2} = 1,5x$.

1458. а) Среднее арифметическое семи последовательных чисел равно нулю. Какие это числа?

б) Среднее арифметическое девяти последовательных чисел равно 9. Какие это числа?



Задачи повышенной сложности

1459. К какому числу достаточно приписать справа 36, чтобы оно увеличилось в 103 раза?

1460. При каждом ли натуральном значении n число $10^n + 17$ делится на 9?

1461. Заполните пустые клеточки ленты (рис. 166) так, чтобы сумма чисел в каждых трех соседних клеточках равнялась 10.



Рис. 166

1462. К числу 10 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы образовавшееся четырехзначное число делилось на 72.

1463. Восстановите цифры, замененные звездочками:

- | | |
|---|---|
| <p>а) $1111 = ** \cdot ***;$</p> <p>б) $1265 = * \cdot ** \cdot *3;$</p> <p>в) $1001 = * \cdot *1 \cdot **;$</p> <p>г) $1166 = * \cdot *3 \cdot **;$</p> <p>д) $2001 = * \cdot *3 \cdot **;$</p> | <p>е) $\begin{array}{l l} *** & * \\ *** & * \\ 210 & * \\ *** & * \\ *** & * \\ * & * \\ * & * \end{array}$</p> |
|---|---|

1464. Найдите двузначное число, сумма цифр которого равна 14, и которое на 36 больше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

1465. Отцу столько лет, сколько дочери и сыну вместе. Сын в два раза старше дочери и на 20 лет моложе отца. Сколько лет каждому?

1466. Первый рыбак дал на общий обед два окуня, второй – одного окуня, третий – 6 грн. Как должны разделить деньги между собой два первых рыбака?

1467. Сколько зайцев и уток подстрелил охотник, если в корзине, куда он их сложил, оказалось 10 голов и 28 ног?

1468. Скорость сокола больше скорости чайки на 75 км/ч. Чайка летает быстрее стрижа в 1,5 раза. Найдите скорость сокола, если она в 2 раза больше скорости стрижа.

1469. Пассажир пришел на вокзал за 5 мин до отхода электрички. Если бы расстояние до вокзала было на 1 км больше, то, двигаясь с такой же скоростью, он опоздал бы на 5 мин. С какой скоростью шел пассажир?

1470. Из пункта A в пункт B связной принес пакет за 35 мин. Возвращаясь в пункт A , он увеличил скорость на 0,6 км/ч и поэтому затратил на дорогу 30 мин. Чему равно расстояние между пунктами A и B ?

1471. Электричка прошла мимо меня за 5 с, а мимо платформы длиной 150 м – за 15 с. С какой скоростью двигалась электричка?

1472. Через 2 года мальчик будет в два раза старше, чем был 2 года назад. А девочка через 3 года будет в три раза старше, чем была 3 года назад. Кто из них старше?

1473. Масса полной канистры с водой равна 23 кг, а заполненной наполовину – 12,5 кг. Какая масса пустой канистры?

1474. 20 туристов – мужчины, женщины и дети – вместе несли груз 200 кг. Сколько среди них было детей, если каждый мужчина нес 20 кг, каждая женщина – 5 кг, а каждый ребенок – 3 кг?

1475. Одно из двух чисел оканчивается нулем. Если этот нуль зачеркнуть, то получится другое число. Найдите эти числа, если их сумма равна 924.

1476. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 разместите в кружках (рис. 167) так, чтобы сумма чисел на каждой стороне равнялась 17.

1477. Обозначьте в тетради 9 точек, как изображено на рисунке 168. Не отрывая карандаш от бумаги, проведите 4 отрезка так, чтобы они прошли через все 9 точек.

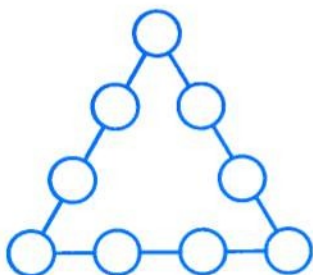


Рис. 167

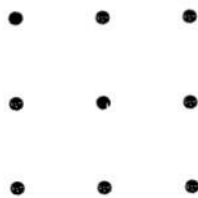


Рис. 168

1478. Собрали 100 кг грибов, влажность которых составляет 99 %. Когда грибы подсушили, влажность их уменьшилась до 98 %. Какой стала масса этих грибов после подсушивания?

1479. Часть жителей города говорят только на украинском языке, часть – только на русском, а часть знает оба языка. На украинском языке говорят 85 % всех жителей, на рус-

ском – 45 %. Сколько процентов всех жителей этого города владеют обоими языками?

1480. Из 9 монет одна фальшивая (легче других). Как обнаружить фальшивую монету двумя взвешиваниями на весах с двумя чашками?

1481. Андрей, Борис, Вера и Анна собирали грибы. Больше всех собрала Анна, Вера – не меньше, чем Борис. Правда ли, что девочки собрали грибов больше, нежели мальчики?

1482. Масса четырех наибольших карпов такая же, как и масса трех наибольших сазанов. Масса одного карпа на 8 кг меньше массы одного сазана. Какая масса наибольшего сазана?

1483. Сколькими способами можно рассадить трех гостей на трех стульях?

1484. Сколько разных трехзначных чисел можно написать цифрами 1, 2 и 3 так, чтобы цифры не повторялись?

1485. В автомобиле 4 свободных места. Сколькими способами можно рассадить по ним 4 пассажиров?

1486. Каждая из пяти подруг написала одно письмо каждой другой. Сколько всего писем они написали?

1487. На классной доске обозначили 5 точек и каждую из них соединили отрезком с каждой другой. Сколько образовалось отрезков?

1488. Сколькими способами можно нанизать на нить 6 разных бусин? А 7 разных бусин?

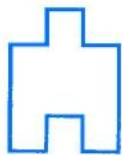
1489. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n кратко обозначают так: $n!$.

Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Вычислите:

а) $5!$; б) $6!$; в) $7! : 6!$; г) $(8! - 7!) : 7!$.

1490. В турнире первенства по футболу принимали участие 17 команд. Каждая команда играла с другими по 2 раза. Сколько всего было сыграно матчей в турнире?

1491. Каждую из фигур, изображенных на рисунке 169, разрежьте на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.



а



б



в



г

Рис. 169

1492. В мешочке есть яблоки трех сортов. Сколько яблок надо взять наугад, чтобы среди них оказалось по меньшей мере 2 яблока одного сорта?

1493. Как надо высадить 16 деревьев, чтобы было 4 ряда и в каждом из них по 5 деревьев?

1494. В какую сторону будет вращаться шестерня E , если шестерню A вращать так, как показано на рисунке 170?

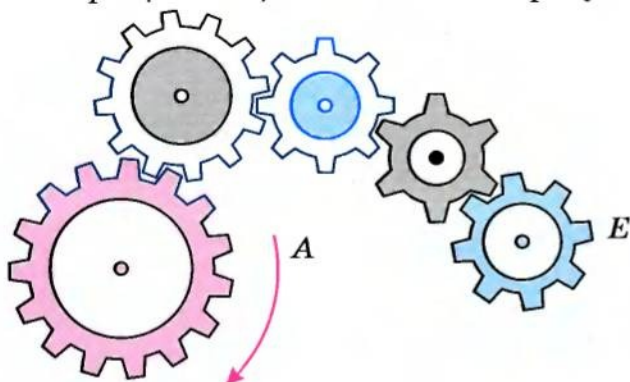


Рис. 170

1495. Поставьте между цифрами 9 8 7 6 5 4 3 2 1 знаки «+» и «-» так, чтобы значение полученного выражения равнялось 100.

1496. Сколько всего квадратов изображено на рисунке 171? Найдите сумму площадей всех этих квадратов.

1497. Позавчера Оле было еще только 10 лет, а в следующем году ей исполнится 13. Когда она отмечает свой день рождения?

1498. На сковородке помещается 2 рыбины. На поджаривание рыбины с одной стороны требуется 1 мин. Как за 3 мин поджарить 3 рыбины с обеих сторон?

1499. На рисунке 172 закрашено фигуру Φ – часть круга радиуса 2 см. Найдите площадь фигуры Φ и длину линии, которая ее ограничивает.

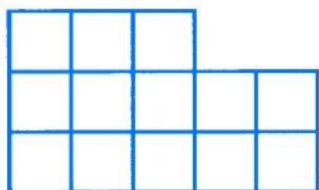


Рис. 171

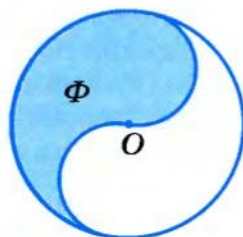


Рис. 172

1500. Собака догоняет зайца, который находится от нее на расстоянии 150 футов. Она прыгает каждый раз на 9 футов, а заяц – на 7 футов. Сколько раз должна прыгнуть собака, чтобы настичь зайца?

1501. Наслать пол равными паркетинами можно так, как показано на рисунке 173. Какими еще способами можно замостить пол такими паркетинами?

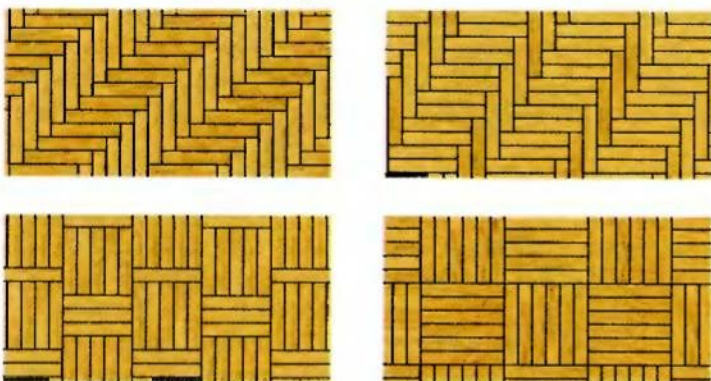


Рис. 173

1502. Найдите площадь голубой фигуры (рис. 174), если точки A, B, C, D – вершины квадрата и $AB = 5$ см.

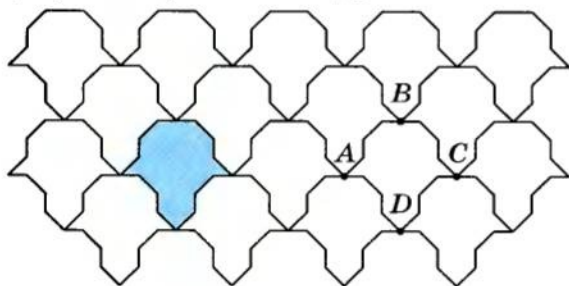


Рис. 174

1503. Запишите вместо одинаковых букв одинаковые цифры, вместо разных букв – разные цифры:

а) $куб = nu^k$; б) $акт = nu^k$; в) $кок = xx^x$.

1504. Будильник отстает каждый час на полминуты. Полчаса назад он отставал на 3 мин, а теперь показывает ровно 2 ч. В котором часу он будет отставать на 5 мин?

1505. Если на одну чашку весов положить кусок мыла, а на другую – $\frac{3}{4}$ такого же куска мыла и гири на $\frac{3}{4}$ кг, то весы будут в равновесии. Найдите массу куска мыла.

1506. Старинная задача. Крестьянин купил на ярмарке коня, корову и овцу. За коня он отдал $\frac{5}{8}$ всех своих

денег, за корову – половину того, что дал за коня, за овцу – последних 5 рублей. Сколько стоили конь и корова?

1507. Старинная задача. В харчевне обедали 23 мужчины и женщины. Каждый мужчина уплатил за обед 5 копеек, каждая женщина – 4 копейки, а все вместе – 1 рубль. Сколько среди них было мужчин и сколько женщин?

1508. Который сейчас час, если до окончания суток осталась пятая часть времени, которое прошло от их начала?

1509. Елене сейчас 24 года. А когда ей было столько лет, сколько сейчас Марии, то Марии было в два раза меньше, чем теперь Елене. Сколько лет Марии?

1510. Задача для смекалистых. Николай и Петр с сыновьями рыбачили. Николай поймал столько рыбин, сколько его сын Василий, а Петр – в 3 раза больше, чем его сын. Всего они поймали 35 рыбин. Как зовут сына Петра? Сколько рыбин он поймал?

1511. Андрей посещает библиотеку один раз в 3 дня, Борис – один раз в 4 дня, а Виктор – один раз в 5 дней. Втроем они встретились в библиотеке в субботу. Когда в следующий раз все они снова встретятся в библиотеке?

1512. Сколько воскресений может быть в одном месяце?

1513. В одном месяце три воскресенья выпали в четные числа. Какой день недели был 20 числа того месяца?

1514. Охотник пошел на охоту с собакой. Идут они лесом и вдруг собака увидела зайца. Расстояние от собаки до зайца равнялось 40 прыжкам собаки. Расстояние, которое собака пробегает за 5 прыжков, заяц пробегает за 6 прыжков. За сколько прыжков собака догонит зайца? (Прыжки совершают одновременно и собака, и заяц.)

1515. Четыре брата Максим, Олег, Евгений и Тарас ловили карасей. Олег и Тарас поймали столько же карасей, сколько Максим и Евгений; Максим словил карасей больше, чем Евгений; Максим с Тарасом поймали рыбы меньше, чем Олег и Евгений. Сколько рыбы поймал каждый из братьев, если Олег поймал 3 карася?

1516. Есть шестилитровая банка растительного масла и две пустые банки: трехлитровая и четырехлитровая. Как налить 1 л масла в трехлитровую банку?

- 1517.** Число оканчивается цифрой 2. Если переставить эту цифру в начало числа, то оно удвоится. Найдите это число.
1518. Решите кроссворд (рис. 175).

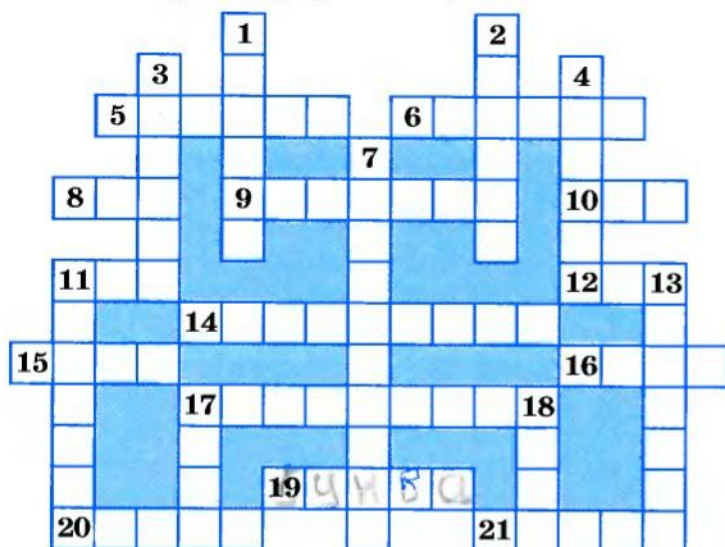


Рис. 175

По горизонтали: 5. Древняя мера длины. 6. Восьмая ступень гаммы. 8. Первое простое число. 9. Оставшаяся часть. 10. Квадрат числа. 11. Положение в шахматной игре. 12. Латинская буква. 14. Ученый, занимающийся математикой. 15. Целое число. 16. Геометрическая фигура. 17. Арифметическое действие. 19. Знак азбуки. 20. Одна из трех равных частей. 21. Отрезок, соединяющий две точки окружности.

По вертикали: 1. Порядковое числительное. 2. Наука о свете. 3. Французский ученый, создатель системы координат. 4. Пятая часть тысячи. 7. Древняя наука. 11. Сотая часть. 13. Элемент треугольника. 17. Стержень со спиральной нарезкой. 18. Денежная единица в Европейском союзе.



Повторение курса математики за 5 класс

Числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., используемые для счета, называют *натуральными числами*. Наименьшее натуральное число 1, наибольшее не существует.

Сравнить два числа – это означает установить, какое из них больше, какое меньше, или показать, что они равны.

Знаки неравенства: $<$ (меньше), $>$ (больше).

Законы действий. Какие бы ни были числа a , b и c , всегда:

$a + b = b + a$ – переместительный закон сложения;

$(a + b) + c = a + (b + c)$ – сочетательный закон сложения;

$a \cdot b = b \cdot a$ – переместительный закон умножения;

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – сочетательный закон умножения;

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ – распределительный закон умножения.

Вычесть из одного числа другое – означает найти такое третье число, которое в сумме со вторым дает первое. Если $a - b = c$, то $c + b = a$.

Разделить число a на b означает найти такое число c , что $c \cdot b = a$. Запомните, *на 0 делить нельзя!*

Если при делении числа a на b получается неполное частное q и остаток r , то $a = b \cdot q + r$, $r < b$. Неполное частное называют еще *приближенным частным* и записывают $a : b \approx q$.

Квадрат числа – это произведение двух равных чисел: $a^2 = a \cdot a$.

Куб числа – это произведение трех равных чисел: $a^3 = a \cdot a \cdot a$.

Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется *уравнением*. *Корнем уравнения* называется такое значение неизвестного, при котором уравнение превращается в верное равенство.

Дробные числа чаще всего записывают при помощи обыкновенных или десятичных дробей. Обыкновенная дробь $\frac{a}{b}$ –

это частное от деления числа a на b . Дробь $\frac{a}{b}$ называется

правильной, если $a < b$. Если $a > b$ или $a = b$, то дробь $\frac{a}{b}$ – *неправильная*.

Записывая дробные числа десятичными дробями, целую часть отделяют от дробной запятой. Из двух десятичных дробей больше та, целая часть которой больше. Если

их целые части равны, то больше та, в которой десятые больше, и т. д. Например, $2,7 > 0,98$; $5,4 > 5,297$.

Складывают и вычитают десятичные дроби поразрядно, записывая их одну под другой так, чтобы запятая была под запятой.

$$\begin{array}{r} + 2,27 \\ 23,8 \\ \hline 26,07 \end{array} \quad \begin{array}{r} - 35,28 \\ 7,235 \\ \hline 28,045 \end{array}$$

Чтобы умножить две десятичные дроби, можно умножить их, не обращая внимания на запятые, а в произведении отделить запятой справа столько цифр, сколько их есть в обоих множителях после запятой вместе. Например,

$$8,03 \cdot 0,02 = 0,1606.$$

Чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000, надо в ней запятую перенести вправо соответственно на одну, две, три цифры. Чтобы умножить десятичную дробь на 0, 1, 0,01, 0,001, достаточно в ней запятую перенести влево соответственно на одну, две, три цифры. Например,

$$4,0375 \cdot 100 = 403,75; \quad 43,9 \cdot 0,01 = 0,439.$$

Основное свойство частного. Значение частного не изменится, если делимое и делитель умножить или разделить на одно и то же число (кроме нуля). Используя это свойство, деление десятичных дробей можно всегда свести к делению натуральных чисел. Например,

$$3,5 : 0,07 = 350 : 7 = 50.$$

Процент — это сотая часть. $1\% = 0,01$. Процент числа — сотая часть этого числа.

Чтобы найти p процентов числа a , надо a умножить на $0,01p$.

Чтобы найти число, p процентов которого составляют b , надо число b разделить на $0,01p$.

Правило округления. Если первая из отброшенных цифр 0, 1, 2, 3, 4, то последнюю цифру числа, которая осталась, не изменяют. Если первая из отброшенных цифр иная, то последнюю цифру числа, которая осталась, увеличивают на 1.

Масштаб показывает, во сколько раз расстояние на рисунке, чертеже, плане или карте меньше расстояния на местности.

Среднее арифметическое нескольких чисел равно сумме этих чисел, разделенной на их количество.

Сумма углов треугольника равна 180° , а сумма углов четырехугольника равна 360° .

Чтобы найти площадь прямоугольника, надо его длину умножить на ширину.



Краткий толковый словарь

Ар – единица площади, которая равна 100 м^2 .

Арифметика – наука о числах.

Величина – количественная характеристика предмета или явления.

Вероятность – отношение количества результатов, благоприятных для события, к числу всех возможных результатов.

Вычитаемое – число, которое вычитают.

Гектар – единица площади, которая равна 100 ар.

Градус – единица меры угла, $\frac{1}{180}$ развернутого угла.

График – (в простейших случаях) линия на координатной плоскости, которая показывает, как изменяются значения одной величины с изменением значений другой.

Деление – действие, обратное умножению.

Делимое – число, которое делят.

Делитель – число, на которое делят.

Десятичная дробь – десятичная запись числа, в которой дробная часть от целой отделяется запятой.

Диаграмма – символический рисунок.

Дробные числа – рациональные числа, которые не являются целыми.

Калькулятор – вычислительный прибор.

Квадрат – прямоугольник, в котором все стороны равны.

Квадрат числа – произведение двух равных чисел.

Координата точки – число, определяющее размещение точки на прямой.

Координатная плоскость – плоскость с нанесенной на ней системой координат.

Координатная прямая – прямая с нанесенными на ней штрихами, которые отвечают определенным числам.

Корень уравнения – значение неизвестного, при котором уравнение превращается в верное числовое равенство.

Круг – объединение окружности и ее внутренней области.

Куб – прямоугольный параллелепипед, в котором все ребра равны.

Куб числа – произведение трех равных чисел.

Миллиард – тысяча миллионов, число 1 000 000 000.

Множители – числа, которые умножают.

Многоугольник – замкнутая простая ломаная.

Модуль числа a – число a , если оно неотрицательное, или $-a$, если число a отрицательное.

Натуральный ряд – последовательность 1, 2, 3, 4, 5, ...

НОД нескольких чисел – наибольшее натуральное число,

на которое делится каждое из данных чисел.

НОК нескольких чисел – наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел.

Нумерация – способ наименования и обозначения чисел.

Обыкновенная дробь – запись числа при помощи числителя и знаменателя.

Окружность – кривая замкнутая линия на плоскости, все точки которой равноудалены от некоторой точки.

Отношение – частное от деления одного числа на другое.

Периметр – сумма длин сторон многоугольника.

Произведение – результат умножения.

Пропорция – равенство двух отношений.

Простое число – натуральное число, больше 1, которое делится только на 1 и на само себя.

Прямоугольник – четырехугольник, в котором все углы прямые.

Равные отрезки – отрезки, длины которых равны.

Равные фигуры – фигуры, которые можно совместить наложением.

Разность – результат вычитания.

Рациональное число – число, которое можно записать в виде $\frac{a}{m}$, где a – целое число, m – натуральное.

Составное число – натуральное число, отличное от 1 и от простого числа.

Среднее арифметическое нескольких чисел – число, которое равно сумме этих чисел, разделенной на их количество.

Стандартный вид числа – запись числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$, n – целое число, которое называется **порядком данного числа**.

Степень числа a (a^n) – произведение n чисел, каждое из которых равно a .

Сумма – результат сложения.

Транспортир – простейший прибор для измерения углов.

Триллион – миллион миллионов, число 1 000 000 000 000.

Угол – часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом.

Уменьшаемое – число, из которого вычитают.

Уравнение – равенство, содержащее неизвестное, обозначенное буквой.

Целые отрицательные числа – числа противоположные натуральным.

Целые числа – общее название нуля, натуральных чисел и противоположных им чисел.

Цифры – знаки, при помощи которых записывают числа.

Частное – результат деления.

Четырехугольник – многоугольник, имеющий четыре стороны.



Предметный указатель

- Абсцисса точки 255
- Алгоритм Евклида 38
- Арифметика 272
- Боковая поверхность цилиндра 152
- Вероятность 122
- Вычитание
 - дробей 62
 - рациональных чисел 204
- Графики 260
- Деление
 - дробей 83
 - на ноль 217
 - рациональных чисел 216
- Делитель числа 6
- Диаграммы 156
- Диаметр
 - круга 150
 - окружности 149
 - шара 151
- Длина окружности 150
- Дроби
 - бесконечные периодические 100
 - взаимно обратные 83
 - десятичные 99
 - несократимые 53
 - обыкновенные 41
- Единичный отрезок 177
- Законы
 - сложения 63, 222
 - умножения 76, 222
- Знаменатель дроби 41
- Значение дроби 47
- Квадрат отрицательного числа 223
- Координатная
 - плоскость 255
 - прямая 176
- Координаты точки 255
- Коэффициент 232
- Кратное 16
- Круг 150
- Круговой сектор 151
- Куб отрицательного числа 223
- Масштаб 118
- Модуль числа 187
- Наибольший общий делитель 25
- Наименьшее общее кратное 29
- Нахождение
 - дроби от числа 90
 - процентов от числа 134
 - процентного отношения 133
 - числа по его дроби 91
- Начало координат 254
- Обратно пропорциональные величины 140
- Общее кратное 29
- Общий
 - делитель 24
 - знаменатель дроби 58
- Обыкновенная дробь
 - как частное 47
 - неправильная 43
 - несократимая 53
 - правильная 43
- Окружность 149
- Ордината точки 255
- Основные свойства
 - дроби 47
 - отношения 118
 - пропорции 128
 - уравнения 242
- Ось
 - абсцисс 254
 - ординат 254
- Отношение 117
- Параллелограмм 249

- Параллельные
- отрезки 249
 - прямые 248
- Перпендикулярные
- отрезки 248
 - прямые 248
- Площадь
- круга 150
 - поверхности цилиндра 152
- Порядок числа 238
- Преобразование дробей 99
- Приближенные значения 105
- Приведение
- дробей к общему знаменателю 58
 - подобных слагаемых 232
- Признаки делимости
- на 10, 5 и 2 10
 - на 3 и 9 15
 - на 4, 6, 7, 11 и 13 37
- Произведение дробей 76
- Пропорциональное деление 144
- Пропорциональные величины 139
- Пропорция 127
- Противоположные числа 182
- Прямоугольник 249
- Равенство дробей 48
- Радиус
- круга 150
 - окружности 149
 - шара 151
- Развертка поверхности цилиндра 152
- Разложение чисел 19
- Раскрытие скобок 231
- Решение уравнений 241
- «Решето Эратосфена» 38
- Ромб 249
- Симметричные точки 181, 257
- Система координат 255
- Сложение
- дробей 62
 - рациональных чисел 199
- Смешанные числа 63
- Событие 122
- Сокращение дробей 53
- Стандартный вид числа 236
- Степень 21
- Умножение
- дробей 75
 - рациональных чисел 209
- Формула
- длины окружности 150
 - площади круга 150
- Центр
- окружности 149
 - круга 150
 - шара 151
- Цилиндр 152
- Цифры
- нечетные 11
 - четные 11
- Числа
- взаимно обратные 83
 - взаимно простые 25
 - дробные 43, 182
 - натуральные 6
 - неотрицательные 172
 - нечетные 11
 - отрицательные 171
 - положительные 172
 - простые 6
 - противоположные 182
 - рациональные 182
 - составные 6
 - четные 11
 - целые 182
- Числитель дроби 41
- Члены
- дроби 42
 - пропорции 127
- Шар 151
- Экватор шара 151, 255



ОТВЕТЫ

1. Число 10 составное, а 11 – простое. 2. 1; 5. 3. 49. 5. Два. 7. Три. 9. Шесть: 1, 2, 4, 5, 10, 20. 18. Пропущено слово *только*. 20. 49 – составное число, поскольку $49 = 7 \cdot 7$, а 29 – число простое. 21. в). 22. 13. 23. Сумма делителей числа 6 больше. 24. $a + 1$. 25. 100. 26. а) 30. а) 32. 31. а) 5,55. 33. а) 20,65. 34. а) $1,2 > 1,125$. 35. а) 3,93. 36. а) 18 и 12. 37. а) 8,4. 38. а) 11. 39. 29 кг и 24 кг. 40. 32,25 м. 41. 210 км. 43. 1,25 м. 44. 21 м; 27 м^2 . 45. В 9 раз. 47. 34. 51. а) и б). 55. 990, 980, 970, 960, 950. 56. 450. 60. 18. 66. 20. 71. Все верные. 76. Да. 78. а) Пусть $a = 2m$, $b = 2n$, где m и n – натуральные числа. Тогда $a + b = 2m + 2n = 2(m + n)$; б) если к любой четной цифре (0, 2, 4, 6, 8) прибавить любую нечетную цифру (1, 3, 5, 7, 9), то получим число, которое оканчивается нечетной цифрой. 81. а) 64; г) 0,1. 84. 94 страницы. 91. Верно, поскольку сумма цифр каждого из этих чисел делится только на 3. 93. 405, 738, 7704. 96. 2. 97. Да. 98. 102.

100. 9, 18, 27, 36, 45. 102. 18. 107. Поскольку $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, а 10 не делится на 3. 108. Сумма таких чисел оканчивается нулем. 114. Нет. 115. а) 996; б) 990; в) 990. 116. а) 784; г) 0,0441. 117. а) 1331. 118. а) 6, 45; б) 62. 119. а) 200. 120. 13 и 6. 121. На 3,5. 128. Да; на простые множители – нет. 130. а) 40; б) 700. 131. а) $2 \cdot 2 \cdot 3$. 132. а) $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. 134. 3. 135. 11. 136. б) 1, 3, 9, 27, 81. 137. В 7 раз. 141. 27. 142. 15 или 35. 144. 3. 147. 6. 149. а) $2 \cdot 9 \cdot 5 = 90$. 151. 195. 152. 106; 107. 153. 90. 154. На 7,5. 155. 63 и 31. 156. 48 и 16. 157. 24 м. 158. 80 м. 160. Да; нет. 164. Делится на 2, 3 и 6. 165. а) 1, 2, 5, 10. 166. а) 10. 167. в) 4. 168. а) 13. 169. б) 6. 170. а) 4. 171. а) 100. 175. Только тогда, когда $n = 1$. 176. Нет. 179. Ибо НОД (9, 10) = 1. 181. Таких чисел всего 6, их НОД равен 18. 182. Нет. 185. 15. 186. а) 120; в) 0,3. 187. а) 4; в) 2,8. 188. а) 15; б) 11,4. 189. б) 35, 36, 37, 38, 39, 40. 190. 150 км; 0,5 мин. 193. Да; нет. 194. 24; 9. 197. а. 198. ab .

201. а) 350; б) 360. 202. а) 2610; б) 420; в) 2652. 203. На 300. 205. В 99 раз. 206. а) 48. 207. а) 1800. 208. Если $a = b$. 209. а) 20 088. 210. б) НОК (124, 648) > НОК (648, 972). 211. 130. 212. 120. 213. 3 м. 214. 5. 215. 14. 217. 30 учеников. 218. а) Да; б) нет. 219. 5 оборотов. 220. г) 11. 222. Второе число больше, поскольку его

знаменатель меньше. 223. На $\frac{6}{8}$. 224. 90° , 30° , 60° . 225. 60° , 70° , 50° .

234. а) $2\frac{1}{3}$. 235. а) $\frac{3}{5}$. 237. а) $\frac{5}{13}$; б) $\frac{2}{11}$. 239. а) $\frac{8}{10} > 0,3$. 240. а) $\frac{8}{10}$.

242. а) 1,6. 246. а) $\frac{3}{8} < 1$. 247. На 29,2 кг. 248. В 2 раза. 249. а) 7 км.
250. а) 12 м. 251. а) В 3 раза. 252. 240 см; 3456 см². 263. $\frac{4}{2}$; $\frac{6}{3}$; $\frac{16}{8}$; $\frac{26}{13}$.
265. а) $\frac{13}{5} > 2$. 267. При условии, что знаменатель равен 1.
269. $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$. 272. 5; 6; 20. 273. 3; 2; 4; 14. 274. а) 1; б) 10; в) 24.
277. $\frac{S}{4}$; $\frac{3}{4}S$. 278. а) 9,4; г) 0,912. 279. а) 4. 283. 3 км; 12 км.
288. 1, 2, 3, 6, 9, 18; $\frac{3}{4}$. 294. На 44. 297. а) $\frac{2}{7}$. 298. а) 3.
301. а) 1. 302. а) $\frac{1}{4}$. 303. а) $\frac{3}{4}$. 304. а) $\frac{1}{2}$ м; б) 1 м. 306. а) $\frac{1}{13}$. 308. 20.
310. 14 дм. 316. а) $\frac{3}{6}$ и $\frac{4}{6}$. 319. а) $\frac{3}{4}$. 321. а) $\frac{2}{5} < \frac{3}{7}$. 323. а) $\frac{3}{4} > 0,74$.
325. а) 4. 328. Если числа a и b взаимно простые, то НОК (a, b) = ab .
331. Первой. 338. В 3 раза. 339. 11 августа. 345. а) $\frac{5}{6}$. 346. а) $\frac{1}{3}$.
347. а) $1\frac{2}{15}$. 349. а) $3\frac{11}{18}$. 350. а) $4\frac{1}{2}$. 351. а) $\frac{1}{6}$. 353. а) $1\frac{2}{3}$. 354. а) $1\frac{1}{24}$.
355. а) $6\frac{1}{12}$. 356. а) $1\frac{17}{60}$. 361. $4\frac{3}{8}$ м. 362. $\frac{3}{4}$ км. 365. а) $\frac{13}{30}$. 366. а) $4\frac{11}{15}$.
367. а) $\frac{1}{12}$. 368. а) $2\frac{29}{35}$. 369. а) $\frac{14}{25}$. 370. а) $1\frac{13}{60}$. 371. $19\frac{2}{3}$ кг.
372. 5 ч. 373. $\frac{4}{15}$. 374. $7\frac{13}{30}$ т. 375. $2\frac{11}{12}$. 376. $20\frac{3}{4}$ кг и $15\frac{1}{4}$ кг.
378. $4\frac{1}{5}$ м. 379. $1\frac{19}{20}$ дм. 380. $\frac{2}{9}$ дм. 381. $12\frac{4}{15}$ м. 382. $6\frac{11}{30}$ дм.
384. Увеличится на 1. 385. Большая дробь $\frac{a+1}{b+1}$. 391. 24 л. 393. 33°, 57°, 90°. 399. а) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{6}$.
400. а) $\frac{2}{5}$. 401. а) $\frac{1}{2}$. 402. а) 2. 403. а) $1\frac{3}{10}$. 406. а) 4. 407. а) $\frac{3}{4}$.
408. а) $\frac{5}{6}$. 409. а) Второго. 412. а) $\frac{9}{25}$. 413. г) $1\frac{61}{64}$. 414. Сумма.

416. 8 дм. 417. 16 см. 418. $\frac{49}{81}$ см². 419. а) $\frac{5}{8}$ м². 420. а) $\frac{1}{6}$. 421. а) 15.
 422. а) 3. 423. а) $\frac{13}{20}$. 424. а) $4\frac{1}{6}$. 425. На 6 м². 426. $\frac{1}{8}$ м³. 427. а) $\frac{1}{5}$ м³.
 428. На $\frac{19}{216}$ м³. 429. $1\frac{1}{6}$ м². 430. $1\frac{1}{25}$ м². 432. а) $\frac{11}{40}$. 433. а) 1,19.
 434. а) 0. 435. а) 0,6х. 436. а) $2\frac{5}{7}$. 437. а) $18\frac{1}{4}$. 440. 14, 15, 16.
 442. а) 0,2. 443. 0,5 грн., 0,6 грн., 1 грн. 450. а) $1\frac{1}{3}$. 451. а) 126.
 452. а) 18; в) $4\frac{1}{5}$. 453. а) $\frac{1}{8}$. 454. а) $\frac{1}{15}$. 455. а) $5\frac{1}{4}$. 456. а) $\frac{9}{10}$.
 457. а) $\frac{3}{16}$. 458. а) $\frac{1}{8}$. 459. а) $\frac{1}{5}$. 460. а) 5. 462. Да. 466. $4\frac{5}{6}$ м.
 467. $\frac{2}{15}$ кг. 468. $\frac{3}{22}$ м. 469. а) $2\frac{9}{16}$. 470. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{26}$. 471. а) $8\frac{1}{2}$.
 472. а) $1\frac{1}{11}$. 473. 19. 474. $\frac{7}{57}$. 475. а) $1\frac{4}{15}$. 476. а) $10\frac{1}{9}$. 477. а) 5.
 478. а) $3\frac{4}{15}$. 479. $\frac{2}{5}$ м. 480. $\frac{3}{4}$ м. 481. $\frac{4}{5}$ дм. 482. $2\frac{1}{3}$ м и $2\frac{2}{3}$ м.
 483. $1\frac{3}{7}$ дм. 486. 221 км; за 3 ч. 487. За 4,5 ч. 488. 14 м, 18 м,
 22 м. 489. 40°, 50°, 90°. 490. На 15 см. 491. 10 лет. 492. 5 учени-
 ков. 497. а) 150 кг. 498. 80 домов. 499. 30 грибов.
 500. 1000 учебников. 504. 24 грн. 505. 50 деталей. 506. 60 м.
 507. 24 км; 60 км; 1,2 км; 18 км. 508. 63 га. 510. 8 грн. 511. За
 2 недели. 512. За 21 мин. 513. 54°. 514. На 50°. 515. 14 кг. 516. 0,6 кг.
 518. 3720 грн. 520. На $\frac{1}{4}$. 521. На $\frac{3}{10}$. 522. 0,5 км; 3,5 км.
 523. 56 км; 41,5 км. 524. 5 км. 525. 24,5 км. 526. 48,15 км.
 527. а) 31,5. 528. За 12 ч. 529. За 45 дней. 530. $\frac{1}{2}$ м. 531. На 130.
 532. 4,76 грн. 533. 340 г. 534. На 10,01 см² увеличится.
 535. а) 362,25 грн. 536. 2268 см². 537. 168 см. 538. 96 га.
 539. 580 кг. 540. 2,7 грн. 541. 260 км. 542. За 24 мин. 543. За
 1 ч 12 мин. 544. 125 га. 545. $\approx 1,6$ кг. 546. 250 кг. 547. 1350 грн.
 548. 100 машин. 549. 360 га. 550. 1000 грн. 551. 194,4 грн.
 552. 20 га. 553. 200 га. 556. а) 2,5. 558. На 5,96. 559. На 0,37.
 560. На 1,8. 570. а) 1. 571. а) 3. 572. а) 1,4. 573. 6 м. 575. а) 2.
 576. а) 3,28. 577. а) 0,2(6). 579. а) 3,25. 580. На 5,3125.

581. $2\frac{1}{6}$ м. 582. $\approx 9,5$ км/ч. 583. а) $\frac{4}{9}$; г) $8\frac{1}{30}$. 589. 30° , 60° , 90° .
 590. 1350 грн. 591. Двенадцатая. 595. а) 0,38. 596. а) 4,17.
 597. а) 7,59. 598. а) 41,9; б) 1,95. 599. 12,5.
 600. 3,72; 3,25; 1,64. 601. а) 12,52 м; 9,72 м². 602. 14,4 см; 12,4 см².
 603. а) 3,17. 605. а) 19,489. 606. в) 3, 4, 5, 6, 7. 607. а) 11,9 км;
 в) 112 га. 608. а) 30° , 60° ; б) 36° , 54° . 609. 2 га. 610. а) 5; г) 0,1.
 612. 2 : 3. 613. а) 0,5; г) 50 км/ч. 618. а) 2,5; б) 2,5. 620. 1 : 3.
 621. а) 2 : 9. 623. а) 1 : 20. 624. а) 4 : 5 < 5 : 6. 626. а) 0,4.
 628. а) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{2}{3}$. 629. 440 км. 630. а) 1 : 5 000 000. 633. 1 : 8 000 000.
 637. За 2 ч. 640. $\frac{3}{8}$. 641. $\frac{1}{7}$. 642. 1. 643. 0. 644. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; 645. а) $\frac{2}{9}$;
 в) $\frac{8}{27}$. 651. 0,7. 652. $\frac{1}{6}$. 653. $\frac{1}{12}$. 655. $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$; $2007 =$
 $= 3 \cdot 3 \cdot 223$; $2008 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 251$. 656. 90; 4905. 657. Все они – нули.
 658. Да, произведение $12 \cdot 30 \cdot 7$ делится на каждое из этих чисел.
 659. Андрей – из Винницы, Борис – из Гайсина. 660. а) Да; б) нет;
 в) да. 663. а) Нет; б) да. 665. Ибо $2 \cdot 5 \neq 3 \cdot 4$. 672. а) 4. 673. а) $\frac{5}{8}$.
 674. а) 21. 676. 30. 677. а) 2,1. 678. а) 6. 679. Да. 680. Да.
 681. 5 : 6; 25 : 36. 682. 100 км. 684. а) Да; б) да. 688. Прибавьте к
 каждой части равенства по 1. 689. а) 4530; б) 2717. 690. Они
 равны. 691. $(35,2 + 64,8) \cdot 1,4 = 140$. 692. 17,5 см. 694. 90 000 грн.
 698. а) 35 %; в) 80 %; г) 125 %. 699. а) 60 %; г) 25 %.
 700. 92 %. 703. 8 %. 704. 20 %. 705. На 5 %. 707. 120 грн.
 708. 432 грн. 709. а) На 25 %; б) на 20 %. 710. а) На 100 %.
 711. а) На 50 %. 712. 250 %. 713. 35 %. 714. На 32 %. 715. Да.
 716. На 8 %. 718. На 25 %. 719. 6480 грн.; 6998,4 грн. 720. 60 %.
 721. 400 т. 722. 338,4 т. 723. а) 8,3; б) $\frac{6}{7}$. 725. $a = 5$, $c = 1$. 726. Да.
 727. Нет. 735. 1 т. 736. 28 км. 737. 43,5 кг. 738. 180 грн. 739. 61 ко-
 стюм. 741. 18 т. 743. 1,8 т. 744. За 11 ч 50 мин. 747. $\approx 5,6$ ч.
 748. ≈ 556 кг. 749. 15 кг, 20 кг, 65 кг. 752. 45° . 753. 65 см. 754. $3\frac{1}{3}$ оборо-
 та. 761. 20° и 70° . 763. 30° , 60° и 90° . 764. 4,8 м и 7,2 м. 765. 8 м
 и 10 м. 767. 143, 286 и 572. 768. 84, 140 и 224. 770. 250 кг, 20 кг,
 10 кг. 771. 8 см, 12 см и 16 см. 774. б) 48, 72 и 80. 775. 160 и 200.
 776. 3 см, 9 см, 9 см и 15 см. 779. 4,8, 8 и 12. 781. 24, 48 и 84.
 782. 37,5 см. 786. На 500 %. 787. $60,4$ дм², $31,2$ дм³. 788. 36.
 793. В 4 раза. 795. Округ, вокруг, друг, круиз, шарф, шарж.
 797. б) 6,8 см.

801. а) $\approx 31,4$ см; г) пс км. 805. а) $\approx 12,56$ дм². 807. 10 см. 808. ≈ 10 м. 809. $\approx 3,14$ см². 810. п см². 811. 18,8 см. 812. $\approx 7,5$ м. 813. $\approx 12,25$ м. 817. 4 : 1. 821. 20 кг. 822. 36,4 га. 824. Да. 825. 25 конфет – наименьшее количество. 826. 7 яиц. 836. 17, 12 и 23. 844. $\approx 7\%$. 846. 36 см. 847. Вчера, 31 декабря ученику исполнилось 13 лет. 851. Да. 862. 6 см². 863. 11,7 га. 867. Нет. 880. а) 3 см; б) 4 см. 882. 3. 884. а) 3; б) 0; в) 6. 885. а) $P(-6)$; в) $P(3)$. 886. AC – самый длинный, OB – самый короткий. 888. $AB = 1$ см, $AC = 2$ см, $CB = 3$ см. 892. $C(7)$; 2. 895. а) На 1,5; б) на 1,65.

900. Все утверждения верные. 901. Нет. 907. а) $-\frac{5}{6}$; б) $\frac{6}{5}$.

908. а) Нет. 910. $O(0)$. 916. $3\frac{2}{3}$. 918. 8. 919. Бесконечно много.

920. а) $-5,1$; б) 293; в) 45. 922. На 3,8. 924. а) 100. 925. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Все они натуральные, простых среди них четыре: 2, 3, 5 и 7. 926. 90 дм². 934. 7; 3; 10; 2,5. 938. 203. 941. Для отрицательных. 942. Не существует. 943. а) 6 и -6 . 951. а) Когда x – число неотрицательное. 952. б) и в). 955. а) 5 и 7; б) 0 и 4. 956. 5,2 кг, 7,2 кг.

957. 5 и 10. 958. а) $5 \cdot 5 : 5$; б) $(5 - 5) \cdot 5$; в) $5 - 5 : 5$. 965. а) $0,3 < \frac{1}{3}$;

б) $-\frac{4}{3} < -\frac{5}{4}$. 968. а) $0,4 > 0$. 972. а) $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$.

979. а) $-181 < -180$. 980. а) 8; б) 64; в) 0. 981. 2,45 ц. 982. $\frac{8}{9}$ кг.

984. 4 грн. 985. $\frac{1}{3}$. 986. За 1 ч. 990. Да. 995. а) $-0,1$.

997. а) $-1,68$. 999. $-1,5$.

1000. а) 2,6; б) $-4,2$; в) $-1\frac{4}{15}$. 1001. Все верные. 1003. а) $-\frac{1}{5}$;

б) -1 . 1004. а) $-\frac{2}{7}$; б) $\frac{3}{7}$. 1005. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6}$. 1006. а) $-1\frac{2}{3}$. 1007. а) $\frac{1}{4}$.

1008. а) $-1\frac{29}{30}$. 1009. а) $2\frac{19}{30}$. 1015. а) 1 и -3 . 1016. а) 290 км;

б) 110 км. 1017. 75 км/ч. 1019. 12π дм². 1021. а) 8 и -8 ; б) 7 и -3 . 1022. Да. 1024. а) $13 + (-28) = -15$. 1025. а) -89 . 1026. а) 60.

1027. а) 1. 1031. а) 7,6. 1033. а) $-2\frac{1}{2}$. 1034. а) $-3\frac{1}{6}$. 1040. Да.

1049. Да. 1056. а) 7, 8, 9 и 10; б) $-3, -2$ и -1 . 1059. 5 лет. 1060. В 2017 г. 1063. а) 360. 1064. а) 1% ; б) $0,005\%$; в) 40% . 1066. На 75% , на 300% . 1067. 12 км/ч. Предположите, что расстояние между селом и городом равно, например, 30 км. 1072. б) $3,2 \cdot 6 = 19,2$.

1073. а) $(-4) \cdot 8 = -32$. 1074. $(-25) \cdot 40 = -1000$. 1075. а) $(-7) \cdot 100 = -700$. 1076. а) $-7a$; б) $(-2x) \cdot 6 = -12x$. 1077. а) 7; б) $-1,87$.
 1080. а) $\frac{4}{7}$; б) $\frac{1}{3}$. 1081. а) -10 ; б) -10 . 1082. а) 0; б) 0. 1083. а) -19 .
 1086. а) 24. 1087. а) 2; б) -3 . 1088. а) 7; б) -1 . 1089. а) 2; б) 6. 1091. а) На 11,04. 1093. $|ab| = |a| \cdot |b|$. Да. 1094. а) $-0,5$.
 1095. а) $-2,76$. 1096. а) $-12\frac{23}{30}$. 1097. а) -1 ; б) 5; в) 3.
 1100. Да. 1101. а) Отрицательное; б) положительное; в) положительное.
 1102. Да. 1103. $a < c$. 1106. б) 1,2. 1107. 145 км; 72,5 км. 1109. Квадраты простых чисел. 1110. Нет, так как количество белых клеточек не равно количеству черных. 1112. а) -5 . 1114. а) $-2,5$. 1116. а) -12 .
 1118. а) $\frac{1}{7}$. 1120. а) -4 . 1122. а) 1,25. 1123. а) 8. 1124. а) -27 .
 1125. а) 23. 1130. а) 0,8. 1132. а) 4,44. 1133. а) -1 . 1134. а) 0.
 1136. а) -9 ; б) $-1,5$. 1137. а) $-\frac{10}{3}$. 1139. 0,25. 1140. 8. 1141. а) 8;
 б) $-5,5$. 1142. Нет. 1143. Если $c = 1$ или $c = -1$. 1144. Да.
 1145. 1 или -1 . 1146. Нет. 1147. а) Плюшка; б) плющ; в) флюс;
 г) минута. 1148. 4,41 дм². 1149. $\approx 0,5$ м². 1151. 48π см². 1153. 74 конфеты. 1157. 1. 1174. а) 16; б) 17. 1177. а) -91 и -343 . 1179. а) $-39,3$.
 1180. а) $1\frac{2}{3}$. 1188. На 0,057 меньше. 1190. а) -1 . 1191. 0. 1196. а) 76.
 1197. 27. 1198. За 12 мин. 1199. 2; 2,5; 3; 3,5 дм. 1200. ≈ 13 м.
 1207. а) $9 + a - x$. 1211. а) $-2\frac{7}{8}$. 1212. а) $5 - x$. 1216. а) $-0,6xy$.
 1218. а) $7x - 2y$. 1224. а) 10,3. 1225. а) 3,5. 1228. 120°. 1234. а) 10^6 ;
 г) $1,23 \cdot 10^7$. 1237. а) 480 000; г) 0,0015. 1239. а) $6 \cdot 10^9$.
 1240. а) $1,6 \cdot 10^3$. 1241. а) $5 \cdot 10^3$. 1242. а) 10^3 . 1243. а) $1,008 \cdot 10^{13}$;
 1,75. 1244. а) $4,8 \cdot 10^2$; $1,8 \cdot 10^2$; $4,95 \cdot 10^4$; 2,2. 1245. а) $3 \cdot 10^5$
 больше, чем $1,5 \cdot 10^2$, на 3 порядка, или в 2000 раз. 1247. а) 8;
 б) 1. 1248. 18. 1261. а) -1 . 1264. а) $4\frac{6}{11}$. 1266. а) $\frac{5}{11}$. 1268. а) -6 ;
 1269. 42 года. 1270. 4 ц. 1272. 2,7 см и 6,7 см. 1273. 16 см, 19 см
 и 19 см. 1276. а) 6. 1277. а) 0. 1278. а) 2. 1280. а) -6 . 1281. а) $\frac{2}{3}$.
 1286. 27 и 18. 1290. 5. 1297. а) 1,75. 1298. а) 3 и -3 . 1299. а) -2 ,
 -1 , 0, 1, 2.
 1301. 800 и 200. 1307. $c \perp a$; $a \perp d$; $b \perp e$. 1313. $\angle COB = 80^\circ$.
 1318. $\angle BOK = 120^\circ$, $\angle BOP = 150^\circ$. 1319. а) 135° и 45° ; б) 80° и 100° .
 1320. 3 см. 1323. а) -3 , -2 , -1 , 0, 1, 2. 1325. На 30 %. 1326. 21, 28

и 33, 6. 1327. Четное. 1334. Нет. 1357. 13 кг; 11 кг и 16 кг. 1358. 16 см, 8 см, 19 см. 1359. 12,5; 25 и 62,5. 1360. -5, -3, -2. 1362. фикс = 1234. 1372. 10 ч; 30 км; 1 ч и 2 ч; 5 км/ч и $\approx 3,3$ км/ч. 1375. 37,8; 50,4; 100,8. 1376. а) 5 и -5; б) 12 и -20. 1377. 17, 19, 23, 29, 31. 1379. 9, 18, 27 и 36. 1380. 1278. 1386. 80. 1387. Таких чисел 10. 1389. Нет. 1390. Только первое и последнее. 1393. а) 80. 1394. а) 170.

1395. а) $\frac{23}{30}$; б) $2\frac{1}{4}$. 1399. а) $6\frac{1}{3}$; б) $\frac{17}{38}$.

1400. а) $3\frac{32}{35}$. 1401. а) 90. 1403. 4,2 дня. 1404. За 36 ч. 1405. 14, 6 км

и 16,75 км. 1407. $14\frac{2}{7}$ т; 70 кг. 1409. 2,8 м и 3,2 м. 1410. г) 10 : 9.

1413. 1) 37 : 13. 1414. 1) 70. 1415. 1) 1720. 1416. 1) 20 %; 10) 3 %. 1418. 36, 54, 63 и 72 см. 1421. 60 см. 1423. За 24 ч. 1424. 16 см.

1426. 60, 300 и 400. 1429. 1) 0,2; 2) 0,3; 3) 0,1; 4) 0. 1430. а) $\frac{1}{6}$;

г) 0. 1431. На 20 %. 1434. 180 ч. 1435. 30, 30, 45 и 75 млн грн. 1437. 1,17 млн. 1438. 650 грн. 1439. 24 дм². 1441. 6 см². 1443. 10 см². 1445. 28 м², 10 м³. 1447. $\approx 43 : 157$. 1448. $\approx 57 : 100$.

1449. 5,1. 1453. 10) 1,5а. 1457. 20) $\frac{1}{3}$. 1458. а) -3, -2, -1, 0, 1,

2, 3; б) 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. 1459. К числу 12. 1460. Да, поскольку сумма цифр этого числа равна 9. 1461. 8; 7; -5; 8, 7, ... 1462. 4104. 1463. а) 11 · 101; б) 5 · 11 · 23; в) 7 · 11 · 13; г) 2 · 53 · 11; д) 3 · 23 · 29; е) 840. 1464. 95. 1465. 60, 40 и 20 лет. 1466. Все 6 грн. надо отдать первому рыбаку. 1467. 4 зайца, 6 уток. 1468. 300 км/ч. 1469. 0,1 км/мин. 1471. 15 м/с. 1472. Обоим детям по 6 лет. 1473. 2 кг. 1474. 10 детей. 1475. 840 и 84. 1476. При вершинах «треугольника» должны быть числа 1, 2 и 3. 1478. 50 кг. 1479. 30 %. 1481. Да. 1482. 32 кг. 1483. 6 способов. 1484. 6. 1485. 24. 1486. 20. 1487. 10. 1488. 360, 2520. 1489. а) 120; б) 720; в) 7; г) 7. 1490. 272 матча. 1492. 4 яблока. 1493. Задача имеет несколько решений. 1495. $98 + 7 - 6 + 5 - 4 - 3 + 2 + 1$. Существуют другие решения. 1497. 31 декабря. 1499. 2л см², 4л см.

1500. 75. 1502. 25 см². 1505. 3 кг. 1506. 50 руб. и 25 руб. 1507. 8 мужчин, 15 женщин. 1508. 8 ч вечера. 1509. 16 лет. 1510. Николай - сын Петра; он поймал 7 рыб. 1511. НОК (3, 4, 5) = 60. Через 60 дней после субботы будет среда. 1512. 51 или 52. 1513. Четверг. 1514. 240 прыжков. 1515. Олег поймал больше всех, Тарас не поймал ни одного. 1517. Наименьшее из таких чисел 105 263 157 894 736 842.



Оглавление

Уважаемые шестиклассники!	3
---------------------------------	---

Раздел 1. ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Деление и делители числа	5
§ 2. Признаки делимости на 10, 5 и 2	10
§ 3. Признаки делимости на 3 и 9	15
§ 4. Разложение чисел на простые множители	19
§ 5. Наибольший общий делитель	24
§ 6. Наименьшее общее кратное	29
<i>Самостоятельная работа 1</i>	34
<i>Готовимся к тематическому контролю</i>	35
Исторические сведения	37
Главное в разделе 1	39

Раздел 2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

§ 7. Обыкновенные дроби с равными знаменателями	41
§ 8. Основное свойство дроби	47
§ 9. Сокращение дробей	52
§ 10. Приведение дробей к общему знаменателю	58
§ 11. Сложение и вычитание дробей	62
<i>Самостоятельная работа 2</i>	71
<i>Готовимся к тематическому контролю</i>	73
§ 12. Умножение дробей	75
§ 13. Деление дробей	83
§ 14. Задачи на умножение и деление дробей	90
§ 15. Преобразование обыкновенных дробей в десятичные	99
§ 16. Приближенные значения и действия с ними	105
<i>Самостоятельная работа 3</i>	109
<i>Готовимся к тематическому контролю</i>	110
Исторические сведения	113
Главное в разделе 2	115

Раздел 3. ОТНОШЕНИЯ И ПРОПОРЦИИ

§ 17. Отношения	117
§ 18. Вероятность случайного события	122
§ 19. Пропорции	127
§ 20. Процентное отношение	133

§ 21. Пропорциональные величины	139
§ 22. Задачи на пропорциональное деление	144
§ 23. Окружность и круг	149
§ 24. Диаграммы	156
<i>Самостоятельная работа 4</i>	164
<i>Готовимся к тематическому контролю</i>	165
Исторические сведения	167
Главное в разделе 3	169

Раздел 4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 25. Положительные и отрицательные числа	171
§ 26. Координатная прямая	176
§ 27. Целые и дробные числа	182
§ 28. Модуль числа	187
§ 29. Сравнение рациональных чисел	191
<i>Самостоятельная работа 5</i>	196
<i>Готовимся к тематическому контролю</i>	197
§ 30. Сложение рациональных чисел	199
§ 31. Вычитание рациональных чисел	204
§ 32. Умножение рациональных чисел	209
§ 33. Деление рациональных чисел	216
§ 34. Свойства сложения и умножения	222
<i>Самостоятельная работа 6</i>	229
<i>Готовимся к тематическому контролю</i>	230
§ 35. Преобразование простейших выражений	231
§ 36. Стандартный вид числа	236
§ 37. Решение уравнений	241
§ 38. Перпендикулярные и параллельные прямые	248
§ 39. Координатная плоскость	253
§ 40. Графики	260
<i>Самостоятельная работа 7</i>	267
<i>Готовимся к тематическому контролю</i>	269
Исторические сведения	271
Главное в разделе 4	273

Дополнительные материалы

Упражнения для повторения за год	274
Задачи повышенной сложности	282
Повторение курса математики за 5 класс	289
Краткий толковый словарь	291
Предметный указатель	293
Ответы	295