Г. П. БЕВЗ, В. Г. БЕВЗ

Алгебра

7

ББК 22.1я721
Б36

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины (решение коллегии Министерства образования и науки Украины от 12 апреля 2007 г., протокол № 5/1-19)

Издано за счёт государственных средств.
Продажа запрещена

Переведено с издания:
Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. Алгебра: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. — К.: Зодіак-ЕКО, 2007.
Переводчик М. А. Колмагорова

ТВОРЧЕСКАЯ ГРУППА СОЗДАТЕЛЕЙ УЧЕБНИКА

Юрий Кузнецов — руководитель проекта, автор концепций: структуры, дизайна;
Григорий Бевз, Валентина Бевз — авторы текста и методического аппарата;
Олег Костенко — заместитель руководителя проекта;
Наталия Демиденко — редактор-организатор, контрольное редактирование;
Андрей Виксенко — автор макета, художественного оформления, художник обложки;
Валентина Максимовская — организатор производственного процесса;
Галина Кузнецова — экономическое сопровождение проекта;
Роман Костенко — маркетинговые исследования учебника;
Андрей Кузнецов — мониторинг апробации учебника

Бевз Г. П., Бевз В. Г.
Б36 Алгебра: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. — К.: Зодіак-ЕКО, 2007. — 304 с.: іл.
ISBN 978-966-7090-46-3 (укр.).
ISBN 978-966-7090-50-0 (рус.). **ББК 22.1я721**

ISBN 978-966-7090-46-3 (укр.).
ISBN 978-966-7090-50-0 (рус.).

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 4

ФУНКЦИИ

Глава 5

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Дорогие семиклассники!

Алгебра — часть математики. В предыдущих классах на уроках математики вы приобретали в основном знания по арифметике, получали расширенные сведения о числах и действиях над ними. Теперь начинаете изучать алгебру.

Знание алгебры необходимо не только потому, что она предлагает нам лучшие методы решения сложных задач, но и потому, что в ней формируется математический язык, которым пользуются специалисты разных областей науки и техники. Алгебра — весьма содержательная и нужная дисциплина. Вы будете изучать её до окончания школы, а кое-кто — и в высших учебных заведениях.

Начать изучение курса школьной алгебры вам поможет этот учебник. Читая теоретический материал, основное внимание обращайте на слова, напечатанные *курсивом*. Это математические термины. Желательно понять, что эти слова означают, и запомнить их. Выделенные **жирным** шрифтом предложения — это правила или другие важные математические утверждения, их следует помнить и уметь применять.

Каждый параграф учебника содержит рубрику «Хотите знать ещё больше?», в которой предлагаются дополнительные сведения для учеников, особо интересующихся математикой. Отвечайте на вопросы рубрики «Проверьте себя», и вы сможете закрепить, обобщить и систематизировать приобретённые знания, умения и навыки, полученные при изучении темы. В рубрике «Выполним вместе!» приведены образцы решений основных видов упражнений. Предлагаем ознакомиться с этими примерами, прежде чем делать домашние задания (они обозначены ).

Учебник содержит упражнения разных уровней сложности — от устных до достаточно сложных. Номера последних обозначены звёздочкой (*) и предлагаются они тем ученикам, которые со временем будут учиться в классах с углублённым изучением математики. Хорошо подготовиться к тематическому оцениванию и достичь высоких учебных результатов вам помогут материалы соответствующей рубрики. «Исторические сведения» расширят кругозор каждого ученика.

Желаем успехов в учёбе!

ГЛАВА 1
ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Только с алгеброй начинается настоящее математическое учение.

Н. И. Лобачевский

Уравнение – одно из важнейших понятий не только математики, но и многих прикладных наук. Это наиболее удобная математическая модель, наилучшее средство для решения сложнейших задач. Образно говоря, уравнение — это ключ, которым можно отворять тысячи дверей в неизвестное.

Основные темы главы:

- **общие сведения об уравнениях;**
- **равносильные уравнения;**
- **линейные уравнения;**
- **решение задач с помощью уравнений.**

§1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ УРАВНЕНИИ

Алгебра в течение многих столетий развивалась как наука об уравнениях[1].

Уравнение – это равенство, содержащее неизвестные числа, обозначенные буквами.

Неизвестные числа в уравнении называют *переменными*. Переменные чаще всего обозначают буквами x, y, z (икс, игрек, зет), хотя их можно обозначить и другими буквами.

Примеры уравнений: $x + 5 = 0$; $2y - 3 = 7y$; $x^2 = 9$; $y^2(z - 1) = 0$. Каждое уравнение имеет левую и правую части. Например:

$$\underbrace{5x-27}_{\text{левая часть}}=\underbrace{3x+15}_{\text{правая часть}} \qquad \underbrace{5x,\quad -27,\quad 3x,\quad 15}_{\textit{члены уравнения}}$$

Рассмотрим уравнение $13x - 30 = 7x$. Если в нём вместо переменной x написать число 5, то будем иметь правильное числовое равенство $13 \cdot 5 - 30 = 7 \cdot 5$. Говорят, что «число 5 удовлетворяет данное уравнение».

[1] Исторические сведения об уравнении приведены на с. 16 и 39.

Число, удовлетворяющее уравнение, называется его корнем.

Уравнение $13x - 30 = 7x$ имеет только один корень: $x = 5$.

Уравнение $x(x-2)(x+3) = 0$ имеет три корня: $x = 0$, $x = 2$, $x = -3$.

Уравнение $x + 7 = x$ не имеет ни одного корня, так как при каждом значении переменной x число $x + 7$ на 7 больше, чем x.

Уравнение $2x + 3 = 1 + 2(x + 1)$ имеет бесконечное множество корней.

Решить уравнение — это означает, что надо найти все его корни или показать, что их не существует.

Простейшие уравнения можно решать, пользуясь известными зависимостями между слагаемыми и суммой, между множителями и произведением и т. п.

Пример. Решите уравнение $31 - 3x = 19$.

Решение. В данном случае неизвестно вычитаемое. Чтобы найти его, следует от уменьшаемого отнять разность: $3x = 31 - 19$, или $3x = 12$.

Здесь неизвестный множитель x. Чтобы найти его, надо произведение разделить на известный множитель:

$$x = 12 : 3, \; x = 4.$$

Ответ. $x = 4$.

Уравнение — это своеобразный кроссворд. Только в клеточки кроссворда вписывают буквы, чтобы получить нужные слова, а в уравнение вместо переменных подставляют числа, чтобы получались правильные равенства.

Например, уравнение $9x + 39 = 5 - 8x$ можно записать в форме числового кроссворда:

$$9 \cdot \square + 39 = 5 - 8 \cdot \square.$$

Какое число надо поставить в квадратики, чтобы получилось верное равенство?

Хотите знать ещё больше?

Уравнения бывают разных видов, в частности —ы содержащие неизвестную переменную в квадрате, в кубе, под знаком модуля и т. п. Решим, например, уравнения:

1) $x^2 - 9 = 0$; 2) $3x^3 = 24$; 3) $|x - 2| = 5$.

1) Ответим на вопрос: какое число надо возвести в квадрат, чтобы получить 9? Это числа 3 и -3. Это и есть корни данного уравнения.

2) Разделим обе части уравнения $3x^3 = 24$ на 3, получим $x^3 = 8$. Какое число, возведённое в куб, равно 8? Таковым является число 2. Значит, решение данного уравнения $x = 2$.

3) Если модуль числа $x - 2$ равен 5, то это число равно 5 или -5. Имеем: $x - 2 = 5$, отсюда $x = 7$, или $x - 2 = -5$, отсюда $x = -3$. Значит, уравнение $|x - 2| = 5$ имеет два корня: $x = 7$ и $x = -3$.

Проверьте себя

1. Что такое уравнение?
2. Что такое корень уравнения?
3. Что означает «решить уравнение»?
4. Из каких двух частей состоит уравнение?

✔ Выполним вместе!

1. Решите уравнение $3(1 - 3x) = 75$.

✔ Решение.

Первый способ

$$\begin{aligned} 3 - 9x &= 75, \\ -9x &= 72, \\ x &= 72 : (-9), \\ x &= -8. \end{aligned}$$

Второй способ

$$\begin{aligned} 1 - 3x &= 75 : 3, \\ 1 - 3x &= 25, \\ -3x &= 24, \\ x &= -8. \end{aligned}$$

2. Я задумал число. Если его умножить на 3, от результата отнять 4, то получим 5. Какое число я задумал?

✔ Решение. Обозначим искомое число буквой x. Если умножить его на 3, то получим $3x$. Отняв от результата 4, получим $3x - 4$. Имеем уравнение: $3x - 4 = 5$.

Решим это уравнение: $3x = 5 + 4$, $3x = 9$, $x = 3$.

Ответ. 3.

3. При каком значении a уравнение $(a + 5) \cdot x = 12$ будет иметь корень $x = 3$?

✔ Решение. Первый способ. Найдём неизвестный множитель x как частное от деления произведения 12 и известного множителя $a + 5$:

$$x = 12 : (a + 5).$$

По условию $x = 3$, поэтому $12 : (a + 5) = 3$, отсюда $a + 5 = 12 : 3$, $a = -1$.

Второй способ. Подставим в уравнение $(a + 5) \cdot x = 12$ вместо переменной x число 3:

$$(a + 5) \cdot 3 = 12.$$

Решим полученное уравнение относительно переменной a. Имеем:

$$a + 5 = 12 : 3, \text{ отсюда } a = -1.$$

Ответ. Если $a = -1$, то уравнение $(a + 5) \cdot x = 12$ имеет корень $x = 3$.

Выполните устно

1. Решите уравнение:

а) $x + 10 = 23$; б) $x - 10 = 15$; в) $x + 7 = 13$;
г) $2x + 10 = 30$; д) $3x - 5 = 40$; е) $4x - 8 = 0$;
ё) $10y = 70$; ж) $10y = -3$; з) $-y = 15$;
и) $x(x - 3) = 0$; й) $(x + 5)x = 0$; к) $-3{,}5x^2 = 0$.

2. Назовите левую и правую части уравнения и его члены:

а) $5x + 7 = 3x - 2$; б) $0{,}5x = 4{,}7x + 8$; в) $4y + 12 = 0$.

3. Объясните, почему не имеют корней уравнения:

а) $x + 15 = x$; б) $3x - 7 = 3x$; в) $17 - x = 5 - x$.

4. Объясните, почему имеют бесконечное множество корней уравнения:

а) $3x = 2x + x$; б) $6y = 7y - y$; в) $8z + 2 = 3z + 2 + 5z$.

5. Объясните, почему не имеют корней уравнения:

а) $x^2 + 1 = 0$; б) $x^2 + 8 = 7$; в) $2x^2 + 3 = -7$; г) $(x + 2)^2 = -4$.

6. Удовлетворяет ли число 12 уравнение:

а) $x - 5 = 7$; б) $x^2 = 144$; в) $3x + 4 = 40$; г) $0{,}5x + 5 = 11$?

7. Решите уравнение:

а) $x^2 = 16$; б) $x^3 = 8$; в) $x^2 = 0{,}01$; г) $2x^2 = 18$.

Уровень A

Решите уравнение (8—10).

8. а) $25 + x = 37$; б) $x - 12 = 23$; в) $24 - x = 18$;
г) $3{,}7 - x = 1{,}9$; д) $1 = \frac{2}{3} + x$; е) $13 = 74 - x$.

9. а) $6x = 30$; б) $5y = 0$; в) $4z = -8$;
г) $2x + 3 = 19$; д) $3y - 4 = 1$; е) $1 - 3x = 25$.

10. а) $\frac{2}{3}x = 5$; б) $-\frac{5}{7}y = 1$; в) $1 - \frac{3}{4}x = \frac{5}{8}$.

11. Выпишите все члены уравнения:
а) $3x - 5 = 12$; б) $18 - 5x = 4 + 2x$; в) $0{,}8x + 3 = 4{,}6$.

12. Напишите левую и правую части уравнения:
а) $2x + 35 = 24$; б) $47y - 15 = 83$; в) $34z - 15 = 28z + 3$.

13. Какое число надо вписать в квадратики, чтобы получилось верное равенство:
а) $3 \cdot \square + 11 = 32$; б) $2 \cdot \square - 9 = 15 - \square$?

14. Покажите, что уравнение:
а) $x - 2 = 3x$ имеет корень $x = -1$;
б) $8z - 5 = 5z$ имеет корень $z = \frac{5}{3}$.

15. Покажите, что уравнение:
а) $x(x - 3) = 0$ имеет корни $x = 0$ и $x = 3$;
б) $z(z - 2)(z + 3) = 0$ имеет корни $z = 0$, $z = 2$ и $z = -3$.

16. Какие из чисел $-2, -1, 0, 1, 2$ удовлетворяют уравнение:
а) $x(3x - 1) = 0$; б) $(2n + 2)n = 0$?

17. Решите уравнение и выполните проверку:
а) $x - (3 - 2x) = 9$; б) $8 - (3x - 2) = 13$; в) $3(x - 2) = 27$.

Решите уравнение **(18—23)**.

18. а) $2(x - 3) = 36$; б) $4(5 - x) = 12$; в) $0{,}1(x + 1) = 1$.

19. а) $3(x + 5) = 27$; б) $5(x - 3) = 15$; в) $8(3 - x) = 40$.

20. а) $4(x + 1) + 11 = 31$; б) $16 + 3(z - 2) = 1$;
в) $5(y - 3) - 12 = 73$; г) $47 + 2(x + 4) = 7$.

21. а) $5(2x - 3) = 50$; б) $37(8x - 23) = 37$;
в) $52(17 - 8x) = 52$; г) $84(37 - 17z) = 168$.

22. а) $3x + (7 - x) = 10$; б) $2x - (3 - x) = 18$;
в) $8z - (5 - 3z) = 17$; г) $12y + (5 - 2y) = -15$.

23. а) $2x - (x - 3) = 20$; б) $5 - (4y - y) = 10$;
в) $4z - (7 + 3z) = 2$; г) $17y + (8 - 15y) = 4$.

24. Составьте и решите задачу, пользуясь рисунком 1.

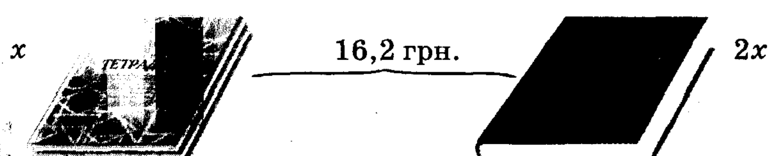


Рис. 1

Решите задачу с помощью уравнения (25—26).

25. Если задуманное число умножить на 3, потом прибавить 18, то получим 63. Найдите задуманное число.

26. Я задумал число. Если его умножить на 7, а от произведения отнять 16, то получим 33. Какое число я задумал?

Уровень Б

Решите уравнение (27—29).

27. а) $\frac{2}{3}(6-9x)=15$; б) $\frac{3}{4}(12-x)=\frac{3}{2}$; в) $\frac{2}{5}(8-5x)=\frac{1}{5}$.

28. а) $(3x-2):2=18$; б) $(5x-3):3=9$; в) $(41-x):9=4$.

29. а) $2(3x-2)+4=30$; б) $3(2-x)+25=28$;

в) $\frac{2}{3}(x-4)+\frac{1}{3}=5$; г) $\frac{3}{7}(1-2x)+\frac{1}{7}=-2$.

Пользуясь свойством пропорции, решите уравнение (30—32).

30. а) $6x:8=3:2$; б) $5:(2x)=3:18$; в) $1:(3x)=4:12$.

31. а) $(x-5):2=3:4$; б) $5:(c-3)=2:3$; в) $7:4=5x:3$.

32. а) $2:m=m:8$; б) $x:10=0{,}1:x$; в) $2n:9=2:n$.

Решите уравнение и выполните проверку (33—35).

33. а) $|x|+5=12$; б) $|x|-8=-3$; в) $2|x|+3=25$.

34. а) $|x+4|=0$; б) $|x-2|=12$; в) $|x-1|+7=3$.

35. а) $|2x-3|=5$; б) $|2x|-3=5$; в) $2|x-3|=5$.

36*. При каком значении a уравнение:

а) $3ax+96=0$ будет иметь корень $x=-8$;

б) $1-\frac{a}{4}x=-\frac{1}{2}$ будет иметь корень $x=2$;

в) $4(a-3)x=72$ будет иметь корень $x=6$?

37*. При каком значении m уравнения будут иметь общий корень:

а) $2(x+3)=36$ и $x:3+2m=19$;

б) $(8-x)\cdot 7=28$ и $5(2x-3m)=0$;

в) $(x:3+8)\cdot 2m=48$ и $(3x-2):2=17$?

38*. При каком значении k уравнение не будет иметь корней:

а) $x^2=k$; б) $|x|+k=0$; в) $k+2x=2(x-3)$?

Решите задачу с помощью уравнения (39—43).

39. Найдите ширину прямоугольника, если она втрое короче длины, а периметр прямоугольника равен 60 см.

40. Найдите длину прямоугольника, если она вдвое длиннее ширины, а периметр прямоугольника равен 50 см.

41. Сторона одного квадрата в 2 раза меньше стороны второго, а разность их периметров равна 50 см. Найдите длину стороны большего квадрата (рис. 2).

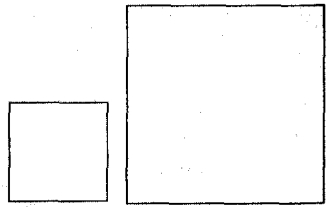


Рис. 2

42. Сколько лет дедушке, если он говорит, что если бы прожил ещё столько и полстолька, то ему было бы 200 лет?

43. Отцу 34 года, а дочери — 12. Через сколько лет дочь будет вдвое младше отца?

44. ***Старинная египетская задача.*** Пастуха, который вёл 70 быков, спросили: «Какую часть быков своего стада ты ведёшь?». Он ответил: «Я веду две трети от трети скота». Сколько быков было у пастуха? Решите задачу несколькими способами, в частности, воспользовавшись рисунком 3.

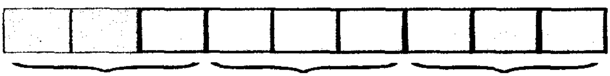


Рис. 3

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

45. Выполните действия:

а) $3{,}7 - 1{,}2 : 0{,}4$; б) $2{,}8 + 8{,}1 : 2{,}7$; в) $(7 - 8{,}5) : 0{,}5$;

г) $-4{,}9 : (2{,}3 - 1{,}6)$; д) $3 : 0{,}2 + 8 \cdot 2{,}5$; е) $12{,}1 : 0{,}11 + 1 : (-0{,}2)$;

ё) $0{,}2^3 + 0{,}3^2$; ж) $(-0{,}4)^2 - 1{,}2^2$; з) $(3 - 1{,}4) : 0{,}2^2$.

46. Найдите значение выражения:

а) $2a + 5$, если $a = 2$; б) $2{,}3 - 3m$, если $m = 8$;

в) $2a + 3c$, если $a = \frac{1}{3}$ и $c = 0{,}5$;

г) $2(a + 3c)$, если $a = \frac{1}{3}$ и $c = 0{,}5$.

47. Поделите число 300 на три части, пропорциональные числам 2, 3 и 5.

§2. РАВНОСИЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим два уравнения: $x - 3 = 2$ и $x + 7 = 12$. Каждое из них имеет один и тот же корень: $x = 5$.

Два уравнения называют равносильными, если каждое из них имеет те же корни, что и другое. Равносильными считают и такие уравнения, которые не имеют корней.

Например:

$$x + 5 = x \quad \text{и} \quad 2 - x = 3 - x.$$

Чтобы решать более сложные уравнения, нужно уметь заменять их более простыми и равносильными данным. Покажем, как это делается.

Из распределительного закона умножения следует, что при любом значении x числа $2x + 5x$ и $7x$ равны. Поэтому равносильными будут такие, например, уравнения: $2x + 5x = 28$ и $7x = 28$.

Из распределительного закона следует, что при каждом значении x числа $3(x - 5)$ и $3x - 15$ равны. Поэтому равносильны и уравнения:

$$3(x - 5) + 7 = 16 \quad \text{i} \quad 3x - 15 + 7 = 16.$$

Вообще, если в любой части уравнения свести подобные слагаемые или раскрыть скобки, то получим уравнение, равносильное данному.

Прибавив к обеим частям верного числового равенства одно и то же число, получим также верное равенство. Подобно этому тела с равными массами, положенные на чаши уравновешенных весов, не нарушают равновесия (рис. 4).

Рис. 4

Отсюда следует, что когда, например, к обеим частям уравнения $23y = 10y + 39$ (1) прибавить по $-10y$, то получим уравнение $23y - 10y = 39$, равносильное данному. А прибавить к левой и правой частям уравнения (1) по $-10y$ — это то же самое, что перенести $10y$ из правой части уравнения в левую с противоположным знаком. Вообще, если из одной части уравнения в другую перенести любой его член с противоположным знаком, то получим уравнение, равносильное данному.

Вспомним также, что обе части числового равенства можно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля. Поэтому если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное данному. Например, умножив обе части уравнения $-3x + 7 = 5$ на -1, получим уравнение $3x - 7 = -5$, имеющее такой же корень, как и данное. А если обе части уравнения $20x + 100 = 200$ разделим на 20, то будем иметь более простое уравнение $x + 5 = 10$, равносильное данному.

Всегда справедливы такие **основные свойства уравнений.**

1. **В любой части уравнения можно свести подобные слагаемые или раскрыть скобки, если они есть.**
2. **Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив его знак на противоположный.**
3. **Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.**

В результате таких преобразований всегда получаем уравнение, равносильное данному.

Сформулированные свойства часто используют для решения уравнений. Для примера решим уравнение:

$$\frac{2}{3}x + 5 = x - \frac{1}{6}.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на 6:

$$4x + 30 = 6x - 1.$$

Перенесём $4x$ в правую часть, а -1 — в левую с противоположными знаками:

$$30 + 1 = 6x - 4x.$$

Сведём подобные члены:

$$31 = 2x.$$

Разделим обе части уравнения на 2:

$$x = 15{,}5.$$

Ответ. $x = 15{,}5$.

Хотите знать ещё больше?

Мухаммед аль-Хорезми (787—ок. 850 гг.)

Откуда произошло название науки — *алгебра?* От названия книги об уравнениях узбекского математика IX в. Мухаммеда аль-Хорезми (Мухаммеда из Хорезма). В те далёкие времена отрицательные числа не считались настоящими. Поэтому когда в результате перенесения отрицательного члена уравнения из одной его части в другую этот член становился положительным, считалось, что он восстанавливался, переходил из ненастоящего в настоящий. Такое преобразование уравнений Мухаммед аль-Хорезми назвал *восстановлением* (аль-джебр). Свойство об уничтожении одинаковых членов уравнения в обеих частях он назвал *противопоставлением* (аль-мукабала). Книга об этих преобразованиях называлась «Китаб мухтасар аль-джебр ва-л-мукабала» («Книга о восстановлении и противопоставлении»). Со временем её перевели на латинский язык, взяв для названия только одно слово, которое стали писать *Algebr*. Отсюда и пошло название науки — алгебра. Преобразование «аль-джебр» стало важным шагом в развитии алгебры, так как упростило решение уравнений.

Алгебра, арифметика, геометрия, математический анализ — основные составляющие математики (рис. 5). Арифметику — науку о числах и вычислениях — вы уже изучали на уроках математики. В 7–9 классах будете изучать алгебру и геометрию. С математическим анализом ознакомитесь в старших классах.

Рис. 5

Проверьте себя

1. Какие уравнения называют равносильными?
2. Сформулируйте основные свойства уравнений.
3. Какое свойство уравнений раньше называли словом «аль-джебр»?
4. От чего произошло название науки «алгебра»?
5. Какие ещё, кроме алгебры, существуют части математики?

Выполним вместе!

1. Равносильны ли уравнения:

а) $3(2x-1)=25-x$ и $6x-3=25-x$;

б) $2(3x+5)=x+15$ и $x=3$?

✔ Решение.

а) *Если раскрыть скобки в первом уравнении, то получим* второе. Значит, уравнения равносильны.

б) Решим первое уравнение:

$6x+10=x+15$, $5x=5$, отсюда $x=1$. Итак, данные уравнения неравносильны.

Ответ. а) Равносильны; б) неравносильны.

2. Решите уравнение:

$$2(3x-2)+7-x=3(5+x).$$

✔ Решение.

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$6x-4+7-x=15+3x, \qquad 5x+3=15+3x.$$

Перенесём слагаемое 3 в правую часть, а $3x$ — в левую, изменив их знаки на противоположные:

$$5x-3x=15-3, \qquad 2x=12.$$

Разделим обе части уравнения на 2. Получим: $x=6$.

Ответ. $x=6$.

3. Найдите корни уравнения:

$$\frac{3x-2}{3}=2+\frac{2x+1}{3}.$$

✔ Решение.

Умножим обе части уравнения на 3. Получим:

$3x-2=6+2x+1$, или $3x-2x=7+2$, отсюда $x=9$.

Ответ. $x=9$.

Выполните устно

48. Равносильны ли уравнения:

а) $4x + 5x = 18$ и $9x = 18$; б) $7x - x = 24$ и $6x = 24$;
в) $2(x + 3) = 16$ и $2x + 6 = 16$; г) $0,4 \cdot (y - 2) = 1$ и $0,4y - 0,8 = 1$?

49. Какие из уравнений равносильны уравнению $3x = 15$:

а) $6x = 30$; б) $9x = 45$; в) $3x - 15 = 0$;
г) $3x - 1 = 14$; д) $3x + 5 = 20$; е) $3x + 15 = 18$?

50. Упростите уравнение, поделив обе его части на одно и то же число:

а) $30x + 40 = 50$; б) $12y - 24 = 48$; в) $15z - 25 = 10$.

51. Упростите уравнение, умножив обе его части на одно и то же число:

а) $\frac{1}{2}x = 3$; б) $0,1x = 2,5$; в) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; г) $\frac{x - 3}{5} = 2$.

Уровень А

52. Равносильны ли уравнения:

а) $5 + (x - 4) = 5$ и $x - 4 = 0$; б) $(x - 5)(x + 1) = 0$ и $x - 5 = 0$;
в) $(x - 3)(x + 3) = 0$ и $|x| = 3$; г) $(x - 5)(x + 1) = 0$ и $|2 - x| = 3$?

53. К каждому из уравнений запишите равносильное ему уравнение:

а) $7x + 8 = 10$; б) $12 - 3x = 0$; в) $5x - 2 = 2x - 5$;
г) $\frac{x + 3}{5} = 3 - x$; д) $\frac{1}{2}(3 - 6x) = \frac{3}{4}$; е) $\frac{1}{3} + 3x = x$.

54. Перенесите члены, содержащие переменные, из правой части в левую, а не содержащие переменных — наоборот:

а) $12x - 3 = x + 2$; б) $15z + 8 = 2z$; в) $\frac{1}{2}m - \frac{2}{3} = 3 - \frac{1}{2}m$.

55. Перенесите члены, содержащие переменные, из левой части в правую, а не содержащие переменных — наоборот:

а) $7x + 4 = 9x$; б) $38 - 2n = 2n$; в) $1 - 0,5z = 1,5z$.

Решите уравнение (56–59).

56. а) $12y + 3 = y - 7$; б) $5x + 2x + 5 = 4x$; в) $0,7 - 2c = 3c + 1,7$.

57. а) $2x - 1 = 3x$; б) $5y + 6 = 2y$; в) $0,8z - 1 = 0,3z$;
г) $2 + 37t = 40t$; д) $1 - 0,5c = 0,5c$; е) $3 + 4,7x = 4,7x$.

58. а) $3(x-5)=2x-7$; б) $4(l-0{,}9)=1{,}2+2l$;
в) $7x-4(x-3)=12$; г) $16-(2-5x)=29$.

59. а) $\frac{1}{3}x=12-x$; б) $\frac{2}{3}y=9-y$; в) $\frac{1}{6}z=\frac{1}{3}+z$;
г) $5y=-\frac{5}{8}+y$; д) $\frac{2}{3}x+8=8$; е) $-4c=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}c$.

60. Найдите такое число x, чтобы:
а) разность $2x-3$ была равна сумме $x+17$;
б) сумма $x+37$ была вдвое больше разности $x-15$.

Уровень Б

Решите уравнение (61–68).

61. а) $\frac{1}{5}(2x-3)=1$; б) $\frac{1}{9}(4+3x)=\frac{1}{3}$; в) $\frac{3}{7}(2-3x)=\frac{1}{7}$.

62. а) $\frac{2x}{3}+\frac{7}{9}=1$; б) $\frac{3c}{5}-\frac{c}{10}=7$; в) $\frac{n}{4}-\frac{3n}{8}=-2$.

63. а) $\frac{2}{9}+\frac{x-2}{3}=\frac{5}{9}$; б) $\frac{3}{8}-\frac{y+5}{2}=-2\frac{1}{4}$; в) $\frac{x-3}{3}-\frac{2x}{9}=2$.

64. а) $5(0{,}6m-2)=2(m-3{,}6)$; б) $3(1{,}2n+8)=4(5-0{,}1n)$;
в) $2(11-6x)-3(7-4x)=1$; г) $7(y+6)=4(3y-5)-3$;
д) $\frac{1}{3}(6+x)=\frac{2}{3}(2x-15)$; е) $\frac{1}{2}(7-2x)=\frac{3}{4}\left(8x+4\frac{2}{3}\right)$.

65. а) $\frac{3}{5}(x-2)=\frac{2}{5}(5x-24)$; б) $\frac{5}{6}(x+2)=\frac{1}{6}(7x+12)$;
в) $0{,}4(6x-1)=0{,}1(12x+5)$; г) $0{,}5(7x+8)=1{,}5(7x+8)$;
д) $5x-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(3x+4)$; е) $y-\frac{3}{4}(2y-5)=1\frac{1}{4}-2y$.

66. а) $2{,}5(y+6)=y+1{,}5(y-10)$;
б) $0{,}75(4-x)-0{,}5x=5(0{,}05x+3)$.

67. а) $\frac{3x+7}{4}-\frac{x-3}{2}=\frac{5x+2}{8}$; б) $\frac{5x-4}{3}=\frac{7-x}{2}+\frac{3x+1}{6}$.

68. а) $\frac{8-3y}{5}-\frac{1-2y}{2}=\frac{6y+17}{10}$; б) $\frac{2-4x}{5}=\frac{1-2x}{3}-\frac{x+3}{4}$.

69. Какое число надо вычесть из 135 и 83, чтобы первая разность была в 3 раза больше второй?

70. Какое число надо прибавить к 207 и 33, чтобы первая сумма была в 4 раза больше второй? Выполните проверку.

71. Сумма двух чисел равна 120. Если одно из чисел поделить на 5, а второе — на 3, то первое частное будет равно второму. Найдите эти числа.

72. Разность двух чисел равна 12. Известно, что 0,3 первого равны 0,7 второго. Найдите эти числа.

73. Сумма двух чисел равна 425. Известно, что 20 % первого из них равны 30 % второго. Найдите эти числа.

74. На первом складе угля в 2 раза больше, чем на втором. Если на первый склад привезти ещё 84 т угля, а на второй — 140, то на обоих складах его станет поровну. Сколько угля на каждом складе?

75. В первом баке бензина вдвое больше, чем во втором. Если перелить из первого бака во второй 17 л бензина, то в каждом из них бензина станет поровну. Сколько литров бензина в каждом баке?

76*. При каких значениях a равносильны уравнения:

а) $2(x-1)=4-x$ и $ax=x+a$;

б) $(1-a)x=x$ и $x^2=0$?

77*. Выражение $\dfrac{3(x+a)}{2}+0{,}5x+3$ равно 4 при $x=-1$. Чему равно выражение при $x=5$?

78*. Выражение $9x-\dfrac{m-4}{5}x+2$ равно 16 при $x=1\dfrac{2}{3}$. Чему равно выражение при $x=-\dfrac{1}{6}$?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

79. Заполните магический квадрат (рис. 6). В его пустые клетки впишите такие числа, чтобы их суммы в каждой строке, в каждом столбце и в каждой диагонали были равными.

80. Разложите на множители число:

а) 80; б) 1024; в) 1001.

81. Вычислите:

$$\left(4{,}3\cdot\frac{3}{43}+11\frac{3}{5}\cdot2{,}25\right):2{,}75.$$

		7
	6	
5		9

Рис. 6

82. Напишите в виде выражения:
а) полусумму чисел m и n; в) полуразность чисел $2x$ и $3z$.

83. На сколько процентов число 40 больше числа 32? На сколько процентов число 32 меньше числа 40?

§3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — данные числа, называется линейным уравнением с переменной x.

Числа a и b — ***коэффициенты уравнения*** $ax = b$, a — ***коэффициент при переменной*** x, b — ***свободный член*** уравнения.

Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ называют ***уравнением первой степени с одной переменной.*** Его корень $x = \frac{b}{a}$.

Каждое уравнение первой степени с одной переменной имеет один корень. Линейное уравнение может не иметь корней, иметь один или бесконечное множество корней.

Линейное уравнение $ax = b$:

- **имеет один корень, если $a \neq 0$;**
- **имеет множество корней, если $a = 0$ и $b = 0$;**
- **не имеет корней, если $a = 0$ и $b \neq 0$.**

Например, уравнение $0x = 5$ не имеет ни одного корня, так как не существует числа, которое при умножении на 0 в произведении давало бы 5.

Уравнение $0x = 0$ имеет бесконечное множество корней, так как его удовлетворяет любое значение переменной x.

Решая уравнение, его сначала стараются упростить, свести к линейному. Делают это преимущественно в такой последовательности.

1. Избавляются от знаменателей (если они есть).
2. Раскрывают скобки (если они есть).

3. Переносят члены, содержащие переменные, в левую часть уравнения, а не содержащие — в правую.

4. Приводят подобные слагаемые.

В результате такого преобразования получают уравнение, равносильное данному; его корни являются также корнями данного уравнения.

Пример 1. Решите уравнение:

$$\frac{2x+5}{4}+\frac{x}{12}=\frac{x}{3}-1\frac{1}{2}.$$

Р е ш е н и е. Умножим обе части уравнения на 12 — наименьшее общее кратное знаменателей 2, 3, 4 и 12:

$$3(2x+5)+x=4x-18;$$
$$6x+15+x=4x-18;$$
$$6x+x-4x=-18-15;$$
$$3x=-33;\ x=-11.$$

О т в е т. −11.

Если коэффициенты уравнения многозначные, его удобно решать, пользуясь калькулятором.

Пример 2. Решите уравнение

$$32{,}46x+19{,}5=95{,}24.$$

О т в е т. $32{,}46x=95{,}24-19{,}5;$

$$x=(95{,}24-19{,}5):32{,}46;$$

$$\boxed{95{,}24}\ \boxed{-}\ \boxed{19{,}5}\ \boxed{\div}\ \boxed{32{,}46}\ \boxed{=}\ ;$$

$$\boxed{x=2{,}333333\ldots}\ .$$

Найденное значение корня — приближённое. Точное значение пришлось бы записать в виде смешанной дроби, а именно $2\frac{1}{3}$. Решая прикладные задачи, ответ обычно округляют и записывают, например, так: $x\approx 2{,}33$.

Хотите знать ещё больше?

Уравнение первой степени — это отдельный вид линейных уравнений. Соотношение между этими двумя видами уравнений наглядно проиллюстрировано на рисунке 7.

Рис. 7

Ниже приведём примеры линейных уравнений, которые не являются уравнениями первой степени.

$$\left(0{,}25-\frac{1}{4}\right)x=0 \text{ или } \left(0{,}25-\frac{1}{4}\right)x=2{,}5.$$

Уравнения $2x + 3 = 27 - x$, $\frac{x-3}{5} = 0{,}8$, $|x - 4| = 0$ не линейные, но **сводящиеся к линейным**.

Почему уравнение вида $ax = b$ называют линейными, станет понятно, когда вы ознакомитесь с линейными функциями (с. 200).

Проверьте себя

1. Какие уравнения называют линейными?
2. Какие уравнения называют уравнениями первой степени?
3. Сколько корней может иметь линейное уравнение?
4. Сколько корней может иметь уравнение первой степени?
5. При каком условии уравнение $ax = b$ не имеет корней? А при каком условии имеет бесконечное множество корней?

Выполним вместе!

1. Решите уравнения:

а) $3(x - 5) + x = 4x - 18$; б) $5(2 + 3x) - 7(2x + 3) = x - 11$.

Решение. а) $3x - 15 + x = 4x - 18$,

$3x + x - 4x = 15 - 18$,

$0x = -3$ — уравнение корней не имеет.

б) $10 + 15x - 14x - 21 = x - 11$,

$15x - 14x - x = 21 - 10 - 11$,

$0x = 0$ — любое число удовлетворяет уравнение.

Ответ. а) Уравнение корней не имеет;

б) уравнение имеет бесконечное множество корней.

2. Найдите два числа, полусумма которых вдвое больше их полуразности, которая равна 35.

Решение. Если полуразность чисел равна 35, то разность будет вдвое больше, а именно — 70. Обозначим меньшее число буквой x, тогда большее будет равно $70 + x$. По условию задачи $(x + 70 + x) : 2 = 2 \cdot 35$, или $x + 35 = 70$, отсюда $x = 35$ — меньшее число, $70 + 35 = 105$ — большее число.

Ответ. 35 и 105.

Выполните устно

84. Какое из уравнений является линейным:

а) $-x = 5$; б) $\frac{1}{x} = 2$; в) $3 - 2x = 0$; г) $4x = 5 - x$?

85. Какое из уравнений является уравнением первой степени:

а) $0{,}5x = 7$; б) $-\frac{1}{3}x = 3$; в) $3x^2 = 0$; г) $0x = 0$?

86. Правильна ли схема, изображённая на рисунке 8?

Рис. 8

Уровень А

87. Приведите к линейному уравнению:

а) $2-3x=5-7x$; б) $0=7x-5$; в) $\frac{1}{3}x=6-\frac{1}{2}x$; г) $\frac{x-4}{2}=1$.

88. Приведите к линейному уравнению:

а) $2x+x-7x+3=8$; б) $y-5y=8-y$;
в) $3x+2(x+7)=2x$; г) $4(2+x)-x=3x+9$;
д) $-c+31(2-c)=32c$; е) $0{,}7=2(x+3{,}5)-2x$.

89. Сколько корней имеет уравнение:

а) $2x-3=x+7$; б) $3x+7=3x-9$; в) $2(3x-1)=3(2x+1)$?

Решите уравнение **(90–96)**.

90. а) $32x=-16$; б) $-15z=0{,}5$; в) $x+4x=5x$;
г) $-0{,}5y=-0{,}5$; д) $6x=8+6x$; е) $x-4x=5x$.

91. а) $0x=35$; б) $0y=13-13$; в) $2x=3+2x$.

92. а) $0{,}5z=6+\frac{1}{3}z$; б) $0{,}2x+5=\frac{1}{5}x$; в) $\frac{2}{3}x+7=0{,}6x$.

93. а) $4-3x=8(1-x)$; б) $2-5y=5(1-2y)$;
в) $x=3(x+1)-2x$; г) $2(5-8x)=-4(4x+3)$.

94. а) $8(9-2x)=5(2-3x)$; б) $5(z+3)=8(10-z)$;
в) $2(x-3)=3(2x-1)$; г) $4(5-x)=-5x+2$.

95. а) $y-1{,}08=0{,}2(5+y)$; б) $0{,}3(1-c)=c+0{,}04$;
в) $3-5x=0{,}3(2x+1)$; г) $1-3(x-5)=7(3-2x)$.

96. а) $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}=\frac{3}{4}x$; б) $\frac{2}{3}t-\frac{1}{5}=0{,}6t$; в) $-0{,}8z+1=\frac{4}{5}z$.

97. Решите уравнение, пользуясь калькулятором:

а) $235x=408$; б) $18{,}7y=9{,}7$; в) $-32{,}4z=58{,}8$.

98. Найдите корни уравнение:

а) $492x+317=923$ (ответ округлите до тысячных);
б) $2{,}38z-5{,}87=3{,}41$ (ответ округлите до стотысячных).

Уровень Б

Решите уравнение (99–103).

99. а) $3(x + 4) + 6(11 - x) = 9$; б) $8(1 - x) + 5(x - 2) = 2$;
в) $7(x - 5) - 3(2x - 6) = 10$; г) $5(3 - 2x) - (12 + 7x) = 0$.

100. а) $7(4 - t) + 3(t - 5) = 9t$; б) $3(x + 1{,}5) + 2(3 + x) = -5$;
в) $4z - 1{,}2(2 - 5z) = 1 - 5z$; г) $2{,}5x - 1{,}7(5 - 2x) = 3x$.

101. а) $8 + 3(x - 5) + x = 2(3 + 2x)$; б) $z + 2(4 + z) = 3z + 8$;
в) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(x - 2) = x$; г) $\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{3}n + 1\right) = 3n$.

102. а) $\frac{1}{2}(4x - 5) + \frac{3}{2}(2x + 1) = x + 3$;
б) $\frac{2}{3}(5 - 3x) + \frac{1}{3}(2 + 9x) = 2x - 1$;
в) $\frac{3}{5}(6 + 7x) - 2x = \frac{2}{5}(4 + 3x) + 3$;
г) $2 + \frac{1}{4}(8x + 1) = 5x + \frac{3}{4}(4x - 1)$.

103. а) $3(2x + 3) - 5(7 - 4x) - 2(5x + 4) = -2$;
б) $8(4 - 3x) + 7(x - 3) + 3(9 + 7x) = 10$;
в) $6(x + 2) + 3(3x + 7) = 4(5 + 4x) - 7$;
г) $5(12 - x) - 11(4x - 5) = 9(9 - 5x) - 26$.

104. Одно число больше другого на 6. Если первое умножить на 5, а второе — на 4, то первое произведение будет больше второго на 40. Найдите эти числа.

105. Одно число больше другого в 6 раз. Если от большего из них отнять 37, а к меньшему прибавить 73, то результаты будут равны. Найдите эти числа.

106. Найдите два числа:
а) сумма которых равна 155, а разность — 91;
б) разность которых равна 47, а полусумма — 46.

107. Какое число больше своей третьей части на $\frac{1}{3}$?

108. Найдите такое число x, чтобы:
а) сумма чисел x и 15 была в два раза больше их разности;
б) сумма чисел x и 1,5 была равна их произведению.

109. Найдите такое число m, чтобы:
а) полуразность чисел m и 14 составляла 0,2 их полусуммы;
б) полусумма чисел m и 14 составляла 120 % их разности.

110. ***Старинная индийская задача.*** Из четырёх жертвователей второй дал вдвое больше, чем первый, третий — втрое больше, чем второй, четвёртый — вчетверо больше, чем третий, а все вместе дали 132. Сколько дал первый?

111. ***Старинная русская задача.*** Летели гуси, а навстречу им гусь: «Здравствуйте, сто гусей!». Ему ответили: «Нас не сто. Вот когда бы — мы, и ещё столько, и полстолька, и четвёртая часть столька, вот тогда вместе с тобой нас было бы сто». Сколько летело гусей? Сделайте проверку.

112. ***Задача из болгарского фольклора.*** На вопрос, сколько весит его рыба, рыбак ответил: «Хвост весит 150 г, голова — столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище — сколько голова и хвост вместе» (рис. 9). Сколько весит рыба?

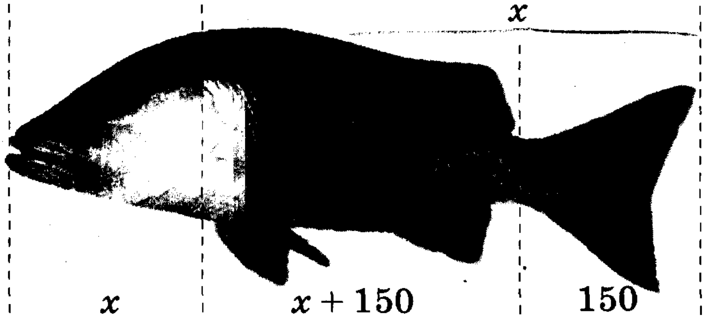


Рис. 9

113*. Докажите, что при любых значениях a уравнение имеет единственный корень:

а) $(a^2 + 3)x = 5$; б) $(a^2 + 1)x = a$;

в) $a^2x = -2x$; г) $4 - 5x = a^2x$.

114*. Для каждого из пунктов а—г определите, при каких значениях коэффициента k уравнение: 1) имеет единственный корень; 2) не имеет корней; 3) имеет бесконечное множество корней.

а) $kx = 8$; б) $(k + 3)x = 5$; в) $kx = k$; г) $(2 - k)x = (2 - k)$.

115*. Для каждого из пунктов а—в допишите после знака равенства вместо точек такое выражение, чтобы образовалось уравнение, которое: 1) имеет единственный корень; 2) не имеет корней; 3) имеет бесконечное множество корней.

а) $5x - 4 + 2x = \ldots$; б) $2(1{,}5x - 7) - 3x = \ldots$; в) $\dfrac{3x + 2}{5} = \ldots$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

116. Запишите выражение:
а) квадрат суммы чисел x и y; б) сумма квадратов чисел x и y;
в) разность кубов чисел a и b; г) куб разности чисел a и b;
д) сумма кубов чисел a и b; е) куб суммы чисел a и b.

117. Найдите значение выражения:
а) $5a^3$, если $a = 0{,}2$; б) $2x^2 - x^4 - 5$, если $x = -2$;
в) $a^3 + 3a^2$, если $a = 0{,}2$; г) $3a^4 - a^2$, если $a = -1{,}2$;
д) $1 - (x - y)^3$, если $x = 2{,}5$ и $y = 3$.

118. Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел.

119. Найдите:
а) 20 % от 350; б) 30 % от 56 000;
в) 12 % от 0,75; г) 125 % от 1,4;
д) 15 % от 124 грн.; е) 48 % от 3,5 м.

§4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ

Чтобы решить задачу с помощью уравнения, сначала надо составить соответствующее этой задаче уравнение. Образно говоря, надо перевести задачу с обычного языка на язык алгебры, то есть составить *математическую модель* данной задачи. Как это можно сделать, покажем на нескольких примерах.

Задача 1. На двух токах 1000 т зерна. Сколько зерна на каждом току, если на первом его на 200 т меньше, чем на втором?

✔ Решение. Пусть на первом току x т зерна. Тогда на втором — $(x + 200)$ т, а на обоих — $(x + x + 200)$ т. Имеем уравнение:

$$x + x + 200 = 1000,$$

отсюда $2x = 800$, $x = 400$, $x + 200 = 600$.

Ответ. 400 т и 600 т.

Уравнение $x + x + 200 = 1000$, составленное по условию задачи, — это математическая модель данной задачи.

Составить уравнения часто помогает рисунок или схема (рис. 10).

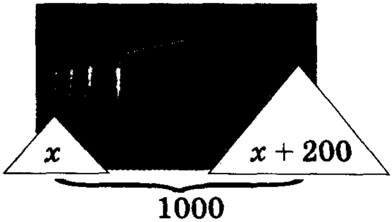


Рис. 10

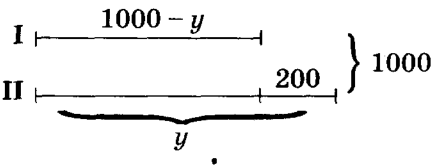


Рис. 11

Данную задачу можно решить и другими способами.

Если на втором току есть y т зерна, то на первом $(1000 - y)$ т (рис. 11). Так как на втором току зерна на 200 т больше, то

$$1000 - y + 200 = y, \text{ отсюда } y = 600,\ 1000 - y = 400.$$

О т в е т тот же.

Рисунок 10, рисунок 11, уравнение $1000 - y + 200 = y$ — это три разные математические модели прикладной **задачи 1**. В математике ***прикладными*** называют задачи, условия которых содержат нематематические понятия.

Модель всегда подобна оригиналу. В ней отображаются те или иные важные свойства исследуемого объекта. Такими являются уменьшённые модели автомобиля, самолёта, строения. Глобус — модель Земли, кукла — модель человека. Если модель создана на основе уравнений, формул или других математических понятий, её называют ***математической моделью***.

Для решения задач на движение также используют разные модели. Надо помнить, что при равномерном движении пройденное телом расстояние равно произведению скорости на время ($s = vt$). При этом все значения величин следует выражать в соответствующих единицах измерения. Например, если время дано в часах, а расстояние — в километрах, то скорость надо выражать в километрах в час. Если тело движется при наличии течения, то его скорость движения по течению (против течения) равна сумме (разности) его собственной скорости и скорости течения. С помощью схем многие задачи на движение можно решить устно (№ 124). Для решения некоторых сложных задач требуется построение нескольких моделей.

Рассмотрим задачу, составить уравнение к которой помогает таблица — ещё один вид математических моделей.

Задача 2. Катер должен был пройти расстояние между городами со скоростью 15 км/ч, а на самом деле шёл со скоростью 12 км/ч и потому опоздал на 3 ч. Найдите расстояние между городами.

Ответ. Построим таблицу и заполним её в соответствии с условием задачи.

Условие	Расстояние, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Должен был пройти	x	15	$\frac{x}{15}$
Прошёл	x	12	$\frac{x}{12}$

Катер шёл на 3 ч дольше, чем должен был идти. Этому условию соответствует уравнение:

$$\frac{x}{12} - \frac{x}{15} = 3.$$

Решим уравнение:

$$\frac{5x - 4x}{60} = 3,\ \frac{x}{60} = 3,\ x = 180.$$

Ответ. 180 км.

Решив задачу с помощью уравнения, нужно всегда анализировать полученное значение неизвестного. Может получиться, что найденный корень уравнения не соответствует условию задачи.

Задача 3. Периметр треугольника равен 17 см. Найдите его стороны, если одна из них короче другой на 2 см, а третьей — на 6 см.

Решение. Пусть длина самой короткой стороны треугольника равна x см. Тогда длины других сторон соответственно будут равны $(x + 2)$ см и $(x + 6)$ см. Получим уравнение:

$$x + x + 2 + x + 6 = 17, \text{ или } 3x + 8 = 17.$$

Решим его: $3x = 9$, $x = 3$.

Если длина первой стороны 3 см, то вторая и третья соответственно будут равны 5 и 9 см.

Существует ли треугольник с такими сторонами? Нет, так как каждая сторона треугольника короче суммы двух других, а $9 > 3 + 5$.

Ответ. Задача не имеет решения.

Решение прикладных задач методом математического моделирования состоит из **трёх этапов:**

1) создание математической модели данной задачи;
2) решение соответствующей математической задачи;
3) анализ ответа.

Хотите знать ещё больше?

Иногда с помощью уравнения решают не всю задачу, а только е часть.

Покажем, например, как можно заполнять пустые клеточки магиче ского квадрата — таблицы чисел с одинаковым количеством строк столбцов, с одинаковой суммой чисел во всех строках, столбцах и п диагоналям.

Задача. Перерисуйте в тетрадь рисунок 12 и в его пустые клеточк впишите такие числа, чтобы получился магический квадрат.

Решение. Обозначим буквой x число в правой верхней клеточке Тогда сумма всех чисел первой строки будет равна $5 + 6 + x$, или $11 + x$ Такими же должны быть суммы и в каждой диагонали, и в среднем столбце поэтому в нижней строке следует написать 4, $x - 2$, $x - 1$ (рис. 13). Та как сумма чисел должна быть равна $11 + x$, то составим уравнение:

$$4 + (x - 2) + (x - 1) = 11 + x, \text{ отсюда } 2x + 1 = 11 + x, \quad x = 10.$$

Подставим вместо x его значение 10, после чего пустые клеточк рисунка 14 заполнить нетрудно.

5	6	
	7	

Рис. 12

5	6	x
	7	
4	$x - 2$	x [illegible]

Рис. 13

5	6	10
	7	
4	8	9

Рис. 14

В данном случае уравнение $4 + (x - 2) + (x - 1) = 11 + x$ – модел части сформулированной задачи, дающая возможность вычислит только значение x.

Проверьте себя

1. Приведите пример задачи и её математической модели
2. Какие бывают математические модели?
3. Из каких этапов состоит решение задачи методом мате матического моделирования?

Выполним вместе!

1. Катер прошёл расстояние между пристанями по течению реки за 2 ч, а обратно — за 2,5 ч. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения равна 2 км/ч.

Решение. Пусть собственная скорость катера равна x км/ч. Тогда:

$(x + 2)$ км/ч — его скорость по течению;

$(x - 2)$ км/ч — скорость катера против течения;

$(x + 2) \cdot 2$ км — такое расстояние катер прошёл по течению;

$(x - 2) \cdot 2{,}5$ км — такое расстояние катер прошёл против течения.

Расстояния $(x - 2) \cdot 2{,}5$ и $(x + 2) \cdot 2$ равны. Итак, получим уравнение

$$2{,}5(x - 2) = 2(x + 2), \text{ откуда}$$

$$2{,}5x - 5 = 2x + 4,\ \ 0{,}5x = 9,\ \ x = 18.$$

Ответ. 18 км/ч.

2. Решите математический кроссворд (рис. 15).

Решение. В кружки следует вписать два числа так, чтобы их сумма была равна 200, а разность — 10. Если второе число обозначим буквой x, то первое будет равно $200 - x$. Их разность равна 10, следовательно, $200 - x - x = 10$, отсюда

$$2x = 190,\ x = 95,\ \ 200 - x = 105.$$

Ответ на рисунке 16.

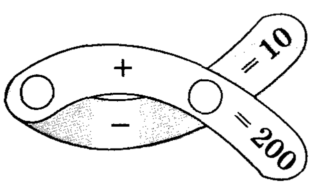


Рис. 15

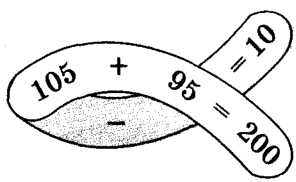


Рис. 16

Выполните устно

120. Найдите два числа, сумма которых равна 3, а разность — 1.

121. Найдите два числа, одно из которых в 4 раза больше другого, а их сумма равна 10.

122. Найдите числа x и y, если $x + y = 25$ и $x = y$.

123. Ученик задумал число. Если из него вычесть 7 и результат разделить на 3, то получим 5. Какое число задумал ученик?

124. Найдите расстояние между городами A и B, если:
а) «Славута» и «Таврия», выехавшие из них одновременно навстречу друг другу, встретились через 2 ч (рис. 17);
б) «Мерседес» и «Богдан», выехавшие из них одновременно в одном направлении, встретились через 3 ч (рис. 18).

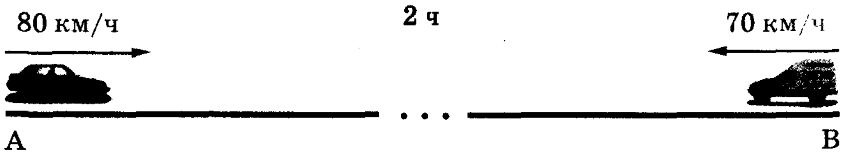


Рис. 17

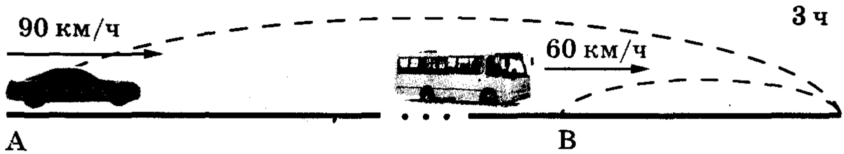


Рис. 18

Уровень A

125. Сумма двух чисел равна 13,6, а разность — 1,6. Найдите эти числа.

126. Решите математические кроссворды (рис. 19 и 20).

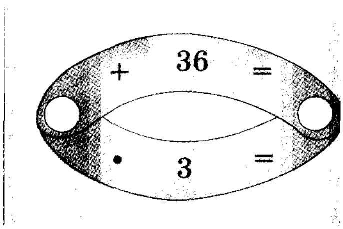


Рис. 19

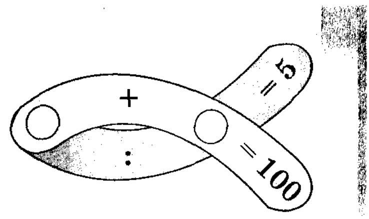


Рис. 20

127. Сумма двух чисел равна 105, их отношение — 1 : 2. Найдите эти числа.

128. Найдите число, половина которого больше его третьей части на 0,5. Выполните проверку.

129. Отец в 5 раз старше сына, а сын на 32 года младше отца. Сколько лет каждому из них?

130. Поле площадью 430 га поделено на две части так, что одна из них на 130 га больше другой. Найдите площадь каждой части.

131. Верёвку длиной 84 м разрезали на две части, одна из которых втрое длиннее другой. Найдите длину каждой части.

132. Верёвку длиной 25 м разрезали на две части, одна из которых на 50 % длиннее другой. Найдите длины этих частей верёвки. Выполните проверку.

133. Бригада должна была изготовить детали за 5 дней, а выполнила работу за 4 дня, так как изготовляла каждый день на 12 деталей больше. Сколько деталей изготовила бригада?

134. Периметр прямоугольника равен 118 см, одна его сторона на 12 см длиннее другой. Найдите длины сторон прямоугольника.

135. Три тракториста вспахали вместе 72 га. Первый вспахал на 6 га больше второго, а второй — на 9 га больше третьего. Сколько гектаров вспахал каждый тракторист?

136. В трёх классах 79 учеников. Во втором — на 3 ученика больше, чем в первом, а в третьем — на 2 ученика меньше, чем в первом. Сколько учеников в каждом классе?

137. В трёх корзинах 56 кг яблок. В первой корзине на 12 кг меньше, чем во второй, а в третьей — вдвое больше, чем в первой. Сколько килограммов яблок в каждой корзине?

138. Составьте и решите задачу, воспользовавшись рисунком 21.

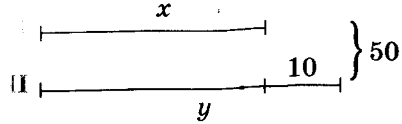


Рис. 21

139. Поле площадью 860 га поделено на 3 участка так, что сумма площадей двух первых участков равна площади третьего, а площадь второго участка в 1,5 раза больше площади первого. Найдите площади участков.

140. ***Старинная индийская задача.*** Из букета цветков лотоса принесли в жертву: Шиве — третью часть, Вишну — пятую, Солнцу — шестую. Одну четверть получил Бхавани, а остальные 6 лотосов отдали глубокоуважаемому учителю. Сколько было цветков в букете?

141. ***Старинная греческая задача.*** На вопрос, сколько учеников учится в школе, Пифагор ответил: «Половина всех учеников изучают математику, четверть — музыку, седьмая часть — молчат и, кроме того, есть ещё три женщины». Сколько тогда было учеников у Пифагора?

Пифагор (ок. 570 — ок. 500 гг. до н. э.)

142. Отцу — 40 лет, а сыну — 10. Через сколько лет отец будет втрое старше сына?

143. Сколько лет любимцу Какаду,
если в прошлом, помнится, году,
он был вдвое старше Бегемотика,
а теперь — всего лишь на два годика?

144. Катер в стоячей воде идёт со скоростью 20 км/ч. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите расстояние между двумя пристанями, если рейс туда и обратно катер совершает за 5 ч.

145. Катер в стоячей воде проходит 15 км за один час, скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите расстояние между двумя пристанями, если в одном направлении катер проходит его на полчаса быстрее, чем в противоположном.

146. Расстояние между двумя станциями поезд может проехать со скоростью 70 км/ч на полчаса быстрее, чем со скоростью 60 км/ч. Найдите это расстояние.

147. Пассажирский поезд за 3 ч проходит на 10 км больше, чем товарный за 4 ч. Скорость товарного поезда на 20 км/ч меньше скорости пассажирского. Найдите эти скорости.

148. Велосипедист ехал 2 ч по грунтовой дороге, 1 ч — по асфальтированной и проехал 28 км. Найдите его скорость на каждом участке пути, если по асфальтированной дороге он ехал со скоростью на 4 км/ч большей, чем по грунтовой.

149. От станции до турбазы туристы шли со скоростью 4 км/ч, а обратно — со скоростью 5 км/ч, поэтому на тот же путь затратили на 1 ч меньше. Найдите расстояние от станции до турбазы.

Уровень Б

150. К какому числу надо прибавить 4 и 19, чтобы полученные суммы относились, как 8 : 11?

151. Сумма двух чисел равна 100. Если большее из них разделить на меньшее, то частное будет равно 4 и в остатке — 5. Найдите эти числа.

152. Число рабочих одного цеха относится к числу рабочих другого цеха, как 8 : 5. Сколько рабочих в каждом цехе, если в первом их на 12 больше, чем во втором? Воспользуйтесь диаграммой (рис. 22).

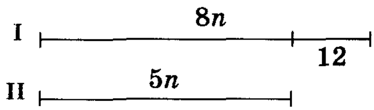


Рис. 22

153. Число рабочих I цеха относится к числу рабочих II цеха, как 3 : 2. Если из I цеха во II перейдут 8 рабочих, то предыдущее отношение изменится на такое: 5 : 6. Сколько рабочих будет в каждом цехе?

154. Матери — 38 лет, а дочери — 12. Когда дочь была или будет втрое младше матери? А вдвое?

155. Мать на 20 лет старше сына, а их года относятся, как 7 : 2. Сколько лет матери?

156. Сколько лет матери и дочери, если в позапрошлом году дочь была младше матери в 5 раз, а в следующем будет младше в 4 раза?

157. Сумма цифр данного двузначного числа равна 8. Если цифры поменять местами, то получится число на 18 больше данного. Найдите данное число.

158. Если к данному числу приписать справа цифру 9 и к образованному числу прибавить удвоенное данное число, то сумма будет равна 633. Найдите данное число.

159. Если к трёхзначному числу слева приписать цифру 8 и к образованному четырёхзначному числу прибавить 619, то сумма будет в 40 раз больше данного трёхзначного числа. Найдите это число. Выполните проверку.

160. Если к двузначному числу приписать справа и слева цифру 4, то образованное число будет в 54 раза больше данного двузначного. Найдите это двузначное число.

161. В двух ящиках — 112 кг яблок. Если из первого ящика перенести во второй 30 % яблок, то во втором станет в 3 раза

больше яблок, чем в первом. Сколько килограммов яблок было в каждом ящике сначала? Выполните проверку.

162. Владелец магазина поднял цену на музыкальные диски на 25 %, но из-за такой высокой цены спрос на товар упал. Это заставило владельца уменьшить новую цену на 25 %, после чего стоимость диска составила 24 грн. Какова была начальная цена музыкальных дисков?

163. Скорость катера в стоячей воде относится к скорости течения реки, как 25 : 2. По течению катер шёл 3 ч 50 мин. Сколько времени потребуется ему, чтобы возвратиться обратно?

164. Поезд проходит расстояние от A до B за 3 ч. Если бы он ехал со скоростью на 10 км/ч больше, то в дороге был бы на полчаса меньше. Найдите расстояние между A и B.

165. Теплоход вышел из порта K в порт P со скоростью 32 км/ч. На расстоянии 216 км от порта K он попал в шторм и должен был уменьшить скорость на 5 км/ч, поэтому прибыл в порт P с опозданием на 25 мин. Найдите расстояние между портами K и P.

166. Из двух городов, расстояние между которыми 450 км, одновременно выехали навстречу друг другу два автомобиля и встретились через 3 ч. Сколько километров проехал каждый из них до встречи, если один ехал со скоростью на 10 км/ч больше, чем другой? Выполните проверку.

167. Из городов A и B, расстояние между которыми 210 км, одновременно выехали навстречу друг другу два автомобиля и встретились через полтора часа. Найдите скорость каждого автомобиля, если до встречи первый автомобиль проехал на 30 км больше, чем второй.

168. Из двух сёл, расстояние между которыми 36 км, навстречу друг другу должны выехать два велосипедиста. Если они выедут одновременно, то встретятся через 1,5 ч. Если же второй выедет на полчаса позже первого, то они встретятся через 1,25 ч. Найдите скорость каждого велосипедиста.

169. В 5 ч 30 мин из города A в город B вылетел вертолёт со скоростью 250 км/ч, сделал в городе B посадку на 30 мин и со скоростью 200 км/ч возвратился в город A в 12 ч 45 мин. Найдите расстояние между A и B.

170. Из Киева в Одессу выехал автобус, а через 20 мин вслед за ним — легковой автомобиль, который через 1 ч догнал автобус. С какой скоростью ехал автобус, если скорость автомобиля была равна 80 км/ч?

171*. Торговая организация приобрела две партии товаров за 25 000 грн. и после их продажи получила 40 % прибыли. Сколько заплатила организация за каждую партию, если первая принесла 25 % прибыли, а вторая — 50 %?

172*. Сплав меди с серебром общей массой 15 кг содержит 45 % меди. Сколько чистого серебра нужно прибавить к нему, чтобы полученный сплав содержал 30 % меди?

173*. Из 1 т руды, содержащей некоторое количество железа, извлекли 400 кг примесей. Хотя в этих примесях было 12 % железа, в остатке руды содержание железа повысилось на 20 %. Какое количество железа осталось в руде?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

174. Вычислите значение выражения:

а) $|-2{,}7| + 2{,}4$; б) $-2{,}4 + |-2{,}3|$;

в) $|-10{,}5| : 7 - 3{,}2$; г) $4{,}8 - |3{,}2| : |-0{,}8|$;

д) $\left|-\frac{3}{2}\right| : \frac{1}{2} - 1{,}2^2$; е) $|2{,}5| : |-0{,}5|^2 - 200$.

175. Вы забыли первую цифру номера телефона своего знакомого. Какова вероятность того, что сразу, как только наберёте наугад первую цифру, вы позвоните именно ему?

Раскройте скобки и упростите выражение **(176—177)**.

176. а) $2(a - 3) + 6$; б) $-3(x - 5) + 6x$;

в) $x - 3(2 + x) + 7$; г) $-(a + 5) + 2a - 4$.

177. а) $(2c - 1) - (3c - 2)$; б) $-(1 - 2a) + 3(1 - a)$;

в) $x^2 - 2(8 + x) + 16$; г) $x^2 - 2x + 2(2 - x)$.

178. Найдите число, если:

а) 20 % его равны 344;

б) 125 % его равны 4 800;

в) 2,5 % его равны 640.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант I

1°. Решите уравнение:

а) $5x - 3 = 2x + 12$; б) $0,5y + 3(y - 2) = 2y$.

2•. Матери — 35 лет, а дочери — 12. Через сколько лет дочь будет младше матери вдвое?

3••. При каком значении a не существует корней уравнения $|x| = a$?

Вариант II

1°. Решите уравнение:

а) $2 - 3x = 7x - 8$; б) $2z = 0,5(z - 1) + z$.

2•. Отцу — 42 года, а сыну — 10. Когда отец был старше сына в 5 раз?

3••. При каком значении a не существует корней уравнения $|x| + a = 0$?

Вариант III

1°. Решите уравнение:

а) $2x - 4 = 3 - 5x$; б) $3 - 0,7(1 - 2n) = 6n$.

2•. Сестре — 7 лет, а брату — 17. Когда сестра была (или будет) втрое младше брата?

3••. При каком значении a не существует корней уравнения $(a + 1)x = 15$?

Вариант IV

1°. Решите уравнение:

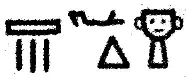
а) $x + 12 = 9 - 2x$; б) $c - 0,2(c - 3) = 5c$.

2•. Брату — 5 лет, а сестре — 14. Когда брат был (или будет) вдвое младше сестры?

3••. При каком значении a не существует корней уравнения $ax = -8$?

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

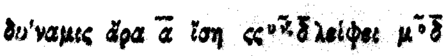
Уравнения первой степени с одной переменной люди научились решать очень давно. Египетские учёные почти четыре тысячи лет тому назад искомое неизвестное число называли «аха» (в переводе — «куча») и обозначали специальным знаком.



В папирусе, дошедшем до нас, есть такая задача: «Куча и её седьмая часть составляют 19. Найдите кучу». Теперь бы мы сформулировали её так: «Сумма неизвестного числа и его седьмой части равна 19. Найдите неизвестное число».

Задача сводится к уравнению $x + \frac{1}{7}x = 19$.

Подобные задачи умели решать учёные Древней Греции, древних Индии, Китая. Древнегреческий математик Диофант (III в.) решал и более сложные уравнения, в частности такие, которые в современных символах имеют вид $630x^2 + 73 = 6$. У Диофанта уравнение $x^2 = 4x - 4$ записывалось таким способом:



Аль-Хорезми и многие его преемники все уравнения записывали словами, не используя математических знаков.

От фамилии аль-Хорезми происходит ещё один важный для современной науки термин — *алгоритм*. Так называют совокупность правил, пользуясь которыми можно решить любую задачу из определённого класса задач. Например, известный вам способ умножения чисел «столбиком», способ определения наибольшего общего делителя двух или нескольких чисел — это алгоритмы. В современной науке понятие «алгоритм» играет огромную роль, существует даже специальная область математики — *теория алгоритмов*. Подробнее с алгоритмами вы ознакомитесь в старших классах.

Сначала алгеброй называли науку, изучающую различные способы решения уравнений. Со временем она значительно расширилась, обогатилась новыми идеями. Теперь уравнение — только одна из составляющих алгебры.

ОСНОВНОЕ В ГЛАВЕ

Уравнение — это равенство, которое содержит неизвестные числа, обозначенные буквами.

Числа, удовлетворяющие уравнение, — его *корни*. *Решить уравнение* — это значит найти все его корни или показать, что их не существует.

Два уравнения называют равносильными, если каждое из них имеет те же корни, что и другое. Уравнения, которые не имеют корней, также считают равносильными друг другу.

Основные свойства уравнений.

1. **В любой части уравнения можно привести подобные слагаемые или раскрыть скобки, если они есть.**
2. **Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив его знак на противоположный.**
3. **Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.**

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — произвольные числа, называют линейным уравнением с переменной x. Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ называют уравнением первой степени с одной переменной.

Каждое уравнение первой степени $ax = b$ имеет один корень $x = \frac{b}{a}$. Линейное уравнение может иметь один корень, бесконечно много корней или не иметь ни одного корня.

Решение прикладных задач методом математического моделирования состоит из трёх этапов:

1) создание математической модели данной задачи;
2) решение соответствующей математической задачи;
3) анализ ответа.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое уравнение?
2. Что такое корень уравнения?
3. Что означает «решить уравнение»?
4. Из каких двух частей состоит уравнение?
5. Какими буквами чаще всего обозначают переменные?
6. Какие уравнения называют равносильными?
7. Сформулируйте основные свойства уравнений.
8. Какое свойство уравнений раньше называли словом «аль-джебр»?
9. Какое свойство уравнений раньше называли словом «аль-мукабала»?
10. Откуда происходит название науки «алгебра»?
11. Какие ещё кроме алгебры есть части математики?
12. Сформулируйте определение линейного уравнения.
13. Сколько корней может иметь линейное уравнение?
14. Всегда ли линейное уравнение имеет корни?
15. Какие уравнения называют уравнением первой степени с одной переменной?
16. Всегда ли уравнение первой степени с одной переменной имеет корни?
17. Сколько корней может иметь уравнение первой степени?
18. Приведите пример линейного уравнения, которое не является уравнением первой степени.
19. При каком условии уравнение $ax = b$ имеет единственный корень?
20. При каком условии уравнение $ax = b$ не имеет корней?
21. При каком условии уравнение $ax = b$ имеет бесконечное множество корней?
22. Зачем надо уметь решать уравнения?
23. Приведите пример задачи и её математической модели.
24. Какими бывают математические модели?
25. Из каких этапов состоит решение задачи методом математического моделирования?

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ ОЦЕНИВАНИЮ

Тестовые задания № 1

1. Какое из уравнений является уравнением первой степени с одной переменной:

а) $0x = 13$; б) $x + y = 0$; в) $-2x = 0$; г) $x = y$?

2. Какое из уравнений не удовлетворяет число 5:

а) $2x = 10$; б) $x - 5 = 0$; в) $100 : x = 5$; г) $0x = 0$?

3. Какое уравнение не имеет корней:

а) $2x + x = 10$; б) $x : 5 = 0$; в) $5 = x$; г) $0 : x = 10$?

4. Какое из чисел является корнем уравнения $3x + 5 = 1$:

а) $\frac{3}{5}$; б) $-\frac{4}{3}$; в) $-\frac{5}{3}$; г) $-1\frac{1}{5}$?

5. Какое уравнение имеет только один корень:

а) $x = x + 5$; б) $|x| = 4$; в) $x^2 = 0$; г) $x(x - 1) = 0$?

6. Решите уравнение $5x + 13 = 3x + 2$ и укажите его корень:

а) $-5{,}5$; б) $5{,}5$; в) $4{,}5$; г) $-4{,}5$.

7. Уравнение $2(2 - x) = x - 2$ имеет корней:

а) множество; б) ни одного; в) один; г) два.

8. Какое из уравнений равносильно уравнению $5x = -10$:

а) $5x - 10 = 0$; б) $10x = -5$;

в) $-10 : 5 = x$; г) $5(x + 10) = 0$?

9. При каком значении a уравнение $|x| = a$ имеет единственный корень:

а) 1; б) −1; в) 0; г) 2?

10. При каком значении a уравнение $(a - 1)x = 1 - a$ имеет бесконечное множество корней:

а) 1; б) −1; в) 0; г) 2?

Типовые задания к контрольной работе № 1

1°. Решите уравнения и определите, есть ли среди них равносильные:

а) $15 - x = 10$; б) $-0{,}4x = 2$; в) $2(x + 3) - 5 = 11$.

2°. Какие из чисел -1, 0, 1 удовлетворяют уравнение:

а) $5x = 0$; б) $x(x + 1)(2x - 1) = 0$; в) $x^2 + 1 = 2x$?

3°. Составьте уравнение, которое имеет:

а) один корень б) два корня; в) множество корней.

4°. Два ученики собрали вместе 29 кг ягод. Сколько ягод собрал каждый ученик, если у первого ученика на 5 кг больше, чем у второго?

5•. Решите уравнение:

$$10y + 42 = 7y - 3(y - 2).$$

6•. Найдите корни уравнения:

$$\frac{2x}{7} - \frac{x}{14} = 3.$$

7•. Упростите уравнение и найдите его корни:

$$\frac{x + 3}{2} - \frac{5 + x}{5} = x + 4.$$

8•. Лодка шла по течению реки 2,4 ч, а против течения — 3,2 ч. Путь, который лодка прошла по течению, оказался на 13,2 км длиннее пути против течения. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3,5 км/ч.

9••. Найдите корни уравнения $|1 - 3x| + 2 = 5$.

10••. Найдите все значения a, при которых корень уравнения $ax = 5 + 2x$ является целым числом.

ГЛАВА

2 ЦЕЛЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Алгебру можна рассматривать как язык особого свойства.

М. В. Остроградский

Выражения в математике играют приблизительно такую же роль, как слова в языке или как отдельные кирпичи в сооружении. Математический язык — это язык выражений. Чтобы овладеть им, надо научиться оперировать математическими выражениями, понимать их содержание, уметь записывать в удобном виде. Существуют разные виды математических выражений.

В этой главе вы узнаете о:

- **выражениях с переменными;**
- **выражениях со степенями;**
- **одночленах;**
- **многочленах;**
- **действиях над многочленами.**

§5. ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассмотрим, например, уравнение:

$$\frac{2}{3}(x-5)+3x=17-2x.$$

Левая и правая его части — ***выражения***:

$$\frac{2}{3}(x-5)+3x \text{ и } 17-2x.$$

Каждое из этих выражений содержит одну переменную x. Но бывают выражения с двумя, тремя и бóльшим количеством переменных. Например, выражение $2ax+cx^2$ содержит три переменных: a, c и x.

В математике выражения с переменными играют очень важную роль. Математический язык — это язык выражений. Неслучайно значительная часть школьного курса алгебры посвящена изучению выражений.

Бывают выражения и без переменных, например:

$$97\cdot17, \quad -\frac{3}{5}:45; \quad \frac{0{,}2\cdot3-15:7}{2(3{,}5-1{,}8)}.$$

Такие выражения называют ***числовыми***.

Итак, выражения бывают числовые и с переменными (рис. 23). Далее мы будем рассматривать преимущественно выражения с переменными.

Рис. 23

Каждое числовое выражение (не содержащее деления на 0) имеет одно значение. А выражение с переменными при разных значениях этих переменных может принимать разные значения.

Для примера найдём значения выражения $3a + 5$, если a равно 1, 2, 3 и -4.

Если $a = 1$, то $3a + 5 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$;
если $a = 2$, то $3a + 5 = 3 \cdot 2 + 5 = 11$;
если $a = 3$, то $3a + 5 = 3 \cdot 3 + 5 = 14$;
если $a = -4$, то $3a + 5 = 3 \cdot (-4) + 5 = -7$.

Результаты вычислений запишем в таблицу.

a	1	2	3	-4
$3a + 5$	8	11	14	-7

Если выражение содержит несколько переменных, например $2a - 3x$, то для нахождения его числовых значений следует давать значение каждой переменной. Например, если $a = 7$ и $x = 5$, то $2a - 3x = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = -1$.

Если выражение не содержит никаких других действий, кроме сложения, вычитания, умножения, возведения в степень и деления, его называют ***рациональным выражением***. Примеры рациональных выражений:

$$2x + n, \quad -\frac{2}{3}(x - 5), \quad \frac{a - c}{2a + c}, \quad a + \frac{1}{x + c}.$$

Рациональное выражение, не содержащее деления на выражение с переменной, называют ***целым***. Два первых из указанных выше выражений — целые, другие — дробные. В этой главе мы будем рассматривать только целые выражения.

Выражения $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ — соответственно сумма, разность, произведение и частное переменных a и b. Читают их и так: «сумма чисел a и b», «разность чисел a и b» и т. д.

Математическими выражениями считаются также отдельные числа или переменные, например 2, 0, x, $-a$. А записи, содержащие знаки равенства или неравенства, например $2 + 3 = 5$, $x < 5$ — не выражения.

Хотите знать ещё больше?

Раньше вы различали *числовые выражения* и *буквенные выражения*, однако в современной математике буквами обозначают не только неизвестные числа. Например, буква π обозначает отношение длины окружности к её диаметру, его приближённое значение равно 3,14. Поэтому выражение $\pi + 2{,}5$, хотя и содержит букву π, является числовым выражением. Со временем вы ознакомитесь с выражениями $f(x)$, P_4, C_5^2, $\sin\pi$ и многими другими, содержащими буквы, вместо которых не нужно подставлять числа. Поэтому дальше те буквы, вместо которых можно подставлять разные числа, мы будем называть ***переменными***, понимая, что их значения могут изменяться. А выражения, содержащие такие переменные, будем называть ***выражениями с переменными***.

Словом *выражение* часто называют и высказывание (например, крылатое выражение), и проявление расположения духа (выражение лица) и т. п. В математике этим словом коротко называют математическое выражение. *Математическое выражение* — это написанные в определённом порядке математические символы, включающие числа, буквы, знаки действий, скобки, знаки процентов, модуля и т. п. Например, старшеклассники кроме всех прочих рассматривают и такие выражения:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \sum_{n=1}^{9} n^2, \quad \int_0^a x^2 dx.$$

Что они означают, вы со временем узнаете.

Проверьте себя

1. Приведите пример числового выражения.
2. Приведите примеры выражений с переменной, с двумя переменными.
3. Какие выражения называют рациональными?
4. Какие выражения называют целыми?
5. Приведите пример выражения с модулями.

Выполним вместе!

1. Запишите в виде выражения число, которое имеет:

а) a сотен, b десятков и c единиц; б) m тысяч и n десятков.

Решение. а) $100a + 10b + c$; б) $1000m + 10n$.

2. Известно, что $a + b = 35$. Найдите значение выражения $7a + 7 + 7b$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся переместительным, сочетательным и распределительным законами:

$7a + 7 + 7b = 7a + 7b + 7 =$
$= (7a + 7b) + 7 = 7(a + b) + 7 =$
$= 7 \cdot 35 + 7 = 252.$

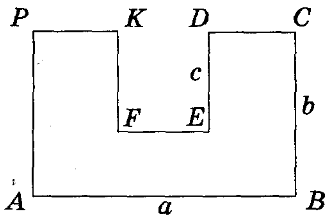


Рис. 24

3. Найдите периметр многоугольника, изображённого на рисунке 24, если $AB = a$, $BC = b$, $DE = c$.

Р е ш е н и е. Поскольку $CD + EF + KP = AB$, то

$AB + BC + CD + DE + EF + FK + KP + PA = 2AB + 2BC + 2FK =$
$= 2a + 2b + 2c.$

Выполним вместе!

179. Прочитайте выражение:

а) $m + n$; б) $m - x$; в) $1 + c$; г) $2ax$; д) $\frac{1}{2}(x + y)$; д) $\frac{2}{3}(x - 2)$.

180. Какая из записей является выражением:

а) $2ax - x^2$; б) $a + b = b + a$; в) $3x + 5 = 7$; г) $2(3 - 0,7) - 3,5$?

181. Какое из выражений — числовое, а какое — с переменными:

а) $37x - 2,4$; б) $2,5$; в) $48 - 3,7(2 - 3,5)$; г) $24\ \%$?

182. Длины сторон прямоугольника — a и b. Что означают выражения: ab; $2(a + b)$; $a + b$?

А

183. Запишите в виде числового выражения:

а) сумму чисел 5 и 7; б) разность чисел 8 и −3;
в) произведение чисел 15 и −4; г) отношение чисел 12 и 4.

Найдите числовое значение выражения **(184–186)**.

184. а) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + 2,5$; б) $2,7 - \frac{3}{10} \cdot 7$; в) $2\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}$.

185. а) $30,5 : 0,5 - 1976 : 32,5$; б) $3,85 \cdot 5\frac{1}{7} + 69,25 : 27,7$.

186. а) $\left(1,75 : \frac{2}{3} - 1\frac{5}{8}\right) \cdot 16$; б) $\left(5 - 11\frac{7}{8} : 2,5\right) : 0,0625$.

187. Запишите сумму, разность, произведение и частное выражений:

а) 2 и c; б) $2x$ и $c - x$.

188. Запишите:
а) сумму чисел a и x; б) произведение чисел k и n;
в) полупроизведение чисел c и d; г) полусумму чисел x и y;
д) полуразность чисел a и x; е) удвоенное произведение a и x.

189. Найдите значение выражения:
а) $0{,}5x - 3$, если $x = 10$; б) $x + 9{,}7$, если $x = -10$;
в) $x(x + 2)$, если $x = 0{,}5$; г) $3x(5 - x)$, если $x = -2{,}5$.

190. Найдите значение выражения:
а) $a + c - 3$, если $a = 2$ и $c = 7{,}5$;
б) $2x - 3z + 1$, если $x = 1$ и $z = \frac{1}{3}$;
в) $2xy(x - y)$, если $x = 2$ и $y = 5$;
г) $3a(x + y - 4)$, если $a = \frac{1}{3}$, $x = 7$ и $y = 5$.

191. Заполните таблицу.

n	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$5 - 2n$								

192. Заполните таблицу.

a	3	4	5	6	7	8	9
n	0	1	−1	2	−2	3	−3
$2a + 5n$							

193. При каких значениях x значения выражений равны:
а) $2x + 5x$ и $2(x + 5)$;
б) $1 + 3(x - 5)$ и $(1 + 3x) - 5x$?

194. Напишите в виде выражения число, имеющее:
а) a десятков и 6 единиц; б) 5 десятков и b единиц;
в) m десятков и n единиц; г) a сотен и c единиц.

Уровень Б

195. Найдите сумму и разность значений выражений:
а) $65 \cdot 27$ и $35 \cdot 27$; б) $3{,}6 \cdot 10^3$ и $2{,}4 \cdot 10^3$.

196. Запишите в виде числового выражения:
а) удвоенное произведение чисел 74 и 0,5;
б) полуразность чисел 38 и 7,6;
в) произведение суммы чисел 35 и 12 на их разность.

Найдите значение выражения (**197—200**).

197. а) $2,37 + 4,23 - 13,7 \cdot 0,1$; б) $8,21 \cdot 3,14 - 8,11 \cdot 3,14$;
в) $(2,75 - 0,65 : 2,6) \cdot 4 - 1$; г) $5 - (0,8 + 15,15 : 7,5)$.

198. а) $3,18 - (0,13 + 4,27 : 1,4)$; б) $5,9 - (6,3 : 3,5 - 5,6)$;
в) $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + 12\frac{2}{15}\right) : \frac{1}{15}$; г) $\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10} + \frac{1}{20}\right) \cdot 1\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

199. а) $\left(1 - \frac{2}{3}\right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{5} - 1\right) \cdot 5$; б) $\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{4} - 5 : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right)$.

200. а) $(7,344 : 0,36 + 16\frac{1}{4} : 5 - 0,5 \cdot 0,2) \cdot 0,08$;
б) $(0,02 \cdot 0,5 + 7,904 : 0,38 - 21 : 10\frac{1}{2}) \cdot \frac{2}{9}$.

201. Заполните таблицу.

a	-2	0	3	5	5	6	10	-10
b	1	3	0	7	-2	2	7	-7
$2a(a-b)$								

202. Заполните таблицу.

x								
$3x+8$	23	38	41	68	8	2	1	0

203. При каких значениях x равны значения выражений:
а) $3(x + 1) - 7$ и $2x - 9$;
б) $8 - 2(3 - x)$ и $5 - 3(3 - 2x)$;
в) $0,5x + 2(7 - x)$ и $1,5x - 5(x + 2)$;
г) $\frac{2}{3}x - \frac{7}{9} + 5$ и $x - \frac{1}{6}(2 - 6x)$?

204. Напишите в виде выражения число, имеющее:
а) a единиц, b десятков и c сотен;
б) a единиц, c сотен и d тысяч;

в) a единиц, n десятых и m сотых;
г) c десятков, a единиц, n десятых и m сотых.

205*. Составьте формулу числа:
а) кратного 5; б) кратного 5 и чётного;
в) кратного 5 и нечётного; г) кратного 5 и 3 одновременно.

206*. Определите периметры многоугольников, изображённых на рисунках 25–27.

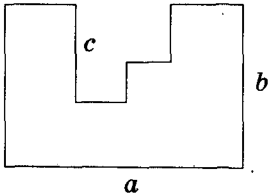


Рис. 25

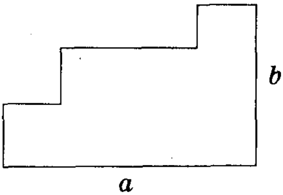


Рис. 26

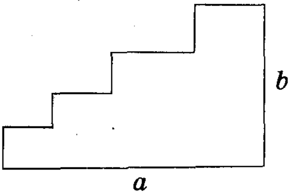


Рис. 27

207. Известно, что $x - y = 12$. Найдите значение выражения:

а) $\frac{1}{3}(x-y)$; б) $4y-4x$; в) $\frac{y-6-x}{9}$; г) $\frac{4(x+y)-8y}{15}$.

208. Известно, что $a=-5$, $b-c=4$. Найдите значение выражения:

а) $3a+2b-2c$; б) $\frac{ac-ab}{10}$; в) $\frac{3a(b-c+1)}{75}$; г) $\frac{6c-6b}{5}-\frac{a+6}{4}$.

209. Трёхзначное число имеет a сотен, b десятков и c единиц. Запишите в виде выражения сумму данного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

210. Решите уравнение:

а) $(2x+3)+(4x-8)=37$; б) $5-3z-(3-4z)=42$;
в) $0{,}7+x-(-0{,}7+4x)=-37$; г) $-7{,}2-(3{,}6-4{,}5x)=2{,}7x$.

211. В трёх сёлах — 1200 жителей. Сколько их в каждом селе, если во втором вдвое больше, чем в первом, а в третьем — на 40 меньше, чем во втором?

212. Длины сторон треугольника выражаются тремя последовательными натуральными числами. Найдите их, если периметр треугольника равен 30 см.

213. Найдите сумму всех делителей числа:
а) 8; б) 18; в) 28; г) 38.

§6. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Два выражения, соответствующие значения которых равны при любых значениях переменных, называют тождественно равными, или тождественными.

Например, тождественно равными являются выражения $5a + 8a$ и $13a$, так как при каждом значении переменной a эти выражения имеют равные значения (следует из распределительного закона умножения).

Два тождественно равных выражения, соединённые знаком равенства, образуют *тождество*.

Примеры.

$$5a + 8a = 13a,\ 2(x - 3) = 2x - 6.$$

Тождеством является каждое равенство, выражающее законы действий:

$$\boldsymbol{a + b = b + a,\quad a + (b + c) = (a + b) + c,}$$
$$\boldsymbol{ab = ba,\quad a(bc) = (ab)c,\quad a(b + c) = ab + ac.}$$

Тождествами также принято считать верные числовые равенства, например $3^2 + 4^2 = 5^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$.

Замена данного выражения другим, тождественным ему, называется тождественным преобразованием выражения.

Каждое равенство — это утверждение, которое может быть верным или неверным. Говоря «тождество», понимают, что оно верное. Чтобы убедиться в этом, его доказывают, как в геометрии — теоремы. Чтобы доказать истинность числового тождества, например $3^2 + 4^2 = 5^2$, достаточно вычислить его левую и правую части и показать, что они равны:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \text{ и } 5^2 = 25, \text{ значит, } 3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Тождества, содержащие переменные, чаще всего доказывают, ссылаясь на законы действий и на уже известные правила приведения подобных слагаемых, раскрытие скобок и т. п. Чтобы доказать тождество, как правило, одну из его частей (левую или правую) преобразовывают так, чтобы получить другую её часть.

Пример 1. Докажите тождество:

$$9x - 18 + 3(1 - 2x) = 3x - 15.$$

Доказательство. Упростим левую часть тождества.

$$9x - 18 + 3(1 - 2x) = 9x - 18 + 3 - 6x = 9x - 6x - 18 + 3 = 3x - 15.$$

Левая часть доказываемого равенства тождественно равна правой. Итак, тождество доказано.

Иногда для доказательства тождества целесообразно преобразовать каждую из его частей.

Пример 2. Докажите тождество:

$$a - 3(3 + a) = 4(1 - a) - (13 - 2a).$$

Доказательство. Упростим каждую из частей тождества.

$$a - 3(3 + a) = a - 9 - 3a = -2a - 9,$$

$$4(1 - a) - (13 - 2a) = 4 - 4a - 13 + 2a = -2a - 9.$$

Правая и левая части тождества равны одному и тому же выражению $-2a - 9$. Тождество доказано.

Существуют и другие способы доказательства тождеств. С ними вы ознакомитесь позднее.

Хотите знать ещё больше?

Говоря, что какое-либо выражение тождественно, обязательно следует отметить, какому именно выражению оно тождественно. Речь идёт об отношении тождественности двух выражений (как об отношении перпендикулярности прямых, отношении равенства углов и т. п.).

Отношение тождественности выражений имеет такие свойства:

1) *каждое выражение тождественно самому себе;*

2) *если выражение A тождественно выражению B, то и выражение B тождественно выражению A;*

3) *если выражение A тождественно выражению B, а выражение B тождественно выражению C, то и выражение A тождественно выражению C.*

Подобные свойства имеют также отношения равенства чисел или фигур, параллельности прямых и т. п.

Если в тождестве вместо переменной везде написать одно и то же выражение, получим новое тождество. Например, если в тождестве $4(a - 2) + 8 = 4a$ переменную a заменить выражением $z + 3$, то получим равенство $4(z + 1) + 8 = 4(z + 3)$, которое также является тождеством.

Проверьте себя

1. Какие два выражения называются тождественно равными?
2. Что такое тождество?
3. Что такое «тождественное преобразование выражения»?
4. Каждое ли равенство является тождеством?

Выполним вместе!

1. Докажите тождество $2a + 6 = 6 - 4(a - 5) + 2(3a - 10)$.

✔ Доказательство. $6 - 4(a - 5) + 2(3a - 10) = 6 - 4a + 20 + 6a - 20 = 2a + 6$. Правая часть равенства тождественно равна левой, поэтому это равенство — тождество.

2. Всегда ли верно равенство $|a^2| = a^2$?

✔✔ Решение. Каким бы не было значение a, значение выражения a^2 положительно или равно нулю. Модуль неотрицательного числа равен этому же числу. Итак, равенство $|a^2| = a^2$ верно для каждого значения a.

Выполните устно

214. Тождественны ли выражения:
а) $2a + a$ и $3a$; б) $x + 2x - 3x$ и 0; в) $8c - 3c$ и $5c$;
г) $4a + \pi$ и $5a\pi$; д) $7xy - 2x$ и $5y$; е) $-3c + 9$ и $9 - 3c$?

215. Какие из выражений: $2x - y$, $y - 2x + 3$, $4(y - 2x)$, $-y + 2x$ тождественны выражению $2x - y$?

Уровень А

216. Тождественны ли выражения:
а) p^2p и p^3; б) $x + x^2 + x^3 + x^4$ и x^5; в) $a - c$ и $c - a$;
г) $-a^2$и $(-a)^2$; д) $ax + ax + ax$ и $3ax$; е) $x - 2a$ и $-2a + x$?

217. Сравните соответствующие значения выражений x^2 и x, если $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$. Тождественны ли эти выражения?

218. Запишите в виде тождеств утверждения:
а) сумма двух взаимно противоположных чисел равна нулю;
б) произведение двух взаимно обратных чисел равно 1;
в) произведение двух чисел равно произведению противоположных им чисел.

Упростите выражение (219—220).

219. а) $2c + 3c - 5$; б) $3x - 4x + x$; в) $12n - 17 - 2n$;
г) $19c - 3c + 8$; д) $63 - 23p + 32p$; е) $4x + 65 - 10x$.

220. а) $-4ac + 3a - 7a$; б) $9 - 23x + 40x$; в) $-4 - 12 + 8ac$.

Докажите тождество (221—223).

221. а) $5x + 3x + x = 9x$; б) $5x - 3x - x = x$; в) $m + 2m + 3m = 6m$.

222. а) $2x + 3x = x + 4x$; б) $-a + 7a = 7a - a$; в) $5 - 2a - 3 = 2 - 2a$.

223. а) $7x - 5x + x = 3x$; б) $5x - 9x = 2x - 6x$; в) $a = 2a + 4a - 5a$.

224. Запишите в виде тождества утверждения: а) квадраты противоположных чисел равны; б) кубы противоположных чисел — числа противоположные; в) квадрат любого числа равен квадрату модуля этого числа; г) модуль куба любого числа равен кубу модуля этого числа.

225. Составьте все возможные тождества из выражений:
$-p \cdot p$; $\quad -p \cdot (-p)$; $\quad p^2$; $\quad -p^2$; $\quad -(-p)^2$; $\quad (-1)^2 \cdot p^2$.

Упростите выражение **(226—228)**.

226. а) $19x - 4(x + 5)$; б) $7(2 - 3x) + 21$; в) $2{,}5 + 5(a - 1{,}5)$; г) $0{,}1x + 3(1 - x)$; д) $-3(2y + 1) + 4$; е) $-2 - (7a - 5)$.

227. а) $35 + 7(x - 7)$; б) $2(c - 3) - 5(2 - 4c)$; в) $-(9 - 2x) + 4x$; г) $-4 + 4(5 - x)$; д) $-2(x + 5) + 3(x - 7)$; е) $-13 - 3(5 - 6x)$.

228. а) $12(x + 2) - (2x - 4)$; б) $1{,}5(5 - 2x) + 5(1{,}1 + x)$; в) $-3(a - 2) + 7(2a - 1)$; г) $0{,}2(x + 2) - 3(2x - 0{,}4)$.

Докажите тождество **(229—230)**.

229. а) $3c - 3(c - 1) = 3$; б) $2xy + 2(3 - xy) = 6$; в) $15x = 9 - 3(3 - 5x)$; г) $1 - 2x = 5 - 2(x + 2)$.

230. а) $8x = 6 + 2(4x - 3)$; б) $5(2x + y) = 10(x + y) - 5y$; в) $7 = 12x - (-7 + 12x)$; г) $3c - 3(1 + c - x) = 3x - 3$.

231. Упростите выражение и найдите его числовое значение:
а) $12(a - 3) + 3(a + 12)$, если $a = 0{,}2$;
б) $x^2(2 - x) - 2(x^2 - 3)$, если $x = -0{,}3$.

232. В тождестве $2x - 3x = 5x$ замените переменную x выражением $a - b$. Является ли полученное равенство тождеством?

Уровень Б

Упростите выражение **(233—235)**.

233. а) $2x + 4 + 2(x + 4) + 4(x - 8)$; б) $-(5a - c + 2) + 3a - c + 2$; в) $0{,}5(a + b + c) - 0{,}5(a - b + c) - 0{,}5(a + b - c)$.

234. а) $5(12a - 23x) - 8(6x - 13a)$; б) $-6(ac - 4) + 3(7 - 2ac)$.

235. а) $2(x^2 - 3) - 4(17 - 4x^2)$; б) $4(x^2 - 3) - x(4x - 5)$; в) $c(3 - 2c) + 3(c - 2c^2)$; г) $2y - 3 - 2(a + y - 1)$.

Докажите тождество **(236—238)**.

236. а) $2(x - 3) - 5(x - 4) = 14 - 3x$; б) $3(2a - 1) - 2(3a - 1) = -1$;

в) $5(0{,}5 + 2x) - 5(1{,}1 - x) = 15x - 3$; г) $9(x - 1) - 3(2x - 3) = 3x$.

237. а) $9x - 4(x + 5) - 1 = 7(x - 3) - 2x$;

б) $-2(2a + 5) = 5(2a - 9) - 7(2a - 5)$.

238. а) $3(a + c + x) - 2(a + c - x) - (a - c + x) = 2(c + 2x)$;

б) $2x + 2 = 2(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1) - (x^2 + x - 1)$;

в) $n - (1 - (n - (1 - n))) = 3n - 2$.

239. Тождественны ли выражения:

а) $1 - (1 - (1 - c))$ и $1 - c$; б) $0{,}5(x + y) - 0{,}5(x - y) - y$ и 0;

в) $a - b + 1 - 2(b + 1)$ и $2(a - b - 1) - (a + b - 1)$?

240. Заполните таблицу.

x	-2	-1	0	1	2
$x^5 - 5x^3 + 5x$					

Тождественны ли выражения $x^5 - 5x^3 + 5x$ и x?

241. Составьте все возможные тождества из выражений:

а) $ac(-x)$, $ax(-c)$, $cx(-a)$;

б) acx, $a(-c)(-x)$, $(-a)(-c)x$, $(-a)(-x)c$.

242. Заполните таблицу.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$2(x^2 - 4) + 6$								
$2x^2 - 2$								

Тождественны ли выражения $2(x^2 - 4) + 6$ и $2x^2 - 2$?

243. Заполните таблицу.

a	0	1	2	3	4	5	100	$100\,000$
$\lvert a\rvert + 1$								
$\lvert a + 1\rvert$								

Верно ли тождество $|a| + 1 = |a + 1|$?

244. Является ли тождеством равенство:

а) $|x+3|=x+3$; б) $|x^2+5|=x^2+5$; в) $|a-b|\cdot|b-a|=(a-b)^2$;
г) $|x-y|=x-y$; д) $|a+b|=|a|+|b|$; е) $|x|-|y|=|y|-|x|$?

245. Замените в тождестве $x^2-2=2(x^2-1)-x^2$ переменную x выражением: а) $c+3$; б) $ac-1$; в) $x+5$.

246. В тождестве $5x+3x=8x$ замените переменную x выражением a^2-ac+c^2. Является ли тождеством полученное равенство?

247. Длина прямоугольника равна a см, а ширина на c см короче. Запишите в виде выражения периметр прямоугольника.

248. Основание равнобедренного треугольника равно a см, боковая сторона на 2 см длиннее. Чему равен периметр треугольника?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

249. В одном мешке было 80 кг муки, а в другом — 60 кг. Из первого мешка отсыпали муки в 3 раза больше, чем из второго, и тогда во втором мешке муки осталось вдвое больше, чем в первом. Сколько килограммов муки взяли из каждого мешка?

250. Укажите координаты точек, отмеченных на рисунке 28. Найдите координаты середины каждой из сторон треугольника ABC.

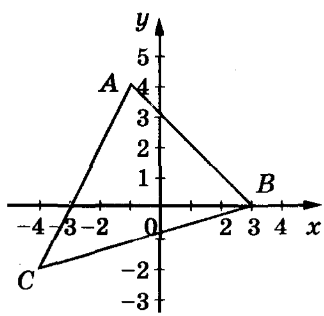


Рис. 28

251. Решите уравнение:

а) $31(2-x)=93$; б) $15(1-2x)=45$; в) $8{,}5(3-4x)=17$;
г) $4{,}7(3-5x)=94$; д) $44=4(2+3x)$; е) $26=2(10-3x)$.

§7. ВЫРАЖЕНИЯ СО СТЕПЕНЯМИ

В алгебре часто приходится иметь дело с выражениями, содержащими степени чисел или переменных.

Степенью называется произведение нескольких равных множителей.

Например,

3 · 3 — вторая степень (или *квадрат*) числа *3*;
xxx — третья степень (или *куб*) переменной x;
cccccc — шестая степень переменной c.

Эти степени обозначают: $3 \cdot 3 = 3^2$, $xxx = x^3$, $cccccc = c^6$.

Возвести число 2 в десятую степень — это означает перемножить десять двоек:

$$2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Значит, $2^{10} = 1024$. Здесь 2 — основание степени, 10 — показатель степени, а 1024, или 2^{10} — десятая степень числа 2.

Число, возводимое в степень, называют основанием степени.
Число, показывающее, в какую степень возводят основание, называют показателем степени.

- a^n — степень;
- a — основание степени;
- n — показатель степени.

Степени a^2 и a^3 называют квадратом и кубом потому, что для вычисления площади квадрата длину его стороны возводят во вторую степень, а для вычисления объёма куба длину его ребра возводят в третью степень.

Первой степенью любого числа считают само это число: a^1 — то же самое, что и a. Показатель степени 1 не принято писать.

$$a^1 = a,$$
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{раз}},$$

где n — натуральное число, $n \neq 1$.

Основанием степени может быть и дробное число, и отрицательное. Например,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81},$$

$$(-0{,}2)^3 = (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) = -0{,}008.$$

! **Чтобы возвести в степень отрицательное число, надо возвести в эту степень модуль этого числа и перед результатом поставить знак «плюс», если показатель степени чётный, или «минус» — если показатель степени нечётный.**

Если $a \geq 0$, то $a^n \geq 0$.
Если $a < 0$, то $a^{2n} > 0$ и $a^{2n-1} < 0$.

Не путайте слова «степень» и «ступень». Сложение и вычитание считаются действиями *первой ступени*, умножение и деление — *второй ступени*, возведение в степень — действие *третьей ступени*. Вычисляя значение выражения, сначала выполняют действия высшей ступени, потом — низшей. Действия одной и той же ступени выполняют в том порядке, в котором они записаны. Но когда выражение содержит деление на одночлен, то сначала находят значение одночлена, например если $x = 7$, $y = 5$, то $70 : xy = 70 : 35 = 2$. Если выражение содержит скобки, сначала находят значение выражения в скобках.

Пример. Найдите значение выражения

$$5a^2 + 27 : (a - 1)^3, \text{ если } a = -2.$$

Решение. Подставим вместо a его значение -2 и выполним действия в соответствии с их ступенью.

Первый способ. $5 \cdot (-2)^2 + 27 : (-3)^3 = 5 \cdot 4 + 27 : (-27) = 20 - 1 = 19$.

Второй способ. $(-2)^2 = 4$, $(-3)^3 = -27$, $5 \cdot 4 = 20$, $27 : (-27) = -1$, значит, $5 \cdot (-2)^2 + 27 \cdot (-3)^3 = 20 - 1 = 19$.

С помощью калькулятора можно возводить число в степень, умножив это число на себя несколько раз. Например, пятую степень числа 3,7 можно вычислить по такой программе:

$$\boxed{3{,}7}\boxed{\times}\boxed{3{,}7}\boxed{\times}\boxed{3{,}7}\boxed{\times}\boxed{3{,}7}\boxed{\times}\boxed{3{,}7}\boxed{=}$$

или короче:

$$\boxed{3{,}7}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}.$$

Калькуляторы, имеющие клавиши $\boxed{\text{F}}$ и $\boxed{y^x}$, дают возможность упростить вычисление — 20-ю степень числа 1,2 можно вычислить по такой программе: 1,2 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{y^x}$ 20 $\boxed{=}$.

В математике, физике, астрономии, биологии и других науках часто используются степени 10 для записи чисел *в стандартном виде.*

Любое число A, большее 10, можно записать в виде $A = a \cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$ и n — натуральное число. Такая запись числа A называется стандартной, а показатель n называют *порядком* числа A.

Например, в астрономии за единицу длины принимается 1 парсек (сокращенно — пк).

$$1 \text{ пк} \approx 30\,800\,000\,000\,000 \text{ км} = 3{,}08 \cdot 10^{13} \text{ км}.$$

Хотите знать ещё больше?

Вы уже знаете, как записывать в стандартном виде большие числа. Чтобы записать в стандартном виде маленькие положительные числа, например скорость движения улитки (0,000003 м/с), используют степени числа 10 с целыми отрицательными показателями. Покажем, как следует понимать степени числа 10 с целым показателем:

1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖
10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}

А вообще считают, что 10^{-n}, где n — число натуральное, обозначает десятичную дробь $0{,}0000\ldots01$ с n десятичными знаками.

Например, $10^{-5} = 0{,}00001$, $10^{-10} = 0{,}0000000001$.

Используя степени числа 10 с целым показателем, в стандартном виде можно записать любое число:

$$A = a \cdot 10^n, \text{ где } 1 \le a < 10 \text{ и } n \text{ — целое число.}$$

Скорость движения улитки в стандартном виде записывают так:

$$0{,}000003 \text{ м/с} = 3 \cdot 10^{-6} \text{м/с}.$$

Если число A большое, его порядок — положительное число, а если положительное число A очень маленькое, то его порядок — отрицательное число.

Проверьте себя

1. Что такое степень числа?
2. Что такое квадрат числа, куб числа?
3. Что такое основание степени, показатель степени?
4. Как иначе называют вторую и третью степени?
5. Одинаково ли значение слов *степень* и *ступень*?
6. Что такое стандартный вид числа? А порядок числа?

✔ Выполним вместе!

1. Запишите число $6{,}7 \cdot 10^8$ без показателя степени.

✔ Решение. $6{,}7 \cdot 10^8 = 6{,}7 \cdot 100\,000\,000 = 670\,000\,000$.

2. Запишите число 2 000 000 000 в стандартном виде.

✔ Решение. $2\,000\,000\,000 = 2 \cdot 1\,000\,000\,000 = 2 \cdot 10^9$.

3. Найдите значение выражения: $3x^2 - 2x^3$, если $x = -0{,}2$.

✔ Решение. Если $x = -0{,}2$, то $3 \cdot (-0{,}2)^2 - 2 \cdot (-0{,}2)^3 =$
$= 3 \cdot 0{,}04 - 2 \cdot (-0{,}008) = 0{,}12 + 0{,}016 = 0{,}136$.

4. Докажите, что:

а) $111^{11} + 11^{111}$ делится на 2;

б) $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ делится на 3.

✔ Доказательство. а) Последние цифры чисел 111^{11} и 11^{111} — единицы, а потому последняя цифра суммы этих чисел — два. Значит, число $111^{11} + 11^{111}$ делится на 2.

б) Каждое из слагаемых — это число, которое можно записать в виде единицы с последующими нулями. Сумма цифр трёх таких чисел равна трём, поэтому само число делится на три.

5. Сколько корней имеет уравнение $x^5 = 0$; $x^5 = 1$; $x^4 = 1$?

✔ Решение. Только один: $x = 0$, так как $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$, и не существует такого числа x, отличного от 0, чтобы выполнялось равенство $xxxxx = 0$.

Так же можно убедиться, что уравнение $x^5 = 1$ имеет только один корень $x = 1$, а уравнение $x^4 = 1$ имеет два корня: $x = 1$ и $x = -1$.

Выполните устно

252. Найдите квадраты чисел:
9; 10; 11; 20; 30; 40; 500; 0,2; 0,03.

253. Найдите кубы чисел:
1; 2; 3; 10; 100; 0,1; 0,01; $-\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$.

254. Найдите четвёртую степень чисел:
1, 2, 3, −1, −2, −3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-1\frac{1}{2}$.

255. Прочитайте выражение:
а) $a^2 + b^2$; б) $(a + b)^2$; в) $(x + y)^3$; г) $a^2 - b^2$; д) $(a - b)^2$.

256. Решите уравнение:
а) $x^7 = 0$; б) $x^8 = 0$; в) $15x^6 = 0$; г) $x^8 = 1$; д) $x^3 = 1$.

Уровень A

Вычислите (257–260).

257. а) 5^2, 2^5, 10^3, 100^3, 25^2; б) $(0{,}2)^3$, $(0{,}3)^2$, $(0{,}04)^3$;
в) $1{,}2^2$, $2{,}3^2$, $3{,}1^3$, $1{,}007^2$; г) $(-2)^4$, $(-13)^2$, $(-2)^5$;
д) $(-3)^4$, $-(3^4)$, -3^4, $(-0{,}5)^2$, $-0{,}5^2$, $(-1)^{150}$, $(-1)^{105}$.

258. а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$; б) $3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2$;
в) $(-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 + (-2)^6$.

259. а) $(0{,}3)^3 \cdot 10^4$; б) $11{,}2 : 10^2$; в) $2400 \cdot (0{,}1)^4$;
г) $(-0{,}1)^5 : (0{,}01)^2$; д) $-0{,}2^4 \cdot (-1)^{15}$; е) $(-1)^{12} : (0{,}5)^3$.

260. а) $2 \cdot 6^2$; б) $\left(-2 \cdot \frac{1}{4}\right)^3$; в) $5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$; г) $-3^2 \cdot 2$; д) $(5{,}6 - 4{,}5)^3 : 0{,}1$.

261. ***Старинная египетская задача.*** У семи людей по семь кошек, каждая кошка съедает по семь мышей, каждая мышь съедает по семь колосков, из каждого колоска может вырасти по семь мерок ячменя. Каковы числа этого ряда и их сумма?

262. Верно ли равенство:
а) $3^2 + 4^2 = 5^2$; б) $15^2 + 16^2 = 17^2$; в) $35^2 + 36^2 = 37^2$;
г) $3^3 + 3^2 = 6^2$; д) $4^3 + 6^2 = 10^2$; е) $97^2 - 96^2 = 97 + 96$?

263. Докажите, что:

а) $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$; б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 9^3 = 45^2$.

264. Вычислите площадь квадрата, сторона которого равна:

а) 3 см; б) 10 м; в) 8,5 км.

265. Запишите число в виде степени с показателем, большим 1, и основанием, наименьшим по модулю:

а) 125; б) -32; в) 2401; г) 243;

д) 0,729; е) 0,4096; ё) $-\frac{8}{27}$; ж) $2\frac{46}{625}$.

266. Найдите значение выражения:

а) $(-7)^2 - (-1)^9 \cdot 3^4$; б) $(0{,}02 + 0{,}28)^4 \cdot 10^5$;

в) $63 - \left(4 \cdot \frac{2}{5}\right)^2 \cdot 6\frac{1}{4}$; г) $(-1)^{24} : \left(\frac{1}{2}\right)^6 + (-3)^5$;

д) $(5{,}6 - 4{,}5)^3 : 0{,}1$; е) $(0{,}3^2 + 0{,}4^2) - 0{,}5^2$.

267. Найдите значение выражения:

а) $3a^4 - 2a^2$, если $a = -3$; б) $5c^3 - 2c^2 + c$, если $c = 0{,}5$;

в) $n^3 + (n - 3)^2$, если $n = -2$; г) $(2m - 1)^2 : m^4$, если $m = -0{,}1$.

Решите уравнение **(268–269)**.

268. а) $5x^4 = 5$; б) $4x^2 = x^2$; в) $16(x + 5)^2 = 0$; г) $-2x^3 = 2$.

269. а) $x^3 + 1 = 0$; б) $x^6 - 1 = 0$; в) $2x^7 = 2$; г) $x^3 - 6 = 2$.

270. Запишите в стандартном виде значения величин:

скорость света — 300 000 км/с,
масса Земли — 6 000 000 000 000 000 000 000 т,
масса Луны — 73 500 000 000 000 000 000 т,
объём Земли — 1 083 000 000 000 км^3.

271. Запишите в стандартном виде число:

а) 20 000; б) 7 530 000; в) 10 500 000; г) 909 900 000;
д) 33 000; е) 105; ё) 1 000 000 000; ж) 12345,67.

272. Запишите в обычном виде число:

а) $5{,}2 \cdot 10^4$; б) $1{,}31 \cdot 10^3$; в) $7{,}1 \cdot 10^5$; г) $4{,}44 \cdot 10^2$;
д) $2{,}05 \cdot 10^4$; е) $3{,}125 \cdot 10^6$; ё) $9 \cdot 10^9$; ж) $6{,}75 \cdot 10^5$.

Уровень Б

273. Верно ли равенство:

а) $2^2 + 2^2 + 6^2 + 10^2 = 12^2$; б) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 13^2 = 15^2$;
в) $2^2 + 6^2 + 8^2 + 25^2 = 27^2$; г) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$?

274. Вычислите значение выражения:

а) $3{,}24 \cdot 10^2$; б) $(3^4 + 19)^5$; в) $(0{,}875 + 0{,}5^3)^{10}$;
г) $(-0{,}3)^4 \cdot 10^3$; д) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$; е) $(4^4 - 3^5 - 13)^{12}$.

275. Упростите выражение:

а) $(35 - 2^5)^4$; б) $4000 \cdot 0{,}2^3$; в) $(0{,}3^3 - 0{,}017)^6$;
г) $(-1{,}1)^3 : 0{,}11$; д) $(2^7 - 5^3 - 4)^{15}$; е) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3$.

276. Найдите значение выражения:

а) $(4x^2 - y^2)^2 : (2x - y)^2$, если $x = 0{,}6$, $y = -0{,}2$;
б) $2x^5 + (x + 2y)^3 + y^2$, если $x = -2$, $y = 3$;
в) $((1 + b)^2 - (a - 1)^2)^3 - (a + b)^2$, если $a = 1{,}1$, $b = 0{,}1$;
г) $(2m - n)^2 - (4m^2 + n^2 - 4mn)$, если $m = 1, 3$, $n = 2{,}5$.

277. Заполните таблицы.

а)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$2x^2$									

б)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$(2x)^2$									

278. Составьте таблицу значений выражения $x^4 - 3x^3 + 2x^2$ для x, равных: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

279. Вычислите, пользуясь калькулятором:

а) $3{,}4^5$; б) $5{,}75^4 + 57$; в) $47{,}2 \cdot 2{,}84^3$; г) $3{,}7 + 2{,}7^4$.

280. Вычислите и сравните:
а) суму квадратов чисел 3 и 5 и квадрат их суммы;
б) разность квадратов чисел 10 и 6 и квадрат их разности.

281. Вычислите и сравните:
а) сумму кубов чисел 3 и 2 и куб их суммы;
б) разность кубов чисел 5 и 2 и куб их разности.

282. На сколько: а) квадрат полусуммы чисел 2, 3, 4 и 5 больше полусуммы их квадратов; б) куб полусуммы чисел 2, 3, 4 и 5 больше полусуммы их кубов?

283. На картине художника Н. П. Богданова-Бельского «Устный счёт» изображён урок математики в школе XIX в. Учитель предложил школьникам устно сократить дробь

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}.$$

Попробуйте выполнить это задание и вы.

284. Значение какого из трёх данных выражений наибольшее, а какого – наименьшее:

а) $\frac{7^2+3^2}{2}$, $\left(\frac{7+3}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$;

б) $\frac{7^2-5^2}{2}$, $\left(\frac{7-5}{2}\right)^2$, $\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2$;

в) $\frac{5^3+3^3}{2}$, $\left(\frac{5+3}{2}\right)^3$, $\left(\frac{5}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^3$?

285. Докажите, что уравнение не имеет корней:

а) $x^4+3=0$; б) $3x^2+8=0$; в) $(y-3)^2+1=0$.

Решите уравнение **(286–287)**.

286. а) $(x-5)^3=1$; б) $(x^2+1)^2=0$; в) $(x^2+1)^3=8$;
г) $(2x-3)^5=1$; д) $(8-3z)^3=-1$; е) $(x^4+3)^2=1$.

287. а) $2(y^2-1)=0$; б) $3(z^4-1)=0$; в) $0{,}5(x^3+2)=1$;
г) $0{,}2(1+z^3)=0{,}4$; д) $(x+2)^3=-1$; е) $(5-y)^7+2=1$.

288. Запишите в стандартном виде числа:

а) 287 287 000; 17 530 000; 220 500; 90,99;
б) 0,0003; 0,235; 0,05; 0,0000000041;
в) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{200}$; $\frac{3}{5000}$; $\frac{73}{500000}$; $\frac{999}{1000000000}$.

289. Запишите в обычном виде числа:

а) $1{,}2\cdot10^3$; $3{,}47\cdot10^5$; $7{,}3\cdot10^4$; $14{,}23\cdot10^5$;
б) $2\cdot10^{-4}$; $1{,}1\cdot10^{-3}$; $9\cdot10^{-5}$; $6{,}75\cdot10^{-6}$.

290*. Докажите, что:

а) $10^{12}+2$ делится на 3; б) $1+10^{10}+10^{100}$ делится на 3;
в) $10^{15}+8$ делится на 9; г) $10^{10}-1$ делится на 9.

291*. Докажите, что для любого натурального n значение дроби является натуральным числом:

а) $\frac{6^n-1}{5}$; б) $\frac{10^n+5}{3}$; в) $\frac{10^n-1}{9}$; г) $\frac{3^{4n}+4}{5}$.

292. Замените буквы цифрами так, чтобы было верным равенство:

а) $куб = е^е$; б) $степень = ее^е$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

293. Тождественны ли выражения:

а) $2a + a + a$ и $4a$; б) $x + x + x$ и x^3; в) $2b - 2a$ и $-2(a - b)$; г) $5 + 5 + 5x$ и $15x$; д) $3y + 2y + y - 6$ и y; е) $a^3 - a$ и a^2?

294. При каком условии справедлива пропорция:

а) $3 : x = x : 27$; б) $y : 4 = 16 : y^2$?

295. Бассейн можно наполнять водой с помощью двух труб. Если открыть только меньшую трубу — он наполнится водой за сутки; если же открыть две трубы вместе, он доверху наполнится за четверть суток. Как долго наполнялся бы бассейн только с помощью большей трубой?

296. Боковая сторона равнобедренного треугольника на 3 см длиннее основания. Найдите их длины, если периметр треугольника: а) 54 см; б) 6 см; в) a см.

§8. СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ

Далее рассмотрим важнейшие тождественные преобразования выражений со степенями. Начнём с основного свойства степени.

Для любого числа a и произвольных натуральных показателей m и n всегда

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Доказательство.

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ раз}} = \underbrace{aa \ldots a}_{(m+n) \text{ раз}} = a^{m+n}.$$

Тождество $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ называют *основным свойством степени*. Из него следует, что **при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают.**

Например,

$$3^2 \cdot 3^5 = 3^7; \quad 1{,}3^4 \cdot 1{,}3^5 = 1{,}3^9; \quad x^3x^5 = x^8.$$

Для любого числа a ($a \neq 0$) и произвольных натуральных показателей степеней m и n ($m > n$) всегда

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Доказательство. По правилу умножения степеней

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m, \text{ поэтому } a^m : a^n = a^{m-n}.$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

Например,

$$7^5 : 7^3 = 7^2; \ (-13)^{11} : (-13)^7 = (-13)^4.$$

Для любого числа a и произвольных натуральных показателей степеней m и n всегда

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Доказательство.

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m \text{ раз}} = a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{m}} = a^{nm}.$$

При возведении степени в степень нужно показатели степеней перемножить, а основание оставить прежним.

Например,

$$(2^3)^4 = 2^{12}; \quad (0{,}7^2)^5 = 0{,}7^{10}; \quad (c^7)^3 = c^{21}.$$

Для любых чисел a и b и произвольного натурального показателя степени n

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Доказательство.

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n \text{ раз}} = \underbrace{aa\ldots a}_{n \text{ раз}} \cdot \underbrace{bb\ldots b}_{n \text{ раз}} = a^n \cdot b^n.$$

Значит,

***n*-я степень произведения равна произведению *n*-х степеней множителей.**

Например,

$$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4; \qquad (3m)^6 = 3^6 m^6.$$

Можно доказать (попробуйте сделать это самостоятельно), что для любых чисел a и b ($b \neq 0$) и натурального показателя степени n справедливо равенство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Итак, при указанных условиях:

!

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad a^m : a^n = a^{m-n}; \qquad (a^n)^m = a^{nm};$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Хотите знать ещё больше?

Рассмотренные свойства степеней с натуральными показателями можно применить и к степеням с целыми отрицательными показателями. Например,

$$10^{-5} \cdot 10^{-3} = 10^{-5+(-3)} = 10^{-8};$$

$$(10^{-2})^{-3} = 10^6.$$

Используя свойства степеней с целыми показателями, можно упростить выполнение действий с любыми числами, записанными в стандартном виде. Найдём, для примера, произведение и частное чисел a и b, если $a = 3{,}5 \cdot 10^7$, $b = 4 \cdot 10^{-3}$.

$$a \cdot b = 3{,}5 \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 3{,}5 \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3} = 14 \cdot 10^4 = 1{,}4 \cdot 10^5;$$

$$a : b = (3{,}5 \cdot 10^7) : (4 \cdot 10^{-3}) = (3{,}5 : 4) \cdot (10^7 : 10^{-3}) =$$

$$= 0{,}875 \cdot 10^{7-(-3)} = 0{,}875 \cdot 10^{10} = 8{,}75 \cdot 10^9.$$

Проверьте себя

1. Сформулируйте основное свойство степени.
2. Сформулируйте правило возведения в степень произведения.
3. Как возводить в степень степень?
4. Как возводить в степень дробь?

Выполним вместе!

1. Вычислите: а) $0{,}5^{10} \cdot 4^5$; б) $0{,}2^8 \cdot 5^6$; в) $9^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8$.

✔ Решение. а) $0{,}5^{10} \cdot 4^5 = (0{,}5^2)^5 \cdot 4^5 = (0{,}25 \cdot 4)^5 = 1^5 = 1$;

б) $0{,}2^8 \cdot 5^6 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}2^6 \cdot 5^6 = 0{,}04 \cdot (0{,}2 \cdot 5)^6 = 0{,}04 \cdot 1^6 = 0{,}04$;

в) $9^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 = 9^5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 = 9 \cdot 9^4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 = 9 \cdot 1^4 = 9.$

Ответ. а) 1; б) 0,04; в) 9.

2. Решите уравнение $2x^2 \cdot x = 2$.

✔ Решение. Поделим обе части уравнения на 2 и представим левую часть в виде степени с основанием x:

$$2x^2 \cdot x = 2,\ x^2 \cdot x = 1,\ x^3 = 1, \text{ отсюда } x = 1.$$

Ответ. $x = 1$.

3. Запишите в виде степени выражение:

а) $a^5 \cdot a^3 \cdot a$; б) $(x-2y)(x-2y)^2$; в) $81 \cdot 3^5 \cdot 27$.

✔ Решение. а) $a^5 \cdot a^3 \cdot a = a^{5+3+1} = a^9$;

б) $(x-2y)(x-2y)^2 = (x-2y)^{1+2} = (x-2y)^3$;

в) $81 \cdot 3^5 \cdot 27 = 3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^3 = 3^{4+5+3} = 3^{12}$.

Ответ. а) a^9; б) $(x-2y)^3$; в) 3^{12}.

4. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел

$$a = 1{,}2 \cdot 10^5 \text{ и } c = 2 \cdot 10^4.$$

✔ Решение. $a + c = 1{,}2 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 =$

$= 12 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4 = 14 \cdot 10^4 = 1{,}4 \cdot 10^5$;

$a - c = 1{,}2 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^4 = 12 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^4 = 10 \cdot 10^4 = 10^5$;

$a \cdot c = 1{,}2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^4 = 1{,}2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^4 = 2{,}4 \cdot 10^9$;

$a : c = (1{,}2 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^4) = (1{,}2 : 2) \cdot (10^5 : 10^4) = 0{,}6 \cdot 10 = 6$.

Ответ. $1{,}4 \cdot 10^5$; 10^5; $2{,}4 \cdot 10^9$; 6.

Выполните устно

Упростите выражение (**297—298**).

297. а) $3^5 \cdot 3^7$; б) $12^4 : 12^3$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$; г) $(-4)^2 \cdot (-4)^3$.

298. а) $x^5 \cdot x^8$; б) $m^3 \cdot m^7$; в) $f^4 : f$; г) $c^3 \cdot c^4 \cdot c^5$; д) $z^2 \cdot z^5 \cdot z$.

299. Представьте выражение в виде степени:

а) 625; б) $(x^3)^5$; в) $x^2 \cdot y^2$; г) $8 \cdot 3^3$; д) $64 \cdot 49$; д) $x^4 \cdot y^6$.

300. Решите уравнение:

а) $z^3 z = 0$; б) $4x^5 x^6 = 0$; в) $y^5 y^2 = 1$; г) $xx^3 = 1$.

Уровень A

Представьте произведение в виде степени **(301–302)**.

301. а) $3^{13} \cdot 3^6$; б) $18 \cdot 18^{14}$; в) $(-11)^5 \cdot (-11)^4$;

г) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7$; д) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)$; е) $\left(-\frac{2}{5}\right)^9 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{16}$;

ё) $0{,}5^5 \cdot 0{,}5^5$; ж) $(-1{,}2) \cdot (-1{,}2)$.

302. а) $a^5 \cdot a^3$; б) $x^4 \cdot x^4$; в) $m \cdot m^8$; г) $x \cdot x^2 \cdot x^3$; д) $y^7 \cdot y \cdot y^7 \cdot y$;

е) $z \cdot z^2 \cdot z^3 \cdot z^5$; ё) $(a+b)^2 \cdot (a+b)^5$; ж) $(x-y) \cdot (x-y)$.

303. Упростите выражение:

а) $4^5 \cdot 4^7$; б) $a^7 \cdot a^4$; в) $x^2 \cdot x^4 \cdot x^5$; г) $0{,}2^5 \cdot 0{,}2^3$; д) $c^{10} : c^8$;

е) $c^8 \cdot c^3 \cdot c$; ё) $13^8 : 13^7$; ж) $n^5 \cdot n^{12}$; з) $a^5 \cdot a^7 \cdot a^4$.

Выполните возведение в степень **(304—305)**.

304. а) $\left(a^2\right)^3$; б) $\left(x^3\right)^2$; в) $\left(y^7\right)^2$; г) $\left(-x^5\right)^6$; д) $\left((-a)^3\right)^4$;

е) $\left((-b)^3\right)^7$; ё) $\left(\left(x^5\right)^4\right)^3$; ж) $\left(-x^3\right)^3$; з) $\left(-a^4\right)^9$; и) $\left((-x)^4\right)^9$.

305. а) $\left(m^8\right)^3$; б) $\left(x^{10}\right)^4$; в) $\left(a^5\right)^n$; г) $\left(z^m\right)^8$.

306. Найдите:

а) вторую, третью и четвёртую степени числа 2^4;

б) вторую, третью и пятую степени числа $(-2)^3$.

307. Положительно или отрицательно значение выражения:

а) $(-5)^{21} : (-5)^{13}$; б) $(-8)^8 \cdot (-8)^{10}$; в) $(-3)^5 \cdot (-3)^7 \cdot (-3)^4$?

Сравните значение выражений **(308–309)**.

308. а) $(-2)^3 \cdot (-2)^{10}$ и $(-2)^8$; б) $(-3)^7 : (-3)^5$ и $(-3)^{75}$;

в) $(-1)^5 \cdot (-10)^{35}$ и $(-100)^{91}$; г) $(-2{,}5)^{32} : (-7)^{31}$ и $(-2{,}5) : (-7)$.

309. а) $(-6)^{21} \cdot (-6)$ и $(-6)^{30}$; б) $(-4)^{12} : (-4)^7$ и $(-4)^{16}$;

в) $(-2)^9 \cdot (-2)^{15}$ и $(-2)^{25}$; г) $(-5)^6 \cdot (-5)^5$ и $(-5)^{13}$.

310. Вычислите значение выражения:

а) $2^{13} \cdot 0{,}5^{13}$; б) $0{,}5^{18} \cdot 2^{18}$; в) $25^7 \cdot 0{,}04^7$; г) $5^{33} \cdot 0{,}2^{33}$.

311. Найдите значение выражения:

а) $2^7 \cdot 5^7$; б) $0{,}25^{10} \cdot 4^{10}$; в) $(-8)^{11} \cdot 0{,}125^{11}$;

г) $0{,}2^8 \cdot 0{,}5^8$; д) $6^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$; е) $\left(1\frac{3}{5}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{16}$.

312. Имеет ли корни уравнение:
а) $x^2x^4=-1$; б) $x^3x^6=-1$; в) $x^7 \cdot 0=0$; г) $0 \cdot x^8=1$?

313. Решите уравнение:
а) $x^8 \cdot x^7=1$; б) $y^4 \cdot y^5=-1$; в) $x^2 \cdot x^2=1$; г) $z^3 \cdot z^2 \cdot z^8=-1$.

314. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:
а) $2{,}4 \cdot 10^5$ и $3 \cdot 10^5$; б) $1{,}5 \cdot 10^7$ и $5 \cdot 10^7$; в) $6{,}4 \cdot 10^4$ и $3{,}2 \cdot 10^4$.

315. Выполните действия:
а) $2{,}5 \cdot 10^5 + 3{,}3 \cdot 10^5$; б) $7{,}7 \cdot 10^7 - 5 \cdot 10^7$;
в) $6{,}4 \cdot 10^4 : 3{,}2 \cdot 10^4$; г) $6{,}4 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3$.

Уровень

Вычислите (316–318).

316. а) $0{,}5^{12} \cdot 2^{13}$; б) $0{,}1^{21} \cdot 10^{20}$; в) $0{,}2^{41} \cdot (-0{,}5)^{40}$;
г) $5^{27} \cdot 0{,}2^{30}$; д) $(-0{,}25)^{15} \cdot 4^{16}$; е) $4^{31} \cdot 0{,}25^{30}$.

317. а) $\left(-\frac{5}{7}\right)^{12} \cdot \left(-\frac{7}{5}\right)^{14}$; б) $7^{15} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^{16}$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{11}$;
г) $(-0{,}4)^8 \cdot 3^4 \cdot (-2{,}5)^8$; д) $0{,}2^7 \cdot 0{,}3^2 \cdot 5^7$; е) $25^{10} \cdot 2^8 \cdot 0{,}04^{10}$.

318. а) $5^{20} \cdot 0{,}2^{18}$; б) $0{,}04^{12} \cdot 25^{11}$; в) $(-2{,}5)^{17} \cdot (0{,}4)^{19}$;
г) $10^{26} \cdot 0{,}1^{28}$; д) $\left(\frac{1}{8}\right)^{35} \cdot (-8)^{37}$; е) $(-1{,}25)^{22} \cdot (-0{,}8)^{23}$.

Представьте в виде степени произведение (319–321).

319. а) $a^5 \cdot \left(a^2\right)^7$; б) $\left(x^2\right)^3 \cdot \left(x^3\right)^4$; в) $y \cdot \left(y^5\right)^2 \cdot y^6$;
г) $\left(b^3 \cdot b^5\right)^2$; д) $\left(x \cdot x^8\right)^3 \cdot x^3$; е) $\left(-a^2\right)^3 \cdot \left(a^3\right)^5$;
ё) $(-y)^6 \cdot \left(-y^4\right)^5$; ж) $\left((-x)^3\right)^2 \cdot (-x)^4$; з) $\left(-a^4\right)^3 \cdot \left((-a)^3\right)^5$.

320. а) a^6x^6; б) $(-b)^7y^7$; в) $a^3b^3c^3$; г) $(-1)^9m^9$; д) $32x^5$;
е) $0{,}0081b^2$; ё) $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} a^{10}b^{10}$; ж) $\frac{1}{27}x^3y^3$; з) $10\,000\left(\frac{m}{n}\right)^4$.

321. а) $5^6 \cdot 125$; б) $36 \cdot 6^8$; в) $2^{10} \cdot 64$; г) $0{,}001 \cdot 0{,}1^5$;
д) $(-0{,}3)^{15} \cdot (-0{,}027)$; е) $0{,}4 \cdot 0{,}16$; ё) $0{,}25 \cdot 0{,}125$;
ж) $\frac{27}{64} \cdot \frac{9}{16}$; з) $\frac{16}{625} \cdot \left(-\frac{8}{125}\right)$.

322. Решите уравнение:
а) $3x^2 \cdot x^5 + 3 = 0$; б) $-2y^4 \cdot y^7 = 2$;
в) $0{,}5x^3 \cdot x^8 + 1 = 1{,}5$; г) $\frac{1}{3}y^4 \cdot y^7 + 2 = 2\frac{1}{3}$.

323. Замените звёздочку степенью так, чтобы получилось тождество:
а) $x^6 \cdot * = x^{15}$; б) $a^{10} \cdot * \cdot a = a^{17}$; в) $(*)^5 = x^{20}$; г) $(*)^7 = -a^{21}$.

324. Найдите такое значение переменной, при котором равенство будет верным:
а) $5^3 \cdot 5^4 = 5^{5+z}$; б) $3^x \cdot 3^5 = \left(3^2\right)^x$; в) $\left(\left(4^3\right)^x\right)^4 = 4^x \cdot 4^{22}$;
г) $\left(6^x\right)^4 = \left(6^3\right)^x$; д) $\left(7^6\right)^8 = 7^{12x}$; е) $\left(2^5\right)^x \cdot 2^2 = \left(2^3\right)^x \cdot \left(2^x\right)^4$.

325. Решите уравнение:
а) $(2x)^5 = -32$; б) $(3x)^4 = 81$; в) $12x^5x^3 = 0$;
г) $(x^9 \cdot x^4)^3 = -1$; д) $(x^7 \cdot x^{11})^5 = 1$; е) $(4(x + 2)^2)^8 = 0$.

326. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:
а) $3 \cdot 10^{-7}$ и $2 \cdot 10^{-7}$; б) $4{,}5 \cdot 10^{10}$ и $3 \cdot 10^9$;
в) $-6 \cdot 10^{13}$ и $1{,}2 \cdot 10^{12}$; г) $2{,}8 \cdot 10^{19}$ и $7 \cdot 10^{20}$.

327. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:
а) $1{,}4 \cdot 10^{-6}$ и $7 \cdot 10^{-6}$; б) $3{,}5 \cdot 10^{-4}$ и $5 \cdot 10^{-4}$.

328. Выполните действия:
а) $2{,}5 \cdot 10^4 + 3{,}3 \cdot 10^5$; б) $7{,}7 \cdot 10^7 - 5 \cdot 10^5$;
в) $6{,}4 \cdot 10^5 : (3{,}2 \cdot 10^4)$; г) $5{,}5 \cdot 10^7 + 8{,}3 \cdot 10^6$;
д) $7{,}7 \cdot 10^4 - 7{,}1 \cdot 10^6$; е) $6{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3$.

329. Пользуясь тождеством

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n,$$

докажите тождество:
а) $(xyz)^n = x^n \cdot y^n \cdot z^n$; б) $(xyzt)^n = x^n \cdot y^n \cdot z^n \cdot t^n$.

330. Докажите тождество:
а) $a^m \cdot a^n \cdot a^k = a^{m+n+k}$; б) $((a^n)^m)^k = a^{nmk}$.

331. Пользуясь рисунком 29, выразите квадрат произвольного натурального числа n через сумму n первых нечётных чисел.

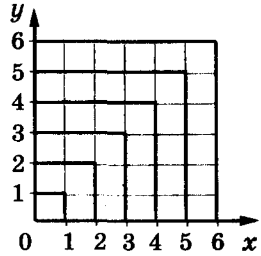


Рис. 29

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

332. Является ли тождеством равенство:

а) $3x + 5 = 3(x + 5)$;   б) $3(x - 4) = 3x - 12$;

в) $(2a - b)^2 = (b - 2a)^2$;   г) $(2x - 3y)^3 = (3y - 2x)^3$;

д) $(a + b) \cdot 0 = a + b$;   е) $y(x - x) = 0$?

333. На одном складе было 2200 т угля, а на втором — 2800 т. Когда со второго склада вывезли угля в пять раз больше, чем с первого, на обоих складах его стало поровну. Сколько угля вывезли с каждого склада?

§9. ОДНОЧЛЕНЫ

Простейшие выражения — числа, переменные, их степени и произведения, например 6, $-\frac{7}{12}$, z, x^5, $0{,}3a^2x$, $3a \cdot 5c$, называют ***одночленами***.

Если одночлен содержит только один числовой множитель, и к тому же стоящий на первом месте, и если каждая переменная входит только в один множитель, такой одночлен называется одночленом *стандартного вида*. Такими являются, например, все приведённые выше одночлены, кроме последнего. Одночлены $3a \cdot 5c$, $2x^3x^2$, $ab \cdot 8$ записаны в нестандартном виде:

первый содержит два числовых множителя 3 и 5, второй — два множителя x^3 и x^2 с одной и той же переменной x, в третьем числовой множитель 8 стоит не на первом месте.

Пользуясь переместительным и сочетательным законами умножения, каждый одночлен можно записать в стандартном виде.

Например,

$$3a \cdot 5c = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot c = 15ac,$$
$$0{,}5xy \cdot 4y^3 = 0{,}5 \cdot 4 \cdot x \cdot y \cdot y^3 = 2xy^4,$$
$$4cx(-2cx^3) = 4 \cdot (-2) \cdot c \cdot c \cdot x \cdot x^3 = -8c^2x^4.$$

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют ***коэффициентом*** этого одночлена. Например, коэффициенты одночленов $15xz$, $-8{,}3a^2$, m^3, $-p$ равны соответственно 15, − 8,3, 1 и −1. Коэффициенты 1 и −1 писать не принято.

Приведение одночлена к стандартному виду часто состоит в умножении двух или нескольких одночленов.

! **Чтобы перемножить одночлены, числовые множители перемножают, а к буквенным применяют правило умножения степеней с одинаковыми основаниями.**

Если возникает потребность перемножить несколько одночленов, то их соединяют знаком умножения, а полученный таким способом одночлен приводят к стандартному виду.

Например, найдём произведение одночленов $5a^2b$ и $-0{,}2ab^3$.

$$5a^2b \cdot (-0{,}2ab^3) = 5 \cdot (-0{,}2)a^2abb^3 = -a^3b^4.$$

В одночлене $-a^3b^4$ сумма показателей переменных равна 7. Эту сумму называют *степенью одночлена* $-a^3b^4$. Степень одночлена $5xy$ равна 2.

Вообще, степень одночлена — это сумма показателей всех входящих в него переменных. Если одночлен — число, считают, что его степень равна нулю.

Например, одночлены 0,3, 5^3, $(-2)^5$ имеют нулевую степень.

Одночлены можно возводить в степень. Для примера возведём в третью степень одночлен $2ax^5$.

$$(2ax^5)^3 = 2ax^5 \cdot 2ax^5 \cdot 2ax^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot x^5 \cdot x^5 \cdot x^5 = \\ = 8a^3x^{15}.$$

Из тождества $(ab)^n = a^n b^n$ следует такое правило.

Чтобы возвести в степень одночлен, нужно возвести в эту степень каждый множитель одночлена и найденные степени перемножить.

Приклади. $(3my^2)^4 = 3^4 m^4 (y^2)^4 = 81 m^4 y^8$,

$$\left(-\frac{1}{3}a^2x^3\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(a^2\right)^4 \cdot \left(x^3\right)^4 = \frac{1}{81}a^8x^{12}.$$

Хотите знать ещё больше?

Одночлены, как и числа, можно складывать, вычитать, умножать и делить. Однако сумма, разность и частное двух одночленов не всегда является одночленом. Например, сумма и разность одночленов $6x$ и $2x$ равны соответственно одночленам $8x$ и $4x$. Но сумма и разность одночленов $8ax$ и $4ay$ равны выражениям $8ax + 4ay$ и $8ax - 4ay$, а эти два выражения — не одночлены.

Частное одночленов $6c^3$ и $3c$ равно одночлену $2c^2$ (так как $2c^2 \cdot 3c = 6c^3$). Но частное от деления $12c$ на $6c^3$ — не одночлен.

Проверьте себя

1. Что такое одночлен?
2. Что такое коэффициент одночлена?
3. Когда говорят, что одночлен записан в стандартном виде?
4. Как перемножить два одночлена?
5. Как одночлен возвести в степень?
6. Что называют степенью одночлена?

Выполним вместе!

1. Запишите одночлен в стандартном виде:

а) $ax^2 \cdot 25x^3$; б) $-5a^2n \cdot 2a^2n^3$; в) $\frac{2}{3}xy^2 \cdot (-3x^3)$.

✔ Решение. а) $ax^2 \cdot 25x^3 = 25 \cdot ax^2 \cdot x^3 = 25ax^5$;

б) $-5a^2n \cdot 2a^2n^3 = -5 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot n \cdot n^3 = -10a^4n^4$;

в) $\frac{2}{3}xy^2 \cdot (-3x^3) = \frac{2}{3} \cdot (-3) \cdot x \cdot x^3 \cdot y^2 = -2x^4y^2$.

Ответ. а) $25ax^5$; б) $-10a^4n^4$; в) $-2x^4y^2$.

2. Возведите в квадрат и куб одночлен $-2xz^3$.

✓ Решение. $(-2xz^3)^2 = (-2)^2 \cdot x^2 \cdot (z^3)^2 = 4x^2z^6$;
$(-2xz^3)^3 = (-2)^3 \cdot x^3 \cdot (z^3)^3 = -8x^3z^9$.

Ответ. $4x^2z^6$; $-8x^3z^9$.

Выполните устно

334. Выполните умножение одночленов, чтобы заполнить таблицу:

[illegible]	[illegible]	$5x$	[illegible]	[illegible]
a				
$2a$				
$-3ax$				
a^2				

335. Какое из выражений является одночленом:

а) $\frac{2}{3}abc^3$; б) $(a+b)x$; в) $c^2 \cdot (-y^2)$; г) $-3{,}5$; д) $t^{125} : z$?

Уровень A

336. Выпишите одночлены стандартного вида:

а) $3mn^2m^4$; б) $-3xyz^5$; в) $3ab \cdot 7c$; г) $\frac{1}{2}c$; д) $2x\left(-\frac{1}{2y}\right)$.

337. Запишите одночлен в стандартном виде и подчеркните его коэффициент:

а) $2a \cdot 3b$; б) $12ax \cdot a^2$; в) $-5cz \cdot cz$; г) $0{,}3a \cdot 2ab^2$;
д) $\frac{1}{3}mn \cdot 3n^2$; е) $(-2ab) \cdot (-3)$; ё) $a^2 \cdot 3bc \cdot a^3$; ж) $-3 \cdot (-5)xy$;
з) $\frac{1}{3}x \cdot x^2 \cdot 1\frac{1}{2}x^3$; и) $2{,}5ax \cdot (-0{,}4)x^2$.

338. Найдите коэффициент одночлена:

а) $2na^3$; б) xy^2z^3; в) $-ab^3c$; г) $\frac{2}{3}a^2 \cdot x^3$; д) $-2xy \cdot 3x^2$.

339. Вычислите значение одночлена:

а) $2a^4b$, если $a = -1$, $b = 5$; б) $-x^2y^3$, если $x = 0{,}2$, $y = -3$;
в) $-0{,}5xc^3$, если $x = -0{,}2$, $c = -\frac{1}{2}$.

Выполните умножение одночленов **(340—341)**.

340. а) $2ab$ и $3a^2c$; б) $0{,}3xy^2$ и $\frac{1}{3}x^2y$; в) $-am^2$ и $3m^3p$;

г) $0{,}2xy$ и $-5xy$; д) $abcd$ и $-ab^2c^3$; е) $1\frac{2}{3}ax$ и $\frac{3}{5}z$.

341. а) $3a^3$, $2a^2z$ и $6az^3$; б) $2y$, $-3y^2$ и y^3; в) $\frac{2}{5}x^5y^4$ и $-\frac{5}{7}xy^3$.

342. Возведите в квадрат и куб одночлен:

а) $2ax$; б) $-3a^2$; в) $5bc^2$; г) $0{,}2x^3m$; д) $-\frac{1}{2}x^5c^2$; е) $-\frac{2}{3}a^2x^3$.

Упростите выражение **(343—344)**.

343. а) $(3ax^2)^3$; б) $(x^3y^3)^2$; в) $(-2ab)^3$; г) $-3xy^3\cdot 2xy^2$; д) $(-2a^2b)^3$.

344. а) $2a(3mc)^2$; б) $\frac{1}{8}c^2(-2xc)^3$; в) $\frac{2}{3}a^3(-3ax)^4$;

г) $(-2a^2)^3\cdot a^3$; д) $-0{,}7y^3\left(-\frac{1}{7}y^3\right)^2$; е) $\left(-\frac{1}{3}pq^2\right)^4\cdot p^3$.

Уровень Б

Запишите в стандартном виде одночлен **(345—346)**.

345. а) $2a\cdot 5x\cdot\left(-1\frac{2}{5}a\right)$; б) $5c^3\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)cx$; в) $-4a\cdot 3axy\left(-\frac{3}{4}x^2y\right)$;

г) $0{,}8xyz\cdot(-5y)$; д) $\frac{2}{3}ac^3(-6c^2)$; е) $-5a^2z^3\cdot\left(-\frac{3}{5}z\right)$.

346. а) $\frac{5}{7}xy\cdot\left(-\frac{7}{10}xy\right)$; б) $\left(-\frac{3}{4}acx\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}ax^3\right)$;

в) $-3ax^2\cdot 2a\cdot(-5x^3)$; г) $-2cz^3\cdot 3z\cdot(-5cz)$;

д) $-\frac{1}{2}cz^2\cdot 4cx\cdot(-c)$.

347. Вычислите значение одночлена:

а) $0{,}5a^5$, если $a=2$; б) $2c^2x^3$, если $c=1{,}5$, $x=-10$;

в) $-8xz^5$, если $x=0{,}1$ и $z=-2$;

г) $-\frac{2}{3}a^2c^4$, если $a=\frac{1}{2}$ и $c=-3$;

д) $1\frac{13}{27}\cdot(6xy^3)^2\cdot\left(\frac{1}{3}xy\right)^3$, если $x=3$, $y=\frac{1}{2}$;

е) $\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot(-0{,}2xy)^4\cdot(50y^3z)^2$, если $x=0{,}2$, $y=10$, $z=0{,}06$.

348. Выполните умножение одночленов:

а) $-axyz$, $2az^2$ и $-3x$; б) $5a^2$, $3xy^3$ и $-\frac{2}{3}axy^3$;

в) $-2\frac{1}{3}ab^2$, $-\frac{3}{7}ab^2$ и $3b^2$; г) $-1\frac{2}{3}an^2m$, $-3an^2$ и $-0{,}2a$.

349. Заполните пустые клеточки такими степенями переменной a, чтобы произведения степеней в каждой строке, в каждом столбце и в каждой диагонали были тождественно равными (рис. 30).

a		a^3
	a^4	a^2
	1	

Рис. 30

350. Возведите в куб одночлен:

а) $3cx$; б) $2a^2m$; в) $0{,}5axy^3$; г) $-\frac{2}{3}ab^2c^3$;

д) $-1\frac{1}{2}c^2n^2p$; е) $-2\frac{2}{5}an^2c^3$.

351. Возведите в четвёртую степень одночлен:

а) $2an$; б) $3x^2$; в) $0{,}1ax^2$; г) $-0{,}1ac^2$; д) $-\frac{2}{3}x^2y$; е) $-1\frac{1}{2}ab^2c$.

Упростите выражение (352—354).

352. а) $(2ac^3)^4$; б) $(-ax^3)^4$; в) $(-3an^2)^5$; г) $(-0{,}2xy^2)^3$;

д) $\left(-\frac{2}{3}axy^2\right)^4$.

353. а) $x^5\cdot(2ax^2)^3$; б) $3a^2\cdot(2a^2c)$; в) $-x^2\cdot(3x^3y)^3$;

г) $a\cdot(2cx^2)^2$; д) $c^3\cdot(3cx^2)^2$; е) $(-2a^2x)^2\cdot\frac{1}{2}a$.

354. а) $(2ax^2)^2\cdot(ax)^3$; б) $(3nz^3)^2\cdot\left(\frac{1}{3}nzx\right)^3$;

в) $(-2x^2y^3)^2\cdot(-5xy^2)^3$; г) $\left(-1\frac{2}{3}ax^2\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}a^3x\right)^2$;

д) $3x^2\cdot(-5x^3y^4)^2$; е) $(-a^6b^3)^7\cdot 6a^3b^4$;

ё) $0{,}5mn^4\cdot(-2m)^5$; ж) $(-0{,}1x^2y)^4\cdot 1000xy^2$.

355. Покажите, что уравнение не имеет корней:

а) $x^4\cdot x^8+3=0$; б) $2x^7\cdot x^5=-31$; в) $-8y^4\cdot y^8=64$.

356. Решите уравнение:

а) $(x^3)^4\cdot x\cdot x^2=-1$; б) $(-x^2)^3\cdot x^5\cdot(x^3)^3=-1$;

в) $(0{,}2x^7\cdot x^6)^2+1{,}4=(1{,}2)^2$; г) $\frac{2}{3}(-x^5)^3\cdot x^4+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$;

д) $z^2 \cdot z^4 = z^2 \cdot z^3$; е) $x^4 \cdot x^5 = 8x^6$; ё) $x^3 \cdot x^5 = x \cdot x^2$.

357. Представьте выражение в виде квадрата одночлена:

а) $16a^4b^2$; б) $0{,}36x^8y^{12}$; в) $0{,}01a^{18}b^2c^{10}$;

г) $361m^6n^{30}$; д) $\frac{9}{25}a^{26}b^{14}$; е) $\frac{16}{49}x^{16}y^{22}z^4$.

358. Представьте выражение в виде куба одночлена:

а) $-8a^6$; б) $27x^9y^{15}$; в) $-0{,}001a^3b^{12}$; г) $0{,}064x^{18}y^{27}$;

д) $-\frac{1}{125}a^9b^6c^3$; е) $1\,000\,000y^{21}x^{30}$.

359. Замените звёздочку одночленом так, чтобы образовавшееся равенство было верно:

а) $* \cdot \frac{1}{3}x^4y^6 = -0{,}1x^4y^8$; б) $-8a^2b^2 \cdot * = 4a^5b^7$;

в) $0{,}6a^2b \cdot * = 6a^2b^3$; г) $5m^2n^3 \cdot * = -m^5n^6$.

360. Известно, что $3x^2y^3 = 7$. Найдите значение выражения:

а) $1{,}8x^2y^3$; б) $5x^2y^3$; в) $-9x^4y^6$; г) $6\frac{3}{7}x^6y^9$.

361. Известно, что $2b^2c = 5$, $(a^2b)^2 = 2$. Найдите значение выражения:

а) $(-2a^2b^2c)^3 \cdot (3ab^2)^2$; б) $(-0{,}5a^2b^4)^2 \cdot (2a^2bc)^3 \cdot a^2b$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

362. Найдите:

а) сумму длин всех рёбер куба, если она больше периметра его грани на 18 см;

б) площадь поверхности и объём этого куба.

363. В саду росли яблони и вишни, причём яблони составляли 40 % всех деревьев. Вишен было на 64 больше, чем яблонь. Сколько деревьев росло в саду? Сколько среди них было вишен? Сколько — яблонь?

364. Решите уравнение:

а) $2x - 3(x + 1) = 0$; б) $2x + 3 = 3(x + 1) - x$;

б) $7(2x - 5) + 3 = 45$; г) $9(x + 2) - 3x = 6(x + 3)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант I

1°. Вычислите: а) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; б) $1{,}7^2 - 8 \cdot 0{,}5^3$.

2°. Возведите в квадрат выражение $0{,}3ax^3$.

3•. Упростите выражение: $(-2ac^2)^2 \cdot (0{,}5a^2x)^3$.

4•. Докажите тождество: $4(7x - 1) + 3x = 31x - 4$.

5••. Запишите число 27 500 000 000 в стандартном виде.

Вариант II

1°. Вычислите: а) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$; б) $2{,}1^2 - 8 \cdot 0{,}5^4$.

2°. Возведите в квадрат выражение $-5cz^3$.

3•. Упростите выражение: $(3am^2)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}xm^4\right)^2$.

4•. Докажите тождество: $5 - x + 3(3x - 4) = 8x - 7$.

5••. Запишите число 17 770 000 000 в стандартном виде.

Вариант III

1°. Вычислите: а) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$; б) $3{,}7^2 - 4 \cdot 0{,}5^3$.

2°. Возведите в квадрат выражение $-1{,}2ac^2$.

3•. Упростите выражение: $(-0{,}5ac^2)^2 \cdot (4a^2x)^3$.

4•. Докажите тождество: $5x - 2(x - 4) = 3x + 8$.

5••. Запишите число 350 000 000 000 в стандартном виде.

Вариант IV

1°. Вычислите: а) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$; б) $2{,}3^2 - 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

2°. Возведите в квадрат выражение $-0{,}8x^2y$.

3•. Упростите выражение: $(-0{,}4x^3)^2 \cdot (-10ax^2)^3$.

4•. Докажите тождество: $9x - 2(2x + 6) = 5x - 12$.

5••. Запишите число 98 790 000 000 в стандартном виде.

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ ОЦЕНИВАНИЮ

Тестовые задания № 2

1. Представьте число 0,0009 в виде степени:

   а) $0,3^3$; б) $0,3^2$; в) $0,03^2$; г) $0,03^3$.

2. Представьте одночлен в виде степени $625x^8$:

   а) $(5x^2)^8$; б) $(5x^2)^4$; в) $(5x)^4$; г) $(5x)^8$.

3. Какое выражение тождественно выражению ax^2:

   а) $a \cdot x(-x)$; б) $a \cdot x + ax$; в) $a(-x)(-x)$; г) $ax \cdot ax$?

4. При каком m верно равенство $a^{16}a^m = a^{32}$:

   а) 14; б) 2; в) 1; г) 16?

5. При каком p верно равенство $\left(c^3\right)^p = c^{12}$:

   а) 1; б) 0; в) 2; г) 4?

6. Какое из уравнений не имеет корней:

   а) $x^2 = x^6$; б) $x \cdot x^3 = -1$; в) $0 \cdot x^3 = 0$; г) $x^5 \cdot x^3 = 1$?

7. При каком значении d выражения $9(x-3)-2(3x+5)$ и $dx-37$ являются тождественными:

   а) -3; б) 3; в) -4; г) 4?

8. Запишите сумму квадратов чисел x и y:

   а) $x^2 + y^2$; б) $(x+y)^2$; в) $2x + 2y$; г) $x^2 \cdot y^2$.

9. Запишите в стандартном виде число 24 000 000 000:

   а) $24 \cdot 10^9$; б) $2,4 \cdot 10^9$; в) $2,4 \cdot 10^{10}$; г) $0,24 \cdot 10^{10}$.

10. Найдите значение выражения $x^4 - 3x^2 + 4$, если $x = 2$:

    а) 6; б) 7; в) 8; г) 9.

Типовые задания к контрольной работе № 2

1°. Возведите в степень:

а) 5^3; б) $(0,2)^4$; в) $(-1)^5$.

2°. Найдите значение выражения:

а) $0,5a^3 - 3,9$, если $a = 2$; б) $3m^2 - 82$, если $m = -5$.

3°. Представьте выражение в виде одночлена стандартного вида:

а) $6xy \cdot 0,5ax$; б) $a^2 \cdot 4a^2x$.

4°. Возведите одночлен в квадрат и куб:

а) $-a^3b^2c^5$; б) $1\frac{2}{3}m^2n$.

5•. Вычислите:

а) $18 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3$; б) $2,4^2 - 1,6^2$; в) $\frac{15^4}{3^3 \cdot 5^5}$.

6•. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{2}ab^3\right) \cdot (-6a^2b)$; б) $(-0,2m^2n)^2 \cdot (-5mn^2)$.

7•. Решите уравнение:

а) $2x^2 \cdot x = 2$; б) $4x^3 \cdot x^2 = 0$; в) $3x^4 + 6 = 0$.

8•. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел $2,5 \cdot 10^{10}$ и $1,25 \cdot 10^8$.

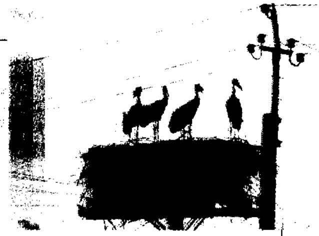
9••. Является ли тождеством равенство:

а) $|x - y| = |y - x|$; б) $|x^2| + 1 = |x^2 + 1|$?

10••. Докажите, что для любого натурального n значение дроби является натуральным числом:

$$\frac{7^{4n} - 1}{10}.$$

§10. МНОГОЧЛЕНЫ



В математике часто приходится складывать или вычитать одночлены. Например, $7x + 2a$ — сумма, а $7x - 2a$ — разность одночленов $7x$ и $2a$. Выражение $7x - 2a$ можно считать также суммой одночленов $7x$ и $-2a$, так как $7x + (-2a) = 7x - 2a$. Выражение $2x^4 - 3x^3 + x^2 - 9x - 2$ — сумма одночленов $2x^4$, $-3x^3$, x^2, $-9x$ и -2.

Сумму нескольких одночленов называют многочленом.

Каждое слагаемое многочлена называется его *членом*. Например, многочлен $2xy - 5x + 6$ содержит три члена: $2xy$, $-5x$ и 6.

Если многочлен содержит два слагаемых, он называется двучленом, три — трёхчленом. Одночлен также считается отдельным видом многочлена.

Существуют целые выражения, не являющиеся многочленами.

Например, выражения $(a + b)^2$, $2a - (b + x)^3$ целые, но не являются многочленами. Связи между упоминавшимися выражениями иллюстрирует рис. 31.

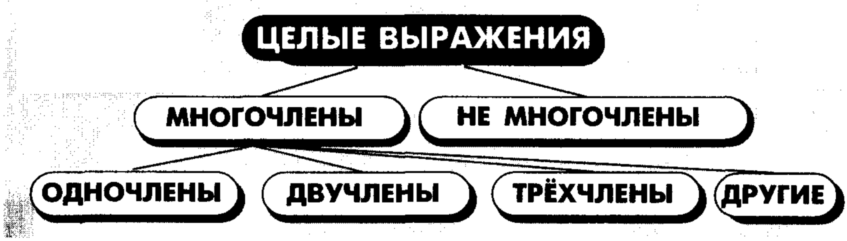


Рис. 31

Многочлен может иметь *подобные члены*, т. е. такие слагаемые, которые отличаются только коэффициентами или совсем не отличаются. Например, в трёхчлене $4x + 7x - 5$ первые два члена подобны. Приведя их, получим двучлен $11x - 5$, который тождественно равен данному трёхчлену.

Считают, что многочлен записан ***в стандартном виде***, если все его члены — одночлены стандартного вида и среди них нет подобных.

Например, среди многочленов

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 7, \qquad ab + bc - ca, \qquad 2ax - 3a \cdot 5x + 8$$

два первых выражения — многочлены стандартного вида, а третий — нет. На основе законов действий (см. с. 52) каждый многочлен можно представить в стандартном виде, например:

$$2ax - 3a \cdot 5x + 8 = 2ax - 15ax + 8 = -13ax + 8.$$

Члены многочлена можно записывать в разной последовательности. В основном их упорядочивают по убывающим показателям степени той или другой переменной. Например, упорядочив многочлен $5ax^2 + 6x^3 - 4a^2x + a^4$ по убывающим степеням переменной x, получим $6x^3 + 5ax^2 - 4a^2x + a^4$. Наибольший показатель степени переменной x равен трём, поэтому такой многочлен называют многочленом третьей степени относительно x. Его можно упорядочить и по убывающим степеням переменной a: $a^4 - 4a^2x + 5ax^2 + 6x^3$. Тогда это будет многочлен четвёртой степени относительно переменной a.

Хотите знать ещё больше?

Является ли многочленом выражение $(a + b)c$? Иногда отвечают на этот вопрос утвердительно, так как согласно распределительному закону умножения данное выражение тождественно равно двучлену $ac + bc$, а значит, и оно является двучленом. Это неправильно. **В алгебре выражения принято называть в зависимости от того, как они записаны, а не от того, как их можно записать.**

Рассмотрим пример. Виражение $8a$ можно представить в виде суммы двух, трёх или любого другого количества слагаемых:

$$8a = 3a + 5a,\ 8a = a + 3a + 4a,\ 8a = a + a + a + a + 4a.$$

Если, исходя из этого, выражение $8a$ называть и одночленом, и двучленом, и трёхчленом и т. п., то это будет очень неудобно. Поэтому в алгебре договорились выражения называть так, как они записаны, а не так, как их можно записать, выполнив те или другие тождественные преобразования.

$(a + b)c$ — не одночлен, не многочлен.

Проверьте себя

1. Что такое многочлен?
2. Приведите примеры двучлена, трёхчлена, четырёхчлена.
3. Какие члены многочлена называются подобными?
4. Можно ли одночлен считать видом многочлена?
5. Когда говорят, что многочлен записан в стандартном виде?

Выполним вместе!

1. Запишите многочлен в стандартном виде:

а) $5x+4x^2+3x^3-5x^3-4x^2-3x$; б) $2ab+3a^2\cdot ab+7ab^2(-ab)+3b$.

✔ Решение. а) Приведём подобные слагаемые и упорядочим члены многочлена:

$$\underline{5x}+\underline{\underline{4x^2}}+3x^3-5x^3-\underline{\underline{4x^2}}-\underline{3x}=-2x^3+2x.$$

б) Приведём к стандартному виду каждый одночлен заданного многочлена и упорядочим его члены по степеням переменной :

$$2ab+3a^2\cdot ab+7ab^2(-ab)+3b=2ab+3a^3b-7a^2b^3+3b=$$
$$=3a^3b-7a^2b^3+2ab+3b.$$

Ответ. а) $-2x^3+2x$; б) $3a^3b-7a^2b^3+2ab+3b$.

2. Вычислите значение многочлена

$5x^5-3x^4+4x^3+7+2x^4-4x^3+x^4-4x^5+2$, если $x=2$.

✔ Решение. Приведём многочлен к стандартному виду:

$$\underline{5x^5}-\underline{\underline{3x^4}}+4x^3+7+\underline{\underline{2x^4}}-4x^3+\underline{\underline{x^4}}-\underline{4x^5}+2=x^5+9.$$

Если $x=2$, то $x^5+9=2^5+9=32+9=41$.

Ответ. 41.

3. Два велосипедиста одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу. Найдите расстояние между A и B, если они ехали со скоростями a км/ч и b км/ч и встретились через t ч.

✔ Решение. *Первый способ.* За t ч первый велосипедист проехал at км, а второй — bt км. Итак, всё расстояние равно $(at+bt)$ км или $(a+b)t$ км.

Второй способ. За 1 ч велосипедисты приблизились на $(a+b)$ км, к моменту встречи через t ч они проехали $(a+b)t$ км. Это и есть искомое расстояние.

Ответ. $(a+b)t$ км.

...олните устно

365. Какое из выражений является многочленом:

а) $2x-3$; б) $37am^2$; в) $x^2-3x+\dfrac{5}{x}$; г) $y(x-y)$; д) -21?

366. Суммой каких одночленов является многочлен:

а) $ax-cx^2+3$; б) $-2x^2+3x-7$; в) $-m^2-n^2$;

г) $2c^3-3c^2-5c+1$; д) $\dfrac{1}{5}x^3-2+x^4+3x$?

367. Назовите многочлен стандартного вида:

а) $2x+3a-5$; б) $a^2-a+5a+b$; в) $-x+3xa-a+a^2$;

г) $m-m-n^2$; д) x^3+3x^2-3x+7; е) $-0{,}5a-4a^2+3a-1$.

368. Укажите степень многочлена относительно переменной x:

а) $2ax-3a+5$; б) x^3-x^5+4x; в) $2x^3y-3x^2y^2-1$;

г) $0{,}1abx+3{,}7x^2-ab$; д) $3ax^3-bx$; е) $m^3x^5-mx^5$;

ё) $0{,}7ax+8a^2x+5$; ж) $3x-x^3+27px$; з) y^5-a^3y.

Уровень А

369. Найдите сумму одночленов:

а) $3x$ и bx; б) $2abc^2$ и $3abc^2$; в) 2 и x; г) $7ac$ и $3ax$;

д) $-a^2$ и a^2; е) $14x^2y$ и $-6ac^2$; ё) $2a$ и $3b$; ж) $-a$ и a^2;

з) $3c$ и $-2y$; и) $-0{,}5$ и $0{,}5x$; й) $-4x$ и $2x$; к) q^3 и $-\dfrac{1}{3}q^3$.

370. Найдите разность одночленов:

а) $2a$ и $3x$; б) $-m$ и $5c$; в) $-4p$ и $2p$;

г) $-4{,}7x$ и 5; д) $-3a^2x$ и $-8a^2x$; е) a и $-a$.

371. Приведите подобные члены:

а) $4x^2+x-5x^2-12$; б) $-6ab+2a^2+b^2-ab$;

в) $8a-10ab+3a$; г) $-0{,}5x^2-y^2+2{,}2x^2+0{,}8y$;

д) $2a^2b-b^2a+7ab^2$; е) $\dfrac{2}{3}xy^3-\dfrac{3}{5}x^3y-1\dfrac{1}{3}xy^3+2x^3y$.

372. Выполните приведение подобных членов:

а) $4x^2+2x-7x^2-9x^3-2x$; б) $3a^4-12+13a^2+5-a^2+8a^4$;

в) $27m^5-17m^3-7+10m^3-30m^5$;

г) $y^4-2y^3+2+5y^3-2y-14+7y^4$.

373. Запишите в стандартном виде многочлен:

а) $a - b + 3a + 2b^2$; б) $7x - y^2 + 5xy - 2x \cdot 3y$;

в) $37 - z^3 + 3t - 35z^3$; г) $x + x^2 + x^3 - 2x^2 - x$;

д) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a \cdot 3c - ac$; е) $-105p + 15q + 10p \cdot 10{,}5$.

374. Запишите по убывающим степеням x многочлен:

а) $3x^4 - 5x^2 - x^3 - 2x$; б) $1 - x^2 - px - qx^3$;

в) $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$; г) $1 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$.

375. Вычислите значение многочлена:

а) $x^2 - 5x + 6$, если $x = 2$; б) $0{,}7x^2 + 0{,}3x^2$, если $x = 0{,}5$;

в) $2{,}8a - 1{,}8a^2$, если $a = -0{,}2$.

376. Вычислите значение многочлена:

а) $m^3 - n^2$, если $m = 2$, $n = -3$;

б) $s + 2t^2 - 4$, если $s = 2{,}3$, $t = 0{,}5$.

377. Определите площадь фигуры, изображённой на рисунке 32, если каждое их четырёх её отверстий — квадрат со стороной, равной c.

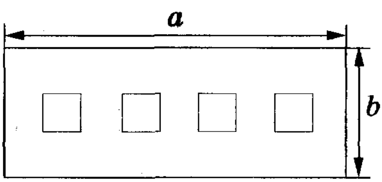


Рис. 32

378. Запишите многочлен по убывающим степеням a:

а) $3a^2 - 3a + 5 - a^3 + a^4$; б) $1 + a + a^2 - a^3 - a^5$;

в) $5a^5 - 5 + 2a + a^3 - 3a^2$; г) $2ac - 3a^2c + c^2 - a^3$.

Уровень Б

379. Вычислите значение многочлена:

а) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, если $x = 1{,}2$;

б) $2c^3 - 5c^2 - c + 7$, если $c = -2{,}1$;

в) $3a^2 - 2ax - x^2$, если $a = -0{,}4$ и $x = 1{,}2$;

г) $0{,}25n^2 + 0{,}5m - m^2$, если $n = 4{,}8$ и $m = 2{,}4$.

380. Запишите многочлен в стандартном виде:

а) $x^3 - 2x^2 + 3x - 5x^2$; б) $4x - 2x \cdot 3y - 3y - 5xy$;

в) $2{,}3 - ac + a^2c - 1{,}3$; г) $2 - c^2 + c^3 - 2c^3 + c^3 \cdot 5$;

д) $2a^2 \cdot 3a^3 + 5a^4 \cdot (-2a)$; е) $x \cdot 2x^2 + 2x \cdot x^2 - x^2 \cdot x^2$;

ё) $3a - 7a(-2a^2)^2 + a^5 + a$; ж) $(2x^3)x + x(-2x)^3 + x^3(-x^2)$.

381 Запишите многочлен в стандартном виде:

а) $(2a^2)^3 + 4 \cdot 3a^5 - 5a - 9 - 3a^6 + a$;

б) $x^2 + 2x^3 - (3x)^2 - 4x^2 \cdot x^3 + 7 - 2x^3$;

в) $(-5x) \cdot 2x - (x^4)^2 + 6x^2 + 10 + x^3 \cdot 3x^5 - 3x^5$.

382 Запишите в виде многочлена число, имеющее:

а) a тысяч, b сотен, 0 десятков и c единиц;

б) a десятков тысяч, b сотен, c десятков и 0 единиц.

383 Запишите в виде двучлена число, которое от деления на число m:

а) даёт частное 43 и остаток 2; б) даёт частное 5 и остаток r.

Запишите в виде многочленов ответы к задачам (384—391).

384 В одном мешке a кг муки, во втором — на b кг больше. Сколько килограммов муки в обоих мешках вместе?

385 Один килограмм картофеля стоит m грн., а один килограмм капусты — n грн. Сколько надо вместе заплатить за 8 кг картофеля и 4 кг капусты?

386 Из куба, ребро которого равно $3a$, вырезали два прямоугольных параллелепипеда, как показано на рисунке 33. Найдите объём и площадь поверхности оставшегося многогранника.

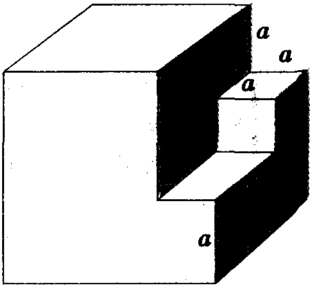


Рис. 33

387 Книга стоит a грн., а 10 тетрадей — m грн. Сколько надо заплатить вместе за 3 книги и 5 тетрадей?

388 На машину нагрузили m мешков пшеницы, n мешков гречки и один мешок сахара. Найдите массу всего груза, если масса одного мешка пшеницы a кг, гречки — b кг, а сахара — 50 кг.

389 Один поезд едет со скоростью v_1 км/ч, а второй — v_2 км/ч. На сколько километров они приблизятся за полчаса, двигаясь навстречу друг другу?

390 Из города в село выехал один велосипедист, а через полчаса навстречу ему из села в город — второй. Ехали они соответственно со скоростями v_1 и v_2 км/ч и встретились через полчаса. Найдите расстояние от города до села.

391. Из городов A и B одновременно в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл. Ехали они соответственно со скоростями v_1 и v_2 км/ч. Найдите расстояние от A до B, если автомобиль догнал мотоцикл через 1,5 ч.

392. Определите периметры фигур, изображённых на рисунке 34.

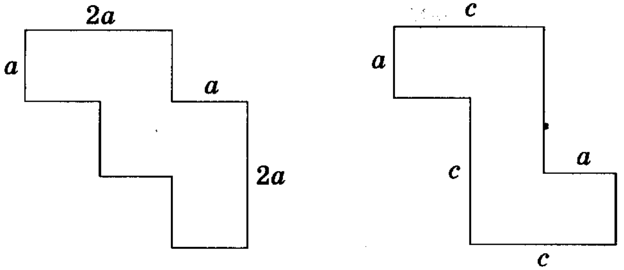


Рис. 34

393. Определите площади фигур, изображённых на рисунке 35.

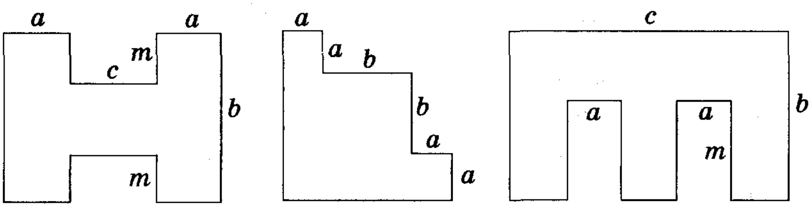


Рис. 35

394. Упростите выражение:

а) $-44xy^2 + 16y + x^2y + 50xy^2 - 16y - 7x^2y$;

б) $8 - a^2b^2 - 4b^2 + 23a^6 + 5a^2b^2 - 30 + 4a^6$;

в) $9a^2 - 2ax^3 + a^4 - a^2x^3 + ax^3 - a^4 + 5ax^3$;

г) $-10abc + 2ab + 2bc + 2ac - 7abc - 6ac$.

395. Вычислите значение многочлена:

а) $9x^2 - 4x^2 + 15 - x^5 + 7x^2 - 8x^5$ при $x = -7$;

б) $2y^{10} - 10y^3 - 3y^{10} - y^4 + y^{10} + 6y^3$ при $y = -5$;

в) $-6a^3b^2 + a^2b^3 - 10ab + 5a^3b^2 - a^2b^3$ при $a = 10$, $b = 0{,}9$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

396. Вычислите:

а) $2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$;

б) $(-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, \ldots, (-1)^{2n}, (-1)^{2n+1}$;

в) $10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8$;

г) $0{,}1^2,\ 0{,}1^3,\ 0{,}1^4,\ 0{,}1^5,\ 0{,}2^2,\ 0{,}3^3,\ 0{,}4^4$.

397. Даны выражения $3x$ и $5y$. Запишите: а) разность их квадратов; б) квадрат их разности; в) сумму их квадратов; г) квадрат их суммы.

398. Рабочий получил путёвку в санаторий со скидкой 90 % и заплатил за нее 360 грн. Какова полная стоимость путёвки?

§11. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Чтобы сложить два многочлена, то есть найти сумму многочленов, достаточно соединить их знаком «плюс».

Например, суммой многочленов $a^2 + ax + x^3$ и $c^2 + cx + x$ является многочлен $a^2 + ax + x^3 + c^2 + cx + x$. Если в найденной сумме есть подобные члены, их следует привести. Так же складывают три и более многочленов.

Пример. Сложите многочлены

$$x^2 + 2x + 4, \quad 3x^2 - 4 \text{ и } 3 - 2x.$$

Решение.

$$x^2 + 2x + 4 + 3x^2 - 4 + 3 - 2x = 4x^2 + 3.$$

Сложение многочленов подчиняется ***переместительному*** и ***сочетательному законам***: какие бы не были многочлены A, B и C, всегда

$$A + B = B + A \text{ и } (A + B) + C = A + (B + C).$$

Чтобы найти разность двух многочленов, надо из первого многочлена вычесть второй.

Выполняя такое задание, после первого многочлена пишут знак «минус», а второй берут в скобки.

! Раскрывая скобки, перед которыми стоит знак «минус», знаки всех членов, заключённых в этих скобках, изменяют на противоположные.

Пример. Найдите разность многочленов

$$ab + c - 4 \text{ и } 2ab + c - 3.$$

Решение. $ab + c - 4 - (2ab + c - 3) =$
$= ab + c - 4 - 2ab - c + 3 = -ab - 1.$

Сумма и разность произвольных многочленов — многочлены.

Хотите знать ещё больше?

Какой может быть сумма двух двучленов? Она может иметь несколько членов, быть равной любому числу, в частности и нулю. Прибавьте, например, у двучлену $4c - 5x$ последовательно двучлены $c^2 + 1$, $c^2 + 5x$, $5x - 7$, $5x - 4c$ и убедитесь в этом.

Так как многочленами считают и одночлены, и любые числа, в том числе нуль, то сумма любых многочленов является многочленом. Поэтому говорят, что во множестве многочленов сложение и вычитание всегда возможно.

Проверьте себя

1. Как складывают многочлены?
2. Как вычитают из одного многочлена второй?
3. Всегда ли сумма нескольких многочленов является многочленом?
4. Сформулируйте правила раскрытия скобок.
5. Как вы понимаете утверждение, что во множестве многочленов действия сложения и вычитания всегда возможны?

Выполним вместе!

1. Найдите сумму и разность многочленов

$$x^2 - 2x + 1 \text{ и } 2x^2 - x.$$

✔ Решение. $x^2 - 2x + 1 + 2x^2 - x = 3x^2 - 3x + 1;$

$$x^2 - 2x + 1 - (2x^2 - x) = x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + x = -x^2 - x + 1.$$

Ответ. $3x^2 - 3x + 1$ и $-x^2 - x + 1$.

2. Докажите, что сумма трёх последовательных натуральных чисел всегда делится на 3.

✔ Доказательство.

Первый способ. Обозначим произвольное натуральное число буквой n. Тогда следующие за ним натуральные числа будут $n + 1$ и $n + 2$. Их сумма равна:

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3.$$

Числа 3 и $3n$ при каждом натуральном n делятся на 3. Итак, какое бы ни было натуральное число n, сумма $n + (n + 1) + (n + 2)$ всегда делится на 3. Что и требовалось доказать.

Второй способ. Если n — второе из трёх последовательных целых чисел, то первое из них $n - 1$, а третье — $n + 1$. Тогда $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$; число $3n$ делится на 3.

3. Докажите, что разность чисел $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ делится на 99.

Запись $\overline{abc}$ означает трёхзначное число, содержащее a сотен, b десятков и c единиц

✓ Доказательство. Запишем каждое из чисел в виде многочлена, найдём их разность и приведём подобные слагаемые.

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c;\ \overline{cba} = 100c + 10b + a.$$

Тогда $\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) =$
$= 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99(a - c).$

Значит, $\overline{abc} - \overline{cba}$ делится на 99.

Выполните устно

399. Найдите сумму и разность многочленов:
а) $2x^3 - c$ и $3c$; б) $5ax - 4$ и $-4ax + 4$;
в) $0{,}5n - p^2$ и $2{,}5p^2$; г) $-2y + c^2$ и $c + 2y$.

400. Найдите сумму и разность выражений:
а) 0 и $a + c + x$; б) a и $a + c + x$; в) $a + c$ и $a + c - x$.

Уровень А

401. Сложите многочлены:
а) $3a^2 + 8a - 5$ и $-5a^2 + 2a + 4$; б) $12x^3 - 7x$ и $4x^2 + 3x - 2$;
в) $-7a^3b + 5ab^2 - ab$ и $3a^2b - 4ab + 2a^3b$;
г) $6a^2 - 4b^2 + c^2 + 2ab - 3bc$ и $-10c^2 - 6a^2 - ac$.

402. Найдите разность многочленов:
а) $2x^3 - x^2 - 3x + 7$ и $x^3 - 3x + 17$;
б) $4x^5 + x - 2x^3 - 7$ и $x^5 - x^2 + 3x - 2$;
в) $8a^2c - 7ac^2 - a + c$ и $7a^2c^2 - a + 4^2$.

Упростите выражение **(403—404)**.

403. а) $7x^2 - 2x + (5 + 11x - 6x^2)$; б) $8ab + 7b - (4ab + 7b - 3)$;

в) $1 - n + n^2 - (3n^2 - 2n + 5) - 7n$;

г) $x^2y + xy^2 - (3x^2y - 2xy^2 - 7) + 2x^2y$.

404. а) $2a^2 + 3a - 4 + (5a^2 - a + 7)$;

б) $6x^3 + 8x - 5 - (4x^2 + 8x - 5)$;

в) $3z^4 - 2z^3 + 12z - 5 - (3z^4 - 2z - 5)$;

г) $-5c^3 - 2c + 3c^2 - (1 - c - 2c^2 - 4c^3)$;

д) $(2x + y) + (3x - 4y) - (5x + 3y - 1)$;

е) $8ac - (3a^2 - 2c^2 + 2ac) - (4a^2 + 2c^2)$.

Вычислите значение выражения (405—406).

405. а) $c^3 - 2c^2 + 3c - 4 - (c^3 - 3c^2 - 5)$, если $c = 2$;

б) $4x^2 - (-2x^3 + 4x^2 - 5)$, если $x = -3$;

в) $2p - (1 - p^2 - p^3) - (2p + p^2 - p^3)$, если $p = \frac{2}{3}$.

406. а) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (3x - 3x^2)$, если $x = 3$;

б) $5a^4 - 2a^3 - (4a^4 - 2a^3 + 1)$, если $a = -2$;

в) $a^2 - 2ab + b^2 - (a - b - 3)$, если $a = 5$, $b = 4$;

г) $2 + xy - x^2 - (y^2 - 2xy + 4)$, если $x = 0{,}2$, $y = -0{,}5$.

407. При каком значении x значения многочленов $x^2 - 8x + 9$ и $x^2 + 6x + 4$ равны?

408. При каком значении t значение трёхчлена $t^2 - 2t + 1$ на 2 больше значения двучлена $t^2 + 5$?

Решите уравнение (409—410).

409. а) $4x - 5 - (7x + 8) = 2$; б) $9z + 17 - (4z - 5) = 38$;

в) $24 - (x^2 + 8x - 17) = 5 - 5x - x^2$;

г) $19 - (3x^2 - 2x) - (6x - x^2) = 7 - 2x^2$.

410. а) $(5x^2 + x^3 - 7) - (2x^3 - 5 + 4x^2) = -(1 + x^3)$;

б) $(x^3 - 2x^4 + 7) - (3x^3 + 3 - 5x^4) = 6 + 3x^4$;

в) $0{,}5y - (4{,}3y + 2{,}7) + 0{,}3y = 46{,}3$;

г) $\frac{1}{3}t + \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}t\right) = 2 - 3t$;

д) $-2{,}5x - (3{,}7 - 4{,}3x) = 1{,}7$;

е) $\frac{2}{5}z = -\left(\frac{2}{5} - z\right) + \frac{3}{5}z + 8$.

Уровень Б

411. Найдите сумму многочленов:

а) n^3+3n^2+3n+1 и $3-3n-n^2-2n^2+n^4$;

б) $-5xy-4x^2+y^2$ и $y^3-3x^2+5xy-y^2-2$;

в) $0{,}7c^4-2{,}8c^2+7$ и $2{,}8c^2-0{,}7c^4-7$;

г) $\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x+12$ и $\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+x^4-10$;

д) $0{,}8x^3+1{,}2x^2-3$, $4{,}5x^2-x-0{,}3$ и $0{,}2x^3-1{,}2x^2+3{,}3$.

412. Найдите разность многочленов:

а) $2x^2+3x+1$ и x^3+3x; б) $9m^3+2m+5$ и $4m^3-m+6$;

в) $\frac{1}{2}a+b^2$ и $3a-\frac{1}{2}b^2-a^2$; г) $-2xc^2$ и $0{,}25xc^2-2x^2$;

д) $-4a^3b+3a^2b^2$ и $3a^3-b^3+3a^2b^2-4ab^3$;

е) $-\frac{2}{3}xy-\frac{3}{5}x^2y$ и $2\frac{1}{3}xy-x^2y-2\frac{1}{2}y^2$.

Упростите выражение (413—415):

413. а) $1-a+3a^2+4a^3+(-a^2-3a^3)$;

б) $x-2xy+3xy^2+(4xy^3+2xy-3x)$;

в) $(2az-3z^2)+(-az-z^2)+(-5az)$;

г) $0{,}7a-0{,}7a^2-0{,}7-(5{,}7a^2-4{,}7a-1{,}7)$;

д) $-4m^2-(m-n^2)+(3m+4m^2)-2n^2$.

414. а) $36cx^2+18c^2x-(13c^2x-16cx^2-x)$;

б) $-z^3+3mz-2-(2+z-3mz)$;

в) $2\frac{1}{3}az^2-\left(\frac{2}{3}a^2z-2\frac{1}{6}az^2-1\frac{5}{6}z^3\right)$;

г) $x^2-x+c-(x^2+c)-(3c-5-x)$;

д) $2\frac{1}{2}an-3\frac{1}{2}am-\left(\frac{1}{2}an-5\right)-1{,}5an$.

415. а) $\frac{1}{2}ax^2-\frac{2}{3}a^2x-2ax^2-a^2x+\frac{1}{3}a^2x$;

б) $0{,}3m^2n-1{,}7mn^2-0{,}2mn^2-1{,}3m^2n$;

в) $\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}ax^3-\left(-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{4}a+5\right)$;

г) $2\frac{1}{2}ax^2c+1\frac{1}{3}x^2c-\left(\frac{4}{3}cx^2+\frac{5}{2}ax^2c\right)$.

416. Периметр многоугольника $ABCDEF$ равен $2p$, $AB = a$, $AF = c$, $EF = b$. Найдите длину каждой из сторон BC, ED и DC (рис. 36).

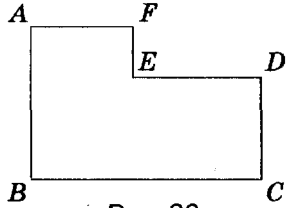


Рис. 36

417. Докажите, что выражение при любых значениях переменной принимает положительное значение:

а) $(x^3 + 3x^2 - 3x) + (x^6 + 4x^3 - 7x) - (5x^3 - 10x - 5)$;

б) $-((2x^3)^2 - 7x^9) - (5(x^3)^2 - (x^3)^3 - 5) + (10(x^2)^3 - (2x^3)^3$.

418. Докажите, что выражение при любых значениях переменной принимает отрицательное значение:

а) $(5x^5 + 3x^3 - 1) - (x^8 + 4x^5 - 8x^3) - (x^5 + 5x^4 + 11x^3)$;

б) $(4 - (3x^5)^3) - ((3x^5)^2 - (2x^3)^5) - ((x^2)^5 + 9 + 5x^{15})$.

419. Замените звёздочку многочленом так, чтобы получилось тождество:

а) $* - (8a^3 - 2a^2 + 7) = 3 - a^2$;

б) $* + (3x + 8) = -3x^2 + 2x - 15$;

в) $(2xy - 11x^2 + 10y^2) - * = 5x^2 + 4y^2 - 6$.

420. Какой многочлен в сумме с многочленом $2a^3 - a^2 - a + 3$ тождественно равен:

а) $3a^3 - 5a^2 - a + 7$; б) $a^2 - 6a + 13$?

421. Какой многочлен нужно сложить с многочленом $5x^2 - x + 17$, чтобы получить:

а) $x^3 - 8x^2 + 3x + 9$; б) $-6x^2 + 4x - 23$?

422. От какого многочлена нужно вычесть многочлен $9c^2 - 6c + 2$, чтобы получить:

а) $5c^3 - 8c^2 - 6c - 8$; б) $a^3 - c^2 + c + 2$?

423. Какой многочлен нужно отнять от многочлена $6y^3 - y^2 + 3y - 1$, чтобы получить:

а) $y^3 + 3y^2 + 3y + 1$; б) $2y^4 + 3y^2 + 3y - 2$?

424. Докажите тождество:

а) $(3a^2 + 2b^2 + c^2) - (3c^2 + 2a^2 - b^2) + (-3b^2 + 2c^2 - a^2) = 0$;

б) $-z^2 - (x^2 + (y^2 - (x^2 + y^2 + z^2) + z^2) + y^2) - x^2 = -x^2 - y^2 - z^2$;

в) $ab + bc + ac - (abc + ab - (abc - bc - (abc + ac))) = -abc$;

г) $a^3 - (b^3 - (a^2b - ab^2)) - (-(-(a^2b - ab^2) + b^3) - a^3) = 2a^3$.

425. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения:

а) $(7n+21)-(10-4n)$ кратно 11;

б) $8n^2+7n-4-(3n^2+12n-19)$ кратно 5;

в) $(12n-5)-(5n-9)$ при делении на 7 даёт в остатке 4.

426*. Представьте в виде многочлена число:

а) $\overline{abc}$; б) $\overline{xyx}$; в) $\overline{abc}+\overline{ac}$;

г) $\overline{xyz}-\overline{xy}$; д) $\overline{abc}+\overline{bca}$; е) $\overline{xyz}-\overline{zxy}$.

427*. Докажите, что:

а) сумма чисел $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ и $\overline{ca}$ кратна 11;

б) сумма чисел $\overline{xyz}$, $\overline{yzx}$ и $\overline{zxy}$ кратна 111;

в) разность чисел $\overline{a0b}$ и $\overline{b0a}$ кратна 99.

г) разность $(\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc})-(\overline{ca}+\overline{cb}+\overline{ba})$ кратна 18.

428*. Докажите, что:

а) сумма семи последовательных натуральных чисел всегда делится на 7;

б) сумма четырёх последовательных натуральных чисел всегда при делении на 4 даёт в остатке 2;

в) сумма трёх последовательных чётных натуральных чисел всегда делится на 6;

г) сумма трёх последовательных нечётных натуральных чисел всегда делится на 3 и никогда не делится на 6.

429*. Покажите, что если числа расположить так, как на рисунке 37, то получится магический квадрат при любых значениях переменных a и c.

$a+7c$	a	$a+5c$
$a+2c$	$a+4c$	$a+6c$
$a+3c$	$a+8c$	$a+c$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вычислите (430—431).

430. а) $-\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{2}{9}+\left(-\frac{2}{3}\right)^2$;

б) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)\cdot(-2)^3-3\frac{1}{4}:\left(-\frac{1}{2}\right)^2$.

431. а) $6 - (-0{,}2) : 0{,}4 + 0{,}8 - 2{,}4 : 6$;

б) $-2\frac{3}{5} - 6 : (-1{,}5) + (3{,}2 - 0{,}2 \cdot 6)^2$.

432. Найдите среднюю урожайность пшеницы на поле, если на его третьей части с каждого гектара намолотили в среднем 30 ц, а на остальной площади — по 50 ц с 1 га.

§12. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Умножим двучлен $a + b$ на одночлен m. По распределительному закону умножения

$$(a + b)m = am + bm.$$

Так же можно умножить произвольный многочлен $a + b - c$ на m:

$$(a + b - c)m = am + bm - cm.$$

Каждое из этих равенств — тождество. Если в любое из них вместо любой переменной написать то же самое выражение, то снова получим тождество:

$$(2x + b)m = 2xm + bm,$$

$$(a + b - c) \cdot 4a^2 = a \cdot 4a^2 + b \cdot 4a^2 - c \cdot 4a^2 =$$
$$= 4a^3 + 4a^2b - 4a^2c.$$

! **Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на данный одночлен и результаты сложить.**

По этому правилу можно также умножить одночлен на многочлен, так как множители можно менять местами.

Пример.

$$2ax \cdot (3x^2 - x + 4) = 2ax \cdot 3x^2 - 2ax \cdot x + 2ax \cdot 4 =$$
$$= 6ax^3 - 2ax^2 + 8ax.$$

Хотите знать ещё больше?

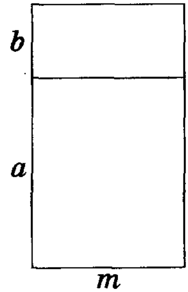


Рис. 38

При положительных значениях a, b, m равенство $(a+b)m = am + bm$ можно проиллюстрировать геометрически (рис. 38). Площадь прямоугольника с основанием m и высотой $a+b$ равна сумме площадей двух прямоугольников, основания которых a и b, а высота — m.

В алгебре равенство $(a+b)m = am + bm$ считается верным не только для положительных чисел a, b, m, но и для отрицательных и любых других чисел и даже выражений. В частности, если вместо переменной b подставить выражение $-c$ или $c-d$, то будем иметь:

$$(a-c)m = (a+(-c))m = am + (-c)m = am - cm,$$
$$(a+c-d)m = (a+(c-d))m = am + (c-d)m = am + cm - dm.$$

Значит, $(a-c)m = am - cm$, $(a+c-d)m = am + cm - dm$.

Каждое из этих равенств — тождество, то есть равенство верно для произвольных чисел и выражений a, b, c, d, m.

Проверьте себя

1. Как умножить многочлен на одночлен?
2. Следствием какого закона является это правило?
3. Сформулируйте распределительный закон умножения.
4. Правильно ли тождество $(a+b)c = c(a+b)$? Почему?
5. Чему равно произведение разности $a-b$ на c?

Выполним вместе!

1. Выполните умножение $2a + 3b - c$ и $5xy$.

Решение. $(2a + 3b - c) \cdot 5xy =$
$= 2a \cdot 5xy + 3b \cdot 5xy - c \cdot 5xy = 10axy + 15bxy - 5cxy$.
Ответ. $10axy + 15bxy - 5cxy$.

2. Решите уравнение: $(3x - 5) \cdot 2x = 6x^2 + 7$.

Решение. $3x \cdot 2x - 5 \cdot 2x = 6x^2 + 7$,
$6x^2 - 10x = 6x^2 + 7$, $-10x = 7$, $x = -0,7$.
Ответ. $-0,7$.

3. Один брат старше второго на 6 лет, а 3 года назад он был вдвое старше брата. Сколько лет каждому из них?

Решение. Если младшему брату x лет, то старшему —

$(x+6)$ лет. Три года назад младшему было $(x-3)$, а старшему — $(x+6-3)$ года. Тогда старший брат был вдвое старше младшего, значит,

$$x+3=2(x-3).$$

Решим это уравнение:

$$x+3=2x-6, \quad -x=-9, x=9.$$

Если младшему брату 9 лет, то старшему — $9+6=15$.

Ответ. 9 лет и 15 лет.

Выполните устно

433. Представьте в виде многочлена произведение:
а) $(x+y)c$, $(x-y)c$, $(2x-y)c$;
б) $(x+y)n$, $(x-y)n$, $(3x-y)n$;
в) $(2+a)c$, $(2-a)c$, $(2-an)c$.

434. Тождественны ли выражения:
а) $2(a-5)$ и $2a-10$; б) $(x-y)\,5$ и $5x-5y$;
в) $3c(a-x)$ и $3ac-3cx$; г) $(x-7)(-2)$ и $14-2x$?

435. Решите уравнение:
а) $x(x-3)=0$; б) $x(x+5)=0$; в) $(y-12)\cdot 7y=0$.

Уровень A

Выполните умножение (436–438).

436. а) $3a+c$ и $2a$; б) $8x-y$ и $3xy$; в) x^2-x и $2x$;
г) m^3+3m и m^2; д) $2a+3$ и $4a$; е) $3x-y$ и $2xy$.

437. а) $8ac-1$ и $2ac^2$; б) $6an-m$ и amn;
в) a^2-2c и $0{,}5c^2$; г) $4c^3-ac$ и $0{,}5ac^2$;
д) $-x-3y^2$ и $5x^4y$; е) $-0{,}5a-xy^2$ и $-2a^2$.

438. а) x^3+3x-1 и x^2; б) x^2+mx+m^2 и $-3mx$;
в) $2-a+a^2$ и $-\frac{1}{2}ab^2$; г) $1\frac{2}{3}x-x^2-\frac{2}{3}$ и $-9xy^2$.

439. Представьте в виде многочлена выражение:
а) $(x+1)x^2$; б) $a^2(b-c)$; в) $(n^2-n)n^3$;
г) $(2a+3b)\cdot 0{,}1$; д) $(-a+ac)c^2$; е) $-2a(a^2-1)$.

440. Упростите выражение:

а) $2a^3(4a^2+3a)-6a^4$; б) $7x^2-2x(3x-y)$;

в) $2x(x-1)-x^2$; г) $(3-a)a^2-3a^2$;

д) $(m-n)mn+2n^2m$; е) $(z-2)\cdot(-3z)$;

ё) $-3c^3+(c-1)c^2$; ж) $2p-(p^2+2)p$.

441. Тождественны ли выражения:

а) $(a-x)a$ и a^2-ax; б) $(x-y)x^2$ и x^3-x^2y;

в) $(2p^2+q)q$ и q^2+2p^2q; г) $(m-n-1)mn$ и m^2n-n^2m?

442. Вычислите значение выражения:

а) $(b^2-4)b-b^3+3b$, если $b=-2{,}7$;

б) $(a^2-1)a-(a-1)a^2$, если $a=0{,}8$;

в) $c+c^2+c^3-c(1+c)$, если $c=0{,}5$;

г) $(x-y)x+(x-y)y$, если $x=2$ и $y=3$.

Решите уравнение **(443–445)**.

443. а) $2(x-3)+5(x-2)=12$; б) $3(1-x)-2(3-x)=5$;

в) $3z-7(2z+4)=18$; г) $2+3y-7(5-y)=15$.

444. а) $2z-15(1-2z)=7z$; б) $8c-(3-7c)=9c+2$;

в) $1-8(3-2y)=2(1-y)$; г) $3z-(z-5)\cdot 4=(1-5z)\cdot 3$.

445. а) $x^2-3x+1=x(x+2)$; б) $3t-t^2=t(2-t)$;

в) $0{,}7x+0{,}8=2{,}6(x-1{,}5)$; г) $1{,}7(a-3)-a=2{,}3(a+1)$.

Уровень Б

Выполните умножение **(446–447)**.

446. а) $3x^2-4x+5$ и $2x^3$; б) $0{,}5t^3-1{,}2t^2+t-0{,}2$ и $10t^2$;

в) $5y^3-7y^2+y-9$ и $5yx$; г) $\frac{1}{3}z^4-\frac{2}{5}z^3-2z+\frac{3}{5}$ и $-15yz^2$.

447. а) $2ac^3$ и $3a^2-4ac+5c-a$;

б) $-2nx$ и $-3x^3-5x^2n+x-4n^2$;

в) $0{,}4a^2c$ и $5a^3-10a^2c+7c^2-20$;

г) $-\frac{2}{3}xy^2$ и $6x^4-3x^2y-xy^2-9xy$.

448. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(2ax+3)\cdot a^2x^3$; б) $(-0{,}7cy^2-z^2)\cdot 2c^3z$;

в) $0{,}3nz\cdot\left(\frac{1}{3}n^2-\frac{2}{3}z^3\right)$; г) $-2\frac{1}{3}x^3y\cdot\left(6xy^2+\frac{3}{7}x^2\right)$.

Упростите выражение (449–451).

449. а) $3x^2(x^3-5x)+15x^3$; б) $4a^3-2a(a-2a^2+1)$;
в) $0{,}8ac^2+a^2-(a-c^2)\cdot a$; г) $x^3+(x-5)\cdot(-x^2)+x^2$.

450. а) $(a^2b-1)a-b(a^3-1)$; б) $2c^4+(c^2-3)c^2-3c^4$;
в) $-5a^2x-ax^2+ax(a+x)$; г) $\frac{1}{4}x^2z-\frac{1}{3}z^3-(x^2-z^2)z$.

451. а) $2ac+3a^2c^2-ac(2+3ac)+7$;
б) $3acx^2-bcx^2+a^2-(3a-b)\cdot cx^2$;
в) $-2-3a^2-a(5a^3-3a+1)+6a^4$;
г) $3{,}4ax^3-2{,}5a^3x-1{,}5-ax(x^2-2{,}5a^2)$.

Решите уравнение (452–456).

452. а) $3(2x-5)+7(3x-4)=3x+77$;
б) $5(4-7x)-3(5x+1)=x-85$;
в) $6(2z-12)-5(11-3z)=5z+5$;
г) $4(3y-13)+7(15-3y)=9y+47$.

453. а) $0{,}8(x-0{,}4)+0{,}6(x-0{,}6)=1$;
б) $0{,}4(2x-3)-0{,}5(3x-0{,}2)=-2{,}5$;
в) $-\frac{2}{3}(y-6)-\frac{3}{4}(2y-16)=-3\frac{1}{2}$;
г) $4{,}3-2x-3\left(1{,}1+\frac{2}{3}x\right)=x+\frac{2}{3}$.

454. а) $5(8y-1)-7(4y+1)+8(7-4y)=19$;
б) $7(6z-1)+5(7-12z)+3(1+2z)=23$;
в) $6(3y-4)-5(y-3)+3(2y-1)=83$;
г) $9(3x-4)+4(x+2)-7(2x-1)=30$.

455. а) $x(3x-4)+5(x-2)-3x(x+1)=0$;
б) $y^2-3(y-5)+y(4-y)+5y=10y+7$;
в) $5z(1-2z)-4(z-3)+2z(3+5z)=14$;
г) $0{,}4x-3{,}5(2-4x)+0{,}5x(2x-1)=x^2+132$.

456. а) $\frac{1}{3}(3x-2)-\frac{1}{3}(9-2x)=\frac{1}{2}x$;
б) $\frac{1}{6}(8-z)-\frac{1}{3}(5-4z)=\frac{1}{2}z+3$;
в) $0{,}5(9x+7)-\left(x-\frac{1}{7}x\right)=36\frac{2}{7}$;

г) $2-\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}y+\frac{7}{4} = -\frac{1}{5}(y+17)$.

457. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

а) $2(a^3+6)+5a(3a-a^2)-3a^2(5-a)$;

б) $2x^3(8-5x)-8x(2x^2+x^3)+6(3x^4-4)$;

в) $6x(2y^2-(5x+y)\cdot 3y)+3xy(2y+30x)$;

г) $3ab+6((2a+b)a+5)-3a(3b+4a)$.

458. В хозяйстве было 305 коров и тёлок. После того как количество коров увеличилось на 15, а тёлок — на 90, тёлок стало в 4 раза больше, чем коров. Сколько в хозяйстве стало коров?

459. Сумма двух чисел равна 60. Если одно из них умножить на 2, а другое — на 7, то сумма произведений будет равна 70. Найдите эти числа.

460. На 31,5 грн. купили несколько тетрадей по 60 к. и блокнотов по 1,3 грн., всего 35 штук. Сколько купили тетрадей и сколько — блокнотов?

461. Одна сторона прямоугольника в 4 раза больше другой. Если меньшую сторону увеличить на 3 см, то площадь прямоугольника увеличится на 24 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

462. Одна сторона прямоугольника больше другой в 3 раза. Если большую сторону уменьшить на 5 см, то площадь прямоугольника уменьшится на 200 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

463. Одно из двух чисел в 6 раз больше второго. Если меньшее из них увеличить на 5, то их произведение увеличится на 75. Найдите эти числа.

464. Три года назад отец был старше сына в пять раз, а теперь — в четыре. Сколько лет каждому?

465. Сколько лет ученику, если известно, что через 10 лет он будет в 5 раз старше, чем был 10 лет тому назад?

466. В одной бочке 99 л бензина, а во второй — 57 л. Из первой каждый день берут по 12 л, а из второй — по 10 л. Через сколько дней в первой бочке бензина станет в 3 раза больше, чем во второй?

467. В одном сосуде 84 г кислоты, а во втором — 12 г. Сколько кислоты нужно перелить из первого сосуда во второй, чтобы в первом её стало в два раза больше, чем во втором?

468. Вместо звёздочек впишите одночлены так, чтобы получилось тождество:

а) $-4x^2 \cdot (* - *) = 2x^3 + 12x^4$;

б) $5ac \cdot (* + * - *) = 50a^2c - 15ac^2 - ac$;

в) $(-x^2 + *) \cdot (-6x) = * + 42x^5$;

г) $(* + 0{,}25xy - *) \cdot 4x^2y = 2x^2y^2 + * + 20x^2y^3$;

д) $(2m^3 - 9m) \cdot * = 10m^6 - *$;

е) $*(* - xy^3 + 4y^4) = 12x^2y^3 - 4x^3y^4 + *$.

469. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $-4x(x^2 - x - 3) + 2x(2x^2 + x - 5)$ при $x = -3$;

б) $3a(4a^2 - 3a) - 6(4 + 2a^3) - 5a(2 - 5a)$ при $a = \frac{1}{2}$;

в) $(5a(a - 4b) + 12ab) \cdot 2b + 16ab^2$ при $a = 3$, $b = 1{,}2$;

г) $\frac{1}{2}x(6y(3x + 2y) - 8xy) - 5x^2y$ при $x = -\frac{1}{6}$, $y = 11$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

470. Положительно или отрицательно значение выражения:

а) $(-5)^7 \cdot (-8)^5$; б) $(-4)^8 \cdot (-13)^{10}$;

в) $(-61)^{12} \cdot (-7)^{17}$; г) $(-9)^3 \cdot 0^{25}$?

471. Выпишите одночлен стандартного вида:

а) $5a^2 \cdot 3x$; б) $-0{,}5a^2c$; в) $2a \cdot (-3x)$; г) $(-2y)^3$; д) $2x^2yx$.

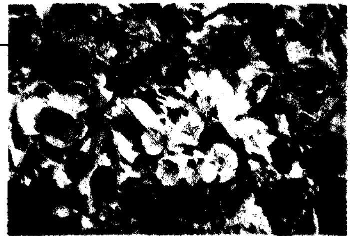
472. Из букв, написанных на отдельных квадратных карточках, составлено слово ЦИВИЛИЗАЦИЯ. Потом эти карточки перевернули, перемешали и наугад взяли одну. Какова вероятность того, что на ней написана буква: а) «Ц»; б) «И»; в) «Я»?

473. Перерисуйте в тетрадь рисунок 39 и заполните его пустые клеточки так, чтобы получился магический квадрат.

	3	2	13
5		11	
	6	7	
4			

Рис. 39

§13. УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ



Умножим многочлен $a + b - c$ на $x + y$. Если обозначим многочлен $x + y$ одной буквой m, то будем иметь:

$$(a + b - c)(x + y) = (a + b - c)m = am + bm - cm =$$
$$= a(x + y) + b(x + y) - c(x + y) =$$
$$= ax + ay + bx + by - cx - cy.$$

Значит, $(a + b - c)(x + y) = ax + ay + bx + by - cx - cy$.

Если бы мы сначала умножили a на x и y, потом b на x и y, наконец — c на x и y, то есть каждый член первого многочлена на каждый член второго многочлена, и полученные произведения сложили, то имели бы тот же результат: $ax + ay + bx + by - cx - cy$.

! **Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена и полученные произведения сложить.**

Пример.

$$(x^2 - 2x + 3)(a - 5) = x^2a + x^2(-5) - 2xa - 2x(-5) + 3a +$$
$$+ 3(-5) = ax^2 - 5x^2 - 2ax + 10x + 3a - 15.$$

Умножать многочлены можно двумя способами, которые соответствуют таким схемам:

$$(a + b + c + \ldots)(x + y + z + \ldots) = ax + bx + cx + \ldots .$$

$$(a + b + c + \ldots)(x + y + z + \ldots) = ax + ay + az + \ldots .$$

Если нужно выполнить умножение более двух многочленов, то сначала умножают первые два из них, потом полученный результат умножают на третий многочлен и т. д. Для примера выполним умножение многочленов $x - a$, $x + a$ и $x^2 - a^2$.

$$(x-a)(x+a) = x^2 + ax - ax - a^2 = x^2 - a^2,$$
$$(x^2 - a^2)(x^2 - a^2) = x^4 - a^2x^2 - a^2x^2 + a^4 =$$
$$= x^4 - 2a^2x^2 + a^4.$$

Следовательно, $(x-a)(x+a)(x^2-a^2) = x^4 - 2a^2x^2 + a^4$.

Хотите знать ещё больше?

Тождество $(a+b+c)(x+y) = ax + bx + cx + ay + by + cy$ для положительных значений переменных соответствует рисунку 40. Ведь если стороны прямоугольника соответственно равны $a+b+c$ и $x+y$, то его площадь будет равна:

$$(a+b+c)(x+y), \text{ или } ax + bx + cx + ay + by + cy.$$

Итак, эти два выражения тождественно равны.

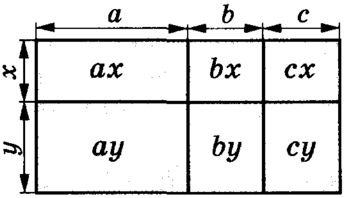


Рис. 40

В алгебре равенство $(a+b+c)(x+y) = ax + bx + cx + ay + by + cy$ считается верным при условии, что его буквы обозначают не только положительные числа, но и любые числа или выражения.

Обратите внимание: если трёхчлен умножить на двучлен, то в результате будем иметь шестичлен. Если умножить многочлены, в которых соответственно k и p членов, то получим многочлен, имеющий $k \cdot p$ членов. Только после приведения подобных слагаемых количество членов произведения может уменьшиться. Например,,

$$(x^2 + x + 1)(x - 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1.$$

Проверьте себя

1. Сформулируйте правило умножения многочлена на одночлен.
2. Сформулируйте правило умножения многочлена на многочлен.
3. Как можно перемножить три многочлена? А четыре?
4. Сколько членов может иметь многочлен, равный произведению двух двучленов? А двух трёхчленов?

Выполним вместе!

1. Выполните умножение многочленов $2x + 3$ и $a - x$.

✔ Р е ш е н и е. $(2x + 3)(a - x) = 2xa + 3a - 2x^2 - 3x$.

2. Упростите выражение: $4a - 2ax - (2a - 1)(2 - x)$.

✔ Р е ш е н и е. $4a - 2ax - (4a - 2 - 2ax + x) =$
$= 4a - 2ax - 4a + 2 + 2ax - x = 2 - x$.

Выпо[illegible]стно

474. Представьте в виде многочлена произведение:

а) $(1 + y)(1 + x)$; б) $(x + 1)(a + 1)$; в) $(x - 1)(n + 1)$;
г) $(1 + a)(c + 1)$; д) $(1 - y)(1 + c)$; е) $(2 - a)(c + 1)$.

475. Раскройте скобки в выражении:

а) $(x + 1)(x + 1)$; б) $(1 - y)(1 - y)$; в) $(a + c)(a - c)$.

Уровень A

476. Выполните умножение многочленов:

а) $a + b$ и $m - n$; б) $x - y$ и $x + y$; в) $2a - 1$ и $a - 2$;
г) $c + ax$ и $a + x$; д) $1 - c$ и $a + c^2$; е) $-a + 1$ и $2a - 3$.

Представьте в виде многочлена **(477–480)**.

477. а) $(a - b)(c + d)$; б) $(x - 2)(x - 3)$;
в) $(2x - 3)(a - b)$; г) $(a^2 - b)(a - b^2)$.

478. а) $(1 - 2xz)(1 + 2xz)$; б) $(0,5 + c^2)(0,5 + c^2)$;
в) $(a^2 + b)(a^2 + b)$; г) $\left(\frac{1}{2}x + 2\right)\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$.

479. а) $(2x + 3)(3x - 2)$; б) $(5a - 4)(3a - 2)$;
в) $(7c - 1)(5 - 6c)$; г) $(-2n + 3)(3n - 2)$.

480. а) $(-a - b)(c + d)$; б) $(-2 + c)(-3 + c)$;
в) $(x^2 - x + 1)(x + 1)$; г) $(p - 1)(p^2 + p + 1)$;
д) $(c + z - q)(1 - cq)$; е) $(0,5x - 1,3)(0,5x + 1,3)$.

481. Тождественны ли выражения:

а) $(a - b)(a + b)$ и $a^2 - b^2$; б) $(x + a)(x + a)$ и $x^2 + 2xa + a^2$;
в) $(c^2 + c - 1)(c - 1)$ и $c^3 - 1$; г) $c^2 + 1$ и $(c + 1)(c^2 - c + 1)$?

482. Упростите выражение:

а) $(x - 1)(x^2 - 2x + 2)$; б) $(1 + a)(a^2 - a + 1)$;

в) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$; г) $(m-1)(m+1)+1$;
д) $(a+2)(a-5)+3a$; е) $(x-4)(x+5)+20$;
ё) $(n-2)(n-2)+4n$; ж) $4ab-(a+2b)(a+2b)$.

483. Вычислите значение выражения:
а) $(a+b)(a-b)+b^2$, если $a=0{,}6$ и $b=0{,}237$;
б) $(x+y)(x+y)-x^2-y^2$, если $x=0{,}2$ и $y=5$;
в) $(a^2-b)(a^2+b)-a^4$, если $b=0{,}2$ и $a=3{,}27$;
г) $-x^2+y^4+(x-y^2)(x+y^2)$, если $x=5$ и $y=-7$.

Упростите выражение (**484–485**).

484. а) $3x(x-6)+(2x^2+14)$; б) $(a-3)c+3(c-c^2)$;
в) $(3a+b)(a-b)-(2a^2-b^2)$; г) $(a-3)(a+3)-9a^2$.

485. а) $(a-b)(a-3)+2a(1-a)$; б) $(1-ab)(1+ab)+a^2b^2$;
в) $(x-y)(x+y)-x(x-3)$; г) $(c^2-1)(c^2+1)-c^4+1$.

486. Представьте в виде многочлена выражение:
а) $(a+b)^2$; б) $(x-y)^2$; в) $(2a-x)^2$; г) $(3a+2)^2$.

487. Упростите выражение:
а) $(b+1)^2+2b(3b-1)$; б) $6xy+3(x-y)^2$.

488. Решите уравнение:
а) $(x-1)(x-3)=x^2$; б) $(y+2)(y-5)=y^2$;
в) $(2x+1)(x-5)=2x^2$; г) $3z^2=(1-z)(1-3z)$.

Уровень Б

489. Пользуясь правилом умножения многочленов и рисунком 41, докажите тождество:
$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.
Какое доказательство более общее?

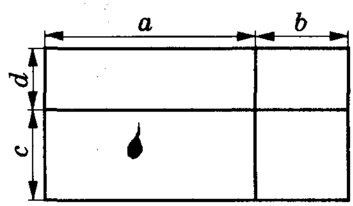


Рис. 41

490. Изобразите в виде прямоугольников геометрическую модель, иллюстрирующую умножение выражений
$$a+b+c+d \text{ и } m+n.$$

491. Упростите выражение:
а) $2a(5-a)-5(2a+a^2)+2a^2$;

б) $(x-y)(x+7)-(y+x)(x+7)+7y$;
в) $-(a^2-3)(3+a^2)-(x+3)^2+6x$.

Представьте в виде многочлена (492–495).

492. а) $(a^2-2a+2)(a-1)$; б) $(0{,}1x-1{,}2y)(0{,}1x+1{,}2y)$;
в) $(2{,}5c+7z)(7z-2{,}5c)$; г) $(-0{,}3a-1{,}2b)(-0{,}3a+1{,}2b)$.

493. а) $(x^3+3x^2+2)(x-5)$; б) $(x+1)(x^3-x^2+x-1)$;
в) $(4a^2-2ab+b^2)(2a+b)$; г) $\left(\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{3}x+1\right)\left(\frac{1}{3}x-1\right)$.

494. а) $(x^3+2x^2y-5xy^2-3y^3)(5x-4y)$;
б) $(a^3+3a^2c-3ac^2+4c^3)(2a+3c)$;
в) $(4a^2-3a+1)(a^2+2a+1)$;
г) $(2x^2-5x+1)(x^2-2x-1)$.

495. а) $\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c\right)$;
б) $\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z\right)\left(\frac{1}{3}y-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}z\right)$;
в) $\left(\frac{2}{3}c+\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}c-\frac{3}{4}a-\frac{1}{3}\right)$;
г) $\left(1\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}y+1\right)\left(1\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}y+1\right)$.

Упростите выражение (496–498).

496. а) $(a^2-a+1)(a+1)-a^3$; б) $(x^2+ax+a^2)(x-a)+a^3$;
в) $(c-5)(c+2)+3c+10$; г) $(x^2-y)(x-y^2)-y^3+xy$.

497. а) $(1-2x)(4x^2+2x+1)+8x^3$;
б) $(9-6a+4a^2)(2a+3)-8a^3$;
в) $(2a+3x)(4a^2-6ax+9x^2)-27x^3$;
г) $(3-c^2)(c^4-3c^2+9)+c^6-27$.

498. а) $0{,}01a^4-(0{,}1a^2+1)(0{,}1a^2-1)$;
б) $0{,}008x^3-(0{,}2x-1)(0{,}04x^2+0{,}2x+1)$;

в) $\frac{4}{9}-\left(\frac{2}{3}-a^3\right)\left(\frac{2}{3}+a^3\right)$;

г) $\frac{1}{8}x^3-\left(\frac{1}{2}x-a^2\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}a^2x+a^4\right)$.

499. Докажите тождество:

а) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$;

б) $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$.

500. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(2x-3y)^2$; б) $(3ac+b^2)^2$; в) $(2a-1)^3$.

501. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(a-1)(a+1)(a^2+1)+1$; б) $(2a-3)^2+12a$;

в) $c^4-(c-1)(c+1)(c^2+1)$; г) $(a-b)^3-3a^2b$.

502. Докажите, что значение данного выражения не зависит от значения переменной:

а) $(x+5)(x^2-2x-3)-(5x+x^2)(x-2)+3(x+5)$;

б) $(2x^2-3x+6)(x+4)-(x^2+4x+3)(2x-3)$;

в) $(2x-4)(3x+2)-(2x-3)(4x+2)+2x^2$;

г) $(x-3)(x+3)(x^2+9)-(x+1)(x-1)(x^2+1)$.

Решите уравнение (503–507).

503. а) $(x-1)(x+5)=(x-2)(x+3)$;

б) $(2x+3)(x-7)=(x+3)(2x+1)$;

в) $(3z^2-1)(z-1)=3z^2(z-1)+5z+7$;

г) $(y-2)(y^2+2y+4)=y(y^2-4)$.

504. а) $(0{,}1-x)(x+0{,}1)=2x(0{,}5-0{,}5x)$;

б) $(y-0{,}2)(y^2+0{,}2y+0{,}04)=y(y^2-8)$;

в) $\left(\frac{1}{2}x+2\right)\left(\frac{1}{4}x^2-x+4\right)=\frac{1}{4}x^2\left(\frac{1}{2}x-2\right)$;

г) $-\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}\right)+2\frac{1}{4}=\left(\frac{2}{3}x\right)^2$.

505. а) $(2x+1)^2=2(x-1)(2x+3)$; б) $(3z-2)^2=9(z-2)(z+3)$;

в) $(1-2y)^2=2(y-2)(2y-3)$; г) $(x-1)^3=x^2(x-3)+5$.

506. а) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^2 + x$;
б) $(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) = x^4 + 10x$.

507. а) $0{,}5c^2 - (0{,}5c - 1)(c + 2) = 1$;
б) $-(y + 2)(0{,}3y - 1) = 1 - 0{,}3y^2$;
в) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = x^2 - \frac{1}{3}$; г) $\frac{2}{5}x^2 = (x + 1)\left(\frac{2}{5}x + 2\right)$.

508. Дано два произведения: $11 \cdot 44$ и $16 \cdot 32$. На какое число надо увеличить каждый из четырёх множителей, чтобы новые произведения были равны друг другу?

509. На какое число надо уменьшить каждый из четырёх множителей $25 \cdot 51$ и $31 \cdot 40$, чтобы новые произведения были равны друг другу?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

510. Найдите периметр и площадь фигуры, изображённой на рисунке 42, если $r = 0{,}8$ м.

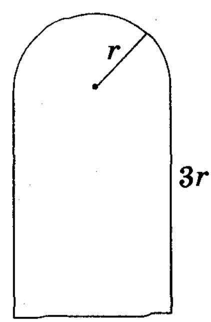


Рис. 42

511. Вычислите:

а) $\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 - 3^2 - (1 - 3^3) - 1{,}5^2$;

б) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2$;

в) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16} - 3$;

г) $\left(-\frac{3}{7} + \frac{5}{17} + \frac{1}{27}\right) - \left(\frac{3}{7} + \frac{5}{17} + \frac{1}{27}\right)$.

512. Найдите неизвестный член пропорции:
а) $2 : x = 7 : 10$; б) $1 : 4 = 3 : (x + 2)$;
в) $6 : 5 = 0{,}9 : 3x$.

513. Представьте несколькими способами одночлен в виде произведения двух одночленов стандартного вида:
а) $36a^8$; б) $30x^4y^9$; в) $-18a^{10}b^5$;
г) $100x^5y^3$; д) $\frac{6}{16}m^2n^6$; е) $-\frac{1}{3}x^4y^4$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант I

1°. Вычислите значение выражения $3x^2 - x + 2$, если $x = -1{,}3$.

2°. Найдите сумму, разность и произведение многочленов $a^2 + a - 3$ и $a^2 - 2$.

3•. Упростите выражение: $(3 + x)(3 - x) + x^2$.

4•. Решите уравнение: $(x - 5)(x + 1) = x^2 - 13$.

Вариант II

1°. Вычислите значение выражения $a^2 - 3a + 1$, если $a = -1{,}6$.

2°. Найдите сумму, разность и произведение многочленов $n^2 - n - 2$ и $n^2 - 1$.

3•. Упростите выражение: $25 - (5 - c)(5 + c)$.

4•. Решите уравнение: $(x - 2)(x + 4) = x^2$.

Вариант III

1°. Вычислите значение выражения $c^2 - 2c + 3$, если $c = -1{,}2$.

2°. Найдите сумму, разность и произведение многочленов $2a^2 - a - 1$ и $a^2 + 2$.

3•. Упростите выражение: $p^2 - (2 + p)(2 - p)$.

4•. Решите уравнение: $x^2 + 3 = (x - 1)(x + 3)$.

Вариант IV

1°. Вычислите значение выражения $z^2 - 2z + 3$, если $z = -2{,}1$.

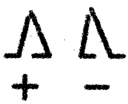
2°. Найдите сумму, разность и произведение многочленов $c^2 + 2c + 1$ и $c^2 + 3$.

3•. Упростите выражение: $x^2 - c^2 + (c - x)(c + x)$.

4•. Решите уравнение: $x(x - 3) = x^2 - 5x + 4$.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Выражения с переменными появились тогда, когда числа начали обозначать не только цифрами, но и буквами. Первые такие обозначения встречаются у Диофанта (III в.), но они не получили широкого распространения. Не сразу установились для общего употребления и знаки действий. Египтяне действия сложения и вычитания обозначали рисунком, подобным двум ногам, идущим в разных направлениях. Они писали справа налево.



Степени чисел и выражений раньше называли, пользуясь словами *квадрат* и *куб*. Например:

a^4 — квадрато-квадрат,

a^5 — квадрато-куб,

a^6 — кубо-куб,

. . . .

a^{16} — квадрато-квадрато-кубо-кубо-кубо-куб.

Некоторые европейские математики XV в. «плюс» и «минус» обозначали буквами p и m — первыми буквами латинских слов *plus* и *minus*. Знаки «+» и «−» ввёл в 1489 г. И. Видман, знак умножения (×) — У. Оутред. Знаки умножения (·) и и деления (:) ввёл Г. Лейбниц.

Первая книга по математике, напечатанная в России,— «Арифметика» Л. Магницкого (1703 г.). В ней двучлены, которые теперь принято писать $2x+1$ и $3x-2$, записывались так: $2R+1$ и $3R \div 2$. Квадрат переменной обозначался буквой q, коэффициент 1 не опускался. Умножать такие выражения предлагалось столбиком.

$$\begin{array}{r} 2R+1 \\ \underline{3R \div 2} \\ 6q+3R \\ \underline{\div 4R \div 2} \\ 6q \div 1R \div 2 \end{array}$$

Скобки для записи математических выражений европейские математики начали употреблять в XVI в. Сначала ввели квадратные скобки, позже — круглые и фигурные.

Ещё до середины XX в. для записи выражений использовали не только круглые скобки, но и квадратные и фигурные. Писали, например, так:

$$a-2\{b+3[a-4(a-b)]\}.$$

Современные математические термины и символы хорошо упорядочены намного удобнее прежних.

ОСНОВНОЕ В ГЛАВЕ

Произведение нескольких одинаковых множителей называют *степенью*.

$$a^1 = a;$$

Если $n > 1$, то $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$.

Свойства степеней для натуральных m и n:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad a^m : a^n = a^{m-n}; \qquad (a^n)^m = a^{nm};$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0.$$

Выражения бывают *числовые* и *с переменными*. Если выражение не содержит никаких других действий, кроме сложения, вычитания, умножения, возведения в степень и деления, его называют *рациональным выражением*. Рациональное выражение, не содержащее действия деления на выражение с переменной, называют *целым выражением*.

Два целых выражения, соответствующие значения которых равны при любых значениях переменных, называют тождественно равными, или тождественными. Два тождественно равных выражения, соединённые знаком равенства, образовывают *тождество*.

Простейшие выражения — числа, переменные, их степени или произведения. Их называют *одночленами*.

Чтобы выполнить умножение одночленов, между ними ставят знак умножения и полученное произведение приводят к одночлену стандартного вида. Чтобы возвести одночлен в степень, нужно возвести в эту степень каждый множитель одночлена и найденные степени перемножить.

Сумму нескольких одночленов называют *многочленом*. Для удобства каждый одночлен также считают многочленом.

Складывая многочлены, пользуются правилом раскрытия скобок.

Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на данный одночлен и результаты сложить. Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго и полученные произведения сложить.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры числовых выражений и выражений с переменными.
2. Какие выражения называют рациональными?
3. Какие выражения называют целыми?
4. Приведите пример выражения с модулями.
5. Что такое степень; основание степени; показатель степени?
6. Что такое тождество? Приведите примеры.
7. Что такое тождественное преобразование выражений?
8. Каждое ли тождество является равенством?
9. Каждое ли равенство является тождеством?
10. Какие выражения называют тождественно равными, или тождественными?
11. Сформулируйте основное свойство степени.
12. Сформулируйте правило умножения степеней.
13. По какому правилу возводят в степень степень?
14. По какому правилу возводят в степень произведение?
15. Как возводить в степень дробь?
16. Что такое одночлен?
17. Что такое одночлен стандартного вида?
18. Что такое коэффициент одночлена?
19. Что называют степенью одночлена?
20. Сформулируйте правило возведения в степень одночлена.
21. Что такое многочлен; трёхчлен; двучлен?
22. Какие члены многочлена называют подобными?
23. Как записывают многочлены в стандартном виде?
24. Как складывают многочлены? Как вычитают многочлены?
25. Сформулируйте правило умножения многочлена на одночлен.
26. Сформулируйте правило умножения многочленов.

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ ОЦЕНИВАНИЮ

Тестовые задания № 3

1. Какое из выражений является многочленом:

а) $(x+y)^2$; б) x^2+y^2; в) $\dfrac{x^2}{y^2}$; г) $x^2 : y^2$?

2. Запишите в стандартном виде многочлен $3x^2-1-5x-4x^2-7+5x-x^3+8$:

а) x^3+x^2; б) $-x^3+x^2$; в) $-x^3-x^2$; г) $-x^3$.

3. Найдите степень многочлена $4{,}5x^6+3x-2{,}5x^2-6x^8$:

а) 8; б) 1; в) 2; г) 6.

4. Упростите выражение $(2a+3b)+(7b-3a)-(8a-6b)$:

а) $13a-4b$; б) $-9a+16b$; в) $7a-16b$; г) $-32a+4b$.

5. Выполните умножение $(x-1)(x+1)$:

а) x^2-2x+1; б) x^2+1; в) x^2; г) x^2-1.

6. Вычислите значение многочлена $0{,}6x^3+0{,}4x^3$, если $x=0{,}2$:

а) 0,8; б) 0,08; в) 0,008; г) 0,0008.

7. При каком значении x разность многочленов $5x^3-9x+17$ и $5x^3+4x+17$ равна 13:

а) 1; б) −1; в) 2; г) −2?

8. Запишите в виде двучлена число, которое при делении на число m даёт частное 8 и остаток r:

а) $8m+r$; б) $8m-r$; в) $8r-m$; г) $8r+m$.

9. Решите уравнение $x(x+1)-x(x-2)=3$:

а) −1; б) 0; в) 1; г) 2.

10. Какой многочлен надо сложить с многочленом a^3-a^2+3, чтобы получить a^2+3:

а) a^3-a^2; б) a^2-a^3; в) $2a^2-a^3$; г) $2a^2-a^2$?

Типовые задания к контрольной работе № 3

1°. Вычислите значение выражения $3x^2 - 2x - 6{,}42$, если:

а) $x = 3$; б) $x = -1{,}2$.

2°. Запишите в стандартном виде многочлен:

$$a^2 + 2a + 2 - a + 5 + 3a^2.$$

3°. Найдите сумму и разность многочленов:

а) $n^2 - 2n - 1$ и $n^2 + 3$; б) $3x^2 - 2xy + y^2$ и $5x^2 + 2xy - 2y$.

4°. Найдите корни уравнения:

$$y^2 + 3 = y(y + 1).$$

5•. Выполните умножение выражений:

а) $2x^2$ и $x + y$; б) $a - 2b$ и $a^2 + 2ab + 4b^2$.

6•. Упростите выражение:

а) $5x^2(x - 3) + 15x^2$;

б) $3a(a^2 - a + 2) + 3a^3 - 6a^2$;

в) $(2x - 1)(1 + 2x) - 4x^2$.

7•. Решите уравнение:

а) $(x - 2)(x + 3) = x^2 - x$;

б) $(3y - 4)(y + 1) = y(3y + 1)$.

8•. Расстояние между пристанями A и B лодка проходит по течению за 3 ч, а против течения — за 4 ч. Найдите расстояние от A до B, если скорость течения — 3 км/ч.

9••. Докажите, что значение выражения

$$3ab + 6((2a + b)a + 5) - 3a(3b + 4a)$$

не зависит от значения переменных.

10••. Докажите, что если a, b, c — цифры, то разность

$$(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}) - (\overline{ca} + \overline{cb} + \overline{ba})$$

кратна 18.

ГЛАВА

3 РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГО
ЧЛЕНОВ НА МНОЖИТ

У математиков существует свой язык — это формулы.

С. В. Ковалевская

Разложение многочленов на множители — операция, обратная умножению многочленов. Как вы уже знаете, решая разные задачи, иногда умножают два или более чисел, а иногда — раскладывают данное число на множители. Подобные задачи возникают и при преобразовании целых алгебраических выражений.

В этой главе вы узнаете о:

- **вынесении общего множителя за скобки;**
- **способе группировки;**
- **формулах сокращённого умножения;**
- **применении разных способов разложения многочленов на множители.**

§14. ВЫНЕСЕНИЕ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ЗА СКОБКИ

Вы уже умеете раскладывать на множители натуральные числа. Например,

$$15 = 3 \cdot 5,\ 120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

На множители раскладывают и многочлены. *Разложить многочлен на множители* — это означает заменить его произведением нескольких многочленов, тождественным данному многочлену. Например, многочлен $x^2 - 1$ раскладывается на множители $x + 1$ и $x - 1$, следовательно, тождество $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ — справедливо.

Один из способов разложения многочленов на множители — *вынесение общего множителя за скобки.* Рассмотрим его.

Каждый член многочлена $ax + ay$ имеет общий множитель a. На основании распределительного закона умножения $ax + ay = a(x + y)$. Это означает, что данный многочлен $ax + ay$ разложен на два множителя: a и $x + y$.

Другие примеры:

$$4ab - 2ab^2 = 2ab \cdot 2 - 2ab \cdot b = 2ab(2 - b),$$

$$3x + 6x^2 - 9x^3 = 3x \cdot 1 + 3x \cdot 2x - 3x \cdot 3x^2 = 3x(1 + 2x - 3x^2).$$

Чтобы убедиться, правильно ли разложен многочлен на множители, нужно выполнить умножение полученных множителей. Если всё верно, то в результате должен получиться данный многочлен.

Иногда приходится раскладывать на множители и выражения, имеющие общий многочленный множитель. Например, в выражении $a(b-c)+x(b-c)$ общий множитель $b-c$. Его также можно выносить за скобки:

$$a(b-c)+x(b-c)=(b-c)(a+x).$$

Хотите знать ещё больше?

Один и тот же многочлен можно разложить на множители по-разному. Например,

$$4x^4+2ax^2=2(2x^4+ax^2);$$
$$4x^4+2ax^2=2x(2x^3+ax);$$
$$4x^4+2ax^2=2x^2(2x^2+a).$$

Как правило, стараются вынести за скобки такой общий множитель, чтобы в скобках осталось простейшее выражение. Поэтому чаще всего в качестве коэффициента общего множителя берут наибольший общий делитель (НОД) коэффициентов всех членов данного многочлена или их модулей. Но не всегда. Все зависит от того, с какой целью раскладывают на множители многочлен.

Пусть, например, надо найти значение выражения $4x^4+2ax^2$ при условии, когда $x^2+\frac{1}{2}a=0$.

Чтобы использовать условие, это упражнение можно решить так:

$$4x^4+2ax^2=4x^2(x^2+\frac{1}{2}a)=4x^4\cdot 0=0.$$

Здесь вынесено за скобки не $2x^2$, а $4x^2$, тогда в скобках имеем выражение, значение которого известно из условия.

Проверьте себя

1. Какие выражения называют многочленами?
2. Что означает «разложить многочлен на множители»?
3. Как можно разложить на множители многочлен $ax+ay$?
4. На основе какого закона действий выполняют вынесение за скобки общего множителя?

Выполним вместе!

1. Разложите на множители многочлен $-6a^2 + 24a - 9$.

Решение. $-6a^2 + 24a - 9 = 3(-2a^2 + 8a - 3)$,
или $-6a^2 + 24a - 9 = -3(2a^2 - 8a + 3)$.

2. Разложите на множители многочлен
$$15ab^4 + 10a^2b^3 - 5a^3b^2 - 15a^4b^2.$$

Решение. $15ab^4 + 10a^2b^3 - 5a^3b^2 - 15a^4b^2 =$
$= 5ab^2 \cdot 3b^2 + 5ab^2 \cdot 2ab - 5ab^2 \cdot a^2 - 5ab^2 \cdot 3a^3 =$
$= 5ab^2(3b^2 + 2ab - a^2 - 3a^3)$.

3. Докажите, что число $19^{15} + 19^{14}$ делится на 20.

Доказательство. $19^{15} + 19^{14} = 19^{14} \cdot (19 + 1) = 19^{14} \cdot 20$. Последнее произведение делится на 20, поэтому делится на 20 и данная сумма.

4. Решите уравнение $5x^4 - x^3 = 0$.

Решение. $5x^4 - x^3 = x^3(5x - 1)$, поэтому данное уравнение равносильно уравнению $x^3(5x - 1) = 0$.
Произведение двух чисел равно нулю тогда, когда хотя бы одно из них равно нулю.
Значит, $x^3 = 0$, отсюда $x = 0$, или $5x - 1 = 0$, отсюда $x = 0{,}2$.
Ответ. Уравнение имеет два корня: 0 и 0,2.

Выполните устно

514. Найдите общий множитель многочлена:

а) $cx + cy$; б) $a^2x - a^2y$; в) $nx + ax$;
г) $2ax + 4ax^2$; д) $6cy - 9cy^2$; е) $-ac^2 + c^2$.

515. Разложите на множители многочлены из предыдущего упражнения.

516. Правильно ли разложен на множители многочлен:

а) $ay - 5y = y(a - 5)$; б) $cx + x = x(c + x)$;
в) $-9 + 6x = -3(3 + 2x)$; г) $a^6 - a = a(a^5 - 1)$?

Уровень A

517. Разложите на простые множители числа: 45, 121, 150, 819.

Вынесите за скобки общий множитель (**518–521**).

518. а) $xa + xb$; б) $2m + 2p$; в) $cp + tp$;
г) $ab + 3b^2$; д) $4b^2 - 2ab$; е) $6x^2 - 2x$.

519. а) $2a^2 + 3a$; б) $7n - 14n^2$; в) $5p^3 - 5p$;
г) $12a + 12b$; д) $13x - 26y$; е) $15ab + 45c$.

520. а) $ax - ay$; б) $m^2x + my$; в) $n^3c - n^2x$;
г) $3a^2x - 2ax$; д) $4cy^2 - 2c^2y$; е) $10a^2x + 5a^2x^2$.

521. а) $a^3b^3 - 6ab^4$; б) $5y^3z + 20az^3$; в) $-12x - 15x^2$;
г) $-3a^2b - 6ab^2$; д) $3a^6 + 6a^5 + a^4$; е) $2y - 3y^2 - y^3$;
ё) $6z^2 - 3z^3 + 3z$; ж) $x^4 - 4x^3 + 3x^2$.

Разложите на множители многочлен (**522–524**).

522. а) $2ac^2 - 8c^3d + 4acd$; б) $3acx - 6a^2x - 9a^3c^2x$;
в) $8a^4x + 7a^2x^2 + ax^3$; г) $10n^2c^3 - 15nc^2 - 20nc^3$;
д) $3x^3 - 6x^2y - 12xy^4$; е) $-2a^2x^3 - a^5cx^4 + 3acx^2$;
ё) $-5c + 12c^2 - c^3$; ж) $-6py^2 + 8p^2y - 4p^3z$.

523. а) $0{,}5x + x^2 - 1{,}5x^3$; б) $a^2b - 2a^3b^2 + 3ab^3 - ab^2$;
в) $-m^2x + 4mx^2 + 3m^3$; г) $0{,}7x^3 - 1{,}4x^2 + 2{,}1x - 2{,}8x^4$.

524. а) $3x(a + b) - 2y(a + b)$; б) $3(2x + 5) + x(5 + 2x)$;
в) $5a(x - y) + 3(x - y)$; г) $2(m^2 - 2) - x(m^2 - 2)$.

525. Вычислите значение выражения:

а) $12{,}3x + 12{,}3y$, если $x = 0{,}23$, $y = 0{,}77$;

б) $2{,}63x + 2{,}63y$, если $x = 0{,}16$, $y = 0{,}84$;

в) $x^2 - 1{,}3x$, если $x = 11{,}3$;

г) $5{,}24x - x^2$, если $x = 4{,}24$.

526. Докажите, что:

а) $16^{17} + 16^{16}$ делится на 17;

б) $5^{12} + 5^{10}$ делится на 13;

в) $49^5 + 7^8$ делится на 350.

527. Пользуясь рисунком 43, поясните геометрический смысл тождества:
$am + bm + cm = (a + b + c)m$ для положительных значений a, b, c и m.

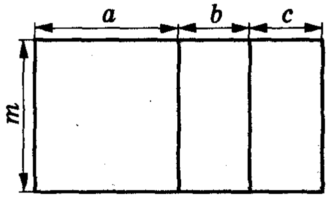


Рис. 43

Решите уравнение (**528–529**).

528. а) $x(x-3)=0$; б) $y(5-y)=0$; в) $3z(z+4)=0$;
г) $2x(5-2x)=0$; д) $x^2-12x=0$; е) $4x^2+x=0$.

529. а) $2x^2-2x=0$; б) $3z^2-z=0$; в) $4y^2=8y$;
г) $12x^2-6x=0$; д) $10x^2+x=0$; е) $5x^2-\frac{1}{2}x=0$;
ё) $1{,}8x^2=3x$; ж) $x=x^2$; з) $1{,}5x=5x^2$.

Уровень Б

Разложите на множители многочлен (**530–537**).

530. а) $3a^2b+2ab-5a$; б) $7xy^3+8x^2y^2-9y^4$;
в) $5ac^2-ac^3-3a^2c$; г) $8az^4-7az^3-4az^2$.

531. а) $4a^2-5ab+a$; б) $3x^2+8x^2y-x^2$;
в) $-7m^2-m^2z+m^2$; г) $-x^6-10x^4y^2-x^2$.

532. а) $4a^2b^3c^4-5ab^3c^2$; б) $9x^3yz^4+7x^4y^2z^3$;
в) $18a^3c^2x-9ac^2x^3$; г) $15mn^2y+45m^2n^3$.

533. а) $15a^3mx^4+20a^2m^2x^3-25a^4mx$;
б) $32x^4y^3z-8x^3yz^3+16x^2y^3z^4$.

534. а) $a^3+3a^2x-3ax^2-a^4+2a$;
б) $3x^3-2ax^2+4a^2x+ax-x^4$.

535. а) $0{,}8ax^3+0{,}2a^2x^4+0{,}4a^3x^5+0{,}6a^4x^6$;
б) $1{,}2a^2b^3c^4-0{,}6a^3b^3c^4+1{,}8a^4b^3c^4$;
в) $10{,}5b^2c^4+1{,}5b^3c^2d^2-20b^5c^3d$.

536. а) $144x^{20}y^{18}+36x^{18}y^{10}$; б) $169a^{23}b^{20}-49a^{20}b^{18}$;
в) $529a^{15}m^{35}-46a^{17}b^{30}$; г) $576n^{20}x^{31}+240n^{17}x^{32}$.

537. а) $3{,}24a^7c^{19}-6{,}48a^{10}c^{15}$; б) $28{,}9m^{30}x^{15}-57{,}8m^{45}x^{13}$;
в) $\frac{2}{5}a^3x^{10}-\frac{3}{5}a^4x^7$; г) $\frac{6}{7}x^5y^{18}+\frac{5}{7}x^{18}y^5$.

538. Докажите, что:
а) $25^{25}-25^{24}$ делится на 100;
б) $81^{31}-9^{60}$ делится на 6480;
в) $7^{100}+3\cdot 7^{99}$ делится на 490;
г) $37^{60}+63\cdot 37^{59}$ делится на 100.

Разложите на множители выражение (539–542).

539. а) $x(a-2)+y(a-2)$; б) $c^2(x+y)-3(x+y)$;
в) $a(a^2+1)+5(a^2+1)$; г) $x^2(a-c)-(a-c)^2$.

540. а) $(x+1)^2-2x(x+1)$; б) $8(a^2-3)+(a^2-3)^2$;
в) $2y(y-6)^3-3y(y-6)^2$; г) $5b(a+2c)^5+2b^3(a+2c)^3$.

541. а) $x(a-b)+3y(b-a)$; б) $4(x-y)-3a(y-x)$;
в) $3(2x-5)-2x(5-2x)$; г) $(m-n)^2-m(n-m)$;
д) $7(a-4)^2+(4-a)$; е) $4(b-3)^2+5b(3-b)$.

542. а) $(4x-3y)(x+2y)+2x(x+2y)$;
б) $5a(3a-b)+(b-3a)(5a+2b)$;
в) $(a+b)(x-y)+(b-a)(y-x)$;
г) $(2a+7b)(a-5b)-(8b-3a)(a-5b)$.

543. Вынесите за скобки числовой множитель:
а) $(5x+10)^2$; б) $(3-12y)^2$; в) $(4a-4b)^2$;
г) $(16y+12x)^3$; д) $(15-5y)^3$; е) $(6x-8)^4$.

544. Вынесите за скобки множитель:
а) $(ab^2-a^2)^3$; б) $(2x^3y+4x^4)^2$; в) $(-6a-2ab)^3$;
г) $(-2x^3+4x^2)^4$; д) $\left(\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{4}ab^2\right)^2$; е) $(0{,}5x^3-0{,}3x^5)^2$.

Решите уравнение (545–547).

545. а) $0{,}5z^3-1{,}5z^2=0$; б) $3(4x-1)^2-(1-4x)=0$.

546. а) $3x^2+6(x+2)=12$; б) $x^2-5(x-3)=15$;
в) $x^3-5(x^2-2)=10$; г) $2z^4-7(z^3-3)=21$.

547. а) $6x^3 + 3(x^2 + 7) = 21$; б) $0,7y^2 - 2(y - 1,3) = 2,6$;

в) $2z^4 - \frac{1}{3}z(6z - 3) = z$; г) $-\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}(2 - x^3) = 1$.

548. Вычислите:

а) $\frac{3,72 \cdot 2,41 - 2,41 \cdot 2,72}{24,1 \cdot 1,4 + 24,1 \cdot 1,01 - 24,1 \cdot 1,41}$;

б) $\frac{1,3 \cdot 27 + 1,3 \cdot 63 + 2,3 \cdot 74 + 2,3 \cdot 26}{1,8 \cdot 5,7 + 1,8 \cdot 4,3}$;

в) $\frac{7,6 \cdot 4,6 - 6,7 \cdot 8,5 + 7,6 \cdot 5,4 - 6,7 \cdot 1,5}{0,4 \cdot 2,3 - 0,4 \cdot 1,3}$;

г) $\frac{17,3 \cdot 2,4 - 3,27 \cdot 1,2 - 8,8 \cdot 3,27 - 3,4 \cdot 17,3}{12,5 \cdot 8,7 + 3,2 \cdot 12,5 - 10,9 \cdot 12,5}$.

549. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $6a(x - 2) + 8b(x - 2) + 4c(2 - x)$;

б) $x^3(2x + 3) + 3(2x^3 + 3x^2) + 3x^3(3 + 2x)$;

в) $x^3 - 1 + 5a(x^3 - 1) + b(1 - x^3)$;

г) $(2x - 1)(x^2 + 1) + (x^2 - 1)(2x - 1) + (1 - 2x)(x + 2)$.

550. Представьте в виде произведения:

а) $x^{n+1} + x^n$; б) $a^m - a^{m+2}$; в) $x^{k+1} + x^{k+3}$;

г) $y^{m+5} - y^m$; д) $4x^{n+6} + 12x^{n+1}$; е) $9a^{k+5} - 3a^{k+2}$;

ё) $8^{2n+1} - 4^{2n+4}$; ж) $3^{2n+1} + 9^{n+2}$; з) $16^{n+5} - (8^{n+2})^2$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Задачи 551–553 решите с помощью соответствующих уравнений и диаграмм.

551. Сын в 3 раза младше отца. Сколько лет отцу, если он старше сына на 28 лет?

552. На грузовую машину нагрузили в 4 раза больше груза, чем на прицеп. Сколько центнеров нагрузили на прицеп, если на нём было на 12 ц меньше, чем на машине?

553. На грузовую машину нагрузили в 4 раза больше груза, чем на прицеп. Сколько центнеров нагрузили на машину, если на машину с прицепом вместе нагрузили 40 ц?

§15. СПОСОБ ГРУППИРОВКИ

Разложим на множители многочлен $ab + ac + xb + xc$. Сгруппируем его члены так, чтобы слагаемые в каждой группе имели общий множитель $(ab + ac) + (xb + xc)$. Вынесем из первой группы за скобки общий множитель a, из второй — общий множитель x, получим выражение $a(b + c) + x(b + c)$. Слагаемые этого выражения имеют общий множитель $b + c$, вынесем его за скобки, получим $(b + c)(a + x)$.

Указанные преобразования можно записать цепочкой:

$$ab + ac + xb + xc = (ab + ac) + (xb + xc) =$$
$$= a(b + c) + x(b + c) = (b + c)(a + x).$$

Такой способ разложения многочленов на множители называют ***способом группировки.***

Замечание. Раскладывая на множители представленный выше многочлен, можно сгруппировать его члены иначе:

$$ab + ac + xb + xc = (ab + xb) + (ac + xc) =$$
$$= b(a + x) + c(a + x) = (a + x)(b + c).$$

Получили такой же результат.

Разложим на множители многочлен $an + cn + a + c$:

$$an + cn + a + c = n(a + c) + 1(a + c) = (a + c)(n + 1).$$

Записывать сумму $a + c$ в виде $1(a + c)$ необязательно, но сначала, чтобы не допускать ошибок, можно писать и так.

Хотите знать ещё больше?

Чтобы воспользоваться способом группировки, иногда приходится один член данного многочлена представлять в виде суммы или разности одночленов. Чтобы разложить на множители трёхчлен $x^2 + 5x + 6$, запишем одночлен $5x$ в виде $2x + 3x$:

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 3x + 2x + 6 = (x^2 + 3x) + (2x + 6) =$$

$$= x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x + 2).$$

Подобные преобразования также можно выполнять, используя тождества, приведённые в упражнении **578**.

Проверьте себя

1. Что означает «разложить многочлен на множители»?
2. Какие способы разложения многочленов на множители вы знаете?
3. Расскажите, как раскладывают многочлен на множители способом группировки.

✔ Выполним вместе!

1. Разложите на множители многочлен:
а) $3c - x^2 + cx - 3x$; б) $2 - a - x + ac + cx - 2c$.

✔ Решение.
а) $3c - x^2 + cx - 3x = (3c + cx) - (x^2 + 3x) =$
$= c(3 + x) - x(x + 3) = (3 + x)(c - x)$.
б) $2 - a - x + ac + cx - 2c = 2 - a - x - (2c - ac - cx) =$
$= 2 - a - x - c(2 - a - x) = (2 - a - x)(1 - c)$.

Ответ. а) $(3 + x)(c - x)$; б) $(2 - a - x)(1 - c)$.

2. Решите уравнение: $2y^3 - 3y^2 + 10y - 15 = 0$.

✔ Решение.
Разложим левую часть уравнения на множители:
$2y^3 - 3y^2 + 10y - 15 = 0$, $y^2(2y - 3) + 5(2y - 3) = 0$.
$(2y - 3)(y^2 + 5) = 0$, отсюда $2y - 3 = 0$ або $y^2 + 5 = 0$.

Корнем первого уравнения является $y = 1{,}5$, а второе уравнение корней не имеет, так как $y^2 \neq -5$.

Ответ. $y = 1{,}5$.

Выполните устно

554. Разложите на множители выражение:
а) $(a + 1)x + (a + 1)y$; б) $x(2 - c) - y(2 - c)$;
в) $p - n + c(p - n)$; г) $(x + y)^2 + x + y$.

555. Правильно ли выполнено преобразование:
$ax + 7x + a + 7 = (ax + a) + (7x + 7) =$
$= a(x + 1) + 7(x + 1) = (x + 1)(a + 7)$?

556. Раскладывая на множители многочлен $ax + ay + bx + by + x + y$, ученик получил выражение $(x + y)(a + b)$. Какую ошибку он допустил?

Уровень А

Представьте выражение в виде произведения **(557—560)**.

557. а) $x(a + 1) + y(a + 1)$; б) $m(3 - x) - m(3 - x)$;
в) $c + y + a(c + y)$; г) $a(x - y) - x + y$.

558. а) $x + y + a(x + y)$; б) $x(a - b) + a - b$;
в) $2a + c(a - b) - 2b$; г) $5x - z(x + y) + 5y$;
д) $ax - ay - b(y - x)$; е) $n(x + y) - mx - my$;
ё) $(x + y)^2 - 4x - 4y$; ж) $3x + 6y - (x + 2y)^2$.

559. а) $a(x + y + z) + b(x + y + z)$; б) $a(z - x + 1) + z - x + 1$;
в) $m(a - b - c) + n(a - b - c)$; г) $n(a - b + c) - a + b - c$.

560. а) $a(x + 3) + b(x + 3) + c(x + 3)$;
б) $m(a - z) - n(a - z) + 2(a - z)$;
в) $x(a^2 - 5) + y(a^2 - 5) + a^2 - 5$;
г) $mx - my + n(x - y) + x - y$.

Разложите на множители многочлен **(561— 563)**.

561. а) $ax - ay + bx - by$; б) $ca - cx + na - nx$;
в) $az - z^2 + ac - cz$; г) $5a - 10 + ac - 2c$.

562. а) $2ax - bx + 10ay - 5by$; б) $10ax - 4ay + 5cx - 2cy$;
в) $3mp + mq - 3np - nq$; г) $ac + bc + a^2 + ab$.

563. а) $x^2 + ax + xy + ay$; б) $3a^3 + 12a^2 - a - 4$;
в) $a^2 - an - 3a + 3n$; г) $y^3 - 3y^5 + 3y^3 - 9$;
д) $4x^2 - 4xz - 5x + 5z$; е) $a^3 + a^2 + a + 1$;
ё) $5a^2 - 5ax - 8a + 8x$; ж) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$.

564. Вычислите значение выражения:
а) $x^3 - 9x^2 + x - 9$ при $x = 19$;
б) $m^2 - mn - 2m + 2n$ при $m = 0{,}35$ и $n = 0{,}25$.

565. Вычислите:
а) $20{,}5 \cdot 17 + 79{,}5 \cdot 17 + 20{,}5 \cdot 0{,}28 + 79{,}5 \cdot 0{,}28$;
б) $42{,}2^2 - 42{,}2 \cdot 41{,}2 + 57{,}8^2 - 57{,}8 \cdot 56{,}8$.

Решите уравнение (565—567).

566. а) $x(x-15)+3(x-15)=0$; б) $y(y-2)-7(2-y)=0$;
в) $x^3-3x^2+x-3=0$; г) $x^3+4x^2+3x+12=0$.

567. а) $2z^3-3z^2+2z-3=0$; б) $x^3-5x^2+2x-10=0$;
в) $y^3+3y^2+5y+15=0$; г) $3x^3+9x^2+x+3=0$.

Уровень Б

Представьте в виде произведения выражение (568—574).

568. а) $4a^2-4az-3a+3z$; б) $3x^2-3xy+3y^2-3xy$;
в) $a+a^2-a^3-a^4$; г) $a^3+a^2b-a^2c-abc$.

569. а) $a^2-ab-4a+4b$; б) $ax+3+3x+a$;
в) $ac+b-bc-a$; г) $3m-bx+mx-3b$.

570. а) $ax+ay-az+nx+ny-nz$;
б) $a+b-2-ax-bx+2x$;
в) $2ax+cx-6ax^2-3cx^2+2ac+c^2$;
г) $x^2+2x-ca-2c-cx+ax$.

571. а) $az^2-bz^2-bz+az-a+b$;
б) $a+b+ax^2+bx^2-bx-ax$;
в) $ax^2+bx^2+ax-cx^2+bx-cx$;
г) $ax^2+bx^2-bx-ax+cx^2-cx$.

572. а) $2am+3mx-7m-2ac-3cx+7c$;
б) $4ax^2-ax+5a-4bx^2+bx-5b$;
в) $9c^3x^2+2c^3x-c^3+9x^2+2x-1$;
г) $4abc^2-4ac+4b+abc^2x-acx+bx$.

573. а) $x^4-a^4+a^3x-ax^3+c^3x-ac^3$;
б) $a^3-a^2+x^3-x^2+a^2x+ax^2$;
в) $x^3+y^3+xy^2+x^2y+x^2z+y^2z$;
г) $a^3+a+ab^2-a^2b-b-b^3$.

574. а) $x^3+x^2y+x^3y-xy^3-xy^2-y^3$;
б) $x^2-x^3+y-y^3-xy-x^2y^2$;
в) $0{,}9ax+1{,}2x^2-1{,}2ac-1{,}6cx$;

г) $\frac{3}{13}ax^2y - \frac{1}{13}x + \frac{12}{13}a^2xy^2 - \frac{4}{13}ay$.

575. Разложите многочлен на множители и выполните проверку:

а) $15a^2mx - 20am - 21ax + 28$;

б) $a^2 + 10ab - 20a - 0{,}1a - b + 2$.

576. Докажите, что:

а) $2^9 \cdot 3^5 + 2^9 \cdot 3^3 - 2^6 \cdot 3^5 - 2^6 \cdot 3^3$ делится на 420;

б) $5^{10} \cdot 7^{10} + 5^{10} \cdot 7^8 - 5^8 \cdot 7^{10} - 5^8 \cdot 7^8$ делится на 1200;

в) $2^{11} \cdot 3^6 - 2^7 \cdot 3^6 - 2^7 \cdot 3^4 + 2^{11} \cdot 3^4$ делится на 150.

577. Докажите, что:

а) $2^{10} \cdot 3^{12} + 2^8 \cdot 3^{12} + 2^{10} \cdot 3^{10} + 2^8 \cdot 3^{10}$ делится на 300;

б) $5^{10} \cdot 3^{15} - 5^8 \cdot 3^{16} + 5^{11} \cdot 3^{12} - 5^9 \cdot 3^{13}$ делится на 11;

в) $-7^{10} \cdot 2^{10} + 7^9 \cdot 2^{14} - 7^8 \cdot 2^{10} + 7^7 \cdot 2^{14}$ делится на 45.

578. Докажите тождество двумя способами:

а) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$;

б) $x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$;

в) $x^2 + (a - b)x - ab = (x + a)(x - b)$;

г) $x^2 - (a - b)x - ab = (x - a)(x + b)$.

579*. Пользуясь тождеством из задачи **578**, разложите на множители:

а) $x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3$; б) $x^2 + 6x + 5$; в) $y^2 + 7y + 12$;

г) $z^2 + 8z + 3 \cdot 5$; д) $x^2 + 3x - 10$; е) $x^2 - x - 6$;

ё) $a^2 + 3ab + 2b^2$; ж) $2x^2 - 7xy + 3y^2$.

Сделайте проверку.

Решите уравнение (580—581).

580*. а) $x(x + 7) - 2(x + 7) = 0$; б) $3x(x - 1{,}5) + 6(x - 1{,}5) = 0$;

в) $2x(x^2 + 4) - 8x^2 - 32 = 0$; г) $y^4 - 3y^3 + y = 3$.

581*. а) $x^3 - 5x^2 + x = 5$; б) $13z - 78 - 2z(z - 6) = 0$;

в) $z^5 + z^3 + z - 2z^4 - 2z^2 = 2$;

г) $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + x^2 + 5x + 6 = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вычислите (582—583).

582. а) $-2\frac{1}{8}+\frac{2}{3}$; б) $3\frac{2}{5}+\left(-\frac{3}{7}\right)$; в) $-4\frac{3}{4}+\left(-5\frac{1}{2}\right)$;

г) $4\frac{1}{2}+\left(-1\frac{1}{3}\right)$; д) $\frac{3}{4}+(-0{,}5)$; е) $-\frac{3}{5}+4{,}2$.

583. а) $-\frac{3}{5}+(-1{,}8)$; б) $0{,}7+\left(-\frac{9}{10}\right)$; в) $\frac{1}{3}+(-2{,}3)$;

г) $-\frac{2}{3}+(-0{,}3)$; д) $2{,}05+\left(-\frac{1}{8}\right)$; е) $1{,}5+\left(-\frac{4}{5}\right)$.

584. Какое из утверждений верно:

а) если $|a| < b$, то $a < b$; б) если $a < |b|$, то $a < b$;

в) если $|a| < |b|$, то $a < b$?

585. Сколько существует целых чисел, удовлетворяющих неравенство $|x| < 5$? Обозначьте их на координатной прямой.

§16. КВАДРАТ ДВУЧЛЕНА

Решая различные задачи, часто приходится умножать двучлены вида $a + b$ и $a - b$, $a + b$ и $a + b$ и др. Чтобы в таких случаях можно было сразу написать ответ, полезно запомнить тождества, которые называют *формулами сокращённого умножения*. Рассмотрим некоторые из них.

Умножим двучлен $a + b$ на $a + b$:

$(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$. Следовательно,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Квадрат двучлена равен квадрату первого его члена плюс удвоенное произведение первого на второй плюс квадрат второго члена.

Доказанное равенство — тождество, его называют ***формулой квадрата двучлена***. Пользуясь ею, можно сразу записать:

$(2x + y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$,

$(a - 3c)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3c) + (-3c)^2 = a^2 - 6ac + 9c^2$.

Промежуточные преобразования желательно выполнять устно, тем самым сокращается запись:

$$(m + 5a^2b)^2 = m^2 + 10ma^2b + 25a^4b^2.$$

По формуле квадрата двучлена можно возводить в квадрат любые двучлены, в том числе $a - b$, $-a + b$ и $-a - b$:

$$(a - b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(-a + b)^2 = (-a)^2 + 2(-a)b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(-a - b)^2 = (-a)^2 + 2(-a)(-b) + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Запомните формулу

$$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.}$$

Формулы квадрата двучлена используют и в «обратном направлении»:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Хотите знать ещё больше?

Формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ часто называют формулой квадрата суммы двух выражений, а $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрата разности двух выражений.

Для положительных чисел a и b формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ можно доказать геометрически, как показано на рисунке 44. Так её доказывали ещё древние греки. Ведь площадь квадрата со стороной $a + b$ равна сумме площадей квадратов a^2 и b^2, а также прямоугольников ab и ab.

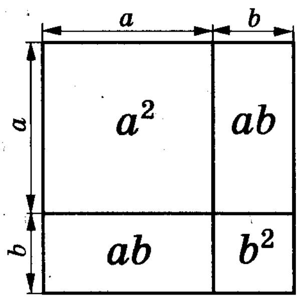


Рис. 44

Существуют и другие формулы сокращённого умножения:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Проверьте себя

1. Чему равен квадрат двучлена?
2. Чему равен квадрат разности двух выражений?
3. Может ли быть отрицательным числом квадрат разности двух чисел? А разность квадратов двух чисел?

Выполним вместе!

1. Возведите в квадрат двучлен $3x - c$.

Решение. $(3x - c)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot c + c^2 =$
$= 9x^2 - 6xc + c^2$.

2. Упростите выражение $(2n + 3)^2 - 4n^2$.

Решение. $(2n + 3)^2 - 4n^2 = 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 =$
$= 12n + 9$.

3. Представьте в виде многочлена выражение:
а) $(2 + c)^3$; б) $(m^2 + 2n)^3$

Решение. а) $(2 + c)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot c + 3 \cdot 2 \cdot c^2 + c^3 =$
$= 8 + 12c + 6c^2 + c^3$;
б) $(m^2 + 2n)^3 = (m^2)^3 + 3(m^2)^2 \cdot 2n + 3m^2(2n)^2 + (2n)^3 =$
$= m^6 + 6m^4n + 12m^2n^2 + 8n^3$.

4. Представьте выражение в виде степени двучлена:
а) $1 + 8m + 16m^2$; б) $9a^2c^2 - 60ab^2c + 100b^4$;
в) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$.

Решение. а) $1 + 8m + 16m^2 = (1 + 4m)^2$;
б) $9a^2c^2 - 60ab^2c + 100b^4 = (3ac - 10b^2)^2$;
в) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3 = (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot (2y) +$
$+ 3 \cdot (3x) \cdot (2y)^2 + (2y)^3 = (3x + 2y)^3$.

Выполните устно

586. Какому трёхчлену тождественно равно выражение:
а) $(a + x)^2$; б) $(x + 1)^2$; в) $(x - 1)^2$?

587. Возведите в квадрат двучлен:
а) $1 + c$; б) $1 - x$; в) $a - n$; г) $x + 2$.

588. Представьте в виде степени:

а) $1 + 2a + a^2$; б) $x^2 - 4yx + 4y^2$; в) $16 - 8c + c^2$;
г) $9z^2 + 12z + 4$; д) $25p^2 + 20px + 4x^2$; е) $y^2 - 14y + 49$.

Уровень А

Возведите в квадрат двучлен (589—592).

589. а) $a + c$; б) $x + y$; в) $n + 2$; г) $m + 3$;
д) $1 + ab$; е) $p + 3q$; ё) $2x + 4$; ж) $3a + b$.

590. а) $m + 2$; б) $2a + 5x$; в) $3 + a^2$; г) $x - 1$;
д) $2c - a$; е) $5 - x^2$; ё) $1 - ab$; ж) $cq - 2p$.

591. а) $ax + 5$; б) $a + c^2$; в) $n + 2a$; г) $3x + 2y$;
д) $5a + 3b$; е) $1 + 2abc$; ё) $4n + 3c$; ж) $-2 + 5ac$.

592. а) $3c - 5$; б) $ab - 2c$; в) $3a - 7c$;
г) $a^2 - x$; д) $3a - c^3$; е) $2a^2 - 3cx^2$.

Представьте в виде многочлена выражение (593—596).

593. а) $(m + 2)(m + 2)$; б) $(3 + p)(3 + p)$;
в) $(2a + b)(2a + b)$; г) $(5 + c)(5 + c)$.

594. а) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)$; б) $(p + 0{,}1)(p + 0{,}1)$;
в) $(2a^3 + 1)(2a^3 + 1)$; г) $(1 + xy)(1 + xy)$.

595. а) $(b + c^3)^2$; б) $(b + 4c^2)^2$; в) $(2m - q^5)^2$;
г) $\left(\frac{1}{2}c+2a\right)^2$; д) $\left(\frac{2}{3}m+\frac{3}{2}p\right)^2$; е) $(4q^2 + 5p)^2$.

596. а) $(3a - 5)(3a - 5)$; б) $(4x^2 - 3y)(4x^2 - 3y)$;
в) $(1{,}3x^3 - 1)(1{,}3x^3 - 1)$; г) $(2{,}5ac - x^3)(2{,}5ac - x^3)$.

597. Докажите тождество:
а) $(a - b)^2 = (b - a)^2$; б) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$;
в) $(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$; г) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$.

Представьте трёхчлен в виде квадрата двучлена (598—599).

598. а) $9 - 6x + x^2$; б) $4x^2 + 25y^2 - 20xy$;

в) $a^8 + 4a^4b + 4b^2$; г) $a^2b^2 + 36c^2 + 12abc$;
д) $16m^6 + 24m^3 - 9$; е) $40a^2b^2 - 4b^2 - 100a^4b^2$.

599. а) $9a^2 + 6ac + c^2$; б) $x^4 - 10x^2 + 25$;
в) $4m^2 + 4m + 1$; г) $b^4 - 6b^2 + 9$.

Упростите выражение (600—601).

600. а) $(x-3)^2 - x(x-6)$; б) $(m+5)^2 - (m-5)$;
в) $1 - (2a-1)^2$; г) $z^2 + 1 - (1+z)^2$.

601. а) $(x-2)^2 + (x-5)(x+7)$; б) $3(a-1)^2 + 8a$;
в) $y(y+2x) - (x+y)^2$; г) $(b+4)^2 - (b-3)^2$.

Решите уравнение (602—603).

602. а) $(x-2)^2 = x^2$; б) $(3y+5)^2 = 9y^2$;
в) $(c-7)^2 = c^2 - 7$; г) $(6-z)^2 = z^2 + 36$;
д) $3(x-2)^2 = 3$; е) $(2x-1)^2 + 2 = 0$.

603. а) $(x+7)^2 + x^2 = 0$; б) $-3(x-5)^2 = -3$;
в) $(x-4)^2 = 8x + 16$; г) $(5-y)^2 = 10y + 25$;
д) $(1-2z)^2 + 4z = 0$; е) $(3-5x)^2 = 25x^2$.

Уровень Б

Представьте в виде многочлена выражение (604—606).

604. а) $(x+3y)^2$; б) $(m+5ab)^2$; в) $(7+a^2)^2$;
г) $(2x+y^3)^2$; д) $(3c^2+y)^2$; е) $(5x^2-y^3)^2$.

605. а) $(0{,}2c-p^3)^2$; б) $(1{,}2+2q^3)^2$; в) $(4x^2-3y^2)^2$;
г) $(a^2-8c^5)^2$; д) $(a^2-c)^2$; е) $(-x+y^3)^2$.

606. а) $\left(-\frac{1}{2}-2c^2\right)^2$; б) $\left(-0{,}3x^3+\frac{1}{4}c\right)^2$;
в) $\left(-\frac{1}{5}c-0{,}5a^2\right)^2$; г) $\left(\frac{2}{3}m^3-1\frac{1}{2}x\right)^2$.

607. Представьте в виде степени:
а) $x^2 + 12x + 36$; б) $121 - 22y + y^2$;
в) $9a^2 - 30ab + 25b^2$; г) $16m^2 + 16mn + 4n^2$;

д) $0{,}25x^2 - x + 1$; е) $\frac{1}{36}a^2 + ab + 9b^2$.

608 Замените звёздочки одночленами так, чтобы получилось тождество:

а) $(* + b)^2 = c^2 + 2cb + b^2$; б) $(a + *)^2 = a^2 + 2am + *$;

в) $(3x - *)^2 = 9x^2 - * + 1$; г) $(* - 3bx)^2 = * - 6abx + *$.

609 Найдите значение выражения:

а) $(a - 5)^2 - a(a + 8)$ при $a = 0{,}5$;

б) $(3c + 0{,}5)^2 - (3c - 0{,}5)^2$ при $c = \frac{1}{9}$;

в) $(2x - 5)^2 - 4x^2 - 20x$ при $x = 0{,}25$.

Упростите выражение (610—611).

610 а) $(a + 5)^2 - (a - 3)(a + 3) + 10a$;

б) $(2c - 1)^2 - (2c + 7)(2c - 7) + 5c$;

в) $(3a - 2b)^2 - (2a - 3b)^2 + 5b^2$;

г) $(4a^2 + c)^2 + (a^2 - 4c)^2 - 17a^4$.

611. а) $3(2x - y)^2 - 2(3x - y)^2 + 6x^2$;

б) $1{,}5(ac - 2x^2)^2 - 2{,}5(x^2 - 2ac)^2$;

в) $11c^2 - (x^2 + 3c)^2 - (3x^2 - c)^2$;

г) $10 - \left(\frac{2}{3}az - 3\right)^2 + \left(3az - \frac{2}{3}\right)^2$.

612. Вычислите значение выражения:

а) $(2a - 5)^2 - (2a - 5)(2a + 5)$ при $a = 1{,}5$;

б) $(6x - 2)(6x + 2) - (6x - 2)^2$ при $x = 0{,}5$;

в) $2(x - 1)^2 + 3(5 - x)^2 + 14x$ при $x = 2$;

г) $0{,}5(2c - 3)^2 + 0{,}75(c + 4)^2$ при $c = 2$.

613. Докажите тождество:

а) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;

б) $(2a + b)^2 + (a - 2b)^2 = 5(a^2 + b^2)$;

в) $(3a + b)^2 + (a - 3b)^2 = 10(a^2 + b^2)$.

614. Найдите корень уравнения **(614—616)**.

а) $(x - 6)^2 = x(x - 8)$; б) $2(3 - x)^2 = x(2x + 6)$;

в) $(2x + 5)^2 = 4x^2 + 21$; г) $(1{,}2x - 1)^2 = 1{,}44x^2 - 1{,}4$;

д) $(3x+8)^2=(3x-4)^2$; е) $(6x-5)^2=9(2x+1)^2$.

615. а) $(x-5)^2-x(x+3)=12$; б) $(3z+1)^2-9z(z+6)=-1$;
в) $(0{,}2y+3)^2-(0{,}2y-3)^2=0{,}8$;
г) $\left(\frac{2}{3}x-1\right)^2=\left(\frac{1}{3}x+1\right)\left(\frac{4}{3}x-1\right)$.

616. а) $x^2+10x+25=0$; б) $4x^2-12x+9=0$;
в) $1+16x^2-8x^2=0$; г) $\frac{1}{4}x^2+1+x=0$;
д) $x-9-\frac{1}{36}x^2=0$; е) $2x+25+0{,}04x^2=0$.

617. Вычислите, используя формулу квадрата двучлена:
а) 11^2; б) 99^2; в) 101^2; г) 202^2;
д) 52^2; е) 61^2; ё) 79^2; ж) 81^2.

618. При каких значениях a и b равенство $(a-b)^2=(a+b)^2$ верно?

619. Покажите, что при малых значениях a приближённое равенство $(1+a)^2\approx 1+2a$ верно. Пользуясь им, устно найдите приближённые значения выражений:
а) $(1+0{,}001)^2$; б) $1{,}003^2$; в) $0{,}99^2$; г) $0{,}998^2$.

620*. Используя тождество $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, докажите, что:

а) квадрат суммы двух положительных чисел больше суммы их квадратов;

б) квадрат суммы двух произвольных чисел не меньше их удвоенного произведения;

в) если сумма двух чисел делится на 2, то делится на 2 и сумма их квадратов;

г) если суммы двух натуральных разных чисел одинаковы, то сумма их квадратов будет тем больше, чем меньше их произведение.

621. Докажите, что квадрат нечётного числа, уменьшенный на 1, делится на 8.

622. Докажите, что сумма квадратов трёх последовательных целых чисел не делится на 3.

623. Тождество $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ докажите двумя разными способами и объясните его геометрический смысл, пользуясь рисунком 45.

624. Используя тождество, приведённое в предыдущей задаче, запишите в виде многочлена выражение:

а) $(x-y+5)^2$; б) $(x+2y+3z)^2$;
в) $(x+y^2+z^3)^2$.

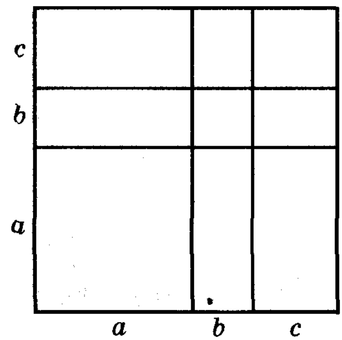


Рис. 45

625. Представьте в виде многочлена:

а) $(x^n+1)^2$; б) $(a^{2m}-1)^2$;
в) $(a^n+a^m)^2$; г) $(x^{n-1}-x)^2$;
д) $\left(\frac{1}{2}(y^m+y^{2m})\right)^2$; е) $\left(\frac{1}{4}(b^n-2b^2)\right)^2$.

626. ***Задача ал-Кархи*** **(XI в.).** Если $a=mn$, то покажите, что $\left(\frac{m-n}{2}\right)^2+a$ и $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-a$ — всегда квадраты определённых выражений.

627. ***Задача Ж. Л. Лагранжа*** (1736 – 1813). Проверьте тождество:

$$\left(A^2+B^2+C^2\right)\left(A_1^2+B_1^2+C_1^2\right)-(A\cdot A_1+B\cdot B_1+C\cdot C_1)^2=$$

$$=(A\cdot B_1-A_1B)^2+(A\cdot C_1-A_1\cdot C)^2+(B\cdot C_1-B_1\cdot C)^2.$$

628. Докажите формулу куба двучлена:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

Пользуясь ею, возведите в куб двучлен:

а) $x+3$; б) $4a+c$; в) $1-ax$;
г) m^2+2ac; д) $x-y$; е) $\frac{1}{3}c-x^2$.

629. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $(x+2)^3$; б) $(y-2)^3$; в) $(2x-1)^3$;
г) $(3x+1)^3$; д) $(m-2n)^3$; е) $(2a+3)^3$.

630. Представьте многочлен в виде степени:

а) a^3-3a^2+3a-1; б) $8y^3-36y^2+54y-27$;
в) $27x^3+108x^2+144x+64$;
г) $a^9-15a^6b+75a^3b^2-125b^3$.

631. Докажите тождество:

а) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$;

б) $(a-b)^3 = a^3 - b^3 + 3ab(a-b)$.

632. Докажите, что если сумма (разность) двух натуральных чисел делится на 3, то и сумма (разность) их кубов также делится на 3.

633*. Докажите, что сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел делится на 3.

634. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(2a+3c)^3$; б) $(ab+0{,}1c)^3$; в) $(0{,}2c^3-1)^3$;

г) $\left(\frac{1}{2}a^2+2c\right)^3$; д) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y^2\right)^3$; е) $(-ab^2c^3-a^2)^3$.

Решите уравнение **(635–636)**.

635*. а) $(x-1)^3 = x^2(x-3)$;

б) $(x+1)^3 = x^3+3x^2+2$.

636*. а) $(x-2)^3+6x^2 = (x-2)(x^2+2x+4)$;

б) $(x+2)^3-6x^2 = (x+2)(x^2-2x+4)$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

637. Найдите сумму многочленов **(637—638)**:

а) $3a^2+2a+7$ и a^3-2a^2+a-3;

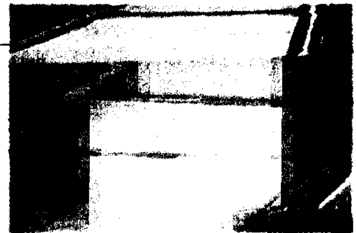
б) $1{,}5x-x^2-x^3$ и $2{,}5x^4-1{,}5x^3-2x+3$.

638. а) $2ac^2-3a^3-c^2$ и $3a^2c-3c^3-a^3-2ac^2$;

б) $7{,}3+1{,}8x-x^3$ и $4x^3-x^2-2{,}8x-5{,}3$.

639. Какова вероятность того, что при подбрасывании игрального кубика выпадет: а) чётное число очков; б) нечётное число очков; в) число очков, кратное 3; г) число очков, кратное 5?

640. Автомобиль, скорость которого v км/ч, за t ч прошёл расстояние 300 км. Выразите формулой зависимость v от t. Как будет изменяться значение v, если значение t увеличивать в 2; 3; 4 раза?



§17. РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ

Умножим сумму переменных a и b на их разность.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Значит, $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$.

Это равенство — тождество. Словами его читают так:

Призведение суммы двух выражений на их разности равно разности квадратов этих выражений.

Пользуясь доказанной формулой, можно сразу записать:

$$(2a + 3c)(2a - 3c) = 4a^2 - 9c^2,$$
$$(1 - ax)(1 + ax) = 1 - a^2x^2.$$

Левую и правую части доказанной формулы можно поменять местами. Получим формулу ***разности квадратов двух выражений***:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Разность квадратов двух выражений равна произведению их суммы и разности.

Примеры.

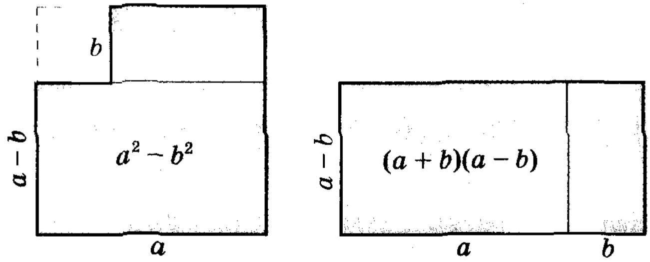
$$x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 4)(x - 4),$$
$$25a^2 - c^4 = (5a)^2 - (c^2)^2 = (5a + c^2)(5a - c^2).$$

Формула разности квадратов очень удобна для разложения многочленов на множители.

Хотите знать ещё больше?

Для положительных чисел a и b формулу $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ можно проиллюстрировать геометрически (рис. 46). Но это тождество верно не только для положительных чисел, но и для любых других чисел и выражений.

Истинность формулы разности квадратов следует из правила умножения многочленов, а это правило — из законов действий сложения и умножения. Законы сложения и умножения чисел — это своеобразные аксиомы, следствиями которых являются алгебраические тождества.



Проверьте себя

1. Чему равно произведение суммы двух выражений на их разность?
2. Чему равна разность квадратов двух выражений?
3. Можно ли в формулу разности квадратов вместо переменных подставлять любые числа, одночлены или многочлены?
4. Каждую ли разность квадратов двух выражений можно разложить на множители?

Выполним вместе!

1. Напишите разность квадратов и квадрат разности выражений $2a$ и $x - 1$.

Решение. $(2a)^2 - (x - 1)^2$ — разность квадратов; $(2a - x + 1)^2$ — квадрат разности данных выражений.

2. Запишите в виде произведения двух двучленов выражение:

а) $a^2 - 4n^2$; б) $9 - 25x^2$; в) $1 - 16a^2c^4$.

Решение. а) $a^2 - 4n^2 = a^2 - (2n)^2 = (a - 2n)(a + 2n)$;

б) $9 - 25x^2 = 3^2 - (5x)^2 = (3 - 5x)(3 + 5x)$;

в) $1 - 16a^2c^4 = 1^2 - (4ac^2)^2 = (1 - 4ac^2)(1 + 4ac^2)$.

3. Представьте в виде двучлена выражение:

а) $(x + 2y)(x - 2y)$; б) $(3xy - 1)(3xy + 1)$.

Решение.

а) $(x + 2y)(x - 2y) = x^2 - (2y)^2 = x^2 - 4y^2$;

б) $(3xy - 1)(3xy + 1) = (3xy)^2 - 1^2 = 9x^2y^2 - 1$.

Используя формулу разности квадратов, промежуточные вычисления и преобразования можно выполнять устно, а записывать лишь конечный результат.

Выполните устно

Представьте в виде многочлена выражение **(641—642)**.

641. а) $(x+m)(x-m)$; б) $(x+z)(x-z)$; в) $(m+4)(m-4)$; г) $(5+a)(5-a)$; д) $(ab+c)(ab-c)$; е) $(ab-1)(ab+1)$.

642. а) $(x-c)(x+c)$; б) $(a+x)(x-a)$; в) $(2a-y)(2a+y)$; г) $(z-3x)(z+3x)$; д) $(4a-5b)(4a+5b)$; е) $(7c-xy)(7c+xy)$.

643. На какое выражение надо умножить двучлен $6x-p$, чтобы получить $36x^2-p^2$?

644. На какое выражение надо умножить двучлен $1+9a^2$, чтобы получить $1-81a^4$?

645. Разложите двучлен на множители:

а) $25-x^2$; б) a^2-1; в) m^2-4n^2; г) $100a^2-9b^2$; д) $1{,}44x^2-0{,}01y^2$; е) $\frac{25}{36}-\frac{n^2}{4}$.

Уровень A

646. Даны выражения $2a$ и $5x^3$. Запишите: а) разность их квадратов; б) квадрат их разности; в) сумму их квадратов; г) квадрат их суммы.

647. Запишите разность квадратов и квадрат разности выражений $2ab$ и $a-b$.

Представьте в виде многочлена выражение **(648–654)**.

648. а) $(4a+1)(4a-1)$; б) $(2a-c)(2a+c)$; в) $(2d+x)(2d-x)$; г) $(a-c^2)(a+c^2)$; д) $(8x-y^2)(y^2+8x)$; е) $(2a^2+3b)(2a^2-3b)$.

649. а) $(3p-q)(q+3p)$; б) $(m-4c^2)(m+4c^2)$; в) $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$; г) $(m^2-n^2)(m^2+n^2)$; д) $(4a-b^3)(4a+b^3)$; е) $(5+abc)(5-abc)$.

650. а) $\left(\frac{2}{3}x-1\right)\left(\frac{2}{3}x+1\right)$; б) $\left(\frac{1}{2}c-p\right)\left(\frac{1}{2}c+p\right)$;
в) $(0{,}4a-x)(0{,}4a+x)$; г) $(1{,}5-m^2)(1{,}5+m^2)$.

651. а) $2(4x-1)(4x+1)$; б) $k(m^2-2pt)(m^2+2pt)$;
в) $(2q-c^3n)(2q+c^3n)$; г) $(0{,}5+2a)(0{,}5-2a)\cdot 2c^2$.

652. а) $\left(\frac{1}{4}a+4b\right)\left(\frac{1}{4}a-4b\right)\cdot 4a$; б) $\left(\frac{2}{5}m-2n\right)\left(\frac{2}{5}m+2n\right)\cdot 5m$;
в) $7a^2(1+3a^2b)(1-3a^2b)$; г) $-cq(c+2q)(c-2q)$.

653. а) $(a-2b)(a+2b)+4b^2$; б) $(m^2+3y)(m^2-3y)-m^4$;
в) $c^2-(c-1)(c+1)$; г) $\left(a-\frac{1}{3}c^2\right)\left(a+\frac{1}{3}c^2\right)+\frac{2}{3}c^4$.

654. а) $(x-3)(x+3)(x^2+9)$; б) $(m+5)(m-5)(m^2+25)$;
в) $(4a^2+1)(2a+1)(2a-1)$; г) $(9y^2-z^2)(z+3y)(3y-z)$.

655. Выполните умножение выражений:
а) $-x-y$ и $-x+y$; б) $-1+3a$ и $-1-3a$;
в) $-2a+3b$ и $-2a-3b$; г) $-c-7$ и $7-c$;
д) $-0{,}5-2x^4$ и $-0{,}5+2x^4$; е) $3{,}5-xy$ и $-xy-3{,}5$.

656. Замените звёздочки одночленом так, чтобы получилось тождество:
а) $(5m-*)(5m+*)=25m^2-9a^2b^2$;
б) $(4a-*)(*+3x^2)=16a^2-9x^4$.

657. Представьте в виде произведения:
а) x^2-m^2; б) a^2-9; в) b^2-c^4; г) $1-16z^2$;
д) $q^2-p^2n^2$; е) $0{,}04-x^2$; ё) $\frac{1}{4}a^2-m^4$; ж) $-c^4+9a^2$.

658. Вычислите:
а) 35^2-15^2; б) 43^2-27^2; в) 136^2-64^2;
г) $51{,}5^2-49{,}5^2$; д) $21{,}3^2-1{,}3^2$; е) $\left(3\frac{2}{3}\right)^2-\left(1\frac{1}{3}\right)^2$.

659. Вычислите без калькулятора:
а) $104\cdot 96$; б) $1007\cdot 993$; в) $0{,}95\cdot 1{,}05$.

Уровень Б

Запишите в виде многочлена (660–662).

660. а) $(2abc - 3a^2)(2abc + 3a^2)$; б) $(5x^3 - 3abc)(5x^3 + 3abc)$;
в) $(4ab^2 + 5ac)(4ab^2 - 5ac)$; г) $(8xz^3 + 3z^2)(3z^2 - 8xz^3)$.

661. а) $(0{,}2ax - 1{,}2ay)(0{,}2ax + 1{,}2ay)$;
б) $(-3a + 5x^2y)(3a + 5x^2y)$;
в) $\left(\frac{1}{2}ax - \frac{2}{3}az^2\right)\left(\frac{1}{2}ax + \frac{2}{3}az^2\right)$;
г) $\left(1\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{3}c\right)\left(1\frac{1}{2}a + 2\frac{1}{3}c\right)$.

662. а) $(-3x + y^2)(-3x - y^2)$; б) $(-0{,}5ac + 1{,}1c^2)(-0{,}5ac - 1{,}1c^2)$;
в) $(-2ax^2 - 3a^2x)(-2ax^2 + 3a^2x)$;
г) $\left(-1\frac{1}{2}ac - \frac{1}{3}a^2\right)\left(-1\frac{1}{2}ac + \frac{1}{3}a^2\right)$.

Упростите выражение (663–665).

663. а) $(0{,}5a - 0{,}4b)(0{,}5a - 0{,}4b) \cdot 2ab$;
б) $10x^2y(0{,}2x + 2y)(-0{,}2x + 2y)$;
в) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \cdot (-9xy)$;
г) $\left(1\frac{1}{2}a^2b + 1\right)\left(1 - 1\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot (-4b)$..

664. а) $(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)$; б) $(ab - c)(ab + c)(a^2b^2 + c^2)$;
в) $(3x^2 + y)(3x^2 - y)(9x^4 + y^2)$;
г) $(16a^4c^2 + 9x^6)(4a^2c - 3x^3)(4a^2c + 3x^3)$.

665. а) $(2x^2 - 1)(2x^2 + 1)(4x^4 + 1) + 1$;
б) $(0{,}1 - 2c)(0{,}1 + 2c)(0{,}01 + 4c^2) + 16c^4$;
в) $16a^4 - (2a - c^2)(2a + c^2)(4a^2 + c^4)$;
г) $\frac{1}{16} - \left(\frac{1}{2} - 3a^2b\right)\left(\frac{1}{2} + 3a^2b\right)\left(\frac{1}{4} + 9a^4b^2\right)$.

666. На какое выражение надо умножить сумму $2a^4x^2 + b^3$, чтобы получилась разность $4a^8x^4 - b^6$?

667. На какое выражение надо умножить разность $0{,}1x^2y - 2xy^2$, чтобы получилась разность $0{,}01x^4y^2 - 4x^2y^4$?

668. *Разложите двучлен на множители:*

а) $0{,}04x^6 - 1$; б) $-x^2y^4 + a^6b^8$; в) $a^2b^2c^2 - 121x^6$;

г) $\frac{4}{81}z^{10} - x^{16}$; д) $-64 + 36m^4n^2$; е) $a^2 - (b + c)^2$.

669. Докажите, что:

а) $60^2 + 899^2 = 901^2$; б) $65^2 + 2112^2 = 2113^2$.

670. Докажите, что:

а) $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$;

б) $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$.

671. Верно ли равенство

$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2$?

672. Докажите, что при каждом натуральном значении n:

а) число $(n + 5)^2 - n^2$ делится на 5;

б) число $(n + 7)^2 - n^2$ делится на 7;

в) число $(6n + 1)^2 - 1$ делится на 12.

673. Площадь кольца, изображённого на рисунке 47, составляет $18{,}84$ см^2. Найдите его внешний и внутренний радиусы, *если их разность равна 3 см.*

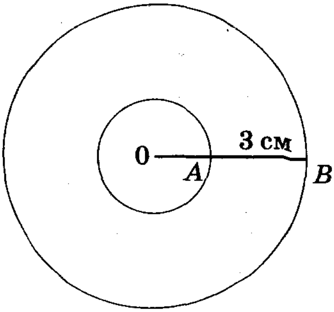


Рис. 47

Решите уравнение **(674–675)**.

674. а) $(x - 2)(x + 2) = x^2 + 8x$;

б) $(3 + c)(3 - c) = 3c - c^2$;

в) $-x^2 + (x + 5)(x - 5) = x$; г) $(y + 4)(y - 4) - y^2 = 18y$.

675. а) $(9 - x)(x + 9) = -x^2 + 3x$; б) $z^2 = 2z - (z + 3)(3 - z)$;

в) $4x^2 + (3 - 2x)(3 + 2x) = 81x$; г) $9b^2 - (2 - 3b)(2 + 3b) = -4$.

676. Докажите ***тождество Платона*** (IV в. до н. э.):

$(p^2 + 1)^2 - (p^2 - 1)^2 = 4p^2$.

677. Докажите ***тождество Пифагора*** (VI в. до н. э.):

$(2a^2 + 2a + 1)^2 - (2a^2 + 2a)^2 = (2a + 1)^2$.

678. Докажите, что каждое нечётное натуральное число, большее 1, является разностью квадратов двух последовательных натуральных чисел.

679. Докажите, что сумма двух последовательных натуральных чисел равна разности их квадратов.

680. Докажите, что квадрат каждого чётного натурального числа равен разности квадратов двух целых чисел.

681. Используя рисунок 48 и формулу квадрата разности, докажите, что в каждом прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы (теорема Пифагора).

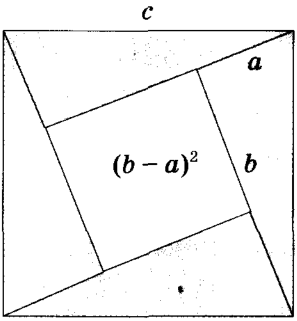


Рис. 48

682. Используя предыдущую задачу, найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого:

а) 3 см и 4 см; б) 5 м и 12 м; в) 7 дм и 24 дм.

683*. Упростите выражение:

а) $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$;

б) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$.

Вычислите **(684—685)**.

684*. $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)-2^{32}$;

685*. $(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})-3^{32}+2^{32}$.

Решите уравнение **(686—689)**.

686. а) $(2x-1)(2x+1)=9+4x(x+5)$;

б) $(3z+2)(3z-2)=7z+9(z^2-2)$.

687. $8z^2-(3z+5)(3z-5)=z(5-z)$.

688. $x^2-(1{,}2x-3)(3+1{,}2x)=0{,}2x(1{,}5-2{,}2x)$.

689. $(2{,}5y-2)(2{,}5y+2)-(1{,}5y+3)(1{,}5y-3)=4x(x-5)$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

690. Тождественны ли выражения:

а) $x+2x$ и $3x$; б) $7a^2-a^2$ и $6a^2$; в) $3a+a^2$ и $4a^3$?

691. Найдите меры двух смежных углов, если один из них на 40° больше второго.

692. Найдите меры двух смежных углов, если один из них на 20 % меньше второго.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант I

1°. Возведите в квадрат двучлен:

а) $x + 3$; б) $a^2 - c$.

2°. *Представьте в виде многочлена:*

а) $(ax + b^2)^2$; б) $(1 + 2c^3)(1 - 2c^3)$.

3•. Упростите выражение: $12ab - (2a + 3b)^2$.

4•. Решите уравнение: $(x - 3)^2 = (x - 5)(x + 4)$.

Вариант II

1°. Возведите в квадрат двучлен:

а) $m - 5$; б) $x^2 - z$.

2°. Представьте в виде многочлена:

а) $(cx + 2b)^2$; б) $(2 + 3c)(2 - 3c)$.

3•. Упростите выражение: $30xc - (3x + 5c)^2$.

4•. Решите уравнение: $(x - 2)^2 = (x + 3)(x - 4)$.

Вариант III

1°. Возведите в квадрат двучлен:

а) $3 - y$; б) $a - x^3$.

2°. Представьте в виде многочлена:

а) $(2x + ab)^2$; б) $(1 + 4a)(1 - 4a)$.

3•. Упростите выражение: $24ma - (4m + 3a)^2$.

4•. Решите уравнение: $(x + 2)^2 = (x - 1)(x + 4)$.

Вариант IV

1°. Возведите в квадрат двучлен:

а) $7 - a$; б) $t^2 - a$.

2°. Представьте в виде многочлена:

а) $(3c - xy)^2$; б) $(3 + 5a)(3 - 5a)$.

3•. Упростите выражение: $9a^2b^2 - (2 - 3ab)^2$.

4•. Решите уравнение: $(x - 4)^2 = (x - 5)(x + 2)$.

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ ОЦЕНИВАНИЮ

Тестовые задания № 4

1. Найдите общий множитель членов многочлена $6cx - 9cy$:

а) $6c$; б) $3x$; в) $3c$; г) $6x$.

2. Какое из приведённых выражений является разностью квадратов двух выражений:

а) $x^2 - y^2$; б) $(x - y)^2$; в) $2(x - y)$; г) $x - y$?

3. Какое из приведённых выражений является кубом суммы двух выражений:

а) $(a + b)^3$; б) $3(a + b)$; в) $a^3 + b^3$; г) $a + b$?

4. Возведите в степень $(a + 2b)^2$:

а) $a^2 + 4b^2$; б) $a^2 + 4ab + 4b^2$;
в) $a^2 + 4ab + 2b^2$; г) $a^2 + 2ab + 2b^2$.

5. Представьте выражение $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ в виде степени:

а) $(x + 3)^3$; б) $(x - 3)^3$; в) $(x + 1)^3$; г) $(x - 1)^3$.

6. Представьте в виде квадрата двучлена выражение $0{,}25x^2 + y^2 - xy$:

а) $(y + 0{,}5x)^2$; б) $(y - 0{,}5x)^2$;
в) $0{,}25(2y - x)^2$; г) $0{,}5^2(2x - y)$.

7. Какой числовой множитель можно вынести за скобки в выражении $60x^2 + 30x + 45$:

а) 9; б) 10; в) 15; г) 20?

8. Какое число нужно поставить вместо *, чтобы равенство $(6x - 8)^2 = * \, (3x - 4)^2$ стало тождеством:

а) 6; б) 8; в) 4; г) 2?

9. На какое выражение надо умножить сумму $2a^4 + b^3$, чтобы получить разность $4a^8 - b^6$:

а) $2a^4b^3$; б) $2a^4 - b^3$; в) $2a^2b^2$; г) $2a^4 + b^3$?

10. Решите уравнение $x^2 - 16x + 64 = 0$:

а) $x = 8$; б) $x = -8$; в) $x = 16$; г) $x = -16$.

Тестовые задания к контрольной работе № 4

1°. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $12a^3 - 18a^2$; б) $60a^4b^5 + 36a^3b^6 - 48a^3b^2$.

2°. Разложите на множители выражение:

а) $5a + 5b + ab + b^2$; б) $x - 3xy - 21y + 7$.

3°. Представьте многочлен в виде степени:

а) $x^2 - 8x + 16$; б) $9x^2 + 6x + 1$.

4°. Представьте многочлен в виде произведения:

а) $2ab + 2ac + xc + xb + 5c + 5b$;

б) $16x^2 - 25$; в) $(3a + 2)^2 - 36a^2$.

5•. Вычислите значение выражения:

$2xy - 2x + 4y - x^2$ при $y = 2{,}55$; $x = 5{,}1$.

6•. Представьте многочлен $27x^3 + 108x^2 + 144x + 64$ в виде степени.

7•. Решите уравнение:

а) $9x^2 + 6x + 1 = 0$; б) $48x^3 + 12x = 0$.

8•. Докажите, что

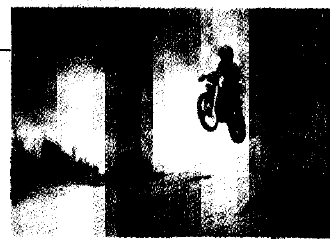
$13 \cdot 3^8 + 12 \cdot 3^7 + 45 \cdot 3^6 - 54 \cdot 3^5$ делится на 270.

9••. Докажите, что разность квадратов двух последовательных нечётных чисел всегда делится на 8.

10••. Вычислите:

$$(6 + 1)(6^2 + 1)(6^4 + 1)(6^8 + 1)(6^{16} + 1) - 0{,}2 \cdot 6^{32}.$$

§18. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМУЛ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ



С помощью формул сокращённого умножения некоторые многочлены можно разложить на множители. Например, двучлен $x^2 - a^2$ можно представить в виде произведения по формуле *разности квадратов*:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

Примеры.

$$x^4 - 4 = (x^2)^2 - 2^2 = (x^2 + 2)(x^2 - 2);$$

$$4a^2x^6 - 1 = (2ax^3)^2 - 1 = (2ax^3 + 1)(2ax^3 - 1);$$

$$0{,}04c^2 - \frac{1}{4}n^2 = (0{,}2c)^2 - \left(\frac{1}{2}n\right)^2 = \left(0{,}2c + \frac{1}{2}n\right)\left(0{,}2c - \frac{1}{2}n\right).$$

Трёхчлены $x^2 + 2xy + y^2$ і $x^2 - 2xy + y^2$ раскладывают на множители по формуле *квадрата двучлена*:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = (x + y)(x + y),$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = (x - y)(x - y).$$

Примеры.

$$36 + 12x^2 + x^4 = 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot x^2 + (x^2)^2 = (6 + x^2)^2;$$

$$a^2c^4 - 2ac^2x + x^2 = (ac^2)^2 - 2ac^2x + x^2 = (ac^2 - x)^2.$$

Полученные выражения можно разложить на множители и записать так: $(6 + x^2)(6 + x^2)$, $(ac^2 - x)(ac^2 - x)$.

Многочлен $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ можно разложить на множители по формуле *куба двучлена*:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b);$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b).$$

Хотите знать ещё больше?

Раскладывать на множители можно не только многочлены, но и некоторые другие целые выражения.

Например, $(x-3)^2 - a^4$, $(a-1)^2 + 2(a-1)x + x^2$ — не многочлены, но и их можно представить в виде произведений многочленов:

$$(x-3)^2 - a^4 = (x - 3 + a^2)(x - 3 - a^2);$$
$$(a-1)^2 + 2(a-1)x + x^2 = ((a-1)+x)^2 = (a-1+x)^2.$$

Проверьте себя

1. Чему равна разность квадратов двух выражений?
2. Чему равен квадрат разности двух выражений?
3. На какие множители раскладывается выражение $a^2 + 2ac + c^2$?
4. На какие множители раскладывается выражение $a^2 - 2ac + c^2$?
5. На какие множители раскладывается выражение $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$?

Выполним вместе!

1. Разложите на множители многочлен:

а) $3x^2 + 6x + 3$; б) $20c^4 - 45a^2c^2$.

✔ Решение. а) $3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$;

б) $20c^4 - 45a^2c^2 = 5c^2(4c^2 - 9a^2) = 5c^2(2c + 3a)(2c - 3a)$.

2. Решите уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$.

✔ Решение. $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Значит, данное уравнение равносильно такому:

$$(x-2)^2 = 0.$$

Квадрат числа равен нулю только тогда, когда это число равно 0. А $x - 2 = 0$, когда $x = 2$.

Ответ. $x = 2$.

3. Разложите на множители многочлен:

а) $8x^6 + 60x^4y^2 + 150x^2y^4 + 125y^6$;

б) $1 - 0,6c + 0,12c^2 - 0,008c^3$.

✔ Решение. а) $8x^6 + 60x^4y^2 + 150x^2y^4 + 125y^6 =$
$= (2x^2)^3 + 3 \cdot (2x^2)^2 \cdot 5y^2 + 3 \cdot 2x^2 \cdot (5y^2)^2 + (5y^2)^3 =$
$= (2x^2 + 5y^2)^3 = (2x^2 + 5y^2)(2x^2 + 5y^2)(2x^2 + 5y^2)$;
б) $1 - 0{,}6c + 0{,}12c^2 - 0{,}008c^3 =$
$= 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot 0{,}2c + 3 \cdot 1 \cdot (0{,}2c)^2 - (0{,}2c)^3 = (1 - 0{,}2c)^3 =$
$= (1 - 0{,}2c)(1 - 0{,}2c)(1 - 0{,}2c)$.

Выполните устно

693. Разложите на множители многочлены, приведённые в таблице.

	A	B	C
1	$a^2 - 1$	$a + 2a + 1$	$1 + 2x + x^2$
2	$x^2 - 4$	$x^2 - 2x + 1$	$1 - 2c + c^2$
3	$4c^2 - 1$	$m^2 - 2m + 1$	$x^2 + y^2 + 2xy$
4	$9x^2 - c^2$	$a^2 - 2am + m^2$	$x^2 + a^2 - 2ax$

Уровень A

Разложите на множители выражение (694—705).

694. а) $p^2 - q^2$; б) $x^2 - 16$; в) $x^2 - 9y^2$;
г) $p^2 - x^4$; д) $a^2 - c^2x^2$; е) $9a^2 - 4b^2$.

695. а) $1 - p^4$; б) $25 - c^6$; в) $0{,}01 - x^2$;
г) $\frac{1}{4} - \frac{1}{9}c^2$; д) $-c^2 + 16$; е) $-1 + a^2b^4c^6$.

696. а) $9m^2 - 4x^2$; б) $49c^2 - x^4$; в) $x^4 - 4c^4$;
г) $0{,}01x^2 - x^6$; д) $a^6 - 0{,}04c^4$; е) $1 - a^2b^4c^6$.

697. а) $x^2 + 10x + 25$; б) $x^2 - 10x + 25$;
в) $a^2 - 8ax + 16x^2$; г) $c^2 + 8cx + 16x^2$.

698. а) $a^2 + 2am + m^2$; б) $x^2 + 4x + 4$;
в) $a^2 + 4ab + 4b^2$; г) $b^2 - 6b + 9$.

699. а) $1 + 6x + 9x^2$; б) $1 + x + \frac{1}{4}x^2$;
в) $3a^2 - 6ab + 3b^2$; г) $-x^2 + 2x - 1$.

700. а) $-4c^2 - 4c - 1$; б) $a + 2ax + ax^2$;
в) $4c - c^2 - 4$; г) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$.

701. а) $(2a - 1)^2 - 100$; б) $1 - (a - b)^2$;
в) $(x + c)^2 - 9x^2c^4$; г) $(1 - x^2)^2 - 4x^2$.

702. а) $(3x - 5)^2 - 49x^2$; б) $4 - (7y - 5)^2$;
в) $(0{,}5 - 3a)^2 - 16a^4$; г) $64n^2 - (1{,}5 - 2n)^2$.

703. а) $(3x - 2)^2 - 9$; б) $64 - (a - 4)^2$;
в) $16x^2 - (5x + 1)^2$; г) $36x^2 - (3 - 2x)^2$;
д) $4(a + 2b)^2 - (a - 2b)^2$; е) $(3x + y)^2 - 9(3x - y)^2$.

704. а) $(5a + 7)^2 - (3a + 6)^2$; б) $(12n - 1)^2 - (3 - 5n)^2$;
в) $(0{,}3x^2 - x + 2)^2 - 0{,}09x^4$; г) $9(4ab^2 - c)^2 - (2ab^2 + c)^2$.

705. а) $(3 + a)^2 + 2(3 + a) + 1$; б) $(5x - 7)^2 - 2(5x - 7) + 1$;
в) $(x^2 - 4)^2 - 6(x^2 - 4) + 9$; г) $4(a - 2c)^2 - 4(a - 2c) + 1$.

706. Представьте выражение в виде произведения трёх множителей:
а) $81a^4 - 1$; б) $a(a^2 - x^2) + 2(x^2 - a^2)$.

707. Разложите на множители выражение:
а) $3a^2 - 3$; б) $7x^2 - 28$; в) $5x^2 - 20$;
г) $0{,}5 - 0{,}5c^2$; д) $a^2n^2 - n^2$; е) $a^4 - c^4$.

Решите уравнение (**708—711**).

708. а) $x^2 - 9 = 0$; б) $25y^2 - 4 = 0$;
в) $\frac{1}{4}z^2 - 25 = 0$; г) $\frac{36}{49} - a^2 = 0$.

709. а) $x^2 - 6x + 9 = 0$; б) $z^2 + 4z + 4 = 0$;
в) $5(y^2 - 8y + 16) = 0$; г) $\frac{1}{3}(x^2 - x + \frac{1}{4}) = 0$.

710. а) $c^2 + 9 = 6c$; б) $y^2 + 4 = 4y$;
в) $2x^2 - 2 - 4x = 0$; г) $x - 1 = 0{,}25x^2$.

711. а) $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$; б) $4x^2 + 9 = 6x$;
в) $2y^2 + 2y + 0{,}5 = 0$; г) $4x^2 + 0{,}25 = 2x$.

Уровень Б

Разложите на множители (712—713).

712. а) $x^2y^2 - 81$; б) $0{,}04m^2 - n^4$; в) $\frac{1}{9}p^6 - 16a^2$;
г) $-a^8y^6 + 0{,}0001$; д) $0{,}0144 - x^2y^{10}$; е) $-1 + a^{10}b^8c^4$.

713. а) $1 - (a + b + c)^2$; б) $(2x + y - 3)^2 - 4y^2$;
в) $(5a^2 - a + 3)^2 - 25a^4$; г) $(x^2 - 3x + 1)^2 - 9x^2$.

Разложите на множители выражение (714—715).

714. а) $a^4 - 2a^2n + n^2$; б) $a^2 + 2an^2 + n^4$;
в) $c^8 - 6c^4y^3 + 9y^6$; г) $9c^8 + 6c^4x^3 + x^6$.

715. а) $(2n + 3)^2 - (n - 1)^2$; б) $(3a + 2p)^2 - (a + p)^2$;
в) $4(x - y)^2 - (x + y)^2$; г) $9(p + q)^2 - (p - q)^2$;
д) $(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 1$; е) $(3c + 2)^2 - 4(3c + 2) + 4$.

716. Представьте выражение в виде произведения четырёх множителей:
а) $x^5 - x^4 - x + 1$; б) $c(c^4 - 16) - c^4 + 16$.

717. Вычислите значение выражения:
а) $(5x + 1)^2 - (5x - 3)^2$, если $x = 0{,}7$;
б) $(a - b)^2 + 2(a - b)b + b^2$, если $a = 0{,}3$;
в) $17a^2 - 34ax + 17x^2$, если $a = 3{,}7$ и $x = 2{,}7$;
г) $(5x - 3y)^2 + (3x + 5y)^2$, если $x = 5{,}5$ и $y = 4{,}5$.

718. Вычислите (718—719).
а) $7^{50} \cdot 5^{50} - (35^{25} - 1)(35^{25} + 1)$;
б) $8^{30} \cdot 9^{30} + (1 - 72^{15})(1 + 72^{15})$.

719. а) $5^{30} \cdot 3^{30} - (15^{15} - 1)(15^{15} + 1)$;
б) $7^{24} \cdot 8^{24} + (1 - 56^{12})(1 + 56^{12})$;
в) $(32^{32} - 2)(32^{32} + 2) - 8^{64} \cdot 4^{64}$;
г) $(3 + 54^8)(3 - 54^8) + 6^{16} \cdot 9^{16}$.

720. Сравните с нулём значение выражения:
а) $x^2 - 22x + 121$; б) $-x^2 + 20x - 100$;
в) $x^2 - 10x + 26$; г) $-x^2 + 6x - 10$.

721. Поставьте вместо звёздочек такие одночлены, чтобы получилось тождество:

а) $* - 1 = (a^2b^2 - *)(* + 1)$; б) $\frac{1}{9}x^6 - * = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4y^4\right)(* + *)$;

в) $* - * = (m^2 - *)(0{,}5n^5 + *)$; г) $(1 + *)^2 = * + 8xy^2 + *$;

д) $(* - 1{,}2ab)^2 = 0{,}04 - * + *$; е) $(* - *)^2 = 36x^4 - 24x^2y^2 + *$.

722. Поставьте вместо звёздочек такие одночлены, чтобы получилось тождество:

а) $* - 1 = (5c - *)(* + 1)$; б) $4a^4 - * = (2a^2 - 3c)(* + *)$;

в) $m^4 - * + * = (* - 3a)^2$; г) $c^3 + * + * + 8 = (* + 2)^3$.

723. При каких значениях m данный трёхчлен можно представить в виде квадрата двучлена:

а) $a^2 + 4ac + m$; б) $0{,}01x^4 - x^2 + m$;

в) $mx^4 + 6x^2 + 1$; г) $4z^2 - m + 81$?

724. Докажите тождество:

а) $(a^2 - x^2)^2 + (2ax)^2 = (a^2 + x^2)^2$;

б) $(a^2 - c)^2 + 2(a^2 - c)(a^2 + c) + (a^2 + c)^2 = 4a^4$;

в) $a^8 - x^8 = (a^4 + x^4)(a^2 + x^2)(a + x)(a - x)$;

г) $(a + x - y)^2 - (a - x + y)^2 = 4a(x - y)$.

Представьте выражение в виде произведения (725—727).

725. а) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; б) $a^3 - 3a^2 + 3a + 1$;

в) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$; г) $8y^3 - 12y^2 + 6y - 1$.

726. а) $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$; б) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$;

в) $27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3$; г) $p^3 + 6p^2q + 12pq^2 + 8q^3$.

727*. а) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$;

б) $8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$;

в) $0{,}001x^{12} - 0{,}03x^8 + 0{,}3x^4 - 1$;

г) $0{,}125a^3 + 0{,}75a^2b^2 + 1{,}5ab^4 + b^6$.

Решите уравнение (728—731).

728. а) $x^2 - 10x + 25 = 0$; б) $z^2 + 14z + 49 = 0$;

в) $x^2 - x + 0{,}25 - 0$; г) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$.

729. а) $4y^2 - 4y + 1 = 0$; б) $9x^2 + 12x + 4 = 0$;
в) $16z^2 + 9 = 24z$; г) $121 + 1{,}21x^2 = 24{,}2x$.

730*. а) $(x^2 + x + 2)^2 - (x^2 + x - 2)^2 = 0$;
б) $(2y^2 + 2y + 1)^2 - (2y^2 + 2y - 1)^2 = 0$.

731*. а) $(x - 4)(x^2 - 2x + 1) = 0$; б) $(2z + 1)(z^2 - 6z + 9) = 0$.

732. Для каких x и y равенство верно:
а) $(x - y)^2 = x^2 - y^2$; б) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$?

733. Разность квадратов двух последовательных нечётных натуральных чисел равна 144. Найдите эти числа.

734. Сумма двух чисел равна 34, а разность их квадратов — 408. Найдите эти числа.

735. Разность двух чисел равна 21, а разность их квадратов — 1155. Найдите эти числа.

736*. Представьте в виде произведения:
а) $x^{2n} - 1$; б) $a^{4p} - 4$; в) $9x^{2n+2} - y^{6n}$; г) $a^{4m-2} - 49b^{2m-4}$;
д) $a^{2p} - 2a^p + 1$; е) $x^{2n+6} + 8x^{n+3} + 16$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

737. Найдите отношение:
а) полуразности чисел $\frac{5}{6}$ и $\frac{1}{3}$ к их сумме;
б) суммы чисел $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{6}{7}$ к их произведению.

738. В школе на шесть отличников седьмых классов выделено две одинаковые путёвки в детский лагерь отдыха. Сколькими способами можно распределить путёвки между этими отличниками?

739. Докажите, что значение выражения:
а) $13^9 - 13^8 - 13^7$ кратно 5;
б) $23^{11} - 23^{10} - 23^9$ кратно 101.

740. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:
а) $4 \cdot 10^8$ и $2 \cdot 10^7$; б) $3{,}6 \cdot 10^{19}$ и $2 \cdot 10^{19}$.

§19. РАЗНОСТЬ И СУММА КУБОВ

Выполним умножение многочленов $a - b$ и $a^2 + ab + b^2$:

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$

Следовательно, при любых значениях a и b

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).}$$

Трёхчлен $a^2 + ab + b^2$ называют *неполным квадратом суммы* выражений a и b (от $a^2 + 2ab + b^2$ он отличается только коэффициентом среднего члена). Поэтому доказанную формулу словами читают так:

! **разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.**

Выполним умножение многочленов $a + b$ и $a^2 - ab + b^2$:

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$

Следовательно,

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).}$$

Трёхчлен $a^2 - ab + b^2$ называют *неполным квадратом разности* выражений a и b. Поэтому полученную формулу читают так:

! **сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.**

С помощью доказанных формул можно раскладывать на множители многочлены, являющиеся разностями или суммами кубов.

Примеры.

$$x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3 = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2);$$

$$1 + 0{,}027a^6 = 1^3 + (0{,}3a^2)^3 = (1 + 0{,}3a^2)(1 - 0{,}3a^2 + 0{,}09a^4).$$

Хотите знать ещё больше?

Формулу «разность кубов» для положительных значений a и b можно проиллюстрировать геометрически, как показано на рисунке 49.

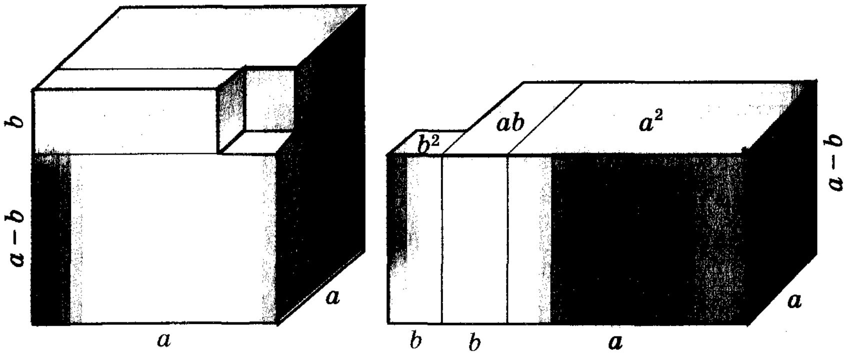


Рис. 49

Если умножить на $a - b$ выражения

$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ и $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$, то получим формулы:

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3),$$
$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

Можно доказать, что для каждого натурального значения n истинна формула:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Формулы «разность квадратов» и «разность кубов» — простейшие случаи этой общей формулы.

Проверьте себя

1. Какое выражение называют неполным квадратом суммы? А неполным квадратом разности?
2. Чему равно произведение суммы двух выражений и неполного квадрата их разности?
3. Чему равно произведение разности двух выражений и неполного квадрата их суммы?
4. Чему равна разность кубов двух выражений? Напишите соответствующую формулу.
5. Чему равна сумма кубов двух выражений? Напишите формулу.

Выполним вместе!

1. Разложите на множители двучлен:

а) $8 - 27x^3y^3$; б) $-a^6 + c^3$.

Решение.

а) $8 - 27x^3y^3 = 2^3 - (3xy)^3 = (2 - 3xy)(2^2 + 2 \cdot 3xy + (3xy)^2) =$
$= (2 - 3xy)(4 + 6xy + 9x^2y^2)$;

б) $-a^6 + c^3 = -(a^6 - c^3) = -(a^2 - c)(a^4 + a^2c + c^2) =$
$= (c - a)^2(a^4 - a^2c + c^2)$.

2. Найдите произведение многочленов: $x^4 - x^2y + y^2$ и $x^2 + y$.

Решение.

Первый способ. По формуле суммы кубов:

$$(x^2 + y)(x^4 - x^2y + y^2) = (x^2)^3 + y^3 = x^6 + y^3.$$

Второй способ. По правилу умножения многочленов:

$$(x^2 + y)(x^4 - x^2y + y^2) = x^6 - x^4y + x^2y^2 + x^4y - x^2y^2 + y^3 = x^6 + y^3.$$

Выполните устно

741. Чему равен неполный квадрат суммы выражений a и c?

742. Чему равен неполный квадрат разности выражений a и c?

743. Как можно упростить выражение:

а) $(1 - x)(x^2 + x + 1)$; б) $(a^2 - a + 1)(a + 1)$?

744. Разложите на множители двучлен: а) $n^3 - 1$; б) $c^3 + 8$.

Уровень А

Представьте в виде многочлена (745—747).

745. а) $(a - x)(a^2 + ax + x^2)$; б) $(b + 2)(b^2 - 2b + 4)$.

746. а) $(1 + x)(1 - x + x^2)$; б) $(a - c^2)(a^2 + ac^2 + c^4)$.

747. а) $(2a - n)(4a^2 + 2an + n^2)$; б) $(1 + c + c^2)(1 - c)$.

Разложите на множители двучлен (748—754).

748. а) $a^3 - c^3$; б) $x^3 + 8$; в) $1 - p^3$;

г) $c^3 - 64x^3$; д) $n^6 - 1$; е) $27a^3 + b^3$.

749. а) $125 - z^3$; б) $0{,}001 - a^6$; в) $27x^6 - a^3y^3$;
г) $p^3 + q^3$; д) $8 - a^3$; е) $c^3 + 8x^3$.

750. а) $1 + a^6$; б) $a^3 + c^6$; в) $27 + a^3b^3$;
г) $\frac{1}{27} - x^3$; д) $p^3x^6 + 1$; е) $27m^3 + n^6$.

751. а) $a^3c^3 + 27x^6$; б) $-c^6 + 27x^3$; в) $a^6c^9 - 27x^3$;
г) $a^3 - \frac{1}{8}b^3c^6$; д) $-z^3 - p^3$; е) $0{,}008 + y^3z^9$.

752. а) $a^3 + 8$; б) $27 + m^3$; в) $64a^3 + 27$;
г) $\frac{1}{8} + c^3$; д) $\frac{8}{27}x^3 + 1$; е) $\frac{27}{64} + z^3$.

753. а) $a^3b^3 - 1$; б) $8x^3 - a^3$; в) $64 + a^3c^3$;
г) $\frac{1}{8}a^3x^3 - c^3$; д) $\frac{1}{64}a^3 - x^3y^3$; е) $\frac{8}{27} - a^3x^3z^3$.

754. а) $x^3 - y^6$; б) $a^3 + z^6$; в) $a^6 - z^9$;
г) $8a^3 - x^6$; д) $27 - a^3y^6$; е) $-8a^9 - 27c^6$.

Представьте в виде многочлена (**755—757**).

755. а) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$; б) $(x + m)(x^2 - xm + m^2)$;
в) $(x - a^2)(x^2 + a^2x + a^4)$; г) $(a^4 + 1)(a^8 - a^4 + 1)$.

756. а) $(a^2 - m)(a^4 + a^2m + m^2)$; б) $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$;
в) $(3c - n)(9c^2 + 3cn + n^2)$; г) $(5 + y^3)(25 - y^3 + y^6)$.

757. а) $(4 + 2x + x^2)(2 - x)$;
б) $(25 - 10m + 4m^2)(5 + 2m)$;
в) $(9x^2 - 15x + 25)(3x + 5)$.

758. Найдите значение выражения:
а) $(x + 1)(x^2 - x + 1) - x^3$, если $x = 5{,}73$;
б) $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) + 8$, если $z = 0{,}02$.

Решите уравнение (**759—760**).

759. а) $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x + x^3$;

б) $(y+2)(y^2-2y+4)=y^3+2y$.

760. а) $(x-3)(x^2+3x+9)+x=x^3$; б) $(1+y)(y^2-y+1)-y^3=2y$.

761. Найдите произведение многочленов:
а) $3a-2$ и $9a^2+6a+4$; б) $5+x^2$ и x^4-5x^2+25;
в) $0{,}5a^2+b$ и $0{,}25a^4-0{,}5a^2b+b^2$;
г) $4m-m^2$ и $m^4+4m^3+16m^2$.

Уровень Б

Представьте в виде многочлена (**762—766**).

762. а) $(a^3-1)(a^6+a^3+1)$; б) $(m-1)(m^2+2m+1)$;
в) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$; г) $(7x+3y)(49x^2-21xy+9y^2)$.

763. ~~а) $(a^2+1)(a^4-a^2+1)$; б) $(x^3-2a)(x^6+2x^3a+4a^2)$;~~
в) $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$; г) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$.

764. а) $(4a^{14}-2a^7b^4+b^8)(2a^7+b^4)$; б) $(16a^2+4ab+b^2)(4a+b)$.

765. а) $(a^8-2x)(a^{16}+2a^8x+4x^2)$; б) $(x^3+y^2)(x^6-x^3y^2+y^4)$;
в) $(2a-xy)(4a^2+2axy+x^2y^2)$;
г) $(ac^2+3n)(9n^2-3ac^2n+a^2c^4)$.

766. а) $(x^3-1)^2(x^6+x^3+1)^2$; б) $(x^4+1)^3(x^8-x^4+1)^3$.

Выполните умножение многочленов (**767—768**).

767. а) x^2+c и $x^4-x^2c+c^2$; б) $p-q^2$ и $p^2+pq^2+q^4$;
в) $x-0{,}2$ и $x^2+0{,}2x+0{,}04$.

768. а) a^3-b и $a^6+a^3b+b^2$; б) a^5+2b и $a^{10}-2a^5b+4b^2$;
в) x^2+y^2 и $x^4+y^4-x^2y^2$.

Разложите на множители выражение (**769—770**).

769. а) $(a+2)^3-8$; б) $27-(x+y)^3$; в) $(z-1)^3+z^3$;
г) $64a^3-(a-1)^3$; д) $\frac{1}{8}a^3+\left(1+\frac{1}{2}a\right)^3$; е) $1-(x+1)^6$.

770. а) $8-(a-2)^3$; б) $(x+y)^3-y^3$;
в) x^3-y^3-x+y; г) $a^3-b^3-a^2-ab-b^2$.

Вычислите значение выражения (771—772).

771. а) $(x+3)(x^2-3x+9)-x^3-x$, если $x=2{,}5$;

б) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)+27y^3$, если $x=1$ и $y=-3{,}8$.

772. а) $(1+2x)(4x^2-2x+1)-3x^3$, если $x=\frac{1}{5}$;

б) $37x^3-(4x-3)(16x^2+12x+9)$, если $x=\frac{1}{3}$;

в) $5x^3+(3x-2y)(9x^2-6xy+4y^2)+19y^3$, если $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{2}{3}$;

г) $28y^3+(5x-y)(25x^2+5xy+y^2)-61x^3$, если $x=\frac{3}{4}$, $y=1\frac{2}{3}$.

773. Представьте в виде произведения:

а) x^9-y^{3n}; б) $a^{3m-3}+b^{21}$;

в) $a^{6n+9}-c^{36-3n}$; г) $x^{12n-3}+64y^{27+3n}$.

774. Докажите тождество:

а) $a^3-b^3-(a-b)(a^2+b^2)=ab(a-b)$;

б) $a^6-b^6=(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$.

775. Докажите, что:

а) 327^3-227^3 делится на 100;

б) 737^3+263^3 делится на 10^3;

в) $2\cdot(1001^3+27)$ делится на 2008.

Решите уравнение (776—778).

776. а) $(x+1)(x^2-x+1)=5x+x^3$;

б) $(z-4)(16+4z+z^2)=z(z^2-4)$.

777. а) $(x^2+1)(x^4-x^2+1)=1$;

б) $(x^3+3)(x^6-3x^3+9)-26=0$.

778. а) $(4x^2-2x+1)(2x+1)=2x(4x^2+5)$;

б) $(x^2-4)(x^2-2x+4)=x(x^3+8)$.

779. Докажите, что разность кубов двух последовательных натуральных чисел при делении на 6 всегда даёт в остатке 1.

780. Докажите, что разность кубов двух последовательных нечётных натуральных чисел при делении на 24 всегда даёт в остатке 2.

781. Докажите, что три последние цифры числа $1993^3 + 7^3$ — нули.

782. Докажите, что если сумма двух натуральных чисел делится на какое-то число, то и сумма их кубов делится на то же натуральное число.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

783. Фирма взяла в банке кредит — 500 000 грн. сроком на два года под 20 % годовых. Определите, сколько гривен фирма должна возвратить банку через 2 года и какую прибыль получит банк.

784. Начертите на координатной плоскости четырёхугольник с вершинами в точках $A(1; 0)$, $B(1; 3)$, $C(5; 3)$, $D(5; 0)$. Найдите его периметр и площадь.

785. Решите математические кроссворды, представленные на рисунках 50—52.

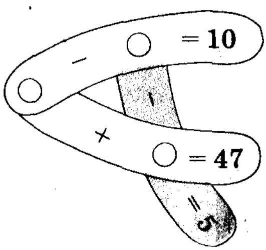


Рис. 50

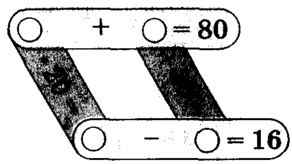


Рис. 51

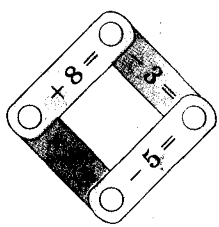
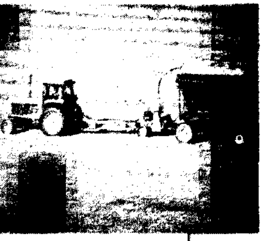


Рис. 52

786. Упростите выражение:

а) $(35 - 2^5)^{17}$; б) $(0{,}875 + 0{,}5^3)^{10}$; в) $(0{,}3^3 - 0{,}017)^6$;
г) $(3^4 + 19)^5$; д) $(2^7 - 5^3 - 4)^{15}$; е) $(4^4 - 3^5 - 13)^{12}$.

§20. ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНЫХ СПОСОБОВ РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ



Чтобы разложить многочлен на множители, иногда приходится применять несколько способов.

Пример 1. Разложите на множители многочлен

$$4a^3 - ab^2.$$

✔ Решение.

$$4a^3 - ab^2 = a(4a^2 - b^2) = a(2a + b)(2a - b).$$

Сначала за скобки вынесен общий множитель a, потом выражение в скобках разложено на множители по формуле разности квадратов.

Пример 2. Разложите на множители выражение

$$x^5 - x^4y + x^2y^3 - xy^4.$$

✔ Решение.

$$x^5 - x^4y + x^2y^3 - xy^4 = x^4(x - y) + xy^3(x - y) =$$
$$= (x - y)(x^4 + xy^3) = (x - y)\,x(x^3 + y^3) =$$
$$= x(x - y)(x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Здесь применены способ группировки, вынесение общего множителя за скобки и формула суммы кубов.

Чтобы разложить на множители более сложные многочлены, приходится применять несколько известных способов или искусственные приёмы. В этом случае можно использовать такое **правило-ориентир**.

1. Вынести общий множитель (если он есть) за скобки.

2. Проверить, не является ли выражение в скобках разностью квадратов, разностью или суммой кубов.

3. Если это трёхчлен, то проверить, не является ли он квадратом двучлена.

4. Если многочлен содержит больше трёх членов, то надо попробовать сгруппировать их и к каждой группе применить п. 1—3.

Хотите знать ещё больше?

Иногда удаётся разложить многочлен на множители, прибавляя и вычитая из него одно и то же выражение.

Пример. Разложите на множители двучлен $a^4 + 4$.

Решение. Прибавим к данному двучлену выражение $4a^2 - 4a^2$.

$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 - 4a^2 + 4 = (a^4 + 4a^2 + 4) - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 -$
$- (2a)^2 = (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a) = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$.

Проверьте себя

1. Что означает «разложить многочлен на множители»?
2. Какие вы знаете способы разложения многочленов на множители?
3. По каким формулам можно раскладывать многочлены на множители?
4. Приведите примеры разложения многочлена на множители с использованием нескольких способов.

Выполним вместе!

1. Разложите на множители выражение $ax^4 - ax^2 + 0{,}25a$.

✔ Решение.
$ax^4 - ax^2 + 0{,}25a = 0{,}25a(4x^4 - 4x^2 + 1) = 0{,}25a(2x^2 - 1)^2$.

2. Представьте многочлен $n^4 - 5n^2 - 2nx - x^2 + 4$ в виде разности квадратов двух многочленов.

✔ Решение. $n^4 - 5n^2 + 2nx - x^2 + 4 =$
$= (n^4 - 4n^2 + 4) - (n^2 - 2nx + x^2) = (n^2 - 2)^2 - (n - x)^2$.

3. Докажите, что число $6^5 - 6^4 + 6^3$ делится на 31.

✔ Доказательство. $6^5 - 6^4 + 6^3 = 6^3(6^2 - 6 + 1) = 6^3 \cdot 31$.

Последнее произведение делится на 31, поэтому делится на 31 и равное ему данное числовое выражение.

Выполните устно

Разложите на множители многочлен (787–789).

787. а) $5a - 10c$; б) $4x^2 - 4x$; в) $a^2c^2 - ac$.

788. а) $a^2 - n^2$; б) $1 - c^2x^2$; в) $9 - a^4$.

789. а) $1 - 2n + n^2$; б) $x^2 - 2xy + y^2$; в) $1 + 2c^2 + c^4$.

Уровень A

Разложите на множители многочлен (790–792).

790. а) $ap^2 - ax^2$; б) $c^3 - cp^2$; в) $2 - 8a^2$;
г) $27x^2 - 75$; д) $18c^2x - 2x$; е) $100a^4 - a^2$.

791. а) $5a - 5a^3$; б) $49m^4 - m^2$; в) $64x^2y - 9x^2y^3$;
г) $m^6 - 27^2$; д) $x^4 - 625$; е) $x^4 - y^6$.

792. а) $xa^2 - xc^2$; б) $a^3 - an^2$; в) $20x^2 - 5$;
г) $100m^2 - 25x^2$; д) $3x^3 - 27x$; е) $45a - 5a^3$.

Решите уравнение (793—794).

793. а) $5x^5 - x^4 = 0$; б) $x^4 + 6x^3 = 0$; в) $10x^6 = 3x^5$;
г) $3x^3 - 12x = 0$; д) $4x^4 - 9x^2 = 0$; е) $x^5 = x^3$.

794. а) $x^4 - x^2 = 0$; б) $x^3 - 25x = 0$;
в) $5x^3 - x^4 = 0$; г) $x^3 - 0{,}04x^2 = 0$.

Разложите на множители многочлен (795–800).

795. а) $ax^2 - 2ax + a$; б) $20a^3 - 20a^2 + 5a$;
в) $27a^6 + 3a^2 - 18a^4$; г) $45x^3 + 20x - 60x^2$;
д) $mx^2 + 4mx + 4m$; е) $p^2 + 6xp^2 + 9x^2p^2$.

796. а) $-4m^2 + 4m - 1$; б) $-a^2 - 6a - 9$; в) $5x^2 + 5y^4 - 10xy^2$;
г) $4ax^2 + a - 4ax$; д) $3 - 6a + 3a^2$; е) $7a^2 - 28a^4 + 28a^6$.

797. а) $ax^4 - x^4 + ax^3 - x^3$; б) $x^3 - x^2y + x^2 - xy$;
в) $x^2 - 2ax + a^2 - m^2$; г) $x^2 + 2x + 1 - a^2$.

798. а) $4ab + 12b - 4a - 12$; б) $10 + 0{,}6xy - 5y - 1{,}2x$;
в) $m^2 - x^2 - 4x - 4$; г) $x^2 - y^2 - 6x + 9$.

799. а) $x - a + x^2 - a^2$; б) $a^2 - b^2 + a - b$;
в) $k + p + k^2 - p^2$; г) $c^2 - c - m^2 - m$.

800. а) $a - b^2 + a^2 - b$; б) $c^3 - 3d^2 + 3c^2 - cd^2$;
в) $x^3 - a^3 + x - a$; г) $a + b - a^3 - b^3$.

801. Приведите пример двучлена, который является одновременно разностью квадратов и разностью кубов. Разложите его на множители.

Уровень Б

Разложите на множители многочлен (**802–812**).

802. а) $0{,}001a + a^4$; б) $-1 - a^6$; в) $-8y^4 - 64y$;
г) $1 + c^6x^3$; д) $0{,}008a + a^7$; е) $27\,000 - y^{27}$.

803. а) $x^3y^2 - xy^4$; б) $9a^5c - a^3c^3$; в) $25a^4 - x^2y^4$;
г) $0{,}25x^2 - x^4y^4$; д) $0{,}08a^4 - 0{,}32a^2$; е) $-8 + 2x^4$.

804. а) $\frac{1}{8}x - 2x^3$; б) $\frac{2}{3}a^4 - \frac{3}{8}a^2x^4$; в) $-2\frac{1}{4}x^6 - x^2y^4$.

805. а) $\frac{1}{2}x - \frac{27}{16}x^4$; б) $\frac{1}{8}z - \frac{1}{18}z^3$;
в) $\frac{2}{9}a - 1\frac{2}{16}a^3c^2$; г) $\frac{3}{7}x^2y + \frac{3}{14}x^2$.

806. а) $0{,}04ax^3 - 0{,}4ax^2 + ax$; б) $4a^2x - 2ax^2 + 0{,}25x^5$;
в) $1{,}21nc^4 + 2{,}2nc^3 + nc^2$; г) $0{,}5a^2x^2 + 0{,}5a^2 - a^2x$.

807. а) $\frac{1}{4}ac^2 - ac + a$; б) $mx^4 - mx^2 + \frac{1}{4}m$;
в) $a^2 + a^3 - a^4 - a^5$; г) $x^2 - x^3 + x^4 - x^5$.

808. а) $ac^2 + bc - bc^2 - ac$; б) $a^2b + 3a + 3ab + a^2$;
в) $ax - a^2 + ax^2 - a^3$; г) $a^3 - ab^2 - a^2 - ab$.

809. а) $2ax - axy + 2ay - ay^2$; б) $nx + cx + c^3x + c^2nx$;
в) $x^2 - 2xy + y^2 + x - y$; г) $9a^2 + 6a + 1 + 3a + 1$.

810. а) $ac + bc - 2c - acx - bcx + 2cx$;
б) $x^3 + 2x^2 - acx - 2cx - cx^2 + ax^2$.

811. а) $a^2x^2 - a^2y^2 - 2ax^2 - 2ay^2 + x^2 + y^2$;
б) $a^2x^2 + a^2y^2 + ax^2 + ay^2 + x^2 + y^2$.

812. а) $a^2 - 2ac + c^2 - x^2 - 2x - 1$; б) $a^4 - 2a^2 + 1 - a^2 + 2ac - c^2$.

813. Представьте многочлен в виде суммы квадратов двух выражений:
а) $a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2$; б) $x^4 + y^4 + 4x^2 + 4y^2 + 8$;
в) $2x^2 + 4x + 2$; г) $2x^2 + 2x + 1$.

814. Представьте выражение в виде разности квадратов двух многочленов:
а) $a^2b^2 - 2ab - 6c - c^2 - 8$; б) $(a - b)(a + b) + 4(a - b)$;
в) $a^2 + 3x^2 - 4ax + 2cx - c^2$; г) $a^4 - 5a^2 - 2ax - x^2 + 4$.

815. Представьте выражение в виде квадрата двучлена:
а) $(8x + 3)^2 + (6x + 4)^2 + 4x$; б) $(3c^2 + 4)^2 + (4c^2 + 3)^2 + 2c^2$.

816. Докажите, что при каждом значении x выражение имеет только положительное значение:
а) $(x + 2)^2 + 1$; б) $x^2 + (x - 3)^2$;
в) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2$; г) $x^2 - 4x + 5$;
д) $x^2 - x + 1$; е) $9x^2 - 6x + 2$.

817. Докажите, что при каждом значении x выражение имеет только отрицательное значение:
а) $6x - x^2 - 10$; б) $x - x^2 - 1$; в) $2x - x^2 - 2$.

818. При каких значениях x выражение имеет наименьшее значение:
а) $x^2 + 5$; б) $(x - 2)^2$; в) $(x - 3)^2 + 5$;
г) $x^2 - 6x + 9$; д) $x^2 + 4x + 6$; е) $4x^2 - 4x + 3$?

819. Вычислите значение выражения:
а) $x(x + 3)^2 + (5 + x)^3$ при $x = -4$;
б) $(a - 3)^4 - (4 + a)^4$ при $a = -0{,}5$;
в) $(c + 3)^2 - 2(c + 3)(c - 2) + (c - 2)^2$ при $c = 2{,}53$;
г) $(2z + 1)^2 - 4z(2z + 1) + 4z^2$ при $z = 3{,}75$.

820. Докажите тождество:
$7x^3 + 5x^2 - 6x + 3 = ((7x + 5)x - 6)x + 3$.

821. Пользуясь калькулятором, вычислите значение выражения $37y^3 - 12y^2 + 49y - 135$, если:
а) $y = 19$; б) $y = 2{,}7$; в) $y = 3{,}34$.
В какой форме удобнее представлять такие выражения, чтобы вычислять их значения на калькуляторе?

822. Докажите, что:
а) число $5^5 - 5^4 + 5^3$ делится на 21;
б) число $957^2 - 43^2$ делится на 1000.

823. Докажите, что при каждом натуральном значении n:
а) $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ делится на 4;
б) $(3n + 2)^2 - (3n - 2)^2$ делится на 24;
в) $(5n + 3)^2 - (5n - 3)^2$ делится на 60.

Докажите утверждение **(824–830)**.

824. Разность квадратов двух нечётных чисел делится на 4.

825. Разность квадратов двух последовательных нечётных чисел делится на 8.

826. Разность квадратов двух последовательных чётных чисел на 8 не делится.

827. Квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт в остатке 1.

Докажите тождество **(828—832)**.

828. $a^2 + 3a + 2 = (a + 1)(a + 2)$.

829. $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$.

830. $c^2 - 7c + 12 = (c - 3)(c - 4)$.

831. $(a^4 + 1)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1) + 1 = a^8$.

832. $(a + 1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$.

Решите уравнение **(833–836)**.

833. а) $x + x^3 = 0$; б) $2z^2 - 9z + 18 = z^3$;
в) $y^3 - 2y^2 - y + 2 = 0$; г) $x^3 + x = 3x^2 + 3$.

834. а) $x^3 + 2x^2 - x = 2$; б) $y^3 - 3y^2 + 4y = 12$;
в) $2x^3 - 3x^2 + 4x = 6$; г) $0{,}5z^5 + z^4 + z + 2 = 0$.

835. а) $x^2(x-3)+2x(x-3)+x-3=0$;
б) $x^2(2x+1)-4x(2x+1)+8x+4=0$.

836. а) $x^2(x^2-4x+4)-9(x^2-4x+4)=0$;
б) $x^3(x^2-6x+9)-4x(x^2-6x+9)=0$.

837. При каких значениях a значение выражения $8a^3-4a^2+2a-1$: а) равно 0; б) равно значению выражения $4a^2+1$?

838. При каких значениях x сумма квадратов выражений $x+1$ и $x-1$:
а) на 6 больше квадрата их полусуммы;
б) на 84 больше их произведения?

839. При каких значениях a:
а) значение выражения a^3+3a^2-a равно 3;
б) значения выражений a^3-a^2 и $4a-4$ равны между собой?

Найдите корни уравнения **(840—841)**.

840. а) $x^2(x^2+4x+4)=(5x)^2+100x+100$;
б) $4x^4-12x^3+9x^2=36x^2-108x+81$.

841. а) $x^2(9x^2-6x+1)=(6x)^2-24x+4$;
б) $4x^4+56x^3+196x^2=x^2+14x+49$.

842*. Разложите на множители выражение:
а) a^4+4b^4; б) x^4+x^2+1;
в) x^5+x+1; г) $x^{10}+x^5+1$.

843*. Докажите тождество:
а) $(a-b)^3+(b-c)^3-(a-c)^3=-3(a-b)(b-c)(a-c)$;
б) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(x+z)(y+z)$;
в) $a^3(b+c)-b^3(a+c)-c^3(a-b)=$
$=(a-b)(a+c)(b+c)(a+b-c)$.

844*. Решите *уравнение Р. Декарта* (1596—1650):
а) $y^3-8y^2-y+8=0$;
б) $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$.

845*. Решите *уравнение Бхаскары* (1114—1185):
$x^4-2x^2-400x=9999$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

846. Сторона одного квадрата больше стороны второго на 1 см, а площадь — на 32 см^2. Найдите сторону меньшего квадрата.

847. Разность периметров двух квадратов равна 12 см, а разность их площадей — 33 см^2. Найдите площади квадратов.

Вычислите **(848—849)**.

848. а) $(2^5 - 33)^{15}$; б) $(66 - 2^6)^6$.

849. а) $(3^2 - 2^3 - 1)^{40}$; б) $(3^5 - 2^8 + 13)^{50}$.

850. На новогодний бал четыре подруги пошли со своими братьями: Андреем, Борисом, Виктором и Геннадием. Первый танец каждая танцевала не со своим братом: Катя — с Андреем, Лида — с братом Марии, Нина — с братом Лиды, Борис — с сестрой Виктора, а Виктор — с сестрой Андрея. Кто чей брат?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант I

1°. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 - 9c^2$; б) $27 + a^3$;

в) $x^3 - 2x^2y + xy^2$; г) $(2x + 1)^2 - 49$.

2•. Докажите, что число $7^{10} - 7^9 + 7^8$ делится на 43.

3•. Решите уравнение: $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 - 3x$.

Вариант II

1°. Разложите на множители многочлен:

а) $a^2 - 16c^2$; б) $8c^3 - 1$;

в) $a^4 - 2a^3c + a^2c^2$; г) $64 - (3x - 2)^2$.

2•. Докажите, что число $7^9 + 7^8 + 7^7$ делится на 57.

3•. Решите уравнение: $(x + 3)^2 - (x - 4)(x - 2) = 5$.

Вариант III

1°. Разложите на множители многочлен:

а) $m^2 - 25x^2$; б) $27n^3 + a^3$;

в) $m^2n^2 - 2mn^2 + n^2$; г) $49 - (2 - 5x)^2$.

2•. Докажите, что число $8^9 + 8^8 + 8^7$ делится на 73.

3•. Решите уравнение: $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 2x$.

Вариант IV

1°. Разложите на множители многочлен:

а) $64a^2 - x^2$; б) $1 - 64z^3$;

в) $x^5 - 2x^4 + x^3$; г) $36x^2 - (1 - x)^2$.

2•. Докажите, что число $8^8 + 8^7 - 8^6$ делится на 71.

3•. Решите уравнение: $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 - 2x$.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Франсуа Виет

Наибольший вклад в развитие алгебраической символики внёс известный французский математик Ф. Виет, которого называли «отцом алгебры». Он часто использовал буквенные обозначения. Вместо x, x^2, x^3 писал соответственно N, Q, C — первые буквы латинских слов *Numerus* (число), *Quadratus* (квадрат), *Cubus* (куб). Уравнение $x^3 + 5x^2 - 4x = 20$ Ф. Виет записывал так:

$$1C + 5Q - 4N \text{ aequ. } 20.$$

Степени чисел продолжительное время не имели специальных обозначений, четвёртую степень числа a записывали в виде произведения $aaaa$. Позднее такое произведение начали записывать $a4$, a^{IV} . Записи a^3, a^4, a^5 предложил Р. Декарт.

Формулы сокращённого умножения древним китайским и греческим математикам были известны за много веков до начала нашей эры. Записывали их тогда не с помощью букв, а словами и доказывали геометрически (только для положительных чисел). Пользуясь рисунком, объясняли, что для любых чисел a и b площадь квадрата со стороной $a + b$ равна сумме площадей двух квадратов со сторонами a и b и двух прямоугольников со сторонами a, b. Итак, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Подобным способом обосновали и другие равенства, которые мы теперь называем *формулами сокращённого умножения*.

В учебнике рассмотрены простейшие формулы сокращённого умножения.

Формулы квадрата и куба двучлена — простейшие случаи общей формулы *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + nab^{n-1} + b^n .$$

ОСНОВНОЕ В ГЛАВЕ

Разложить многочлен на множители — это означает заменить его произведением нескольких многочленов, тождественным данному многочлену.

Простейшие способы разложения многочленов на множители:

- вынесение общего множителя за скобки;
- способ группировки;
- использование формул сокращённого умножения.

Примеры.

$$6a^3x - 9abx = 3ax(2a^2 - 3b);$$
$$ax + bx - ay - by = x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y);$$
$$9m^2 - 4 = (3m - 2)(3m + 2).$$

Формулы сокращённого умножения

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ — квадрат двучлена,

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ — куб двучлена,

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — разность квадратов,

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ — разность кубов,

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ — сумма кубов.

Разложение многочленов на множители — это преобразование, обратное умножению многочленов. Схематично эти две операции можно изобразить, например, так.

Умножение многочленов

$$\xrightarrow{\qquad}$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\xleftarrow{\qquad}$$

Разложение многочлена на множители

Вопросы для самопроверки

1. Что означает «разложить многочлен на множители»?
2. Назовите важнейшие способы разложения многочленов на множители.
3. Объясните на примере суть способа вынесения общего множителя за скобки.
4. Из какого закона действий следует алгоритм вынесения общего множителя за скобки?
5. Объясните на примере, как разложить многочлен на множители способом группировки.
6. Чему равен квадрат суммы двух выражений?
7. Чему равен квадрат разности двух выражений?
8. Может ли быть отрицательным числом квадрат разности двух чисел?
9. Может ли быть отрицательным числом разность квадратов двух чисел?
10. Чему равно произведение суммы двух выражений на их разность?
11. Чему равна разность квадратов двух выражений?
12. Чему равен куб суммы двух выражений?
13. Чему равен куб разности двух выражений?
14. Какое выражение называют неполным квадратом суммы двух выражений?
15. Какое выражение называют неполным квадратом разности двух выражений?
16. Чему равно произведение разности двух выражений и неполного квадрата их суммы?
17. Чему равно произведение суммы двух выражений и неполного квадрата их разности?
18. Чему равна разность кубов двух выражений?
19. Чему равна сумма кубов двух выражений?
20. По каким формулами можно раскладывать многочлен на множители?
21. Приведите примеры разложения многочлена на множители несколькими способами.

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ ОЦЕНИВАНИЮ

Тестовые задания № 5

1. *Найдите неполный квадрат суммы выражений* 4 и y^2:

а) $16 - y^2$; б) $16 + y^2$; в) $(16 + y)^2$; г) $16 + 4y^2 + y^4$.

2. При каком значении x выражение $x^2 + 4x + 4$ имеет наименьшее значение:

а) 2; б) −4; в) −2; г) 6?

3. Вычислите $5^{50} \cdot 3^{50} - (15^{25} - 1)(15^{25} + 1)$:

а) 1; б) −1; в) 15^{25}; г) 15^{50}.

4. Чему равен неполный квадрат разности выражений a и $5c$:

а) a^2; б) $a^2 - 5ac + 25c^2$; в) $(a - 5c)^3$; г) $(-5c)^2$?

5. Разложите на множители двучлен $x^3 - 27$:

а) $(x - 3)(x^2 - 3x + 9)$; б) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$;

в) $(x - 3)(x - 3)$; г) $(x - 3)^3$.

6. Найдите значение выражения $\left(\frac{z}{2} - 3\right)\left(\frac{z^2}{4} + \frac{3z}{2} + 9\right)$, если $z = 4$:

а) −19; б) 19; в) $-\frac{19}{2}$; г) $\frac{19}{2}$.

7. Какое число не является корнем уравнения $4x^3 - 16x = 0$:

а) 0; б) −2; в) 2; г) −3?

8. Суммой скольких одночленов является многочлен $x^5 - x^4 - x + 1$:

а) 2; б) 4; в) 3; г) 5?

9. Упростите выражение $(16 - 4y^2 + y^4)(y^2 + 4)$:

а) $16 - y^2$; б) $64 + y^6$; в) $(4 + y)^2$; г) $(16 - y^2)^2$.

10. Выражение $a^3 - a$ при каждом натуральном a делится на:

а) 5; б) 6; в) 7; г) 9.

Контрольная работа № 5

1°. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 - 16$; б) $a^3 + c^3$.

2°. Решите уравнение:

а) $x^2 - 25 = 0$; б) $a^2 - 6a + 9 = 0$.

3°. Представьте в виде многочлена:

а) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$; б) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$.

4°. Докажите тождество:

$$(a - x)^2 + 4ax = (a + x)^2.$$

5•. Представьте двучлен в виде произведения:

а) $\frac{x^3}{27} + 0{,}008y^3$; б) $-1000a^9 - b^3c^6$.

6•. Найдите значение выражения при $p = 0{,}897$:

$$27p^3 - (3p - 1)(9p^2 + 3p + 1) + p + 2.$$

7•. Разложите многочлен на множители:

а) $3a^5b^3 - 24a^2c^6$;

б) $25x^2 - 10xy + y^2 - 36$;

в) $8a^3 + 4a^2b - 2ab^2 - b^3$.

8•. Решите уравнение:

а) $x^5 - 4x^3 = 0$;

б) $x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2 = 0$;

в) $x^4 - 10x^3 + 250x - 625 = 0$.

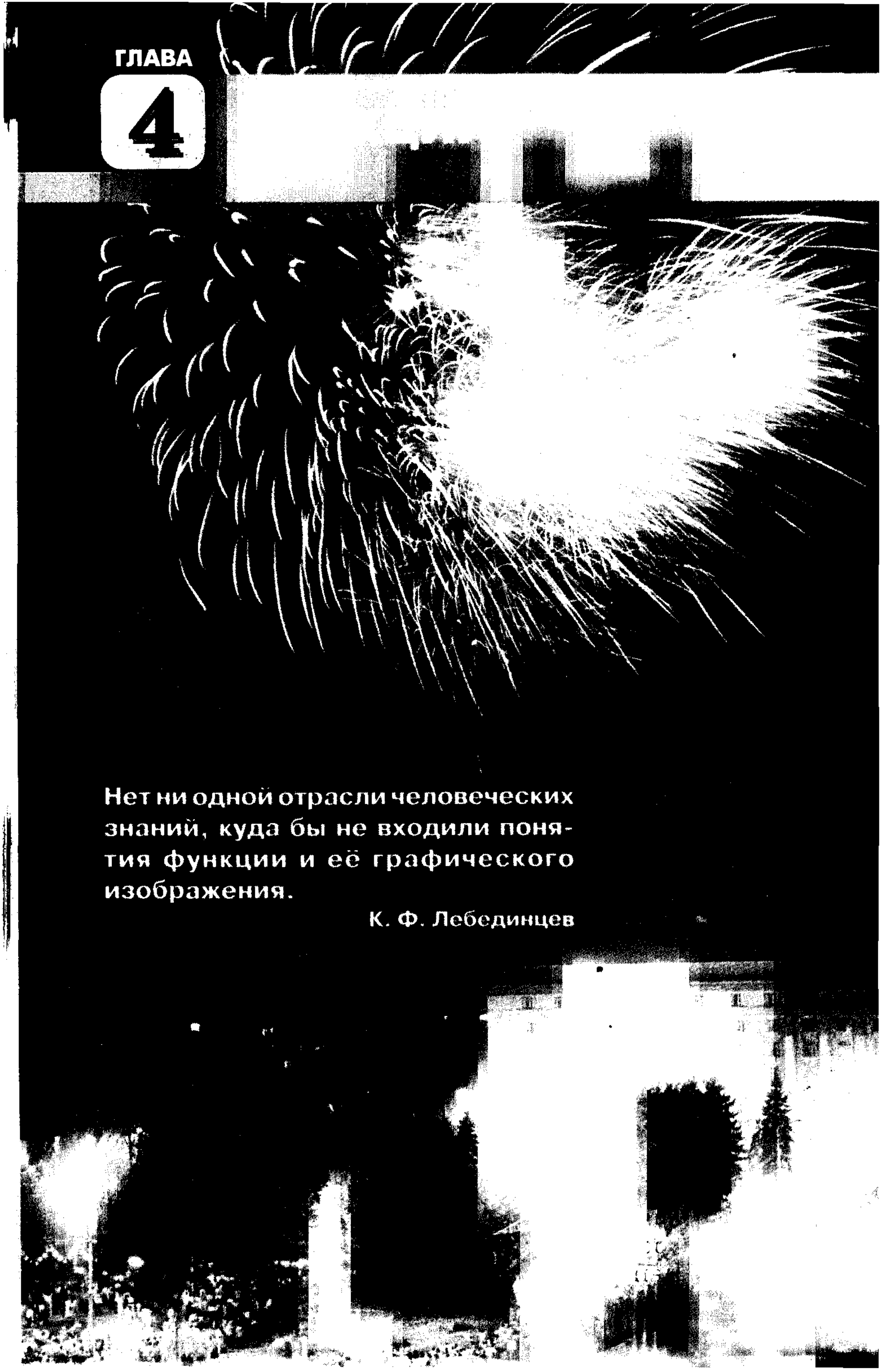
9••. Докажите, что $97^3 + 78^3 + 97^2 - 78^2$ делится на 175.

10••. Разложите на множители выражение:

а) $a^4 - 9b^4$; б) $y^5 + y + 1$.

ГЛАВА

4



> Нет ни одной отрасли человеческих знаний, куда бы не входили понятия функции и её графического изображения.
>
> К. Ф. Лебединцев

Функция – одно из важнейших понятий математики, она даёт возможность исследовать и моделировать не только состояния, но и процессы. Исследование процессов и явлений с помощью функций — один из основных методов современной науки. Вы будете изучать функции во всех последующих классах и в высших учебных заведениях.

В этой главе вы узнаете о:

- **функциональном соответствии;**
- **способах задания функции;**
- **графике функции;**
- **линейной функции;**
- **прямой пропорциональности.**

§21. ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ?

Площадь квадрата зависит от длины его стороны. Каждому значению длины стороны квадрата соответствует единственное значение его площади (рис. 53).

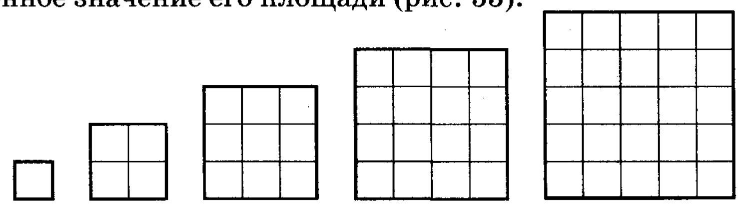


Рис. 53

Масса куска мела зависит от его объёма. Каждому значению объёма V куска мела соответствует единственное значение его массы m.

Каждому значению массы груза, подвешенного на пружине, соответствует определённая длина пружины (рис. 54).

Каждому значению температуры воздуха t соответствует единственное значение высоты h столбика жидкости в термометре.

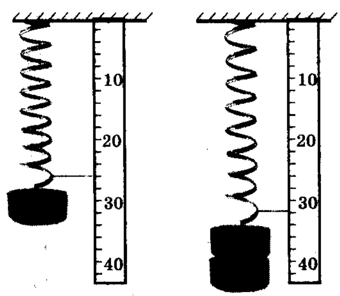


Рис. 54

Каждому значению переменной x соответствует единственное значение выражения $2x - 1$.

Примеров зависимостей и соответствий между переменными можно привести много. Для науки и практики важно уметь исследовать такие соответствия. Их называют *функциональными соответствиями*, или *функциями*.

В рассмотренных примерах речь идёт о связи между двумя переменными. Одну из них, значения которой выбирают произвольно, называют *независимой переменной*, или *аргументом*. Другую переменную, зависящую от аргумента, называют *зависимой переменной*, или *функцией*.

Независимыми переменными (аргументами) в приведённых выше примерах являются: длина стороны квадрата, объём куска мела, масса груза, температура воздуха. Их значения можно выбирать произвольно. Зависимыми переменными будут: площадь квадрата, масса мела, длина пружины, высота столбика жидкости в термометре.

Если каждому значению переменной x из некоторого множества D соответствует единственное значение переменной y, то переменную y называют ф у н к ц и е й от x.

При таких условиях переменную x называют аргументом функции y, множество D — областью определения функции, а соответствие между x и y — *функциональным соответствием*, или *функцией*.

Все значения, которые может принимать аргумент функции, — её область определения. А все соответствующие значения функции — область значений функции (E).

Например, площадь S квадрата — функция от длины его стороны a. Здесь S — функция, a — аргумент. Область определения этой функции — множество всех положительных чисел.

Высота h столбика жидкости в термометре — функция от температуры t. Здесь h — функция, t — аргумент. Пусть, например, на протяжении суток температура воздуха повышалась от -5° до 7°, а высота столбика жидкости в термометре — от 20 до 32 см. Этому изменению соответствует некая функция, областью определения которой является промежуток от -5° до 7°, а областью значений — промежуток от 20 до 32 см.

Задавать функциональные соответствия можно разными способами. Часто их задают *формулами*. Например, соответствие между длиной a стороны квадрата и его площадью S можно задать формулой $S = a^2$.

Соответствие между радиусом окружности r и её длиной C можно задать формулой $C = 2\pi r$.

Соответствие между значениями переменной x и значениями y выражения $2x - 1$ можно задать формулой $y = 2x - 1$.

Задание функции формулой удобно, так как это даёт возможность находить значение функции для произвольного значения аргумента. Такое задание функции довольно экономно: в основном формула занимает одну строку.

Если функцию задают формулой и ничего не говорят об области её определения, то считают, что эта область — множество всех значений переменной, при которых формула имеет смысл. Например, область определения функции $y = 2x - 1$ — множество всех чисел, а функции $y = \frac{3}{x-1}$ — множество всех чисел, кроме 1, так как на 0 делить нельзя.

Обратите внимание!

Областью определения функции, которая задаётся многочленом с одной переменной, есть множество всех чисел

Задавать функции можно и в виде *таблицы*. Например, функцию $y = 2x - 1$ для первых десяти натуральных значений x можно задать в виде такой таблицы.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Здесь:

- область определения: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;
- область значений: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

Табличный способ задания функции удобен тем, что для определённых значений аргумента в таблицу уже занесены соответствующие значения функции, поэтому не нужно проводить вычисления. Неудобен он тем, что таблица занимает больше места. Вдобавок, как правило, содержит значения функции не для всех значений аргумента, а только для некоторых.

Функцию можно задавать и *словесно*. Например, если каждому целому числу поставить в соответствие его квадрат, то получим функцию, областью определения которой является множество целых чисел, а областью значений — множество квадратов натуральных чисел и число 0.

Хотите знать ещё больше?

Слово *функция* имеет и другое значение: деятельность, выполнение. Например, говорят о функциях старосты класса, функции печени в организме человека.

И слово *аргумент* нередко используют в другом значении. В логике под словом аргумент понимают доказательство, основание, на основе которого устанавливают истинность или ошибочность того или иного суждения.

Обратите внимание на соотношение понятий «функциональная зависимость» и «функциональное соответствие» (рис. 55). Из рисунка видно, что существуют соответствия, не являющиеся зависимостями. Например, формулы $y = 5 + 0 \cdot x$, $y = 1^x$ задают функции, но в них переменные y не зависят от x.

Рис. 55

На координатной прямой кроме точек с рациональными координатами существует множество таких точек, координаты которых — числа не рациональные. Их называют *иррациональными*.

Рациональные числа вместе с иррациональными образуют множество **действительных чисел (R)**. Подробнее с действительными числами и их свойствами вы ознакомитесь в 8 классе. А пока, имея в виду множество действительных чисел, будем использовать термин «все числа».

Проверьте себя

1. Сформулируйте определение функции.
2. Приведите примеры функции.
3. Что такое аргумент функции?
4. Что такое область определения функции?
5. Что такое область значений функции?
6. Как можно задавать функции?

Выполним вместе!

1. Найдите значения функции, заданной формулой $y = 2x + 7$, соответствующие таким значениям аргумента: 0; 4; 0,8; – 125; 105. Результаты сведите в таблицу.

✔ Решение.

Если $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0 + 7 = 7$;

если $x = 4$, то $y = 2 \cdot 4 + 7 = 15$;

если $x = 0{,}8$, то $2 \cdot 0{,}8 + 7 = 8{,}6$;

если $x = -125$, то $y = 2 \cdot (-125) + 7 = -243$;
если $x = 10^5$, то $y = 2 \cdot 10^5 + 7 = 200\,007$.

x	0	4	0,8	−125	10^5
y	7	15	8,6	−243	200 007

2. Найдите область определения функции:

а) $y = 1 - 5x + 3x^2 + x^3$; б) $y = \dfrac{5}{x^2 - 9}$.

Решение.

а) Формула, с помощью которой задаётся функция, — многочлен, а потому область её определения — множество всех чисел;

б) переменная x может иметь любые значения, кроме тех, при которых знаменатель дроби $\dfrac{5}{x^2-9}$ равен нулю. Чтобы их найти, решим уравнение $x^2 - 9 = 0$.

$$(x - 3)(x + 3) = 0, \text{ отсюда } x = 3,\ x = -3.$$

Итак, область определения функции — множество всех чисел, кроме $x = 3$, $x = -3$.

Выполните устно

851. Зависит ли периметр квадрата от длины его стороны? Является ли периметр квадрата функцией от длины стороны квадрата?

852. Объём куба находят по формуле $V = a^3$, где a — длина ребра куба. Задаёт ли эта формула функцию? Каков её аргумент?

853. Площадь круга находят по формуле $S = \pi r^2$, где r — радиус круга. Задаёт ли эта формула функцию? Какова область её определения?

854. Плотность меди — 8,6 г/см^3. Выразите формулой соответствие между объёмом V куска меди и его массой m. Является ли m функцией от V? Каков её аргумент? Какова область определения?

855. Скорость автобуса — 55 км/ч. Как зависит пройденный автобусом путь s от времени t? Является ли переменная s функцией от t?

856. Площадь прямоугольника со сторонами 5 см и x см равна S см^2. Является ли переменная S функцией от x? Каков её аргумент?

Уровень А

857. Выразите формулой соответствие между длиной a стороны равностороннего треугольника и его периметром P. Является ли переменная P функцией от a?

858. Зависит ли диаметр круга d от его радиуса r? Выразите эту зависимость формулой.

859. Меры смежных углов — α и β. Задайте формулой зависимость α от β. Является ли α функцией от β? Каков её аргумент?

860. A и B — меры острых углов прямоугольного ΔABC. Задайте формулами зависимости A от B и B от A. Являются ли эти зависимости функциями? Каковы их области определения?

861. Функция задана формулой $y = 2x + 5$. Найдите значение функции, если x равен: 1; 0; –3; 7; 1000.

862. Функция задана формулой $y = \dfrac{6}{x}$. Заполните таблицу.

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
y													

863. Составьте таблицу значений функции $m = 42 - 3n$ для первых десяти натуральных значений переменной n.

864. Соответствие между шестью первыми натуральными числами и их квадратами изображено на рисунке 56. Является ли это соответствие функцией? Какова область её определения? А область значений?

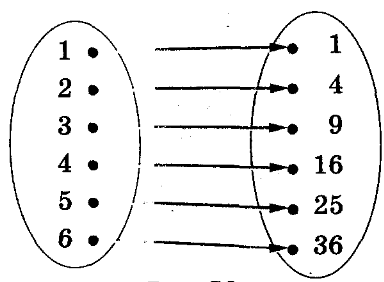


Рис. 56

865. На рисунке 57 изображено соответствие между числами 1, 2, 3, 4 и обратными им числами. Является ли это соответствие функцией? Какова область её определения? А область значений?

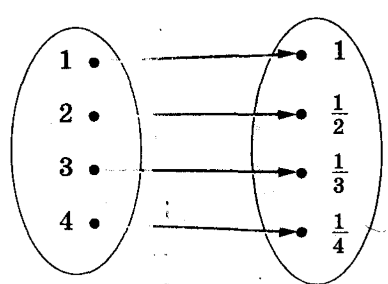


Рис. 57

866. Функция задана формулой $y = \frac{2}{3}x$. При каком значении аргумента значение функции равно 20?

867. Функция задана формулой $y = 0{,}3x$. Заполните таблицу.

x	-10	-3					
y			$-0{,}3$	0	$1{,}2$	$1{,}5$	15

868. Функция задана формулой $y = x^2 + 3$. Составьте таблицу её значений для первых десяти натуральных значений её аргумента.

869. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = 3x - 7$; б) $y = \frac{x}{x+5}$; в) $y = 5x^2 - x + 3$.

870. У мальчика было 5 грн. Он купил x карандашей по 60 к., после чего у него осталось y к. Задайте формулой функцию, выражающую зависимость y от x. Какова её область определения?

871. Цена 1 кг товара — 2,5 грн. Как зависит стоимость z этого товара от его массы m? Какова стоимость товара, масса которого равна 18 кг? Какова масса товара, если он стоит 125 грн.?

872. Нефть проходит по трубе со скоростью 12 т/ч. Сколько нефти проходит по такой трубе за 3 ч; за t ч? Напишите соответствующую формулу.

873. Сколько минут в t ч? Выразите это соответствие формулой. Составьте таблицу для 10 значений аргумента.

874. Запишите формулу функции, если:

а) значение функции противоположно удвоенному значению аргумента;

б) значение функции в 5 раз больше значения аргумента;

в) значение функции на 12 больше уменьшенного вдвое значения аргумента;

г) значение функции обратно значению аргумента, увеличенному на 4.

875. Найдите значение функции, заданной формулой:

а) $y = 8x - 5$, соответствующее значению аргумента, равному -2; 0; $1{,}5$; 12; 25;

б) $y = -\frac{x}{2} + 1$, соответствующее значению аргумента, равному -8; -1; 0; 1; 20.

876. Найдите значение аргумента, при котором:

а) значение функции $y = 3x + 2$ равно 8; 2;

б) значение функции $y = \frac{4}{x-3}$ равно −2; 2;

в) значение функции $y = x(x + 6)$ равно −9; 0.

Уровень Б

877. Напишите формулу, выражающую зависимость угла α при основании равнобедренного треугольника от угла β при его вершине. Задаёт ли эта формула функцию? Какова её область определения?

878. Скорость автомобиля — 70 км/ч. Выразите формулой зависимость пути s, пройденного этим автомобилем, от времени t. Заполните таблицу.

t, ч	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s, км										

879. Турист находится на расстоянии 5 км от города и приближается к нему со скоростью 4 км/ч. На каком расстоянии от города будет турист через 10; 20; 30 мин? Является ли это расстояние функцией от времени? Задайте её формулой. Какова её область определения?

880. На складе было 600 т угля. Каждый день на склад привозили по 40 т угля. Выразите формулой зависимость количества угля m на складе от времени t. Является ли эта зависимость функцией?

881. Составьте таблицу значений функции $y = \frac{60}{x+1}$ для целых значений аргумента x, если $-5 \le x \le 5$.

882. В одном дюйме — 2,54 см. Выразите формулами соответствия, дающие возможность переводить длины в дюймах в сантиметры и в сантиметрах — в дюймы. Составьте соответствующие таблицы.

883. Периметр квадрата $P = 4a$, где a — длина его стороны. Выразите a через P.

884. Длина окружности $C = 2\pi r$, где r — её радиус. Выразите r через C.

885. Найдите область определения и область значений функции, заданной формулой:

а) $y=\frac{3}{4}x$; б) $y=\frac{3}{4x}$; в) $y=\frac{3}{4+x}$; г) $y=\frac{1}{x(x-3)}$; д) $y=x^2$.

886. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y=x(x+5)$; б) $y=(x^2+6)(x+8)$; в) $y=\frac{16}{x+5}$;

г) $y=\frac{10}{8x-1}$; д) $y=\frac{x}{x^2-36}$; е) $y=\frac{2x}{1-25x^2}$.

887. Из квадрата со стороной, равной 10 см, вырезали круг радиусом x см (рис. 58). Как зависит площадь полученной фигуры от x? Найдите область определения этой функции.

888. Запишите формулы, с помощью которых находят площади заштрихованных фигур, изображённых на рисунке 59, *а*, *б*. Найдите области определения полученных функций.

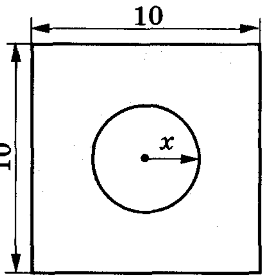


Рис. 58

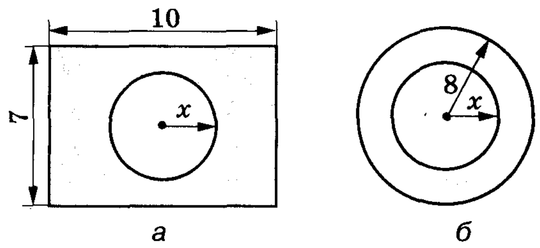


Рис. 59

889*. Заполните таблицу

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

для функции:

а) $y=\begin{cases}2x+5, & \text{если } x\le 0,\\ -2x+5, & \text{если } x>0;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}x^2+3, & \text{если } x\le 0,\\ \frac{x}{2}+3, & \text{если } x>0.\end{cases}$

890*. Заполните таблицу

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

для функции:

а) $y=\begin{cases}-1, & \text{если } x\le -1,\\ \frac{1}{x}, & \text{если } x>-1;\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}-(x+1)^2, & \text{если } x\le 0,\\ x^2+2, & \text{если } x>0.\end{cases}$

В сумке лежат n одинаковых конфет, из них в красных обёртках на 6 больше, чем в зелёных. Какова вероятность того, что взятая наугад конфета окажется в красной обёртке? Составьте таблицу для случаев, когда n равно 10, 20, ..., 80.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

892. Упростите выражение:

а) $(0{,}5a - 0{,}4b)(0{,}5a + 0{,}4b) \cdot 2ab$;

б) $10x^2y(0{,}2x + 2y)(-0{,}2x + 2y)$;

в) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \cdot (-9xy)$;

г) $\left(1\frac{1}{2}a^2b + 1\right)\left(1 - 1\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot (-4b)$.

893. Обозначьте на координатной плоскости точки $A(5;\ 2)$, $B(3;\ 2)$, $C(0;\ 2)$, $M(-1;\ 2)$, $H(-3;\ 2)$, $P(2;\ 2)$. Все ли они лежат на одной прямой? Каковы координаты точек, являющихся серединами отрезков AB, AC, AM, AH и AP?

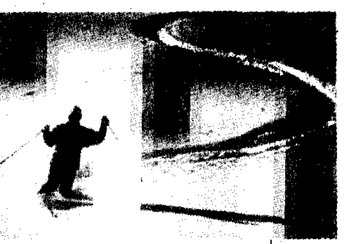
894. Решите уравнение:

а) $4(x - 3) + 2(5 - x) = 8$; б) $7(5 - y) + 8(y - 3) = 18$;

в) $6(z + 2) - 5(z - 2) = 20$; г) $9(t - 4) - 8(5 + t) = -79$.

895. На двух полках стоят 88 книг. Если с первой полки 3 книги переложить на вторую, то на каждой из них книг станет поровну. Сколько книг на каждой полке?

§22. ГРАФИК ФУНКЦИИ



Проведём на плоскости две перпендикулярные координатные прямые x и y, пересекающиеся в начале отсчёта — точке O (рис. 60).

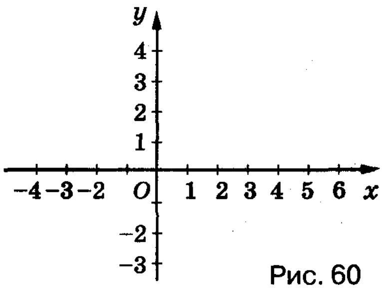


Рис. 60

Плоскость, на которой заданы такие координатные прямые, называют координатной плоскостью, прямую x — осью абсцисс, прямую y — осью ординат, точку O — началом координат.

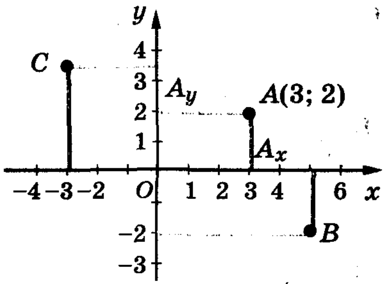


Рис. 61

Каждой точке координатной плоскости соответствует пара чисел. Например, точке A соответствует пара (3; 2), так как прямая AA_x, перпендикулярная оси x, пересекает её в точке с координатой 3, а прямая AA_y, перпендикулярная оси y, пересекает её в точке с координатой 2 (рис. 61). Говорят, что точка A имеет ***координаты*** 3 и 2. Записывают: A (3; 2). Здесь 3 — ***абсцисса***, 2 — ***ордината*** точки A. Первой всегда пишут абсциссу. Начало координат — O (0; 0).

Каждой паре чисел на координатной плоскости соответствует единственная точка. На рисунке 61 показано, как обозначить, например, точки B (5; −2) и $C\left(-3;\ 3\frac{1}{2}\right)$.

Пусть имеем функцию $y = 2x - 3$, где $-1 \le x \le 5$. Составим таблицу значений этой функции для целых значений аргумента.

x	−1	0	1	2	3	4	5
y	−5	−3	−1	1	3	5	7

Нанесём на координатную плоскость точки, координаты которых представлены в этой таблице. Абсциссы точек равны значениям аргумента x данной функции, а ординаты — соответствующим значениям функции y, то есть A (− 1; − 5), B (0; − 3) и т. д. Получим 7 точек (рис. 62, *а*), все они лежат на одной прямой.

Дадим аргументу x ещё несколько дробных значений и вычислим соответствующие им значения функции:

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$
y	-4	-2	0	2	4	6

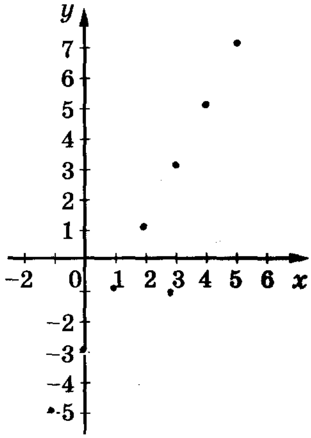


Рис. 62, *а*

Дополним рисунок 62, *а* точками, координаты которых представлены в этой таблице (рис. 62, *б*). Они также размещены на той же прямой. Если придавать аргументу x другие значения (такие, что $-1 \le x \le 5$) и обозначать на координатной плоскости соответствующие точки, то эти точки образуют отрезок (рис. 62, *в*). Этот отрезок — график функции $y = 2x - 3$. Её область определения — промежуток $-1 \le x \le 5$, а область значений $-5 \le y \le 7$.

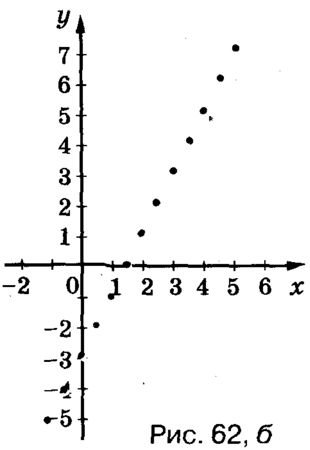


Рис. 62, *б*

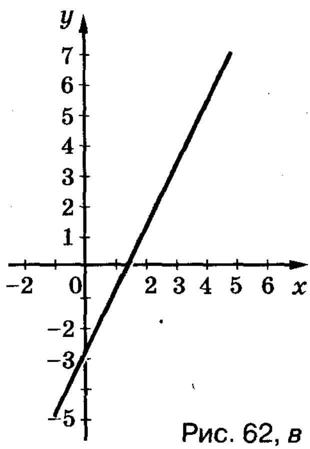


Рис. 62, *в*

Если построенный отрезок мысленно продолжить в обе стороны, то получим прямую. Эта прямая — график функции, заданной той же формулой ($y = 2x - 3$), но на множестве всех чисел (рис. 63).

Графиком функции называется множество точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, ординаты — соответствующим значениям функции.

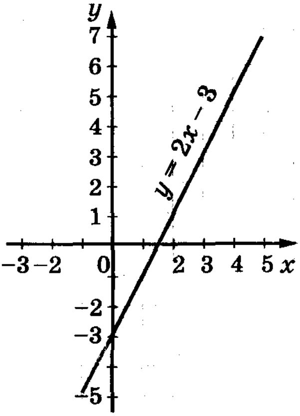


Рис. 63

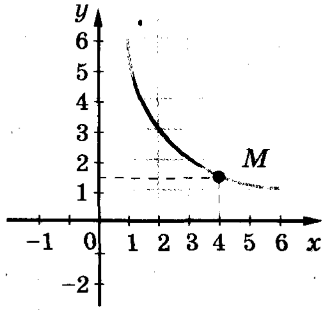


Рис. 64

Если описанным способом построить график функции $y = \dfrac{6}{x}$ при условии, что $1 \le x \le 6$, то получим кривую линию, изображённую на рисунке 64.

Имея график функции, можно для любого значения аргумента (из области определения) указать соответствующее значение функции. Для примера найдём значение функции $y = \dfrac{6}{x}$, если $x = 4$, на графике находим точку M с абсциссой 4, а на оси ординат — ординату точки M; она равна 1,5. Следовательно, пользуясь графиком функции, можно составить таблицу её значений, то есть график задаёт функцию. Графический способ задания функции удобен своей наглядностью. Видя перед собой график, можно сразу выяснить свойства функции, заданной им. В частности, можно установить такие её характеристики:

- область определения и область значений функции;
- при каких значениях аргумента значения функции положительны, при каких — отрицательны, при каких — равны нулю;
- на каких промежутках функция *возрастает*, а на каких — *убывает*.

Функция называется в о з р а с т а ю щ е й, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется у б ы в а ю щ е й, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Хотите знать ещё больше?

В современной математике функции играют важную роль. Их часто используют для создания математических моделей разных процессов, явлений. Когда растёт ребенок, то изменяются его рост, объём, масса; когда взлетает самолёт — изменяются его скорость, расстояние от поверхности земли, масса горючего в баках; когда строят высотный дом — изменяются его высота, масса, стоимость и т. п. Все такие процессы (а их — миллиарды) удобно моделировать с помощью функций. Функция — математическая модель реальных процессов. Подробнее об этом вы узнаете в старших классах.

Существуют приборы, сами вычерчивающие графики функций: барографы, термографы, кардиографы и т. п. Например, кардиограф чертит график-кардиограмму (рис. 65), характеризующий работу сердца. Прибор термограф отмечает изменение температуры за сутки, неделю, месяц. Специалистам надо уметь читать такие графики.

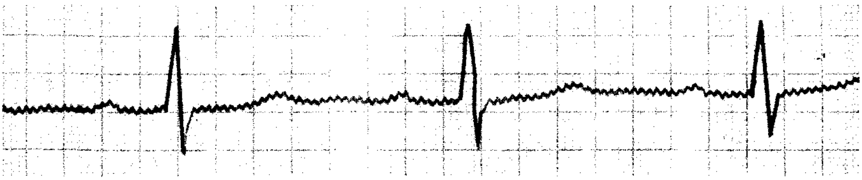


Рис. 65

Проверьте себя

1. Изобразите координатную плоскость.
2. Что такое координатные оси, начало координат?
3. Что такое абсцисса, ордината, координаты точки?
4. Что такое график функции?

Выполним вместе!

1. Является ли графиком функции линия, изображённая на рисунке 66?

Решение. На данной линии есть три разных точки с абсциссами 4. Если бы такая функция y от аргумента x существовала, то одному значению $x = 4$ соответствовали бы три разных значения функции. По определению функции такого быть не может.

Ответ. Данная линия не является графиком функции.

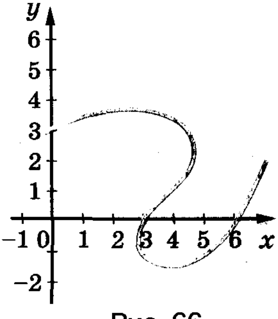


Рис. 66

2. Определите, принадлежат ли графику функции $y = \frac{4}{x} - 3$ точки $A(-4; -4)$; $B(-2; -1)$; $C(\frac{1}{2}; 5)$; $D(8; -2\frac{1}{2})$.

✔ Решение. Если точка принадлежит графику функции, то её координаты должны удовлетворять равенство, задающее данную функцию. Проверим это для каждой точки A, B, C и D этого графика.

Подставим координаты точки $A(-4; -4)$ в равенство $y = \frac{4}{x} - 3$. Имеем: $-4 = \frac{4}{-4} - 3$; $-4 = -1 - 3$; $-4 = -4$. Значит, точка A принадлежит графику функции $y = \frac{4}{x} - 3$.

Для точки $B(-2; -1)$: $-1 = \frac{4}{-2} - 3$; $-1 = -2 - 3$; $-1 \neq -5$. Значит, точка B не принадлежит графику функции $y = \frac{4}{x} - 3$.

Для точки $C\left(\frac{1}{2}; 5\right)$ имеем: $5 = \frac{4}{\frac{1}{2}} - 3$; $5 = 8 - 3$; $5 = 5$, точка C принадлежит графику.

Для точки $D\left(8; -2\frac{1}{2}\right)$: $-2\frac{1}{2} = \frac{4}{8} - 3$; $-2\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 3$; $-2\frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}$, точка D принадлежит графику.

Ответ. Точки A, B и D принадлежат графику функции $y = \frac{4}{x} - 3$, а точка B не принадлежит этому графику.

Выполните устно

896. Просклоняйте слово:

а) *аргумент*; б) *функция*; в) *график*.

897. Является ли графиком функции линия, изображённая на рисунке 67?

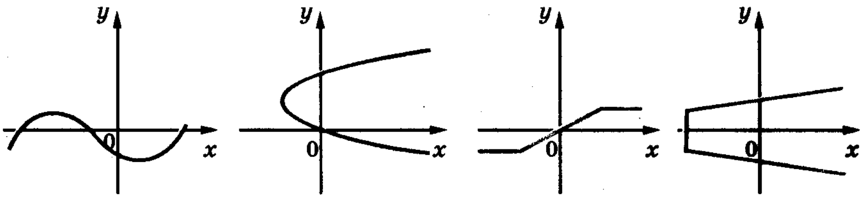


Рис. 67

898. На рисунке 68 изображён график изменения температуры воздуха (в градусах Цельсия) за сутки (по часам). Установите:

а) промежуток времени, в течение которого температура была положительной; отрицательной;

б) в котором часу температура была равна -3°; -1°; 0°; 2°;

в) какой была температура в 7 ч утра; в 14 ч; в 21 ч;

г) с какого и по какое время температура снижалась; повышалась;

д) в течение какого времени температура была постоянной, какого значения при этом достигла;

е) промежуток времени, когда температура была ниже -3°.

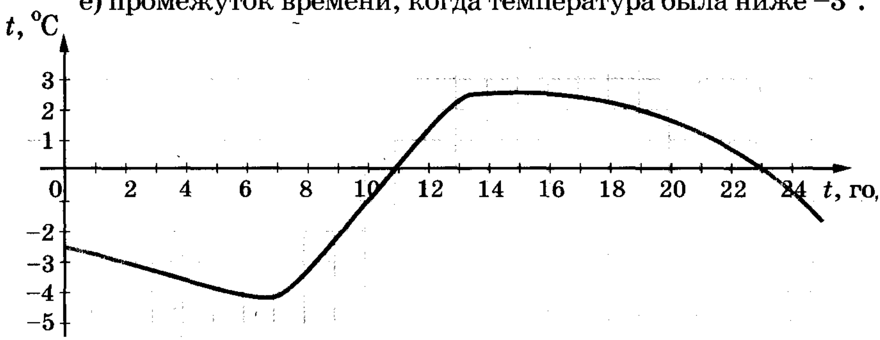


Рис. 68

899. Докажите, что график функции $y = x^2 + 1$ не пересекает оси абсцисс.

900. Пересекает ли ось абсцисс график функции $y = x^2 - 9$?

901. График какой из данных функций проходит через начало координат:

а) $y = 0{,}5x - 1$; б) $y = -25x^2$; в) $y = 3x$;
г) $y = px + 2$; д) $y = 3 \cdot 3x$; е) $y = x - 3x^2$?

Уровень A

902. Обозначьте на координатной плоскости точки $A(5;\ 4)$, $B(3;\ 3)$, $C(1;\ 0)$, $D(7;\ 3)$, $E(-2;\ 5)$, $F(-2;\ -2)$. Постройте прямые AC, BD, EF. Найдите координаты точек, в которых эти прямые попарно пересекаются.

903. На рисунке 69 изображён график некоторой функции. Найдите:

а) значения этой функции, соответствующие таким значениям аргумента: -1; 0; 3; 5;

б) значения аргумента, соответствующие таким значениям функции: -1; 0; 3; 4.

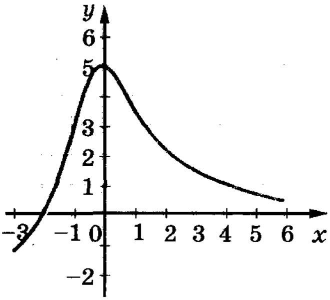


Рис. 69

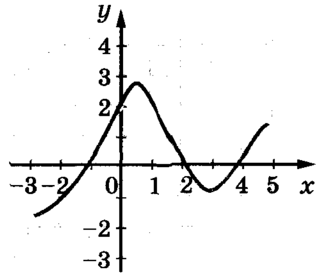


Рис. 70

904. Пользуясь графиком функции (рис. 70), заполните таблицу.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y									

905. Пользуясь графиком функции (см. рис. 63), заполните таблицу.

x	-1	$-0,5$			$1,5$			3	$3,5$
y			-3	-1		1	2		

906. Найдите (рис. 71):

а) значения y, для которых $x=-3$; -1; 0; 1; 4;

б) значения x, для которых $y=-1,5$; -1; 0; 1; $2,5$;

в) значения x, для которых значения y положительны;

г) значения x, для которых значения y отрицательны.

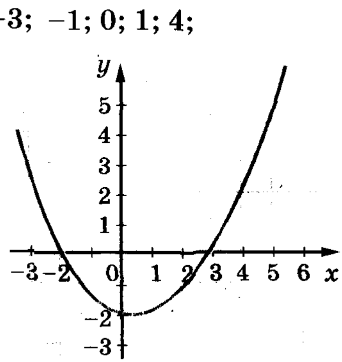


Рис. 71

907. Определите, принадлежат ли графику функции $y=2x-1$ точки:

а) A (5; 1);

б) B (-1; 3);

в) C (-1; -3);

г) D (3; 5).

908. Какие из точек $A(5; -4)$, $B(3; 3)$, $C(1; 0)$, $D(1; 7)$, $E(-2; 5)$ принадлежат графику функции:
а) $y = 5x + 2$; б) $y = -x + 1$; в) $y = x^2 + 1$; г) $y = 10x - 3$?

909. Функция задана формулой $y = \frac{1}{2}x$, если $1 \le x \le 12$. Заполните таблицу и постройте график данной функции.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y												

Постройте график функции (910—911).

910. а) $y = 2x - 1$, если $0 \le x \le 7$; б) $y = 0{,}5x + 3$, если $-6 \le x \le 6$.

911. а) $y = \frac{2}{3}x + 1$, если $-3 \le x \le 6$; б) $y = -x$, если $-5 \le x \le 4$.

912. Функция $y = 0{,}5x + 3$ задана на множестве натуральных чисел, не больших 8. Постройте её график.

913. Функция $y = 5 - x$ задана на множестве целых чисел, удовлетворяющих условию $-7 \le x \le 7$. Постройте график этой функции.

914. Постройте график функции, заданной формулой $y = 1 - 0{,}8x$. Пользуясь этим графиком, найдите:
а) значения y, для которых $x = 0$; 1; -1; 2; -2; 5;
б) значения x, для которых $y = -7$; -5; -3; 1; 0; 2; 5;
в) значения x, для которых значения y положительны;
г) значения x, для которых значения y отрицательны.

915. Постройте график функции, заданной формулой $y = \frac{x-4}{2}$.
С помощью графика найдите:
а) значения x, для которых $y = -3$; -2; -1; 0; 1; 2; 3;
б) значения y, для которых $x = -2$; 0; 2; 4; 6; 8;
в) значения x, для которых значения y положительны;
г) значения x, для которых значения y отрицательны.

Уровень Б

916. На рисунке 72 изображён график некоторой функции.
1. Найдите: а) область определения функции; б) значение функции, соответствующее значению аргумента, равного -4; -3; 0; 2; 3; 4; 6.
2. При каких значениях аргумента: а) значение функции равно -1; 0; 2; 4; б) функция имеет положительные значения; в) функция возрастает; г) функция убывает?

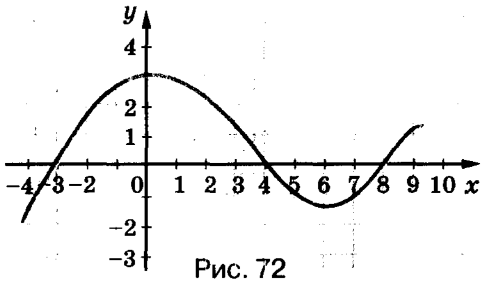


Рис. 72

917. На рисунке 73 изображены графики движения пешехода (линия a) и велосипедиста (линия b). Пользуясь графиком, определите:
а) одновременно ли они начали двигаться;
б) постоянной ли была скорость каждого.

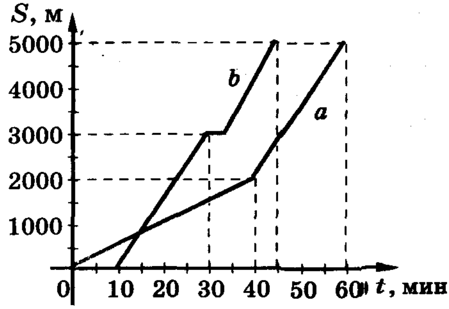


Рис. 73

918. График какой функции проходит через точку $A(3; -2)$:

а) $y = 3x - 8$; б) $y = 2(x - 4)$; в) $y = 7(1 - 5x)$;

г) $y = 3x - 2$; д) $y = 2\frac{1}{3}x - 9$; е) $y = \frac{1}{7}(1 - 5x)$?

Определите, принадлежат ли графику функции данные точки (919—920).

919. а) $y = 0{,}5x + 4$, $A(4; 6)$, $B(-8; 0)$, $C(2; 5)$;

б) $y = -12x + 17$, $A(1; 5)$, $B\left(-\frac{1}{3}; 11\right)$, $C(0{,}5; 11)$;

в) $y = 4 - \frac{8}{x}$, $A(1; -4)$, $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $C(4; -2)$.

920. а) $y = \frac{1}{x - 6}$, $A(7; 1)$, $B(6; 0)$, $C\left(3; \frac{1}{3}\right)$;

б) $y = x(x - 5)$, $A(0; -5)$, $B(5; 0)$, $C(0; 0)$;

в) $y = (6 - x)^2$, $A(7; -1)$, $B(8; 4)$, $C(4; 4)$.

921. **Функция задана графически (рис. 74). Для каждого из случаев $а$ – $г$ составьте таблицу некоторых её значений. Задайте функции $а$ и $г$ формулами.**

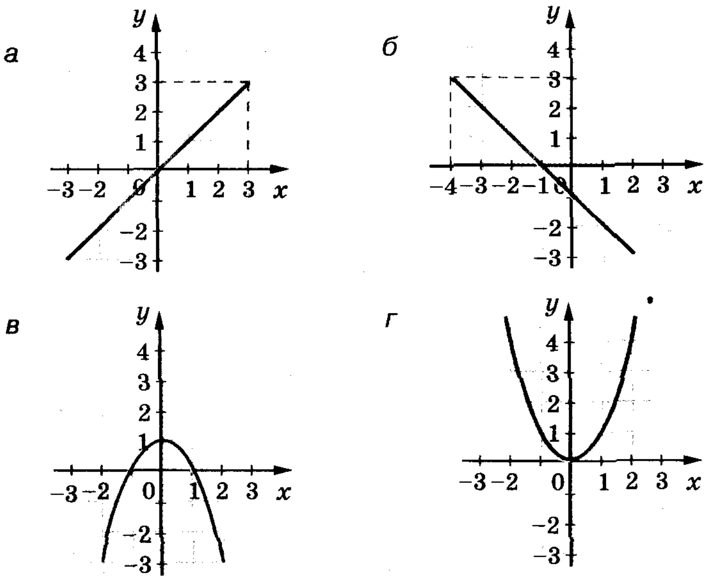


Рис. 74

Постройте график функции и опишите её свойства (922—923).

922. а) $y = 1{,}3x + 2$, если $-3 \le x < 4$; б) $y = 4 - 2t$, если $-2 \le t \le 5$.

923. а) $y = \dfrac{x+6}{2}$, если $-8 \le x \le 4$; б) $y = -\dfrac{1}{5}x$, если $-5 \le x \le 5$.

Постройте график функции и выясните, какая из данных функций возрастающая, а какая — убывающая (924—925).

924. а) $y = 2x - 5$; б) $y = 3 - 2x$; в) $y = 0{,}1x$.

925. а) $y = -\dfrac{1}{5} + 2x$; б) $y = \dfrac{3x-1}{5}$; в) $y = \dfrac{17-x}{5}$.

926. Постройте график функции, заданной формулой $y = 2(1 - x)$. Найдите значения аргумента, при которых значения функции больше -3 и меньше 7.

927. График функции $y = 2x + m$ проходит через точку $A(-2; 5)$. Найдите значение m.

928. График функции $y = kx + 2$ проходит через точку $B(3; 8)$. Найдите значение k.

929. Функция задана формулой $y = x^2 - m$. При каком значении m график этой функции проходит через начало координат?

930. Установите, какой из графиков (рис. 75) соответствует каждой из описанных ситуаций:

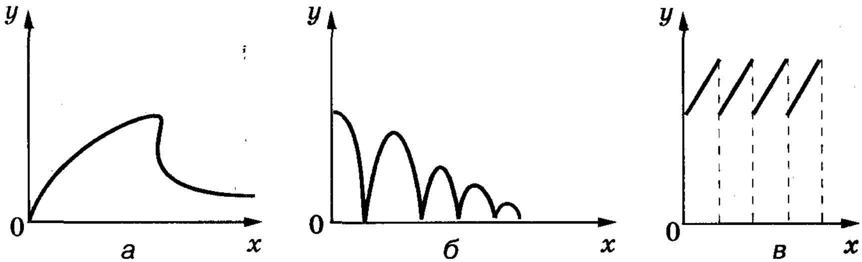


Рис. 75

1) на газоне растёт трава, которую регулярно скашивают (x — время, y — высота травы);

2) груша растёт, потом её срывают и высушивают (x —время, y — масса груши);

3) мяч падает с некоторой высоты на пол (x — время, y —высота мяча над полом).

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

931. Разложите на множители многочлен:

а) $ab + bc + ca + c^2$; б) $2x - yx + 2y - y^2$;

в) $3 - 6a + z - 2az$; г) $10ax - 5bx + 2ay - by$.

932. Докажите тождество $(n^2 + 1)^2 - (n^2 - 1)^2 = 4n^2$. Пользуясь им, докажите, что квадрат каждого чётного числа равен разности квадратов двух некоторых целых чисел.

933. Сколько нужно взять 10-процентного и 4-процентного растворов соли, чтобы получить 800 г 7-процентного раствора?

934. Решите уравнение:

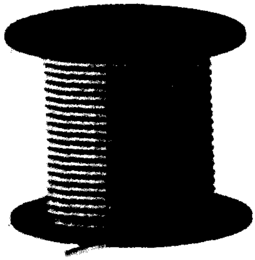
а) $(x + 3)^2 = x^2 + 9x$; б) $(y - 5)^2 = y(y + 2)$;

в) $(1 - z)^2 = 3 + z^2$; г) $(7 - x)^2 - x^2 = 35$.

§23. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Многие функции, которые приходится исследовать, можно задать формулой $y = kx + b$, где k и b — данные числа. Например, если масса пустой бочки равна 30 кг, а плотность бензина — 0,8 кг/дм^3, то зависимость между массой m бочки с бензином и объёмом V л бензина в ней можно выразить формулой $m = 0{,}8V + 30$.

Если масса 1 м провода равна 50 г, а катушки без провода — 200 г, то зависимость между массой m катушки с проводом и длиной l м намотанного на неё провода можно выразить формулой $m = 50l + 200$ (рис. 76). Такие функции называют линейными.



Мал. 76

Линейною называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — аргумент, k и b — данные числа.

Рассмотрим две линейные функции, заданные формулами

$$y = 2x - 3 \text{ и } y = -0{,}5x + 2$$

на множестве всех чисел (R). Описанным в предыдущем параграфе способом построим графики данных функций (рис. 77 и 78).

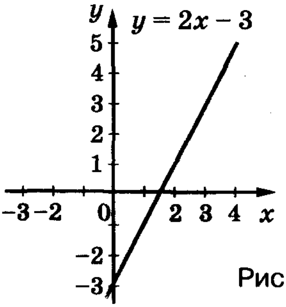


Рис. 77

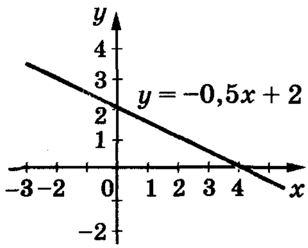


Рис. 78

Видим, что график каждой из приведённых функций — прямая. Можно обобщить примеры и доказать такое утверждение.

График каждой линейной функции — прямая. И каждая прямая на координатной плоскости, не перпендикулярная оси абсцисс, — график некоторой линейной функции.

Для построения прямой, являющейся графиком любой линейной функции, достаточно знать координаты двух точек. Чтобы построить график функции $y = -1{,}5x + 3$, надо составить таблицу для двух любых значений аргумента. Например:

x	0	2
y	3	0

Обозначим на координатной плоскости точки с координатами 0 и 3, 2 и 0 и проведём через них прямую (рис. 79). Это и есть график функции $y = -1{,}5x + 3$.

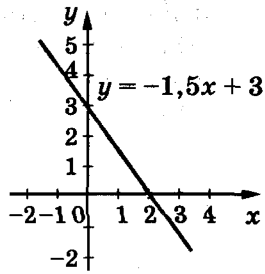


Рис. 79

Свойства линейной функции $y = kx + b$ для разных значений k можно определить по графикам, представленным, например, на рисунках 77 и 78. Представим их в виде таблицы.

Свойства функции	Вид функции ($k \neq 0$)	
	$y = kx + b, k > 0$	$y = kx + b, k < 0$
Область определения	Все числа (R)	Все числа (R)
Область значений	Все числа (R)	Все числа (R)
Положительные значения	$x > -\frac{b}{k}$	$x < -\frac{b}{k}$
Отрицательные значения	$x < -\frac{b}{k}$	$x > -\frac{b}{k}$
Промежутки убывания	—	Все числа (R)
Промежутки возрастания	Все числа (R)	—

Свойства линейной функции $y = kx + b$ при условии, что $k = 0$, предлагаем сформулировать самостоятельно.

Хотите знать ещё больше?

Рассмотрим частные случаи линейных функций.

Если $k = 0$, то функция

$$y = kx + b$$

имеет вид $y = b$. График такой функции — прямая, параллельная оси x (рис. 80).

Если $b = 0$, $k \neq 0$, то линейная функция имеет вид

$$y = kx.$$

Эту функцию называют *прямой пропорциональностью*, так как любые (отличные от нуля)

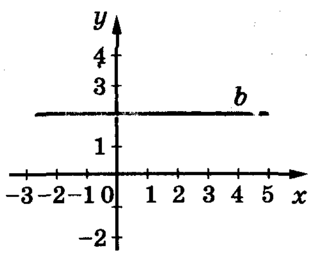


Рис. 80

...ения такой функции пропорциональны соответствующим значениям ...умента. Для примера составим таблицу значений функции $y = 3x$.

x	-2	-1	1	2	3	4	5
y	-6	-3	3	6	9	12	15

Здесь числа 12 и 15 пропорциональны числам 4 и 5, ведь $12 : 15 = 4 : 5$; числа -6 и 9 пропорциональны числам -2 и 3, ведь $-6 : 9 = -2 : 3$ и т. д.

График прямой пропорциональности — прямая, проходящая через начало координат.

На рисунке 81 изображены графики функций $y = 2x$, $y = -x$, $y = 0{,}3x$.

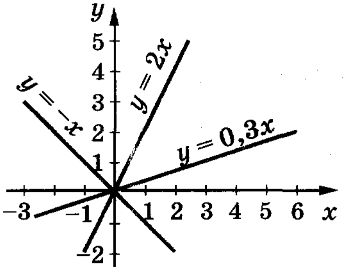


Рис. 81

Проверьте себя

1. Что такое функция?
2. Сформулируйте определение линейной функции.
3. Что является графиком линейной функции?
4. Верно ли утверждение, что каждая прямая на координатной плоскости — график некоторой линейной функции?
5. Как построить график линейной функции?
6. Приведите примеры возрастающей линейной функции.

Выполним вместе!

1. Построите график функции, заданной формулой $y = 0{,}5x + 1$.

Р е ш е н и е. Данная функция — линейная, её график — прямая. Определим координаты двух точек этой прямой, составив таблицу.

x	0	2
y	1	2

Нанесём на координатную плоскость точки $A(0; 1)$ и $B(2; 2)$ и проведём через них прямую (рис. 82). Это и есть график данной функции.

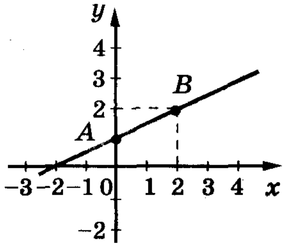


Рис. 82

Существуют функции, не являющиеся линейными на всей области определения, но на отдельных промежутках области определения имеют свойства линейных. Их графики — ломаные линии. Рассмотрим одну из таких функций.

2. Постройте график функции $y = |x - 1|$.

✔ Решение. По определению модуля можем записать:

если $x - 1 \geq 0$, то $|x - 1| = x - 1$;

если $x - 1 < 0$, то $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$.

Следовательно, $y = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \geq 1, \\ -x + 1, & \text{если } x < 1. \end{cases}$

Это функция, которая на двух разных промежутках задаётся разными формулами линейных функций:

если $x \geq 1$, то $y = x - 1$;

если $x < 1$, то $y = -x + 1$.

Составим такие таблицы их значений.

x	1	3
y	0	2

x	−2	0
y	3	1

Построим график функции (рис. 83).

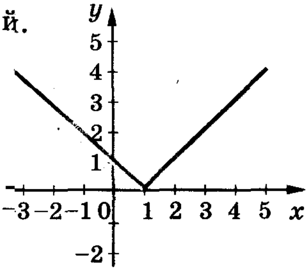


Рис. 83

Выполните устно

935. Является ли линейной функция, заданная формулой:

а) $y = 5x + 0{,}2$; б) $y = -3{,}5x + 2$; в) $y = 3 - 2x$;

г) $y = x + 5$; д) $y = \dfrac{2x - 5}{3}$; е) $y = \dfrac{1 - 2x}{2}$?

936. Является ли прямой пропорциональностью функция, заданная формулой:

а) $y = 0{,}7x$; б) $y = \dfrac{x}{3}$; в) $y = \dfrac{2x - 1}{3}$;

г) $z = 5 - 2t$; д) $z = 7t^2$; е) $z = -3t$?

937. Линейная функция задана формулой $y = 0{,}5x + 3$. Какое значение этой функции соответствует значению $x = -2$? При каком значении аргумента значение функции равно 3?

938. Задайте формулами функции, графики которых изображены на рисунке 84.

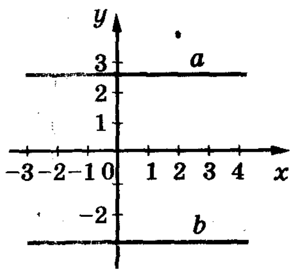


Рис. 84

Уровень A

939. Постройте график функции::

а) $y = 3x - 2$; б) $y = -0{,}6x$;

в) $y = 1 - 0{,}3x$; г) $y = \dfrac{2}{3}x + 1$;

д) $y = \dfrac{x + 3}{2}$; е) $y = \dfrac{1 - 3x}{3}$.

940. Постройте график функции:

а) $y = 0{,}5x$; б) $y = 2(x + 1)$; в) $y = 3 - 2x$; г) $y = \dfrac{x - 5}{2}$.

Постройте график функции (**941–942**).

941. а) $y = 2x - 3$, если $-1 \le x \le 4$;

б) $m = 2t + 3$, если $-3 \le t \le 2$;

в) $y = \frac{1}{3}x + 1$, если $-3 \le x \le 6$.

942. а) $y = 5x + 3$, если $-4 \le x \le 2$;

б) $y = 2 - x$, если $-2 \le x \le 4$;

в) $p = 0{,}8a + 2$, если $2 \le a \le 5$.

943. Дана функция $y = \dfrac{2}{3}x - 1$, где $-3 \le x \le 6$. Принадлежат ли графику этой функции точки $A\ (0; -1)$, $B\ (3; 1)$, $C\ (9; 5)$?

944. Проходит ли график функции $y = 2x - 1$ через точку:

а) $A\ (3; 5)$; б) $B\ (-10; -5)$; в) $C\ (100; 199)$?

945. Постройте график функции:

а) $y = 0x + 3$; б) $y = 0x - 2$.

946. Какая из функций возрастающая, а какая — убывающая:

а) $y = x$; б) $y = -\dfrac{x}{3}$; в) $y = -x$; г) $y = 2x$?

947. На покраску 1 $м^2$ пола расходуют 180 г краски. Выразите формулой зависимость массы m краски от площади S окрашиваемого пола. Является ли эта зависимость прямо пропорциональной?

948. На рисунке 85 изображены графики функций вида $y = kx$ $(k \neq 0)$. Для каждого графика определите знак коэффициента k. Составьте формулы, соответствующие графикам этих функций.

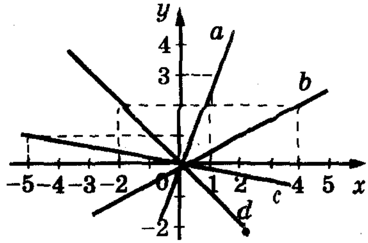


Рис. 85

949. Постройте график функции $y = -3x + 2$. Найдите координаты точек пересечения графика с осями координат. При каких значениях x значения функции положительны, при каких — отрицательны? Возрастающая или убывающая эта функция?

950. Не выполняя построений, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = 4x + 8$; б) $y = -x + 3$; в) $y = 0{,}5 - 2x$.

Уровень Б

951. Постройте график функции:

а) $y = 2x + 1$; б) $y = x - 4$; в) $y = \frac{1}{2}x - 5$; г) $y = 3 - \frac{1}{3}x$;

д) $y = \frac{3-2x}{3}$; е) $y = \frac{4x-6}{8}$; ё) $y = \frac{1}{2}(7x - 4)$; ж) $y = 3(2 - x)$.

Найдите координаты точек пересечения построенных графиков с осями координат. Для каждой функции укажите, при каких значениях x значения функции положительны, при каких — отрицательны. Какие из данных функций возрастающие, а какие — убывающие?

952. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = 1{,}7x - 3{,}4$; б) $y = 0{,}5(x - 4)$; в) $y = 3{,}5x$;

г) $y = -2{,}5x + 1$; д) $y = \frac{x-1}{4}$; е) $y = \frac{3-2x}{2}$.

953. В одной системе координат постройте графики функций и укажите координаты точки их пересечения:

а) $y = \frac{x}{2} + 1$ и $y = -x + 4$; б) $y = x - 5$ и $y = 5 - x$;

в) $y = 3x - 1$ и $y = -x - 1$; г) $y = x + 3$ и $y = 2x + 6$.

954. Постройте в одной системе координат графики функций, заданных формулой:

а) $y = 2x + b$, если $b = -3; 0; 1;$

б) $y = kx + 3$, если $k = -1; \frac{1}{2}; 1; 2.$

Как расположены построенные графики в каждом из случаев *а*, *б*?

955. Функция задана формулой $y = kx - 2$. При каком значении k график функции:

а) проходит через точку $M(-3; 4)$;

б) параллелен графику функции, заданной формулой $y = -3x + 1{,}5$?

956. При каком условии графики функций $y = kx - 1$ и $y = px + 5$ пересекаются в точке $P(4; 3)$?

957. Постройте график функции:

а) $y = 2$; б) $y = -4$; в) $y = 3{,}5$.

958. При каком условии графики функций $y = px + 3$ и $y = kx - 3$ — параллельные прямые (рис. 86)?

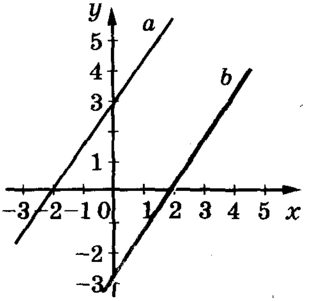


Рис. 86

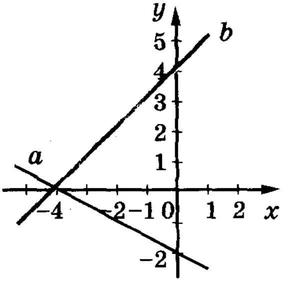


Рис. 87

959. Напишите формулы функций, графики которых изображены на рисунке 87.

960. Напишите формулу функции вида $y = kx + p$, если её график проходит через точки:

а) $A(0; 1)$ и $B(2; 2)$; б) $K(1; -1)$ и $P(0; 5)$.

961*. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = x + 4$; б) $y = 1 - 2x$; в) $y = 3x$; г) $y = -\frac{x}{3}$.

Для каждого графика постройте график, симметричный относительно оси ординат. Задайте формулой соответствующую функцию.

Постройте график функции **(962—963)**.

962*. а) $y = \begin{cases} 2x+3, & -4 \le x \le 0, \\ -2x+3, & 0 \le x \le 4; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -3x+3, & -2 < x \le 1, \\ x-1, & 1 \le x < 4. \end{cases}$

963*. а) $y = |x|$; б) $y = |x+3|$; в) $y = |x| + 3$; г) $y = 2|x| - 1$.

964*. Затраты производства на 200 единиц продукции составляют 100 грн., а на 2 000 единиц — 800 грн. Найдите графически затраты на производство 400, 1000, 1200 единиц продукции, считая, что функция затрат линейная.

965*. Затраты на перевозку груза двумя видами транспорта вычисляются по формулам:

$$y_1 = 100 + 30x, \quad y_2 = 150 + 20x,$$

где x — расстояние перевозок в сотнях километров, y_1 и y_2 — транспортные затраты при перевозке груза первым и вторым видами транспорта в сотнях гривен. Определите, на какие расстояния и каким видом транспорта лучше перевозить груз.

966*. Фирма платит продавцу за x единиц проданного товара $(2x + 50)$ грн., если проданного товара менее 40 единиц, и доплачивает ему 20 % комиссионных, если товара продано 40 единиц и более. Опишите зависимость между количеством проданного товара и заработной платой продавца и постройте график этой зависимости.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Решите уравнение **(967—968)**.

967. а) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 3$; б) $(5 - 3y)^2 - 9y^2 = 55$;
в) $(4z + 2)^2 = 2(8z^2 + 13)$; г) $(4 - 5x)^2 = (3 + 5x)^2$.

968. а) $(2x+3)^2 - 4(x^2+7) = 71$; б) $(5z - 1)^2 - 5z(4 + 5z) = 31$;
в) $(0{,}2y - 2)^2 + 0{,}1y(2 - 0{,}4y) = -2$;
г) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$.

969. Велосипедист едет из одного села в другое со скоростью 10 км/ч. Если бы он ехал со скоростью 12 км/ч, то приехал бы на час раньше. Каково расстояние между сёлами?

970. Мотоциклист проезжает расстояние от Жашкова до Умани за 1 ч, а велосипедист от Умани до Жашкова — за 5 ч. Через сколько часов они встретятся, если выедут одновременно?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант I

1°. Задайте формулой функцию, значение которой на 4 больше значения аргумента.

2•. Постройте график функции $y = 5 - x$ на множестве натуральных чисел, меньших 7.

3°. Постройте график функции $y = 2x - 1$.

4•. Найдите область определения функции:

а) $y = x^2 - 3x + 2$; б) $y = \dfrac{2}{x+3}$.

Вариант II

1°. Задайте формулой функцию, значение которой на 9 меньше значения аргумента.

2•. Постройте график функции $y = 1 - x$ на множестве натуральных чисел, меньших 5.

3°. Постройте график функции $y = 3x - 1$.

4•. Найдите область определения функции:

а) $y = x^3 - x + 3$; б) $y = \dfrac{3}{x-2}$.

Вариант III

1°. Задайте формулой функцию, значение которой втрое больше значения аргумента.

2•. Постройте график функции $y = 2 + x$ на множестве натуральных чисел, меньших 5.

3°. Постройте график функции $y = 4x + 3$.

4•. Найдите область определения функции:

а) $y = 1 - x^2$; б) $y = \dfrac{1}{x-9}$.

Вариант IV

1°. Задайте формулой функцию, значения которой обратны значениям аргумента.

2•. Постройте график функции $y = -3 + x$ на множестве натуральных чисел, меньших 8.

3°. Постройте график функции $y = -2x + 3$.

4•. Найдите область определения функции:

а) $y = x^3 + 1$; б) $y = \dfrac{1}{x+9}$.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Некоторые примеры соответствий между переменными, теперь называющимися *функциями*, учёным были известны очень давно. В Вавилоне ещё более 3000 лет тому назад были составлены таблицы квадратов и кубов натуральных чисел, которые сейчас можно считать табличным заданием функций $y = x^2$ и $y = x^3$.

Общее понятие функции было введено только в XVII в. Сначала Р. Декарт ввёл понятие переменной величины и систему координат, начал рассматривать зависимость ординат точек графика от их абсцисс. Слово «функция» (с латинского — *действие, выполнение*) впервые ввёл немецкий математик Г. Лейбниц.

Функциями он называл абсциссы, ординаты и некоторые отрезки, связанные с точкой, которая в процессе движения описывает определённую линию.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716)

Г. Лейбниц — выдающийся немецкий учёный. По образованию — юрист. Работал библиотекарем, историографом, организовал Берлинскую академию наук. Исследовал проблемы математики, философии, языковедения, химии, геологии, конструировал вычислительные машины.

Усилиями многих математиков (И. Бернулли, Л. Эйлера, Н. Лобачевского, Б. Больцано и др.) понятие функции уточнялось, расширялось и наполнялось новым смыслом. Наиболее общее современное определение функции предложила в XX в. группа математиков, выступающая под псевдонимом Н. Бурбаки: «Функция — это отношение, при котором каждому элементу области отправления соответствует ровно один элемент области прибытия». Под отношением они понимают соответствие, под областью отправления (областью определения функции) и областью прибытия (областью её значений) — любые множества, а не только числовые. С таким общим понятием функции вы ознакомитесь в старших классах.

ОСНОВНОЕ В ГЛАВЕ

Если каждому значению переменной x соответствует одно значение переменной y, то переменную y называют *функцией* от x, переменную x называют *независимой переменной*, или *аргументом функции*. Например, площадь S квадрата — функция от длины его стороны a.

Функции можно задавать с помощью формул, таблиц, графиков и т. п. Графики функций чаще всего строят в *декартовой системе координат*, состоящей из двух взаимно перпендикулярных координатных осей — горизонтальной оси *абсцисс*, или оси x, и вертикальной оси *ординат*, или оси y (рис. 88). Плоскость с системой координат называют *координатной плоскостью*, каждой её точке соответствует одна пара чисел. Например, на рисунке 88 точке A соответствует пара чисел (3; 2), её координаты записывают так: A (3; 2). То есть 3 — абсцисса точки A, а 2 — ордината точки A.

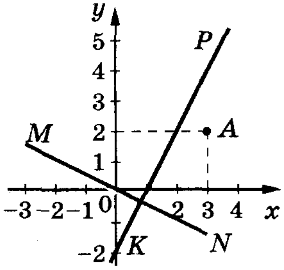


Рис. 88

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Все значения, которые может принимать аргумент функции, образуют её *область определения*, а все соответствующие значения функции — *область значений функции*.

Линейной называют функцию, которую можно задать формулой $y = kx + b$, где x — аргумент, а k и b — данные числа. Если $b = 0$, то линейную функцию называют *прямой пропорциональностью*.

График каждой линейной функции — прямая. График прямой пропорциональности — прямая, проходящая через начало координат. На рис. 88 прямая KP — график линейной функции $y = 2x - 2$, прямая MN — график прямой пропорциональности $y = -0{,}5x$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение функции.
2. Приведите примеры функции.
3. Что такое аргумент функции?
4. Что такое область определения функции?
5. Что такое область значений функции?
6. Как можно задавать функции?
7. Что такое координатная плоскость?
8. Что такое ось абсцисс?
9. Что такое ось ординат?
10. Что такое начало координат?
11. Что означает выражение «точка A имеет координаты a и b»?
12. Что означает запись «$M(x; y)$»?
13. Что такое абсцисса точки?
14. Что такое ордината точки?
15. Какая функция называется возрастающей?
16. Какая функция называется убывающей?
17. Что такое график функции?
18. В чём состоит графический способ задания функции?
19. Каждая ли линия на координатной плоскости задаёт функцию?
20. Сформулируйте определение линейной функции.
21. Что является графиком линейной функции?
22. Правильно ли утверждение, что каждая прямая в декартовой системе координат — график некоторой линейной функции?
23. Как построить график линейной функции?
24. Сформулируйте свойства линейной функции $y = kx + b$, если $k > 0$; $k < 0$; $k = 0$.
25. Какую функцию называют прямой пропорциональностью?
26. Что является графиком прямой пропорциональности?
27. Как построить график прямой пропорциональности?
28. Сформулируйте свойства прямой пропорциональности.

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ ОЦЕНИВАНИЮ

Тестовые задания № 6

1. Через какую из точек проходит график функции $y = 3x + 2$:

а) $A(3; 5)$; б) $B(8; 13)$; в) $C(2; 7)$; г) $D(4; 14)$?

2. График функции $y = 2x + 10$ пересекает ось Ox в точке с координатами:

а) $(0; 0)$; б) $(-5; 0)$; в) $(0; 10)$; г) $(-5; 10)$.

3. График функции $y = -x + 5$ пересекает ось Oy в точке с координатами:

а) $(1; 1)$; б) $(0; 0)$; в) $(5; 0)$; г) $(0; 5)$.

4. Какая из данных функций является линейной:

а) $y = \frac{x}{2} + 3$; б) $y = \frac{2}{x} - 2$;

в) $y = \frac{x^2}{4} + 2$; г) $y = -\frac{2}{x^2} + 4$?

5. Какая из функций является прямой пропорциональностью:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = 3$; в) $y = x^2$; г) $y = 3x$?

6. График какой из функций проходит через точку $A(-1; 2)$:

а) $y = 2x + 4$; б) $y = 3x - 2$; в) $y = 5x + 3$; г) $y = 2x$?

7. При каком значении k график функции $y = kx + 7$ проходит через точку $C(2; -1)$:

а) -4; б) 4; в) -3; г) 3?

8. Какие значения x не входят в область определения функции $y = \frac{3}{x(x-2)}$:

а) 0 и 3; б) -2; в) 0 и 2; г) 2 и 3?

9. Какой из графиков функций не пересекает ось Ox:

а) $y = x$; б) $y = 2x + 3$; в) $y = -x$; г) $y = -3$?

10. Найдите значение функции $y = -\frac{1}{4x+1}$ при $x = -0{,}2$:

а) 5; б) 0,5; в) -5; г) $-0{,}5$.

Контрольная работа № 6

1°. Функция задана формулой $y = 0{,}5x - 3$. Определите:

а) значение функции, если значение аргумента равно 4;

б) значение аргумента, при котором значение функции равно 5.

2°. Не выполняя построения графика функции $y = 7x - 3$, покажите, через какие точки проходит график: $A(1;\ 4)$, $B(2;\ 10)$, $C(3{,}5;\ 0{,}06)$; $D(0;\ -3)$.

3°. Постройте график функции $y = -2x + 3$. Сформулируйте её свойства.

4°. Найдите точки пересечения графика функции $y = -3x + 5$ с осями координат.

5•. Одна сторона прямоугольника равна x см, а вторая — вдвое больше. Выразите формулой зависимость площади S прямоугольника от x. Составьте таблицу значений полученной функции для первых пяти натуральных значений аргумента.

6•. Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через начало координат и точку $A(-4;\ -6)$.

7•. Найдите область определения функции $y = \dfrac{6}{x^2 + 5x}$.

8•. Стоимость оборудования ремонтной мастерской составляет 72 000 грн., а годовая амортизация — 3 000 грн. Выразите зависимость стоимости оборудования от времени, если ежегодные амортизационные отчисления постоянны.

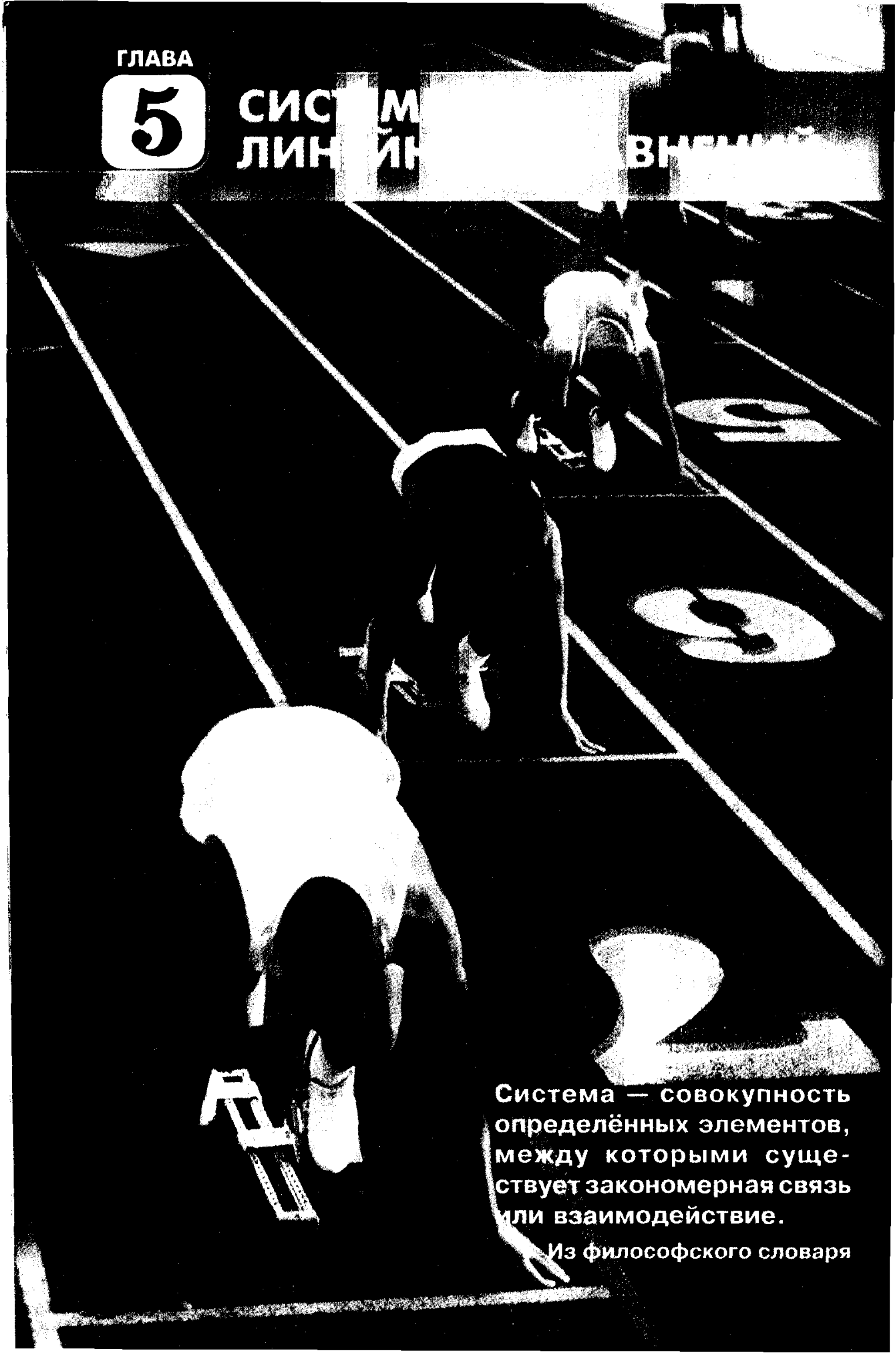
9••. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x - 2, & x \ge 0, \\ -2x - 2, & x < 0. \end{cases}$$

10••. При каком значении m графики функций $y = 2|x| + 1$ и $y = m$ имеют одну общую точку?

ГЛАВА

5 СИС[illegible]М[illegible] ЛИН[illegible]ЙН[illegible]ВНЕНИЙ



Система — совокупность определённых элементов, между которыми существует закономерная связь или взаимодействие.

Из философского словаря

Системы уравнений, как и отдельные уравнения, используют для решения сложных и необходимых задач. Системы уравнений бывают с двумя, тремя и более переменными. В этой главе вы ознакомитесь с простейшими системами двух уравнений с двумя переменными.

Основные темы главы:

- **уравнения с двумя переменными;**
- **график линейного уравнения;**
- **системы уравнений;**
- **способ подстановки;**
- **способ сложения;**
- **решение задач составлением системы уравнений.**

§24. УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

До сих пор мы рассматривали уравнение с одной переменной. Однако существуют задачи, решение которых приводит к уравнениям с двумя переменными.

Задача. На 22 грн. купили несколько книжек по 5 грн. и географических карт — по 3 грн. Сколько купили книжек и карт?

Решение. Пусть купили x книжки y карт. За книжки заплатили $5x$ грн., а за карты — $3y$ грн. Всего заплатили 22 грн., то есть, $5x + 3y = 22$.

Это уравнение с двумя переменными. Приведём и другие примеры таких уравнений с двумя переменными:

$$xy = 8, \quad 2x = 3y, \quad x^2 + y = 7.$$

Уравнение вида $ax + by = c$, где a, b, c — данные числа, называется линейным уравнением с двумя переменными x и y. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, его называют уравнением первой степени с двумя переменными.

Примеры линейных уравнений:

$5x + 3y = 22$, $x - 2{,}7y = 0$, $0x + 2y = 4$, два первых из них — уравнение первой степени с двумя переменными.

Паре чисел $x = -1$ и $y = 9$ удовлетворяет уравнение $5x + 3y = 22$, так как $5 \cdot (-1) + 3 \cdot 9 = 22$. А пара чисел $x = 1$ и $y = 2$ этому уравнению не удовлетворяет, поскольку $5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \neq 22$.

Каждая пара чисел, удовлетворяющая уравнение с двумя переменными, т. е. обращающая это уравнение в верное равенство, называется *решением* этого уравнения.

Обратите внимание: одно решение состоит из двух чисел, на первом месте записывают значение x, на втором — y. Корнями их не называют.

Чтобы найти решение уравнения с двумя переменными, следует подставить в уравнение произвольное значение первой переменной и, решив полученное уравнение, найти соответствующее значение второй переменной.

Для примера найдем несколько решений уравнения

$$3x - y = 5.$$

Если $x = 1$, то $3 \cdot 1 - y = 5$, отсюда $y = -2$. Пара чисел $x = 1$ и $y = -2$ — решение данного уравнения. Его записывают ещё и так: $(1; -2)$. Придавая переменной x значения 2, 3, 4, ... , так же можно найти сколько угодно решений уравнения: $(2; 1)$, $(3; 4)$, $(4; 7)$, $(5; 10)$, ... Каждое уравнение первой степени с двумя переменными имеет бесконечно много решений.

Уравнение $5x + 3y = 22$ также имеет бесконечно много решений, но сформулированную выше задачу удовлетворяет только одно из них: $(2; 4)$.

Два уравнения с двумя переменными называют *равносильными*, если каждое из них имеет те же решения, что и другое. Уравнения, не имеющие решений, также считаются равносильными.

Для уравнения с двумя переменными остаются справедливыми свойства, сформулированные для уравнений с одной переменной.

Обе части уравнения с двумя переменными можно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля. Любой член такого уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив его знак на противоположный. В результате получается уравнение, равносильное данному.

Например, уравнение $8x = 7 + 3 \cdot (1 - 2y)$ можно преобразовать так: $8x + 6y = 10$, $4x + 3y = 5$. Каждое из этих уравнений равносильно друг другу.

Хотите знать ещё больше?

Иногда возникает потребность решить уравнение с двумя переменными во множестве целых чисел, то есть определить решения, являющиеся парами целых чисел. Способы решения таких уравнений определил древнегреческий математик Диофант (III в.), поэтому их называют *диофантовыми уравнениями.* Например, задача о книжках и картах сводится к уравнению $5x + 3y = 22$, где x и y могут быть только целыми (иногда натуральными) числами.

Переменную y из этого уравнения выразим через x:

$$y = \frac{22 - 5x}{3}.$$

Будем подставлять в равенство вместо x первые натуральные числа до тех пор, пока не получим целое значение переменной y. Это можно делать устно. Если $x = 2$, то $y = 4$. Других натуральных решений уравнение не имеет. Поэтому задача имеет единственное решение: 2 книги и 4 карты.

Проверьте себя

1. Какое уравнение называют линейным уравнением с двумя переменными? Приведите примеры таких уравнений.
2. Что называют решением уравнения с двумя переменными?
3. Какие уравнения с двумя переменными называют равносильными?
4. Сформулируйте основные свойства уравнений. Справедливы ли они для уравнений с двумя переменными?

✔ Выполним вместе!

1. Решите уравнение:

а) $x^2 + 6y^2 = -7$; б) $(x - 3)^2 + y^2 = 0$.

✔ Решение. а) При любых значениях x и y значения выражения $x^2 + 6y^2$ не может быть отрицательным числом. Поэтому уравнение не имеет решений.

б) Значение выражения $(x - 3)^2 + y^2$ равно нулю только при условии, когда $x - 3 = 0$ и $y = 0$. Значит, уравнение имеет только одно решение: $x = 3$, $y = 0$.

2. Составьте уравнение с двумя переменными, решением которого будет пара чисел (1; −5).

✔ Решение. Пишем любой двучлен с переменными x и y, например $3x - 5y$. Если $x = 1$, а $y = -5$, то значение даного двучлена равно 28. Следовательно, уравнение $3x - 5y = 28$ удовлетворяет условие задачи.

Есть много других линейных уравнений с двумя переменными, имеющих такое же решение (1; −5).

Выполните устно

971. Назовите уравнения с двумя переменными:

а) $3x - y = 5$; б) $x^3 + 4z = 9$;
в) $xy - 28 = 3$; г) $2y - xz = 0$;
д) $0{,}72 = 8t + 5$; е) $x - 2(3 - y) = 5$.

Какие из этих уравнений линейные, а какие — первой степени?

972. Найдите несколько решений уравнения:

а) $x + y = 5$; б) $x - y = 2$; в) $xy = 30$.

973. Имеет ли решения уравнение:

а) $x^2 + y^2 = -3$; б) $|x| + |y| = -2$; в) $x^4 + |y| = -8$?

974. Решите уравнение:

а) $|x| + |y| = 0$; б) $|x - 2| + |y| = 0$; в) $|x + 1| + |2y| = 0$.

Уровень А

975. Удовлетворяют ли значения $x = 5$ и $y = -2$ уравнение $5x - 2y = 10$?

976. Какие из пар (3; 2), (4; −3), (−1; 4) являются решениями уравнения:

а) $2x + 7y = 20$; б) $-2t + 3z = 0$;
в) $x - 4y = 16$; г) $5x - y = 23$?

977. Найдите два любых решения уравнения:

а) $2x + y = 7$; б) $2x - 3z = 10$; в) $4m + 5n = 21$.

978. Найдите три любых решения уравнения:

а) $x - y = 16$; б) $2x + y = 3{,}5$; в) $4a + 5b = 20$;
г) $5m - 2n = -8$; д) $\frac{1}{5}x - \frac{3}{4}y = 1$; е) $\frac{5}{6}a + \frac{1}{4}b = 1$.

979. Замените звездочки числами так, чтобы пары (1; *), (2; *), (3; *), (*; 2), (*; 0), (*; −5) удовлетворяли уравнение $x + 3y = 10$.

980. Составьте уравнение с двумя переменными, решением которого является пара чисел:

а) (3; 2); б) (−2; 5); в) (−4; −1); г) $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right)$.

981. Из линейного уравнении выразите: 1) y через x; 2) x через y:

а) $3x + 4y = 12$; б) $5x - y = 15$; в) $x - 2y = 6$;

г) $2x - 5y = 1$; д) $10x - 15y = 0$; е) $\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}y = 0$.

982. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = -5$ не имеет решений.

983. Имеет ли решения уравнение с двумя переменными:

а) $x^2 + y^4 = -1$; б) $x^2 - y^2 = -3$; в) $x^2 + 3y^2 = 0$?

984. Сколько решений имеет уравнение:

а) $x^2 + y^2 = 0$; б) $x^2 + (y - 2)^2 = 0$;

в) $x(x^2 + y^2) = 0$; г) $x^2 + y^2 = -2$?

Решите уравнение **(985—986)**.

985. а) $x^2 + (y - 1)^2 = 0$; б) $(x + 3)^2 + y^2 = 0$.

986. а) $(x - 3)^2 + (y + 1)^4 = 0$; б) $|x| + y^2 = 0$;

в) $(2x + 3)^4 + y^2 = 0$; г) $4x^2 + |y - 1| = 0$.

987. Найдите значение коэффициента a в уравнении $ax + 5y = 1$, когда известно, что пара $x = 3$, $y = -4$ является решением этого уравнения.

Уровень Б

988. Составьте такое уравнение с переменными x и y, чтобы его удовлетворяли две пары чисел:

а) (2; 1) и (1; −1); б) (−3; 2)и (0; −4);

в) (5; 0) и (−1; −3); г) (−2; 6) и (0; 0).

989. Докажите, что уравнение не имеет решений:

а) $x^2 + (y - 1)^2 = -3$; б) $x^2 + y^2 + 2 = 2y$;

в) $|x| + y^2 + 1 = 0$; г) $|x - 1| + |x| + y^2 = 0$.

990. Найдите такое число c, чтобы пара (c; $-c$) удовлетворяла уравнение:

а) $2x + 3y = 20$; б) $5x - y = 12$; в) $x + 8y = 9$; г) $7x - 3y = 20$.

991. Найдите такое число n, чтобы пара (n; $-n$) удовлетворяла уравнение:

а) $5x + 4y = 3$; б) $9x - y = 70$; в) $x^2 + 4y = 0$; г) $x + |y| = 4$.

992. При каких значениях n уравнение имеет только одно решение:

а) $x^2 + y^2 = n$; б) $x^2 + |y| = n - 1$;
в) $|x| + |y| = n + 2$; г) $(x-3)^4 + y^4 = n^4$?

Решите уравнение **(993—995)**.

993. а) $4x^2 + |y| = x^2$; б) $|x-2| - y^4 = |3x-6|$;
в) $10x - |y| = x^2 + 25$; г) $|y+4| + |3x+2| = 0$.

994. а) $x^2 + y^2 + 1 = 2x$; б) $x^2 + y^2 + 9 = 6x$;
в) $x^2 + 4y^2 + 1 = 4y$; г) $x^2 + 2x + y^2 + 5 = 4y$.

995. а) $x^2 + y^2 + 4 = -4x$; б) $x^2 + y^2 + 9 = 6y$;
в) $4x^2 + y^2 + 2 = 2(2x - y)$; г) $x^2 + y^2 + 8 = 4(y - x)$.

996. Найдите натуральные значения x и y, удовлетворяющие уравнение:

а) $x + 4y = 13$; б) $5x + y = 14$; в) $3x + y = 16$;
г) $x + 12y = 37$; д) $3x + 2y = 22$; е) $4x + 5y = 29$.

997. Найдите целые неотрицательные решения уравнения:

а) $x^2 + y^2 = 2$; б) $2x^2 + y^2 = 9$.

998. Имеет ли уравнение целые решения:

а) $x^2 + y^2 = 3$; б) $x^2 + 3y^2 = 32$?

999. Найдите такое значение a, чтобы уравнение $3x - 2y^2 = 6$ имело решение:

а) $(a; 3)$; б) $(2; a)$; в) $(a; 0)$; г) $(8; a)$.

1000. Найдите значение коэффициента a в уравнении $5x - ay = 2$, если его удовлетворяет пара:

а) $(2; 1)$; б) $(1; 2)$; в) $(4; 3)$; г) $(-5; 9)$.

Составьте уравнение с двумя переменными и решите его методом подбора **(1001—1008)**.

1001. Найдите двузначное число, которое вдвое больше суммы его цифр.

1002. Найдите двузначное число, которое больше суммы его цифр в: а) 3 раза; б) 5 раз; в) 6 раз; г) 8 раз.

1003. Найдите двузначное число, которое в 2,5 раза больше произведения его цифр.

1004. Найдите двузначное число, которое в 4 раза больше суммы его цифр и вдвое больше произведения его цифр. Решите задачу, не используя первой части её условия.

1005. Если некоторое двузначное число умножить на сумму его цифр, то получится 370. Найдите это число.

1006. Есть трубы длиной 7 и 8 м. Сколько надо взять таких труб, чтобы проложить трубопровод длиной 67 м?

1007. Мальчик имеет монеты стоимостью 2 и 5 к. Как он может без сдачи заплатить 37 к.?

1008. Конфеты расфасованы в коробки по 200 и 300 г. Сколько надо взять таких коробок, чтобы было 3 кг конфет?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1009. Постройте график функции $y = -1{,}5x + 2$.

1010. Докажите тождество двумя способами:

а) $4a^4 + 1 = (2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1)$;

б) $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$.

1011. При каких условиях уравнение $(a - 1)\,x = 3a - 3$ имеет бесконечно много решений?

1012. Существуют ли такие значения a, при которых уравнение $3x + 4 = a$ не имеет решений?

§25. ГРАФИК ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассмотрим уравнение $3x - 2y = 6$. Давая переменной x значения $-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, найдём соответствующие значения переменной y. Будем иметь решение данного уравнения: $(-2; -6), (-1; -4{,}5), (0; -3), (1; -1{,}5), (2; 0), (3; 1{,}5), \dots$.

Если на координатной плоскости обозначить соответствующие этим парам точки, то окажется, что все они размещены на одной прямой (рис. 89). Эту прямую (рис. 90) называют *графиком* данного уравнения.

Выразим из уравнения $3x - 2y = 6$ его переменную y через x:

$$2y = 3x - 6,\ \text{отсюда}\ y = \frac{3}{2}x - 3.$$

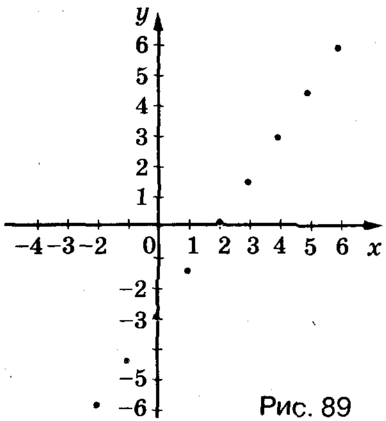


Рис. 89

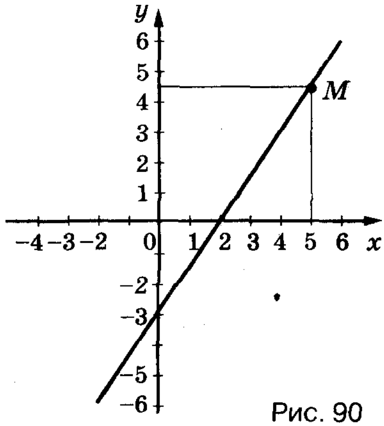


Рис. 90

Это функция, график которой изображён на рисунке 90. Вообще, если $b \neq 0$, то из уравнения $ax + by = c$ переменную y можно выразить через x. Получим равенство $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, являющееся формулой линейной функции. А её график — прямая.

График каждого уравнения первой степени с двумя переменными — прямая. И каждая прямая координатной плоскости — график некоторого линейного уравнения с двумя переменными.

Каждая точка графика уравнения имеет координаты, удовлетворяющие данное уравнение. Например, точка M графика уравнения $3x - 2y = 6$ имеет абсциссу 5 и ординату 4,5 (см. рис. 90). Эти значения x и y удовлетворяют данное уравнение: $3 \cdot 5 - 2 \cdot 4{,}5 = 6$.

График линейной функции одновременно является графиком некоторого линейного уравнения с двумя переменными. Например, уравнения $3x + 2y = 6$ и $y = -1{,}5x + 3$ равносильны, а равносильные уравнения имеют одинаковые графики.

Чтобы построить график уравнения первой степени с двумя переменными, достаточно найти два его решения, обозначить на координатной плоскости соответствующие им точки и провести через них прямую.

- Если в уравнении $ax + by = c$ один из коэфициентов (a или b) равен нулю, его график — тоже прямая.
- Если $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, то получим уравнение $by = c$, или $y = \frac{c}{b}$. Графиком такого уравнения является прямая, параллельная оси Ox.

• Если $b = 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, то имеем уравнение $ax = c$, или $x = \frac{c}{a}$. Графиком такого уравнения также является прямая, параллельная оси Oy.

• Если $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, то будем иметь уравнение

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0.$$

Такое уравнение удовлетворяет любая пара чисел. Его графиком является вся координатная плоскость.

• Если $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$, то будем иметь уравнение

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = c.$$

Такое уравнение не имеет ни одного решения.

Хотите знать ещё больше?

Известно, что две прямые на плоскости могут пересекаться, быть параллельными или совпадать. Так же могут располагаться на координатной плоскости и графики двух уравнений первой степени с двумя переменными (рис. 91).

Взаимное расположение графиков уравнений

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ и } a_2x + b_2y = c_2$$

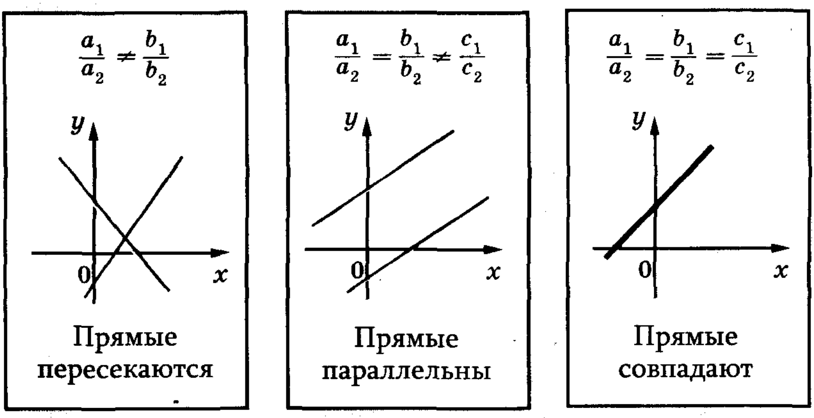


Рис. 91

Проверьте себя

1. Приведите пример уравнения первой степени с двумя переменными.
2. Что является графиком уравнения первой степени с двумя переменными? Как его построить?
3. Приведите пример линейного уравнения с двумя переменными.
4. Каким может быть график линейного уравнения с двумя переменными?

Выполним вместе!

1. Постройте график уравнения:

а) $0x + 2y = 8$; б) $3x + 0y = 6$;

в) $0x + 0y = 0$; г) $0x + 0y = 7$.

Решение. Уравнению а) удовлетворяет каждая пара чисел (c; 4), где c — произвольное число. График этого уравнения — прямая, параллельная оси x, проходящая через точку $A(0; 4)$ (рис. 92).

Бесконечно много решений уравнения б) — множество пар (2; p), где p — произвольное число. График этого уравнения — прямая, параллельная оси y (рис. 93).

Уравнение в) удовлетворяет каждая пара чисел, график этого уравнения — вся координатная плоскость.

Уравнение г) не имеет ни одного решения, его график — пустое множество.

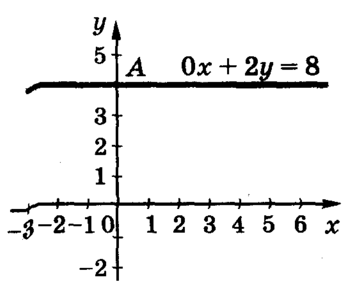


Рис. 92

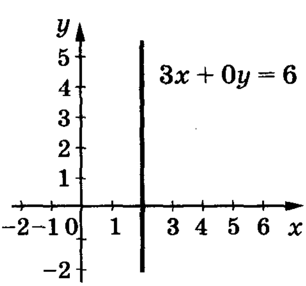


Рис. 93

Выполните устно

1013. Сколько решений имеет уравнение:
а) $0x + 0y = 20$; б) $0x + 0y = 0$; в) $0x + 2y = 0$;
г) $9x + 0y = 18$; д) $x + y = 0$; е) $x - y = 1$?

1014. Графиком какой функции является график уравнения $2x + 5y = 8$?

1015. Чем отличается график функции $y = 0,5x - 2$ от графика уравнения $x - 2y = 4$?

1016. Проходит ли через начало координат график уравнения:
а) $3x - 2y = 0$; б) $2x - 3y = 7$; в) $3(x - 4) = 4(y - 3)$?

1017. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика уравнения:
а) $x - 5y = 10$; б) $3x + 4y = 24$;
в) $6x + y = 0$; г) $2x - 4y = -1$.

Уровень А

1018. Принадлежит ли точка $A(-3; 2)$ графику уравнения:
а) $5x + 12y = 9$; б) $2x + 3y = x$; в) $5(x + 3) = 4(y - 2)$?

1019. Найдите пять решений уравнения $3x + 4y = 8$ и обозначьте соответствующие им точки на координатной плоскости. Как расположены эти точки?

1020. Постройте график уравнения:
а) $x + y = 4$; б) $2x + y = 6$; в) $3x + 2y = 0$.

1021. Постройте график уравнения:
а) $2x + y = 5$; б) $3x - 2y = 3$; в) $x + 3y = 0$;
г) $x - \frac{1}{2}y = 1$; д) $x - y = 0$; е) $1,5x + 2y = 0$.

1022. Точка с абсциссой 2,5 принадлежит графику уравнения $7x - 2y = 12,5$. Найдите ординату этой точки.

1023. Точка с ординатой 1,5 принадлежит графику уравнения $5x + 4y = 16$. Найдите абсциссу этой точки.

1024. На графике уравнения $0,6x + y = 2,2$ взята точка. Какова ордината этой точки, если её абсцисса равна:
а) -8; б) -3; в) 2; г) 7?

1025. Найдите абсциссу точки, взятой на прямой, являющейся графиком уравнения $11x - 4y = 80$, если её ордината равна:
а) -31; б) -20; в) $-3{,}5$; г) 2.

1026. Чему равно значение c, если известно, что график уравнения $2x + 5y = c$ проходит через точку:
а) $A(3; 1)$; б) $B(-5; 2)$; в) $C(-3; 4)$; г) $D(-2; -1)$?

1027. Каким должет быть коэффициент a уравнения $ax - 4y = 12$, чтобы график этого уравнения проходил через точку:
а) $M(10; 2)$; б) $N(-1; -1)$; в) $P(2; -3)$; г) $Q(6; 6)$?

1028. При каком значении b график уравнения $6x + by = 0$ проходит через точку:
а) $N(2; 3)$; б) $O(0; 0)$; в) $P(-4; 8)$; г) $R(-3; -2)$?

1029. При каком условии график функции $y = 1{,}5x + c$ является графиком уравнения $3x - 2y = 4$?

1030. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика уравнения:
а) $3x + 2y = 6$; б) $x + 5y = 10$;
в) $3x - 2y = 6$; г) $-x - 5y = 10$.

1031. Постройте в одной координатной плоскости графики уравнений $x - y = 3$ и $3x + y = 1$. Найдите координаты точки пересечения графиков.

1032. Постройте в одной координатной плоскости графики уравнений $2x + 3y = 5$ и $2x + 3y = 10$.

1033. Постройте в одной координатной плоскости графики уравнений $5x - y = 7$ и $10x - 2y = 14$.

Уровень Б

1034. Постройте в одной координатной плоскости графики уравнений и найдите координаты точки их пересечения:
а) $x + y = 5$ и $x - y = -1$; б) $2x - y = 6$ и $4x - 3y = 12$;
в) $2x + 3y = -9$ и $x + 3y = -6$;
г) $4x - 5y = 0$ и $2x - 5y = -10$.

1035. Постройте в одной координатной плоскости графики уравнений:
а) $4x + 5y = 20$ и $-4x + 5y = 20$; б) $2x + 3y = 6$ и $2x - 3y = 6$;
в) $5x - 2y = 10$ и $10x - 4y = 20$;
г) $-3x + 2y = 6$ и $-3x + 2y = -6$.

1036. Докажите, что график уравнения $5x + 6y = 13$ не проходит через начало координат.

1037. Докажите, что ордината каждой точки графика уравнения $0x + 3y = 2$ не отрицательна.

1038. Постройте график уравнения:

а) $0x + 5y = 10$; б) $3x + 0y = 9$; в) $x - y = 0$.

1039. Что является графиком уравнения:

а) $2x + 0y = 0$; б) $0x + 0y = 0$; в) $0x + 0y = 13$?

1040. Постройте график уравнения:

а) $x + 0y = 4$; б) $0 \cdot x + 3y = 6$; в) $2x = 6$; г) $0 \cdot x - y = 3$;
д) $2x + 0 \cdot y = 4$; е) $-y = 1$; ё) $x = 0$; ж) $y = 0$.

1041. Для каждого из случаев а—г составьте три разных уравнения, графики которых проходят через одну ту же точку A:

а) $A(4; 3)$; б) $A(-2; 4)$; в) $A(0; -3)$; г) $A(1; 0)$.

1042. Составьте уравнение, график которого проходит через начало координат и точку:

а) $X(2; 2)$; б) $Y(-5; 2)$; в) $Z(-4; -6)$; г) $T(3; -1)$.

1043. Составьте уравнение, график которого пересекает оси координат в точках:

а) $A(-3; 0)$ и $B(0; 1)$; б) $M(4; 0)$ и $N(0; 5)$;
в) $P(0; -3)$ и $Q(3; 0)$; г) $C(0; -4)$ и $D(-2; 0)$.

1044*. Составьте уравнение, графики которых изображены на рисунке 94:

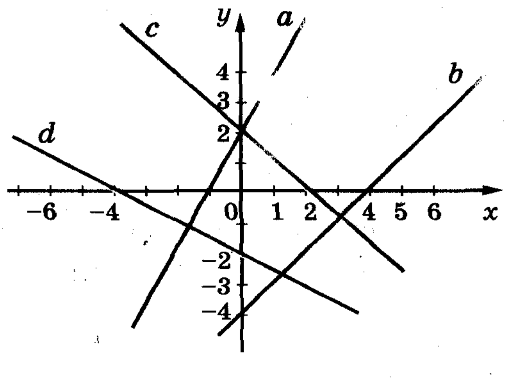


Рис. 94

1045. Составьте уравнение, график которого проходит параллельно графику уравнения $2x - y = 0$ через точку:

а) $K(4; 2)$; б) $L(0; 5)$; в) $M(-3; 0)$; г) $N(2; -1)$.

1046*. Постройте график уравнения:

а) $|x| - y = 0$; б) $|x| + y = 0$; в) $x - |y| = 0$; г) $x + |y| = 0$.

1047*. Верно ли, что графиком уравнения $|x - 2| + |y - 3| = 0$ является одна точка $K(2; 3)$? А уравнения $|x - 2| = |y - 3|$?

Постройте график уравнения **(1048—1049).**

1048*. а) $|y| = 2 - x$; б) $|y| = 3x - 4$; в) $|y| + |2 - x| = 0$.

1049*. а) $x^2 - 9y^2 = 0$; б) $4x^2 - y^2 = 0$; в) $(y-2)^2 = (x+1)^2$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1050. Два автомобиля, расстояние между которыми 350 км, сближаются со скоростью 120 км/ч. Каково расстояние будет между ними: а) через полчаса; б) через 2 ч?

1051. На сколько процентов число 3,2 больше числа 2,5?

1052. Решите уравнение: а) $x^2 = 64$; б) $(x - 2)^2 = 25$.

§26. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Задача. 4 кг конфет и 3 кг пряников стоят 26 грн., а 6 кг конфет и 2 кг пряников — 34 грн. Сколько стоит 1 кг конфет и 1 кг пряников?

Эту задачу можно решить, составив уравнение с одной переменной. (Выполните это!) А можно воспользоваться другим способом.

Пусть 1 кг конфет стоит x грн., а 1 кг пряников — y грн. Тогда

$$4x + 3y = 26 \quad \text{и} \quad 6x + 2y = 34.$$

Имеем два уравнения с двумя переменными. Надо найти такие значения переменных x и y, которые удовлетворяют одновременно и первое, и второе уравнения, то есть обращающие каждое из уравнений в верное равенство. Другими словами: надо найти общее решение обоих уравнений, или решить систему данных уравнений.

Если требуется найти общие решение двух или нескольких уравнений, говорят, что эти уравнения образуют ***систему***. Записывают систему уравнений, объединяя их фигурной скобкой:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 26, \\ 6x + 2y = 34. \end{cases}$$

Решением системы уравнений называют общее решение всех её уравнений.

Например, пара чисел (3; 2) является решением системы

$$\begin{cases} x + 3y = 9, \\ 2x - y = 4, \end{cases} \qquad (*)$$

то есть $3 + 3 \cdot 2 = 9$ и $2 \cdot 3 - 2 = 4$.

Решить систему уравнений — это означает найти множество всех её решений.

Решать системы уравнений можно ***графическим способом***. Решим, например, систему (*). Для этого построим на одной координатной плоскости графики обоих её уравнений (рис. 95). Координаты каждой точки графика уравнения $x + 3y = 9$ удовлетворяют это уравнение. Координаты каждой точки графика уравнения $2x - y = 4$ удовлетворяют это уравнение. Построенные графики пересекаются в точке A (3; 2). Поэтому пара чисел (3; 2) — единственное решение данной системы уравнений.

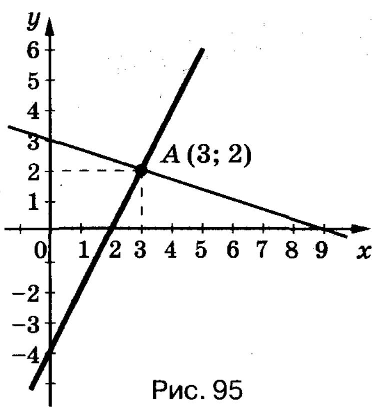


Рис. 95

Графическим способом обычно находят приближённые решения. А подставив значения $x = 3$ и $y = 2$ в данную систему уравнений, убедимся, что (3; 2) — точное решение.

Каждая ли система двух уравнений имеет только одно решение? Нет. Например, система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 6x - 4y = 12 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений. Ведь графики обоих этих уравнений — одна и та же прямая (убедитесь в этом самостоятельно). Следовательно, координаты каждой точки этой прямой, например $(-2; -6)$, $(-1; -4{,}5)$, $(0; -3)$, $(1; -1{,}5)$, $(2; 0)$, ... — решения данной системы уравнений.

Есть системы уравнений, которые не имеют ни одного решения. Графики таких уравнений — параллельные прямые (см. рис. 91).

Хотите знать ещё больше?

Вы уже знаете, что уравнение и функции — удобные математические модели многих задач. Системы уравнений также используют как математические модели. Иногда, исходя из условия задачи, систему уравнений с двумя переменными легче составить, чем одно уравнение. И решать её бывает легче, чем уравнение с одной переменной, соответствующее условию той же задачи.

Существуют системы уравнений с тремя и более переменными (см. задачи 1150—1154).

Проверьте себя

1. Приведите пример системы уравнений.
2. Что такое «решение системы уравнений с двумя переменными»?
3. Что значит «решить систему двух уравнений»?
4. Как решить систему уравнений графическим способом?
5. Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными?

✔ Выполним вместе!

1. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 7y = 5, \\ 7x - 2y = 5? \end{cases}$$

✔ Решение. Так как $2 : 7 \neq (-7) : (-2)$, то эта система имеет одно решение (см. рис. 91). Проверьте графически.

2. Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} x - 0{,}5y = 2, \\ 2x - y = -2. \end{cases}$$

✔ Решение. Найдём координаты точек пересечения графиков уравнений системы с осями координат.

x	0	2
	−4	0

	0	−1
y	2	0

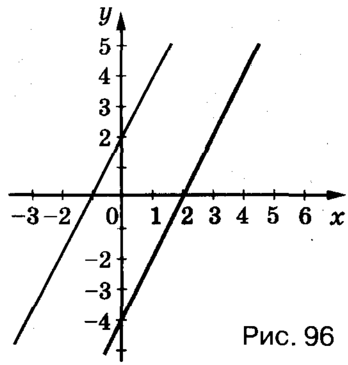


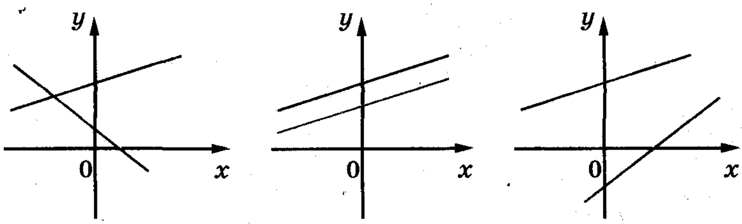
Рис. 96

Построим графики данных уравнений (рис. 96). Эти графики — параллельные прямые, не имеющие общих точек.

Ответ. Система уравнений решений не имеет.

Выполните устно

1053. Сколько решений имеет система уравнений, графики которых изображены на рисунке 97?



а *б* *в*

Рис. 97

1054. Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ 9x + 12y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 4x + 2y = 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 5y = 4, \\ -2x + 10y = -8? \end{cases}$

Уровень A

1055. Является ли пара чисел (2; −1) решением системы:

а) $\begin{cases} x+y=1, \\ x-2y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=1, \\ 4x-3y=11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-y=3, \\ 2x+y=3? \end{cases}$

1056. Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений $x+2y=0$ и $x-y=-6$. Покажите, что координаты этой точки являются решением данных уравнений.

1057. Является ли пара чисел (−1; 3) решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=2, \\ 3x-y=-6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+y=0, \\ x+2y=5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x-2y=-9, \\ 3x+2y=-3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-y=-4, \\ x-2y=-7? \end{cases}$

1058. Составьте систему уравнений, имеющую решение:
а) (3; 4); б) (2; −5); в) (0; 3); г) (−2; 0).

Решите графически систему линейных уравнений **(1059—1063)**.

1059. а) $\begin{cases} x+y=6, \\ x-y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=-2, \\ x+3y=-10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x+y=4, \\ 3x-y=1. \end{cases}$

1060. а) $\begin{cases} x-y=0, \\ 3x-y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=0, \\ 4x-y=6. \end{cases}$

1061. а) $\begin{cases} 2x-y=2, \\ 3x-y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2. \end{cases}$

1062. а) $\begin{cases} 4x-y=5, \\ 3x+2y=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x+4y=13, \\ 3x+5y=13. \end{cases}$

1063. а) $\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=6, \\ 4x+y=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=-2, \\ 3x-3y=6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x - 2y = -3, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -3x + 5y = 1, \\ 4x - y = 10. \end{cases}$

1064. Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ 8x + 9y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 4y = 1, \\ 2x - 8y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 8, \\ y = 15; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -x + 5y = 7, \\ 2x - 10y = -14? \end{cases}$

1065. Не строя графиков, докажите, что система уравнений не имеет решений:

а) $\begin{cases} 8x + 2y = 15, \\ 8x + 2y = 35; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = 8, \\ 3x - y = 16. \end{cases}$

1066. Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} 6x + 10y = 36, \\ 3x + 5y = 18? \end{cases}$$

Найдите три любых её решения.

Уровень Б

1067. Решите графически систему:

а) $\begin{cases} 0{,}5x + y = 2, \\ -0{,}4x + y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}5x - y = 3, \\ 0{,}3x + y = -1{,}2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}6y = 1{,}8, \\ x - 0{,}5y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 1{,}1x + y = 0{,}1, \\ 1{,}2x - y = 2{,}2. \end{cases}$

1068. Из данных уравнений составьте и решите все возможные системы:

$3x - 2y = -6$; $x + 2y = -2$; $5x + 2y = 22$.

1069. Решите систему графически и проверьте, является ли полученное решение точным:

а) $\begin{cases} 5x - 4y = 1, \\ 12x + 22y = 33; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 11x - 20y = 55. \end{cases}$

Удовлетворяет ли систему уравнений а) пара чисел

$$\left(\frac{77}{79}; \frac{153}{158}\right)?$$

Удовлетворяет ли систему уравнений б) пара чисел

$$\left(3\frac{2}{41}; -1\frac{3}{41}\right)?$$

1070. Для каждого из случаев а—г составьте уравнение с двумя переменными, которое в системе с данным: 1) имеет бесконечно много решений; 2) не имеет ни одного решения; 3) имеет одно решение.

а) $3x - y = 5$; б) $3x - 2y = 2$; в) $5x + 4y = 1$; г) $x + 3y = -4$.

1071. При каком значении a система имеет: 1) одно решение; 2) бесконечно много решений? Определите это для каждой из систем а) и б).

а) $\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x - ay = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x + 2y = 11, \\ ax + 4y = 22. \end{cases}$

1072. Для каждого из случаев а) и б) определите, при каком значении b система: 1) не имеет решений; 2) имеет одно решение.

а) $\begin{cases} bx + 2y = 7, \\ 3x - y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 8y = 5, \\ 2x + by = -1. \end{cases}$

1073. Имеет ли решение система:

а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3, \\ 2x = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + y = 3, \\ 4y = 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + 7y = 39, \\ 3x - y = 1, \\ 11x - 4y = 1? \end{cases}$

1074*. При каком значении k система уравнений имеет решение:

а) $\begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 5x - 3y = 2, \\ 2x + ky = 25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} k(x + y) + 5x = 2, \\ 9x + 11y = 7, \\ 4x - 3y = 11? \end{cases}$

1075*. Решите графически систему:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 2x - y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1076. Вычислите значение выражения:
а) $3x^3 - 2x^2 - x(3x^2 + 2x - 5)$, если $x = 5$;
б) $(8 - a^3)a + (a^2 - 8a + 5)a^2$, если $a = 0{,}2$.

1077. Выполните умножение двучленов:
а) $x + 3$ и $x - 2$; б) $a - 5$ и $a + 4$;
в) $m + n$ и $m - n$; г) $3 - z$ и $5 + z$.

1078. Запишите в виде многочлена число, имеющее a сотен, b десятков и c единиц.

1079. Какое число от умножения на 7 увеличивается на 30?

1080. Какое число от деления на 6 уменьшается на 12?

1081. Чтобы получить бронзу, берут 17 частей меди, 2 части цинка и одну часть олова. Сколько килограммов меди, цинка и олова следует взять, чтобы изготовить 200 кг бронзы?

§27. СПОСОБ ПОДСТАНОВКИ

Графический способ решения систем уравнений громоздок и даёт, как правило, приближённые решения. Поэтому чаще системы решают другими способами, в частности *способом подстановки*.

Пусть, например, надо решить систему

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ x + 3y = 9. \end{cases}$$

Выразим из второго её уравнения переменную x через y:

$$x = 9 - 3y.$$

Так как первое уравнение системы должны удовлетворять те же значения переменных, что и второе, подставим найденное выражение $9 - 3y$ вместо x в первое уравнение. Получим уравнение с одной переменной:

$$2(9 - 3y) - y = 4,$$

отсюда $18 - 6y - y = 4,\ y = 2.$

Подставим значение $y = 2$ в уравнение $x = 9 - 3y$ и найдём соответствующее значение переменной x:

$$x = 9 - 3 \cdot 2 = 3.$$

Следовательно, решением системы является пара чисел (3; 2).

Чтобы решить систему уравнений способом подстановки, надо:

1) выразить из какого-нибудь её уравнения одну переменную через другую;

2) подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;

3) решить получившееся уравнение с одной переменной;

4) найти соответствующее значение второй переменной.

Этим способом можно решать любую систему линейных уравнений с двумя переменными. Однако удобнее, если коэффициент при какой-либо переменной в уравнении равен 1.

Пример. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x = 2(y + 6), \\ 6x + 3y = 1 + x. \end{cases}$$

Решение. Заменим данные уравнения линейными, получим систему:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ 5x + 3y = 1; \end{cases}$$

$$3x = 2y + 12,\ x = \frac{2}{3}y + 4,\ 5\left(\frac{2}{3}y + 4\right) + 3y = 1,$$

$$\frac{10}{3}y + 20 + 3y = 1,\ \frac{19}{3}y = -19,\ y = -3,\ x = \frac{2}{3}(-3) + 4 = 2.$$

Ответ. (2; –3).

Хотите знать ещё больше?

Иногда можно подставлять из одного уравнения системы во второе не значение отдельной переменной, а значение целого выражения. **Например.** Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot (2x - 4y) - y = 44, \\ 2x - 4y = 14, \end{cases}$$

можно значение виражения $2x - 4y$ из второго уравнения подставить в первое:

$$3 \cdot 14 - y = 44, \quad y = 42 - 44, \quad y = -2.$$

Тогда

$$2x - 4 \cdot (-2) = 14, \quad 2x = 14 - 8, \quad x = 3.$$

Ответ. $x = 3, y = -2$.

Проверка. $3 \cdot (6 + 8) + 2 = 42 + 2 = 44,$

$$2 \cdot 3 - 4(-2) = 6 + 8 = 14.$$

Найденная пара чисел $(3; -2)$ удовлетворяет данную систему уравнений.

Проверьте себя

1. Приведите примеры системы уравнений с двумя переменными.
2. Что такое «решение системы уравнений с двумя переменными»?
3. Какие вы знаете способы решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными?
4. Как решают систему двух уравнений с двумя переменными способом подстановки ?

Выполним вместе!

1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 6, \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 2. \end{cases}$$

Решение. Выразим из второго уравнения значение дроби $\frac{y}{3}$ через x и подставим его в первое уравнение.

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{2} - 2, \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 2 = 6, \quad x - 2 = 6, \quad x = 8.$$

Тогда $\frac{y}{3} = \frac{8}{2} - 2, \quad \frac{y}{3} = 2, \quad y = 6.$

Ответ. (8; 6).

Выполните устно

1082. Выразите переменную y через x из уравнения:

а) $2x - y = 3$; б) $5x + y = 0$; в) $x - 2y = 0$.

...разите переменную x через y из уравнения:
...$- y = 2$; б) $x + 3y = 5$; в) $2x + 5y = 0$.

...ровень А

1084. Выразите переменную y через x из уравнения:
а) $3x - y = 8$; б) $5x + 2y = 7$;
в) $0{,}5x - 0{,}3y = 1{,}5$; г) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 5$.

1085. Выразите переменную x через y из уравнения:
а) $2x + 4y = -7$; б) $12x - 5y = 11$;
в) $2{,}5x + y = 1{,}5$; г) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}y = \frac{2}{5}$.

Решите способом подстановки систему уравнений (1086–1099).

1086. а) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 5y = 26; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 4y = 55, \\ 7x - y = 56. \end{cases}$

1087. а) $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 3x + 8y = 19; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y = 27, \\ x + 5y = 35. \end{cases}$

1088. а) $\begin{cases} 3x + 4z = 85, \\ 5x + 4z = 107; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 7z = 101, \\ 7x - z = 55. \end{cases}$

1089. а) $\begin{cases} 15y - 8z = 29, \\ 3y + 2z = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 8t = 59, \\ 6x + 5t = 107. \end{cases}$

1090. а) $\begin{cases} y - 2z = 6, \\ y + 2z = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2z + 3y = 216, \\ z + y = 82. \end{cases}$

1091. а) $\begin{cases} 2p + q = 11, \\ 5p - 2q = 41; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6a - 3b = 4, \\ 2a - b = 5. \end{cases}$

1092. а) $\begin{cases} 9x + 2y - 4 = 0, \\ 8x + y - 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5u + 7v + 3 = 0, \\ 10u - v + 6 = 0. \end{cases}$

1093. а) $\begin{cases} 4x - 3y = 8, \\ 8x - 6y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}5x - y = 0{,}5, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$

1094. а) $\begin{cases} 14u - 9v = 24, \\ 7u - 2v = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 4y = 13, \\ 3x + 5y = 13. \end{cases}$

1095. а) $\begin{cases} 3a - 5b = 13, \\ 2a + 7b = 81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2a - 7b = 8, \\ 4a - 9b = 19. \end{cases}$

1096. а) $\begin{cases} 6x - 4y = 5, \\ 8x - 3y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 12y + 15x = 8, \\ 16y + 9x = 7. \end{cases}$

1097. а) $\begin{cases} 4(x + 2y) = 5x + 6, \\ 3(2x - y) = 24y + 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5(x - 3y) = 2x + 7, \\ 3(x + 6y) = 9y + 15. \end{cases}$

1098. а) $\begin{cases} 5x - 2 = 4(x + 2y) - 8, \\ 3(2x - y) + 6 = 24y + 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3 = 5(x - y), \\ 2(3x - 1) = 4y - 5. \end{cases}$

1099. а) $\begin{cases} 4(x - 3z) + 33z = 50, \\ 5(x + 2z) - 3x = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 7 = 5(x - t), \\ 3(x + 6t) - 9t = 15. \end{cases}$

Уровень Б

Найдите решение системы (1100—1102).

1100. а) $\begin{cases} 3{,}5x + 0{,}5y = 0{,}5, \\ x + 0{,}25y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}2x + y = 7, \\ 1{,}5x + y = 13{,}5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}6x + 0{,}8y = 1, \\ x + 4y = 45; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0{,}5x - y = 1{,}5, \\ 0{,}3x - 0{,}4y = 1. \end{cases}$

1101. а) $\begin{cases} 19x - 21y = 17, \\ 5x + 14y = 24; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x - 33y = 19, \\ 12x + 55y = 19; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + 1 = 5(3 - 2y), \\ 4(x - 1) = 2(8{,}5 - 5y); \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6(x - 2y) = 7 - 9y, \\ 8x + 3y = 5(2x + 1). \end{cases}$

1102. а) $\begin{cases} \dfrac{7 + x}{2} = \dfrac{y + 13}{3}, \\ 5x - 3y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{5x - 3y}{4} = \dfrac{x - 5y}{3}, \\ 7x + y = 12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{5}=\dfrac{y-2}{4}, \\ x-2y=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}=\dfrac{2y+7}{5}, \\ 4x-y=-9. \end{cases}$

Решите систему уравнений (**1103–1106**).

1103. а) $\begin{cases} u+\dfrac{1}{3}(u+v-3)=14, \\ \dfrac{1}{3}v-\dfrac{1}{6}(u+v)=\dfrac{5}{6}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7(2x+y)-5(3x+y)=6, \\ 3(x+2y)-2(x+3y)=-6. \end{cases}$

1104. а) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x+y)-\dfrac{1}{4}(x-y)=5, \\ \dfrac{1}{12}(x+y)+\dfrac{1}{3}(x-y)=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1}{4}(y-1)-\dfrac{1}{3}(x+1)=2, \\ \dfrac{1}{4}(x+3)-\dfrac{1}{3}(y+1)=-4. \end{cases}$

1105. а) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{x-y}{3}=10, \\ \dfrac{x+y}{8}+\dfrac{x-y}{6}=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{4}=3+\dfrac{3x-5y}{2}, \\ \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}y=7-\dfrac{1}{4}(x-2y). \end{cases}$

1106. а) $\begin{cases} 0{,}2a+4b=-5-0{,}8a, \\ 2{,}5a+0{,}5b=1-\dfrac{1}{2}b; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}3x-2{,}8y=0{,}7(3-y), \\ 1{,}2x+1{,}1y=3-17{,}5y. \end{cases}$

1107. Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений, не выполняя построений:

а) $x+y=37$ и $x-y=5$; б) $2x-3y=16$ и $x+2y=1$;

в) $x+2y=8$ и $x-2y=2{,}5$; г) $4x-7y=4$ и $20x+3y=1$.

1108*. ***Задача из французского учебника XVI в.*** Решите систему:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}z=14, \\ y+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}z=8, \\ z+\dfrac{1}{5}x+\dfrac{1}{5}y=8. \end{cases}$$

1109*. ***Задача Е. Безу (1730–1783).*** Решите систему:

$$\begin{cases} 5x+3y=65, \\ 2y-z=11, \\ 3x+4z=57. \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1110. Какой многочлен нужно прибавить к $3y^4 - 2y^2 + 5$, чтобы получить многочлен $5y^4 + y^3 - 2y^2 + 8$?

1111. Какой многочлен нужно вычесть из $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, чтобы получить многочлен $3x + 1$?

Найдите произведение многочленов (1112—1114).

1112. а) $(2a - n)(4a^2 + 2an + n^2)$; б) $(1 + c + c^2)(1 - c)$.

1113. а) $(a^3 - 1)(a^6 + a^3 + 1)$; б) $(m - 1)(m^2 + 2m + 1)$.

1114. а) $(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$; б) $(x^3 - 2a)(x^6 + 2x^3a + 4a^2)$.

1115. Вычислите значение выражения:

а) $2^{13} \cdot 0{,}5^{13}$; б) $0{,}5^{18} \cdot 2^{18}$; в) $25^7 \cdot 0{,}04^7$; г) $5^{33} \cdot 0{,}2^{33}$.

§28. СПОСОБ СЛОЖЕНИЯ

Дана система уравнений:

$$\begin{cases} 8x - 3y = 34, \\ 5x + 3y = 31. \end{cases}$$

Сначала решим её способом подстановки. Выразим из первого уравнения переменную y через x и подставим полученное выражение вместо y во второе уравнение:

$$y = \frac{1}{3}(8x - 34), \quad 5x + 3 \cdot \frac{1}{3}(8x - 34) = 31,$$

$$5x + 8x = 34 + 31.$$

Дальше уже несложно закончить решение системы.

А можно ли уравнение $5x + 8x = 34 + 31$ получить другим способом? Да, для этого достаточно сложить левые и правые части уравнений системы. Так как коэффициенты при y — противоположные числа, то члены с переменной y сокращаются. Поэтому, решая любую подобную систему, вместо подстановки можно выполнять почленно сложение уравнений. Оформлять решение будем, например, так:

$$\begin{array}{ll} \begin{cases}8x-3y=34,\\5x+3y=31.\end{cases} & 8\cdot 5-3y=34, \\ \hline 13x=65, & 40-3y=34, \\ x=5. & 3y=6, \\ & y=2. \end{array}$$

Ответ. (5; 2).

Таким образом решают системы, в которых коэффициенты при какой-либо переменной — противоположные числа. А к такому виду можно свести любую систему линейных уравнений с двумя переменными. Пусть, например, дана система

$$\begin{cases}3x+7y=31,\\2x+9y=12.\end{cases}$$

Умножим обе части её первого уравнения на 2, а второго — на −3; получим систему, в которой коэффициенты при переменной x — противоположные числа. Уравнения полученной системы равносильны уравнениям данной. Следовательно, она имеет такие же решения, что и данная.

Оформлять решение можно таким образом:

$$\begin{cases}3x+7y=31,\\2x+9y=12.\end{cases}\left|\begin{array}{c}2\\-3\end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} \begin{cases}6x+14y=62,\\-6x-27y=-36.\end{cases} \\ \hline -13y=26, \\ y=-2. \end{array}$$

$2x+9\cdot(-2)=12,\quad 2x=30;\quad x=15.$

Решение. (15; −2).

Проверьте себя

1. Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными?
2. Какие вы знаете способы решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными?
3. Как решают систему двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения?

Хотите знать ещё больше?

Способом сложения можно решить не только системы линейных уравнений, а и многих нелинейных.

Пример.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 5, \\ 2x + y^2 = 7. \end{cases}$$

Решение. Выполнив сложение левых и правых частей данных уравнений, получим:

$$4x = 12, \text{ или } x = 3.$$

Значит, $2 \cdot 3 - y^2 = 5$, $y^2 = 1$, отсюда $y_1 = 1$, $y_2 = -1$.

Проверка показывает, что найденные пары чисел $(3;\ 1)$ и $(3;\ -1)$ удовлетворяют данную систему уравнений.

Ответ. Система уравнений имеет два решения: $(3;\ 1)$ и $(3;\ -1)$.

✔ Выполним вместе!

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{5(x-y)}{3} = 13, \\ -\dfrac{7x - 3y}{5} + 6x = 19. \end{cases}$$

✔ Решение. Умножим все члены первого уравнения на 3, а второго — на 5. Упростим полученные уравнения:

$$\begin{cases} 6x + 5x - 5y = 39, \\ -7x + 3y + 30x = 95; \end{cases} \qquad \begin{cases} 11x - 5y = 39, \\ 23x + 3y = 95. \end{cases}$$

Чтобы воспользоваться способом сложения, ещё раз умножим все члены первого уравнения на 3, а второго — на 5 и почленно сложим их:

$$\begin{cases} 11x - 5y = 39, \\ 23x + 3y = 95; \end{cases} \begin{array}{|l} 3 \\ 5 \end{array} \qquad \begin{cases} 33x - 15y = 117, \\ 115x + 15y = 475; \end{cases}$$

$$148x = 592;$$

$x = 4$, тогда $44 - 5y = 39$, $5y = 5$, $y = 1$.

Ответ. $(4;\ 1)$.

Выполните устно

1116. Сложите почленно левые и правые части уравнений: а) $3x + 2y = 7$ и $5x - y = 12$; б) $x - 8y = 15$и $4x - 3y = 2$.

1117. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y = 2, \\ 3x + 2y = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} a - c = 3, \\ 2a + c = 6. \end{cases}$

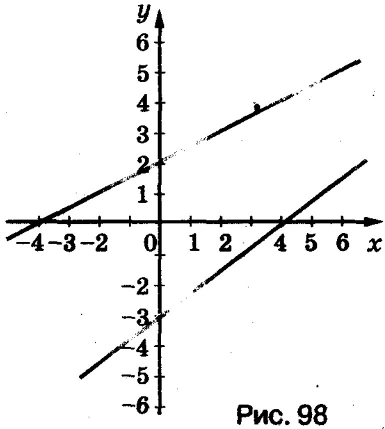


Рис. 98

1118. Сколько решений имеет система уравнений, графики которых — на рис. 98?

1119. Решите способом сложения систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 6, \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 2. \end{cases}$$

Уровень A

Решите способом сложения систему уравнений (1120—1129).

1120. а) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y = 18, \\ -x + 3y = 2. \end{cases}$

1121. а) $\begin{cases} 3x + 2y = 15, \\ 7x - 2y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 3y = 2, \\ 3x + 3y = 5. \end{cases}$

1122. а) $\begin{cases} 2x + 3y = 17, \\ 2x - 4y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3u - v = 26, \\ 13u + 3v = 66. \end{cases}$

1123. а) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 5y = 26; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 4y = 55, \\ 7x - y = 56. \end{cases}$

1124. а) $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 3x + 8y = 19; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y = 27, \\ x + 5y = 35. \end{cases}$

1125. а) $\begin{cases} 3x + 4z = 85, \\ 5x + 4z = 107; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 7z = 101, \\ 7x - z = 55. \end{cases}$

1126. а) $\begin{cases} 15y - 8z = 29, \\ 3y + 2z = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 8t = 59, \\ 6x + 5t = 107. \end{cases}$

1127. а) $\begin{cases} 14u - 9v = 24, \\ 7u - 2v = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 4y = 13, \\ 3x + 5y = 13. \end{cases}$

1128. а) $\begin{cases} 3a - 5b = 13, \\ 5a + 7b = 81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2a - 7b = 8, \\ 4a - 9b = 19. \end{cases}$

1129. а) $\begin{cases} 6x - 4y = 5, \\ 8x - 3y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 12y + 15x = 8, \\ 16y + 9x = 7. \end{cases}$

Решите относительно переменных x и y систему **(1130—1131).**

1130. а) $\begin{cases} 3x - 8y = a, \\ 4x + 8y = 20a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -5x + y = 10c, \\ 5x - 2y = 10c. \end{cases}$

1131. а) $\begin{cases} 3x + 7y = m, \\ 8x + 7y = n; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 4y = k, \\ 5x - 4y = p. \end{cases}$

1132. Решите всеми известными вам способами систему уравнений:

а) $\begin{cases} 8z + 3t = 7, \\ -4z - 5t = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3m - 2n = 2, \\ 5m + 8n = 26; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - y = 11, \\ 5x + 6y = 26; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x + 3y = 22, \\ -x + 7y = 10. \end{cases}$

1133. Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений:
а) $x - 2y = 1$ и $2x + y = 7$; б) $5x + 2y = 1$ и $4x - 7y = 18$.
Выполните проверку.

Уровень Б

Решите способом сложения систему уравнений (1134—1146).

1134. а) $\begin{cases} 19x - 21y = 17, \\ 5x + 14y = 24; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x - 33y = 19, \\ 12x + 55y = 19. \end{cases}$

1135. а) $\begin{cases} 5x - 2 = 4(x + 2y) - 8, \\ 3(2x - y) + 6 = 24y + 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3 = 5(x - y), \\ 2(3x - 1) = 4y - 5. \end{cases}$

1136. а) $\begin{cases} 10u + 7v = 51, \\ u - \frac{1}{5}v = 2\frac{2}{5}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}y = 0, \\ \frac{3}{4}x + \frac{2}{5}y = 10. \end{cases}$

1137. а) $\begin{cases} 0{,}1p + 0{,}2q = 0{,}3, \\ 0{,}4p + 0{,}5q = 0{,}9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}2x - 3{,}4y = 12, \\ 2{,}5x + 1{,}4y = 25. \end{cases}$

1138. а) $\begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = 5, \\ a - \frac{b}{2} = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{m}{3} - \frac{n}{3} = 0, \\ m - \frac{7n}{2} = 2. \end{cases}$

1139. а) $\begin{cases} \frac{1 - 3x}{4} - \frac{4 - 2y}{3} = 0, \\ 0{,}7 = 0{,}4y - 0{,}3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2x - 1}{6} - \frac{9 - 5y}{8} = 0, \\ 2x = 1{,}5y + 2{,}5. \end{cases}$

1140. а) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1, \\ \frac{2x - 1}{2} = \frac{3y - 1}{3} + \frac{5}{6}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{3} = 8, \\ \frac{x + y}{3} + \frac{x - y}{4} = 11. \end{cases}$

1141. а) $\begin{cases} 6(x - 1) - \frac{5y - 2x}{2} = 0, \\ \frac{14x}{5} - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + \frac{7(x - y)}{2} = 5, \\ 5(x - 1) + \frac{3x - 7y}{2} = 0. \end{cases}$

1142. а) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{3} = 2, \\ x + y - \frac{x - y}{6} = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{5x - 3}{7} + y = 10, \\ \frac{x + y}{4} - \frac{x - 5}{9} = 2. \end{cases}$

1143. а) $\begin{cases}1{,}5x-2{,}2y=0{,}1,\\4{,}2x-2{,}5y=7{,}6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2{,}5u-0{,}2(u-v)=2{,}3,\\3{,}7u-1{,}5(v-u)=5{,}2.\end{cases}$

1144. а) $\begin{cases}2{,}7x-3(x+y)=2{,}1,\\3{,}2x-2(y-x)=17{,}6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3{,}5y-0{,}2(2y-z)=31{,}2,\\5{,}2z+0{,}7(y-2z)=10{,}8.\end{cases}$

1145. а) $\begin{cases}\frac{1}{2}x-3\left(\frac{2}{3}y-x\right)=12,\\\frac{2}{3}x-2\left(\frac{1}{2}x-y\right)=\frac{2}{3};\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{2}{5}x-\frac{3}{4}y=y-8,\\\frac{1}{3}(x-3y)=3x-10.\end{cases}$

1146. а) $\begin{cases}4(3x-2)+2(7-4x)=20+2(y-3),\\5(2y+3)+2(6x-y)=3(5x-3)+31;\end{cases}$

б) $\begin{cases}5(x-2y)+33=2(4x-3)-2(3y-5),\\2(3x-5y)-3(x-5)=56-4(6+2y).\end{cases}$

Найдите решение системы уравнений (1147—1148).

1147. а) $\begin{cases}(x+3)^2-2y=x^2+13,\\6x+(y-1)^2=y(y-5);\end{cases}$

б) $\begin{cases}-10x+(y+4)^2=y^2+18,\\(2x-1)^2+7y=2x(2x+3).\end{cases}$

1148. а) $\begin{cases}x(x+3)+9=(x-y)(x+y)+y(y-3),\\26+3(2x-y)=9x-5(3x+2y);\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+3)^2-5+y(y-2)=x(x+3)+(y+1)^2,\\7(2x+3)-6x=9-4(2y-7).\end{cases}$

1149. Напишите уравнения прямых, графики которых изображены на рисунке 99.

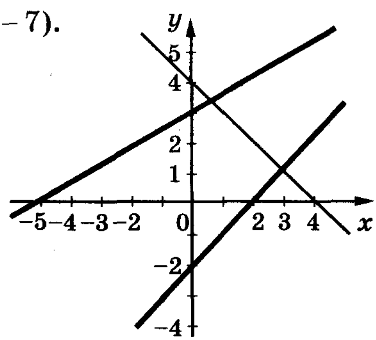


Рис. 99

Решите систему уравнений (1150—1152).

1150*. а) $\begin{cases} x+y=3, \\ x+z=4, \\ y+z=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=5, \\ x-z=2, \\ y-z=1. \end{cases}$

1151*. а) $\begin{cases} 2x+3y=11, \\ 3x+2z=13, \\ 3y+4z=29; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y-z=11, \\ x-y+z=1, \\ y+z-x=5. \end{cases}$

1152*. а) $\begin{cases} 7x+6y+7z=100, \\ x-2y+z=0, \\ 3x+y-2z=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-2z-3t=1, \\ x+4z+2t=7, \\ 3x-z+t=0. \end{cases}$

1153*. ***Задача из трактата XV в.*** Решите в целых положительных числах систему:

а) $\begin{cases} x+y+z=12, \\ 2x+y+\frac{1}{2}z=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=12, \\ 8x+5y+3z=60; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y+z=12, \\ 4x+3y+2z=36. \end{cases}$

1154*. ***Задача В. А. Лебега.*** Решите в целых положительных числах систему:

$$\begin{cases} 2x+3y+7z=131, \\ 2x+3y+8z=140. \end{cases}$$

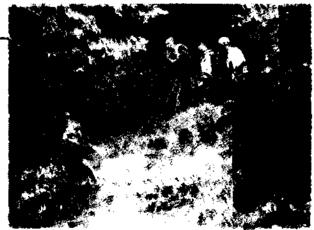
УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1155. Вычислите значение многочлена:
а) $x^2-12{,}8x+7{,}9$, если $x=12{,}8$;
б) $2y^2+8{,}6y-6{,}5$, если $y=-4{,}3$;
в) $19{,}7a+19{,}7c+10$, если $a=3{,}8$ и $c=6{,}2$;
г) $28{,}4x-28{,}4y+1{,}6$, если $x=2{,}37$ и $y=1{,}37$.

1156. Докажите, что сумма пяти последовательных натуральных чисел делится на 5. Может ли сумма четырёх последовательных натуральних чисел делиться на 4?

1157. Функция задана формулой $y=-\frac{6}{x}$. При каких значениях аргумента её значение равно: а) 12; б) −12?

§29. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СОСТАВЛЕНИЕМ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ



Многие задачи, особенно такие, в которых надо найти значения двух величин, удобно решать с помощью систем уравнений.

Задача 1. За 5 блокнотов и 6 тетрадей заплатили 6,9 грн. Сколько стоит один блокнот и одна тетрадь, если 4 блокнота дороже 3 тетрадей на 2,4 грн.?

Решение. Допустим, что блокнот стоит x грн., а тетрадь — y грн. За 5 блокнотов заплатили $5x$ грн., а за 6 тетрадей — $6y$ грн. Вместе за них заплатили 6,9 грн., следовательно,

$$5x + 6y = 6{,}9.$$

Так как 4 блокнота дороже 3 тетрадей на 2,4 грн., имеем ещё одно уравнение:

$$4x - 3y = 2{,}4.$$

Переменные x и y в обоих уравнениях обозначают одни и те же цены. Значит, надо решить систему этих двух уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 6{,}9, \\ 4x - 3y = 2{,}4; \end{cases} \Big|\, 2 \qquad \begin{cases} 5x + 6y = 6{,}9, \\ 8x - 6y = 4{,}8; \end{cases}$$

$$13x = 11{,}7;$$

$$x = 0{,}9;$$

$$4 \cdot 0{,}9 - 3y = 2{,}4; \quad 3y = 1{,}2; \quad y = 0{,}4.$$

Ответ. Блокнот стоит 90 к., тетрадь — 40 к.

Эту задачу можно решить также составлением уравнения с одной переменной. Любую задачу, которая решается составлением системы линейных уравнений, можно решить и с помощью уравнения с одной переменной. Только систему уравнений чаще составить легче, чем уравнение с одной переменной.

Существует немало задач, которые удобно решать с помощью системы трёх уравнений с тремя переменными. Решим одну из них.

Задача 2. Капитал в 10 000 грн. поделите на три части так, чтобы первая была на 2 000 грн. больше второй и на 3 000 грн. — третьей.

Решение. Обозначим искомые части капитала буквами x, y и z. По условию задачи

$$x + y + z = 10\,000,\ x - y = 2000,\ x - z = 3000.$$

Искомые значения переменных должны удовлетворять системе трёх уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} x + y + z = 10000, \\ x - y = 2000, \\ x - z = 3000. \end{cases}$$

Сложив почленно левые и правые части этих уравнений, будем иметь $3x = 15\,000$, отсюда $x = 5\,000$. Тогда из второго уравнения получим:

$$5000 - y = 2000,\ y = 3000,$$

а из третьего вычислим:

$$5000 - z = 3000,\ z = 2000.$$

Ответ. 5000 грн., 3000 грн. и 2000 грн.

Хотите знать ещё больше?

Обобщим задачу 1 этого параграфа.

Задача. За 5 блокнотов и 6 тетрадей заплатили m грн.Сколько стоит один блокнот и одна тетрадь, если 4 блокнота дороже 3 тетрадей на n грн.?

Здесь m и n – *параметры,* то есть буквы, считающиеся в условиях задачи данными, неизменными. Задачи с параметрами так же можно решать с помощью уравнений или системы уравнений, только ответами к ним будут не конкретные числа, а выражения, содержащие параметры.

Решим сформулированную задачу.

Решение.

$$\begin{cases} 5x + 6y = m, \\ 4x - 3y = n; \end{cases} \Big| \, 2 \qquad \begin{cases} 5x + 6y = m, \\ 8x - 6y = 2n; \end{cases}$$

$$13x = m + 2n;\ x = \frac{1}{13}(m + 2n).$$

Тогда $3y = 4x - n$; $3y = \frac{4}{13}(m + 2n) - n$; $3y = \frac{1}{13}(4m - 5n)$.

Значит, $y = \frac{1}{39}(4m - 5n)$.

Ответ. Один блокнот и одна тетрадь стоят соответственно $\frac{1}{13}(m + 2n)$ грн. и $\frac{1}{39}(4m - 5n)$ грн.

Проверьте себя

1. Приведите пример линейного уравнения с двумя переменными.
2. Что такое решение уравнения с двумя переменными?
3. Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными?
4. Сколько решений может иметь система двух уравнений первой степени с двумя переменными?
5. Составьте несколько разных моделей задачи: найдите два числа, если их сумма равна 3, а разность равна 2.

Выполним вместе!

1. Поделите капитал 8 100 грн. на две части так, чтобы меньшая часть составляла 80 % от большей.

✔ Решение. Пусть большая часть равна x грн., тогда меньшая — 80 % от x, то еть $0,8x$. Имеем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 8100, \\ y = 0,8x, \end{cases}$$

отсюда $x + 0,8x = 8\,100$, $1,8x = 8\,100$, $x = 8100 : 1,8$, $x = 4\,500$.

Ответ. 4 500 грн. и 3 600 грн.

2. Найдите два числа, сумма которых равна 15, а разность их квадратов на 60 больше.

✔ Решение. Если искомые числа равны x и y, то

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ x^2 - y^2 = 75. \end{cases}$$

Так как $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ и $x + y = 15$, то $15(x - y) = 75$, а $x - y = 5$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Её решение $x = 10$, $y = 5$ является решением и данной задачи.

Ответ. 10 и 5.

Выполните устно

1158. Найдите два числа, если:
а) их сумма равна 40, а отношение — 3;
б) их сумма равна 40, а разность — 20;
в) их разность равна 10, а отношение — 3.

1159. Какой системе уравнений соответствует диаграмма, изображённая на рисунке 100?

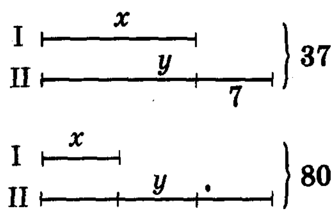


Рис. 100

Уровень A

Решите задачи составлением системы уравнений.

1160. Купили 9 м ткани двух сортов ценой по 40 грн. и 30 грн. за 1 м. За всю покупку заплатили 330 грн. Сколько купили метров ткани каждого сорта?

1161. На строительстве работали 50 каменщиков и плотников. Со временем количество каменщиков увеличилось в 2 раза, а плотников — в 3 раза, и всех стало 130. Сколько каменщиков и плотников было на строительстве сначала?

1162. Скорость моторной лодки по течению — 23 км/ч, а против течения — 17 км/ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения.

1163. Туристы проехали 640 км, 7 ч они ехали поездом и 4 ч — автобусом. Найдите скорость поезда, если она на 5 км/ч больше скорости автобуса.

1164. Два туриста вышли одновременно из двух городов, расстояние между которыми — 38 км, и встретились через 4 ч. С какой скоростью шёл каждый, если первый до встречи прошел на 2 км больше, чем второй?

1165. Найдите два числа, сумма которых равна 35,5, а разность — 12,5.

1166. Найдите два числа, полусумма которых равна 37,9, а полуразность — 7,5.

1167. а) Полусумма двух чисел больше меньшего из них на 5, а их полуразности — на 1. Найдите эти числа.

б) Полуразность двух чисел меньше большего из них на 13, а их разности — на 12. Найдите эти числа.

1168. Найдите два числа, если половина первого равна второму, а третья часть второго на 5 меньше первого.

1169. Найдите два числа, если известно, что удвоенное первое число больше второго на 37, а половина первого меньше второго на 2.

1170. Поделите число 75 на две части так, чтобы одна из них была втрое больше разности частей.

1171. Сумма двух чисел — 82. Если большее число поделить на меньшее, то получим частное 5 и остаток 4. Найдите эти числа.

1172. Разность двух чисел — 61. Если уменьшаемое разделить на вычитаемое, то получим частное 6 и остаток 1. Найдите эти числа.

1173. Три тетради и 5 карандашей стоят 3,95 грн., а 4 таких тетради и 2 карандаша — 2,7 грн. Сколько стоят одна тетрадь и один карандаш?

1174. Мать старше дочери на 24 года, а дочь младше матери втрое. Сколько лет матери и сколько дочери?

1175. На двух полках вместе — 65 книг, на первой на 7 книжек больше, чем на второй. Сколько книжек на каждой полке?

1176. В двух седьмых классах — 72 ученика. Если бы из 7-А класса 2 ученика перешли в 7-Б, то в обоих классах учеников стало бы поровну. Сколько учеников в каждом классе?

1177. На кормление 10 коней и 16 коров каждый день отпускали 160 кг сена, причем 5 коней получали на 5 кг сена больше, чем 7 коров. Сколько килограммов сена давали каждый день коню и корове?

1178. Провод длиной 35 м разрезали на две части так, что одна из них на 50 % длиннее второй. Найдите длину каждой части.

1179. Бечёвку длиной 35 м разрезали на две части так, что одна из них на $33\frac{1}{3}$ % короче другой. Найдите длины этих частей.

1180. Поле площадью 200 га поделили на две части так, что площадь первой из них на 5 га больше площади второй. Найдите площади обеих частей.

1181. Поле площадью 100 га поделили на два участка так, что площадь первого на 5 га больше половины второго. Найдите площадь каждого участка.

1182. Периметр прямоугольника равен 168 см. Найдите длины его сторон, если одна из них на 8 см длиннее.

1183. Периметр прямоугольника равен 126 см. Найдите длины его сторон, если одна из них: а) на 10 % длиннее другой; б) на 10 % короче другой.

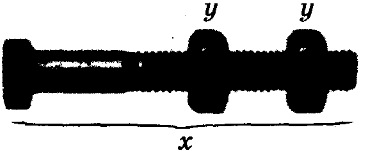
1184. Найдите длины сторон равнобедренного треугольника, если его периметр равен 82 см, а основание больше боковой стороны на 10 см.

1185. Найдите длины сторон равнобедренного треугольника, если его периметр равен 62 см, а основание больше боковой стороны на 10 %.

1186. а) Разность двух чисел равна 4, а разность их квадратов — 44. Найдите эти числа.

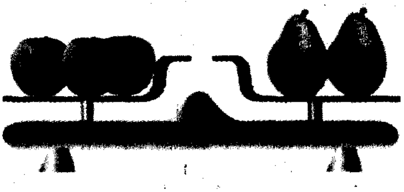
б) Найдите два числа, если известно, что их сумма равна 12, а разность квадратов — 60.

1187. Сформулируйте задачу, соответствующую рисунку и системе уравнений (рис. 101—102), и решите задачу.



$$\begin{cases} x + 2y = 250 \\ x - y = 130 \end{cases}$$

Рис. 101



$$\begin{cases} y - x = 50 \\ 3x = 2y \end{cases}$$

Рис. 102

Уровень Б

1188. Два велосипедиста выехали одновременно из двух сёл, расстояние между которыми 9 км, и встретились через 0,5 ч. Определите скорость движения каждого, если скорость первого велосипедиста на 1,6 км/ч больше.

1189. Расстояние 320 км моторная лодка проходит по течению реки за 8 ч, а против течения — за 10 ч. Найдите скорость течения реки и собственную скорость моторной лодки.

1190. Если из одного пункта одновременно и в одном направлении выедут велосипедист и мотоциклист, то через 2 ч расстояние между ними будет 14 км. Если же они выедут одновременно в противоположных направлениях, то через 3 ч расстояние между ними будет составлять 174 км. Найдите скорость каждого из них.

1191. Если бы велосипедист увеличил скорость на 3 км/ч, то расстояние между пунктами A и B проехал бы на 1 ч быстрее. А если бы ехал со скоростью на 2 км/ч меньшей, то ехал бы на 1 ч дольше. Найдите скорость велосипедиста и расстояние между A и B.

1192. Двое мастеров, работая вместе, могут закончить определённую работу за 12 дней. Если первый мастер будет работать 2 дня, а второй — 3 дня, то они выполнят только 20 % этой работы. За сколько дней может выполнить всю работу каждый мастер, работая отдельно?

1193. Через две трубы, открытые одновременно, резервуар наполняется за 1 ч 20 мин. Если первую трубу открыть на 10 мин, а другу — на 12 мин, то наполнится только $\frac{2}{15}$ резервуара. За сколько часов наполнит резервуар каждая труба?

1194. Два туриста должны выйти навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми составляет 30 км. Если первый выйдет на 2 ч раньше второго, то они встретятся через 2,5 ч после выхода второго туриста. Если второй выйдет на 2 ч раньше, чем первый, то встреча состоится через 3 ч после выхода первого. Определите скорость движения каждого туриста.

1195. Разность квадратов двух чисел и квадрат их разности равны соответственно 275 и 121. Найдите эти числа.

1196. На двух полках 50 книг. Если половину книг со второй полки переставить на первую, то на ней будет книг в 4 раза меньше, чем на первой. Сколько книг на каждой полке?

1197. Если рассадить детей по двое за стол, то не хватит трёх столов. Если посадить их по трое, то один стол окажется лишним. Сколько детей и сколько столов?

1198. Залётные галки садятся на палки.
Если на каждую палку сядет по галке,
то для одной галки не хватит палки;
если на палку сядет по две галки,
то на одной из палок не будет галок.
Сколько торчало палок? Сколько летало галок?

1199. Сколько лет отцу и сыну, если 8 лет тому назад отец был старше сына в 8 раз, а 5 лет тому назад — в 5 раз?

1200. Лев старше Дикобраза
в два с половиной раза —
на целых шесть годков.
А возраст каждого — каков?

1201. *Старинная греческая задача.* Нагружённые осёл и мул идут медленно. Осёл жалуется на тяжёлую ношу, мул ему отвечает: «Почему ты жалуешься? Если бы я взял один твой мешок, то моя ноша стала бы вдвое тяжелей твоей. А если бы ты взял один мой мешок, то твоя ноша равнялась бы моей». По сколько мешков несли осёл и мул?

1202. *Старинная китайская задача.* 5 волов и 2 барана стоят 11 таелов, а 2 вола и 8 баранов — 8 таелов. Сколько баранов можно купить за деньги, полученные от продажи 5 волов?

1203. *Старинная китайская задача.* Сколько в клетке фазанов и кроликов, если вместе в ней 35 голов и 94 ноги?

1204. По окружности, длина которой 120 г, движутся два тела. Они встречаются каждые 10 с, двигаясь в одном направлении, и каждые 4 с, двигаясь в противоположных направлениях. С какой скоростью движутся эти тела?

1205. По окружности, длина которой 90 м, движутся два тела в одном направлении и встречаются через 6 с. Найдите скорость этих тел, если скорость первого в 4 раза большая скорости второго.

1206. Найдите число, которое при делении на 4, 7 и 11 даёт соответственно остатки 2, 1 и 6, причём сумма частных на 2 меньше половины искомого числа.

1207. Составьте уравнение прямой вида $y = kx + p$, проходящей через точки:

а) A (1; 3) и B (3; 7); б) K (3; 2) и P (−1; −2);

в) C (2; 4) и D (5; −2); г) E (1; 2) и F(3; 6).

1208. Составьте уравнение прямых, изображённых на рисунке 103.

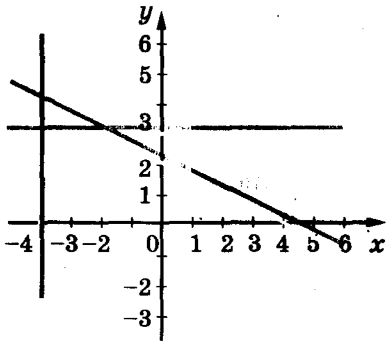


Рис. 103

1209. а) Поле площадью 100 га разбили на две участка, один из которых на n га больше. Найдите площади полученных участков.

б) Поле площадью a га разбили на два участка, один из которых на 5 га больше. Найдите площади полученных участков.

1210. а) Разделите число a на части, пропорциональные числам 2, 3 и 5.

б) Разделите число 1 000 на части, пропорциональные числам k, p и t.

1211. В цехе предприятия изготовляют две модели женской одежды. На изготовление первой модели расходуют 2 м ткани, на изготовление второй — 3 м. Затраты рабочего времени на производство этих моделей равны соответственно 4 и 5 ч. Известно, что недельный запас ткани составляет a м, а рабочее время ограничено t ч. Составьте такой план недельного изготовления этих моделей одежды, чтобы полностью использовать ресурсы (ткань, рабочее время).

1212. За первую неделю шахта перевыполнила норму на p %, за второй — на k %, добыв за эти две недели сверх нормы m тонн угля. Сколько уголя должна была добывать шахта еженедельно по плану?

ЗАВДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант I

1°. Систему уравнений: а) решите графически; б) любым способом.

а) $\begin{cases} 2x-y=4, \\ x-y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3{,}1x+0{,}7y=5{,}2, \\ 5{,}2x+0{,}6y=7. \end{cases}$

2•. Поле площадью 80 га разделили на две части так, что площадь одной стала на 2 га больше половины площади второй. Найдите площадь каждой части.

Вариант II

1°. Систему уравнений: а) решите графически; б) любым способом.

а) $\begin{cases} 4x-2y=6, \\ x+y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2{,}2x+0{,}5y=3{,}2, \\ 1{,}2x+0{,}8y=2{,}8. \end{cases}$

2•. Поле площадью 100 га разделили на две части так, что площадь одной стала на 5 га меньше половины площади второй. Найдите площадь каждой части.

Вариант III

1°. Систему уравнений: а) решите графически; б) любым способом.

а) $\begin{cases} x-2y=3, \\ x+y=-3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}5x+0{,}3y=4{,}5, \\ 2x-1{,}7y=6. \end{cases}$

2•. Провод длиной 40 м разрезали на две части так, что одна из них оказалась на 4 м длиннее половины второй. Найдите длину каждой части.

Вариант IV

1°. Систему уравнений: а) решите графически; б) любым способом.

а) $\begin{cases} 3x-2y=7, \\ x+y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}7x+y=4{,}4, \\ 3{,}5x-0{,}8y=6{,}2. \end{cases}$

2•. Провод длиной 50 м разрезали на две части так, что одна из них оказалась на 1 м короче половины второй. Найдите длину каждой части.

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Задачи, сводящиеся к системе уравнений с двумя переменными, учёные Вавилона умели решать ещё более 4 тысяч лет тому назад.

Китайские математики более 2 тысяч лет тому назад разработали общий метод решения систем линейных уравнений с тремя и более неизвестными и описали его в трактате «Математика в девяти книгах».

Древнегреческий математик Диофант (III в.) находил натуральные решения и таких, например, задач: «Найдите два числа с данной разностью и таких, чтобы разность их квадратов была больше их разности на заданное число». Если искомые числа обозначить через x и y, а данные — через a и b, то задаче соответствует такая система уравнений:

$$\begin{cases} x - y = a, \\ x^2 - y^2 - (x - y) = b. \end{cases}$$

Рене Декарт (1596—1650)

Графический способ решения уравнений одним из первых предложил выдающийся французский философ, математик, физик, физиолог Р. Декарт. Он ввёл понятие переменной величины и удобную математическую символику.

В 1637 г. Р. Декарт опубликовал работу «Размышления о методе», в которой описал метод координат, связывающий алгебру с геометрией. Пользуясь этим методом, геометрические задачи можно решать алгебраическими методами, а алгебраические — геометрическим.

Р. Декарт — основатель очень известного ранее философского учения *картезианство*. Это название произошло от латинизированного имени Декарта — Картезий.

ОСНОВНОЕ В ГЛАВЕ

Уравнение вида $ax + by = c$, где a, b, c — данные числа, называют *линейным уравнением с двумя переменными x и y*. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, его называют *уравнением первой степени с двумя переменными*.

Пару чисел, удовлетворяющую уравнение с двумя переменными, называют *решением* этого уравнения. Например, пара чисел (3; −2) — решение уравнения $5x + 3y = 9$. Уравнение первой степени с двумя переменными имеет бесконечно много решений. В декартовой системе координат каждому уравнению первой степени с двумя переменными соответствует прямая — график этого уравнения. И наоборот, каждая прямая координатной плоскости — график некоторого линейного уравнения с двумя переменными.

Два уравнения с двумя переменными называют *равносильными*, если они имеют те же решения. Равносильные уравнения с двумя переменными имеют одинаковые графики.

Если нужно найти общие решения двух или нескольких уравнений, говорят, что эти уравнения образуют *систему уравнений*.

Решением системы уравнений называют общее решение всех её уравнений. Пример системы двух линейных уравнений с переменными x и y:

$$\boxed{\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x - 2y = -4. \end{cases}}$$

Каждое уравнение этой системы имеет бесконечно много решений и только одно из них — общее для обоих уравнений: пара (2; 3).

Системе двух уравнений первой степени с двумя переменными в декартовой системе координат соответствует пара прямых. Поскольку две прямые на плоскости могут пересекаться, совпадать или быть параллельными, то и соответствующая им система уравнений может иметь одно решение, бесконечно много или не иметь ни одного решения.

Решать системы уравнений с двумя переменными можно разными способами — подстановки, сложения или графическим способом.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение линейного уравнения с двумя переменными.
2. Приведите примеры линейного уравнения с двумя переменными.
3. Что называют решением уравнения с двумя переменными?
4. Сколько решений может иметь линейное уравнение с двумя переменными?
5. Какие уравнения с двумя переменными называют равносильными?
6. Верны ли основные свойства уравнений для уравнений с двумя переменными? Сформулируйте их.
7. Сформулируйте определение уравнения первой степени с двумя переменными.
8. Приведите примеры уравнения первой степени с двумя переменными.
9. Что является графиком уравнения первой степени с двумя переменными?
10. Как построить график уравнения первой степени с двумя переменными?
11. Сколько решений может иметь уравнение первой степени с двумя переменными?
12. Приведите пример системы уравнений.
13. Что такое решение системы уравнений с двумя переменными?
14. Что означает «решить систему уравнений с двумя переменными»?
15. Как решить систему уравнений графическим способом?
16. Сколько решений может иметь система уравнений с двумя переменными?
17. Какие вы знаете способы решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными?
18. Как решают систему двух уравнений с двумя переменными способом подстановки?
19. Как решают систему двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения?

ГОТОВИМСЯ К ТЕМАТИЧЕСКОМУ ОЦЕНИВАНИЮ

Тестовые задания № 7

1. На графике уравнения $3x - 5y = 6{,}2$ взята точка с абсциссой 0,4. Какая ордината этой точки:

а) 1; б) −1; в) 0; г) 0,4?

2. Решением какого уравнения является пара чисел (2; 3):

а) $2x + y = 7$; б) $2y + 4x = 15$;
в) $5x + y = 17$; г) $0{,}5x + 3y = 1$?

3. Какое из уравнений не имеет решений:

а) $x^4 + y^4 = -5$; б) $x^2 - y^2 = -4$;
в) $x^4 + 5y^2 = 0$; г) $x^2 + y^2 = 4$?

4. Какой из графиков уравнений не является графиком функции:

а) $y = x^2$; б) $y = 2$; в) $x = y$; г) $x = 2$?

5. При каком значении a график уравнения $2x + ay = 4$ проходит через точку:

а) −1; б) 0; в) 1; г) 2?

6. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} x + y = 14, \\ x - y = 8: \end{cases}$

а) (11; 3); б) (3; 11); в) (−11; 3); г) (−3; 11).

7. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} x = y, \\ x + y = 10: \end{cases}$

а) (−1; −1); б) (5; 5); в) (1; 1); г) (−5; −5).

8. Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений $2x - 3y = 16$ и $x + 2y = 1$:

а) (2; 5); б) (−2; 5); в) (2; −5); г) (−2; −5).

9. Сколько общих точек имеют графики уравнений $2x + 3y = 7$ и $2x - 3y = 7$:

а) одну; б) две; в) ни одной; г) бесконечно много?

10. При каких значениях a система уравнений

$\begin{cases} 3x + ay = 15, \\ 12x - 8y = 60 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений:

а) −2; б) −32; в) 2; г) 32?

Контрольная работа № 7

1°. Какая пара чисел (3; 2), (2; 3), (−1; −1), (3; 0) является решением системы уравнений:

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 5x - 2y = 4? \end{cases}$$

Решите систему уравнений графически.

2°. $\begin{cases} 8x - 3y = 20, \\ x + 2y = 12; \end{cases}$ 3°. $\begin{cases} y = 1, \\ |x| + y = 2. \end{cases}$

Решите способом подстановки систему уравнений.

4°. $\begin{cases} 5x - 3y = -9, \\ 2x - y = -2; \end{cases}$ 5•. $\begin{cases} \dfrac{3x - 2y}{5} + \dfrac{5x - 3y}{3} - x = 1, \\ \dfrac{2x - 3y}{3} - \dfrac{4x - 3y}{2} - y = 1. \end{cases}$

Решите способом сложения систему уравнений.

6•. $\begin{cases} 3a - 7b = 8, \\ 6a - 5b = -2; \end{cases}$ 7•. $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - z = 6, \\ z - y = 2. \end{cases}$

8•. В сарае есть гуси и кролики. У них 50 голов и 160 ног. Сколько гусей и сколько кроликов в сарае?

9••. На складе было 1500 м^3 березовых и сосновых дров. За первый месяц использовали 15 % сосновых и 20 % березовых дров, а вместе — 270 м^3. Сколько сосновых и березовых дров отдельно было на складе?

10••. Найдите значение коэффициентов a и b уравнения $ax + bx = 13$, если его график проходит через точки $M(5; -3)$ и $N(8; 3)$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ

Решите уравнение (**1213—1218**).

1213. а) $7x + 15 + 15x + 8 - 10 = 9x$;

б) $25 + 5y - 17 + 7y = 150 - 130y$.

1214. а) $7x - 39 = 2(x + 3) + 6 - 2x + 5$;

б) $3(x - 5) = 5(x - 3) - 4(2 - 3x)$.

1215. а) $\frac{1}{2}(2x - 4) + \frac{1}{2}(4x - 2) = x + 5$;

б) $\frac{2}{3}(3x + 1) + \frac{1}{3}(6x - 2) = x + 6$.

1216. а) $5(x - 3) + 7(3x + 6) = 2(x - 2) + 103$;

б) $8(y - 2) + 5(3y - 2) = 3(y - 5) + 69$.

1217. а) $7(6x - 1) + 3(2x + 1) - 5(12x - 7) = 23$;

б) $5(8z - 1) + 8(7 - 4z) - 7(4z + 1) = 19$.

1218. а) $\frac{1}{4}(x - 3) + \frac{1}{8}(x - 4) = \frac{1}{2}(x - 5) + \frac{1}{8}(x - 1)$;

б) $\frac{1}{6}(8 - x) - \frac{1}{3}(5 - 4x) = \frac{1}{2}(x + 6)$.

1219. Покажите, что при любом значении a уравнение $(a + 2)x - (a + 3)x = 5$ имеет одно решение. Найдите это решение.

1220. Может ли при каком-нибудь значении a уравнение $(a^2 + 1)x = 7$ иметь бесконечно много корней? Почему?

1221. При каком условии уравнение $ax = 12$ не имеет решений?

1222. При каком условии уравнение $(a - 2)x = x + 1$ не имеет решений?

1223. ***Старинная китайская задача.*** Несколько мужчин вместе покупают барана. Если каждый внесёт по 5 монет, то не хватит до стоимости барана 45 монет. Если каждый внесёт по 7, то не хватит 3 монет. Сколько стоит баран? Сколько было покупателей?

1224. ***Из надписи на могиле Диофанта.*** Диофант провёл шестую часть своей жизни в детстве, двенадцатую — в юности. Когда после того прошла ещё седьмая часть его жизни и 5 лет, у него родился сын. Сын прожил вдвое меньше отца. После смерти сына Диофант прожил ещё 4 года. Сколько лет жил Диофант?

1225. ***Старинная индийская задача.*** Пятая часть пчелиного роя сидит на цветке кадамба, третья — на цветах силиндха. А разность этих двух количеств, умноженная на 3, — на цветах кутая. И только одна пчёлка наслаждается благоуханием жасмина и пандануса. Скажи мне, красавица, сколько всего пчёл?

1226. ***Старинная арабская задача.*** Разделите число 10 на две части так, чтобы их разность была равна 5.

1227. ***Старинная немецкая задача.*** Число 10 разделите на две части так, чтобы после умножения первой на 5 и деления полученного результата на вторую часть получилось $\frac{10}{3}$.

1228. ***Задача из немецкого трактата XVI в.*** Один согласился работать на условиях, что в конце года он получит одежду и 10 флоринов. Но поработал он только 7 месяцев, поэтому получил одежду и 2 флорина. Во сколько флоринов оценили ту одежду?

1229. ***Задача из русского фольклора.*** Отец спросил учителя своего сына, сколько у него учеников. Учитель ответил: «Когда было бы ещё столько учеников, сколько есть, и ещё половина и четверть их, а также твой второй сын, то было бы ровно 100». Сколько учеников имел учитель?

1230. ***Задача из болгарского фольклора.*** Крестьянин хвалился соседу: «Сколько имею овец, столько и ягнят они родят. Потом куплю ещё одну молодую овцу и ещё три раза куплю по столько, сколько станет овец и ягнят, и буду иметь их 100». Сколько овец имел тот крестьянин?

1231. ***Задача для студентов Киево-Могилянской академии (1707 г.).*** Отец трёх сыновей говорит, что средний из них на 2 года старше младшего, а старшему — столько лет, сколько двум другим вместе и ещё 6 лет. Всем им вместе 58 лет. Сколько лет каждому сыну?

1232. Мастерская должна была изготовить определённое количество деталей за 20 дней, а выполнила задание за 18 дней, так как каждый день делала на 8 деталей больше. Сколько деталей изготовила мастерская?

1233. Заказ на выпуск станков завод должен был выполнить за 15 дней. Выпуская каждый день на 2 станка больше, чем предполагалось, он на два дня прежде срока не только выполнил заказ, а и выпустил на 6 станков больше. Сколько станков должен был выпустить завод?

1234. Котлован рыли два экскаватора. Первый, вынимая за 1 ч на 40 м^3 грунта больше, чем второй, работал 16 ч, а второй — 24 ч. Сколько кубических метров грунта вынимал за 1 ч каждый экскаватор, если вместе они вынули за указанное время 8 640 м^3 грунта?

1235. Посевную должны были провести за 14 дней. Но каждый день засевали на 4 га больше, чем предполагалось, поэтому закончили сев на 4 дня раньше. Сколько гектаров засеяли?

1236. Две землечерпалки, работая вместе, могут углубить дно речки за 12 дней. За сколько дней выполнила бы эту же работу каждая землечерпалка отдельно, когда известно, что производительность одной из них в 1,5 раза выше, чем производительность второй?

1237. Теплоход прошёл расстояние между пристанями в одном направлении за 4 ч, а в противоположном — за 5 ч. Найдите расстояние между пристанями, если скорость течения реки составляет 2 км/ч.

1238. Вертолёт пролетел расстояние между двумя городами при попутном ветре за 5,5 ч, а при встречном — за 6 ч. Найдите расстояние между городами и собственную скорость вертолёта, если скорость ветра тогда была равна 10 км/ч.

...Е ВЫРАЖЕНИЯ

Найдите значение выражения **(1239–1241).**

1239. а) $\left(2\frac{3}{4}-2\frac{3}{8}-0{,}3\right):6$;

б) $\left(5\frac{9}{25}-2{,}36\right):\left(3\frac{4}{5}+0{,}2\right)$.

1240. а) $\left(3\frac{3}{4}:1\frac{1}{4}-0{,}75\right):1\frac{1}{2}+0{,}75$;

б) $12{,}5\cdot 2\frac{1}{4}-\left(4{,}128-3\frac{3}{4}\right):\frac{2}{5}$.

1241. а) $9x^4-4x^2$, если $x=\frac{1}{3}$;

б) $10a^2+125a^3$, если $a=-0{,}2$.

Выполните умножение одночленов (**1242—1243**).

1242. а) $5a^2b$; $\frac{3}{5}ab^3$ и $3ac^4$;

б) $-8xy$; $(-2{,}5)b^2$ и $0{,}1ax$.

1243. а) $4pq^2$; $0{,}15pz^2$ и $5pqz$;

б) $-1\frac{5}{7}ax^2$; $-\frac{1}{3}ax^2y$ и $-2\frac{5}{8}xy$.

1244. Возведите в степень одночлен:

а) $(2x^3)^5$; б) $(-xy)^7$; в) $(-3a)^4$; г) $(0{,}5m^2)^3$.

1245. Упростите выражение:

а) $3x^n\cdot 4x^2y^m$; б) $\frac{2}{3}a^{n+1}\cdot 6a^{n-2}$.

1246. Сложите многочлены:

а) n^3+m^2n и m^2n-n^3-4;

б) $0{,}7z-2{,}6z^2+z3$ и $2{,}3z^3+0{,}3z-2$;

в) $-\frac{2}{3}mx-\frac{3}{5}m^2x$ и $2\frac{1}{3}mx-\frac{3}{5}m^2x^2-1\frac{1}{2}x^2$.

1247. Найдите разность многочленов:

а) $6x^3-2x^5+x$ и $8x^3+3x^5-4x^2$;

б) $3a^2+2ab-b^2$ и $2b^2-2a^2$;

в) $m^2+5m-12$ и $3m^4+m^2-12$;

г) $-x^2y^2+4x-3x^2y-8$ и $2-3xy^2-x^2y^2+y$.

1248. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $-12x^2-(-3x^6+8-10x^2)$;

б) $9m^3-5m+(m-6m3-2m^4)$;

в) $(-4xy+7y^2)-(-8x^2)+(6xy-10x^2-5)$;
г) $-(3b^2+4b^2c)+(6b^2-c^2b+b^2c)-(2b^2+5b^2c)$.

1249. Выполните умножение:

а) $3x(2x^4-5x+1)$; б) $-5a^2(3a^2+4a-2)$;
в) $(-ab+2a^2-3b^2)\cdot(-a^2b)$; г) $(4x^2y-3xy^2+5)\cdot 2xy$;
д) $-0{,}25(2m^2-4m+6)$; е) $(-10n^5-6n^3+2)(-1{,}5m)$.

1250. Выполните умножение выражений:

а) $-12x^3$ и $\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}$;
б) $10xy$ и $-0{,}7x^3+3{,}2y^2-x^2y^2$;
в) $-\frac{3}{5}ax^2$ и $5ax^2-\frac{5}{6}a^2x+\frac{1}{2}a$;
г) $0{,}5y^6$ и $-0{,}8xy+1{,}2x^3+7x^2y$.

1251. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $5x(x+4)-x(6-2x^2)$; б) $-y^2(2y-6)+4y(y^2-y)$;
в) $6a^2b^3-b^2(5a^2b+b^2-1)$; г) $3xy(2-4x^2y+xy^2)-7xy$.

1252. Докажите тождество:

а) $x(y-z)+y(z-x)=z(y-x)$;
б) $x(y+z-yz)-y(x+z-xz)=z(x-y)$;
в) $ab(a+b+c)-b^2(a-c)=bc(a+b+c)-b(c^2-a^2)$;
г) $ab(b+c)-bc(a+b)+ac(a+c)=a(b^2+c^2)+c(a^2-b^2)$.

1253. Найдите произведение выражений:

а) $-2a-b$ и $-2a+b$; б) $-x^2+y^3$ и $-x^2-y^3$;
в) $-abc+1$ и $abc+1$; г) $-0{,}2x^4-x$ и $x-0{,}2x^4$;
д) $a+b+c$ и $a-b-c$; е) $x+y-z$ и $x-y+z$.

1254. Представьте произведение в виде многочлена:

а) $(4-x)(4+x)(16+x^2)$;
б) $(a^2-5b)(a^2+5b)(a^4+25b^2)$;
в) $(0{,}09x^6+x^2y^4)(0{,}3x^3-xy^2)(0{,}3x^3+xy^2)$;
г) $\left(a^4b^4+\frac{1}{4}c^2\right)\left(\frac{1}{2}c+a^2b^2\right)\left(\frac{1}{2}c-a^2b^2\right)$.

1255. Упростите выражение:

а) $(2x-3)(2x+3)(4x^2+9)+81$;
б) $(5+x^5)(5-x^5)(x^{10}+25)+x^{20}$;

в) $256a^4 - (4a - b^3)(4a + b^3)(16a^2 + b^6)$;

г) $(0{,}1y^2)^4 + (-x - 0{,}1y^2)(0{,}1y^2 - x)(0{,}01y^4 + x^2)$.

1256. Представьте двучлен в виде произведения:

а) $p^2 - q^2$; б) $25 - 0{,}25m^2$; в) $9x^2 - a^4$;

г) $0{,}04x^6 - 1$; д) $-x^2y^4 + a^6b^8$; е) $a^2b^2c^2 - 121x^6$;

ё) $\frac{4}{81}z^{10} - x^{16}$; ж) $-64 + 36m^4n^2$; з) $a^2 - (b + c)^2$.

1257. Вычислите:

а) $24^2 - 14^2$; б) $62^2 - 38^2$; в) $98^2 - 97^2$;

г) $52{,}5^2 - 48{,}5^2$; д) $14{,}3^2 - 4{,}3^2$; е) $5{,}9^2 - 5{,}2^2$;

ё) $\left(17\frac{3}{4}\right)^2 - \left(16\frac{3}{4}\right)^2$; ж) $\left(7\frac{2}{3}\right)^2 - \left(2\frac{1}{3}\right)^2$.

Представьте выражение в виде многочлена ***(1258—1260)***.

1258. а) $(0{,}4a^2 - 5ab)^2$; б) $(6{,}5xy + 8y^2)^2$;

в) $(x^2y^2 - 1)^2$; г) $(2 + a^6b^4)^2$.

1259. а) $(-x + y^2)^2$; б) $(-2a^2 + 3y^3)^2$; в) $\left(-\frac{1}{3} - 3x^5\right)^2$;

г) $\left(-\frac{1}{2}m^3 - 0{,}2n\right)^2$; д) $(-0{,}1xy + 5)^2$; е) $(-6x^2y - 0{,}5y)^2$.

1260. Упростите выражение:

а) $(3x - 5y)^2 - 3x(3x - 10y)$;

б) $8a(b - 2a) + (4a + b)^2$;

в) $(4x + y)(3x + 4y) - (2y + 3x)^2$;

г) $(3a + 6b)^2 - (2a + 9b)(3a + 4b)$.

Докажите, что значение выражения не зависит от x (1261—1262).

1261. а) $(2x - 5y)^2 + 4x(5y - x)$;

б) $3x(12x - 4y) - (6x - y)^2$.

1262. а) $(4x + 5y)^2 - 8(2x - y)(x + 3y)$;

б) $4(x - 6y)(x - 3y) - (2x - 9y)^2$.

1263. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $(x + 3)^3$; б) $(y - 2)^3$; в) $(2x - 1)^3$;

г) $(3x + 1)^3$; д) $(m - 2n)^3$; е) $(2a + 3)^3$.

РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Разложите на множители многочлен (1264—1265).

1264. а) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy$; б) $a^3c^2 - a^2c^2 + a^3 - a^2$;
в) $4xy + 12x^2y - 4x - 12x^2$; г) $6a^2b - 18a^2 - 3ab + 9a$;
д) $xyz - 4xz - 5xy + 20x$; е) $4ab + 3ac - abc - 12a$.

1265. а) $a^2 - b^2 - a + b$; б) $x + y + x^2 - y^2$;
в) $4a^2 - 9 - 2a - 3$; г) $5 - 3x + 25 - 9x^2$.

1266. Представьте в виде произведения:
а) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$; б) $a^2 + 2a + 1 - b^2$;
в) $x^2 - y^2 + 8y - 16$; г) $a^2 - b^2 - 14b - 49$.

1267. Представьте в виде произведения трёх множителей:
а) $ab^2 - 4a - b^3 + 4b$; б) $x^3 + x^2y - 9x - 9y$;
в) $x^2a + 3a^2 - a^3 - 3x^2$; г) $x^3 - 5b^2 + 5x^2 - xb^2$.

Разложите на множители (1268—1269).

1268. а) $a^2x^2 - 2abx^2 + 2ab + b^2x^2 - a^2 - b^2$;
б) $a^2x^2 - 4b^2x + 4b^2 + 4a^2 - 4a^2x + b^2x^2$.

1269. а) $a^2 - b^2 + x^2 - y^2 + 2ax + 2by$;
б) $x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 2x^2y^2 - 2xy$.

1270. Докажите, что:
а) $145^2 - 144^2 = 17^2$; б) $221^2 - 220^2 = 21^2$;
в) $313^2 - 312^2 = 24^2 + 7^2$; г) $841^2 - 840^2 = 40^2 + 9^2$.

Вычислите (1271—1272).

1271. а) $\dfrac{47^2 - 41^2}{28^2 - 16^2}$; б) $\dfrac{57^2 - 42^2}{29^2 - 26^2}$; в) $\dfrac{51^2 - 12^2}{90^2 - 9^2}$; г) $\dfrac{61^2 - 11^2}{36^2 - 24^2}$.

1272. а) $6^{32} \cdot 4^{32} - (24^{16} - 5)(24^{16} + 5)$;
б) $(56^{10} - 7)(56^{10} + 7) - 7^{20} \cdot 8^{20}$;
в) $4^{18} \cdot 9^{18} + (4 - 36^9)(36^9 + 4)$.

Решите уравнение (1273—1274).

1273. а) $5x^5 - x^4 = 0$; б) $3x^3 - 12x = 0$; в) $10x^6 = 3x^5$.

1274. а) $x^3 + 4x^2 - x = 4$; б) $x^3 - 3x^2 + 2x = 6$;
в) $2x^3 + x^2 - 8x = 4$; г) $12x^3 - 8x^2 - 3x = -2$.

ФУНКЦИИ

1275. Задайте формулой функцию, значение которой:
а) на 4 больше значения аргумента;
б) на 9 меньше значения аргумента;
в) втрое больше значения аргумента;
г) противоположно значениям аргумента;
д) обратно значениям аргумента.

1276. Прямоугольный параллелепипед со сторонами оснований a см и b см и высотой 6 см имеет объём, равный 72 см^3. Выразите формулой зависимость b от a.

1277. В треугольнике один из углов равен α, а второй — вдвое больше. Запишите формулу для определения третьего угла.

1278. Чтобы сшить одну рубашку, необходимо 2,5 м ткани. Запишите формулу для вычисления остатка ткани после пошива x рубашек, если в рулоне 200 м ткани. Какие значения может принимать x?

1279. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = x(x - 5)$; б) $y = x^2 + 6x + 8$; в) $y = \dfrac{16 - x^2}{x + 5}$;

г) $y = \dfrac{x^2 + 9}{3x - 1}$; д) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - 2}$; е) $y = \dfrac{3}{x(x + 1)}$.

1280. Функция задана формулой $y = 0{,}25x - 1$. Составьте таблицу значений функции для первых десяти натуральных значений аргумента.

1281. Составьте таблицу значений функции $y = \dfrac{24}{2 - x}$ для целых значений аргумента x, если $-6 \le x \le 6$.

1282. Найдите значение аргумента, при котором значение функции:
а) $y = -3x + 2$ равно -7; 0; 5;
б) $y = x(x - 3)$ равно -2; 0; 10.

1283. Задайте формулой одну из функций, значения которой для некоторых значений аргумента представлены в таблице:

x	-4	-1	0	2	3	5
y	-12	-3	0	6	9	15

1284. На рисунке 104 изображены графики движения пешехода (линия a) и велосипедиста (линия b). Используя график, определите:

а) одновременно ли они начали движение;

б) постоянной ли была скорость каждого;

в) каковы скорости пешехода и велосипедиста на каждом участке пути;

г) кто из них останавливался и на какое время;

д) на каком расстоянии между ними находились они через полчаса после начала движения пешехода.

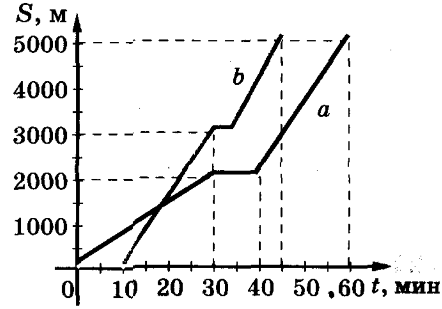


Рис. 104

Постройте график функции, заданной формулой (1285—1286).

1285. а) $y = 5x$ б) $y = 5x - 1$; в) $y = -5x$; г) $y = -5x + 3$.

1286. а) $y = x + 4$; б) $y = 1 - 2x$; в) $y = 3x$; г) $y = -\frac{x}{3}$.

Для каждого графика постройте график, симметричный относительно оси ординат. Задайте формулой соответствующую функцию.

1287. График линейной функции проходит через точки A и B. Составьте формулу функции, если:

а) $A(3;2)$ и $B(-5;4)$; б) $A(-1;-6)$ и $B(1; 6)$;

в) $A(-2; 1)$ и $B(1; -2)$; г) $A(-1; 5)$ и $B(3; -3)$.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

1288. Постройте график уравнения:

а) $x + y = 4$; б) $2x + y = 6$; в) $-3x + 2y = 5$; г) $-x - 7y = 7$.

1289. Каким должен быть коэффициент b уравнения $4x + by = 0$, чтобы график этого уравнения проходил через точку $B(10; 8)$?

1290. Чему равно значение c, если известно, что график уравнения $2x + 3y = c$ проходит через точку A $(6; -1)$?

1291. Постройте в одной координатной плоскости графики уравнений $3x - 2y = 12$ и $5x + 3y = 1$, найдите координаты точки их пересечения. Убедитесь, что найденная пара чисел является решением каждого из данных уравнений.

Решите систему уравнений (1292–1297).

1292. а) $\begin{cases} 2x + y = 12, \\ 3x - 5y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 4y = 11, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6x - 4z = 5, \\ 4x - 1{,}5z = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ x + 3y = 21. \end{cases}$

1293. а) $\begin{cases} 2x - 3(x - y) = 7, \\ 5y - 2(x - 2y) = 23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4y - 5(y - x) = 8, \\ 2(3x - y) + 7y = -14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}5x + 0{,}3y = 8, \\ 1{,}2x - 0{,}5y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 1{,}4x - 2{,}5y = 39, \\ 0{,}8x - 1{,}3y = 21. \end{cases}$

1294. а) $\begin{cases} \frac{4}{5}x - y = 7, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{3}{7}x - z = 15, \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{7}z = 14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x + y}{3} + x = 15, \\ y - \frac{y - x}{5} = 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x - y}{2} + y = 4, \\ x - \frac{y - x}{3} = 9. \end{cases}$

1295. а) $\begin{cases} \frac{7 + x}{5} - \frac{2x - y}{4} = 3y - 5, \\ \frac{5y - 7}{6} + \frac{4x - 3}{2} = 20 - 5x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 80, \\ x + y = 10. \end{cases}$

1296. а) $\begin{cases} x + 4(2y - (x - 5)) = 36, \\ 7\left(\frac{3}{3}(y + 2x) - \frac{1}{5}y\right) = 4x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x - y| = 5, \\ x + y = 8. \end{cases}$

1297. а) $\begin{cases} \frac{5 + y}{3} - \frac{3x + 4y}{4} = 3x + 1, \\ \frac{7x + 2}{3} + \frac{4x - 3}{2} + \frac{11}{6} = 1 - 3x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{7 + x}{5} - \frac{2x - y}{4} - 3y = -5, \\ \frac{5y - 7}{2} - \frac{3 - 4x}{6} - 18 = -5x. \end{cases}$

Решите с помощью системы уравнений задачу (1298—1306).

1298. Бечёвку длиной 22 м разрезали на две части так, что одна из них оказалась на 20 % длиннее второй. Найдите их длины.

1299. Бечёвку длиной 22 м разрезали на две части так, что одна из них оказалась на 20 % короче второй. Найдите их длины.

1300. Двое мастеров, работая вместе, могут закончить определённую работу за 12 дней. Если же первый мастер будет работать 4 дня, а второй — 6 дней, то они выполнят только 40 % всей работы. За сколько дней может выполнить всю работу каждый мастер, работая отдельно?

1301. На одном складе угля на 800 т больше, чем на втором. После того как с первого забрали 60 % угля, а со второго — 50 %, на первом осталось на 200 т больше, чем на втором. Сколько угля осталось на каждом складе?

1302. Есть два сплава меди и цинка. Первый содержит цинка 10 %, второй — 30 %. Сколько надо взять первого и второго, чтобы, сплавив их, получить 400 т сплава, содержащего 25 % цинка?

1303. Из двух растворов соли — 10-процентного и 15-процентного — надо получить 40 г 12-процентного раствора. Сколько для этого следует взять каждого раствора?

1304. Один сплав состоит из двух металлов, массы которых относятся, как 1 : 2, а второй содержит те же металлы, но массы их относятся, как 3 : 4. Сколько частей каждого сплава надо взять, чтобы получить третий сплав, в котором массы тех же металлов относились бы, как 5 : 8?

1305. Общая масса трёх деталей составляет 250 кг. Масса первой и второй деталей на 10 кг меньше массы третьей, а второй и третьей — на 110 кг больше массы первой. Найдите массу каждой детали.

1306. В трёх ящиках лежат яблоки. В первом яблок на 2 кг больше, чем во втором, во втором — на 4 кг меньше, чем в третьем, а в третьем — в $1\frac{4}{7}$ раза меньше, чем в двух других. Сколько килограммов яблок в каждом ящике?

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

1307. Из корзины взяли половину всех яиц, потом — половину остатка, потом — половину нового остатка, в конце концов — половину нового остатка. После этого в корзине осталось 10 яиц. Сколько яиц было в корзине сначала?

1308. Сколько метров лент купила бабушка для своих внучек, если старшей она дала без полуметра половину всех лент, средней — половину остатка и еще полметра, а младшей — остальное: половину нового остатка и ещё метр?

1309. Разность двух чисел равна 35. От деления большего на меньшее получают частное 4 и остаток 2. Найдите эти числа.

1310. Два ученика хотели купить книгу, стоимость которой была больше суммы денег, имевшихся у одного ученика, на 35 к., у другого — на 40 к. Если бы они отдали все свои деньги, то получили бы сдачу, равную 0,4 стоимости книги. Сколько стоила книга?

1311. Несколько мужчин, потратив 4 000 грн., решили поделить расходы поровну. Если бы их было на 3 меньше, то каждому пришлось бы уплатить в 2,5 раза больше. Сколько было мужчин? А если бы они израсходовали a грн.?

1312. Из пункта A связист доставил донесение в пункт B за 35 мин. На обратном пути он увеличил скорость на 0,6 км/ч, поэтому затратил на дорогу 30 мин. Найдите расстояние между A и B.

1313. В 8 ч утра из села в город отправился велосипедист. Пробыв в городе 4,8 ч, он выехал обратно и в 15 ч возвратился в село. Найдите расстояние между городом и селом, если в город он ехал со скоростью 12 км/ч, а возвращался со скоростью 10 км/ч.

1314. В шестизначном числе первая цифра такая же, как и четвёртая, вторая — как пятая, третья — как шестая. Докажите, что это число делится на 7, 11 и 13.

1315. Докажите, что если y является средним арифметическим x и 2, то $x^2 + z^2 + 4y^2 + 2xz = 4xy + 4yz$.

1316. Найдите два натуральных числа, если их сумма равна 522, а наибольший общий делитель равен 87.

1317. Количество юношей, решивших олимпиадную задачу, оказалось таким же, что и количество девушек, её не решивших. Кого было больше: всех девушек или всех тех, кто решил задачу?

1318. С плота, плывшего по течению реки, соскочил юноша и a минут плыл против течения. Потом, плывя с такой же собственной скоростью, он через b минут догнал плот. Что больше, a или b?

1319. В трёх сосудах есть вода. Половину воды из первого сосуда перелили во второй, потом $\frac{1}{3}$ воды из второго сосуда перелили в третий, а после того как $\frac{1}{4}$ воды из третьего сосуда перелили в первый, в каждом сосуде стало по 6 л воды. Сколько литров воды было в каждом сосуде сначала?

1320. Антикварный магазин купил две картины за 3 600 грн. и продал их, получив 25 % прибыли. За сколько гривен продали каждую картину, если наценка на первую составляла 50 %, а на вторую — 12,5 %?

1321. Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Прибыв в конечный пункт, каждый из них возвратился назад и продолжил движение в обратном направлении. Первый раз они встретились на расстоянии 10 км от пункта B, а второй раз — на расстоянии 5 км от пункта A. Найдите расстояние от A до B.

1322. Один сплав состоит из двух металлов, массы которых относятся, как 1 : 2, а второй содержит те же металлы, но массы их относятся, как 3 : 4. Сколько частей каждого сплава надо взять, чтобы получить третий сплав, в котором массы тех же металлов относились бы, как 15 : 22?

1323. ***Задача из фольклора США.*** Мэри 24 года. Это в 2 раза больше, чем было Энни, когда Мэри было столько лет, сколько теперь Энни. Сколько лет Энни?

1324. ***Задача из австралийского фольклора.*** Отец предложил сыновьям Альфреду, Джону и Чарльзу отару своих овец поделить так: Альфред получит на 20 % больше, чем Джон, и на 25 % больше, чем Чарльз. Джон получит 3 600 овец. Сколько овец получит Чарльз?

1325. ***Задача из французского фольклора.*** Заплатив за ужин в ресторане, Метивье выяснил, что у него осталась пятая часть денег, что были у него с собой. Причём сантимов осталось столько, сколько сначала было франков (1 франк = 100 сантимов), а франков осталось в 5 раз меньше, чем сначала было сантимов. Сколько заплатил Метивье за ужин?

1326. ***Задача из турецкого фольклора.*** У старого Исхана были дети, внуки, правнуки и праправнуки. Всего их вместе с Исханом было 2 801. Праправнуки были ещё маленькие, значит, не имели детей, а все другие имели по одинаковому количеству детей, и все дети были живы и здоровы. Сколько детей имел старый Исхан?

1327. ***Задача из болгарского фольклора.*** Пастух пасёт стадо из 100 голов, за что получает 100 левов. Сколько в стаде волов, коров и телят, если за одного вола он получает 10 левов, за корову — 5 левов, а за теленка — 0,5 лева?

1328. Сколько раз надо взять слагаемым число a, чтобы получить a^{20}?

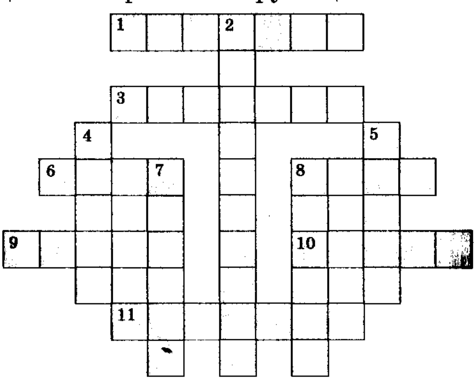
1329. Разгадайте математический ребус:

$$система = са^{м}.$$

1330. Решите кроссворд.

По горизонтали: **1.** Выражение вида a^n. **3.** Доказываемое утверждение. **8.** Четвёртое простое число. **9.** Результат сложения. **10.** Меньшая сторона прямоугольного треугольника. **11.** Древнегреческий математик.

По вертикали: **2.** Буква, обозначающая некоторое число. **4.** Единица массы. **5.** Исчисление расходов и доходов. **7.** Наглядное изображение функции. **8.** Часть круга.



СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИКИ 5—6 КЛАССОВ

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., которые используются для счёта, называют *натуральными числами*. Наименьшее натуральное число — 1, наибольшего — не существует.

Сравнить два числа — это означает выяснить, какое из них больше, какое меньше, или показать, что они равны. Знаки $>$ (больше), $<$ (меньше), $\leq$ (не больше), $\geq$ (не меньше) называют *знаками неравенства*.

Любые натуральные числа можно *складывать*, в результате получают их суммы:

слагаемое слагаемое сумма

$$a + b = c.$$

Вычитание — действие, обратное сложению. Вычесть из одного числа другое — это означает найти такое третье число, которое в сумме со вторым даёт первое число.

То есть, если $a - b = x$, то $x + b = a$:

уменьшаемое вычитаемое разность

$$a - b = x.$$

Умножить число a на натуральное число n — это означает взять число a слагаемым n раз. Например,

$a \cdot 5 = a + a + a + a + a.$

Какие бы не были натуральные числа a и b, их можно перемножить, в результате получают *произведение:*

множитель множитель произведение

$$a \cdot b = c$$

Деление — действие, обратное умножению. Поделить число a на b — это означает найти такое число x, что $x \cdot b = a$:

делимое делитель частное

$$a : b = x.$$

Всегда верны равенства:
$a + 0 = a$, $a - 0 = a$, $a \cdot 1 = a$, $a : 1 = a$, $a \cdot 0 = 0$.

На 0 делить нельзя!

Иногда деление выполняется с остатком. Например,
$60 : 7 - 8$(ост. 4).

Здесь 60 — *делимое*, 7 — *делитель*, 8 — *неполное частное*, 4 — *остаток*. Остаток всегда меньше делителя. Если остаток не принимают во внимание, то неполное частное называют *приближённым частным*. Например, $60 : 7 \approx 8$. Здесь 8 — приближённое частное чисел 60 и 7, а $\approx$ — *знак приближённого равенства*.

ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

На 2 делятся те и только те числа, которые оканчиваются чётными цифрами. Числа, делящиеся на 2, называются чётными, остальные — нечётными.

На 5 делятся те и только те числа, которые оканчиваются цифрой 5 или 0.

На 10 делятся те и только те числа, которые оканчиваются цифрой 0.

На 3 делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 3.

На 9 делятся те и только те числа, сумма цифр которых делится на 9.

Примечание. Говоря «сумма цифр», имеют в виду сумму однозначных чисел, записанных соответствующими цифрами.

Если число a делится на m без остатка, то число a называют кратным числу m, а m — делителем числа a. Например, 5 — делитель числа 35, а 35 — кратное числу 5.

Число 35 имеет четыре делителя: 1, 5, 7 и 35.

Число 5 имеет бесконечно много кратных: 5, 10, 15, 20, 25, ...

Число, имеющее только два делителя — единицу и самого себя, — называют *простым*. Наименьшее простое число — 2, наибольшего не существует. Последовательность простых чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... бесконечна.

Натуральное число, имеющее больше двух делителей, называется *составным*. Составных чисел — бесконечное множество: 4, 6, 8, 9, 10, 12, ... Число 1 — ни простое, ни составное.

Каждое составное число можно разложить на простые множители. Например,

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3,\ 81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3,\ 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Числа 18 и 81 имеют три общих делителя: 1, 3 и 9. Числа 81 и 1001 имеют только один общий делитель: 1.

Наибольшим общим делителем (НОД) нескольких чисел называют такое наибольшее число, на которое делится каждое из данных чисел. Чтобы найти НСД нескольких чисел, надо каждое из них разложить на простые множители и перемножить те из простых множителей, которые входят в каждый состав. При этом множители надо брать с наименьшим показателем, с которым они входят в данные числа.

Наименьшим общим кратным (НОК) нескольких чисел называют наименьшее число, которое делится на каждое из данных чисел. Чтобы найти НОК нескольких чисел, надо разложить их на простые множители и к составу одного из них дописать те множители, которых в нём не достаёт. При этом множители следует брать с наибольшим показателем, с которым они входят в данные числа. Найдем, например, НОД и НОК чисел 20, 60 и 90.

20	2	60	2	90	2
10	2	30	2	45	3
5	5	15	3	15	3
1		5	5	5	5
		1		1	

НОД $(20;\ 60;\ 90) = 2 \cdot 5 = 10$,

НОК $(20;\ 60;\ 90) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 180$.

Если НОД двух или нескольких чисел равен 1, то эти числа называют *взаимно простыми*. Взаимно простыми являются, например, числа 8 и 9, или 4, 7 и 25.

Примечание. До сих пор, говоря о числах, имели в виду только натуральные числа.

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Дробные числа чаще всего записывают с помощью *десятичных дробей.*

Каждая десятичная дробь имеет *целую* и *дробную* части, отделённые запятой. Например, в числе 37,45 целая часть — 37, а дробная — 45 сотых; в числе 0,02 целая часть — 0, а дробная — 2 сотых.

Из двух десятичных дробей *бóльшая* та, которая имеет бóльшую целую часть. Если их целые части равны, то бóльшая та, у которой больше десятых и т. д. Например, $4{,}3 > 4{,}198$.

Складывают и *вычитают* десятичные дроби поразрядно, записывая их одну под другой так, чтобы запятая была под запятой. Например,

$$\begin{array}{r} 3{,}27 \\ +\underline{12{,}8} \\ 16{,}07 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36{,}28 \\ -\underline{7{,}235} \\ 29{,}045 \end{array}$$

Чтобы умножить две десятичные дроби, можно умножить их, не обращая внимания на запятые, а в произведении отделить запятой столько цифр, сколько их есть после запятой в обоих множителях вместе. Например,

$$0{,}02 \cdot 8{,}03 = 0{,}1606.$$

Чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000, достаточно в этой дроби запятую перенести вправо соответственно на одну, две или три цифры. Чтобы умножить десятичную дробь на 0,1, 0,01, 0,001, достаточно в этой дроби перенести запятую влево соответственно на одну, две или три цифры. Например,

$$8{,}0375 \cdot 100 = 803{,}75;\ 34{,}8 \cdot 0{,}01 = 0{,}348.$$

Деление десятичных дробей базируется на основном свойстве частного.

Основное свойство частного. **Значение частного не изменится, если делимое и делитель умножить или разделить на одно и то же число** (кроме нуля).

Пользуясь этим свойством, деление десятичных дробей можно свести к делению на натуральное число. Чтобы разделить число на десятичную дробь, надо в делимом и делителе запятую перенести вправо на столько цифр, сколько их есть после запятой в делителе, а потом выполнить деление на натуральное число. Например,

$$2{,}8 : 0{,}07 = 280 : 7 = 40.$$

Правило округления чисел. Если первая из отброшенных цифр 0, 1, 2, 3 или 4, то последнюю оставшуюся цифру не изменяют. Если первая из отброшенных цифр 5, 6, 7, 8 или 9, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на 1. Например,

$$6{,}237 \approx 6{,}2;\ 0{,}8459 \approx 0{,}85.$$

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ

Частное от деления натуральных чисел a и b можно записать в виде обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$, дробная черта заменяет знак деления. *Числитель* a и *знаменатель* b вместе называют *членами дроби.* Говоря «дробь», понимают обыкновенную дробь.

Дробь называют *правильной*, если её числитель меньше знаменателя. Если числитель дроби больше или равен знаменателю, то её называют *неправильной*. Значение неправильной дроби не меньше 1, а правильной — меньше 1. Из неправильной дроби можно выделить целую часть и записать её в виде смешанной дроби. Например,

$$\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}.$$

Основное свойство дроби. **Значение дроби не изменится, если её числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же натуральное число.**

Пользуясь этим свойством, дроби можно сокращать или приводить к общему знаменателю. Например,

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}; \ \frac{25}{15} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

Дробь называется *несократимой*, если её числитель и знаменатель — числа взаимно простые.

Приведём к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{12}$ и $\frac{1}{18}$.

НОК (4; 12; 18) = 36. Дополнительные множители: 36 : 4 = 9, 36 : 12 = 3, 36 : 18 = 2. Поэтому

$$\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 9}{4\cdot 9} = \frac{27}{36}; \ \frac{5}{12} = \frac{5\cdot 3}{12\cdot 3} = \frac{15}{36}; \ \frac{1}{18} = \frac{1\cdot 2}{18\cdot 2} = \frac{2}{36}.$$

Дроби с равными знаменателями складывают и вычитают, пользуясь формулами:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}; \ \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

Чтобы найти *сумму* или *разность* дробей с разными знаменателями, их сначала приводят к общему знаменателю. Например,

$$\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}+\frac{4}{6}=\frac{9}{6}=1\frac{1}{2};\quad \frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}-\frac{4}{6}=\frac{1}{6}.$$

Как выполняют сложение и вычитание смешанных дробей, показано на примерах:

$$3\frac{1}{2}+1\frac{4}{5}=3\frac{5}{10}+1\frac{8}{10}=4\frac{13}{10}=5\frac{3}{10};$$

$$3\frac{1}{2}-1\frac{4}{5}=3\frac{5}{10}-1\frac{8}{10}=2\frac{15}{10}-1\frac{8}{10}=1\frac{7}{10};$$

$$7-2\frac{1}{3}+3\frac{1}{5}=6\frac{15}{15}-2\frac{5}{15}+3\frac{3}{15}=7\frac{13}{15}.$$

Чтобы *умножить дробь на дробь*, надо отдельно перемножить их числители и их знаменатели, первый результат записать числителем, а второй — знаменателем произведения. Например,

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}.$$

Две дроби называют *взаимно обратными*, если их произведение равно 1. Дробь $\frac{a}{c}$ обратна дроби $\frac{c}{a}$, и наоборот.

Чтобы *поделить одну дробь на вторую*, надо первую дробь умножить на дробь, обратную второй:

$$\frac{a}{c}:\frac{m}{n}=\frac{a}{c}\cdot\frac{n}{m}=\frac{an}{cm}.$$

Как выполняют действия второй и третьей ступеней над смешанными дробями, показано на примерах:

$$4\frac{1}{3}\cdot 2=8\frac{2}{3},\quad 9\frac{6}{7}:3=3\frac{2}{7};$$

$$3\frac{1}{2}\cdot 1\frac{3}{7}=\frac{7}{2}\cdot\frac{10}{7}=5;$$

$$2\frac{2}{5}:\frac{4}{15}=\frac{12}{5}\cdot\frac{15}{4}=9;$$

$$\left(2\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}=5\frac{4}{9}.$$

Средним арифметическим нескольких чисел называют частное от деления суммы этих чисел на их количество.

Среднее арифметическое чисел a, b и c равно $\frac{a+b+c}{3}$.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Числа, отличающиеся только знаками, называются *противоположными.* Например, число -7 противоположно числу 7, и наоборот. Числа, противоположные натуральным, называют *целыми отрицательными.* Числа натуральные, целые отрицательные и нуль вместе называют *целыми числами.* Натуральные числа называют также *целыми положительными* числами. Отрицательными бывают не только целые числа, но и дробные, например,

$$-2{,}5,\ -\frac{7}{8},\ -3\frac{2}{5}.$$

Целые и дробные числа (положительные и отрицательные) вместе называют *рациональными числами*. На координатной прямой каждому рациональному числу соответствует единственная точка.

Множество натуральных чисел является частью (подмножеством) множества целых чисел, а множество целых чисел — частью (подмножеством) множества рациональных чисел. Соотношение между важнейшими видами числа показано на схеме.

Положительные числа (целые и дробные) и нуль вместе называют *неотрицательными числами.*

Модуль неотрицательного числа равен самому числу; *модуль отрицательного числа* равен противоположному числу. Например,

$$|3{,}7| = 3{,}7;\quad |-12| = 12;\quad |0| = 0;\quad \left|-\frac{2}{15}\right| = \frac{2}{15}.$$

Из двух рациональных чисел *меньшим* считается то, которому на координатной прямой соответствует точка, размещённая левее. Поэтому каждое отрицательное число меньше каждого неотрицательного. Из двух отрицательных чисел меньшим считается то, модуль которого больше. Например,

$$-12 < 0; \quad -12 < 7; \quad -12 < -9.$$

Записи $a > 0$, $x < 0$ означают, что число a — положительное, а x — отрицательное. **Какими бы не были два рациональных числа, то верным является одно из трёх соотношений: или они равны, или первое меньше второго, или первое больше второго.**

Чтобы сложить два отрицательных числа, достаточно сложить их модули и перед результатом поставить знак «минус». Например, $-5 + (-8) = -13$.

Чтобы сложить положительное и отрицательное числа, надо найти разность их модулей и перед ней поставить знак числа, модуль которого больше. Примеры:

$$-7 + 12 = 5; \quad \frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{5}.$$

Чтобы найти *разность* двух рациональных чисел, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Например,

$$-9 - (-2) = -9 + 2 = -7; \quad \frac{1}{8} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8}.$$

Произведение двух рациональных чисел с одинаковыми знаками равно произведению их модулей. Произведение двух чисел с разными знаками равно произведению их модулей, взятому со знаком «минус». Например,

$$-2 \cdot (-6) = 12; \; 3 \cdot (-5) = -15; \; -\frac{2}{3} \cdot 3 = -2.$$

Для любых рациональных значений a и b верны равенства:

$$(-a) \cdot (-b) = ab; \quad (-a) \cdot b = -ab.$$

Произведение чётного числа отрицательных множителей — положительно, а нечётного — отрицательно (если оно не содержит множителя 0). Квадрат отрицательного числа положительный, а куб — отрицательный.

Частное двух рациональных чисел равно частному от деления их модулей, если знаки делимого и делителя одинаковы. Если знаки делимого и делителя разные, то частное равно частному от деления их модулей, взятому со знаком «минус». Например,

$$-15 : (-3) = 5; \quad 20 : (-4) = -5; \quad -40 : 5 = -8.$$

Если число a отлично от 0, то $0 : a = 0$, $a : a = 1$.

Как натуральные, так и рациональные и любые другие числа **на 0 делить нельзя!**

Для любых рациональных чисел верны равенства:

$a + b = b + a$ — переместительный закон сложения,

$a + (b + c) = (a + b) + c$ — сочетательный закон сложения,

$ab - ba$ — переместительный закон умножения,

$a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$ — сочетательный закон умножения,

$(a + b)c = ac + bc$ — распределительный закон умножения.

Если перед скобками стоит знак «плюс», их можно опустить. Если перед скобками стоит знак «минус», их можно опустить, изменив знаки всех выражений в скобках на противоположные (правило раскрытия скобок). Например,

$$20 + (3 - 7) = 20 + 3 - 7;$$

$$0{,}5 - (2{,}3 - 3) = 0{,}5 - 2{,}3 + 3.$$

ОТНОШЕНИЯ И ПРОПОРЦИИ

Частное от деления двух чисел называют также их *отношением*. Примеры отношений:

$$3 : 7; \quad 0{,}5 : \frac{1}{3}.$$

Основное свойство отношения. **Значение отношения не изменится, если оба его члена умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.** Поэтому, например, значения отношений 300 : 200 и 3 : 2 равны.

Отношение дробных чисел всегда можно заменить отношением целых чисел. Для этого достаточно оба члена отношения умножить на общее кратное их знаменателей. Например,

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2.$$

Каждая простая дробь является отношением его числителя и знаменателя:

$$\frac{a}{b} = a : b.$$

Равенство двух отношений — *пропорция*. Примеры пропорций:

$$45 : 15 = 21 : 7; \quad \frac{2}{3} = \frac{10}{15}; \quad x : 3 = 20 : 30.$$

Числа, составляющие пропорцию, называют её *членами* (средними и крайними).

$$\underbrace{a}_{} : \overbrace{b = c}^{} : d.$$

Крайние члены

$$a : b = c : d.$$

средние члены

Основное свойство пропорции. **Если пропорция верна, то произведение её крайних членов равно произведению средних.** То есть, если

$$a : b = c : d, \text{ то } ad = bc.$$

Две величины называют *пропорциональными*, если с увеличением значений одной из них в несколько раз соответствующие значения второй увеличиваются во столько же раз. Например, масса куска стали пропорциональна его объёму ($m = kv$), пройденное автомобилем расстояние пропорционально времени ($s = kt$) (при условии, что автомобиль, едет с постоянной скоростью).

Примечание. Иногда рассматривают и *обратную пропорциональность* величин (если с увеличением значений одной величины в несколько раз соответствующие значения второй уменьшаются во столько же раз). В таком случае различают прямо пропорциональные и обратно пропорциональные величины. Если говорят «пропорциональные величины», «пропорциональные отрезки» и т. д., то имеют в виду прямо пропорциональные.

Рассматривают также пропорциональность трёх и большего количества величин. Если, например, говорят, что капиталы a, b и c пропорциональны числам 3, 5 и 4, это означает, что

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4}.$$

Примечание. Иногда пишут $a : b : c = 3 : 5 : 4$, говоря об «отношении трёх чисел». Но на такие записи основное свойство отношения не распространяется. Например, $6 : 2 : 3 \neq 60 : 20 : 30$. Так как значение первого из этих выражений равно 1, а второго — 0,1.

Задача. Найдите стороны четырёхугольника, если они пропорциональны числам 3, 6, 4, 2, а периметр четырёхугольника равен 300 см.

Решение. Так как стороны четырёхугольника пропорциональны числам 3, 6, 4, 2, то они равны соответственно $3k$, $6k$, $4k$, $2k$, где k — какое-то число (коэффициент пропорциональности). Значит,

$$3k + 6k + 4k + 2k = 300, \quad 15k = 300, \quad k = 20.$$

Искомые стороны четырёхугольника равны:

$$3 \cdot 20 = 60 \text{ (см)}, 6 \cdot 20 = 120 \text{ (см)},$$
$$4 \cdot 20 = 80 \text{ (см)}, 2 \cdot 20 = 40 \text{ (см)}.$$

ПРОЦЕНТЫ

Процент — сотая часть, 1 % = 0,01. *Процент числа* — сотая часть этого числа, 50 % числа — половина этого числа.

Процентным отношением называют отношение, выраженное в процентах. Если среди 40 членов бригады есть 8 женщин, то об этом можно сказать так: отношение числа женщин к числу всех рабочих бригады равно 8 : 40. Или иначе: женщины составляют $\frac{1}{5}$ (или 0,2) рабочих бригады. Или: женщины составляют 20 % всех рабочих бригады.

Число, большее a на p %, равно $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$, число, меньшее a на p %, равно $a\left(1-\frac{p}{100}\right)$. Увеличить число вдвое — это означает увеличить его на 100 %. Уменьшить число вдвое — это означает уменьшить его на 50 %.

Различают три основных вида задач на проценты: 1) нахождение процентов от числа; 2) нахождение числа по процентам; 3) нахождение процентного отношения двух чисел.

Задача 1. Руда содержит 56 % железа. Сколько железа можно выплавить из 1 000 т руды?

Решение. 56 % = 0,56; 1000 · 0,56 = 560 (т).

Ответ. 560 т.

Задача 2. Сахарная свекла содержит 14 % сахара. Из скольких тонн свёклы можно получить 10 т сахара?

Решение. 14 % = 0,14; x · 0,14 = 10 (т), отсюда x = 10 : 0,14 = 71 (т).

Ответ. 71 т.

Задача 3. Посадили 200 зёрен нового сорта сои, из них проросло 186 зёрен. Найдите процент прорастания зерна этого сорта сои.

Решение. 186 : 200 = 0,93; 0,93 = 93 %.

Ответ. 93 %.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ И УПРАЖНЕНИЯМ

6. г) Да. **7.** в) 0,1. **9.** д) –8. **17.** а) 4. **18.** в) 9. **19.** а) 4; в) –2. **20.** г) –24. **21.** в) 2; г) $2\frac{1}{17}$. **22.** г) –2. **23.** а) 17; г) –2. **27.** а) $-1\frac{5}{6}$. **28.** а) $12\frac{2}{3}$. **29.** а) 5; г) 3. **30.** а) 2. **31.** а) 6,5. **33.** в) –11 и 11. **34.** б) –10 и 14. **35.** в) 5,5 и 0,5. **36.** а) 4; б) 3; в) 6. **37.** а) $m = 7$. **38.** а) $k < 0$; в) $k \neq -6$. **39.** 7,5 см. **40.** $16\frac{2}{3}$ см. **41.** 25 см. **42.** 80 лет. **43.** Через 10 лет. **44.** 315 быков. **45.** а) 0,7; е) 105; ж) –1,28. **46.** а) 9. **47.** 60, 90 и 150. **52.** а) Да; г) да. **56.** а) $-\frac{10}{11}$. **57.** в) 2. **58.** а) 8. **59.** а) 9; д) 0. **60.** б) 67. **61.** а) 4. **62.** а) $\frac{1}{3}$. **63.** а) 3. **64.** а) 2,8; е) 0. **65.** а) 6. **66.** а) Нет решений; б) –8. **67.** а) 8. **68.** а) –3. **69.** 57. **70.** 25. **71.** 75 и 45. **72.** 21 и 9. **73.** 255 и 170. **74.** 112 т и 56 т. **75.** 68 л и 34 л. **76.** а) $a = 2$; б) $a \neq 0$. **77.** 16. **81.** 9,6. **83.** На 25 %; на 20 %. **90.** в) Все числа. **91.** б) Все числа; в) нет решений. **92.** а) 36. **93.** а) $\frac{4}{5}$. **94.** а) 62. **96.** а) $-\frac{4}{15}$; в) $\frac{5}{8}$. **99.** а) 23; в) 27.

100. а) 1. **101.** в) –2. **102.** а) 1; в) 1. **103.** а) 2; в) 20. **104.** а) 16 и 10. **105.** 132 и 22. **106.** а) 123 и 32; в) 260 и 198. **107.** 0,5. **108.** а) 45. **109.** б) 34. **110.** 4. **111.** 36 гусей. **112.** 1200 г. **114.** 1) а) $k \neq 0$; г) $k \neq 2$; 2) а) $k = 0$; г) таких значений нет; 3) г) $k = 2$. **117.** б) –13; д) 1,125. **119.** а) 70; г) 1,75. **125.** а) 7,6 и 6. **127.** 35 и 70. **128.** 3. **129.** 40 лет и 8 лет. **130.** 150 га и 280 га. **131.** 21 м и 63 м. **132.** 10 м и 15 м. **133.** 240 деталей. **134.** 23,5 см и 35,5 см. **135.** 31 га, 25 га и 16 га. **136.** 26 учеников, 29 учеников и 24 ученика. **137.** 11 кг, 23 кг и 22 кг. **139.** 172, 258 и 430 га. **140.** 120 цветов. **141.** 28 учеников. **142.** Через 5 лет. **144.** 49,5 км. **145.** 27,625 км. **146.** 210 км. **147.** 70 км/ч и

50 км/ч. **148.** 8 км/ч и 12 км/ч. **149.** 20 км. **150.** До 36. **151.** 19 и 81. **152.** 32 и 20. **153.** 25 рабочих и 30 рабочих. **154.** Через 1 ч; через 14 лет. **155.** 28 лет. **156.** 11 лет и 47 лет. **157.** 35. **158.** 52. **159.** 221. **160.** 91. **161.** 40 и 72 кг. **162.** 25,6 грн. **163.** 4,5 ч. **164.** 150 км. **165.** 288 км. **166.** 210 км и 240 км. **167.** 80 км/ч и 60 км/ч. **168.** 12 км/ч и 12 км/ч. **169.** 750 км. **170.** 60 км/ч. **171.** 10 000 грн. и 15 000 грн. **172.** 7,5 кг. **173.** $\dot{3}72$ кг. **174.** д) 1,56. **176.** г) $a - 9$. **178.** б) 3840. **184.** б) 0,6; в) 2. **185.** а) 0,2. **186.** а) 16. **189.** а) 2; в) 1,25. **190.** а) 6,5; в) −60. **193.** а) 2. **194.** б) $5 \cdot 10 + b$; г) $100a + c$. **195.** а) 2700; 810. **196.** б) 0,5(38 − 7,6). **197.** а) 5,23. **198.** а) 0; в) 186,5. **199.** а) −0,5.

200. а) 1,884. **203.** а) −5; г) $3\frac{5}{12}$. **204.** а) $100c + 10b + a$; в) $a + 0{,}1n + 0{,}01m$. **205.** а) $5k$; б) $10k$. **207.** а) 4; в) −2. **208.** а) −7; б) 2. **209.** $100a + 10b + c + 100c + 10b + a = 101(a + c) + 20b$. **210.** а) 7. **211.** 248, 496 и 456 жителей. **212.** 9, 10 и 11 см. **216.** а) Да; в) нет. **219.** а) $5c - 5$; в) $10n - 17$. **220.** а) $-4ac - 4a$; в) $-16 + 8ac$. **226.** г) $3 - 2{,}9x$. **227.** а) $28 + 7x$. **228.** а) $10x + 28$. **231.** а) 3. **233.** а) $8x - 20$. **234.** а) $164a - 163x$. **235.** а) $18x^2 - 74$; в) $-8c^2 + 6c$. **239.** а) Да; б) да. **244.** а) Нет; б) да. **248.** $P = 3a + 4$. **249.** 60 кг и 20 кг. **251.** а) −1; д) 3. **257.** а) 25, 32, 1 000, 1 000 000, 625; г) 16, 169, −32. **258.** б) 31. **259.** а) 270; г) −0,1. **260.** в) 1,8; д) 13,31. **262.** а) Да; б) нет. **264.** а) 9 см^2; в) 72,25 км^2. **265.** а) 5^3; г) 3^5. **266.** б) 810. **267.** а) 225; в) 17. **268.** а) 1 и −1; в) −5. **269.** а) −1; в) 1. **271.** а) $2 \cdot 10^4$; б) $7{,}53 \cdot 10^6$. **272.** а) 52 000; г) 444; е) 3 125 000. **273.** а) Да; в) нет. **274.** а) 324; в) 1. **275.** а) 81; г) −12,1. **276.** а) 1. **286.** а) 6; г) 2. **287.** а) 1 и −1; в) 0; е) 6. **288.** а) $2{,}87287 \cdot 10^8$; $1{,}753 \cdot 10^7$; $2{,}205 \cdot 10^5$; $9{,}099 \cdot 10$. **289.** б) 0,0002, 0,0011, 0,00009, 0,00000675. **293.** а) Да; г) нет; е) нет. **295.** 8 ч.

301. а) 3^{19}; в) $(-11)^9$; ж) $(-1{,}2)^2$. **302.** д) y^{16}. **303.** а) 4^{12}; г) $0{,}2^8$. **304.** а) a^6; в) y^{14}; е) $-b^{21}$. **310.** а) 1; в) 1. **311.** а) 10 000 000; е) 1.

312. а) Нет; б) да. **313.** а) 1; г) –1. **314.** а) $5{,}4 \cdot 10^5$; $-6 \cdot 10^4$; $7{,}2 \cdot 10^{10}$; 0,8. **315.** а) $5{,}8 \cdot 10^5$; в) 2. **316.** а) 2. **317.** в) $1\frac{1}{2}$; е) 256. **318.** а) 25; в) –0,16. **319.** а) a^{19}; г) b^{16}. **320.** а) $(ax)^6$; д) $(2x)^5$. **321.** а) 5^9. **322.** а) –1; в) 1. **323.** а) x^9. **324.** а) 2. **325.** а) –1; д) –2. **326.** б) $4{,}8 \cdot 10^{10}$; $4{,}2 \cdot 10^{10}$; $1{,}35 \cdot 10^{20}$; $1{,}5 \cdot 10$. **328.** а) $3{,}55 \cdot 10^5$. **332.** а) Нет; в) да. **333.** 150 т и 750 т. **339.** б) 1,08. **340.** б) $\frac{1}{10}x^3y^3$. **341.** а) $36a^6z^4$. **342.** г) $0{,}04x^6m^2$; $0{,}008x^9m^3$. **343.** д) $-8a^6b^3$. **344.** а) $18am^2c^2$. **345.** а) $-14a^2x$. **346.** в) $30a^2x^5$. **347.** б) –4500; г) –13,5. **348.** в) $3a^2b^6$. **350.** в) $0{,}125a^3x^3y^9$. **351.** е) $5\frac{1}{16}a^4b^8c^4$. **353.** в) $-27x^{11}y^3$. **354.** г) $-1\frac{2}{3}a^9x^8$; ж) $0{,}1x^9y^6$. **356.** б) –1. **357.** а) $(4a^2b)^2$. **358.** а) $(-2a^2)^3$. **359.** а) $-0{,}3y^2$; г) $-\frac{1}{5}m^3n^3$. **360.** а) 4,2; г) $81\frac{2}{3}$. **361.** а) –4 500; б) 250. **363.** 320 деревьев; 192 деревьев — вишни. **369.** б) $5abc^2$. **370.** д) $5a^2x$. **371.** а) $-x^2 + x - 12$; е) $-\frac{2}{3}xy^3 + 1\frac{2}{5}x^3y$. **372.** а) $-9x^3 - 3x^2$; в) $-3m^5 - 7m^3 - 7$. **373.** а) $2b^2 + 4a - b$; д) $\frac{1}{2}a$. **374.** а) $3x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x$; г) $-x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$. **375.** а) 0; в) –0,632. **376.** б) –1,2. **378.** г) $-a^3 - 3a^2c + 2ac + c^2$. **379.** г) 1,2. **380.** в) $a^2c - ac + 1$; ж) $-x^5 - 6x^4$. **381.** в) $2x^8 - 3x^5 - 4x^2 + 10$. **384.** $2a + b$. **385.** $8m + 4n$. **386.** $S = 52a^2$; $V = 22a^3$. **389.** $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$. **390.** $v_1 + \frac{1}{2}v_2$. **391.** $1{,}5v_1 - 1{,}5v_2$. **394.** в) $4ax^3 - a^2x^3 + 9a^2$. **395.** в) –900. **397.** а) $9x^2 - 25y^2$.

401. в) $-5a^3b + 5ab^2 - 5ab + 3a^2b$. **402.** а) $x^3 - x^2 - 10$; в) $8a^2c - 7ac^2 - 7a^2c^2 + c - 4$. **403.** а) $x^2 + 9x + 5$; в) $-6c^2 + 5c - 3$. **404.** б) $6x^3 - 4x^2$. **405.** а) $c^2 + 3c + 1$. **406.** а) 26; в) 3. **407.** $\frac{5}{14}$.

408. -3. **409.** а) -5; в) 12. **410.** а) 1 и -1; г) $\frac{1}{4}$. **411.** а) n^4+n^3+4; г) x^4+x^2-x+2. **412.** в) $a^2+1{,}5b^2-2{,}5a$; е) $2\frac{1}{2}y^2+\frac{2}{5}x^2y-3xy$. **414.** в) $1\frac{5}{6}z^3+4\frac{1}{2}az^2-\frac{2}{3}a^2z$; г) $-3c-5$. **415.** а) $-1\frac{1}{2}ax^2-1\frac{1}{3}a^2x$; в) ax^3+a-5. **419.** а) $8a^3-3a^2+10$; б) $-3x^2-x-23$; в) $2xy-16x^2+6y^2+6$. **420.** а) a^3-4a^2+4. **421.** а) x^3-13x^2+4x-8. **422.** а) $5c^3+c^2-12c-6$. **423.** а) $5y^3-4y^2-2$. **426.** а) $100a+10b+c$; д) $101a+110b+11c$. **430.** а) $-\frac{7}{9}$. **431.** 6,9. **432.** $43\frac{1}{3}$ ц. **436.** а) $6a^2+2ac$; г) m^5+3m^3. **437.** в) $0{,}5a^2c^2-c^3$. **438.** г) $9x^3y^2-15x^2y^2+6xy^2$. **439.** а) x^3+x^2; е) $-2a^3+2a^2+2a$. **440.** а) $8a^5$; е) $-2c^3-c^2$. **441.** а) Да; г) нет. **442.** а) 2,7; г) -5. **443.** а) 4; в) $-4\frac{2}{11}$. **444.** б) $\frac{5}{6}$. **445.** а) $\frac{1}{5}$; в) $2\frac{9}{19}$. **446.** а) $6x^5-8x^4+10x^3$; г) $-5yz^6+6yz^5+30yz^3-9yz^2$. **447.** б) $6x^4n+10x^3n^2-2x^2n+8n^3x$; г) $-4x^5y^2+2x^3y^3+2\frac{2}{3}x^2y^4+6x^2y^3$. **448.** а) $2a^3x^4+3a^2x^3$; г) $-14x^4y^3-x^5y$. **449.** а) $3x^5$; в) $1{,}8ac^2$. **450.** а) $b-a$; г) $\frac{2}{3}z^3-\frac{3}{4}x^2z$. **451.** а) 7; в) a^4-a-2. **452.** б) 2. **453.** а) 1,2; в) 9. **454.** а) $1\frac{1}{4}$; в) 5. **455.** а) 5; г) 10. **456.** а) $3\frac{1}{7}$; в) 9. **458.** 82 коровы. **459.** 70 и -10. **460.** 20 тетрадей; 15 блокнотов. **461.** 2 см; 8 см. **462.** 40 см; 120 см. **463.** 2,5 и 15. **464.** 12 лет; 48 лет. **465.** 15 лет. **466.** Через 4 дня. **467.** 20 г. **469.** а) 48; б) -25; в) 108; г) -121. **472.** а) $\frac{2}{11}$; б) $\frac{3}{11}$; в) $\frac{1}{11}$. **476.** а) $am+bm-an-bn$; г) $ac+a^2x+$

$+ cx + ax^2$. **477.** а) $ac - bc + ad - bd$. **478.** а) $1 - 4x^2z^2$; в) $a^4 + 2a^2b + b^2$. **479.** а) $6x^2 + 5x - 6$. **480.** в) $x^3 + 1$; е) $0{,}25x^2 - 1{,}69$. **481.** а) Да; в) нет. **482.** а) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$; е) $x^2 + x$. **483.** а) 0,36; в) –0,04. **484.** а) $5x^2 - 18x + 14$; в) $a^2 - 2ab$. **485.** а) $-a^2 - a - ab + 3b$; в) $-y^2 + 3x$. **486.** б) $x^2 - 2xy + y^2$. **487.** а) $7b^2 + 1$. **488.** а) $\frac{3}{4}$; в) $-\frac{5}{9}$. **491.** а) $-5a^2$; в) $-a^4 - x^2$. **492.** а) $a^3 - 3a^2 + 4a - 2$; в) $0{,}49z^2 - 6{,}25c^2$. **493.** а) $x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 2x - 10$; в) $8a^3 + b^3$. **494.** а) $5x^4 + 6x^3y - 33x^2y^2 + 5y^3x + 12y^4$; в) $4a^4 + 5a^3 - a^2 - a + 1$. **495.** а) $\frac{1}{12}a^2 - \frac{1}{72}ab + \frac{11}{48}ac - \frac{1}{6}bc + \frac{1}{8}c^2 - \frac{1}{6}b^2$. **496.** а) 1; в) c^2. **497.** а) 1; в) $8a^3$. **498.** а) 1; в) a^6.

500. б) $9a^2c^2 + 6acb^2 + b^4$. **501.** а) a^4; в) 1. **503.** а) $-\frac{1}{3}$; в) –1. **504.** а) 0,01; г) $5\frac{1}{16}$. **505.** а) –3,5; в) 1,1. **506.** а) 1; в) 3. **507.** а) Нет решений; в) нет решений. **508.** На 4. **509.** На 7. **512.** б) 10. **518.** а) $x(a + b)$; д) $2b(2b - a)$. **519.** а) $a(2a + 3)$; е) $15(ab + 3c)$. **520.** б) $m(mx + y)$; е) $5a^2x(2 + x)$. **521.** а) $ab^3(a^2 - 6b)$; д) $a^4(3a^2 + 6a + 1)$. **522.** а) $2c(ac - 4c^2d + 2ad)$; е) $ax^2(-2ax - a^4cx^2 + 3c)$. **523.** б) $ab(a - 2a^2b + 3b^2 - b)$. **524.** а) $(3x-2y)(a+b)$; в) $(5a+3)(x-y)$. **525.** а) 12,3; в) 113. **528.** а) 0 и 3; г) 0 и 2,5. **529.** а) 0 и 1; д) 0 и 0,1. **530.** а) $a(3ab + 2b - 5)$; в) $ac(5c - c^2 - 3a)$. **532.** б) $x^3yz^3(9z + 7xy)$. **533.** а) $5a^2mx(3ax^3 + 4mx^2 - 5a^2)$. **534.** а) $a(a^2 + 3ax - 3x^2 - a^3 + 2)$. **535.** б) $0{,}6a^2b^3c^4(2 - a + 3a^2)$. **536.** а) $36x^{18}y^{10}(4x^2y^8 + 1)$. **537.** в) $\frac{1}{5}a^3x^7(2x^3 - 3a)$. **539.** а) $(x + y)(a - 2)$; г) $(x^2 - a + c)(a - c)$. **540.** а) $(1 - x)(x + 1)$. **541.** б) $(4 + 3a)(x - y)$. **542.** а) $3(x + 2y) \times (2x - y)$. **544.** а) $a^3(b^2 - a)^3$; д) $\frac{1}{4}a^2b^2\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2$. **545.** а) 0 и 2. **546.** а) 0 и –2. **547.** в) 0; 1 и –1. **548.** а) 0,1; в) 22,5. **549.** б) $x^2(2x + 3)(4x + 3)$; г) $(2x - 1)(2x^2 - x - 2)$. **550.** а) $x^n(x + 1)$;

д) $3a^{k+2}(3a^3-1)$. **551.** 42. **552.** 4 ц. **553.** 32 ц. **557.** а) $(x+y)(a+1)$; в) $(1+a)(c+y)$. **558.** а) $(1+a)(x+y)$; д) $(a+b)(x-y)$; є) $(x+2y)\times(3-x-2y)$. **559.** а) $(a+b)(x+y+z)$; б) $(a+1)(z-x+1)$. **560.** а) $(a+b+c)(x+3)$; в) $(x+y+1)(a^2-5)$. **561.** а) $(a+b)(x-y)$; в) $(z+c)(a-z)$. **562.** а) $(2a-b)(x+5y)$; в) $(3p+q)(m-n)$. **563.** а) $(x+y)(x+a)$; б) $(3a^2-1)(a+4)$. **564.** а) 3620. **565.** а) 1728. **566.** а) −3 и 15; в) 3. **567.** а) $1\frac{1}{2}$. **568.** а) $(4a-3)\times(a-z)$; г) $a(a+b)(a-c)$. **569.** а) $(a-4)(a-b)$; в) $(c-1)(a-b)$. **570.** а) $(a+n)(x+y-z)$; в) $(2a+c)(-3x^2+x+c)$. **571.** а) $(z^2+z-1)(a-b)$; в) $x(x+1)(a+b-c)$. **572.** а) $(m-c)(2a+3x-7)$; в) $(9x^2+2x-1)(c^3+1)$. **573.** а) $(x^3+a^3+c^3)(x-a)$; в) $(x^2+y^2)(x+y+z)$. **574.** а) $(x^2-y^2)(x+y+xy)$; г) $\frac{1}{13}(x+4ay)(3axy-1)$. **579.** б) $(x+1)(x+5)$; є) $2(x-3)(x-0{,}5)=(2x-1)(x-3)$. **580.** а) 2 и −7; в) 4. **581.** а) 5; в) $(z-2)(z^4+z^2+1)$. **582.** а) $-1\frac{11}{24}$; д) $\frac{1}{4}$. **583.** а) −2,4; г) $-\frac{29}{30}$. **588.** г) $(3z+2)^2$. **589.** а) $a^2+2ac+c^2$. **590.** б) $4a^2+20ax+25x^2$; є) $c^2q^2-4pcq+4p^2$. **591.** а) $a^2x^2+10ax+25$; д) $25a^2+30ab+9b^2$. **592.** а) $9c^2-30c+25$; е) $4a^4-12a^2cx^2+9c^2x^4$. **593.** а) m^2+4m+4; в) $4a^2+4ab+b^2$. **594.** а) $n^2+n+\frac{1}{4}$; в) $4a^6+4a^3+1$. **595.** а) $b^2+2bc^3+c^6$; г) $\frac{1}{4}c^2+2ca+4a^2$. **596.** а) $9a^2-30a+25$; в) $1{,}69x^6-2{,}6x^3+1$. **598.** а) $(3-x)^2$; г) $(ab+6c)^2$. **599.** а) $(3a+c)^2$; в) $(2m+1)^2$.

600. а) 9; в) $-4a^2+4a$. **601.** а) $2x^2-2x-31$; в) $-x^2$. **602.** а) 1; в) 4. **603.** а) Нет решений; г) 0 и 20. **604.** а) $x^2+6xy+9y^2$. **605.** а) $0{,}04c^2-0{,}4p^3c+p^6$; г) $a^4-16a^2c^5+64c^{10}$. **606.** а) $\frac{1}{4}+2c^2+4c^4$; в) $\frac{1}{25}c^2+\frac{1}{5}ca^2+\frac{1}{4}a^4$. **607.** а) $(x+6)^2$; г) $(4m+2n)^2$. **609.** а) 16. **610.** а) $20a+34$; в) $5a^2$. **611.** а) y^2; в) c^2-10x^4. **612.** а) 20; в) 57. **614.** а) 9; б) 1. **615.** а) 1; в) $\frac{1}{3}$.

616. а) -5; г) -2. **625.** а) $x^{2n} + 2x^n + 1$; в) $a^{2n} + 2a^{n+m} + a^{2m}$. **628.** а) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$; г) $m^6 + 6acm^4 + 12m^2a^2c^2 + 8a^3c^3$. **629.** г) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$. **630.** а) $(a - 1)^3$; в) $(3x + 4)^3$. **634.** а) $8a^3 + 36a^2c + 54ac^2 + 27c^3$; в) $0{,}008c^9 - 0{,}12c^6 + 0{,}6c^3 - 1$. **635.** а) $\frac{1}{3}$. **636.** а) 0. **637.** а) $a^3 + a^2 + 3a + 4$. **638.** а) $-4a^3 + 3a^2c - c^2 - 3c^3$. **639.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **641.** а) $x^2 - m^2$; г) $25 - a^2$. **645.** а) $(5 - x)(5 + x)$. **648.** а) $16a^2 - 1$; г) $a^2 - c^4$. **649.** а) $9p^2 - q^2$; г) $m^4 - n^4$. **650.** а) $\frac{4}{9}x^2 - 1$; г) $2{,}25 - m^4$. **651.** а) $32x^2 - 2$; в) $4q^2 - c^6n^2$. **652.** в) $7a^2 - 1\frac{2}{7}a^6b^2$. **653.** а) a^2; в) 1. **654.** а) $x^4 - 81$; в) $16a^4 - 1$. **655.** а) $x^2 - y^2$; в) $4a^2 - 9b^2$; ё) $9x^4a^2 - 1$. **657.** а) $(x - m)(x + m)$; в) $(b - c^2)(b + c^2)$; ж) $(c^2 + 3a)(-c^2 + 3a)$. **658.** а) 1000; в) 14 400; д) 452. **660.** а) $4a^2b^2c^2 - 9a^4$; в) $16a^2b^4 - 25a^2c^2$. **661.** а) $0{,}04a^2x^2 - 1{,}44a^2y^2$; в) $\frac{1}{4}a^2x^2 - \frac{4}{9}a^2z^4$. **662.** а) $9x^2 - y^4$; в) $4a^2x^4 - 9a^4x^2$. **663.** в) $-x^3y + 4xy^3$. **664.** а) $a^4 - 16$; в) $81x^8 - y^4$. **665.** а) $16x^8$; в) c^8. **668.** а) $(p - q)(p + q)$; г) $(0{,}2x^3 - 1)(0{,}2x^3 + 1)$; ё) $\left(\frac{2}{9}z^5 - x^8\right)\left(\frac{2}{9}z^5 + x^8\right)$. **673.** а) $-\frac{1}{2}$; б) 3; в) -25. **674.** а) 27; в) $\frac{1}{9}$. **682.** а) 5 см; б) 13 м; в) 25 дм. **683.** а) $1 - x^{32}$. **685.** а) 11. **686.** а) 5; г) $2\frac{2}{9}$. **687.** 70 к. и 1,4 грн. **688.** а) Да; в) нет. **690.** 70° и 110°. **691.** 100° и 80°. **692.** 112° и 68°. **694.** а) $(p - q)(p + q)$; г) $(p - x^2)(p + x^2)$. **695.** а) $(1 - p^2)(1 + p^2)$; д) $(-c + 4)(c + 4)$. **696.** а) $(3m - 2x)(3m + 2x)$; в) $(x^2 - 2c^2)(x^2 + 2c^2)$. **697.** а) $(x + 5)(x + 5)$; в) $(a - 4x)(a - 4x)$. **698.** а) $(a + m)(a + m)$; г) $(b - 3)(b - 3)$. **699.** а) $(1 + 3x)(1 + 3x)$; в) $3(a - b)(a - b)$.

700. а) $-(2c + 1)(2c + 1)$; в) $-(c - 2)(c - 2)$. **701.** а) $(2a + 9)(2a - 11)$; в) $(x + c + 3xc^2)(x + c - 3xc^2)$. **702.** а) $-5(4x + 5)(2x - 1)$; в) $(0{,}5 - 3a - 4a^2)(0{,}5 - 3a + 4a^2)$. **703.** а) $(3x - 5)(3x + 1)$; в) $(9x + 1) \times$

$\times(-x-1)$. **704.** а) $(8a+13)(2a+1)$. **705.** а) $(4+a)(4+a)$; в) $(x^2-7)(x^2-7)$. **706.** а) $(3a-1)(3a+1)(9a^2+1)$. **707.** а) $3(a-1)(a+1)$; в) $5(x-2)(x+2)$. **708.** а) 3; -3; в) 10; -10. **709.** а) 3; в) 4. **710.** а) 3; в) 1. **711.** а) $-\frac{1}{3}$; в) $-\frac{1}{2}$. **712.** а) $(xy-9)(xy+9)$; в) $\left(\frac{1}{3}p^3-4a\right)\left(\frac{1}{3}p^3+4a\right)$; д) $(a^5b^4c^2-1)(a^5b^4c^2+1)$. **713.** а) $(1-a-b-c)(1+a+b+c)$; г) $(x^2-6x+1)(x^2+1)$. **714.** а) $(a^2-n)\times(a^2-n)$; г) $(3c^4+x^3)(3c^4+x^3)$. **715.** а) $(n+4)(3n+2)$; г) $4(p+2q)(2p+q)$; е) $9c^2$. **716.** а) $(x-1)(x-1)(x+1)(x^2+1)$. **717.** а) 20; в) 17. **718.** а) 1. **719.** а) 1; г) 9. **720.** а) $(x-11)^2\geq 0$; г) $-((x-3)^2+1)<0$. **723.** а) $4c^2$; г) $36z$. **725.** а) $(x-1)(x-1)(x-1)$; г) $(2y-1)(2y-1)(2y-1)$. **726.** а) $(m+n)(m+n)(m+n)$; в) $(3a-b)\times(3a-b)(3a-b)$. **727.** а) $(3x+2y)(3x+2y)(3x+2y)$; г) $(0{,}5a+b^2)(0{,}5a+b^2)(0{,}5a+b^2)$. **728.** а) 5; г) $-\frac{1}{4}$. **729.** а) $\frac{1}{2}$; г) 10. **730.** -1; 0. **731.** б) $-\frac{1}{2}$; 3. **733.** 35; 37. **735.** 17; 38. **736.** а) $(x^n-1)(x^n+1)$; г) $(a^p-1)(a^p-1)$. **740.** $4{,}2\cdot10^8$; $3{,}8\cdot10^8$; $8\cdot10^{15}$; $2\cdot10$. **749.** б) $(0{,}1-a^2)(0{,}01+0{,}1a^2+a^4)$; в) $(3x^2-ay)(9x^4+3x^2ay+a^2y^2)$. **751.** д) $-(z+p)(z^2-zp+p^2)$. **753.** е) $\left(\frac{2}{3}-axz\right)\times\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{3}axz+a^2x^2z^2\right)$. **757.** в) $27x^3+125$. **758.** б) 0,000008. **759.** б) 4. **760.** а) 27. **761.** в) $0{,}125a^6+b^3$; г) $64m^3-m^6$. **763.** в) $27x^3+y^3$. **764.** а) $8a^{21}+b^{12}$. **765.** а) $a^{24}-8x^3$. **767.** б) p^3-q^6. **768.** в) x^6+y^6. **769.** г) $(3a+1)(21a^2-6a+1)$. **770.** в) $(x-y)(x^2+xy+y^2-1)$; г) $(a^2+ab+b^3)(a-b-1)$. **771.** б) 8. **772.** в) 12. **773.** $(x^3-y^n)(x^6+x^3y^n+y^{2n})$. **776.** б) 16. **777.** б) -1. **783.** 700 000 грн.; 200 000 грн. **790.** г) $3(3x-5)(3x+5)$; е) $a^2(10a-1)(10a+1)$. **791.** в) $x^2y(8-3y)(8+3y)$. **792.** д) $5a(3-a)(3+a)$. **793.** б) -6; 0; е) -1; 0; 1. **794.** г) 0; 0,04. **795.** б) $5a(2a-1)(2a-1)$; д) $p^2(1+3x)(1+3x)$. **796.** б) $-(a+$

$+ 3)(a + 3)$; в) $5(x - y^2)(x - y^2)$. **797.** г) $(x + 1 - a)(x + 1 + a)$. **798.** а) $4(b - 1)(a + 3)$; в) $(m - x - 2)(m + x + 2)$. **799.** а) $(x - a) \times$ $\times (1 + x + a)$; г) $(c + m)(c - m - 1)$.

800. б) $(c + 3)(c - d)(c + d)$; г) $(a + b)(1 - a^2 + ab - b^2)$. **802.** в) $-8y(y + 2)(y^2 - 2y + 4)$; д) $a(0{,}2 + a^2)(0{,}04 - 0{,}2a^2 + a^4)$. **803.** б) $a^3c(3a - c)(3a + c)$; д) $2(x^2 - 2)(x^2 + 2)$. **805.** б) $\frac{1}{2}z\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}z\right)\times$ $\times\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}z\right)$. **806.** б) $x(2a - 0{,}5x)(2a - 0{,}5x)$; г) $0{,}5a^2(x - 1)(x - 1)$. **807.** а) $a\left(\frac{1}{2}c - 1\right)\left(\frac{1}{2}c - 1\right)$. **809.** а) $a(x + y)(2 - y)$; г) $(3a + 1)(3a + 2)$. **810.** б) $x(x + a + 2)(x - c)$. **811.** б) $(a^2 + a + 1)(x^2 + y^2)$. **812.** б) $(a^2 -$ $- 1 - a + c)(a^2 - 1 + a - c)$. **813.** б) $(x^2 + 2)^2 + (y^2 + 2)^2$; г) $(x + 1)^2 +$ $+ x^2$. **814.** а) $(ab - 1)^2 - (c + 3)^2$; в) $(a - 2x)^2 - (x - c)^2$; г) $(a^2 - 2)^2 -$ $- (a + x)^2$. **815.** б) $(5c^2 + 5)^2$. **818.** а) 0; в) 3; д) -2. **819.** б) 0; г) 1. **833.** б) 2; г) 3. **834.** б) 3; г) -2. **835.** б) $-\frac{1}{2}$; 2. **836.** б) -2; 2; 0; 3. **837.** б) 1. **838.** б) -9; 9. **839.** в) -1; 5. **840.** б) -2; $\frac{1}{3}$; 2; г) -3; $\frac{3}{2}$; 3. **854.** $m = 8{,}6V$. **857.** $P = 3a$; да. **859.** $\alpha = 180 - \beta$; да; β. **861.** 7; 5; -1; 19; 2005. **864.** Да. **865.** Да. **866.** 30. **869.** а) Множество действительных чисел; б) множество действительных чисел, кроме $x = -5$. **870.** $y = 500 - 60x$; 1, 2, 3, ..., 7, 8. **871.** $z = 2{,}5m$; $z = 45$ грн; $m = 50$ кг. **872.** $m = 12t$, где время t — в часах, масса m — в тоннах. **873.** $x = 60t$, где время t — в часах, а x — в минутах. **874.** а) $y = -2x$; в) $y = 12 + \frac{x}{2}$. **875.** а) -21; -5; 7; 91; 195. **876.** а) 2; 0; в) -3; 0 и -6. **877.** $\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$; да. **879.** $s = 5 - 4t$, где время t — в часах, s — расстояние в километрах. **880.** $m = 600 + 40t$; да. **882.** $l = 2{,}54d$, $d = \frac{l}{2{,}54}$, где l — расстояние в сантиметрах, а d — в дюймах. **884.** $r = \frac{1}{2\pi}C$. **885.** а) Множество действительных чисел; в) множество действительных чисел, кроме $x = -4$. **886.** а) Множество действительных чисел; в) множество действительных чисел, кроме $x = -5$; д) множество действительных чисел, кроме $x = \pm 6$. **887.** $S = 100 - \pi x^2$, $0 < x < 10$. **891.** $\frac{\frac{n}{2} + 3}{n}$. **892.** а) $0{,}5a^3b - 0{,}32ab^3$; в) $-x^3y + 4xy^3$. **894.** а) $x = 5$; в) $z = -2$. **895.** 47 книг и 41 книга.

900. Да. **901.** б) ; в) ; д) ; е). **907.** а) Нет; в) да. **908.** а) D; в) E. **918.** б) ; д); е). **919.** а) Так. **920.** в) Т. A не принадлежит, т. B и C принадлежат. **927.** $m = 9$. **928.** $k = 2$. **929.** $m = 0$. **931.** а) $(a + c)(b + c)$; г) $(5x + y)(2a - b)$. **934.** а) $x = 3$; г) $x = 1$. **936.** б) Да. **937.** 2; 0. **943.** Да, да, нет. **944.** а) Да; б) нет; в) да. **947.** $m = 180s$, да. **950.** а) (0; 8), (–2; 0). **952.** а) (0; –3,4), (2; 0); д) (0; 1,5), (1,5; 0). **953.** а) (2; 2); г) (–3; 0). **955.** а) $k = -2$; б) $k = -3$. **956.** $k = 1$, $p = -0{,}5$. **960.** а) $y = \frac{1}{2}x + 1$. **964.** ≈180 грн.; ≈400 грн; 490 грн. **967.** а) $x = -\frac{1}{2}$. **968.** а) $x = 7{,}5$; в) $y = 10$. **969.** 60 км. **970.** Через 50 мин. **973.** а) Нет; б) нет; в) нет. **974.** а) (0; 0); б) (2; 0). **976.** а) (3; 2). **981.** 1) а) $y = 3 - \frac{3}{4}x$. **983.** а) Нет. **984.** а) один; г) ни одного. **985.** а) (0; 1). **986.** а) (3; –1); г) (0; 1). **987.** $a = 7$. **990.** а) $c = 4$; г) $c = 5$. **991.** а) $n = 3$; г) $n = 2$. **992.** а) $n = 0$; г) $n = 0$. **993.** а) (0; 0); в) (5; 0). **994.** а) (1; 0); г) (–1; 2). **995.** а) (–2; 0); г) (–2; 2). **997.** а) (1; 1). **998.** а) Ні. **999.** а) $a = 8$; г) $a = \pm 3$.

1000. а) $a = 8$; г) $a = -3$. **1001.** 18. **1002.** а) 27; г) 72. **1003.** 25. **1004.** 36. **1005.** 37. **1006.** 5 труб по 7 м и 4 трубы по 8 м. **1011.** $a = 1$. **1016.** б) Нет. **1017.** а) (0; –2) и (10; 0); г) $(0; \frac{1}{4})$ и $(-\frac{1}{2}; 0)$. **1018.** б) Нет. **1022.** 2,5. **1024.** а) 7; г) –2. **1026.** а) $c = 11$; г) $c = -9$. **1028.** а) $b = -4$; г) $b = -9$. **1030.** а) (0; 3) и (2; 0). **1047.** Да; нет. **1050.** а) 290 км; б) 110 км. **1051.** На 28 %. **1052.** а) $x = \pm 8$; б) $x = 7$ или $x = -3$. **1054.** а) Множество. **1055.** а) Нет.

1057. а) Да; г) да. **1064.** а) Один; г) множество. **1066.** Множество. **1071.** а) 1) При $a \neq \frac{1}{3}$; 2) при $a = \frac{1}{3}$. **1072.** а) 1) При $b = -6$; 2) при $b \neq -6$. **1073.** а) Нет; б) да (1,2). **1074.** а) $k = 1$. **1076.** а) −75. **1077.** а) $x^2 + x - 6$; г) $-z^2 - 2z + 15$. **1078.** $100a + 10b + c$. **1079.** 5. **1081.** Меди — 170 кг, цинка — 20 кг, олова — 10 кг. **1082.** б) $y = -5x$. **1083.** б) $x = 3y - 5$. **1084.** а) $y = 3x - 8$. **1086.** а) (7; 1). **1087.** а) (1; 2). **1088.** а) (11; 13). **1089.** а) (3; 2). **1090.** а) (8; 1). **1091.** а) (7; −3). **1092.** а) (0; 2). **1093.** а) Система решений не имеет. **1094.** а) (3; 2). **1095.** а) (16; 7). **1096.** а) (−0,5; −2). **1097.** а) (10; 2). **1098.** а) (10; 2). **1099.** а) (−61; 14).

1100. а) (−1; 8); б) (5; 6). **1101.** а) (2; 1); б) $(2; -\frac{1}{11})$; в) (7; −0,7). **1102.** а) (1; −1). **1103.** а) (8; 13). **1104.** а) (18; 6). **1105.** а) (20; 20). **1106.** а) (1; −1,5); б) (5,6; −0,2). **1107.** а) (21; 16); в) (5,25; 1,375). **1108.** (11; 4; 5). **1109.** (7; 10; 9). **1112.** а) $8a^3 - n^3$. **1113.** а) $a^9 - 1$. **1114.** а) $a^6 + 1$. **1115.** а) 1; в) 1. **1120.** а) (5; 2). **1121.** б) $(1; \frac{2}{3})$. **1122.** а) (5,5; 2). **1123.** а) (7; 1). **1124.** а) (1; 2). **1125.** а) (11; 13). **1126.** а) (3; 2). **1127.** а) (3; 2). **1128.** а) (16; 7). **1129.** а) (−0,5; −2). **1130.** а) $(3a; a)$. **1131.** а) $\left(\frac{n-m}{5}; \frac{8m-3n}{35}\right)$. **1132.** б) (2; 2). **1133.** а) (3; 1). **1134.** а) (2; 1). **1135.** а) (10; 2). **1136.** а) (3; 3). **1137.** а) (1; 1). **1138.** а) (9; 8). **1139.** а) (2; 1). **1140.** а) (4; 3). **1141.** б) $(0; -1\frac{3}{7})$. **1142.** а) (7; 1). **1143.** а) (3; 2). **1144.** б) (10; 1). **1145.** а) (4; 1). **1146.** а) (3; 2). **1147.** б) (2,2; 3). **1148.** (−1; −2). **1150.** а) (1; 2; 3). **1151.** а) (1; 3; 5). **1152.** а) (3; 5; 7). **1153.** а) Решение. Вычтем из первого уравнения второе — получим $z = 2x$. Тогда $y = 12 - 3x$, y будет целым и положительным при $x = 1, 2, 3, 4$. Подставим значение x в равенства $y = 12 - 3x$ и $z = 2x$ и получим решение системы: (1; 9; 2), (2; 6; 4), (3; 3; 6), (4; 0; 8). **1154.** Указание: $z = 9$, $2x + 3y = 68$; $y = 0, 2, 4, 6, \ldots, 22$.

1155. а) 7,9. в) 207. **1160.** 6 м и 3 м. **1161.** 20 маляров и 30 плотников. **1162.** 20 км/ч; 3 км/ч. **1165.** 24 и 11,5. **1166.** 45,4 и 30,4. **1167.** а) 11 и 1; б) 25 и 1. **1168.** 6 и 3. **1169.** 26 и 15. **1170.** 45 и 30. **1171.** 69 и 13. **1172.** 73 и 12. **1173.** 0,4 грн., 0,55 грн. **1174.** 36 лет и 12 лет. **1175.** 36 книг и 29 книг. **1176.** 38 учеников и 34 ученика. **1177.** 8 кг и 5 кг. **1178.** 21 м и 14 м. **1179.** 14 м и 21 м. **1180.** 102,5 га и 97,5 га. **1181.** $36\frac{2}{3}$ га и $63\frac{1}{3}$ га. **1182.** 46 см и 38 см. **1183.** а) 33 см и 30 см; б) $29\frac{16}{19}$ см и $33\frac{3}{19}$ см. **1184.** 34 см, 24 см и 24 см. **1185.** 22 см, 20 см и 20 см. **1186.** а) 7,5 и 3,5; б) 8,5 и 3,5. **1188.** 9,8 км/ч и 8,2 км/ч. **1191.** 12 км/ч, 60 км. **1192.** 20 дней и 30 дней. **1193.** 2 часа и 4 часа. **1194.** 5 км/ч и 3 км/ч. **1195.** 18 и 7 или –18 и –7. **1196.** 30 книг и 20 книг. **1197.** 24 ребенка, 9 столов. **1198.** 3 палки, 4 галки. **1199.** 40 лет и 12 лет.

1200. 10 лет и 4 года. **1201.** 5 мешков и 7 мешков. **1202.** 20 баранов. **1203.** 23 фазана и 12 кроликов. **1204.** 21 м/с и 9 м/с. **1205.** 20 м/с и 5 м/с. **1206.** 50. **1207.** а) $y = 2x + 1$. **1209.** а) $\left(50+\frac{1}{2}n\right)$ га и $\left(50-\frac{1}{2}n\right)$ га. **1210.** а) $\frac{1}{5}a$, $\frac{3}{10}a$, $\frac{1}{2}a$; б) $\frac{1000k}{k+p+t}$, $\frac{1000p}{k+p+t}$, $\frac{1000t}{k+p+t}$. **1212.** $\frac{100m}{p+k}$. **1213.** б) 1. **1214.** а) 8. **1215.** а) 4. **1219.** –5. **1220.** Не может. **1221.** При $a = 0$. **1223.** 150 монет, 21 купец. **1224.** 84 года. **1225.** 15 пчёл. **1226.** 7,5 и 2,5. **1227.** 4 и 6. **1228.** $9\frac{1}{5}$ флорина. **1229.** 36 учеников. **1230.** 12 овец. **1231.** 32 года, 14 лет и 12 лет. **1232.** 1440 деталей. **1233.** 150 станков. **1234.** 240 м^3 и 200 м^3. **1235.** 140 га. **1236.** 20 дней и 30 дней. **1237.** 80 км. **1238.** 1320 км, 230 км/ч. **1241.** б) –0,6. **1243.** б) $-\frac{3}{2}a^2x^5y^2$. **1244.** г) $0{,}125m^6$. **1247.** г) $4x - y - 3x^2y + 3xy^2 - 10$. **1248.** а) $3x^6 - 2x^2 - 8$; г) $b^2 - 8b^2c - c^2b$. **1249.** а) $6x^5 - 15x^2 + 3x$;

е) $15mn^5 + 9mn^3 - 3m$. **1250.** б) $-7x^4y + 32xy^3 - 10x^3y^3$. **1251.** а) $2x^3 + 5x^2 + 14x$. **1253.** а) $4a^2 - b^2$; д) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz$. **1254.** в) $0{,}0081x^{12} - x^4y^8$. **1255.** г) x^4. **1256.** е) $(abc - 11x^3)(abc + 11x^3)$; ж) $(a - b - c)(a + b + c)$. **1257.** г) 404; є) $53\frac{1}{3}$. **1258.** а) $0{,}16a^4 - 4a^3b + 25a^2b^2$. **1259.** а) $x^2 - 2xy^2 + y^4$; д) $0{,}01x^2y^2 - xy + 25$. **1260.** в) $3x^2 + 7xy$. **1263.** а) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$; д) $8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$. **1264.** б) $a^2(a - 1)(c^2 + 1)$; д) $x(y - 4)(z - 5)$. **1265.** а) $(a - b)(a + b - 1)$. **1266.** в) $(x - y + 4) \times (x + y - 4)$. **1267.** г) $(x + 5)(x - b)(x + b)$. **1268.** а) $(a - b)^2(x + 1)$. **1271.** а) 1. **1272.** а) 25. **1273.** а) 0 и $\frac{1}{5}$; в) 0 и 0,3. **1274.** а) -4; -1; 1. **1275.** а) $y = x + 4$; д) $y = \frac{1}{x}$. **1276.** $b = \frac{12}{a}$. **1277.** $180° - 3\alpha$. **1278.** $200 - 2{,}5x$. **1279.** а) Все числа; г) все числа, кроме $\frac{1}{3}$. **1282.** а) 3; $\frac{2}{3}$; -1. **1283.** а) $y = 3x$. **1287.** а) $x + 4y - 11 = 0$. **1289.** -5. **1290.** 9. **1292.** а) (5; 2). **1293.** а) (2; 3). **1294.** в) (10; 5). **1295.** (3; 2). **1297.** а) (0; 1). **1299.** $9\frac{7}{9}$ м и $12\frac{2}{9}$ м.

1300. 20 дней и 30 дней. **1301.** 800 т и 600 т. **1302.** 100 т и 300 т. **1303.** 24 г и16 г. **1304.** 6 : 7. **1305.** 70 кг, 50 кг и 130 кг. **1306.** 12 кг, 10 кг и 14 кг. **1307.** 160 яиц. **1308.** 9 м. **1309.** 46 и 11. **1310.** 1,25 грн. **1311.** 5 человек. **1312.** 2,1 км. **1313.** 12 км. **1322.** 9 и 28 частей. **1323.** 18 лет. **1324.** 3456 овец. **1325.** 79 франков и 96 сантимов. **1326.** 7 детей. **1327.** 1 вол, 9 коров.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ