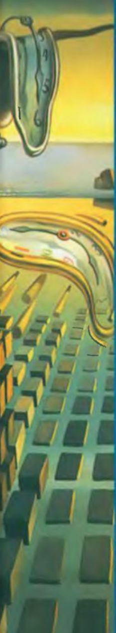
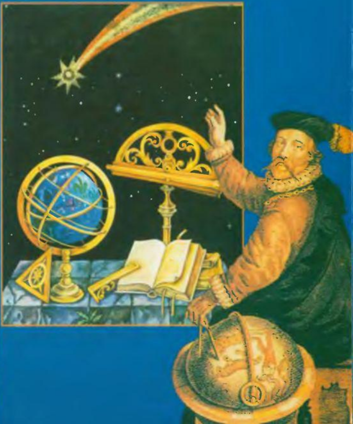


В.О. Тадеєв

ГЕОМЕТРІЯ 7

ПОГЛИБЛЕНИЙ КУРС



ББК 22.1я72
74.262.21
Т53

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук,
професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
О.Г. Кукуш

кандидат фізико-математичних наук,
доцент Тернопільського національного педагогічного університету ім. Володимира Гнатюка
В.Р. Кравчук

Тадеєв В.О.
Т53 Геометрія. Основні фігури: Дворівневий підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. В.І. Михайловського. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2007. — 352 с.

ISBN 978-966-408-284-3

Пропонований підручник відповідає державному стандарту і чинній програмі з математики для загальноосвітніх навчальних закладів. У підручнику значна увага приділяється питанням історичного, світоглядного та методологічного характеру.

ББК 22.1я72

ISBN 978-966-408-284-3

Переднє слово до учнів

Шановні друзі! Ви розкрили підручник з геометрії, науки, яка споконвіку вражала людський розум своєю довершеністю. Окрім виняткової естетичної принадності, геометрія з давніх-давен вважалася неперевершеною школою мудрості: вивчення цієї науки розвивало і шліфувало мислення. Відомо, зокрема, що над входом до Академії, яку заснував видатний давньогрецький філософ Платон, було вирізьблено напис: «Не заходь, не обізнаний з геометрією!» Ще красномовніше про освітній потенціал математики висловився Михайло Ломоносов: «Математику вже за те вивчати належить, що вона розум до ладу приводить». Геометрія — це розділ математики, в якому строга логіка дивовижним чином поєднується з живим наочним споглядfestanням. У жодній з інших наук образне і логічне мислення не переплітаються так тісно і не взаємозбагачуються так плідно, як у геометрії. Саме тому геометрія потрібна як «фізикам», так і «ліирикам».

А знати геометрію корисно усім без винятку. Пам'ятаєте, як здивувався відважний Гуллівер, відвідавши літаючий острів Лапуту? Усе життя цієї країни учених зосереджувалося довкола геометрії. Навіть мова тутешніх жителів рясніла геометричною фразеологією. Гуллівер щиро дивувався з цього. Проте якби він був нашим сучасником, то такого подиву, мабуть, не було б. Геометричними термінами пронизані тепер не лише природничі і технічні, а й гуманітарні науки, мистецтвознавство, навіть розмовна мова. Ось лише найпоширеніші слова і фразеологізми, які побутують у нашому мовленні і запозичені з геометричної термінології: аксіома, паралелі (історичні), площина, вектор, сфера (впливу), система координат, фокус, полюс, сектор, вимір, багатовимірність, симетричність тощо. Певна річ, щоб правильно розуміти і вживати ці слова, потрібно знати їхній первісний геометричний зміст. Геометричною мовою, як зауважив Ґалілей, написана й «книга природи».

Чи потрібні ще аргументи на користь вивчення геометрії? Їх можна наводити сотнями. Чимало з них ви зустрінете на полях цієї книги. Можливо, думки видатних людей стануть для вас додатковим стимулом до навчання.

Охарактеризуємо коротко сам підручник.

Зміст підручника скомпоновано так, що поряд з основними відомостями, обов'язковими для вивчення усіма учнями 7 класів загальноосвітніх навчальних закладів, подається чималий обсяг додаткової інформації. Вона надрукована меншим шрифтом на жовтому та блакитному фонах. Цей матеріал доповнює, розширює або поглиблює основний зміст і призначається передусім для тих, хто бажає вивчати математику поглиблено — самостійно, в профільному класі чи в спеціалізованій фізико-математичній школі (ліцеї або гімназії). Натомість учні загальноосвітніх шкіл можуть просто пропускати його або знайомитися з ним вибірково чи побіжно, і це жодним чином не вплине на можливість розуміння наступного обов'язкового матеріалу. Матеріал на жовтому фоні входить до програми з геометрії, але для старших класів. Ви ж маєте змогу знайомитися з ним вже тепер і тим самим навчатися з випередженням. Що ж до матеріалу на блакитному фоні, то з ним зазвичай ознайомлюються лише при поглибленому вивченні математики або на гурткових чи факультативних заняттях.

Поряд із текстами для поглибленого опрацювання подано портрети геніальних математиків Михайла Остроградського  і Софії Ковалевської . Це має символічне значення, адже життя цих видатних учених свідчить, зокрема, про те, що математика однаково доступна як для чоловіків, так і для жінок, а також про те, що успіхи в науці не залежать від місця народження людини (Остроградський народився на полтавському хуторі, а Ковалевська — в Москві). Біографії цих математиків є яскравим прикладом того, що для досягнення успіху потрібно бути наполегливим і цілеспрямованим (і Остроградський, і Ковалевська з різних причин спочатку не здобули визнання на батьківщині, але завдяки таланту і сумлінній праці згодом «підкорили» всю Європу). Тож черга за вами! Ставайте і ви такими, як Остроградський і Ковалевська!

Крім зазначеного додаткового навчального матеріалу, підручник містить також спеціальну рубрику «Сторінки історії». Відомості з цієї рубрики теж не є обов'язковими для вивчення. Але ознайомлення з ними розширить ваш кругозір, допоможе збагнути внутрішні мотиви розвитку математики. А це, в свою чергу, сприятиме глибшому розумінню цієї науки. Окрім самої назви рубрики, індикатором історичного матеріалу слугуватиме скульптурний портрет «батька історії» Геродота .

Задачі і вправи зазвичай розміщені в кінці параграфів у порядку зростання їхньої складності. Окремі, складніші з них, позначені зірочкою, а найпростіші (здебільшого усні) — кружечком. Рубрику задач по всьому підручнику супроводжує зображення богині мудрості Афіни , поряд з якою завжди її мудра сова.

Перед розв'язуванням задач радимо випробувати себе, даючи відповіді на запитання, які для вас приберіг мовчазний Сфінкс .

У підручнику подано також типові завдання для контрольних робіт (у двох варіантах). Ці завдання подаються з певним «надлишком» — відтак учні, які ознайомляться з ними заздалегідь, можуть не боятитися неприємних «сюрпризів» на контрольній.

Чимало задач у підручнику вміщено з розв'язаннями. Ці задачі значною мірою доповнюють основний зміст підручника новими фактами. Крім цього, на їхньому прикладі демонструються застосування встановлених фактів, а в окремих випадках — і певні загальні підходи до розв'язування задач. Нарешті, вони слугують зразками для оформлення розв'язань, яких належить дотримуватися в письмових роботах.

І насамкінець. Зараз у школах застосовуються різні підручники з математики. Проте, на жаль, більшість з них мають конспективний і догматичний характер. Якщо ж ви хочете по-справжньому розуміти геометрію, то поряд зі своїм шкільним підручником радимо мати ще й цей. Позитивний ефект від такого поєднання відчуєте дуже швидко, бо не тільки краще знатимете геометрію, а й добре розумітимете її і «бачитимете» довкола себе. Вивчати теорію буде цікавіше, бо знатимете, звідки вона взялася і для чого служить, а розв'язувати задачі — простіше, оскільки добре розумітимете теорію. І нехай вас не турбує, що матеріал у даному підручнику викладений в дещо іншій послідовності, ніж в інших. Це закономірно, адже тут враховується історичний шлях розвитку геометрії, а в інших його результати подаються уже в «готовому» й «препарованому» вигляді (тому учні часто не розуміють і не сприймають їх). Пройшовши приблизно третину цієї книги, ви увійдете в основне русло й «шкільного» підручника, але цей і надалі залишатиметься вам надійним дороговказом у новій для вас науці геометрії.

Бажаємо вам успіхів у вивченні геометрії!

Слово до вчителя

Вельмишановний колего! Керуючись *принципом диференціації змісту навчання*, створено підручник, що видається у 2-х варіантах — базовому (або звичайному, основному) і розширеному. Обсяг розширеного варіанта підручника більш як на третину перевищує обсяг основного. Саме цей розширений варіант ви зараз і тримаєте в руках.

Базовий варіант підручника повністю входить у розширений. Його укладено відповідно до чинної програми дванадцятирічної школи (хоча й із перестановкою окремих тем, що програмою не забороняється), з мінімальною деталізацією у розкритті теоретичних питань. Цей варіант розрахований на масову школу і на учнів, які не проявляють яскраво вираженого інтересу до вивчення математики.

Натомість розширений варіант підручника, окрім основного змісту, вміщує ще й значний за обсягом додатковий матеріал, який доповнює, розширює або поглиблює основний. Цей варіант розрахований на учнів, які проявляють підвищений інтерес до математики та її застосувань і хотіли б вивчати цей предмет на поглибленому рівні, — самостійно або в класі (школі, ліцеї, гімназії) з поглибленим вивченням математики.

Таким чином, кожен учень, де б він не проживав і в якій школі не навчався, матиме змогу вибирати для себе той варіант підручника, який йому більше імпонує. Так само й учитель одержує додаткові можливості для реалізації диференційованого навчання.

Другим важливим принципом, реалізованим у цьому підручнику (в обох його варіантах), є *принцип історичної перспективи*, або *історичного підходу*. Окрім величезного значення для гуманітаризації навчання, для підвищення інтересу до вивчення наук, для виховання моральності та поваги до інших народів і культур, цей принцип має ще й важливу дидактичну функцію. При його реалізації учні в своєму розвитку проходять педагогічно змодельованими основними етапами, які пройшла сама наука, а не перескакують через них і не опиняються час від часу несподівано на тих рівнях, які їм ще недоступні.

Реалізація історичного підходу здійснюється двома основними шляхами. По-перше, через відповідну йому послідовність розгортання змісту навчання. Наприклад, оскільки геометрія розпочалася з проблеми визначення площ, то з цієї ж теми розпочинається і підручник; або оскільки проблема квадратури фігур, тобто перетворення їх у рівновеликі квадрати, була однією з ключових у геометрії впродовж двох тисячоліть, то таке саме належне місце їй відведено і в підручнику. По-друге, історичний підхід реалізується шляхом введення спеціальної рубрики «Сторінки історії», в якій подаються додаткові відомості про вчених та їхні відкриття, що безпосередньо пов'язані з темою, яка на даний час вивчається.

Третім за значимістю є *принцип наступності й поступовості*. Акцентуємо на ньому увагу, бо існує згубна для освіти практика, коли так званий систематичний курс геометрії починається «з чистої дошки». Тобто майже зовсім не враховуться раніше здобуті знання, а також індуктивний характер попереднього навчання, отже, нехтується абсолютна непідготовленість учнів до негайної і систематичної реалізації формально-аксіоматичного підходу. У даному підручнику усе вивчене раніше активно використовується, а вивчення нового матеріалу здійснюється з поступовою формалізацією. Що ж до введення аксіоматики у строгому викладі, то це відкладається до старших класів, коли для цього вже буде підготовлено відповідний ґрунт.

Четвертим є *принцип фузіонізму*, тобто одночасного вивчення планіметричного й стереометричного матеріалу. Він дає змогу значно посилити мотивацію до навчання, оскільки більшість із практичних застосувань геометрії стосується саме простору. До того ж, елементи стереометрії є ефективним засобом для розвитку просторової уяви.

П'ятий принцип — це *принцип логічної довершеності змістових ліній*. Особливістю дитячого віку є «нетерплячість». Дітям нудними є довгі розмірковування над окремими відрізками, кутами, навіть трикутниками. Їм потрібно рухатися швидко, працювати щоразу з новими об'єктами. Тому, сказавши про трикутник, неможливо не сказати про многокутник, вивівши формулу для суми кутів трикутника, неможливо не розглянути питання про суму кутів многокутника, вивчивши паралельні прямі, просто дивно не сказати про паралелограм, а вивчивши коло, — не розглянути циліндр і сферу. Комусь це може здатися перевантаженням, але насправді це таке перевантаження, яке відповідає дитячій психології і тій особливій швидкості сприйняття, яка характерна для учнів цієї вікової категорії.

І, нарешті, шостий принцип — *це принцип відповідності логіки розгортання змісту навчання логіці основних методів досліджень у математиці*. Геометрія в підручнику викладається не догматично, не як одкровення, яке колись зійшло на декількох обраних і відтоді передається від учителя до учнів. Навпаки, підручник постійно спонукає учнів теоретизувати (що, до речі, в дослівному перекладі з грецької означає «придивлятися») і бути активним співучасником у відкритті нового знання. Відповідно до цього, структурні блоки теорії не розпочинаються з означення нових понять чи з формування теорем, а здебільшого завершуються ними як результатом проведеного дослідження.

Задачі і вправи, вміщені в підручнику, мають майже винятково навчальний характер і відносяться до так званої «задачної класики». Лише окремі з них можна умовно віднести до задач підвищеної складності і тому вони позначені зірочкою.

Бажаємо вам натхнення й успіхів у навчанні дітей геометрії — однієї з найдавніших, найзахопливіших і найкорисніших наук!

Алегорія Навчання. Гравюра на дереві з книги «Нова іконологія» Чезаре Ріпа, 1625 р.

Вступ

Чи звертали ви коли-небудь увагу на те, що в розмовній мові є чимало слів і виразів, які характеризують форму предметів та їхні розміри, наприклад: прямий, круглий, рівний, кривий, плоский, прямокутний, квадратний, трикутний, овальний, кулястий, циліндричний, опуклий, вгнутий, пологий, великий, малий, середній, як горошина, як макове зернятко, як палець, як голова, як гарбуз тощо. Кожна із цих характеристик певним чином описує предмет, до якого вона відноситься. Інколи ці характеристики бувають навіть надзвичайно влучні. Проте загалом вони нечіткі й неоднозначні. Наприклад, квадратними називають і клітинку в зошиті, і хлибину, круглим — і колесо, і м'яч, а овальними — і стадіон, і яйце. То ж користуватися ними можна лише на побутовому рівні.

У цій книжці є багато слів, не кожному зрозумілих. Тут вони майже всі означені ...

Микола Гоголь, «Вечори на хуторі біля Диканьки». З передмови до другої частини

Якщо ж потрібні абсолютно чіткі характеристики форми й розмірів, наприклад, при проектуванні будівлі чи інтер'єру, механізму, машини тощо, то для цього використовують засоби з арсеналу особливої науки про просторові форми — геометрії. Початкам цієї науки і присвячений даний підручник.

Геометрія — одна з найдавніших наук. Її назву утворено від давньогрецьких слів «гео» — земля і «метрео» — вимірюю. Отже, «геометрія» дослівно означає «землемірство». Така назва вказує на те, що зародження цієї науки відбулося дуже давно, ще до нашої ери, і що пов'язане воно було з вимірювальними роботами на місцевості. Отже, початково в геометрії досліджувалися лише плоскі форми. Але з часом сфери застосування геометрії розширювалися і тепер геометричні знання використовуються всюди, де виникає потреба в характеристиці та вимірюванні просторових форм. Просторові форми називають ще інакше *геометричними фігурами*. Отже, *геометрія — це наука про геометричні фігури та про способи їхнього задання й вимірювання*.

Уявлення про деякі з геометричних фігур ви вже маєте з попередніх класів, тому систематизація й невеличкі узагальнення, які ми зараз проведемо, будуть для вас абсолютно зрозумілими і природними.

— Ох, як шкода, що ми вже знайомі між собою!..
— Друзі! — раптово сказав удав і махнув хвостом. — А чому б нам не познайомитися ще раз?
І це було так приємно, що відтоді вони щодня знайомилися по два рази.
Григорій Остер, «38 папуг»

1. Поверхні, лінії і точки

Характеристики геометричних фігур, які вирізняють їх з-поміж інших фігур, називають *означеннями*.

Як же означити конкретну геометричну фігуру? Зрозуміло, що для цього доведеться залучати поняття про інші фігури, а саме ті, з яких дану фігуру ми хочемо виділити за допомогою додаткових характеристик. У свою чергу, для означення тих «інших» фігур потрібні ще інші фігури, і т. д. Тому аби цей процес не продовжувався нескінченно, потрібно зупинитися на певних найпростіших (первісних) формах, для яких означень уже не вводити, а лише описати певні уявлення про них на основі спостереження за реальними предметами. До таких первісних форм відносяться *поверхні*, *лінії* і *точки*.


Рис. 1

Уявлення про поверхню виникає тоді, коли ми подумки відділяємо зовнішній (видимий) бік предмета від його внутрішності. Границя між внутрішністю предмета і зовнішнім простором утворює *поверхню*. Наприклад, поверхнею яблука (рис. 1) з певною умовністю можна вважати його шкірку. А взагалі в геометрії вважається, що поверхня не має товщини.

Поверхні бувають найрізноманітніших видів. Найпростіші з них називаються *плоскими поверхнями*. Плоскими є, наприклад, поверхні стола, віконної шиби, стін, підлоги, даху, водного плеса ставка (рис. 2)


Рис. 2

тощо. Часто плоску поверхню уявляють продовженою в усі боки як завгодно далеко. Тоді вона називається *площиною*.

Уявлення про *лінію* дає нитка, стрічка (рис. 3) чи довга мотузка. Саме слово *linea*, від якого утворено слово «лінія», в перекладі з латинської мови означає «лляна нитка». Лінія теж уявляється без товщини.

Найпростіші лінії — *прямі*. Пряма лінія утвориться, якщо нитку або мотузку напнути (рис. 4). Часто в геометрії пряму лінію уявляють продовженою в обидва боки як завгодно далеко. Тоді її частину, обмежену з двох боків, називають *відрізком*, а частину, обмежену лише з одного боку, — *променем* або *півпрямою* (рис. 5).

По лініях перетинаються поверхні. Наприклад, плоскі поверхні стіни і стелі перетинаються по прямих лініях (рис. 6), а окремі частини кузова автомобіля — по кривих лініях (рис. 7).

Уявлення про *точку* дають дуже дрібні предмети, якщо їх розглядати поряд з великими. Наприклад, точкою можна вважати слід від тонко загостреного олівця в зошиті, макове зернятко (рис. 8), корабель у відкритому морі, літак високо в небі тощо.

Для спрощення вважається, що точка не має ніяких розмірів — ні довжини, ні ширини, ні висоти. Точки утворюються при перетині ліній. Наприклад, лінії в зошиті «у клітинку» перетинаються в точках — вершинах клітинок.

З іншого боку, рухома точка утворює лінію. Наприклад, добре видно лінії, які утворюють іскри від вогнища або падаючі метеорити в нічному небі (див. рис. на обкладинці).

Узагалі кожна лінія складається з точок. Так само з точок складається і кожна поверхня. На будь-якій лінії і на будь-якій поверхні є безліч точок.

Якщо лінія обмежена, то її кінцями теж є точки. Зокрема, точками є *кінці відрізка*. Промінь обмежений

Рис. 3

Рис. 4

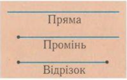


Рис. 5

Рис. 6

Рис. 7

точкою лише з одного боку, тому ця точка називається *початком променя*.

Як сказано вище, з усіх ліній найпростішими в геометрії вважаються прямі, а з усіх поверхонь — площини. Підставою для цього є те, що для задання прямої достатньо вказати лише дві її точки, а для задання площини — лише три точки, що не лежать на одній прямій. Жодна інша лінія, окрім прямої, двома своїми точками не визначається повністю. Так само, жодна інша поверхня, окрім площини, не визначається повністю лише трьома своїми точками. Отже, виконуються такі дві основні властивості прямих і площин:

1) ***через будь-які дві точки можна провести, і до того ж тільки одну, пряму;***

2) ***через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести, і до того ж тільки одну, площину.***

При цьому під проведенням прямих і площин здебільшого розуміють суто умовне проведення, тобто проведення в уяві, хоча при зображенні на рисунку прямі справді проводять, наприклад, під лінійку. Проводять прямі й на місцевості, наприклад, за допомогою мотузки. Чимало існує й реально проведених площин, наприклад, стіни і дахи будинків.

Точки позначають великими літерами латинського алфавіту, а прямі — або двома літерами, що позначають які-небудь дві точки прямої, або однією малою латинською літерою. На рис. 9 зображено дві прямі — AB та l. Аналогічно позначають і промені. Однак початок променя завжди записується першим. Наприклад, на рис. 10 зображено промені OM та n. Площини позначають малими грецькими літерами α, β, γ тощо. Наприклад, на рис. 11 зображено площину α з точками M, P і Q на ній.

Відрізки теж позначають двома великими літерами, які вказують на їхні кінці. Наприклад, на рис. 12 зображено відрізок AB. Інколи відрізок позначають

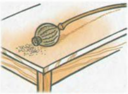


Рис. 8

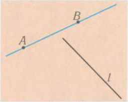


Рис. 9

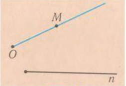


Рис. 10

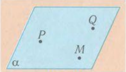


Рис. 11

Рис. 12

однією малою літерою, якщо хочуть наголосити на тому, що йдеться про довжину даного відрізка.

Довжину відрізка визначають шляхом вимірювання або порівняння з іншими відрізками, довжини яких відомі. Два відрізки, які мають однакові довжини, називаються *рівними*. Рівні відрізки можна сумістити один з одним. Навпаки, якщо відрізки можна сумістити, то вони рівні. Довжину відрізка називають також *відстанню* між його кінцями.

Незважаючи на простоту, точки, прямі і площини називають *основними геометричними фігурами*. Підставою для цього є те, що інші фігури означаються з допомогою цих основних фігур або їхніх частин.

Якщо всі точки фігури належать одній площині, то ця фігура називається *плоскою*. У геометрії зазвичай спочатку вивчаються плоскі фігури, а вже потім просторові. Та частина геометрії, в якій вивчаються плоскі фігури, називається *планіметрією*, а та, в якій вивчаються просторові фігури, називається *стереометрією* (слово «стереос» означає «просторовий»).

2. Кути

Два промені зі спільним початком утворюють фігуру, яка називається *кутом*. Спільний початок променів називається *вершиною* кута, а самі промені — його *сторонами*.

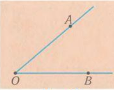


Рис. 13

Кут позначається значком $\angle$ і трьома великими латинськими літерами, з яких середня позначає вершину кута, а крайні дві — точки на його сторонах. Наприклад, на рис. 13 зображено кут AOB. Часто кут позначають і однією буквою, що позначає його вершину, наприклад, $\angle O$, але це за умови, що при вершині O не розглядається інших кутів. Нарешті, інколи кути зручно позначати цифрами. Наприклад, на рис. 14 при вершині O зображено три кути: $\angle 1$, $\angle 2$ і $\angle 3$.

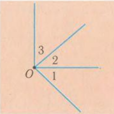


Рис. 14

Якщо сторони кута є *взаємно доповняльними променями*, тобто утворюють пряму, то такий кут називається *розгорнутим*. Наприклад, на рис. 15 зображено розгорнутий кут O.

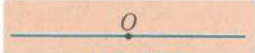


Рис. 15

Кути вимірюють у градусах. Вважається, що найбільшим є розгорнутий кут і що його величина дорівнює $180°$.

Кути називаються *рівними*, якщо їх можна сумістити. Рівні кути мають рівні градусні міри. Навпаки, якщо градусні міри кутів рівні, то рівні й самі кути. Для більшої наочності на рисунках рівні кути відзначають за допомогою однакової кількості дужок, поставлених біля їхніх вершин. Наприклад, на рис. 16 за допомогою двох дужок позначено рівність кутів O і Q.

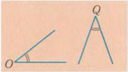


Рис. 16

Якщо два кути розміщені на площині таким чином, що в них одна сторона спільна, а дві інші є взаємно доповняльними променями, то такі кути називаються *суміжними*. Наприклад, на рис. 17 зображено суміжні кути AOB і BOC.

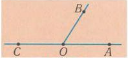


Рис. 17

Кут, який рівний зі своїм суміжним, називається *прямим*. На рис. 18 зображені прямі суміжні кути 1 і 2. Прямі кути на рисунках часто відзначають значком ⌐. Оскільки два суміжних кути утворюють розгорнутий кут, а величина розгорнутого кута дорівнює $180°$, то два прямих кути теж у сумі дають $180°$. Отже, прямий кут має величину $180° : 2 = 90°$.

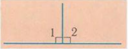


Рис. 18

Кут, величина якого менша від $90°$, називається *гострим*, а кут, величина якого більша за $90°$, але менша від $180°$, називається *тупим*. На рис. 19 зображено гострий кут A і тупий кут B.

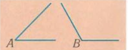


Рис. 19

Промінь, який виходить з вершини кута і ділить його на два рівних кути, називається *бісектрисою* цього кута (від латинських *bis* — двічі і *secare* — розтинати). На рис. 20 OA — бісектриса кута O.

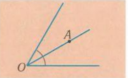


Рис. 20

Якщо кут розмістити на площині, то він розіб'є її на дві частини, кожна з яких теж називається *кутом*. Часто їх називають *плоскими кутами*, аби відрізняти від *лінійних кутів*, утворених самими променями. Якщо лінійний кут розгорнутий, то визначені ним плоскі кути рівні між собою (рис. 21). Вважають, що їхні величини рівні по 180°. В противному разі плоскі кути не рівні (рис. 22). Тоді величина меншого з них така сама, як градусна міра даного лінійного кута, а величина більшого доповнює її до 360°. Наприклад, менший з плоских кутів, зображених на рис. 22, дорівнює 50°, а більший — 360° − 50°, тобто 310°.


Рис. 21

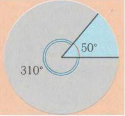


Рис. 22

3. Многокутники

Окремим видом ліній є ламані лінії або просто ламані. *Ламаною* називається лінія, яка складається з декількох відрізків, розміщених так, що кінець першого є початком другого, кінець другого — початком третього і т. д. Кожен із цих відрізків називається *ланкою* ламаної, а їхні кінці — ***вершинами*** ламаної. На рис. 23 зображено ламану $ABCDE$. Її ланками є відрізки AB, BC, CD і DE, а вершинами — точки A, B, C, D, E.

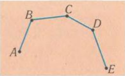


Рис. 23

Якщо початок першої ланки ламаної суміщається з кінцем останньої, то ламана називається *замкненою*. На рис. 24 зображені дві замкнені ламані $ABCD$ та $KLMNP$. Всі ланки ламаної $ABCD$ перетинаються лише у вершинах, а ланки LM і PN ламаної $KLMNP$ — ще й у внутрішній точці Q. У цьому останньому випадку кажуть, що ламана має точку самоперетину.

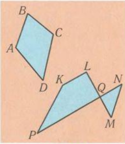


Рис. 24

Якщо замкнена ламана не має точок самоперетину, то вона розбиває площину на дві області — внутрішню і зовнішню. Ламана разом із внутрішньою областю називається *многокутником*. Вершини ламаної називаються *вершинами* многокутника, а ланки ламаної — *сторонами* многокутника. Кількості сторін і вершин многокутника однакові. Залежно від цієї кількості многокутник називається *трикутником*, *чотирикутником*, *п'ятикутником*, *n-кутником*. На рис. 25 зображено трикутник ABC та п'ятикутник $DEFGH$.

Сума довжин усіх сторін многокутника називається його *периметром* (від древньогрецьких слів «периферія» і «метрео», що разом означають «вимір околиць»).

Відрізок, який з'єднує дві вершини многокутника, що не належать одній його стороні, називається *діагоналлю* многокутника (від грецьких слів «діа» — через і «гоніо» — кут). На рис. 26 AC та EG — діагоналі чотирикутників $ABCD$ та $EFGK$ відповідно.

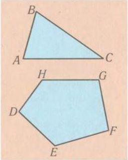


Рис. 25

Два відрізки AB і AC, що мають спільний кінець A, визначають кут BAC, сторони якого містять дані відрізки (рис. 27). Кажуть, що цей кут *утворений* даними відрізками. При кожній вершині многокутника можна розглядати плоский кут, який утворений його сторонами і містить даний многокутник. Цей кут називається *кутом многокутника* при даній вершині (або ще *внутрішнім кутом* многокутника при цій вершині). Наприклад, на рис. 28 BAE — внутрішній кут многокутника $ABCDE$.

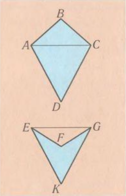


Рис. 26

Якщо всі кути многокутника менші від 180°, то такий многокутник називається *опуклим*, а в противному разі — *неопуклим*. П'ятикутник $ABCDE$, зображений на рис. 28, — опуклий, а п'ятикутник $ABCDE$, зображений на рис. 29, — неопуклий, бо в ньому кут D більший за 180°.

Будь-який трикутник є опуклим, оскільки жоден з його кутів не може перевищувати 180°. Залежно від величини кутів, трикутники називаються *гостро-*

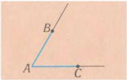


Рис. 27

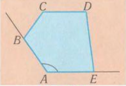


Рис. 28

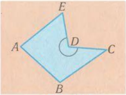


Рис. 29

кутними, *прямокутними* або *тупокутними* (рис. 30). У гострокутному трикутнику всі кути гострі. У прямокутному трикутнику один із кутів прямий, а в тупокутному — один із кутів тупий.

Трикутник, який має дві рівні сторони, називається *рівнобедреним*. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називаються *бічними* сторонами, а третя його сторона — *основою*. У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні. Рівні сторони трикутника (або іншого многокутника) на рисунках часто відзначають однаковою кількістю рисочок. На рис. 31 зображено рівнобедрений трикутник ABC з бічними сторонами AB і AC та основою BC. Кути B і C цього трикутника рівні між собою.

Трикутник, у якого всі три сторони рівні, називається *рівностороннім* або *правильним*. Усі кути рівностороннього трикутника рівні між собою.

Відрізок бісектриси кута трикутника, взятий від вершини трикутника до точки перетину з протилежною стороною, називається *бісектрисою трикутника*. На рис. 32 AK — бісектриса трикутника ABC, проведена з вершини A.

Чотирикутник, в якого всі кути прямі, а протилежні сторони попарно рівні, називається *прямокутником*. На рис. 33 зображено прямокутник $ABCD$. Якщо у прямокутнику рівні всі сторони, то він називається *квадратом*. На рис. 34 зображено квадрат $PQRS$.

Рис. 30

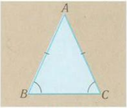


Рис. 31

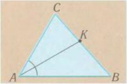


Рис. 32

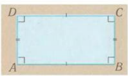


Рис. 33

Рис. 34

Вершини C і D прямокутника $ABCD$ (див. рис. 33) рівновіддалені від прямої AB. Узагалі всі точки прямої DC рівновіддалені від прямої AB. Так само всі точки прямої AB рівновіддалені від прямої DC. Прямі з такою властивістю називаються *паралельними*. Паралельні прямі не перетинаються.

Прямі AB та AD, які містять суміжні сторони прямокутника, утворюють прямий кут DAB. Прямі з такою властивістю називаються *перпендикулярними* або *взаємно перпендикулярними*. *Перпендикулярними* називають і відрізки AB та AD.

4. Коло і круг

Дуже важливими геометричними фігурами є коло і круг. *Коло* утворюють усі точки M площини, розміщені на однаковій відстані R від деякої точки O цієї площини (рис. 35). Точка O називається *центром* кола, а відстань R — його *радіусом*. *Радіусом* кола називають також і кожен з відрізків OM, що з'єднує центр кола O з довільною точкою M на колі.

Відрізок KL, що сполучає дві точки на колі і проходить через його центр O (рис. 36), називається *діаметром* кола. Очевидно, що діаметр кола дорівнює двом його радіусам.

Діаметр кола розбиває коло на дві частини, кожна з яких називається *півколом*.

Як і многокутник, коло теж розбиває площину на дві частини — внутрішню і зовнішню (рис. 37). Точки

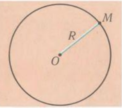


Рис. 35

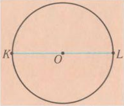


Рис. 36

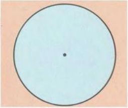


Рис. 37

кола і всі його внутрішні точки утворюють фігуру, яка називається *кругом*. Центр, радіус, діаметр і хорда кола називаються відповідно *центром*, *радіусом*, *діаметром* і *хордою* обмеженого ним круга.

5. Як розбудовується геометрія

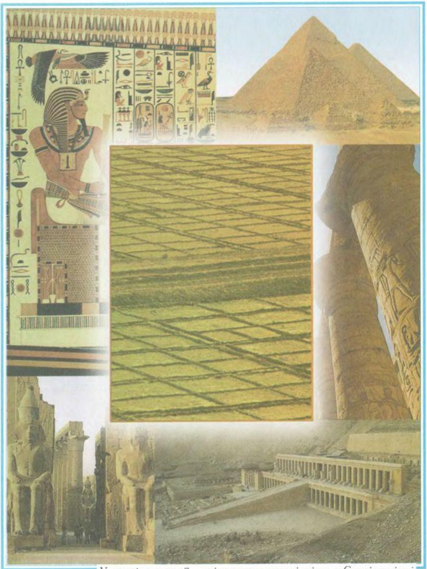
Після того, як означено певний запас геометричних фігур, виникають природні запитання про інші властивості цих фігур, які прямо в означеннях не вказані, але випливають з них як логічні наслідки. Наприклад, в означенні рівнобедреного трикутника не вказано, що в нього кути при основі рівні, однак таку властивість він має. Так само в означенні рівностороннього трикутника зовсім не йдеться про його кути, проте можна довести, що кожен із них дорівнює 60°. Ще один приклад: в означенні прямокутного трикутника вказується, що такий трикутник має прямий кут, але зовсім нічого не мовиться про величини інших його кутів, в той час як можна довести, що обидва вони гострі.

... Я відчуваю, що тут прихована якась таємниця. Але ми з вами, звичайно, колись її розкриємо. Будемо спостерігати. Уважно спостерігати...

Жуль Верн, «Таємничий острів»

Логічне, тобто мисленнєве виведення властивостей геометричних фігур з уже відомих — це те суттєве, що відрізнятиме геометрію, до якої ви приступаєте зараз, від елементів геометрії, з якими ви знайомилися в попередніх класах. Навіть якщо деякі властивості здаватимуться вам «очевидними» з рисунка, ми все одно будемо їх доводити за допомогою логічних міркувань, оскільки рисунок відображає лише якусь окрему ситуацію, а відповідна властивість стосуватиметься усіх подібних ситуацій. Тому допоки немає логічного доведення, то й немає впевненості, що для іншого рисунка ця властивість теж виконуватиметься.

Отже, геометрія в цьому підручнику буде вибудовуватися як упорядкована сукупність знань, в якій кожне наступне положення обґрунтовується на основі попередніх за допомогою міркувань.



У центрі композиції — сільськогосподарські угіддя в Єгипті, поділені системою іригаційних каналів на прямокутні ділянки

Розділ I
Вимірювання многокутників (З чого починалася геометрія)

§1 Прямокутник — одне з первісних джерел геометрії

1.1. Як геометрія зароджувалася

Щоби побудувати цю найвеличнішу будову людського духу, якою є математика, треба було праці не поколінь, а цілих тисячоліть.

Володимир Левицький

«Батько історії» Геродот, який жив ще у V ст. до н. е., походження геометрії пов'язував з Давнім Єгиптом. У своїй «Історії» він неодноразово згадує ім'я легендарного єгипетського фараона Сесостріса (чи Сезоостріса), повідомляючи, зокрема, про нього таке:

«Кажуть, що цей цар розподілив країну між усіма без винятку єгиптянами. Кожному він дав однакову з іншими прямокутну ділянку і призначив сплачувати щорічний податок; в такий спосіб він забезпечив собі прибутки. Якщо ріка змиває якусь частину ділянки котрогось господаря, то він може прийти до самого царя і сказати йому, що трапилося. Тоді цар посилає людей, щоб вони довідалися і вирішили, наскільки зменшилася оброблювана ділянка. Відповідно до цього в майбутньому має зменшитися і сплачуваний її господарем податок. А я маю думку, що так було винайдено геометрію і звідти вона прийшла в Елладу».

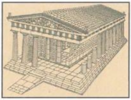
Звичайно, в цьому повідомленні, як і взагалі у свідченнях давніх літописців, багато символічного. Але сутність явища передана доволі точно. Усе життя давніх єгиптян, які створили одну з найперших і найдивовижніших цивілізацій, було тісно пов'язане з «рікою життя» Нілом. Єгиптяни селилися у порівняно вузькій смузі вздовж цієї величної ріки. Ніл з астрономічною точністю щороку розливався, приносячи на поля шар родючого мулу. Згодом велика вода спадала, і за справу бралися землеміри, щоб відновити усі змиті межі. І робити це потрібно було повсюдно та щороку. Від точності роботи землемірів залежали добробут і суспільна справедливість.

Давньоєгипетський архітектор.
В руках у нього засоби та еталони для вимірювання

У наведеному свідченні Геродота стверджується, що давні єгиптяни ділили свої угіддя на прямокутні ділянки. Звичайно, на рівнинній території, яку щороку потрібно було перерозподіляти заново, — це найраціональніший спосіб поділу. У тих краях він зберігся й понині. У центрі вміщеної перед початком розділу композиції відтворено типовий єгипетський ландшафт із сільськогосподарськими угіддями, поділеними системою іригаційних каналів на прямокутні ділянки.

1.2. Побудова й ознаки прямокутника

Зі свідчення Геродота, нехай і міфологізованого, можна зробити цілком вірогідний висновок про те, що прямокутник був першою геометричною фігурою, яка привернула до себе увагу дослідників. Є також всі підстави вважати, що геометрія, яка, за словами Геродота, із Єгипту перейшла в Елладу, розпочалася на нових теренах саме з дослідження прямокутника. Доволі переконливим свідченням цього може бути класична грецька архітектура, в якій, як і в давньоєгипетській, домінували прямокутні форми. Зокрема, найважливіші культові споруди складалися із прямокутних елементів.



План Парфенону.
Прямокутні форми були основою античної архітектури

Незважаючи на, здавалося б, виняткову простоту прямокутника, у цій фігурі втілені фундаментальні геометричні властивості нашого світу. Відкриття цих властивостей є ключем до вивчення інших геометричних фігур та їхнього вимірювання.

Нагадаємо, що *прямокутником* називається чотирикутник, у якому всі чотири кути прямі (звідси і назва — *прямокутник*), а протилежні сторони попарно рівні.

На рис. 1.1 зображено прямокутник $ABCD$. У ньому кути A, B, C, D — прямі, сторона AB рівна протилежній стороні DC, а сторона AD — протилежній стороні BC. Довжина однієї зі сторін прямокутника, зазвичай більшої, називається *довжиною* або *основою* прямокутника, а довжина суміжної з нею сторони, зазвичай меншої, — *шириною* або *висотою* прямокутника. На рис. 1.1 AB — довжина прямокутника $ABCD$, AD — його ширина. Довжина та ширина (основа й висота) прямокутника називаються його *вимірами*.

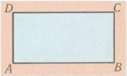


Рис. 1.1

Якщо виміри прямокутника однакові, то він називається *квадратом*. На рис. 1.2 зображено квадрат $ABCD$. Назву «квадрат» утворено від латинського числівника quadro — «чотири». Цим акцентується увага на тому, що у квадраті рівними є всі чотири кути (вони прямі) і всі чотири сторони.

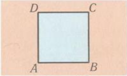


Рис. 1.2

До важливих властивостей прямокутника належать його ознаки. Слово «ознака» в геометрії вживається часто. Тому наведемо невеличкий коментар до нього.

У повсякденній мові ознаками називають певні риси, прояви яких дають змогу зі значною вірогідністю судити про приналежність їх певному предмету або притаманність певному явищу (згадайте назву відомого кінофільму Ю. Іллєнка «Білий птах з чорною ознакою»). Близьким за значенням до цього слова є слово «прикмета», яке особливо часто вживається у прогнозах погоди та інших сезонних явищ, а також більш спеціальне слово «симптом» (у медицині). На відміну від цього, *ознаками* в геометрії називають певні достатні умови, виконання яких забезпечує не вірогідне, а абсолютно безсумнівне виконання відповідних властивостей фігур. Тому інколи їх називають ще «критеріями» — від грецького «крітеріон» тобто «засіб для визначення».

За ознаками прямокутника цю фігуру зазвичай будують практики. При цьому як правило застосовуються два способи.

Спосіб 1. Спочатку будують сторону AB, рівну довжині прямокутника (рис. 1.3). Потім — два прямі кути MAB і NBA з вершинами A і B по один бік від сторони AB. Нарешті, на сторонах AM і BN побудованих кутів відкладають рівні відрізки AD і BC, довжини яких дорівнюють ширині прямокутника, і з'єднують відрізком точки D і C. Тоді чотирикутник $ABCD$ буде прямокутником з потрібними вимірами, тобто у ньому кути D і C теж будуть прямими, а сторона DC — рівною стороні AB.

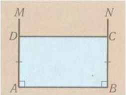


Рис. 1.3

Спосіб 2. Спочатку так само, як і в способі 1, будують сторону AB, якою визначається довжина прямокутника, і прямі кути MAB та NBA, що «прилягають» до неї (рис. 1.4). Але потім тільки на стороні MA (чи NB) одного з побудованих кутів відкладають відрізок AD, що дорівнює ширині прямокутника, та будують третій прямий кут ADL з того боку від сторони AD, з якого лежить промінь BN. Тоді промені BN і DL, перетнувшись, визначать четверту вершину C прямокутника $ABCD$, тобто утворений при цьому кут C теж буде прямим, а сторони DC і BC — рівними відповідно сторонам AB і AD.

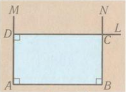


Рис. 1.4

Якщо в кожному із цих способів сторони AB і AD прямокутника будуть рівними, то побудований прямокутник буде квадратом.

Із зазначених практичних способів для побудови прямокутника маємо такі дві *ознаки* цієї фігури, які й гарантують, що даний або побудований чотирикутник є прямокутником.

Ознака 1.

Якщо в чотирикутнику *ABCD* кути *A* і *B* — прямі, а протилежні сторони *AD* і *BC* рівні між собою і лежать з одного боку від прямої *AB* (рис. 1.5), **то цей чотирикутник — прямокутник, тобто у ньому кути *C* і *D* теж прямі, і рівні також протилежні сторони *DC* та *AB*.**

Рис. 1.5

Ознака 2.

Якщо в чотирикутнику *ABCD* три кути *A*, *B* і *D* — прямі (рис. 1.6), **то цей чотирикутник — прямокутник, тобто у ньому четвертий кут *C* теж прямий, і рівними є протилежні сторони *AB* і *DC* та *AD* і *BC*.**

Рис. 1.6

Як бачимо, побудова прямокутника тим чи іншим способом зводиться до побудови прямих кутів та до відкладання на їхніх сторонах відрізків потрібної довжини.

Відкладання відрізків здійснюється дуже просто — за допомогою вимірної лінійки, циркуля або якої-небудь стрічки, чи навіть мотузки.

Побудову прямих кутів на рисунку найпростіше здійснити за допомогою косинця (рис. 1.7) або кутника (рис. 1.8). Інколи, особливо в креслярській та в столярній справі, використовується ще й лінійка. Тоді до заданого відрізка *AB* прикладається край лінійки, а вже до лінійки — одна зі сторін прямого кута косинця чи кутника (рис. 1.9).

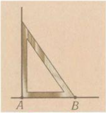


Рис. 1.7

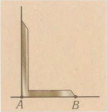


Рис. 1.8

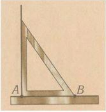


Рис. 1.9

На рівній місцевості прямі кути можна розбити за допомогою дуже простого приладу, який називається *екером* (від французького equerre («кутомір»), яке, в свою чергу, походить від латинського quadrare, що означає «зробити квадратним»). Основною «робочою частиною» екера є хрестовина або квадратна дощечка, що кріпиться на ніжці чи на тринозі (рис. 1.10). Тут позначені два відрізки, що перетинаються під прямим кутом. На кінцях цих відрізків вбиті штирки або гвіздки.

Рис. 1.10

Для побудови прямого кута за допомогою екера його ніжку або триногу ставлять так, щоб хрестовина зайняла горизонтальне положення, а її центр розмістився прямо над вершиною кута. Потім один із взаємно перпендикулярних напрямів виставляють вздовж заданої сторони кута. Тоді інший напрям визначить іншу його сторону (рис. 1.11). Обидва напрями фіксують за допомогою віх — довгих палиць із загостреним кінцем. Віхи теж ставлять вертикально уздовж намічених сторін кута. Для цього відповідні вертикальні штирки на екері і встромлені в землю віхи для сторони кута повинні зливатися, якщо дивитися на них вздовж сторони кута.

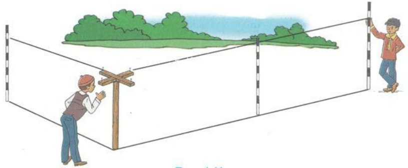


Рис. 1.11

1.3. Розбиття прямокутника на менші прямокутники

У практиці землевпорядкування часто виникає потреба у розбитті великих прямокутних ділянок на менші прямокутники. Зокрема, саме так розбивають великі посівні площі, оскільки поля прямокутної форми найкращі для механізованого обробітку та обліку. Та й на присадибному городі грядки під різні культури влаштовують прямокутними. Врешті-решт, і самі міжряддя є дуже вузькими і видовженими прямокутниками. Тож, звичайно, задачу про розбиття прямокутника на менші вирішували ще прадавні землероби і землевпорядники. Зокрема, про це й вказує Геродот, повідомляючи про зародження геометрії у Давньому Єгипті.

Хто знає ціле, може пізнати і його частину, але хто знає частину, ще не знає цілого.

Лукіан, «Про вибір філософії»

Окрім землевпорядкування ця сама задача виникає «на кожному кроці» в найрізноманітніших інших сферах, навіть у побуті. Наприклад, при наклеюванні шпалер, оббивці стін дошкою-вагонкою, викладанні керамічної плитки чи паркету, покрівлі даху листовим залізом або черепицею і т. ін.

Зрозуміло, що існує безліч різних способів для розбиття прямокутника на менші прямокутники. Але всі вони базуються на розбиттях, що здійснюються за допомогою відрізків з кінцями на протилежних сторонах заданого прямокутника, проведеними перпендикулярно до цих сторін. Саме такі розбиття здійснюють при виведенні формули для знаходження площі прямокутника. Тому на них ми зараз і зосередимо свою увагу.

Нагадаємо, що відрізки називаються перпендикулярними (або взаємно перпендикулярними), якщо вони перетинаються під прямим кутом.

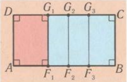


Рис. 1.12

Візьмемо на стороні AB прямокутника $ABCD$ які-небудь точки F_1, F_2, F_3,..., а на протилежній стороні DC — відповідні їм точки G_1, G_2, G_3, ... (рис. 1.12), розміщені так, що $DG_1 = AF_1$, $DG_2 = AF_2$, $DG_3 = AF_3$, і т. д. Після цього проведемо відрізки F_1G_1, F_2G_2,

F_3G_3, ... У результаті прямокутник $ABCD$ розіб'ється на чотирикутники AF_1G_1D, $F_1F_2G_2G_1$, $F_2F_3G_3G_2$, ..., які будуть прямокутниками.

Справді, в чотирикутнику AF_1G_1D маємо два прямих кути A і D (це кути прямокутника $ABCD$) і рівні сторони AF_1 і DG_1. Тому за першою ознакою — це прямокутник. Оскільки, таким чином, кути AF_1G_1 і DG_1F_1 — прямі, то прямими є і суміжні з ними кути $G_1F_1F_2$, $G_2G_1F_1$, які доповнюють їх до розгорнутих кутів. Крім цього, рівними є відрізки F_1F_2 та G_1G_2 (бо вони дорівнюють різницям $AF_2 - AF_1$ та $DG_2 - DG_1$ відповідно рівних відрізків). Отже, за тією самою першою ознакою, чотирикутник $F_1F_2G_2G_1$, — теж прямокутник. І тому прямими є кути $F_1F_2G_2$ та $G_1G_2F_2$.

Продовживши ці міркування далі, доведемо, що справді всі одержані чотирикутники будуть прямокутниками.

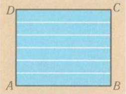


Рис. 1.13

Зрозуміло, що подібне розбиття прямокутника $ABCD$ відрізками з кінцями на двох інших протилежних сторонах AD і BC (рис. 1.13) теж буде розбиттям на прямокутники.

Як у першому, так і в другому випадку один з вимірів одержаних прямокутників дорівнюватиме одному з вимірів заданого прямокутника.

А тепер уявімо, що проведено певну кількість відрізків першого виду і певну кількість відрізків другого виду (рис. 1.14). У результаті теж одержимо розбиття прямокутника $ABCD$ на менші прямокутники, але тепер уже обидва виміри будуть меншими від відповідних вимірів прямокутника $ABCD$.

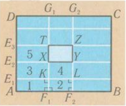


Рис. 1.14

Справді, покажемо для прикладу, що прямокутником є виділений чотирикутник $XYZT$.

У чотирикутнику 1, відповідно до попереднього, маємо прямі кути при трьох вершинах A, F_1, E_1. Тоді, за другою ознакою прямокутника, — це прямокутник. Звідси випливає, що всі чотири кути при вершині K — прямі. Отже, за тією ж другою ознакою, прямокутниками є чотирикутники 2 і 3. Таким чином, прямими є всі кути при вершинах L, X. Тому прямокутниками є чотирикутники 4 і 5. Отже, прямими є всі кути при вершинах T, Y. Оскільки, таким чином, у чотирикутнику $XYZT$ маємо три прямих кути — при вершинах X, Y, T, то за другою ознакою це — прямокутник, що й треба було довести.

Зауважимо, що виміри XY та XT прямокутника $XYZT$ дорівнюють відповідно відрізкам F_1F_2 та E_2E_3. Якщо ці відрізки взяти рівними, то прямокутник $XYZT$ буде квадратом.

1.4. Площа прямокутника

Виміри прямокутника — цілі числа

Ще давні єгиптяни знали, що площа прямокутної ділянки визначається добутком її довжини на ширину. Ви теж це знаєте і можете легко обґрунтувати, якщо ділянка має цілочисельні виміри. Основою для обґрунтування є розбиття прямокутника на одиничні квадрати, що здійснюється за способом, описаним у попередньому пункті.

Навіть відоме відоме не кожному.

Арістотель, «Поетика»

Нехай довжина прямокутника становить m одиниць, а ширина — n одиниць (рис. 1.15). У наш час для вимірювань найчастіше застосовують метричні одиниці — метр, дециметр, сантиметр, а єгиптяни застосовували лікоть або долоню. Але конкретний вибір одиниць вимірювання зовсім не впливає на характер міркувань.

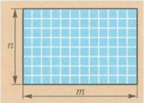


Рис. 1.15

Розіб'ємо кожну сторону прямокутника на рівні частини, довжини яких дорівнюють одиниці вимірювання. Потім кожну пару точок, що лежать на двох протилежних сторонах і рівновіддалені від однієї з інших сторін прямокутника, з'єднаємо відрізком. Відповідно до висновків з попереднього пункту, одержимо розбиття прямокутника на одиничні квадрати, тобто квадрати, довжини сторін яких дорівнюють одиниці вимірювання. Таких квадратів буде n шарів по m штук у кожному (або m шарів по n штук у кожному), отже, загалом $m \cdot n$ штук. Тому якщо площу одного такого квадрата взяти за одиницю для вимірювання площ, то площа S усього прямокутника дорівнюватиме $m \cdot n$ таких одиниць. Звідси й одержуємо відому формулу:

$$S = m \cdot n.$$

Нерозважно вчинили б математики, якби вони, відкинувши найпростіші поняття, почали досліджувати складні.

Михайло Ломоносов

Якщо довжини сторін прямокутника будуть виміряні в метрах, то значення площі прямокутника, обчислене за цією формулою, одержимо у квадратних метрах (пишуть кв. м або м^2), якщо сторони прямокутника виражатимуться у сантиметрах, то значення площі одержимо у квадратних сантиметрах (пишуть кв. см або см^2) тощо. А якщо довжини будуть виміряні в ліктях, футах, дюймах тощо, то й площа одержиться відповідно у квадратних ліктях, квадратних футах, квадратних дюймах і т. ін.

Зокрема, площа квадрата зі стороною n цілих одиниць довжини (рис. 1.16) дорівнюватиме $n \cdot n$, тобто n^2 відповідних квадратних одиниць. Звідси й назва «n квадрат» або «n у квадраті» для другого степеня числа n — адже числом n^2 виражається площа квадрата зі стороною завдовжки n одиниць вимірювання.

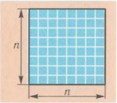


Рис. 1.16

Зазначимо також, що у практиці вимірювання великих територій та акваторій застосовуються квадратні одиниці, утворені в інший спосіб, а саме як кратні від основних квадратних одиниць. Найпоширенішими серед них є ар (від латинського area — поверхня, площа) та гектар (від грецького слова «гекатон» і слова «ар» — сто і ар).

1 ар (скорочено 1 а) = 10 · 10 кв. м = 100 кв. м;

1 гектар (скорочено 1 га) = 100 а =
= 100 · 100 кв. м = 10 000 кв. м.

У побуті 1 ар часто називають 1 соткою або 1 сотою, оскільки він дорівнює сотій частині від гектара.

Виміри прямокутника — дробові числа

А як визначити площу прямокутника, якщо його виміри a і b не цілі? Чи можна і тоді проводити обчислення за тією самою формулою $S = a \cdot b$, що й у випадку цілих вимірів a, b? Давні єгиптяни так і робили, і, напевно, мали для цього певні підстави. А ви теж так діяли б? Тоді на чому ґрунтується ваша відповідь? Чи не на тому, що у випадку цілочисельних значень a і b ця формула дає правильний результат?

Таке беззастережне перенесення висновків, одержаних за інших умов, непереконливе. Тому проведемо строге доведення формули $S = a \cdot b$ для випадку дробових вимірів a, b прямокутника.

Отже, нехай тепер виміри a, b прямокутника — дробові числа. Не виключається, що одне з них може бути й цілим. Тоді їх можна звести до спільного знаменника. Будемо вважати, що це вже зроблено, тобто, що $a = \dfrac{p}{q}$, а $b = \dfrac{r}{q}$, де p, q, r — деякі натуральні числа. Якщо відрізок завдовжки $\dfrac{1}{q}$ візьмемо за нову одиницю вимірювання довжин, то в цих нових одиницях сторони прямокутника матимуть уже цілочисельні виміри $a = p$ і $b = r$, а тому його площа у відповідних нових квадратних одиницях виражатиметься числом $p \cdot r$. Отже, для вираження цієї площі у початкових квадратних одиницях потрібно знайти, скільки у початковій квадратній одиниці міститься

— Ти занадто швидко злякався! Якби ти так не поспішав, то б побачив, що лякатися не варто, адже нічого страшного тут немає.

— Так-так! — підтвердив удав. — У цій справі поспішати не варто. Перш ніж чогось боятися, потрібно спочатку подивитися, страшне воно чи ні. А то чого даремно старатися? Ти його боїшся, а воно, можливо, зовсім і не страшне.

Григорій Остер, «38 папуг»

нових (подрібнених) квадратних одиниць, і тоді число $p \cdot r$ поділити на цю кількість.

В нових одиницях вимірювання довжин сторона початкового одиничного квадрата матиме довжину q. Тому площа одиничного квадрата в нових квадратних одиницях дорівнюватиме q^2. А це означає, що в початковій квадратній одиниці міститься q^2 нових квадратних одиниць (рис. 1.17). Тому площа S прямокутника у початкових квадратних одиницях дорівнює:

$$S = (p \cdot r) : q^2 = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{q} = a \cdot b.$$

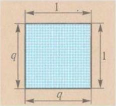


Рис. 1.17

Таким чином, формула $S = a \cdot b$ істинна для прямокутників з будь-якими раціональними (тобто цілими або дробовими) вимірами.

Наприклад, якщо $a = 2\frac{1}{3}$ м, а $b = 3\frac{3}{5}$ м, то площа прямокутника з такими вимірами дорівнюватиме $2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{3}{5} = \frac{7}{3} \cdot \frac{18}{5} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$ (м^2). Це означає, що цей прямокутник займає таку саму частину площини, що й 8 повних квадратів і ще $\frac{2}{5}$ одного повного квадрата зі стороною 1 м.

Із запропонованого доведення стає зрозумілим, звідки беруться співвідношення між різними квадратними одиницями. Оскільки, наприклад, 1 м містить 10 дм (або 10^2 см чи 10^3 мм), то 1 квадратний метр містить $10 \cdot 10 = 100$ кв. дм (або $10^2 \cdot 10^2 = 10\,000$ кв. см чи $10^3 \cdot 10^3 = 1\,000\,000$ кв. мм). Так само з'ясовуємо, що оскільки в 1 км міститься 1000 м, то 1 кв. км вміщує $1\,000 \cdot 1\,000 = 1\,000\,000$ кв. м.

1.5. Приклад типової практичної задачі

Задача.

План підлоги помешкання, яку потрібно застелити паркетом, має вигляд многокутника, зображеного на рис. 1.18. Усі кути між сусідніми сторонами прямі. Для закупівлі паркету необхідно визначити площу підлоги. Для цього зняті всі необхідні розміри (в метрах); їх вказано на плані. Чому ж дорівнює площа підлоги?

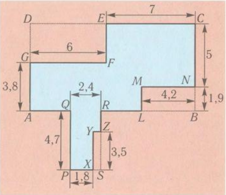


Рис. 1.18

Розв'язання. Шукану площу можна знайти як площу двох прямокутників $ABCD$ та $PQRS$, від якої віднімаються площі прямокутників $DEFG$, $BLMN$ та $SXYZ$.

Виміри прямокутника $ABCD$ дорівнюють $6 + 7 = 13$ (м) та $5 + 1{,}9 = 6{,}9$ (м). Тому його площа $S_1 = 13 \cdot 6{,}9 = 89{,}7$ (м²).

Виміри прямокутника $PQRS$ дорівнюють 4,7 м та 2,4 м. Тому його площа $S_2 = 4{,}7 \cdot 2{,}4 = 11{,}28$ (м²).

Виміри прямокутника $DEFG$ дорівнюють 6 м і $5 + 1{,}9 - 3{,}8 = 3{,}1$ (м). Тому його площа $S_3 = 6 \cdot 3{,}1 = 18{,}6$ (м²).

Виміри прямокутника $BLMN$ дорівнюють 4,2 м і 1,9 м. Тому його площа $S_4 = 4{,}2 \cdot 1{,}9 = 7{,}98$ (м²).

Виміри прямокутника $SXYZ$ дорівнюють 3,5 м та $2{,}4 - 1{,}8 = 0{,}6$ (м). Тому його площа $S_5 = 3{,}5 \cdot 0{,}6 = 2{,}1$ (м²).

Отже, шукана площа підлоги дорівнює: $S_1 + S_2 - S_3 - S_4 - S_5 = 89{,}7 + 11{,}28 - 18{,}6 - 7{,}98 - 2{,}1 = 72{,}3 \approx 72$ (м²).

Відповідь. ≈ 72 м².

... а що може бути прекраснішого, ніж поставити науку на служіння людям!
Жуль Верн,
«Діти капітана Гранта»

1.6. Цікаві арифметичні та алгебраїчні застосування площі квадрата і прямокутника

Арифметика — давня математична наука про цілі числа («арифмос» в перекладі з грецької означає «число»). За античною легендою, арифметику серед інших дарів приніс людям сам Прометей. Ця наука в античному світі вшановувалася найбільше. Зокрема, арифметичними дослідженнями багато займалися піфагорійці — учні й послідовники легендарного Піфагора. Вони навіть вважали, що числа правлять світом.

Піфагорійці помітили, що квадрат, сторона якого виражається цілим числом n, можна розбити на n кутників одиничної ширини, вважаючи одним із кутників і одиничний квадратик (рис. 1.19). Площі цих кутників виражаються послідовними непарними числами 1, 3, 5, ... Останнім у цій послідовності є число $n + (n - 1)$, тобто $2n - 1$. А оскільки площа всього квадрата дорівнює n^2, то звідси одержується дивовижна формула для суми усіх непарних чисел від 1 до $2n - 1$ включно:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

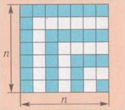


Рис. 1.19

* * *

Евклід, який був автором першого ґрунтовного підручника з геометрії, вказав на цікаве застосування площі прямокутника і квадрата для виведення правил спрощеного виконання алгебраїчних операцій. Ось як, для прикладу, можна геометричним способом вивести відому алгебраїчну формулу скороченого множення:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

для додатних чисел a і b (при $a > b$).

Розглянемо квадрат зі стороною a, в якому вміщено менший квадрат зі стороною b, як показано на рис. 1.20. Продовжимо сторони меншого квадрата до перетину зі сторонами більшого. Тоді одержимо розбиття більшого квадрата (з площею a^2) на квадрат з площею b^2, квадрат зі стороною $a - b$ і два прямокутники зі сторонами b та $a - b$. Останні три фігури можна з'єднати в один прямокутник зі сторонами $a - b$ та $a + b$.

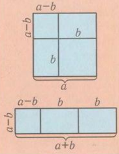


Рис. 1.20

Отже, якщо від площі a^2 великого квадрата віднімемо площу b^2 меншого, то одержимо площу $(a - b)(a + b)$ згаданого об'єднаного прямокутника. Звідси й випливає потрібна формула.

Розвиваючи ці ідеї, визначний середньовічний арабський математик Аль-Хорезмі (780 − 847) (в Європі його називали Алгоритмусом, звідси пізніше утворилося широковживане тепер слово «алгоритм»), розробив геометричні способи для розв'язування так званих квадратних рівнянь. Квадратними називаються рівняння вигляду $x^2 + bx + c = 0$, де x — невідоме, a, b і c — конкретні числа (назва походить від того, що ці рівняння містять квадрат невідомої величини).

Ідею Аль-Хорезмі розглянемо на прикладі рівняння $x^2 + 10x - 39 = 0$.

Запишемо дане рівняння у формі $x^2 + 5x + 5x = 39$. Тоді вираз у лівій його частині виражатиме площу фігури, що має форму кутника з невідомою шириною x (рис. 1.21). Бачимо, що квадрат зі стороною 5 доповнює цей кутник до квадрата зі стороною $x + 5$. Тому якщо до обох частин рівняння додамо площу квадрата зі стороною 5, що дорівнює 25, то матимемо рівність $(x + 5)^2 = 39 + 25$. Звідси $x + 5 = 8$. Отже, $x = 3$.

Звісно, цей спосіб давав змогу знаходити лише додатні корені рівнянь (наприклад, розглянуте рівняння має ще й від'ємний корінь $x = -13$). Але від'ємних чисел тоді ще не використовували.

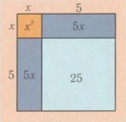


Рис. 1.21

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Геометрія і... математика

Навчальна дисципліна, яка, починаючи з 1 класу, ознайомлює школярів в тому числі і з окремими геометричними фактами, називається *математикою*. Окрім геометричних відомостей, на уроках математики вивчаються ще числа та операції з ними, способи складання та розв'язування рівнянь, а також приклади застосування цих знань для розв'язування задач із практичним змістом.

— А ти знаєш математику?

— Ні, — відповіла мавпа, — не знаю. І слоненя її теж не знає. Тому бананів вона не отримає.

— Математика не їсть бананів! — вигукнув папуга. — Вона — наука. Її потрібно вивчати, щоб проводити наукові дії.

Григорій Остер, «38 папуг»

Розпочинаючи з 7 класу, математика розділяється на дві окремі математичні дисципліни — геометрію та алгебру (а в старшій школі з алгебри виокремлюються ще початки математичного аналізу). Проте зв'язок між окремими математичними дисциплінами ніколи не втрачається. Для характеристики геометричних величин застосовують числові міри та формули, за якими обчислюють їхні значення. Застосовують і рівняння для знаходження невідомих величин. Зі свого боку, для алгебраїчних формул і рівнянь застосовують геометричні моделі у вигляді графіків, схем та діаграм, що суттєво допомагає в дослідженні цих формул та при знаходженні розв'язків рівнянь.

Слово «математика» виникло в Давній Греції приблизно у V ст. до н.е. в середовищі «піфагорійців», тобто послідовників легендарного Піфагора. Походить воно від слова «матема», що означає «вчення» або «знання». Давні греки визнавали тільки 4 матема: вчення про числа (арифметику), вчення про фігури (геометрію), вчення про пропорції в природі та мистецтві (гармонію) та вчення про форми світу (астрономію). Неодмінною умовою належності до математики було виведення цього знання шляхом логічного міркування, тобто за допомогою мислення. Характерно, що інші науки, наприклад, фізику, географію, історію у Давній Греції не тільки не відносили до «матема», але й узагалі не вважали вартими уваги справжніх учених (філософів). Вважалося, що тільки математика має тверді основи, оскільки вони здобуті розумом, тобто найвищою субстанцією, а не вкрай недосконалими органами відчуття, які часто спонукають людину помилятися.

Піфагор.
Символічний портрет.
Гравюра невідомого художника XVI ст.

Перші піфагорійці тримали математичні знання в суворій таємниці від непосвячених. Через те їх називали *акусматиками* (від слова «акусма» — «звук», «священний вислів»). З метою збереження таємниці передача знання від учителя до учнів відбувалась лише в усній формі. Проте згодом гору взяли *математики*, які вважали, що справжні знання можуть і повинні бути доступні усім. Легенда, правда, стверджує, що якомусь Гіппасу, який розголосив таємницю встановленої піфагорійцями несумірності сторони і діагоналі квадрата, його колишні соратники ще за життя спорудили могилу і що невдовзі той таки і загинув під час шторму на морі.

В епоху середньовіччя давньогрецьке слово *математика* вживалося рідко, а те, що ми зараз відносимо до математики, тоді називали *арифметикою* та *геометрією*. У XVI–XVII ст., коли Європа ознайомилася із здобутками середньовічної арабської науки, з'явилася *алгебра*. Арабською була не лише назва цієї науки, але і її зміст — розв'язування рівнянь (цим античні математики майже не займалися). Певний час з арабським терміном «алгебра» конкурував латинський термін «аналіз», що мав той самий зміст. Але пізніше аналізом назвали відгалуження алгебри, яке виникло у зв'язку із введенням поняття функції.

Термін «математика» для сукупної назви арифметики, геометрії, алгебри та аналізу почали систематично застосовувати у XVIII ст. Проте ще у першій половині наступного XIX ст. кожного значного математика називали геометром, навіть якщо він зовсім не займався власне геометрією, а проводив дослідження в інших розділах математики.

Алегорична фігура «Геометрія» із серії «Основні науки», створеної французьким художником Етьєном Делоном (1518 — бл. 1583).

Незважаючи на очевидні відмінності, різні математичні дисципліни мають одну суттєву спільну рису, яка споріднює їх між собою і вирізняє з-поміж інших наук. Усі поняття, які вивчаються в математичних науках — різноманітні числа, фігури, формули, функції тощо, є мисленнєвими образами і тому вони можуть розглядатися й аналізуватися окремо від будь-яких матеріальних носіїв. Після того, як встановлені основні властивості цих мисленнєвих образів (в геометрії ці властивості називаються аксіомами, в алгебрі — правилами та законами), усі інші властивості виводяться із них уже суто логічним шляхом.

Перевір себе

1. Як пояснює походження геометрії «батько історії» Геродот?
2. На які фігури розбивали свої угіддя давні єгиптяни після розливів Нілу. Чому саме на такі?
3. Яку фігуру називають прямокутником? Яку — квадратом? Як пояснити ці назви?
4. Що таке виміри прямокутника? Як ще інакше вони називаються?
5. Як можна побудувати прямокутник за допомогою креслярських інструментів? А як розбити прямокутник на місцевості?
6. За якими ознаками можна розпізнати прямокутник серед інших чотирикутників?
7. Як можна розбити прямокутник на менші прямокутники? Чи завжди прямокутник можна розбити на квадрати?
8. Чи можна стверджувати, що квадрат є прямокутником? А прямокутник — квадратом?
9. В яких одиницях найчастіше вимірюють площі фігур? Чи можете ви назвати співвідношення між ними?
10. Як виводиться формула для площі прямокутника у випадку цілочисельних вимірів? Як записується ця формула? Чи істинна вона, якщо виміри прямокутника — дробові?
11. Як обчислюється площа квадрата? Як із цим пов'язана назва «квадрат» для другого степеня числа?

Задачі і вправи

1°. На площині задано дві точки A і B. Скільки можна побудувати квадратів, дві сусідні вершини яких збігаються з цими точками? А прямокутників? Як зміняться відповіді, якщо точки A і B будуть задані в просторі?

2°. Чи можете ви сформулювати яку-небудь ознаку квадрата?

3°. Периметр квадрата дорівнює 32 см. Чому дорівнює його площа?

4°. Площа квадрата дорівнює 49 м^2. Чому дорівнює його периметр?

5°. Квадрат і прямокутник мають рівні площі. Сторона квадрата 12 см, а одна зі сторін прямокутника — 9 см. Чому дорівнює інша сторона прямокутника?

6°. Два прямокутники мають спільну сторону і рівні площі. Чи можна стверджувати, що вони суміщаються один з одним?

7°. Площа квадрата (у $м^2$) виражається тим самим числом, що і його периметр (у м). Чому дорівнює сторона цього квадрата?

8°. Як зміниться площа квадрата, якщо його сторона: а) подвоїться; б) потроїться; в) стане удвічі меншою?

9°. Як зміниться площа прямокутника, якщо: а) його висота та основа подвояться; б) основа та висота зменшаться утричі; в) основа збільшиться в 4 рази, а висота зменшиться в 4 рази; г) основа збільшиться у 6 разів, а висота зменшиться у 3 рази?

10. Визначте площу повної поверхні куба, якщо його ребро дорівнює: а) 1 см; б) 10 см; в) 100 см; г) 1 м.

11. Визначте площу бічної та повної поверхонь куба, якщо його ребро дорівнює: а) 8 см; б) 10 см; в) 12 см.

12. В основі прямокутного паралелепіпеда лежить прямокутник зі сторонами 2 см і 4 см. Висота паралелепіпеда дорівнює 2 см. Визначте площі бічної та повної поверхонь цього паралелепіпеда.

13. Довжина, ширина та висота прямокутного паралелепіпеда дорівнюють відповідно 12 см, 8 см і 20 см. Визначте площі бічної та повної поверхонь цього паралелепіпеда.

14°. Визначте сторону квадрата, якщо його площа дорівнює 256 $см^2$.

15°. Квадрат і прямокутник мають рівні площі. Чому дорівнює сторона квадрата, якщо прямокутник має розміри 25 см $\times$ 16 см?

16°. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 12 см, а його площа — 168 $см^2$. Визначте іншу сторону прямокутника.

17°. Визначте невідому сторону прямокутника, якщо його площа та відома сторона відповідно дорівнюють: а) 270 $см^2$ і 15 см; б) 142 $м^2$ і 35 м 50 см; в) 16 $км^2$ і 4000 м; г) 0,096 $км^2$ і 300 м.

18. **1.** Площа земельної ділянки дорівнює 250 а. Чому дорівнює площа цієї ділянки: а) у квадратних метрах; б) у квадратних кілометрах; в) у гектарах?
2. Площа земельної ділянки дорівнює 24 га. Чому дорівнює площа цієї ділянки: а) у квадратних кілометрах; б) у квадратних метрах; в) в арах?
3. Площа земельної ділянки дорівнює 350 000 $м^2$. Виразіть цю площу: а) у квадратних кілометрах; б) в арах; в) у гектарах.

19. Яка одиниця вимірювання площ більша — 1 ар чи 1 сотка?

20. Як ви вважаєте, площа футбольного поля більша від 1 га, чи менша?

21. Як потрібно змінити довжину однієї сторони прямокутника, залишаючи іншу незмінною, аби площа прямокутника збільшилася учетверо? Як для цього можна змінювати обидві сторони?

22. Доведіть, що коли два прямокутники мають одну основу, то відношення їхніх площ дорівнює відношенню висот.

23. Визначте периметр квадрата, площа якого дорівнює 25 $м^2$.

24. Прямокутну ділянку землі засівають травою. Розміри ділянки 22 м × 28 м. Скільки знадобиться пакетів насіння, якщо вмісту одного пакета вистачає, щоб засіяти 70 м^2?

25. Довжина кімнати 5,4 м, а ширина — 4,2 м. У кімнаті два вікна з шириною 1,2 м і висотою 1,6 м. Освітленість кімнати вважається нормальною, якщо площа вікон (світлова площа) становить 20% від площі підлоги. Чи нормальною є освітленість даної кімнати?

26. Відомо, що периметр прямокутника, кожна зі сторін якого вимірюється цілим числом сантиметрів, дорівнює 12 см. Визначте площу цього прямокутника. В якому випадку площа прямокутника буде найбільшою?

27. Скільки потрібно кахельних плиток розміром 10 см × 10 см, щоб викласти ними прямокутну ділянку стіни розміром 4 м 70 см × 2 м 10 см?

28. Визначте сторони прямокутника, якщо вони відносяться, як 7 : 4, а площа прямокутника дорівнює 112 см^2.

29. Одна зі сторін прямокутника на 4 см більша від іншої, а його площа дорівнює 21 см^2. Визначте сторони прямокутника.

30. Відношення площ двох квадратів дорівнює 36. Чому дорівнює відношення їхніх периметрів?

31. Відношення периметрів двох квадратів дорівнює 3. Чому дорівнює відношення їхніх площ?

32. Чи зможете ви розрізати квадрат на три прямокутники з рівними площами так, щоб не всі ці прямокутники мали однакові виміри?

33. Площа прямокутника дорівнює 48 см^2, а одна з його сторін — 8 см. Пряма розбиває його на два рівних прямокутники. Визначте периметри цих прямокутників.

34. Основа та висота першого прямокутника відповідно дорівнюють 20 см і 60 см, площа другого прямокутника дорівнює половині площі першого, а одна з його сторін дорівнює 50 см. Визначте периметр другого прямокутника.

35. Площі двох прямокутників, які мають однакову висоту, відносяться, як 9:8. Різниця основ цих прямокутників дорівнює 2 м. Визначте невідомі основи обох прямокутників.

36. Дві земельні ділянки обгородили парканом однакової довжини. Перша ділянка має форму прямокутника зі сторонами 180 м і 140 м, а друга — форму квадрата. Яка із цих ділянок має більшу площу і на скільки?

37. Навколо будинку з прямокутним фундаментом, довжина якого 40 м, а ширина 30 м, поставили прямокутний паркан на відстані 10 м від кожної сторони фундаменту. Визначте площу двору і довжину паркана.

38. Визначте найменшу площу гаража для двох автомобілів, які мають габарити 4,5 м × 1,8 м, щоб між автомобілями і стінками, а також між самими автомобілями був прохід завширшки 1 м.

39. **1.** На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо кожну його сторону збільшити на 10%?

2. На скільки відсотків зменшиться площа прямокутника, якщо кожну його сторону зменшити на 10%?

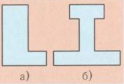


Рис. 1.22

40. Визначте площі фігур, зображених на рис. 1.22 а), б), розбивши їх на прямокутники та провівши необхідні вимірювання.

41. Запишіть формули, за якими, знаючи a, b, c і d, можна обчислити площі фігур, зображених на рис. 1.23, а) – в).

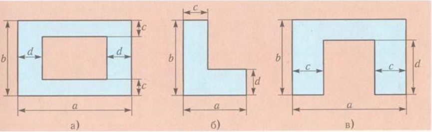


Рис. 1.23

42. Площі фігур, зображених на рис. 1.24, а), б) (розміри подано в міліметрах), дорівнюють: а) 550 мм^2; б) 1 300 мм^2. Визначте x.

43. Визначте площу ділянки, план якої зображено на рис. 1.25. Всі розміри подано в метрах.

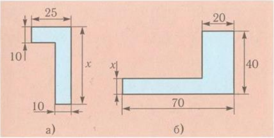


Рис. 1.24

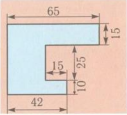


Рис. 1.25

44. За допомогою рис. 1.26, а) і б) можна легко вивести алгебраїчні формули $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ та $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ для додатних чисел a і b. Чи зможете ви це зробити?

45. Формулу для площі прямокутника можна застосовувати для обґрунтування переставного і розподільного законів множення додатних чисел. Чи зможете ви провести ці обґрунтування?

46*. Визначте сторони прямокутника, периметр якого дорівнює 22 м, а площа 30 м^2.

47*. Земельна ділянка, що має форму прямокутника $ABCD$ (рис. 1.27), ділиться межею MN на два менші прямокутники. Кожний квадратний метр землі прямокутника $ABNM$ коштує 8 умовних одиниць, а кожний квадратний метр землі прямокутника $MNCD$ — 5 умовних одиниць. На якій висоті AP потрібно провести пряму PQ, яка б розбила ділянку $ABCD$ на дві прямокутні ділянки однакової вартості?

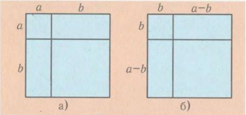


Рис. 1.26

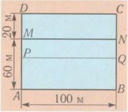


Рис. 1.27

48*. Задачі на кмітливість.

а) Сторони прямокутника дорівнюють 9 см і 4 см. Чи можна розрізати його на дві частини, з яких можливо було б скласти квадрат?

б) Як розрізати двома лініями квадрат, щоб з одержаних частин можна було скласти два рівні менші квадрати?

в) Як розрізати на частини два рівні квадрати, щоб з них можна було скласти один більший квадрат?

§2 Площа многокутників

2.1. Провідні ідеї для визначення площі многокутників

Ніщо в житті не вимагає пильнішої уваги, ніж те, що видається природним. До неприродного й так ставляться з недовірою.

Оноре де Бальзак

Якщо плоску фігуру можна розбити на декілька прямокутників, як, наприклад, у випадку, зображеному на рис. 2.1, то зрозуміло, що площу такої фігури можна знайти як суму площ цих прямокутників. Але розбиття на прямокутники можливе лише для окремих фігур. В загальному ж випадку проводиться розбиття на трикутники (рис. 2.2). Зі свого боку, будь-який трикутник можна розбити на прямокутні трикутники (рис. 2.3). Тому в кінцевому підсумку проблема з визначенням площі складніших многокутників зводиться до встановлення формули для площі прямокутного трикутника. Ми розв'яжемо її на основі розбиття прямокутника на два рівних прямокутних трикутники.

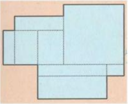


Рис. 2.1

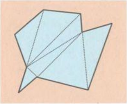


Рис. 2.2

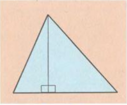


Рис. 2.3

2.2. Розбиття прямокутника на рівні прямокутні трикутники

Нагадаємо, що трикутник називається *прямокутним*, якщо він має прямий кут. Сторони, які утворюють прямий кут, називаються *катетами* прямокутного трикутника, а третя сторона, яка лежить проти прямого кута, — *гіпотенузою*.

На рис. 2.4 зображено прямокутний трикутник ABC. У ньому кут C — прямий, CA і CB — катети, AB — гіпотенуза. На рисунках прямий кут часто відзначається додатковою позначкою ∟.

Терміни «катет» і «гіпотенуза» грецького походження. Слово «катетос» в перекладі з грецької мови означає «прямовисний». Як і колись, прямокутні трикутники й тепер найчастіше зображають так, що одна зі сторін, яка утворює прямий кут, уявляється розміщеною горизонтально, а інша — вертикально. Горизонтальну сторону колись називали *основою*, а вертикальну — *катетом*. Пізніше за обома цими сторонами закріпилася спільна назва «катети».

Слово «гіпотенуза» в дослівному перекладі означає «та, що стягує» (мається на увазі «стягує прямий кут»). Евклід гіпотенузу так і називав: «сторона, що стягує прямий кут».

А тепер доведемо, що коли у прямокутнику провести *діагональ* — тобто відрізок з кінцями у двох протилежних вершинах (рис. 2.5), то утвориться два рівних прямокутних трикутники.

Рівними, вочевидь, слід вважати фігури, які в уяві можна сумістити одну з одною без розтягів, стисків та розривів. То ж нехай у прямокутнику $ABCD$ проведено діагональ DB. У результаті утворилося два прямокутних трикутники DAB і BCD з прямими кутами A і C. Відокремимо подумки трикутник BCD від трикутника DAB (рис. 2.6) і позначимо «роз'єднані» вершини B і D відповідно через B_1, B_2 та D_1, D_2 (рис. 2.7). Далі перемістимо трикутник B_2CD_2 таким чином, щоб його сторона B_2C сумістилася з рівною їй стороною D_1A трикутника D_1AB_1, причому точка B_2 — з точкою D_1, а точка C — з точкою A (рис. 2.8). Оскільки у результаті такого переміщення ми могли «вийти» з трикутником B_2CD_2 за межі площини прямокутника, то далі будемо подумки повертати трикутник B_2CD_2 навколо сторони B_2C, поки знову не «покладемо» його

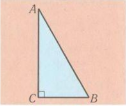


Рис. 2.4

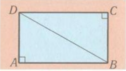


Рис. 2.5

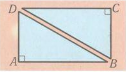


Рис. 2.6

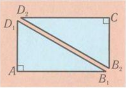


Рис. 2.7

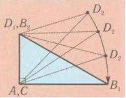


Рис. 2.8

у початкову площину, та ще й того боку від прямої AD_1, де лежить точка B_1. При цьому прямий кут B_2CD_2 обов'язково суміститься з рівним йому прямим кутом D_1AB_1, а внаслідок рівності протилежних сторін AB і DC прямокутника сумістяться й сторони CD_2 та AB_1. Отже, сумістяться і вершини D_2 та B_1. Тому й сторона B_2D_2 суміститься зі стороною D_1B_1. У результаті обидва трикутники B_2CD_2 і D_1AB_1 повністю сумістяться один з одним. Отже, вони рівні, що й треба було довести.

2.3. Площа прямокутного трикутника

Тепер виведемо формулу для площі прямокутного трикутника.

Нехай маємо прямокутний трикутник ABC з катетами $CB = a$ і $CA = b$ (рис. 2.9). Доповнимо його до прямокутника, побудувавши для цього прямі кути CAM та CBN, як показано на рисунку. Якщо позначимо через D точку перетину сторін AM та BN побудованих кутів, то за другою ознакою прямокутника одержимо прямокутник $ACBD$. Як доведено у попередньому пункті, діагональ AB розбиває цей прямокутник на два рівних прямокутних трикутники. А рівні фігури мають, звичайно, і рівні площі. Отже, площа трикутника ACB дорівнює площі трикутника ADB. А оскільки разом ці два трикутники утворюють прямокутник $ACBD$, то площа кожного з них дорівнює половині від площі прямокутника.

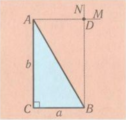


Рис. 2.9

Сторони прямокутника $ABCD$ дорівнюють a і b, а його площа, отже, ab. Звідси для площі S прямокутного трикутника одержуємо формулу:

$$S = \frac{1}{2}ab.$$

Таким чином, площа прямокутного трикутника у відповідних квадратних одиницях виражається числом, яке дорівнює половині добутку його катетів. Для скорочення мови уточнення про квадратні одиниці пропускають і кажуть: «***Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів***».

Задача.

У прямокутнику $ABCD$ $AB = 10$ см, $BC = 6$ см. На сторонах BC і CD взято точки L, M і N (рис. 2.10) так, що $BL = 2$ см, $CM = 3$ см, а $DN = 4$ см. Визначити площу чотирикутника $ALMN$.

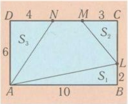


Рис. 2.10

Розв'язання. Шукану площу S знайдемо, якщо від площі $10 \cdot 6 = 60$ (см^2) прямокутника віднімемо площі S_1, S_2, S_3 прямокутних трикутників ABL, LCM, AND. За формулою для площі прямокутного трикутника знаходимо:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 = 10 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(6-2) \cdot 3 = 6 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Отже, $S = 60 - 10 - 6 - 12 = 32$ (см^2).

Відповідь. 32 см^2.

2.4. Площа довільного трикутника

Для вираження площі S довільного трикутника застосовується поняття висоти трикутника.

Будь-яку зі сторін трикутника можна виділити серед інших і назвати *основою* трикутника. Тоді відрізок, який проведений з протилежної вершини трикутника перпендикулярно до основи, називається *висотою* трикутника.

На рис. 2.11 AD — висоти різних трикутників ABC, що відповідають основам BC. Бачимо, що висота трикутника може проходити як усередині, так і ззовні трикутника. Якщо трикутник прямокутний і за основу взято один із його катетів, то висотою буде інший катет.

Нехай маємо довільний трикутник ABC, AD — його висота, що відповідає основі BC (див. рис. 2.11). Довжини відрізків AD і BC позначимо відповідно через h і a. Якщо трикутник ABC прямокутний, і h та a — його катети, то вже з'ясовано, що $S = \frac{1}{2}ah$. Доведемо, що цією самою формулою виражається площа й будь-якого іншого трикутника.

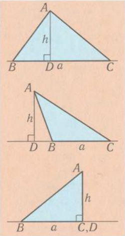


Рис. 2.11

Для цього скористаємося тим, що коли точка D лежатиме всередині відрізка BC, то шукана площа S дорівнюватиме сумі площ прямокутних трикутників ADC і ADB, а якщо точка D лежатиме ззовні відрізка BC, — то шукана площа S дорівнюватиме різниці площ цих трикутників. Отже, у першому випадку

$$S = \frac{1}{2}DC \cdot h + \frac{1}{2}DB \cdot h = \frac{1}{2}(DC + DB) \cdot h = \frac{1}{2}ah,$$

а в другому —

$$S = \frac{1}{2}DC \cdot h - \frac{1}{2}DB \cdot h = \frac{1}{2}(DC - DB) \cdot h = \frac{1}{2}ah.$$

Як бачимо, в обох випадках $S = \frac{1}{2}ah$, що й треба було довести.

Таким чином, ***площа будь-якого трикутника дорівнює половині добутку основи на висоту***.

Задача.

Точки M і N — середини протилежних сторін AB і CD прямокутника $ABCD$, P — точка відрізка MN (рис. 2.12). Довести, що сума площ трикутників PBC і PAD не залежить від розміщення точки P.

Розв'язання. За першою ознакою прямокутника, $AMND$ — прямокутник. Отже, відрізок MN утворює прямі кути зі сторонами AB і DC. Тому PM і PN — висоти трикутників PAB і PCD. Тоді для суми площ цих трикутників маємо вираз:

$$\frac{1}{2}AB \cdot PM + \frac{1}{2}DC \cdot PN = \frac{1}{2}AB \cdot (PM + PN) =$$

$$= \frac{1}{2}AB \cdot AD = \frac{1}{2}S,$$

де S — площа прямокутника $ABCD$. Виходить, що на трикутники PAD та PBC припадає теж половина площі S прямокутника $ABCD$, і це не залежить від розміщення точки P на відрізку MN. Твердження задачі доведено.

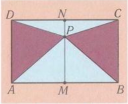


Рис. 2.12

2.5. Рівновеликі многокутники

Маючи формулу для площі трикутника, можна визначити площу будь-якого многокутника, розбивши його на трикутники і додавши їхні площі. Проте застосовуються й інші способи обчислень. Зокрема, для площ окремих найпоширеніших видів многокутників існують спеціальні формули (це у нас ще попереду). Крім цього, інколи зручно застосувати перетворення заданого многокутника у простіший многокутник такої самої площі.

Все це надзвичайно вразило мене, бо нічого подібного я ніколи не бачив і ні від кого не чув.

Даніель Дефо, «Робінзон Крузо»

Фігури, які мають рівні площі, називаються *рівновеликими*.

Рівні фігури, тобто ті, які можна сумістити, звичайно, є рівновеликими. Але рівновеликі фігури не обов'язково рівні. Наприклад, рівновеликими можуть бути трикутник з прямокутником, але вони, звісно, не рівні між собою.

З формул $S = ab$ та $S = \frac{1}{2}ah$ для площ прямокутника і трикутника випливає, що трикутник з основою a і висотою h рівновеликий прямокутнику з вимірами

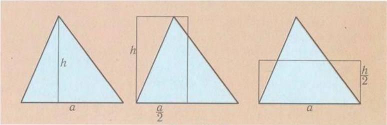


Рис. 2.13

$\frac{1}{2}a$ та h або прямокутнику з вимірами a та $\frac{1}{2}h$ (рис. 2.13). Це вказує на прості способи для перетворення трикутників у рівновеликі їм прямокутники.

З іншого боку, з формули $S = \frac{1}{2}ah$ для площі трикутника випливає, що всі трикутники, які мають спільну основу і рівні висоти, рівновеликі (рис. 2.14). Вершини таких трикутників, які протилежні спільній основі a, знаходяться на однаковій відстані від прямої l, що містить цю основу. Тому, якщо їх брати лише з одного боку від прямої l, то вони розмістяться на прямій, паралельній основі a.

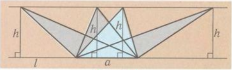


Рис. 2.14

На підставі цієї властивості будь-який многокутник за допомогою геометричних побудов можна перетворити у рівновеликий йому трикутник. А оскільки, як вище зазначено, трикутник легко перетворюється у рівновеликий йому прямокутник, то, отже, будь-який многокутник за допомогою геометричних побудов можна перетворити у рівновеликий прямокутник.

Візьмемо для прикладу який-небудь чотирикутник $ABCD$ (рис. 2.15, а). Проведемо у ньому діагональ AC, а потім через вершину D — пряму DD_1, паралельну прямій AC. Нехай D_1 — точка перетину цієї прямої з прямою BC. Трикутники ADC і AD_1C мають спільну основу AC і рівні висоти DM і D_1N. Отже, вони рівновеликі. Тому чотирикутник $ABCD$ рівновеликий двом трикутникам ABC і AD_1C, які утворюють один трикутник ABD_1. Виходить, що чотирикутник $ABCD$ рівновеликий трикутнику ABD_1. Далі цей трикутник легко перетворюється у рівновеликий йому прямокутник $APQL$ (рис. 2.15, б), в якому сторона AP перпендикулярна до BD_1, а сторона $PQ = \frac{1}{2}BD_1$.

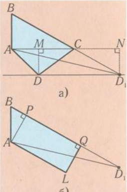


Рис. 2.15

Розглянемо ще приклад п'ятикутника $ABCDE$ (рис. 2.16). Проведемо у ньому діагональ CE, а через вершину D — пряму, паралельну цій діагоналі. Нехай D_1 — точка перетину проведеної прямої з прямою AE. Оскільки трикутники CDE і CD_1E — рівновеликі, то п'ятикутник $ABCDE$ рівновеликий чотирикутнику $ABCD_1$.

Зі свого боку, одержаний чотирикутник $ABCD_1$ можна перетворити у рівновеликий йому трикутник BCD_2 (пряма D_1D_2 паралельна AC, тому трикутник

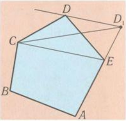


Рис. 2.16

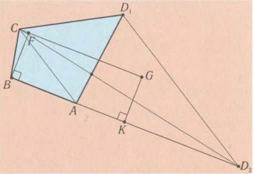


Рис. 2.17

ACD_1 рівновеликий трикутнику ACD_2), а той — у рівновеликий прямокутник $BFGK$ (рис. 2.17). У результаті п'ятикутник $ABCDE$ перетвориться у рівновеликий прямокутник $BFGK$.

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Як вимірювали довжини у різні часи

Сучасна людина зазвичай не задумується над тим, що ті численні блага цивілізації, якими вона користується, забезпечені невтомною працею і пошуками всього людства упродовж багатьох віків. Характерним прикладом є вимірювання довжин і відстаней. Хто тепер не знає, що довжини, сумірні з ростом людини, вимірюють у сантиметрах, більші — у дециметрах і метрах, великі відстані — у кілометрах, а маленькі проміжки — у міліметрах? Хто не знає, що між цими одиницями вимірювання існують дуже прості співвідношення, які виражаються множенням чи діленням на степінь числа 10? Нарешті, хто не знає, що для проведення самого вимірювання використовуються прості прилади — лінійки, стрічки, складні метри, рулетки тощо? І кожна людина, в якій би частині світу вона не жила, узявши один із таких приладів, може легко перевірити вказані на будь-якому з виробів розміри або закласти відповідні розміри у виріб, який збирається виготовляти. Але так було не завжди. Більшу частину своєї історії людство не мало загальноприйнятих мір.

— Коли не знаєш, як, — задумливо сказало слоненя, — потрібно в когось запитати.

Мавпа дуже уважно подивилася на слоненя й запропонувала:

— Давай у тебе запитаємо.

— У мене? — зніяковіло слоненя. — У мене краще не треба. Давайте запитаємо в папуги.

— Давайте! — раптом закричав папуга, не знати звідки з'явившись перед друзями. — Давайте запитаємо у мене! Запитуйте!

— Як мене зміряти? — запитав удав.

Григорій Остер, «38 папуг»

1. Перші еталони — в людині

Першими мірами довжини, природно, служили окремі частини людського тіла — найчастіше рук і ніг.

Ще давні єгиптяни, вавилоняни та інші народи застосовували таку міру як *лікоть*, що дорівнювала відстані від ліктя до кінця розпрямленого середнього пальця руки. Ліктями, зокрема, дуже зручно вимірювати вірьовки та відрізи тканини. Повний оберт тканини довкола ліктя називався *подвійним ліктем*. Ця міра теж застосовувалася у багатьох народів.

Лікоть не мав сталої величини. У різних державах і в різні часи застосовувалися різні лікті. Крім цього, в одній і тій самій державі в один і той самий час могли існувати різні лікті. Найдовшим зазвичай був *царський лікоть*, який застосовувався при зборі податі.

Міра лікоть

У руській державі міра, аналогічна ліктю, називалася *аршином*. Відомий російський історик та письменник Н.М. Карамзін (1766–1826) вважав, що ця назва запозичена унаслідок торгівлі зі східними народами. Зокрема, у персів лікоть називався «арші». Недобросовісні купці часто по-своєму тлумачили дану міру. Звідси пішло відоме «міряти на свій аршин», що означає «по-своєму бачити справу, пильнувати свої інтереси».

Дрібнішими від ліктя мірами довжини були: долоня (наприклад, в юдеїв, британців), кулак (в арабів) і п'ядь (в русичів).

Міра долоня

Долоня — це ширина кисті руки. В класичній англійській літературі часто зустрічаються оповіді про вимірювання висоти коней саме долонями.

Мала п'ядь — це відстань від кінця великого пальця до кінця вказівного, а велика п'ядь — відстань від кінця великого пальця до кінця мізинця при найбільшому можливому розведенні їх. П'яді зустрічаються уже в актах XIV століття. Вважалося, що в аршині міститься 4 п'яді. Тому п'ядь часто називалася також чверткою. З п'яддю пов'язаний крилатий вислів: «Берегти кожну п'ядь рідної землі».

Ще дрібнішою мірою довжини був *палець* (наприклад у вавилонян) і *дюйм* (в англо-саксонських народів). Цілком природно, що долоня дорівнювала 4 пальцям.

Міра палець

Дюйм початково вважався рівним довжині суглоба великого пальця. Про це говорить і сама назва: слово duim голландською мовою якраз і означає «великий палець».

У 1324 р. англійський король Едвард II уточнив величину дюйма. Згідно з королівським указом 1 дюйм дорівнював «довжині трьох ячмінних зернин, узятих із середньої частини колоска і прикладених одне до одного своїми кінцями». А в англійському побуті ще й досі залишилася мірка «*ячмінне зерня*», що дорівнює третині дюйма. Цікаво у цьому зв'язку зауважити, що улюблена дітьми Дюймовочка — малесенька дівчинка з одноіменної казки Андерсена, яка могла жити у квітці і мала зріст 1 дюйм, народилася саме з ячмінної зернини.

На початку XVII ст. указом російського царя Петра I була встановлена відповідність між традиційними російськими та новими англійськими мірами — «заради кращої узгодженості з європейськими народами у трактатах і контрактах». Відповідно до цього указу, 1 аршин прирівнювався до 28 англійських дюймів.

Іще з часів Київської Русі на українських землях застосовувалася така міра довжини як *сажень*. Про це, зокрема, свідчить і Нестор-літописець. Слово «*сажень*» мало первісну форму «*сяжень*». Тому ймовірно, що походило воно від дієслова «сягати».

Розрізняли *маховий сажень*, що дорівнював розмаху рук, і *косий сажень*, рівний відстані від п'яти правої ноги до кінців пальців витягнутої вгору лівої руки. Звичайно, косий сажень був більшим від махового. Тому про плечистих чоловіків (зокрема про казкових героїв) казали, що вони мають «косий сажень у плечах». Інколи таке порівняння можна почути й нині.

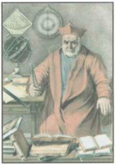
Міра фут

У XVII ст. було узаконено, що міра 1 сажень становить 3 аршини, що на нинішній вимір дорівнює 2,13 м. Зокрема, в «Соборному укладі» 1649 року сказано: «А сажень, щоб міряти землю чи щось інше — робити на три аршини, а більше або менше трьох аршинів сажнів не робити». На відміну від косого та махового сажнів, цей новий сажень називався «*царським*» або «*казенним*».

Найпоширенішою з мір, пов'язаних з ногою людини, є *фут*. Він дорівнює середній довжині ступні дорослої людини (англійське foot якраз і означає «нога», «ступня»). Ця міра теж застосовувалася у різних народів. В Англії фут був узаконений разом з дюймом у XIV ст. королем Едвардом II: 1 фут вважався рівним 12 дюймам, що на нинішній вимір становить 30,48 см. Французький королівський фут (який теж поділявся на 12 дюймів і був у Франції основною мірою довжини аж до введення метра), мав довжину 32,5 см.

2. Природа має і стабільніші еталони

У XVI ст. відомий тогочасний учений Христоф Клавій (1537–1612) запропонував уточнити розміри фута за допомогою тих самих ячмінних зернин. Половину фута, за Клавієм, мали визначати 64 зернини, прикладених одна до одної упоперек. Це давало б змогу дуже просто відтворювати довжину еталону у будь-якому місці, оскільки ширина ячмінних зернин дуже стабільна (значно стабільніша від їхньої довжини, яку застосовували для визначення дюйма), а велика кількість узятих зернин практично повністю згладжувала індивідуальні відхилення від середньої величини. До того ж, число 64 є степенем двійки. А це давало змогу простим діленням навпіл одержувати точні менші долі фута.



Христоф Клавій (Клавій-Шлюссель) (1537–1612) — італійський математик німецького походження. Найбільше відомий як керівник проекту з уведення Григоріанського календаря, яким весь світ користується й понині.

Спроби означити довжину дюйма і фута за допомогою ячмінних зернин показують, що людина давно збагнула недосконалість для цього її тіла. Ще показовішою є система мір, що її знаходимо в одному з арабських рукописів VIII ст., відповідно до якої лікоть дорівнював 8 кулакам, кулак — ширині 4 пальців, палець — товщині 6 ячмінних зернин, а ячмінна зернина — товщині 6 волосин з морди осла.

3. Традиції — справа серйозна

Не менш цікаве походження основної міри довжини в англо-саксонських народів — ярда. Ця міра була узаконена англійським королем Генріхом I ще у 1101 році. Згідно з легендою, 1 ярд — це відстань від кінчика носа цього короля до кінця середнього пальця його витягнутої руки. Щоправда за іншою версією прообразом ярда став меч Генріха I. 1 ярд вважається рівним 3 футам. На даний час — це приблизно 91 см.

Міра ярд

4. Час як відстань

Принципово інші способи застосовувалися для встановлення одиниць вимірювання великих відстаней. Вони пов'язувалися з урахуванням часу на їхнє подолання. Наприклад, такою була міра довжини *стадій*. Вважається, що ця міра виникла у Давньому Вавилоні. Достеменно відомо, що стадіями вимірювали відстані давні греки. Зокрема, від цього слова утворилося сучасне слово «стадіон».

За переказами, стадій дорівнював відстані, яку доросла людина проходить розміреним кроком *за проміжок часу* від появи першого сонячного променя при сході сонця до того моменту, коли весь сонячний диск повністю зійде над горизонтом. Оскільки добре відомо, що схід сонця триває 2 хв, то, враховуючи середню швидкість пішохода, легко дійти висновку, що величина стадія перебувала в межах від 160 до 195 метрів.

Відомо, що вавилоняни ділили свій стадій на 360 ліктів. А оскільки лікоть у них приблизно дорівнював 54 см, то звідси неважко вивести, що довжина вавилонського стадія становила приблизно 194 м.

На основі подібних міркувань з'ясовано, що римський стадій повинен був мати довжину 185 м, а грецький олімпійський — 192 м.

Давньовавилонська лінійка (бл. 2000 р. до н.е.). Оскільки ця лінійка є фрагментом напівзруйнованої статуї царя Гудея, то можна вважати, що нею визначалася половина давньовавилонського царського ліктя. Лінійка поділена на 16 рівних частин, із яких друга у свою чергу поділена на 6, четверта — на 5, шоста — на 4, восьма — на 3, а дев'ята — на 2 рівні частини.

Ідея з використанням часових проміжків для встановлення міри довжини одержала несподіваний розвиток у XVII ст. У результаті фізичних експериментів з маятником (важливим елементом маятникового годинника, який якраз тоді було винайдено) з'ясувалося, що період коливання маятника залежить від його довжини. На основі цього самим винахідником маятникового годинника голландським математиком і механіком Християном Гюйгенсом (1629–1695) у 1664 році було запропоновано взяти за одиницю вимірювання відстаней довжину такого маятника, період коливання якого становить 1 секунду. А польський природодослідник Тіт Бурратіні (1615–1682) у 1675 році запропонував і назву для цієї нової одиниці — метр, утворивши її від грецького слова «метрео», тобто «вимірюю».

Християн Гюйгенс

Проте невдовзі несподівано з'ясувалося, що період коливання маятника залежить не тільки від його довжини, але й від географічної широти місця, де проводиться вимірювання. Зокрема, поблизу екватора і в середніх широтах ці величини суттєво відрізняються одна від одної. Виявивши цей недолік, помітили й інший, а саме, що при реалізації цієї ідеї одиниця вимірювання довжини «прив'язувалася» до одиниці вимірювання часу. А це в теоретичному аспекті значно гірше, ніж аби ці величини визначалися незалежно одна від одної. Тому, незважаючи на оригінальність ідеї, від неї відмовилися, залишивши лише назву «метр» для одиниці вимірювання довжин.

5. Універсальним мірилом оголошено Землю

У 1670 році французький дослідник Мутон висунув ще більш захоплюючу ідею — пов'язати одиницю вимірювання довжин з розмірами всієї матінки-Землі, точніше з довжиною її меридіана. Але для реалізації цієї сміливої, а по суті глибоко філософської та гуманістичної ідеї, потрібні були особливі суспільно-політичні умови. Вони з'явилися лише через сотню літ у зв'язку з революційними подіями у Франції наприкінці XVIII ст. — своєрідним підсумком епохи Просвітництва, пов'язаної з іменами великих просвітителів Вольтера, Руссо, Дідро і Д'Аламбера. Лише революційний рух, який охопив тоді цю країну, дав змогу організувати відповідні великомасштабні вимірювання, а найголовніше — стимулював перехід на нову систему мір. В усіх інших консервативніших країнах цей перехід затягнувся більше, як на століття, а в деяких не реалізований повною мірою й досі.

Ніщо не повинно бути таким незмінним, як те, що має бути мірою для всього.

Шарль Луї Монтеск'є

Характерним у цьому зв'язку є звернення французького уряду до населення, поширене у 1790 р. В ньому, зокрема, мовилося:

«Як можуть друзі рівності миритися з розмаїттям і незручністю мір, які зберігають ще пам'ять про ганебне феодальне рабство..., в той час, як вони клялися знищити саму назву тиранії, якою б вона не була?.. Для створення істинно філософської системи мір, яка була б достойною віку просвітництва, не можна взяти нічого, що не ґрунтувалося на твердих підвалинах, що не пов'язано найтіснішим чином з предметами незмінними, нічого, що в подальшому могло б залежати від людей і від подій. Потрібно звернутися до самої природи і взяти основу системи мір з її надр ...».

Геометрія є мистецтвом добре вимірювати.

П'єр Рамус

6. Як же зміряли Землю?

У березні 1791 року Національні збори Франції затвердили пропозицію Академії наук, що виходила від найвидатніших тогочасних учених Лапласа, Лагранжа, Монжа, Лавуазьє та ін., — про спорядження спеціальної експедиції для вимірювання земного меридіана. Було вирішено виміряти довжину паризького меридіана між двома містами, розміщеними на ньому — Дюнкерком (приморським містом на півночі Франції) і Барселоною (іспанським містом на березі Середземного моря). Знаючи географічні широти цих міст, потім легко було обчислити й довжину всього меридіана. Винятково сприятливою обставиною було те, що обидва вибрані міста знаходилися на рівні моря, оскільки це суттєво спрощувало вимірювання і підвищувало їхню точність. Керівниками експедиції було призначено академіків Жана Батіста Деламбра (1749–1822) та П'єра Мешена (1744–1804).

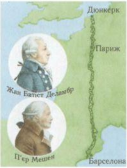


Схема вимірювання довжини паризького меридіана

Вимірювальні роботи експедиції та відповідні розрахунки тривали декілька років. На відстані близько 1 000 км між Дюнкерком і Барселоною за допомогою провішування було побудовано і виміряно 115 трикутників, розміщених уздовж меридіана. Шукана величина була знайдена обчисленням і сумуванням довжин відрізків меридіана, розміщених всередині кожного трикутника. З цією метою застосовувалися співвідношення, що існують між кутами та сторонами трикутника (ми вивчатимемо їх у 9 класі). З особливою точністю вимірювалася лише одна сторона крайнього трикутника — так звана *база*. А в усіх решти трикутниках за допомогою кутомірних приладів вимірювалися лише кути — що значно простіше, ніж вимірювання відстаней. За допомогою формул, які пов'язують сторони і кути трикутника, крок за кроком, починаючи від першого трикутника, обчислювалися сторони усіх інших трикутників, а потім і відрізки меридіана, розміщені всередині них.

Встановивши довжину паризького меридіана у старих французьких мірах (туазах і футах; 1 туаз дорівнював 6 футам), було вирішено за основу нової міри — метра —

взяти $\frac{1}{40\,000\,000}$ від знайденої величини. У старих французьких мірах це становило 3 фути і 11,44 лінії (1 лінія = $= \frac{1}{12}$ фута).

7. Еталон створено

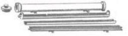
Перший еталон метра було виготовлено у 1799 році. Але навіть у Франції повний перехід на нову систему вимірювання відбувся лише у 1840 р. А міжнародною мірою метр став у 1872 р. після відповідного рішення спеціально скликаної в Парижі міжнародної конференції. Тоді ж було затверджено міжнародний еталон метра, що був виготовлений зі сплаву платини (90%) та іридію (10%). Еталон має форму стержня завдовжки 102 см з двома мітками на відстанях 1 см від кінців. Відстань між цими мітками якраз і уособлює довжину 1 м. Поперечний переріз еталона нагадує літеру X. Саме така форма забезпечує йому найбільшу міцність при найменшій вазі (останнє дуже важливо, оскільки платина, яка домінує в сплаві, дорожча навіть від золота).

Проект медалі (не реалізований) на честь створення еталона метра. Напис гласить: «На всі часи, для всіх народів» (1798 р.)

У зв'язку з технічними труднощами, реалізація рішень конференції 1872 року була завершена лише у 1888 р. Нова міжнародна конференція 1889 року затвердила 31 копію еталона метра. Зберігання однієї з них доручили

Міжнародному бюро у м. Севрі біля Парижа. Решта були розподілені між країнами, учасницями конференції.

За час, що минув відтоді, декілька разів проводилося порівняння національних еталонів з головним еталоном з м. Севра. І майже щоразу одержувалися розбіжності, які вловлюються за допомогою найточніших фізичних засобів порівняння. Вважають, що ці розбіжності викликані молекулярними процесами, що відбуваються в матеріалі стержнів.



Еталон метра з футляром до нього

8. Еталон, який є завжди і всюди

У зв'язку з цим пошук незмінних еталонів довжини продовжився. В середині XIX ст. відомий англійський фізик Джемс Клерк Максвел запропонував використовувати для цього найстабільнішу природну величину — довжину світлової хвилі. Світлова хвиля — це особливий потік електромагнітної енергії, в якому електрична і магнітна складові періодично переходять одна в одну. А відстань між сусідніми точками цього потоку, в яких згадані складові мають однакові величини, називається довжиною хвилі. Світлові хвилі з різних джерел і з різних частин світлового спектра мають різні довжини.

Виміряй усе, що піддається вимірюванню, і зроби таким усе, що вимірюванню не піддається.

Галілео Галілей

Після вимірювання еталонного метра оптичними засобами, з 1960 р. встановлено, що довжина 1 м становить 1 650 763,63 довжини хвилі оранжево-червоної лінії спектру світіння газу криптону. Для такого еталону уже не потрібні ніякі сховища. Він не залежить від жодних фізичних факторів. Але й на цьому пошуки еталону не завершилися. Цілком можливо, що крапки в цій справі не буде поставлено ніколи.

9. Основна перевага метричної системи

Основні переваги метричної системи вимірювання над іншими системами полягають у тому, що вона узгоджена з десятковою основою числення. Це означає, що менші і більші одиниці вимірювання утворюються з основної одиниці за допомогою ділення або множення на певний степінь числа 10. Наприклад, $1\text{ см} = \frac{1}{10}$ м;

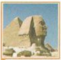
$1 \text{ мм} = \frac{1}{10} \text{ см} = \frac{1}{10^2} \text{ м}$; $1 \text{ км} = 10^3 \text{ м}$. А це забезпечує дуже простий спосіб переведення одних одиниць в інші — більші чи менші.

Не так було до введення метричної системи. Наприклад, у старій російській системі вимірювання довжин 1 верста дорівнювала 500 сажням, 1 сажень — 3 аршинам, 1 аршин — 7 футам, 1 фут — 12 дюймам, а 1 дюйм — 10 лініям.

Зрештою, використання сучасних електронних засобів обчислень ці труднощі значно послаблюють. Тому в окремих країнах поряд з метричною системою все ще застосовуються і свої історичні системи вимірювання. Зокрема, багато з характеристик, що стосуються сучасної техніки, подаються в дюймах, морські відстані вимірюються в милях, глибини у футах тощо.

У природі міра та вага — найголовніші знаряддя пізнання. Наука розпочинається тоді, коли починають вимірювати.

Дмитро Менделєєв



Перевір себе

1. Якою є провідна ідея для визначення площі будь-якого многокутника?
2. На якій ідеї засновується визначення площі трикутника? Що таке висота трикутника?
3. Які назви мають сторони прямокутного трикутника?
4. Які фігури називають рівними, а які рівновеликими? Чи обов'язково рівновеликі фігури рівні? А рівні фігури є рівновеликими?
5. Що таке діагональ прямокутника? Чи рівновеликі фігури, на які вона розбиває прямокутник? А чи є вони рівними?
6. Яку ідею беруть за основу для визначення площі прямокутного трикутника?
7. Як побудувати прямокутник, рівновеликий даному трикутнику? А трикутник, рівновеликий даному прямокутнику?
8. На якій властивості засновується можливість перетворення чотирикутника у рівновеликий йому трикутник?

Задачі і вправи

1. Чи зможете ви обґрунтувати, що будь-який многокутник, сусідні сторони якого перетинаються під прямими кутами, можна розбити на прямокутники?
2. У квадраті проведено відрізки, що з'єднують середини протилежних сторін (рис. 2.18). Доведіть, що ці відрізки розбивають даний квадрат на 4 рівновеликі менші квадрати, а самі відрізки точкою перетину діляться навпіл. Чи будуть утворені квадрати рівними? Чому дорівнює площа одного з них, якщо площа початкового квадрата S?
3. Чи поширюються властивості квадрата, описані в задачі 2, на довільний прямокутник (рис. 2.19)?

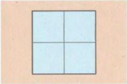


Рис. 2.18

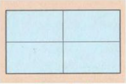


Рис. 2.19

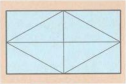


Рис. 2.20

4. У прямокутнику проведено всі відрізки, що з'єднують середини його сторін (рис. 2.20). Доведіть, що цими відрізками даний прямокутник розбивається на 8 рівних прямокутних трикутників.
5. План майданчика побудовано на аркуші паперу в «клітинку». Визначте його площу в кожному з випадків, відображеному на рис. 2.21, якщо стороні клітинки на місцевості відповідає відстань 5 м.
6. Точки M, N — середини відповідно катетів AC і BC прямокутного трикутника ABC (рис. 2.22), AC = 3 см, BC = 8 см. Визначте площу трикутників MCN, MNB, ABN.

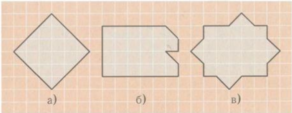


Рис. 2.21

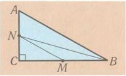


Рис. 2.22

7. Точка L — середина сторони DC прямокутника $ABCD$ з вимірами 6 см і 8 см. Доведіть, що сторони AL і LB трикутника ALB рівні між собою і визначте площу цього трикутника.

8. Задано прямокутник $ABCD$, O — точка перетину відрізків, які з'єднують середини протилежних сторін (рис. 2.23). Площа прямокутника дорівнює S. Визначте площі кожного з трикутників OAB, OBC, OCD та OAD.

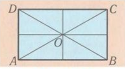


Рис. 2.23

9*. Точка K належить стороні CD квадрата $ABCD$, яка дорівнює 6 см. Визначте площу трикутника KAB.

10. Відношення двох сторін трикутника дорівнює $\frac{3}{5}$. Чому дорівнює відношення висот, проведених до цих сторін?

11. Доведіть, що висоти трикутника обернено пропорційні сторонам, до яких вони проведені.

12. Як зміниться площа трикутника, якщо:
а) основу збільшити у 5 разів;
б) висоту зменшити утричі;
в) основу потроїти, а висоту зменшити утричі?

13. Основа першого трикутника дорівнює 4 см, а основа другого — 7 см. Яким повинно бути відношення висот цих трикутників, щоб площа першого з них була удвічі меншою від площі другого?

14. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 11 см, точки K, L, M розміщені на його сторонах так, як показано на рис. 2.24, і при цьому $AK = 3$ см, $BL = 5$ см, $CM = 4$ см. Визначте площу чотирикутника $DKLM$.

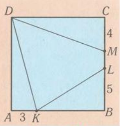


Рис. 2.24

15. Через вершину прямокутника проведіть таку пряму, яка б поділила його площу у відношенні 3 : 5.

16*. Через вершину прямокутника проведіть дві прямі так, щоб вони поділили його площу на три рівні частини.

17. Задано три трикутники з однаковими висотами. Побудуйте рівновеликий їм трикутник.

18. За допомогою креслярських інструментів побудуйте прямокутники, рівновеликі многокутникам, зображеним на рис. 2.25.

19. На рисунку 2.26, а)–є) визначте рівновеликі трикутники.

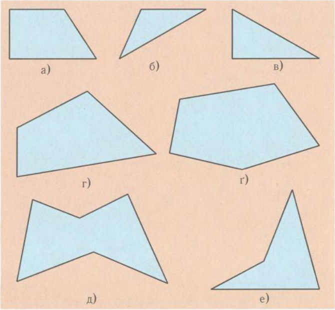


Рис. 2.25

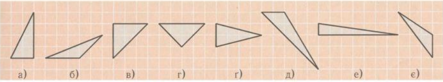


Рис. 2.26

20. Визначте площу, яку займає шкільний сад і город (рис. 2.27), провівши необхідні побудови та вимірювання. Масштаб 1 : 5 000.

21*. Визначте площу чотирикутника, діагоналі якого взаємно перпендикулярні і дорівнюють 6 см та 8 см.

22. Основа одного трикутника 10 см, його висота 4 см. Основа іншого трикутника 20 см. Якою повинна бути його висота, проведена до цієї сторони, щоб трикутники були рівновеликими?

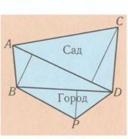


Рис. 2.27

23. Сторони прямокутника дорівнюють 5 см і 6 см. Побудуйте рівновеликий йому трикутник з основою 7,5 см. Скільки розв'язків має задача?

24. Визначте площі фігур, зображених на рис. 2.28, а), б).

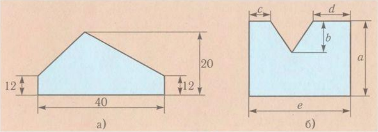


Рис. 2.28

25. Площа фігури, зображеної на рис. 2.29, дорівнює 805 мм². Визначте невідомий розмір x.

26. Через вершину трикутника проведіть пряму, яка розбиває його: а) на два рівновеликих трикутники; б) на два трикутники, площі яких відносяться, як 2 : 3.

27. Через вершину трикутника проведіть дві прямі, які розбивають його на три рівновеликих трикутники.

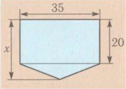


Рис. 2.29

28*. Деяку точку O площини сполучили з вершинами прямокутника $ABCD$.

1. Доведіть, що якщо точка O знаходиться всередині прямокутника, то сума площ трикутників ABO і CDO дорівнює сумі площ трикутників BCO і DAO.

2. Чи збережеться ця рівність, якщо точка O лежатиме на стороні прямокутника?

3. Чи збережеться ця рівність, якщо точка O суміщатиметься з вершиною прямокутника?

29*. Побудуйте трикутник, рівновеликий даному трикутнику, так, щоб основа побудованого трикутника суміщалася з однією зі сторін даного трикутника, а один із кутів при основі дорівнював 45°.

§3 Перша ознака рівності трикутників

3.1. Ознака рівності довільних трикутників

Характерною рисою науки є те, що дослідження будь-якого явища учені завжди намагаються проводити максимально всебічно, зокрема, з аналізом і таких ситуацій, які за даних конкретних умов не виникають, але які видаються можливими або ймовірними за інших подібних умов. В науці це називається *узагальненням*. Узагальнення закладають потенціал для подальшого розвитку науки.

Зараз розглянемо перший приклад математичного узагальнення.

Нічого не потрібно робити наполовину.
Жуль Верн, «Таємничий острів»

У попередньому параграфі було доведено, що прямокутні трикутники, на які прямокутник розбивається своєю діагоналлю, рівні. Наведені там міркування можна застосувати узагалі для будь яких прямокутних трикутників з відповідно рівними катетами, і навіть для будь-яких інших трикутників, що мають по дві відповідно рівні сторони і по рівному куту між ними. У результаті одержується така ознака рівності трикутників.

Перша ознака рівності трикутників.
Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.

Доведення цієї ознаки в загальному випадку нічим суттєвим не відрізняється від проведеного у попередньому параграфі доведення для прямокутних трикутників.

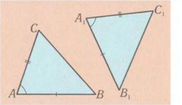


Рис. 3.1

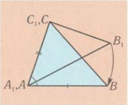


Рис. 3.2

Нехай маємо два трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких сторона AB дорівнює стороні A_1B_1, сторона AC — стороні A_1C_1, а кут A — куту A_1 (рис. 3.1). Перемістимо у просторі трикутник $A_1B_1C_1$ таким чином, щоб спочатку точка A_1 сумістилася з точкою A, а потім — точка C_1 з точкою C (рис. 3.2). Таке суміщення точок можливе, оскільки відрізки AC і A_1C_1 рівні між собою. При цьому вся сторона A_1C_1 сумідиться зі стороною AC, — оскільки існує лише один відрізок з кінцями в точках A і C.

Далі повертатимемо трикутник $A_1B_1C_1$ довкола сторони A_1C_1 аж поки кут A_1 не суміститься з рівним йому кутом A (це станеться тоді, коли точка B_1 розміститься у площині трикутника ABC з того боку від прямої AC, що й точка B). При цьому сторона A_1B_1, суміститься з рівною їй стороною AB, а отже, точка B_1 — з точкою B (рис. 3.3). Зрозуміло, що тоді вся сторона B_1C_1 суміститься зі стороною BC. Отже, весь трикутник $A_1B_1C_1$ суміститься з трикутником ABC. А це й означає, що ці трикутники рівні. Ознаку доведено.

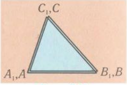


Рис. 3.3

Звісно, в рівних трикутниках попарно рівні сторони і попарно рівні кути. При цьому проти рівних кутів лежать рівні сторони, а проти рівних сторін — рівні кути.

Загалом у двох рівних трикутниках є шість пар відповідно рівних елементів — три пари сторін і три пари кутів. Доведеною першою ознакою гарантується, що коли рівні вказані в ній три пари елементів (а саме — по дві сторони і по куту між ними), то рівні і решта три пари, тобто треті сторони та решта дві пари кутів. Пізніше з'ясуються ще дві аналогічні ознаки.

Ознаки рівності трикутників застосовуються у геометрії дуже часто. Це пов'язано з тим, що складні фігури доводиться розбивати на простіші, а трикутник — одна з найпростіших плоских фігур. Крім цього, для відшукання невідомих відстаней і кутів їх часто включають у трикутники і визначають з того, що ці трикутники рівні іншим, в яких потрібні величини відомі.

Розглянемо один приклад втілення останньої ідеї. Припустимо, що для реалізації якогось проекту необхідно визначити протяжність озера в напрямку AB (рис. 3.4). Візьмемо на березі точку C так, щоб відстань CB можна було визначити безпосереднім вимірюванням, і побудуємо кут ACE, рівний куту ACB. Потім вздовж променя CE відкладемо відрізок CD, що дорівнює відстані CB. Тоді відстань AD дорівнюватиме шуканій ширині озера AB.

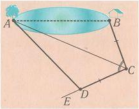


Рис. 3.4

Справді, оскільки в трикутниках ACB та ACD сторона AC спільна, а сторони CB і CD рівні, і рівні також кути ACB та ACD, то ці трикутники рівні за першою ознакою. З рівності ж трикутників випливає рівність сторін, що лежать проти рівних кутів. А сторони AB та AD якраз і лежать проти рівних кутів, тому вони рівні між собою. Отже, якщо безпосередньо виміряємо одну з них (AD) в одному трикутнику, то знатимемо і довжину іншої (AB) в іншому.

Для позначення рівності трикутників користуються звичайним значком рівності =. Наприклад, запис $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ означає, що трикутник ABC рівний трикутнику $A_1B_1C_1$. При цьому вершини рівних кутів записуються на однакових місцях. Зокрема, запис $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ означає, що $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, а $\angle C = \angle C_1$. Якщо ж буде записано, що $\Delta ABC =$

$= \Delta B_1C_1A_1$, то це означатиме вже зовсім інше, а саме, що $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle C_1$, а $\angle C = \angle A_1$.

3.2. Ознака рівності прямокутних трикутників

Прямі кути рівні між собою. Тому як наслідок з першої ознаки рівності довільних трикутників маємо таку **першу ознаку рівності прямокутних трикутників**. *Якщо катети одного прямокутного трикутника дорівнюють катетам іншого, то такі трикутники рівні між собою.*

У п. 2.2 ми вже довели це твердження для прямокутних трикутників, які одержуються при розбитті прямокутника його діагоналлю. Тепер маємо, що це твердження істинне взагалі для будь-яких прямокутних трикутників з відповідно рівними катетами. Зокрема, якщо у прямокутнику $ABCD$ проведемо обидві діагоналі AC і BD (рис. 3.5), то утворені при цьому прямокутні трикутники ABC і BAD теж будуть рівними. А оскільки у рівних трикутниках проти рівних кутів лежать і рівні сторони, то звідси випливає, що $AC = BD$. Отже, ***діагоналі прямокутника рівні між собою***.

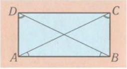


Рис. 3.5

Цією властивістю прямокутника часто користуються столяри для грубої перевірки прямокутних форм, наприклад, віконних рам, полотна дверей, кришки стола і т. ін. Вимірявши діагоналі і одержавши для них різні значення довжини, відразу можна зробити висновок, що дана форма не є прямокутною.

Отже, рівність діагоналей є *необхідною* умовою для того, щоб чотирикутник був прямокутником. Проте ця умова не є достатньою, тобто рівність діагоналей чотирикутника ще не гарантує того, що це прямокутник. Наприклад, на рис. 3.6 в чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD рівні між собою, але цей чотирикутник — не прямокутник.

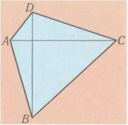


Рис. 3.6

З рівності трикутників ABC і BAD, утворених після проведення діагоналей AC і BD прямокутника $ABCD$ (див. рис. 3.5), випливає ще й те, що ці діагоналі утворюють зі стороною AB та протилежними сторонами BC і AD відповідно рівні кути.

Задача.

Чотирикутник $ABCD$ утворено таким чином. Спочатку побудовано дві взаємно перпендикулярні прямі. Потім на одній з них взято довільні точки A і C, а на іншій — від точки O перетину прямих відкладено рівні відрізки OB і OD. Нарешті, точки A, B, C, D послідовно з'єднані між собою (рис. 3.7). Одержаний у такий спосіб чотирикутник називається *дельтоїдом*, «тобто подібним на дельту», оскільки справді схожий на дві великі літери Δ (дельта) з грецького алфавіту (гирло великої річки теж називається дельтою; у формі дельтоїдів часто виготовляють повітряних зміїв). Довести, що дельтоїд має дві пари рівних суміжних сторін, а одна з його діагоналей ділить навпіл кути, через вершини яких вона проходить.

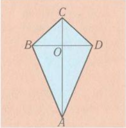


Рис. 3.7

Розв'язання. Розглянемо прямокутні трикутники AOB та AOD. За побудовою вони мають спільний катет OA та рівні катети OB і OD. Тому за першою ознакою ці трикутники рівні між собою. Звідси випливає рівність суміжних сторін AB і AD дельтоїда (оскільки вони лежать проти рівних прямих кутів AOB та AOD), а також рівність кутів BAO та DAO, на які діагональ AC ділить кут A дельтоїда (оскільки вони лежать проти рівних сторін OB та OD).

Розглядаючи подібним чином прямокутні трикутники BOC та DOC, доведемо рівність суміжних сторін BC і CD дельтоїда, а також те, що діагональ AC ділить навпіл кут C. Твердження задачі доведено.

3.3. Властивості рівнобедреного трикутника

Справжньою колискою європейської культури, і передовсім науки, була Давня Греція. Зокрема, саме у Давній Греції в чіткій і виразній формі з'явилася ідея про необхідність строгого логічного доведення математичних фактів, а самі ці факти почали називати *теоремами*.

Доведення перших геометричних теорем приписують легендарному грецькому філософу і мурецю Фалесу, що жив у VI ст. до н.е. Серед цих теорем була і теорема про властивості рівнобедреного трикутника.

Деякі означення і теорема

Нагадаємо, що трикутник називається *рівнобедреним*, якщо в нього дві сторони рівні. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називаються *бічними сторонами*, а третя його сторона — *основою*. Трикутник, у якого всі сторони рівні, називається *рівностороннім* або *правильним*.

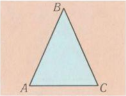


Рис. 3.8

На рис. 3.8 зображено рівнобедрений трикутник ABC з бічними сторонами AB і BC та основою AC, а на рис. 3.9 — рівносторонній трикутник LMN.

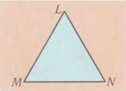


Рис. 3.9

Для формулювання і виведення властивостей рівнобедреного трикутника застосовуються поняття висоти, медіани і бісектриси трикутника. Поняття висоти трикутника нам уже відоме.

Медіаною трикутника називається відрізок, що з'єднує вершину трикутника із серединою протилежної сторони. На рис. 3.10 BM — медіана трикутника ABC. Термін «медіана» утворено від латинського слова medius, тобто середній.

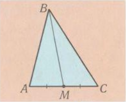


Рис. 3.10

Бісектрисою трикутника називається відрізок, що з'єднує вершину трикутника з точкою на протилежній стороні і ділить кут трикутника при цій вершині навпіл. На рис. 3.11 BK — бісектриса трикутника ABC.

Термін «бісектриса» запозичений з французької мови. У свою чергу французьке слово bissectrice утворене від латинських слів bis — «двічі» та secare — «розтинати», і дослівно означає «розтинати навпіл».

Теорема
(про властивості рівнобедреного трикутника).
У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні, а бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.

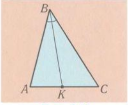


Рис. 3.11

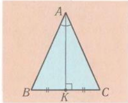


Рис. 3.12

Доведення. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою BC, AK — його бісектриса (рис. 3.12) Оскільки за означенням рівнобедреного трикутника $AB = AC$, а за означенням бісектриси $\angle BAK = \angle CAK$, то за першою ознакою $\Delta AKB = \Delta AKC$. З рівності цих трикутників випливає рівність кутів B і C при основі рівнобедреного трикутника. Звідси ж виводимо, що $BK = CK$, отже, AK — медіана трикутника ABC. Нарешті, оскільки $\angle AKB = \angle AKC$, а разом ці кути утворюють розгорнутий кут, то вони — прямі. Отже, AK — висота трикутника ABC. Теорему доведено.

Оскільки доведеною теоремою встановлено, що бісектриса, медіана і висота рівнобедреного трикутника, проведені до основи, збігаються, то істинними є також і такі твердження:

1) *медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є водночас бісектрисою і висотою;*

2) *висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є водночас бісектрисою і медіаною.*

З доведеної теореми також випливає, що в *рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.*

Застосування у конструкції старовинних ватерпасів

Цікаве втілення властивостей рівнобедреного трикутника мали конструкції старовинних ватерпасів — приладів для перевірки горизонтальності напрямків у будівництві. Найпростіший ватерпас складається з дерев'яного рівнобедреного трикутника ABC, до основи AB якого прилягає рівний брусок FG, а до вершини C підвішений на нитці тягарець E (рис. 3.13). Якщо тягарець розміщується строго над зубцем D, який уособлює середину основи AB, то це означає, що

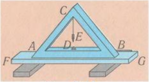


Рис. 3.13

пряма CE направлена по медіані CD рівнобедреного трикутника ABC, отже, і по його висоті. Тоді брусок FG перпендикулярний до лінії CE дії сили тяжіння, тобто займає горизонтальне положення. В противному разі його положення не є горизонтальним.

3.4. «Очевидність» — недостатній аргумент у геометрії

Буває, що дрібна перешкода може завадити досягненню великої мети.
Александр Дюма, «Три мушкетери»

Учням, які тільки-но приступають до вивчення геометрії, і, отже, тільки-но розпочинають ознайомлення зі строгими математичними доведеннями, окремі такі доведення часто здаються невиправдано «затеоретизованими». Стосовно попереднього хтось може подумати: «Навіщо при доведенні формули для площі прямокутника окремо розглядати ще й випадок дробових вимірів?» Інший додасть: «А хіба без доведення не очевидно, що діагональ прямокутника ділить його на рівні трикутники?». Або: «Хіба не очевидно, що будь-які трикутники, які мають відповідно рівні сторони і рівні кути між ними, рівні?»

Наведемо два конкретні приклади, які яскраво засвідчать, що посилання лише на «очевидність», як на єдиний аргумент, тобто без логічного доведення, може бути джерелом дуже грубих помилок.

Приклад 1 відноситься до так званих *софізмів* — неправильних тверджень, в яких начебто цілком строго «доводяться» властивості, що суперечать твердо встановленим істинам. Звичайно, такі «доведення» містять добре приховану помилку, пошук якої є дуже повчальною вправою.

Ні в кого не викликає сумніву, що коли плоску фігуру розрізати на декілька частин, а потім із цих

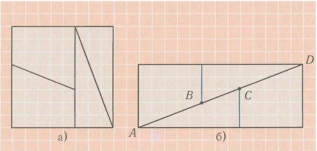


Рис. 3.14

частин скласти нову фігуру, то площа нової фігури буде такою самою, як площа початкової. У софізмі, що пропонується нижче, цей факт начебто «заперечується» на основі декількох «очевидних» прикладів.

У зошиті «в клітинку» побудуємо квадрат зі стороною 8 одиниць. Потім розріжемо його на 4 частини, як показано на рис. 3.14, а), а з одержаних частин складемо прямокутник, зображений на рис. 3.14, б). Площа квадрата дорівнює $8 \cdot 8 = 64$ кв. од., а площа прямокутника — $13 \cdot 5 = 65$ кв. од. Виходить, що $64 = 65$?!

Парадокс побудований на «очевидності». Спочатку спробуйте самостійно знайти помилку в наведених міркуваннях, а потім ознайомтеся з поясненням цього парадоксу.

А пояснення полягає в тому, що насправді лінія $ABCD$, яка утвориться при запропонованому перекладанні частин квадрата, — не відрізок, а замкнена ла-

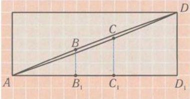


Рис. 3.15

мана (рис. 3.15). Отже, «зайвий» квадратний сантиметр якраз і обмежується цією ламаною. Однак це можна з'ясувати лише на основі правильних міркувань. Якби лінія $ABCD$ була відрізком, то підвищення BB_1, CC_1, DD_1 точок B, C, D над прямою AD_1 були б пропорційними до відстаней AB_1, AC_1 та AD_1, тобто відношення $\frac{BB_1}{AB_1}=\frac{2}{5}$, $\frac{CC_1}{AC_1}=\frac{3}{8}$ та $\frac{DD_1}{AD_1}=\frac{5}{13}$ були б рівними між собою. Але, оскільки це не так, то насправді лінія $ABCD$ не є прямою.

Як бачимо, те, що здається «очевидним», не завжди істинне.

Наступний приклад продемонструє, що логічного доведення потребують навіть «очевидні» речі, оскільки якщо такого доведення немає, то це може означати, що його й не може бути, тобто, що відповідне твердження насправді не є істинним.

Приклад 2. Дуже схожою на першу ознаку рівності трикутників є таке твердження: Якщо дві сторони і кут, *що прилягає до однієї з них*, в одному трикутнику, відповідно рівні двом сторонам і куту, *що прилягає до однієї з них*, в іншому трикутнику, то такі трикутники рівні між собою. Відмінності від формулювання першої ознаки тут виділені курсивом.

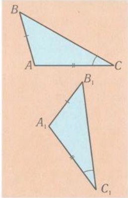


Рис. 3.16

На рис. 3.16 зображені два трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, які повністю задовольняють умовам цього твердження: у них $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$. І тут справді ніби-то очевидно, що зображені трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні між собою. Але чи можемо ми лише на основі цього рисунка зробити висновок, що сформульоване твердження є ще однією ознакою рівності трикутників?

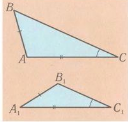


Рис. 3.17

Погляньмо на трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, які зображені на рис. 3.17. Вони теж задовольняють зазначеним умовам: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, але тепер уже абсолютно очевидно, що ці трикутники не рівні між собою. Тому насправді сформульоване твердження неправильне. Виявляється, що рис. 3.16, з якого воно нібито випливає як істинне, не відображає усіх можливих ситуацій. Отже, допоки не проведено належного логічного обґрунтування, жоден висновок не може вважатися істинним. Скільки рисунків не будуй, їх все одно буде скінченна кількість. Тому завжди залишатиметься небезпека, що якась особливість пропущена.

Отже, і надалі будемо так само ретельно проводити логічні доведення!

3.5. Про походження слів «теорія» і «теорема»

Широко вживане тепер слово «теорія» бере свій початок від розмовного грецького слова «теорео», що означає «приглядаюся», «придивляюся», «розглядаю». Навіть найсміливіші, найрадикальніші наукові теорії виникали лише після того, як дослідники починали уважно «придивлятися» до найбуденніших речей, які їх оточують. Коли теорія створена, то при належній наполегливості її може осягнути кожен. А ось «придивитися» і розгледіти її основи у вирі відомого та буденного вдається не кожному. Гарантованих рецептів для успіху немає, але безсумнівним є те, що для цього потрібно навчатися «приглядатися». Шкільна геометрія якраз і є одним з найкращих засобів для такого навчання.

Слово честі, я й гадки не мав, що ось уже понад сорок років розмовляю прозою.

Ж.-Б. Мольєр, «Міщанин-шляхтич»

Від того самого слова «теорео» походить і математичний термін «теорема». *Теоремами* зазвичай називають окремі твердження про властивості математичних об'єктів — чисел, рівнянь, фігур, відношень між фігурами та їхніми рівняннями тощо (зрештою, інколи теоремами називають і окремі твердження в інших науках, зокрема у фізиці та механіці). Кожна математична теорія — це більша чи менша сукупність теорем про властивості її об'єктів. Зокрема, у геометрії теоремами називають твердження про властивості геометричних фігур. Наприклад, теоремами є: доведене у п. 2.2 твердження про розбиття прямокутника діагоналлю на два рівних прямокутних трикутники, перша ознака рівності трикутника, а також твердження про властивості рівнобедреного трикутника.

Доведенням теореми називається мисленнєве виведення її висновку з уже відомих фактів, тобто з фактів, які перед тим були доведені або їх взяли з досвіду як безсумнівні істини. Як математичний термін, слово «теорема» застосовувалося ще Архімедом у III ст. до н.е.

Перевір себе

1. Що означає вираз: «Трикутник ABC дорівнює трикутнику PQR»?
2. Як записується рівність трикутників?
3. Сформулюйте першу ознаку рівності трикутників. Як вона доводиться?
4. Як формулюється перша ознака рівності прямокутних трикутників?
5. Чи будуть рівними трикутники, на які квадрат розбивається своєю діагоналлю?
6. У прямокутних трикутниках відповідно рівні катет і гіпотенуза, а також кути між ними. Чи рівні ці трикутники?
7. Чи завжди два трикутники, які мають дві пари відповідно рівних сторін і по одному рівному куту, рівні між собою?
8. Що таке теорема? Назвіть відомі вам приклади теорем з геометрії та інших розділів математики.
9. Які трикутники називають рівнобедреними? А рівносторонніми?
10. Що таке медіана трикутника? А бісектриса?
11. Сформулюйте властивості рівнобедреного трикутника. Як їх можна довести?

Задачі і вправи

1. Доведіть, що два квадрати, які мають рівні сторони, рівні між собою.
2. Доведіть, що два прямокутники, які мають відповідно рівні сторони, рівні між собою.
3. Доведіть, що діагоналі квадрата ділять навпіл його кути.
4. Периметр одного трикутника більший від периметра іншого. Чи можуть бути рівними ці трикутники?

5. Чи можна стверджувати, що коли трикутник ABC рівний трикутнику $A_1B_1C_1$, а трикутник $A_1B_1C_1$ — трикутнику $A_2B_2C_2$, то трикутники ABC і $A_2B_2C_2$ рівні між собою? Обґрунтуйте свою відповідь.
6. Відомо, що трикутники ABC і CAB рівні. Скільки рівних сторін має трикутник ABC?
7. У трикутнику ABC всі сторони мають різні довжини. Чи рівні трикутники ABC і BAC?
8. Дано: $AD = BC$, $\angle ADB = \angle DBC$ (рис. 3.18, а). Доведіть, що $AB = DC$, $\angle A = \angle C$.
9. Дано: $AB = AC$, $\angle BAO = \angle CAO$ (рис. 3.18, б). Доведіть, що $BO = CO$.
10. Дано: $\angle MAD = \angle NBE$, $AD = BE$, $AC = CB$ (рис. 3.18, в). Доведіть, що $CD = CE$, $\angle ACD = \angle BCE$.
11. Дано: $AC = BD$, $\angle CAB = \angle DBA$ (рис. 3.18, г). Доведіть, що $\angle DAB = \angle CBA$, $AD = CB$.
12. Дано: $AC = BC$; $CD = CE$ (рис. 3.18, ґ). Доведіть, що $\Delta ACE = \Delta BCD$.
13. Дано: $MA = MB$, $AC = BD$, $\angle MAC = \angle MBD$ (рис. 3.18, д). Доведіть, що $\angle MCD = \angle MDC$.

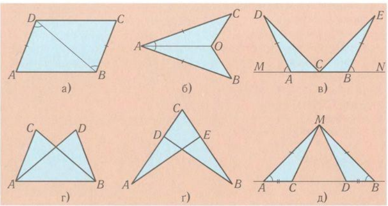


Рис. 3.18

14. У рівних трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ точки M і M_1 — відповідно середини сторін BC і B_1C_1. Доведіть, що відрізок AM рівний відрізку A_1M_1.
15. Висота BN трикутника ABC утворює зі сторонами BA і BC рівні кути. Доведіть, що кути A і C цього трикутника рівні між собою.
16. На сторонах кута A відкладемо рівні відрізки AC і AD, а потім на цих відрізках взято такі точки E і F, що $AE = AF$. Доведіть, що $\angle CED = \angle DFC$.

17. Чотирикутник $ABCD$ такий, що продовження відрізка AD перетинає відрізок BC під прямим кутом і ділить його навпіл (рис. 3.19). Доведіть, що в цьому чотирикутнику $AB = AC$, а $DB = DC$.

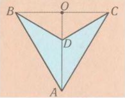


Рис. 3.19

18. На рис. 3.20 схематично зображено визначення протяжності озера в напрямку AB з використанням екера для побудови прямих кутів ACB та ACD. Опишіть деталі цих побудов та обґрунтуйте їх.

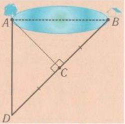


Рис. 3.20

19. Дано два рівних трикутники ABC і $A_1B_1C_1$.
1) $AB = 5$ см, $\angle A = 90°$. Чому дорівнює сторона A_1B_1? Чому дорівнює кут A_1?
2) $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $CA = 8$ см. Визначте сторони трикутника $A_1B_1C_1$;
4) $\angle A_1 = 76°$, $A_1B_1 = 10$ см, $C_1A_1 = 5$ см. Визначте $\angle A$, AB, CA.

20. Дано два рівних трикутники ABC і DEM. Відомо, що $AB = DE$, $AC = DM$. Які кути трикутника ABC дорівнюють кутам D, E, M?

21. Нехай маємо трикутник MHK. Придумайте просте правило, яке дає змогу, не виконуючи рисунка, з'ясувати, які сторони утворюють які кути, або лежать проти яких кутів, а також які кути містяться між якими сторонами або прилягають до яких сторін. Дайте відповіді на запитання:
1. Чи міститься $\angle H$ між сторонами MH і HK?
2. Чи прилягає сторона MK до кутів M і K?
3. Який кут міститься між сторонами MH і MK?
4. Яка сторона прилягає до кутів M і H?

22°. Дано: $CA = CB$, $AM = BN$ (рис. 3.21). Доведіть, що трикутник CMN — рівнобедрений.

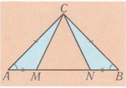


Рис. 3.21

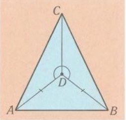


Рис. 3.22

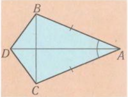


Рис. 3.23

23°. Дано: $DA = DB$, $\angle CDA = \angle CDB$ (рис. 3.22). Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений.

24°. Дано: $AB = AC$, $\angle BAD = \angle CAD$ (рис. 3.23). Доведіть, що трикутник BCD — рівнобедрений.

25. Доведіть, що у рівносторонньому трикутнику: а) усі кути рівні; б) усі медіани рівні; в) усі висоти рівні; г) усі бісектриси рівні.

26. Доведіть, що якщо медіана трикутника збігається з його висотою, то трикутник рівнобедрений.

27. Доведіть, що в рівних трикутниках медіани, проведені до рівних сторін, рівні між собою.

28. Доведіть, що якщо в трикутнику ABC сторони AB і AC не рівні, то медіана AM цього трикутника не є його висотою.

29. Доведіть, що у рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, рівні.

30°. Доведіть, що рівнобедрені трикутники рівні, якщо бічна сторона й кут при вершині одного трикутника дорівнюють відповідно бічній стороні й куту при вершині іншого трикутника.

31. Доведіть, що якщо в трикутнику дві висоти є бісектрисами, то цей трикутник рівносторонній.

32. На бічних сторонах CA і CB рівнобедреного трикутника ABC від його вершини C відкладено рівні відрізки CM і CN (рис. 3.24). Доведіть, що відрізки AN і BM рівні.

33. На сторонах рівностороннього трикутника ABC відкладено рівні відрізки AP, BQ і CR (рис. 3.25). Доведіть, що трикутник PQR — рівносторонній.

34. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено медіану BM. На сторонах AB і CB позначено відповідно точки E та F так, що $AE = CF$. Доведіть, що $\Delta BME = \Delta BMF$, а $\Delta AME = \Delta CMF$.

35. Периметр рівнобедреного трикутника ABC з основою AC (рис. 3.26) дорівнює 40 см, а периметр рівностороннього трикутника ABD дорівнює 45 см. Визначте сторони трикутника ABC.

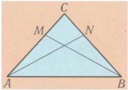


Рис. 3.24

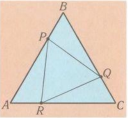


Рис. 3.25

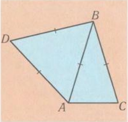


Рис. 3.26

36*. Рівнобедрені трикутники ABC і DBC мають спільну основу BC (рис. 3.27, а, б). Доведіть, що в кожному можливому випадку взаємного розміщення цих трикутників $\Delta BAD = \Delta CAD$. Доведіть також, що пряма AD проходить через середину відрізка BC.

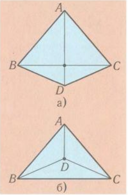


Рис. 3.27

37*. У рівнобедреному трикутнику ABC бічні сторони AB і BC дорівнюють по 18 см. Через середину M сторони AB проведено пряму, перпендикулярну до цієї сторони. Проведена пряма перетинає сторону BC в точці N (рис. 3.28). Визначте основу AC, якщо периметр трикутника ANC дорівнює 27 см.

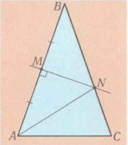


Рис. 3.28

38*. Точка, що лежить на висоті трикутника, рівновіддалена від кінців сторони, до якої проведена ця висота. Доведіть, що даний трикутник рівнобедрений.

39. Доведіть, що середини сторін рівнобедреного трикутника є вершинами іншого рівнобедреного трикутника.

40. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а його бічна сторона вдвічі більша за основу. Визначте довжини сторін цього трикутника.

41. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника відносяться, як 2 : 3. Визначте сторону цього трикутника, якщо його периметр дорівнює 16 см.

42. Визначте основу рівнобедреного трикутника, якщо вона на 5 дм менша від його бічної сторони, а периметр трикутника дорівнює 46 дм.

43. У рівнобедреному трикутнику основа більша від бічної сторони на 2 см, але менша від суми бічних сторін на 3 см. Визначте сторони трикутника.

44. Визначте сторони рівнобедреного трикутника з периметром 46 см, якщо його основа становить 30% від бічної сторони.

45. Одна зі сторін рівнобедреного трикутника дорівнює 7 см, а його периметр — 19 см. Визначте сторони цього трикутника.

46. Медіана рівнобедреного трикутника ділить його периметр на частини, що дорівнюють 9 см і 12 см. Визначте сторони трикутника.

47*. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20 дм, а одна з його сторін удвічі більша від іншої. Визначте сторони трикутника.

48. У квадраті проведені відрізки, які з'єднують середини суміжних сторін (рис. 3.29). Доведіть, що обмежений відрізками чотирикутник теж є квадратом. Чому дорівнює його площа, якщо площа початкового квадрата S?

49. У прямокутнику проведено відрізки, які з'єднують середини сусідніх сторін (рис. 3.30). Доведіть, що всі ці відрізки рівні між собою. Чому дорівнює площа обмеженого ними чотирикутника, якщо площа заданого прямокутника S?

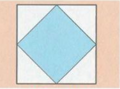


Рис. 3.29

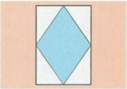


Рис. 3.30

50*. Доведіть, що якщо у трикутнику медіана дорівнює половині сторони, до якої вона проведена, то кут, із вершини якого вона проведена, дорівнює сумі двох інших кутів.

51*. Квадрат розрізано по діагоналях на 4 частини. Скільки різних видів рівновеликих многокутників можна скласти із цих частин, якщо сусідні многокутники прикладати один до одного лише цілими сторонами без перекриття?

52*. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат, який має з трикутником спільний кут. Визначте периметр і площу квадрата, якщо катет трикутника має довжину a.

53*. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат, дві вершини якого лежать на гіпотенузі трикутника, а дві інші — на катетах. Визначте периметр і площу квадрата, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює c.

54*. У квадраті $ABCD$ провели відрізки, що з'єднують середини суміжних сторін (рис. 3.31). Потім у чотирикутнику, обмеженому цими відрізками, зробили те саме. У результаті утворився ще один чотирикутник. Чому дорівнює площа початкового квадрата, якщо площа останнього чотирикутника S? Як виражається площа початкового квадрата через площу Q затушованого трикутника? Скільки чотирикутників можна ще побудувати в описаний спосіб, щоб площа найменшого з них була не меншою за $0,01S$?

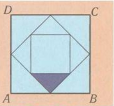


Рис. 3.31

§4 Сума кутів трикутника і многокутника

4.1. Сума кутів трикутника

Якщо придивитися пильніше до розбиття прямокутника діагоналлю на два рівних прямокутних трикутники (рис. 4.1), то звідси можна вивести і вже зовсім неочевидний факт — про суму кутів трикутника.

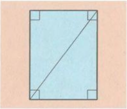


Рис. 4.1

Оскільки всі кути прямокутника прямі, тобто дорівнюють по 90°, то їхня сума становить $4 \cdot 90°$, або 360°. Крім цього, сума кутів обох одержаних рівних прямокутних трикутників дорівнює сумі кутів прямокутника. Трикутники рівні, тому суми кутів у кожному з них однакові. Отже, сума кутів одного такого трикутника дорівнює $\frac{1}{2} \cdot 360°$, тобто 180°.

З іншого боку, який би не був прямокутний трикутник, його завжди можна доповнити рівним йому трикутником до прямокутника. Отже, *який би не був прямокутний трикутник, сума його кутів завжди дорівнює 180°.*

Важко описати подив і збентеження, які викликало в мене це відкриття.
Даніель Дефо, «Робінзон Крузо»

Доведемо, що цю саму властивість має будь-який інший трикутник, тобто, що справджується така теорема:

Теорема
(*про суму кутів трикутника*).

Сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°.

Доведення. Для прямокутного трикутника твердження теореми доведено.

Нехай маємо який завгодно інший трикутник ABC. Проведемо з вершини A висоту AD. Може трапитися два випадки: 1) точка D лежить на стороні BC (рис. 4.2); 2) точка D належить продовженню сторони BC (рис. 4.3). У першому випадку сума кутів трикутника ABC дорівнює сумі кутів прямокутних трикутників ADB і ADC, з якої потрібно вилучити два прямих кути при вершині D. Отже, ця сума дорівнює $2 \cdot 180° - 2 \cdot 90°$, тобто $180°$, що й треба було довести.

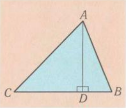


Рис. 4.2

У другому випадку сума кутів трикутника ABC дорівнює різниці між сумами кутів трикутників ADC та ADB, до якої потрібно додати суму кутів ABC та ABD. Оскільки остання сума дорівнює розгорнутому куту, тобто $180°$, то шукана сума кутів трикутника ABC становить $180° - 180° + 180°$, тобто теж $180°$. Теорему доведено повністю.

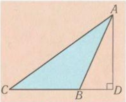


Рис. 4.3

Наслідок
(про кути прямокутного трикутника).

Прямокутний трикутник має два гострих кути. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

Справді, оскільки у прямокутному трикутнику один з кутів прямий, то сума двох інших його кутів дорівнює $180° - 90°$, тобто $90°$. Отже, кожен із цих кутів менший від $90°$, тобто є гострим. Наслідок доведено.

Істина ясна, що у трикутник двом тупим кутам не влиться.
Данте Аліг'єрі, «Божественна комедія»

Зрозуміло, таким чином, що трикутник не може мати більше одного прямого кута.

Наслідком з доведеної теореми є й те, що ***трикутник не може мати більше одного тупого кута***.

Справді, тупим називається кут, який більший від прямого, отже, його градусна міра більша від $90°$. Тому якби в якомусь трикутнику було два тупих кути, то сума всіх кутів такого трикутника була б більшою від суми $90° + 90°$, тобто від $180°$. А це суперечить доведеній теоремі про суму кутів трикутника.

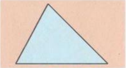


Рис. 4.4

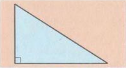


Рис. 4.5

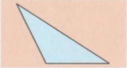


Рис. 4.6

Відповідно до останніх висновків, трикутники поділяються на гострокутні, прямокутні та тупокутні. *Гострокутними* називаються трикутники, в яких усі кути гострі (рис. 4.4), *прямокутними* — трикутники, в яких один з кутів прямий (рис. 4.5), а *тупокутними* — трикутники, в яких один з кутів тупий (рис. 4.6).

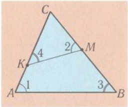


Рис. 4.7

Задача.

У трикутнику ABC проведено відрізок KM так, що $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 4.7). Довести, що тоді $\angle 3 = \angle 4$.

Розв'язання. З ΔABC: $\angle 3 = 180° - \angle 1 - \angle C$. З ΔCKM: $\angle 4 = 180° - \angle 2 - \angle C$.

Оскільки $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 4 = 180° - \angle 1 - \angle C$. Отже, $\angle 3 = \angle 4$. Твердження задачі доведено.

Зауваження. Твердження цієї задачі дуже часто застосовується у випадку прямокутного трикутника, коли відрізок KM проведений з вершини прямого кута під прямим кутом до гіпотенузи, тобто коли KM — висота цього трикутника, проведена до гіпотенузи (рис. 4.8). Відповідно до твердження задачі, кут 4 між цією висотою і одним з катетів дорівнює гострому куту 3 трикутника, який прилягає до іншого катета.

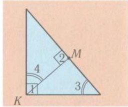


Рис. 4.8

4.2. Сума кутів чотирикутника

Як уже зазначалося, сума кутів прямокутника дорівнює $4 \cdot 90°$, тобто $360°$. Виявляється, що такою є сума кутів будь-якого іншого чотирикутника. Доведемо це.

Розрізняють опуклі й неопуклі чотирикутники. Чотирикутник, який містить обидві свої діагоналі, називається *опуклим*. Таким є чотирикутник $ABCD$, зображений на рис. 4.9. Чотирикутник, який містить лише одну свою діагональ, називається *неопуклим*. Таким є чотирикутник $ABCD$, зображений на рис. 4.10.

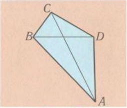


Рис. 4.9

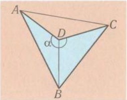


Рис. 4.10

Опуклий чотирикутник можна уявляти утвореним з деякого трикутника, до якого долучається інший трикутник, що має з першим спільну сторону, а його вершина лежить ззовні першого трикутника. Наприклад, опуклий чотирикутник $ABCD$, зображений на рис. 4.9, складається з двох таких трикутників ABC і ADC. Тому зрозуміло, що сума кутів опуклого чотирикутника дорівнює сумі кутів двох трикутників, тобто $2 \cdot 180°$, що й дає $360°$.

Навпаки, неопуклий чотирикутник можна утворити з деякого трикутника, вилучивши з нього інший трикутник, що має з першим спільну сторону, а його вершина лежить всередині цього трикутника. Наприклад, неопуклий чотирикутник $ABCD$, зображений на рис. 4.10, утворюється з трикутника ABC, з якого вилучено трикутник ADC. Тому сума кутів такого чотирикутника дорівнює сумі кутів трикутника ABC, від якої потрібно відняти кути DAC і DCA та додати кут α з вершиною D, який доповнює кут D трикутника DAC до $360°$. Оскільки кут D дорівнює $180° - \angle DAC - \angle DCA$, то кут $\alpha = 360° - \angle D = 180° + \angle DAC + \angle DCA$. Отже, для суми кутів чотирикутника $ABCD$ маємо значення: $180° - \angle DAC - \angle DCA + (180° + \angle DAC + \angle DCA) = 180° + 180° = 360°$, що й треба було довести.

Отже, доведено таку теорему:

Теорема
(про суму кутів чотирикутника).

Сума кутів будь-якого чотирикутника дорівнює $360°$.

4.3. Сума кутів довільного многокутника

Як і чотирикутники, многокутники теж в загальному випадку бувають опуклі й неопуклі. Многокутник, який містить усі свої діагоналі, називають *опуклим*. В противному разі многокутник називають *неопуклим*. Отже, принаймні одна з діагоналей неопуклого многокутника не належить йому або належить лише якоюсь своєю частиною (відрізком).

Подібно до того, як будь-який чотирикутник можна утворити з деякого трикутника, долучивши або вилучивши з нього інший трикутник, так само будь-який п'ятикутник можна утворити з певного чотирикутника, долучивши або вилучивши з нього якийсь трикутник. Наприклад, кожен з п'ятикутників, зображених на рис. 4.11, а)–в), можна утворити з певного чотирикутника $ABCD$, долучивши до нього або вилучивши з нього трикутник ADE.

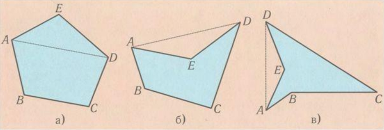


Рис. 4.11

Оскільки, як показано у попередньому пункті, таке долучення або вилучення трикутника додає до суми кутів попередньої фігури 180°, то сума кутів п'ятикутника одержиться із суми $2 \cdot 180°$ кутів чотирикутника додаванням 180°. Отже, сума кутів п'ятикутника дорівнює $3 \cdot 180°$.

Застосовуючи ці самі міркування для шестикутника, одержимо, що сума його кутів дорівнює $3 \cdot 180° + 180°$, тобто $4 \cdot 180°$. І взагалі, для суми кутів n-кутника матимемо значення: $(n - 3) \cdot 180° + 180° = (n - 2) \cdot 180°$.

Отже, маємо теорему.

Теорема
(про суму кутів многокутника).
Сума кутів будь-якого n-кутника дорівнює $(n - 2) \cdot 180°$.

Теорема істинна як для опуклих, так і для неопуклих многокутників.

Задача.
Неважко побудувати трикутник, чотирикутник, п'ятикутник, шестикутник з трьома гострими кутами (рис. 4.12). А чи існує який-небудь опуклий многокутник з чотирма гострими кутами?

Розв'язання. Припустимо, що при деякому n існує такий n-кутник, в якому чотири кути α_1, α_2, α_3, α_4 — гострі. Нехай β_1, β_2, ..., β_{n-4} — інші його кути. Тоді відповідно до формули для суми кутів n-кутника:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \\ + (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-4}) = (n - 2) \cdot 180°.$$

Оскільки за припущенням сума $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$ менша від $4 \cdot 90°$, тобто від $2 \cdot 180°$, то для виконання записаної рівності сума $(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-4})$ має бути більшою за $(n - 2) \cdot 180° - 2 \cdot 180°$, тобто за $(n - 4) \cdot 180°$. Цього жодним чином не можна досягти, якщо кожен з доданків β_1, β_2, ..., β_{n-4} не перевищуватиме 180°. Отже, принаймні один з них має бути більшим за 180°. А це можливо лише для неопуклих многокутників. Тому не існує жодного опуклого многокутника, в якому є аж чотири гострі кути.

Відповідь. Не існує.

Ніхто не зайде далеко в математиці й не стане справжнім математиком, якщо не матиме певних необхідних якостей. У ньому повинні жити Віра, Надія та Цікавість, і найважливіша з цих якостей — Цікавість. Він повинен постійно запитувати себе — чому, як і коли, і це повинно бути головною пружиною, яка рухає ним.
Луїс Джоель Мордел

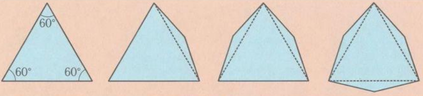


Рис. 4.12

4.4. Ще одна властивість та ознака прямокутника

Доведення властивості і третьої ознаки прямокутника

Вище уже було доведено (див. п. 2. 2), що діагоналі прямокутника рівні між собою. Тоді ж зазначалося, що цією властивістю часто користуються практики для грубої перевірки прямокутних форм, а саме: якщо діагоналі чотирикутника не рівні, то цей чотирикутник не може бути прямокутником.

Мені часто доводилося це бачити, але я не надавав цьому значення.
Готфрід Рудольф Еріх Распе, «Пригоди барона фон Мюнхгаузена»

Отже, рівність діагоналей є необхідною умовою для того, аби даний чотирикутник був прямокутником. Однак ця необхідна умова не є достатньою, тобто рівні діагоналі можуть мати і не прямокутники. Тепер, застосовуючи теорему про суму кутів трикутника, ми зможемо довести *необхідні* і *достатні* умови для діагоналей чотирикутника, при виконанні яких він буде прямокутником. Таким чином, це буде ще одна ознака прямокутника.

Спочатку доведемо відповідну властивість діагоналей прямокутника, тобто *необхідну* умову для прямокутника.

Теорема
(про перетин діагоналей прямокутника).
Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл.

Доведення. Нехай маємо прямокутник $ABCD$ (рис. 4.13), K, L, M, N — середини його сторін. Проведемо відрізки KM і LN та позначимо через O точку їхнього перетину. З'єднаємо, нарешті, точку O з вершинами прямокутника. Ідея доведення теореми полягатиме в тому, щоб показати, що відрізки OB і OD рівні і лежать на одній прямій; те ж саме і стосовно відрізків OA та OC. Звідси випливатиме, що діагоналі BD та AC проходять через точку O і діляться нею навпіл, тобто твердження теореми буде доведено.

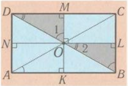


Рис. 4.13

За другою ознакою чотирикутники $ABLN$ та $ADMK$ — прямокутники. Тому відрізки LN та MK перпендикулярні до відповідних сторін прямокутника $ABCD$. Тому за другою ознакою прямокутника усі чотири чотирикутники, на які ці відрізки розбивають прямокутник $ABCD$, — прямокутники з відповідно рівними вимірами. Отже, діагоналі OB, OD, OA, OC цих прямокутників розбивають їх на рівні прямокутні трикутники. Зокрема, прямокутний трикутник OLB рівний прямокутному трикутнику DMO. Звідси $OB = OD$. А оскільки сума гострих кутів у кожному з цих трикутників дорівнює 90°, то $\angle 1 + \angle 2 = 90°$. Тому $\angle DOB = \angle 1 + \angle MOL + \angle 2 = (\angle 1 + \angle 2) + \angle MOL = 90° + 90° = 180°$. Це й означає, що відрізки OB і OD справді лежать на одній прямій.

Будь-який час сприятливий для поповнення знань.
Жуль Верн, «Діти капітана Гранта»

Так само доведемо, що відрізки OA і OC теж рівні і також лежать на одній прямій. Отже, BD та AC — діагоналі прямокутника і точкою O свого перетину вони діляться навпіл. Теорему доведено.

Наслідок.

Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться на чотири рівних відрізки.

А тепер обґрунтуємо, що доведена властивість насправді є *ознакою* прямокутника.

Теорема
(третя ознака прямокутника).

Якщо діагоналі чотирикутника рівні і кожна з них точкою перетину ділиться навпіл, то цей чотирикутник є прямокутником.

Доведення. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD рівні, перетинаються і точкою O свого перетину діляться навпіл (рис. 4.14). Тоді $OA = OB = OC = OD$. Розглянемо трикутник OAB. Оскільки його сторони OA і OB рівні, то він рівнобедрений.

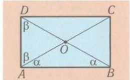


Рис. 4.14

Отже, рівні кути при його основі AB. Позначимо їхні величини через α. Аналогічно, рівними є кути при основі AD рівнобедреного трикутника OAD. Позначимо їхні величини через β. Тоді сума кутів трикутника BAD дорівнюватиме $2\alpha + 2\beta$. З іншого боку, ця сума дорівнює $180°$. Отже,

$$2\alpha + 2\beta = 180°.$$

Звідси $\alpha + \beta = 90°$. Тому $\angle BAD = 90°$.

Аналогічно дійдемо висновку, що й інші кути чотирикутника $ABCD$ прямі. Тому залишається довести, що його протилежні сторони рівні.

Усі міркування геометра закінчуються словами: «Що й треба було довести». Цією формулою корисно закінчувати усі міркування: як усні, так і письмові.
Дені Дідро

Розглянемо трикутники OAB та OCD. У них рівні сторони OA і OC та OB і OD. Рівні також кути AOB і COD між цими сторонами. Справді, кожен із цих кутів доповнює кут AOD до розгорнутого кута. Тому $\angle AOB + \angle AOD = 180°$ (звідси $\angle AOB = 180° - \angle AOD$), а $\angle COD + \angle AOD = 180°$ (звідси $\angle COD = 180° - \angle AOD$). Отже, $\angle AOB = \angle COD$. Тому за першою ознакою згадані трикутники рівні. Отже, рівні і їхні сторони AB і CD, які лежать проти рівних кутів.

Аналогічно доведемо, що й $AD = BC$. Отже, $ABCD$ — прямокутник, що й треба було довести.

Наслідки

З доведеної властивості та ознаки прямокутника випливає ціла низка цікавих геометричних фактів, окремі з яких вже зовсім неочевидні.

Про коло, описане навколо прямокутника і прямокутного трикутника. Коло, яке проходить через усі вершини многокутника, називається *описаним* навколо цього многокутника, а сам многокутник — *вписаним у коло*. На рис. 4.15 зображено коло, описане навколо п'ятикутника $ABCDE$.

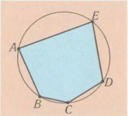


Рис. 4.15

Нехай маємо прямокутник $ABCD$, O — точка перетину його діагоналей (рис. 4.16). Оскільки всі чотири відрізки OA, OB, OC, OD рівні між собою, то коло з центром O, яке проходить через одну з вершин прямокутника, пройде й через усі решту вершин, тобто буде описаним навколо цього прямокутника.

Отже, ***навколо будь-якого прямокутника можна описати коло. Центром цього кола є точка перетину діагоналей прямокутника, а його радіус дорівнює половині діагоналі прямокутника.***

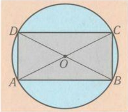


Рис. 4.16

Розглянемо тепер довільний прямокутний трикутник ACB з прямим кутом C (рис. 4.17). Доповнимо його до прямокутника $ACBC_1$, провівши BC_1 перпендикулярно до CB та AC_1 перпендикулярно до AC. Нехай O — точка перетину діагоналей цього прямокутника. За властивістю прямокутника точка O — середина діагоналі AB і водночас центр описаного кола. Зрозуміло, що це коло буде описаним і навколо трикутника ACB.

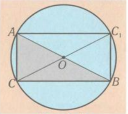


Рис. 4.17

Отже, ***навколо будь-якого прямокутного трикутника можна описати коло. Центром цього кола є середина гіпотенузи, а його радіус дорівнює половині гіпотенузи. Гіпотенуза є діаметром описаного кола.***

Про медіану прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи. Доведемо, що *медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.*

Справді, вказана медіана є радіусом описаного кола, а гіпотенуза трикутника — діаметром цього кола. Оскільки радіус дорівнює половині діаметра, то медіана дорівнює половині гіпотенузи, що й треба було довести.

Можна довести, що й, навпаки, ***якщо медіана трикутника дорівнює половині сторони, до якої вона проведена, то цей трикутник є прямокутним, а дана сторона — його гіпотенуза.***

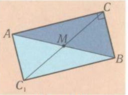


Рис. 4.18

Справді, нехай у трикутнику ABC CM — медіана і $CM = \frac{1}{2}AB$ (рис. 4.18). Продовжимо відрізок CM на відстань $MC_1 = CM$. Тоді за третьою ознакою чотирикутник $ACBC_1$ буде прямокутником. Отже, кут ACB у ньому — прямий. Це означає, що трикутник ABC прямокутний, а сторона AB у ньому — гіпотенуза.

Про вписані кути, що спираються на діаметр. Нехай AB — діаметр кола, O — його центр, C — яка-небудь точка на колі, що не збігається ні з A, ні з B (рис. 4.19). Тоді у трикутнику ABC медіана CO дорівнює половині сторони AB, до якої вона проведена. Як вище з'ясовано, при цьому трикутник ABC — прямокутний, а кут C у ньому — прямий, що й треба було довести.

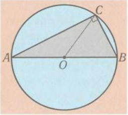


Рис. 4.19

Про кут з вершиною на колі, сторони якого проходять через кінці діаметра, кажуть, що він *вписаний у коло* і *спирається на цей діаметр*. Беручи до уваги дане означення, маємо таку теорему.

Теорема
(про вписаний кут, що спирається на діаметр).
Вписаний кут, що спирається на діаметр, — прямий.

Доведення цієї теореми окремі античні історики приписували легендарному Фалесу. За переказами, після доведення цієї теореми Фалес приніс у жертву бика.

На основі теореми про вписаний кут, що спирається на діаметр, дуже легко здійснюється побудова прямого кута за допомогою циркуля та лінійки. Для цього будується коло і проводиться який-небудь з його діаметрів. Тоді будь-який вписаний кут, що спирається на цей діаметр, — прямий. У наступному параграфі ці побудови будуть застосовані для перетворення прямокутника у рівновеликий йому квадрат.

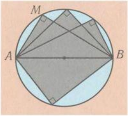


Рис. 4.20

Про геометричне місце точок Фалеса. Якщо всі точки фігури F мають певну властивість, назвемо її для спрощення *властивість A*, і немає інших точок, які мають цю властивість, то кажуть, що фігура F є *геометричним місцем точок з властивістю A*.

З теореми про вписаний кут, який спирається на діаметр, випливає, що всі точки M кола з діаметром AB, окрім кінців цього діаметра, мають таку властивість: кожен вписаний кут AMB — прямий (рис. 4.20). Неважко довести, що у площині заданого кола немає жодної іншої такої точки N, для якої кут ANB теж був би прямим.

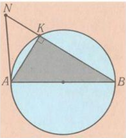


Рис. 4.21

Справді, розглянемо будь-який інший кут ANB, який спирається на діаметр AB, але вершина якого лежить ззовні кола (рис. 4.21). Нехай K — точка перетину прямої BN з колом, відмінна від B. Тоді за доведеною теоремою кут AKB — прямий. Отже, прямим є і кут AKN. Тому у прямокутному трикутнику AKN кут N мусить бути гострим. Отже, він — не прямий.

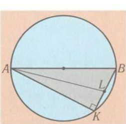


Рис. 4.22

Якщо кут ALB спиратиметься на діаметр AB, але його вершина лежатиме всередині кола (рис. 4.22), то, міркуючи аналогічно, дійдемо висновку, що прямим є кут AKB, отже, кут ALK — не прямий, а тому не прямий і кут ALB.

Отже, виходить, що для всіх точок M кола з діаметром AB (за винятком лише кінців A, B), і лише для них, кут AMB — прямий. Тому це коло (без точок A і B) є *геометричним місцем вершин усіх прямих кутів, розміщених у площині, які спираються на відрізок AB*. Називатимемо його *геометричним місцем точок Фалеса*.

Задача.

Довести, що навколо опуклого чотирикутника, в якому два протилежні кути прямі, можна описати коло.

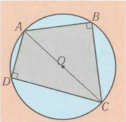


Рис. 4.23

Розв'язання. Нехай в опуклому чотирикутнику $ABCD$ протилежні кути B і D прямі (рис. 4.23). Тоді кожен із трикутників ABC і ADC — прямокутний, а AC — їхня спільна гіпотенуза. Отже, для кожного із кіл, описаних навколо цих трикутників, гіпотенуза AC є діаметром. Тому коло, описане навколо трикутника ABC, водночас буде описаним і навколо трикутника ADC, тобто — навколо всього чотирикутника $ABCD$. Твердження задачі доведено.

Перевір себе

1. Чому дорівнює сума кутів прямокутного трикутника? Як це довести?
2. Які кути може мати прямокутний трикутник?
3. В якому трикутнику сума кутів більша — у гострокутному чи в тупокутному?
4. Сформулюйте теорему про суму кутів трикутника. В чому полягає ідея доведення цієї теореми?
5. Як класифікують трикутники залежно від величини їхніх кутів?
6. Чи може трикутник мати два прямих або два тупих кути? Як ви обґрунтуєте свою відповідь?
7. Чому дорівнює сума гострих кутів прямокутного трикутника?
8. Дайте означення опуклих і неопуклих многокутників.
9. Чому дорівнює сума кутів чотирикутника та n-кутника? Чи залежить ця сума від того, опуклий чи неопуклий даний многокутник?
10. Сформулюйте усі відомі вам властивості та ознаки прямокутника. Які з них взяті за початкові, а які можна вивести логічним шляхом з початкових?
11. У чому полягає основна ідея доведення теореми про перетин діагоналей прямокутника? Чи використовується (прямо або опосередковано) при доведенні цієї теореми теорема про суму кутів трикутника?
12. Як можна довести третю ознаку прямокутника?
13. Коли многокутник називають вписаним у коло? Яке коло називають описаним навколо многокутника?
14. Чи можна описати коло навколо квадрата? А навколо якого-небудь іншого прямокутника? Як це довести?
15. Як довести, що навколо будь-якого прямокутного трикутника можна описати коло? Де знаходиться його центр? Чому дорівнює радіус?
16. Яку особливу властивість має медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи?
17. Як означається вписаний кут, що спирається на діаметр кола? Яку характеристичну властивість мають такі кути?
18. Що таке геометричне місце точок з даною властивістю? Чи правильно буде сказати, що це — фігура, всі точки якої мають певну властивість?
19. Що таке геометричне місце точок Фалеса? Якою фігурою воно є?

Задачі і вправи

1°. Чи існує трикутник з кутами: а) 30°, 50° і 100°; б) 20°, 70° і 80°; в) 100° і 110°?
2°. Чи можуть усі кути трикутника бути більшими за 60°?
3°. Чи може найбільший кут трикутника дорівнювати 55°? А найменший 65°?
4°. Чи може сума будь-яких двох кутів трикутника бути меншою за 120°?
5°. Доведіть, що кути при основі рівнобедреного трикутника не можуть бути ні прямими, ні тупими.
6°. Доведіть, що кожний кут рівностороннього трикутника дорівнює 60°.
7°. У рівнобедреному трикутнику один з кутів при основі дорівнює 45°. Чи можна стверджувати, що цей трикутник — прямокутний?
8°. Доведіть, що жоден кут прямокутного трикутника не може бути тупим.
9°. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°. Чому дорівнюють інші кути?
10. Гострі кути проямокутного трикутника відносяться, як 4 : 5. Визначте ці кути.
11. Один із гострих кутів прямокутного трикутника на 42° більший від іншого. Визначте ці кути.
12. У трикутнику один із кутів удвічі більший за інший, а третій кут дорівнює 60°. Визначте ці кути.
13. У трикутнику один із кутів дорівнює 50°, а два інших відносяться, як 5 : 8. Визначте ці кути.
14. Визначте кути трикутника, якщо вони пропорційні до чисел 3, 5 і 7.
15. Визначте кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при його основі удвічі більший за кут при вершині, яка протилежна основі.
16. Визначте кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них дорівнює: а) 50°; б) 110°.
17. Висота прямокутного трикутника, опущена на гіпотенузу, утворює з одним із катетів кут 40°. Визначте гострі кути цього трикутника.
18. Доведіть, що коли два кути одного трикутника дорівнюють відповідно двом кутам іншого трикутника, то й треті їхні кути рівні.
19. Чому дорівнюють кути, що утворюються при перетині двох бісектрис рівностороннього трикутника?
20. Чому дорівнюють кути, які утворюються при перетині бісектрис двох кутів трикутника, якщо третій кут цього трикутника дорівнює: а) 46°; б) 128°?
21. Один із кутів між бісектрисами кутів при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 124°. Визначте кути трикутника.

22. Один із кутів трикутника дорівнює 110°. Висота та бісектриса, проведені з вершини цього кута, утворюють кут 20°. Визначте невідомі кути трикутника.

23*. Визначте кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них учетверо перевищує інший. Розгляньте два випадки.

24. Один із кутів рівнобедреного трикутника на 48° більший від іншого. Визначте кути цього трикутника. Розгляньте два випадки.

25. Визначте кути чотирикутника, якщо всі вони рівні між собою.

26. Визначте кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 1, 2, 4, 5.

27. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle D = 135°$. Визначте кути A, B, C, якщо вони рівні між собою.

28. Доведіть, що в опуклому чотирикутнику бісектриси двох кутів, прилеглих до однієї зі сторін, утворюють кут, величина якого дорівнює півсумі величин двох інших кутів чотирикутника.

29*. Доведіть, що в опуклому чотирикутнику бісектриси двох протилежних кутів утворюють кут, який у сумі з піврізницею двох інших протилежних кутів дає 180°.

30. Визначте суму кутів: а) п'ятикутника; б) шестикутника; в) дванадцятикутника.

31. Чи існує многокутник, кожний кут якого дорівнює: а) 90°; б) 60°; в) 120°; г) 108°; ґ) 80°? Якщо існує, то скільки сторін він має?

32. Скільки сторін має многокутник, якщо сума його кутів дорівнює: а) 1080°; б) 1620°; в) 3960°; г) 4140°?

33. Чи може сума кутів многокутника дорівнюватиме: а) 9180°; б) 3600°; в) 2040°; г) 540°; ґ) 2000°?

34. Чи можна побудувати п'ятикутник з усіма прямими кутами?

35. Чи можна побудувати n-кутник з усіма гострими кутами?

36. Як зміниться сума кутів многокутника, якщо кількість його сторін збільшиться: а) на один; б) на три; в) удвічі?

37. Яку найбільшу кількість гострих кутів може мати опуклий многокутник?

38. Многокутник має чотири гострих кути. Доведіть, що він неопуклий.

39. Чи може один із кутів опуклого п'ятикутника бути більшим за суму чотирьох інших?

40. Чи кожний чотирикутник з рівними діагоналями є прямокутником?

41. Чи є істинним твердження: «Якщо у чотирикутнику один кут прямий, а діагоналі рівні, то він є прямокутником»?

42. Доведіть, що прямокутник, у якому діагоналі перетинаються під прямим кутом, є квадратом.

43. У колі проведено діаметри AB і CD. Доведіть, що точки A, C, B, D є вершинами прямокутника.

44. У квадраті $ABCD$ $AN = DM = CL = BK$ (рис. 4.24). Доведіть, що $KLMN$ — квадрат.

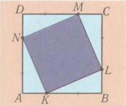


Рис. 4.24

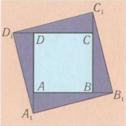


Рис. 4.25

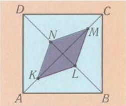


Рис. 4.26

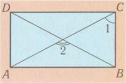


Рис. 4.27

45. На продовженнях сторін квадрата $ABCD$ відкладено рівні відрізки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 (рис. 4.25). Доведіть, що $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.

46. На діагоналях квадрата $ABCD$ відкладено відрізки $AK = CM$ та $BL = DN$ (рис. 4.26). Доведіть, що всі сторони чотирикутника $KLMN$ рівні між собою.

47. У прямокутнику $ABCD$ (рис. 4.27) $\angle 1 = 72°$. Визначте $\angle 2$.

48. У прямокутнику один із кутів, утворених діагоналями, дорівнює 38°. Визначте кути, які утворюють діагоналі зі сторонами прямокутника.

49. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, AC = 12 см, $\angle CAD = 30°$. Визначте периметр трикутника AOB.

50. У прямокутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону CD посередині в точці M. Доведіть, що BM — бісектриса кута B.

51. Перпендикуляри, проведені з точки перетину діагоналей прямокутника до двох його суміжних сторін, дорівнюють 4 см і 7 см. Визначте площу прямокутника.

52. Із середини гіпотенузи прямокутного трикутника опущено перпендикуляри на його сторони. Визначте вид чотирикутника, обмеженого цими перпендикулярами і катетами трикутника, та його діагоналі, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 12 см.

53. У колі проведено два взаємно перпендикулярних діаметри. З деякої точки M кола на ці діаметри опущено перпендикуляри ME та MF. Відомо, що EF = 7 см. Визначте діаметр кола.

54. Кошенятко Мурзик вилізло на середній щабель драбини, приставленої в сінях до стіни, коли під драбиною промчався пес Кудлик. У результаті драбина швидко сповзла на підлогу, ковзаючи верхнім кінцем по стіні. Яку траєкторію при цьому описав ніс Мурзика, якщо він весь час щільно притискався до щабля?

§5 Зовнішні кути трикутника і многокутника

5.1. Зовнішні кути трикутника

Жодна з наук про полегшення та покращення людського життя без геометрії не змогла б ані виникнути, ані вдосконалитися.

Феофан Прокопович

Кути трикутника утворюються променями, які містять сторони і виходять з вершин трикутника. Ці кути обмежують сам трикутник, тому вони називаються *внутрішніми* кутами трикутника. Трикутник має три внутрішніх кути. Наприклад, внутрішнім кутом трикутника ABC (рис. 5.1) є кут MBN; часто його позначають просто як $\angle B$.

Окрім внутрішніх кутів важливою характеристикою трикутника є зовнішні кути. *Зовнішній* кут трикутника при даній його вершині утворюється однією зі сторін трикутника і продовженням іншої сторони за цю вершину. Наприклад, на рис. 5.1 кут ACN є зовнішнім для трикутника ABC при вершині C. Він утворений стороною CA і продовженням сторони BC.

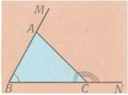


Рис. 5.1

Зовнішній і внутрішній кути трикутника при одній і тій самій його вершині, окрім спільної вершини, мають ще й спільну сторону, а дві інші їхні сторони є продовженнями одна одної, тобто є взаємно доповняльними променями. Наприклад, внутрішній кут C і зовнішній кут ACN при вершині C на рис. 5.1 мають спільну сторону CA, а їхні сторони CB і CN є продовженнями одна одної. Кути, що мають таке розміщення, називаються *суміжними*.

Отже, маємо таке означення.

Означення.

Два кути, які мають спільну сторону, а дві інші їхні сторони є взаємно доповняльними променями, називаються *суміжними*.

З цього означення випливає, що будь-які два суміжних кути разом утворюють розгорнутий кут. Величина ж розгорнутого кута становить 180°. Звідси маємо теорему:

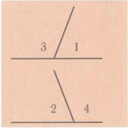


Рис. 5.2

Теорема
(про суміжні кути).

Сума будь-яких двох суміжних кутів дорівнює 180°.

Наслідок.

Якщо кути рівні, то суміжні з ними кути також рівні.

Справді, нехай маємо рівні кути 1 і 2, а кути 3 і 4 — суміжні з ними (рис. 5.2). Тоді за теоремою про суміжні кути $\angle 1 + \angle 3 = 180°$; $\angle 2 + \angle 4 = 180°$. Звідси $\angle 3 = 180° - \angle 1$; $\angle 4 = 180° - \angle 2 = 180° - \angle 1$. Отже, $\angle 3 = \angle 4$, що й треба було довести.

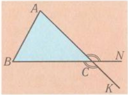


Рис. 5.3

Повертаючись до поняття зовнішнього кута трикутника, помічаємо, що при одній і тій самій вершині існує два зовнішніх кути. Наприклад, на рис. 5.3 зовнішніми кутами при вершині C трикутника ABC є кути ACN і BCK. Ці кути мають спільну вершину, а сторони одного з них є продовженням сторін іншого, тобто взаємно доповняльними променями. Кути, розміщені таким чином, називаються *вертикальними*.

Отже, маємо таке означення.

Означення.

Два кути, сторони яких є взаємно доповняльними променями, називаються *вертикальними*.

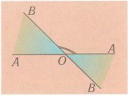


Рис. 5.4

Теорема
(про вертикальні кути).

Вертикальні кути рівні між собою.

Доведення. Нехай маємо два вертикальних кути AOB і $A'OB'$ (рис. 5.4). Кожен із них разом з кутом

AOB' утворює розгорнутий кут. Розгорнуті ж кути рівні між собою, оскільки один з них можна сумістити з іншим. Тому рівними є й кути AOB і $A'OB'$, які доповнюють один і той самий кут AOB' до рівних розгорнутих кутів. Теорему доведено.

Теорему можна довести й інакше, безпосередньо сумістивши один з вертикальних кутів з іншим. Справді, якщо кут AOB повернемо відносно точки O на $180°$ (за або проти руху годинникової стрілки), то він суміститься з вертикальним кутом $A'OB'$. Отже, ці кути рівні між собою.

Основоположники філософії не допускали до вивчення мудрості людей, не обізнаних з математикою.
Рене Декарт

На відміну від абсолютної більшості геометричних термінів, термін «вертикальні кути» не зовсім вдалий. В дослівному перекладі з латини він означає «прямовисні кути». Проте значно точнішим був би термін «протилежні кути», який застосовувався в підручниках раніше. Адже вертикальні кути утворюються не просто прямими лініями, а є взаємно протилежними променями цих прямих.

Використовуючи поняття суміжних і вертикальних кутів, можна сказати, що зовнішні кути трикутника — це кути, суміжні з його внутрішніми кутами, а при кожній вершині трикутника маємо по два зовнішніх кути, які є вертикальними один до одного, а тому й рівними один одному.

5.2. Теорема про зовнішній кут трикутника

Дуже важливе значення у геометрії, як ми згодом переконаємося, має наступна властивість зовнішнього кута трикутника.

Теорема
(про зовнішній кут трикутника).
Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.

Доведення. Нехай маємо трикутник ABC і розглядається його зовнішній кут ABM при вершині B

(рис. 5.5). Оскільки кут ABM є суміжним із внутрішнім кутом B трикутника, то він дорівнює $180° - \angle B$. З іншого боку, за теоремою про суму кутів трикутника, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Звідси $\angle A + \angle C = 180° - \angle B$. Виходить, що $\angle ABM = \angle A + \angle C$, що й треба було довести.

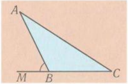


Рис. 5.5

Наслідок.

Зовнішній кут трикутника більший від будь-якого внутрішнього кута, не суміжного з ним.

Справді, оскільки зовнішній кут дорівнює сумі двох внутрішніх, не суміжних з ним, то зрозуміло, що ця сума більша від кожного з доданків.

Задача 1.

Кут A трикутника ABC дорівнює α. У трикутнику проведено бісектриси BB_1 та CC_1 (рис. 5.6). Визначити кути, які вони утворюють при перетині.

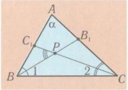


Рис. 5.6

Розв'язання. Нехай P — точка перетину проведених бісектрис. Шуканий кут $\angle BPC_1$ є зовнішнім для ΔPBC. Отже, $\angle BPC_1 = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C =$

$= \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Інший шуканий кут BPC — суміжний з кутом BPC_1.

Тому $\angle BPC = 180° - \angle BPC_1 = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) =$

$= 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Відповідь. $90° - \frac{\alpha}{2}$; $90° + \frac{\alpha}{2}$.

Задача 2.

Довести, що один із кутів, утворених висотами трикутника, дорівнює одному із кутів даного трикутника.

Розв'язання. Нехай маємо трикутник ABC і в ньому проведені висоти AK та CN, H — точка їхнього перетину (рис. 5.7). З прямокутних трикутників ANC та AKC: $\angle 1 = 90° - \angle A$, $\angle 2 = 90° - \angle C$. Кут AHN, утворений проведеними висотами, є зовнішнім для ΔAHC. Тому $\angle AHN = \angle 1 + \angle 2 = 180° - \angle A - \angle C = \angle B$, що й треба було довести.

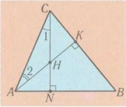


Рис. 5.7

5.3. Яким може бути розміщення висот у трикутнику

Застосуємо наслідок з теореми про зовнішній кут трикутника для з'ясування можливого розміщення висот у трикутнику. Проведемо спочатку у трикутнику ABC одну висоту AD. Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Обидва кути B і C — гострі (рис. 5.8). Доведемо, що тоді висота AD проходить всередині трикутника (рис. 5.8, а). Справді, припустимо протилежне. Тоді можливими будуть такі дві ситуації: або точка D лежить ближче до точки B, ніж до точки C (рис. 5.8, б), або точка D лежить ближче до точки C, ніж до точки B (рис. 5.8, в). При першій ситуації зовнішній кут ABC прямокутного трикутника ADB, який за припущенням гострий, був би більшим від прямого внутрішнього кута D, що неможливо. При другій ситуації такий само суперечливий висновок стосувався б гострого кута C. Оскільки, таким чином, жодна із цих ситуацій неможлива, то зроблене припущення неможливе. Отже, висота AD трикутника у цьому випадку справді проходить всередині трикутника.

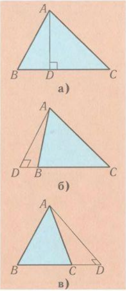


Рис. 5.8

Якщо у трикутнику всі кути гострі, тобто трикутник гострокутний, то з доведеного випливає, що всі його висоти проходять всередині трикутника (рис. 5.9) (нижче доведемо, що всі вони перетинаються в одній точці).

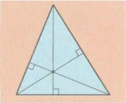


Рис. 5.9

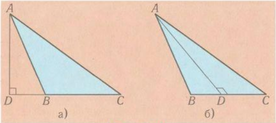


Рис. 5.10

Випадок 2. Один із кутів, наприклад, кут B — тупий, а інший кут C — гострий (рис. 5.10). Тоді висота AD проходитиме ззовні трикутника (рис. 5.10, а). Справді, якщо припустимо протилежне (рис. 5.10, б), то доведеться визнати, що зовнішній кут ADC прямокутного трикутника ADB, який є прямим, більший від тупого внутрішнього кута B. Оскільки таке неможливе, то припущення неправомірне. Отже, висота AD трикутника в цьому випадку справді проходить ззовні трикутника.

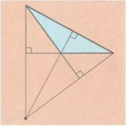


Рис. 5.11

У трикутнику може бути лише один тупий кут. Отже, тоді два його кути обов'язково гострі. Тому одна з висот такого трикутника обов'язково проходить всередині трикутника, а дві інші — ззовні нього (рис. 5.11). Нижче доведемо, що всі три прямі, які містять ці висоти, перетинаються в одній точці.

5.4. Незалежне доведення наслідку з теореми про зовнішній кут трикутника

Теорема про зовнішній кут трикутника виведена нами з теореми про суму кутів трикутника, а ця, в свою чергу, — з властивостей прямокутника. Отже, в кінцевому підсумку теорема про зовнішній кут трикутника випливає з ознак прямокутника. Попри це, наслідок з теореми про зовнішній кут трикутника, тобто твердження про те, що зовнішній

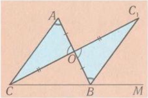


Рис. 5.12

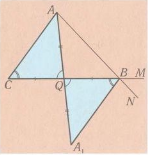


Рис. 5.13

кут трикутника більший за будь-який внутрішній, не суміжний з ним, можна довести і без прямого чи опосередкованого посилання на ознаки прямокутника.

Доведемо, наприклад, що зовнішній кут ABM трикутника ABC (рис. 5.12) більший від внутрішнього кута A, не суміжного з ним.

Нехай O — середина сторони AB. Проведемо відрізок CO і продовжимо його за точку O на довжину $OC_1 = CO$. Потім з'єднаємо відрізком точки C_1 і B. У трикутниках AOC і BOC_1, окрім рівних відповідних сторін AO і BO та OC і OC_1, рівні й кути AOC та BOC_1 між ними, — як вертикальні. Тому за першою ознакою, ці трикутники рівні. Отже, $\angle A$ рівний куту OBC_1. Водночас, кут OBC_1 є тільки частиною зовнішнього кута ABM трикутника ABC. Тому зовнішній кут ABM більший від внутрішнього кута A, рівного цій частині.

Так само доведемо, що зовнішній кут CBN трикутника ABC більший від внутрішнього кута C (рис. 5.13). Але кут CBN рівний вертикальному з ним куту ABM. Тому кут ABM теж більший від кута C. Твердження доведено повністю.

Цікаво, що ні саму теорему про зовнішній кут трикутника, ні теорему про суму кутів трикутника, з якої вона випливає, довести без ознак прямокутника або яких-небудь інших властивостей, з яких ці ознаки випливають, неможливо.

5.5. Сума зовнішніх кутів многокутника

Якщо при кожній вершині трикутника брати до уваги лише один із двох рівних зовнішніх кутів, то сума всіх таких кутів дорівнюватиме 360°.

Справді, нехай маємо довільний трикутник ABC. Позначимо через α, β, γ величини його зовнішніх кутів, суміжних відповідно з внутрішніми кутами A, B і C (рис. 5.14). Прямі, які містять сторони трикутника, утворюють при кожній його вершині дві пари вертикальних кутів. Одній із цих пар належить внутрішній кут трикутника, а іншій — зовнішній. Зрозуміло, що сума всіх чотирьох цих кутів дорівнює 360°. Тому, якщо додати усі такі кути, що утворюються при всіх вершинах трикутника, то матимемо рівність:

$$(2\angle A + 2\alpha) + (2\angle B + 2\beta) + (2\angle C + 2\gamma) = 3 \cdot 360°.$$

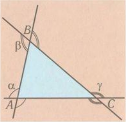


Рис. 5.14

Поділимо обидві частини цієї рівності на 2. Тоді, перегрупувавши доданки у лівій її частині, матимемо:

$$(\angle A + \angle B + \angle C) + (\alpha + \beta + \gamma) = 3 \cdot 180°.$$

А врахувавши, що сума $\angle A + \angle B + \angle C$ внутрішніх кутів дорівнює 180°, для суми зовнішніх кутів остаточно одержимо: $\alpha + \beta + \gamma = 360°$, що й треба було довести.

Зовнішній кут опуклого многокутника означається так само, як і для трикутника: він утворюється однією зі сторін многокутника і продовженням суміжної сторони. Наприклад, на рис. 5.15 CBM — зовнішній кут опуклого чотирикутника $ABCD$ при вершині B. Для неопуклих многокутників поняття зовнішнього кута не означається.

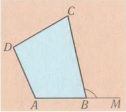


Рис. 5.15

Якщо при кожній вершині опуклого многокутника, як і для трикутника, брати до уваги лише один із двох рівних зовнішніх кутів, то матимемо цікавий і несподіваний факт, який виражається такою теоремою.

Теорема

(про суму зовнішніх кутів опуклого многокутника).

Сума зовнішніх кутів будь-якого опуклого многокутника дорівнює 360°.

Доведення. Нехай α, β, γ, δ, ... — зовнішні кути многокутника, суміжні із його внутрішніми кутами A, B, C, D, ... (рис. 5.16). Тоді, повторюючи міркування, описані вище для трикутника, матимемо рівність:

$$(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + ...) + (\alpha + \beta + \gamma + \delta + ...) = n \cdot 180°.$$

Звідси, враховуючи, що сума внутрішніх кутів $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + ...$ дорівнює $(n - 2) \cdot 180°$, для суми зовнішніх кутів одержимо: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + ... = 360°$. Теорему доведено.

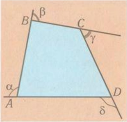


Рис. 5.16

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

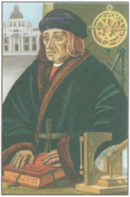
Як вимірювали кути у різні часи

Прилади для вимірювання кутів

Транспортир і астролябія. Назва найпоширенішого тепер кутомірного інструмента — транспортира — утворена від латинського слова transporte, що означає «переносити». Звідси ж походять і широко вживані тепер слова «транспорт» та «транспортувати». Можливо, це свідчить про те, що початково транспортир використовували більше для перенесення кутів, ніж для їхнього вимірювання. Але найдавнішим прообразом транспортира був усе ж таки кутомірний прилад — *астролябія*. Транспортир — це половина астролябії.

Вважається, що астролябію винайшов у II ст. до н.е. знаменитий грецький астроном Гіппарх (180 – 125 до н.е.), а вдосконалив відомий середньовічний німецький астроном Регіомонтан (Йоганн Мюллер) (1436–1476). Прилад слугував для визначення положення небесних світил на небесній сфері. Для прикладу, на гравюрі XVI ст., відтвореній на рис. 5.17, відображено один зі способів для визначення горизонтального напрямку на світило, який застосовувався мореплавцями.

Початково астролябію використовували здебільшого для визначення висоти світил над горизонтом. З цією метою її виготовляли у вигляді важкого мідного диска — *лімба*, який підвішували за кільце у вертикальному



Регіомонтан
(Йоганн Мюллер)
(1436–1476)

Відомий німецький середньовічний астроном та математик. Автор першого в Європі підручника з тригонометрії. Склав знамениті астрономічні таблиці.

Рис. 5.17

положенні (рис. 5,18). По краю лімба наносилася шкала від 0° до 360°. Пряма $ГГ_1$, що з'єднувала поділки 0° і 180°, займала горизонтальне положення. У центрі лімба кріпилася рухома стрілка AA_1 — *алідада*. На її кінцях розміщувалися перпендикулярні до лімба пластинки з отворами — *діоптри*.

Для визначення висоти світила над горизонтом спостерігач прикладав око до нижнього діоптра A і повертав алідаду доти, поки світило не було видно відразу через обидва діоптри. Поділка на шкалі, на якій зупинявся край алідади (A чи A_1), вказувала на висоту світила над горизонтом у градусах.

Квадранти, секстанти та октанти. Бурхливий розвиток астрономії, який розпочався в Європі з початком епохи Відродження, вимагав уже значно більшої точності від астрономічних вимірювань, ніж її могли забезпечити давні астролябії. Цього можна було досягти лише за рахунок збільшення лімба. Адже чим більша кругова шкала на його краю, тим більшою буде відстань між сусідніми поділками, а це давало змогу визначати не тільки кількість цілих градусів у куті, але й кількість їхніх частин — мінут і навіть секунд.

Водночас було помічено, що в більшості астрономічних вимірювань фактично використовується не вся кругова

Астролябія Регіомонтана

Рис. 5.18

шкала астролябії, а лише певна її частина. Тому замість всієї астролябії у збільшеному вигляді виготовляли лише *квадранти*, *секстанти* і *октанти*, тобто відповідно $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ і $\frac{1}{8}$ частини астролябії. Спосіб використання квадранта відображено на старовинній гравюрі, відтвореній на рис. 5.19. А на рис. 5.20 зображено поєднання в одному приладі квадранта й астролябії, запропоноване видатним данським астрономом Тіхо Браге (1546–1601).

Окрім численних гравюр із зображенням кутомірних інструментів, створених художниками, астрономи ще й у свій спосіб засвідчили свою любов і повагу до цих приладів, назвавши *Секстантом* одне із сузір'їв у південній частині неба. Відповідну пропозицію подав видатний польський астроном Ян Гевелій (1611–1687), автор всесвітньовідомого атласу зоряного неба. Історія символічна й повчальна. Для проведення досліджень Гевелій збудував обсерваторію і величезний секстант у своєму місті Гданську. Але затуркані й настрашені городяни спалили прилад. Тоді Гевелій вирішив «перенести його на небо» і увічнити в назві сузір'я, аби вже ніколи нічия зла рука

Сузір'я Секстант. Рисунок з атласу Гевелія

Ян Гавелій веде спостереження за допомогою квадранта

Рис. 5.19

Рис. 5.20

не могла до нього дотягнутися. Але на той час не було неназваного сузір'я, яке б своєю формою нагадувало секстант (принцип, що його дотримувалися при утворенні назв більшості сузір'їв). Тому Гевелій вибрав сузір'я, яке хоч і не нагадувало своїми контурами секстанта, але знаходилося між сузір'ям Лева (якраз під його лапами) та Гідри і тому мало ще й цей додатковий символічний захист.

Секстант Тихо Браге

Телескоп і теодоліт. Наступне суттєве удосконалення в конструкцію астролябії вніс французький астроном Жан Пікар (1620–1682) в середині XVII ст. Він замінив діоптри підзорною трубою, винайденою незадовго до цього Галілеєм, а для плавного переміщення алідади використав мікрометричний гвинт. Усе це значно підвищувало точність вимірювань і не потребувало використання великих шкал.

Подальші удосконалення астролябії продовжилися у напрямку використання замість підзорної труби найрізноманітніших телескопів. А для проведення наземних (геодезичних) вимірювань було сконструйовано *теодоліт* (рис. 5.21).

Рис. 5.21

Теодоліт має два лімби, розміщені у вертикальній і горизонтальній площинах. Це дає змогу застосовувати цей прилад як для складання планів, так і для проведення нівелювання, тобто визначення висот.

Бусоль. Кути, які застосовуються у морській та повітряній навігації, вимірюють у горизонтальній площині від напрямку на північ проти руху годинникової стрілки від 0° до 360°. Кожен такий кут називається *курсом*. Прилад, що дає змогу вимірювати курс, поєднує в собі античну астролябію і компас. Він називається *бусоллю*. На принципі бусолі конструюється сучасне навігаційне обладнання для морських та повітряних суден.

Як бачимо, звичний нам транспортир має дуже давню історію і водночас втілюється у найсучасніших приладах.

Одиниці для вимірювання кутів

Градуси. Найпоширенішою одиницею для вимірювання кутів є градус. Латинське слово gradus, від якого утворено цю назву, означає «крок», «ступінь». Величина кута 1 градус визначається так. Візьмемо за вершину кута центр якого-небудь півкола, а саме півколо поділимо на 180 рівних частин (рис. 5.22). Тоді кут, сторони якого проходять через сусідні поділки, і є кутом завбільшки 1 градус (пишуть 1°).

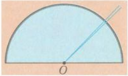


Рис. 5.22

Але чому для визначення кута 1° півколо ділять саме на 180 частин?

Ще давньовавилонські жерці помітили, що під час рівнодення (тобто коли день і ніч мають однакову тривалість) сонячний диск упродовж свого руху небосхилом (рис. 5.23) вкладається у пройденому шляху рівно 2×180 разів. А оскільки цей шлях — півколо, то цілком природно було розбивати його на 180 таких подвійних кроків Сонця. Саме ці кроки пізніше і були названі градусами.

Спостереження за рухом Сонця впродовж дня підтверджувалися і відповідними спостереженнями за його річним рухом. У ті часи вважалося, що рік триває 360 діб. Тому весь річний шлях Сонця небосхилом — так зване зодіакальне коло — теж ділився на 360 подвійних кроків, тобто градусів, а його половина, відповідно, — на 180 градусів.

Рис. 5.23

Нарешті, свій вплив на вибір основи для визначення градуса могло мати й те, що у Давньому Вавилоні застосовувалася шістдесяткова система числення, а число 180 ділиться на ціло на основу 60 цієї системи. З цим само пов'язано і ділення градуса на 60 мінут, а мінути — на 60 секунд.

В античну епоху старовинну вавилонську систему перейняли грецькі астрономи, зокрема, найвидатніший з них Клавдій Птолемей (I–II ст. н.е.). Авторитет Птолемея сприяв тому, що ця система набула повсюдного поширення в епоху Відродження, а потім і в пізніші часи. У результаті ми й тепер, як і давні вавилоняни, як давні греки та середньовічні європейці вимірюємо кути в градусах, вважаючи, що розгорнутий кут має 180°, а повний — 360°.

Цікаве походження позначення для градусної міри. Кути величиною 1° Птолемей називав мойрами, що в перекладі з грецької мови означає «частини». Слово μοιρα він скорочував двома першими літерами, причому другу писав меншою від першої і вгорі — μ°. Пізніше залишилася лише маленька літера $^\circ$. Це скорочення застосовується й досі.

Мінути тепер позначають за допомогою значка $'$, а секунди — за допомогою значка $''$. Наприклад, кут, що має 23 градуси 18 мінут і 42 секунди скорочено записують так: $23^\circ\,18'\,42''$.

Гради. Існують й інші одиниці для вимірювання кутів. Зокрема, наприкінці XVIII ст. у Франції, одночасно із запровадженням метричної системи для вимірювання довжин, було запропоновано удосконалення для вимірювання кутів. Для цього пропонувалася нова одиниця *град*. Її назва утворювалася від того самого латинського слова gradus, але величина бралася іншою. А саме: повний кут пропонувалося ділити не на 360 градусів, а на 400 градів. Крім цього, гради ділилися не на 60, а на 100 мінут, а мінути — не на 60, а на 100 секунд.

Гради позначаються значком ^{g}, градові мінути — значком $^{\grave{}}$, а градові секунди — значком $^{\grave{}\grave{}}$. Легко обчислити, що $90^\circ = 100^{g}$, $1^{g} = 54'$, $1^{\grave{}} = 32{,}4''$, а $1^{\grave{}\grave{}} = 0{,}324''$.

Радіани. Незважаючи на очевидні переваги градів над градусами при проведенні обчислень, ця одиниця все ж набула дуже обмеженого застосування. Незмірно більшого поширення набула інша альтернатива градуса — радіан. Вимірювання кутів у радіанах ґрунтовно вивчатиметься в наступних класах.

Клавдій Птолемей.
Старовинна гравюра

Перевір себе

1. Дайте означення внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника. Скільки зовнішніх кутів має трикутник?
2. Що таке суміжні кути?
3. Що таке вертикальні кути?
4. Сформулюйте властивості суміжних і вертикальних кутів.
5. Сформулюйте теорему про зовнішній кут трикутника та наслідок з неї.
6. Яким може бути розміщення висот у трикутнику? Як це обґрунтувати?
7. Чи залежить (прямо або опосередковано) теорема про зовнішній кут трикутника та наслідок з неї від властивостей прямокутника?

8. Як залежить сума зовнішніх кутів опуклого многокутника від кількості його сторін?
9. В якому трикутнику сума зовнішніх кутів більша — у гострокутному чи в тупокутному?

Задачі і вправи

1°. На рис. 5.24 на прямій AB позначено точку O, з якої проведено два промені OM і OK. Назвіть пари суміжних кутів, які при цьому утворилися.

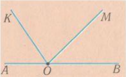


Рис. 5.24

2°. Про два кути відомо, що їхня сума дорівнює 180°. Чи можна стверджувати, що ці кути суміжні?
3°. Чи істинні такі твердження: а) якщо два кути суміжні, то один із них гострий, а інший тупий; б) якщо один із двох кутів гострий, а інший тупий, то вони суміжні?
4°. Чи можуть два суміжних кути бути: а) гострими; б) тупими; в) прямими?
5°. Дано два рівних кути. Чи рівні суміжні з ними кути?
6°. Кут, суміжний з кутом x, дорівнює 30°. Визначте кут x.
7°. Нарисуйте кут. Побудуйте суміжний з ним кут. Скільки таких кутів можна побудувати?
8°. Визначте кути, суміжні з кутами: 30°, 45°, 90°, 15°30′, 82°2′.
9. Визначте суміжні кути, якщо: а) один з них на 45° більший від іншого; б) їхня різниця дорівнює 50°; в) один з них у 5 разів менший від іншого; г) вони рівні.
10. Визначте суміжні кути, якщо їхні градусні міри відносяться, як: а) 2 : 3; б) 3 : 7; в) 11 : 25; г) 22 : 23.
11. Чому дорівнює кут, якщо два суміжні з ним кути дають у сумі 100°?
12. Визначте величину кута між бісектрисами суміжних кутів.
13. Дано два нерівних кути. Доведіть, що більшому куту відповідає менший суміжний кут, а меншому — більший суміжний кут.
14. Чому при подвійному складанні аркуша паперу, коли суміщаються краї, одержується прямий кут?
15. Доведіть, що коли два прямих кути мають спільну сторону, то вони або суміщаються, або суміжні.
16°. Скільки пар вертикальних кутів і скільки пар суміжних кутів зображено на рис. 5.25?
17°. Чи можуть вертикальні кути бути: а) прямими; б) тупими; в) один гострим, а інший тупим?

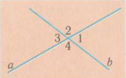


Рис. 5.25

18°. Чи істине таке твердження: «Якщо два кути рівні, то вони вертикальні»? Проілюструйте відповідь рисунком.

19°. Якими (гострими, прямими чи тупими) є вертикальні кути, якщо їхня сума: а) менша від 180°; б) більша за 180°; в) дорівнює 180°?

20°. Один із кутів, які утворюються при перетині двох прямих, дорівнює 30°. Чому дорівнюють інші кути?

21. Сума величин двох вертикальних кутів дорівнює 120°. Визначте величину кожного з них.

22. З'ясуйте, чи істинне таке твердження: «Два кути, сума яких дорівнює розгорнутому куту, є суміжними».

23. Визначте величини кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо: а) один із них на 20° більший від іншого; б) один із них становить половину від іншого; в) сума величин двох із них дорівнює 100°.

24. Один із кутів, які утворюються при перетині двох прямих, на 50° менший від іншого. Визначте ці кути.

25. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, учетверо більший від іншого. Визначте ці кути.

26. Визначте кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо сума трьох із цих кутів дорівнює 270°.

27. Сума вертикальних кутів удвічі більша від кута, суміжного з ними обома. Визначте ці кути.

28. На площині розміщено чотири прямі (рис. 5.26). Відомі кути між деякими з них: $\alpha = 110°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 80°$. Визначте невідомі кути x, y, z.

29. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів лежать на одній прямій.

30°. Дано: $AO = OB$, $CO = OD$ (рис. 5.27). Доведіть, що $\angle A = \angle B$, а $\angle C = \angle D$.

31°. Дано: $AO = CO$, $OB = OD$ (рис. 5.28). Доведіть, що $\angle A = \angle C$, а $\angle B = \angle D$.

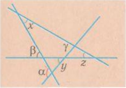


Рис. 5.26

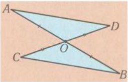


Рис. 5.27

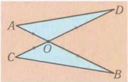


Рис. 5.28

32°. Дано: $AB = AC$ (рис. 5.29). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.

33°. Дано: $AB = BC$, $\angle B = 65°$ (рис. 5.30). Визначте $\angle ACD$.

34. Дано: ΔABC — рівносторонній, $BB_1 = CC_1 = AA_1$ (рис. 5.31). Доведіть, що $\Delta A_1B_1C_1$ — теж рівносторонній.

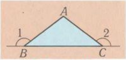


Рис. 5.29

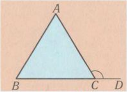


Рис. 5.30

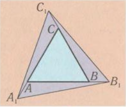


Рис. 5.31

35. На рис. 5.32 відображено схему визначення відстані між точками A і B, яку неможливо знайти безпосереднім вимірюванням. Прокоментуйте і обґрунтуйте цей спосіб.

36. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O (рис. 5.33). Доведіть, що коли $\angle A = \angle C$, то $\angle B = \angle D$.

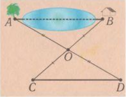


Рис. 5.32

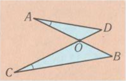


Рис. 5.33

37°. Чи може зовнішній кут трикутника бути меншим від внутрішнього кута цього трикутника?

38°. Чи може в трикутнику бути два гострих зовнішніх кути? два прямих зовнішніх кути? два тупих зовнішніх кути?

39°. Скільки всього гострих зовнішніх кутів може мати трикутник, якщо при кожній вершині рахувати лише один зовнішній кут?

40. Визначте кути трикутника, у якому зовнішні кути при двох вершинах дорівнюють 120° і 150°.

41. Два зовнішніх кути трикутника дорівнюють 100° і 150°. Визначте третій зовнішній кут.

42. У трикутнику один із кутів дорівнює 30°, а один із зовнішніх кутів — 40°. Визначте решту кутів трикутника.

43. Зовнішній кут трикутника дорівнює 160°. Визначте кути трикутника, не суміжні з ним, якщо: а) вони відносяться, як 3 : 5; б) один із них становить 3/5 іншого; в) один із них більший від іншого на 20°; г) їхня різниця дорівнює 40°.

44. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC зовнішній кут при вершині A дорівнює 150°. Визначте кути при основі.

45. Чому дорівнюють зовнішні кути рівностороннього трикутника?

46. Визначте суму зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній з вершин.

47. Визначте кут A трикутника ABC, якщо сума зовнішніх кутів, суміжних із кутами B і C, утричі більша від кута A.

48°. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 110°. Чому дорівнює сума двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним?

49. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 128°. Визначте внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо один із них: а) дорівнює 50°; б) на 38° менший від іншого; в) у 7 разів більший від іншого; г) їхні величини відносяться, як 3 : 5.

50. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 130°, а один із внутрішніх — 55°. Визначте інші внутрішні кути трикутника.

51. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 140°. Чому дорівнюють внутрішні кути цього трикутника?

52*. Внутрішні кути трикутника відносяться, як 5 : 6 : 9. Не знаходячи величин цих кутів, визначте відношення зовнішніх кутів даного трикутника.

53. У трикутнику ABC $\angle A = 50°$, а $\angle B = 60°$. На продовженнях сторони AB відкладено відрізки $AD = AC$ і $BF = BC$ (рис. 5.34). Визначте кути трикутника CDF.

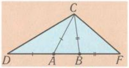


Рис. 5.34

54. Доведіть, що бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника при одній вершині перпендикулярні.

55. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють по 120°. Доведіть, що цей трикутник рівносторонній.

56*. Внутрішній кут трикутника дорівнює різниці зовнішніх кутів, не суміжних з ним. Доведіть, що даний трикутник прямокутний.

57. Чи може одна з висот трикутника розміщуватися ззовні трикутника, а дві інші — всередині нього?

58. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника вдвічі більша за суму його зовнішніх кутів. Скільки сторін має цей многокутник?

59. Скільки сторін має опуклий многокутник, в якому сума внутрішніх кутів перевищує суму зовнішніх на 540°?

60. Визначте суму градусних мір зовнішніх кутів: а) п'ятикутника; б) шестикутника.

61. Доведіть, що не існує многокутника, який має: а) більше чотирьох прямих зовнішніх кутів; б) більше трьох тупих зовнішніх кутів.

62. Скільки сторін має многокутник, якщо сума всіх його внутрішніх кутів разом з одним із зовнішніх кутів дорівнює 2250°?

63. Визначте кількість сторін многокутника, в якому рівні всі внутрішні кути, якщо сума його зовнішніх кутів разом з одним із внутрішніх дорівнює 468°.

§6 Теорема Піфагора

6.1. Формулювання і доведення теореми Піфагора

Відповідно до першої ознаки рівності трикутників, прямокутні трикутники рівні, якщо рівні їхні катети. Виходить, що всі елементи прямокутного трикутника повністю визначаються його катетами. Зокрема, катетами визначається і його гіпотенуза. Тому виникає питання про те, як визначити її довжину.

Ні тридцять років, ні тридцять століть не впливають на прозірливість та красу геометричних істин. Така теорема, як «квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів», так само полонить своєю красою сьогодні, як і в той день, коли Піфагор відкрив її.

Льюїс Керролл

Ми не маємо прямих свідчень про те, чи була відомою відповідь на це запитання давньоєгипетським зачинателям геометрії. Але достеменно відомо, що в інших давніх цивілізаціях — Вавилоні, Індії та Китаї — для визначення гіпотенузи через катети існував абсолютно точний рецепт. Тепер його називають *теоремою Піфагора*, — на честь знаменитого грецького мислителя Піфагора Самоського, що жив на рубежі VI і V ст. до н. е. В молодості Піфагор навчався мудрості у східних країнах, і тому цілком ймовірно, що саме там він і дізнався про цю теорему. Можливо також, що Піфагор перейняв у східних мудреців лише рецепт, а його доведення знайшов сам. Зрештою, не відомо, і яким саме було це доведення. Збереглася лише легенда про те, що на знак вдячності богам за своє відкриття Піфагор здійснив гекатомбу, тобто приніс у жертву сотню биків.

До нашого часу дійшло прекрасне доведення теореми Піфагора давніх індуських математиків. Воно ґрунтується лише на декількох найпростіших геометричних фактах: формулі для площі квадрата; рівності прямокутних трикутників, що мають рівні катети, і теоремі про суму кутів трикутника. Це доведення ми зараз і розглянемо.

Теорема Піфагора
(про співвідношення між сторонами прямокутного трикутника).

Квадрат гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює сумі квадратів катетів.

Доведення. Нехай маємо прямокутний трикутник ABC з катетами $BC = a$ та $AC = b$ і гіпотенузою $AB = c$ (рис. 6.1). Побудуємо два рівних квадрати $CDEF$ (рис. 6.2 і рис. 6.3) зі сторонами завдовжки $a + b$. На сторонах першого візьмемо точки A, B, K, L так, щоб $CB = DK = EL = FA = a$, а на сторонах другого — точки A, N, M, P так, щоб $CA = FN = MD = PC = b$. Потім у першому квадраті проведемо відрізки AB, BK, KL і LA, а в другому — відрізки AM, PN та AN і PM. У результаті одержимо розбиття кожного квадрата на декілька фігур, серед яких у кожному випадку матимемо по чотири рівних, а тому і рівновеликих прямокутних трикутники з катетами a і b. Якщо відкинути ці трикутники, то залишки теж матимуть однакові площі. Абсолютно очевидно, що у першому квадраті цим залишком є чотирикутник $ALKB$, а в другому квадраті — два квадрати $QMEN$ та $ACPQ$ зі сторонами a і b (згадайте п. 1.3). Всі сторони чотирикутника $ALKB$ рівні між собою (адже це гіпотенузи рівних прямокутних трикутників), а кути — прямі. Наприклад, оскільки $\angle 3 = \angle 2$, а $\angle 1 + \angle 2 = 90°$,

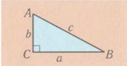


Рис. 6.1

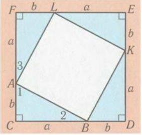


Рис. 6.2

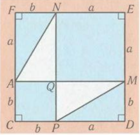


Рис. 6.3

то й $\angle 1 + \angle 3 = 90°$; звідси $\angle LAB = 180° - (\angle 1 + \angle 3) = 90°$. Аналогічно доводимо, що $\angle ALK = \angle LKB = \angle KBA = 90°$. Виходить, що $ALKB$ — квадрат. Отже, площа квадрата $ALKB$ дорівнює сумі площ квадратів $QMEN$ та $ACPQ$, тобто $c^2 = a^2 + b^2$, що й треба було довести.

Наслідок 1.

Квадрат діагоналі прямокутника дорівнює сумі квадратів його вимірів.

Це випливає з того, що діагональ прямокутника розбиває його на два рівних прямокутних трикутники (рис. 6.4), а їхні катети дорівнюють вимірам даного прямокутника.

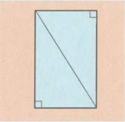


Рис. 6.4

Наслідок 2.

У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша від кожного з катетів.

Справді, з рівності $c^2 = a^2 + b^2$ випливає, що $c^2 > a^2$ і $c^2 > b^2$, а звідси, що $c > a$ і $c > b$.

6.2. Квадрати чисел і квадратні корені

Теорема Піфагора вказує, як знайти квадрат гіпотенузи c прямокутного трикутника за його катетами a і b: $c^2 = a^2 + b^2$. А як знайти саму гіпотенузу? — Очевидно, що для цього потрібно визначити таке додатне число, квадрат якого дорівнює $a^2 + b^2$. Це число називається *квадратним коренем* із числа $a^2 + b^2$ і позначається символом $\sqrt{a^2 + b^2}$. Отже, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Наприклад, якщо $a = 3$, а $b = 4$, то $a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, і тоді за теоремою Піфагора $c^2 = 25$. Отже, $c = \sqrt{25} = 5$, адже 5^2 якраз і дорівнює 25.

Ще приклад. Нехай $a = 5$, а $b = 12$. Тоді $a^2 + b^2 = 25 + 144 = 169$. Отже, $c = \sqrt{169} = 13$, адже $13^2 = 169$.

Проте не слід вважати, що квадратним коренем із натурального числа завжди буде інше натуральне число. Навпаки, найчастіше це число буде не цілим. Справді, послідовність квадратів натуральних чисел має вигляд: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, ... Бачимо, що з просуванням вздовж цієї послідовності проміжки між її сусідніми членами зростають. Отже, дедалі більше зростатиме і кількість чисел натурального ряду, для яких не існує цілих значень квадратних коренів.

Абсолютно очевидно також, що квадратний корінь з будь-якого дробового числа завжди буде дробовим числом. У зв'язку з цим з давніх-давен складалися спеціальні таблиці квадратних коренів для застосування їх у практичних обчисленнях. Зокрема, такі таблиці складали ще давні вавилоняни за 2 000 років до н. е. І навіть наприкінці XX ст. багатозначні таблиці квадратних коренів ще активно використовувалися в інженерних розрахунках. Тепер це відійшло в минуле, оскільки навіть найпростіші калькулятори неодмінно мають функцію добування квадратних коренів. З допомогою калькуляторів значення квадратних коренів визначаються *наближено*, але з дуже високою точністю.

Хіба якась інша наука, крім геометрії, доведе мені правильність того, що сума усіх трьох кутів у будь-якому трикутнику дорівнює двом прямим, і неправильність того, що квадрат гіпотенузи менший від суми квадратів катетів?

П'єр Гассенді

Сам термін «квадратний корінь» ввели середньовічні арабські математики. В їхній уяві кожне додатне число (а інших чисел тоді ще не використовували) ніби проростало зі свого квадратного кореня $\sqrt{a}$ шляхом множення цього кореня самого на себе: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$. Пізніше таке уявлення перейняли європейські математики і навіть буквально переклали слово «корінь» латиною — *radix*. А в позначеннях спочатку використовувалася перша літера *r* цього слова, а потім її стилізували в сучасний знак $\sqrt{\ }$. Враховуючи походження від слова *radix*, знак квадратного кореня називається *радикалом*.

Існує й інше тлумачення. Ще давньогрецькі математики знаходження квадратного кореня пов'язували з визначенням сторони квадрата за його площею і тому саме значення сторони називали *коренем площі*. А латинською мовою слово *корінь* перекладається як *radix*.

Задача 1.

У результаті вимірювання з'ясувалося, що одна зі сторін прямокутника дорівнює 5 м, а його діагональ — 13 м. Визначити площу прямокутника.

Розв'язання. Нехай у прямокутнику $ABCD$ сторона $BC = 5$ м, а діагональ $AC = 13$ м (рис. 6.5). Тоді з прямокутного трикутника ABC за теоремою Піфагора $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Звідси $AB^2 = AC^2 - BC^2 = 13^2 - 5^2 = (13 - 5) \times \times (13 + 5) = 8 \cdot 18 = 144$ (м^2).

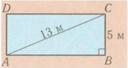


Рис. 6.5

Тому $AB = \sqrt{144} = 12$ (м). Отже, для шуканої площі S прямокутника маємо: $S = AB \cdot BC = 12 \cdot 5 = = 60$ (м^2).

Відповідь. 60 м^2.

Задача 2.

Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 25 м, а основа — 30 м. Визначити площу трикутника.

Розв'язання. Нехай у рівнобедреному трикутнику ABC бічні сторони $AB = AC = 25$ м, а основа $BC = 30$ м (рис. 6.6). Проведемо висоту AM. За властивістю рівнобедреного трикутника вона буде й медіаною. Отже, $BM = MC = \frac{1}{2}BC = 15$ (м). Тоді з прямокутного трикутника AMB за теоремою Піфагора:

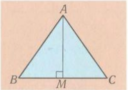


Рис. 6.6

$AB^2 = AM^2 + BM^2$. Звідси $AM^2 = AB^2 - BM^2 = 25^2 - 15^2 = (25 - 15) \cdot (25 + 15) = 10 \cdot 40 = 400$ (м^2).

Тому $AM = \sqrt{400} = 20$ (м). Отже, для шуканої площі S трикутника маємо:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 20 = 300 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Відповідь. 300 м^2.

6.3. Застосування теореми Піфагора для перетворення декількох квадратів в один рівновеликий їм квадрат

На рис. 6.7 зображено прямокутний трикутник з побудованими на його сторонах (у зовнішній бік) квадратами. Відповідно до теореми Піфагора, сума площ квадратів, побудованих на катетах, дорівнює площі квадрата, побудованого на гіпотенузі. В учнівському фольклорі багатьох країн цю фігуру жартома називають «піфагоровими штанами». Розуміння її змісту вважається ознакою певного рівня освіченості. У відомому романі Жуля Верна «Від Землі до Місяця» за допомогою «піфагорових штанів» пропонувалося налагодити перші контакти із селенітами — мешканцями Місяця. Не без підстав передбачалося, що якщо вони розумні, то у відповідь запропонують свою фігуру, яка теж відображатиме певний визначний математичний факт.

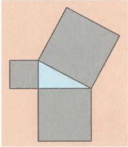


Рис. 6.7

Але крім цього, на «піфагорові штани» варто звернути увагу ще як на ілюстрацію для розв'язання такої цікавої геометричної задачі: *Побудувати квадрат, рівновеликий двом іншим заданим квадратам*. Зважаючи на формулу для площі квадрата, а також враховуючи теорему Піфагора, для розв'язання цієї задачі достатньо побудувати прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють сторонам a і b заданих квадратів (рис. 6.8). Тоді квадрат, побудований на його гіпотенузі c, буде шуканим. Справді, площа $S = c^2$ та-

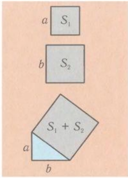


Рис. 6.8

кого квадрата за теоремою Піфагора дорівнює $a^2 + b^2$, тобто сумі площ $S_1 = a^2$ і $S_2 = b^2$ заданих квадратів.

Якщо декілька разів застосувати ці побудови, то врешті-решт можна побудувати квадрат, рівновеликий якій завгодно кількості заданих квадратів, зокрема, подвоїти, потроїти або збільшити заданий квадрат у будь-яку іншу цілу кількість разів.

6.4. Застосування теореми Піфагора для встановлення інших співвідношень у прямокутному трикутнику

Теорема Піфагора дає змогу визначати не тільки гіпотенузу прямокутного трикутника за його катетами, але й один із катетів a за відомою гіпотенузою c та іншим катетом b.

Справді, з рівності $c^2 = a^2 + b^2$ випливає, що $a^2 = c^2 - b^2$, а звідси $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.

Принагідно зазначимо, що рівністю $a^2 = c^2 - b^2$ визначається простий спосіб для побудови квадрата, рівновеликого різниці двох заданих квадратів. Для цього потрібно побудувати прямокутний трикутник, один із катетів якого дорівнює стороні b меншого із квадратів, а гіпотенуза c — стороні більшого квадрата (рис. 6.9). Тоді інший катет a цього трикутника дорівнюватиме стороні шуканого квадрата.

Побудову можна здійснити так. Будуємо прямий кут C і на одній з його сторін відкладаємо відрізок $CA = b$. Потім проводимо коло з центром A і радіусом c та знаходимо точку B його перетину з іншою стороною прямого кута. Тоді $BC = a$ — сторона шуканого квадрата, адже за теоремою Піфагора $a^2 = c^2 - b^2$ і при цьому a^2, b^2, c^2 — площі відповідно шуканого і двох заданих квадратів.

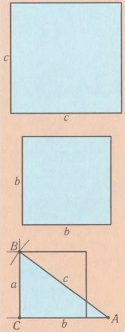


Рис. 6.9

Нехай тепер у прямокутному трикутнику ABC з катетами a і b та гіпотенузою c проведено висоту CM до гіпотенузи (рис. 6.10). Позначимо довжину цієї висоти через h, а довжину відрізків AM та BM, на які вона розбиває гіпотенузу, відповідно через c_1 і c_2. Відрізки AM та BM називаються *проекціями* катетів AC і BC на гіпотенузу. ***Справджуються такі рівності:***

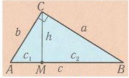


Рис. 6.10

$$h^2 = c_1 \cdot c_2; \; a^2 = c_2 \cdot c; \; b^2 = c_1 \cdot c.$$

Справді, за теоремою Піфагора, застосованою до трикутників AMC та BMC, $b^2 = h^2 + c_1^2$, $a^2 = h^2 + c_2^2$. З іншого боку, $c = c_1 + c_2$. Піднесемо до квадрата обидві частини останньої рівності: $c^2 = c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2$ і підставимо сюди значення $c_1^2 = b^2 - h^2$ та $c_2^2 = a^2 - h^2$ з перших двох рівностей. Матимемо:

$$c^2 = a^2 - h^2 + b^2 - h^2 + 2c_1c_2.$$

Враховуючи, що за теоремою Піфагора $c^2 = a^2 + b^2$, звідси після спрощень одержимо $h^2 = c_1c_2$, що й треба було довести.

Далі знаходимо:

$$a^2 = h^2 + c_2^2 = c_1c_2 + c_2^2 = c_2(c_1 + c_2) = c_2 \cdot c;$$

$$b^2 = h^2 + c_1^2 = c_1c_2 + c_1^2 = c_1(c_2 + c_1) = c_1 \cdot c.$$

Доведення рівностей завершено.

Задача.

За бажанням замовника, профіль двосхилого даху повинен мати форму прямокутного трикутника ABC з основою $AB = 20$ м і прямим кутом ACB між схилами (рис. 6.11). Проекція гребеня C на основу має бути віддаленою від одного з її країв на відстань $AN = 5$ м. Визначити з достатньою точністю висоту CN даху над його основою, а також довжини CA і CB його схилів.

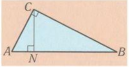


Рис. 6.11

Розв'язання. Скористаємося формулою, що виражає катет прямокутного трикутника через його проекцію на гіпотенузу. Матимемо: $AC^2 = AN \cdot AB = 5 \cdot 20 = 100$ (м²). Звідси $AC = \sqrt{100} = 10$ (м).

Потім з прямокутного трикутника ANC за теоремою Піфагора знаходимо: $CN^2 = AC^2 - AN^2 = 10^2 - 5^2 = 75$. Звідси $CN = \sqrt{75} \approx 8,66$ (м).

Нарешті, з прямокутного трикутника CNB за теоремою Піфагора визначаємо: $CB^2 = CN^2 + NB^2 = 75 + (20 - 5)^2 = 300$ (м²). Звідси $CB = \sqrt{300} \approx 17,32$ (м).

Відповідь. 10 м; ≈ 8,66 м; ≈ 17,32 м.

6.5. Перетворення прямокутника у рівновеликий йому квадрат

У п. 2.5. було показано, що будь-який многокутник за допомогою простих геометричних побудов можна перетворити у рівновеликий йому прямокутник. З іншого боку, з формули для площі прямокутника випливає, що коли один з його вимірів збільшено у певну кількість разів, а інший одночасно зменшено у стільки ж разів, то одержимо многокутник, рівновеликий даному. Наприклад, прямокутник з вимірами $a = 6$ і $b = 2$ рівновеликий прямокутнику з вимірами $a' = 3$ і $b' = 4$ (рис. 6.12), оскільки $ab = a'b'$.

Виникає запитання, а чи не можна так підібрати коефіцієнт для збільшення одного з вимірів і зменшення іншого, щоб одержаний новий прямокутник став квадратом? — Формули, виведені у попередньому пункті, дають змогу розв'язати цю доволі непросту задачу. А в результаті визначиться спосіб для перетворення будь-якого многокутника у рівновеликий йому квадрат. У давнину ця задача була дуже популярною і називалася задачею про *квадратуру* многокутника.

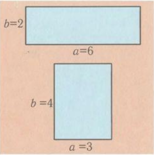


Рис. 6.12

Формулу $h^2 = c_1c_2$ можна тлумачити так: квадрат зі стороною h рівновеликий прямокутнику

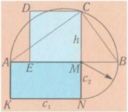


Рис. 6.13

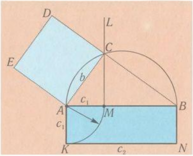


Рис. 6.14

зі сторонами c_1 і c_2. Це визначає такий спосіб для квадратури прямокутника.

Нехай маємо прямокутник $AMNK$ зі сторонами c_1 і c_2 (рис. 6.13). Продовжимо одну зі сторін, нехай $AM = c_1$, на довжину MB іншої сторони $MN = c_2$. Одержимо відрізок $AB = c_1 + c_2$. Потім на продовженні сторони MN знаходимо таку точку C, щоб кут ACB був прямим. Як уже з'ясовано у п. 4.4, така точка лежить на колі з діаметром AB; отже, C — точка перетину прямої MN із цим колом. Тоді відрізок $h = MC$ — шукана сторона рівновеликого квадрата $MCDE$, оскільки за відповідною формулою $h^2 = c_1 \cdot c_2$.

Для розв'язання тієї самої задачі можна скористатися також якою-небудь з формул $a^2 = c_2 \cdot c$ чи $b^2 = c_1 \cdot c$. Нехай сторони прямокутника $ABNK$ дорівнюють c_1 і c_2 (рис. 6.14). На більшій із них $AB = c_2$ відкладаємо відрізок $AM = c_1$, а на перпендикулярі ML до неї знаходимо таку точку C, щоб кут ACB був прямим (ця точка лежить на колі з діаметром AB). Тоді відрізок $b = AC$ — шукана сторона рівновеликого квадрата $ACDE$, оскільки $b^2 = c_1 \cdot c$.

6.6. Середнє геометричне і середнє пропорційне двох чисел

Прихована гармонія краща від явної.

Геракліт, «Про природу»

Нехай маємо два додатних числа a і b. Додатне число h, яке визначається рівністю $h^2 = a \cdot b$, тобто число $h = \sqrt{a \cdot b}$, називається *середнім геометричним* чисел a і b. Така назва, як тепер легко зрозуміти, пов'язана з геометричним тлумаченням цієї величини. А саме, середнє геометричне двох чисел a і b виражає сторону квадрата, рівновеликого прямокутнику зі сторонами a і b. Очевидно, що середнє геометричне двох різних чисел більше від меншого з них і менше від більшого. Якщо ж числа однакові ($b = a$), то середнє геометричне дорівнює кожному з них: $h = \sqrt{a \cdot a} = a$.

Середнє геометричне $h = \sqrt{a \cdot b}$ для додатних чисел a і b задовольняє пропорцію $\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$, в яку воно входить на місці обох середніх членів. У зв'язку з цим середнє геометричне двох чисел має ще й іншу назву — *середнє пропорційне* цих чисел.

6.7. Евклідове доведення теореми Піфагора

В «Началах» Евкліда наводиться інше доведення теореми Піфагора. Можливо, що це саме те доведення, яке було відкрите самим Піфагором або знайдене в його школі.

Доведення Евкліда базується на такому факті: площі прямокутника й трикутника, що мають спільну основу і рівні висоти, відносяться, як 2 : 1 (рис. 6.15). Це елементарно випливає з формули для обчислення цих площ.

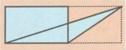


Рис. 6.15

Отже, нехай ABC — заданий прямокутний трикутник з прямим кутом C, а $ACHF$, $BCGK$, $ABED$ — квадрати, побудовані на його сторонах (рис. 6.16). Проведемо відрізок CL перпендикулярно до DE (нехай M — точка перетину цього відрізка з гіпотенузою AB),

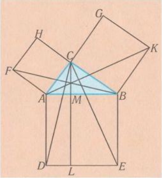


Рис. 6.16

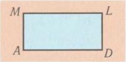


Рис. 6.17

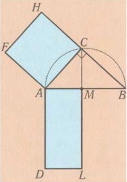


Рис. 6.18

а потім відрізки AK, BF, CD і CE. За першою ознакою $\Delta ABF = \Delta ADC$ (у них $AB = AD$ — як сторони квадрата $ABED$, $AF = AC$ — як сторони квадрата $ACHF$, $\angle FAB = \angle CAD$ — оскільки кожен з них дорівнює сумі прямого кута і кута CAB). З подібних причин $\Delta BAK = \Delta BEC$. Але площа ΔABF дорівнює половині площі квадрата $ACHF$, а площа ΔADC — половині площі прямокутника $ADLM$. А оскільки рівні трикутники мають однакові площі, то однакові площі мають і квадрат $ACHF$ та прямокутник $ADLM$. Так само з'ясовуємо, що однакові площі мають квадрат $BCGK$ та прямокутник $MBEL$. Якщо до рівних величин додати рівні, то одержимо рівні. Тому сума площ квадратів $ACHF$ і $BCGK$, побудованих на катетах трикутника ABC, дорівнює сумі площ прямокутників $ADLM$ та $MBEL$, тобто площі квадрата, побудованого на гіпотенузі, що й треба було довести.

Можливо, доведення Евкліда теореми Піфагора дещо складніше від того, яке дійшло до нас з Індії. Але воно має і суттєву перевагу, оскільки явно вказує на ті частини квадрата, побудованого на гіпотенузі, які рівновеликі кожному із квадратів, побудованих на катетах: квадрату $ACHF$ рівновеликий прямокутник $ADLM$, а квадрату $BCGK$ — прямокутник $MBEL$.

Піфагор доводить учням свою теорему. Гравюра XIX ст.

Цим можна скористатися для перетворення прямокутника у рівновеликий йому квадрат, не проводячи жодних додаткових досліджень.

Нехай потрібно перетворити прямокутник $ADLM$ (рис. 6.17) у рівновеликий йому квадрат. Враховуючи Евклідове доведення теореми Піфагора, для цього можемо діяти так. Продовжимо меншу сторону AM прямокутника на таку відстань MB, щоб відрізок AB дорівнював більшій стороні AD (рис. 6.18). Потім на прямій LM знаходимо таку точку C, щоб кут ACB був прямим (як уже зазначалося, точка C лежить на колі з діаметром AB). Тоді квадрат $ACHF$ зі стороною AC — шуканий.

— Перестань зараз же! — закричав Знайко. — Від твоєї музики вуха болять!
— Це тому, що ти до моєї музики ще не звик. Ось звикнеш — і вуха перестануть боліти.

Микола Носов, «Пригоди Незнайка та його друзів»

З доведення Евкліда можемо визначити й проекції катетів на гіпотенузу.

Оскільки площа прямокутника $ADLM$ дорівнює $AM \cdot AB$, а площа рівновеликого йому квадрата $ACHF$ — AC^2, то $AM \cdot AB = AC^2$. Звідси $AM = \frac{AC^2}{AB}$.

Аналогічно знаходиться, що $BM = \frac{BC^2}{AB}$. А вже на основі цих формул можна вивести формулу для самої висоти CM. З прямокутного трикутника CMA за теоремою Піфагора: $CM^2 = AC^2 - AM^2 = AM \cdot AB - AM^2 = AM(AB - AM) = = AM \cdot MB$.

6.8. Несумірність сторони та діагоналі квадрата

На основі теореми Піфагора з'ясовується науковий факт, який свого часу був абсолютно незбагненним і у зв'язку з цим спричинив глибоку кризу основ математики. Йдеться про існування несумірних відрізків.

Природа любить ховатися.

Геракліт, «Про природу»

Наріжним каменем найвпливовішої в античному світі наукової доктрини піфагорійців було положення про те, що все у світі описується числами і підпорядковується числовим відношенням. Під числами розуміли натуральні числа і звичайні дроби, оскільки інших чисел тоді ще не знали.

Проте у самій піфагорійській школі згодом відкрилася хибність цієї доктрини. Зокрема, з'ясувалося, що відношення сторони квадрата до його діагоналі неможливо виразити ні цілим числом, ні звичайним дробом, оскільки ці відрізки *несумірні* між собою.

Упевнившись у цьому остаточно, піфагорійці вирішили на якийсь час засекретити це сумне для себе відкриття, — поки знайдеться належний вихід з кризи. Проте якийсь Гіппас розголосив сувору таємницю, за що йому, за легендою, ще за життя спорудили могилу як померлому, і він згодом загинув під час бурі на морі.

Доведемо несумірність сторони і діагоналі квадрата. Припустимо протилежне, тобто, що існує такий відрізок e, який у стороні a квадрата вкладається m разів, а в діагоналі d — n разів (тоді відрізок e буде спільною мірою сторони та діагоналі, тобто ці відрізки будуть *сумірними*). Відповідно до цього припущення, $a = me$, а $d = ne$.

Не порушуючи загальності міркувань, можемо вважати, що числа m і n — взаємно прості, і, отже, дріб $\frac{n}{m}$ — нескоротний. Справді, якби числа m і n не були взаємно простими, то існував би їхній найбільший спільний дільник $k \neq 1$, тобто $m = m_1k$, а $n = n_1k$ при деяких взаємно простих m_1 і n_1. Отже, виконувалися б рівності: $a = m_1ke$, $d = n_1ke$. Але тоді відрізок ke можна було б узяти за нову спільну міру e_1 і одержати вираження $a = m_1e_1$, $d = n_1e_1$ уже при взаємно простих m_1, n_1.

Застосуємо тепер теорему Піфагора до трикутника, обмеженого двома суміжними сторонами квадрата з довжиною a та його діагоналлю d (рис. 6.19). Матимемо: $a^2 + a^2 = d^2$. Звідси $2m^2e^2 = n^2e^2$. Отже, $\frac{n^2}{m^2} = 2$. Однак остання рівність неможлива, бо дріб $\frac{n}{m}$ нескоротний, а тому нескоротний і дріб $\frac{n^2}{m^2} = \frac{n}{m} \cdot \frac{n}{m}$. Отже, він аж ніяк не може дорівнювати цілому числу 2.

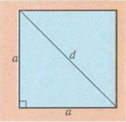


Рис. 6.19

Одержане протиріччя свідчить про хибність зробленого припущення щодо сумірності сторони та діагоналі квадрата. Отже, вони несумірні.

Для числового вираження відношень несумірних відрізків у сучасній математиці застосовуються *ірраціональні* числа (відношення сумірних відрізків виражаються *раціональними* числами). Довершена теорія ірраціональних чисел була побудована лише у XIX ст. Лише тоді було остаточно подолано античну кризу основ математики, пов'язану з існуванням несумірних відрізків. З'ясувалося, зокрема, що дії з ірраціональними числами можна проводити за тими самими правилами, що й із раціональними.

6.9. Перпендикуляри і похилі

Якщо дві прямі або два відрізки, перетинаючись, утворюють прямі кути, то вони називаються *перпендикулярами*. На рис. 6.20 зображено дві перпендикулярні прямі a і b та два перпендикулярних відрізки AB і CD. Перпендикулярними, зокрема, є будь-які дві суміжні сторони прямокутника (рис. 6.21).

Перпендикулярними називають також відрізки, які хоч і не перетинаються, але лежать на перпендикулярних прямих. Такими є відрізки AB і CD на рис. 6.22.

Якщо ж відрізок AB перпендикулярний до прямої a і при цьому один з його кінців B належить даній прямій (рис. 6.23), то цей відрізок називається *перпендикуляром* до даної прямої a, а точка B — *основою* перпендикуляра.

Аналогічно означається перпендикуляр до відрізка. На рис. 6.24 відрізок AB — перпендикуляр до відрізка CD, а точка B — основа цього перпендикуляра.

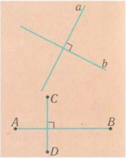


Рис. 6.20


Рис. 6.21

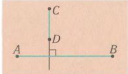


Рис. 6.22

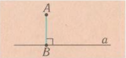


Рис. 6.23

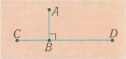


Рис. 6.24

Перпендикулярність прямих і відрізків позначають за допомогою значка $\perp$. Наприклад, для позначення перпендикулярності прямих a і b пишуть: $a \perp b$ або $b \perp a$.

Самі терміни «перпендикуляр», «перпендикулярність» утворено від латинського слова perpendicularis, що означає «прямовисний». Прямовисна лінія утворює прямі кути з будь-якою горизонтальною прямою (рис. 6.25). Це й стало підставою для того, аби будь-які прямі чи відрізки, які утворюють прямий кут, називати перпендикулярними. У зв'язку з цим часто замість виразу «провести перпендикуляр з точки до прямої» кажуть: «опустити перпендикуляр з точки на пряму» або «поставити перпендикуляр до прямої в даній точці», — навіть тоді, коли дана пряма a не займає горизонтального положення (рис. 6.26).

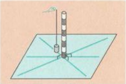


Рис. 6.25

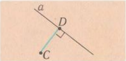


Рис. 6.26

Відрізок з одним кінцем на даній прямій, який не є перпендикуляром до неї, називається *похилою* до цієї прямої. Кінець похилої, який належить даній прямій, називається *основою* похилої. Відстань між основами перпендикуляра і похилої, проведених з однієї точки до прямої, називається *проекцією* похилої на дану пряму. На рис. 6.27 AB — перпендикуляр до прямої a, AC та AD — похилі до неї, а BC і BD — проекції цих похилих на пряму a.

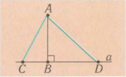


Рис. 6.27

З однієї точки до прямої можна провести один перпендикуляр і скільки завгодно похилих.

Теорема
(про існування та єдиність перпендикуляра до прямої).

З будь-якої точки, взятої поза прямою, до цієї прямої можна провести, і притому єдиний, перпендикуляр.

Доведення. Доведемо спочатку *існування* перпендикуляра.

Нехай у площині маємо пряму a і точку A поза нею (рис. 6.28). Візьмемо на цій прямій яку-небудь точку M і розглянемо гострий кут 1, утворений прямими a та AM. Побудуємо кут 2, прилеглий до a і рівний $\angle 1$, та відкладемо на тій його стороні, що не належить прямій a, відрізок $MA_1 = MA$. Нехай B — точка перетину відрізка AA_1 з прямою a.

У результаті цих побудов утворився рівнобедрений трикутник MAA_1, у якому MB — бісектриса, проведена до основи. А оскільки, за властивістю рівнобедреного трикутника, вона є й висотою, то AB — перпендикуляр, опущений з точки A на пряму a. Отже, існування перпендикуляра доведено.

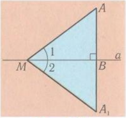


Рис. 6.28

Доведемо тепер його *єдиність*. Стосовно описаної побудови це означає незалежність перпендикуляра AB від розміщення точки M на прямій a.

Припустимо, що з якоїсь точки A до якоїсь прямої a можна провести два перпендикуляри AB і AC (рис. 6.29). Тоді одержиться трикутник ABC з двома прямими кутами. Однак з теореми про суму кутів трикутника випливає, що такого бути не може, оскільки тоді у трикутнику ABC сума кутів перевищувала б 180°. Тому зроблене припущення неправильне. Отже, з однієї точки до прямої можна провести лише один перпендикуляр. Теорему доведено.

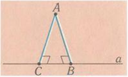


Рис. 6.29

Теорема

(про співвідношення між перпендикуляром і похилими до прямої).

Перпендикуляр, опущений з точки на пряму, менший від будь-якої похилої, проведеної з тієї самої точки до цієї прямої.

Доведення. Нехай з точки A до прямої a проведено перпендикуляр AB і похилу AM (рис. 6.30). У результаті утворюється прямокутний трикутник ABM, в якому AB — катет, а AM — гіпотенуза. За

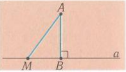


Рис. 6.30

наслідком з теореми Піфагора, $AB < AM$. Теорему доведено.

Доведена властивість є основою для прийняття такого означення: ***відстанню від точки до прямої називається довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму.***

Теорема

(про співвідношення між похилими та їхніми проекціями на пряму).

Проекція похилої завжди менша від самої похилої. Рівні похилі, проведені до прямої з однієї точки, мають і рівні проекції, більша похила має більшу проекцію. Навпаки, похилі, які проведені до прямої з однієї точки і мають рівні проекції, рівні між собою, а більшу проекцію має більша похила.

Доведення. Нехай з точки A до прямої a проведено перпендикуляр AB і декілька похилих AE, AF, AG (рис. 6.31). У результаті утворюються прямокутні трикутники ABE, ABF, ABG. Проведені похилі є гіпотенузами цих трикутників, а їхні проекції — катетами. Оскільки катет менший від гіпотенузи, то проекція похилої завжди менша від самої похилої.

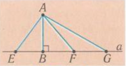


Рис. 6.31

Припустимо, що похилі AE і AF рівні між собою. Тоді за теоремою Піфагора для їхніх проекцій маємо: $BE^2 = AE^2 - AB^2$, $BF^2 = AF^2 - AB^2$. Звідси $BE^2 = BF^2$, тобто $BE = BF$. Отже, рівні похилі мають рівні проекції. Навпаки, оскільки $AE^2 = AB^2 + BE^2$, $AF^2 = AB^2 + BF^2$, то якщо рівні проекції BE і BF, то $AE^2 = AF^2$, тобто рівні й самі похилі: $AE = AF$.

Нехай, нарешті, похила AG більша від похилої AF. Тоді з трикутників ABG та ABF за теоремою Піфагора: $BG^2 = AG^2 - AB^2$, $BF^2 = AF^2 - AB^2$. Звідси $BG^2 > BF^2$, тобто $BG > BF$. Отже, більша похила має і більшу проекцію. Навпаки, $AG^2 = BG^2 + AB^2$, $AF^2 = BF^2 +$

$+ AB^2$, тому якщо $BG > BF$, то $AG^2 > AF^2$, тобто $AG > AF$. Отже, більшу проекцію має більша похила. Теорему доведено.

Задача.

З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких відносяться, як 2 : 3, а довжини їхніх проекцій дорівнюють 2 см і 7 см. Визначити довжини цих похилих.

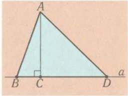


Рис. 6.32

Розв'язання. Нехай AB і AD — задані похилі, $BC = 2$ см і $DC = 7$ см — їхні проекції (рис. 6.32). Оскільки більшій похилій відповідає більша проекція, то $AB : AD = 2 : 3$.

Нехай $AB = 2x$, $AD = 3x$, де x — невідомий коефіцієнт пропорційності. Тоді з прямокутних трикутників ACB і ACD за теоремою Піфагора послідовно знаходимо:

$AC^2 = AB^2 - BC^2 = (2x)^2 - 2^2 = 4x^2 - 4;$

$AC^2 = AD^2 - DC^2 = (3x)^2 - 7^2 = 9x^2 - 49.$

Оскільки обидва вирази, одержані для AC^2, при шуканому x повинні мати однакові значення, то $9x^2 - 49 = 4x^2 - 4$.

Звідси $5x^2 = 45$, $x^2 = 9$, $x = \sqrt{9} = 3$.

Отже, $AB = 2x = 2 \cdot 3 = 6$ (см), $AD = 3x = 3 \cdot 3 = 9$ (см).

Відповідь. 6 см, 9 см.

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

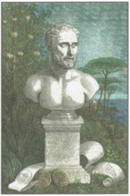
Піфагор і піфагорійці

Постать Піфагора — одна з найлегендарніших і найзагадковіших в усій інтелектуальній історії людства. Існує легенда, що своє ім'я він одержав уже в зрілому віці за свою виняткову мудрість, і що походить воно від слова «піфія»: так називали жрицю-оракула у знаменитому храмі бога Аполлона в Дельфах.

Усе, що пізнаємо, має число, бо неможливо ні зрозуміти будь-що, ні пізнати без нього.

Піфагор, «Про природу»

Водночас достеменних фактів про життя Піфагора відомо дуже мало. Лише з уривчастих свідчень окремих істориків, філософів та літераторів пізніших епох можна скласти мерехтливу мозаїку земних днів цієї легендарної людини.


Символічний бюст Піфагора

Народився Піфагор близько 580 р. до н.е. на острові Самос біля узбережжя малої Азії. Через це його часто називають ще Піфагором Самоським. Батько Піфагора на ім'я Мнесарх походив зі знаменитого, але збіднілого роду. І хоча йому доводилося трудитися простим каменерізом, він вважав за обов'язок дати кмітливому синові належну освіту. Ні університетів, ні інших подібних навчальних закладів тоді ще не було, зате звичаєм серед знатних людей було посилати своїх дітей навчатися мудрості на Схід — до єгипетських жерців та вавилонських халдеїв. Зрештою, найчастіше це поєднувалося зі звичайним купецьким ремеслом. Тож цілком можливо, що юний Піфагор розпочинав із цього.

Більше 20 років Піфагор провів у Єгипті і, мабуть, зніс там чимало труднощів, перш ніж тамтешні жерці посвятили його «у дивовижне мистецтво чергування чисел, хитромудрі правила геометрії, науку про зорі та медицину».

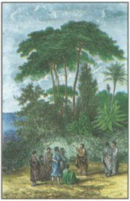

Піфагор
у єгипетських жерців

Та ось Єгипет завойовує перський цар Камбіз, і Піфагор стає полоненим-рабом. Проте чутки про його виняткову мудрість сприяють швидкому визволенню, а згодом і навчанню утаємниченій мудрості у вавилонських магів.

Це тривало ще 12 років. Майже напевне, що в цей час Піфагор був посвячений у вірування індійських брахманів, бо дуже багато рис з його філософії, зокрема, вчення про переселення душ, несуть на собі відбиток цих вірувань. Дуже сумнівно, щоб ця посвята відбулася в самій Індії. Певніше, індійські брахмани теж були тоді у Вавилонії.

Повернувшись на батьківщину в «золотому» 40-річному віці, Піфагор узявся за омріяне удосконалення суспільного устрою на засадах загального блага, справедливості та розумного управління посвячених в утаємничену мудрість. На ці заклики гаряче відгукнулася аристократична молодь, і в Піфагора невдовзі з'явилося багато однодумців та послідовників. Звісно, одночасно виник і величезний спротив консервативних політичних сил. Тому для практичної реалізації своїх задумів Піфагору з його однодумцями довелося тікати у грецькі колонії на південь Італії. Саме там і утворився керований Піфагором морально-науковий і політичний союз — піфагорійське братство. В одному з найдавніших свідчень про Піфагора, яке відноситься до IV ст. до н.е., читаємо, що він «настільки славою... перевершив інших, що вся молодь хотіла вважати себе його учнями, і старші теж більше воліли бачити своїх дітей в навчанні у нього, ніж за заняттями домашніми справами».

Проголосивши суспільну гармонію метою своєї практичної (політичної) філософії, піфагорійці займалися активним пошуком першоджерел цієї гармонії. У цьому, за їхніми переконаннями, могла допомогти наука чисел (арифметика), наука вимірювання (геометрія) і наука космосу (астрономія). З початками цих наук Піфагор ґрунтовно ознайомився на Сході, а за їхній розвиток із завзяттям взялися послідовники Піфагора по всій Греції.


Школа Піфагора в Кротоні

Одна із легенд сповіщає, що одного разу, проходячи повз кузню, Піфагор почув навдивовижу гармонійне звучання декількох молотів, якими ковалі, обковуючи розпечене залізо, вдаряли по ковадлу. Зацікавившись причиною цієї гармонії, Піфагор зважив молоти, і з'ясував, що їхня вага пропорційна цілим числам. Аналогічні результати дало й вимірювання струн, які при однаковому натязі та одночасному звучанні утворюють гармонічні (консонантні) співзвуччя. Саме це нібито й наштовхнуло Піфагора на думку про те, що природа підкоряється числовим закономірностям і навіть визначається числами. «Все є число» — ось та крилата фраза піфагорійців, в якій сконцентрована глибинна суть їхньої філософії природи та суспільства. Тому вивчення чисел піфагорійці вважали метою і засобом для справжнього пізнання. Тому зрозуміло, якого нищівного удару зазнала ця доктрина після відкриття несумірних відрізків, відношення яких неможливо було виразити за допомогою цілих чисел. Після цього наукові інтереси піфагорійців змістилися з арифметики на геометрію. Відтак весь подальший розвиток грецької математики відбувався уже під знаком геометрії.

Найважливішим з геометричних відкриттів, яке приписується Піфагору, була знаменита теорема Піфагора про співвідношення між сторонами прямокутного трикутника. Цілком можливо, що про саме це співвідношення Піфагор дізнався ще під час свого перебування у Вавилоні, де, як свідчать давні клинописні математичні тексти, воно було відоме принаймні за 1 000 років до Піфагора. Проте безсумнівно, що строге логічне доведення цієї теореми знайшли таки у школі Піфагора.

Теореми Евкліда і Піфагора глибоко вплинули на характер мислення не тільки математиків.
Годфрі Харді

Піфагорійці першими довели і дуже важливу теорему про суму кутів трикутника, а також першими почали застосовувати метод доведення «від супротивного» (так, зокрема, вони довели твердження про несумірність сторони та діагоналі квадрата). А ще вони розробили саму структуру математичної теорії, в основі якої лежить декілька основних (первісних) положень (пізніше їх назвали аксіомами та постулатами), а всі інші факти виводяться з них логічним шляхом. За цією схемою розгортаються усі сучасні математичні і природознавчі теорії.

Усі мотиви дослідницької діяльності і суспільної поведінки піфагорійців підпорядковувалися їхньому глобальному уявленню про світ як про високовпорядкований, організований і структурований космос. Навіть сам термін «космос», який у звичайній розмовній грецькій мові мав значення лише як «прикраса» та «пристойність», в теперішніх значеннях «всесвіт» та «найвища упорядкованість» теж ввели піфагорійці. Вони ж першими висунули гіпотезу про те, що Земля має форму кулі і разом з іншими планетами рухається по своїй сфері навколо певного «центрального вогню». Через 1 000 років після піфагорійців це уявлення великий Коперник з вдячністю назвав передісторією своєї геліоцентричної системи.

Перевір себе

1. Звідки випливає, що гіпотенуза прямокутного трикутника має виражатися через його катети?
2. Сформулюйте теорему Піфагора в алгебраїчній та геометричній формах.
3. Опишіть «східне» доведення теореми Піфагора за допомогою розбиття квадратів на рівновеликі фігури.
4. Якою є ідея доведення теореми Піфагора, поданого Евклідом у його «Началах»?
5. Як можна застосувати теорему Піфагора для перетворення декількох квадратів в один рівновеликий їм квадрат? Як побудувати квадрат, рівновеликий різниці двох квадратів?
6. Дайте означення квадратного кореня із додатного числа. Яке геометричне тлумачення можна дати цьому поняттю?
7. Які ще співвідношення у прямокутному трикутнику, окрім теореми Піфагора, вам відомі? Як їх можна вивести?
8. Опишіть принципи, ґрунтуючись на яких прямокутник за допомогою побудов можна перетворити у рівновеликий квадрат.
9. Що таке середнє геометричне двох додатних чисел і яке геометричне тлумачення можна дати цьому поняттю?
10. Що означає сумірність і несумірність двох відрізків. Як можна довести несумірність сторони та діагоналі квадрата?
11. Дайте означення перпендикулярних прямих та відрізків, а також перпендикуляра і похилої до прямої та відрізка.
12. Сформулюйте і доведіть теорему про існування та єдиність перпендикуляра до прямої.
13. Які співвідношення між перпендикуляром, похилими та їхніми проекціями на пряму вам відомі?

Задачі і вправи

1°. Визначте гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: а) 9 м і 12 м; б) 12 см і 16 см; в) $3a$ і $4a$.

2°. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см, а один із катетів — 12 см. Визначте інший катет.

3. 1. На яку відстань потрібно відсунути від стіни будинку нижній кінець драбини, довжина якої 9 м, щоб її верхній кінець опинився на висоті 7 м?
2. Драбина завдовжки 9 м приставлена до стіни будинку так, що її нижній кінець знаходиться на відстані 3 м від стіни. На якій висоті знаходиться верхній кінець цієї драбини?

4. Побудуйте відрізок, що дорівнює середньому пропорційному між відрізками, довжини яких: а) 2 см і 3 см; б) 15 мм і 24 мм.

5. Виразіть довжини проекцій катетів на гіпотенузу через довжини катетів.

6. Побудуйте відрізок x, якщо: 1) $x = \sqrt{ab}$; 2) $x = \sqrt{2bc}$; 3) $x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$, де a, b — задані відрізки.

7. Визначте відстані AC, AE і CE (рис. 6.33), якщо $AB = 2$ см, $CD = 5$ см, $FE = 3$ см.

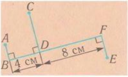


Рис. 6.33

8. Чи можуть довжини всіх сторін прямокутного трикутника виражатися парними числами? непарними числами?

9. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а сума катетів — 7 см. Визначте ці катети.

10. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а катети відносяться, як 3 : 4. Визначте ці катети.

11. Різниця катетів прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а гіпотенуза — 25 см. Визначте площу трикутника.

12. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 60 см, а катети відносяться, як 3 : 4. Визначте гіпотенузу.

13. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а висота — 15 см. Визначте його площу.

14. Якою є висота двосхилого даху (рис. 6.34), якщо стропила мають довжину 16,25 м і спираються на балки завдовжки 26 м?

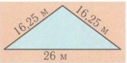


Рис. 6.34

15°. Сторони прямокутника дорівнюють 5 см і 12 см. Визначте його діагональ.

16°. Визначте площу прямокутника, одна сторона якого дорівнює 6 см, а діагональ — 10 см.

17. Діагональ квадрата дорівнює 4 см. Визначте його площу.

18. Площа квадрата дорівнює 18 см^2. Визначте довжину його діагоналі.

19. Пароплав відплив від порту на північ зі швидкістю 18 морських миль на годину. Одночасно з ним з того самого порту на захід відплив інший пароплав зі швидкістю 24 морських милі на годину. Яка відстань буде між пароплавами через півтори години?

Задачі 20 — 21 взяті з давньокитайського математичного трактату, написаного у II тис. до н.е.

20. Бамбуковий стовбур, що мав 90 футів заввишки, переломив буревій так, що зламана частина торкнулась верхів'ям землі на відстані 30 футів від основи стовбура. На якій висоті переломило стовбур?

21. У центрі квадратної водойми, що має довжину і ширину 10 футів, росте тростина, яка здіймається над поверхнею води на 1 фут. Якщо її нагнути до середини однієї зі сторін водойми, то своїм верхів'ям вона досягне берега. Яка глибина цієї водойми?

22. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а висота, проведена до основи,— 6 см. Визначте площу трикутника.

23. За даними катетами 12 см і 16 см прямокутного трикутника визначте його висоту, проведену до гіпотенузи.

24. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 25 см, а висота, проведена до гіпотенузи, — 12 см. Визначте площу трикутника.

25. Катети трикутника дорівнюють 15 см і 20 см. Визначте відрізки гіпотенузи, на які її ділить проведена до неї висота.

26. Висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 12 см і ділить гіпотенузу на відрізки, різниця яких дорівнює 7 см. Визначте периметр трикутника.

27. За допомогою креслярських інструментів побудуйте у зошиті прямокутники, рівні зображеним на рис. 6.35, а) – в), а потім побудуйте рівновеликі їм квадрати.

28*. За допомогою креслярських інструментів побудуйте у зошиті многокутники, рівні зображеним на рис. 6.36, а) – б), а потім побудуйте рівновеликі їм квадрати.

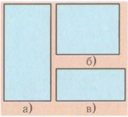


Рис. 6.35

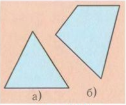


Рис. 6.36

29*. Побудуйте який-небудь квадрат і відрізок, а потім — прямокутник, рівновеликий даному квадрату, в якому одна зі сторін дорівнює даному відрізку.

30*. Доведіть, що якщо діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ взаємно перпендикулярні, то $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

31*. Доведіть, що квадрат найменшої медіани прямокутного трикутника уп'ятеро менший від суми квадратів двох інших його медіан.

32. Довжина перпендикуляра до прямої дорівнює 6 см, а довжина похилої — 10 см. Визначте довжину проекції даної похилої на пряму.

33. Похила, що дорівнює 13 см, має проекцію завдовжки 12 см. Визначте довжину перпендикуляра, проведеного з тієї самої точки, що й похилу.

34. З точки до прямої проведено перпендикуляр і дві похилі. Визначте довжину перпендикуляра, якщо похилі дорівнюють 41 см і 50 см, а їхні проекції на пряму відносяться, як 3 : 10.

35. З точки до прямої проведено дві похилі. Доведіть, що різниця квадратів похилих дорівнює різниці квадратів їхніх проекцій.

Завдання для повторення та проведення контрольних робіт до розділу I

1. а) Периметр квадрата дорівнює 64 дм. Чому дорівнює його площа?
б) Площа квадрата дорівнює 196 дм^2. Чому дорівнює його периметр?

2. а) Визначте сторони прямокутника, якщо вони відносяться, як 3 : 7, а його площа дорівнює 84 см^2.
б) Площа прямокутника дорівнює 88 см^2. Визначте його сторони, якщо одна з них на 3 см більша від іншої.

3. а) Визначити площу фігури, зображеної на рис. 6.37, а).
б) Визначити площу фігури, зображеної на рис. 6.37, б).

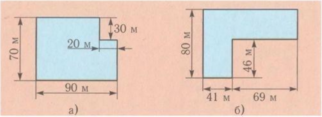


Рис. 6.37

4. а) Прямокутник зі сторонами 27 см і 12 см рівновеликий квадрату. Чому дорівнює сторона квадрата?
б) Квадрат і прямокутник мають однакові площі. Сторона квадрата дорівнює 12 см, а одна зі сторін прямокутника — 9 см. Визначте іншу сторону прямокутника.

5*. а) Точка O знаходиться на перетині відрізків, які з'єднують середини протилежних сторін прямокутника $ABCD$, M — середина сторони BC. Визначте площу трикутника OAM, якщо площа прямокутника $ABCD$ дорівнює S.

б) Точка O знаходиться на перетині відрізків, які з'єднують середини протилежних сторін прямокутника $ABCD$, точка N належить стороні BC, причому $BN : NC = 1 : 3$. Визначте площу трикутника OAN, якщо площа прямокутника $ABCD$ дорівнює S.

6. а) За допомогою креслярських інструментів побудуйте (та обґрунтуйте побудови) прямокутник, рівновеликий чотирикутнику, зображеному на рис. 6.38, а).

б) За допомогою креслярських інструментів побудуйте (та обґрунтуйте побудови) прямокутник, рівновеликий чотирикутнику, зображеному на рис. 6.38, б).

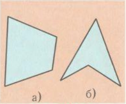


Рис. 6.38

7. а) Відрізки AC та BD перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Визначте кут ABD, якщо кут CDB дорівнює 30°.

б) На стороні AB трикутника ABC взяли таку точку M, що $AM = MB$. На промені CM від точки M відклали відрізок MN, рівний відрізку CM. Доведіть рівність трикутників CMB та MNA.

8. а) Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 55 см, а його бічна сторона на 8 см більша від основи. Визначте сторони цього трикутника.

б) Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а його основа вдвічі менша за бічну сторону. Визначте сторони цього трикутника.

9*. а) У трикутнику ABC $AB = AC = 26$ см. Через середину P сторони AB проведено пряму, перпендикулярну до цієї сторони, яка перетинає сторону AC в точці Q. Периметр трикутника BCQ дорівнює 38 см. Визначте сторону BC.

б) У трикутнику ABC $AB = AC = 10$ см. Через середину M сторони AB проведено пряму, перпендикулярну до цієї сторони, яка перетинає сторону BC в точці N. Периметр трикутника ACN дорівнює 28 см. Визначте сторону BC.

10. а) Кути A і B трикутника ABC дорівнюють відповідно 62° і 46°. Визначте кути, утворені бісектрисами кутів A і C.

б) Кути B і C трикутника ABC дорівнюють відповідно 38° і 126°. Визначте кути, утворені бісектрисами кутів A і B.

11. а) У рівнобедреному трикутнику ABC AC — основа, $\angle B = 52°$, AN і AK — відповідно висота і бісектриса. Визначте кут KAN.

б) У рівнобедреному трикутнику ABC AB — основа, $\angle C = 128°$, AH і AL — відповідно висота і бісектриса. Визначте кут HAL.

12. а) У прямокутнику діагональ утворює з більшою стороною кут 36°. Визначте той із кутів, утворених діагоналями прямокутника, який лежить проти меншої сторони прямокутника.

б) У прямокутнику діагональ утворює з меншою стороною кут 48°. Визначте той із кутів, утворених діагоналями прямокутника, який лежить проти більшої сторони прямокутника.

13. а) Внутрішні кути трикутника відносяться, як 2 : 7 : 9. Визначте відношення зовнішніх кутів, взятих по одному при кожній вершині.

б) Зовнішні кути трикутника відносяться, як 4 : 5 : 6. Визначте відношення внутрішніх кутів трикутника.

14*. а) Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника учетверо більша за суму його зовнішніх кутів. Скільки сторін у цьому многокутнику?

б) Визначте кількість сторін опуклого многокутника, в якому сума внутрішніх кутів на 720° більша від суми зовнішніх.

15. а) Різниця між гіпотенузою і катетом прямокутного трикутника дорівнює 2 см, а довжина іншого катета — 6 см. Визначте невідомі сторони і площу трикутника.

б) Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 7 см, а гіпотенуза більша від іншого катета на 3 см. Визначте невідомі сторони і площу трикутника.

16. а) Катет прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, — 13 см. Визначте площу трикутника.

б) Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 6,5 м, а його периметр — 30 м. Визначте площу трикутника.

17*. а) Визначте сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 54 см, а висота, проведена до основи, — 9 см.

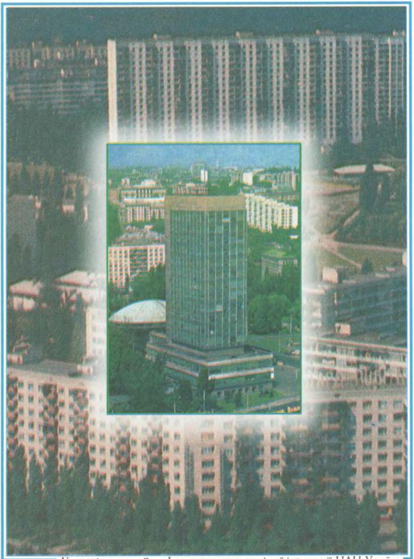
б) Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи, як 5 : 8. Периметр трикутника дорівнює 36 см. Визначте площу трикутника.

18. а) Побудуйте який-небудь прямокутник, а потім рівновеликий йому квадрат.

б) Побудуйте який-небудь трикутник, а потім рівновеликий йому квадрат.

19. а) З точки до прямої проведені дві похилі, довжини яких дорівнюють 6 см і 10 см, а довжини їхніх проекцій відносяться, як 2 : 5. Визначте відстань від точки до прямої.

б) З точки до прямої проведені дві похилі, довжини яких дорівнюють 15 см і 20 см, а довжини їхніх проекцій відносяться, як 9 : 16. Визначте відстань від точки до прямої.



У центрі композиції — Інститут науково-технічної інформації НАН України

Розділ II Перпендикулярність і паралельність

... необхідність — найкращий учитель, і її найбільше слухаються.

Жуль Верн,
«Таємничий острів»

Прямокутник на перший погляд видається вкрай простою геометричною фігурою. Водночас у ньому, як у фокусі, сконцентровані фундаментальні особливості геометрії нашого світу. З деякими із цих властивостей, зокрема, з теоремою про суму кутів трикутника і теоремою Піфагора, ми уже ознайомилися у першому розділі. Зараз розпочинаємо вивчення ще однієї з таких фундаментальних особливостей. Вона пов'язана з існуванням паралельних прямих та з тісним зв'язком між паралельністю і перпендикулярністю.

§7 Паралельність прямих

7.1. Означення та ознака паралельності прямих

Продовжимо «приглядатися» до прямокутника, тобто «теоретизувати» над ним.

Коли ще у п. 1.3 розглядалося питання про розбиття прямокутника $ABCD$ на менші прямокутники, то, зокрема, було встановлено, що всі відрізки FG, кінці яких лежать на протилежних сторонах AB і DC прямокутника і є рівновіддаленими від його вершин A і D (рис. 7.1), рівні між собою. Крім цього, тоді з'ясувалося, що всі ці відрізки FG перпендикулярні до кожної з прямих AB і DC, що містять протилежні сторони прямокутника.

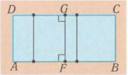


Рис. 7.1

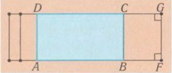


Рис. 7.2

Легко зрозуміти, що ця властивість відрізків FG зберігатиметься і тоді, коли точки F і G братимуться на прямих AB і DC за межами прямокутника $ABCD$ (рис. 7.2). Справді, і тоді чотирикутники $AFGD$ матимуть прямі кути A і D та рівні сторони AF і GD, а тому за першою ознакою будуть прямокутниками. Внаслідок цього відрізки FG будуть перпендикулярними до прямих AB і DC.

Отже, усі побудовані вказаним способом відрізки FG будуть рівними між собою і перпендикулярними до кожної з прямих AB і DC. Це означає, що прямі AB і DC розміщені так, ніби «йдуть поруч» одна з одною на одній відстані, точнісінько як залізничні рейки, що розділяються шпалами однакової довжини. Тому такі прямі називають паралельними, — від грецького слова «параллелос», що означає «той, що йде поруч».

Математика — це мова плюс міркування, це наче мова і логіка разом. Математика — знаряддя для міркування. У ній сконцентровані результати точного мислення багатьох людей.

Річард Фейнман

Цілком зрозуміло, що паралельні прямі не можуть перетинатися. У зв'язку з цим вводиться таке означення:

Означення
(паралельних прямих).

Прямі, які лежать в одній площині і не перетинаються, називаються *паралельними*.

Відношення паралельності прямих позначають за допомогою знака $\|$. Наприклад, запис про паралельність прямих a і b має вигляд: $a \parallel b$ або $b \parallel a$.

Поняття паралельності прямих природним чином поширюється на відрізки та прямі. Наприклад, два відрізки називаються *паралельними*, якщо прямі, яким вони належать, є паралельними.

Поки-що ми одержали паралельні прямі на основі вже побудованого прямокутника, продовживши його протилежні сторони. Зауважте, що ці прямі перпендикулярні одночасно до обох прямих, які містять інші протилежні сторони прямокутника. Зараз доведемо, що для паралельності двох прямих достатньо їхньої перпендикулярності навіть до однієї, третьої прямої, причому це доведення ми проведемо без посилання на властивості прямокутника.

Теорема
(ознака паралельності двох прямих).

Дві прямі, які лежать в одній площині і перпендикулярні до третьої прямої цієї площини, паралельні між собою.

Доведення. Нехай прямі a і b лежать в одній площині і перетинають деяку пряму c цієї площини під прямими кутами 1 і 2 (рис. 7.3). Припустимо, що прямі a і b перетинаються в деякій точці C. Пряма c розбиває площину на дві частини — дві півплощини. Нехай прямі кути 1 і 2 належать одній із цих півплощин, а саме тій, яка містить точку C.

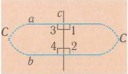


Рис. 7.3

Перегнемо в уяві площину по прямій c і сумістимо утворені при цьому півплощини одна з одною. Тоді прямий кут 1 суміститься з рівним йому прямим кутом 3, а прямий кут 2 — з рівним йому прямим кутом 4. Отже, та частина прямої a, яка містить точку C, суміститься з іншою частиною цієї прямої, що лежить в іншій півплощині. Те ж саме стосується і прямої b. Точка C теж суміститься з деякою точкою C' в іншій півплощині. Виходить, що прямі a і b мають дві точки перетину — одну C в одній півплощині, а іншу C' — в іншій. Цього, звичайно, бути не може, бо дві прямі можуть перетинатися лише в одній точці. Тому зроблене припущення про існування спільної точки C прямих a і b неправильне. А це означає, що прямі a і b — паралельні. Доведення завершено.

Задача.

Довести, що в рівнобедреному трикутнику ABC з бічними сторонами AB і AC бісектриса зовнішнього кута при вершині A паралельна основі BC.

Розв'язання. Нехай AM — бісектриса внутрішнього кута при вершині A, AN — бісектриса зовнішнього кута CAK при цій вершині (рис. 7.4). Тоді:

$$\angle MAN = \angle MAC + \angle CAN = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle CAK =$$

$$= \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle CAK) = \frac{1}{2}\angle BAK = 90^\circ. \text{ Отже, } AN \perp AM.$$

Крім цього, бісектриса AM у рівнобедреному трикутнику ABC є й висотою, тобто $BC \perp AM$.

Оскільки, таким чином, прямі AN і BC перпендикулярні до однієї прямої AM, то вони паралельні, що й треба було довести.

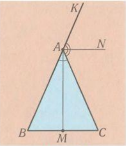


Рис. 7.4

7.2. Про доведення методом «від супротивного»

При доведенні ознаки паралельності прямих знову був застосований особливий вид міркувань, який називають доведенням «від супротивного». Цей метод надзвичайно поширений у математиці. Полягає він у тому, що спочатку робиться припущення, протилежне до того, яке потрібно довести, а потім шляхом міркувань з цього виводиться такий наслідок, який суперечить або самому зробленому припущенню, або тому, що вже було встановлено раніше. Через цю суперечність припущення відкидається як неправильне і цим встановлюється істинність твердження, яке потрібно було довести.

Усе, що можна довести, не потрібно приймати в науці без доведення.
Ріхард Дедекінд

Поглянемо ще раз, як це було втілено при доведенні ознаки паралельності двох прямих. Потрібно було довести, що дві прямі a і b площини, які перпендикулярні до третьої прямої c, паралельні. Спочатку ми припустили, що прямі a і b перетинаються. Потім вивели звідси, що вони мусять мати ще одну точку перетину. А оскільки цей висновок суперечить положенню про можливість перетину двох прямих лише в одній точці, то звідси зроблено висновок, що припущення неправомірне. Отже, правильним є те, що прямі a і b паралельні, що й треба було довести.

7.3. Кути, що утворюються при перетині двох і трьох прямих

У п. 7.1 обґрунтовано паралельність двох прямих, які утворюють прямі кути з деякою третьою прямою площини. Цю ознаку можна узагальнити. Виявляється, що дві прямі, які лежать в одній площині, будуть паралельними і тоді, коли вони утворюють з третьою прямою будь-які інші рівні між собою кути, розміщені відповідним чином. Для уточнення, яким саме чином повинні розміщуватися ці кути, попередньо введемо окремі назви для кутів, які утворюються на площині при перетині двох та трьох прямих, а також відзначимо деякі властивості цих кутів.

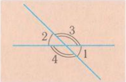


Рис. 7.5

При перетині двох прямих утворюється дві пари кутів із взаємно протилежними сторонами. На рис. 7.5 — це кути 1 і 2 та 3 і 4. Ви вже знаєте, що такі кути називаються *вертикальними*. Вертикальні кути рівні між собою.

Інші пари кутів (відмінні від вертикальних), які теж утворюються при перетині двох прямих, мають ту особливість, що в них одна сторона спільна, а дві інші є продовженнями одна одної. Такими на рис. 7.5 є кути 1 і 3, 2 і 3, 2 і 4 та 4 і 1. Ви вже знаєте, що такі кути називаються *суміжними* і що сума будь-яких двох суміжних кутів дорівнює 180°.

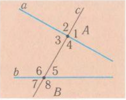


Рис. 7.6

При перетині двох прямих a і b якою-небудь третьою (*січною*) прямою c, яка не проходить через точку перетину прямих a і b, утворюється 8 кутів з вершинами в точках перетину A і B (рис. 7.6).

Кути 1 і 5 лежать з одного боку від січної c, а також з одного боку від однієї з прямих a чи b, в даному випадку — з одного боку від прямої b. Такі кути називаються *відповідними* для даних прямих a і b та січної c.

Так само відповідними є ще три пари кутів: 4 і 8, 2 і 6 та 3 і 7.

Кути 3 і 5 мають ту особливість, що одна пара їхніх сторін має спільний відрізок AB, а інші сторони лежать з різних боків від січної c. Ці кути називаються *внутрішніми різносторонніми*. Так само внутрішніми різносторонніми є ще одна пара кутів — 4 і 6.

Кути 4 і 5 розміщені так, що одна пара їхніх сторін має спільний відрізок AB, а інші сторони лежать з одного боку від січної c. Такі кути називаються *внутрішніми односторонніми*. Внутрішніми односторонніми є й кути 3 і 6.

Інколи ведуть мову про *зовнішні різносторонні* (1 і 7 та 2 і 8) та *зовнішні односторонні* кути (1 і 8 та 2 і 7).

— А мене як звати? — запитало цуценя.

— А хіба ти сам не пам'ятаєш, як тебе звати? — здивувалося кошеня.

— Подробиці я пам'ятаю, — задумалося цуценя. — А ось найголовніше — як мене звати я забуло.

— Знаєш що, — запропонувало кошеня, — нехай тебе хто-небудь покличе, і ти одразу згадаєш, як тебе звати.

— А як я дізнаюся, що мене так звати? — засумнівалося цуценя.

— Ти здогадаєшся! — пообіцяло йому кошеня.

Григорій Остер, «Кошеня, що звалось Гав»

7.4. Узагальнені ознаки паралельності прямих

Теорема
(перша ознака паралельності двох прямих).

Якщо при перетині двох прямих площини третьою прямою (січною) внутрішні різносторонні кути рівні, то дані прямі паралельні.

Доведення. Довести цю теорему можна способом, дуже схожим до застосованого вище (п. 7.1) у випадку, коли внутрішні різносторонні кути є прямими. Як і тоді, тепер теж ми застосуємо суміщення двох півплощин, на які площину розбиває січна пряма. Тільки зараз це суміщення буде дещо складніше виконати.

Справжній учень вміє виводити відоме з невідомого і цим наближається до учителя.

Йоганн Вольфганг Гете

Отже, нехай при перетині двох прямих a і b площини третьою прямою c утворюються рівні внутрішні різносторонні кути 1 і 2 (рис. 7.7). Доведемо, що тоді прямі a і b паралельні.

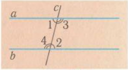


Рис. 7.7

Припустимо протилежне. Нехай прямі a і b перетинаються в деякій точці C. Позначимо точки перетину прямої c з прямими a і b відповідно буквами A і B. Уявімо собі, що площину розрізано вздовж прямої c і ту її частину, яка містить точку C, спочатку відокремлено від іншої (рис. 7.8), а потім суміщено з нею так, що точка B сумістилася з точкою A, а точка A — з точкою B (рис. 7.9). (В уяві це суміщення можна здійснити простим поворотом однієї з півплощин на кут 180° відносно середини відрізка AB). Оскільки кут 2 рівний куту 1, то при цьому вони сумістяться один з одним. Отже, та частина прямої b, яка містила точку C, сумiститься з тією частиною прямої a, яка лежить в іншій півплощині.

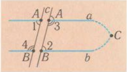


Рис. 7.8

Кут 3 рівний куту 4, оскільки ці кути є суміжними з рівними кутами 1 і 2. Тому при вказаному суміщенні півплощин вони теж сумістяться. Отже, та частина прямої a, яка містила точку C, сумiститься з тією частиною прямої b, яка лежить в іншій півплощині. Таким чином, точка C теж сумiститься з деякою точкою C' в іншій півплощині. Виходить, що прямі a і b мають дві точки перетину C і C' — одну в одній півплощині з границею c, а іншу — в іншій півплощині. Оскільки цього не може бути, то зроблене припущення про існування точки C неправомірне. Отже, прямі a і b — паралельні, що й треба було довести.

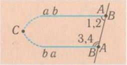


Рис. 7.9

Існують інші доведення першої ознаки паралельності прямих. Одне з них зводиться до того, аби показати, що для прямих a і b, паралельність яких доводиться, існує така пряма MN площини, яка до кожної з них перпендикулярна (рис. 7.10). Тоді паралельність прямих a і b випливатиме з доведеної вже часткової ознаки паралельності (див. п. 7.1).

Нехай Q — середина відрізка AB. Опустимо з точки Q перпендикуляри QM та QN відповідно на a і b. Для реалізації наміченої стратегії доведемо, що точки Q,

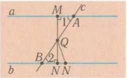


Рис. 7.10

M і N лежать на одній прямій. Розглянемо прямокутні трикутники QMA та QNB. У них рівними є кути 1 і 2, а також гіпотенузи QA та QB. Повернемо в уяві трикутник QMA на 180° відносно точки Q. Тоді відрізок QA суміститься з рівним йому відрізком QB, а кут 1 — з рівним йому кутом 2. Чи може при цьому точка M не суміститися з точкою N, а зайняти якесь інше положення N'? Якби таке трапилося, то з точки Q на пряму b було б опущено два перпендикуляри — QN і QN', адже кут $QN'B$ теж був би прямим, оскільки він одержується у результаті повороту прямого кута QMA. Але це неможливо. Отже, точки N і N' збігаються. Виходить, що кут BQN одержується з кута AQM поворотом на 180°. Отже, ці кути вертикальні. А це означає, що точки Q, M і N лежать на одній прямій. Оскільки, таким чином, пряма MN перпендикулярна до обох прямих a і b, то ці прямі паралельні, що й треба було довести.

Та чи не найпростішим є доведення першої ознаки паралельності прямих на основі властивості зовнішнього кута трикутника. Якби за умови рівності внутрішніх різносторонніх кутів 1 і 2 (див. рис. 7.8) прямі a і b не були паралельними, тобто перетиналися в деякій точці C, то зовнішній кут 1 при вершині A утвореного трикутника ABC дорівнював би внутрішньому куту 2 при вершині B. А оскільки такого бути не може, бо зовнішній кут трикутника завжди більший від внутрішнього, не суміжного з ним, то припущення про перетин прямих a і b слід відкинути. Отже, ці прямі паралельні, що й треба було довести.

Нелегка доля — писати в наші дні математичні книги... Якщо не дотримуватися належної строгості у формулюванні теорем, у поясненнях, доведеннях і наслідках, то книгу не можна вважати математичною.

Йоганн Кеплер

Теорема
(друга ознака паралельності прямих).

Якщо при перетині двох прямих площини січною відповідні кути рівні, то дані прямі паралельні.

Доведення. Нехай при перетині прямих a і b січною c відповідні кути 1 і 2 рівні між собою (рис. 7.11). Розглянемо вертикальний до кута 1 кут 3. Він буде внутрішнім різностороннім з кутом 2. Оскільки $\angle 3 =$

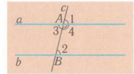


Рис. 7.11

$= \angle 1$, а за умовою $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 3 = \angle 2$. Оскільки, таким чином, внутрішні різносторонні кути рівні, то за першою ознакою прямі a і b — паралельні, що й треба було довести.

Теорема
(третя ознака паралельності прямих).
Якщо при перетині двох прямих площини січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то дані прямі паралельні.

Доведення. Нехай при перетині прямих a і b січною c (див. рис. 7.11) сума утворених внутрішніх односторонніх кутів, наприклад $\angle 4 + \angle 2$, дорівнює 180°. Оскільки сума суміжних кутів 4 і 3 теж дорівнює 180°, то звідси одержуємо, що внутрішні різносторонні кути 2 і 3 рівні між собою. Тому за першою ознакою прямі a і b — паралельні. Теорему доведено.

Задача.
AD — бісектриса трикутника ABC. На промені AB побудовано таку точку E, що відрізки AE і DE рівні між собою (рис. 7.12). Довести, що прямі DE та AC паралельні.

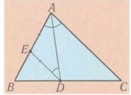


Рис. 7.12

Розв'язання. Оскільки трикутник EDA — рівнобедрений, то $\angle EDA = \angle EAD$. З іншого боку, оскільки AD — бісектриса кута A, то $\angle EAD = \angle DAC$. Отже, $\angle EDA = \angle DAC$. А оскільки ці кути є внутрішніми різносторонніми для прямих DE і AC та січної AD, то за відповідною ознакою дані прямі паралельні. Твердження задачі доведено.

7.5. Побудова паралельних прямих за допомогою креслярських інструментів

На основі обґрунтованих ознак паралельності прямих існує декілька найпоширеніших способів для практичної побудови паралельних прямих за допомогою різних креслярських інструментів.

Спосіб 1 *(за допомогою лінійки і косинця або лінійки і малки).*

Нехай задано пряму a і точку A, яка їй не належить, а потрібно провести через точку A пряму, паралельну прямій a.

Одну зі сторін косинця прикладаємо до даної прямої a, а до іншої сторони косинця прикладаємо довгу лінійку (рис. 7.13). Потім, утримуючи лінійку у цьому положенні, пересуваємо вздовж неї косинець доти, поки його сторона, яка прилягала до прямої a, не пройде через задану точку A. Ця сторона й визначить шукану пряму b.

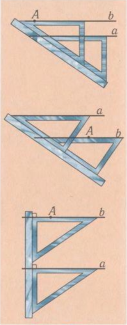


Рис. 7.13

Це випливає з того, що прямі a і b утворюють з лінійкою рівні відповідні кути, які дорівнюють одному з кутів косинця. Залежно від того, яку сторону косинця прикладаємо до лінійки, а під яку проводимо шукану пряму, маємо три способи виконання описаних побудов.

Застосування малки замість косинця нічим суттєвим не відрізняється. Малка найчастіше застосовується в столярній справі. Вона складається з двох планок, кінці яких скріплені на шарнірі за допомогою гвинта. Планки можна фіксувати під будь-яким кутом одна до одної (рис. 7.14). Тому якщо одну зі сторін малки переміщувати вздовж певної прямої (лінійки), то інша її сторона утворюватиме з цією прямою рівні відповідні кути, отже, визначатиме паралельні між собою прямі, наприклад, a і b.

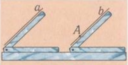


Рис. 7.14

Спосіб 2 *(за допомогою двох однакових косинців).*

Один з косинців фіксуємо так, щоб якась його сторона прилягала до даної прямої a, а інший рухаємо так, щоб відповідна його сторона ковзала вздовж одноіменної сторони нерухомого косинця, як показано на рис. 7.15. Тоді та сторона рухомого косинця, яка відповідає прикладеній до прямої a сторони нерухомого косинця, визначить прямі, паралельні прямій a.

Це випливає з того, що пряма, по якій косинці прилягають один до одного, перетинає побудовану пряму b і пряму a під рівними внутрішніми різносторонніми кутами.

Спосіб 3 (*за допомогою рейсшини*).

Обидва попередні способи мають однаковий суттєвий недолік — необхідність одночасно утримувати два інструменти, наприклад, лінійку та косинець. Це не тільки збільшує час на виконання креслень, але й зменшує їхню точність, оскільки кожне використання якого б то не було інструмента додає похибок до результату побудов. Тому креслярі надають перевагу рейсшині.

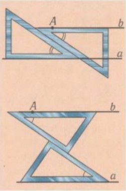


Рис. 7.15

Рейсшиною (від німецьких слів reiβen — креслити і Schiene — рейка) називається довга креслярська лінійка, один з кінців якої кріпиться на шарнірі до короткої рейки, що може ковзати вздовж одного з країв креслярської дошки (рис. 7.16). Взаємне положення довгої лінійки і короткої рейки можна фіксувати за допомогою гвинта. Тоді при різних положеннях рейки на краю креслярської дошки довга лінійка визначатиме паралельні прямі. Це випливає з того, що відповідні кути, які вона утворюватиме з краєм дошки, рівні між собою.

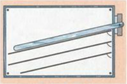


Рис. 7.16

Перевір себе

1. Які міркування наштовхують на введення поняття про паралельні прямі?
2. Сформулюйте означення паралельних прямих та наведіть приклади проявів паралельності прямих у навколишньому світі.
3. Як довести, що дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні між собою?
4. У чому полягає метод доведення «від супротивного»? Наведіть відомі вам приклади його застосування.
5. Назвіть усі пари кутів, що утворюються при перетині двох прямих січною. Чи є серед них пари рівних кутів?
6. Сформулюйте ознаки паралельності прямих. Як вони доводяться?
7. Опишіть усі відомі вам способи побудови паралельних прямих за допомогою креслярських інструментів. На яких геометричних властивостях вони ґрунтуються?

Задачі і вправи

1°. Доведіть, що протилежні сторони квадрата паралельні.

2°. Через вершину A рівнобедреного трикутника ABC з основою BC проведено пряму, перпендикулярну до медіани AM. Доведіть, що ця пряма паралельна основі BC.

3°. У трикутниках ABC та A_1BC_1 (рис. 7.17) кути C і C_1 прямі. Доведіть, що $AC \parallel A_1C_1$.

4°. AB і CD — діаметри кола. Доведіть, що $AC \parallel BD$, а $CB \parallel AD$.

5°. Задано пряму a і точку A поза нею. За допомогою двох косинців через точку A провели пряму b, як показано на рис. 7.18. Доведіть, що пряма b паралельна прямій a.

6°. На рис. 7.19 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що прямі a і b паралельні.

7°. В кожному з випадків, відображених на рис. 7.20, обґрунтуйте паралельність прямих a і b та c і d.

8. Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ (рис. 7.21). Доведіть, що $a \parallel b$.

9. Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 5 = 90°$ (рис. 7.22). Доведіть, що $a \parallel b$.

10. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, O — середина AB, N — середина BC. Доведіть, що $ON \parallel AC$.

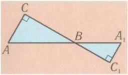


Рис. 7.17

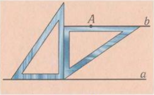


Рис. 7.18

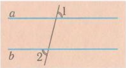


Рис. 7.19

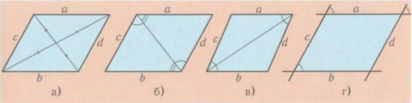


Рис. 7.20

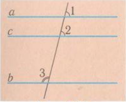


Рис. 7.21

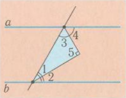


Рис. 7.22

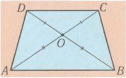


Рис. 7.23

11. У квадраті $ABCD$ M, N — середини відповідно сторін BC і CD. Доведіть, що $MN \parallel BD$.

12*. У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O і при цьому $AO = BO$, $OC = OD$ (рис. 7.23). Доведіть, що $AB \parallel DC$.

§8 Властивості паралельних прямих

8.1. Аксіома про паралельні прямі

Як з'ясувалося у попередньому параграфі, існують різні способи для побудови паралельних прямих. У зв'язку з цим виникає природне запитання: в якій мірі результат побудови паралельної прямої, що проходить через дану точку, залежить від обраного способу побудови? Величезний практичний досвід людей на протязі тисячоліть переконує в тому, що такої залежності немає. Відповідне твердження в геометрії приймають без доведення як безсумнівний і незаперечний факт і тому називають *аксіомою про паралельні прямі*.

Найпершою запорукою непогрішності математичного мислення вважається те, що вихідним пунктом міркувань і дій у цій науці слугують аксіоми.

Іван Сєченов

Давньогрецьке слово «аксіома» мало значення «повага», «авторитет», «гідність». У математиці його зміст дуже близький до цих первісних значень. Аксіомами називають окремі найважливіші математичні твердження, які внаслідок певного авторитету, наприклад, через узгодженість з практичним досвідом, простоту формулювання тощо приймаються без доведення. Вперше як науковий термін слово «аксіома» почав застосовувати Арістотель.

Аксіома про паралельні прямі.

Через точку поза прямою у площині можна провести єдину пряму, паралельну даній.

На рис. 8.1 пряма b — єдина, що проходить через точку A і паралельна прямій a.

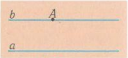


Рис. 8.1

8.2. Найпростіші наслідки з аксіоми про паралельні прямі

Безпосередніми наслідками з аксіоми про паралельні прямі є наступні дві властивості паралельних прямих.

Першу з них часто використовують як ще одну ознаку паралельності. Її називають також *теоремою про транзитивність відношення паралельності прямих*, — від латинського слова transitus, тобто «перехід». У цій теоремі йдеться про «перехід» властивості паралельності з двох пар прямих на третю пару прямих.

Теорема
(про транзитивність відношення паралельності прямих).

Дві прямі, які лежать в одній площині і паралельні третій прямій цієї площини, паралельні між собою.

Доведення. Нехай у площині маємо три прямі a, b, c, причому $a \parallel c$ і $b \parallel c$ (рис. 8.2). Потрібно довести, що тоді $a \parallel b$.

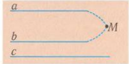


Рис. 8.2

Припустимо, що прямі a і b не паралельні, тобто перетинаються в деякій точці M. Тоді через точку M проходитиме дві прямі a і b, кожна з яких паралельна прямій c. Але це суперечить аксіомі про паралельні прямі. Тому зроблене припущення неправомірне. Отже, $a \parallel b$, що й треба було довести.

Теорема
(про перетин паралельних прямих січною).

Якщо січна пряма перетинає одну з двох паралельних прямих і лежить з ними в одній площині, то вона перетинає й іншу пряму.

Доведення. Нехай прямі a і b — паралельні, а пряма m лежить з ними в одній площині і перетинає пряму a в деякій точці M (рис. 8.3). Якби пряма m не перетинала прямої b, то це означало б, що вона паралельна цій прямій. Тоді у площині через точку M проходило б дві прямі a і m, які паралельні одній прямій b. А це суперечило б аксіомі про паралельні

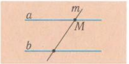


Рис. 8.3

прямі. Тому таке неможливо. Отже, пряма m перетинає пряму b, що й треба було довести.

8.3. Про кути, утворені паралельними прямими із січною

Відповідно до першої ознаки паралельності, якщо дві прямі a і b утворюють з деякою січною c рівні внутрішні різносторонні кути, то ці прямі a і b паралельні (рис. 8.4). У зв'язку з цим виникає питання: а якщо для даних паралельних прямих a і b провести іншу січну m, то чи будуть утворені при цьому внутрішні різносторонні кути теж рівними між собою?

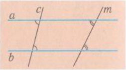


Рис. 8.4

Аналогічні запитання можна поставити і стосовно відповідних та внутрішніх односторонніх кутів, що фігурують в інших ознаках паралельності.

На всі ці запитання відповідь ствердна, але на відміну від ознак паралельності, доведення цих властивостей неможливо провести без посилання на аксіому про паралельні прямі.

Отже, справджується така теорема:

Теорема
(про кути, утворені паралельними прямими із січною).

Якщо дві паралельні прямі перетнути січною, то утворені при цьому внутрішні різносторонні а також відповідні кути будуть рівними між собою, а сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнюватиме 180°.

Доведення. Нехай a і b — задані паралельні прямі, m — довільна січна, M — точка перетину січної m з прямою a (рис. 8.5). Доведемо спочатку, що рівними є внутрішні різносторонні кути 1 і 2.

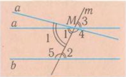


Рис. 8.5

Припустимо, що ці кути не рівні. Проведемо тоді через точку M пряму a' так, щоб кут $1'$, який разом з кутом 2 утворює пару внутрішніх різносторонніх кутів, дорівнював куту 2. Тоді за ознакою паралельності прямі a, a' будуть паралельними. Виходить, що через точку M проходитиме дві прямі a і a', паралельні прямій b. Оскільки це суперечить аксіомі про паралельні прямі, то зроблене припущення неправомірне. Отже, кути 1 і 2 рівні між собою. Внутрішні різносторонні кути 4 і 5 є суміжними з кутами 1 і 2. Тому вони теж рівні між собою. Перше твердження теореми доведено.

Доведемо, далі, для прикладу, що рівними є відповідні кути 2 і 3. Оскільки кут 3 рівний вертикальному з ним куту 1, а кут 1, як щойно доведено, дорівнює куту 2, то кут 3 дорівнює куту 2, що й треба було довести.

Сума суміжних кутів 1 і 4 дорівнює 180°, а кут 1 дорівнює куту 2. Тому сума внутрішніх односторонніх кутів 4 і 2 теж дорівнює 180°. Аналогічно можна довести, що й $\angle 1 + \angle 5 = 180°$. Теорему доведено повністю.

Наслідок 1.

Якщо у площині якась пряма перпендикулярна до однієї з двох заданих паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до іншої прямої.

Справді, нехай прямі a і b паралельні, а пряма c перпендикулярна до прямої a (рис. 8.6). Пряма c перетинає пряму a, тому вона перетинає й паралельну їй пряму b. При перетині паралельних прямих утворюються рівні внутрішні різносторонні кути, тобто $\angle 1 = \angle 2$. А оскільки $\angle 1 = 90°$, то й $\angle 2 = 90°$. Отже, $c \perp b$, що й треба було довести.

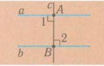


Рис. 8.6

Наслідок 2.

Якщо у площині до однієї прямої провести дві січні прямі — одну перпендикулярну, а іншу не перпендикулярну, то ці січні неодмінно перетнуться.

Справді, нехай пряма a перпендикулярна до прямої m, а пряма b перетинає m і не перпендикулярна до неї (рис. 8.7). Якби прямі a і b не перетиналися, тобто були паралельними, то за наслідком 1, пряма b теж була б перпендикулярною до m. Оскільки це не так, то припущення про паралельність прямих a і b неправомірне. Отже, ці прямі перетинаються, що й треба було довести.

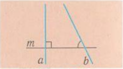


Рис. 8.7

Як наслідок з теореми про кути, утворені паралельними прямими з січною, можна вивести і теорему про суму кутів трикутника. Таким чином, цю теорему можна довести без посилання на ознаки прямокутника. Але при цьому фактично використовуватиметься аксіома про паралельні прямі, оскільки ця аксіома застосовується при доведенні властивостей паралельних прямих.

Нехай маємо довільний трикутник ABC. Проведемо через вершину A пряму a, паралельну протилежній стороні BC (рис. 8.8). Тоді при вершині A, окрім внутрішнього кута A трикутника, утворяться ще кути 1 і 2, рівні відповідно кутам B і C трикутника (як внутрішні різносторонні при паралельних a і BC та січних AB і AC). Виходить, що сума всіх кутів трикутника ABC дорівнює сумі $\angle 1 + \angle A + \angle 2$, тобто розгорнутому куту, або 180°.

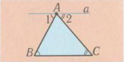


Рис. 8.8

Ту саму ідею можна реалізувати дещо інакше, — продовживши сторону BC трикутника та провівши через вершину C промінь CM, паралельний стороні AB, як показано на рис. 8.9. Тоді одержимо, що $\angle 1 = \angle A$, а $\angle 2 = \angle B$. Отже, $\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle C = 180°$.

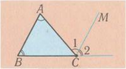


Рис. 8.9

Задача.

Довести, що бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січній взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Нехай прямі a і b — паралельні, AC і BC — бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів MAB і NBA, утворених з даними прямими січною c (рис. 8.10). За властивістю паралельних прямих:

$$\angle MAB + \angle NBA = 180°.$$

З іншого боку, з означення бісектриси кута випливає, що

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle MAB, \text{ а } \angle ABC = \frac{1}{2}\angle NBA.$$

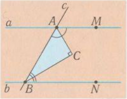


Рис. 8.10

Нарешті, оскільки сума кутів трикутника дорівнює $180°$, то $\angle C = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 180° - \frac{1}{2}(\angle MAB + \angle NBA) = 180° - \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Отже, $AC \perp BC$. Твердження задачі доведено.

8.4. Прямі та обернені теореми

У формулюванні кожної теореми чітко виділяються дві частини. У першій частині йдеться про те, що дано, тобто які фігури і які відношення між ними розглядаються. У другій частині вказується на те, що потрібно довести, тобто які властивості виводяться з того, що дано. Першу частину теореми називають її *умовою*, а другу — *наслідком* або *висновком*.

Відповідно до цього кожну теорему можна записати в такій символічній формі: «якщо A, то B» або «з A випливає B». Наприклад, теорему про вертикальні кути можна записати так: «якщо кути вертикальні, то вони рівні між собою» або «з того, що кути вертикальні, випливає, що вони рівні між собою».

Оскільки у математиці кожен факт вивчається максимально всебічно, то після доведення кожної теореми, що має форму «з A випливає B», ставиться питання і про те, чи справджується висновок B лише за умови A, чи він може справджуватись і за інших умов. Якщо висновок B справджується лише за умови A, то це означає, що з B випливає A. Отже, щоб це показати, потрібно довести *обернену* теорему, в якій умовою є висновок B, а висновком — умова A *прямої* теореми

Хоча відчуття необхідні для усього нашого справжнього знання, проте їх недостатньо для того, аби подати нам знання повністю, оскільки відчуття надають завжди лише приклади, тобто часткові або індивідуальні істини. Але якими б численними не були приклади, які підтверджують певну загальну істину, їх недостатньо, аби встановити всеохоплюючу необхідність тієї самої істини; адже з того, що відбулося щось, зовсім не випливає, що воно завжди відбуватиметься у такий самий спосіб.

Готфрід Вільгельм Лейбніц, «Нові дослідження про людський розум» (тобто початкової). Відповідно до цього, обернену теорему можна записати в такій символічній формі: «якщо B, то A», або «з B випливає A».

Наприклад, оберненою до першої ознаки паралельності прямих є така властивість паралельних: «Якщо прямі паралельні, то при перетині їх січною утворені внутрішні різносторонні кути рівні між собою».

Найчастіше у шкільному курсі геометрії істинними є одночасно обидві теореми — і пряма, й обернена. Але є й винятки. Наприклад, оберненим до теореми про вертикальні кути є таке твердження: «Якщо кути рівні, то вони вертикальні». Звісно, це твердження хибне, оскільки рівні кути навіть не обов'язково мають спільну вершину (рис. 8.11). Цей приклад засвідчує, що обернені теореми теж потребують доведення, оскільки з того, що справджується пряма теорема, ще не випливає істинність оберненої.

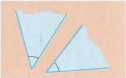


Рис. 8.11

Доведена у попередньому пункті теорема про кути, утворені паралельними прямими із січною, є оберненою до відповідної ознаки паралельності прямих. Це ще один яскравий приклад «незалежності» прямих і обернених теорем, адже при доведенні цієї оберненої теореми з'явилася навіть потреба залучити додаткову аксіому про паралельні прямі, якої не потрібно було залучати при доведенні прямої теореми.

8.5. Паралельність прямих у просторі

У просторі, на відміну від площини, дві прямі, які не перетинаються, можуть мати два види взаємного розміщення: вони можуть лежати в одній площині (рис. 8.12, а), а можуть і не лежати в одній площині (рис. 8.12, б). Прямі, які лежать в одній площині і не перетинаються, теж називаються *паралельними*. Прямі, які не лежать в одній площині і вже тому не можуть перетинатися, називаються *мимобіжними*.

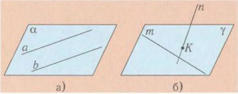


Рис. 8.12

На рис. 8.12, а) зображено дві паралельні прямі a і b, а на рис. 8.12, б) — дві мимобіжні прямі m і n. Прямі a і b лежать в одній площині α. Прямі m і n не лежать в одній площині і тому кожна площина γ, яка містить пряму m і якусь точку K прямої n, не містить жодної іншої точки прямої n.

Для паралельних прямих у просторі виконуються дві фундаментальні властивості таких прямих на площині. А саме:

1) ***через будь-яку точку, взяту поза прямою, у просторі теж проходить єдина пряма, паралельна даній***;

2) ***дві прямі, паралельні третій, у просторі теж паралельні між собою***.

Усе повинно бути доведено, і при доведенні не можна використовувати нічого, крім аксіом та раніше доведених теорем.

Блез Паскаль

Перша властивість у геометрії на площині береться за аксіому. Для простору її можна довести, тобто тут вона є теоремою.

Доведення властивості 1. Нехай у просторі маємо пряму a і точку A поза нею (рис. 8.13). Тоді існує єдина площина α, яка містить ці точку і пряму, а в цій площині α, за аксіомою про паралельні прямі, через точку A проходить єдина пряма b, паралельна прямій a. Отже, пряма b — єдина, що проходить через точку A, лежить з прямою a в одній площині і в цій площині не перетинається з нею, тобто паралельна прямій a. Властивість доведено.

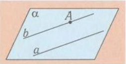


Рис. 8.13

Другу властивість довести складніше.

Доведення властивості 2. Нехай кожна з двох прямих b і c паралельна якійсь прямій a (рис. 8.14). Потрібно довести, що тоді прямі b і c паралельні між собою.

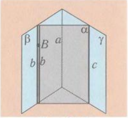


Рис. 8.14

Випадок, коли всі три прямі a, b, c лежать в одній площині, нами вже розглянуто (див. теорему про транзитивність відношення паралельності прямих у п. 8.2). Тому припустимо, що дані прямі a, b, c не лежать в одній площині. Площину, яка містить паралельні прямі a і b, позначимо через β, а площину, яка містить паралельні прямі a і c, — через γ.

Візьмемо на прямій b яку-небудь точку B і проведемо через неї та пряму c площину α. Нехай b' — пряма перетину площини α з площиною β; точка B належить прямій b'.

Пряма b' не може перетинатися з прямою a, бо якби це трапилося, то точка перетину була б спільною для площин β і γ, отже, вона належала б і прямій c, і тоді прямі a і c не були б паралельними. Отже, пряма b' паралельна прямій a. Але через точку B проходить єдина пряма, паралельна прямій a, і нею є пряма b. Тому пряма b' збігається з прямою b.

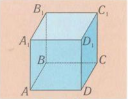


Рис. 8.15

Виходить, що пряма b лежить з прямою c в одній площині (у площині α). Якби у площині α ці прямі перетиналися, то точка перетину належала б і площині β, і площині γ, а отже, і прямій a. Але тоді пряма b не була б паралельною прямій a. Тому таке припущення слід відкинути. Отже, прямі b і c паралельні, що й треба було довести.

Наведемо промовистий приклад застосування доведеної щойно другої властивості паралельних прямих у просторі. Розглянемо прямокутний паралелепіпед (рис. 8.15). Відомо, що кожна його грань — прямокутник. Отже, будь-які два бічних ребра, що належать одній грані, наприклад AA_1 і BB_1, —

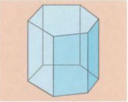


Рис. 8.16

паралельні. Але оскільки ребро CC_1 теж паралельне ребру BB_1, то паралельними є й ребра AA_1 і CC_1, адже кожне з них паралельне ребру BB_1. Таким чином, у паралелепіпеді паралельні не тільки сусідні бічні ребра, а й протилежні.

Такий самий висновок можна зробити і про бічні ребра будь-якої призми (рис. 8.16).

8.6. Евклідове формулювання аксіоми про паралельні прямі

Може здатися неймовірним той факт, що в навчальній літературі аксіома про паралельні прямі у загальноприйнятому тепер формулюванні, яке наведене у п. 8.1, з'явилася порівняно недавно. Вважається, що вперше це відбулося у 1795 р. у пристосованому для школи виданні «Начал» Евкліда, підготовленому шотландським математиком Джоном Плейфером (1748–1819). Тому цю аксіому інколи називають ще *аксіомою Плейфера*. А до того замість аксіоми Плейфера застосовувалося формулювання Евкліда, яке було одним із його постулатів.

В Евклідових «Началах» твердження, які приймаються без доведення, поділялися на два види. Одні з них називалися аксіомами, інші — постулатами. Аксіоми здебільшого стосувалися кількісних закономірностей. Наприклад, до аксіом Евклід відносив такі твердження: «Рівні одному і тому ж, рівні між собою»; «Якщо до рівних додати рівні, то одержимо рівні», «Ціле більше від своєї частини» тощо. На противагу цьому, до постулатів відносилися власне геометричні твердження. В дослівному перекладі з грецької слово «постулат» означає «вимога». Отже, йшлося про вимогу до читача чи слухача прийняти відповідні твердження без доведення.

Евклід сформулював п'ять таких постулатів-вимог. Першими чотирма з них були такі:

I. *Будь-які дві точки можна з'єднати відрізком;*

II. *Будь-який відрізок можна як завгодно далеко продовжити за кожен із його кінців;*

III. *З будь-якого центра будь-яким радіусом можна описати коло;*

Джон Плейфер

Я волів би, щоб намагалися довести навіть аксіоми Евкліда, як це пробували робити деякі давні автори.

Ґотфрід Вільгельм Лейбніц

IV. *Будь-які два прямих кути можна сумістити один з одним (тобто такі кути рівні).*

А п'ятим був постулат:

V. *Якщо при перетині двох прямих січною утворюються внутрішні односторонні кути, які в сумі не дорівнюють двом прямим кутам, то дані прямі перетинаються.*

Можна довести, що якщо виконується V постулат Евкліда, то виконується і аксіома про паралельні прямі.

Справді, нехай маємо довільну пряму a і точку A поза нею (рис. 8.17). Проведемо через A довільну січну c, а потім — пряму b так, щоб сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 2 дорівнювала 180°. Тоді за ознакою паралельності $b \parallel a$. Якщо після цього проведемо через A довільну іншу пряму b', то сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 2′ уже не буде дорівнювати 180°, а отже, за V постулатом Евкліда, пряма b' перетне пряму a. Отже, пряма b буде єдиною, яка проходить через точку A і паралельна прямій a, тобто справджуватиметься аксіома про паралельні прямі.

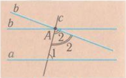


Рис. 8.17

Навпаки, з аксіоми Плейфера про паралельні прямі випливає твердження V постулату Евкліда. Справді, нехай маємо довільну пряму a і точку A поза нею, а пряма b' проходить через точку A і при цьому сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 2′ не дорівнює 180° (див. рис. 8.17). Проведемо через точку A таку пряму b, для якої сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 2 уже дорівнює 180°. Тоді відповідно до ознаки паралельності, прямі a і b — паралельні. Але за аксіомою Плейфера про паралельні b — єдина пряма, яка проходить через A і не перетинає прямої a. Тому пряма b' неодмінно перетне пряму a. Отже, й виходить, що якщо сума внутрішніх односторонніх кутів (1 і 2′) не дорівнює двом прямим кутам, то прямі (a і b') перетинаються, тобто справджується V постулат Евкліда, що й треба було довести.

Якщо два твердження мають таку властивість, що з першого з них випливає друге, а з другого — перше, то ці твердження називаються *рівносильними* або *еквівалентними*.

Ми вшановуємо Давню Грецію як колиску західної науки. Там уперше було створено диво розуму — логічну систему, теореми якої випливали одна з одної з такою точністю, що кожне з доведених у ній тверджень було абсолютно безсумнівним. Я маю на увазі геометрію Евкліда. Цей дивовижний тріумф мислення надав людському інтелектові впевненості в собі, необхідної для наступної діяльності.

Альберт Ейнштейн

Оскільки з V постулату Евкліда випливає аксіома Плейфера про паралельні, а з аксіоми Плейфера — V постулат Евкліда, то ці твердження рівносильні (еквівалентні).

Згодом з'ясуємо (див. п. 9.4), що еквівалентними є також перша та друга ознака прямокутника і що кожна із цих ознак еквівалентна акісомі про паралельні прямі.

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Евклід (бл. 365 – бл. 300 до н.е.)

Історія знає чимало прикладів, коли видатні твори цілковито затьмарювали славу своїх творців. Одним з найвидатніших таких творів є «Начала» давньогрецького математика Евкліда. Ця дивовижна книга нарівні зі священними письменами пройшла крізь усі випробування багатьох століть і не згубилася, не забулася і не знецінилася. Водночас про самого Евкліда достеменно відомо лише декілька фактів.

Евклід

Відомо, зокрема, що Евклід був родом з Афін і що там він ще юнаком навчався у самого Платона — одного з найславетніших античних філософів. Можливо, що саме Платон заронив у нього ідею про систематизацію всього накопиченого запасу геометричних знань та виведення їх послідовно з небагатьох основних істин. Пізніше ці істини учень Платона Арістотель назвав аксіомами.

Останню третину свого життя Евклід провів у Єгипетській Александрії. Тому його називали ще Евклідом Александрійським. Це місто було столицею царства династії Птолемеїв. Родоначальник династії Птолемей I Сотер заснував тут науковий центр — Мусейон (Будинок Муз), до якого на повне утримання за рахунок царської казни запросив найвидатніших учених з усіх відомих світів. Серед запрошених був і Евклід. Евклід започаткував тут математичну школу, гучна слава якої згодом поширилася на весь елліністичний світ. Можливо, що саме для слухачів цієї школи в першу чергу і призначалися Евклідові «Начала».

Твір Евкліда житиме ще довго після того, як усі підручники наших днів будуть замінені іншими і забуті. Це одна з найчудовіших пам'яток античності.

Томас Хізс

Як засвідчує александрійський математик Папп, який жив через шість століть після Евкліда, Евклід був людиною добросердечною і скромною, але водночас принциповою і дуже незалежною. Побутувала легенда, яка яскраво засвідчує це. Нібито якось сам цар Птолемей, тільки-но ознайомившись з «Началами», прикликав до себе Евкліда і запитався у нього: «Чи не має в геометрії більш коротшого шляху, ніж той, який визначений у його праці?» На це Евклід без жодного остраху відповів: «У геометрії немає царських доріг». Аби до кінця зрозуміти цю відповідь, потрібно взяти до уваги, що в давнину у Єгипті, а також і в деяких інших країнах справді існували окремі дороги, їздити якими мав право лише цар і його кур'єри. Отже, Евклід недвозначно натякнув володарю на те, що шлях в науку один: як для царів, так і для простолюду.

З Евклідом мене ознайомив приватний учитель, і я виразно пам'ятаю те глибоке задоволення, яке давали мені чіткі геометричні доведення.

Чарльз Дарвін

В іншій легенді розкривається ставлення античного ученого до мирських розкошів. Якось один з юнаків, опанувавши декілька перших теорем з «Начал», запитав у Евкліда: «А що я зароблю, якщо вивчу все це?». На що Евклід покликав раба і зневажливо звелів: «Дай йому три оболи (тобто три найдрібніші тогочасні грецькі монети), бідолаха хоче щось заробити зі свого навчання».

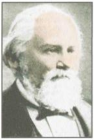

Евклід презентує Птолемею Сотеру свої «Начала» геометрії

Ось це й усе, що відомо про Евкліда. Один із найобізнаніших коментаторів його «Начал» Прокл Діодох, який жив аж у V ст. н.е., тобто через вісім століть після Евкліда, і який теж тривалий час провів в тій самій Александрії, зміцнюючи славу знаменитої школи, започаткованої Евклідом, вже не знав навіть, де й коли народився славетний учитель.

Неможливо переоцінити талант і звитягу автора «Начал». У нас час існують сотні і тисячі підручників, десятки тисяч журнальних публікацій, а учені-теоретики до дрібниць проаналізували обґрунтованість кожного математичного висновку. Але незважаючи на це, нові хороші навчальні книги з'являються нечасто. А що казати про епоху Евкліда, коли користуватися можна було лише декількома рукописами! Майже все потрібно було продумувати самому — аксіоматичну базу, послідовність тем, логічну канву кожної з них, доведення кожної теореми і обґрунтування кожної побудови. З усім цим Евклід впорався настільки успішно, що його праця служила основним підручником з геометрії понад 2 000 років. Вона й досі залишається в арсеналі освітніх засобів і є класичним взірцем для викладу наукової теорії на аксіоматичній основі. І в даному підручнику є чимало фрагментів та ідей з цього величного твору Евкліда, зокрема — доведення теореми Піфагора та перетворення прямокутника у рівновеликий йому квадрат.

«Начала» Евкліда в Україні

«Начала» Евкліда друкувалися величезну кількість разів, у різні часи, у різних країнах і різними мовами. Проте лише окремі видання були повними. Найчастіше ж вони пристосовувалися до викладання на елементарному рівні, а тому суттєво скорочувалися, інколи доповнювалися коментарями та додатками, не включеними Евклідом або розробленими уже після нього. Однією з найкращих таких переробок Евклідових «Начал» свого часу вважалися «Начала усіх математичних наук» німецького математика та філософа, учня Лейбніца і вчителя Ломоносова Кристіана Вольфа (1679–1754). Ця книга була видана в 4-х томах у 1710 р. Для нас вона цікава тим, що саме це видання було свого часу взято за основу для укладання курсу математики Феофаном Прокоповичем (1681–1736) — відомим вітчизняним ученим та просвітителем, тодішнім ректором Києво-Могилянської академії. Цей курс Прокопович читав понад програму для вихованців академії. Здійснена ним у такий спосіб пропаганда математичних знань у стінах академії, стала тим фундаментом, на якому пізніше математичні науки зросли і на українських теренах.


М.Є. Ващенко-Захарченко

Титульна сторінка з перекладу Евклідових «Начал» М.Є. Ващенка-Захарченка

Однак пройшло ще майже два століття, перш ніж славетний твір Евкліда був нарешті видрукуваний в Україні. Підготовку цього фундаментального видання, яке містило понад 600 друкованих сторінок великого формату, разом з численними коментарями та додатками здійснив професор Київського університету св. Володимира Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко (1825–1912). Книга була видрукувана видавництвом університету у 1880 р. і мала значний вплив на вітчизняну науку й освіту. Вона й досі залишається одним з кращих досліджень та коментарів Евклідових «Начал», спрямованим на потреби викладання геометрії в загальноосвітній школі.

8.7. Аксіома Остроградського про паралельні прямі

Окрім славнозвісного Евкліда, в історії математичної освіти закарбовані імена й багатьох інших видатних учених. Серед них подибуємо ім'я славетного українського математика Михайла Васильовича Остроградського (1801–1862).

Михайло Остроградський народився на Полтавщині у давній козацькій родині. За легендою, рід Остроградських був одним з відгалужень родоводу знаменитих волинських державників і просвітителів князів Острозьких, звідси і їхнє прізвище — Остроградські.

У 1821р. Михайло Остроградський закінчив Харківський університет, а відтак протягом 5 років навчався в Парижі, де слухав лекції великих тогочасних французьких учених — Лапласа, Пуассона, Коші, Ампера, Фур'є та інших. Повернувшись із-за кордону, Остроградський упродовж усього життя активно пропагував і втілював традицію французьких учених поєднувати наукову роботу з практичним викладанням. Зокрема, він викладав в елітних тогочасних військових навчальних закладах і саме для них створив унікальний «Підручник з елементарної геометрії». Цей підручник на дуже тривалий час установив такий високий рівень викладання математики, який і досі вирізняє вітчизняну математичну освіту.

Михайло Остроградський

У своєму підручнику Остроградський замість аксіоми Плейфера про паралельні прямі уводить положення, яке, на його думку, значно виразніше характеризує геометричні особливості реального простору. Однією з ключових просторових характеристик, яка активно застосовується в найрізноманітніших науках, є напрямок. При цьому один і той самий напрямок визначається будь-якою з паралельних прямих. Цей факт Остроградський і фіксує у своїй аксіомі про паралельні:

У творах Остроградського нас приваблює загальність аналізу, основна думка, така ж широка, як простори його рідних полів.
Микола Жуковський

Аксіома Остроградського про паралельні прямі. ***Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.***

У п. 8.2 ця властивість виведена з аксіоми Плейфера про паралельні прямі. Неважко показати, що й, навпаки, з аксіоми Остроградського про паралельні прямі випливає аксіома Плейфера. Отже, ці аксіоми еквівалентні.

Справді, нехай у площині маємо точку A, розміщену поза прямою l (рис. 8.18). Тоді, як уже не раз доводилося, через точку A проходить пряма a, паралельна прямій l. Тому доведення потребує лише єдиність цієї прямої a. Припустимо, що існує ще якась інша пряма a', яка теж проходить через точку A і паралельна прямій l. Тоді оскільки обидві прямі a і a' паралельні прямій l, то за аксіомою Остроградського про паралельні прямі, вони паралельні між собою. Але ж ці прямі мають спільну точку A. Одержали суперечність. Тому зроблене припущення неправомірне. Отже, пряма a — єдина, яка проходить через точку A і паралельна прямій l. Аксіому Плейфера, і водночас її еквівалентність аксіомі Остроградського, доведено.

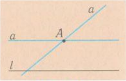


Рис. 8.18

8.8. Властивості кутів зі взаємно співнапрямленими і протилежно напрямленими сторонами

У математичній науці все, що не обґрунтовано до кінця, розцінюється як абсолютно необґрунтоване.

Олександр Хінчин

Сторонами кута є два промені. Промені називаються *паралельними*, якщо вони лежать на паралельних прямих.

Промені Oa і O_1b площини називаються *співнапрямленими*, якщо вони або паралельні і лежать з одного боку від прямої c, що з'єднує їхні початки, або якщо вони лежать на одній прямій і при цьому один з них є частиною іншого (рис. 8.19, а).

Промені Oa і O_1b площини називаються *протилежно напрямленими* теж у двох випадках: або якщо вони паралельні і лежать по різні боки від прямої c, що з'єднує їхні початки, або якщо ці промені лежать на одній прямій і при цьому жоден з них не належить іншому всіма своїми точками (рис. 8.19, б).

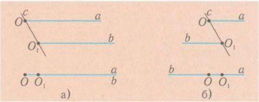


Рис. 8.19

Теорема
(про кути з відповідно співнапрямленими сторонами).

Кути з відповідно співнапрямленими сторонами рівні між собою.

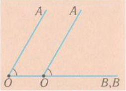


Рис. 8.20

Доведення. Нехай у двох кутів AOB і $A'O'B'$ відповідні сторони OA і $O'A'$ та OB і $O'B'$ співнапрямлені. Можливі два відмінних один від одного випадки: 1) вершина O' кута $A'O'B'$ лежить на прямій, яка містить яку-небудь зі сторін кута AOB, наприклад, на прямій OB (рис. 8.20); 2) вершина O' кута $A'O'B'$ не лежить на жодній з прямих OA чи OB, що містять сторони кута AOB (рис. 8.21). У першому випадку істинність твердження теореми випливає з того, що дані кути AOB та $A'O'B'$ є відповідними при паралельних OA та $O'A'$ і січній OO'; отже, вони рівні між собою.

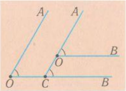


Рис. 8.21

У другому випадку продовжимо яку-небудь сторону кута $A'O'B'$, наприклад $O'A'$, до перетину з прямою, що містить не паралельну їй сторону кута AOB. Нехай C — точка перетину прямих $O'A'$ та OB. Тоді $\angle AOB = \angle A'CB$ — як відповідні при паралельних AO та $A'C$ і січній OB, а $\angle A'CB = \angle A'O'B'$ — як відповідні при паралельних OB та $O'B'$ і січній $A'C$. Отже, $\angle AOB = \angle A'O'B'$, що й треба було довести.

Наслідок.

Кути з протилежно напрямленими сторонами рівні між собою, а сума двох кутів, в яких одна

пара відповідних сторін співнапрямлені, а інша — протилежно напрямлені, дорівнює 180°.

Справді, нехай сторони кута $A'O'B'$ протилежно напрямлені до сторін кута AOB (рис. 8.22). Розглянемо кут $A_1O'B_1$ з тією самою вершиною O', що й у кута $O'A'B'$, але сторони якого протилежно напрямлені до сторін кута $A'O'B'$. Тоді кути AOB і $A_1O'B_1$ матимуть відповідно співнапрямлені сторони. За теоремою ці кути рівні між собою. З іншого боку, кут $A_1O'B_1$ є вертикальним до кута $A'O'B'$, отже, рівний йому. Оскільки, таким чином, кути AOB та $A'O'B'$ рівні одному й тому самому куту $A_1O'B_1$, то вони рівні між собою, що й треба було довести.

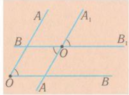


Рис. 8.22

Нехай тепер маємо два кути AOB і $A'O'B'$, розміщені таким чином, що їхні сторони OA і $O'A'$ співнапрямлені, а сторони OB і $O'B'$ — протилежно напрямлені (рис. 8.23). Побудуємо промінь $O'B_1$, протилежно напрямлений до променя $O'B'$. Тоді сторони кута $A'O'B_1$ будуть співнапрямленими зі сторонами кута AOB. Тому за теоремою ці кути рівні між собою. Але кут $A'O'B'$ є суміжним з кутом $A'O'B_1$, отже, в сумі ці два кути дають 180°. Звідси випливає, що й кути AOB та $A'O'B'$ у сумі теж дають 180°. Наслідок доведено повністю.

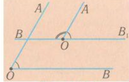


Рис. 8.23

Зауваження. Паралельні промені є або співнапрямленими, або протилежно напрямленими. З іншого боку, якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то вони або обидва прямі, або один з них гострий, а інший — тупий. Тому теорему про кути з відповідно співнапрямленими сторонами і наслідок з неї можна сформулювати так: ***якщо сторони одного кута відповідно паралельні сторонам іншого, то ці кути або рівні між собою (якщо вони обидва гострі, обидва прямі або обидва тупі) або ж їхня сума дорівнює 180° (якщо один з них гострий, а інший — тупий).***

8.9. Властивість кутів з відповідно перпендикулярними сторонами

Промені називаються *перпендикулярними* (або *взаємно перпендикулярними*), якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

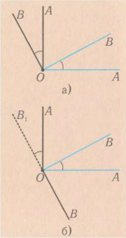


Рис. 8.24

Теорема
(про кути з відповідно перпендикулярними сторонами).

Два кути з відповідно перпендикулярними сторонами або рівні, або ж їхня сума дорівнює 180°.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли задані кути мають спільну вершину. Отже, нехай маємо два кути AOB та $A'OB'$ зі спільною вершиною O, розміщені так, що $OA' \perp OA$, а $OB' \perp OB$ (рис. 8.24). Тоді сторону OA' кута $A'OB'$ можна одержати зі сторони OA кута AOB поворотом на кут 90°. Так само можна одержати й сторону OB' зі сторони OB. Але при цьому можливі два різних випадки: 1) обидва вказані повороти здійснюються в одному напрямку, наприклад, проти руху годинникової стрілки (рис. 8.24, а); 2) ці повороти здійснюються у різних напрямках (рис. 8.24, б). У першому випадку весь кут $A'OB'$ одержується з кута AOB поворотом на 90°. Отже, тоді ці кути рівні. У другому випадку поворотом кута AOB на 90° одержується кут $A'OB_1$, який є суміжним з кутом $A'OB'$. Отже, тоді $\angle A'OB_1 + \angle A'OB' = 90°$, а звідси $\angle AOB + \angle A'O'B' = 90°$, що й треба було довести.

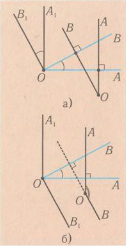


Рис. 8.25

Нехай тепер кути AOB та $A'O'B'$ мають різні вершини і при цьому їхні сторони перпендикулярні: $O'A' \perp OA$, $O'B' \perp OB$ (рис. 8.25). Проведемо з вершини O промені OA_1 та OB_1, співнапрямлені відповідно з променями OA' та OB'. За теоремою про кути з відповідно співнапрямленими сторонами $\angle A'O'B' = \angle A_1OB_1$. Водночас, оскільки $OA_1 \parallel O'A'$, а $O'A' \perp OA$, то $OA_1 \perp OA$. Аналогічно $OB_1 \perp OB$. Тоді за щойно доведеним, $\angle A_1OB_1 = \angle AOB$ (рис. 8.25, а) або $\angle A_1OB_1 + \angle AOB = 180°$ (рис. 8.25, б). Отже, $\angle A'O'B' = \angle AOB$ або $\angle A'O'B' + \angle AOB = 180°$. Доведення теореми завершено.

Наслідок.

Рівні кути з відповідно перпендикулярними сторонами одночасно або гострі, або прямі, або тупі.

Рівність гострих кутів зі взаємно перпендикулярними сторонами застосовується при влаштовуванні кутомірних інструментів. Для прикладу, на рис. 8.26 зображено схему вимірювання кута HAS на небесне світило за допомогою квадранта (половини транспортира). Цей кут дорівнює куту BAE, оскільки горизонтальний (AH) і вертикальний (AE) напрямки перпендикулярні між собою і перпендикулярні також сторони AB та AC квадранта.

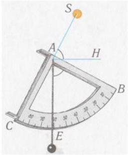


Рис. 8.26

Та сама ідея використовувалася і в старовинному способі вимірювання висоти вежі, зображеному на рис. 8.27.

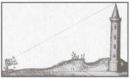


Рис. 8.27

8.10. Про кути між відповідно паралельними та перпендикулярними прямими

При перетині двох прямих утворюється дві пари вертикальних кутів (рис. 8.28). Якщо дані прямі перпендикулярні (рис. 8.29), то всі ці кути прямі. У цьому випадку вважаємо, що кут між даними прямими прямий, тобто дорівнює 90°.

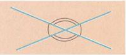


Рис. 8.28

Якщо ж прямі не перпендикулярні, то два з утворених вертикальних кутів — гострі, а два інші — тупі. Тоді величиною кута між даними прямими вважають величину менших з утворених вертикальних кутів.

Таким чином, величина кута між прямими не перевищує 90°.

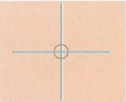


Рис. 8.29

Нехай маємо дві пари відповідно паралельних прямих a, b та a', b', тобто $a \parallel a'$, $b \parallel b'$. Нехай O, O' — точки їхнього перетину (рис. 8.30). Розглянемо нетупий кут AOB, утворений прямими a, b, і кут $A'O'B'$ з відповідно співнапрямленими сторонами, утворений прямими a' і b'. Оскільки за теоремою ці кути рівні, то кут $A'O'B'$ теж нетупий, тобто є кутом між прямими a' і b'. Отже, одержуємо такий висновок: *кути між парами відповідно паралельних прямих рівні між собою.*

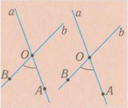


Рис. 8.30

Нехай тепер маємо дві пари відповідно перпендикулярних прямих a, b та a', b', які перетинаються в точках O і O' (рис. 8.31). Розглянемо нетупі кути 1 і 1′, утворені цими прямими. За теоремою про кути з відповідно перпендикулярними сторонами і наслідком з неї, якщо кут 1 гострий, то гострим є і рівний йому кут 1′, а якщо кут 1 прямий, то прямим є і рівний йому кут 1′, Отже, в кожному випадку кути 1 і 1′ рівні один одному і дорівнюють кутам між даними прямими. Таким чином, *кути між парами відповідно перпендикулярних прямих рівні між собою.*

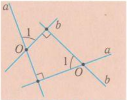


Рис. 8.31

Перевір себе

1. Який зміст має слово «аксіома» у геометрії?
2. Як формулюється аксіома про паралельні прямі?
3. Що означає «транзитивність відношення паралельності прямих»?
4. Чи завжди можна стверджувати, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й іншу?
5. Які залежності існують між відповідними, внутрішніми різносторонніми та внутрішніми односторонніми кутами, що утворюються при перетині паралельних прямих січною?
6. Дві прямі паралельні, а третя (січна) перпендикулярна до однієї з них. Чи можна стверджувати, що січна перпендикулярна й до іншої прямої?
7. Дві прямі перетинають третю. За яких умов вони перетинаються одна з одною?
8. Що таке обернена теорема? Наведіть відомі вам приклади взаємно обернених теорем, які одночасно є істинними.
9. Коли прямі називаються паралельними у просторі? Які властивості мають такі прямі?

10. У якій формі приймав аксіому про паралельні прямі Евклід? А Остроградський? Що означає рівносильність аксіом?
11. Дайте означення співнапрямленості і протилежної напрямленості променів.
12. Які властивості мають кути зі співнапрямленими і взаємно перпендикулярними сторонами?
13. Що таке кут між двома пересічними прямими? Які залежності існують між кутами, утвореними парами відповідно паралельних і відповідно перпендикулярних прямих?

Задачі і вправи

1°. Прямі a і b перпендикулярні до прямої c, а пряма l перетинає пряму a. Чи перетинає пряма l пряму b?

2°. Прямі a і b паралельні, $\angle 1 = 50°$ (рис. 8.32). Визначте величини кутів 2 – 8.

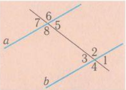


Рис. 8.32

3°. Сума внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 138°. Визначте ці кути.

4. Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, на 34° більший від іншого. Визначте ці кути.

5. Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, у п'ять разів менший від іншого. Визначте ці кути.

6. Внутрішні односторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, відносяться, як 5 : 7. Визначте ці кути.

7. Один із внутрішніх різносторонніх кутів, що утворюються при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 56°. Визначте кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх кутів.

8. Доведіть, що бісектриси двох відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

9. Доведіть, що бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, перпендикулярні.

10. За рис. 8.33, а), б) визначте кут x.

11. На рис. 8.34, а), б) $AB \parallel DE$. Визначте кут BCD.

12. Дано: $DM = MN$, $BM = MC$, точки A, B, N лежать на одній прямій, $LM \parallel AB$ (рис. 8.35). Доведіть, що $LM \parallel DC$.

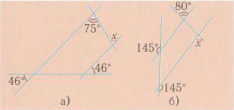


Рис. 8.33

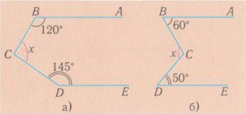


Рис. 8.34

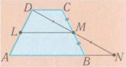


Рис. 8.35

13. У рівнобедреному трикутнику ABC на основі AC і на бічній стороні BC взято відповідно точки M і N так, що відрізки MN і CN рівні між собою. Доведіть, що $MN \parallel AB$.

14. Побудуйте два кути з відповідно паралельними, а потім і з відповідно перпендикулярними сторонами так, щоб вони були: а) гострі; б) тупі; в) прямі; г) один гострий, а інший тупий. У якому із цих випадків побудовані кути будуть рівними?

15. Дано два кути з відповідно паралельними сторонами. Визначте ці кути, якщо: а) один із кутів утричі менший від іншого; б) вони відносяться, як 2 : 3; в) один із кутів більший від іншого на 56°.

16. Розв'яжіть попередню задачу, якщо сторони заданих кутів відповідно перпендикулярні.

17. Як за допомогою кутомірного приладу, наприклад, астролябії, виміряти кут між прямими на місцевості, якщо точка перетину прямих недоступна?

18. Кути трикутника ABC дорівнюють 50°, 60° і 70°. Сторони трикутника $A_1B_1C_1$: а) відповідно паралельні; б) відповідно перпендикулярні до сторін трикутника ABC. Визначте кути трикутника $A_1B_1C_1$.

§9 Паралельність і рівновіддаленість

9.1. Рівність паралельних відрізків, розміщених між паралельними прямими

Якщо дві паралельні прямі направлені по протилежних сторонах прямокутника (рис. 9.1), то їхні спільні перпендикуляри рівні між собою. Цю властивість було виведено з ознак прямокутника у п. 7.1. Тепер ми можемо значно узагальнити її і до того ж без посилання на ознаки прямокутника. А це дасть змогу довести і самі ці ознаки.

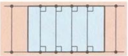


Рис. 9.1

Теорема
(про рівність паралельних відрізків з кінцями на паралельних прямих).

Відрізки паралельних прямих, узяті між двома іншими паралельними прямими, рівні між собою.

Доведення. Нехай маємо паралельні прямі a і b, а також паралельні відрізки FG, PQ, XY, ... з кінцями на цих прямих (рис. 9.2). Потрібно довести, що всі ці відрізки рівні між собою.

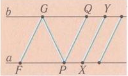


Рис. 9.2

Доведемо, для прикладу, що $PQ = FG$. Подібним чином можна довести, що й будь-який інший відрізок XY рівний FG, а звідси випливатиме, що всі вони рівні між собою.

Проведемо відрізок GP і розглянемо утворені при цьому трикутники FGP і QPG (рис. 9.3). У них сторона GP — спільна, $\angle 1 = \angle 1'$ — як внутрішні різносторонні при паралельних GQ та FP і січній GP, а $\angle 2 = \angle 2'$ — як внутрішні різносторонні при паралельних FG та PQ і тій самій січній QP.

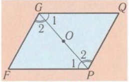


Рис. 9.3

Ці трикутники можна сумістити один з одним, наприклад, поворотом одного з них на 180° відносно середини O відрізка GP. Справді, якщо вказаним чином повернемо трикутник QPG (рис. 9.4), то сумістяться точки G і P, а також кути 1 і 1′ та 2 і 2′ (оскільки ці кути попарно рівні між собою). Отже, промінь GQ суміститься з променем PF, а промінь PQ — з променем GF. Тому точка Q перетину променів GQ і PQ суміститься з точкою F перетину променів GF і PF. У результаті відрізок PQ суміститься з відрізком GF, а це означає що ці відрізки рівні між собою. Теорему доведено.

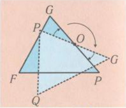


Рис. 9.4

Наслідок.

Які б не були дві паралельні прямі, всі перпендикуляри, опущені з точок однієї з цих прямих на іншу, мають однакову довжину.

Справді, оскільки всі ці перпендикуляри паралельні (рис. 9.5), то вони рівні між собою.

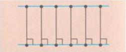


Рис. 9.5

Як уже зазначалося, остання властивість виправдовує назву паралельних прямих. Адже в дослівному перекладі з грецької «параллелос» — це «ті, що йдуть поруч», на однаковій відстані один від одного.

Оскільки всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від іншої прямої, то ця спільна відстань називається *відстанню* між паралельними прямими.

Отже, *відстанню між паралельними прямими називається довжина перпендикуляра, опущеного з якої-небудь точки однієї прямої на іншу пряму.*

Рівновіддаленість точок однієї з паралельних прямих від іншої прямої використовувалася у п. 2.5 для перетворення многокутника у рівновеликий йому трикутник.

Доведену теорему про рівність паралельних відрізків з кінцями на паралельних прямих можна сформулювати дещо інакше. А саме:

Якщо з точок однієї прямої (a) проводити рівні відрізки FG, XY, ... під рівними відповідними кутами до перетину з іншою прямою (b), паралельною даній, то всі ці відрізки будуть рівними між собою (рис. 9.6).

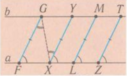


Рис. 9.6

Сформульовану в такому вигляді, цю теорему можна значно підсилити, використовуючи поняття геометричного місця точок.

Теорема
(про геометричне місце кінців рівних і паралельних відрізків).

Геометричним місцем кінців рівних і паралельних відрізків, проведених з точок прямої по один бік від неї, є інша пряма, паралельна даній.

Нагадаємо, що фігура називається геометричним місцем точок з певною властивістю, якщо всі точки цієї фігури мають цю властивість і не існує інших точок, окрім точок цієї фігури, які мають дану властивість.

Коли я взявся до наукового вивчення геометрії, то всі факти, які я повинен був вивчати, були, власне, мені добре відомі. Новим для мене був строгий метод науки, і я за допомогою цього методу відчув, що зникають ті труднощі, які заважали мені в інших царинах знання.

Герман Людвіг Гельмгольц

Доведення теореми. Розглянемо які-небудь три рівних відрізки FG, XY, ZT, відкладених від даної прямої a під рівними відповідними кутами до неї (див. рис. 9.6). Провівши відрізок XG, одержимо два рівних трикутники FGX та YXG (за першою ознакою рівності трикутників). Тому рівними будуть і їхні кути FXG та YGX. Внаслідок цього пряма YG буде паралельною прямій a.

Так само доведемо, що й пряма YT паралельна прямій a. Але через точку Y проходить лише одна пряма, паралельна прямій a. Тому точки G, Y і T лежать на одній прямій GY. Отже, кінці усіх побудованих відрізків FG, XY, ZT лежать на цій прямій (b).

Для завершення доведення теореми потрібно показати, що кожна точка M прямої b слугує кінцем якогось із вказаних відрізків. Таким відрізком є відрізок ML, паралельний XY, оскільки за попередньою теоремою він рівний відрізку XY. Доведення теореми завершено.

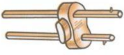
Наслідок.

Кожна з двох паралельних прямих є геометричним місцем точок, які лежать з одного боку від іншої прямої і на однаковій відстані від неї (див. рис. 9.5).

На основі цього наслідку паралельні прямі можна проводити за допомогою звичайної двосторонньої лінійки (рис. 9.7). Відстані між ними будуть кратними ширини лінійки.

Рис. 9.7

Для проведення паралельних прямих на різних відстанях у столярній справі застосовують прилад, який називається рейсмусом. Його назву утворено від німецького reiβen («райзен»), що означає «креслити». Найпростіший рейсмус — це кілок (або два кілки) з металевою голкою на кінці і ручка, в якій цей кілок може рухатися та фіксуватися (рис. 9,8, а). Якщо пересувати рейсмус вздовж прямолінійного краю дошки або бруса, як показано на рис. 9.8, б), то голка назначить пряму лінію, віддалену від краю на задану відстань, а тому паралельну йому.


а)

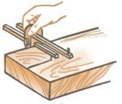

б)

Рис. 9.8

З'ясовані у цьому пункті зв'язки між паралельністю прямих і рівністю розміщених між ними паралельних відрізків (особливо відрізків, перпендикулярних до даних прямих) надзвичайно важливі для найрізноманітніших практичних застосувань.

Можна сказати, що довкілля, створене за участю людини, тримається на цих зв'язках, як на своєрідному геометричному каркасі. Ви побачите їх у кожній споруді, де всі рівні перпендикуляри до однієї прямої

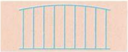


Рис. 9.9

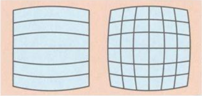


Рис. 9.10

завжди закінчуються на іншій прямій, паралельній даній. Те саме ви помітите у предметах інтер'єру — у кожній шафі, столі, шухляді і т.ін. Зокрема, якби відстань між паралельними прямими не була всюди однаковою, то шухляди не могли б вільно рухатися між бічними стінками своїх пройм по направляючих пазах і рейках. З цих самих причин неможливо було б здійснити поступальний рух по декількох прямолінійних направляючих, як наприклад, супорта у токарному верстаті чи каретки в матричному принтері. Не було б жодних прямолінійних колій з двома рейками. Адже тоді лінія, яка всюди знаходиться на однаковій відстані від однієї прямої, була б кривою (рис. 9.9). Тому принаймні одна з рейок мусила б бути кривою. Подібну особливість мала б і лижня, тому принаймні одна з лиж мусила б бути кривою. Не було б зошитів ні «в лінійку», ні «в косу лінію», ні тим більше «в клітинку», а були б зошити «у криві лінії» і «викривлені клітинки» (рис. 9.10).

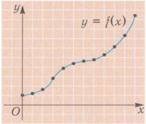
Життя прикрашають дві речі — заняття математикою та її викладання.
Сімеон Дені Пуассон

Цікаве застосування рівновіддаленості паралельних прямих у нотному стані (рис. 9.11). Нотний стан складається з п'яти основних паралельних ліній, до яких при потребі долучаються додаткові лінії, теж паралельні основним. Усі лінії проходять на однаковій відстані одна від одної, чим створюється своєрідна драбина для розміщення нот різної висоти.

Фактично ця сама ідея реалізується і при графічному заданні функцій в алгебрі (рис. 9.12).

Запис мелодії на нотному стані

Рис. 9.11



Графічне задання функції

Рис. 9.12

9.2. Доведення перших двох ознак прямокутника

На самому початку нашого підручника було сформульовано два фундаментальних положення, з яких суто логічним шляхом виведено цілу низку інших геометричних фактів, зокрема, — формули для обчислення площ прямокутника і трикутника, теорему про суму кутів трикутника і чотирикутника, а також знамениту теорему Піфагора. Йдеться про *першу й другу ознаки прямокутника*, які фактично відігравали роль геометричних аксіом. Проте після введення аксіоми про паралельні прямі обидві ці ознаки теж можна довести суто логічним шляхом.

Доведення першої ознаки прямокутника

Нехай у чотирикутнику $ABCD$ кути A і B — прямі, а сторони AD і BC — рівні між собою та лежать з одного боку від прямої AB (рис. 9.13). Оскільки $AD \parallel BC$, то за теоремою про геометричне місце кінців рівних і паралельних відрізків точки D і C лежать на прямій, паралельній прямій AB. Отже, прямі AB і CD паралельні. А оскільки січна AD перпендикулярна до однієї з них (до AB), то вона перпендикулярна і до іншої, тобто до DC. Отже, кут ADC — прямий. Аналогічно дійдемо висновку, що й кут BCD — прямий. Отже, в чотирикутнику $ABCD$ всі кути прямі. Його протилежні сторони AB і DC рівні як відрізки паралельних

Рис. 9.13

прямих, розміщені між паралельними AD і BC. Отже, це — прямокутник. Доведення завершено.

Доведення другої ознаки прямокутника

Нехай тепер у чотирикутнику $ABCD$ три кути A, B і D — прямі (рис. 9.14). Тоді оскільки $AB \perp AD$ і $CD \perp AD$, то $AB \parallel CD$. Пряма BC перпендикулярна до першої з паралельних прямих AB і CD, тому вона перпендикулярна і до другої. А це означає, що кут C чотирикутника $ABCD$ теж прямий. Отже, це — прямокутник.

Рис. 9.14

9.3. Рівносильність різних ознак прямокутника

Якщо проаналізувати весь ланцюжок наслідків, який призвів до доведення ознак прямокутника (перші дві із цих ознак спочатку приймалися без доведення), то ми неодмінно прийдемо як до точки відліку до аксіоми про паралельні прямі. Згодом ми доведемо, що якби не приймати цієї аксіоми або якого-небудь іншого твердження, рівносильного їй, наприклад, V постулату Евкліда, то довести ознаки прямокутника неможливо і тому принаймні одну з них довелося б брати за аксіому.

Як ми бачили (п. 4.4), третю ознаку прямокутника можна довести на основі теореми про суму кутів трикутника, а цю теорему, зі свого боку, — на основі перших двох ознак. Отже, третя ознака прямокутника випливає з перших двох.

Ретельніший аналіз показує, що перші дві ознаки теж взаємозалежні, а точніше, що вони рівносильні. Тому замість аксіоми про паралельні прямі можна взяти будь-яку з них.

Нагадаємо, що два твердження називаються *рівносильними* або *еквівалентними* (латинське aequivalentis буквально означає «рівносильний»), якщо з першого з них та одного й того ж набору інших властивостей можна вивести друге твердження, а з другого — перше.

Отже, припустимо, що виконується перша ознака прямокутника і доведемо, що тоді неодмінно виконуватиметься й друга.

Із того, що сума кутів трикутника дорівнює 180°, випливає, що ми можемо побудувати прямокутники. Існування ж прямокутників є для нас доволі правдоподібним. Ми не схильні вірити, що прямокутників або квадратів немає. Існування прямокутників робить можливою побудову цегляної стіни без щілин. Без прямокутників ми не могли б будувати нашим звичайним способом — і весь наш устрій життя був би іншим. Ми бачимо, що теорема про суму кутів трикутника дуже тісно пов'язана з нашою технічною цивілізацією.

Філіп Франк

Нехай маємо будь-який чотирикутник $ABCD$ з трьома прямими кутами A, B, D (рис. 9.15). Уявімо собі, що ми перегинаємо площину цього чотирикутника по прямій AD (рис. 9.16) аж поки він не «відіб'ється» у рівний йому чотирикутник AB_1C_1D по інший бік від цієї прямої (рис. 9.17). Оскільки чотирикутники $ABCD$ і AB_1C_1D рівні між собою (адже вони суміщаються один з одним), то кут B_1 рівний куту B, тобто є прямим. З тієї ж причини відрізок B_1C_1 рівний відрізку BC, відрізок AB_1 — відрізку AB, а відрізок DC_1 — відрізку DC (тому $AB = \frac{1}{2}BB_1$, а $DC = \frac{1}{2}CC_1$). Крім цього, кут ADC_1 теж прямий, оскільки він дорівнює прямому куту ADC. Виходить, що кут C_1DC — розгорнутий (бо дорівнює двом прямим), отже, точки C_1, D, C лежать на одній прямій. Так само доведемо, що й точки B_1, A, B лежать на одній прямій. Тому B_1BCC_1 — чотирикутник, в якому кути B_1 і B прямі, а сторони B_1C_1 і BC — рівні. Тоді за першою ознакою, це — прямокутник. Отже, у ньому кути C і C_1 — прямі, а сторона CC_1 дорівнює стороні B_1B. Якщо рівні відрізки, то рівні і їхні половини, тобто $DC = AB$. Застосовуємо тоді першу ознаку до чотирикутника $DABC$, у якому прямими є кути D, A та рівні сторони DC і AB. У результаті дійдемо висновку, що й $CB = DA$. Отже, чотирикутник $ABCD$ справді є прямокутником, що й треба було довести.

Припустимо тепер, навпаки, що завжди виконується друга ознака прямокутника і розглянемо чотирикутник $ABCD$, в якому кути A і B — прямі, а сторони AD і BC — рівні між собою (рис. 9.18). Доведемо, що тоді цей чотирикутник є прямокутником, тобто що кути D і C теж прямі, а протилежні сторони DC і AB рівні між собою.

Проведемо через середину F сторони AB під прямим кутом до неї відрізок FG до перетину зі стороною DC в точці G. Потім уявимо, що чотирикутник $FBCG$ «відривається» від своєї початкової площини і обертається довкола прямої FG аж поки не суміститься з цією

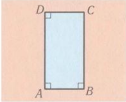


Рис. 9.15

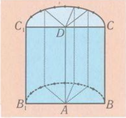


Рис. 9.16

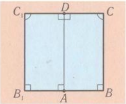


Рис. 9.17

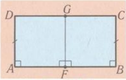


Рис. 9.18

площиною з іншого боку від FG. Оскільки при цьому прямий кут GFB суміститься з рівним йому прямим кутом GFA, а відрізки FB і FA рівні, то точка B суміститься з точкою A. Оскільки, далі, прямий кут B перейде у рівний йому прямий кут з вершиною A, а його сторона BF — у сторону AF, то сторона BC перейде у сторону AD. Оскільки, нарешті, відрізок BC рівний відрізку AD, то точка C суміститься з точкою D. Виходить, що кут FGC сумістився з кутом FGD. Отже, ці кути рівні між собою, тому кожен з них (як половина розгорнутого кута DGC) — прямий. А це означає, що в кожному з чотирикутників $FBCG$ та $AFGD$ маємо по три прямих кути. Відповідно до другої ознаки, — це прямокутники. Тому кути C і D теж прямі, $GC = FB$, а $GD = FA$. Додавши відповідно ліві і праві частини останніх двох рівностей, одержимо: $DC = AB$. Доведення завершено.

9.4. Рівносильність ознак прямокутника та аксіоми про паралельні прямі

У п. 9.2. перші дві ознаки прямокутника доведені на основі аксіоми про паралельні прямі. Виявляється, що й навпаки, аксіому про паралельні прямі можна вивести з ознак прямокутника. А оскільки ознаки прямокутника еквівалентні між собою, то це означає, що кожна з них еквівалентна аксіомі про паралельні прямі. Враховуючи вже доведене, для обґрунтування всіх цих еквівалентностей достатньо показати, що твердження аксіоми про паралельні прямі випливає з перших двох ознак прямокутника.

Для мене знайти доведення математичної теореми дорожче, ніж завоювати усе перське царство.
Демокріт

Нехай маємо пряму a і точку B поза нею (рис. 9.19). Доведемо, що через точку B у площині можна провести єдину пряму, паралельну прямій a.

Існування прямої b не залежить від жодних додаткових умов. Опустивши з B на a перпендикуляр BA, а потім провівши через B пряму b, перпендикулярну до BA, матимемо шукану пряму. Отже, проблема полягає у доведенні єдиності цієї прямої.

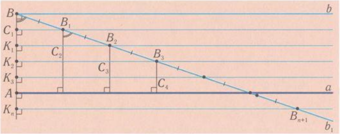


Рис. 9.19

Нехай b_1 — яка-небудь інша пряма, що проходить через точку B. Розглянемо той промінь цієї прямої з початком у точці B, який з променем BA утворює гострий кут. Відкладатимемо послідовно на цьому промені від точки B рівні відрізки BB_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., а з точок B_1, B_2, B_3,... опускатимемо перпендикуляри на прямі a та BA. У результаті взаємного перетину цих перпендикулярів, зважаючи на ознаки прямокутника, одержимо прямокутні трикутники BC_1B_1, $B_1C_2B_2$, $B_2C_3B_3$,... з рівними гіпотенузами (за побудовою) і рівними відповідними гострими кутами. Наприклад, оскільки за другою ознакою прямокутника $\angle C_1B_1C_2 = 90°$, то сума кутів BB_1C_1 та $B_2B_1C_2$ теж дорівнює 90°. Але ж такою самою є й сума гострих кутів у прямокутному трикутнику BC_1B_1 (теорема про суму кутів трикутника випливає з ознак прямокутника). Тому $\angle B_1BC_1 = \angle B_2B_1C_2$. Як було з'ясовано у другому з доведень першої ознаки паралельності прямих, такі трикутники рівні між собою (те, що вони там розміщувалися інакше, значення не має).

Отже, $\Delta BC_1B_1 = \Delta B_1C_2B_2 = \Delta B_2C_3B_3 = \ldots$. Тому $BC_1 = B_1C_2 = B_2C_3 = \ldots$. З іншого боку, за ознаками прямокутника $B_1C_2 = C_1K_1$, $B_2C_3 = K_1K_2$, ... Тому якою б не була відстань BA від заданої точки B до прямої a, вона врешті решт вичерпається певною кількістю однакових відрізків BC_1, C_1K_1, K_1K_2, K_2K_3, ..., і наступна точка K_n розміститься уже з іншого боку від прямої a.

Належить домагатися задоволень, які йдуть за працею, а не перед нею.
Іоан Стобей

З того ж боку розміститься і відповідна їй точка B_{n+1} прямої b_1. Виходить, що прямій b_1 належать точки з обох боків від прямої a. Тому пряма b_1 перетинає пряму a. Отже, пряма b — єдина, яка проходить через точку B і не перетинає прямої a, тобто паралельна їй, що й треба було довести.

Сторінки історії

Як з'явилася перша неевклідова геометрія

Серед усіх базових фактів (аксіом і постулатів), взятих у «Началах» Евкліда за фундамент геометрії, було тільки одне, яке викликало застереження учених вже невдовзі після того, як цей твір набув поширення. Це останній, V постулат (див. п. 8.6). Пізніше з'ясувалося, що цей постулат рівносильний аксіомі про паралельні прямі, але в тій формі, в якій він з'явився в «Началах», цей постулат різко контрастував з іншими постулатами своєю багатослівністю. Тому склалося враження, що це — теорема, яку можна довести на основі решти аксіом і постулатів, а тому з числа постулатів її слід вилучити. Так розпочалася найтриваліша в історії науки кампанія, що розтяглася майже на 2,5 тис. років. Її метою було доведення V постулату Евкліда.

Як ми вже мали змогу переконатися, V постулат Евкліда рівносильний аксіомі про паралельні прямі, а вона, зі свого боку, рівносильна ознакам прямокутника. Разом усе це означає, що V постулат рівносильний кожній з ознак прямокутника, а тому може бути доведений на основі будь-якої з них. Отже, для вирішення поставленої проблеми достатньо довести незалежним чином будь-яку з цих ознак.

Найбільшого розголосу набули дві спроби такого доведення. Першу ознаку намагався довести викладач математики з італійських колегіумів Джованні Саккері (1667–1733). Він видав навіть спеціальну працю, присвячену цій проблемі, яка мала промовисту назву: «Евклід, очищений від усіх плям». Другу ознаку доводив

Гіпотези про невідомі кути C і D в дослідженнях Саккері

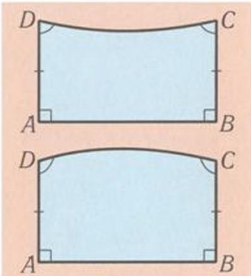


Рис. 9.20

німецький математик Йоган Генріх Ламберт (1728–1777) і теж присвятив цьому спеціальний твір — «Теорія паралельних ліній». Обидва вчені свої доведення проводили методом «від супротивного», розглядаючи так звані гіпотези тупих і гострих кутів (рис. 9.20 і 9.21).

Порівняно легко спростовувалися гіпотези тупих кутів. Гіпотези гострих кутів до логічної суперечності не вели. Тому дослідники зупинялися в своїх міркуваннях тоді, коли одержували аж надто разючі суперечності з повсякденним досвідом. Це була помилка, але помилка так би мовити світоглядного характеру.

Абсолютна ж більшість дослідників, які шукали доведення V постулату Евкліда, робили іншу — логічну помилку, використовуючи додаткові твердження, які насправді були еквівалентними V постулату. Цим створювалося хибне логічне коло: доведення здійснювалося на основі того, що насправді потрібно було довести.

Інколи ці додаткові твердження мали таку замасковану форму, що дослідники навіть не помічали їхнього фактично використання, вважаючи їх абсолютно «природними» і «самоочевидними». Наприклад, німецький математик Клавій Шлюссель (1537–1612) у своєму доведенні V постулату Евкліда використав як «очевидність» те, що три точки A, B, C, які лежать у площині з одного боку від прямої l і рівновіддалені від неї, належать іншій прямій (рис. 9.22). Ще замаскованішою була логічна помилка видатного французького математика Адрієна Марі Лежандра (1752–1833), який в одному зі своїх доведень використовував як «очевидність» те, що через будь-яку точку P, узяту всередині гострого кута A (рис. 9.23), завжди можна провести пряму, яка перетне обидві його сторони. Але як перше, так і друге зі згаданих «очевидних» тверджень насправді еквівалентні V постулату. Тому знайдені на їхній основі «доведення» були хибними.

Взявши до уваги численні невдалі спроби, а також і свої власні невдачі на цьому шляху, російський геометр Микола Лобачевський (1792–1856) в середині 20 рр. XIX ст. дійшов думки, що Евклід таки був правий, включивши V постулат до фундаменту геометрії, тобто, що насправді це твердження довести неможливо.

Гіпотези про невідомий кут C в дослідженнях Ламберта

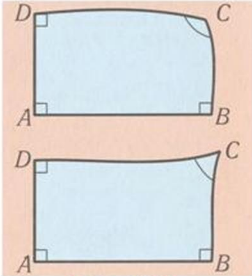


Рис. 9.21

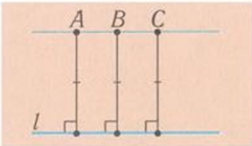


Рис. 9.22

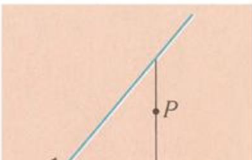


Рис. 9.23

Але як підтвердити цю здогадку? — Спосіб був тільки один: взяти замість V постулату або якого-небудь рівносильного йому твердження, наприклад, замість аксіоми про паралельні прямі, протилежне твердження і спробувати збудувати на цій основі нову логічно несуперечливу геометрію. Це й було зроблено. Однією з аксіом нової геометрії стала *аксіома Лобачевського*: «**Через точку A поза прямою l у площині можна провести принаймні дві прямі a і b, які не перетинають прямої l**» (рис. 9.24). Прийняття такого «дивного» положення на той час було справжнім науковим і громадянським подвигом, бо навіть визначні математики не сприйняли його. Абсолютна більшість фактів з нової геометрії разюче контрастувала з фактами звичайної геометрії. Зокрема, у новій геометрії сума кутів будь-якого трикутника завжди менша від 180°, а чотирикутника — менша від 360°. Отже, в такій геометрії немає ні прямокутників, ні квадратів, а тому немає і вчення про площі, збудованого на цій основі. Прямі, які лежать у площині і не перетинаються, можуть мати спільний перпендикуляр, а можуть і не мати його, а якщо мають, то тільки один. Отже, немає тієї гармонійної взаємозалежності між паралельністю і перпендикулярністю, яка характерна для звичайної геометрії.

Сам Лобачевський відкриту ним нову геометрію називав *уявною*, хоча й твердо вірив у те, що рано чи пізно вона теж матиме практичне застосування. Так воно й сталося. На початку XX ст. німецький фізик Герман Мінковський (1864–1909) обґрунтував, що геометрією Лобачевського описуються рухи частинок, що відбуваються зі швидкостями, близькими до швидкості світла. Ще раніше італійський математик Еудженіо Бельтрамі (1835–1900) відкрив поверхню (рис. 9.25), на якій виконується геометрія Лобачевського — як звичайна геометрія виконується на площині. Зокрема, на цій поверхні (тепер вона називається *псевдосферою*, тобто несправжньою сферою, але схожою на сферу певними своїми властивостями), дуже наочно ілюструються найнесподіваніші положення з уявної геометрії Лобачевського. Наприклад, сама аксіома Лобачевського (див.

М.І. Лобачевський

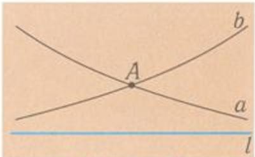


Рис. 9.24

Е. Бельтрамі

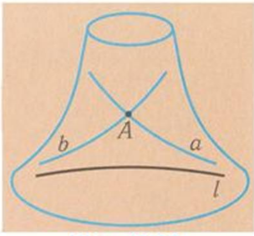


Рис. 9.25

рис. 9.25), теорема про існування єдиного спільного перпендикуляра для непересічних прямих (рис. 9.26), твердження про те, що сума кутів трикутника менша 180° (рис. 9.27).

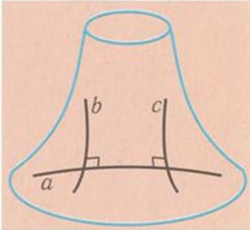


Рис. 9.26

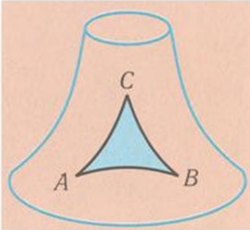


Рис. 9.27

Відомий англійський математик Джеймс Сильвестр (1814–1897) назвав Лобачевського «Коперником геометрії», наголошуючи цим на тому, що відкриття Лобачевського мало такий самий революційний вплив на науку, як у свій час відкриття Коперником руху Землі і планет навколо Сонця. Саме завдяки цьому відкриттю у науці утвердилась ідея про те, що на ґрунтовне вивчення заслуговує кожна теорія, яка засновується на логічно несуперечливій системі аксіом. Практичні ж науки можуть вибирати для своїх цілей ті теорії, які здатні найбільш повно описати явища і процеси, що в них вивчаються.

Геометрія Лобачевського стала першою геометрією, відмінною від класичної евклідової геометрії, тобто геометрії, основи якої були закладені ще знаменитим Евклідом. Тому цю нову геометрію назвали *неевклідовою* геометрією. Тепер неевклідових геометрій існує багато. Кожна з них базується на своїй системі аксіом.

9.5. Паралелограми і трапеції

Поняття паралельності прямих дає змогу означити нові види геометричних фігур.

Паралелограм

Уже відзначалося у попередніх параграфах, що в прямокутнику протилежні сторони паралельні. Узагальнення цієї особливості прямокутника втілюється у фігурі, яка має назву паралелограм.

Паралелограмом називається чотирикутник, в якому протилежні сторони попарно паралельні. На рис. 9.28 зображено паралелограм $ABCD$. У ньому паралельні сторони AB і DC, а також AD і BC. Прямокутник є частковим видом паралелограма. У ньому сусідні сторони перпендикулярні. В загальному випадку для паралелограма це не виконується.

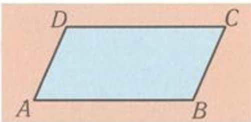


Рис. 9.28

Побудову паралелограма можна здійснити так. Проведемо з деякої точки A два довільних відрізки AB

та AD (рис. 9.29). Потім через точку B проведемо пряму, паралельну відрізку AD, а через точку D — пряму, паралельну відрізку AB. Нехай C — точка перетину цих прямих (оскільки пряма AB перетинає пряму BC, то й паралельна їй пряма DC теж перетне пряму BC, отже, точка C існує). Тоді чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

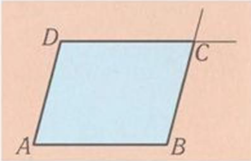


Рис. 9.29

Оскільки протилежні сторони паралелограма є відрізками паралельних прямих, кінці яких належать іншим паралельним прямим, то вони рівні між собою. Отже, ***протилежні сторони паралелограма попарно рівні***.

Якщо в описаній побудові паралелограма (див. рис. 9.29) відрізки AB і AD взяти рівними, то одержимо частковий вид паралелограма, який називається *ромбом* (рис. 9.30). Отже, в ромбі всі сторони рівні. Частковим випадком ромба є квадрат.

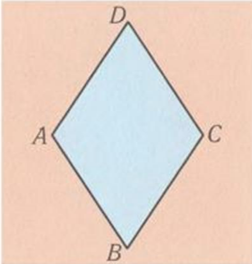


Рис. 9.30

Назва «ромб» бере свій початок від грецького слова «ромбос», що мало два значення: 1) барабан (бубон); 2) дзига або веретено. Ромб справді нагадує старовинного чотирикутного бубна, які ще й досі зображають на гральних картах (рис. 9.31). Що ж до веретена — найпростішого знаряддя для прядіння ниток, то його осьовий переріз теж мав форму ромба. Ромбовидні форми дуже поширені в образотворчому мистецтві, зокрема в орнаментах.

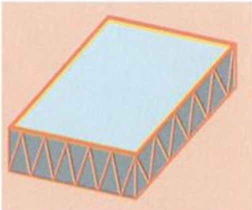


Рис. 9.31

Задача 1.

Довести, що протилежні кути паралелограма рівні.

Розв'язання. Розглянемо протилежні кути A і C довільного паралелограма $ABCD$ (рис. 9.32). Оскільки протилежні сторони AD і BC паралелограма паралельні, то за властивістю паралельних прямих $\angle A + \angle B = 180°$. З тієї ж причини $\angle B + \angle C = 180°$. Із цих двох рівностей випливає, що $\angle A = \angle C$. Твердження задачі доведено.

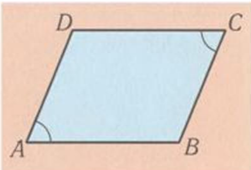


Рис. 9.32

Задача 2.

Довести, що коли в чотирикутнику протилежні сторони паралельні і рівні, то це — паралелограм.

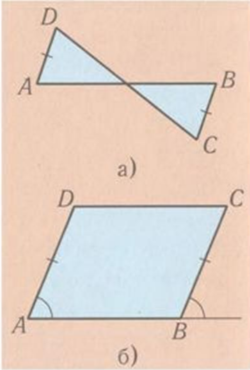


Рис. 9.33

Розв'язання. Нехай в чотирикутнику $ABCD$ (рис. 9.33) протилежні сторони AD і BC паралельні і рівні. Ці сторони не можуть лежати по різні боки від прямої AB, як показано на рис. 9.33, а), оскільки тоді ламана $ABCD$ мала б точку самоперетину і не визначала б чотирикутника. Тому вони лежать з одного боку від прямої AB (рис. 9.33, б) і утворюють з нею рівні відповідні кути. Тоді за теоремою про геометричне місце рівних і паралельних відрізків пряма DC паралельна AB. А оскільки за умовою і $AD \parallel BC$, то $ABCD$ — паралелограм. Твердження задачі доведено.

Площа паралелограма

Одну зі сторін паралелограма часто називають *основою*. Тоді відстань між паралельними прямими, одна з яких містить основу, а інша — протилежну сторону, називається *висотою* паралелограма. Отже, висота паралелограма дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного на пряму, яка містить основу, з якої-небудь точки протилежної сторони. Часто *висотою* називають також і сам цей перпендикуляр. На рис. 9.34 DF — висота паралелограма $ABCD$, що відповідає основі AB, а на рис. 9.35 DE — висота паралелограма $ABCD$, що відповідає основі BC.

У математиці існує своя мова — формули.
Софія Ковалевська

Від висоти паралелограма та від довжини основи залежить його площа. А саме:

площа паралелограма дорівнює добутку його основи на висоту.

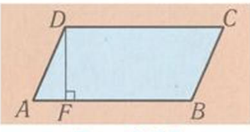


Рис. 9.34

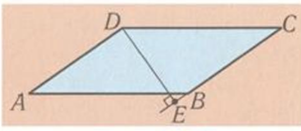


Рис. 9.35

Доведення. Нехай маємо паралелограм $ABCD$ з основою $AB = a$ і висотою $DF = h$ (рис. 9.36). Діагональ DB розбиває цей паралелограм на два рівних трикутники ABD і CDB (сторона BD у них спільна, сторони BA і DC рівні як протилежні сторони паралелограма, а $\angle ABD = \angle CDB$ як внутрішні різносторонні при паралельних AB та CD і січній DB; тому ці трикутники рівні за третьою ознакою). Основою і висотою першого з них є відповідно основа AB і висота DF даного паралелограма. Тому для площі S паралелограма $ABCD$ маємо:

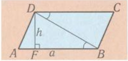


Рис. 9.36

$$S = 2S_{\Delta ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot DF = ah,$$

що й треба було довести.

Трапеція

Чотирикутник, у якому дві сторони паралельні, а дві інші — не паралельні, називається *трапецією*. Паралельні сторони трапеції називаються її *основами*, а не паралельні — *бічними сторонами*. На рис. 9.37 зображено різні форми трапецій з основами AB і CD та бічними сторонами AD і BC.

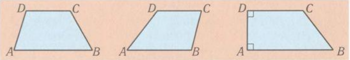


Рис. 9.37

Основи трапеції не можуть бути рівними, бо тоді це був би паралелограм.

Інколи одну з основ трапеції (зазвичай меншу) заради зручності називають *верхньою*, а іншу (більшу) — *нижньою*.

Трапеція, в якої бічні сторони рівні, називається *рівнобічною* або *рівнобедреною* (рис. 9.38).


Рис. 9.38

Висотою трапеції називають відстань між прямими, які містять її основи. Отже, висота трапеції дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного на пряму, яка містить основу, з будь-якої точки іншої основи. На рис. 9.39. DE, CF і MN — висоти трапеції $ABCD$. Усі вони рівні між собою.

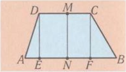


Рис. 9.39

Назва «трапеція» утворена від давньогрецького слова «трапедза», що означає «стіл» (порівняйте з церковним «трапеза»). Це пов'язано з тим, що у давні часи столи мали профіль цієї фігури (рис. 9.40). Інколи такі столи можна побачити й тепер.

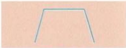


Рис. 9.40

Площа трапеції

Нехай маємо трапецію $ABCD$ з основами $AB = a$ і $DC = b$ та висотою $CN = h$ (рис. 9.41). Діагональ AC розбиває її на два трикутники з висотами CN і AM, що дорівнюють висоті трапеції. Тому для площі S трапеції маємо:

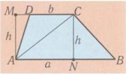


Рис. 9.41

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h + \frac{1}{2}b \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Отже, ***площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту***.

Перевір себе

1. Сформулюйте теорему про рівність паралельних відрізків з кінцями на паралельних прямих. Яка властивість прямокутника узагальнюється в цій теоремі?
2. З точок однієї з паралельних прямих опускаються перпендикуляри на іншу пряму. Яка залежність існує між цими перпендикулярами?
3. Що таке відстань між паралельними прямими?
4. Якою фігурою є геометричне місце кінців рівних відрізків, відкладених з точок однієї прямої під рівними відповідними кутами до неї?
5. На якій геометричній властивості ґрунтується побудова паралельних прямих за допомогою двосторонньої лінійки та рейсмуса?
6. Наведіть приклади втілення геометричних зв'язків між паралельністю і перпендикулярністю прямих в архітектурі, інженерії, предметах побуту.
7. Вибудуйте весь ланцюжок логічних наслідків, який веде до першої та другої ознак прямокутника. Яке місце в цьому ланцюжку займає аксіома про паралельні прямі?
8. Дайте означення паралелограма. Які властивості паралелограма безпосередньо випливають з означення та доведених раніше фактів?

9. Що таке ромб? Наведіть відомі вам приклади ромбоподібних форм.
10. Дайте означення висоти паралелограма та виведіть формулу для обчислення його площі.
11. Що таке трапеція, як називаються її сторони?
12. Що таке висота трапеції? Виведіть формулу для обчислення площі трапеції.

Задачі і вправи

1°. Чому дорівнює сума кутів паралелограма, які прилягають до однієї з його сторін?

2°. Чи можуть всі кути паралелограма бути гострими? А прямими? А тупими? Чи може лише один з кутів паралелограма бути прямим?

3°. Чи може один з кутів паралелограма дорівнювати 30°, а інший 60°?

4°. Один із кутів паралелограма дорівнює 56°. Чи можна за цими даними знайти інші його кути?

5°. Сума двох кутів паралелограма дорівнює 110°. Чи можна визначити всі кути цього паралелограма?

6°. Чи може різниця двох кутів паралелограма дорівнювати 50°? А 90°? А 0°?

7°. Відношення кутів A і B паралелограма $ABCD$ дорівнює 2 : 3. Визначте ці кути.

8°. Дві сторони паралелограма дорівнюють 5 см і 7 см. Визначте його периметр.

9°. Периметр паралелограма дорівнює 60 см. Визначте сторони паралелограма, якщо: а) одна з них дорівнює 12 см; б) одна зі сторін на 4 см більша від іншої; в) одна зі сторін утричі менша від іншої; г) різниця двох сторін дорівнює 8 см; ґ) вони відносяться, як 2 : 3.

10. Сума двох сторін паралелограма дорівнює 26 см, а його периметр — 60 см. Визначте сторони паралелограма.

11. Визначте кути паралелограма, діагональ якого дорівнює одній зі сторін і перпендикулярна до неї.

12. Гострий кут паралелограма дорівнює 45°. Висота, проведена з вершини тупого кута, ділить протилежну сторону навпіл. Визначте кути, утворені діагоналлю паралелограма, проведеною з тієї самої вершини, зі сторонами паралелограма.

13. У паралелограмі $ABCD$ з вершини B тупого кута до сторони AD проведено висоту. Зі стороною AB вона утворює кут 42°. Визначте кути паралелограма.

14. Бісектриса AM кута A паралелограма $ABCD$ відтинає від нього трикутник з кутом BAM, що дорівнює 27°. Визначте кути паралелограма.

15. З вершини одного з кутів паралелограма проведено бісектрису цього кута та висоту паралелограма. Кут між ними дорівнює 30°. Визначте кути паралелограма.

16. Визначте кути паралелограма, якщо кут між його висотами, проведеними з однієї вершини, дорівнює 28°.

17. Паралелограм однією зі своїх діагоналей ділиться на два трикутники, периметр кожного з яких дорівнює 6 см. Визначте довжину цієї діагоналі, якщо периметр паралелограма дорівнює 7 см.

18. Доведіть, що бісектриси двох суміжних кутів паралелограма перпендикулярні.

19. Доведіть, що бісектриси двох протилежних кутів паралелограма паралельні.

20. $ABCD$ — паралелограм, $AE = CF$ (рис. 9.42). Доведіть, що $DEBF$ — теж паралелограм.

21. $ABCD$ — паралелограм, $AM = CN$ (рис. 9.43). Доведіть, що $MBND$ — теж паралелограм.

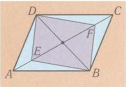


Рис. 9.42

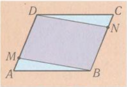


Рис. 9.43

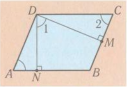


Рис. 9.44

22. Доведіть, що коли в чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180°$, то $ABCD$ — паралелограм.

23. Доведіть, що коли в чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = \angle C$ і $AB \parallel CD$, то цей чотирикутник — паралелограм.

24. Через середини сторін паралелограма проведені прямі, перпендикулярні до цих сторін. Який чотирикутник обмежується проведеними прямими?

25. Дано: $ABCD$ — паралелограм, DN і DM — його висоти (рис. 9.44). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.

26. Дано: $ABCD$ — паралелограм, AC — його діагональ, $BM \perp AC$, $DN \perp AC$ (рис. 9.45). Доведіть, що $BM = DN$.

27. Дано трикутник. Чи можуть його кути дорівнювати трьом кутам деякого паралелограма?

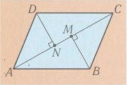


Рис. 9.45

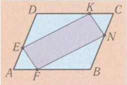


Рис. 9.46

28*. Ззовні паралелограма $ABCD$ з гострим кутом A побудовано рівносторонні трикутники ABM і DCN. Доведіть, що $AMCN$ — паралелограм.

29. $ABCD$ — паралелограм, $AE = AF = CK = CN$ (рис. 9.46). Доведіть, що E, F, N, K — вершини паралелограма.

30. На сторонах паралелограма $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM, BN, CP, DQ, як показано на рис. 9.47, а), б). Доведіть, що точки M, N, P і Q є вершинами паралелограма.

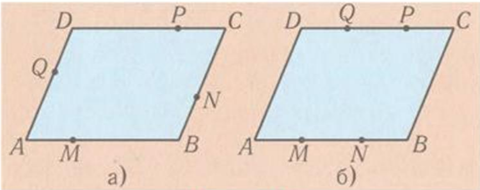


Рис. 9.47

31. При перетині бісектрис кутів паралелограма утворився чотирикутник. Доведіть, що цей чотирикутник є паралелограмом.

32. Дано три точки, що не лежать на одній прямій. Скільки існує паралелограмів, для яких ці точки є вершинами?

33. Доведіть, що діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.

34. Доведіть, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і в точці перетину діляться навпіл.

35. Сформулюйте і доведіть твердження, яке є оберненим до твердження попередньої задачі.

36. Доведіть, що всі висоти ромба рівні.

37. Чи істинне таке твердження: «Паралелограм, висоти якого рівні, є ромбом»?

38. Чи існує ромб з рівними діагоналями?

39. Одна з діагоналей ромба дорівнює його стороні. Визначте кути ромба.

40*. Як за допомогою двох прямолінійних розрізів: а) розрізати ромб на три частини, з яких можна скласти прямокутник; б) розрізати прямокутник на три частини, з яких можна скласти ромб?

41°. Чи існує трапеція, в якій два протилежних кути гострі? А тупі?

42°. Чи існує трапеція, в якій два протилежних кути рівні?

43°. Два кути трапеції дорівнюють 122° і 40°. Чи можна визначити інші її кути?

44. Чи можуть кути A, B, C, D трапеції $ABCD$ відноситися, як $3 : 7 : 2 : 5$?

45. Діагональ трапеції перпендикуляра до бічної сторони, а гострий кут, який лежить проти цієї діагоналі, дорівнює 50°. Визначте інші кути трапеції, якщо її менша основа дорівнює другій бічній стороні.

46. Побудуйте прямокутник $ABCD$ зі сторонами AB = 5 см і BC = 3 см та рівновеликий йому паралелограм $ABEF$ зі стороною BE = 5 см.

47. 1. Площа паралелограма дорівнює 24 см². Визначте відстань між його сторонами, якщо вони дорівнюють по 6 см.
2. У паралелограмі, площа якого дорівнює 41 см², сторони дорівнюють 5 см і 10 см. Визначте висоти паралелограма.

48. Сторони паралелограма 6 см і 4 см. Одна із висот дорівнює 5 см. Визначте іншу висоту. Скільки розв'язків має задача?

49. Побудуйте паралелограм, площа якого дорівнює 10 см², а сторони — 5 см і 3 см.

50. Дві смужки завширшки 4 см і 1 см, перетинаючись, утворюють паралелограм, площа якого дорівнює 6 см². Визначте сторони цього паралелограма.

51. Діагоналі ромба дорівнюють 8 см і 14 см. Визначте площу ромба.

52. Визначте висоту ромба, сторони якого дорівнюють 10 см, а площа — 100 см².

53. Побудуйте два нерівних, але рівновеликих паралелограми зі спільною стороною.

54. У паралелограмі $ABCD$ вершину A сполучено відрізками із серединами сторін BC і CD та вершиною C (рис. 9.48). Доведіть, що трикутники 1, 2, 3, 4 рівновеликі.

55. Через вершину паралелограма проведіть прямі, які розбивають цей паралелограм на 5 рівновеликих частин.

56. Дано: $ABCD$ — паралелограм, точка E належить діагоналі BD. Проведено $KL \parallel DC$ і $MN \parallel AD$ (рис. 9.49). Доведіть, що $AKEN$ і $EMCL$ — паралелограми і $S_{AKEN} = S_{EMCL}$.

57. Дано паралелограм $ABCD$, точки M, N, P, Q — відповідно середини його сторін AB, BC, CD, DA (рис. 9.50). Прямі AN, CQ, DM і BP обмежують чотирикутник. Доведіть, що цей чотирикутник теж є паралелограмом і що його площа становить $\frac{1}{5}$ від площі даного паралелограма.

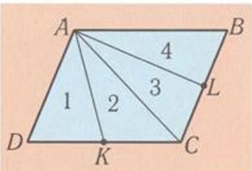


Рис. 9.48

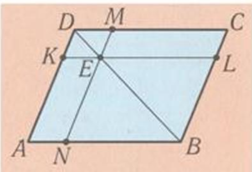


Рис. 9.49

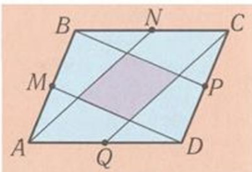


Рис. 9.50

58. 1. Визначте площу паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 4 см і 6 см, а кут між ними — 30°.
2. Визначте площу ромба, якщо його сторона дорівнює 10 см, а один із кутів — 150°.

§10 Друга та третя ознаки рівності трикутників

10.1. Друга ознака рівності довільних трикутників

Без бажання все здається важким, навіть найлегше.

Григорій Сковорода

Висновок про рівність паралельних відрізків з кінцями на паралельних прямих був виведений у п. 9.1 з рівності трикутників, що мають спільну сторону і рівні кути, які прилягають до цієї сторони (див. рис. 9.4). Саме ж доведення рівності цих трикутників було здійснено шляхом повороту одного з них на кут 180° відносно середини спільної сторони. Незначною модифікацією цього способу, а саме — заміною повороту на відповідне переміщення загального виду, можна довести значно загальніше твердження, яке є ще однією ознакою рівності трикутників.

Друга ознака рівності трикутників.

Якщо сторона і два прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.

Кожен знає, що без праці
Не змайструєш навіть цяці.

Богдан Чалий, «Сто пригод Барвінка та Ромашки»

Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ сторона AB дорівнює стороні A_1B_1, кут A дорівнює куту A_1, а кут B — куту B_1 (рис. 10.1). Перемістимо у просторі трикутник $A_1B_1C_1$ таким чином, щоб спочатку точка A_1 сумістилася з точкою A, а потім точка B_1 — з точкою B (рис. 10.2). Оскільки сторони AB і

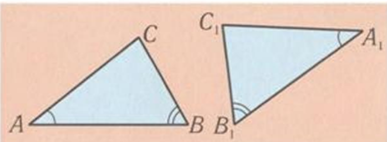


Рис. 10.1

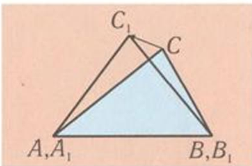


Рис. 10.2

A_1B_1 рівні між собою, то таке суміщення можливе і при цьому вся сторона A_1B_1 суміститься зі стороною AB.

Далі повертатимемо трикутник $A_1B_1C_1$ довкола сторони A_1B_1 поки точка C_1 не розміститься у площині трикутника ABC з того боку від прямої AB, з якого лежить точка C. Оскільки кут A_1 дорівнює куту A, то при цьому промінь A_1C_1 суміститься з променем AC, а оскільки кут B_1 дорівнює куту B, то промінь B_1C_1 суміститься з променем BC. У результаті точка C_1 суміститься з точкою C, бо інакше вийшло б, що промені AC і BC, окрім точки C, мають ще якусь іншу спільну точку C_1. А це означало б, що на прямій CC_1 лежить і точка A, і точка B, тобто, що всі три точки A, B, C лежать на одній прямій CC_1, не утворюючи трикутника. Оскільки таке неможливо, то виходить, що всі три сторони трикутника $A_1B_1C_1$ сумістяться з відповідними сторонами трикутника ABC (рис. 10.3). Отже, ці трикутники рівні між собою, що й треба було довести.

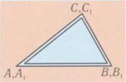


Рис. 10.3

Задача.

На сторонах кута A відкладені рівні відрізки AB і AC, а потім інші рівні відрізки BK і CM, як показано на рис. 10.4. Нехай O — точка перетину відрізків BM і CK. Довести, що промінь AO ділить кут A навпіл, тобто є бісектрисою цього кута.

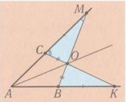


Рис. 10.4

Розв'язання. Оскільки відрізки AK і AM дорівнюють сумам $AB + BK$ та $AC + CM$ відповідно рівних відрізків, то вони рівні між собою.

Розглянемо трикутники AKC та AMB. Вони мають спільний кут MAB і рівні відповідні сторони, що утворюють цей кут: $AK = AM$, $AC = AB$. Тому за першою ознакою дані трикутники рівні. Звідси $\angle K = \angle M$.

Розглянемо трикутники BOK та COM. У них рівні сторони BK і CM, рівні прилеглі до них кути K і M, а також кути BOK та COM (як вертикальні). Тому рівними є й прилеглі кути OBK і OCM (оскільки сума всіх кутів трикутника дорівнює 180°). Тому за другою ознакою ці трикутники рівні. Звідси $BO = CO$.

Розглянемо нарешті трикутники AOB та AOC. У них рівні відповідні сторони AB і AC (за побудовою) та BO і CO (як щойно з'ясовано), а також кути ABO та ACO між ними (вони суміжні до рівних кутів OBK та OCM). Тому за першою ознакою ці трикутники рівні. Звідси $\angle OAB = \angle OAC$, що й треба було довести.

Зауваження. Результатом розглянутої задачі можна скористатися для ділення кута навпіл за допомогою циркуля і лінійки. Проведемо які-небудь два кола з центром у вершині даного кута A (рис. 10.5). У результаті визначаться точки B, C та K, M на сторонах кута. Далі будуємо точку O перетину відрізків BM та CK. Тоді AO — шукана бісектриса.

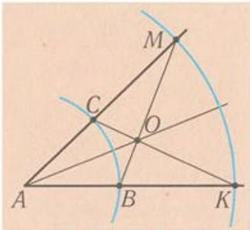


Рис. 10.5

10.2. Друга ознака рівності прямокутних трикутників

Наслідок
(друга ознака рівності прямокутних трикутників).

Якщо катет (або гіпотенуза) і прилеглий гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету (або гіпотенузі) та прилеглому гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні між собою.

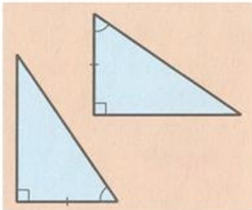


Рис. 10.6

Справді, нехай у двох прямокутних трикутниках рівні катети і по одному з прилеглих до них гострих кутів (рис. 10.6). Тоді, оскільки рівними є ще й прямі кути, які теж прилягають до даних катетів, то ці трикутники рівні за другою ознакою.

Якщо ж у прямокутних трикутниках рівні гіпотенузи і по одному з гострих кутів (рис. 10.7), то рівними є й інші гострі кути, — оскільки в сумі два гострих кути дають 90°. Отже, і тоді дані трикутники рівні за тою ж другою ознакою.

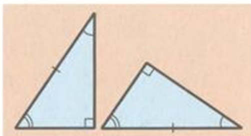


Рис. 10.7

10.3. Ознаки рівнобедреного трикутника

У п. 3.3 на основі першої ознаки рівності трикутників було доведено, що кути при основі рівнобедреного трикутника рівні між собою. Тепер, з використанням другої ознаки рівності трикутників, можна довести, що рівність кутів при одній зі сторін трикутника є характерною властивістю лише рівнобедрених трикутників, тобто їхньою *ознакою*.

Теорема
(ознака рівнобедреного трикутника).

Якщо у трикутнику два кути рівні, то він — рівнобедрений.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC $\angle B = \angle C$ (рис. 10.8). Проведемо бісектрису AK. Одержимо два трикутники AKB та AKC зі спільною стороною AK. Оскільки в них рівні дві пари кутів: $\angle B = \angle C$ і $\angle BAK = \angle CAK$, то рівні і треті кути: $\angle AKB = \angle AKC$ (адже сума кутів трикутника стала). Тому за спільною стороною AK і прилеглими до неї кутами $\Delta AKB = \Delta AKC$. Звідси $AB = AC$. Теорему доведено.

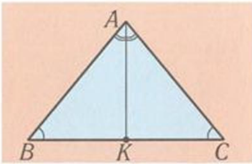


Рис. 10.8

Довести останню теорему можна інакше, не використовуючи теореми про суму кутів трикутника. А саме: застосувавши другу ознаку рівності до трикутника ABC і трикутника ACB, тобто того самого трикутника, вершини якого записані в іншому порядку. Оскільки сторона BC дорівнює стороні CB, $\angle C = \angle B$, а $\angle B = \angle C$, то $\Delta ABC = \Delta ACB$. Звідси $AB = AC$, тобто трикутник ABC — рівнобедрений.

Вище у п. 3.3 було доведено також, що в рівнобедреному трикутнику збігаються висота, медіана і бісектриса, проведені до основи. Ця властивість теж характерна лише для рівнобедрених трикутників. Точніше, ***ознаками рівнобедреного трикутника є те, що збігаються які-небудь два з трьох відріз-***

ків — медіана, висота та бісектриса, проведені до однієї зі сторін.

Доведення. 1. Нехай AK — медіана і висота трикутника ABC (див. рис. 10.8), тобто $KB = KC$, а $AK \perp BC$. Тоді прямокутні трикутники AKB і AKC рівні за першою ознакою. Звідси $AB = AC$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений.

2. Нехай AK — висота і бісектриса трикутника ABC (див. рис. 10.8). Тоді прямокутні трикутники AKB і AKC рівні за другою ознакою, оскільки катет AK у них спільний, а прилеглі до нього гострі кути BAK і CAK рівні. Звідси $AB = AC$, тобто трикутник ABC — рівнобедрений.

3. Нехай AK — медіана і бісектриса (рис. 10.9). Продовжимо медіану AK на таку саму довжину $KA_1 = AK$ і з'єднаємо точку A_1 з точками B і C. Тоді $\Delta A_1KB = \Delta AKC$ (кути при вершині K у них рівні, бо вони вертикальні, а сторони, які утворюють ці кути, — відповідно рівні за умовою і побудовою). Тому вказані трикутники рівні за першою ознакою. Звідси $\angle BA_1K = \angle CAK$. Але за умовою $\angle CAK = \angle BAK$. Отже, $\angle BA_1K = \angle BAK$. Тоді за ознакою трикутник BAA_1 — рівнобедрений і, отже, медіана BK у ньому є висотою. Таким чином, $AK \perp BC$. Виходить, що медіана і бісектриса AK у трикутнику ABC є ще й висотою. Тому за доведеним вище цей трикутник — рівнобедрений.

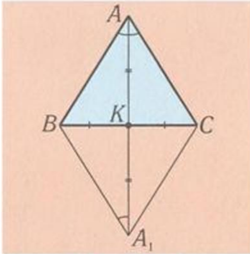


Рис. 10.9

Задача.

У трикутнику ABC бісектриси кутів B і C перетинаються в точці Q (рис. 10.10). Через точку Q проведено відрізок MN, паралельний основі BC, кінці якого належать бічним сторонам трикутника. Довести, що відрізок MN дорівнює сумі відрізків BM і CN.

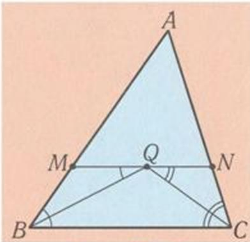


Рис. 10.10

Розв'язання. За означенням бісектриси $\angle MBQ = \angle QBC$, а за властивістю паралельних прямих $\angle QBC = \angle BQM$ ($MN \parallel BC$, BQ — січна). Таким чином, у трикутнику MBQ $\angle MBQ = \angle BQM$. Тому цей трикутник рівнобедрений, отже, $MQ = BM$.

Так само з'ясовуємо, що рівнобедреним є трикутник NCQ і в ньому $QN = CN$. Додавши одержані рівності, матимемо: $MQ + QN = BM + CN$, а звідси $MN = BM + CN$. Твердження задачі доведено.

10.4. Наслідок для рівностороннього трикутника

З властивостей і ознак рівнобедреного трикутника випливає, що в одному й тому самому трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути, а проти рівних кутів — рівні сторони.

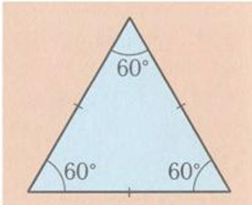


Рис. 10.11

Зокрема, у рівносторонньому трикутнику (рис. 10.11) всі кути рівні. А оскільки сума кутів у будь-якому трикутнику дорівнює 180°, то всі кути рівностороннього трикутника дорівнюють по 60°.

Навпаки, якщо у трикутнику всі кути дорівнюють по 60° (а для цього достатньо, щоб два з них дорівнювали по 60°), то цей трикутник — рівносторонній.

10.5. Властивість прямокутного трикутника з гострим кутом 30°

Використовуючи висновки з попереднього пункту, легко вивести цікаву властивість прямокутного трикутника, що має кут 30°.

Теорема

(про співвідношення між сторонами прямокутного трикутника з гострим кутом 30°).

Катет, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

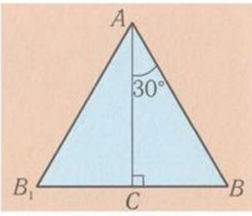


Рис. 10.12

Доведення. Нехай у трикутнику ACB (рис. 10.12) $\angle C = 90°$, а $\angle A = 30°$. Тоді $\angle B = 60°$. Продовжимо катет BC за вершину C на таку саму довжину $CB_1 = BC$ і з'єднаємо відрізком точки A і B_1. Одержимо прямокутний трикутник ACB_1, який за першою ознакою рівний трикутнику ACB. Тому $\angle B_1 = \angle B = 60°$. Виходить, що ΔABB_1 — рівносторонній. Отже, $AB = BB_1$.

Але $BB_1 = 2BC$. Тому $BC = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}AB$. Теорему доведено.

10.6. Співвідношення між сторонами й кутами різностороннього трикутника

Як зазначалося у п. 10.4, з властивостей та ознак рівнобедреного трикутника випливає, що проти рівних сторін у трикутнику лежать рівні кути, а проти рівних кутів — рівні сторони. А якщо сторони не рівні, то яке співвідношення між кутами, що лежать проти них? А якщо кути не рівні, то яке співвідношення між сторонами, що лежать проти них?

Чим менше знає людина, тим більше в неї зневаги до буденного, яке оточує її.
Олександр Герцен, «Листи про вивчення природи»

В тому випадку, коли величини сторін або кутів відчутно відрізняються, то з конкретних рисунків видається доволі очевидним, що проти більшого кута лежить більша сторона, а проти більшої сторони — більший кут. Але якщо немає такої відчутної різниці у розмірах, то такі висновки не є очевидними. Тому відповіді на ці запитання з'ясуємо, як і належить у геометрії, — за допомогою логічних (тобто мисленнєвих) розмірковувань.

Теорема
(про співвідношення між сторонами й кутами трикутника).

У будь-якому трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута — більша сторона.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC (рис. 10.13) сторона AB більша за сторону AC. Доведемо, що тоді кут C більший від кута B. Для цього відкладемо на стороні AB відрізок AC_1, рівний меншій стороні AC, і з'єднаємо точки C і C_1. Одержимо рівнобедрений трикутник ACC_1 з основою CC_1. Отже, $\angle ACC_1 = \angle AC_1C$. Але кут ACC_1 є лише частиною кута ACB.

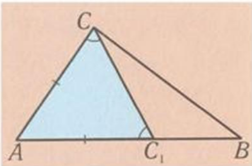


Рис. 10.13

Отже, весь кут ACB більший від кута ACC_1. З іншого боку, кут AC_1C є зовнішнім для трикутника CC_1B. Тому він більший від несуміжного з ним кута B. Виходить, що кут C трикутника більший, а кут B — менший від рівних кутів ACC_1 і AC_1C. Тому $\angle C > \angle B$, що й треба було довести.

Нехай тепер у трикутнику ABC кут C більший від кута B (рис. 10.14). Доведемо, що тоді й сторона AB більша від сторони AC. Справді, ці сторони не можуть бути рівними, бо тоді проти рівних сторін лежали б рівні кути C і B, але за умовою вони не рівні. Крім цього, сторона AB не може бути й меншою від сторони AC, бо тоді, як щойно доведено, кут C був би меншим від кута B. Тому залишається єдина можливість: сторона AB більша від сторони AC. Теорему доведено повністю.

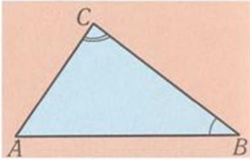


Рис. 10.14

Наслідок.

Проти прямого або тупого кута у трикутнику лежить найбільша сторона.

Справді, у трикутнику може бути лише один прямий або тупий кут, і тоді він найбільший з-поміж усіх кутів. Тому проти нього лежить і найбільша сторона.

Зокрема, гіпотенуза прямокутного трикутника завжди більша від кожного з катетів (цей висновок випливає також із теореми Піфагора).

10.7. Нерівності для сторін трикутника

Як уже з'ясовано вище, для кутів будь-якого трикутника виконується характерне співвідношення у формі рівності: сума цих кутів дорівнює 180°. Аналогічного співвідношення для сторін не існує, але для них справджуються певні нерівності.

Теорема
(про нерівність трикутника).

Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших сторін і більша від їхньої різниці.

Доведення. Нехай маємо довільний трикутник ABC (рис. 10.15). Доведемо, для прикладу, що в ньому $AC < AB + BC$. Для цього продовжимо сторону AB за точку B і відкладемо на цьому продовженні відрізок $BB_1 = CB$. З'єднавши точки B_1 і C, одержимо рівнобедрений трикутник BCB_1 з основою CB_1. У цьому трикутнику $\angle BCB_1 = \angle BB_1C$. З іншого боку, кут ACB є тільки частиною кута ACB_1. Тому $\angle ACB_1$ більший від кута BCB_1 і, отже, більший від кута BB_1C. Тому в трикутнику ACB_1 проти меншого кута B_1 лежить менша сторона AC, ніж проти більшого кута C: $AC < AB_1$. А якщо візьмемо до уваги, що $AB_1 = AB + BC$, то звідси й одержуємо потрібну нерівність: $AC < AB + BC$.

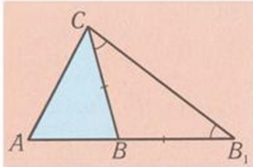


Рис. 10.15

Віднімаючи від обох частин цієї нерівності AB, одержимо: $BC > AC - AB$. Подібним чином можна одержати нерівність $AB > AC - BC$. А якщо взяти до уваги інші нерівності для сум сторін: $AB < AC + BC$, $BC < AC + AB$, то з них одержаться й інші нерівності для різниць, наприклад, $AC > AB - BC$. Теорему доведено.

Нерівність $AC < AB + BC$ для сторін трикутника ABC називаються *нерівністю трикутника*.

Наслідок 1.

Якщо справджується рівність $AC + CB = AB$, то точка C належить відрізку AB (рис. 10.16).

Рис. 10.16

Припустимо, що точка C лежить поза прямою AB. Тоді за нерівністю трикутника $AC + CB > AB$. А це суперечить умові, за якою $AC + CB = AB$. Отже, таке припущення неправомірне. Якби точка C лежала на прямій AB за межами відрізка AB, то або відрізок AC, або відрізок BC був би більшим за AB. Тому рівність

$AC + CB = AB$ теж не могла б виконуватися. Отже, залишається єдина можливість: точка C може належати лише відрізку AB. А для цього випадку рівність $AC + CB = AB$ очевидна. Таким чином, наслідок 1 доведено.

Наслідок 2
(про довжину ламаної).

Довжина ламаної завжди перевищує довжину відрізка, що з'єднує її кінці.

Доведення. Якщо ламана складається із двох ланок AB і BC (рис. 10.17), то твердження наслідку випливає з нерівності трикутника: $AC < AB + BC$.

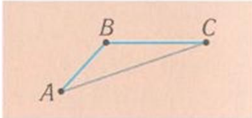


Рис. 10.17

Нехай маємо ламану $ABCDE$, що складається, наприклад, з 4 ланок (рис. 10.18). Тоді, провівши відрізки AC і CE, за нерівністю трикутника послідовно матимемо:

$AC < AB + BC$;

$CE < CD + DE$;

$AE < AC + CE < (AB + BC) + (CD + DE)$.

Отже, $AE < AB + BC + CD + DE$, що й треба було довести.

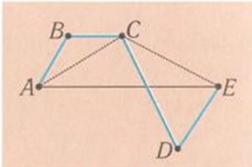


Рис. 10.18

Подібним чином можна довести твердження наслідку для будь-якої кількості ланок ламаної.

10.8. Теорема про середню лінію трикутника

Яскравим прикладом застосування другої ознаки рівності трикутників є доведення теореми про середню лінію трикутника.

Середньою лінією трикутника називають відрізок, який з'єднує середини двох його сторін.

У будь-якому трикутнику можна провести три середні лінії. На рис. 10.19 у трикутнику ABC проведено всі три середні лінії LM, MN і LN.

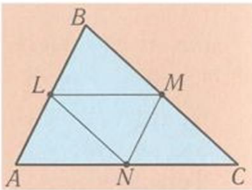


Рис. 10.19

Теорема
(про середню лінію трикутника).
Середня лінія трикутника паралельна стороні, якій не належать її кінці, і дорівнює половині цієї сторони.

Доведення. Нехай маємо довільний трикутник ABC, L — середина його сторони AB ($AL = LB$) (рис. 10.20). Проведемо через L пряму LM, паралельну AC (M — точка на стороні BC), а також пряму LN, паралельну BC (N — точка на стороні AC). Тоді матимемо, що $LM = NC$, а $LN = MC$ — як відрізки паралельних прямих з кінцями на інших паралельних прямих.

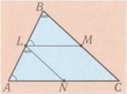


Рис. 10.20

З іншого боку, в трикутниках ALN і LBM $AL = LB$ (за умовою), $\angle LAN = \angle BLM$ (як відповідні при паралельних LM і AC та січній AB), а $\angle ALN = \angle LBM$ (як відповідні при паралельних LN і BC та тій самій січній AB). Тому за другою ознакою ці трикутники рівні. Отже, рівні їхні сторони AN і LM, а також сторони LN і BM.

Виходить, таким чином, що $LM = NC$ і $LM = AN$. Так само $LN = MC$ і $LN = BM$. Звідси $NC = AN$, а $MC = BM$. Отже, N — середина сторони AC, а M — середина сторони BC, тобто LN і LM — середні лінії у трикутнику ABC. При цьому $LN = MC = \frac{1}{2}BC$, а $LM = NC = \frac{1}{2}AC$, і за побудовою $LN \parallel BC$, $LM \parallel AC$.

Аналогічно можна довести, що й $MN \parallel AB$ і $MN = \frac{1}{2}AB$ (див. рис. 10.19). Теорему доведено.

Інколи ослик Іа думав: «Чому?», а інколи: «З якої причини?», а деколи він думав навіть так: «А який звідси випливає висновок?»
Алан Мілн, «Вінні-Пух і всі-всі-всі»

Наслідок 1.
Пряма, яка ділить навпіл бічну сторону трикутника і паралельна його основі, ділить навпіл й іншу бічну сторону.

Наслідок 2.

Відрізок, який з'єднує середини бічних сторін трапеції (такий відрізок називається середньою лінією трапеції), паралельний основам трапеції і дорівнює їхній півсумі.

Доведення. Нехай $ABCD$ — трапеція, AB і CD — її основи, M — середина бічної сторони AD (рис. 10.21). Проведемо діагональ DB, а потім пряму MN, паралельну основам. Тоді за наслідком 1 ця пряма перетне діагональ DB в її середині L. Отже, ML — середня лінія трикутника DAB. Застосувавши далі той самий наслідок до трикутника DBC, одержимо, що LN — середня лінія уже цього трикутника. Отже, MN — *середня лінія* трапеції і вона паралельна її основам.

Далі знаходимо:

$$MN = ML + LN = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}(AB + DC).$$

Твердження наслідку доведено.

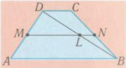


Рис. 10.21

10.9. Властивість медіан довільного трикутника

У будь-якому трикутнику можна провести три медіани. Якщо виконати рисунок доволі точно, то всі вони неодмінно пройдуть через одну точку (рис. 10.22). До того ж, кожна з медіан цією точкою поділиться у цілком певному відношенні. Це й стверджується наступною теоремою.

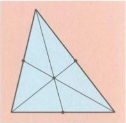


Рис. 10.22

Теорема

(про властивість медіан трикутника).

Всі три медіани трикутника перетинаються в одній точці і кожна з них ділиться цією точкою у відношенні 2 : 1, беручи від вершини трикутника.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC проведено медіани BM і CN; позначимо через G точку їхнього перетину (рис. 10.23). Відрізок MN — середня лінія трикутника ABC. Тому за теоремою про середню лінію

$MN \parallel BC$ і $MN = \frac{1}{2}BC$.

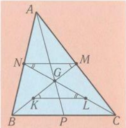


Рис. 10.23

Проведемо середню лінію KL у трикутнику GBC (K належить GB, L належить GC). Так само за властивістю середньої лінії $KL \parallel BC$ і $KL = \frac{1}{2}BC$. Тому $MN \parallel KL$ і $MN = KL$.

Розглянемо трикутники GMN і GKL. У них рівні сторони (MN та KL) і прилеглі до них кути ($\angle GMN = \angle GKL$ — як внутрішні різносторонні при паралельних MN і KL та січній MK; $\angle GNM = \angle GLK$ — як внутрішні різносторонні при паралельних MN і KL та січній NL). За другою ознакою ці трикутники рівні між собою. Таким чином, $BK = KG = GM$, а $CL = LG = GN$, тобто медіани BM і CN справді в точці перетину G діляться у відношенні $2:1$, беручи від вершин B і C.

Так само доведемо, що точка G' перетину медіан AP і BM ділить кожну із цих медіан у тому самому відношенні $2:1$. Отже, точки G і G' ділять один і той самий відрізок BM в одному й тому самому відношенні (беручи від точки B). А це означає, що ці точки збігаються. Отже, всі три медіани триктуника проходять через точку G і кожна з них ділиться цією точкою у відношенні $2:1$. Теорему доведено.

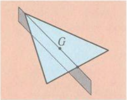


Рис. 10.24

Точку перетину медіан трикутника часто називають ще *центром ваги* або *центром мас* трикутника. Підставою для цього є такі фізичні міркування.

Кожна медіана розбиває трикутник на два трикутники рівної площі (оскільки в них рівні основи і спільна висота). Тому якщо виготовити трикутник з якої-небудь однорідної пластинки і покласти його на горизонтально розміщене ребро рівної лінійки по лінії медіани (рис. 10.24), то в ідеальних умовах, не зважаючи на дію сили тяжіння, пластина перебуватиме в стані рівноваги.

Те ж саме матимемо і тоді, коли аналогічним чином розмістимо пластину відносно іншої медіани.

Отже, точка G перетину медіан матиме ту властивість, що коли сперти пластину цією точкою на вертикальну опору (рис. 10.25) або підвісити до нитки, то вона перебуватиме в стані рівноваги. Це й означає, що точка G є центром її ваги.

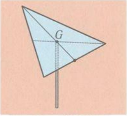


Рис. 10.25

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Фалес і зародження великої грецької науки

На початку VI ст. до н. е. виникає новий потужний центр культурного життя стародавнього світу — Греція. Завдячуючи новій демократичній формі правління, в грецьких містах-державах з небаченою до того інтенсивністю розвиваються науки і мистецтва. Зокрема, з'являються перші філософські школи, в яких ведуться інтелектуальні пошуки єдиних принципів світобудови і справедливих законів облаштування суспільного життя. Легендарним уособленням цього руху, «найпершим з грецьких мудреців», вважають Фалеса.

Фалес народився в азійській грецькій колонії Мілет. У молоді роки, ймовірно, був купцем і здійснив декілька подорожей до Єгипту і Вавилонії. Там він прилучився до скарбниці східної мудрості, а повернувшись на батьківщину, заснував першу наукову школу.

Фалес

Зокрема, Фалес — перший з учених, з чиїм ім'ям пов'язують доведення конкретних геометричних істин. Учений V ст. н. е. Прокл Діодох у свої коментарях до «Начал» Евкліда, посилаючись при цьому на втрачену «Історію геометрії» Євдема Родоського (IV ст. до н.е.), стверджує, що Фалес першим відкрив, що при перетині двох паралельних прямих січною утворюються рівні відповідні кути. Відкрив Фалес і теорему про рівність двох трикутників, у яких рівні сторони і два прилеглих до неї кути. Євдем приписує це відкриття саме Фалесу на тій підставі, що без нього неможливо вирішити задачу про знаходження відстані до корабля на морі, яку, за легендами, теж розв'язав Фалес. Досі достеменно невідомо, яким саме було розв'язання Фалеса. Можливі два варіанти — «горизонтальний» і «вертикальний».

Суть першого з них полягає в наступному. Для визначення відстані від доступної точки A до недосяжної точки B (наприклад, до корабля на морі), на рівній місцевості беруть який-небудь відрізок AD (рис. 10.26) і фіксують його середину C. Потім через точку D прово-

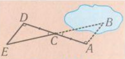


Рис. 10.26

дять промінь DE під тим самим кутом до відрізка AD, під яким його перетинає промінь AB, але в протилежному до AB напрямку. Нарешті, на промені DE знаходять таку точку E, щоб точки E, C і B розміщувалися на одній прямій. Тоді довжина відрізка DE дорівнюватиме шуканій відстані AB.

Справді, оскільки у трикутниках CAB і CDE за побудовою $AC = CD$, $\angle A = \angle D$, а $\angle ACB = \angle DCE$ (як вертикальні), то за другою ознакою ці трикутники рівні між собою. Тому рівними є і їхні сторони, які лежать проти рівних кутів, зокрема, $AB = DE$.

«Вертикальний» спосіб вимірювання міг полягати у визначенні кута зору ADB на недосяжний предмет B з позиції D, розташованої на скелі чи на башті (рис. 10.27) з наступною пеленгацією під цим кутом певного об'єкта C на суші, відстань до якого відома. Тоді шукана відстань AB дорівнюватиме відомій відстані AC. Це випливає з рівності (за другою ознакою) прямокутних трикутників DAB і DAC.

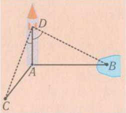
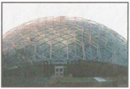


Рис. 10.27

Серед інших геометричних фактів, доведення яких Евдем приписує Фалесу, називається теорема про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника. Незважаючи на всю свою очевидність і, здавалося б, тривіальність, цей факт використовується у геометрії надзвичайно часто, зокрема, при доведенні інших дуже важливих геометричних теорем. І серед них — третьої ознаки рівності трикутників.

10.10. Третя ознака рівності довільних трикутників

Практичний досвід переконує, що виготовлені з прямолінійних елементів конструкції трикутної форми є дуже жорсткими. На відміну від них аналогічні чотирикутні чи багатокутні форми такої жорсткості не мають, і їх можна легко деформувати. Тому для посилення великих металевих конструкцій, наприклад, ферм підйомних кранів, залізничних мостів, дахів великих споруд тощо, їх часто «зв'язують» численними трикутними елементами.



Кліматон.
Ботанічний сад у Міссурі
Приклад застосування жорсткості трикутників в архітектурі

А причиною жорсткості трикутних форм є те, що трикутник повністю визначається своїми сторонами. Це означає, що трикутники з відповідно рівними сторонами завжди рівні між собою.

Отже, справджується така *третя ознака рівності трикутників*:

Якщо три сторони одного трикутника рівні відповідно трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.

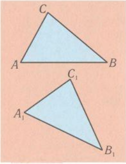


Рис. 10.28

Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ і $AC = A_1C_1$ (рис. 10.28). Перемістимо у просторі трикутник $A_1B_1C_1$ таким чином, щоб спочатку вершина A_1 сумістилася з вершиною A, а потім вершина B_1 — з вершиною B. Оскільки $A_1B_1 = AB$, то таке суміщення можливе і при цьому сторона A_1B_1 суміститься зі стороною AB (рис 10.29). Далі повертатимемо трикутник ABC_1 навколо прямої AB, аж поки вершина C_1 не розміститься у площині трикутника ABC з протилежного боку до точки C відносно прямої AB. Нехай C_2 — кінцеве положення точки C_1 (рис. 10.30). Тоді, провівши відрізок CC_2, одержимо два рівнобедрених трикутники ACC_2 і BCC_2 (оскільки $AC = AC_2$, а $BC = BC_2$). У цих трикутниках кути при основах рівні, тобто $\angle ACC_2 = \angle AC_2C$, а $\angle BCC_2 = \angle BC_2C$. Можливі три випадки взаємного розміщення відрізків AB і CC_2:

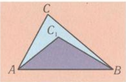


Рис. 10.29

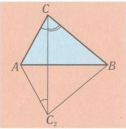


Рис. 10.30

1) перетинаються у внутрішній точці відрізка AB (рис. 10.30);

2) перетинаються в одному з кінців відрізка AB (рис. 10.31);

3) не перетинаються (рис. 10.32).

В усіх трьох випадках рівними є кути ACB та AC_2B. У першому випадку вони дорівнюють сумі рівних кутів, у третьому — різниці, а в другому — є кутами при основі рівнобедреного трикутника BCC_2. Отже, у кожному з цих випадків трикутники ABC і ABC_2 рівні

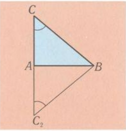


Рис. 10.31

за двома сторонами AC і AC_2, BC і BC_2 та кутом між ними. А оскільки $\Delta ABC_2 = \Delta A_1B_1C_1$, то й $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, що й треба було довести.

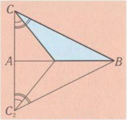


Рис. 10.32

Можна довести цю ознаку інакше. Сумістимо, як і в першому способі, сторони AB та A_1B_1 трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, а потім вершину C_1 розмістимо з того самого боку від прямої AB, з якого лежить точка C; нехай C_2 — її кінцеве положення (рис. 10.33). Тоді потрібно буде довести, що точки C і C_2 збігаються. Припустимо, що це не так і позначимо через M середину відрізка CC_2. Матимемо два рівнобедрених трикутники ACC_2 і BCC_2 зі спільною основою CC_2, а їхні медіани AM та BM будуть одночасно й висотами. Точка M не може належати прямій AB, оскільки відрізок CC_2, який містить цю точку, повністю лежить з одного боку від прямої AB. Тому прямі AM і BM не збігаються. Виходить, що через одну й ту саму точку M у площині проходить дві прямі AM і BM, перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої CC_2. Оскільки таке неможливе, то зроблене припущення неправомірне. Отже, точки C і C_2 збігаються. Тому $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

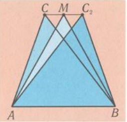


Рис. 10.33

Задача.

Довести, що чотирикутник, в якому протилежні сторони попарно рівні — паралелограм.

Розв'язання. Нехай маємо чотирикутник $ABCD$, в якому рівні протилежні сторони AB і DC, а також протилежні сторони AD і BC (рис. 10.34). Проведемо діагональ AC і розглянемо трикутники ABC та CDA. Вони рівні за третьою ознакою. З рівності цих трикутників випливає, що $\angle CAB = \angle ACD$, а $\angle BCA = \angle DAC$. Звідси за ознакою паралельності $AB \parallel CD$, а $BC \parallel DA$. Чотирикутник, в якому протилежні сторони попарно паралельні, називається паралелограмом. Отже, $ABCD$ — паралелограм. Твердження задачі доведено.

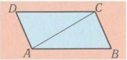


Рис. 10.34

10.11. Третя ознака рівності прямокутних трикутників

Наслідок
(третя ознака рівності прямокутних трикутників).

Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету й гіпотенузі іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні між собою.

Доведення. За теоремою Піфагора катет прямокутного трикутника визначається його гіпотенузою та іншим катетом. Тому, якщо у двох прямокутних трикутниках рівні гіпотенузи і по одному з катетів, то рівними будуть й інші катети. Отже, за третьою ознакою рівності довільних трикутників ці прямокутні трикутники рівні.

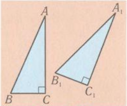


Рис. 10.35

Існують доведення, які не залежать від теореми Піфагора, а отже, і від ознак прямокутника та від аксіоми про паралельні прямі.

Інше доведення. Нехай у трикутниках ABC та $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $BC = B_1C_1$, $AB = A_1B_1$ (рис. 10.35). Побудуємо трикутник ACD, що дорівнює трикутнику ACB, і трикутник $A_1C_1D_1$, що дорівнює трикутнику $A_1C_1B_1$ (рис. 10.36). Оскільки $\angle ACB = \angle ACD = 90°$, то точки D, C і B лежать на одній прямій. З тих самих міркувань точки D_1, C_1, B_1 теж лежать на одній прямій. Отже, маємо трикутники ABD і $A_1B_1D_1$, які рівні за трьома сторонами. Справді, в них: $AB = A_1B_1$ за умовою; $AD = A_1D_1$, оскільки $AD = AB$, $A_1D_1 = A_1B_1$, а $A_1B_1 = AB$; $BD = B_1D_1$ через те, що $BD = 2BC$, $B_1D_1 = 2B_1C_1$, а $BC = B_1C_1$. З рівності трикутників ABD і $A_1B_1D_1$ випливає рівність кутів B і B_1. Тоді трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за першою ознакою. Ознаку доведено.

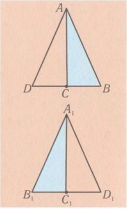


Рис. 10.36

Можна довести цю ознаку ще інакше, узагалі не спираючись на ознаку рівності трикутників за трьома сторонами.

Доведення. Прикладемо дані прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ один до одного рівними катетами, як показано на рис. 10.37. Одержимо рівнобедрений трикутник BAA_1, в якому CB — висота, проведена до основи. Оскільки ця висота є й бісектрисою, то $\angle ABC = \angle A_1BC$. Отже, трикутники ABC і A_1BC рівні за першою ознакою. А оскільки $\Delta A_1BC = \Delta A_1B_1C_1$, то рівні й трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, що й треба було довести.

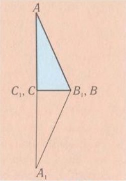


Рис. 10.37

Задача.

Довести, що кути при основах рівнобічної трапеції рівні, і, навпаки, якщо кути при основі трапеції рівні, то вона рівнобічна.

Розв'язання. Нехай маємо рівнобічну трапецію $ABCD$ з основами AB і DC, тобто в ній $AB \parallel DC$, $AD = BC$ (рис. 10.38). Проведемо з кінців меншої основи висоти DE і CF. Одержимо прямокутні трикутники AED та BFC, які рівні за катетом ($DE = CF$ — як відрізки паралельних прямих між паралельними прямими DC і AB) та гіпотенузою ($AD = BC$ за умовою). Тому рівними є їхні кути A і B.

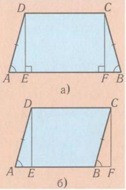


Рис. 10.38

Кути A і B не можуть бути відповідними, як зображено на рис. 10.38, б), оскільки тоді даний чотирикутник $ABCD$ був би паралелограмом. Отже, обидва вони є кутами трапеції при основі AB (рис. 10.38, а).

Якщо рівні кути A і B, то рівні й кути D і C, оскільки внаслідок паралельності прямих AB і DC $\angle A + \angle D = 180°$ і $\angle B + \angle C = 180°$. Звідси $\angle D = \angle C$. Перше твердження задачі доведено.

Навпаки, якщо в трапеції $ABCD$ рівні кути A і B, то рівні й прямокутні трикутники AED та BFC, але тепер уже за другою ознакою (катети DE і CF рівні як висоти трапеції). А тому рівними є бічні сторони AD і BC. Друге твердження задачі теж доведено.

10.12. Застосування третьої ознаки для доведення оберненої теореми Піфагора

Третя ознака рівності трикутників застосовується в геометрії значно рідше, ніж перші дві. Зараз обмежимося лише одним, але вельми переконливим прикладом. Йтиметься про обернену теорему Піфагора.

Теорема Піфагора *(обернена).*

Якщо квадрат однієї зі сторін трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін, то такий трикутник прямокутний, а його гіпотенузою є більша зі сторін.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC (рис. 10.39) $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Доведемо, що тоді кут C — прямий. Розглянемо прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$ з прямим кутом C_1, у якому $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. За прямою теоремою Піфагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$. Отже, $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$. Звідси $A_1B_1^2 = AB^2$, і тому $A_1B_1 = AB$. Виходить, що в трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ рівні всі три пари відповідних сторін. Тому ці трикутники рівні. А оскільки в трикутнику $A_1B_1C_1$ кут C_1 прямий, то й у трикутнику ABC відповідний йому кут C теж прямий. Теорему доведено.

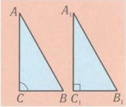


Рис. 10.39

Прямокутні трикутники, в яких довжини катетів і гіпотенузи виражаються цілими числами a, b, c, називаються *піфагоровими трикутниками*, а самі ці трійки чисел — *піфагоровими трійками*.

У школі Піфагора було з'ясовано, зокрема, що піфагоровими є трійки чисел виду:

$$a = n,\ b = \frac{1}{2}(n^2 - 1),\ c = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$$

Не можна бути математиком, не будучи водночас і поетом в душі.
Софія Ковалевська

при будь-яких непарних n. Наприклад, піфагорова трійка (3; 4; 5) (легко перевірити, що справді $3^2 + 4^2 = 5^2$) одержується із цих формул при $n = 3$, а піфагорова трійка (5; 12; 13) — при $n = 5$. Але, наприклад, піфагорова трійка (8; 15; 17) не одержується за цими формулами. У III ст. н. е. видатний математик пізньої античності Діофант довів, що всі без винятку піфагорові трійки можна одержати за формулами:

$$a = 2k \cdot l \cdot m, \quad b = k(l^2 - m^2), \quad c = k(l^2 + m^2),$$

де k, l, m — будь-які натуральні числа і $l > m$.

Кожен із піфагорових трикутників можна застосувати для побудови прямого кута. Наприклад, якщо взяти мотузку завдовжки $3 + 4 + 5 = 12$ мір, зв'язати її кінці і за допомогою кілків напнути на місцевості у вигляді трикутника зі сторонами 3, 4 і 5 (рис. 10.40), то кут, утворений сторонами 3 і 4, буде прямим. Відомий німецький учений і автор чотиритомних «Лекцій з історії математики» Моріц Кантор (1829–1920) на одній із давньоєгипетських гравюр, що відтворювала закладку храму, розгледів натяк на реальне застосування такого способу. На цій підставі він зробив висновок, що давнім єгиптянам була відома теорема Піфагора. А на підтвердження своєї гіпотези долучив ще й свідчення Демокріта (V ст. до н. е.), який після відвідин Єгипту з гордістю розповідав, що в галузі математики ніхто його там не перевершив, навіть знамениті гарпендонапти, тобто ті, що напинають мотузки.

Рис. 10.40

У зв'язку з усією цією історією, хоч і значною мірою гіпотетичною, прямокутний трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 стали називати *єгипетським* трикутником.

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Від теореми Піфагора до теореми Ферма

У 1621 р. французький поет і математик-аматор Гаспар Клод Баше де Мезиріак (1581 — 1638) видав власний переклад з грецької на латину «Арифметики» Діофанта. Один із примірників цього видання привернув увагу іншого любителя математики П'єра Ферма (1601–1665), якого пізніше зарахують до числа найвизначніших математиків усіх епох. За освітою й професією Ферма був юристом і навіть займав високі адміністративні посади в Тулузі. Але весь свій вільний час він віддавав улюбленому заняттю — математиці.

Сам П'єр Ферма не написав жодної наукової праці. Майже всі його феноменальні відкриття ставали відомими завдяки листам до видатних учених, його сучасників, — Паскаля, Декарта, Мерсенна, Валліса. А ще Ферма полюбляв записувати свої міркування прямо на полях книжок, які опрацьовував. Особливою «увагою» в нього користувалася Діофантова «Арифметика». У 1670 р., вже після смерті П'єра Ферма, цю книжку разом з численними зауваженнями вченого перевидав його старший син Самюель. Так розпочалася одна з найвідоміших інтриг в історії математики.

Гаспар Клод Баше де Мезиріак

У другому розділі «Арифметики» Діофанта під номером 8 розв'язується така задача: «Подати квадрат даного натурального числа a у вигляді суми квадратів інших натуральних чисел». Отже, йдеться, очевидно, про пошук піфагорових трійок чисел $(x; y; a)$, для яких $a^2 = x^2 + y^2$. Ознайомившись із розв'язком цієї задачі, запропонованим Діофантом, підсумком якого були наведені вище формули для піфагорових трійок, Ферма робить на полях помітку, яка більше 350 років не давала спокою як видатним математикам, так і численним простим шанувальникам цієї науки. Ось її зміст: «Але на противагу цьому не можна розкласти ні куб на два куби, ні четвертий степінь на два четверті, ні взагалі жоден інший степінь, більший квадрата, на два однойменні степені. Я знайшов для цього воістину чудесне доведення, але ці поля надто вузькі, аби його можна було тут викласти».

П'єр Ферма

Твердження, яке формулює Ферма, пізніше отримало назву *Великої теореми Ферма*. Ця теорема стверджує, що рівняння з трьома невідомими x, y, z:

$$z^n = x^n + y^n$$

не має розв'язків у натуральних числах при жодному $n > 2$. Тобто, при жодному натуральному $n > 2$ не існує жодного набору натуральних чисел x, y, z, для яких справджується рівність $z^n = x^n + y^n$. Виходить, що значення $n = 2$ є винятковим, бо рівняння $z^2 = x^2 + y^2$ не тільки має розв'язки у натуральних числах, але й має нескінченну кількість таких розв'язків, — це піфагорові трійки, якими виражаються сторони прямокутних трикутників.

В одному зі своїх листів Ферма таки виклав своє доведення винайденої ним теореми для показника $n = 4$. Як пізніше з'ясувалося, для цього випадку теорема Ферма доводиться найпростіше. Чи дійсно знав Ферма доведення теореми в загальному випадку, а чи тільки лукавив, інтригуючи нащадків? А може сподівався, що знайдене доведення для часткового випадку вдасться легко поширити на загальний випадок? Найпевніше за все, — саме сподівався.

Леонард Ейлер

Для $n = 5$ теорему вдалося довести лише найавторитетнішому математику XVIII ст. Леонарду Ейлеру, якого за його феноменальні обчислювальні здібності французький енциклопедист Жан Д'Аламбер називав «дияволом в людській подобі». Пізніше іншими математиками були одержані доведення для всіх n у межах першого десятка, потім — у межах сотні, тисячі, сотень тисяч. Проте в загальному випадку теорема Ферма так і залишалася недоведеною аж до самого кінця XX ст. На початку 90-х рр. минулого сторіччя доведення Великої теореми Ферма були одержані для всіх $n < 4\,000\,000$.

Пауль Вольфскель

Увага до Великої теореми Ферма значно зросла після того, як у 1908 р. було оприлюднено заповіт німецького лікаря-офтальмолога Пауля Вольфскеля (1856 – 1906). Цим заповітом засновувалася премія в розмірі 100 000 німецьких марок за доведення теореми Ферма. Згідно з положенням про премію, доведення мало бути обов'язково опубліковане, схвалене Королівським науковим товариством, а після публікації повинно минути не менше 2-х років.

Цікаво, що сам лікар Вольфскель, незважаючи на основний вид своїх занять, тривалий час, щоправда безрезультатно, займався доведенням Великої теореми Ферма. А захопився він цією проблемою, відвідавши якось лекцію сімдесятирічного берлінського професора

Ернста Куммера (1810 – 1893), якому вдалося довести теорему Ферма для всіх $n \leq 100$ (за це відкриття йому було присуджено навіть премію Паризької Академії наук).

Розруха та інфляція в Німеччині після Першої світової війни майже повністю знецінили премію Вольфскеля. Лише пізніше економічне зростання повернуло їй певну частину доволі значної початкової вартості. Але жоден грошовий вимір уже не міг зрівнятися з престижністю самого звання лауреата, тобто автора доведення Великої теореми Ферма.

Ернст Куммер

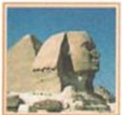
Віковий штурм неприступної інтелектуальної фортеці завершився лише на початку 90-х рр. XX ст. У червні 1993 р. світ облетіла сенсаційна звістка: Велику теорему Ферма доведено! Автором доведення став сорокарічний на той час математик з Принстонського університету (США) Ендрю Вайлс. Щоправда, ще рік йому знадобилося на те, аби усунути окремі неточності, на які вказали колеги-математики. Тому остаточною датою доведення теореми Ферма вважається 1994 р.

У 1998 р. Вайлс доповів про своє відкриття на Всесвітньому математичному конгресі в Берліні. Перед більш як двотисячним зібранням провідних математиків з усього світу він прочитав годинну лекцію на тему: «20 років теорії чисел», яка завершувалася доведенням Великої теореми Ферма. Весь зал понад 15 хв стоячи аплодував доповідачеві. Це була феноменальна перемога всього планетарного розуму.

Ендрю Вайлс, переможець Великої теореми Ферма

Як відомо, знаменита Нобелівська премія в галузі чистої математики не присуджується. Натомість найвищою нагородою за математичні відкриття вважається медаль Філдса, заснована канадським математиком Джоном Філдсом (1863 – 1932). Присуджується вона раз на чотири роки 2 – 4 ученим. Але в положенні про філдсівську медаль є окремий пункт, за яким вік претендента на момент присудження не повинен перевищувати 40 років.

У 1994 р., на попередньому математичному конгресі, Вайлс був беззаперечним претендентом на цю медаль, але на момент проведення цього конгресу він не встиг повністю усунути недоліки в доведенні, на які йому вказали спеціалісти. А в 1998 р. учений уже подолав 40-річний рубіж. Оскільки, таким чином, із суто формальної причини присудити Вайлсу медаль Філдса не було змоги, то вирішили нагородити його спеціальною «Срібною пластиною IMU» (IMU — міжнародне математичне товариство). Ця відзнака увінчала собою численні інші нагороди, яких Ендрю Вайлс удостоївся за своє досягнення. Серед них була й історична премія Вольфскеля.



Перевір себе

1. Сформулюйте другу ознаку рівності довільних трикутників і порівняйте її з першою ознакою.
2. Як із другої ознаки рівності довільних трикутників випливає друга ознака рівності прямокутних трикутників? Сформулюйте її.
3. Як здійснюється доведення другої ознаки рівності трикутників?
4. Як застосовується друга ознака рівності трикутників для доведення ознаки рівнобедреного трикутника?
5. Сформулюйте властивості й ознаки рівнобедреного трикутника та вкажіть ті, які є взаємно оберненими твердженнями.
6. Які трикутники називаються рівносторонніми? Як можна сформулювати ознаку рівностороннього трикутника?
7. Яку характерну властивість має прямокутний трикутник з гострим кутом 30°?
8. Які залежності існують між сторонами й кутами у різносторонніх трикутниках? Які наслідки вони мають для прямокутних і тупокутних трикутників?
9. Які співвідношення існують між сторонами будь-якого трикутника?
10. Що таке середня лінія трикутника і яку властивість вона має? Скільки середніх ліній має трикутник?
11. Яку властивість мають медіани трикутника? Чому точку перетину медіан називають центром ваги трикутника?
12. У чому полягає третя ознака рівності довільних трикутників? Як на її основі довести третю ознаку рівності прямокутних трикутників? У чому полягає ця ознака?
13. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Піфагора. Як її можна довести? Як можна застосувати обернену теорему Піфагора для побудови прямих кутів?

Задачі і вправи

1°. Чи істинні такі твердження:
а) «Якщо сторона і два кути одного трикутника дорівнюють стороні й двом кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні»;
б) «Якщо сторона і три кути одного трикутника дорівнюють стороні й трьом кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні»?

2°. Побудуйте два не рівних трикутники так, щоб сторона й два кути одного з них дорівнювали стороні й двом кутам іншого.

3. Доведіть, що існують не рівні трикутники з відповідно рівними кутами.

4°. Дано: $ABCD$ — прямокутник, AE і BF — бісектриси його кутів (рис. 10.41). Доведіть, що $DE = CF = AD$. За яких умов точки E та F збігаються?

5. Дано: $AO = OB$, $\angle C = \angle D$ (рис. 10.42). Доведіть, що $\angle A = \angle B$.

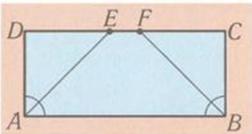


Рис. 10.41

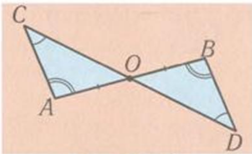


Рис. 10.42

6°. Дано: $AB = AC$, $\angle B = \angle C$ (рис. 10.43). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.

7°. Дано: $OA = OB$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 10.44). Доведіть, що $OC = OD$.

8°. Дано: $AO = OC$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 10.45). Доведіть, що $AD = BC$.

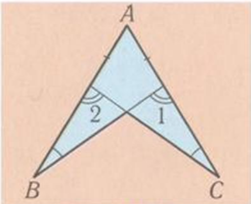


Рис. 10.43

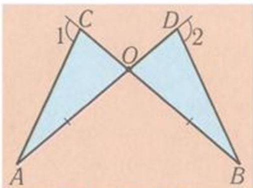


Рис. 10.44

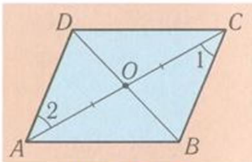


Рис. 10.45

9. Дано: ΔABC — рівнобедрений; $MN \parallel AB$ (рис. 10.46). Доведіть, що ΔMNC теж рівнобедрений.

10. Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 10.47). Доведіть, що $AC = BC$.

11. Дано: $AC = BC$; $\angle 1 = \angle 2$ (рис 10.48). Доведіть, що $MA = MB$.

12. Дано: $AD = BC$; $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 10.49). Доведіть, що $OC = OD$.

13. Дано: $AC = BC$; $AM = BN$ (рис. 10.50). Доведіть, що $AN = BM$.

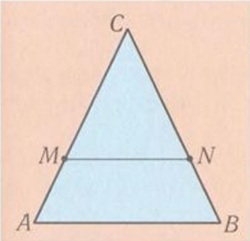


Рис. 10.46

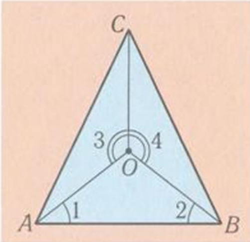


Рис. 10.47

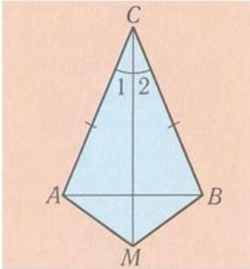


Рис. 10.48

14. Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 10.51). Доведіть, що $AB \perp CD$.

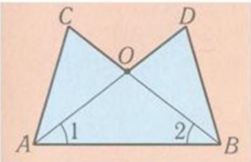


Рис. 10.49

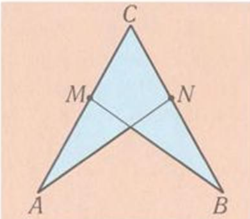


Рис. 10.50

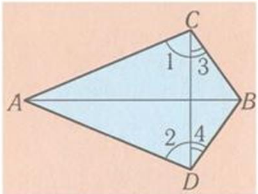


Рис. 10.51

15. Дано: $AO = OB$; $AM \perp OA$, $BN \perp OB$ (рис. 10.52). Доведіть, що $\angle AMN = \angle BNM$.

16. Дано: ΔABC — рівносторонній, $\angle RAC = \angle PBA = \angle QCB$ (рис. 10.53). Доведіть, що ΔPQR теж рівносторонній.

17. Дано: $OA = OB$, $OC = OD$ (рис. 10.54). Доведіть, що $OE = OF$.

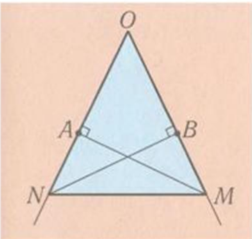


Рис. 10.52

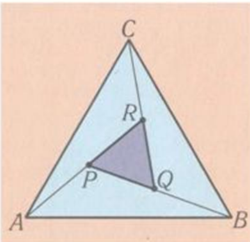


Рис. 10.53

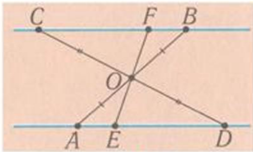


Рис. 10.54

18*. Дано: $ABCD$ — паралелограм, $AL = CN$, $BM = DK$ (рис. 10.55). Доведіть, що $KLMN$ — теж паралелограм.

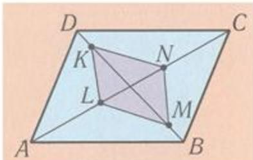


Рис. 10.55

19°. Основа й прилеглий до неї кут одного рівнобедреного трикутника дорівнюють відповідно основі й прилеглому до неї куту іншого рівнобедреного трикутника. Чи рівні ці трикутники?

20. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику бісектриси кутів при основі рівні.

21. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику висоти, проведені до бічних сторін, рівні.

22. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC з вершин A і C проведені медіани, що перетинаються в точці G. Доведіть, що трикутник AGC рівнобедрений.

23. Доведіть, використовуючи другу ознаку рівності трикутників, що діагоналі прямокутника точкою перетину діляться на чотири рівних відрізки.

24. Доведіть, що діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

25. $ABCD$ — рівнобічна трапеція з основами AB і CD, O — точка перетину її діагоналей. Доведіть, що $AO = OB$, а $CO = OD$.

26. На основі AB рівнобедреного трикутника ABC взято точки M і N так, що $AM = BN$. З точок M, N до AB поставлено перпендикуляри MP і NQ, які перетинають бічні сторони трикутника відповідно у точках P і Q. Доведіть, що $PM = QN$.

27. Доведіть, що в рівних трикутниках рівними є бісектриси і висоти, проведені з вершин рівних кутів.

28. Доведіть, що коли діагональ паралелограма є бісектрисою його кута, то цей паралелограм є ромбом.

29. Доведіть, що пряма, яка перетинає бічну сторону рівнобедреного трикутника і паралельна іншій його бічній стороні, відтинає від даного трикутника рівнобедрений трикутник.

30. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за рівними висотою, проведеною до основи, і кутом при вершині, протилежній цій основі.

31. Чи можуть довжини сторін трикутника у сантиметрах виражатися такими числами: а) 5, 6, 7; б) 5, 6, 12?

32. Чи можуть сторони трикутника відноситися, як: 1) 1 : 2 : 3; 2) 4 : 7 : 9; 3) 5 : 7 : 12?

33. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 6 см. Якою може бути його основа, якщо вона має виражатися цілим числом?

34. Чи може сума діагоналей паралелограма бути більшою за його периметр?

35. Чи може різниця сторін паралелограма бути більшою за одну з діагоналей?

36. Доведіть, що кожна сторона трикутника менша за половину його периметра.

37. Доведіть, що сума двох сторін трикутника більша за його півпериметр.

38. Доведіть, що сума діагоналей трапеції більша за суму її основ.

39. Доведіть, що сума діагоналей чотирикутника більша за його півпериметр.

40. Доведіть, що медіана CM трикутника ABC менша за півсуму сторін CA і CB.

41. Доведіть, що сума медіан трикутника менша за його периметр.

42°. Периметри двох трикутників рівні. Чи випливає звідси рівність трикутників?

43°. Дано: $AB = BC$, $AD = DC$ (рис. 10.56). Доведіть, що $\angle A = \angle C$.

44°. Дано: $AB = AD$, $BC = CD$ (рис. 10.57). Доведіть, що $\angle BAO = \angle DAO$, $\angle BCO = \angle DCO$, $BO = OD$, $AC \perp BD$.

45. Дано: $AC = BD$, $AD = BC$ (рис. 10.58). Доведіть, що $OC = OD$.

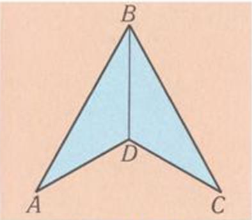


Рис. 10.56

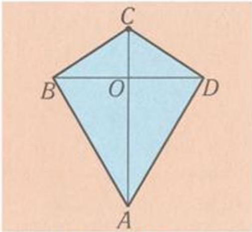


Рис. 10.57

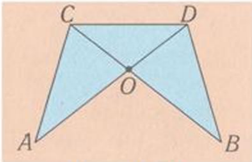


Рис. 10.58

46. Доведіть, що у рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, рівні.

47°. У прямокутному трикутнику ABC кут A дорівнює 30°, а катет BC — 40 см. Визначте гіпотенузу AB.

48°. У прямокутному трикутнику ABC кут B дорівнює 60°, а гіпотенуза AB — 10 см. Визначте катет BC.

49. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, утворює з бічною стороною кут 60°. Визначте довжину цієї висоти, якщо бічна сторона трикутника дорівнює 12 см.

50. Прямі AB і CD паралельні. Визначте відстань між ними, якщо $AD = 8$ см, а $\angle ADC = 30°$.

51. Пряма перетинає дві паралельні прямі. Один із кутів, які вона утворює з однією із цих прямих, дорівнює 150°. Визначте довжину відрізка січної з кінцями на паралельних прямих, якщо відстань між цими прямими дорівнює 7 см.

52. У прямокутному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, а сума гіпотенузи й меншого катета — 60 см. Визначте довжину гіпотенузи.

53. Доведіть, що якщо катет прямокутного трикутника удвічі менший за гіпотенузу, то протилежний йому кут дорівнює 30°.

54*. Доведіть, що якщо гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 15°, то висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює чверті гіпотенузи. Чи істинне обернене твердження?

§11 Прямокутний паралелепіпед і деякі найважливіші факти з геометрії у просторі

В своїх паралелепіпедоподібних кімнатах
Ти можеш відшукати все, що хочеш знайти.

Уривок з пісні «Хей-хай» гурту «Хвилю тримай»

Подібно до того, як уважне спостереження (теоретизування) за прямокутником веде до найважливіших фактів з геометрії на площині, так само «приглядання» до прямокутного паралелепіпеда приведе нас до низки важливих фактів з геометрії у просторі. Як і з прямокутником, з прямокутним паралелепіпедом ви теж знайомі давно, але раніше могли не замислюватись над тим, які фундаментальні властивості простору сконцентровані навіть у самій можливості побудови цієї фігури.

11.1. Побудова прямокутного паралелепіпеда за його розгорткою

Нагадаємо, що *прямокутним паралелепіпедом* називається геометричне тіло, обмежене трьома парами відповідно рівних прямокутників. Ці прямокутники називаються *гранями*, їхні сторони — *ребрами*, а вершини — *вершинами* прямокутного паралелепіпеда. На рис. 11.1 зображено декілька прямокутних паралелепіпедів. Якщо всі грані прямокутного паралелепіпеда — квадрати, то він називається *кубом*.

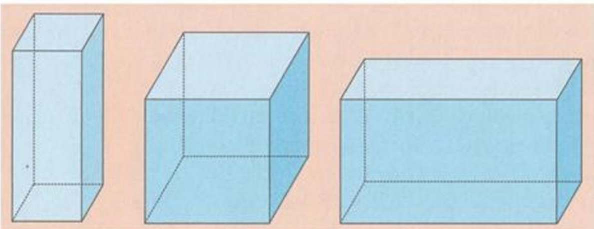


Рис. 11.1

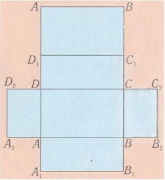


Рис. 11.2

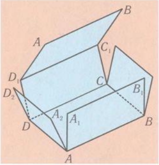


Рис. 11.3

А тепер нагадаємо відомий спосіб побудови прямокутного паралелепіпеда за його розгорткою (рис. 11.2). Можемо уявляти собі цей паралелепіпед у вигляді, наприклад, картонної коробки для цукерок.

Нехай прямокутник $ABCD$ уособлює дно (нижню основу), а прямокутники ABB_1A_1 та ADD_2A_2 — дві суміжні стінки (бічні грані). Беремо одну з бічних граней, наприклад ABB_1A_1, і повертаємо її довкола ребра AB основи доти, поки кут DAA_1 не стане прямим (рис. 11.3). Після цього можна належним чином припасувати суміжну грань ADD_2A_2, тобто так, щоб збіглися сторони AA_1 та AA_2, адже кут DAA_2 теж прямий (рис. 11. 4). У результаті одержується спільне бічне ребро AA_1, яке одночасно утворює прямі кути з обома суміжними сторонами AB та AD основи, що сходяться у вершині A.

Багато хто вважає, що математика — наука суха, нудна і полягає лише в умінні рахувати. Це нісенітниця. Цифри в математиці грають найдріб'язковішу, чи не останню роль. Це — найвища філософська наука, наука найбільших поетів.

Михайло Остроградський

Аналогічним чином «склеюються» інші бічні грані і визначаються решта бічних ребер BB_1, CC_1, DD_1 (рис. 11.5). Вони теж утворюватимуть прямі кути з відповідними суміжними сторонами основи. Після цього залишиться лише припасувати верхню грань $D_1C_1B'A'$, сумістивши її краї зі сторонами утвореного прямокутника $A_1B_1C_1D_1$.

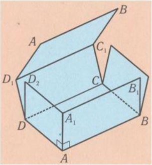


Рис. 11.4

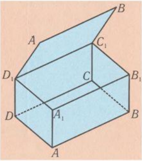


Рис. 11.5

Але чи завжди можна буде належним чином виконати це останнє припасовування верхньої грані, тобто чи справді одержаний чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ теж буде прямокутником, та ще й рівним нижній основі $ABCD$? Чи взагалі він плоский? — Можна довести, що так.

Справді, оскільки обидва ребра A_1B_1 і DC паралельні ребру AB, то вони паралельні між собою (п. 8.5). Оскільки, крім цього, ребро DC паралельне ребру D_1C_1, то знову маємо два ребра A_1B_1 і D_1C_1, які паралельні одному ребру DC. Звідси випливає, що ребра A_1B_1 і D_1C_1 паралельні. Аналогічним чином з'ясовуємо, що $A_1D_1 \parallel B_1C_1$. Отже, $A_1B_1C_1D_1$ — паралелограм. Тому для завершення доведення достатньо показати, що який-небудь з його кутів, наприклад, кут A_1, є прямим. Тоді за властивостями паралельних прямих звідси випливатиме, що прямими є й усі решта кутів.

Проведемо відрізки DB і D_1B_1 (рис. 11.6). Оскільки бічні ребра BB_1 і DD_1 рівні і паралельні ребру AA_1, то вони рівні і паралельні між собою. Тому BB_1D_1D — паралелограм. Отже, $DB = D_1B_1$. Внаслідок цього трикутники ADB і $A_1D_1B_1$ рівні за трьома сторонами, а звідси $\angle D_1A_1B_1 = \angle DAB = 90°$, що й треба було довести.

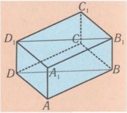


Рис. 11.6

Висновок, який можна зробити з проведеного дослідження, полягає в тому, що у результаті виконання описаних побудов з розгорткою справді *завжди* одержуватиметься геометричне тіло, обмежене трьома парами відповідно рівних прямокутників, тобто прямокутний паралелепіпед. Крім цього, було з'ясовано й деякі геометричні закономірності у розміщенні елементів прямокутного паралелепіпеда, а саме, що його бічні ребра паралельні і що кожне з них перпендикулярне до двох ребер основи, які сходяться з ним в одній вершині.

11.2. Рівність кутів з відповідно співнапрямленими сторонами у просторі

Проведене у попередньому пункті доведення рівності кутів DAB і $D_1A_1B_1$, що належать основам прямокутного паралелепіпеда (див. рис. 11.6), можна поширити узагалі на будь-які кути з відповідно співнапрямленими сторонами. Раніше у п. 8.8 ця властивість була обґрунтована для кутів, розміщених в одній площині.

Теорема
(про кути з відповідно співнапрямленими сторонами).

Кути з відповідно співнапрямленими сторонами рівні.

Доведення. Для кутів, які лежать в одній площині, твердження теореми вже доведено. Тому зараз вважатимемо, що дані кути PAQ та $P_1A_1Q_1$ з відповідно співнапрямленими сторонами не лежать в одній площині (рис. 11.7).

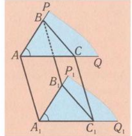


Рис. 11.7

Відкладемо на відповідних сторонах AP та A_1P_1 які-небудь рівні відрізки AB і A_1B_1, а на відповідних сторонах AQ і A_1Q_1 — які-небудь рівні відрізки AC і A_1C_1. Тоді кожен з чотирикутників AA_1B_1B та AA_1C_1C буде паралелограмом. Тому відрізки BB_1 та CC_1 рівні і паралельні відрізку AA_1. Отже, $BB_1 = CC_1$, а за властивістю транзитивності паралельних прямих у просторі $BB_1 \parallel CC_1$. Звідси випливає, що паралелограмом є чотирикутник BCC_1B_1, а тому $BC = B_1C_1$. Виходить, що в трикутниках ABC та $A_1B_1C_1$ рівними є по три пари відповідних сторін. За третьою ознакою ці трикутники рівні, а тому рівні і їхні відповідні кути A і A_1. Теорему доведено.

11.3. Перпендикулярність ребер і граней прямокутного паралелепіпеда. Перпендикулярність прямої і площини

Кожну пару протилежних граней прямокутного паралелепіпеда можна назвати *основами*. Тоді інші грані називатимуться *бічними* гранями. Ребра, по яких перетинаються бічні грані, називаються *бічними* ребрами. Всі бічні ребра паралельні і рівні.

Відповідно до описаних у п. 11.1 побудов, кожне бічне ребро прямокутного паралелепіпеда перпендикулярне до обох ребер основи, які сходяться з ним в одній вершині. Можна довести, що звідси випливає перпендикулярність бічного ребра до кожної прямої основи, що проходить через ту саму вершину. У зв'язку з цим кажуть, що бічні ребра прямокутного паралелепіпеда *перпендикулярні* до його основ.

Рис. 11.8

Наочно проілюструвати перпендикулярність прямої і площини можна за допомогою розкритої книги з твердими палітурками. Поставте книгу на стіл, як показано на рис. 11.8. Тоді ви побачите, що її корінець, який перпендикулярний до обох нижніх країв палітурки, буде перпендикулярним також і до нижнього краю кожної сторінки. Отже, *якщо пряма a перпендикулярна до двох прямих b і c площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна і до кожної прямої l даної площини, що проходить через цю точку, тобто перпендикулярна до площини* (рис. 11.9).

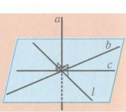


Рис. 11.9

11.4. Паралельність протилежних граней прямокутного паралелепіпеда. Паралельність площин

Із зазначеного у попередньому пункті випливає, що вершини верхньої основи $A_1B_1C_1D_1$ прямокутного паралелепіпеда є кінцями рівних перпендикулярів AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, поставлених до площини його нижньої основи $ABCD$ (рис. 11.10). Це дуже нагадує відповідну властивість прямокутника, яка виправдовує саму назву «паралельні» для його протилежних сторін (згадайте, що в перекладі з грецької «паралельні» — це «ті, що йдуть поруч»). Площини, які мають аналогічну властивість, теж є паралельними, тобто теж «ідуть поруч» на однаковій відстані одна від одної. Звідси утворено й назву «паралелепіпед», що означає «плоскопаралельне тіло».

Якийсь математик сказав, що насолода не у відкритті істини, а в пошуку її.

Лев Толстой

Означення ж паралельних площин повністю аналогічне до означення паралельних прямих: площини називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

Ознака паралельності площин теж цілком аналогічна до відповідної ознаки паралельності прямих:

дві площини, які перпендикулярні до однієї прямої, паралельні.

Доведення. Нехай площини α і β перпендикулярні до прямої AB (вважаємо, що точка A належить площині α, а точка B — площині β) (рис. 11.11). Припустимо, що вони мають деяку спільну точку C.

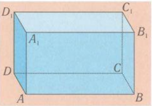


Рис. 11.10

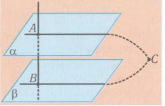


Рис. 11.11

Тоді $AB \perp AC$ і $AB \perp BC$, тобто з точки C на пряму AB опущено два перпендикуляри. Оскільки такого не може бути, то зроблене припущення неправомірне. Отже, площини α і β паралельні, що й треба було довести.

У прямокутному паралелепіпеді площина кожної з основ $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна до кожного бічного ребра. Тому вони паралельні між собою. А оскільки за основи можна взяти будь-які протилежні грані прямокутного паралелепіпеда, то паралельними є площини узагалі будь-яких двох протилежних граней. Кажуть також, що паралельні і самі ці грані.

Геометричним місцем кінців усіх рівних перпендикулярів, поставлених до площини з одного боку від неї, є інша площина, паралельна даній (рис. 11.12).

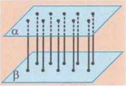


Рис. 11.12

На цій геометричній властивості засновані проекти абсолютної більшості архітектурних споруд. Один з прикладів зображено на заставці до цього розділу. Незчисленні застосування цієї властивості в інженерії. Наприклад, на ній ґрунтується дія рейсмусового верстата для обробки деревини (згадайте про рейсмус для проведення паралельних ліній у столярній справі (п. 9.1)). Вона зводиться до того, щоб надати оброблюваній дощці чи брусу сталої товщини. Якщо одну сторону дошки попередньо обробити на фугувальному верстаті, тобто надати їй плоскої форми, то після того, як дошка пройде через рейсмусовий верстат і набуде однакової товщини, друга її сторона теж стане плоскою і паралельною першій.

11.5. Паралельність ребер граням прямокутного паралелепіпеда. Паралельність прямої і площини

Пряма і площина називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

Розглянемо у прямокутному паралелепіпеді, зображеному на рис. 11.10, пряму B_1A_1 і площину основи $ABCD$. Обидві ці фігури перпендикулярні до прямої AA_1. Доведемо, що вони паралельні між собою.

Справді, якби вони перетиналися в деякій точці K, то в трикутнику KAA_1 було б два прямих кути, що неможливо (нагадаємо, що перпендикулярність прямої AA_1 до площини $ABCD$ означає, що вона перпендикулярна до *кожної* прямої цієї площини). Тому таке припущення неправомірне.

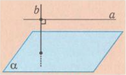


Рис. 11.13

Узагальнюючи ці міркування, маємо таку *ознаку паралельності прямої і площини*: якщо пряма a і площина α одночасно перпендикулярні до якоїсь іншої прямої b, то вони паралельні між собою (рис. 11.13).

11.6. Від прямокутного паралелепіпеда до призми

Якщо видозмінити розгортку прямокутного паралелепіпеда (див. рис. 11.2), взявши замість прямокутних основ $ABCD$ та $A_1B_1C_1D_1$ інші рівні многокутники, а також відповідну до кількості їхніх сторін іншу кількість прямокутників для бічних граней, то одержимо розгортку *прямої призми* (рис. 11.14). Саму пряму призму (рис. 11.15) одержимо з цієї розгортки у той самий спосіб, за яким з розгортки прямокутного

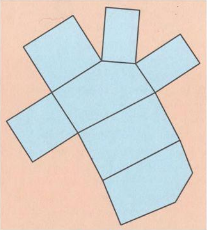


Рис. 11.14

паралелепіпеда одержали парелелепіпед (див. рис. 11.2–11.5). Отже, можемо сказати, що *прямою призмою* називається геометричне тіло, обмежене двома рівними многокутниками (це — *основи* призми) і відповідною до кількості сторін цих многокутників кількістю прямокутників (це — *бічні грані* призми). Бічні грані призми прилягають одна до одної по *бічних* ребрах, а до основ — по *ребрах основи* призми. Кінці ребер призми називаються її *вершинами*.

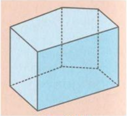


Рис. 11.15

Бічні ребра прямої призми рівні і паралельні між собою, а також перпендикулярні до основ призми. Їхня спільна довжина називається *висотою* призми.

Усі грані призми утворюють її *повну поверхню*. Інколи є сенс брати до уваги лише бічні грані. Вони утворюють *бічну* поверхню призми.

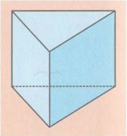


Рис. 11.16

За кількістю сторін основи прямі призми поділяються на *трикутні* (рис. 11.16), *чотирикутні* (рис. 11.17), *п'ятикутні* (див. рис. 11.15) тощо. Прямокутний паралелепіпед є чотирикутною прямою призмою, в основі якої лежить прямокутник.

Позначення для призм утворюють з позначень обох її основ, записуючи їх в один рядок одне за одним. При цьому самі основи зазвичай позначають однаковими літерами, але з додатковими позначками — індексами або штрихами. Наприклад, на рис. 11.17 зображено пряму чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

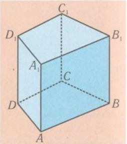


Рис. 11.17

Якщо пряму призму зрізати двома паралельними площинами, що перетинають усі бічні ребра, але не перпендикулярними до них, то утвориться геометричне тіло, яке називається *похилою призмою* (рис. 11.18). Бічні ребра похилої призми теж паралельні між собою, але уже не перпендикулярні до її основ. Звідси і її назва — *похила* призма.

Поверхня похилої призми складається з двох рівних основ і бічних граней. Кількість бічних граней дорівнює кількості сторін основи. Бічними гранями є паралелограми.

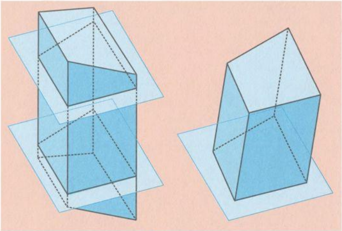


Рис. 11.18

Окремим видом похилих призм є *похилі паралелепіпеди* (рис. 11.19). Всі грані похилого паралелепіпеда є паралелограмами.

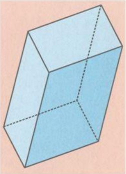


Рис. 11.19

У перекладі з грецької мови слово «призма» означає «обпиляне тіло». В цій назві доволі точно передаються особливості форми цього геометричного тіла.

Призматичні форми надзвичайно поширені у техніці, індустрії та будівництві. Цьому сприяє простота утворення таких форм при значній їхній різноманітності.

Призми є одним із часткових видів *многогранників* — геометричних тіл, обмежених многокутниками. Ці многокутники називаються *гранями* многогранника, звідси і назва — многогранник.

11.7. Об'єм прямокутного паралелепіпеда і прямої призми

Числова характеристика величини простору, зайнятого геометричним тілом, називається *об'ємом* даного тіла. Об'єм будь-якого тіла додатний, а якщо тіло складається з декількох частин, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих частин.

За одиницю вимірювання об'ємів береться об'єм *одиничного куба*, тобто куба, ребро якого дорівнює прийнятій одиниці вимірювання довжин. Ця одиниця називається *кубічною одиницею* з відповідним уточненням — кубічний сантиметр, кубічний дециметр, кубічний метр тощо. Наприклад, 1 кубічний сантиметр (скорочено 1 куб. см або 1 $см^3$) — це об'єм куба з ребром 1 см.

— Стій-но! — мовило дівчатко. — Поміркуємо спочатку.

Богдан Чалий, «Сто пригод Барвінка та Ромашки»

Далі виведемо формули для обчислення об'ємів найпоширеніших многогранників — прямокутного паралелепіпеда і прямої призми.

Об'єм прямокутного паралелепіпеда

Основа прямокутного паралелепіпеда має два виміри — довжину і ширину. Якщо ж основу задано, то для побудови паралелепіпеда достатньо задати ще його бічне ребро, тобто висоту. Отже, для визначення прямокутного паралелепіпеда потрібно три виміри — *довжину, ширину* і *висоту*. Ці виміри називаються *вимірами* прямокутного паралелепіпеда.

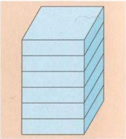


Рис. 11.20

У кубі всі три виміри рівні між собою.

Виведення формули для обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда проводиться аналогічно до виведення формули для обчислення площі прямокутника (див. 1.4).

Позначимо числові значення довжини, ширини і висоти прямокутного паралелепіпеда відповідно через a, b і c. Розглянемо спочатку випадок, коли всі три числа a, b, c натуральні.

Розіб'ємо кожне з бічних ребер даного паралелепіпеда на c рівних частин і через точки поділу, які знаходяться на однаковій висоті над основою, проведемо площини (рис. 11.20). Ці площини будуть паралельними між собою та перпендикулярними до бічних ребер паралелепіпеда. Вони розіб'ють цей паралелепіпед на c шарів одиничної товщини. Довжина й ширина кожного такого шару дорівнюватиме довжині й ширині основи паралелепіпеда. Тому якщо позначимо через v об'єм одного із шарів, то об'єм усього паралелепіпеда дорівнюватиме $v \cdot c$.

Розглянемо, далі, один із виділених шарів (рис. 11.21). Очевидно, що він містить стільки одиничних кубиків, скільки одиничних квадратиків містить його основа, тобто $a \cdot b$ штук. Тому об'єм v цього шару теж дорівнює $a \cdot b$. Отже, для об'єму V усього прямокутного паралелепіпеда одержуємо відому з попередніх класів формулу:

$$V = v \cdot c = abc.$$

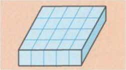


Рис. 11.21

А тепер доведемо, що такою самою формулою визначається об'єм прямокутного паралелепіпеда і тоді, коли його виміри a, b, c будуть будь-якими раціональними числами.

Вважатимемо для спрощення, що числа a, b, c уже зведені до спільного знаменника, тобто мають вигляд:

$$a = \frac{p}{s},\ b = \frac{q}{s},\ c = \frac{r}{s},$$

Вимірювання величин є вихідним пунктом усіх застосувань математики.
Анрі Лебег

де p, q, r, s — деякі натуральні числа. Тоді якщо відрізок завдовжки s візьмемо за нову одиницю вимірювання довжин, то в цих нових одиницях заданий паралелепіпед матиме виміри p, q, r, а його об'єм, отже, у відповідних нових кубічних одиницях, як щойно доведено, виражатиметься числом $p \cdot q \cdot r$.

Водночас нова кубічна одиниця становитиме лише $\frac{1}{s^3}$ від початкової кубічної одиниці, оскільки в початковому одиничному кубику міститься $s \cdot s \cdot s = s^3$ кубиків з ребром $\frac{1}{s}$. Отже, об'єм прямокутного паралелепіпеда у початкових кубічних одиницях виражатимемо числом

$$V = (p \cdot q \cdot r) \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{p}{s} \cdot \frac{q}{s} \cdot \frac{r}{s} = a \cdot b \cdot c,$$

що й треба було довести.

Математика — це наука про форму і кількість. Математичний розум — це всього лише логіка, застосована для спостереження за формою і кількістю.
Едгар По

Отже, одержали такий результат: *об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку його вимірів.*

Зокрема, об'єм куба з ребром a дорівнює a^3. Звідси утворено назву «куб» для третього степеня числа.

Об'єм прямої призми

Спочатку виведемо формулу для обчислення об'єму прямої трикутної призми. Це виведення багато в чому нагадуватиме виведення формули для обчислення площі трикутника.

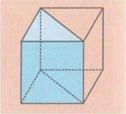


Рис. 11.22

Якщо провести площину через два протилежних бічних ребра прямокутного паралелепіпеда, то цією площиною він розіб'ється на дві рівні трикутні призми (рис. 11.22). Отже, об'єм V однієї із цих призм дорівнюватиме половині об'єму паралелепіпеда. Якщо a, b — виміри основи паралелепіпеда, а H — його висота, то $V = \frac{1}{2}ab \cdot H$. Водночас величина $\frac{1}{2}ab$ виражає площу S основи трикутної призми — прямокутного трикутника з катетами a і b. Тому для цієї призми остаточно одержуємо формулу: $V = S \cdot H$.

Отже, якщо основою прямої призми є прямокутний трикутник з площею S, а висота призми дорівнює H, то її об'єм V обчислюється за формулою:

$$V = S \cdot H.$$

Покажемо, що цією формулою виражається об'єм будь-якої прямої призми з площею основи S і висотою H.

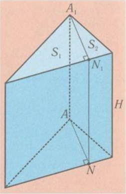


Рис. 11.23

Розглянемо спочатку довільну пряму трикутну призму (рис. 11.23). Нехай A, A_1 — вершини найбільших кутів основ. Із цих вершин проведемо висоти AN, A_1N_1 основ, а потім — площину, що проходить через прямі AA_1 та NN_1. Вибір саме найбільших кутів A, A_1 гарантує, що висоти AN, A_1N_1 проходитимуть всередині основ призми, а тому проведена площина розіб'є задану трикутну призму на дві менші трикутні призми. Основами цих призм будуть уже прямокутні трикутники, а їхні висоти дорівнюватимуть висоті H заданої призми.

Якщо позначимо через S_1, S_2 площі основ утворених менших трикутних призм, то, відповідно до з'ясованого вище, їхні об'єми дорівнюватимуть відповідно $S_1 \cdot H$ та $S_2 \cdot H$. Отже, для об'єму V заданої трикутної призми маємо:

$$V = S_1H + S_2H = (S_1 + S_2) \cdot H = S \cdot H,$$

що й передбачалося довести.

Нехай, нарешті, маємо яку завгодно пряму призму з площею основи S і висотою H (рис. 11.24).

Провівши декілька площин через бічні ребра, наприклад, як показано на рисунку, розіб'ємо дану призму на декілька трикутних призм з тією самою висотою H. Нехай S_1, S_2, ... — площі їхніх основ. Тоді оскільки об'єм V заданої призми дорівнює сумі об'ємів усіх одержаних трикутних призм, то

$$V = S_1H + S_2H + ... = (S_1 + S_2 + ...) \cdot H = S \cdot H,$$

що й треба було довести.

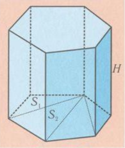


Рис. 11.24

Таким чином, *об'єм будь-якої прямої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту*.

Виявляється, що так само виражається об'єм і похилої призми, але це вже обґрунтовується у старшій школі.

11.8. Приклад типової практичної задачі

Задача.

Будується зрошувальна система завдовжки 20 км. Канаву для прокладання труб копають глибиною 1,5 м і шириною 1 м. Для збереження родючого шару ґрунту спочатку по всій довжині каналу знімають шар ґрунту шириною 2 м і глибиною 40 см, а коли труби вкладено, канаву засипають і зібраний ґрунт розгортають (рекультивують) на попереднє місце. Визначити об'єм усієї землі, який довелося вибрати, а також об'єм землі, знятої для рекультивації.

І ще візьми до уваги, Санчо, що добрі справи, які робляться в'яло і недбало, не зараховуються і зовсім нічого не варті.

Мігель де Сервантес Сааведра, «Дон Кіхот»

Розв'язання. Згідно з описом, канава має форму прямої призми, поперечний розріз якої (а він рівний основам призми) має вигляд, зображений на рис. 11. 25.

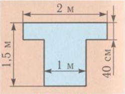


Рис. 11.25

Визначимо спочатку об'єм ґрунту, знятого для збереження землі (тобто для рекультивації). Цей об'єм визначається прямокутним паралелепіпедом з довжиною 20 км = 20 000 м, шириною 2 м і глибиною 40 см = 0,4 м. Отже, чисельно він дорівнює $20\,000 \times 2 \times 0{,}4 = 16\,000$ м^3. Зрозуміло, що знайдений об'єм входить до об'єму всієї землі, який довелося вибрати. Інша частина шуканого об'єму визначається прямокутним паралелепіпедом з довжиною 20 км, шириною 1 м і висотою $1{,}5 - 0{,}4 = 1{,}1$ м (40 см від загальної глибини канави уже враховано при визначенні вийнятої землі для рекультивації). Отже, одержується об'єм $20\,000 \times 1 \times 1{,}1 = 22\,000$ м^3. Разом з попередньо обчисленим це дає 38 000 м^3. Таким чином, усього для будівництва зрошувальної системи довелося вибрати 38 000 м^3 землі.

Перевір себе

1. Дайте описове означення прямокутного паралелепіпеда.
2. З чого складається розгортка прямокутного паралелепіпеда і як здійснюється його побудова за даною розгорткою?
3. Як обґрунтовується можливість побудови прямокутного паралелепіпеда за його розгорткою?
4. Що таке грані, ребра і вершини прямокутного паралелепіпеда? Що таке основи, бічні грані і бічні ребра прямокутного паралелепіпеда?
5. Які міркування ведуть до поняття про перпендикулярність прямої і площини? Сформулюйте означення та ознаку перпендикулярності прямої і площини.
6. Дайте означення паралельності площин та паралельності прямої і площини.
7. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності двох площин та ознаку паралельності прямої і площини.

8. Дайте означення прямої призми. Як її можна побудувати? Як можна одержати похилу призму? Скільки граней може мати призма? Чи є призмою прямокутний паралелепіпед?
9. За якою формулою обчислюється об'єм прямокутного паралелепіпеда? А об'єм довільної прямої призми? Як виводяться ці формули?

Задачі і вправи

1°. Скільки граней, ребер і вершин має: а) куб; б) прямокутний паралелепіпед; в) трикутна призма?

2°. Чи існує призма, яка має 20 ребер?

3°. Доведіть, що кількість вершин будь-якої призми парна, а кількість ребер ділиться на 3.

4°. Змоделюйте паралельні і перпендикулярні прямі та площини на предметах вашої класної кімнати, а також на моделях куба і прямокутного паралелепіпеда, які є у вашому математичному кабінеті. Які властивості вони мають?

5. Доведіть, що коли пряма a паралельна якійсь прямій b, що лежить у площині α, то вона паралельна і самій площині α.

6°. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 м^2, 3 м^2 і 5 м^2. Визначте площу його повної поверхні.

7°. Довжини ребер прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 м, 3 м і 7 м. Визначте площу його повної поверхні.

8°. Бічне ребро трикутної призми дорівнює 9 см, а сторони основи — 4 см, 6 см і 8 см. Визначте площу бічної поверхні призми.

9. Доведіть, що площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми.

10°. Поверхня куба у квадратних одиницях і його об'єм у кубічних одиницях виражаються одним і тим же числом. Визначте ребро куба.

11. Три суцільні металеві куби з ребрами завдовжки 3 см, 4 см і 5 см переплавили в один куб. Нехтуючи втратою металу при плавленні, визначте довжину ребра отриманого куба.

12. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 15 дм, 36 дм і 50 дм. Визначте довжину ребра рівновеликого (рівного за об'ємом) куба.

13. Цеглина має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами $25 \times 12 \times 6{,}5$ см. Визначте її масу, якщо густина матеріалу 1,8 г/см^3.

14. За гігієнічними нормами необхідно, щоб у класі на кожного учня припадало не менше 6 м^3 повітря. На скільких учнів розрахована класна кімната, яка має розміри $6 \times 10 \times 3{,}5$ м?

15°. У скільки разів збільшиться об'єм прямої призми, якщо її висоту збільшити учетверо?

16°. Чи може об'єм прямого паралелепіпеда бути меншим за 1 см^3, якщо довжини деяких його ребер більші за 10 см?

17°. Площі бічних поверхонь двох прямих паралелепіпедів рівні між собою. Чи рівні об'єми цих паралелепіпедів, якщо їхні основи: а) рівні; б) рівновеликі?

18. Скільки тонн соломи містить стіжок, розміри якого (в метрах) подано на рис. 11.26, якщо 1 м^3 соломи важить 80 кг?

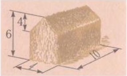


Рис. 11.26

19. Залізничний насип має довжину 60 м. Його поперечний переріз має форму рівнобедреної трапеції з основами 12 м і 8 м та висотою 3 м. Скільки рейсів вантажними автомобілями потрібно здійснити, аби завезти всю землю під цей насип, якщо на кожний автомобіль завантажувати по 4 м^3 пухкої землі, а втрамбовування зменшує її об'єм на 10%?

20. Чи змогли б ви підняти суцільний куб з ребром 20 см, виготовлений із чистого золота (1 см^3 золота важить 19 г)?

21*. Якої висоти одержався б стовпчик, якби суцільний дерев'яний куб з ребром 1 дм розпиляти на кубики з ребром 1 мм і всі ці кубики поставити один на одного? Розв'яжіть задачу, нехтуючи шириною пропилу, а потім — вважаючи її рівною 1 мм. Оцініть час, який на це потрібно в кожному випадку, якщо на один пропил, незалежно від його площі, витрачати 1 с.

22*. На рис. 11.27 схематично зображено усі можливі розгортки куба. Для яких із них можливі аналогічні розгортки прямокутного паралелепіпеда?

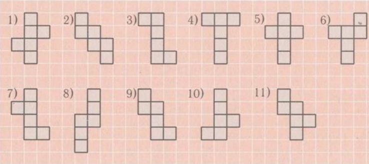


Рис. 11.27

23*. Визначте довжину найкоротшого шляху по поверхні куба, який з'єднує дві його протилежні (тобто найбільш віддалені одна від одної) вершини, якщо ребро куба дорівнює a.

24*. Ребро куба дорівнює a. Визначте відстань від вершини куба до його діагоналі (відрізка, що з'єднує протилежні вершини).

25*. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 дм^2, 3 дм^2 і 6 дм^2. Визначте його об'єм.

Завдання для повторення та проведення контрольних робіт до розділу II

1. а) Внутрішні односторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, відносяться, як 2 : 3. Визначте ці кути.
б) Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, на 58° більший від іншого. Визначте ці кути.

2. а) На рис. 11.28, а) $PQ \parallel EF$. Визначте кут QME.
б) На рис. 11.28, б) $PQ \parallel EF$. Визначте кут MEF.

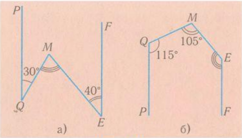


Рис. 11.28

3. а) У паралелограмі $ABCD$ з вершини B тупого кута проведемо висоту. Зі стороною AB вона утворює кут 40°. Визначте кути паралелограма.
б) У паралелограмі $PQRS$ з вершини Q тупого кута до основи PS проведено висоту. Зі стороною PQ вона утворює кут, який удвічі більший за кут P паралелограма. Визначте кути паралелограма.

4. а) Два кути паралелограма відносяться, як 1 : 5. Визначте кут між його висотами, проведеними з вершини: а) тупого кута; б) гострого кута.
б) Один із кутів паралелограма на 50° більший від іншого. Визначте кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини: а) гострого кута; б) тупого кута.

5. а) На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ взято такі точки M і N, що $AM = CN$. Доведіть, що чотирикутник $BMDN$ — паралелограм.
б) У паралелограмі $ABCD$ проведено перпендикуляри BN і DP до діагоналі AC. Доведіть, що чотирикутник $BPDN$ — паралелограм.

6. а) Визначте кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 20°.
б) Визначте кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, відношення яких дорівнює 4 : 5.

7. а) Визначте площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 9 см і 15 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до сторони.
б) Визначте площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 7 см і 25 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до сторони.

8. а) Площа трапеції дорівнює 55 см, а її висота — 5 см. Визначте основи трапеції, якщо вони відносяться, як 2 : 3.
б) Площа трапеції дорівнює 48 см, а її висота — 8 см. Визначте основи трапеції, якщо вони відносяться, як 5 : 7.

9. а) Дано: $OC = OD$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 11.29). Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$, а OQ — бісектриса кута O.
б) Дано: $OA = OB$, $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 11.29). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$, а OQ — бісектриса кута O.

10. а) Дано: $AB = BC$, $AM = MC$ (рис. 11.30). Доведіть, що $AD = DC$.
б) Дано: $AB = BC$, $AD = DC$ (рис. 11.30). Доведіть, що $AM = MC$.

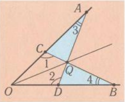


Рис. 11.29

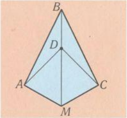


Рис. 11.30

11*. а) Точка, що лежить на висоті трикутника, рівновіддалена від кінців сторони, до якої проведена ця висота. Доведіть, що даний трикутник рівнобедрений.
б) Точка лежить всередині рівнобедреного трикутника і рівновіддалена від вершин основи. Доведіть, що ця точка лежить на висоті трикутника, проведеній до основи.

12. а) Доведіть, що коли всі кути трикутника дорівнюють по 60°, то цей трикутник рівносторонній.

б) Доведіть, що коли у рівнобедреному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, то цей трикутник рівносторонній.

13. а) У прямокутному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, а різниця гіпотенузи й меншого катета дорівнює 5 см. Визначте довжину гіпотенузи.

б) У прямокутному трикутнику різниця гострих кутів дорівнює 30°, а сума гіпотенузи й меншого катета дорівнює 9 см. Визначте довжину гіпотенузи.

14. а) У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює 30°, а бічна сторона — 8 см. Визначте довжину медіани трикутника, проведеної до основи.

б) У рівнобедреному трикутнику кут між бічними сторонами дорівнює 120°, а бічна сторона — 8 см. Визначте бісектрису, проведену до основи.

15. а) Доведіть рівність прямокутних трикутників за гострим кутом й висотою, проведеною до гіпотенузи.

б) Доведіть рівність гострокутних трикутників за двома сторонами і висотою, проведеною до третьої сторони.

16. а) У трикутнику ABC $AB = AC$, K — точка перетину бісектрис кутів B і C. Доведіть, що $AK \perp BC$.

б) У трикутнику ABC $AB = AC$, H — точка перетину висот, проведених з вершин B і C. Доведіть, що $AH \perp BC$.

17*. а) У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює меншій основі, а діагональ утворює з основою кут 30°. Визначте кути трапеції.

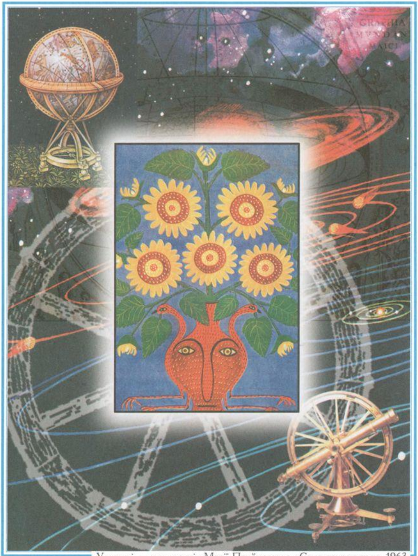
б) Доведіть, що коли у рівнобічній трапеції один із кутів дорівнює 60°, то менша основа дорівнює різниці між більшою основою та бічною стороною.

18. а) Яку висоту повинен мати акваріум з місткістю 180 л при довжині 80 см та ширині 50 см?

б) Навчальний кабінет проектується на 28 учнів. За гігієнічними нормами на кожного учня має припадати 6 м^3 повітря. Якою має бути площа цього приміщення при висоті 4 м?

19. а) Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат з площею 64 см^2. Площа бічної грані дорівнює 56 см^2. Визначте довжину діагоналі бічної грані, а також об'єм паралелепіпеда.

б) Сторони основи прямокутного паралелепіпеда відносяться, як 1 : 7, а довжини діагоналей бічних граней дорівнюють 13 см та 37 см. Визначте площу повної поверхні паралелепіпеда, а також його об'єм.



У центрі — композиція Марії Приймаченко «Соняшник життя», 1963

Розділ III | Коло і круг

Знання, що спирається лише на спостереження, допоки воно не стало доведеним, належить ретельно відрізняти від істини.
Леонард Ейлер

Уже не раз зазначалося, що давньогрецького мудреця Фалеса вважають першим, хто запровадив у геометрію доведення. Зокрема, Фалес довів такі геометричні істини: 1) рівність вертикальних кутів; 2) другу ознаку рівності трикутників; 3) рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника; 4) що вписаний кут, який спирається на діаметр кола, — прямий. Усі ці властивості уже розглянуті в нашому підручнику. Ще одним геометричним фактом, доведення якого теж приписують Фалесу, є ділення круга навпіл його діаметром (рис. 12.1). Якою б очевидною не видавалася ця остання властивість, але щоб стати доконаним геометричним фактом, її теж потрібно довести за всіма правилами геометрії, тобто вивести з уже встановлених істин. Як з'ясувалося, для цього потрібно посилатися на властивості діаметра кола, перпендикулярного до хорди. Ми доведемо цю властивість серед перших властивостей кола і круга.

Далі ми розглянемо різні можливості для взаємного розміщення кола і прямої, а також взаємного розміщення двох кіл. Особливо ретельно досліджуватимемо граничні випадки, коли дані фігури дотикаються одна до одної. Аналогічні граничні випадки для розміщення кола і многокутника характеризуються поняттями вписаного та описаного кола. Ми розгля-

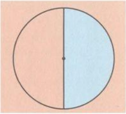


Рис. 12.1

немо їх для найпростіших многокутників, тобто для трикутників. Перша частина розділу завершиться виведенням формули для площі круга.

Крім цього основного змісту, що стосується геометрії на площині, розглядаються також окремі питання, пов'язані з колом, які відносяться до геометрії в просторі. Детальніше вивчення цих питань відбувається в старшій школі.

У другій частині розділу розглядаються геометричні аспекти побудов за допомогою циркуля та лінійки. Традиційно ці побудови відносяться до основ геометрії. Вони мають давню історію і в значній мірі стимулювали розвиток всієї математики.

Символічний бюст Фалеса

§12 Вимірювання кола і круга

12.1. Найпростіші властивості кола і круга

Означення кола і круга та їхніх елементів

Нагадаємо, що *колом* називається сукупність (або множина) всіх точок M площини, віддалених від даної точки O цієї площини на однакову відстань R (рис. 12.2). Точка O називається *центром* кола, а відстань R — його *радіусом*. Радіусом кола називається і будь-який відрізок OM, який з'єднує центр кола з якою-небудь його точкою.

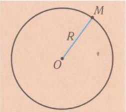


Рис. 12.2

Слово «радіус» в перекладі з латини означає «промінь». Радіуси кола виходять з його центра наче промені. Звідси бере свій початок і фізичний термін «радіоактивний» та «радіаційний» — тобто той, що є джерелом випромінювання. Радіус кола найчастіше позначають першою буквою його латинської назви — R або r.

Відрізок з кінцями на колі називається *хордою* кола. На рис. 12.3 AB — одна із хорд кола з центром O.

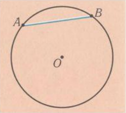


Рис. 12.3

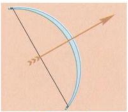


Рис. 12.4

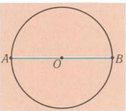


Рис. 12.5

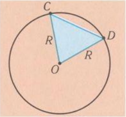


Рис. 12.6

Слово «хорда» бере свій початок від грецького слова «куерда», що означає «тятива лука». Якщо дугу лука уявляти у формі дуги кола, то тятива, яка стягує кінці цієї дуги, справді буде хордою (рис. 12.4).

Якщо хорда AB проходить через центр кола (рис. 12.5), то вона називається *діаметром* кола (діаметр — дослівно «поперечник»). Очевидно, що діаметр кола дорівнює двом його радіусам.

Легко довести, що будь-яка хорда кола, яка не є його діаметром, менша від діаметра (тобто від двох радіусів). Справді, нехай хорда CD не проходить через центр O кола (рис. 12.6). Тоді точки O, C, D не лежать на одній прямій, тобто є вершинами деякого трикутника. Відповідно до нерівності трикутника $CD < OC + OD$, а звідси $CD < 2R$, що й треба було довести.

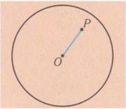


Рис. 12.7

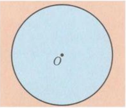


Рис. 12.8

Якщо відстань OP від центра кола до точки P площини менша від радіуса кола, то про таку точку P кажуть, що вона лежить *всередині* кола (рис. 12.7). Сукупність усіх точок площини, які лежать всередині даного кола, називається його *внутрішністю*. Коло разом зі своєю внутрішністю називається *кругом* (рис. 12.8). Отже, можна сказати, що круг — це сукупність усіх точок площини, які знаходяться від певної точки площини на відстанях, що не перевищують даної. Коротко кажуть також, що круг — це сукупність усіх точок площини, обмежених колом. Центр кола називається і *центром* круга, а саме коло інколи називають ще *обводом* круга або його *границею*.

Зображення коліс зі шпицями є в найвідоміших пам'ятках єгипетської культури

Рис. 12.9

Хорду, радіус і діаметр кола називають відповідно *хордою*, *радіусом* і *діаметром* обмеженого ним круга.

Деякі реальні образи кола і круга

Початково колеса виготовлялися у формі кругів і тому мали значну вагу і невелику міцність. Пізніше їх почали виготовляти у формі обода (кола) зі шпицями (радіусами). Такі колеса ми бачимо вже у пам'ятках давньоєгипетської культури (рис. 12.9). Форму круга має й інший видатний винахід людства — блок, що застосовується для підйому вантажів (рис. 12.10), а форму кола — обруч для кріплення діжок (рис. 12.11). Дно у діжці має форму круга. Таку форму має дно і в кожній посудині, виготовленій на гончарному крузі — у мисці, глечику, амфорі, вазі тощо.

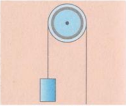


Рис. 12.10

Рис. 12.11

З прадавніх часів помічено, що круговим є добовий рух Сонця, Місяця та зірок на небосхилі.

Крім усього цього, коло і круг мають дуже довершені (симетричні) форми, тому вони здавна застосовуються для створення орнаментів та проектування архітектурних споруд.

Усе це спонукало вже найдавніших дослідників до ґрунтовного вивчення геометричних властивостей кола і круга.

Властивість діаметра, перпендикулярного до хорди

Теорема

(про властивість діаметра, перпендикулярного до хорди).

Діаметр, який перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл. Навпаки, якщо діаметр кола ділить хорду, яка не є іншим діаметром, навпіл, то він перпендикулярний до цієї хорди.

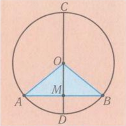


Рис. 12.12

Доведення. Нехай O — центр даного кола, AB — довільна хорда кола, CD — перпендикулярний до AB діаметр, M — точка їхнього перетину (рис. 12.12). Потрібно довести, що $AM = MB$.

Твердження очевидне, якщо хорда AB теж є діаметром, — адже будь-які два діаметри перетинаються в центрі кола, а центр кола ділить кожен з діаметрів на два радіуси, тобто навпіл.

Якщо ж хорда AB не є діаметром, то утворюється два прямокутні трикутники OMA та OMB (оскільки $OM \perp AB$, то $\angle OMA = \angle OMB = 90°$). У них рівні гіпотенузи OA і OB — як радіуси кола, і спільний катет OM. За третьою ознакою рівності прямокутних трикутників ці трикутники рівні між собою. Отже, рівними є і катети AM та MB, що й треба було довести.

З часів греків говорити «математика» означає казати «доведення».
Нікола Бурбакі

Навпаки, якщо $AM = MB$, то трикутники OMA і OMB рівні за трьома сторонами. Тому рівні кути OMA та OMB, що лежать проти рівних сторін OA та OB. А оскільки ці кути суміжні, то вони — прямі. Отже, діаметр CD перпендикулярний до хорди AB. Теорему доведено повністю.

Наслідок 1
(про рівність хорд, рівновіддалених від центра кола).

Рівні хорди рівновіддалені від центра кола. Навпаки, хорди, які рівновіддалені від центра кола, рівні між собою.

Доведення. Перше твердження наслідку очевидне, якщо дані хорди є діаметрами. Тоді їхні відстані від центра кола дорівнюють нулю, отже, рівні. Навпаки, якщо обидві ці відстані дорівнюють нулю, то хорди є діаметрами, тому вони рівні між собою.

Розглянемо тепер рівні хорди AB та A_1B_1, які не є діаметрами. Нехай M, M_1 — їхні середини (рис. 12.13). Тоді $AM = MB = A_1M_1 = M_1B_1$. За доведеною теоремою, $OM \perp AB$, а $OM_1 \perp A_1B_1$. Перпендикуляр до відрізка менший від будь-якої з похилих до нього. Тому відрізки OM і OM_1 якраз і характеризують відстані від точки O до хорд AB і CD. Розглянемо прямокутні трикутники

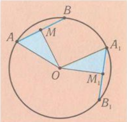


Рис. 12.13

OMA та OM_1A_1. Вони рівні за катетом ($AM = A_1M_1$) та гіпотенузою ($OA = OA_1$ — як радіуси). Звідси $OM = OM_1$, що й треба було довести.

Навпаки, якщо $OM = OM_1 \neq 0$, то за тією самою ознакою прямокутні трикутники OMA і OM_1A_1 рівні. Тому $AM = A_1M_1$. Помноживши цю рівність на два, одержимо: $AB = A_1B_1$. Наслідок 1 доведено повністю.

Наслідок 2

(про співвідношення між хордами і їхніми відстанями від центра).

Більша із двох нерівних хорд розміщена ближче до центра, а менша — далі. Навпаки, чим далі від центра розташована хорда, тим її довжина менша.

Доведення. Твердження очевидне, коли одна з хорд є діаметром або одна із відстаней дорівнює нулю.

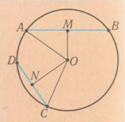


Рис. 12.14

Розглянемо загальну ситуацію — коли жодна з двох хорд AB і CD не є діаметром і відповідно жодна з відстаней OM і ON до них не дорівнює нулю (рис. 12.14). Нехай $AB > CD$. Оскільки M і N — середини даних хорд AB і CD, то $AM > CN$.

За теоремою Піфагора $OM^2 = AO^2 - AM^2$, а $ON^2 = OC^2 - CN^2$. Оскільки $AO = OC$ — як радіуси кола, а $AM > CN$, то звідси $OM^2 < ON^2$. А тому $OM < ON$, що й треба було довести.

Навпаки, оскільки $AM^2 = AO^2 - OM^2$, а $CN^2 = OC^2 - ON^2$, то при $OM < ON$ $AM^2 > CN^2$, а тому $AM > CN$. Наслідок доведено повністю.

Доведення теореми Фалеса

Наслідком з теореми про властивість діаметра, перпендикулярного до хорди, є і згадана на початку цього розділу теорема Фалеса.

Теорема
(про поділ кола (круга) його діаметром на дві рівні частини).

Кожен діаметр кола (круга) розбиває його на дві рівні фігури.

Кожна з рівних фігур, які одержуються при розбитті кола (круга) його діаметром, називається *півколом* (відповідно — *півкругом*). Сам цей діаметр називається *діаметром*, а інколи *основою* кожного із півкіл та півкругів.

Доведення теореми. Нехай у крузі з центром O проведено діаметр AB (рис. 12.15). Уявімо собі, що проведені всі хорди цього круга, які перпендикулярні до діаметра AB. Усі вони, відповідно до доведеної теореми про властивість діаметра, точкою перетину з даним діаметром поділяться навпіл, наприклад, хорда CD — точкою M. А це означає, що якби перегнути круг вздовж діаметра AB, то кожен відрізок CM сумістився б з відповідним йому відрізком DM. А оскільки всі відрізки CM заповнюють один із півкругів, а всі відрізки DM — інший, то один із півкругів при цьому сумістився б з іншим (а півколо — з іншим півколом). А це й означає, що обидва півкруги і обидва півкола рівні між собою, що й треба було довести.

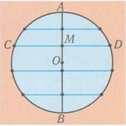


Рис. 12.15

Наслідок 1.

Діаметр, який перпендикулярний до хорди, ділить навпіл кожну дугу, що стягує ця хорда.

Доведення. Справді, нехай маємо хорду PQ, AB — перпендикулярний до неї діаметр, і розглядається яка-небудь із двох дуг PAQ чи PBQ, що стягується цією хордою (рис. 12.16). Якщо в доведенні основної теореми розглядати лише відрізки CD з кінцями на дузі PAQ, то з рівності їхніх частин CM і MD випливатиме можливість суміщення цих частин, а отже, і дуг PCA та QDA. Отже, ці дуги рівні між собою. Так

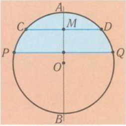


Рис. 12.16

само доведемо, що рівні й дуги PB та QB. Твердження наслідку доведено.

Наслідок 2.

Дуги кола, розміщені між паралельними хордами, рівні між собою.

Доведення. Нехай у колі з центром O проведені паралельні хорди PQ і KN (рис. 12.17). Потрібно довести, що дуги KP і NQ рівні між собою. Проведемо діаметр AB, перпендикулярний до даних хорд. Тоді цей діаметр буде перпендикулярним до кожної хорди CD, паралельної KP і NQ. Отже, для дуг KP і NQ можна повторити ті самі міркування, що й у теоремі для півкіл, а в наслідку 1 — для дуг ACP та ADQ. Результатом цих міркувань буде можливість суміщення дуг KP і NQ. Отже, ці дуги рівні між собою, що й треба було довести.

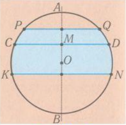


Рис. 12.17

12.2. Сфера і куля

Просторовими аналогами кола і круга є відповідно сфера і куля.

Сферою називається сукупність усіх точок M простору, віддалених від даної точки O на одну й ту саму відстань R (рис. 12.18). Точка O називається *центром сфери*, а відстань R — її *радіусом*.

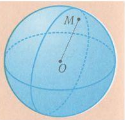


Рис. 12.18

Слово «сфера» походить від давньогрецького слова «сфайра», що означає кругле тіло, куля. Але тепер *кулею* називають геометричне тіло, обмежене сферою. Точніше можна сказати так. Куля — це сукупність усіх точок M простору, віддалених від однієї точки O (*центра* кулі) на відстані, що не перевищують даного значення R: $OM \le R$.

Так само, як для кола і круга, дається означення хорд і діаметрів сфери (кулі), а також доводиться, що будь-яка хорда сфери менша за її діаметр.

Відповідно до означення, сукупність усіх точок сфери, які лежать у будь-якій площині, що проходить через центр сфери, утворює коло. Точніше кажуть так: будь-яка площина, що проходить через центр сфери, перетинає її по колу, радіус якого дорівнює радіусу сфери. Зрозуміло, що площина, яка проходить через центр кулі, перетинає кулю по кругу, радіус якого дорівнює радіусу кулі.

Уявімо тепер собі, що проведені всі січні площини, які проходять через один і той самий діаметр NS сфери. Усі ці площини перетнуть сферу по рівних колах, радіуси яких дорівнюють радіусу сфери (рис. 12.19). У зв'язку з цим кажуть, що сферу можна утворити обертанням кола навколо одного з його діаметрів.

З подібних міркувань кулю можна вважати фігурою, що утворюється обертанням круга навколо його діаметра.

З прадавніх часів сфера і куля використовувалися астрономами та географами для моделювання зоряного неба і Землі.

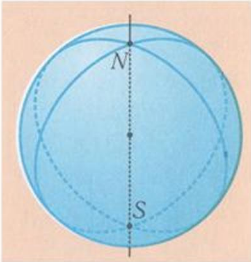


Рис. 12.19

12.3. Взаємне розміщення кола і прямої

Для активних користувачів геометрії, наприклад, дизайнерів та архітекторів, потрібно добре вміти комбінувати коло з найрізноманітнішими многокутниками. А для цього слід знати, як можуть розміщуватися коло і пряма одне відносно одного.

Нехай маємо коло з центром O і радіусом R та пряму a (рис. 12.20). Опустимо з точки O на пряму a перпендикуляр OQ. Можливі три суттєво відмінних один від одного випадки: 1) точка Q лежить ззовні кола, тобто $OQ > R$ (рис. 12.20, а); 2) точка Q лежить на колі, тобто $OQ = R$ (рис. 12.20, б); 3) точка Q лежить всередині кола, тобто $OQ < R$ (рис. 12.20, в). Проаналізуємо кожен із цих випадків.

У першому випадку для будь-якої точки M прямої a, що не збігається з Q, похила OM буде більшою від перпендикуляра OQ, отже, — більшою і від радіуса R кола. Тому всі точки такої прямої a лежать ззовні кола. Отже, пряма і коло у цьому випадку не мають жодної спільної точки, тобто не перетинаються.

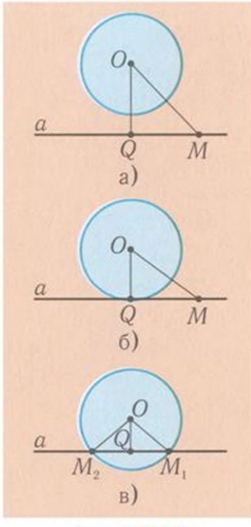


Рис. 12.20

У другому випадку для всіх точок M прямої a, окрім точки Q, похила OM теж більша від R. Отже, всі ці точки лежать ззовні кола. Виходить, що в цьому випадку точка Q — єдина спільна точка прямої і кола.

Пряма, яка має з колом єдину спільну точку, називається *дотичною* до кола, а ця спільна точка — *точкою дотику*.

У третьому випадку від точки Q на прямій a можна відкласти два і тільки два рівних відрізки QM_1 і QM_2, для яких $OQ^2 + QM_1^2 = OQ^2 + QM_2^2 = R^2$. Якщо точка Q не збігається з центром кола, то за теоремою Піфагора $OQ^2 + QM_1^2 = OM_1^2$, а $OQ^2 + QM_2^2 = OM_2^2$. Тому в цьому випадку матимемо рівності: $OM_1 = OM_2 = R$. Якщо ж точка Q збігається з центром O, то ці рівності теж виконуються. Отже, в будь-якому із цих випадків пряма a матиме з колом дві і лише дві спільні точки M_1 і M_2.

Якщо вивчення яких-небудь наук, можливо, і викликало певні нарікання на те, що вони начебто малоцінні і не варті витраченого на них часу, то вивчення математики, я впевнений, ні в кого ніколи не викликало цього нарікання, хіба що на власну нестаранність у навчанні.

Бенджамін Франклін

Зауважимо, що кути OM_1Q та OM_2Q не є прямими, тобто радіуси OM_1 та OM_2 не перпендикулярні до прямої a. Крім цього, довжина перпендикуляра OQ є відстанню від центра O кола до прямої a. Тому якщо врахувати, що кожен із розглянутих випадків виключає інші, то зроблені висновки можна систематизувати так:

Якщо відстань від центра кола до прямої більша за радіус кола, то пряма і коло не мають жодної спільної точки; якщо ця відстань дорівнює радіусу, то пряма і коло мають єдину спільну точку; якщо ж відстань від центра кола до прямої менша від радіуса кола, то пряма і коло мають рівно дві спільні точки. Пряму, яка має з колом дві спільні точки, називають *січною*.

Математичні доведення — як алмази, тверді та прозорі.

Джон Локк

Звідси випливає ще один висновок, який ми сформулюємо у вигляді теореми:

Теорема
(про характеристичну властивість дотичної).

Радіус кола, проведений у точку дотику кола і прямої, перпендикулярний до дотичної. Навпаки, якщо радіус кола, проведений у спільну точку прямої і кола, перпендикулярний до прямої, то ця пряма є дотичною до кола.

Дотична до кола називається також *дотичною* до обмеженого ним круга. Січна кола перетинає обмежений ним круг по хорді. Пряма, яка не перетинається з колом, не перетинається і з обмеженим ним кругом.

12.4. Побудова і властивості дотичних до кіл

З проведеного у попередньому пункті дослідження випливає, що всі точки дотичної прямої, окрім точки дотику, лежать ззовні кола. Тому через жодну внутрішню точку кола не можна провести до нього жодної дотичної. Якщо ж точка Q лежить на колі, то через неї можна провести єдину дотичну (рис. 12.21), оскільки існує єдина пряма, що проходить через цю точку і перпендикулярна до радіуса, проведеного через неї.

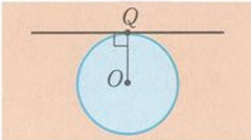


Рис. 12.21

Нехай тепер точка P лежить ззовні кола, O — його центр (рис. 12.22, а). Припустимо, що PQ — дотична до кола, проведена через P, а Q — точка дотику. Тоді $PQ \perp OQ$. Відкладемо на промені OQ відрізок QT, рівний радіусу кола OQ, та з'єднаємо точки T і P. Одержимо трикутник POT, в якому медіана PQ є висотою. Такий трикутник — рівнобедрений, тобто $PT = PO$.

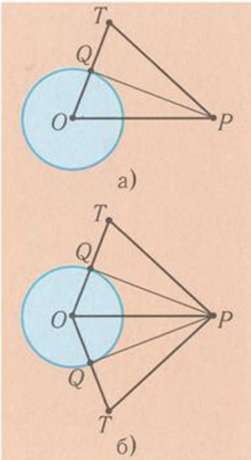


Рис. 12.22

Виходить, що коли побудуємо рівнобедрений трикутник POT за бічною стороною PO і основою OT, що дорівнює діаметру кола, то точка Q перетину основи цього трикутника з даним колом буде точкою дотику шуканої дотичної PQ.

Оскільки сума $PO + PT$ більша за OT, а різниця $PO - PT = 0$ — менша за OT, тобто для відрізків PO,

PT і OT виконується нерівність трикутника, то трикутник POT завжди існує. А оскільки його можна побудувати як з одного боку від прямої PO, так і з іншого, то існує рівно дві прямі PQ і PQ', які проходять через зовнішню точку P і дотикаються до даного кола (рис. 12.22, б).

Оскільки рівнобедрені трикутники POT і POT' рівні, то рівні і їхні кути POQ та POQ'. Тому рівні і трикутники POQ та POQ' (за першою ознакою). А звідси $PQ = PQ'$.

Отже, маємо таку теорему:

Теорема
(про дотичні, проведені до кола із зовнішньої точки).

Відрізки дотичних, проведених із зовнішньої точки до кола, що обмежені даною точкою і точками дотику з колом, рівні між собою.

Задача 1.

Через точку A, що лежить ззовні кола, проведено до кола дотичні AK і AL (K, L — точки дотику) (рис. 12.23). На меншій із дуг, обмежених точками K і L, взято довільну точку M і через неї проведено третю дотичну до кола. Нехай B і C — точки перетину цієї дотичної з дотичними AK і AL. Довести, що периметр трикутника ABC не залежить від розміщення точки M.

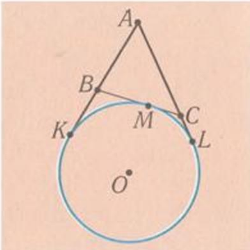


Рис. 12.23

Розв'язання. Периметр P трикутника ABC дорівнює сумі $AB + BC + AC$, або $AB + BM + MC + AC$. Але за властивістю дотичних до кола, проведених із зовнішньої точки, $BM = BK$, а $MC = CL$. Тому $P = AB + BK + CL + AC = AK + AL$, що справді не залежить від розміщення точки M. Твердження задачі доведено.

Задача 2.

Довести, що відстань від вершини A трикутника до ближчої точки дотику K вписаного кола дорівнює різниці між півпериметром p трикутника і стороною a, протилежною до даної вершини A: $AK = p - a$ (рис. 12.24).

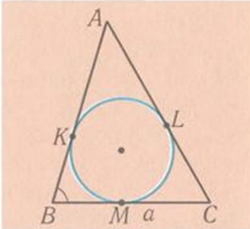


Рис. 12.24

Розв'язання. Нехай L і M — інші дві точки дотику вписаного кола. Тоді за властивістю дотичних, $AK = AL$, $BK = BM$, $CL = CM$. Тому $2p = AB + BC + AC = 2AK + 2BM + 2CM = 2AK + 2(BM + CM) = 2AK + 2a$. Звідси $p = AK + a$, отже, $AK = p - a$, що й треба було довести.

12.5. Про взаємне розміщення сфери з прямою і площиною

Найкращий спосіб вивчити що-небудь — це відкрити його самостійно.

Дьєрдь Пойя

Дослідження взаємного розміщення прямої і сфери можна провести абсолютно аналогічно до того, як проведено дослідження взаємного розміщення прямої і кола. У результаті з'ясується, що коли відстань OQ від центра O сфери до даної прямої a більша за радіус сфери (рис. 12.25, а), то пряма зі сферою не має жодної спільної точки. Якщо ж ця відстань OQ дорівнює радіусу сфери (рис. 12.25, б), то пряма зі сферою має єдину спільну точку, кажуть — *дотикається* до сфери. Тоді точка Q є точкою дотику, а радіус OQ сфери, проведений у цю точку, перпендикулярний до дотичної. Якщо ж відстань OQ менша від радіуса сфери, то пряма зі сферою має

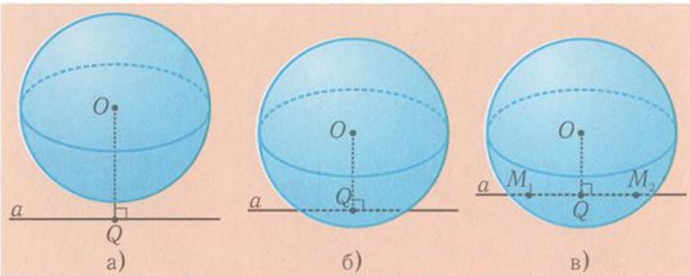


Рис. 12.25

рівно дві спільні точки (рис. 12.25, в). Така пряма називається *січною*.

На відміну від кола, до сфери через будь-яку її точку Q можна провести не одну, а безліч дотичних (рис. 12.26). Оскільки всі ці дотичні перпендикулярні до радіуса OQ, то вони лежать в одній площині α. Ця площина має зі сферою єдину спільну точку Q, а тому називається *дотичною* до сфери, а точка Q — *точкою дотику* дотичної площини. Дотичну площину можна одержати обертанням якої-небудь дотичної прямої a навколо радіуса OQ, що проходить через точку дотику.

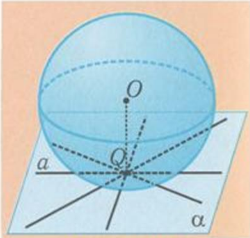


Рис. 12.26

Навпаки, якщо навколо радіуса OQ обертатимемо січну пряму a, то утвориться січна площина α, а точки M_1, M_2 перетину прямої a зі сферою визначать коло перетину сфери з січною площиною (рис. 12.27, а). Відстань OQ виражатиме тоді відстань від центра O сфери до січної площини. Радіус QM_1 кола перерізу визначиться з трикутника OQM_1 за теоремою Піфагора: $QM_1^2 = OM_1^2 - OQ^2$. Оскільки радіус сфери OM_1 є сталою величиною, то радіус QM_1 кола перетину буде тим більшим, чим менша відстань OQ, і тим меншим, чим більша відстань OQ.

Найбільше значення для радіуса QM_1 одержиться тоді, коли відстань OQ дорівнюватиме нулю, тобто коли січна площина проходитиме через центр сфери (рис. 12.27, б). У зв'язку з цим такі перерізи називають *великими колами* сфери, на відміну від усіх інших, які називаються *малими колами*.

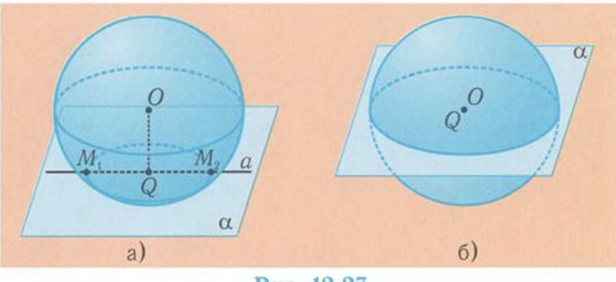


Рис. 12.27

У системі географічних координат на географічному глобусі великими колами є всі меридіани й екватор, а малими — усі паралелі (окрім екватора).

Дотичні прямі й площини до сфери називаються *дотичними прямими* й *площинами* до кулі, обмеженої цією сферою. Січна пряма перетинає кулю по хорді, а січна площина — по кругу.

Зауважимо також, що коли відстань OQ від центра сфери до площини α більша від радіуса сфери (рис. 12.28), то площина зі сферою не має жодної спільної точки, тобто не перетинає сфери.

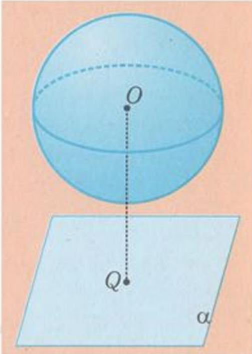


Рис. 12.28

12.6. Задання кола точками

Для визначення кола потрібно задати його центр і радіус. Зрозуміло, що існує лише одне коло з даним центром O і даним радіусом R (рис. 12.29). Проте часто доводиться будувати коло не за цими даними, а за окремими точками, через які воно має проходити — наприклад, коли його потрібно описати навколо певного многокутника. Тому з'ясуємо питання про те, скільки точок потрібно задати, аби визначити коло, яке через них проходить, і як за цими точками знайти центр і радіус кола.

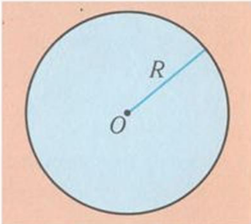


Рис. 12.29

Через окремо взяту точку A можна провести безліч кіл. Їхніми центрами можуть слугувати будь-які точки O, O_1, O_2, ... площини (рис. 12.30). Відповідними радіусами будуть відрізки OA, O_1A, O_2A, ...

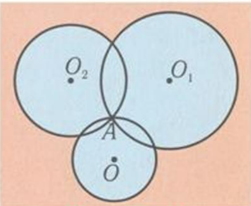


Рис. 12.30

Нехай тепер на площині маємо дві точки A і B (рис. 12.31). Центр кола, яке проходить через ці точки, має бути рівновіддаленим від них. Однією із таких точок є середина M відрізка AB. Усі інші точки O можна розглядати як вершини рівнобедрених трикутників зі спільною основою AB. Тому, враховуючи властивості рівнобедреного трикутника, можна стверджувати, що всі шукані точки лежать на прямій MO, проведеній через середину M відрізка AB, перпендикулярно до нього (рис. 12.32). Таку пряму називають *серединним перпендикуляром до відрізка AB*

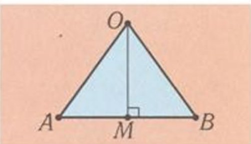


Рис. 12.31

або *медіатрисою* цього відрізка (медіатриса — дослівно з латини «перерізаюча навпіл»).

Означення.

Пряма, яка проходить через середину відрізка і перпендикулярна до нього, називається *серединним перпендикуляром* до цього відрізка.

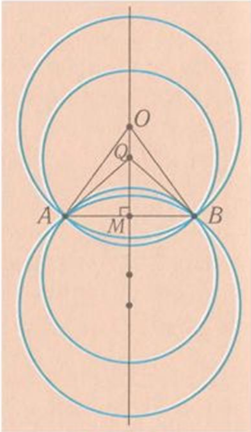


Рис. 12.32

Отже, *усі центри кіл, проведених через точки A і B, належать серединному перпендикуляру до відрізка AB*.

Неважко збагнути, що й навпаки, *кожна точка Q серединного перпендикуляра OM до відрізка AB буде рівновіддаленою від його кінців A і B.* — Це випливає з того, що похилі QA і QB мають рівні проекції MA і MB, а тому вони рівні між собою.

Підсумовуючи, робимо висновок, що *серединний перпендикуляр до відрізка AB є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка*. Тому кожну точку цього серединного перпендикуляра можна взяти за центр O кола, що проходить через задані точки A і B. Радіусом цього кола буде відрізок OA. Усіх таких кіл — безліч.

Візьмемо тепер на площині три точки. Якщо вони лежатимуть на одній прямій, то жодного кола через них провести не вдасться, оскільки, як з'ясовано, коло з прямою може мати щонайбільше дві спільних точки.

Отже, нехай задані три точки A, B, C не лежать на одній прямій (рис. 12.33). Шуканий центр O кола, яке проходить через точки A, B, C, повинен бути рівновіддаленим від усіх цих точок. Геометричним місцем точок, рівновіддалених від точок A і B, є серединний перпендикуляр l до відрізка AB, а геометричним місцем точок, рівновіддалених від точок A, C, — серединний перпендикуляр m до відрізка AC. Нехай O — точка перетину прямих l і m (ці прямі обов'язково перетнуться, бо якби вони були паралельними, то перпенди-

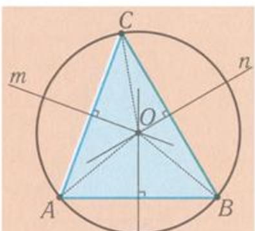


Рис. 12.33

кулярні до них прямі AB і AC збігалися б, отже, точки A, B і C лежали б на одній прямій). Тоді $OA = OB$ і $OA = OC$. Отже, усі три відрізки OA, OB, OC рівні між собою (звідси, до речі, випливає, що третій серединний перпендикуляр n до відрізка BC проходить через ту саму точку O, що й перші два l і m, адже точка O є рівновіддаленою і від вершин B і C, а всі точки, які рівновіддалені від цих вершин, належать прямій n). Звідси випливає, що точка O — центр шуканого кола, а OA, OB і OC — його радіуси.

Якщо вивчення математики, яка так властива людському розуму, залишається для багатьох безуспішною справою, то це зумовлено насамперед недоліками у мистецтві та способі викладання.

Микола Лобачевський

Отже, доведено таку теорему:

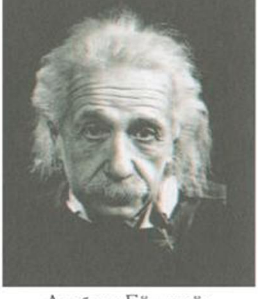
Теорема
(про задання кола трьома точками).

Для будь-яких трьох точок, що не лежать на одній прямій, існує єдине коло, яке проходить через ці точки.

Важливим наслідком з цієї теореми є існування описаного кола для будь-якого трикутника; центр цього кола збігається з точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника (див. рис. 12.33).

12.7. Теорема про перетин висот трикутника

Зовсім неочікуваним наслідком з проведеного у попередньому пункті дослідження є теорема про перетин висот трикутника. Геніальний фізик XX ст. Альберт Ейнштейн згадував, що збагнув велич геометрії лише після того, як побачив, з якою незаперечністю доводиться саме цей абсолютно неочевидний факт.



Альберт Ейнштейн

Теорема
(про перетин висот трикутника).

Для будь-якого трикутника три прямі, що містять його висоти, перетинаються в одній точці.

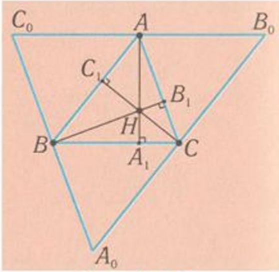


Рис. 12.34

Доведення. Нехай маємо довільний трикутник ABC (рис. 12.34). Доведемо, що прямі AA_1, BB_1, CC_1, які містять його висоти, перетинаються в одній точці.

Проведемо через кожну вершину трикутника ABC пряму, паралельну протилежній стороні. Ці прямі визначать трикутник $A_0B_0C_0$, для якого точки A, B, C будуть серединами сторін. Справді, оскільки, наприклад, $C_0A \parallel BC$, а $C_0B \parallel AC$, то $C_0A = BC$ (як паралельні відрізки між паралельними прямими). Розглядаючи подібним чином паралельні прямі AB_0 і BC та AB і B_0C, дійдемо висновку, що $AB_0 = BC$. Тому $C_0A = AB_0$.

Крім цього, пряма AA_1, наприклад, оскільки вона перпендикулярна до прямої BC, перпендикулярна і до паралельної їй прямої C_0B_0. З подібних міркувань $BB_1 \perp A_0C_0$, а $CC_1 \perp A_0B_0$.

Виходить, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 є серединними перпендикулярами до сторін трикутника $A_0B_0C_0$. Тому вони перетинаються в одній точці, що й треба було довести.

Точка перетину прямих, які містять висоти трикутника, називається *ортоцентром* трикутника. Перший корінь у цьому слові той самий, що й у слові «ортогональний», яке є грецьким аналогом латинського слова «перпендикулярний».

12.8. Визначення сфери точками

Якщо дві точки A і B розглядати у просторі, то у кожній площині, що проходить через пряму AB, матимемо свій серединний перпендикуляр l до відрізка AB (рис. 12.35). Усі ці серединні перпендикуляри проходять через середину M відрізка AB перпендикулярно до нього. Тому вони лежать в одній площині α, що містить точку M та перпендикулярна до AB, і повністю заповнюють цю площину.

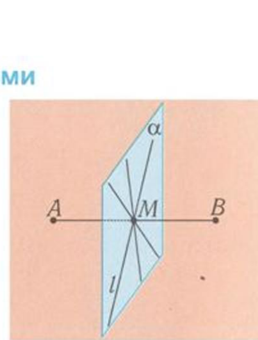


Рис. 12.35

Отже, геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від двох заданих точок, є площина, яка проходить через середину відрізка з кінцями у цих точках і перпендикулярна до нього.

Нехай маємо три точки A, B, C, що не лежать на одній прямій (рис. 12.36). Кожна з площин, яка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох із трьох точок A, B, C, пройде через точку O перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника ABC. Усі ці три площини перетнуться по деякій прямій l, що проходить через O. Отже, пряма l — геометричне місце точок Q, рівновіддалених від трьох точок A, B, C.

Звідси випливає, що у просторі існує безліч сфер, які проходять через три задані точки, які не лежать на одній прямій.

Якщо ж до трьох точок A, B, C долучити яку-небудь четверту точку D, що не лежить у площині точок A, B, C, то тоді вже існуватиме єдина сфера, яка проходить через усі чотири точки A, B, C, D (рис. 12.37).

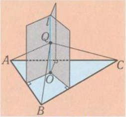


Рис. 12.36

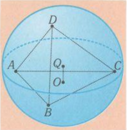


Рис. 12.37

12.9. Взаємне розміщення двох кіл

Якщо два кола, розміщених на площині, мають три спільні точки, то за теоремою про задання кола трьома точками, вони зливаються. Отже, можна передбачити, що два різні кола можуть мати або дві спільні точки, або одну, або ж зовсім не мати спільних точок.

Неважко переконатися, що кожна із цих можливостей насправді може реалізовуватися.

Якщо на серединному перпендикулярі до відрізка AB візьмемо за центри кіл дві різні точки O_1, O_2 (рис. 12.38), то два кола із цими центрами та радіусами O_1A та O_2A матимуть дві спільні точки A і B.

Якщо, далі, на якому-небудь відрізку O_1O_2 візьмемо довільну точку A і проведемо два кола з центрами O_1, O_2 і радіусами $O_1A = R$ та $O_2A = r$ (рис. 12.39), то ці кола матимуть спільною лише точку A. Справді, абсолютно очевидно, що іншою спільною точкою не може бути точка A', діаметрально протилежна до точки

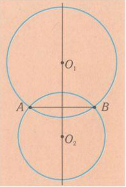


Рис. 12.38

A. Тому нехай B — довільна інша точка першого кола, що не збігається ні з A, ні з A'. Тоді за наслідком з нерівності трикутника $O_2B > O_1O_2 - O_1B = O_1O_2 - R$. Але $O_1O_2 = O_1A + O_2A = R + r$. Тому $O_2B > r$. А це означає, що точка B не належить другому колу. Отже, побудовані кола мають єдину спільну точку.

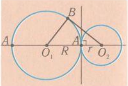


Рис. 12.39

Про кола, які мають лише одну спільну точку, кажуть, що вони *дотикаються* одне до одного у цій точці, а сама ця точка називається *точкою дотику* даних кіл.

Кола можуть дотикатися ззовні, як показано на рис. 12.39, або зсередини (рис. 12.40). В обох випадках точка дотику A лежить на прямій O_1O_2. Тому в обох випадках дотичні кола мають спільну дотичну пряму, що проходить через точку дотику A і перпендикулярна до прямої O_1O_2. Пряма O_1O_2, що проходить через центри O_1, O_2 двох кіл, називається *лінією центрів* цих кіл.

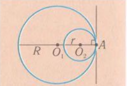


Рис. 12.40

Нехай тепер два кола розміщені так, що відстань O_1O_2 між їхніми центрами більша за суму радіусів $R + r$ (рис. 12.41). Покажемо, що такі кола не перетинаються.

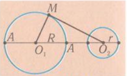


Рис. 12.41

Зрозуміло, що спільними точками даних кіл не може бути жодна з діаметрально протилежних точок A, A' першого кола, розміщених на прямій O_1O_2. Справді, для точки A, наприклад, відстань $O_2A = O_2O_1 - O_1A = O_2O_1 - R > r$, а тому ця точка не належить другому колу. Нехай тоді M — довільна інша точка першого кола. За наслідком з нерівності трикутника $O_2M > O_1O_2 - O_1M = O_1O_2 - R$. Отже, $O_2M > r$, а тому точка M не може належати другому колу, тобто бути спільною точкою даних кіл.

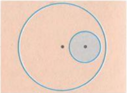


Рис. 12.42

Окрім розміщення ззовні одне одного непересічні кола можуть розташовуватися так, що одне з них лежить всередині іншого (рис. 12.42), а в частковому випадку вони можуть мати спільний центр (рис. 12.43). Кола, що мають спільний центр, називаються *концентричними*.


Рис. 12.43

Можна довести, що відзначеними випадками вичерпуються усі характерні варіанти взаємного розміщення двох кіл на площині. З іншого боку, кожен із цих варіантів характеризується певним співвідношенням між радіусами R і r та відстанню d між центрами кіл. А саме:

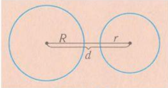


Рис. 12.44

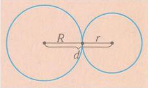


Рис. 12.45

1) якщо кола не перетинаються і одне з них лежить ззовні іншого, то $d > R + r$ (рис. 12.44);

2) якщо кола дотикаються ззовні одне до одного, то $d = R + r$ (рис. 12.45), — оскільки точка дотику лежить на лінії центрів між центрами даних кіл;

3) якщо кола перетинаються, то за нерівністю трикутника $R - r < d < R + r$ (рис. 12.46);

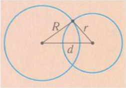


Рис. 12.46

4) якщо кола дотикаються внутрішнім чином, то $d = R - r$ (рис. 12.47), — оскільки точка дотику лежить на лінії центрів поза центрами кіл;

5) якщо менше коло лежить всередині більшого, то $d < R - r$ (рис. 12.48); зокрема, для концентричних кіл $d = 0$ (рис. 12.49).

Оскільки всі розглянуті випадки і їхні аналітичні характеристики такі, що кожен з них виключає можливість будь-якого іншого, то істинними є й обернені залежності. А саме:

1) якщо $d > R + r$, то дані кола не перетинаються і одне з них лежить ззовні іншого;

2) якщо $d = R + r$, то кола дотикаються зовнішнім чином;

3) якщо $R - r < d < R + r$, то кола перетинаються;

4) якщо $d = R - r$, то кола дотикаються внутрішнім чином;

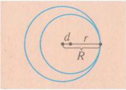


Рис. 12.47

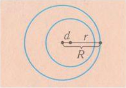


Рис. 12.48

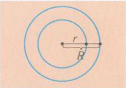


Рис. 12.49

5) якщо $d < R - r$, то кола не перетинаються і одне з них лежить всередині іншого; зокрема, якщо $d = 0$, то кола є концентричними.

12.10. Про кола, вписані у кут і в трикутник

Кажуть, що коло *дотикається* до відрізка, якщо воно дотикається до прямої, яка містить цей відрізок, а точка дотику належить даному відрізку (рис. 12.50, а).

Аналогічно означається дотик кола до променя (рис. 12.50, б).

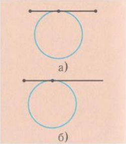


Рис. 12.50

Коло називається *вписаним* у кут, якщо воно дотикається до обох сторін цього кута (рис. 12.51, а). Таке розміщення фігур одержимо, наприклад, якщо з деякої зовнішньої точки кола проведемо до нього обидві дотичні.

Коло називається *вписаним* у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін (рис. 12.51, б).

Основне завдання цього пункту полягає у тому, щоб з'ясувати, як знайти центр і радіус кола, вписаного у даний трикутник. При цьому ми будемо враховувати таку очевидну річ. Якщо коло вписане в трикутник, то воно вписане і в кожний із його кутів. Тому для розв'язання поставленого завдання потрібно спочатку дослідити питання про побудову кіл, вписаних у кут.

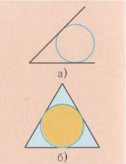


Рис. 12.51

Теорема
(про геометричне місце центрів кіл, вписаних у кут).

Геометричним місцем центрів кіл, вписаних у кут, є бісектриса цього кута.

Доведення. Доведемо спочатку, що центри усіх кіл, вписаних у заданий кут A, належать бісектрисі AF цього кута (рис. 12.52).

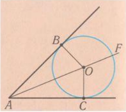


Рис. 12.52

Нехай O — центр якого-небудь одного із цих кіл, B і C — точки його дотику зі сторонами кута. Тоді за властивістю дотичної $\angle ABO = \angle ACO = 90°$. А тому прямокутні трикутники ABO і ACO рівні за катетом

($OB = OC$ — як радіуси кола) та гіпотенузою (AO — спільна сторона). З рівності цих трикутників випливає рівність їхніх кутів OAB та OAC. Отже, AO — бісектриса кута A.

Доведемо тепер, навпаки, що кожна точка Q бісектриси AF є центром кола, вписаного в кут A (рис. 12.53). Для цього проведемо перпендикуляри QM та QN до сторін кута. Одержимо прямокутні трикутники AMQ та ANQ зі спільною гіпотенузою AQ та рівними гострими кутами MAQ та NAQ. За другою ознакою ці трикутники рівні між собою, а тому $QM = QN$. Отже, коло з центром Q і радіусами QM та QN буде вписаним у заданий кут A. Теорему доведено.

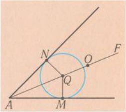


Рис. 12.53

Наслідок

(про геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута).

Геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута, є бісектриса цього кута.

Доведення. Попередньо зробимо такі зауваження. *Відстанню від точки до фігури* називають довжину найкоротшого з відрізків, що з'єднують цю точку з точками даної фігури. Нехай a — промінь, O — його початок, M — довільна точка площини, M_1 — основа перпендикуляра, опущеного з M на пряму, що містить даний промінь (рис. 12.54). Тоді якщо точка M_1 належить променю, то відстань від M до цього променя дорівнює довжині перпендикуляра MM_1 (рис. 12.54, а). Якщо ж M_1 не належить променю, то відстань від M до цього променя дорівнює відстані MO до його початку (рис. 12.54 ,б). Це випливає з того, що у цьому останньому випадку для будь-якої внутрішньої точки X променя a похила MX більша за похилу MO (адже її проекція M_1X більша за проекцію M_1O похилої MO).

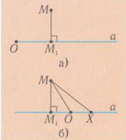


Рис. 12.54

А тепер власне доведення. Якщо кут A не тупий, тобто гострий або прямий, то основи перпендикулярів, опущених з будь-якої його внутрішньої точки P на прямі, які містять сторони кута, належать цим сторонам (рис. 12.55). Тому для таких кутів точки, рівновіддалені від сторін, збігаються із центрами вписаних кіл. Отже, геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута, є бісектриса AF цього кута.

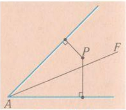


Рис. 12.55

Якщо ж кут A — тупий (рис. 12.56), то в ньому є й такі точки K, які не мають зазначеної властивості, тобто для них основи перпендикулярів, опущених на пряму, що містить одну зі сторін кута, не належить цій стороні. Тому відстань до цієї сторони вимірюється не цим перпендикуляром, а відрізком KA. Але для таких точок відстань KN до іншої сторони кута за жодних умов не може дорівнювати відстані KA, оскільки KN — катет, а KA — гіпотенуза у прямокутному трикутнику KNA. Отже, рівновіддаленими від сторін кута можуть бути лише такі точки Q, для яких зазначені основи перпендикулярів належать сторонам. А це — як доведено у теоремі, — точки бісектриси AF.

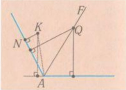


Рис. 12.56

Обернене твердження, тобто, що кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін, випливає з того, що кожна така точка є центром вписаного кола. Наслідок доведено.

Теорема
(*про існування вписаного кола*).

У будь-який трикутник можна вписати коло і до того ж тільки одне. Центр вписаного кола збігається з точкою перетину бісектрис трикутника.

Доведення. Нехай маємо який завгодно трикутник ABC (рис. 12.57). Геометричним місцем центрів кіл, вписаних у кут A, є бісектриса цього кута. Так само, геометричним місцем центрів кіл, вписаних у кут B, є бісектриса кута B. Отже, центром кола, вписаного одночасно в обидва кути A і B, є точка O перетину цих бісектрис.

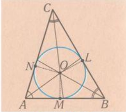


Рис. 12.57

Оскільки рівними є відстані OM і ON від точки O до сторін AB і AC кута A, а також відстані OM і OL від точки O до сторін BA і BC кута B, то рівні й відстані ON та OL від точки O до сторін CA і CB кута C. А це означає, що точка O належить ще й бісектрисі третього кута C даного трикутника, тобто є точкою перетину усіх трьох його бісектрис. А оскільки три промені можуть мати лише одну спільну для всіх точку, то існує лише один центр вписаного кола. Однозначно визначається і радіус вписаного кола, оскільки він дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з центра кола на яку-небудь зі сторін трикутника, а такий перпендикуляр — єдиний. Теорему доведено.

Наслідок.
(*про перетин бісектрис трикутника*).
Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

12.11. Кола, ззовні вписані у трикутник

Коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника, тобто є *вписаним* у трикутник, — одне. Але цікаво розглянути й кола, які дотикаються до прямих, що містять сторони трикутника, не обов'язково дотикаючись до самих його сторін. Такі кола називаються *ззовнівписаними*, оскільки лежать ззовні трикутника.

Нехай маємо довільний трикутник ABC (рис. 12.58). Покажемо, що існує ззовнівписане коло, яке дотикається до сторони BC і до продовжень сторін AB і AC за межами трикутника.

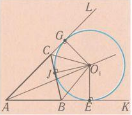


Рис. 12.58

Зрозуміло, що таке коло має бути вписаним у кут BAC, а тому його центр O_1 мусить лежати на бісектрисі цього кута. З іншого боку, це коло має бути вписаним у зовнішній кут CBK трикутника, а тому його центр O_1 мусить лежати на бісектрисі вже цього кута. Отже, O_1 — точка перетину вказаних бісектрис.

Враховуючи властивості бісектрис, $O_1G = O_1E$, а $O_1E = O_1J$, де O_1E, O_1G, O_1J — перпендикуляри, опущені з точки O_1 на прямі AB, AC та BC. Звідси випливає рівність усіх трьох цих перпендикулярів, а це й означає, що точка O_1 є центром шуканого ззовнівписаного кола. При цьому, оскільки $O_1G = O_1J$, то центр O_1 належить і бісектрисі зовнішнього кута BCL, тобто O_1 є спільною точкою бісектриси одного із внутрішніх кутів та двох зовнішніх кутів трикутника ABC.

Аналогічно визначаємо ще два ззовнівписані кола. Отже, загалом для кожного трикутника ABC таких кіл існує рівно три (рис. 12.59).

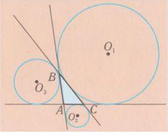


Рис. 12.59

12.12. Чотири особливі точки трикутника

У другому розділі було доведено, що медіани трикутника перетинаються в одній точці; з фізичних міркувань цю точку називають *центром ваги* трикутника. У цьому розділі доведено, що в одній точці перетинаються також: бісектриси трикутника (цією точкою є центр вписаного кола); серединні перпендикуляри до сторін (точкою перетину є центр описаного кола); прямі, які містять висоти (цю точку називають *ортоцентром*). Усі чотири згадані точки називають *особливими* або *примітними* точками трикутника. Загалом вони різні, лише для правильного трикутника усі зливаються в одну. Точки перетину медіан і бісектрис завжди лежать всередині трикутника, а центр описаного кола та ортоцентр можуть розташуватися як всередині, так і ззовні трикутника (а для прямокутного трикутника — на його сторонах).

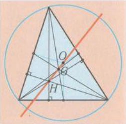


Рис. 12.60

Цікавий факт стосовно розташування центра ваги G, ортоцентра H та центра O описаного кола відкрив у XVIII ст. видатний швейцарський математик Леонард Ейлер. З'ясувалося, що всі ці три точки завжди лежать на одній прямій (рис. 12.60), до того ж точка G — між точками O та H і при цьому $GH = 2GO$. Пройшовши програму з геометрії для 8 класу, ви теж зможете повторити це відкриття!

12.13. Спряження кіл і прямих

Оскільки пряма і коло — основні плоскі фігури у геометрії і вони найпростіші для опису та побудови, то природно, що при конструюванні конкретних форм у техніці, будівництві та ужитковому мистецтві в першу чергу намагаються обходитися саме цими лініями. При поєднанні сусідніх елементів, як правило, намагаються досягти плавності переходу від одного з них до іншого. Часто ця вимога продиктовується лише естетичними міркуваннями (рис. 12.61, 12.62), але нерідко до цього долучаються й функціональні чинники. Наприклад, при проектуванні склепінь (рис. 12.63) плавність у переходах забезпечує поступовість у передачі зусиль по всій конструкції, у кулачкових розподільчих валах (див. стор. 284) плавність ліній контура кулачка забезпечує плавність руху штовхача, який відкриває і закриває клапан для подачі пального у циліндр двигуна, а плавність заокруглення залізничної колії дає змогу плавно рухатись вагонам, що є необхідною передумовою безпеки руху тощо. Такі плавні переходи від однієї лінії до іншої називаються *спряженнями* ліній.

Цікавим прикладом суто естетичного застосування спряжень прямих і кіл є геометричне конструювання шрифтів, започатковане видатними діячами епохи Відродження Лукою Пачолі та Альбрехтом Дюрером. Для прикладу, літеру A, одержану одним із таких способів, зображено на рис. 12.64.

З точки зору геометрії спряженість ліній означає наявність у цих ліній спільної дотичної у точці спря-

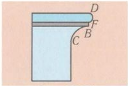


Рис. 12.61

Профіль верхньої частини пілястри з переходом у капітель. Спряження пілястри й капітелі здійснюється за допомогою дуги CB. Горизонтальні лінії верхнього валика спряжені півколом DF.

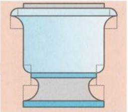


Рис. 12.62

Профіль вази, утворений за допомогою спряження відрізків і чвертей кола.

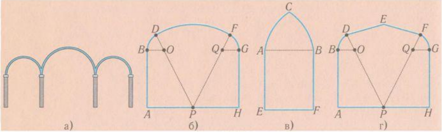


Рис. 12.63

а) Схема аркади. Дуга кожної арки спряжена з колонами, на які вона спирається.

б) Схема побудови напівовального (зниженого) склепіння. Це склепіння складається з трьох спряжених дуг із центрами O, P і Q.

в) Схема побудови готичного склепіння. Дуга BC має центр A і радіус AB, а дуга AC — центр B і радіус BA. Дуга AC спряжена з відрізком EA, а дуга BC — з відрізком BF.

г) Схема побудови мавританського склепіння. Відрізки AB та DE спряжені дугою BD, а відрізки HG та EF — дугою FG.

ження, тобто в точці, в якій одна з ліній переходить в іншу.

Найпростішими є спряження, що складаються з двох елементів: 1) відрізка і дуги кола; та 2) двох дуг.

Крім цього, до основних відносять також спряження, що складається з трьох елементів: 1) двох відрізків і дуги між ними; 2) двох дуг і відрізка між ними; 3) двох дуг і відрізка скраю; 4) трьох дуг.

Побудова кожного із цих спряжень є окремою геометричною задачею на побудову. Розглянемо схематично розв'язування кожної із них.

1. Для побудови спряження відрізка і дуги кола цей відрізок повинен дотикатися до дуги. Якщо задамо пряму a і точку спряження A на ній, то центр дуги повинен розміщуватися на прямій b, що проходить через точку A перпендикулярно до прямої a (рис. 12.65). Відклавши на прямій b від точки A потрібний радіус R, одержимо центр O шуканої дуги.

2. Центри двох спряжених дуг, а також точка спряження мають лежати на одній прямій. При цьому кола, на яких лежать дані дуги, можуть дотикатися або зовнішнім, або внутрішнім чином (рис. 12.66).

Рис. 12.64

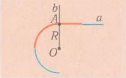


Рис. 12.65

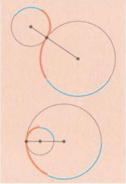


Рис. 12.66

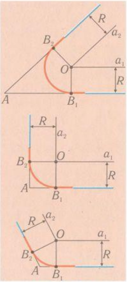


Рис. 12.67

3. Нехай потрібно виконати спряження двох відрізків, розміщених під певним кутом A, і здійснити це за допомогою дуги кола з радіусом R. Кут A може бути гострим, прямим або тупим (рис. 12.67).

Оскільки шукана дуга повинна дотикатися до обох сторін кута, то її центр O має розміщуватися всередині кута на відстанях R від його сторін. Тому, провівши всередині кута відрізки прямих a_1, a_2, на відстані R від кожної сторони кута, у перетині одержимо потрібну точку O. Точки спряження B_1 і B_2 знайдемо як основи перпендикулярів, опущених з точки O на сторони кута.

4. Побудову спряжень із двох дуг і відрізка між ними легко здійснити на основі розв'язаної далі (у п. 13.3) задачі про побудову спільної дотичної до двох кіл. Оскільки спільна дотична може бути як зовнішньою, так і внутрішньою, то маємо два види таких спряжень (рис. 12.68).

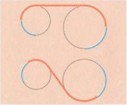


Рис. 12.68

Форму двох дуг, спряжених за допомогою двох зовнішніх дотичних, часто надають кожухам, що закривають вали ремінних або ланцюгових передач і самі передачі.

5. Можливі схеми спряжень двох дуг і відрізка скраю зображені на рис. 12.69.

6. Дві з можливих схем послідовного спряження трьох колових дуг зображені на рис. 12.70. У першій з них крайні кола дотикаються до середнього ззовні, а в другій — зсередини.

Припустимо, що дуги з центрами O_1, O_2 та радіусами R_1, R_2 задані і задано також радіус R «середньої» дуги для їхнього спряження. Тоді центр O цієї дуги у першому випадку визначається перетином дуг з центрами O_1, O_2 та відповідно радіусами $R + R_1$ і $R + R_2$, а в другому — перетином дуг з тими самими центрами та відповідно радіусами $R - R_1$ і $R - R_2$.

Ще дві схеми для спряження трьох дуг зображено на рис. 12.71. Обґрунтування цілком аналогічне до попереднього. В обох із цих схем одне з крайніх кіл дотикається до середнього ззовні, а інше — зсередини.

На рис. 12.72 зображено приклади технічних деталей, у яких застосовано різні види спряжень.

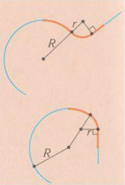


Рис. 12.69

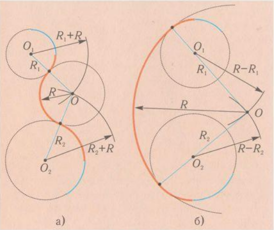


Рис. 12.70

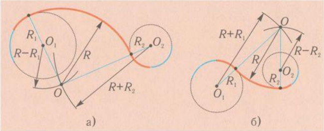


Рис. 12.71

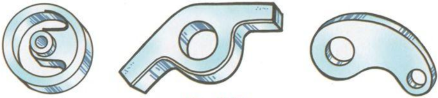


Рис. 12.72

За допомогою спряження декількох колових дуг можна одержати замкнену лінію. Такі лінії називаються *коробовими* лініями. До коробових ліній, зокрема, належать *овоїди* (дослівно «яйцеподібні») та *овали*. Як одні, так і інші можна одержати за тим способом спряження декількох кіл, який відображено на рис. 12.70, провівши спряження обох заданих кіл з радіусами R_1, R_2 з обох боків від їхньої лінії центрів. Якщо радіуси R_1, R_2 різні, то одержимо овоїд (рис. 12.73), а якщо однакові, — то овал (рис. 12.74). Овоїд має одну вісь симетрії O_1O_2, а овал дві — O_1O_2 та ще серединний перпендикуляр l до відрізка O_1O_2.

Оскільки для овоїдів співвідношення між радіусами кіл R_1, R_2, R спряжених дуг, а також відстань O_1O_2 між центрами крайніх із них може змінюватися в дуже широких межах, то існує велике різноманіття цих фігур. Різноманіття овалів не таке значне, але теж доволі широке, аби вибрати саме ту форму, яка потрібна при розв'язуванні конкретної прикладної задачі.

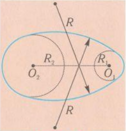


Рис. 12.73

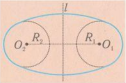


Рис. 12.74

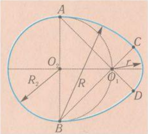


Рис. 12.75

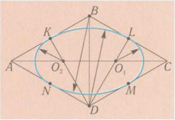
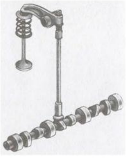


Рис. 12.76

Часто окремі види овоїдів та овалів будують не за описаним загальним способом, а на основі окремих прийомів, які визначаються прикладними задачами, для яких ці фігури застосовують. Наприклад, овоїд, яким визначається профіль кулачків розподільчого валу, будують так (рис. 12.75). Визначальним є коло з центром O_2 і радіусом R_2. Півколо з діаметром AB — одна із дуг цього овоїда. На іншому півколі розміщується центр O_1 іншої дуги овоїда з радіусом r. Центрами середніх дуг є точки A і B, а радіусами — відрізок AB. Точка спряження С лежить на одній прямій з точками B і O_1, а точка спряження D — на одній прямій з точками A і O_1.

Овали, які застосовують у кресленні для побудови ізометричних аксонометричних проекцій, одержують так. Спочатку будують ромб $ABCD$ з гострим кутом A, що дорівнює $60°$ (рис. 12.76). Середини K, L, M, N його сторін — точки спряження сусідніх дуг. Центрами більших дуг є вершини B і D тупих кутів ромба, а радіусами — відрізки BM і DL. Центрами менших дуг є точки O_1, O_2, в яких діагональ AC перетинає радіуси DL та DK, а радіусами цих дуг — відрізки O_1M та O_2K. Оскільки, наприклад, точка L лежить на одній прямій з центром D і O_1 дуг, які в ній сходяться, то ця точка справді є точкою спряження. Аналогічні умови виконуються і для точок K, N і M.

Овали у кресленні застосовуються як наближення для еліпсів — паралельних проекцій кола. Заміну еліпсів на овали проводять у зв'язку з тим, що еліпс до-



Розподільчий вал і схема його застосування для управління клапанами двигуна внутрішнього згоряння волі складна для побудови фігура, а овал легко побудувати за допомогою найпростіших креслярських інструментів. При цьому точність наближення цілком достатня для практичних потреб.

12.14. Знаходження кривини довільної плавної лінії

Чим більшим є радіус кола, тим його точки, взяті на проміжку певної довжини, менше віддаляються від дотичної до кола, проведеної через середню точку проміжку (рис. 12.77). А якщо радіус кола буде дуже великим, то на порівняно великому проміжку воно практично зливатиметься зі своєю дотичною. Тому, зокрема, округлість земної кулі людиною не помічається. Отже, чим більший радіус R кола, тим його викривленість менша. У зв'язку з цим величину $k = \frac{1}{R}$, обернену до радіуса, називають *кривиною* кола.

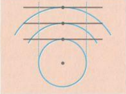


Рис. 12.77

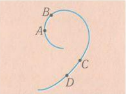
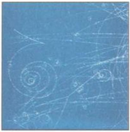


Рис. 12.78

Цілком природно вважати, що на всіх своїх ділянках коло має однакову кривину. Зовсім не так з іншими плавними лініями. На одних проміжках, як, наприклад, на AB (рис. 12.78), вони «закручуються» більше, тобто мають більшу кривину, на інших, як на CD — менше, тобто мають меншу кривину. Інколи важливо вміти визначити цю кривину.

Зокрема, такі задачі виникають у фізиці при дослідженні траєкторій рухомих об'єктів. Яскравим прикладом є реєстрація елементарних частинок у так званій камері Вільсона, сконструйованій у 1912 р. англійським фізиком, пізніше Нобелівським лауреатом Чарльзом Вільсоном (1869–1959). Дія камери Вільсона ґрунтується на конденсації пари (тобто утворенні дрібних водяних крапельок) уздовж сліду пролітаючої через камеру елементарної частинки. Цей слід (фізики його називають *треком*) фотографують і на основі визначення кривини на певній ділянці роблять висновок про енергію частинки, а отже, і про її вид.



Камера Вільсона

Для визначення кривини лінії на заданій ділянці, цю ділянку наближено замінюють частиною кола. А для цього на ній беруть три точки A, B, C і проводять серединні перпендикуляри до відрізків AB і BC (рис. 12.79). Точка O перетину цих серединних перпендикулярів буде центром шуканого кола, а його радіус $R = OA$ визначить кривину k лінії на даній ділянці: $k = \frac{1}{R}$.

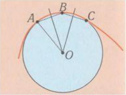


Рис. 12.79

12.15. Площа круга

Рецепти давніх єгиптян та індусів

В одному з давньоєгипетських математичних папірусів, які дійшли до нашого часу, наводиться розв'язання задачі на знаходження площі S круга заданого діаметра d. Якщо запропонований там спосіб обчислень перекласти на сучасну «мову формул», то одержиться така формула:

$$S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2.$$

Як одержано цю дуже точну і водночас дуже просту формулу, не повідомляється. Одна із гіпотез сучасних дослідників давньої історії зводиться до того, що круг наближався описаним навколо нього квадратом зі стороною d, від кутів якого відрізалося по три квадратних «зубці» — один зі стороною $\frac{1}{6}d$ і два зі стороною $\frac{1}{9}d$ (рис. 12.80). При цьому вважалося, що відрізані разом з цим частинки круга «компенсуються» долученими частинками великого квадрата, розміщеними між колом і відповідними сторонами усіх квадратів.

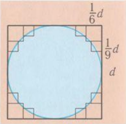


Рис. 12.80

І справді, якщо від площі d^2 великого квадрата відняти 4 площі $\left(\frac{1}{6}d\right)^2$ і 8 площ $\left(\frac{1}{9}d\right)^2$ менших квадратиків, то якраз і одержимо значення, що визначається записаною формулою:

$$d^2 - \frac{4}{36}d^2 - \frac{8}{81}d^2 = d^2 \cdot \frac{324 - 36 - 32}{324} =$$

$$= \frac{64}{81}d^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2.$$

Водночас міркування давніх єгипетських геометрів могли бути і значно витонченішими. На такий висновок наштовхує зображена на рис. 12.81 пам'ятка давньої індійської культури, яка виразно ілюструє більш строгий підхід до знаходження площі круга. Рисунок зображено на стіні одного з давніх індуських храмів. Він супроводжується єдиним словом «Дивись», але попри це, є абсолютно зрозумілим. Круг розбивається спочатку на два півкруги, потім кожний із півкругів — на однакову кількість рівних секторів, ці сектори замінюються рівнобедреними трикутниками і насамкінець одна з одержаних у такий спосіб «пилок» щільно з'єднується з іншою. Виходить, що круг рівновеликий одержаному чотирикутнику. А це — паралелограм. Основа паралелограма дорівнює довжині півкола, а його висота мало відрізняється від радіуса круга. Отже, *площа круга наближено дорівнює добуткові половини довжини його граничного кола на радіус.*

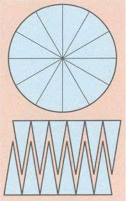


Рис. 12.81

Дослідження Архімеда

У II ст. до н.е. знаменитий Архімед відкрив заново ці міркування, надавши їм необхідної математичної строгості. У результаті було доведено таку теорему:

Найголовнішого очима не побачиш.
Антуан де Сент-Екзюпері, «Маленький принц»

Теорема *(Архімеда).*

Площа круга дорівнює площі трикутника, основа якого рівна довжині граничного кола, а висота — його радіусу (рис. 12.82).

Доведення. Нехай маємо круг з центром O і радіусом R. Розіб'ємо обмежуюче його коло на n рівних дуг AB, BC, CD, ... (рис. 12.83), вважаючи, що число

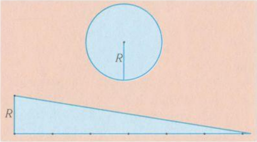


Рис. 12.82

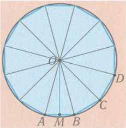


Рис. 12.83

n може бути як завгодно великим. Одержимо n секторів OAB, OBC, OCD, ... Провівши відрізки AB, BC, CD, ... , одержимо n трикутників OAB, OBC, OCD, ... Оскільки будь-які два із секторів можна сумістити один з одним поворотом навколо точки O, то всі вони рівні між собою. Отже, рівні і їхні площі. При вказаному суміщенні секторів сумістяться і відповідні їм трикутники. Тому й трикутники рівні між собою. Отже, площі трикутників теж однакові.

Доволі почестей Александрам! Хай живуть Архімеди!

Клод Анрі Сен-Сімон

Зі збільшенням числа n основа AB трикутника OAB щораз ближче прилягатиме до дуги $\cup AB$ сектора, а його висота OM (оскільки за теоремою Піфагора вона дорівнює $\sqrt{R^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$) щораз більше наближатиметься до радіуса R круга. Отже, площа $\frac{1}{2} AB \cdot OM$ трикутника щораз більше наближатиметься до значення $\frac{1}{2} \cup AB \cdot R$. Тому площа S усього круга дорівнюватиме $n \cdot \frac{1}{2} \cup AB \cdot R = \frac{1}{2} n \cdot \cup AB \cdot R$. Якщо тепер врахувати, що $n \cdot \cup AB$ — це довжина l усього кола, то для площі S круга одержимо формулу:

$$S = \frac{1}{2} lR. \qquad (*)$$

Враховуючи, нарешті, формулу $S = \frac{1}{2} ah$ для площі трикутника, звідси й одержуємо, що площа S круга дорівнює площі трикутника, основа a якого дорівнює довжині l — граничного кола, а висота h — радіусу R круга. Теорему доведено.

Теорема Архімеда не вказує прямого способу для обчислення площі круга. Вона лише зводить цю задачу до обчислення довжини кола.

Виведення прямої формули для обчислення площі круга

За допомогою експериментів можна з'ясувати, що відношення довжини l кола до його діаметра d одне й те саме для всіх кіл. Для цього можна прокотити декілька кругів різних діаметрів по прямій, заміряти пройдений ними шлях l за час одного повного оберту (рис. 12.84) та обчислити відповідні відношення $\frac{l}{d}$.

Рух візка показує нам, як спрямляти обвід круга.
Леонардо да Вінчі

Якщо робити це дуже точно, то для відношення $\frac{l}{d}$ щоразу одержуватиметься значення, близьке до 3,14. Це відношення позначають грецькою буквою π — першою літерою у грецькому слові «периферія», що означає «край», «обвід» круга.

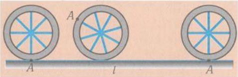


Рис. 12.84

Враховуючи позначення $\pi = \frac{l}{d}$, для площі круга з виведеної вище формули (*) одержимо остаточну формулу:

$$S = \pi R^2.$$

Вперше математичний спосіб для визначення числа π з високою точністю запропонував теж Архімед. Але про нього йтиметься уже в курсі геометрії 8 класу.

Ще одне зауваження щодо давньоєгипетського способу для обчислення площі круга

Зіставляючи наближену формулу давніх єгиптян $S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$ з точною формулою $S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4}$, легко побачимо, що в їхньому наближенні числу π відповідало значення $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$. Приблизно воно дорівнює 3,16. Отже, відносна похибка, яка при цьому допускалася, становить $\frac{3{,}16 - 3{,}14}{3{,}14} \cdot 100\%$, що не перевищує й 1%. Цілком можливо, що давні геометри знали точніше наближення $\pi \approx 3{,}14$, а значенню $\pi \approx 3{,}16$ і відповідній формулі $S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$ надали перевагу як простішим для практичних обчислень. До того ж, за цією формулою прямо вказувався квадрат, який вважався рівновеликим даному кругу: якщо діаметр круга d, то сторона рівновеликого йому квадрата приблизно дорівнює $\frac{8}{9}d$ (рис. 12.85).

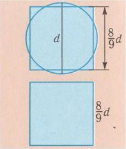


Рис. 12.85

12.16. Вимірювання циліндрів

Однією з найпростіших просторових фігур, елементами яких служать коло і круг, є циліндр. Грецьке слово «киліндрос», від якого утворено цю назву, в дослівному перекладі означає «валик», «каток». Циліндри справді можна котити по площині, а ще — один по одному, як ззовні, так і зсередини. Це зумовлює численні використання циліндричних форм у техніці. Одне з найпоширеніших — це роликові підшипники (див. розріз на рис. 12.86). У них циліндричні ролики розміщуються в обоймі між внутрішньою і зовнішньою циліндричними стінками, а тому легко котяться по них під час руху осі чи вала, щільно вставлених у внутрішнє кільце. Окрім цього, циліндри є невід'ємною частиною кожного двигуна внутрішнього згоряння і саме їхній сумарний об'єм вважається однією з найважливіших характеристик будь-якого автомобіля чи мотоцикла.

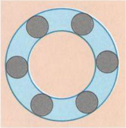


Рис. 12.86

А в давнину у формі циліндрів зводили колони, храмові споруди, оглядові вежі, а також виготовляли ємності для зберігання рідин та сипучих матеріалів.

Означення циліндра

Циліндр можна означити як геометричне тіло, обмежене двома рівними кругами (вони називаються *основами* циліндра) і *бічною поверхнею* (рис. 12.87). Отже, циліндр утворюють його основи, бічна поверхня та всі точки простору, обмежені ними.

Рис. 12.87

Основи циліндра перпендикулярні до прямої, яка проходить через їхні центри, і тому ця пряма називається *віссю* циліндра. *Бічну поверхню* циліндра утворюють відрізки з кінцями на колах основ, які перпендикулярні до основ. Ці відрізки так і називаються — *твірні* циліндра. Оскільки основи циліндра лежать у паралельних площинах, то всі твірні циліндра рівні між собою. Їхня спільна довжина називається *висотою* циліндра.

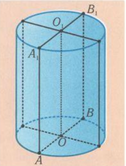


Рис. 12.88

Якщо провести через вісь будь-яку площину, то вона перетне циліндр по прямокутнику. На рис. 12.88 ABB_1A_1 — один із таких прямокутників. Усі ці прямокутники рівні між собою, а циліндр ніби складається з них. У зв'язку з цим кажуть, що циліндр утворюється обертанням прямокутника навколо осі, що проходить через середини його протилежних сторін. Очевидно, що той самий циліндр утвориться і обертанням лише половини вказаного прямокутника, але вже навколо його сторони.

Формули для бічної та повної поверхні циліндра

Циліндр можна змоделювати за допомогою паперової трубки, закритої на кінцях двома однаковими кружечками. Якщо відкинути ці кружечки, а потім розрізати бічну поверхню вздовж однієї з твірних, то її можна буде без деформації розгорнути у прямокутник (рис. 12.89). Тому площа бічної поверхні циліндра дорівнює площі цієї прямокутної розгортки. Висота розгортки дорівнює висоті H циліндра, а довжина — довжині l кола його основи. Нехай R — радіус основи циліндра. Тоді за означенням числа π,

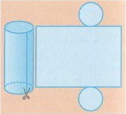


Рис. 12.89

$\frac{l}{2R} = \pi$. Звідси $l = 2\pi R$. Отже, для площі $S_б$ бічної поверхні циліндра маємо формулу:

$$S_б = 2\pi RH.$$

Повна поверхня циліндра складається із його основ та бічної поверхні. Тому для площі $S_п$ повної поверхні циліндра одержується формула:

$$S_п = \pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R(R + H).$$

Об'єм циліндра

Для визначення об'єму циліндра розіб'ємо коло однієї з його основ точками A, B, C, D, ... на n рівних частин і утворимо многокутник $ABCD$... (рис. 12.90). Потім проведемо твірні AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, ... і утворимо рівний йому многокутник $A_1B_1C_1D_1$... на іншій основі. У результаті визначиться призма, вписана у даний циліндр. Висота цієї призми дорівнює висоті H циліндра.

Зі збільшенням чисел n сторони кожної основи призми щораз ближче прилягатимуть до межі основи циліндра, а бічна поверхня призми, отже, — до бічної

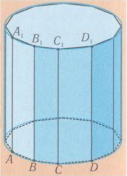


Рис. 12.90

поверхні циліндра. Тому площа S_n основи призми щораз більше наближатиметься до площі S основи циліндра, а об'єм V_n призми — до об'єму V циліндра. Відомо, що $V_n = S_nH$, а тому $V = SH$. Якщо ж врахувати, що $S = \pi R^2$, то звідси остаточно одержуємо шукану формулу для об'єму циліндра:

$$V = \pi R^2 H.$$

Задача.

Колоди і дрова на складах лісоматеріалів зберігаються у штабелях. Облік укладеної в штабель деревини проводиться з урахуванням об'єму штабеля і коефіцієнта наповнюваності, під яким розуміють відношення об'єму деревини в штабелі до геометричного об'єму самого штабеля (перший об'єм менший від другого через наявність порожнин між колодами). Визначити наближене значення коефіцієнта наповнюваності для штабеля, який має форму прямокутного паралелепіпеда за умови, що укладаються колоди одного діаметра й однакової довжини у такий спосіб, як показано на рис. 12.91.

Рис. 12.91

Розв'язання. Для спрощення вважатимемо, що колода має форму циліндра, діаметр основи якого дорівнює діаметру середнього перерізу колоди. Нехай цей радіус дорівнює R, а довжина колоди, тобто висота циліндра — H. Припустимо також, що в штабелі вкладається m колод по ширині і n по висоті. Тоді об'єм однієї колоди дорівнюватиме $\pi R^2 H$, а кількість усіх колод в штабелі — mn. Отже, об'єм V_1 деревини в штабелі дорівнюватиме $mn \cdot \pi R^2 H$.

Я стверджую, що в кожній науці є стільки власне науки, скільки в ній використовується математики.
Іммануїл Кант

Довжина самого штабеля теж дорівнює H, а ширина і висота залежать від діаметра $2R$ колод і дорівнюють відповідно $2Rm$ і $2Rn$. Отже, об'єм V_2 штабеля дорівнює $2Rm \cdot 2Rn \cdot H = 4R^2mnH$. Тому для шуканого коефіцієнта k маємо таке значення:

$$k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,8.$$

Відповідь. 0,8.

Перевір себе

1. Дайте означення кола і круга. Наведіть відомі вам приклади застосування кіл і кругів. Що таке хорда та діаметр кола і круга? Яка існує залежність між довжинами діаметра і хорди, проведеними в одному крузі?
2. Яку властивість має діаметр, проведений перпендикулярно до хорди? Як довести цю властивість?
3. Яка залежність між хордами, рівновіддаленими від центра кола? А якщо хорди віддалені від центра кола на різну відстань?
4. Доведення якої теореми про коло приписується давньогрецькому ученому Фалесу? Сформулюйте цю теорему. Яка ідея покладена в основу її доведення? Які наслідки можна вивести з цієї теореми?
5. Що таке сфера і куля? Наведіть приклади застосувань сферичних і кулястих форм.
6. Яким може бути взаємне розміщення кола і прямої на площині?
7. Що таке дотична пряма до кола? Яку характерну властивість вона має? Як можна провести дотичну до кола із зовнішньої точки?
8. Яким може бути взаємне розміщення сфери і прямої? А сфери і площини? По яких лініях сферу може перетинати площина?
9. Скільки кіл можна провести через одну точку? А через дві? Як розміщені центри цих кіл?
10. Сформулюйте теорему про властивість серединного перпендикуляра до відрізка.
11. Скільки кіл можна провести через три точки? Сформулюйте і доведіть відповідну теорему.
12. Сформулюйте і доведіть теорему про властивість висот трикутника.
13. Яким може бути взаємне розміщення двох кіл? Скільки існує характерних випадків такого розміщення?
14. Коли коло називають вписаним у кут? А в трикутник? Де розміщуються центри всіх кіл, вписаних у кут?
15. Сформулюйте і доведіть теорему про геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута.
16. Скільки кіл можна вписати у трикутник? Сформулюйте і доведіть відповідну теорему.
17. Опишіть основні ідеї спряження відрізків і дуг для одержання плавних ліній. З якою метою проводяться такі спряження? Як будують овали й овоїди?
18. Як за допомогою геометричних побудов визначити кривину плоскої лінії на заданому проміжку?

19. Які ідеї застосовуються при виведенні формули для площі круга? Як площа круга пов'язана з довжиною його граничного кола? Що таке число π? За якою формулою обчислюється площа круга?
20. Дайте означення циліндра? Що утворює його бічну і повну поверхні? Як обчислюється площа бічної і повної поверхні циліндра?
21. У чому полягає основна ідея виведення формули для об'єму циліндра? Запишіть цю формулу.

Задачі і вправи

1°. На рис. 12.92 зображені різні прямолінійні відрізки в крузі (O — центр круга). Які з них є: діаметрами; хордами; радіусами? Чи істинне таке твердження: «Діаметри й радіуси круга є його хордами»?
2°. На рис. 12.93 AB і CD — діаметри кола. Доведіть, що: 1) $AC = DB$; 2) $AC \parallel DB$.
3°. На рис. 12.94 AB — діаметр кола, $AC = CB$. Визначте кути A, B і C. Чому дорівнює кут AOC?

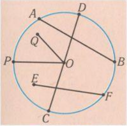


Рис. 12.92

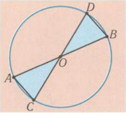


Рис. 12.93

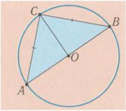


Рис. 12.94

4°. На рис. 12.95 хорди AB і BC рівні. Доведіть, що кути 1 і 2 теж рівні.
5. На рис. 12.96 AB — діаметр кола, CB і DB — рівні хорди. Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.
6. На рис. 12.97 AB — діаметр кола, O — його центр. Доведіть, що $\angle AOC = 2\angle OBC$.
7. На рис. 12.98 AB — діаметр кола, O — його центр, $BC = BO$. Визначте $\angle ABC$.
8. На рис. 12.99 AB — діаметр кола, $AE \parallel BF$. Доведіть, що $AE = BF$.
9. На колі взято довільну точку. Скільки діаметрів і скільки хорд можна провести через цю точку? Чи всі вони будуть різними за довжиною?

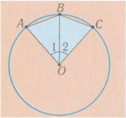


Рис. 12.95

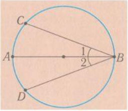


Рис. 12.96

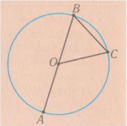


Рис. 12.97

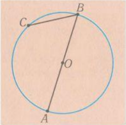


Рис. 12.98

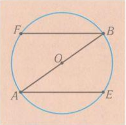


Рис. 12.99

10. Всередині кола взято точку. Скільки діаметрів і скільки хорд можна через неї провести? Чи всі вони будуть різними за довжиною? Дайте відповідь на ці само запитання, якщо точка розміщуватиметься ззовні кола.

11°. Дано коло. Яку лінію утворюють всі точки площини, відстані від яких до центра кола: а) вдвічі менші за його радіус; б) вдвічі менші за діаметр; в) вдвічі більші за діаметр?

12°. Чи може хорда кола дорівнювати: а) радіусу; б) двом радіусам; в) трьом радіусам; г) половині радіуса?

13. Дано коло радіуса R. Яку довжину повинні мати дві рівні хорди, або при будь-якому розміщенні їхніх кінців на колі ці хорди перетиналися?

14. Хорда кола перетинає діаметр під кутом $30°$ і ділиться ним на частини завдовжки 6 см і 14 см. Визначте відстані від кінців хорди до цього діаметра.

15. Як за допомогою лише лінійки провести в крузі дві паралельні хорди?

16. Доведіть, що всі хорди, які діляться навпіл одним з діаметрів кола, паралельні.

17°. Дану хорду кола поділіть навпіл за допомогою косинця (центр кола задано).

18. Чи можуть дві хорди кола, жодна з яких не є діаметром, ділитися точкою перетину навпіл?

19. Із паперу за допомогою шаблону вирізали круг. Чи можна знайти його центр, не використовуючи креслярських інструментів?

20. Більшу частину кола, нарисованого на дошці, стерли. Чи можна за допомогою креслярських інструментів його відновити?

21. На рис. 12.100 відображено принцип дії одного із центрошукачів — креслярського приладу для відшукання центра круга (наприклад, у слюсарній справі). Як, на вашу думку, застосовується цей прилад?

22. Через точку всередині круга проведіть хорду, яка б цією точкою ділилася навпіл.

23. На рис. 12.101 радіус OD перпендикулярний до хорди AB. Доведіть, що $AD = DB$.

24. На рис. 12.101 хорди AD і DB рівні, OD — радіус. Доведіть, що $OD \perp AB$.

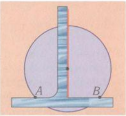


Рис. 12.100

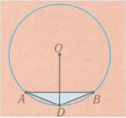


Рис. 12.101

25*. Всередині круга дано точку. Яка з усіх хорд круга, що проходять через цю точку, має найбільшу довжину? А яка найменшу?

26. Хорда завдовжки 16 см відтинає від кола його чверть. Визначте відстань від центра кола до цієї хорди.

27. У колі проведено дві паралельні хорди, кожна з яких відтинає від кола його чверть. Визначте відстань між хордами, якщо довжина однієї з них дорівнює 10 см.

28. У колі з радіусом r проведено хорду. Визначте відстань від центра кола до хорди, якщо довжина хорди дорівнює a. Проведіть обчислення при $r = 14$ см, $a = 8$ см.

29. Радіус круга дорівнює 25 см. У цьому крузі проведено дві паралельні хорди завдовжки 14 см і 10 см. Визначте відстань між хордами.

30. Дано квадрат. Побудуйте коло, для якого сторони даного квадрата були б його хордами.

31. Центр кола, яке перетинає сторони даного кута, лежить на бісектрисі цього кута (рис. 12.102). Чи є на цьому рисунку рівні відрізки?

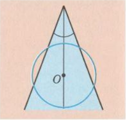


Рис. 12.102

32. Як поділити дугу заданого кола навпіл?

33. Із точки A кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди, віддалені від центра кола на відстань 4 см. Визначте довжину кожної хорди.

34. Дано коло. Через середину його радіуса проведено перпендикулярну до нього хорду. Доведіть, що цю хорду видно із центра кола під кутом 120°.

35. У трикутнику центр описаного кола лежить на медіані. Доведіть, що цей трикутник рівнобедрений.

36. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 6 см, а кут при основі — 30°. Визначте радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

37°. Чи істинним є таке твердження: «Будь-яка пряма, перпендикулярна до радіуса, дотикається до кола»?

38°. Чи правильно буде сказати, що дотична до кола — це пряма, яка має з ним спільну точку?

39. Як за допомогою косинця побудувати дотичну до кола, що проходить через дану на ньому точку? А якщо точка лежатиме ззовні кола?

40. Відстань від точки M до центра кола менша за його радіус. Доведіть, що будь-яка пряма, яка проходить через M, перетинає коло у двох точках.

41. Радіус кола ділить хорду навпіл. Доведіть, що дотична, проведена через кінець цього радіуса, паралельна даній хорді.

42. Пряма дотикається до кола з центром O, A — точка дотику. На цій прямій по різні боки від точки A відкладено рівні відрізки AB і AC. Доведіть, що $OB = OC$.

43. Кут між діаметром AB і хордою AC дорівнює 30°. Через точку С проведено дотичну, яка перетинає пряму AB у точці D. Доведіть, що $OC = DC$.

44. До кола проведено дві паралельні дотичні. Доведіть, що відрізок, який сполучає точки дотику, проходить через центр кола.

45. Точки A і B лежить на колі з центром O. Через ці точки до кола проведені дві дотичні, які перетинаються в точці C. Доведіть, що прямі AB і OC перпендикулярні.

Рис. 12.103

46. Дано кут 30°. Коло радіуса R дотикається до однієї сторони кута, а його центр належить іншій стороні. Визначте відстань від центра кола до вершини кута.

47. На рис. 12.103 відображено принцип дії центрошукача (приладу для знаходження центра суцільного круга). Прилад складається із трьох лінійок. Дві крайні лінійки взаємно перпендикулярні, а один бік середньої лінійки ділить кут між ними навпіл. Як, на вашу думку, застосовується цей прилад?

48. У трикутнику центр вписаного кола лежить на медіані. Доведіть, що цей трикутник рівнобедрений.

49. Сторони трикутника ABC дорівнюють 5 см, 10 см і 11 см. Визначте довжини відрізків, на які ці сторони розбиваються точками дотику вписаного кола.

50*. Дано коло з радіусом R. Із зовнішньої точки P до нього проведено дві взаємно перпендикулярні дотичні PA і PB, C — довільна точка меншої із дуг, обмежених точками A і B, MN — дотична до кола, проведена через точку C (точка M належить прямій PA, а точка N — прямій PB). Визначте периметр трикутника PMN.

51*. До двох кіл з радіусами R і r ($R > r$) проведено дві спільні дотичні так, що відносно кожної з них дані кола лежать з одного боку. Кут між дотичними дорівнює 90°. Визначте довжини відрізків дотичних між точками дотику. Як зміниться відповідь до задачі, якщо дані кола лежатимуть з різних боків від кожної з дотичних?

52. Два кола з центрами O_1 і O_2 дотикаються одне до одного в точці A зовнішнім або внутрішнім чином. Доведіть, що точка A належать прямій O_1O_2.

53. Спільна точка A двох кіл з центрами O_1 і O_2 лежить на прямій O_1O_2. Доведіть, що дані кола дотикаються одне до одного в точці A?

54. Радіуси двох кіл дорівнюють 5 см і 9 см. Визначте відстань між їхніми центрами, якщо кола дотикаються одне до одного: а) зовнішнім чином; б) внутрішнім чином.

55. Доведіть, що два кола однакових радіусів мають дві спільні дотичні, які паралельні прямій, що проходить через їхні центри.

56. При якому розміщенні двох кіл до них можна провести тільки три спільних дотичних?

57*. Три кола ззовні попарно дотикаються одне до одного. Відрізки, що сполучають їхні центри, дорівнюють 7 см, 8 см і 9 см. Визначте радіуси даних кіл.

58. Яким є взаємне розміщення двох кіл, якщо:

а) радіуси кіл дорівнюють 8 см і 2 см, а відстань між їхніми центрами — 10 см;

б) радіуси кіл дорівнюють 11 см і 7 см, а відстань між їхніми центрами — 4 см;

в) діаметри кіл дорівнюють 32 см і 8 см, а відстань між їхніми центрами — 20 см;

г) діаметри кіл дорівнюють 42 см і 26 см, а відстань між їхніми центрами — 8 см?

59. Два кола дотикається зовнішнім чином. Їхні радіуси відносяться, як 2 : 3. Визначте радіуси кіл, якщо відстань між їхніми центрами дорівнює 10 см.

60. Визначте радіуси двох концентричних кіл, якщо діаметр більшого кола ділиться меншим колом на три частини, які дорівнюють 9 см, 12 см і 9 см.

61*. Два рівних круги, що дотикаються один до одного, внутрішньо дотикаються до третього круга. Сполучивши їхні центри, одержимо трикутник з периметром 18 см. Визначте радіус більшого круга.

62°. Як зміниться площа круга, якщо: а) його радіус зменшити удвічі; б) діаметр зменшити удвічі, в) радіус збільшити утричі?

63°. Визначте площу поперечного перерізу дерева, якщо його обхват дорівнює 80 см.

64. Визначте площу круга, описаного навколо:
а) квадрата зі стороною 2 см;
б) прямокутника з вимірами 6 см і 8 см;
в) прямокутного трикутника з катетами 5 см і 12 см;
г) рівностороннього трикутника зі стороною 4 см.

65. Доведіть, що відношення площ двох кругів дорівнює квадрату відношення їхніх радіусів.

66*. Побудуйте коло, яке б розбивало даний круг на дві рівновеликі фігури — кільце та менший круг.

67. Навколо клумби з діаметром 6 м потрібно посипати доріжку завширшки 1 м. Скільки для цього потрібно піску, якщо на 1 м^2 доріжки витрачається в середньому 1 дм^3 цього матеріалу?

68. На катетах прямокутного трикутника як на діаметрах у зовнішній бік побудовано півкруги. Виконайте рисунок і доведіть, що площа півкруга, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ півкругів, побудованих на катетах.

69°. Сторони прямокутника мають довжини a і b. Визначте площу бічної поверхні та об'єм циліндра, утвореного від обертання цього прямокутника: а) навколо сторони завдовжки a; б) навколо прямої, що ділить навпіл сторони завдовжки b.

70. Доведіть, що площі бічних поверхонь усіх циліндрів, які можна утворити обертанням прямокутника навколо його сторін, рівні між собою. А чи рівні їхні об'єми?

71. Діаметр циліндра дорівнює 1, а висота — довжині кола основи. Визначте площу бічної поверхні та об'єм циліндра.

72. Радіус циліндра R, а площа бічної поверхні дорівнює сумі площ основ. Визначте висоту циліндра.

73. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює S. Визначте площу його бічної поверхні. Чи можна за цими даними визначити площу повної поверхні циліндра?

74°. Чи може площа повної поверхні циліндра вдвічі перевищувати площу його основи? А втричі?

75°. У скільки разів збільшиться площа повної поверхні та об'єм циліндра, якщо його висоту та радіус збільшити удвічі?

76°. У скільки разів потрібно збільшити висоту циліндра, не змінюючи основи, щоб збільшити удвічі: а) площу бічної поверхні; б) об'єм?

77°. У скільки разів потрібно збільшити радіус циліндра, не змінюючи його висоти, щоб збільшити утричі: а) площу бічної поверхні; б) об'єм?

78°. Площа бічної поверхні (у кв. од.) та об'єм циліндра (у куб. од.) виражаються одним і тим самим числом. Чому дорівнює радіус циліндра?

79°. Нехай відома площа бічної поверхні циліндра. Чи можна за цією характеристикою знайти площу повної поверхні циліндра? А об'єм? А якщо буде задано об'єм, то чи можна знайти площу повної поверхні?

80. Із двох рівних циліндрів з висотою H і радіусом R виготовили конструкцію, зображену на рис. 12.104. Чому дорівнює її об'єм?

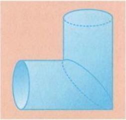


Рис. 12.104

81°. Два циліндри мають рівні об'єми. Доведіть, що площі їхніх бічних поверхонь обернено пропорційні до радіусів основ?

82°. У мензурці (циліндричній посудині з поділками на кубічні сантиметри) відстань між двома суміжними поділками становить 1,8 см. Визначте внутрішній діаметр мензурки.

83. Скільки квадратних метрів паперу в рулоні, висота якого дорівнює 120 см, а зовнішній і внутрішній радіуси — відповідно 0,5 м і 5 см? Товщина паперу становить 0,1 мм.

84. З якою швидкістю рухається нафта по трубопроводу, внутрішній діаметр якого дорівнює 45 см, якщо протягом години через поперечний переріз труби протікає 800 м^3 нафти?

85. Моток алюмінієвого дроту важить 10 кг. Діаметр дроту дорівнює 4 мм. Визначте довжину дроту, знаючи, що питома вага алюмінію становить 2,6 г/см^3.

86. Скільки потрібно фарби, щоб пофарбувати цистерну циліндричної форми з діаметром основи 1,5 м та висотою 3 м, якщо на 1 м^2 витрачається 200 г фарби?

87. Скільки кубометрів каменю піде на півциліндричне склепіння льоху, якщо довжина склепіння має становити 6 м, діаметр — 5,8 м, а шар викладеного каменю повинен мати товщину 30 см?

88. У циліндричну посудину, внутрішній діаметр якої дорівнює 10 см, опущено деталь. При цьому рівень рідини в посудині піднявся на 15 см. Чому дорівнює об'єм деталі?

§13 Геометричні побудови за допомогою прямих та кіл (за допомогою лінійки та циркуля)

13.1. Ідейні основи

Про значення геометричних побудов

Як стверджує Геродот (це зазначалося ще на початку підручника), першими геометричними задачами були задачі на побудову, а саме — на відновлення земельних ділянок після розливів Нілу. Коли ж геометрія перейшла в Елладу, то геометричні побудови були закладені в самі підвалини цієї науки. Зокрема, у знаменитих «Началах» Евкліда найпростіші геометричні побудови описуються у чотирьох з п'яти основних постулатів (див. п. 8.6), а потім упродовж усього твору для кожної геометричної фігури обґрунтовується спосіб її побудови за допомогою цих найпростіших побудов.

Символічне зображення сузір'я «Циркуль» з «Уранології» німецького астронома Йоганна Боде (1801 р.). Сузір'я розташоване у Південній частині неба і тому невидиме у Північній півкулі. Назву запропонував у 1752 р. французький астроном Нікола Луї Лакайль (1713–1762) на відзначення виняткових заслуг циркуля перед наукою. За легендою циркуль винайшов Фалес, змайструвавши його з риб'ячої кістки.

Наслідуючи ці класичні традиції, ми теж розпочали вивчення геометрії з геометричних побудов, а саме з побудови прямокутника. Пізніше, вводячи нові фігури, ми щоразу обговорювали можливість їхньої побудови тими чи іншими засобами. Окрім зрозумілого практичного значення, це мало і теоретичне значення.

Можливість побудови фігури з певними властивостями гарантує її існування. Якщо ж побудови не вказані, то питання про існування такої фігури залишається відкритим. Наприклад, лише після того, як вказано спосіб побудови паралельних прямих, можна з упевненістю вести мову про можливість такого розташування прямих.

Свої задачі на побудову, але вже зі своїми специфічними додатковими умовами розв'язують архітектори, будівельники, інженери, проектувальники, дизайнери, модельєри, столяри, лицювальники, словом усі, хто займається тим чи іншим упорядковуванням навколишнього простору.

Під час будь-яких побудов явно (на кресленні) чи в уяві проводяться найрізноманітніші лінії. Природно, що в першу чергу намагаються обходитися найпростішими лініями, тобто прямими і колами. Тому в елементарній геометрії найбільша увага приділяється саме побудовам за допомогою прямих і кіл.

Евклід.
Символічний портрет

У кресленні прямі проводять за допомогою лінійки, а кола — за допомогою циркуля. Тому геометричні побудови за допомогою прямих і кіл називають ще побудовами за допомогою лінійки і циркуля. Але ця остання назва неточна, бо прямі і кола проводять ще й іншими засобами, наприклад, за допомогою мотузки чи провішують за допомогою віх, а то й просто лише в уяві, наприклад, в астрономічних вимірюваннях.

Які побудови лінійкою і циркулем можна робити

Отже, правильніше вести мову не про побудови за допомогою лінійки та циркуля, а за допомогою прямих і кіл. Але якщо все ж таки вживати традиційний вислів «побудови за допомогою лінійки та циркуля», то при цьому слід обов'язково мати на увазі, які саме найпростіші геометричні операції виконуються цими інструментами. А їх всього дві:

1) за допомогою лінійки через будь-які дві точки можна провести пряму;

2) за допомогою циркуля навколо будь-якої точки можна провести коло, радіус якого дорівнює будь-якому заданому відрізку.

А.І. Бельський, Уранія (Астрономія)

Циркуль — неодмінний атрибут наукових досліджень минулих епох. Тому його дуже часто зображали на символічних картинах та гравюрах.

Як бачимо, лінійка умовно вважається «односторонньою», тобто з одним рівним прямолінійним краєм, оскільки до основних побудов не віднесено побудови паралельних прямих. Вважаєтья також, що лінійка не має масштабних поділок, оскільки основними побудовами не передбачена можливість вимірювання відрізків. Зокрема, за допомогою лінійки не дозволяється відкладати відрізки, рівні заданим, у тому числі шляхом позначення їхніх довжин на рівному краї лінійки (наприклад, олівцем). Нарешті, лінійка вважається ще і як завгодно довгою, оскільки основною побудовою передбачена можливість проведення прямої (а не відрізка) через будь-які дві точки, тобто розміщені на якій завгодно відстані одна від одної.

Аналогічну суто «математичну» властивість має й циркуль, забезпечуючи можливість проведення кола з центром у будь-якій точці площини і з як завгодно великим (чи малим) радіусом.

Чому такі обмеження?

А, пан філософ! Ви дуже вчасно прийшли зі своєю філософією.

Жан-Батіст Мольєр, «Міщанин-шляхтич»

Описані обмеження на засоби геометричних побудов склалися ще у початковий період розвитку геометрії в давній Греції, а потім традиційно передавалися з епохи в епоху. Виділення прямих і кіл з усіх інших ліній, окрім простоти, мало ще й містичне, філософське підґрунтя. Арістотель, який узагальнив і розвинув погляди усіх своїх попередників, вчив, що істинно природними слід вважати лише такі переміщення тіл, коли ці тіла прагнуть зайняти притаманне їм місце. Відповідно до цього вважалося, що існує два основних види переміщень. Земні тіла прагнуть зайняти притаманне їм місце на землі, а тому рухаються до нього по прямій униз. Тіла небесні досконалі і вічні, а тому прагнуть зберегти цей свій стан, рухаючись по колах. У зв'язку з цим, прямі й кола мали бути і найпершими предметами та знаряддями геометрії.

Арістотель. Античний бюст

Ще більший вплив на популярність геометричних побудов саме лінійкою та циркулем мала та обставина, що декілька дуже простих у формулюванні, але вкрай важливих в ідейному відношенні задач на побудову ніяк не вдавалося розв'язати цими засобами, навіть найвидатнішим математикам.

Нарешті, важливим фактором було й те, що в античну епоху геометрія розвивалася як суто теоретична наука, а тому не було потреби проводити конкретних вимірювань і побудов; достатньо було палиці та рівної галявини з піском, а прямі і кола — це все, що можна було побудувати цими засобами.

Чиста математика незмірно вища від усіх своїх застосувань, навіть астрономічних, — за своєю науковою цінністю, і тому вона — дуже приваблива.
Микола Чернишевський

Звичайно, майже всі ці фактори давно втратили свою колишню вагу, а сучасні технічні засоби дають змогу виконувати побудови і швидше, і точніше за людину. Але й досі зберігається величезний освітній потенціал геометричних задач на побудову. З усіх видів геометричних задач вони найактивніше стимулюють розвиток основних форм мислення — і логічного, і абстрактного, і образного, і конструктивного, і алгоритмічного.

Які ще бувають геометричні побудови

Зауважимо водночас, що як у практичному, так і в теоретичному сенсі цікавими є й задачі на побудову іншими засобами. Наприклад, у кресленні поряд з циркулем застосовується двостороння масштабна лінійка і косинець, а в геометрії розглядаються побудови за допомогою однієї лише лінійки і шаблона круга з указаним центром (який дає змогу будувати лише кола одного радіуса).

Виявляється, що всі задачі на побудову, які можна розв'язати за допомогою лінійки та циркуля, розв'язуються також за допомогою лінійки та шаблона круга (або циркуля зі сталим розхилом). Навіть більше, — замість шаблона круга достатньо лише одного побудованого деінде на площині кола із вказаним центром. Цей факт довів у XIX ст. німецький геометр Якоб Штейнер (1796–1863). У зв'язку з цим такі геометричні побудови називають *побудовами Штейнера*.

Якоб Штейнер

Широко відомі в геометрії і побудови за допомогою лише одного циркуля. Їх називають побудовами Мора-Маскероні на честь данського геометра Георга Мора (1640–1697) та італійського геометра Лоренцо Маскероні (1750–1800), які незалежно один від одного їх досліджували. З'ясувалося, що всі задачі на побудову, які можна розв'язати лінійкою та циркулем, можна розв'язати лише одним циркулем, якщо вважати, що пряма побудована, коли побудовані дві які-небудь її точки.

13.2. Основні задачі на побудову лінійкою та циркулем

Розв'язування геометричної задачі на побудову полягає у знаходженні такої послідовності елементарних побудов (сучасною мовою — *алгоритму побудов*), після виконання яких одержується шукана фігура, а також у доведенні того, що побудована фігура справді має усі потрібні властивості. При цьому самі побудови за допомогою креслярських інструментів у геометрії носять допоміжний, ілюстративний характер, а тому виконуються лише для найпростіших побудов. По-справжньому, тобто з усією належною точністю, ці побудови виконують лише при застосуванні геометрії, наприклад, у кресленні та інженерній графіці.

Досі я зроду не брав до рук жодного інструмента, а проте, завдяки працьовитості, ретельності та винахідливості, поволі так набив руку, що міг би, я певен того, зробити що завгодно.

Даніель Дефо, «Робінзон Крузо»

Як уже зазначалося вище, елементарними побудовами, що здійснюються за допомогою лінійки та циркуля, вважаються проведення прямої через дві точки (при цьому точки можуть бути задані або вибиратися довільно) та проведення кола з даним центром і даним радіусом. У випадку складніших задач таких елементарних побудов доводиться виконувати багато. Тому для спрощення опису відповідного алгоритму зазвичай вказують не тільки елементарні побудови, а й деякі складніші побудови, які особливо часто застосовуються. Тому ці складніші побудови називають *основними побудовами*.

Розв'язування задач є специфічною особливістю інтелекту, а інтелект — це особливий дар людини. Тому розв'язування задач можна вважати одним із найхарактерніших проявів людської діяльності.

Дьєрдь Пойя

До основних побудов відносять відкладання відрізків і кутів, поділ відрізків і кутів навпіл, проведення паралельних та перпендикулярних прямих, побудову трикутників за їхніми визначальними елементами та ще деякі інші. Зрозуміло, що виконуватися основні побудови повинні лише за допомогою лінійки та циркуля. Розглянемо детально ці побудови.

Задача 1.

Від даної точки відкласти відрізок, рівний заданому відрізку.

Розв'язання. Нехай задано відрізок AB і точку O (рис. 13.1), а потрібно від точки O відкласти який-небудь відрізок OC, рівний відрізку AB.

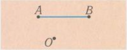


Рис. 13.1

Будуємо коло з центром O і радіусом AB (елементарна побудова 2) і беремо на ньому довільну точку C (рис. 13.2). Проводимо пряму OC (елементарна побудова 1). Усі радіуси кола рівні. Тому $OC = AB$. Отже, відрізок OC — шуканий: він дорівнює заданому відрізку AB і відкладений від заданої точки O.

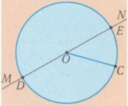


Рис. 13.2

Оскільки на побудованому колі існує безліч точок, то задача має безліч розв'язків. Але якби відрізок AB потрібно було відкласти від точки O на заданій прямій MN, що проходить через цю точку, то розв'язків було б лише два. Це — відрізки OD та OE, кінці D і E яких визначаються перетином побудованого кола з прямою MN. Нарешті, якби відрізок AB потрібно буде відкласти на заданому промені ON з початком O, то розв'язок був би лише один. Це — відрізок OE.

Зауваження. Далі для спрощення елементарні побудови нумерувати не будемо.

Задача 2.

Від даної півпрямої відкласти кут, рівний заданому куту.

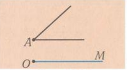


Рис. 13.3

Розв'язання. Нехай задано кут A і промінь OM (рис. 13.3), а потрібно від променя OM відкласти кут, рівний куту A, тобто побудувати такий кут, щоб одна з його сторін суміщалася з даним променем OM, а величина кута дорівнювала заданому куту A.

Побудуємо два кола рівних радіусів, одне з центром A, інше — з центром O (рис. 13.4). Нехай B, C — точки перетину першого кола зі сторонами кута A, B_1 — точка перетину другого кола з променем

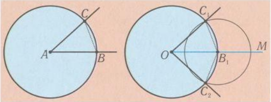


Рис. 13.4

OM. Проведемо відрізок BC, і радіусом, що дорівнює довжині цього відрізка, побудуємо коло з центром B_1. Нехай C_1, C_2 — точки перетину цього кола з раніше побудованим колом з центром O (зрозуміло, що ці кола перетинаються, оскільки відстань OB між їхніми центрами дорівнює радіусу одного з кіл, а тому менша за суму і більша за різницю радіусів даних кіл). Тоді кути B_1OC_1 і B_1OC_2 — шукані.

Це випливає з того, що обидва трикутники OB_1C_1 і OB_1C_2 рівні трикутнику ABC за трьома сторонами. Тому й кути B_1OC_1 та B_1OC_2 цих трикутників рівні відповідному їм куту A трикутника ABC.

Задача має два розв'язки. Один із шуканих кутів лежить з одного боку від прямої OM, а інший — з іншого.

Якби шуканий кут потрібно було відкласти з одного боку від прямої OM, то задача мала б один розв'язок.

Зауваження. В реальній креслярській практиці за допомогою циркуля найчастіше проводять не кола, а лише невеликі дуги відповідних кіл. Наприклад, у розглянутій щойно задачі замість повних кіл з центрами O і B_1 достатньо було б провести лише їхні дуги (рис. 13.5). Проте у геометрії відповідною елементарною побудовою є побудова саме кола (а не дуги чи дуг). Тому правильніше будувати повні кола, а не обмежуватися їхніми дугами.

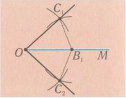


Рис. 13.5

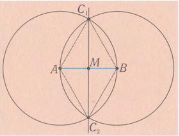


Рис. 13.6

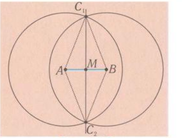


Рис. 13.7

Задача 3.

Побудувати серединний перпендикуляр до даного відрізка.

Розв'язання. Нехай задано відрізок AB (рис. 13.6) і потрібно побудувати серединний перпендикуляр до цього відрізка, тобто пряму, яка проходить через його середину M і перпендикулярна до нього. Проведемо два кола, радіуси яких дорівнюють відрізку AB: одне з центром A, інше — з центром B. Нехай C_1, C_2 — точки перетину цих кіл (оскільки відстань між центрами побудованих кіл дорівнює їхнім радіусам, то вона менша за суму радіусів і більша за їхню різницю; тому побудовані кола перетинаються). Обидві точки C_1, C_2 рівновіддалені від точок A, B, оскільки відстані AC_1 і BC_1, а також AC_2 і BC_2 дорівнюють радіусам побудованих кіл. Отже, ці точки належать шуканому серединному перпендикуляру. Тому пряма C_1C_2 — шукана.

— Усе зрозуміло! — сказав папуга. — М'язи ні до чого не придатні!

— Чому це не придатні? — образилася мавпа.

— Слабкі! — пояснив папуга.

— А в мене... — злякалася мавпа, — інших немає. Тільки ці.

— Чужі м'язи тобі не допоможуть. Потрібно зміцнювати свої.

Григорій Остер, «38 папуг»

Зауваження. Замість кіл з радіусами AB можна було проводити кола з будь-якими іншими рівними радіусами і з тими самими центрами A і B, аби тільки вони перетиналися. А перетинатися вони будуть, якщо їхні радіуси будуть більшими за половину відрізка AB, зокрема, більшими за AB (рис. 13.7).

Як наслідок, із розв'язання задачі 3 просто одержуються розв'язання ще трьох основних задач на побудову — задач 4, 5 і 6.

Задача 4.

Заданий відрізок поділити навпіл.

Розв'язання. Нехай потрібно поділити навпіл відрізок AB (див. рис. 13.6). Побудуємо серединний перпендикуляр C_1C_2 до цього відрізка (задача 3). Тоді точка M перетину цього перпендикуляра з даним відрізком AB — шукана.

Це випливає з того, що серединному перпендикуляру належать усі точки площини, рівновіддалені від точок A і B, у тому числі й середина M відрізка AB.

Задача 5.

Через точку M, задану на прямій l, провести пряму, перпендикулярну до цієї прямої (рис. 13.8).

Розв'язання. Задача легко зводиться до задачі 3 про побудову серединного перпендикуляра до відрізка, якщо побудуємо на прямій l які-небудь дві точки A і B, рівновіддалені від точки M. А для цього, в свою чергу, достатньо провести яке-небудь коло з центром M. Тоді точки A і B перетину цього кола з прямою l — шукані.

Далі будуємо серединний перпендикуляр C_1C_2 до відрізка AB. Це — шукана пряма. Справді, вона проходить через точку M (як середину відрізка AB) і перпендикулярна до прямої l.

— Давай з'їмо мою сардельку разом! — запропонувало цуценя. — Ти їж з одного боку, а я з іншого. А там, де ми зустрінемося, буде середина.

— Щось ми дуже скоро зустрілися — сказало кошеня. — Ти впевнене, що середина сардельки у цьому місці?

— Тепер це вже не має значення. Все одно в сардельці ніяких інших місць не залишилося.

Григорій Остер, «Кошеня, що звалося Гав»

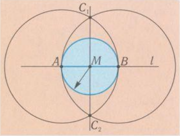


Рис. 13.8

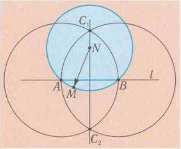


Рис. 13.9

Задача 6.

Через точку N, задану поза прямою l, провести пряму, перпендикулярну до прямої l (рис. 13.9).

Розв'язання. Візьмемо яку-небудь точку M, що лежить з іншого боку від прямої l, ніж точка N, і проведемо коло з центром N і радіусом NM. Це коло перетне пряму l у двох точках A і B. Дані точки рівновіддалені від точки N, оскільки NA і NB — радіуси одного кола. Тому серединний перпендикуляр C_1C_2 до відрізка AB, як геометричне місце точок, рівновіддалених від A і B, міститиме й точку N. Отже, пряма C_1C_2 містить точку N і перпендикулярна до прямої l. Тому вона — шукана.

Задача 7.

Через точку A, розміщену поза прямою l, провести пряму, паралельну прямій l (рис. 13.10).

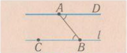


Рис. 13.10

Розв'язання. Побудову легко звести до побудови, описаної в задачі 2. А саме: візьмемо на прямій l яку-небудь точку B і проведемо пряму AB. Нехай C — яка-небудь інша точка прямої l. Тоді якщо відкладемо від променя AB кут BAD, рівний куту ABC і розміщений з протилежного боку від прямої AB, то одержимо шукану пряму AD. Це випливає з того, що кути BAD і ABC є внутрішніми різносторонніми для прямих l і AD та січної AB.

Задача 8.

Заданий відрізок AB поділити на три рівних частини.

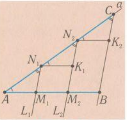


Рис. 13.11

Розв'язання. Побудуємо довільний промінь a з початком A, який не належить прямій AB (рис. 13.11) і відкладемо на ньому послідовно три які-небудь рівні відрізки AN_1, N_1N_2, N_2C. Потім проведемо пряму BC, а через точки N_1, N_2 — прямі N_1L_1 та N_2L_2, паралельні BC (за побудовою, описаною в задачі 7). Тоді точки M_1, M_2 перетину цих прямих з відрізком AB — шукані, тобто поділять відрізок AB на три рівних частини.

Для доведення проведемо $N_1K_1 \parallel AB$ (K_1 належить N_2L_2) та $N_2K_2 \parallel AB$ (K_2 належить CB). Тоді одержимо трикутники $N_1K_1N_2$ та N_2K_2C, які за другою ознакою рівні трикутнику AM_1N_1. Отже, $AM_1 = N_1K_1 = N_2K_2$.

З іншого боку, відрізки N_1K_1 та N_2K_2 рівні відповідно M_1M_2 та M_2B — як відрізки паралельних прямих між іншими паралельними. Тому $AM_1 = M_1M_2 = M_2B$, що й треба було довести.

Зауваження. Запропонований алгоритм можна застосувати для поділу відрізка на будь-яку кількість n рівних частин. Для цього спочатку на промені a потрібно відкладати не 3, а n рівних відрізків.

Задача 9.

Заданий кут поділити навпіл. Іншими словами: побудувати бісектрису даного кута.

Розв'язання. Нехай потрібно побудувати бісектрису кута O (рис. 13.12). Проведемо якенебудь коло з центром O. Нехай A і B — точки перетину цього кола зі сторонами кута. Проведемо, далі, ще два кола того самого радіуса OA з центрами A і B. Ці кола перетнуться, оскільки за нерівністю трикутника, застосованою до трикутника OAB, відстань AB між їхніми центрами менша за суму радіусів OA та OB і більша за їхню різницю (бо ця різниця дорівнює нулю). Однією зі спільних точок вказаних кіл є точка O. Нехай C — інша спільна точка. Тоді промінь OC — шукана бісектриса.

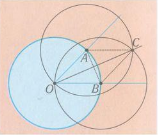


Рис. 13.12

Справді, трикутники OAC і OBC рівні за трьома сторонами. Тому рівними є їхні кути AOC та BOC, що лежать проти рівних сторін AC і BC. А це й означає, що OC — бісектриса кута A.

Зауваження. Бісектриса OC належить серединному перпендикуляру до відрізка AB. Це випливає з того, що бісектриса кута O рівнобедреного трикутника OAB є одночасно медіаною і висотою цього трикутника.

Відповідно до цього, побудову точки C шуканої бісектриси OC можна проводити і за допомогою інших кіл з центрами A і B, наприклад, кіл з радіусами AB.

Побудова трикутників за двома сторонами і кутом між ними та за стороною і двома прилеглими кутами (у тому числі й прямокутних) легко зводиться до задач 1 і 2. Тому окремо розглянемо лише побудову трикутника за трьома сторонами та побудову прямокутного трикутника за катетом і гіпотенузою.

У тому, що математика має велику освітню силу, що вона чудово розвиває і тренує розумові здібності учнів, — у цьому ще не сумнівався ніхто, навіть з найзапекліших ненависників жахливої і неприступної науки. Кмітливість учнів зростає постійно під час їхніх математичних занять. І це так само вірно і неминуче, як те, що м'язи людини збільшуються від занять гімнастичними вправами.

Дмитро Писарєв

Задача 10.

Побудувати трикутник за трьома даними сторонами.

Розв'язання. Нехай задано три відрізки a, b, c (рис. 13.13) і потрібно побудувати трикутник, сторони якого дорівнюють цим відрізкам.

Будуємо довільну пряму і на ній від будь-якої точки B відкладаємо відрізок AB, що дорівнює якому-небудь із заданих відрізків, наприклад c (рис. 13.14). Потім проводимо коло з центром A і радіусом b та коло з центром B і радіусом a. Якщо ці кола перетнуться (нехай C і C_1 — точки перетину) то трикутники ABC і ABC_1 — шукані. Вони рівні між собою (за трьома сторонами) і розміщені з різних боків від прямої AB.

Необхідною умовою для існування трикутника зі сторонами a, b і c є виконання нерівностей трикутника. Зокрема, сторона c повинна бути меншою від суми $a + b$ і більшою від різниці $b - a$ сторін a і b. З умови перетину двох кіл випливає, що ці умови є й достатніми для існування трикутника. Справді, величина c

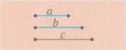


Рис. 13.13

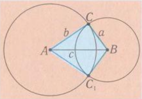


Рис. 13.14

дорівнює відстані між центрами A і B побудованих кіл, а величини $a + b$ та $b - a$ — відповідно сумі та різниці їхніх радіусів. Тому якщо $b - a < c < a + b$, то ці кола перетинаються, а отже, трикутник ABC зі сторонами a, b і c існує.

Задача 11.

Побудувати прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою.

Розв'язання. Нехай задано катет a і гіпотенузу c прямокутного трикутника (рис. 13.15). Побудуємо прямий кут MCN (див., наприклад, задачу 5) (рис. 13.16) і на одній з його сторін CN відкладемо відрізок CB, рівний відрізку a. Потім будуємо коло з центром B і радіусом c. Нехай A — точка перетину цього кола з іншою стороною CM побудованого прямого кута. Тоді трикутник ABC — шуканий.

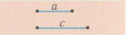


Рис. 13.15

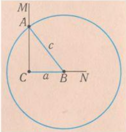


Рис. 13.16

Оскільки гіпотенуза прямокутного трикутника завжди більша від будь-якого з катетів, то необхідною умовою для існування розв'язку цієї задачі є виконання нерівності $a < c$. Ця умова є й достатньою, оскільки при її виконанні центр проведеного кола розміщуватиметься від прямої CM на відстані a, яка менша від радіуса c, а тому коло і пряма перетнуться. Отже, існуватиме точка A, а з нею і трикутник ABC.

13.3. Орієнтовна схема для розв'язування задач на побудову

Розв'язування кожної геометричної задачі на побудову, за винятком, можливо, найпростіших, можна порівняти зі зведенням будівлі чи складанням машини. Перш ніж приступити до самих побудов, в уяві повинен з'явитися образ того, що хочеш побудувати. Потім, відштовхуючись від цього цілісного образу, як ніби від уже реалізованого плану, крок за кроком аналізують усі його деталі, аж поки не сформується вся послідовність (алгоритм) побудов. Але потрібно ще впевнитися, тобто довести, що після реалізації цих побудов справді одержиться те, що було потрібно, тобто, що забезпечуватимуться усі призначення об'єкта. Нарешті, відомо, що одним і тим самим цілям можуть задовольняти різні проекти. Тому бажано оцінити (дослідити), скільки цих проектів може існувати і як вони відрізняються один від одного.

Беручи до уваги такі порівняння, легше зрозуміти, чому розв'язування геометричних задач на побудову як правило розбивають на 4 етапи.

Розв'язуючи такі задачі, дуже важливо вміти міркувати «заднім ходом».
Артур Конан Дойл, «Червоним по білому»

Перший етап. Спочатку припускають, що задача розв'язана і що, отже, фігура з потрібними властивостями побудована. При цьому виконують схематичний рисунок (зазвичай від руки), на якому відображають усі задані й побудовану фігури. Потім, уважно розглядаючи усі ці фігури, намагаються відшукати такі визначальні залежності між ними, які б зводили побудову шуканої фігури до виконання елементарних та основних побудов. У результаті виникає певна стратегія розв'язування. Цей етап розв'язування називається *аналізом задачі*.

Другий етап. Після того, як з'явилася стратегія розв'язування, її деталізують у вигляді конкретного алгоритму, в якому чітко, крок за кроком, описуються усі побудови, результатом яких має стати побудова шуканої фігури. Цей етап так і називається: *побудова* або (точніше) *алгоритм побудови*.

Якщо ми зрозуміємо, яку роль відіграє у геометрії логічне доведення, то збагнемо й у цілому ту роль, яку воно відіграє в науці.
Філіп Франк

Третій етап. Оскільки аналіз задачі має так би мовити дорадчу функцію, то цілком може трапитися, що з'ясовані при його проведенні умови є необхідними для шуканої фігури, але ще невідомо, чи є вони достатніми для неї. Тому для гарантії правильності розв'язання потрібно обов'язково довести, що побудована в результаті реалізації алгоритму фігура справді задовольняє усі вимоги задачі. Цей етап розв'язування називається *доведенням*.

Четвертий етап. Нарешті, для повноти розв'язання бажано з'ясувати, при яких співвідношеннях між заданими елементами задача має розв'язок і скільки цих розв'язків може бути. Цей етап розв'язування називається *дослідженням*.

Якщо задача не особливо складна, то в записі її розв'язування аналіз, а інколи й дослідження пропускають, а вказують лише алгоритм побудови та проводять його доведення. Саме так, зокрема, вище розв'язані основні задачі на побудову. Однак неважко переконатися, що навіть при незначних ускладненнях запропоновану схему вже потрібно застосовувати в повному обсязі. Розглянемо декілька прикладів.

Задача 1.

Побудувати рівнобедрений трикутник за бічною стороною і висотою, проведеною до основи.

Розв'язання. Проведемо *аналіз* задачі. Припустимо, що потрібний рівнобедрений трикутник ABC побудовано і що в ньому бічні сторони BA і BC рівні заданому відрізку a, а висота BM, проведена до основи AC, — заданому відрізку h (рис. 13.17).

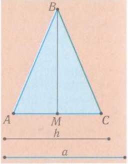


Рис. 13.17

Відомо, що висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є також медіаною, тобто $AM = MC$. Тому прямокутні трикутники BMA і BMC рівні за першою ознакою. Отже, якщо побудуємо один з них, наприклад, BMA, то, продовживши відрізок AM за точку M на таку саму довжину, одержимо й третю вершину C трикутника ABC.

Звідси випливає такий *алгоритм побудови*: 1) будуємо прямокутний трикутник BMA за катетом $BM = h$ та гіпотенузою $BA = a$ (основна задача 11); 2) на прямій AM від точки M відкладаємо відрізок MC, рівний відрізку AM (основна задача 1). Трикутник BAC — шуканий.

Доведемо це. Оскільки $\angle BMC$ суміжний з прямим кутом BMA, то він теж прямий. Отже, прямокутні трикутники BMA і BMC рівні за двома катетами. Звідси $BA = BC$. Тому побудований трикутник BAC справді рівнобедрений. За побудовою також BM — висота цього трикутника і вона дорівнює h. Тому ΔBAC — шуканий.

Задача має розв'язки тоді і тільки тоді, коли існує прямокутний трикутник BMA з катетом h і гіпотенузою a, тобто при $a > h$. Усі трикутники BMA, які можна побудувати за цими даними, рівні між собою. Тому рівні між собою і всі трикутники BAC.

Задача 2.

Побудувати трикутник ABC за даною стороною $AC = b$, кутом A і сумою $a + c$ двох інших сторін.

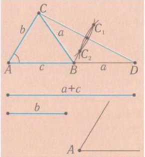


Рис. 13.18

Розв'язання. *Аналіз.* Припустимо, що потрібний трикутник ABC побудовано (рис. 13.18), тобто, що в ньому сторона AC дорівнює заданому відрізку b, кут A — заданому куту, а сума сторін $AB + BC$ — іншому заданому відрізку, що позначений як $a + c$.

Продовжимо відрізок AB за точку B на відстань BD, що дорівнює стороні BC, і з'єднаємо відрізком точки C і D. Одержимо трикутник ACD, який можна побудувати за двома сторонами b і $a + c$ та кутом A між ними. З іншого боку, вершина B трикутника ABC рівновіддалена від точок C і D, отже, лежить на серединному перпендикулярі C_1C_2 до відрізка CD. Тому вершина B визначається перетином прямої C_1C_2 з відрізком AD.

Побудова. 1. Будуємо трикутник ACD за двома сторонами b та $a + c$ і кутом A між ними. 2. Проводимо серединний перпендикуляр C_1C_2 до сторони CD побудованого трикутника. 3. Визначаємо точку B перетину прямої C_1C_2 зі стороною AD. Трикутник ABC — шуканий.

Доведення. Справді, у ньому сторона AC і кут A рівні заданим, а оскільки $AB + BC = AB + BD = a + c$, то й сума сторін AB і BC теж дорівнює заданому відрізку. Отже, ΔABC задовольняє усі вимоги задачі.

Дослідження. Трикутник ACD за сторонами b і $a + c$ та кутом A між ними завжди можна побудувати, і всі такі трикутники рівні між собою. Що ж до шуканого трикутника ABC, то він може й не існувати. Необхідною умовою для його існування є виконання нерівності трикутника, відповідно до якої відрізок $a + c$ має бути більшим за відрізок b. Отже, якщо $a + c \leq b$, то задача розв'язків не має. Покажемо, що при $a + c > b$ трикутник ABC завжди існує, тобто що ця умова є й достатньою для існування розв'язку задачі.

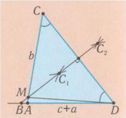


Рис. 13.19

Для цього потрібно довести, що за даної умови пряма C_1C_2 перетинає відрізок AD у внутрішній точці. Припустимо, що це не так, тобто, що точка B лежить ззовні відрізка AD (або збігається з точкою A) (рис. 13.19). Тоді існує точка M перетину прямої C_1C_2 зі стороною AC трикутника ACD. А оскільки $MC = MD$, то $\angle C = \angle MDC$. Отже, кут C трикутника ACD менший від кута D (або дорівнює йому, якщо точка B збігається з A). А це суперечить тому, що проти більшої сторони $c + a$ у трикутнику ACD лежить більший кут, ніж проти меншої сторони b. Тому зроблене припущення неправомірне. Отже, дана задача має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $a + c > b$. Усі можливі трикутники, які можна побудувати за даними задачі, рівні між собою.

Хто хоча б один раз переконався у творчій силі математичних побудов, той помічатиме їхню дію на кожному кроці як у царині природи, так і в царині мистецтва.

Вернер Карл Гейзенберг

Задача 3.
Побудувати спільну дотичну до двох заданих кіл.

Розв'язання. Оскільки не можна провести дотичної до кола через жодну з його внутрішніх точок, то задача не має розв'язку, якщо одне з даних кіл лежить усередині іншого.

Якщо одне з даних кіл дотикається до іншого (зовнішнім чи внутрішнім чином), то, як уже було зазначено при дослідженні взаємного розміщення двох кіл, спільна дотична існує і вона перпендикулярна до лінії центрів (див. рис. 12.39 і 12.40). Отже, у кожному із цих випадків

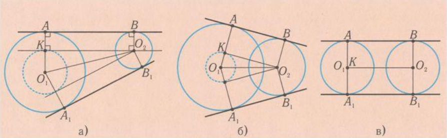


Рис. 13.20

задача має принаймні по одному розв'язку. У випадку внутрішнього дотику кіл цей розв'язок буде єдиним. Інші розв'язки у випадку зовнішнього дотику знаходяться із загального аналізу задачі.

Отже, проаналізуємо загальну ситуацію, коли одне з кіл лежить ззовні іншого або перетинається з ним.

Припустимо, що задача розв'язана і шукану спільну дотичну побудовано. Розглянемо два принципово відмінних один від одного випадки: 1) дані кола лежать по один бік від спільної дотичної (рис. 13.20, а) (така дотична називається *зовнішньою*); 2) ці кола лежать по різні боки від спільної дотичної (рис. 13.21) (така дотична називається *внутрішньою*). Центри кіл позначимо через O_1, O_2, точки дотику спільної дотичної — відповідно через A і B.

1. Проведемо радіуси O_1A та O_2B в точки дотику, а потім із центра O_2 кола меншого радіуса — перпендикуляр O_2K до O_1A. Тоді за властивістю дотичних і за побудовою, чотирикутник ABO_2K — прямокутник, а звідси $KA = O_2B$, отже $O_1K = O_1A - O_2B$. Виходить, що точку K можна знайти як точку дотику дотичної, проведеної з точки O_2 до допоміжного кола з центром O_1 і радіусом, що дорівнює різниці $O_1A - O_2B$ радіусів даних кіл.

Побудувавши точку K (див. п. 12.4), подальші побудови очевидні: проводимо через K радіус O_1A, а через O_2 — радіус $O_2B \parallel O_1A$. Тоді AB — шукана дотична.

— А куди він пішов? Чи є у нього мета? — вигукнув папуга.

— Ні! — упевнено відповіло слоненя. — Її в мене немає. Хобот є. І вуха. І ще хвіст ...

— Я не про це! — сказав папуга. — Коли слоненя йде, воно має знати, що в нього попереду!

Григорій Остер, «38 папуг»

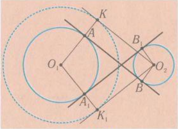


Рис. 13.21

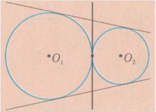


Рис. 13.22

Справді, оскільки $O_1K \perp O_2K$, а $O_2B \parallel O_1K$, то $O_2B \perp O_2K$. Крім цього, за побудовою $O_2B = KA$. Отже, за першою ознакою ABO_2K — прямокутник. А тому $AB \perp KA$ і $AB \perp O_2B$. А це означає, що пряма AB є дотичною до першого кола в точці A і до другого кола — в точці B, тобто їхньою спільною дотичною.

Оскільки до допоміжного кола з центром O_1 і радіусом $O_1A - O_2B$ можна провести дві дотичні з точки O_2, то існує ще одна спільна зовнішня дотична A_1B_1.

Це розв'язування залишається в силі і тоді, коли задані кола перетинаються (рис. 13.20, б) або, незалежно від перетину, мають рівні радіуси (рис. 13.20, в), хоча в останньому випадку допоміжне коло з радіусом $O_1A - O_2B$ перетворюється в точку O_1, а дотична O_2K до нього — в лінію центрів O_2O_1.

2. Аналіз і побудова внутрішніх спільних дотичних здійснюєься аналогічним чином, тільки тепер допоміжне коло з центром O_1 проводиться радіусом, що дорівнює не різниці, а сумі $O_1A + O_2B$ радусів даних кіл (рис. 13.21). Крім цього, точка O_2 може опинитися всередині допоміжного кола і тоді внутрішніх спільних дотичних не існуватиме. Це буде тоді, коли задані кола перетинаються. В граничному випадку точка O_2 може розміститися на допоміжному колі. Зрозуміло, що тоді дані кола дотикаються зовнішнім чином, а їхні спільні внутрішні дотичні суміщаються (рис. 13.22). У цьому останньому випадку задані кола мають три спільні дотичні — дві зовнішні і одну внутрішню.

В одному відношенні математика стоїть осібно серед інших наук: жодний її результат не може бути перекреслений подальшим розвитком науки. Доведена одного разу теорема уже ніколи не стане неправильною. Математичні знання ніколи не підлягають перегляду, тому загальний їхній запас може лише зростати.

Марк Кац, Станіслав Улам

Отже, загалом дана задача може мати: а) один розв'язок, якщо дані кола дотикаються і одне з них лежить всередині іншого; б) два розв'язки, якщо дані кола перетинаються; в) три розв'язки, якщо дані кола дотикаються зовнішнім чином; г) чотири розв'язки, якщо дані кола лежать ззовні одне одного. Якщо ж одне з кіл цілком лежить всередині іншого, то задача розв'язків не має.

13.4. Метод геометричних місць у розв'язуванні задач на побудову

Ще давні геометри відкрили один доволі універсальний метод розв'язування задач на побудову, який тепер називають *методом геометричних місць точок*. Якщо уважно проаналізувати геометричні побудови, описані в цьому підручнику вище, то в багатьох із них неодмінно помітимо застосування цього методу. До нього ведуть такі міркування.

Часто у результаті аналізу задачі побудову потрібної фігури вдається звести до побудови однієї ключової точки X. Наприклад, у наведеній в попередньому пункті задачі 2 такою точкою була вершина B трикутника ABC. Далі, часто для цієї точки X визначальними є дві умови. Наприклад, у згаданій щойно задачі 2 точка B повинна належати відрізку AD і бути рівновіддаленою від точок C і D. Тому можна розглянути окремо геометричне місце точок F_1, які задовольняють одну із цих умов, і геометричне місце точок F_2, які задовольняють іншу умову. Зрозуміло, що тоді шукана точка X належатиме перетину фігур F_1 і F_2, адже для неї обидві умови повинні виконуватися одночасно. Якщо при цьому фігури F_1 і F_2 нескладні, зокрема, якщо їх можна побудувати циркулем і лінійкою, то й точку X, а отже, і всю шукану фігуру можна побудувати цими засобами. У цьому й полягає метод геометричних місць точок у розв'язуванні задач на побудову.

Будь-яке математичне міркування, яким би складним воно не було, повинно уявлятися мені чимось єдиним; у мене немає відчуття, що я його зрозумів, доки я не відчув його як єдину загальну ідею.

Жак Адамар

Розглянемо два приклади.

Задача 1.

Побудувати рівнобедрений трикутник за основою та радіусом описаного кола.

Розв'язання. *Аналіз*. Припустимо, що потрібний рівнобедрений трикутник ABC побудовано (рис. 13.23), отже, у ньому основа BC дорівнює заданому відрізку a, а радіуси OA, OB, OC описаного кола — заданому відрізку R.

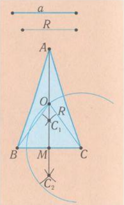


Рис. 13.23

Центр O описаного кола, з одного боку, рівновіддалений від вершин B і C, отже, належить серединному перпендикуляру C_1C_2 до відрізка BC. З іншого боку, точка O віддалена від точки C (або від B) на задану відстань R, отже, належить колу з центром C і радіусом R. Тому точка O є перетином обох вказаних геометричних місць точок.

Побудова. Відклавши від довільної точки B відрізок $BC = a$, будуємо серединний перпендикуляр C_1C_2 до нього та коло з центром C і радіусом R. Далі знаходимо точку O перетину цих фігур і відкладаємо від неї на прямій C_1C_2 відрізок $OA = R$. Трикутник ABC — шуканий.

Доведення. Оскільки точка A належить серединному перпендикуляру C_1C_2 до відрізка BC, то $AB = AC$, отже, ΔABC — рівнобедрений. З аналогічних причин $OB = OC = R$, а за побудовою й $OA = R$. Тому радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, справді дорівнює заданій величині R. За побудовою також і основа BC дорівнює заданій величині a. Отже, ΔABC — задовольняє усі вимоги задачі.

Дослідження. Задача має розв'язок завжди, коли існує точка O, тобто, якщо відстань OC більша від MC. Отже, має виконуватися нерівність $R > \dfrac{a}{2}$.

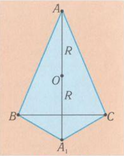


Рис. 13.24

При виконанні цієї умови на прямій C_1C_2 існує дві точки O з потрібною властивістю — розміщені по різні боки від прямої BC. У свою чергу, для кожної з них існує по дві точки A і A_1, відділених від O на потрібну відстань R (рис. 13.24), а відповідно до цього, існує по два трикутники ABC і A_1BC, що відповідають вимогам задачі. Трикутники, що одержаться для точки O, розміщеної з іншого боку від прямої BC, будуть рівними трикутнику ABC і трикутнику A_1BC.

У другому прикладі обмежимося лише аналізом задачі.

Задача 2.

Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і висотою, проведеною до гіпотенузи.

Аналіз. Оскільки гіпотенуза $AB = c$ шуканого прямокутного трикутника ABC задана, то, відклавши її на довільній прямій, зведемо задачу до побудови вершини C прямого кута (рис. 13.25).

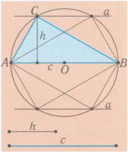


Рис. 13.25

Оскільки $\angle ACB = 90°$, то точка C належить геометричному місцю точок Фалеса, з яких відрізок AB видно під прямим кутом, тобто — колу з діаметром AB.

З іншого боку, точка C має знаходитися на заданій відстані h від прямої AB, тобто лежати на одній з двох прямих a, a', паралельних прямій AB і віддалених від неї на відстань h. Отже, точка C є перетином вказаного кола та однієї з прямих a, a'.

13.5. Про три знамениті задачі давнини на побудову

Уже античні геометри помітили, що не всі задачі на побудову можна розв'язати проведенням прямих і кіл, тобто за допомогою лінійки та циркуля. Можливо, це б їх не здивувало і не стурбувало, якби то були якісь спеціально вигадані задачі, обтяжені складними комбінаціями заданих і шуканих фігур. Натомість, йшлося про вкрай прості у формулюваннях задачі, та ще й про такі, які в ідейному плані були дуже важливими, бо відповідали традиціям їхньої геометрії.

1. Задача про квадратуру круга

Чи не найпопулярнішою із таких задач була задача про *квадратуру круга*. У п. 6.5 вже йшлося про те, що давні геометри вважали дуже важливою задачу про *квадратуру многокутників*, тобто про перетворення їх у рівновеликі квадрати. З викладених там результатів випливає, що на основі теореми Піфагора і теореми про геометричне місце точок Фалеса цю задачу легко розв'язати за допомогою лінійки та циркуля. Круг — теж одна з основних геометричних фігур. Тому абсолютно природною була постановка задачі про *квадратуру круга*, тобто *про побудову такого квадрата, який би був рівновеликим заданому кругу*.

У більшості наук наступне покоління відкидає те, що попереднє збудувало; те, що одне встановило, — наступне зруйновує. І тільки в математиці кожне покоління добудовує новий поверх тієї самої будівлі.

Герман Ганкель

І ось саме ця «природна» і «проста» задача нікому не піддавалася. Проаналізуємо її детальніше

Нехай радіус круга R, а невідома сторона рівновеликого йому квадрата x (рис. 13.26). Тоді площа круга πR^2, а площа квадрата x^2. Звідси одержуємо рівняння: $x^2 = \pi R^2$, з якого $x = \sqrt{R \cdot \pi R}$. Тому, враховуючи означення середнього пропорційного двох чисел (див. п. 6.6), робимо висновок, що задача про квадратуру круга зводиться до побудови середнього пропорційного відрізка між заданим радіусом R і відрізком πR. Отже, суть проблеми полягала у визначенні значення π. Якби це значення було знайдене і виражалося дробовим числом виду $\frac{m}{n}$, то задача легко розв'язувалася б на основі основної задачі 8 і задачі, розглянутої у п. 6.5. Справді, відклавши на прямій послідовно m відрізків завдовжки R і поділивши одержаний відрізок mR на n, ми мали б відрізок $\pi R = \frac{m}{n} R$. Після цього шуканий відрізок $x = \sqrt{R \cdot \pi R}$ легко було б побудувати за відо-

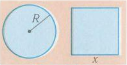


Рис. 13.26

мим алгоритмом, розглянутим у п. 6.5. Проте значення числа π ніяк не вдавалося знайти.

Був момент у V ст. до н.е., коли здавалося, що проблему з визначенням π можна «обминути» суто геометричними «хитрощами». Займаючись проблемою квадратури круга, якийсь Гіппократ Хіоський (не плутати з легендарним лікарем Гіппократом, що жив століттям пізніше) натрапив на квадровані серпки — фігури, обмежені дугами кіл.

Найпростіший вид квадрованих серпків одержується так. Візьмемо рівнобедрений прямокутний трикутник ABC і на його сторонах побудуємо півкола, як показано на рис. 13.27. У результаті одержимо два рівних серпки, площі яких позначено через S. Тоді площа одного такого серпка дорівнюватиме половині площі Δ даного трикутника ABC, тобто — площі прямокутного трикутника AOC.

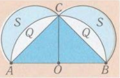


Рис. 13.27

Справді, нехай катети AC і CB трикутника ABC позначено через a. Тоді квадрат його гіпотенузи, за теоремою Піфагора, дорівнює $2a^2$. Площі кожного з двох сегментів, обмежених великим колом і катетами трикутника, позначимо через Q. Тоді площа великого півкруга, з одного боку, дорівнює $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot OA^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi AB^2}{4}=\frac{\pi a^2}{4}$, а з іншого — $\Delta+2Q$. Звідси $2Q=\frac{\pi a^2}{4}-\Delta$. Площа обох малих півкругів, з одного боку, дорівнює $2\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2=$ $=\frac{\pi a^2}{4}$, а з іншого — $2S+2Q$. Звідси $2Q=\frac{\pi a^2}{4}-2S$. Прирівнюючи обидва одержаних вирази для величини $2Q$, якраз і матимемо, що $\Delta=2S$.

З усіх принад математики розум дослідника в незрівнянно більшій мірі, ніж усе інше, звеличує непорушність її доведень.
Леонардо да Вінчі

Оскільки трикутник AOC легко перетворити у рівновеликий йому квадрат, то цим само у рівновеликий квадрат перетворюється і серпок S.

За допомогою аналогічних геометричних конструкцій Гіппократ знайшов ще два види квадрованих серпків і сподівався, що врешті-решт йому вдасться знайти й квадратуру всього круга. Та й як було не сподіватися! Якщо окремі частини круга можна сквадратувати, то як може бути, щоб цього не можна було зробити для всього круга?!

Проте ці сподівання виявилися марними. Ні квадрованих видів серпків античні математики більше не знайшли, ні весь круг сквадратувати їм не вдалося. Задача про квадратуру круга навіки стала символом непосильної справи і марної трати часу. Лише у XIX ст. німецький математик Карл Ліндеман (1852–1939) нарешті довів, що ця задача й не може бути розв'язана за допомогою циркуля та лінійки, оскільки число π, як він з'ясував, не тільки не раціональне, але навіть і не алгебраїчне, тобто воно не може бути коренем жодного алгебраїчного рівняння. Через це жоден з відрізків, що виражається через π за допомогою алгебраїчних операцій, не можна побудувати тими лініями, що виражаються такими рівняннями. Зокрема, такі відрізки не можна побудувати циркулем та лінійкою. Для строгого доведення були задіяні найновіші на той час математичні методи.

Саме на подоланні труднощів зростає й розвивається математика.
Олександр Хінчин

2. Задача про трисекцію кута

Як зауважувалося у п. 13.2 при розв'язуванні задачі 8, за допомогою циркуля і лінійки можна поділити відрізок на будь-яку кількість рівних частин. Тому цілком природно було поставити аналогічну задачу для кутів. Проте знайти відповідний алгоритм розв'язування вдалося лише для поділу кута навпіл. Навіть найпростіше узагальнення, пов'язане з *трисекцією* кута, тобто з поділом його на три рівних частини, здійснити не вдавалося. Так виникла друга знаменита задача давнини — *задача про трисекцію кута*.

Якби в математиці не було краси, то не було б і самої математики. Бо яка ж сила притягувала б до цієї нелегкої науки найбільших геніїв людства?
Микола Чайковський

Потужним збудником інтересу до цієї задачі, аналогічним до серпків Гіппократа для задачі про квадратуру круга, було те, що для багатьох кутів трисекція здійснюється дуже просто. Такими є кути 90°, 45° і взагалі всі кути з величиною $\frac{180°}{2^n}$ при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Прямий кут на три рівні частини можна поділити так. На одній зі сторін кута від його вершини відкладаємо довільний відрізок OA і на ньому, як на основі, всередині кута будуємо рівносторонній трикутник OAB (рис. 13.28). Потім будуємо бісектрису OD кута AOB. Тоді промені OB і OD поділять даний прямий кут на три рівних частини.

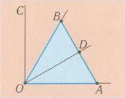


Рис. 13.28

Справді, оскільки $\angle BOA = 60°$, то $\angle AOD = \angle BOD = 30°$. Отже, й кут BOC дорівнює 30°.

Аналогічні ідеї застосовуються для трисекції інших зазначених кутів. Наприклад, для кута POQ, що дорівнює 45°, діємо так. На якому-небудь відрізку OA, що належить стороні OP кута, з того боку від прямої OP, де лежить сторона OQ, будуємо рівносторонній трикутник OAB (рис. 13.29). Тоді $\angle BOQ$ дорівнюватиме $60° - 45°$, тобто 15°. Залишається відкласти цей кут від сторін OP і OQ заданого кута POQ всередину нього.

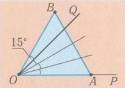


Рис. 13.29

Принципову неможливість розв'язати за допомогою циркуля і лінійки задачу про трисекцію кута в загальному випадку теж було доведено у XIX ст. Це здійснив французький математик П'єр Лоран Ванцель (1814–1848).

3. Задача про подвоєння куба

На основі теореми Піфагора дуже просто вирішується задача про перетворення двох квадратів у рівновеликий їм третій квадрат (див. п. 6.5): стороною шуканого квадрата є гіпотенуза прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють сторонам заданих квадратів (рис. 13.30). Зокрема, таким способом елементарно здійснюється *подвоєння квадрата*. Навіть більше, у

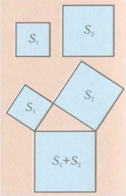


Рис. 13.30

цьому випадку відповідний прямокутний трикутник є рівнобедреним (рис. 13.31). Тому для обгрунтування можна обійтися навіть без теореми Піфагора (рис. 13.32) (цікаво, що в одному з діалогів філософа Платона цю побудову розуміє навіть хлопчик-раб). Але попри все це спроби узагальнити дані результати на простір не давали результатів. Так виникла задача про *подвоєння куба*. У ній вимагалося за допомогою циркуля та лінійки побудувати ребро куба, який би мав удвічі більший об'єм, ніж заданий куб (рис. 13.33).

Пізніше з цією задачею пов'язували декілька легенд. В одній із легенд розповідається, що коли на острові Делос, що в Егейському морі, виникла епідемія чуми, то його мешканці звернулися за порадою до знаменитого дельфійського оракула при храмі бога Аполлона (місто Дельфи біля підніжжя гори Парнас було всегрецьким релігійним центром). Оракул відповів, що для припинення нещастя потрібно умилостивити богів, збільшивши вдвоє золотий жертовник, який мав форму куба. Спочатку посланці з Делоса відлили ще один такий самий жертовник і поставили його на попередній, вважаючи, що воля богів виконана. Проте чума не припинилася, а на нове запитання оракул відповів, що задача розв'язана неправильно, бо потрібно було подвоїти жертовник, не змінюючи його кубічної форми. Відчуваючи несилу впоратися з цією задачею, делосці звернулися за допомогою до знаменитого

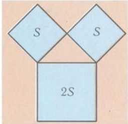


Рис. 13.31

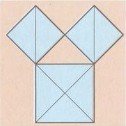


Рис. 13.32

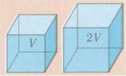


Рис. 13.33

Платона. Той спочатку докорив прохачам за те, що вони мало займаються геометрією, а потім допоміг з розв'язанням. Але побудов за допомогою циркуля і лінійки він теж не знайшов.

У зв'язку з цією легендою задачу про подвоєння куба часто називають делоською задачею.

Платон жив усередині IV ст. до н.е. Але достеменно відомо, що задачею про подвоєння куба займався ще Гіппократ Хіоський, який жив у V ст. до н.е., тобто до Платона. Тому ближчою до реальності слід вважати іншу легенду. У ній мовиться про те, що коли легендарний критський цар Мінос звелів спорудити пам'ятник своєму сину Главку, то архітектори надали йому форму куба з ребром 100 ліктів. Проте цар звелів збільшити об'єм удвічі. За порадою звернулися до вчених-геометрів, але ті не змогли точно розв'язати цю задачу (тобто циркулем і лінійкою), а запропонували розв'язання іншими засобами.

Людина — ... єдина з істот, сприйнятлива до знань, що ґрунтуються на міркуваннях.

Платон, «Означення»

Неможливість розв'язання задачі про подвоєння куба циркулем та лінійкою теж було остаточно з'ясовано лише у XIX ст., коли математики відкрили загальні критерії для можливості розв'язання задач цими засобами. Виявилося, що делоська задача цим критеріям не задовольняє.

Приклади застосування інших засобів

Невдалі спроби розв'язати знамениті задачі на побудову за допомогою лінійки та циркуля спонукали дослідників до застосування інших засобів. Аби скласти уявлення про ці пошуки та їхні результати, зупинимося на декількох з них для розв'язування простішої із знаменитих задач — задачі про трисекцію кута.

1. ***Спосіб Архімеда.*** Відступ Архімеда від канонів класичних геометричних побудов лінійкою та циркулем був таким мізерним, що при першому ознайомленні його можна й не помітити. Цей відступ полягав у тому, що Архімед на лінійці ставив дві засічки, одну з яких під час побудов суміщав з точкою на певній

Архімед.
Символічний портрет
Доменіко Фетті (XVII ст.)

прямій, а іншу — з точкою на певному колі. Такі дії не належать до елементарних побудов лінійкою та циркулем і не зводяться до таких побудов.

Алгоритм для трисекції кута AOB за Архімедом був таким (рис. 13.34). Проводиться коло з центром O, радіус OB якого дорівнює відстані ED між засічками на лінійці. Потім лінійка прикладається до точки B на колі таким чином, щоб засічка D розмістилася на колі, а засічка E — на продовженні сторони OA кута за вершину O. При цьому одержаний кут DEO дорівнюватиме рівно третині від заданого кута AOB. Отже, подальші побудови зводилися до відкладення кута BEO від сторін заданого кута AOB.

Доведення. Оскільки $DE = DO$, то $\angle DOE = \angle DEO$. Тому за властивістю зовнішнього кута $\angle BDO = 2\angle DEO$. У ΔDOB кут OBD дорівнює куту BDO, тобто $2\angle DEO$. Нарешті, $\angle AOB$ є зовнішнім для ΔBEO. Отже, $\angle AOB = \angle DEO + \angle OBD = \angle DEO + 2\angle DEO = 3\angle DEO$, що й треба було довести.

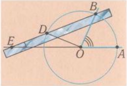


Рис. 13.34

2. У практичних застосуваннях, наприклад, у кресленні, значно зручнішим від способу Архімеда є використання спеціального приладу — *трисектора*, що складається із кутника і півкруга, з'єднаних, як показано на рис. 13.35. Радіус QC півкруга дорівнює довжині AC меншої сторони кутника.

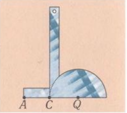


Рис. 13.35

Для трисекції заданого кута AOB (рис. 13.36) трисектор розміщують так, щоб вершина O кута розмістилася на краю більшої сторони кутника, одна зі сторін OA кута пройшла через кінець меншої сторони кутника, а інша сторона OB — дотикалася до півкруга (нехай у точці D). Тоді промені OC і OQ поділять кут AOB на три рівних частини.

Справді, оскільки OC — серединний перпендикуляр до відрізка AQ, то $OA = OQ$, тобто ΔOAQ — рівнобедрений. Тоді його висота OC є й бісектрисою. З іншого боку, оскільки OC і OD — дотичні до кола з центром Q, то $\angle COQ = \angle QOB$. Отже, всі три кути AOC, COQ і QOB рівні між собою, що й треба було довести.

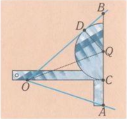


Рис. 13.36

3. Особливо продуктивним для розвитку математичних ідей був той напрямок у розв'язуванні задач на побудову, коли окрім прямих і кіл використовувалися ще й інші лінії, спеціально для цього винайдені (звідси, до речі, й бере свій початок метод геометричних місць точок у розв'язуванні задач на побудову). Яскравим прикладом є застосування до трисекції кута конхоїди Нікомеда, винайденої грецьким геометром Нікомедом у II ст. до н.е. (конхоїда — дослівно «схожа на мушлю»).

Конхоїда означається так. Береться деяка пряма l (*база* конхоїди) і точка O поза нею (рис. 13.37). Через точку O проводяться всі можливі промені OX до перетину з прямою l, на яких від точок L цього перетину з l відкладаються відрізки LM сталої довжини a. Множина точок M і утворює конхоїду Нікомеда.

Відома конструкція так званого *конхоїдального циркуля* — механічного приладу для креслення конхоїди (рис. 13.38). Основою цього приладу є Т-подібна рамка з прямолінійними прорізами всередині обох планок. Третя планка OL фіксується за допомогою шарніра у точці O, але може рухатися вздовж свого прорізу. У точці L до неї жорстко прикріплений шип, який рухається вздовж прорізу в нерухомій планці l. У результаті такого руху точка M описує конхоїду.

Нехай потрібно здійснити трисекцію якого б то не було кута LOK (рис. 13.39). Проводимо яку-небудь пряму LK, перпендикулярну до однієї зі сторін кута, і будуємо конхоїду з базою LK так, щоб відстань LM дорівнювала $2LO$. Далі з точки L ставимо перпендикуляр NL

Потреба звершувати, залишити свій слід на землі, вкласти свою душу у щось величне, що житиме довго, переживе її, — ось вияв переваги людини над усіма тваринами, котрі населяють нашу планету.
Жуль Верн, «Таємничий острів»

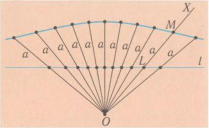


Рис. 13.37

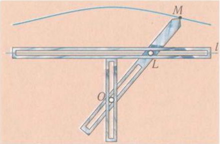


Рис. 13.38

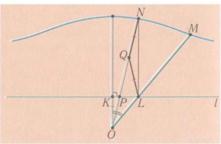


Рис. 13.39

до LK (точка N лежить на конхоїді) і проводимо пряму NO. Тоді $\angle NOK = \frac{1}{3}\angle LOK$.

Доведення. Позначимо через P точку перетину прямих NO і LK, а через Q — середину відрізка NP. Оскільки $NL \parallel OK$, то $\angle LNQ = \angle NOK$. А оскільки ΔNLP — прямокутний і Q — середина його гіпотенузи, то вона є центром описаного кола; звідси $QL = QN$ і, отже, $\angle LNQ = \angle NLQ$. За властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle LQO = 2\angle LNQ$, отже $\angle LQO = 2\angle NOK$. Нарешті, оскільки в трикутнику LOQ за побудовою $LO = LQ$, то $\angle LQO = \angle LON$. Отже, $\angle LON = 2\angle NOK$, і тому $\angle NOK = \frac{1}{3}\angle LOK$, що й треба було довести.

Намагаючись аналогічним чином розв'язати інші знамениті задачі на побудову, античні математики відкрили цілу низку інших цікавих ліній, зокрема, *конічні перерізи*. На дослідженні цих ліній випробовували свої сили дослідники усіх наступних епох аж до нашого часу, а конічні перерізи дивовижним чином знайшли застосування у фізиці. Парадоксально, але параболічні й гіперболічні антени ми зараз маємо саме тому, що колись сиві мудреці, розв'язуючи «шкільні» задачі на побудову, відкрили ці лінії, які, як з'ясувалося, здатні фокусувати промені.

Але про це вже в наступних класах!

— Будь ласка, — попросило папугу слоненя, — політай ще! Трішечки!

— На сьогодні вистачить! — не вельми ввічливо сказав папуга. — Головне — повірити у себе, а я в себе вже повірив.

Григорій Остер, «38 папуг»

Перевір себе

1. Яке значення мають геометричні побудови для геометрії? А для інших наук і практики?
2. Чому побудови саме циркулем та лінійкою особливо виділяються у геометрії?
3. Як точніше слід називати геометричні побудови за допомогою циркуля і лінійки?
4. До яких елементарних побудов повинна зводитися кожна складніша побудова за допомогою циркуля та лінійки?
5. Які інші засоби геометричних побудов, окрім циркуля і лінійки, ви можете назвати? Які побудови цими засобами можна вважати елементарними?
6. Які із задач на побудову можна вважати основними?
7. Якою є орієнтовна схема розв'язування задач на побудову, тобто на які етапи розбивається це розв'язування? У чому полягає кожен із цих етапів?
8. У чому полягає метод геометричних місць для розв'язування задач на побудову? Назвіть відомі вам приклади геометричних місць точок.
9. Назвіть приклади знаменитих задач на побудову, які не можна розв'язати циркулем та лінійкою.

Задачі і вправи

1°. Дано точку A і відрізок p. Побудуйте точку, яка знаходиться від точки A на відстані, що дорівнює довжині даного відрізка. Скільки розв'язків має ця задача?

2°. Дано пряму a, точку A, яка їй не належить, і відрізок p. Побудуйте на прямій a таку точку, яка віддалена від точки A на відстань, що дорівнює довжині відрізка p. Скільки розв'язків може мати ця задача?

3°. Побудуйте рівносторонній трикутник за даною стороною.

4. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та бічною стороною.

5. Побудуйте трикутник за двома сторонами й медіаною, проведеної до однієї з них.

6. Побудуйте в зошиті фігури, зображені на рис. 13.40, а) – г).

7. Побудуйте який-небудь промінь a, а потім відкладіть від нього кути, які рівні зображеним на рис. 13.40, в) – г).

8. Побудуйте кут 60°, а потім проведіть його бісектрису.

9. Побудуйте прямий кут, а потім проведіть його бісектрису.

10. Побудуйте кут 45°.

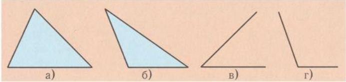


Рис. 13.40

11. Побудуйте кути 30°, 15° і 120°.
12. Побудуйте які-небудь два гострих кути, а потім ще два кути, які дорівнюють сумі та різниці побудованих.
13. Побудуйте прямокутний трикутник за двома катетами.
14. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гострим кутом.
15. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і гострим кутом.
16. Дано трикутник. Побудуйте точку перетину його бісектрис.
17. Дано тупокутний трикутник. Побудуйте точку перетину прямих, які містять його висоти.
18. Даний кут поділіть на 4 рівних частини.
19. Побудуйте трикутник за стороною і прилеглими до неї кутами.
20. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та кутом при основі.
21. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і висотою, проведеною до основи.
22. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник за гіпотенузою.
23. Заданий відрізок поділіть навпіл.
24. Заданий відрізок поділіть на 4 рівних частини.
25. Дано відрізок. Побудуйте відрізок, який дорівнює $\frac{2}{3}$ від даного.
26. Через задану точку проведіть дотичну до даного кола.
27. Побудуйте дотичну до кола, яка паралельна даній прямій.
28. Побудуйте дотичну до кола, яка перпендикулярна даній прямій.
29. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і висотою, проведеною до основи.
30. Побудуйте квадрат за його стороною.
31. Побудуйте квадрат за його діагоналлю.
32. Побудуйте паралелограм за його сторонами і гострим кутом.
33. Побудуйте паралелограм за двома сторонами та однією з діагоналей.
34. Побудуйте ромб за його стороною і тупим кутом.
35. На даній прямій побудуйте центр кола, яке проходить через дві дані точки.

36. Дано коло і точку всередині нього. Проведіть через цю точку хорду, яка ділиться цією точкою навпіл.

37. Побудуйте трикутник ABC за кутом A і висотами, проведеними до сторін AB та AC.

38. Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до неї, та висотою, проведеною до іншої сторони.

39. Чи буде дуга кола з центром O і радіусом R геометричним місцем точок, віддалених від точки O на відстань R?

40. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіуса R, що проходять через точку A.

41. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до даної прямої у даній точці A.

42. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіуса R, що дотикаються до даного кола радіуса r.

43. Чи буде пряма, на якій лежить медіана трикутника, геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців основи?

44. Чи буде висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців основи?

45. Із середини відрізка проведений промінь, перпендикулярний до цього відрізка. Чи буде він геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка?

46. Дано кут і дві точки A і B. На сторонах кута знайдіть точки, рівновіддалені від точок A і B.

47. Знайдіть геометричне місце вершин рівнобедрених трикутників зі спільною основою і рівними висотами.

48. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які проходять через дві задані точки.

49. Знайдіть точку, рівновіддалену від усіх вершин трикутника. Чи завжди є така точка?

50. Знайдіть точку, рівновіддалену від трьох даних точок. Чи завжди є така точка? У якому випадку задача не має розв'язків?

51. Дано кут і точку M всередині нього. Знайдіть таку точку, яка однаково віддалена від обох сторін кута і знаходиться від точки M на даній відстані p.

52. Всередині трикутника знайдіть точку, рівновіддалену від усіх трьох його сторін.

53. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які розташовані всередині трикутника й дотикаються не менше, ніж до двох його сторін.

54. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних пересічних прямих.

55. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які відтинають на кожній з двох пересічних прямих хорду, що дорівнює даному відрізку.

56. Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, та радіусом описаного кола.
57. Побудуйте прямокутний трикутник ABC, якщо дано гострий кут B і бісектрису BD.
58. На даному колі побудуйте точку, рівновіддалену від двох даних пересічних прямих. Скільки розв'язків має задача?
59. Побудуйте коло даного радіуса з центром на одній стороні даного кута, яке дотикається до іншої сторони цього кута.
60. Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до іншої сторони, та медіаною, проведеною до третьої сторони.
61. Побудуйте трикутник за двома сторонами й висотою, проведеною до однієї з них.
62. Побудуйте трикутник за кутом, бісектрисою, проведеною з вершини цього кута, і висотою, проведеною до прилеглої до цього кута сторони.
63. Побудуйте трикутник за кутом, протилежною йому стороною й висотою, проведеною до іншої сторони.
64. На бісектрисі кута ABC знайдіть точку, віддалену від заданої точки P на дану відстань a. Скільки точок, що мають таку властивість, можна знайти? (Розгляньте різні випадки).
65. Дано кут ABC і точку D. Побудуйте точку, що лежить всередині кута, яка рівновіддалена від його сторін і знаходиться на відстані p від точки D.
66. Знайдіть точку, віддалену на відстань p від даної прямої a і на відстань m від даної точки M.
67. На даному колі (даній прямій) побудуйте точку: а) рівновіддалену від заданих точок P і Q; б) віддалену від даної точки P на відстань p.
68. На заданій прямій a знайдіть точку, рівновіддалену від пересічних прямих b і c.
69. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих.
70. Побудуйте коло, що проходить через задану точку A і дотикається до даної прямої a в заданій на ній точці.
71. Побудуйте коло даного радіуса R, що проходить через дану точку A і дотикається до даної прямої a.
72. Побудуйте коло, що дотикається до двох даних паралельних прямих і проходить через дану точку, яка лежить між ними.
73. Впишіть коло у даний кут.
74. Впишіть у даний кут коло, яке проходить через дану точку на стороні кута.
75. Впишіть у даний кут ABC коло даного радіуса R.
76. Побудуйте трикутник за кутом, прилеглою до нього стороною й висотою, проведеною до цієї сторони.

77. Побудуйте трикутник за двома кутами й сумою протилежних їм сторін.

78. Побудуйте трикутник за кутом, різницею двох прилеглих до нього сторін і висотою, проведеною до однієї з цих сторін.

79. Побудуйте трикутник за кутом, прилеглою до нього стороною та периметром.

80. Побудуйте трикутник за стороною, сумою двох інших сторін і висотою, проведеною до однієї з них.

81. Дано два кути A і B, з яких кут A гострий, а кут B — тупий. Побудуйте такі кути P і Q, щоб $\angle P - \angle Q = \angle A$, а $\angle P + \angle Q = \angle B$.

82. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і кутом при основі.

83. Побудуйте трикутник за двома сторонами й кутом, протилежним до більшої сторони.

84. Побудуйте трикутник за двома сторонами й кутом, що лежить проти меншої сторони.

85. Побудуйте трикутник за стороною, висотою і медіаною, проведеними до цієї сторони.

86. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.

87. Побудуйте трикутник за основою та висотами, проведеними до бічних сторін.

88. Побудуйте прямокутний трикутник за сумою катетів та гострим кутом.

89. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і різницею гіпотенузи та іншого катета.

90. Побудуйте трикутник за кутами при основі і сумою бічних сторін.

91. Побудуйте трикутник за стороною, кутом при основі та різницею бічних сторін.

92. Побудуйте трикутник за його периметром та двома кутами.

93. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які зовнішньо (внутрішньо) дотикаються до двох рівних кіл. (Розгляньте різні випадки взаємного розташування даних кіл).

94. Два населених пункти A і B розташовані по різні боки від річки. В якому місці потрібно побудувати міст через річку, аби він був однаково віддалений від населених пунктів?

95. Дано кут A і точку B на одній з його сторін. Знайдіть на іншій стороні кута таку точку C, щоб сума відрізків CA і CB дорівнювала довжині заданого відрізка p.

Завдання для повторення та проведення контрольних робіт до розділу III

1. а) Хорда кола перетинає діаметр під кутом 30° і ділиться цим діаметром на частини завдовжки 6 см і 12 см. Визначте відстані від кінців хорди, а також від її середини до діаметра.

б) Хорда кола перетинає діаметр під кутом 30° і ділить його на два відрізки завдовжки 5 см і 15 см. Визначте відстань від центра кола до цієї хорди.

2. а) У трикутнику центр описаного кола лежить на висоті. Доведіть, що цей трикутник рівнобедрений.

б) У трикутнику центр описаного кола збігається з точкою перетину двох медіан. Доведіть, що трикутник рівносторонній.

3. а) На рис. 13.41, а) DA — дотична до кола в точці A. Визначте кут BAD.

б) На рис. 13.41, б) AD — дотична до кола в точці A. Визначте кут BOA.

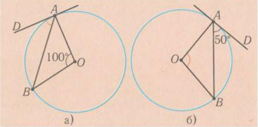


Рис. 13.41

4. а) У трикутнику центр вписаного кола лежить на висоті. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

б) У трикутнику центр вписаного кола лежить на серединному перпендикулярі до однієї зі сторін. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

5. а) Сторони трикутника ABC дорівнюють 5 см, 6 см і 7 см. Визначте довжини відрізків, на які ці сторони розбиваються точками дотику вписаного кола.

б) Сторони трикутника ABC дорівнюють 7 см, 8 см і 13 см. Визначте довжини відрізків, на які ці сторони розбиваються точками дотику вписаного кола.

6*. а) До двох кіл проведені спільні зовнішні дотичні. Доведіть, що відрізки цих дотичних з кінцями в точках дотику рівні між собою.

б) До двох кіл проведені спільні внутрішні дотичні. Доведіть, що відрізки цих дотичних з кінцями в точках дотику рівні між собою.

7. а) Два кола розташовані одне всередині іншого. Діаметр більшого кола, що проходить через центр меншого кола, ділиться меншим колом на три частини, які дорівнюють 2 см, 10 см і 6 см. Визначте діаметри кіл і відстань між їхніми центрами.

б) Два кола, радіуси яких відносяться, як 2 : 5, розташовані одне всередині іншого. Діаметр більшого кола, що проходить через центр меншого кола, ділиться меншим колом на 3 частини, крайні з яких дорівнюють 10 см і 5 см. Визначте радіуси цих кіл і відстань між їхніми центрами.

8. а) Два кола з центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B. Доведіть, що $O_1O_2 \perp AB$.

б) Два кола з центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B. Доведіть, що пряма O_1O_2 ділить навпіл кути AO_1B та AO_2B.

9. а) Побудуйте рівнобедрений трикутник за кутом при основі та висотою, проведеною до бічної сторони.

б) Побудуйте рівнобедрений трикутник за кутом при вершині та висотою, проведеною до бічної сторони.

10. а) Дано дві точки і пряму. Проведіть через ці точки інше коло, центр якого належить даній прямій.

б) Дано дві точки і коло. Проведіть через ці точки інше коло, центр якого належить даному.

11. а) Дано дві паралельні прямі і точку, яка лежить між ними. Побудуйте коло, яке дотикається до даних прямих і проходить через дану точку.

б) Дано дві пересічні прямі і точку, яка лежить між ними. Побудуйте коло, яке дотикається до даних прямих і проходить через дану точку.

12. а) Знайдіть геометричне місце центрів кіл даного радіуса R, що дотикаються до даної прямої a.

б) Знайдіть геометричне місце центрів кіл даного радіуса R, які відтинають на даній прямій a хорду даної довжини p.

13. Побудуйте коло даного радіуса r, яке дотикається до даного кола радіуса R:

а) зовнішньо;

б) внутрішньо.

14*. а) Побудуйте прямокутний трикутник за сумою катетів та гіпотенузою.

б) Побудуйте прямокутний трикутник за катетом та сумою іншого катета і гіпотенузи.

15*. а) Побудуйте прямокутний трикутник за різницею катетів та гіпотенузою.

б) Побудуйте прямокутний трикутник за різницею катетів та кутом, протилежним до меншого з катетів.

Відповіді до задач і вправ

§1. **3.** 64 см^2. **4.** 28 м. **5.** 16 см. **6.** Ні. **7.** 4 м. **8.** а) Збільшиться в 4 рази; б) збільшиться у 9 разів; г) зменшиться в 4 рази. **9.** а) Збільшиться в 4 рази; б) зменшиться у 9 разів; в) не зміниться; г) збільшиться удвічі. **16.** 14 см. **17.** а) 18 см; б) 4 м; в) 4 км; г) 320 м. **18.** 1) а) 25 000 м^2; б) 0,025 км^2; в) 2,5 га. 2) а) 0,24 км^2; б) 240 000 м^2; в) 2400 а. 3) а) 0,35 км^2; б) 3500 а; в) 35 га. **28.** 14 см і 8 см. **29.** 3 см і 7 см. **30.** 6. **31.** 9. **33.** 20 см і 22 см. **34.** 124 см. **35.** 18 м і 16 м. **36.** Друга більша на 4 а. **37.** 18 а; 220 м. **38.** 4 м^2. **39.** 1) 21%; 2) 19%. **41.** а) $ab-(a-2d)(b-2c)$; б) $ab-(a-c)(b-d)$; в) $ab-(a-2c)d$. **42.** а) 40 мм; б) 10 мм. **43.** 36,25 м. **46.** 65 м і 6 м. **47.** 36,25 м.

§2. **5.** а) 90 м^2; б) 115 м^2; в)120 м^2. **6.** 3 см^2, 3 см^2, 6 см^2. **8.** 24 см^2. **9.** 18 см^2. **10.** 5:3. **13.** 7 : 8. **14.** 62,5 см^2. **21.** 24 см^2. **22.** 2 см. **23.** Безліч. **24.** а) 2080 мм^2; б) $\frac{1}{2}(e(2a-b)+b(c+d))$. **25.** 26 мм.

§3. **6.** Всі. **35.** 15 см, 15 см, 10 см. **37.** 9 см. **40.** 3 см, 6 см, 6 см. **41.** 4 см, 6 см, 6 см. **42.** 12 дм. **43.** 5 см, 5 см, 7 см. **44.** 20 см, 20 см, 6 см. **45.** 7 см, 6 см, 6 см, або 7 см, 7 см, 4 см. **46.** 6 см, 6 см, 9 см або 8 см, 8 см, 5 см. **47.** 4 дм, 8 дм, 8 дм. **48.** $\frac{S}{2}$. **49.** $\frac{S}{2}$. **51.** 8. **52.** $2a$, $\frac{a^2}{4}$. **53.** $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{\pi^2}{9}$. **54.** $4S$; $16Q$; 6.

§4. **10.** 40° і 50°. **12.** 40°, 60° і 80°. **13.** 50° і 80°. **14.** 36°, 60° і 84°. **15.** 36°, 72° і 72°. **16.** а) 50°, 50°, 80° або 50°, 65°, 65°; б) 35°, 35° і 110°. **17.** 40°, 50°. **19.** 60° і 120°. **20.** а) 67° і 113°; б) 26 і 154°. **21.** 68°, 56°, 56°. **22.** 55° і 45°. **23.** 30°, 30°, 120° або 20, 80°, 80°. **24.** 44°, 44°, 92° або 28°, 76°, 76°. **25.** 90°. **26.** 30°, 60°, 120°, 150°. **27.** 75°. **34.** Ні. **35.** Так. **37.** Три. **39.** Ні. **40.** Ні. **41.** Ні. **47.** 144°. **48.** 19° і 71°. **49.** 18 см. **51.** 112 см^2. **52.** Прямокутник, 6 см. **53.** 14 см. **54.** Чверть кола.

§5. **10.** а) 72°, 108°; б) 54°, 126°; в) 55°, 125°; г) 88°; 92°. **11.** 130°. **12.** 90°. **21.** 60°. **22.** Ні. **24.** 65°, 115°. **25.** 36°, 144°. **27.** 90°. **33.** 115°. **49.** а) 78°; б) 45°, 83°; в) 16°, 112°; г) 48°, 80°. **50.** 50° і 75°. **51.** 40°, 40° і 100°. **52.** 15 : 14 : 11. **53.** 25°, 30° і 125°. **57.** Ні. **58.** 6. **59.** 7. **62.** 14. **63.** 5.

§6. **9.** 3 см і 4 см. **10.** 9 см і 12 см. **11.** 150 см^2. **12.** 25 см. **13.** 120 см^2. **14.** 9,75 м. **15.** 13 см. **16.** 48 см^2. **17.** 8 см^2. **18.** 6 см. **19.** 45 морських миль. **20.** 40 футів. **21.** 12 футів. **22.** 19,2 см^2. **23.** $\frac{60}{13}$ см. **24.** 150 м^2. **25.** 9 см і 16 см. **26.** 60 см. **30.** 8 см. **33.** 5 см. **34.** 40 см.

§8. **3.** По 69°. **4.** 73° і 107°. **5.** 30° і 150°. **6.** 75° і 105° **7.** 90°. **10.** а) 75°, б) 80°. **11.** а) 115°, б) 130°. **15.** а) 45°, 135°; б) 72°, 108°; в) 62°, 118°. **18.** 50°, 60 °, 70°.

§9. **7.** 72°, 108°. **8.** 24 см. **10.** 13 см і 17 см. **11.** 45° і 135°. **12.** 90° і 45°. **13.** 48° і 132°. **14.** 54° і 126°. **15.** 60° і 120°. **16.** 28°, 152°. **17.** 2,5 см. **24.** Паралелограм. **33.** Так. **35.** 60°, 120°. **37.** Так. **38.** Ні. **39.** Ні. **41.** 130°, 100°, 80°. **47.** 1) 4 см; 2) 8,2 см і 4,1 см. **48.** 3,(3) см або 7,5 см. **58.** 1) 12 см^2 ; 2) 50 см^2.

§10. **1.** а) Ні; б) ні. **19.** Так. **34.** Ні. **35.** Ні. **49.** 6 см. **51.** 14 см. **52.** 40 см.

§11. **10.** 6 од. **11.** 6 см. **12.** 30 дм. **13.** 3,51 кг. **14.** На 35 учнів. **15.** У 4 рази. **16.** Так. **19.** 495. **23.** $a\sqrt{5}$. **24.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **25.** 6 дм^3.

§12. **14.** 3 см і 7 см. **18.** Ні. **19.** Так. **20.** Так. **25.** Найбільшим є діаметр, а найменшою — хорда, перпендикулярна до нього. **26.** 8 см. **27.** 10 см. **28.** $6\sqrt{5}$ см. **29.** $10\sqrt{6}\pm 24$ см. **33.** 8 см. **36.** 6 см. **37.** Ні. **38.** Ні. **46.** $2R$. **49.** 2 см, 3 см і 8 см. **50.** $2R$. **57.** 3 см, 4 см, 5 см. **59.** 4 см, 6 см. **60.** 6 см, 15 см. **61.** 9 см. **80.** $2\pi R^2(H-R)$. **83.** ≈ 10 000 м^2. **84.** ≈ 5 км/год. **85.** ≈ 306 м. **86.** ≈ 3,5 кг. **87.** ≈ 16. **88.** ≈ 1,18 дм^3.

Короткий словник імен *)

А

Адамар Жак (1865–1963) — відомий французький математик.

Б

Бальзак Оноре де (1799–1850) — видатний французький письменник.

Бурбакі Нікола — колективний псевдонім групи видатних французьких математиків XX ст. (Андре Вейль, Анрі Картан, Жан Дьєдонне, Лоран Шварц та ін.), які мали на меті виклад усієї сучасної математики з єдиних позицій формально-аксіоматичного методу.

В

Верн Жуль (1828–1905) — всесвітньо відомий французький письменник, один із засновників наукової фантастики.

Г, Ґ

Ганкель Герман (1839–1873) — німецький математик.

Гейзенберґ Вернер Карл (1901–1976) — німецький фізик-теоретик.

Гельмгольц Герман Людвіґ Фердинанд (1821–1894) — німецький учений, філософ-натураліст.

Геракліт Ефеський (бл. 544 – 480 до н.е.) — давньогрецький філософ.

Герцен Олександр Іванович (1812–1870) — російський письменник-публіцист і громадський діяч.

Гоголь Микола Васильович (1809–1854) — видатний український і російський письменник.

Ґалілей Ґалілео (1564–1642) — легендарний італійський фізик, механік, астроном.

Ґассенді П'єр (1592–1655) — французький філософ-матеріаліст, математик і астроном.

Ґете Йоганн Вольфґанг (1749–1832) — класик німецької літератури, мислитель і природодослідник.

Д

Данте Аліґ'єрі (1265–1321) — великий італійський поет, провісник європейського Відродження.

Дарвін Чарльз Роберт (1809–1882) — англійський природодослідник, автор загальновідомої теорії про походження видів шляхом природного добору.

Дедекінд Ріхард Юліус Вільгельм (1831–1916) — видатний німецький математик.

Декарт Рене (1596–1650) — великий французький філософ-раціоналіст, математик і природодослідник. Заклав основи методу координат для розв'язування алгебраїчних та геометричних проблем.

Демокріт (бл. 460 – бл. 370 до н.е.) — давньогрецький філософ, засновник атомізму.

Дефо Даніель (бл. 1660–1731) — англійський письменник і політичний діяч, засновник англійського реалістичного роману.

Дідро Дені (1713–1784) — французький письменник, філософ і просвітник.

Дойл Артур Конан (1859–1930) — англійський письменник, автор всесвітньо відомих оповідань та повістей про Шерлока Холмса.

*) Імена діячів, інформація про яких міститься в тексті підручника, тут не наведені.

Дюма Александр (1802–1870) — французький письменник, автор широковідомих історичних романів.

Е

Екзюпері Антуан де Сент (1900–1944) — французький письменник. Був військовим льотчиком; загинув у повітряному бою під час другої світової війни.

Ж

Жуковський Микола Єгорович (1847–1921) — відомий російський математик і механік.

К

Кант Іммануїл (1724–1804) — німецький філософ-ідеаліст.

Кац Марк (нар. 1914 р.) — американський математик польського походження.

Кеплер Йоганн (1571–1630) — німецький астроном і математик.

Керролл Льюїс (справжнє ім'я **Доджсон Чарльз Латвідж**, 1832–1898) — англійський математик. Світову славу здобув як письменник, автор повістей-казок «Аліса в Країні чудес» та «Аліса в Задзеркаллі».

Л

Лебег Анрі Луї (1857–1941) — відомий французький математик, створив теорію міри.

Левицький Володимир Йосипович (1872–1956) — український математик.

Лейбніц Ґотфрід Вільгельм (1646–1716) — геніальний німецький математик, фізик і філософ.

Леонардо да Вінчі (1452–1519) — великий італійський художник і вчений, один із титанів епохи Відродження.

Локк Джон (1632–1704) — англійський філософ-матеріаліст.

Ломоносов Михайло Васильович (1711–1765) — великий російський просвітитель, природодослідник та літератор, засновник Московського університету.

Лукіан (бл. 120 – бл. 190) — давньогрецький письменник-сатирик.

М

Менделєєв Дмитро Іванович (1834–1907) — всесвітньо відомий російський учений в галузі хімії, фізики та метрології.

Мілн Алан Александер (1882–1956) — англійський письменник, автор відомої книги «Вінні-Пух і всі-всі-всі».

Мольєр (справжнє ім'я **Жан-Батіст Поклен**, 1622–1673) — видатний французький комедіограф, актор і реформатор театру.

Монж Гаспар (1746–1818) — видатний французький геометр і суспільний діяч. Створив нарисну геометрію. Був морським міністром Франції.

Монтеск'є Шарль Луї (1689–1755) — французький філософ-просвітник.

Мордел Луїс Джоель (1868–1972) — відомий англійський математик.

Н

Носов Микола Миколайович (1908–1976) — відомий російський письменник, автор романів про Незнайка.

О

Остер Григорій Бенціонович (нар. 1947) — російський письменник.

П

Паскаль Блез (1623–1662) — французький фізик, математик та філософ.

Писарєв Дмитро Іванович (1840–1868) — російський публіцист і літературний критик.

По Едгар Аллан (1809–1849) — американський письменник, один із засновників детективного жанру.

Пойя Дьєрдь (1887–1985) — американський математик угорського походження, автор відомих праць, присвячених проблемам навчання математики.

Пуассон Сімеон Дені (1781–1840) — видатний французький математик і фізик.

Р

Рамус П'єр (1515–1572) — французький математик, філософ і філолог.

Распе Ґотфрід Рудольф Еріх (1737–1794) — німецький письменник.

С

Сен-Сімон Клод Анрі (1760–1825) — французький філософ-утопіст.

Сервантес Міґель де Сааведра (1547–1616) — видатний іспанський письменник.

Сєченов Іван Михайлович (1829–1905) — видатний російський вчений-фізіолог.

Сковорода Григорій Савич (1722–1794) — великий український філософ, поет і просвітник.

Стобей Іоан (V ст.) — грецький філософ і письменник, упорядник антології, до якої увійшли твори майже 400 грецьких письменників, прозаїків та поетів.

Т

Толстой Лев Миколайович (1828–1910) — великий російський письменник. Організував початкову школу для селянських дітей, написав для неї підручник з арифметики.

У

Улам Станіслав (1909–1984) — американський математик. Народився у Львові, закінчив Львівський політехнічний інститут (1932 р.).

Ф

Фейнман Річард Філіпс (1918–1988) — американський фізик, лауреат Нобелівської премії за розробку квантової теорії електромагнетизму (1965 р.).

Франклін Бенджамін (1706–1790) — американський учений і державний діяч.

Франк Філіп (1884–1966) — американський фізик австрійського походження.

Х

Харді Ґодфрі Гарольд (1877–1947) — відомий англійський математик.

Хізс Томас (1861–1940) — американський математик.

Хінчин Олександр Якович (1894–1959) — російський математик і педагог.

Ч

Чайковський Микола Андрійович (1887–1970) — український математик-педагог.

Чалий Богдан Йосипович (нар. 1924) — український письменник.

Чернишевський Микола Гаврилович (1828–1889) — російський письменник і літературний критик.

Предметний покажчик

Р

С

Т

Ф

У центрі обкладинки, на картині, зображено основні прилади для проведення наукових досліджень у «дотелескопний» період, які мали значний вплив на розвиток геометрії (ілюстрація з книги: Дубкова С., Маркова Н. История астрономии. — М.: Белый город, 2002). Праворуч — фрагмент з гравюри XVII ст. з астрономом Тихо Браге біля небесного глобуса. Глобус обперезаний колами — важливими фігурами, які вивчаються у цьому підручнику. На згині — рисунок Сальвадора Далі «Дезінтеграція стрімкості пам'яті» з колекції музею художника у м. Сент-Пітерсберзі (шт. Флоріда, США). Алегорія досягається перспективою прямокутників і прямокутних паралелепіпедів — центральних фігур даного курсу геометрії.

В оздобленні форзаців використано ілюстрації з книг:

1. Луи Фигье. Светила науки от древности до наших дней: Пер. с фр. — Т. 1. — Санкт-Петербург — Москва, 1868.

2. Энциклопедия для детей. — Т. 8: Астрономия. — М.: Аванта, 2001.

На першому форзаці символічно відображено основний спосіб проведення математичних досліджень у часи зародження геометрії: геометричні фігури креслилися палицею на піску. Оскільки в такий спосіб найточніше відтворювалися лише прямі та кола, то це стало однією з головних причин, за якою геометричні побудови з допомогою прямих і кіл (або лінійки і циркуля) здобули перевагу над усіма іншими.

Гравюра на другому форзаці відображає пізнішу, елліністичну епоху в історії геометрії, пов'язану з діяльністю Александрійської наукової школи. Саме в ній Евклід створив свої знамениті «Начала» геометрії, а великі астрономи Гіппарх та Птолемей активно застосовували геометрію в астрономічних дослідженнях.

Зміст

Навчальне видання

Тадеєв Василь Олександрович

ГЕОМЕТРІЯ

Основні фігури

Дворівневий підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

За редакцією проф. В.І. Михайловського

Головний редактор *Б.Є. Будний*
Редактор *В.К. Дячун*
Художник обкладинки *Р.Р. Крамар*
Дизайн та комп'ютерна верстка *А.В. Кравчука*

Підписано до друку 14.07.2007. Формат 70×90/16. Папір офсетний. Гарнітура Antiqua.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 25,74. Умовн. фарбо-відб. 102,96.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК № 370 від 21.03.2001 р.

«Навчальна книга – Богдан», а/с 529, м. Тернопіль 46008
тел./факс (0352) 52-06-07; 52-05-48; 52-19-66
publishing@budny.te.ua
www.bohdan-books.com

Друк ВВП «Місіонер». Зам. №368