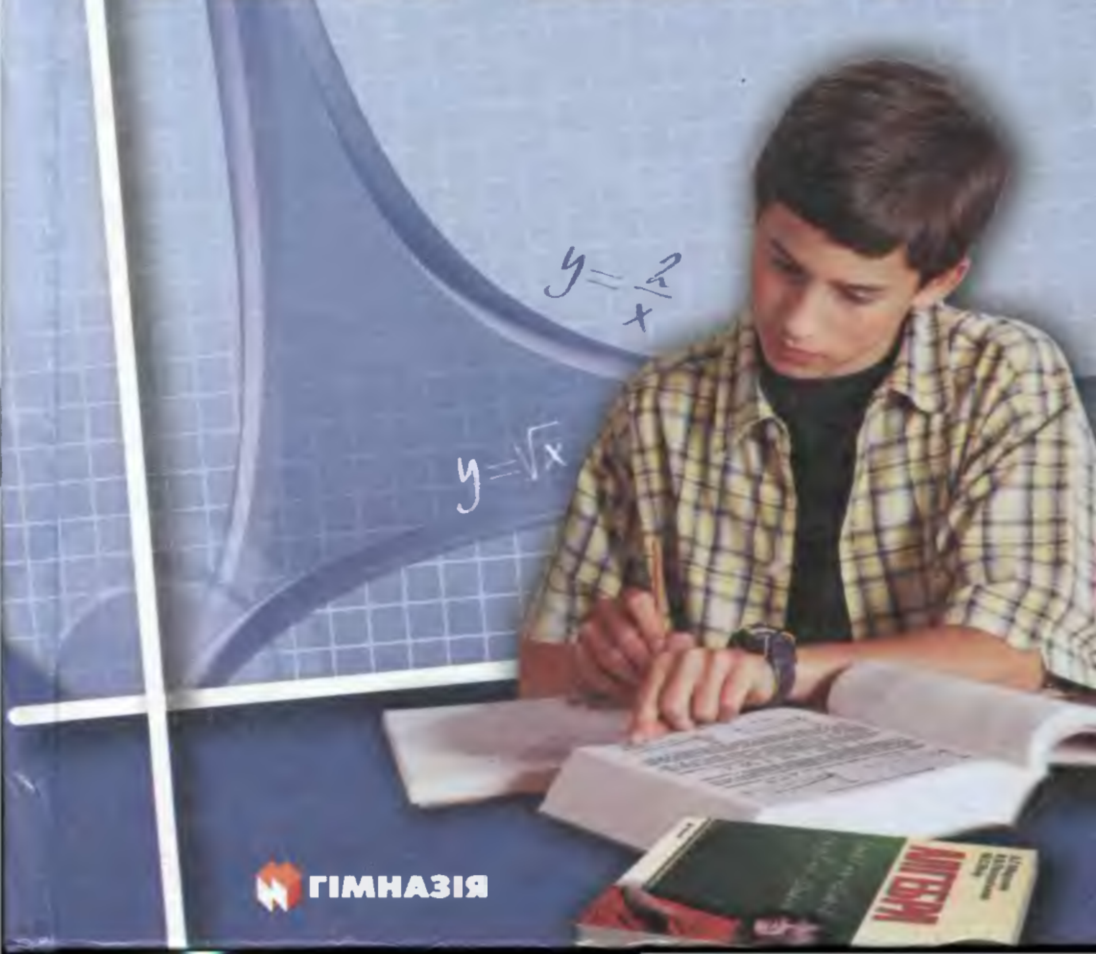
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

8

АЛГЕБРА



ГІМНАЗІЯ

УДК 373:512
ББК 22.141я721
М52

Переведено по изданию:
Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра: Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів.— Х.: Гімназія, 2008.— 256 с.

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины (Письмо № 1.4/18-1127 от 12.05.2008 г.)

Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.
М52 Алгебра: Учеб. для 8 кл. общеобразоват. учеб. заведений.— Пер. с укр.— Х.: Гимназия, 2008.— 256 с.
ISBN 978-966-474-007-1.

УДК 373:512
ББК 22.141я721

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Для середнього шкільного віку

Російською мовою

Відповідальний за випуск *В. Л. Маркіанов;* редактор *М. В. Москаленко;* художник *С. Е. Кулинич;* художній редактор *С. Е. Кулинич;* комп'ютерна верстка *І. В. Чернухи;* коректор *І. Л. Безсонова*

Підписано до друку 25.03.2008. Формат 60×90/16. Гарнітура шкільна. Папір офсетний. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 16,0.

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

ТОВ ТО «Гімназія», 61103, м. Харків, вул. Держпромівка, 16а
Тел. (057) 758-83-93, 719-17-26

Віддруковано з готових діапозитивів у друкарні ПП «Модем», м. Харків
Тел. (057) 758-15-80

ISBN 978-966-474-007-1 (рос.)
ISBN 978-966-8319-57-0 (укр.)

От авторов

ДОРОГИЕ ВОСЬМИКЛАССНИКИ!

В этом учебном году вы продолжите изучение алгебры. Полагаем, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете усваивать новые знания. Мы надеемся, что в этом вам поможет учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделен на три параграфа, каждый из которых состоит из пунктов. В пунктах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным** ***шрифтом***. Также не оставляйте вне поля зрения слова, напечатанные *курсивом*.

Обычно изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому пункту подобраны задачи для самостоятельного решения, приступать к которым советуем лишь после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (труднейшие из них обозначены «звездочкой» (*)). Свои знания можно проверить, решая задачи в тестовой форме из рубрики «Проверь себя».

Каждый пункт завершает особая рубрика, которую мы назвали «Учимся делать нестандартные шаги». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные знания по алгебре, а лишь здравый смысл, изобретательность и смекалка. Эти задачи полезны, как витамины. Они помогут вам научиться принимать неожиданные и нестандартные решения не только в математике, но и в жизни.

Если после выполнения домашних заданий останется свободное время и вы захотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный в ней, непростой. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

УВАЖАЕМЫЕ КОЛЛЕГИ!

Мы очень надеемся, что этот учебник станет надежным помощником в вашем нелегком и благородном труде, и будем искренне рады, если он вам понравится.

В книге подобран обширный и разнообразный дидактический материал. Однако за один учебный год все задачи решить невозможно, да в этом и нет необходимости. Вместе с тем намного удобнее работать, когда есть значительный запас задач. Это дает возможность реализовать принципы уровневой дифференциации и индивидуального подхода в обучении.

Красным цветом обозначены номера задач, которые рекомендуются для домашней работы, синим цветом — номера задач, которые с учетом индивидуальных особенностей учеников класса на усмотрение учителя можно решать устно.

Материал рубрики «Когда сделаны уроки» может быть использован для организации работы математического кружка и факультативных занятий.

Желаем творческого вдохновения и терпения.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

n° задания, соответствующие начальному и среднему уровням учебных достижений;

$n^{\bullet}$ задания, соответствующие достаточному уровню учебных достижений;

$n^{\bullet\bullet}$ задания, соответствующие высокому уровню учебных достижений;

n^{*} задачи для математических кружков и факультативов;

⊙ доказательство теоремы, соответствующее достаточному уровню учебных достижений;

⊙⊙ доказательство теоремы, соответствующее высокому уровню учебных достижений;

▲ окончание доказательства теоремы.

§ 1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

- В этом параграфе вы познакомитесь с дробями, числитель и знаменатель которых — выражения с переменными, научитесь складывать, вычитать, умножать и делить такие дроби, познакомитесь с уравнениями, составленными с помощью этих дробей.
- Вы узнаете, с помощью каких правил можно заменить данное уравнение на более простое.
- Вы расширите свое представление о понятии «степень», научитесь возводить числа в степень с целым отрицательным показателем.
- Вы научитесь строить математические модели процессов, в которых увеличение (уменьшение) одной величины в несколько раз приводит к уменьшению (увеличению) другой величины в то же количество раз.

1. Рациональные дроби

Перед изучением этого пункта рекомендуем повторить содержание пункта 1 на с. 229 и пункта 6 на с. 232.

В курсе алгебры 7 класса были рассмотрены целые выражения, то есть такие, которые составлены из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления на отличное от нуля число.

Вот примеры целых выражений: $x - y$, $\frac{a+b}{5}$, $m^2 + 2m + n^2$, $\frac{1}{3}x - 4$, $\frac{c}{4} + \frac{d}{7}$, $x : 5$, y, 7.

В 8 классе мы рассмотрим **дробные выражения.**

Дробные выражения отличаются от целых тем, что они *содержат действие деления на выражение с переменными.*

Приведем примеры дробных выражений:

$$2x + \frac{a}{b};\ (x - y) : (x + y);\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}};\ \frac{5}{x}.$$

Целые и дробные выражения называют **рациональными выражениями.**

Если в рациональном выражении заменить переменные числами, то получим числовое выражение. Однако *эта замена возможна лишь тогда, когда она не приводит к делению на нуль.*

Например, выражение $2 + \frac{a+2}{a-1}$ при $a = 1$ не имеет смысла, то есть числового значения этого выражения не существует. При всех других значениях a это выражение имеет смысл.

Определение. **Допустимыми значениями переменных, входящих в рациональное выражение, называют все значения переменных, при которых это выражение имеет смысл.**

Например, в рассмотренном выше выражении допустимыми значениями переменной a являются все числа, кроме $a = 1$.

Допустимыми значениями переменных, входящих в целое выражение, являются все числа.

Отдельным видом рационального выражения является **рациональная дробь.** Это дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены[1]. Например,

$$\frac{x}{7};\ \frac{x^2 - 2xy}{x + y};\ \frac{12}{a};\ \frac{a + b}{5}.$$

Отметим, что рациональная дробь может быть как целым выражением, так и дробным.

Знаменателем рациональной дроби не может быть многочлен, тождественно равный нулю.

Допустимыми значениями переменных, входящих в рациональную дробь, являются все те значения этих переменных, при которых значение знаменателя дроби не равно нулю.

Схема, изображенная на рисунке 1, иллюстрирует связь между понятиями, которые рассматриваются в этом пункте.

[1] Напомним, что числа и одночлены считают отдельными видами многочленов (см. п. **6** на с. **232**).

Рациональные выражения

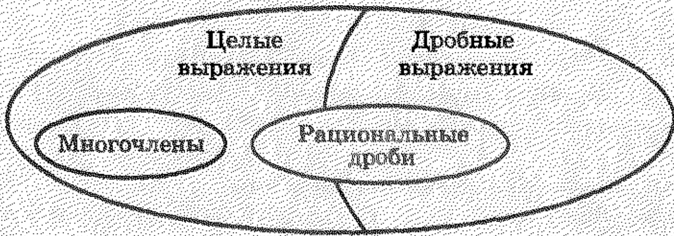


Рис. 1

ПРИМЕР

Найдите допустимые значения переменной, входящей в выражение $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-5}$.

Решение

Дробь $\frac{1}{x}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме $x=0$, а дробь $\frac{3}{x-5}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме $x=5$.

Следовательно, искомыми допустимыми значениями переменной являются все числа, отличные от 0 и 5.

?

1. Чем отличаются дробные выражения от целых?
2. Как вместе называют целые и дробные выражения?
3. Какие значения переменных называют допустимыми?
4. Какие дроби называют рациональными?
5. Отдельным видом каких выражений являются рациональные дроби?
6. Какой многочлен не может быть знаменателем рациональной дроби?

1.° Какие из выражений $\frac{3a^2}{4b^3}$, $\frac{5x^2}{4}+\frac{x}{7}$, $\frac{8}{6n+1}$, $3a-\frac{b^2}{c^4}$, $\frac{t^2-6t+15}{2t}$, $\frac{x-2}{x+2}$, $\frac{1}{6}m^3n^5$, $(y-4)^3+\frac{1}{y}$, $\frac{m^2-3mn}{18}$ являются:
1) целыми выражениями; 2) дробными выражениями;
3) рациональными дробями?

2.° Чему равно значение дроби $\frac{c^2-4c}{2c+1}$, если:

1) $c = -3$; 2) $c = 0$?

3.° Найдите значение выражения $\frac{2m-n}{3m+2n}$, если:

1) $m = -1$, $n = 1$; 2) $m = 4$, $n = -5$.

4.° Чему равно значение выражения:

1) $\frac{a^2-1}{a-5}$ при $a = -4$; 2) $\frac{x+3}{y} - \frac{y}{x+2}$ при $x = -5$, $y = 6$?

5.° Найдите допустимые значения переменной, входящей в выражение:

1) $2x - 5$;
2) $\frac{18}{m}$;
3) $\frac{9}{x-5}$;
4) $\frac{x-5}{9}$;
5) $\frac{2+y}{1+y}$;
6) $\frac{1}{x^2+4}$;
7) $\frac{5}{x^2-4}$;
8) $\frac{5}{|x|-4}$;
9) $\frac{2}{x-2} + \frac{3x}{x+1}$;
10) $\frac{x+4}{x(x-6)}$;
11) $\frac{x}{|x|+1}$;
12) $\frac{x^2}{(x-3)(x+5)}$.

6.° При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\frac{9}{y}$;
2) $\frac{x+7}{x+9}$;
3) $\frac{m-1}{m^2-9}$;
4) $\frac{x}{|x|-3}$;
5) $\frac{4}{x-8} + \frac{1}{x-1}$;
6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$?

7.• Запишите рациональную дробь, которая содержит переменную x и имеет смысл при всех значениях x, кроме:
1) $x = 7$; 2) $x = -1$; 3) $x = 0$ и $x = 4$.

8.• Запишите рациональную дробь, содержащую переменную y, допустимыми значениями которой являются:
1) все числа, кроме 5;
2) все числа, кроме −2 и 0;
3) все числа, кроме 3, −3 и 6;
4) все числа.

9.• Автомобиль проехал по шоссе a км со скоростью 75 км/ч и по грунтовой дороге b км со скоростью 40 км/ч. За какое время автомобиль проехал весь путь? Составьте выражение и найдите его значение при $a = 150$, $b = 20$.

10.° Ученик купил тетради по 60 коп., заплатив за них m грн., и по 90 коп., заплатив за них n грн. Сколько тетрадей приобрел ученик? Составьте выражение и найдите его значение при $m = 2{,}4$; $n = 4{,}5$.

11.° Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение дроби:

1) $\frac{1}{x^2}$ положительное; 2) $\frac{x^2+1}{6x-9-x^2}$ отрицательное.

12.° Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение дроби:

1) $\frac{-x^2}{x^2+5}$ неположительное;

2) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$ неотрицательное.

13.° Известно, что $5x - 15y = 1$. Найдите значение выражения:

1) $x - 3y$;

2) $\frac{8}{2x-6y}$;

3) $\frac{18y-6x}{9}$;

4) $\frac{1}{x^2-6xy+9y^2}$.

14.° Известно, что $4a + 8b = 10$. Найдите значение выражения:

1) $2b + a$; 2) $\frac{5}{a+2b}$; 3) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{2a+4b}$.

15.•• Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{1}{4-\frac{4}{x}}$; 2) $y = \frac{1}{x-\frac{1}{x}}$.

16.•• При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $\frac{x}{x-\frac{9}{x}}$; 2) $\frac{10}{2+\frac{6}{x}}$?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

17. Сократите дробь:

1) $\frac{5}{15}$; 2) $\frac{12}{18}$; 3) $\frac{27}{45}$; 4) $\frac{30}{48}$.

18. Приведите дробь:

1) $\frac{3}{7}$ к знаменателю 14;

2) $\frac{8}{15}$ к знаменателю 60.

19. Представьте в виде степени выражение:

1) a^5a^3;
2) $(a^5)^3$;
3) $a^5 : a^3$;
4) $(a^8)^4 : (a^2)^8$.

20. Разложите на множители:

1) $6a - 15b$;
2) $2a + ab$;
3) $7am + 7bn$;
4) $4x^2 - 12xy$;
5) $a^6 + a^2$;
6) $12m^2n - 4mn$;
7) $2x^2 - 4x^3 + 10x^4$;
8) $10a^3b^2 - 15a^2b + 25ab^2$.

21. Представьте в виде произведения выражение:

1) $ab - ac + bd - cd$;
2) $3m + 3n - mx - nx$;
3) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$;
4) $8a^2b - 2a^2 - 4b^2 + b$.

22. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

1) $a^2 - 8a + 16$;
2) $9x^2 + 6x + 1$;
3) $40xy + 16x^2 + 25y^2$;
4) $a^8 - 4a^4b + 4b^2$.

23. Разложите на множители:

1) $x^2 - 9$;
2) $25 - 4y^2$;
3) $36m^2 - 49n^2$;
4) $a^2b^2 - 81$;
5) $100m^6 - 1$;
6) $a^{10} - b^6$;
7) $c^3 - d^3$;
8) $a^3 + 8$;
9) $27m^6 - n^9$.

24. Разложите на множители:

1) $7a^2 - 7$;
2) $3b^3 - 3b$;
3) $2x^3 - 2xy^2$;
4) $-8a^5 + 8a^3 - 2a$;
5) $x - 4y + x^2 - 16y^2$;
6) $ab^6 - ab^4 - b^6 + b^4$.

25. Какое из равенств является тождеством:

1) $3x^2 - 36xy + 108y^2 = 3(x - 6y)^2$;

2) $4m^3 - 500n^6 = 4(m - 5n)(m - 5mn + 25n^2)$?

Повторите содержание пункта 2 на с. 229.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

26. Даны два числа: $a = \underbrace{44\ldots4}_{m \text{ цифр}}$, $b = \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ цифр}}$. Можно ли подобрать такие m и n, чтобы:

1) число a было делителем числа b;

2) число b было делителем числа a?

2. Основное свойство рациональной дроби

Равенство $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$ является тождеством, так как оно выполняется при всех значениях a.

Равенство $\frac{3a-1+2a+5}{a+1} = \frac{5a+4}{a+1}$ также естественно считать тождеством. Но оно выполняется при всех значениях a, кроме $a = -1$. При $a = -1$ рациональные дроби, входящие в данное равенство, не имеют смысла. Следовательно, нужно уточнить принятые в 7 классе определения тождественно равных выражений и тождеств.

Определение. **Выражения, соответственные значения которых равны при любых допустимых значениях переменных, называют тождественно равными.**

Определение. **Равенство, верное при любых допустимых значениях переменных, называют тождеством.**

Например, равенство $\frac{a-2}{a-2} = 1$ является тождеством, так как оно выполняется при всех допустимых значениях a, то есть при всех a, кроме $a = 2$.

В 7 классе рассматривались тождественные преобразования целых выражений. Теперь рассмотрим тождественные преобразования дробных выражений.

Согласно основному свойству отношения выполняется равенство:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm},$$

где a, b и m — некоторые числа, причем $b \neq 0$ и $m \neq 0$.

Рациональные дроби обладают свойством, аналогичным основному свойству отношения:

если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же многочлен, тождественно не равный нулю, то получим дробь, тождественно равную данной.

Это свойство называют **основным свойством рациональной дроби** и записывают следующим образом:

ется наименьшим общим кратным коэффициентов 9 и 6 данных знаменателей, а каждую из переменных a и b взять с наибольшим показателем степени, с которым она содержится в знаменателях данных дробей.

Так как $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$, то дополнительным множителем дроби $\frac{2m}{9a^2b^6}$ является одночлен $2a^2$. Учитывая, что $18a^4b^6 = 6a^4b^3 \cdot 3b^3$, находим дополнительный множитель дроби $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$: им является одночлен $3b^3$.

Следовательно, $\frac{2m}{9a^2b^6} = \frac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \frac{4a^2m}{18a^4b^6}$;

$$\frac{5n^2}{6a^4b^3} = \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}.$$

2) Общий знаменатель данных дробей равен произведению их знаменателей. Имеем:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a^2-b^2},$$

$$\frac{1}{a-b} = \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

3) Для нахождения общего знаменателя рациональных дробей бывает полезным предварительно разложить их знаменатели на множители:

$$a^2 - 36 = (a+6)(a-6),\ a^2 + 6a = a(a+6).$$

Следовательно, в качестве общего знаменателя данных дробей можно принять выражение $a(a+6)(a-6)$.

Тогда $\frac{4a^2}{a^2-36} = \frac{^{a/}4a^2}{(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a^3-36a}$;

$$\frac{6}{a^2+6a} = \frac{^{a-6/}6}{a(a+6)} = \frac{6a-36}{a(a+6)(a-6)} = \frac{6a-36}{a^3-36a}.$$

ПРИМЕР 5

Постройте график функции $y = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Решение

Данная функция определена при всех значениях x, кроме 1. Имеем:

$$y = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1,\ x \neq 1.$$

Следовательно, искомым графиком является прямая $y = x + 1$ за исключением одной точки, абсцисса которой равна 1 (рис. 2).

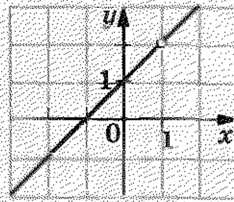


Рис. 2

ПРИМЕР 6

Решите уравнение $(a^2 - 9)\,x = a + 3$.

Решение

Запишем данное уравнение в виде $(a + 3)(a - 3)\,x = a + 3$ и рассмотрим три случая.

1) $a = 3$.

Тогда получаем уравнение $0x = 6$, которое не имеет корней.

2) $a = -3$.

В этом случае получаем уравнение $0x = 0$, корнем которого является любое число.

3) $a \neq 3$ и $a \neq -3$.

Тогда $x = \frac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \frac{1}{a-3}$.

Ответ: если $a = 3$, то уравнение не имеет корней; если $a = -3$, то корнем является любое число; если $a \neq 3$ и $a \neq -3$, то $x = \frac{1}{a-3}$.

1. Какие выражения называют тождественно равными?
2. Что называют тождеством?
3. Сформулируйте основное свойство рациональной дроби.

27.° Какому из приведенных выражений тождественно равна дробь $\frac{6a^2}{24a}$:

1) $\frac{a^2}{4}$; 2) $\frac{a}{4}$; 3) $\frac{12a^3}{48a}$; 4) $\frac{3a^4}{12a^2}$?

28.° Является ли тождеством равенство:

1) $\frac{3m^2}{7m} = \frac{3m}{7}$; 3) $\frac{2b}{5c^3} = \frac{8b}{20c^5}$;

2) $\frac{4x^8}{16x^4} = \frac{x^2}{4}$; 4) $\frac{8m^2}{9n} = \frac{8m^5}{9nm^3}$?

29.° Сократите дробь:

1) $\frac{14a^3}{21a}$; 2) $\frac{8b^3c^2}{12bc^3}$; 3) $\frac{5x}{20x}$; 4) $\frac{24x^2y^2}{32xy}$;

5) $\frac{4abc}{16ab^4}$; 6) $\frac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$; 7) $\frac{-10n^{10}}{5n^4}$; 8) $\frac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$.

30.° Представьте частное в виде дроби и сократите полученную дробь:

1) $6a : (18a^5)$; 2) $16b^7 : (48b^4)$; 3) $35a^8b^6 : (-49a^6b^8)$.

31.° Сократите дробь:

1) $\frac{3x}{21y}$; 3) $\frac{5c^4}{10c^5}$; 5) $\frac{16ab^4}{40ab^2}$; 7) $\frac{12a^8}{-42a^2}$;

2) $\frac{5x^2}{6x}$; 4) $\frac{2m^4}{m^3}$; 6) $\frac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$; 8) $\frac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$.

32.° Упростите выражение:

1) $\frac{-a}{-b}$; 2) $-\frac{-a}{b}$; 3) $-\frac{a}{-b}$; 4) $-\frac{-a}{-b}$.

33.° Восстановите равенства:

1) $\frac{a}{3} = \frac{\quad}{6a} = \frac{\quad}{9a^3} = \frac{\quad}{15b} = \frac{4a^2c^3}{\quad}$;

2) $\frac{m}{n} = \frac{4m}{\quad} = \frac{\quad}{2n^2} = \frac{\quad}{mnp} = \frac{3m^4n^3}{\quad}$.

34.° Приведите дробь:

1) $\frac{a}{b^3}$ к знаменателю b^5;

2) $\frac{m}{9n}$ к знаменателю $27n^4$;

3) $\frac{6}{7x^2y}$ к знаменателю $35x^3y^2$;

4) $\frac{5k}{6p^5}$ к знаменателю $24p^9c$.

35.° Приведите дробь:

1) $\frac{x}{y^2}$ к знаменателю y^8;

2) $\frac{a}{3b}$ к знаменателю $6b^3$;

3) $\frac{9}{4m^2n}$ к знаменателю $12m^3n^2$;

4) $\frac{11c}{15d^6}$ к знаменателю $30bd^7$.

36.° Сократите дробь:

1) $\frac{a(x+2)}{b(x+2)}$; 2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$; 3) $\frac{c^3(c-4)^5}{c^6(c-4)^3}$;

4) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$; 7) $\frac{6x+12}{6x}$; 10) $\frac{a^2+4a+4}{9a+18}$;

5) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$; 8) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$; 11) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$;

6) $\frac{4a-20b}{12ab}$; 9) $\frac{y^2-25}{10+2y}$; 12) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$.

37.° Сократите дробь:

1) $\frac{a-b}{2(b-a)}$; 3) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$; 5) $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$;

2) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$; 4) $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$; 6) $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$.

38.° Сократите дробь:

1) $\frac{3m-3n}{7m-7n}$; 4) $\frac{x^2-49}{6x+42}$; 7) $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$;

2) $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$; 5) $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$; 8) $\frac{7m^2+7m+7}{m^3-1}$;

3) $\frac{4x-16y}{16y}$; 6) $\frac{9b^2-1}{9b^2+6b+1}$; 9) $\frac{64-x^2}{3x^2-24x}$.

39.° Приведите дробь:

1) $\frac{a}{a+2}$ к знаменателю $4a+8$;

2) $\frac{m}{m-3n}$ к знаменателю m^2-9n^2;

3) $\frac{x}{2x-y}$ к знаменателю $7y-14x$;

4) $\frac{5b}{2a+3b}$ к знаменателю $4a^2+12ab+9b^2$;

5) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ к знаменателю x^3-1.

40.° Представьте выражение $x-5y$ в виде дроби со знаменателем:

1) 2; 2) x; 3) $4y^3$; 4) x^2-25y^2.

41.° Приведите дробь $\frac{6}{b-4}$ к знаменателю:

1) $5b-20$; 2) $12-3b$; 3) b^2-4b; 4) b^2-16.

42.° Представьте данные дроби в виде дробей с одинаковыми знаменателями:

1) $\frac{1}{8ab}$ и $\frac{1}{2a^3}$; 2) $\frac{3x}{7m^3n^3}$ и $\frac{4y}{3m^2n^4}$;

3) $\frac{a+b}{a-b}$ и $\frac{2}{a^2-b^2}$;

4) $\frac{3d}{m-n}$ и $\frac{8p}{(m-n)^2}$;

5) $\frac{x}{2x+1}$ и $\frac{x}{3x-2}$;

6) $\frac{a-b}{3a+3b}$ и $\frac{a}{a^2-b^2}$;

7) $\frac{3a}{4a-4}$ и $\frac{2a}{5-5a}$;

8) $\frac{7a}{b-3}$ и $\frac{c}{9-b^2}$.

43.° Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{4}{15x^2y^2}$ и $\frac{1}{10x^3y}$;

2) $\frac{c}{6a^4b^5}$ и $\frac{d}{9ab^2}$;

3) $\frac{x}{y-5}$ и $\frac{z}{y^2-25}$;

4) $\frac{m+n}{m^2-mn}$ и $\frac{2m-3n}{m^2-n^2}$;

5) $\frac{x+1}{x^2-xy}$ и $\frac{y-1}{xy-y^2}$;

6) $\frac{6a}{a-2b}$ и $\frac{3a}{a+b}$;

7) $\frac{1+c^2}{c^2-16}$ и $\frac{c}{4-c}$;

8) $\frac{2m+9}{m^2+5m+25}$ і $\frac{m}{m-5}$.

44.* Сократите дробь:

1) $\frac{(3a+3b)^2}{a+b}$;

2) $\frac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2}$;

3) $\frac{xy+x-5y-5}{4y+4}$;

4) $\frac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}$.

45.* Сократите дробь:

1) $\frac{2m^2-72n^2}{(4m+24n)^2}$; 2) $\frac{a^3-8}{ab-a-2b+2}$; 3) $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^3-ab^2}$.

46.* Найдите значение дроби, предварительно сократив ее:

1) $\frac{15a^2+10ab}{3ab+2b^2}$, если $a=-2$; $b=0,4$;

2) $\frac{9b^2-4c^2}{12b^2c-8bc^2}$, если $b=\frac{1}{3}$; $c=-6$;

3) $\frac{36x^2-12xy+y^2}{y^2-36x^2}$, если $x=1,2$; $y=-3$;

4) $\frac{a^8-a^6}{a^9+a^8}$, если $a=-0,1$.

47.* Найдите значение выражения:

1) $\frac{16x^2-4y^2}{6x-3y}$ при $x=2,5$; $y=-2$;

2) $\frac{49c^2-9}{49c^2+42c+9}$ при $c=-4$.

48.° Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{2p}{5p-15}$ и $\frac{1}{p^3-27}$;

2) $\frac{3a+1}{9a^2-6a+1}$ и $\frac{a-2}{9a^2-1}$;

3) $\frac{a}{a^2-7a}$ и $\frac{a+3}{a^2-14a+49}$;

4) $\frac{2x}{x^2-1}$, $\frac{3x}{x^2-2x+1}$ и $\frac{4}{x^2+2x+1}$;

5) $\frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}$, $\frac{b}{2a-2b}$ и $\frac{ab}{4a-4c}$.

49.° Запишите в виде дробей с одинаковыми знаменателями дроби:

1) $\frac{3a}{3a-2}$, $\frac{a}{9a+6}$ и $\frac{a^2}{9a^2b-4b}$;

2) $\frac{1}{a-5b}$, $\frac{1}{a^2+7ac}$ и $\frac{1}{a^2+7ac-5ab-35bc}$.

50.•• Найдите значение выражения $\frac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$, если $\frac{x}{y}=2$.

51.•• Найдите значение выражения $\frac{4a^2-ab}{ab+14b^2}$, если $\frac{a}{b}=5$.

52.•• Известно, что $2a-6b=1$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{8}{a-3b}$;
2) $\frac{a^2-9b^2}{0{,}5a+1{,}5b}$.

53.•• Найдите значение выражения $\frac{2m-1{,}5n}{32m^2-18n^2}$, если $4m+3n=8$.

54.•• Существует ли такое значение a, при котором дробь $\frac{a^3-a^2-a+1}{a^3+a^2+a+1}$ принимает отрицательное значение?

55.•• Постройте график функции:

1) $y=\frac{x^2-4}{x+2}$;
3) $y=\frac{x^2-10x+25}{x-5}-\frac{2x^2-4x}{x}$;
2) $y=\frac{x-3}{3-x}$;
4) $y=\frac{2}{x+4}-\frac{2}{x+4}$.

56.•• Постройте график функции:

1) $y=\frac{x^2-8x+16}{x-4}$; 2) $y=x-\frac{x}{x}$; 3) $y=\frac{x^2-3x}{x}-\frac{2x^2-2}{x^2-1}$.

57.** Постройте график функции:

1) $y = \frac{|x|}{x}$; 2) $y = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}$.

58.** Решите уравнение:

1) $\frac{x+1}{x+1} = 1$; 2) $\frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$; 3) $\frac{x+6}{|x| - 6} = 0$.

59.** Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 16}{x + 4} = -8$; 2) $\frac{|x| - 7}{x - 7} = 0$.

60.* Для каждого значения a решите уравнение:

1) $ax = 1$; 3) $(a - 6)x = a^2 - 12a + 36$;

2) $ax = a$; 4) $(a^2 - 4)x = a - 2$.

61.* Для каждого значения a решите уравнение:

1) $(a + 3)x = 3$;

2) $(a^2 - 9a)x = a^2 - 18a + 81$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

62. Упростите выражение:

1) $(x + 2)(x - 9) - 3x(3 - 2x)$;

2) $(a + 5)(a - 2) + (a + 4)(a - 5)$;

3) $(y - 8)(2y + 1) - (3y + 1)(y - 6)$;

4) $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$;

5) $(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3)$;

6) $(y - 4)(y + 3) - (y - 6)^2$.

63. Постройте график функции:

1) $y = 2$; 2) $y = 2x$; 3) $y = 2x - 1$.

64. Какое наименьшее значение и при каких значениях a и b принимает выражение $(a - 2)(a + 2) + 4b(b - a)$?

65. Расстояние от села Вишневое до железнодорожной станции на 14 км меньше расстояния от села Яблоневое до той же станции. Время, за которое автобус преодолевает расстояние от села Вишневое до станции, составляет 45 мин, а время, за которое легковой автомобиль проезжает от села Яблоневое до станции, на 5 мин больше, причем скорость автомобиля на 12 км/ч больше скорости автобуса. Найдите скорость автобуса и скорость легкового автомобиля.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

66. Выполните действия:

1) $\frac{7}{18}+\frac{5}{18}$; 2) $\frac{9}{16}+\frac{7}{16}$; 3) $\frac{23}{32}-\frac{15}{32}$; 4) $4-1\frac{3}{11}$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

67. На сторонах квадрата записаны четыре натуральных числа. В каждой вершине квадрата записано число, равное произведению чисел, записанных на сторонах, для которых эта вершина является общей. Сумма чисел, записанных в вершинах, равна 55. Найдите сумму чисел, записанных на сторонах квадрата.

3. Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

Вы знаете правила сложения и вычитания обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями. Их можно выразить такими равенствами:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

По этим же правилам складывают и вычитают рациональные дроби с одинаковыми знаменателями.

Чтобы сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тем же.

Чтобы выполнить вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тем же.

ПРИМЕР 1

Выполните вычитание:

1) $\frac{7x-5}{8x^2}-\frac{3x-5}{8x^2}$; 2) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}$; 3) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}$.

Решение

1) $\frac{7x-5}{8x^2}-\frac{3x-5}{8x^2}=\frac{7x-5-(3x-5)}{8x^2}=\frac{7x-5-3x+5}{8x^2}=\frac{4x}{8x^2}=\frac{1}{2x}$.

2) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25}=$

$=\frac{y^2-10y+25}{y^2-25}=\frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)}=\frac{y-5}{y+5}$.

3) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}=\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{-(2a-1)}=\frac{4}{2a-1}+\frac{2a-3}{2a-1}=$

$=\frac{4+2a-3}{2a-1}=\frac{2a+1}{2a-1}$.

ПРИМЕР 2

Известно, что $\frac{m}{n}=-3$. Найдите значение выражения $\frac{2m+n}{m}$.

Решение

Представим данную дробь в виде суммы целого и дробного выражений:

$$\frac{2m+n}{m}=\frac{2m}{m}+\frac{n}{m}=2+\frac{n}{m}.$$

Если $\frac{m}{n}=-3$, то $\frac{n}{m}=-\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$\frac{2m+n}{m}=2+\frac{n}{m}=2-\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}.$$

ПРИМЕР 3

Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения $\frac{2n^2+3n-15}{n}$ является целым числом.

Решение

Представим данную дробь в виде разности целого и дробного выражений:

$$\frac{2n^2+3n-15}{n}=\frac{2n^2}{n}+\frac{3n}{n}-\frac{15}{n}=2n+3-\frac{15}{n}.$$

Выражение $2n+3$ принимает натуральные значения при любых натуральных n. Выражение $2n+3-\frac{15}{n}$ принимает целое значение, если значение выражения $\frac{15}{n}$ является

целым числом. Это возможно лишь при следующих значениях n: 1, 3, 5, 15.

Ответ: при $n = 1$, или $n = 3$, или $n = 5$, или $n = 15$.

?

1. Как сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями?

2. Как вычесть рациональные дроби с одинаковыми знаменателями?

68.° **Выполните действия:**

1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}$;

2) $\frac{a}{3}-\frac{b}{3}$;

3) $\frac{m}{n}+\frac{4m}{n}$;

4) $\frac{6c}{d}-\frac{2c}{d}$;

5) $\frac{m+n}{6}-\frac{m-2n}{6}$;

6) $\frac{2a-3b}{6ab}+\frac{9b-2a}{6ab}$;

7) $-\frac{5c+4d}{cd}+\frac{4d+9c}{cd}$;

8) $\frac{8m+3}{10m^2}-\frac{2m+3}{10m^2}$.

69.° **Представьте в виде дроби выражение:**

1) $\frac{7k}{18p}-\frac{4k}{18p}$;

2) $\frac{a-b}{2b}-\frac{a}{2b}$;

3) $-\frac{a-12b}{27a}+\frac{a+15b}{27a}$;

4) $\frac{x-7y}{xy}-\frac{x-4y}{xy}$;

5) $\frac{10a+6b}{11a^3}-\frac{6b-a}{11a^3}$;

6) $\frac{x^2-xy}{x^2y}+\frac{2xy-3x^2}{x^2y}$.

70.° **Упростите выражение:**

1) $\frac{a^2}{a+3}-\frac{9}{a+3}$;

2) $\frac{t}{t^2-16}-\frac{4}{t^2-16}$;

3) $\frac{m^2}{(m-5)^2}-\frac{25}{(m-5)^2}$;

4) $\frac{5x+9}{x^2-1}-\frac{4x+8}{x^2-1}$;

5) $\frac{b^2}{b+10}+\frac{20b+100}{b+10}$;

6) $\frac{c^2}{c-7}-\frac{14c-49}{c-7}$.

71.° **Упростите выражение:**

1) $\frac{c^2}{c-9}-\frac{81}{c-9}$;

2) $\frac{a^2}{(a-6)^2}-\frac{36}{(a-6)^2}$;

3) $\frac{3x+5}{x^2-4}-\frac{2x+7}{x^2-4}$;

4) $\frac{y^2}{y-2}-\frac{4y-4}{y-2}$.

72.° **Выполните действия:**

1) $\frac{a+b}{c-7}+\frac{a}{7-c}$;

2) $\frac{5m}{m-n}+\frac{5n}{n-m}$;

3) $\dfrac{2x-4y}{x-3y}-\dfrac{4x-14y}{3y-x}$;

4) $\dfrac{81b^2}{9b-a}+\dfrac{a^2}{a-9b}$;

5) $\dfrac{t^2}{3t-6}+\dfrac{4}{6-3t}$;

6) $\dfrac{y^2}{y-1}-\dfrac{1-2y}{1-y}$.

73.° Упростите выражение:

1) $\dfrac{x}{y-1}+\dfrac{2}{1-y}$;

2) $\dfrac{3c}{c-d}+\dfrac{3d}{d-c}$;

3) $\dfrac{3m+2n}{2m-3n}-\dfrac{m-8n}{3n-2m}$;

4) $\dfrac{b^2}{2b-14}+\dfrac{49}{14-2b}$.

74.* Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{a^2-48}{a-8}-\dfrac{16}{a-8}$ при $a=32$;

2) $\dfrac{c^2+3c+7}{c^3-8}+\dfrac{c+3}{8-c^3}$ при $c=-3$.

75.* Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{5x+3}{x^2-16}+\dfrac{6x-1}{16-x^2}$ при $x=-4{,}1$;

2) $\dfrac{a^2+a}{a^2-9}-\dfrac{7a-9}{a^2-9}$ при $a=7$.

76.* Упростите выражение:

1) $\dfrac{5n-1}{20n}-\dfrac{7n-8}{20n}-\dfrac{8n+7}{20n}$;

2) $\dfrac{9m+2}{m^2-4}-\dfrac{m-9}{4-m^2}+\dfrac{1-7m}{m^2-4}$;

3) $\dfrac{3k}{k^3-1}+\dfrac{4k+1}{1-k^3}+\dfrac{k^2}{1-k^3}$.

77.* Упростите выражение:

1) $\dfrac{6a-1}{16a-8}+\dfrac{4a-7}{16a-8}+\dfrac{-2a-2}{8-16a}$;

2) $\dfrac{2a^2+12a}{a^2-25}+\dfrac{8a-9}{25-a^2}-\dfrac{a^2+14a-16}{a^2-25}$.

78.* Представьте в виде дроби выражение:

1) $\dfrac{15-8a}{(a-1)^2}-\dfrac{14-7a}{(1-a)^2}$;

2) $\dfrac{3b^2+12}{(b-2)^3}+\dfrac{12b}{(2-b)^3}$;

3) $\dfrac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)}-\dfrac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}$.

79.* Упростите выражение:

1) $\dfrac{x^2-16x}{(x-7)^4}+\dfrac{2x+49}{(7-x)^4}$;

2) $\dfrac{y^2+y}{(y-6)(y+2)}+\dfrac{y+36}{(6-y)(2+y)}$.

80.° Докажите тождество:

1) $\frac{(a+b)^2}{4ab}-\frac{(a-b)^2}{4ab}=1$; 2) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}=2$.

81.° Докажите, что при всех допустимых значениях переменной x значение выражения $\frac{12x-25}{20x-15}+\frac{8x+10}{20x-15}$ не зависит от значения x.

82.° Докажите, что при всех допустимых значениях переменной y значение выражения $\frac{17y+5}{21y-3}-\frac{9-11y}{21y-3}$ не зависит от значения y.

83.° Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{a^2-6}{(a-2)^4}-\frac{7a-4}{(a-2)^4}+\frac{3a+6}{(a-2)^4}$ принимает положительные значения.

84.° Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\frac{2-b^2}{(b-5)^6}-\frac{7-3b}{(b-5)^6}+\frac{7b-20}{(b-5)^6}$ принимает отрицательные значения.

85.•• Представьте данную дробь в виде суммы или разности целого и дробного выражений:

1) $\frac{x+3}{x}$; 2) $\frac{a^2-2a-5}{a-2}$.

86.•• Представьте данную дробь в виде суммы или разности целого и дробного выражений:

1) $\frac{4a-b}{a}$; 2) $\frac{b^2+7b+3}{b+7}$.

87.•• Известно, что $\frac{x}{y}=4$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{y}{x}$; 2) $\frac{2x-3y}{y}$; 3) $\frac{x^2+y^2}{xy}$.

88.•• Известно, что $\frac{a}{b}=-2$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{a-b}{a}$; 2) $\frac{4a+5b}{b}$; 3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

89.•• Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения является целым числом:

1) $\frac{n+6}{n}$; 2) $\frac{3n^2-4n-14}{n}$; 3) $\frac{4n+7}{2n-3}$.

90.** Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения является целым числом:

1) $\frac{8n-9}{n}$; 2) $\frac{n^2+2n-8}{n}$; 3) $\frac{9n-4}{3n-5}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

91. Из двух сел, расстояние между которыми 9 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились через 20 мин. Если бы велосипедисты ехали в одном направлении, то один из них догнал бы другого через 3 ч. Найдите скорость каждого велосипедиста.

92. Решите уравнение:

1) $1-4(x+1)=1{,}8-1{,}6x$;

2) $3(0{,}5x-4)+8{,}5x=10x-11$.

93. Докажите, что выражение $(a+4)(a-8)+4(2a+9)$ при всех значениях a принимает неотрицательные значения.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

94. Вместо звездочки запишите такой одночлен, чтобы выполнялось равенство:

1) $a^2b\cdot * = a^2b^2$; 2) $5xy^3\cdot * = 10x^4y^6$; 3) $6x^5\cdot * = 12x^{10}$.

95. Вместо звездочки запишите такой многочлен, чтобы выполнялось равенство:

1) $*\cdot(a-b)=(a+b)(a-b)^2$;

2) $(a+10b)\cdot * = a^3-100ab^2$.

96. Приведите к общему знаменателю дроби:

1) $\frac{1}{3a}$ и $\frac{2}{3b}$;

2) $\frac{4m}{p^3q^2}$ и $\frac{3n}{p^2q^3}$;

3) $\frac{5}{m-n}$ и $\frac{6}{m+n}$;

4) $\frac{6x}{x-2y}$ и $\frac{y}{x+y}$;

5) $\frac{y}{6y-36}$ и $\frac{1}{y^2-6y}$;

6) $\frac{1}{a^2-1}$ и $\frac{1}{a^2+a}$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

97. Может ли четное число иметь нечетных делителей больше, чем четных?

4. Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями

Применяя основное свойство дроби, можно сложение и вычитание дробей с разными знаменателями свести к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями.

Пусть нужно сложить две рациональные дроби $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$.

Можно записать: $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}$; $\frac{C}{D} = \frac{C \cdot B}{D \cdot B}$.

Тогда $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D + C \cdot B}{B \cdot D}$.

Здесь в качестве **общего знаменателя** выбрано выражение, равное произведению знаменателей данных дробей.

Отметим, что произведение знаменателей данных дробей не всегда является наиболее удобным общим знаменателем.

Напомним, что при нахождении общего знаменателя обыкновенных дробей мы находили наименьшее общее кратное знаменателей, разложив их на простые множители. Аналогично для нахождения общего знаменателя рациональных дробей может оказаться полезным разложение знаменателей на множители.

Понятно, что сумма и разность двух рациональных дробей являются рациональными дробями.

ПРИМЕР 1

Упростите выражение:

1) $\frac{b+1}{abc} + \frac{1-a}{a^2c}$;

2) $\frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n}$;

3) $\frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n}$;

4) $\frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15}$;

5) $\frac{x}{x-4} - \frac{x+2}{x-2}$.

Решение

1) Общим знаменателем данных дробей является одночлен a^2bc. Следовательно,

$$ {}^{a/}\frac{b+1}{abc} + {}^{b/}\frac{1-a}{a^2c} = \frac{ab+a+b-ab}{a^2bc} = \frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) Разложив предварительно знаменатели данных дробей на множители, получаем:

$$\frac{m}{7m+7n}-\frac{n}{7m-7n}=\frac{^{m-n/}m}{7(m+n)}-\frac{^{m+n/}n}{7(m-n)}=\frac{m(m-n)-n(m+n)}{7(m+n)(m-n)}=$$
$$=\frac{m^2-mn-mn-n^2}{7(m^2-n^2)}=\frac{m^2-2mn-n^2}{7(m^2-n^2)}.$$

3) Имеем:

$$\frac{10n+14}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}=\frac{10n+14}{(n-7)(n+7)}-\frac{^{n+7/}6}{n-7}=\frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)}=$$
$$=\frac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)}=\frac{4n-28}{(n-7)(n+7)}=\frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)}=\frac{4}{n+7}.$$

4) $$\frac{2a}{25-10a+a^2}-\frac{1}{3a-15}=\frac{2a}{(5-a)^2}-\frac{1}{3(a-5)}=\frac{^{3/}2a}{(a-5)^2}-\frac{^{a-5/}1}{3(a-5)}=$$
$$=\frac{6a-a+5}{3(a-5)^2}=\frac{5a+5}{3(a-5)^2}.$$

5) В этом случае общий знаменатель данных дробей равен произведению их знаменателей. Тогда

$$\frac{^{x-2/}x}{x-4}-\frac{^{x-4/}x+2}{x-2}=\frac{x(x-2)-(x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)}=$$
$$=\frac{x^2-2x-x^2+4x-2x+8}{(x-4)(x-2)}=\frac{8}{(x-4)(x-2)}.$$

ПРИМЕР 2

Представьте в виде дроби выражение $\frac{21c^2}{7c-2}-3c.$

Решение

Представив выражение $3c$ в виде дроби со знаменателем 1, получаем:

$$\frac{21c^2}{7c-2}-3c=\frac{21c^2}{7c-2}-\frac{^{7c-2/}3c}{1}=\frac{21c^2-21c^2+6c}{7c-2}=\frac{6c}{7c-2}.$$

1. Как выполнить сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями?
2. Что является суммой и разностью двух рациональных дробей?

98.° Выполните действия:

1) $\frac{x}{4}+\frac{2x}{3}$; 2) $\frac{5b}{14}-\frac{b}{7}$; 3) $\frac{m}{8}-\frac{n}{6}$;

4) $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}$; 6) $\frac{c}{b}-\frac{d}{3b}$; 8) $\frac{11}{5a}-\frac{2c}{15ab}$;

5) $\frac{m}{4n}+\frac{m}{6n}$; 7) $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{ab^4}$; 9) $\frac{m}{abc}+\frac{c}{abm}$.

99.° Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{x}{8}-\frac{y}{12}$; 3) $\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$; 5) $\frac{7}{cd}+\frac{k}{cp}$;

2) $\frac{4a}{7}+\frac{a}{4}$; 4) $\frac{x^2}{2y}+\frac{y}{8x}$; 6) $\frac{6a}{35c^5}-\frac{9b}{14c^2}$.

100.° Упростите выражение:

1) $\frac{a+7}{12}+\frac{a-4}{9}$;

2) $\frac{2b-7c}{6}-\frac{3b+2c}{15}$;

3) $\frac{3x-2}{x}-\frac{3y-1}{y}$;

4) $\frac{6p+1}{p}-\frac{2p+8}{3p}$;

5) $\frac{5m-n}{14m}-\frac{m-6n}{7m}$;

6) $\frac{x+4}{11x}-\frac{y-3}{11y}$;

7) $\frac{a+b}{ab}+\frac{a-c}{ac}$;

8) $\frac{2}{p^2}+\frac{p-1}{p}$;

9) $\frac{k+4}{k}-\frac{3k-4}{k^2}$;

10) $\frac{x-y}{x^3}-\frac{y-x^2}{x^2y}$;

11) $\frac{2m-3n}{m^2n}+\frac{7m-2n}{mn^2}$;

12) $\frac{c+d}{cd^4}-\frac{c^2-8d}{c^3d^3}$.

101.° Выполните сложение или вычитание дробей:

1) $\frac{9-5b}{b}-\frac{7-5c}{c}$;

2) $\frac{4d+7}{7d}-\frac{d-6}{6d}$;

3) $\frac{5-k}{5p}-\frac{p+10}{5k}$;

4) $\frac{m-n}{mn}-\frac{p-n}{np}$;

5) $\frac{6a+2}{ab}-\frac{2a+4}{a^2b}$;

6) $\frac{c^2-16}{c^6}-\frac{c-9}{c^5}$;

7) $\frac{1}{x^3}-\frac{1+x^2}{x^5}$;

8) $\frac{1-ab}{abc}-\frac{1-ad}{acd}$.

102.° Выполните действия:

1) $\frac{2}{x}+\frac{3x-2}{x+1}$; 3) $\frac{a}{a-3}-\frac{3}{a+3}$; 5) $\frac{x}{2y+1}-\frac{x}{3y-2}$;

2) $\frac{m}{n}-\frac{m}{m+n}$; 4) $\frac{c}{3c-1}-\frac{c}{3c+1}$; 6) $\frac{a-b}{b}-\frac{a-b}{a+b}$.

103.° Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}$; 2) $\frac{4}{x}-\frac{5x+4}{x+2}$; 3) $\frac{b}{b-2}-\frac{2}{b+2}$.

104.° Упростите выражение:

1) $\frac{1}{b(a-b)}-\frac{1}{a(a-b)}$;

2) $\frac{5}{a}+\frac{30}{a(a-6)}$;

3) $\frac{3}{x-2}-\frac{2x+2}{x(x-2)}$;

4) $\frac{y}{2(y+3)}-\frac{y}{5(y+3)}$;

5) $\frac{5m+3}{2(m+1)}-\frac{7m+4}{3(m+1)}$;

6) $\frac{c-a}{a(a+b)}+\frac{c+b}{b(a+b)}$.

105.° Выполните действия:

1) $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}$;

2) $\frac{4}{b}-\frac{8}{b(b+2)}$;

3) $\frac{x}{5(x+7)}-\frac{x}{6(x+7)}$;

4) $\frac{4n+2}{3(n-1)}-\frac{5n+3}{4(n-1)}$.

106.° Выполните сложение или вычитание дробей:

1) $\frac{a}{a-2}-\frac{3a+1}{3a-6}$;

2) $\frac{18}{b^2+3b}-\frac{6}{b}$;

3) $\frac{2}{c+1}-\frac{c-1}{c^2+c}$;

4) $\frac{d-1}{2d-8}+\frac{d}{d-4}$;

5) $\frac{m+1}{3m-15}-\frac{m-1}{2m-10}$;

6) $\frac{m-2n}{6m+6n}-\frac{m-3n}{4m+4n}$;

7) $\frac{a^2+2}{a^2+2a}-\frac{a+4}{2a+4}$;

8) $\frac{3x-4y}{x^2-2xy}-\frac{3y-x}{xy-2y^2}$.

107.° Упростите выражение:

1) $\frac{b}{b-5}-\frac{4b-1}{4b-20}$;

2) $\frac{2}{m}-\frac{16}{m^2+8m}$;

3) $\frac{a-2}{2a-6}-\frac{a-1}{3a-9}$;

4) $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\frac{b}{a+b}$;

5) $\frac{b+4}{ab-b^2}-\frac{a+4}{a^2-ab}$;

6) $\frac{c-4}{4c+24}+\frac{4c+9}{c^2+6c}$.

108.° Выполните действия:

1) $\frac{3}{x+3}+\frac{x+4}{x^2-9}$;

2) $\frac{a^2}{a^2-64}-\frac{a}{a-8}$;

3) $\frac{6b}{9b^2-4}-\frac{1}{3b-2}$;

4) $\frac{3a+b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$;

5) $\frac{m}{m+5}-\frac{m^2}{m^2+10m+25}$;

6) $\frac{b}{a+b}-\frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}$.

109.° Упростите выражение:

1) $\frac{4x-y}{x^2-y^2}+\frac{1}{x-y}$;

2) $\frac{y^2}{y^2-81}-\frac{y}{y+9}$;

3) $\frac{10a}{25a^2-9}-\frac{1}{5a+3}$;

4) $\frac{n}{n-7}-\frac{n^2}{n^2-14n+49}$.

110.° **Представьте в виде дроби выражение:**

1) $\frac{a}{b}+1$;
2) $\frac{x}{y}-x$;
3) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2$;
4) $\frac{9}{p^2}-\frac{4}{p}+3$;
5) $2-\frac{3b+2a}{a}$;
6) $\frac{3b+4}{b-2}-3$;
7) $6m-\frac{12m^2+1}{2m}$;
8) $\frac{20b^2+5}{2b-1}-10b$.

111.° **Выполните действия:**

1) $a-\frac{4}{a}$;
2) $\frac{1}{x}+x-2$;
3) $\frac{m}{n^3}-\frac{1}{n}+m$;
4) $\frac{2k^2}{k-5}-k$;
5) $3n-\frac{9n^2-2}{3n}$;
6) $5-\frac{4y-12}{y-2}$.

112.• **Упростите выражение:**

1) $\frac{a^2+1}{a^2-2a+1}+\frac{a+1}{a-1}$;
2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$;
3) $\frac{c+7}{c-7}+\frac{28c}{49-c^2}$;
4) $\frac{5a+3}{2a^2+6a}+\frac{6-3a}{a^2-9}$;
5) $\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a+4}{a^2-4}$;
6) $\frac{2p}{p-5}-\frac{5}{p+5}+\frac{2p^2}{25-p^2}$;
7) $\frac{1}{y}-\frac{y+8}{16-y^2}-\frac{2}{y-4}$;
8) $\frac{2b-1}{4b+2}+\frac{4b}{4b^2-1}+\frac{2b+1}{3-6b}$.

113.• **Упростите выражение:**

1) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;
2) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y^2}{2xy+x^2+y^2}$;
3) $\frac{2a}{4a^2-1}-\frac{a+4}{2a^2+a}$;
4) $\frac{b-2}{b^2+6b+9}-\frac{b}{b^2-9}$;
5) $\frac{x-6}{x^2+3x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x}$;
6) $\frac{y+2}{y-2}-\frac{y-2}{y+2}-\frac{16}{y^2-4}$.

114.• **Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение данного выражения не зависит от значения переменной:**

1) $\frac{2x+1}{2x-4}+\frac{2x-1}{6-3x}-\frac{x+7}{6x-12}$;
2) $\frac{24-2a}{a^2-16}-\frac{a}{2a-8}+\frac{4}{a+4}$.

115.° Представьте в виде дроби выражение:

1) $1-a+\frac{a^2-2}{a+2}$;
3) $\frac{c^2+9}{c-3}-c-3$;
2) $\frac{a^2-b^2}{3a+b}+3a-b$;
4) $\frac{8m^2}{4m-3}-2m-1$.

116.° Упростите выражение:

1) $b+7-\frac{14b}{b+7}$;
2) $5c-\frac{10-29c+10c^2}{2c-5}+2$.

117.° Упростите выражение и найдите его значение:

1) $\frac{7}{2a-4}-\frac{12}{a^2-4}-\frac{3}{a+2}$, если $a=5$;
2) $\frac{2c+3}{2c^2-3c}+\frac{2c-3}{2c^2+3c}-\frac{16c}{4c^2-9}$, если $c=-0{,}8$;
3) $\frac{m^2+16n^2}{m^2-16n^2}-\frac{m+4n}{2m-8n}$, если $m=3$, $n=0{,}5$.

118.° Найдите значение выражения:

1) $\frac{6}{5x-20}-\frac{x-5}{x^2-8x+16}$, если $x=5$;
2) $\frac{2y-1}{2y}-\frac{2y}{2y-1}-\frac{1}{2y-4y^2}$, если $y=-2\frac{3}{7}$.

119.° Докажите тождество:

1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a^2-ab}=0$;
2) $\frac{a+3}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{6}{a^2-1}=\frac{2}{a^2-1}$;
3) $\frac{2a^2+4}{a^2-1}-\frac{a-2}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}=\frac{1}{a-1}$.

120.° Докажите тождество:

1) $\frac{1}{6a-4b}-\frac{1}{6a+4b}-\frac{3a}{4b^2-9a^2}=\frac{1}{3a-2b}$;
2) $\frac{c+2}{c^2+3c}-\frac{1}{3c+9}-\frac{2}{3c}=0$.

121.° Найдите разность дробей:

1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$;
2) $\frac{1}{b+3}-\frac{b^2-6b}{b^3+27}$.

122.° Упростите выражение:

1) $\frac{9m^2-3mn+n^2}{3m-n}-\frac{9m^2+3mn+n^2}{3m+n}$;
2) $1-\frac{2b-1}{4b^2-2b+1}-\frac{2b}{2b+1}$.

123.* Докажите тождество:

$$\frac{3a^2+24}{a^3+8}-\frac{6}{a^2-2a+4}-\frac{1}{a+2}=\frac{2}{a+2}.$$

124.** Упростите выражение:

1) $\frac{4b}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{b^2-ab}$;

2) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}+\frac{x^2+4}{8x-2x^3}$;

3) $\frac{1}{(a-5b)^2}-\frac{2}{a^2-25b^2}+\frac{1}{(a+5b)^2}$;

4) $\frac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6}-\frac{x+5}{y-2}$.

125.** Докажите тождество:

1) $\frac{a+3}{a^2-3a}+\frac{a-3}{3a+9}+\frac{12}{9-a^2}=\frac{a-3}{3a}$;

2) $\frac{b-4}{2a-1}-\frac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a}=\frac{2}{2a-1}$.

126.** Докажите тождество:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0.$$

127.** Докажите тождество:

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$$

128.* Упростите выражение:

$$\frac{1}{(a-1)(a-2)}+\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-4)}.$$

129.* Упростите выражение:

$$\frac{1}{(a-1)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-5)}+\frac{1}{(a-5)(a-7)}.$$

130.* Докажите тождество:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}=\frac{32}{1-a^{32}}.$$

131.* Докажите тождество:

$$\frac{3}{1-a^2}+\frac{3}{1+a^2}+\frac{6}{1+a^4}+\frac{12}{1+a^8}+\frac{24}{1+a^{16}}=\frac{48}{1-a^{32}}.$$

132.* Докажите, что если $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{a+c}+\frac{c-b}{a+b}=1$, то $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}=4$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

133. Найдите корень уравнения:

1) $\frac{x}{3}+\frac{x-1}{2}=4$; 2) $\frac{x-4}{2}-\frac{x-1}{5}=3$.

134. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=8, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+5y=13, \\ 3x-5y=-13. \end{cases}$

135. За первый день трехдневной гонки велосипедисты проехали $\frac{4}{15}$ всего маршрута, за второй день — $\frac{2}{5}$ всего маршрута, а за третий — остальные 90 км. Какое расстояние проехали велосипедисты за 3 дня?

136. (*Из болгарского фольклора.*) Пятеро братьев хотели разделить 20 овец так, чтобы каждый из них получил нечетное количество овец. Возможно ли это?

137. Верно ли утверждение, что при любом натуральном n значение выражения $(5n+7)^2-(n-1)^2$ делится нацело на 48?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

138. Укажите число, обратное числу:

1) $\frac{5}{8}$; 2) 7; 3) $-3\frac{5}{6}$; 4) $\frac{1}{14}$; 5) 0,12.

139. Найдите значение произведения:

1) $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{20}$; 2) $6\cdot\frac{7}{18}$; 3) $\frac{3}{8}\cdot\left(-2\frac{2}{3}\right)$.

140. Выполните деление:

1) $\frac{5}{18}:\left(-\frac{25}{27}\right)$; 2) $8:\frac{4}{17}$; 3) $-\frac{8}{15}:(-24)$; 4) $1\frac{3}{5}:5\frac{1}{3}$.

141. Найдите значение степени:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; 3) $\left(-2\frac{2}{3}\right)^2$; 4) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

142. Два парома одновременно отплывают от противоположных берегов реки и пересекают ее перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянные, но разные.

Паромы встречаются на расстоянии 720 м от одного из берегов, после чего продолжают движение. Достигнув берегов, паромы сразу начинают двигаться обратно и через некоторое время встречаются на расстоянии 400 м от другого берега. Какова ширина реки?

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 1

1. Какое из приведенных выражений является целым?

А) $\frac{m+n}{m}$; Б) $\frac{m+n}{7}$; В) $\frac{m+n}{7m}$; Г) $m+\frac{n}{7m}$.

2. При каком значении переменной не имеет смысла выражение $\frac{3a}{2a-10}$?

А) 0; Б) 10; В) 5; Г) 0; 5.

3. При каких значениях аргумента функция $y=\frac{x+2}{x^2-1}$ не определена?

А) -1; 1; Б) 1; В) -2; -1; 1; Г) -2; 1.

4. Сократите дробь $\frac{21a^6}{14a^3}$.

А) $\frac{3a^3}{2}$; Б) $\frac{3a^2}{2}$; В) $\frac{3}{2a^3}$; Г) $\frac{3}{2a^2}$.

5. Какой из приведенных дробей тождественно равна дробь $\frac{5b-15}{b^2-9}$?

А) $\frac{b-3}{5}$; Б) $\frac{b+3}{5}$; В) $\frac{5}{b-3}$; Г) $\frac{5}{b+3}$.

6. Сократите дробь $\frac{12c^2-4c}{3c-1}$.

А) $4c$; Б) $-4c$; В) $\frac{1}{4c}$; Г) $-\frac{1}{4c}$.

7. Выполните вычитание: $\frac{5x}{x-2}-\frac{10}{x-2}$.

А) $\frac{x+2}{x-2}$; Б) $\frac{5x+10}{x-2}$; В) 5; Г) -5.

8. Выполните сложение: $\frac{4-m}{m-3}+\frac{2m-5}{3-m}$.

А) $\frac{m-1}{m-3}$; Б) $\frac{1-3m}{m-3}$; В) 3; Г) -3.

9. Представьте в виде дроби выражение $\frac{3n^2}{n-6}-3n$.

А) $\frac{3n}{n-4}$; Б) $\frac{3n}{4-n}$; В) $\frac{18n}{n-6}$; Г) $\frac{18}{6-n}$.

10. Упростите выражение $\frac{2m+1}{3m-2}-\frac{3m^2+m-2}{9m^2-12m+4}$.

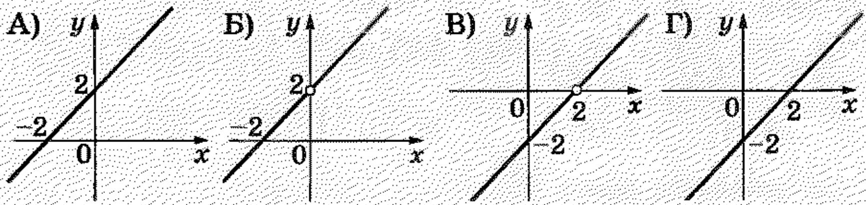
А) $\frac{1}{(3m-2)^2}$; Б) $\frac{1}{3m-2}$; В) $\frac{m}{(3m-2)^2}$; Г) $\frac{m}{3m-2}$.

11. Упростите выражение $\frac{a-12}{a^2+4a}-\frac{a-4}{a}+\frac{a}{a+4}$.

А) $\frac{4}{a}$; Б) $\frac{1}{a}$; В) a; Г) $a+4$.

12. На каком рисунке изображен график функции

$y=\frac{x^2-4x+4}{x-2}$?



5. Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень

Вы знаете правила умножения и деления обыкновенных дробей. Их можно выразить следующими равенствами:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

По аналогичным правилам выполняют умножение и деление рациональных дробей.

Произведением двух рациональных дробей является дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.

Частным двух рациональных дробей является дробь, числитель которой равен произведению числителя де-

лимого и знаменателя делителя, а знаменатель — произведению знаменателя делимого и числителя делителя.

ПРИМЕР 1

Выполните действия:

1) $\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4}$;

2) $(2x - 12) \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36}$;

3) $\frac{a^2 + 2ab}{a + 9} : \frac{a^2 - 4b^2}{3a + 27}$;

4) $\frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : (c - 7)$.

Решение

1) Имеем:

$$\frac{21c^6}{b^8} \cdot \frac{b^2}{14c^4} = \frac{21c^6 \cdot b^2}{b^8 \cdot 14c^4} = \frac{3c^2}{2b^6}.$$

2) Представив многочлен $2x - 12$ в виде дроби со знаменателем 1, получаем:

$$(2x - 12) \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{2x - 12}{1} \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36} =$$

$$= \frac{2(x - 6) \cdot 4x}{(x - 6)^2} = \frac{8x}{x - 6}.$$

3) $\frac{a^2 + 2ab}{a + 9} : \frac{a^2 - 4b^2}{3a + 27} = \frac{a(a + 2b)}{a + 9} \cdot \frac{3(a + 9)}{(a - 2b)(a + 2b)} = \frac{3a}{a - 2b}$.

4) $\frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : (c - 7) = \frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : \frac{c - 7}{1} = \frac{5c(c - 7)}{c + 2} \cdot \frac{1}{c - 7} = \frac{5c}{c + 2}$.

Правило умножения двух дробей можно обобщить для нахождения произведения трех или более рациональных дробей. Например, для трех дробей имеем:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q}.$$

ПРИМЕР 2

Упростите выражение $\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3}$.

Решение

Имеем:

$$\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3} = \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} \cdot \frac{9bc^3}{4a^2} = \frac{2a^5 \cdot 10b^2 \cdot 9bc^3}{15b^3 \cdot 7c^4 \cdot 4a^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot a^5 b^3 c^3}{15 \cdot 7 \cdot 4 \cdot a^2 b^3 c^4} = \frac{3a^3}{7c}.$$

Применяя правило умножения дробей, можно получить правило возведения рациональных дробей в степень. Для натурального n, $n > 1$, имеем:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \ldots \cdot \frac{A}{B}}_{n \text{ множителей}} = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}^{n \text{ множителей}}}{\underbrace{B \cdot B \cdot \ldots \cdot B}_{n \text{ множителей}}} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Для $n = 1$ договорились, что $\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}$.
Следовательно,

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}, \text{ где } n \text{ — натуральное число.}$$

Чтобы возвести рациональную дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записать как числитель, а второй — как знаменатель дроби.

ПРИМЕР 3

Представьте в виде дроби выражение $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$.

Решение

$$\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3} = -\frac{3^3 \cdot (a^2)^3}{2^3 b^3 (c^4)^3} = -\frac{27a^6}{8b^3 c^{12}}.$$

?

1. Что является произведением двух рациональных дробей?
2. Что является частным двух рациональных дробей?
3. Как возвести рациональную дробь в степень?

143.° Какому из приведенных выражений равно произведение $\frac{a^3}{c^8} \cdot \frac{c^4}{a^3}$?

1) $\frac{1}{c^2}$; 2) $\frac{a}{c^2}$; 3) $\frac{1}{c^4}$; 4) $\frac{a}{c^4}$.

144.° Выполните умножение:

1) $\frac{3a^2}{c} \cdot \frac{a^2}{c}$; 3) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$; 5) $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$;

2) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$; 4) $\frac{3m}{16n^2} \cdot 8n^6$; 6) $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$;

7) $\frac{48ab}{17c^4} \cdot \frac{51bc^5}{40a^4}$; 8) $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$.

145.° Упростите выражение:

1) $\frac{a^2}{b^6} \cdot \frac{b^2}{a^2}$; 3) $\frac{a}{2b} \cdot 2a$; 5) $\frac{11x^3}{y^8} \cdot \frac{y^5}{33x^7}$;

2) $\frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}$; 4) $15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4}$; 6) $\frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6p^2}$.

146.° Упростите выражение:

1) $\frac{a-b}{3b} \cdot \frac{3}{a-b}$;

2) $\frac{2mn+n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}$;

3) $\frac{7a+7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a+b}$;

4) $\frac{32a}{a^2-9} \cdot \frac{a-3}{8a}$;

5) $\frac{c-1}{c+6} \cdot \frac{c+6}{c^2-2c+1}$;

6) $\frac{m-2}{m^2-49} \cdot \frac{m+7}{m-2}$;

7) $(a+4) \cdot \frac{a}{2a+8}$;

8) $\frac{x-9}{4x+8} \cdot \frac{x^2+2x}{x-9}$;

9) $\frac{4a^2-4a+1}{3a+3} \cdot \frac{a+1}{2a-1}$;

10) $\frac{a^2-25}{4a} \cdot \frac{4a^2}{a^2-5a}$.

147.° Выполните умножение:

1) $\frac{3a+b}{4c} \cdot \frac{c}{3a+b}$;

2) $\frac{ab-b^2}{8} \cdot \frac{4a}{b^4}$;

3) $\frac{5x-5y}{x^6} \cdot \frac{x^3}{x-y}$;

4) $\frac{18b}{b^2-16} \cdot \frac{b+4}{3b}$;

5) $\frac{6}{m^2-9n^2} \cdot (m-3n)$;

6) $\frac{3c-9}{9c^2+6c+1} \cdot \frac{3c+1}{c-3}$.

148.° Какому из приведенных выражений равно частное $\frac{3}{c^3} : \frac{12}{c^9}$?

1) $\frac{c^3}{4}$; 2) $\frac{c^6}{4}$; 3) $4c^3$; 4) $4c^6$.

149.° Выполните деление:

1) $\frac{8m}{n} : \frac{4m}{n}$;

2) $\frac{3b}{8} : b$;

3) $\frac{7c^2}{d} : \frac{c}{d^3}$;

4) $\frac{6a}{5b} : \frac{3a^2}{20b^2}$;

5) $-\frac{9a}{b^5} : \frac{18a^4}{b^3}$;

6) $a^2 : \frac{a}{b^2c}$;

7) $24a^3 : \frac{12a^2}{b}$;

8) $\frac{36a}{c^3} : (4a^2c)$.

150.° Найдите частное:

1) $\frac{7}{a^2} : \frac{28}{a^8}$;

2) $\frac{b^9}{8} : \frac{b^3}{48}$;

3) $\frac{27}{m^6} : \frac{36}{m^7n^2}$;

4) $\frac{6x^{10}}{y^8} : (30x^5y^2)$;

5) $49m^4 : \frac{21m}{n^2}$;

6) $\frac{16x^3y^8}{33z^5} : \left(-\frac{10x^2}{55z^6}\right)$.

151.° Упростите выражение:

1) $\frac{a-b}{7a} : \frac{a-b}{7b}$;

2) $\frac{x^2-y^2}{x^2} : \frac{6x+6y}{x^5}$;

3) $\frac{c-5}{c^2-4c} : \frac{c-5}{5c-20}$;

4) $\frac{x-y}{xy} : \frac{x^2-y^2}{3xy}$;

5) $\frac{a^2-25}{a+7} : \frac{a-5}{a+7}$;

6) $\frac{a^2-4a+4}{a+2} : (a-2)$;

7) $(p^2-16k^2) : \frac{p+4k}{p}$;

8) $\frac{a^2-ab}{a^2} : \frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

152.° Выполните деление:

1) $\frac{5m-2n}{10k} : \frac{5m-2n}{10k^2}$;

2) $\frac{p+3}{p^2-2p} : \frac{p+3}{4p-8}$;

3) $\frac{a^2-b^2}{2ab} : \frac{a+b}{ab}$;

4) $\frac{a^2-16}{a-3} : \frac{a+4}{a-3}$;

5) $\frac{y-9}{y-8} : \frac{y^2-81}{y^2-16y+64}$;

6) $(x^2-49y^2) : \frac{x-7y}{x}$.

153.° Выполните возведение в степень:

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^9$;

2) $\left(\frac{m}{n^2}\right)^8$;

3) $\left(\frac{c}{2d}\right)^5$;

4) $\left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2$;

5) $\left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3$;

6) $\left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2$.

154.° Представьте в виде дроби выражение:

1) $\left(\frac{a^6}{b^3}\right)^{10}$;

2) $\left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2$;

3) $\left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3$;

4) $\left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6$.

155.° Упростите выражение:

1) $\frac{6a^4b^2}{35c^3} \cdot \frac{14b^2}{a^7c^5} \cdot \frac{5a^3c^8}{18b^4}$;

2) $\frac{33m^8}{34n^8} : \frac{88m^4}{51n^4} \cdot \frac{21m^6}{16n^2}$;

3) $\frac{36x^6}{49y^5} : \frac{24x^9}{25y^4} \cdot \frac{7x^2}{30y}$;

5) $\left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4 : \left(\frac{4a^6}{y^8}\right)^3$;

4) $\left(\frac{m^5n}{3p^3}\right)^3 : \frac{m^{10}n^5}{54p^8}$;

6) $\left(-\frac{27x^3}{16y^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{8y^3}{9x^2}\right)^3$.

156.° Упростите выражение:

1) $\frac{3a^4b^3}{10c^5} \cdot \frac{4b^4c^2}{27a^7} : \frac{5b^7}{9a^3c^3}$;

3) $\left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4 \cdot \frac{b^{18}}{50a^{16}}$;

2) $\frac{3a^2}{2b^2c^2} : \frac{7c^8}{6b^3} : \frac{9ab}{14c^{12}}$;

4) $\left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4 : \left(\frac{3x^6}{y^8}\right)^3$.

157.° Замените переменную x таким выражением, чтобы получилось тождество:

1) $\left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2 \cdot x = \frac{6a}{b^2}$;

2) $\left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3 : x = \frac{b^6}{12}$.

158.° Выполните умножение и деление дробей:

1) $\frac{4-a}{8a^3} \cdot \frac{12a^5}{a^2-16}$;

6) $\frac{x^2-9}{x+y} \cdot \frac{5x+5y}{x^2-3x}$;

2) $\frac{4c-d}{c^2+cd} \cdot \frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd}$;

7) $\frac{m+2n}{2-3m} : \frac{m^2+4mn+4n^2}{3m^2-2m}$;

3) $\frac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9} \cdot \frac{b^3+27}{5b-15}$;

8) $\frac{a^3+8}{16-a^4} : \frac{a^2-2a+4}{a^2+4}$;

4) $\frac{a^3-16a}{3a^2b} \cdot \frac{12ab^2}{4a+16}$;

9) $\frac{x^2-12x+36}{3x+21} \cdot \frac{x^2-49}{4x-24}$;

5) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \cdot \frac{7a-7b}{a^2-ab+b^2}$;

10) $\frac{3a+15b}{a^2-81b^2} : \frac{4a+20b}{a^2-18ab+81b^2}$.

159.° Упростите выражение:

1) $\frac{7a^2}{a^2-25} \cdot \frac{5-a}{a}$;

5) $\frac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2} : \frac{15n-15m}{4m^2+4n^2}$;

2) $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3} \cdot \frac{b-a}{b+a}$;

6) $\frac{mn^2-36m}{m^3-8} : \frac{2n+12}{6m-12}$;

3) $\frac{a^4-1}{a^3-a} \cdot \frac{a}{1+a^2}$;

7) $\frac{a^4-1}{a^2-a+1} : \frac{a-1}{a^3+1}$;

4) $\frac{a^2-8ab}{12b} : \frac{8b^2-ab}{24a}$;

8) $\frac{4x^2-100}{6x} : (2x^2-20x+50)$.

160.° Упростите выражение и найдите его значение:

1) $\frac{a^2-81}{a^2-8a}:\frac{a-9}{a^2-64}$, если $a=-4$;

2) $\frac{x}{4x^2-4y^2}:\frac{1}{6x+6y}$, если $x=4{,}2$, $y=-2{,}8$;

3) $(3a^2-18a+27):\frac{3a-9}{4a}$, если $a=0{,}5$;

4) $\frac{a^6+a^5}{(3a-3)^2}:\frac{a^5+a^4}{9a^2-9a}$, если $a=0{,}8$.

161.° Найдите значение выражения:

1) $\frac{1}{a^2-ab}:\frac{b}{b^2-a^2}$, если $a=2\frac{1}{3}$, $b=-\frac{3}{7}$;

2) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-9b^2}:\frac{3a+6b}{2a-6b}$, если $a=4$, $b=-5$.

162.•• Известно, что $x-\frac{1}{x}=9$. Найдите значение выражения $x^2+\frac{1}{x^2}$.

163.•• Известно, что $3x+\frac{1}{x}=-4$. Найдите значение выражения $9x^2+\frac{1}{x^2}$.

164.•• Дано: $x^2+\frac{16}{x^2}=41$. Найдите значение выражения $x+\frac{4}{x}$.

165.•• Дано: $x^2+\frac{1}{x^2}=6$. Найдите значение выражения $x-\frac{1}{x}$.

166.•• Упростите выражение:

1) $\frac{a^2-36}{a^2+ab-6a-6b}:\frac{a^2+ab+6a+6b}{a^2+2ab+b^2}$;

2) $\frac{a^2+a-ab-b}{a^2+a+ab+b}:\frac{a^2-a-ab+b}{a^2-a+ab-b}$.

167.•• Выполните действия:

1) $\frac{25-5a+5b-ab}{25+5a-5b-ab}\cdot\frac{ab-5a-5b+25}{ab+5a+5b+25}$;

2) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab-4a+4b}:\frac{a^2-ab+4a-4b}{a^2-16}$.

168.** Докажите тождество $\frac{8a^2}{a-3b} : \frac{6a^3}{a^2-9b^2} \cdot \frac{3a}{4a+12b} = 1$.

169.** Докажите тождество:

$$\frac{a^2+a}{2a-12} \cdot \frac{6a+6}{2a+12} : \frac{9a^3+18a^2+9a}{a^2-36} = \frac{1}{6}.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

170. Решите уравнение:

1) $(2x+3)^2 - 2x(5+2x) = 10$;

2) $(x-2)(x-3) - (x-6)(x+1) = 12$.

171. Докажите, что уравнение $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{2} = \frac{x+5}{6}$ не имеет корней.

172. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 192 км, со скоростью 60 км/ч выехал мотоциклист. Через 30 мин навстречу ему из пункта B со скоростью 75 км/ч выехал второй мотоциклист. Сколько времени ехал второй мотоциклист до встречи с первым?

173. В двух бидонах находится 80 л молока. Если из одного бидона перелить 20 % молока в другой бидон, то в обоих бидонах молока станет поровну. Сколько литров молока было в каждом бидоне сначала?

174. (*Из учебника «Арифметика» Л. Ф. Магницкого*[1].) Двенадцать людей несут 12 хлебов. Каждый мужчина несет по 2 хлеба, женщина — по половине хлеба, а ребенок — по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

175. Вася и Петя по очереди заменяют в уравнении $x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + * = 0$ один знак * на некоторое число. Первым замену делает Вася. Петя хочет получить уравнение, которое имеет корень. Может ли Вася ему помешать?

---

[1] *Магницкий Л. Ф.* (1669–1739) — российский математик-педагог, автор знаменитого учебника «Арифметика» (1703), по которому училось несколько поколений.

6. Тождественные преобразования рациональных выражений

Правила действий над рациональными дробями дают возможность любое рациональное выражение преобразовать в рациональную дробь.

Рассмотрим это на примерах.

ПРИМЕР 1

Упростите выражение:

$$\left(\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}\right):\frac{a-4}{a^2-4}-\frac{2a^2+8a}{a-2}.$$

Решение

Аналогично нахождению значения числового выражения, содержащего несколько арифметических действий, данное выражение можно упростить, выполняя действия в соответствии с порядком выполнения арифметических действий: сначала выполняют вычитание выражений, стоящих в скобках, затем — деление и наконец — вычитание:

1) $\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}=\frac{{}^{a-2/}\,3a}{a-2}-\frac{6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}$;

2) $\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}:\frac{a-4}{a^2-4}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}\cdot\frac{a^2-4}{a-4}=\frac{3a(a-4)}{(a-2)^2}\cdot\frac{(a-2)(a+2)}{a-4}=$

$=\frac{3a(a+2)}{a-2}=\frac{3a^2+6a}{a-2}$;

3) $\frac{3a^2+6a}{a-2}-\frac{2a^2+8a}{a-2}=\frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2}=\frac{a^2-2a}{a-2}=\frac{a(a-2)}{a-2}=a.$

Ответ: a.

Преобразование рационального выражения можно выполнять не отдельными действиями, а «цепочкой». Проиллюстрируем этот прием на следующем примере.

ПРИМЕР 2

Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения $\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}$ не зависит от значения a.

Решение

$$\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}=\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{6(3-a)}\cdot\frac{54a}{a(5+a)}=\frac{3a}{a-3}+\frac{9}{3-a}=$$

$$=\frac{3a}{a-3}-\frac{9}{a-3}=\frac{3a-9}{a-3}=\frac{3(a-3)}{a-3}=3.$$

Следовательно, при всех допустимых значениях a значение данного выражения равно 3.

ПРИМЕР 3

Докажите тождество:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{4}{a+1}.$$

Решение

В этом случае для преобразования левой части данного равенства целесообразно раскрыть скобки, применяя распределительное свойство умножения:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{a-7}{3a-1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}+\frac{a-7}{a+1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=$$

$$\overset{a+1}{=}\frac{1}{a}+\frac{3a-1}{a(a+1)}=\frac{a+1+3a-1}{a(a+1)}=\frac{4a}{a(a+1)}=\frac{4}{a+1}.$$

Тождество доказано.

ПРИМЕР 4

Упростите выражение $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}$.

Решение

Записав данное выражение в виде частного от деления числителя на знаменатель, получаем:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=\frac{bc+ac+ab}{abc}:\frac{c+a+b}{abc}=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{abc}\cdot\frac{abc}{c+a+b}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Данное выражение можно упростить иным способом, используя основное свойство дроби, а именно: умножить ее числитель и знаменатель на одночлен abc:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc}{\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)abc}=\frac{\frac{1}{a}\cdot abc+\frac{1}{b}\cdot abc+\frac{1}{c}\cdot abc}{\frac{1}{ab}\cdot abc+\frac{1}{bc}\cdot abc+\frac{1}{ac}\cdot abc}=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Ответ: $\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}$.

176.° Упростите выражение:

1) $\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{4}\right)\cdot\frac{6}{a^2}$;

2) $\frac{a^2b}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$;

3) $\left(1+\frac{a}{b}\right):\left(1-\frac{a}{b}\right)$;

4) $\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}+1\right)\cdot\frac{b}{a-b}$;

5) $\frac{a^2-ab}{b^2-1}\cdot\frac{b+1}{a}-\frac{a}{b-1}$;

6) $\left(\frac{5}{m-n}-\frac{4}{m+n}\right):\frac{m+9n}{m+n}$;

7) $\frac{x-2}{x+2}\cdot\left(x-\frac{x^2}{x-2}\right)$;

8) $\frac{x^2+x}{4}:\frac{x^2}{4}+\frac{x-1}{x}$;

9) $\frac{6c^2}{c^2-1}:\left(\frac{1}{c-1}+1\right)$;

10) $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)\cdot\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}$.

177.° Упростите выражение:

1) $\left(x+\frac{x}{y}\right):\left(x-\frac{x}{y}\right)$;

2) $\left(\frac{a}{b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\cdot\frac{ab^2}{a^2+b^2}$;

3) $\left(\frac{m}{m-1}-1\right):\frac{m}{mn-n}$;

4) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{4ab}{a-b}$;

5) $\frac{a}{b}-\frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}$;

6) $\frac{7x}{x+2}-\frac{x-8}{3x+6}\cdot\frac{84}{x^2-8x}$;

7) $\left(a-\frac{9a-9}{a+3}\right):\frac{a^2-3a}{a+3}$;

8) $\left(\frac{a}{a+2}-\frac{8}{a+8}\right)\cdot\frac{a^2+8a}{a-4}$.

178.* Выполните действия:

1) $\frac{a+2}{a^2-2a+1}:\frac{a^2-4}{3a-3}-\frac{3}{a-2}$;

2) $\frac{b^2+3b}{b^3+9b}\cdot\left(\frac{b-3}{b+3}+\frac{b+3}{b-3}\right)$;

3) $\left(\frac{3c+1}{3c-1}-\frac{3c-1}{3c+1}\right):\frac{2c}{6c+2}$;

4) $\left(\frac{1}{a^2-4ab+4b^2}-\frac{1}{4b^2-a^2}\right):\frac{2a}{a^2-4b^2}$;

5) $\left(\frac{a-8}{a^2-10a+25}-\frac{a}{a^2-25}\right):\frac{a-20}{(a-5)^2}$;

6) $\left(\frac{2x+1}{x^2+6x+9}-\frac{x-2}{x^2+3x}\right):\frac{x^2+6}{x^3-9x}$.

179.° Выполните действия:

1) $\frac{b+4}{b^2-6b+9}:\frac{b^2-16}{2b-6}-\frac{2}{b-4}$;

2) $\left(\frac{m-1}{m+1}-\frac{m+1}{m-1}\right):\frac{4m}{m^2-1}$;

3) $\frac{2x}{x^2-y^2}:\left(\frac{1}{x^2+2xy+y^2}-\frac{1}{y^2-x^2}\right)$;

4) $\left(\frac{2a-3}{a^2-4a+4}-\frac{a-1}{a^2-2a}\right):\frac{a^2-2}{a^3-4a}$.

180.° Упростите выражение:

1) $\left(\frac{15}{x-7}-x-7\right)\cdot\frac{7-x}{x^2-16x+64}$;

2) $\left(a-\frac{5a-16}{a-3}\right):\left(2a-\frac{2a}{a-3}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{a}{b^2}\right)\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{2}{b-a}$;

4) $\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a+1}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right):\frac{a^2+a}{(a-1)^2}$;

5) $\left(\frac{x+2y}{x-2y}-\frac{x-2y}{x+2y}-\frac{16y^2}{x^2-4y^2}\right):\frac{4y}{x+2y}$;

6) $\left(\frac{3a-8}{a^2-2a+4}+\frac{1}{a+2}-\frac{4a-28}{a^3+8}\right)\cdot\frac{a^2-4}{4}$.

181.° Упростите выражение:

1) $\frac{x^2+14x+49}{x+6}:\left(\frac{13}{x+6}-x+6\right)$;

2) $\left(c-\frac{2c-9}{c+8}\right):\frac{c^2+3c}{c^2-64}+\frac{24}{c}$;

3) $\left(\frac{36}{x^2-9}-\frac{x-3}{x+3}-\frac{3+x}{3-x}\right):\frac{6}{3-x}$;

4) $\left(\frac{2y-1}{y^2+2y+4}+\frac{9y+6}{y^3-8}+\frac{1}{y-2}\right)\cdot\frac{y^2-4}{18}$.

182.* Докажите тождество:

1) $\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{2b-2a}\right):\frac{2b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{4}$;

2) $\left(\frac{8a}{4-a^2}-\frac{a-2}{a+2}\right):\frac{a+2}{a}+\frac{2}{a-2}=-1$;

3) $\left(\frac{3}{36-c^2}+\frac{1}{c^2-12c+36}\right)\cdot\frac{(c-6)^2}{2}+\frac{3c}{c+6}=2$.

183.* Докажите тождество:

1) $\left(\frac{b}{a^2-ab}-\frac{2}{a-b}-\frac{a}{b^2-ab}\right):\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{4}{a+b}$;

2) $\frac{(a-b)^2}{a}\cdot\left(\frac{a}{(a-b)^2}+\frac{a}{b^2-a^2}\right)+\frac{3a+b}{a+b}=3$.

184.* Зависит ли значение выражения от значения входящей в него переменной:

1) $\left(\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{1}{a^2+a}\right):\frac{3a+3}{a^2-a}$;

2) $\left(\frac{a}{a^2-49}-\frac{1}{a+7}\right):\frac{7a}{a^2+14a+49}-\frac{2}{a-7}$?

185.* Докажите, что значение выражения не зависит от значения входящей в него переменной:

1) $\frac{3x^2-27}{4x^2+2}\cdot\left(\frac{6x+1}{x-3}+\frac{6x-1}{x+3}\right)$;

2) $\frac{3}{2a-3}-\frac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\left(\frac{2a}{4a^2-12a+9}-\frac{3}{4a^2-9}\right)$.

186.* Упростите выражение:

1) $\dfrac{a-\frac{a^2}{a+1}}{a-\frac{a}{a+1}}$;

2) $\dfrac{a-\frac{6a-9}{a}}{1-\frac{3}{a}}$;

3) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{a}}}$;

4) $\dfrac{\frac{2a-b}{b}+1}{\frac{2a+b}{b}-1}+\dfrac{3-\frac{b}{a}}{\frac{3a}{b}-1}$.

187.° Упростите выражение:

1) $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a-b}{a}}$; 2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$.

188.•• Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{a^2}{b^3-ab^2}+\dfrac{a-b}{b^2}-\dfrac{1}{b}\right):\left(\dfrac{a+b}{b-a}-\dfrac{b-a}{a+b}+\dfrac{6a^2}{a^2-b^2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{a+2}{4a^3-4a^2+a}-\dfrac{2-a}{1-8a^3}\cdot\dfrac{4a^2+2a+1}{2a^2+a}\right):\left(\dfrac{1}{1-2a}\right)^2-\dfrac{8a-1}{2a^2+a}$.

189.•• Упростите выражение:

$\left(\dfrac{18y^2+3y}{27y^3-1}-\dfrac{3y+1}{9y^2+3y+1}\right):\left(1-\dfrac{3y-1}{y}-\dfrac{5-6y}{3y-1}\right)$.

190.•• Докажите тождество:

1) $\dfrac{16}{(a-2)^4}:\left(\dfrac{1}{(a-2)^2}-\dfrac{2}{a^2-4}+\dfrac{1}{(a+2)^2}\right)-\dfrac{8a}{(a-2)^2}=1$;

2) $\dfrac{a+11}{a+9}-\left(\dfrac{a+5}{a^2-81}+\dfrac{a+7}{a^2-18a+81}\right):\left(\dfrac{a+3}{a-9}\right)^2=1$.

191.•• Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\dfrac{b^2+9}{3b^2-b^3}+\left(\dfrac{b+3}{b-3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{b-3}+\dfrac{6}{9-b^2}-\dfrac{3}{b^2+3b}\right)$ принимает положительные значения.

192.•• Подставьте вместо x данное выражение и упростите:

1) $\dfrac{x-a}{x-b}$, если $x=\dfrac{ab}{a+b}$; 2) $\dfrac{a-bx}{b+ax}$, если $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

193. Решите уравнение:

1) $(3x-1)(4x+5)-(2x+3)(6x+1)=4$;

2) $8x(2x+7)-(4x+3)^2=15$.

194. Докажите, что значение выражения $2^{14}-2^{12}-2^{10}$ делится нацело на 11.

195. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$ делится нацело на 10.

196. На первом складе было картофеля в 3 раза больше, чем на втором. Когда с первого склада вывезли 400 кг картофеля, то на нем осталось картофеля в 2 раза меньше, чем было на втором. Сколько картофеля было на первом складе сначала?

197. Куртка стоила на 200 грн. меньше, чем костюм. Во время сезонной распродажи куртка подешевела на 10 %, а костюм — на 20 %, после чего куртку и костюм можно было приобрести за 1010 грн. Какова первоначальная цена куртки и какова — костюма?

198. Из пункта A в пункт B автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а возвращался из пункта B в пункт A со скоростью 70 км/ч другой дорогой, которая на 15 км короче первой. На обратный путь автомобиль затратил на 30 мин меньше, чем на путь из пункта A в пункт B. За какое время он доехал из пункта A в пункт B?

199. Рабочий должен был изготовлять ежедневно 10 деталей. Однако он изготовлял ежедневно 12 деталей и уже за 2 дня до окончания срока работы ему осталось изготовить 6 деталей. Сколько деталей должен был изготовить рабочий?

200.* (*Из украинского фольклора.*) За 30 монет купили 30 птиц. Сколько купили птиц каждого вида, если за 3 воробьев заплатили одну монету, за 2 голубей — тоже одну монету, а за одну горлицу — 2 монеты, при этом купили хотя бы одну птичку каждого вида?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

201. Решите уравнение:

1) $\frac{2x+7}{4}=\frac{x+5}{3}$; 3) $0{,}21x-0{,}7x=0$; 5) $25x^2-36=0$;

2) $x^2+6x=0$; 4) $x^2-16=0$; 6) $x^2+4=0$.

202. При каком значении переменной не имеет смысла выражение:

1) $\frac{6}{3x-9}$; 2) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 3) $\frac{x+4}{3x^2+12x}$;

4) $\frac{8}{x+7}+\frac{4}{x-2}$; 5) $\frac{x}{x^2-10x+25}$; 6) $\frac{x+2}{(x+10)(x-12)}$?

203. При каком значении переменной значение дроби равно нулю:

1) $\frac{x-8}{9}$; 2) $\frac{x-2}{x+2}$; 3) $\frac{4}{x-5}$?

Повторите содержание пунктов 14, 15 на с. 234–235.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

204. На доске написаны многочлены $x+2$ и $2x+1$. Разрешается записать сумму, разность или произведение любых двух из уже написанных многочленов. Может ли на доске появиться многочлен $2x^3+x+5$?

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 2

1. Представьте в виде дроби выражение $\frac{12m^4}{n^{10}}\cdot\frac{n^5}{36m^8}$.

А) $\frac{1}{3m^2n^2}$; Б) $\frac{1}{3m^4n^5}$; В) $\frac{3}{m^2n^2}$; Г) $\frac{3}{m^4n^5}$.

2. Выполните умножение: $(a+5b)\cdot\frac{8}{a^2-25b^2}$.

А) $8(a-5b)$; Б) $8(a+5b)$; В) $\frac{8}{a+5b}$; Г) $\frac{8}{a-5b}$.

3. Упростите выражение $\frac{b^2-6b+9}{b-7}\cdot\frac{b-7}{b-3}$.

А) $b+3$; Б) $b-3$; В) $\frac{1}{b-3}$; Г) $\frac{1}{b+3}$.

4. Выполните деление: $\frac{5a^6}{b^8}:(10a^3b^2)$.

А) $\frac{2a^9}{b^6}$; Б) $\frac{b^6}{2a^9}$; В) $\frac{2b^{10}}{a^3}$; Г) $\frac{a^3}{2b^{10}}$.

5. Упростите выражение $\frac{3x+9}{x^2-2x}:\frac{x+3}{4x-8}$.

А) $\frac{12}{x}$; Б) $\frac{x}{12}$; В) 12; Г) x.

6. Представьте в виде дроби выражение

$\frac{n^2-3n}{64n^2-1}:\frac{n^4-27n}{64n^2+16n+1}$.

А) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2+3n+9)}$; В) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2+3n+9)}$;

Б) $\frac{8n+1}{(8n-1)(n^2-3n+9)}$; Г) $\frac{8n-1}{(8n+1)(n^2-3n+9)}$.

7. Выполните возведение в степень: $\left(-\frac{2a^2}{b^3}\right)^4$.

А) $\frac{8a^8}{b^{12}}$; Б) $-\frac{8a^8}{b^{12}}$; В) $\frac{16a^8}{b^{12}}$; Г) $-\frac{16a^8}{b^{12}}$.

8. Упростите выражение $\left(\frac{1}{a-6}-\frac{1}{a+6}\right):\frac{2}{a+6}$.

А) $\frac{6}{a+6}$; Б) $\frac{6}{a-6}$; В) $6(a-6)$; Г) $6(a+6)$.

9. Какому числу при всех допустимых значениях a равно значение выражения $\left(\frac{30a}{9a^2-25}+\frac{5}{5-3a}\right):\left(\frac{3a-5}{3a+5}-1\right)$?

А) $\frac{1}{2}$; Б) 2; В) $-\frac{1}{2}$; Г) -2.

10. Чему равно значение выражения $\frac{a^2-4ab}{b^2}$, если $3a-5b=0{,}2(2a+b)$?

А) 4; Б) -4; В) 3; Г) -3.

11. Известно, что $x+\frac{1}{x}=6$. Найдите значение выражения $x^2+\frac{1}{x^2}$.

А) 36; Б) 38; В) 34; Г) 35.

12. Упростите выражение $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}}{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a}}$.

А) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; В) $\frac{a^2+b^2}{ab^2(a^2-b^2)}$;

Б) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; Г) $\frac{ab(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$.

7. Равносильные уравнения. Рациональные уравнения

Рассмотрим два уравнения: $x^2 = 4$ и $|x| = 2$.

Очевидно, что каждое из них имеет одни и те же корни: -2 и 2.

В таких случаях говорят, что уравнения $x^2 = 4$ и $|x| = 2$ **равносильны.**

Приведем еще примеры пар равносильных уравнений:

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ и } 2x = 0;$$

$$2x = 4 \text{ и } 4x - 8 = 0;$$

$$x^2 = 1 \text{ и } (x - 1)(x + 1) = 0.$$

Рассмотрим уравнения $x^2 = -5$ и $|x| = -3$. Каждое из этих уравнений не имеет корней. Такие уравнения принято считать равносильными.

Определение. **Два уравнения называют *равносильными*, если они имеют одни и те же корни или каждое из уравнений не имеет корней.**

Каждое из уравнений $(x - 2)(x + 1) = 0$ и $x - 2 = 0$ имеет корень $x = 2$. Однако эти уравнения не являются равносильными, так как корень -1 первого уравнения не является корнем второго уравнения.

В 7 классе вы изучили свойства уравнений с одной переменной. Теперь, применяя понятие «равносильное уравнение», эти свойства можно сформулировать следующим образом.

- Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.
- Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.
- Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Рассмотрим задачу: «Автомобиль, проехав 180 км пути, увеличил скорость на 10 км/ч и оставшийся путь длиной 210 км проехал за то же время, что и первую часть пути. Найдите начальную скорость автомобиля».

Пусть x км/ч — искомая скорость. Тогда скорость автомобиля на второй части пути равна $(x + 10)$ км/ч. Автомобиль преодолел первую часть пути за $\frac{180}{x}$ ч, а вторую — за $\frac{210}{x+10}$ ч.

Уравнение $\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$ является математической моделью рассмотренной реальной ситуации. Обе части полученного уравнения являются рациональными выражениями.

Определение. **Уравнение, левая и правая части которого являются рациональными выражениями, называют рациональным.**

Из определения следует, что, решая задачу, мы получили рациональное уравнение.

Отметим, что линейные уравнения с одной переменной, то есть уравнения вида $ax = b$, являются рациональными.

Рассмотрим рациональное уравнение вида $\frac{A}{B} = 0$, где A и B — многочлены.

Вы знаете, что *дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля*. Поэтому, чтобы решить уравнение вида $\frac{A}{B} = 0$, требуется *одновременное* выполнение двух условий: $A = 0$ и $B \neq 0$. Это значит, что при решении уравнений указанного вида следует руководствоваться таким алгоритмом:

- решить уравнение $A = 0$;
- проверить, какие из найденных корней удовлетворяют условию $B \neq 0$;
- корни, удовлетворяющие условию $B \neq 0$, включить в ответ.

ПРИМЕР 1

Решите уравнение $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2 - 4x + 3} = 0$.

Решение

Приравняем числитель дроби, стоящей в левой части уравнения, к нулю. Имеем: $(x-1)(x+1)=0$. Корнями этого уравнения являются числа -1 и 1.

Проверим, удовлетворяют ли эти корни условию $x^2-4x+3\neq 0$.

При $x=-1$ получаем, что $x^2-4x+3=8\neq 0$.

При $x=1$ получаем, что $x^2-4x+3=0$.

Следовательно, $x=-1$ — корень заданного уравнения, а $x=1$ — нет.

Ответ: -1.

Таким образом, решение уравнения вида $\frac{A}{B}=0$ сводится к решению уравнения $A=0$ и проверке условия $B\neq 0$. В таких случаях говорят, что уравнение $\frac{A}{B}=0$ равносильно системе:

$$\begin{cases} A=0, \\ B\neq 0. \end{cases}$$

Например, уравнение $\frac{(x-1)(x+1)}{x^2-4x+3}=0$ равносильно системе:

$$\begin{cases} (x-1)(x+1)=0, \\ x^2-4x+3\neq 0. \end{cases}$$

Как мы выяснили, решением этой системы является $x=-1$.

Теперь мы можем завершить решение задачи об автомобиле. Имеем:

$$\frac{180}{x}=\frac{210}{x+10}.$$

Переходим к равносильному уравнению

$$\frac{180}{x}-\frac{210}{x+10}=0.$$

Отсюда

$$\frac{180(x+10)-210x}{x(x+10)}=0;\quad \frac{1800-30x}{x(x+10)}=0.$$

Последнее уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 1800-30x=0, \\ x(x+10)\neq 0. \end{cases}$$

Корнем уравнения, входящего в систему, является число 60; очевидно, что оно удовлетворяет условию $x(x + 10) \neq 0$.
Ответ: 60 км/ч.

Как известно, любое рациональное выражение можно представить в виде дроби. Поэтому любое рациональное уравнение можно свести к уравнению вида $\frac{A}{B} = 0$. Именно так мы и сделали, решая уравнение $\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$.

ПРИМЕР 2

Решите уравнение $\frac{3x+5}{6x+3} + \frac{1}{4x^2-1} = \frac{x}{2x-1}$.

Решение

Имеем:

$$\frac{3x+5}{3(2x+1)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{x}{2x-1} = 0;$$

$$\frac{4x-2}{3(2x-1)(2x+1)} = 0.$$

Полученное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 4x - 2 = 0, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = 0,5, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$$

Следовательно, данное уравнение не имеет корней.
Ответ: корней нет.

ПРИМЕР 3

Решите уравнение $\frac{2x^2-4x-16}{x-4} - x = 0$.

Решение

Представим левую часть уравнения в виде дроби:

$$\frac{2x^2-4x-16-x^2+4x}{x-4} = 0;$$

$$\frac{x^2-16}{x-4} = 0.$$

Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ x - 4 \neq 0, \end{cases}$$

откуда получаем:

$$\begin{cases} x = 4 \text{ или } x = -4, \\ x \neq 4; \end{cases}$$

$$x = -4.$$

Ответ: -4.

ПРИМЕР 4

Турист проплыл на лодке 3 км по течению реки и 2 км против течения за 30 мин. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения равна 2 км/ч.

Решение

Пусть скорость лодки в стоячей воде равна x км/ч. Тогда ее скорость по течению реки равна $(x + 2)$ км/ч, а против течения — $(x - 2)$ км/ч. Турист проплыл 3 км по течению за $\frac{3}{x+2}$ ч, а 2 км против течения — за $\frac{2}{x-2}$ ч. Так как весь путь был пройден за 30 мин $= \frac{1}{2}$ ч, то $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2}$.

Решим полученное уравнение:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{3x - 6 + 2x + 4}{x^2 - 4} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\frac{10x - 4 - x^2 + 4}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\frac{10x - x^2}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 = 0, \\ 2(x^2 - 4) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(10 - x) = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ или } x = 10.$$

Корень $x = 0$ противоречит смыслу задачи. Следовательно, скорость лодки в стоячей воде равна 10 км/ч.
Ответ: 10 км/ч.

1. Какие два уравнения называют равносильными?
2. С помощью каких преобразований данного уравнения можно получить уравнение, равносильное данному?
3. Какое уравнение называют рациональным?
4. Сформулируйте условие равенства дроби нулю.
5. Опишите алгоритм решения уравнений вида $\frac{A}{B} = 0$, где A и B — многочлены.

205.° **Равносильны ли уравнения:**

1) $x + 2 = 10$ и $3x = 24$;
2) $-2x = -6$ и $\frac{1}{3}x = 1$;
3) $x - 5 = 0$ и $x(x - 5) = 0$;
4) $(3x - 12)(x + 2) = 0$ и $(0{,}4 - 0{,}1x)(7x + 14) = 0$;
5) $\frac{6}{x} = 0$ и $x^2 = -4$;
6) $x + 1 = 1 + x$ и $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$?

206.° **Составьте уравнение, равносильное данному:**

1) $2x - 3 = 4$; 2) $|x| = 1$; 3) $x + 6 = x - 2$.

207.° **Решите уравнение:**

1) $\frac{x - 6}{x - 4} = 0$;
2) $\frac{x - 2}{x^2 - 4} = 0$;
3) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$;
4) $\frac{x - 2}{x - 2} = 1$;
5) $\frac{2x^2 + 18}{x^2 + 9} = 2$;
6) $\frac{x}{x - 5} + \frac{2x - 9}{x - 5} = 0$;
7) $\frac{5x - 7}{x + 1} - \frac{x - 5}{x + 1} = 0$;
8) $\frac{2x + 16}{x + 3} - \frac{1 - 3x}{x + 3} = 0$;
9) $\frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} = 0$;
10) $\frac{3}{x - 2} = \frac{4}{x + 3}$;
11) $\frac{x}{x - 6} = 2$;
12) $\frac{x - 4}{x - 3} = \frac{2x + 1}{2x - 1}$;

13) $\frac{x+8}{x}-\frac{6}{x-2}=0;$

14) $\frac{2x}{x-5}-\frac{x^2+15x}{x^2-25}=0;$

15) $3-\frac{2x^2-5x}{x^2-3x}=0.$

208.° Решите уравнение:

1) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=0;$

2) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=0;$

3) $\frac{x+7}{x-7}-\frac{2x-3}{x-7}=0;$

4) $\frac{10-3x}{x+8}+\frac{5x+6}{x+8}=0;$

5) $\frac{x-6}{x-2}-\frac{x-8}{x}=0;$

6) $\frac{2x-4}{x}-\frac{3x+1}{x}+\frac{x+5}{x}=0;$

7) $\frac{x}{x+6}-\frac{36}{x^2+6x}=0;$

8) $\frac{2x^2+3x+1}{2x+1}-x=1;$

9) $\frac{4}{x-1}-\frac{4}{x+1}=1.$

209.° Какое число нужно вычесть из числителя и знаменателя дроби $\frac{15}{19}$, чтобы получить дробь, равную $\frac{2}{3}$?

210.° Какое число нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{25}{32}$, чтобы получить дробь, равную $\frac{5}{6}$?

211.• Составьте пару равносильных уравнений, каждое из которых:

1) имеет один корень;

2) имеет два корня;

3) имеет бесконечно много корней;

4) не имеет корней.

212.• Решите уравнение:

1) $\frac{5}{x^2-4}+\frac{2x}{x+2}=2;$

2) $\frac{2}{6x+1}+\frac{3}{6x-1}=\frac{30x+9}{36x^2-1};$

3) $\frac{6x+14}{x^2-9}+\frac{7}{x^2+3x}=\frac{6}{x-3};$

4) $\frac{2y^2+5}{1-y^2}+\frac{y+1}{y-1}=\frac{4}{y+1};$

5) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{4}{1-4x^2};$

6) $\frac{7}{(x+2)(x-3)}-\frac{4}{(x-3)^2}=\frac{3}{(x+2)^2};$

7) $\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}=\frac{6x+64}{x^2-16}+4;$

8) $\frac{2x-6}{x^2-36}-\frac{x-3}{x^2-6x}-\frac{x-1}{x^2+6x}=0.$

213.* Решите уравнение:

1) $\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{1-x}=\frac{x^2+27}{x^2-1};$

2) $\frac{3x+1}{3x-1}-\frac{3x-1}{3x+1}=\frac{6}{1-9x^2};$

3) $\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{5}{x-2};$

4) $\frac{2x^2-2x}{x^2-4}+\frac{6}{x+2}=\frac{x+2}{x-2};$

5) $\frac{7}{x^2+2x}+\frac{x+1}{x^2-2x}=\frac{x+4}{x^2-4};$

6) $\frac{x^2-9x+50}{x^2-5x}=\frac{x+1}{x-5}+\frac{x-5}{x}.$

214.* Моторная лодка проплыла 8 км по течению реки и вернулась назад, потратив на весь путь 54 мин. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 18 км/ч.

215.* Теплоход прошел 28 км против течения реки, затем вернулся, потратив на обратный путь на 4 мин меньше. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения реки равна 1 км/ч.

216.* Лодка прошла 6 км против течения реки и 12 км по течению, затратив на весь путь 2 ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки составляет 3 км/ч.

217.** Решите уравнение:

1) $\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{x-5}{2x^2+10x}=\frac{x+25}{2x^2-50};$

2) $\frac{2}{x^2-9}-\frac{1}{2x^2-12x+18}=\frac{3}{2x^2+6x};$

3) $\frac{9x+12}{x^3-64}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x^2+4x+16}.$

218.** Решите уравнение:

1) $\frac{4y+24}{5y^2-45}+\frac{y+3}{5y^2-15y}=\frac{y-3}{y^2+3y};$

2) $\frac{y+2}{8y^3+1}-\frac{1}{4y+2}=\frac{y+3}{8y^2-4y+2}.$

219.* Для каждого значения a решите уравнение:

1) $\frac{x-1}{x-a}=0;$

2) $\frac{x-a}{x+5}=0;$

3) $\frac{a(x-a)}{x-3}=0$;

4) $\frac{(x-a)(x-6)}{x-7}=0$;

5) $\frac{(x-4)(x+2)}{x-a}=0$;

6) $\frac{x-a}{(x-4)(x+2)}=0$.

220.* При каких значениях a уравнение $\frac{x+a}{x^2-4}=0$ не имеет корней?

221.* При каких значениях a уравнение $\frac{(x-a)(x-3a)}{x+9}=0$ имеет один корень?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

222. На конец года численность населения города составляла 72 100 жителей. Определите количество жителей в этом городе на начало года, если прирост населения за это время составлял 3 %.

223. Расстояние между двумя станциями электропоезд проходит за 45 мин. Если его скорость увеличить на 10 км/ч, то он пройдет это расстояние за 40 мин. Чему равно расстояние между станциями?

224. Докажите, что при любом значении переменной данное выражение принимает неотрицательное значение:

1) $(a-5)^2-2(a-5)+1$; 2) $(a-b)(a-b-8)+16$.

225. Найдите значение функции $f(x)=3x-7$ при: 1) $x=-3$; 2) $x=2\frac{1}{3}$. При каком значении аргумента значение функции равно 0,2?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

226. Найдите значение выражения:

1) 4^3+3^4;

2) $(-8)^2-(-1)^{12}$;

3) $9\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^2$;

4) $(2{,}8-3{,}1)^3\cdot\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$.

227. Не выполняя вычисления, сравните значения выражений:

1) $(-5{,}7)^2$ и 0;

2) 0 и $(-6{,}9)^3$;

3) $(-23)^5$ и $(-2)^4$;

4) -8^8 и $(-8)^8$.

228. Представьте в виде степени:

1) с основанием 2 числа 4; 8; 16; 32; 64;

2) с основанием 10 числа 100; 1000; 10 000; 1 000 000.

229. Найдите значение выражения:

1) $18a^2$, если $a = -\frac{1}{6}$; 3) $16 + b^4$, если $b = -2$;

2) $(18a)^2$, если $a = -\frac{1}{6}$; 4) $(16 + b)^4$, если $b = -2$.

Повторите содержание пункта 3 на с. 230.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

230. Существует ли натуральное число, которое при умножении на 2 становится квадратом натурального числа, а при умножении на 3 — кубом натурального числа?

8. Степень с целым отрицательным показателем

Часто для записи больших чисел в компактном виде используют степень с натуральным показателем. Например,

$$129\ 140\ 163 = 3^{17},$$
$$282\ 475\ 249 = 7^{10}.$$

В науке и практике для короткой записи больших значений величин используют степень числа 10.

Например, расстояние от Земли до Полярной звезды приблизительно равно 4 470 000 000 000 000 км или $4{,}47 \cdot 10^{15}$ км. Масса Солнца равна

1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 000 кг или

$1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг.

Это были примеры из макромира, то есть мира очень больших физических величин.

Приведем примеры из микромира — мира очень маленьких физических величин.

Масса атома Гидрогена равна

0,000000000000000000000000001661 кг.

Радиус атома Оксигена равен 0,0000000066 см.

Для записи этих величин также можно использовать степень числа 10. Имеем:

$$0{,}000000000000000000000000001661 \text{ кг} = \frac{1{,}661}{10^{27}} \text{ кг},$$

$$0{,}0000000066 \text{ см} = \frac{6{,}6}{10^{9}} \text{ см}.$$

Однако если договориться обозначить $\frac{1}{10^{27}}$ и $\frac{1}{10^{9}}$ соответственно 10^{-27} и 10^{-9}, то для рассмотренных величин получим «одноэтажную» форму записи:

$$\frac{1{,}661}{10^{27}} = 1{,}661 \cdot 10^{-27}, \quad \frac{6{,}6}{10^{9}} = 6{,}6 \cdot 10^{-9}.$$

Аналогично можно договориться, что, например, $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$, $\frac{1}{(-3)^5} = (-3)^{-5}$, $\frac{1}{0{,}7} = (0{,}7)^{-1}$.

Определение. **Для любого числа a, не равного нулю, и натурального числа n**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Из определения следует, что, например, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16$, $(0{,}3)^{-1} = \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3}$.

Таким образом, можно возводить число в любую целую степень, кроме нуля. Устраним этот пробел.

Определение. **Для любого числа a, не равного нулю, $a^0 = 1$.**

Например, $5^0 = 1$, $(-17)^0 = 1$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$, $\pi^0 = 1$.

Замечание. Выражение 0^n при целых n, меньших или равных нулю, не имеет смысла.

Из приведенных определений следует, что при любом $a \neq 0$ и целом n числа a^n и a^{-n} являются взаимно обратными. Поэтому равенство

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

выполняется при любом целом n.

Например, при $n = -2$ имеем $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$.

В справочной литературе вы можете найти следующую информацию:

«Масса Венеры равна $4{,}9 \cdot 10^{24}$ кг. Масса Марса равна $6{,}423 \cdot 10^{23}$ кг. Площадь поверхности Луны равна $3{,}8 \cdot 10^7$ км^2».

Приведенные числа записаны в так называемом **стандартном виде.**

Определение. Стандартным видом числа называют его запись в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число.

Число n называют **порядком** числа, записанного в стандартном виде. Например, порядок числа, выражающего массу Солнца в килограммах, равен 30, а порядок числа, которое выражает массу атома Гидрогена в килограммах, равен -27.

В стандартном виде можно записать любое положительное число. Например, $171{,}25 = 1{,}7125 \cdot 10^2$; $0{,}00958 = 9{,}58 \cdot 10^{-3}$. Однако стандартный вид числа на практике используют для записи больших и малых чисел. При этом порядок числа дает представление о величине числа.

ПРИМЕР 1

Найдите значение выражения:

1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$; 2) $1{,}2^{-2}$; 3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0$.

Решение

1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$.

И вообще, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

2) $1{,}2^{-2} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^{2} = \frac{25}{36}$.

3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0 = \frac{1}{3^3} \cdot 15 + \frac{1}{6^2} \cdot 8 - 1 =$

$= \frac{1}{27} \cdot 15 + \frac{1}{36} \cdot 8 - 1 = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{2}{9}$.

ПРИМЕР 2

Представьте выражение $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})$ в виде рациональной дроби.

Решение

$$(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})=\frac{1}{(a-b)^2}\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{1}{(a-b)^2}\cdot\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2}=\frac{b+a}{a^2b^2(b-a)}=\frac{b+a}{a^2b^3-a^3b^2}.$$

ПРИМЕР 3

Запишите в стандартном виде число:

1) 564 000 000; 2) 0,0036.

Решение

1) 564 000 000 = 5,64 · 100 000 000 = 5,64 · 10^8.

2) $0,0036=3,6\cdot 0,001=3,6\cdot\frac{1}{1000}=3,6\cdot\frac{1}{10^3}=3,6\cdot 10^{-3}.$

1. Чему равно a^{-n} для любого отличного от нуля числа a и натурального числа n?
2. Чему равна нулевая степень любого отличного от нуля числа?
3. Что называют стандартным видом числа?
4. В каких пределах должно находиться число a, чтобы запись $a \cdot 10^n$, где n — целое число, являлась стандартным видом числа?
5. Как называют число n в записи числа $a \cdot 10^n$ в стандартном виде?

231.° Какому из выражений равно выражение a^{-6}:

1) $-a^6$; 2) $\frac{1}{a^{-6}}$; 3) $\frac{1}{a^6}$; 4) $-\frac{1}{a^6}$?

232.° Представьте степень в виде дроби:

1) 3^{-8}; 3) a^{-9}; 5) 12^{-1}; 7) $(a-b)^{-2}$;

2) 5^{-6}; 4) d^{-3}; 6) m^{-1}; 8) $(2x-3y)^{-4}$.

233.° Замените степень дробью:

1) 14^{-4}; 2) p^{-20}; 3) $(m+n)^{-1}$; 4) $(4c-5d)^{-10}$.

234.° Представьте дробь в виде степени с целым отрицательным показателем или в виде произведения степеней:

1) $\frac{1}{7^2}$; 3) $\frac{1}{c}$; 5) $\frac{a}{b}$; 7) $\frac{(a+b)^5}{(c-d)^8}$;

2) $\frac{1}{x^5}$; 4) $\frac{m}{n^3}$; 6) $\frac{x^6}{y^7}$; 8) $\frac{(x-y)^2}{x+y}$.

235.° Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем или произведением степеней:

1) $\frac{1}{11^{11}}$; 2) $\frac{1}{k^4}$; 3) $\frac{x^2}{y}$; 4) $\frac{m^6}{n^6}$; 5) $\frac{(2x-y)^9}{(x-2y)^9}$.

236.° Представьте числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ в виде степени с основанием: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

237.° Представьте в виде степени однозначного натурального числа дробь:

1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{216}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{1}{128}$.

238.° Представьте в виде степени с основанием 10 число:

1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,0001; 4) 0,000001.

239.° Представьте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ в виде степени с основанием: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

240.° Вычислите:

1) 5^{-2}; 3) $(-9)^{-2}$; 5) 1^{-24}; 7) $(-1)^{-17}$; 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

2) 2^{-4}; 4) $0{,}2^{-3}$; 6) $(-1)^{-16}$; 8) $\left(\frac{7}{8}\right)^{0}$; 10) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

241.° Найдите значение выражения:

1) 20^{-2}; 3) $(-6)^{-3}$; 5) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$;

2) $0{,}3^{-1}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

242.° Вычислите значение выражения:

1) $3^{-1}-4^{-1}$; 4) $9\cdot 0{,}1^{-1}$;

2) $2^{-3}+6^{-2}$; 5) $0{,}5^{-2}\cdot 4^{-1}$;

3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}+(-2{,}3)^0-5^{-2}$; 6) $(2^{-1}-8^{-1}\cdot 16)^{-1}$.

243.° Чему равно значение выражения:

1) $2^{-2}+2^{-1}$; 2) $3^{-2}-6^{-1}$;

3) $0{,}03^0 + 0{,}7^0$; 4) $(9\cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$?

244.° Какое из данных чисел записано в стандартном виде:
1) $12\cdot 10^4$; 2) $1{,}2\cdot 10^4$; 3) $0{,}12\cdot 10^4$?

245.° Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:
1) 3400; 4) 0,000008; 7) $0{,}86\cdot 10^3$;
2) 15; 5) 0,73; 8) $0{,}23\cdot 10^4$;
3) 0,0046; 6) $250\cdot 10^2$; 9) $9300\cdot 10^5$.

246.° Используя стандартный вид числа, запишите:
1) скорость света в вакууме равна 300 000 км/с;
2) высота Говерлы, самой высокой горы Украины, равна 2061 м;
3) площадь Украины составляет 603 700 км^2;
4) среднее расстояние от Земли до Солнца составляет 149,6 млн км;
5) атмосферное давление на высоте 100 км составляет 0,032 Па;
6) диаметр молекулы воды равен 0,00000028 мм.

247.° Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:
1) 45 000; 4) 0,032;
2) 260; 5) $0{,}059\cdot 10^8$;
3) 0,00024; 6) $526\cdot 10^4$.

248.° Запишите в виде натурального числа или десятичной дроби число, представленное в стандартном виде:
1) $1{,}6\cdot 10^3$; 3) $2{,}1\cdot 10^{-2}$;
2) $5{,}7\cdot 10^6$; 4) $1{,}1\cdot 10^{-5}$.

249.° Запишите в виде натурального числа или десятичной дроби число, представленное в стандартном виде:
1) $2{,}4\cdot 10^2$; 2) $4{,}8\cdot 10^5$; 3) $1{,}4\cdot 10^{-3}$; 4) $8{,}6\cdot 10^{-4}$.

250.• Докажите, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

251.• Найдите значение выражения:

1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot 10^{-1} + 9^0 - (-2)^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^{-2}\cdot(-1{,}5)^{-3}$;

2) $(2{,}5)^{-2} - (8^5)^0 + \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} + 0{,}1^{-1}$.

252.° Расположите в порядке убывания:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(\frac{1}{2}\right)^0,\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$;

2) $4^{-1},\ 4^3,\ 4^0,\ 4^{-2}$.

253.° Расположите в порядке возрастания:

1) $7^{-2},\ 7^2,\ 7^{-1},\ 7^0$;

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-3},\ \left(\frac{1}{3}\right)^0,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

254.° Сравните значения выражений:

1) 12^0 и $(-6)^0$;
2) $0{,}2^3$ и $0{,}2^{-3}$;
3) 4^6 и $0{,}25^{-6}$;
4) $3^{-1}\cdot 7^{-1}$ и 21^{-1};
5) $5^{-1}-7^{-1}$ и 2^{-1};
6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ и $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

255.° Сравните значения выражений:

1) 3^{-2} и $(-3)^0$;
2) $3^{-1}+2^{-1}$ и 5^{-1};
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)^{-2}$.

256.° Представьте в виде дроби выражение:

1) $ab^{-1}+a^{-1}b$;
2) $3a^{-1}+ab^{-2}$;
3) $m^2n^2(m^{-3}-n^{-3})$;
4) $(a+b)^{-1}\cdot(a^{-1}+b^{-1})$;
5) $(c^{-2}-d^{-2}):(c+d)$;
6) $(xy^{-2}+x^{-2}y)\cdot\left(\frac{x^2-xy+y^2}{x}\right)^{-1}$.

257.° Представьте в виде дроби выражение:

1) $a^{-2}+a^{-3}$;
2) $mn^{-4}+m^{-4}n$;
3) $(c^{-1}-d^{-1})\cdot(c-d)^{-2}$;
4) $(x^{-2}+y^{-2})\cdot(x^2+y^2)^{-1}$.

258.° Порядок некоторого натурального числа равен 4. Сколько цифр содержит десятичная запись этого числа?

259.° Десятичная запись некоторого натурального числа состоит из семи цифр. Чему равен порядок этого числа?

260.° Какое число больше:

1) $9{,}7\cdot10^{11}$ или $1{,}2\cdot10^{12}$;
2) $3{,}6\cdot10^{-5}$ или $4{,}8\cdot10^{-6}$;
3) $2{,}34\cdot10^6$ или $0{,}23\cdot10^7$;
4) $42{,}7\cdot10^{-9}$ или $0{,}072\cdot10^{-7}$?

261.* Какое число меньше:

1) $6{,}1\cdot10^{19}$ или $6{,}15\cdot10^{18}$; 2) $1{,}5\cdot10^{-9}$ или $0{,}9\cdot10^{-8}$?

262.* В таблице приведены средние расстояния от Солнца до планет Солнечной системы:

Планета	Расстояние, км
Венера	$1{,}082\cdot10^{8}$
Земля	$1{,}495\cdot10^{8}$
Марс	$2{,}280\cdot10^{8}$
Меркурий	$5{,}790\cdot10^{7}$
Нептун	$4{,}497\cdot10^{9}$
Сатурн	$1{,}427\cdot10^{9}$
Уран	$2{,}871\cdot10^{9}$
Юпитер	$7{,}781\cdot10^{8}$

1) Какая планета находится на наименьшем расстоянии от Солнца, а какая — на наибольшем?
2) Какая из планет, Марс или Сатурн, находится дальше от Солнца?
3) Составьте таблицу, записав в левом столбце названия планет в порядке увеличения расстояния от них до Солнца, а в правом — расстояния от них до Солнца, выраженные в миллионах километров.

263.* В таблице приведены массы атомов некоторых химических элементов:

Элемент	Масса атома, кг	Элемент	Масса атома, кг
Нитроген	$2{,}32\cdot10^{-26}$	Аурум	$3{,}27\cdot10^{-25}$
Алюминий	$4{,}48\cdot10^{-26}$	Купрум	$1{,}05\cdot10^{-25}$
Гидроген	$1{,}66\cdot10^{-27}$	Натрий	$3{,}81\cdot10^{-26}$
Гелий	$6{,}64\cdot10^{-27}$	Станум	$1{,}97\cdot10^{-25}$
Феррум	$9{,}28\cdot10^{-26}$	Уран	$3{,}95\cdot10^{-25}$

1) Масса атома какого из приведенных элементов наименьшая, а какого — наибольшая?
2) Масса какого из элементов, Купрума или Натрия, больше?
3) Составьте таблицу, упорядочив элементы в порядке уменьшения массы их атомов.

264.° В таблице приведены запасы некоторых веществ в минеральных ресурсах мира:

Вещество	Запасы, т	Вещество	Запасы, т
Алюминий	$1{,}1 \cdot 10^9$	Никель	$6{,}8 \cdot 10^7$
Вольфрам	$1{,}3 \cdot 10^6$	Олово	$4{,}76 \cdot 10^6$
Железо	$8{,}8 \cdot 10^{10}$	Ртуть	$1{,}15 \cdot 10^5$
Золото	$1{,}1 \cdot 10^4$	Фосфаты	$1{,}98 \cdot 10^{10}$
Марганец	$6{,}35 \cdot 10^8$	Хром	$4{,}4 \cdot 10^9$
Медь	$2{,}8 \cdot 10^9$	Цинк	$1{,}12 \cdot 10^8$

1) Запасы какого из приведенных веществ наибольшие, а какого — наименьшие?
2) Запасы какого из веществ, никеля или цинка, больше?
3) Составьте таблицу минеральных ресурсов, разместив вещества в порядке уменьшения их запасов.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

265. Масса чугунной болванки 16 кг. Какое наименьшее количество болванок требуется, чтобы отлить 41 деталь массой 12 кг каждая?

266. В некотором городе на сегодняшний день проживает 88 200 жителей. Сколько жителей было в этом городе два года назад, если ежегодный прирост населения составлял 5 %?

267. Дима ходит из дома на стадион пешком со скоростью 4 км/ч. Если он поедет на стадион на велосипеде со скоростью 12 км/ч, то приедет на него на 20 мин раньше, чем обычно. На каком расстоянии от дома Димы находится стадион?

268. Упростите выражение:

$$\frac{2a^2+2}{a^2-1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{3a-3}{2a+2}.$$

269. Можно ли утверждать, что при любом натуральном n значение выражения $(5n+6{,}5)^2-(2n+0{,}5)^2$ кратно 42?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

270. Представьте в виде степени с основанием a выражение:

1) $a^7 \cdot a^5$; 2) $a^7 : a^5$; 3) $(a^7)^5$; 4) $\frac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$.

271. Упростите выражение:

1) $-4m^3n^5 \cdot 5m^4n^2$; 2) $(-2m^7n^2)^4$; 3) $8x^3y^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2y^5\right)^3$.

272. Найдите значение выражения:

1) $\frac{3^{10} \cdot 27^3}{9^9}$; 2) $\left(5\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^8$.

Повторите содержание пункта 4 на с. 230.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

273. В некотором доме живут только супружеские пары с детьми, причем у каждого мальчика есть сестра и мальчиков больше, чем девочек. Может ли взрослых быть больше, чем детей?

9. Свойства степени с целым показателем

В 7 классе вы изучали свойства степени с натуральным показателем. Они остаются справедливыми и для степени с любым целым показателем.

Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n выполняются равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad (1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \qquad (2)$$

Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n выполняется равенство:

$$(ab)^n = a^n b^n. \qquad (3)$$

Равенство (1) выражает **основное свойство степени.** Докажем его.

Для натуральных m и n это равенство уже было доказано в курсе алгебры 7 класса.

Рассмотрим теперь случай, когда m и n — целые отрицательные числа.

Если m и n — целые отрицательные числа, то $-m$ и $-n$ — натуральные числа. Тогда $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}$.

Имеем:

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Для того чтобы доказательство основного свойства степени стало полным, следует также рассмотреть такие случаи: один из показателей степени m или n отрицательный, а другой — положительный; один или оба показателя равны нулю. Рассмотрите эти случаи самостоятельно.

Равенства (2) и (3) доказывают аналогично.

Из основного свойства степени следует такое важное следствие: ***для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n выполняется равенство:***

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \qquad (4)$$

Действительно,

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}.$$

Из свойств (2) и (3) можно получить еще одно свойство степени с целым показателем: ***для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого n выполняется равенство:***

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad (5)$$

Действительно,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Свойства (1)–(5) называют **свойствами степени с целым показателем**.

ПРИМЕР 1

Представьте в виде степени выражение:

1) $a^{-14} \cdot a^{12}$; 2) $a^{-5} : a^{-9}$; 3) $(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^{6}$.

Решение

1) Применив основное свойство степени, получаем:

$$a^{-14} \cdot a^{12} = a^{-14+12} = a^{-2}.$$

2) Используя равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$, имеем:

$$a^{-5} : a^{-9} = a^{-5-(-9)} = a^{-5+9} = a^4.$$

3) Применив последовательно правила возведения степени в степень (свойство (2)), умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями (свойства (1) и (4)), получаем:

$$(a^{-4})^{-2}\cdot a^{-7} : a^{6} = a^{-4\cdot(-2)}\cdot a^{-7} : a^{6} = a^{8}\cdot a^{-7} : a^{6} = a^{8+(-7)-6} = a^{-5}.$$

ПРИМЕР 2

Найдите значение выражения:

1) $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3}$; 2) $16^{-9}\cdot 8^{12}$; 3) $\frac{6^{-3}}{18^{-3}}$; 4) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-8}\cdot\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\right)^{-5}$.

Решение

1) Имеем: $(5^{-5})^{-4} : (5^{-7})^{-3} = 5^{20} : 5^{21} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$.

2) Представив числа 16 и 8 в виде степеней с основанием 2, получаем:
$16^{-9}\cdot 8^{12} = (2^{4})^{-9}\cdot(2^{3})^{12} = 2^{-36}\cdot 2^{36} = 2^{0} = 1$.

3) Используя правило возведения дроби в степень (свойство (5)), имеем: $\frac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\frac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^{3} = 27$.

4) $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-8}\cdot\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\right)^{-5} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-8}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^{2}\right)^{-8}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-15} =$
$= \left(\frac{6}{5}\right)^{-16}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-16}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^{15} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{6}$.

ПРИМЕР 3

Упростите выражение: 1) $0,6m^{2}n^{-6}\cdot\frac{1}{3}m^{-4}n^{3}$;

2) $(a^{-2}+9)(a^{-2}-4)-(a^{-2}+6)(a^{-2}-6)$.

Решение

1) $0,6m^{2}n^{-6}\cdot\frac{1}{3}m^{-4}n^{3} = \left(0,6\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot(m^{2}\cdot m^{-4})\cdot(n^{-6}\cdot n^{3}) =$
$= 0,2m^{-2}n^{-3}$.

2) $(a^{-2}+9)(a^{-2}-4)-(a^{-2}+6)(a^{-2}-6) =$
$= a^{-4}-4a^{-2}+9a^{-2}-36-a^{-4}+36 = 5a^{-2}$.

ПРИМЕР 4

Выполните умножение $(3,4\cdot 10^{14})\cdot(7\cdot 10^{-8})$ и результат запишите в стандартном виде.

Решение

$$(3{,}4\cdot10^{14})\cdot(7\cdot10^{-8})=(3{,}4\cdot7)\cdot(10^{14}\cdot10^{-8})=23{,}8\cdot10^{6}=$$
$$=2{,}38\cdot10\cdot10^{6}=2{,}38\cdot10^{7}.$$

Сформулируйте свойства степени с целым показателем.

274.° Представьте выражение в виде степени или произведения степеней:

1) $a^{-6}\cdot a^{9}$; 5) $a^{7}:a^{-3}$; 9) $(a^{-6})^{-8}$;
2) $a^{5}\cdot a^{-8}$; 6) $a^{-3}:a^{-15}$; 10) $(a^{2})^{-4}\cdot(a^{-3})^{-2}:(a^{-8})^{3}$;
3) $a^{-5}\cdot a^{10}\cdot a^{-12}$; 7) $a^{12}\cdot a^{-20}:a^{-9}$; 11) $(a^{4}b^{-2}c^{3})^{-10}$;
4) $a^{-2}:a^{6}$; 8) $(a^{-5})^{4}$; 12) $\left(\dfrac{a^{10}b^{-7}}{c^{6}d^{-14}}\right)^{-2}$.

275.° Представьте выражение в виде степени или произведения степеней:

1) $a^{6}\cdot a^{-10}$; 4) $(a^{-2})^{6}$; 7) $a^{-16}\cdot a^{8}:a^{-4}$;
2) $a^{4}:a^{7}$; 5) $(a^{-3}b^{-1}c^{7})^{-4}$; 8) $(a^{-3})^{8}:(a^{-1})^{7}\cdot(a^{-7})^{-4}$.
3) $a^{-5}:a^{-9}$; 6) $\left(\dfrac{a^{2}}{bc^{-1}}\right)^{-3}$;

276.° Найдите значение выражения:

1) $9^{5}\cdot9^{-7}$; 4) $2^{-9}\cdot2^{-12}:2^{-22}$; 7) $3^{-3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$;
2) $10^{-8}\cdot10^{12}$; 5) $(17^{4})^{-12}\cdot(17^{-6})^{-8}$; 8) $\dfrac{14^{-5}}{7^{-5}}$.
3) $3^{-18}:3^{-21}$; 6) $\dfrac{6^{-5}\cdot(6^{-3})^{4}}{(6^{-7})^{2}\cdot6^{-3}}$;

277.° Найдите значение выражения:

1) $6^{-9}\cdot6^{6}$; 3) $5^{-7}:5^{-6}\cdot5^{3}$; 5) $0{,}8^{-4}\cdot\left(1\dfrac{1}{4}\right)^{-4}$;
2) $7^{-16}:7^{-18}$; 4) $\dfrac{4^{-7}\cdot(4^{-5})^{3}}{(4^{-3})^{7}}$; 6) $\dfrac{11^{-2}}{22^{-2}}$.

278.° Упростите выражение:

1) $3a^{-3}\cdot4a^{-4}$; 5) $abc^{-1}\cdot ab^{-1}c$;
2) $\dfrac{10b^{-4}}{15b^{-5}}$; 6) $\dfrac{kp^{-6}}{k^{4}p^{4}}$;
3) $(2c^{-6})^{4}$; 7) $(c^{-6}d^{2})^{-7}$;
4) $m^{-2}n\cdot mn^{-2}$; 8) $\dfrac{1}{3}a^{-3}b^{-6}\cdot\dfrac{6}{7}a^{7}b^{4}$;

9) $0{,}2c^{-3}d^{5}\cdot 1{,}5c^{-2}d^{-5}$;
10) $4x^{8}\cdot(-3x^{-2}y^{4})^{-2}$;
11) $\dfrac{13m^{-10}}{12n^{-8}}\cdot\dfrac{27n}{26m^{2}}$;
12) $\dfrac{18p^{-6}k^{2}}{7}:\dfrac{15k^{-2}}{p^{6}}$.

279.° Упростите выражение:

1) $2a^{-5}b^{2}\cdot 3a^{-2}b^{-5}$;
2) $\left(\dfrac{1}{2}mn^{-3}\right)^{-2}$;
3) $\dfrac{3{,}6a^{2}b}{0{,}9a^{3}b^{-3}}$;
4) $0{,}8a^{-6}b^{8}\cdot 5a^{10}b^{-8}$;
5) $\dfrac{25x^{-3}}{y^{-4}}\cdot\dfrac{y^{4}}{5x^{-7}}$;
6) $28c^{3}d^{-2}\cdot(2cd^{-1})^{-2}$.

280.° Найдите значение выражения:

1) $8^{-3}\cdot 2^{7}$;
2) $27^{-2}:9^{-4}$;
3) $100^{-2}:1000^{-5}\cdot 0{,}01^{6}$;
4) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-4}\cdot\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3}\right)^{-3}$;
5) $25^{-4}:(0{,}2^{-3})^{-2}$;
6) $\dfrac{(-36)^{-3}\cdot 6^{8}}{216^{-5}\cdot(-6)^{18}}$;
7) $\dfrac{6^{-10}}{81^{-2}\cdot 16^{-3}}$;
8) $\dfrac{14^{5}\cdot 2^{-7}}{28^{-2}\cdot 7^{8}}$.

281.° Найдите значение выражения:

1) $9^{-4}\cdot 27^{2}$;
2) $32^{-5}:64^{-4}$;
3) $\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{-7}\cdot\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}\right)^{5}$;
4) $8^{-2}:0{,}5^{4}$;
5) $\dfrac{22^{6}\cdot 2^{-8}}{44^{-3}\cdot 11^{9}}$;
6) $\dfrac{10^{-2}\cdot 15^{-4}}{30^{-6}}$.

282.° Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

1) $-2{,}4a^{-4}b^{3}\cdot(-2a^{-3}c^{-5})^{-3}$;
2) $(-10x^{-2}yz^{-8})^{-2}\cdot(0{,}1yz^{-4})^{-2}$;
3) $1\dfrac{7}{9}m^{-6}n\cdot\left(1\dfrac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}$;
4) $\left(-\dfrac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3}\cdot(-6a^{2}b^{9})^{-2}$;
5) $\left(\dfrac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2}\cdot 49m^{-6}n^{4}$;
6) $\left(\dfrac{4x^{-5}}{3y^{-2}}\right)^{-3}\cdot(16x^{-6}y^{4})^{2}$.

283.° Выполните действия и приведите полученное выражение к виду, не содержащему степени с отрицательным показателем:

1) $3{,}6a^{-8}b^{4}\cdot(-3a^{-3}b^{-7})^{-2}$; 3) $\left(\frac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3}\cdot125m^{-10}n^{2}$;

2) $1\frac{9}{16}x^{-6}y^{2}\cdot\left(1\frac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}$; 4) $\left(\frac{7a^{-6}}{b^{5}}\right)^{-2}\cdot(a^{-4}b)^{4}$.

284.* Вынесите за скобки степень с основанием a и наименьшим из данных показателей:

1) $a^{9}-2a^{4}$; 2) $a^{-3}-2a^{-4}$; 3) $a^{3}-2a^{-4}$.

285.* Вынесите за скобки степень с основанием b и наименьшим из данных показателей:

1) $b^{3}+3b^{2}$; 2) $b^{-3}+3b^{-2}$; 3) $b^{-3}+3b^{2}$.

286.* Представьте в виде произведения выражение:

1) $a^{-2}-4$; 4) $a^{-3}+b^{-3}$;

2) $a^{-4}b^{-6}-1$; 5) $m^{-4}-6m^{-2}p^{-1}+9p^{-2}$;

3) $25x^{-8}y^{-12}-z^{-2}$; 6) $a^{-8}-49a^{-2}$.

287.* Представьте в виде произведения выражение:

1) $x^{-4}-25$; 3) $a^{-10}+8a^{-5}b^{-7}+16b^{-14}$;

2) $m^{-6}-8n^{-3}$; 4) $a^{-4}-a^{-2}$.

288.* Докажите тождество:

$a^{-8}-b^{-8}=(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1})(a^{-2}+b^{-2})(a^{-4}+b^{-4})$.

289.* Упростите выражение:

1) $(a^{-4}+3)(a^{-4}-3)-(a^{-4}+2)^{2}$;

2) $\frac{m^{-2}-n^{-2}}{m^{-1}+n^{-1}}$;

3) $\frac{2x^{-2}+y^{-2}}{3x^{-2}-3x^{-1}y^{-1}}-\frac{x^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$;

4) $\frac{a^{-5}+b^{-5}}{a^{-6}}:\frac{a^{-3}b^{-5}+a^{-8}}{a^{-4}}$.

290.* Упростите выражение:

1) $(x^{-2}-1)^{2}-(x^{-2}-4)(x^{-2}+4)$;

2) $\frac{a^{-2}-10a^{-1}b^{-1}+25b^{-2}}{a^{-1}-5b^{-1}}$;

3) $\frac{5m^{-2}+n^{-2}}{4m^{-3}+4m^{-1}n^{-2}}-\frac{m^{-1}}{m^{-2}+n^{-2}}$;

4) $\frac{b^{-1}+3c^{-1}}{c^{-2}}\cdot\frac{bc}{b^{-2}c^{-1}+3b^{-1}c^{-2}}$.

291.* Порядок числа a равен -4. Определите порядок числа:

1) $10a$; 3) $100a$; 5) $10\,000a$;
2) $0{,}1a$; 4) $0{,}001a$; 6) $1\,000\,000a$.

292.* Порядок числа b равен 3. Определите порядок числа:
1) $10b$; 2) $0{,}01b$; 3) $0{,}0001b$; 4) $1000b$.

293.* Выполните вычисления и результат запишите в стандартном виде:

1) $(1{,}8\cdot10^{4})\cdot(6\cdot10^{3})$; 3) $\dfrac{5{,}4\cdot10^{5}}{9\cdot10^{8}}$;

2) $(3\cdot10^{6})\cdot(5{,}2\cdot10^{-9})$; 4) $\dfrac{1{,}7\cdot10^{-6}}{3{,}4\cdot10^{-4}}$.

294.* Выполните вычисления и результат запишите в стандартном виде:

1) $(1{,}6\cdot10^{-5})\cdot(4\cdot10^{7})$; 3) $\dfrac{7\cdot10^{-4}}{1{,}4\cdot10^{-6}}$;

2) $(5\cdot10^{-3}):(1{,}8\cdot10^{-1})$; 4) $\dfrac{6{,}4\cdot10^{3}}{8\cdot10^{-2}}$.

295.* Среднее расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5\cdot10^{8}$ км, а скорость света — $3\cdot10^{8}$ м/с. За сколько минут свет от Солнца дойдет до Земли? Ответ округлите до единиц.

296.* Плотность меди равна $8{,}9\cdot10^{3}$ кг/м^3. Найдите массу медной плиты, длина которой $2{,}5\cdot10^{-1}$ м, ширина — 12 см, а высота — 0,02 м.

297.* Масса Земли равна $6\cdot10^{24}$ кг, а Луны — $7{,}4\cdot10^{22}$ кг. Во сколько раз масса Луны меньше массы Земли? Ответ округлите до единиц.

298.** Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

1) $\left(\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}}\right):\left(\dfrac{b}{a^{2}}\right)^{-1}$;

2) $\dfrac{b^{-2}-2}{b^{-2}}-\dfrac{b^{-4}-4}{b^{-2}}\cdot\dfrac{1}{b^{-2}-2}$;

3) $\dfrac{5c^{-3}}{c^{-3}-3}-\dfrac{c^{-3}+6}{2c^{-3}-6}\cdot\dfrac{90}{c^{-6}+6c^{-3}}$;

4) $\left(\dfrac{m^{-4}}{m^{-4}-4}-\dfrac{3m^{-4}}{m^{-8}-8m^{-4}+16}\right)\cdot\dfrac{16-m^{-8}}{m^{-4}-7}+\dfrac{8m^{-4}}{m^{-4}-4}$.

299.** Упростите выражение и запишите результат в виде рационального выражения, не содержащего степени с отрицательным показателем:

1) $\frac{a^{-2}+5}{a^{-4}-6a^{-2}+9} : \frac{a^{-4}-25}{4a^{-2}-12} - \frac{2}{a^{-2}-5}$;

2) $\left(b^{-1}-\frac{5b^{-1}-36}{b^{-1}-7}\right)\cdot\left(2b^{-1}+\frac{2b^{-1}}{b^{-1}-7}\right)^{-1}$.

300.** Порядок числа a равен -4, а порядок числа b равен 3. Каким может быть порядок значения выражения:
1) ab; 2) $a + b$; 3) $a + 10b$; 4) $10a + 0{,}1b$?

301.** Порядок числа m равен 2, а порядок числа n равен 4. Каким может быть порядок значения выражения:
1) mn; 2) $0{,}01mn$; 3) $100m + n$; 4) $0{,}01m + n$?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

302. Среднее арифметическое двух натуральных чисел равно 18. При делении большего из этих чисел на меньшее получим неполное частное 3 и остаток 4. Найдите эти числа.

303. Благодаря мероприятиям по экономии электроэнергии за первый месяц ее расход был уменьшен на 20 %, за второй — на 10 % по сравнению с предыдущим, а за третий — на 5 % по сравнению с предыдущим. На сколько процентов в итоге был уменьшен расход электроэнергии?

304. Для откачивания воды из затопленного помещения были задействованы три насоса. Первый из них может выкачать всю воду за 12 ч, второй — за 15 ч, а третий — за 20 ч. Сначала в течение 3 ч работали первый и второй насосы, а затем подключили третий насос. За какое время была откачана вся вода?

305. Книжка стоит 19 грн. У покупателя имеются купюры только по 5 грн., а у продавца — только по 2 грн. Может ли покупатель рассчитаться за книжку без дополнительного размена денег? В случае утвердительного ответа определите, какое наименьшее количество купюр соответствующего достоинства должны иметь покупатель и продавец.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

306. Найдите значение функции $y = -\frac{14}{x}$, если:

1) $x = 2$; 2) $x = -1$; 3) $x = 3{,}5$; 4) $x = -6$.

307. Функция задана формулой $y = \frac{x+2}{x-6}$. Какова область определения данной функции? Заполните таблицу, вычислив соответственные значения функции:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

308. Постройте график функции $y = 2x - 1$. Проходит ли этот график через точку: 1) A (30; 59); 2) B (–15; –29)?

309. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = 2{,}7x - 8$ и $y = 1{,}2x + 7$.

310. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + y = 7. \end{cases}$$

Повторите содержание пунктов 17, 18, 19 на с. 236–237.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

311. По окончании теннисного турнира, который проводился по олимпийской системе (проигравший выбывает), оказалось, что только 32 участника выиграли больше встреч, чем проиграли. Сколько теннисистов принимало участие в турнире?

10. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график

В 6 классе вы познакомились с такой зависимостью одной величины от другой, когда увеличение (уменьшение) одной из величин в несколько раз приводит к увеличению (уменьшению) другой величины в такое же количество раз.

В 7 классе вы узнали, что эта зависимость является функциональной и определяет функцию $y = kx$, где $k \neq 0$, которую называют прямой пропорциональностью.

Существует также функциональная зависимость, которая характеризуется тем, что с увеличением (уменьшением) одной величины в несколько раз другая величина уменьшается (увеличивается) во столько же раз. Такую зависимость называют **обратной пропорциональностью**.

ПРИМЕР 1

Пусть имеется 100 грн. Обозначим через x грн. цену 1 кг товара, а через y кг — количество этого товара, которое можно приобрести за 100 грн.

Понятно, что зависимость переменной y от переменной x является обратной пропорциональностью: увеличение цены x в несколько раз приводит к уменьшению количества товара y во столько же раз, и наоборот, уменьшение цены приводит к увеличению количества купленного товара.

Этой функциональной зависимости соответствует функция, заданная формулой $y = \frac{100}{x}$.

ПРИМЕР 2

Рассмотрим прямоугольник, площадь которого равна 18 см^2, а стороны равны x см и y см. Тогда

$$y = \frac{18}{x}.$$

Увеличение (уменьшение) знаменателя x в несколько раз приводит к уменьшению (увеличению) величины y во столько же раз, то есть зависимость переменной y от переменной x является обратной пропорциональностью.

В рассмотренных примерах математической моделью реальных ситуаций является функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$.

Определение. **Функцию, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют обратной пропорциональностью.**

Так как в выражении $\frac{k}{x}$ допустимыми значениями переменной x являются все числа, кроме 0, то областью определения функции $y=\frac{k}{x}$ также являются все числа, кроме 0.

Рассмотрим функцию $y=\frac{6}{x}$. В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответственные значения функции.

x	−6	−4	−3	−2	−1,5	−1	1	1,5	2	3	4	6
y	−1	−1,5	−2	−3	−4	−6	6	4	3	2	1,5	1

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых приведены в таблице (рис. 3).

Чем больше точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y=\frac{6}{x}$, нам удастся отметить, тем меньше полученная фигура (рис. 4) будет отличаться от графика функции $y=\frac{6}{x}$.

Среди отмеченных точек не может быть точки, абсцисса которой равна нулю, поскольку число 0 не принадлежит области определения данной функции. Поэтому график функции $y=\frac{6}{x}$ не имеет общих точек с осью ординат.

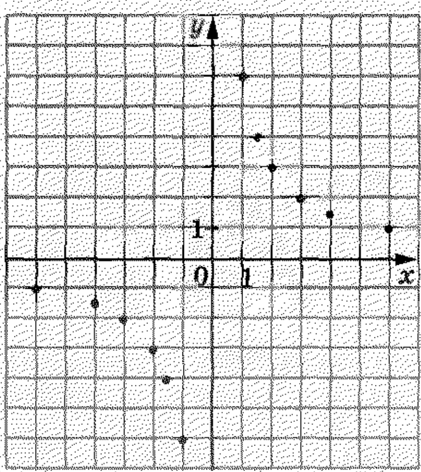


Рис. 3

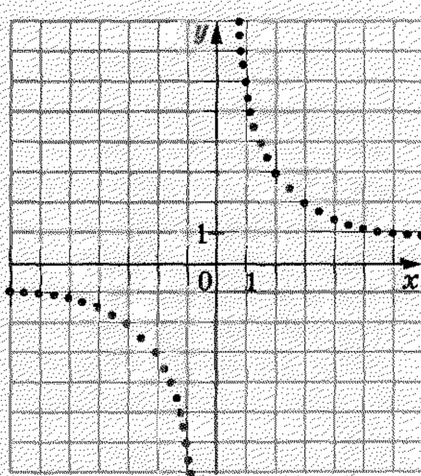


Рис. 4

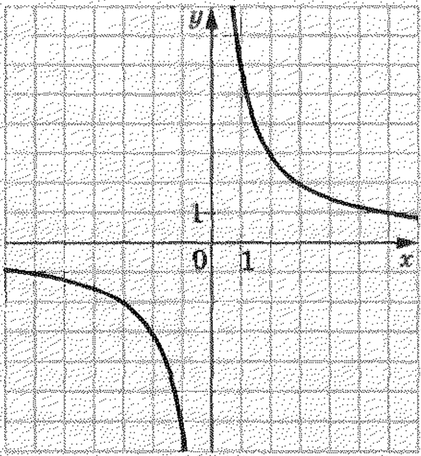


Рис. 5

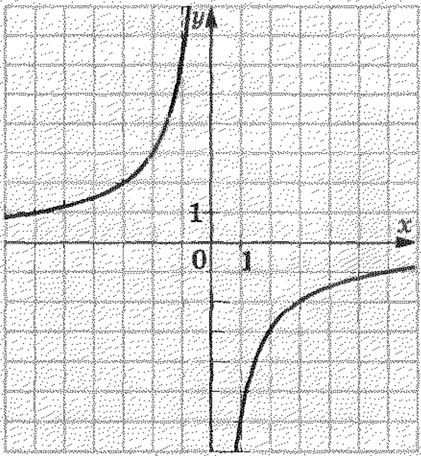


Рис. 6

Кроме того, график не имеет общих точек также и с осью абсцисс. Действительно, уравнение $\frac{6}{x} = 0$ не имеет решений. Следовательно, число 0 не принадлежит области значений данной функции.

Если $x > 0$, то $\frac{6}{x} > 0$, то есть $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$. Следовательно, точки графика данной функции могут находиться только в I и III координатных четвертях.

Заметим, что с увеличением модуля абсциссы расстояние от точки графика функции $y = \frac{6}{x}$ до оси абсцисс уменьшается и может стать как угодно малым, но никогда не будет равным нулю. Действительно, чем больше модуль аргумента, тем меньше модуль соответственного значения функции.

Аналогично можно установить, что с увеличением модуля ординаты расстояние от точек графика до оси ординат уменьшается и может стать как угодно малым, однако никогда не будет равным нулю.

Если бы удалось отметить на координатной плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \frac{6}{x}$, то мы получили бы фигуру, изображенную на рисунке 5.

Фигуру, являющуюся графиком функции $y=\frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют **гиперболой**. Гипербола состоит из двух частей — **ветвей гиперболы**. На рисунке 5 изображена гипербола $y=\frac{6}{x}$.

Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III четвертях, а если $k < 0$ — то во II и IV четвертях.

На рисунке 6 изображен график функции $y=-\frac{6}{x}$.

Заметим, что областью значений функции $y=\frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, являются все числа, кроме 0.

В таблице приведены свойства функции $y=\frac{k}{x}$, изученные в этом пункте.

Область определения	Все числа, кроме 0
Область значений	Все числа, кроме 0
График	Гипербола
Нуль функции (значение аргумента, при котором значение функции равно 0)	Не существует

Покажем, как график функции $y=\frac{k}{x}$ можно использовать при решении уравнений.

ПРИМЕР

Решите уравнение $\frac{4}{x}=x+3$.

Решение

Рассмотрим функции $y=\frac{4}{x}$ и $y=x+3$. Построим в одной системе координат графики этих функций (рис. 7). Они пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны 1 и −4. В точках пересечения графиков функций сами функции принимают одинаковые значения. Следовательно,

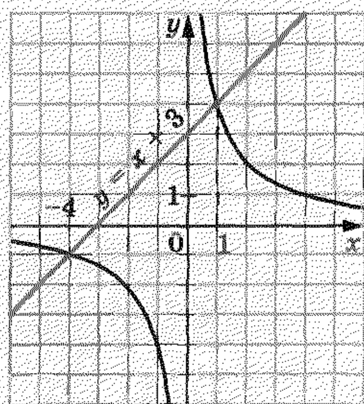


Рис. 7

при найденных абсциссах значения выражений $\frac{4}{x}$ и $x + 3$ равны, то есть числа 1 и −4 являются корнями уравнения $\frac{4}{x} = x + 3$. Проверка это подтверждает.

Описанный метод решения уравнений называют **графическим.** В 7 классе вы ознакомились с графическим методом решения систем уравнений и знаете, что этот метод не всегда дает точные результаты. Поэтому проверка найденных корней является обязательным этапом решения уравнения.

В дальнейшем (п. 21) вы научитесь решать это уравнение, не применяя графиков.

?

1. Объясните, какую зависимость между величинами называют обратной пропорциональностью.
2. Какую функцию называют обратной пропорциональностью?
3. Что является областью определения функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$?
4. Как называют фигуру, которая является графиком обратной пропорциональности?
5. Как называют части, из которых состоит гипербола?
6. Что является областью значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$?
7. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{k}{x}$, если $k > 0$? если $k < 0$?
8. Объясните, в чем заключается графический метод решения уравнений.

312.° Автомобиль проезжает некоторое расстояние за 10 ч. За какое время он проедет это расстояние, если его скорость:

1) увеличится в 2 раза; 2) уменьшится в 1,2 раза?

313.° Длина прямоугольника равна 30 см. Какой станет его длина, если при той же площади ширину прямоугольника:

1) увеличить в 1,5 раза; 2) уменьшить в 3,2 раза?

314.° За некоторую сумму денег купили 40 м ткани. Сколько метров ткани купили бы за ту же сумму денег, если бы ее цена за 1 м:

1) уменьшилась в 2,6 раза; 2) увеличилась в 1,6 раза?

315.° Пешеход прошел 12 км. Заполните таблицу, в первой строке которой указана скорость, а во второй — время движения.

v, км/ч	5		2,4	
t, ч		3		$3\frac{1}{3}$

Задайте формулой зависимость t от v.

316.° Объем прямоугольного параллелепипеда равен 48 см^3. Заполните таблицу, в первой строке которой указана площадь его основания, а во второй — высота.

S, см^2	16		240	
h, см		8		4,8

Задайте формулой зависимость h от S.

317.° Бригада из 7 рабочих с одинаковой производительностью труда может выполнить некоторое производственное задание за 12 дней. Сколько потребуется рабочих с такой же производительностью труда, чтобы выполнить это задание за 4 дня?

318.° Заготовленных кормов хватает для 24 лошадей на 18 дней. На сколько дней хватит этих кормов для 36 лошадей?

319.° Среди данных функций укажите обратные пропорциональности:

1) $y=2x$; 3) $y=\frac{2}{x}$; 5) $y=-\frac{0,8}{x}$; 7) $y=\frac{1}{2x}$;

2) $y=\frac{x}{2}$; 4) $y=-\frac{1}{x}$; 6) $y=\frac{2x}{3}$; 8) $y=\frac{2}{3x}$.

320.° Задана функция $y=\frac{24}{x}$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: –3; 6; 0,2;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 12; –6; 100.

321.° Задана функция $y = -\frac{36}{x}$. Найдите:
1) значение функции, если значение аргумента равно: −4; 0,9; 18;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 6; −0,3; 8.

322.° Постройте график функции $y = -\frac{8}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:
1) значение функции, если значение аргумента равно: 4; −1;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 2; −8;
3) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.

323.° Постройте график функции $y = \frac{10}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:
1) значение функции, если значение аргумента равно: 2; −10;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 5; −2;
3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

324.° Не выполняя построения графика функции $y = \frac{28}{x}$, определите, проходит ли график через точку:
1) $A(-4; -7)$;
2) $B(14; -2)$;
3) $C(0{,}5; 14)$;
4) $D(0{,}2; 140)$.

325.° Не выполняя построения графика функции $y = -\frac{48}{x}$, определите, проходит ли график через точку:
1) $A(-6; -8)$;
2) $B(12; -4)$;
3) $C(0{,}3; -16)$;
4) $D(0{,}4; -120)$.

326.° На рисунке 8 изображен график зависимости времени t движения из пункта A в пункт B от скорости v движения. Пользуясь графиком, найдите:
1) за какое время можно добраться из пункта A в пункт B, если двигаться со скоростью 8 км/ч; 24 км/ч;

2) с какой скоростью нужно двигаться, чтобы добраться из пункта A в пункт B за 3 ч; 4 ч;
3) чему равно расстояние между пунктами A и B.

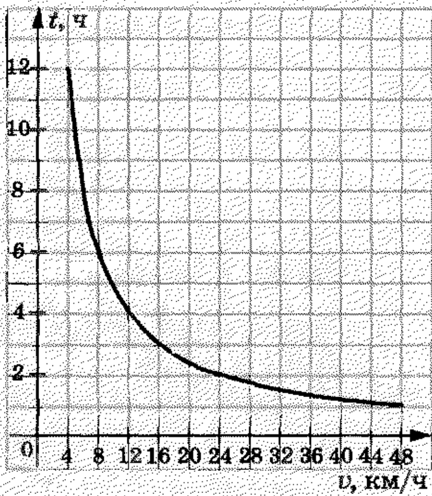


Рис. 8

327.° Проволочный реостат присоединен к блоку питания (рис. 9). Сопротивление реостата R зависит от положения ползунка и может изменяться в пределах от 0 до 6 Ом. Пользуясь графиком зависимости силы тока I от сопротивления R (рис. 10) и учитывая, что напряжение на концах реостата остается неизменным, установите:
1) чему равна сила тока, если сопротивление равно 2 Ом;
2) при каком значении сопротивления сила тока равна 3 А;

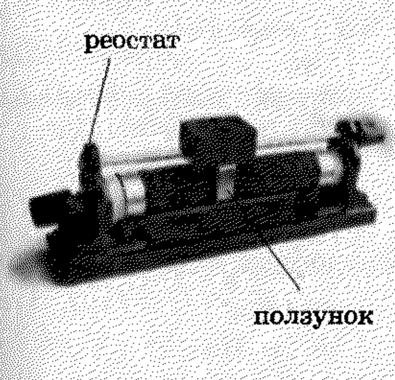


Рис. 9

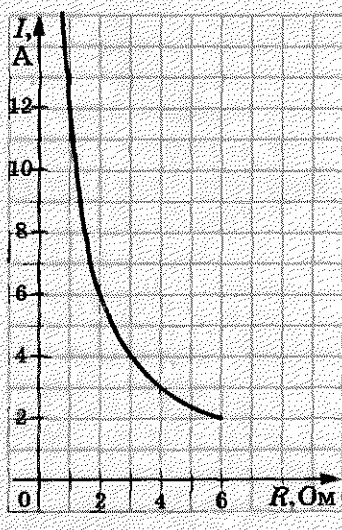


Рис. 10

3) сколько вольт составляет напряжение на концах реостата.

328.* Найдите значение k, при котором график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку:

1) $A(-5; 4)$; 2) $B\left(\frac{1}{6}; -2\right)$; 3) $C(1{,}5; -8)$.

329.* График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(10; 1{,}6)$. Проходит ли график этой функции через точку:

1) $B(-1; -16)$; 2) $C(-2; 8)$?

330.* Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{4}{x}$ и $y = x$ и определите координаты точек их пересечения.

331.* Решите графически уравнение:

1) $\frac{4}{x} = 4 - x$; 2) $x - 2 = \frac{3}{x}$; 3) $x + 2 = -\frac{5}{x}$.

332.* Решите графически уравнение:

1) $\frac{8}{x} = 6 - x$; 2) $2x = \frac{2}{x}$; 3) $\frac{7}{x} = -x$.

333.* Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy = 4, \\ 4y = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$

334.* Решите графически систему уравнений $\begin{cases} xy = 5, \\ y - x = 4. \end{cases}$

335.* Установите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy = -1, \\ x + 3y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -1, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$

336.* Установите графически количество решений системы уравнений $\begin{cases} xy = -8, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$

337.** Найдите координаты всех точек графика функции $y = \frac{64}{x}$, у которых абсцисса и ордината равны.

338.** Найдите координаты всех точек графика функции $y=-\frac{25}{x}$, у которых абсцисса и ордината — противоположные числа.

339.** Постройте график функции $y=\frac{6}{|x|}$.

340.** Постройте график функции:

1) $y=\begin{cases}-\frac{2}{x}, \text{ если } x \leqslant -1,\\ x+3, \text{ если } x>-1;\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}-2x+10, \text{ если } x \leqslant 2,\\ \frac{12}{x}, \text{ если } 2<x<4,\\ 3, \text{ если } x \geqslant 4.\end{cases}$

341.** Постройте график функции:

$$y=\begin{cases}-\frac{4}{x}, \text{ если } x<-2,\\ 2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2,\\ \frac{4}{x}, \text{ если } x>2.\end{cases}$$

342.** Постройте график функции:

1) $y=\frac{9x-18}{x^2-2x}$;

2) $y=\frac{5x^2-5}{x-x^3}$.

343.** Постройте график функции $y=\frac{10x^2-40}{x^3-4x}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

344. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных, содержащихся в выражении, его значение не зависит от значений a и b:

$$\frac{a^2-b^2}{a+3b}\cdot\left(\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}+\frac{b}{a^2-b^2}\right)-\frac{b}{a-b}.$$

345. Решите уравнение:

$$\frac{3}{5x+25}+\frac{1}{2x-10}=\frac{5}{x^2-25}.$$

346. Шкаф уценили на 30 %, а спустя некоторое время цену повысили на 30 %. Как изменилась, увеличилась или уменьшилась, цена шкафа по сравнению с первоначальной и на сколько процентов?

347. (*Задача Сунь-Цзы*[1].) Двое мужчин получили монеты, которые они должны были разделить между собой так, что если бы к монетам, имеющимся у первого из них, прибавить половину монет второго, или к монетам, имеющимся у второго, прибавить $\frac{2}{3}$ монет первого, то в обоих случаях было бы 48 монет. Сколько монет получил каждый из мужчин?

348. Если лыжник будет двигаться со скоростью 10 км/ч, то доберется в пункт назначения на 1 ч позже запланированного времени прибытия, а если будет двигаться со скоростью 15 км/ч — то на 1 ч раньше. С какой скоростью он должен двигаться, чтобы прибыть в пункт назначения в запланированное время?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

349. Каждый из трех учеников написал 100 разных слов. После этого слова, которые встретились не менее чем у двух учеников, вычеркнули. В результате у одного ученика осталось 45 слов, у второго — 68, а у третьего — 54. Докажите, что по крайней мере одно слово написали все трое.

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 3

1. Решите уравнение $\frac{x^2-100}{x-10}=0$.

А) −10; 10; Б) 10; В) −10; Г) корней нет.

2. Решите уравнение $\frac{x-10}{x^2-100}=0$.

А) −10; 10; Б) 10; В) −10; Г) корней нет.

3. Какое из приведенных равенств верно?

А) $10^{-3}=-1000$; В) $(-2)^{-3}=-\frac{1}{8}$;

Б) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2}=-\frac{9}{16}$; Г) $\frac{1}{7^{-2}}=-49$.

[1] *Сунь-Цзы* — китайский математик, который жил в III или IV в.

4. Как записывают в стандартном виде число 42 000?
А) $4{,}2\cdot10^3$; Б) $4{,}2\cdot10^4$; В) $0{,}42\cdot10^5$; Г) $42\cdot10^3$.

5. Как записывают в виде десятичной дроби число $6{,}3\cdot10^{-3}$?
А) 0,63; Б) 0,063; В) 0,0063; Г) 0,00063.

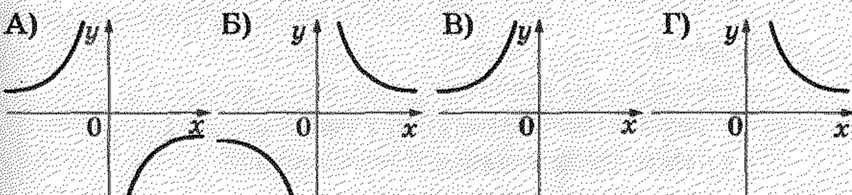
6. Представьте число $\frac{1}{25}$ в виде степени с основанием 5.
А) 5^{-2}; Б) 5^2; В) 5^{-3}; Г) 5^3.

7. Чему равно значение выражения $(1{,}7\cdot10^8)\cdot(6\cdot10^{-3})$?
А) $1{,}02\cdot10^5$; Б) $1{,}02\cdot10^6$; В) $10{,}2\cdot10^6$; Г) $1{,}02\cdot10^7$.

8. Найдите значение выражения $\frac{9^{-2}\cdot3^{-5}}{81\cdot27^{-3}}$.
А) 81; Б) $\frac{1}{81}$; В) 27; Г) $\frac{1}{27}$.

9. Какая из данных функций не является обратной пропорциональностью?
А) $y=\frac{3}{x}$; Б) $y=-\frac{3}{x}$; В) $y=\frac{3}{2x}$; Г) $y=\frac{3x}{2}$.

10. На одном из рисунков изображен график функции $y=-\frac{4}{x}$. Укажите этот рисунок.



11. При каком значении k график функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $A\,(-3;\ 0{,}6)$?
А) $-1{,}8$; Б) $-0{,}2$; В) $-2{,}4$; Г) $-3{,}6$.

12. Решите уравнение $\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x+1}{4-x}=\frac{4x^2+8}{x^2-16}$.
А) 0; 4; Б) -4; 0; В) -4; Г) 0.

ИТОГИ

В этом параграфе:

- были введены следующие понятия:
  - рациональная дробь;
  - дробное выражение;
  - рациональное выражение;
  - допустимые значения переменных;
  - рациональное уравнение;
  - равносильные уравнения;
  - степень с целым показателем;
  - стандартный вид числа;
  - обратная пропорциональность;
- вы научились:
  - сокращать рациональную дробь;
  - выполнять действия с рациональными дробями;
  - решать некоторые виды рациональных уравнений;
  - возводить числа в нулевую степень и степень с целым отрицательным показателем;
- вы изучили:
  - основное свойство дроби;
  - свойства равносильных уравнений;
  - свойства степени с целым показателем;
  - некоторые свойства функции $y = \frac{k}{x}$;
- вы узнали, что графиком функции $y = \frac{k}{x}$ является фигура, которую называют гиперболой;
- вы познакомились с графическим методом решения уравнений.

§2. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

- Вы узнаете о некоторых свойствах функции $y = x^2$.
- Ознакомитесь с новым действием «извлечение квадратного корня». Вы убедитесь, что для изучения окружающего мира рациональных чисел недостаточно.
- Вы изучите свойства нового математического объекта «арифметический квадратный корень». Научитесь упрощать выражения, содержащие квадратные корни.

11. Функция $y = x^2$ и ее график

Обозначим через y площадь квадрата со стороной x. Тогда $y = x^2$.

Если изменять сторону x квадрата, то соответственно будет изменяться и его площадь y.

Понятно, что каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y. Следовательно, зависимость переменной y от переменной x является функциональной, а формула $y = x^2$ задает функцию.

Рассмотрим функцию $y = x^2$, областью определения которой являются все числа. В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции.

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых приведены в таблице (рис. 11).

Чем больше точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = x^2$, будет отмечено, тем меньше полученная фигура (рис. 12) будет отличаться от графика функции $y = x^2$.

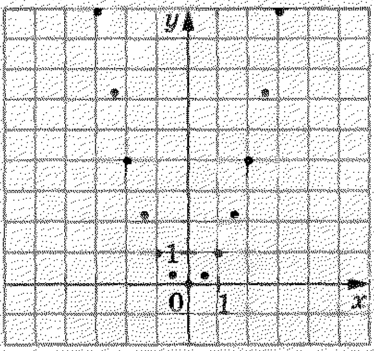


Рис. 11

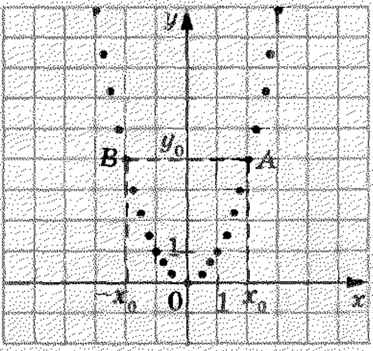


Рис. 12

Пара чисел (0; 0) является решением уравнения $y = x^2$. Следовательно, график данной функции проходит через начало координат. Так как $y = x^2$ и $x^2 \geqslant 0$, то $y \geqslant 0$, то есть среди отмеченных точек не может быть таких, которые имеют отрицательные ординаты.

Область значений функции $y = x^2$ — все неотрицательные числа.

Поскольку $x^2 = (-x)^2$, то можно сделать вывод: если точка A (x_0, y_0) принадлежит графику функции, то и точка B $(-x_0, y_0)$ также принадлежит графику (рис. 12).

Если бы удалось отметить на координатной плоскости все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = x^2$, то получилась бы фигура, которую называют **параболой** (рис. 13).

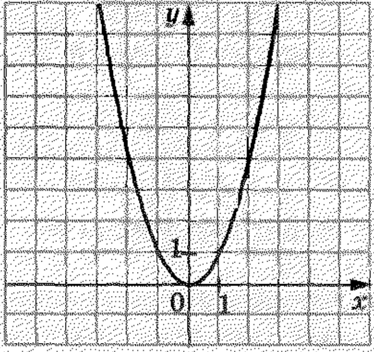


Рис. 13

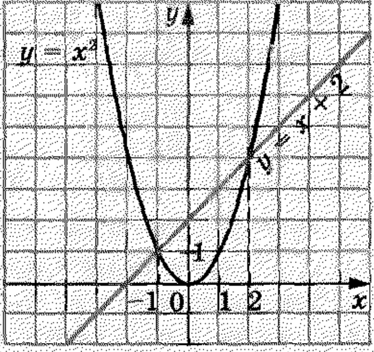


Рис. 14

Точка с координатами (0; 0) делит параболу на две равные части, каждую из которых называют **ветвью параболы**, а саму точку — **вершиной параболы**.

В таблице приведены свойства функции $y = x^2$, изученные в этом пункте.

Область определения	Все числа
Область значений	Все неотрицательные числа
График	Парабола
Нуль функции (значение аргумента, при котором значение функции равно 0)	$x = 0$

ПРИМЕР

Решите графически уравнение $x^2 = x + 2$.

Решение

В одной системе координат построим графики функций $y = x^2$ и $y = x + 2$ (рис. 14). Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны 2 и -1. Проверка подтверждает, что найденные значения являются корнями данного уравнения.

?

1. Что является областью определения функции $y = x^2$?
2. Что является областью значений функции $y = x^2$?
3. Какая фигура является графиком функции $y = x^2$?
4. При каком значении аргумента значение функции $y = x^2$ равно нулю?
5. Сравните значения функции $y = x^2$ при противоположных значениях аргумента.

350.° Функция задана формулой $y = x^2$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: -6; 0,8; $-1,2$; 150;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 49; 0; 2500; 0,04.

351.° Не выполняя построения графика функции $y = x^2$, определите, проходит ли этот график через точку:

1) $A\ (-8;\ 64)$;
2) $B\ (-9;\ -81)$;
3) $C\ (0{,}5;\ 2{,}5)$;
4) $D\ (0{,}1;\ 0{,}01)$.

352.• Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = 4x - 4$. Постройте графики данных функций и отметьте найденные точки.

353.• Решите графически уравнение:

1) $x^2 = x - 1$; 2) $x^2 - 2x - 3 = 0$; 3) $x^2 = \frac{8}{x}$.

354.• Решите графически уравнение:

1) $x^2 = -4x - 3$; 2) $x^2 - 3x + 5 = 0$; 3) $x^2 + \frac{1}{x} = 0$.

355.• Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -2; \end{cases}$
3) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y + 6 = 0; \end{cases}$
4) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10. \end{cases}$

356.• Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y = x^2, \\ x - 3y = -3. \end{cases}$

357.•• Функция f задана следующим способом:

$$f(x) = \begin{cases} 4, \text{ если } x \leqslant -2, \\ x^2, \text{ если } -2 < x < 1, \\ 2x - 1, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

1) Найдите $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(0{,}5)$.
2) Постройте график данной функции.

358.•• Дана функция $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ если } x \leqslant -1, \\ x^2, \text{ если } -1 < x < 2, \\ 4, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$

1) Найдите $f(-4)$, $f(-0{,}3)$, $f(1{,}9)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(2)$.

2) Постройте график данной функции.

359.** Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x + 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

1) Найдите $f(-7)$, $f(0)$, $f(2)$.

2) Постройте график данной функции.

360.** Дана функция $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{6}{x}, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x^2, & \text{если } x > -1. \end{cases}$

1) Найдите $f(-12)$, $f(-1)$, $f(-0{,}9)$, $f(3)$, $f(0)$.

2) Постройте график данной функции.

361.** Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x + 1}$; 2) $y = \dfrac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 4}$.

362.** Постройте график функции $y = \dfrac{x^3}{x}$.

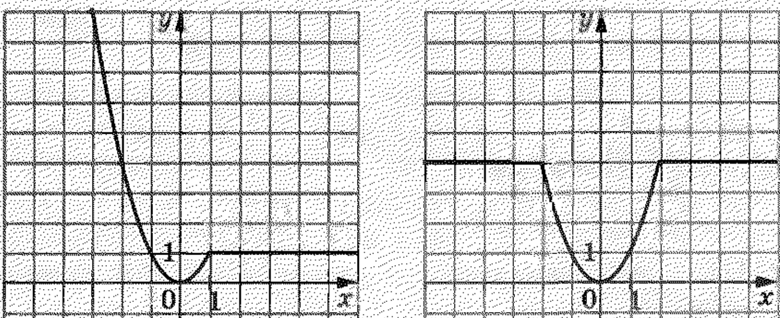
363.** Найдите область определения, область значений и нули функции $y = -x^2$. Постройте график этой функции.

364.* Постройте график уравнения:

1) $\dfrac{y - x^2}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = 0$; 2) $\dfrac{y - x^2}{y - x} = 0$.

365.* Постройте график уравнения $\dfrac{x^2 - y}{(x + 2)^2 + (y - 4)^2} = 0$.

366.* Задайте функцию, график которой изображен на рисунке 15, таким же способом, каким задана функция в задаче 357.



а) *б)*

Рис. 15

367.* Задайте функцию, график которой изображен на рисунке 16, таким же способом, каким задана функция в задаче 357.

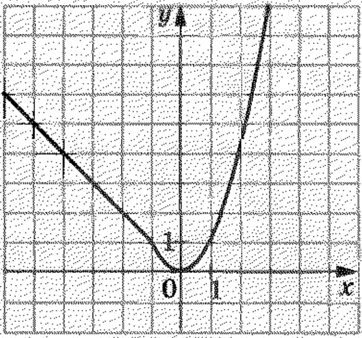


Рис. 16

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

368. Докажите тождество:

$$\frac{(a+b)^2}{a-b}:\left(\frac{a}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a}{a+b}\right)=a+b.$$

369. Решите уравнение:

$$\frac{6}{x-2}-\frac{x+3}{x}=\frac{x+6}{x^2-2x}.$$

370. Докажите, что значение выражения 27^6-9^7 кратно 48.

371. Из двух пунктов, расстояние между которыми 30 км, одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода и встретились через 3 ч 45 мин. Если бы первый из них вышел на 2 ч раньше второго, то они встретились бы через 4,5 ч после выхода первого. Найдите скорость каждого пешехода.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

372. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна:
1) 25 см²; 2) 1600 дм²; 3) 0,04 м².

373. Решите уравнение:

1) $x^2=9$; 2) $x^2=\frac{36}{49}$.

374. При каких значениях a уравнение $x^2=a$ не имеет корней?

375. Постройте графики функций $y=x^2$ и $y=1$ и найдите координаты их общих точек.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

376. Натуральные числа x, y, z такие, что $x + y$, $y + z$, $x + z$ — простые числа. Докажите, что среди чисел x, y, z есть по крайней мере два числа, равных 1.

12. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

Рассмотрим квадрат, площадь которого равна 49 см^2. Пусть длина его стороны равна x см. Тогда уравнение $x^2 = 49$ можно рассматривать как математическую модель задачи о нахождении стороны квадрата, площадь которого равна 49 квадратным единицам.

Корнями этого уравнения являются числа 7 и −7, квадраты которых равны 49. Говорят, что числа 7 и −7 — **квадратные корни** из числа 49.

Определение. **Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a.**

Приведем несколько примеров.

Квадратными корнями из числа 9 являются числа 3 и −3. Действительно, $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$.

Квадратные корни из числа $\frac{25}{4}$ — числа $\frac{5}{2}$ и $-\frac{5}{2}$. Действительно, $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

Квадратным корнем из числа 0 является только число 0.

Поскольку не существует числа, квадрат которого равен отрицательному числу, то квадратный корень из отрицательного числа не существует.

Положительный корень уравнения $x^2 = 49$, число 7, является ответом к задаче о нахождении стороны квадрата. Это число называют **арифметическим квадратным корнем** из числа 49.

Определение. **Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a.**

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{}$ называют **знаком квадратного корня** или **радикалом** (от латинского слова *radix* — корень).

Запись $\sqrt{a}$ читают: «квадратный корень из a», опуская при чтении слово «арифметический».

Выражение, которое стоит под знаком радикала, называют **подкоренным выражением**. Например, в записи $\sqrt{b-5}$ двучлен $b-5$ является подкоренным выражением. Из определения арифметического квадратного корня следует, что *подкоренное выражение может принимать только неотрицательные значения*.

Действие нахождения арифметического квадратного корня из числа называют **извлечением квадратного корня**.

Рассмотрим несколько примеров:

$\sqrt{9} = 3$, так как $3 \geqslant 0$ и $3^2 = 9$;

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, поскольку $\frac{5}{2} \geqslant 0$ и $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$;

$\sqrt{0} = 0$, так как $0 \geqslant 0$ и $0^2 = 0$.

Вообще, ***если*** $b \geqslant 0$ ***и*** $b^2 = a$, ***то*** $\sqrt{a} = b$.

Для любого неотрицательного числа a справедливо, что $\sqrt{a} \geqslant 0$ ***и*** $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Например, $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$, $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, $\left(\sqrt{5,2}\right)^2 = 5,2$.

Подчеркнем, что к понятию квадратного корня мы пришли, решая уравнение вида $x^2 = a$, где $a \geqslant 0$. Корни этого уравнения — числа, каждое из которых является квадратным корнем из числа a.

Нахождение корней уравнения $x^2 = a$ проиллюстрируем, решив графически уравнение $x^2 = 4$.

В одной системе координат построим графики функций $y = x^2$ и $y = 4$ (рис. 17). Точки пересечения этих графиков имеют абсциссы 2 и -2, которые и являются корнями данного уравнения.

Понятно, что уравнение $x^2 = a$ при $a < 0$ не имеет корней. Это подтверждает и графическая интерпретация: графики функций $y = x^2$ и $y = a$ при $a < 0$ общих точек не имеют (рис. 18).

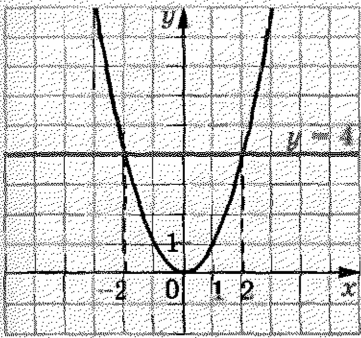


Рис. 17

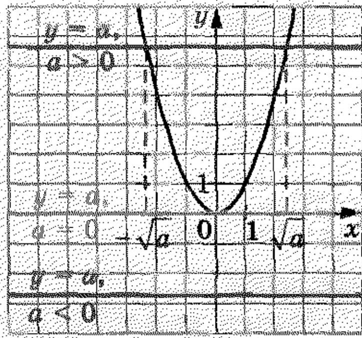


Рис. 18

При $a = 0$ уравнение $x^2 = a$ имеет единственный корень $x = 0$.

Графический метод позволяет сделать следующий вывод: если $a > 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет два корня. Действительно, парабола $y = x^2$ и прямая $y = a$, где $a > 0$, имеют две общие точки (рис. 18). При этом корнями уравнения $x^2 = a$ являются числа $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$. Действительно, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Например, уравнение $x^2 = 5$ имеет два корня: $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$.

ПРИМЕР 1

Найдите значение выражения $\left(-8\sqrt{2}\right)^2$.

Решение

Применив правило возведения произведения в степень и тождество $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, получаем:

$$\left(-8\sqrt{2}\right)^2 = (-8)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 64 \cdot 2 = 128.$$

ПРИМЕР 2

Решите уравнение: 1) $\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$; 2) $\sqrt{1 + \sqrt{x + 2}} = 2$.

Решение

1) Имеем: $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{x} = 6$. Тогда $x = 6^2$; $x = 36$.

2) Имеем: $\sqrt{1 + \sqrt{x + 2}} = 2$; $1 + \sqrt{x + 2} = 2^2$; $\sqrt{x + 2} = 3$; $x + 2 = 3^2$; $x = 7$.

ПРИМЕР 3

Решите уравнение $(x-5)^2=16$.

Решение

$$(x-5)^2=16;$$

$$x-5=-4 \text{ или } x-5=4;$$

$$x=1 \text{ или } x=9.$$

Ответ: 1; 9.

ПРИМЕР 4

Решите уравнение $(3x-1)^2=2$.

Решение

$$(3x-1)^2=2;$$

$$3x-1=-\sqrt{2} \text{ или } 3x-1=\sqrt{2};$$

$$3x=1-\sqrt{2} \text{ или } 3x=1+\sqrt{2};$$

$$x=\frac{1-\sqrt{2}}{3} \text{ или } x=\frac{1+\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

ПРИМЕР 5

При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{-5x}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{x}-2}$?

Решение

1) Выражение $\sqrt{-5x}$ имеет смысл, если подкоренное выражение $-5x$ принимает неотрицательные значения. Подкоренное выражение является произведением двух множителей, один из которых — отрицательное число. Следовательно, это произведение будет принимать неотрицательные значения, если другой множитель x будет принимать неположительные значения.

Ответ: при $x \leqslant 0$.

2) Данное выражение имеет смысл, если выполняются два условия: имеет смысл выражение $\sqrt{x}$ и знаменатель $\sqrt{x}-2$ отличен от нуля. Следовательно, должны одновременно выполняться два условия: $x \geqslant 0$ и $\sqrt{x}-2 \neq 0$. Отсюда $x \geqslant 0$ и $x \neq 4$.

Ответ: при $x \geqslant 0$ и $x \neq 4$.

ПРИМЕР 6

Решите уравнение: 1) $\sqrt{-x}+\sqrt{x-2}=2$;

2) $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x-2}=0$; 3) $(x+2)\sqrt{x-2}=0$.

Решение

1) Левая часть данного уравнения имеет смысл, если подкоренные выражения $-x$ и $x-2$ одновременно принимают неотрицательные значения. Имеем: $-x \geqslant 0$, тогда $x \leqslant 0$. Понятно, что при $x \leqslant 0$ выражение $x-2$ принимает только отрицательные значения. Следовательно, левая часть данного уравнения не имеет смысла.

Ответ: корней нет.

2) Левая часть данного уравнения является суммой двух слагаемых, каждое из которых может принимать только неотрицательные значения. Их сумма будет равна нулю, если каждое из слагаемых равно нулю. Следовательно, одновременно должны выполняться два условия: $\sqrt{x^2-2x}=0$ и $\sqrt{x-2}=0$. Это значит, что надо найти общие корни полученных уравнений. В таких случаях говорят, что надо решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x}=0,\\ \sqrt{x-2}=0.\end{cases}$$

Имеем: $\begin{cases}x^2-2x=0,\\ x-2=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x(x-2)=0,\\ x=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=0 \text{ или } x=2,\\ x=2.\end{cases}$

Решением последней системы является число 2.

Ответ: 2.

3) Используя условие равенства произведения нулю, получаем:

$$x+2=0 \text{ или } \sqrt{x-2}=0;$$
$$x=-2 \text{ или } x=2.$$

Однако при $x=-2$ выражение $\sqrt{x-2}$ не имеет смысла. Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень $x=2$.

Ответ: 2.

1. Что называют квадратным корнем из числа a?
2. Что называют арифметическим квадратным корнем из числа a?
3. Как обозначают арифметический квадратный корень из числа a?
4. Как называют знак $\sqrt{\ }$?
5. Как читают запись $\sqrt{a}$?
6. Как называют выражение, стоящее под знаком радикала?
7. Какие значения может принимать подкоренное выражение?
8. Как называют действие нахождения арифметического квадратного корня из числа?
9. Чему равно значение выражения $(\sqrt{a})^2$ для любого неотрицательного числа?
10. Сколько корней имеет уравнение $x^2 = a$ при $a > 0$? Чему они равны?
11. Имеет ли корни уравнение $x^2 = a$ при $a = 0$? при $a < 0$?

377.° **Чему равен квадратный корень из числа 16? из числа 1? из числа 0? Чему равен арифметический квадратный корень из каждого из этих чисел?**

378.° **Верно ли равенство (ответ обоснуйте):**

1) $\sqrt{25} = 5$; 3) $\sqrt{36} = -6$; 5) $\sqrt{0,81} = 0,9$;

2) $\sqrt{0} = 0$; 4) $\sqrt{0,4} = 0,2$; 6) $\sqrt{10} = 100$?

379.° **Найдите значение арифметического квадратного корня:**

1) $\sqrt{9}$; 5) $\sqrt{0,25}$; 9) $\sqrt{400}$; 13) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$;

2) $\sqrt{49}$; 6) $\sqrt{0,01}$; 10) $\sqrt{3600}$; 14) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$;

3) $\sqrt{100}$; 7) $\sqrt{1,21}$; 11) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; 15) $\sqrt{0,0004}$;

4) $\sqrt{225}$; 8) $\sqrt{1,96}$; 12) $\sqrt{\frac{4}{9}}$; 16) $\sqrt{0,000025}$.

380.° **Найдите значение арифметического квадратного корня:**

1) $\sqrt{36}$; 4) $\sqrt{0,04}$; 7) $\sqrt{2500}$; 10) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$;

2) $\sqrt{64}$; 5) $\sqrt{0,49}$; 8) $\sqrt{10\,000}$; 11) $\sqrt{0,0009}$;

3) $\sqrt{144}$; 6) $\sqrt{1,69}$; 9) $\sqrt{\frac{16}{121}}$; 12) $\sqrt{0,0196}$.

381.° Имеет ли смысл выражение:

1) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{-2}$; 5) $\left(\sqrt{-2}\right)^2$?

2) $-\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{(-2)^2}$;

382.° Арифметический квадратный корень из какого числа равен:

1) 4; 2) 0; 3) 0,8; 4) $2\frac{1}{4}$; 5) 1,6; 6) −9?

383.° Пользуясь таблицей квадратов натуральных чисел, приведенной на форзаце, найдите:

1) $\sqrt{484}$; 4) $\sqrt{5929}$; 7) $\sqrt{68,89}$;

2) $\sqrt{729}$; 5) $\sqrt{5,76}$; 8) $\sqrt{67\,600}$;

3) $\sqrt{1156}$; 6) $\sqrt{14,44}$; 9) $\sqrt{384\,400}$.

384.° Найдите:

1) $\sqrt{841}$; 3) $\sqrt{9,61}$; 5) $\sqrt{72,25}$;

2) $\sqrt{1296}$; 4) $\sqrt{10,24}$; 6) $\sqrt{672\,400}$.

385.° Пользуясь микрокалькулятором, найдите значение квадратного корня (результат округлите до сотых):

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{34}$; 4) $\sqrt{1,8}$; 5) $\sqrt{2,439}$.

386.° Пользуясь микрокалькулятором, найдите значение квадратного корня (результат округлите до сотых):

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5,1}$; 3) $\sqrt{40}$; 4) $\sqrt{12,56}$.

387.° Найдите значение выражения:

1) $\left(\sqrt{7}\right)^2$; 4) $-\left(\sqrt{10}\right)^2$; 7) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{4,2}\right)^2$; 5) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; 8) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)^2$;

3) $\left(-\sqrt{11}\right)^2$; 6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$; 9) $\left(-0,3\sqrt{2}\right)^2$.

388.° Вычислите:

1) $\left(\sqrt{6}\right)^2$; 3) $\left(3\sqrt{2}\right)^2$; 5) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$;

2) $\left(-\sqrt{21}\right)^2$; 4) $\left(-4\sqrt{5}\right)^2$; 6) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{26}\right)^2$.

389.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{16+9}$;
2) $\sqrt{16}+\sqrt{9}$;
3) $\sqrt{36}-\sqrt{49}$;
4) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}$;
5) $5\sqrt{4}-\sqrt{25}$;
6) $\sqrt{0,81}+\sqrt{0,01}$;
7) $\frac{1}{3}\sqrt{0,09}-2$;
8) $-2\sqrt{0,16}+0,7$;
9) $\left(\sqrt{13}\right)^2-3\cdot\left(\sqrt{8}\right)^2$;
10) $\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{18}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$;
11) $50\cdot\left(-\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)^2$;
12) $\sqrt{4\cdot5^2-6^2}$.

390.° Вычислите значение выражения:

1) $\sqrt{3+\sqrt{36}}$;
2) $\sqrt{72-\sqrt{64}}$;
3) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{225}$;
4) $\frac{1}{3}\sqrt{900}+0,2\sqrt{1600}$;
5) $\left(2\sqrt{6}\right)^2-3\left(\sqrt{21}\right)^2$;
6) $\sqrt{10^2-4\cdot3^2}$.

391.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{12+a}$, если $a=0,25$;
2) $\sqrt{7-3b}$, если $b=2$;
3) $\sqrt{2a-b}$, если $a=34$, $b=19$.

392.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{27+m}$, если $m=54$;
2) $\sqrt{m-3n}$, если $m=0,13$, $n=-0,04$.

393.° Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}=9$;
2) $\sqrt{x}=\frac{1}{4}$;
3) $\sqrt{x}-0,2=0$;
4) $\sqrt{x}+7=0$.

394.° Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}=20$; 2) $\sqrt{x}=-16$; 3) $\sqrt{x}-\frac{2}{3}=0$.

395.° Решите уравнение:

1) $x^2=25$; 2) $x^2=0,49$; 3) $x^2=3$; 4) $x^2=-25$.

396.° Решите уравнение:

1) $x^2=100$; 2) $x^2=0,81$; 3) $x^2=7$; 4) $x^2=3,6$.

397.* Найдите значение выражения:

1) $-0,06 \cdot \sqrt{10\ 000} + \dfrac{8}{\sqrt{256}} - 2,5\sqrt{3,24}$;

2) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{6,25} + \sqrt{2^3 + 17}$;

3) $\sqrt{1\frac{11}{25}} + 3\sqrt{7\frac{1}{9}} - 0,6\sqrt{3025}$;

4) $\left(\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2 + \sqrt{26^2 - 24^2}$;

5) $\left(3\sqrt{8}\right)^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2 - 2\left(\sqrt{24}\right)^2$;

6) $\sqrt{144} : \sqrt{0,04} - \sqrt{2,56} \cdot \sqrt{2500}$.

398.* Найдите значение выражения:

1) $0,15\sqrt{3600} - 0,18\sqrt{400} + \left(10\sqrt{0,08}\right)^2$;

2) $\dfrac{95}{\sqrt{361}} - \dfrac{13}{14}\sqrt{1\frac{27}{169}} + \sqrt{8^2 + 15^2}$;

3) $\left(-8\sqrt{\frac{1}{4}} + \dfrac{\sqrt{1,44}}{3} \cdot \sqrt{12,25}\right) : \left(0,1\sqrt{13}\right)^2$.

399.* При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{x}$;
2) $\sqrt{-x}$;
3) $\sqrt{x^2}$;
4) $\sqrt{-x^2}$;
5) $\sqrt{x-8}$;
6) $\sqrt{8-x}$;
7) $\sqrt{x^2+8}$;
8) $\sqrt{(x-8)^2}$;
9) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$;
10) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$;
11) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$;
12) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}$;
13) $\dfrac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}}$;
14) $\sqrt{|x|}$;
15) $\sqrt{-|x|}$;
16) $\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$?

400.* При каких значениях y имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{2y}$;
2) $\sqrt{-3y}$;
3) $\sqrt{y^3}$;
4) $\sqrt{-y^3}$;
5) $\sqrt{-y^4}$;
6) $\dfrac{1}{\sqrt{y}}$;
7) $\dfrac{1}{\sqrt{y}-1}$;
8) $\dfrac{1}{\sqrt{y}+1}$?

401.* Решите уравнение:

1) $\sqrt{5x} - 4 = 0$; 2) $\sqrt{5x-4} = 0$; 3) $\sqrt{5x-4} = 6$;

4) $\frac{42}{\sqrt{x}} = 6$; 5) $\frac{18}{\sqrt{x+3}} = 9$; 6) $\sqrt{x^2 - 36} = 8$.

402.* Решите уравнение:

1) $\frac{1}{3}\sqrt{x} - 2 = 0$; 3) $\frac{4}{\sqrt{x-5}} = 6$;

2) $\sqrt{2x+3} = 11$; 4) $\sqrt{130 - x^2} = 9$.

403.* Решите уравнение:

1) $(x+6)^2 = 0$; 3) $(x+6)^2 = 3$;

2) $(x+6)^2 = 9$; 4) $(7x+6)^2 = 5$.

404.* Решите уравнение:

1) $(2x-3)^2 = 25$; 2) $(x-3)^2 = 7$; 3) $(2x-3)^2 = 7$.

405.** Решите уравнение:

1) $\sqrt{3 + \sqrt{2 + x}} = 4$;

2) $\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{x}}} = 3$;

3) $\sqrt{4 - \sqrt{10 + \sqrt{x}}} = 2$.

406.** Решите уравнение:

1) $\sqrt{17 + \sqrt{\sqrt{x} - 6}} = 5$; 2) $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} = 1$.

407.** При каких значениях a и b имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{ab}$; 2) $\sqrt{-ab}$; 3) $\sqrt{ab^2}$; 4) $\sqrt{a^2b^2}$; 5) $\sqrt{-a^2b}$?

408.** Можно ли утверждать, что при любом значении x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$; 2) $\sqrt{x^2 - 4x + 5}$?

409.** Докажите, что не существует такого значения x, при котором имеет смысл выражение $\sqrt{-x^2 + 6x - 12}$.

410.** Какое из данных выражений имеет смысл при любом значении x:

1) $\sqrt{x^2 + 8x + 15}$; 2) $\sqrt{x^2 - 10x + 27}$?

411.** Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} = -x$; 4) $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 4} = 0$;

2) $\sqrt{x} + \sqrt{x - 1} = 0$; 5) $(x-1)\sqrt{x+1} = 0$;

3) $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x - 1} = 0$; 6) $(x+1)\sqrt{x-1} = 0$.

412.** Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$;
3) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-1}=0$;
2) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=1$;
4) $(x-2)\sqrt{x-3}=0$.

413.** При каких значениях a уравнение $x^2=a+1$:

1) имеет два корня;
3) не имеет корней?
2) имеет один корень;

414.** Постройте график функции:

1) $y=\sqrt{-x^2}$;
3) $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$.
2) $y=\sqrt{-x^2-4x-4}+2$;

415.** Постройте график функции $y=\sqrt{2x-1-x^2}-1$.

416.* Для каждого значения a решите уравнение:

1) $a\sqrt{x-1}=0$;
3) $a\sqrt{x-1}=a$;
2) $\sqrt{(a-1)x}=0$;
4) $\sqrt{x-2}=a$.

417.* При каких значениях a уравнение $\left(\sqrt{x}-1\right)(x-a)=0$ имеет только один корень?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

418. Дома на улице пронумерованы подряд числами от 1 до 24. Сколько раз цифра 1 встречается в нумерации домов?

419. Упростите выражение

$$\left(\frac{a}{a^2-25}+\frac{5}{5-a}+\frac{1}{a+5}\right):\left(\frac{28-a^2}{a+5}+a-5\right).$$

420. Рабочий получил 470 грн. аванса купюрами по 5 грн. и по 20 грн. Сколько было купюр каждого достоинства, если всего была 31 купюра?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

421. Сравните:

1) 2,4578 и 2,4569;
2) –1,9806 и –1,981.

422. Прочитайте периодическую дробь и назовите ее период:

1) 0,(5);
2) 1,(32);
3) 8,4(65);
4) 3,424242....

423. Преобразуйте в десятичную дробь:

1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{7}{16}$; 4) $\frac{97}{80}$; 5) $\frac{42}{15}$.

424. Преобразуйте обыкновенную дробь в бесконечную периодическую десятичную дробь и определите ее период:

1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{11}{15}$; 3) $\frac{9}{11}$; 4) $\frac{31}{33}$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

425. Найдите все трехзначные натуральные числа n такие, чтобы сумма цифр числа n была в 11 раз меньше самого числа n.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Растут ли в огороде радикалы?

В Древней Греции действие извлечения корня отождествляли с поиском стороны квадрата по его площади, а сам квадратный корень называли «стороной».

В Древней Индии слово «мула» означало «начало», «основание», «корень дерева». Это слово начали применять и к стороне квадрата, исходя, возможно, из такой ассоциации: из стороны квадрата, как из корня, вырастает сам квадрат. Возможно, поэтому в латинском языке понятия «сторона» и «корень» выражаются одним и тем же словом — *radix*. От этого слова происходит термин «радикал».

Слово *radix* можно также перевести как «редис», то есть растение, съедобной частью которого является корень.

Рене Декарт

В XIII–XV вв. европейские математики, сокращая слово *radix*, обозначали квадратный корень знаками R, R, R^2. Например, запись $\sqrt{7}$ имела следующий вид: R^27.

В XVI в. для обозначения действия извлечения корня стали использовать знак $\sqrt{}$. Происхождение этого символа, по-видимому, связано с рукописной латинской буквой r.

В XVII в. выдающийся французский математик Рене Декарт, соединив знак $\surd$ с горизонтальной черточкой, получил символ $\sqrt{\ }$, который мы используем сегодня.

13. Числовые множества

Натуральные числа — это первые числа, которыми начали пользоваться люди. С ними вы ознакомились, когда учились считать предметы. Все натуральные числа образуют **множество натуральных чисел**, которое обозначают буквой N.

Тот факт, что некоторое число m является натуральным, то есть принадлежит множеству натуральных чисел, записывают так: $m \in N$ (читают: «эм принадлежит эн»). Например, $5 \in N$. Число 0 не является натуральным. Этот факт записывают так: $0 \notin N$ (читают: «нуль не принадлежит эн»).

Практические потребности людей привели к возникновению дробных чисел. Позже появилась необходимость рассматривать величины, для характеристики которых положительных чисел оказалось недостаточно. Так возникли отрицательные числа.

Все натуральные числа, противоположные им числа и число нуль образуют **множество целых чисел**, которое обозначают буквой Z.

Например, $-2 \in Z$, $0 \in Z$, $5 \in Z$.

Множество натуральных чисел является частью множества целых чисел. Говорят, что множество N является **подмножеством** множества Z, и записывают таким образом: $N \subset Z$ (читают: «эн подмножество зет»).

Целые и дробные (как положительные, так и отрицательные) числа образуют **множество рациональных чисел**, которое обозначают буквой Q. Например, $\frac{2}{3} \in Q$, $-0{,}2 \in Q$, $0 \in Q$, $-3 \in Q$, $15 \in Q$.

Понятно, что $Z \subset Q$. Схема, изображенная на рисунке 19, показывает, как связаны между собой числовые множества N, Z и Q.

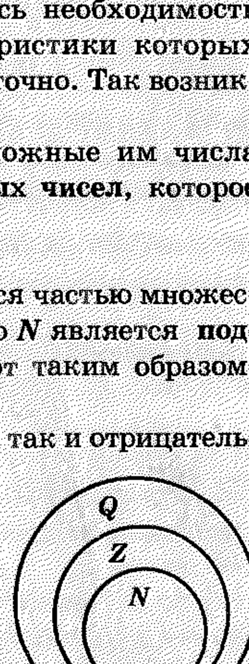


Рис. 19

Каждое рациональное число можно представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное. Например, $5=\frac{5}{1}$; $-3=\frac{-3}{1}$; $0{,}2=\frac{1}{5}$; $0=\frac{0}{7}$; $5{,}3=\frac{53}{10}$.

С возможностью такого представления связано название «рациональное число»: одним из значений латинского слова *ratio* является «отношение».

В 6 классе вы узнали, что каждое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Для дроби $\frac{m}{n}$ такую запись можно получить, выполнив деление числа m на число n «уголком».

Например, $\frac{5}{8}=0{,}625$; $\frac{5}{11}=0{,}454545...$.

Число $\frac{5}{8}$ записано в виде конечной десятичной дроби, а число $\frac{5}{11}$ — в виде бесконечной периодической десятичной дроби. В записи десятичной дроби 0,454545... цифры 4 и 5 периодически повторяются. Группу повторяющихся цифр называют **периодом дроби** и при записи заключают в круглые скобки: 0,(45), то есть $\frac{5}{11}=0{,}(45)$.

Заметим, что любую конечную десятичную дробь и любое целое число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Например,

$$0{,}625 = 0{,}6250000... = 0{,}625(0);$$
$$2 = 2{,}000... = 2{,}(0).$$

Следовательно, ***каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.***

Справедливо и следующее утверждение: ***каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является записью некоторого рационального числа.***

В 9 классе вы научитесь записывать бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби.

Сумма и произведение двух натуральных чисел — натуральные числа. Однако разность имеет такое свойство не всегда. Например, $(5 - 7) \notin \boldsymbol{N}$.

Сумма, разность, произведение двух целых чисел — целые числа. Однако частному такое свойство не присуще. Например, $\frac{5}{7} \notin \boldsymbol{Z}$.

Сумма, разность, произведение и частное от деления (кроме деления на нуль) двух рациональных чисел — рациональные числа.

Следовательно, действие вычитания может вывести результат за границы множества $\boldsymbol{N}$, действие деления — за границы множества $\boldsymbol{Z}$, однако выполнение любого из четырех арифметических действий не выводит результат за границы множества $\boldsymbol{Q}$.

Вы познакомились с новым действием — извлечением квадратного корня. Возникает естественный вопрос: всегда ли квадратный корень из неотрицательного рационального числа есть число рациональное?

Рассмотрим уравнение $x^2 = 2$. Поскольку $2 > 0$, то уравнение имеет два корня: $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ (рис. 20). Однако *не существует рационального числа, квадрат которого равен* 2 (доказательство этого факта вы можете найти в разделе «Когда сделаны уроки»), то есть числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ не являются рациональными. Их называют **иррациональными** (приставка «ир» означает отрицание).

Следовательно, действие извлечения корня из рационального числа может вывести результат за границы множества $\boldsymbol{Q}$.

Ни одно иррациональное число нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, а следовательно, и в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Иррациональные числа могут быть представлены в виде **бесконечных непериодических** десятичных дробей.

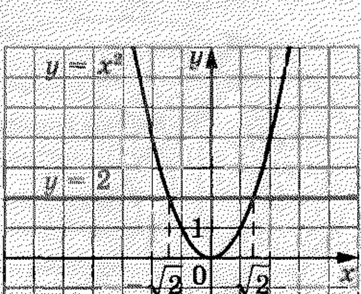


Рис. 20

Например, с помощью специальной компьютерной программы можно установить, что

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097\ldots .$$

Числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ — это не первые иррациональные числа, с которыми вы встречаетесь. Число π, равное отношению длины окружности к диаметру, является иррациональным:

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939\ldots .$$

Иррациональные числа возникают не только в результате извлечения квадратных корней. Их можно конструировать, строя бесконечные непериодические десятичные дроби.

Например, число $0,10100100010000100000\ldots$ (после запятой записываются последовательно степени числа 10) является иррациональным. Действительно, если допустить, что эта десятичная дробь имеет период, состоящий из n цифр, то с некоторого места она полностью будет состоять из нулей, то есть с этого места в записи не должно быть ни одной единицы, что противоречит конструкции числа.

Множества иррациональных и рациональных чисел образуют **множество действительных чисел**, которое обозначают буквой $\boldsymbol{R}$.

Теперь «цепочку» $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$ можно продлить: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

На занятиях математического кружка вы сможете узнать, что эту цепочку также можно продлить.

Связь между числовыми множествами, рассмотренными в этом пункте, иллюстрирует схема, изображенная на рисунке 21.

Рис. 21

Над действительными числами можно выполнять четыре арифметических действия (кроме деления на нуль), в результате получим действительное число. Этим действиям присущи известные вам свойства:

$a + b = b + a$	переместительное свойство сложения
$ab = ba$	переместительное свойство умножения
$(a + b) + c = a + (b + c)$	сочетательное свойство сложения
$(ab)\,c = a\,(bc)$	сочетательное свойство умножения
$a\,(b + c) = ab + ac$	распределительное свойство

Положительные действительные числа можно сравнивать, используя правила сравнения десятичных дробей, то есть сравнивая цифры в соответствующих разрядах. Например, $7{,}853126... < 7{,}853211...$.

Любое положительное действительное число больше нуля и любого отрицательного действительного числа. Любое отрицательное действительное число меньше нуля.

Находя длину окружности и площадь круга, вы пользовались приближенным значением числа π ($\pi \approx 3{,}14$). Аналогично при решении практических задач, где необходимо выполнить действия с действительными числами, эти числа заменяют их приближенными значениями. Например, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

В заключение подчеркнем, что из любого неотрицательного действительного числа можно извлечь квадратный корень и в результате этого действия получить действительное число, то есть действие извлечения квадратного корня из неотрицательного действительного числа не выводит результат за границы множества $\boldsymbol{R}$.

?

1. Какой буквой обозначают множество натуральных чисел?
2. Что означает запись $m \in \boldsymbol{N}$? Как читают эту запись?
3. Как читают запись $a \notin \boldsymbol{N}$?
4. Какие числа образуют множество целых чисел?
5. Какой буквой обозначают множество целых чисел?
6. В каком случае одно множество является подмножеством другого множества?

7. Как читают запись $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$?
8. Какие числа образуют множество рациональных чисел?
9. Какой буквой обозначают множество рациональных чисел?
10. В виде какого отношения можно представить каждое рациональное число?
11. Как связаны между собой рациональные числа и бесконечные периодические десятичные дроби?
12. Как называют числа, не являющиеся рациональными?
13. Какие множества составляют вместе множество действительных чисел?
14. Какой буквой обозначают множество действительных чисел?
15. Как взаимосвязаны числовые множества $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$?

426.° **Какое из приведенных утверждений неверно:**
1) −3 — действительное число;
2) −3 — рациональное число;
3) −3 — целое число;
4) −3 — натуральное число?

427.° Верно ли утверждение:

1) $1 \in \boldsymbol{N}$;
2) $1 \in \boldsymbol{Z}$;
3) $1 \in \boldsymbol{Q}$;
4) $1 \in \boldsymbol{R}$;
5) $-2{,}3 \in \boldsymbol{N}$;
6) $-2{,}3 \in \boldsymbol{R}$;
7) $\sqrt{7} \notin \boldsymbol{R}$;
8) $\sqrt{121} \notin \boldsymbol{R}$;
9) $\frac{\pi}{3} \in \boldsymbol{R}$?

428.° Верно ли утверждение:

1) $0 \in \boldsymbol{N}$;
2) $0 \notin \boldsymbol{Z}$;
3) $0 \in \boldsymbol{R}$;
4) $-\frac{3}{7} \in \boldsymbol{Q}$;
5) $-\frac{3}{7} \notin \boldsymbol{R}$;
6) $\sqrt{9} \in \boldsymbol{Q}$;
7) $\sqrt{9} \in \boldsymbol{Z}$;
8) $\sqrt{9} \in \boldsymbol{R}$?

429.° Верно ли утверждение:
1) любое натуральное число является целым;
2) любое натуральное число является рациональным;
3) любое натуральное число является действительным;
4) любое рациональное число является целым;
5) любое действительное число является рациональным;
6) любое рациональное число является действительным;
7) любое иррациональное число является действительным;

8) любое действительное число является рациональным или иррациональным?

430.° Какие из данных бесконечных дробей являются записями рациональных чисел, а какие — иррациональных:
1) 0,(3);
2) 0,4(32);
3) 0,20200200020... (количество нулей между соседними двойками последовательно увеличивается на 1)?

431.° Сравните:
1) 6,542... и 6,452...; 2) −24,064... и −24,165... .

432.° Сравните:
1) 0,234... и 0,225...; 2) −1,333... и −1,345... .

433.• Укажите какое-либо значение a, при котором уравнение $x^2 = a$:
1) имеет два рациональных корня;
2) имеет два иррациональных корня;
3) не имеет корней.

434.• Сравните числа:
1) $\frac{43}{7}$ и 6,12; 4) −2,(36) и −2,36;
2) 3,(24) и 3,24; 5) 7,(18) и 7,(17).
3) π и 3,(14);

435.• Сравните числа:
1) $\frac{1}{6}$ и 0,2; 2) $\frac{7}{9}$ и 0,77; 3) −1,(645) и −1,(643).

436.• Запишите в порядке убывания числа 3,(16); π; −1,82...; −0,08...; 2,(136).

437.• Запишите в порядке возрастания числа 1,57; 1,571...; $\frac{\pi}{2}$; 1,(56); 1,(572).

438.•• Докажите, что сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел — рациональные числа.

439.•• Докажите, что сумма рационального и иррационального чисел — число иррациональное.

440.•• Верно ли, что:
1) сумма любых двух иррациональных чисел — число иррациональное;

2) произведение любых двух иррациональных чисел — число иррациональное;
3) произведение любого иррационального числа и любого рационального числа — число иррациональное?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

441. В каждом подъезде на каждом этаже девятиэтажного дома по 8 квартир. В каком подъезде и на каком этаже находится квартира № 186?

442. Натуральные числа a и b таковы, что a — четное число, а b — нечетное. Значение какого из данных выражений не может быть натуральным числом:

1) $\frac{8b}{5a}$; 2) $\frac{a^2}{b^2}$; 3) $\frac{4a}{b}$; 4) $\frac{b^2}{a}$?

443. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения

$$\left(\frac{3}{4-4a+a^2}+\frac{2}{a^2-4}\right)\cdot(a-2)^2-\frac{2a-4}{a+2}$$

не зависит от значения a.

444. В ведре несколько литров воды. Если отлить половину воды, то в нем останется на 14 л воды меньше, чем помещается в ведре. Если долить 4 л, то объем воды будет составлять $\frac{2}{3}$ того, что помещается в ведре. Сколько литров воды помещается в ведре?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

445. Найдите значение выражения:

1) $|-3,5|-|2,6|$; 2) $|-9,6|-|-32|$.

446. Модуль какого числа равен 6?

447. Для каких чисел выполняется равенство:

1) $|a|=a$; 3) $|a|=|-a|$;
2) $|a|=-a$; 4) $|a|=-|a|$?

448. Для каких чисел одновременно выполняются оба равенства $|a|=a$ и $|a|=-a$?

449. Найдите значение каждого из выражений a^2, $(-a)^2$, $|a|^2$ при $a=-8$ и при $a=7$. Сделайте вывод.

450. Известно, что $a > 0$, $c < 0$. Сравните с нулем значение выражения: 1) a^8c^4; 2) ac^5.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

451. В классе 30 учеников. Они сидят за 15 партами так, что половина всех девочек класса сидят с мальчиками. Докажите, что учеников нельзя пересадить так, чтобы половина всех мальчиков класса сидела с девочками.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Открытие иррациональности

В п. 13, решая графически уравнение $x^2 = 2$, мы установили, что длина каждого из отрезков OA и OB равна $\sqrt{2}$ (рис. 22). Докажем, что число $\sqrt{2}$ — иррациональное.

Предположим, что число $\sqrt{2}$ рациональное. Тогда его можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа. Имеем:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Тогда $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$, $2 = \frac{m^2}{n^2}$, $m^2 = 2n^2$.

Из последнего равенства следует, что число m^2 четное. А это значит, что четным является и число m. Тогда $m = 2k$, где k — некоторое натуральное число. Имеем: $(2k)^2 = 2n^2$; $4k^2 = 2n^2$; $n^2 = 2k^2$. Отсюда следует, что число n^2, а следовательно, и число n — четные.

Таким образом, числитель и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$ — четные числа. Следовательно, эта дробь является сократимой. Получили противоречие.

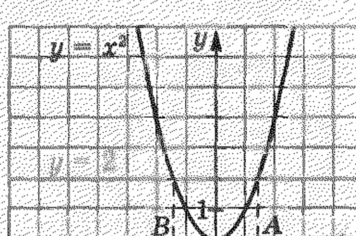


Рис. 22

Этот пример демонстрирует, что существуют отрезки (в нашем случае это отрезки OA и OB на рисунке 22), длины которых не

Пифагор
(около 570 — около 500 г. до н. э.)

выражаются рациональными числами, то есть *для измерения отрезков рациональных чисел недостаточно.*

Этот факт был открыт в школе великого древнегреческого ученого Пифагора.

Сначала пифагорейцы считали, что для любых отрезков AB и CD всегда можно найти такой отрезок MN, который в каждом из них укладывается целое число раз. Отсюда следовало, что отношение длин любых двух отрезков выражается отношением натуральных чисел, то есть рациональным числом.

Например, на рисунке 23 $AB = 5MN$, $CD = 2MN$ и $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{2}$. Отрезок MN называют **общей мерой** отрезков AB и CD.

Если для отрезков существует общая мера, то их называют **соизмеримыми**. Например, отрезки AB и CD (рис. 23) соизмеримы.

Следовательно, древнегреческие ученые считали, что любые два отрезка соизмеримы. А это предоставляло возможность выразить длину любого отрезка рациональным числом.

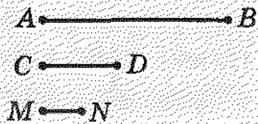


Рис. 23

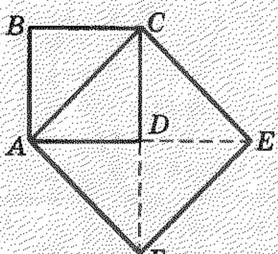


Рис. 24

Действительно, пусть некоторый отрезок AB взят за единичный. Тогда для отрезка AB и любого другого отрезка CD существует отрезок e, являющийся их общей мерой. Получаем $AB = ne$, $CD = me$, где m и n — некоторые натуральные числа. Отсюда $\frac{CD}{AB} = \frac{me}{ne} = \frac{m}{n}$. Поскольку $AB = 1$, то $CD = \frac{m}{n}$.

Однако сами же пифагорейцы сделали выдающееся открытие. Они доказали, что диагональ и сторона квадрата несоизмеримы, то есть доказали, что если сторону квадрата принять за единицу, то длину диагонали квадрата выразить рациональным числом нельзя.

Для доказательства рассмотрим произвольный квадрат $ABCD$ и примем его сторону за единицу длины. Тогда его площадь равна $AB^2 = 1$. На диагонали AC построим квадрат $ACEF$ (рис. 24). Понятно, что площадь квадрата $ACEF$ в 2 раза больше площади квадрата $ABCD$. Отсюда $AC^2 = 2$, то есть $AC = \sqrt{2}$. Следовательно, длина диагонали AC не выражается рациональным числом.

Это открытие изменило один из фундаментальных постулатов древнегреческих ученых, который заключался в том, что отношение любых двух величин выражается отношением целых чисел.

Существует легенда о том, что пифагорейцы держали открытие иррациональных чисел в строжайшей тайне, а человека, разгласившего этот факт, наказали боги: он погиб во время кораблекрушения.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что число $\sqrt{3}$ — иррациональное.
2. Докажите, что если натуральное число n не является квадратом натурального числа, то число $\sqrt{n}$ — иррациональное.

14. Свойства арифметического квадратного корня

Легко проверить, что $\sqrt{5^2} = 5$, $\sqrt{1,4^2} = 1,4$, $\sqrt{0^2} = 0$. Может показаться, что вообще $\sqrt{a^2} = a$. Однако это не так. Например, равенство $\sqrt{(-5)^2} = -5$ является ошибочным, поскольку $-5 < 0$, в действительности $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$. Также можно убедиться, что, например, $\sqrt{(-7)^2} = 7$, $\sqrt{(-2,8)^2} = 2,8$.

Вообще, справедлива следующая теорема.

Теорема 14.1. ***Для любого действительного числа a выполняется равенство***

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Доказательство. ⊙ Для того чтобы доказать равенство $\sqrt{a} = b$, надо показать, что $b \geqslant 0$ и $b^2 = a$.

Имеем: $|a| \geqslant 0$ при любом a.

Также из определения модуля следует, что $(|a|)^2 = a^2$. ▲

Следующая теорема обобщает доказанный факт.

Теорема 14.2 (**арифметический квадратный корень из степени**). ***Для любых действительного числа a и натурального числа n выполняется равенство***

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 14.1. Докажите ее самостоятельно.

Теорема 14.3 (**арифметический квадратный корень из произведения**). ***Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, выполняется равенство***

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доказательство. ⊙ Имеем: $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\sqrt{b} \geqslant 0$. Тогда $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$. Кроме того, $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$. Следовательно, выражение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ принимает только неотрицательные значения, и его квадрат равен ab. ▲

Заметим, что эта теорема справедлива для произведения любого количества множителей. Например, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Теорема 14.4 (**арифметический квадратный корень из дроби**). ***Для любых действительных чисел a и b таких, что $a \geqslant 0$ и $b > 0$, выполняется равенство***

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 14.3.

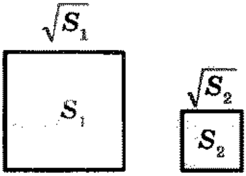


Рис. 25

Понятно, что из двух квадратов, площади которых S_1 и S_2 (рис. 25), бо́льшую сторону имеет тот, у которого площадь больше, то есть если $S_1 > S_2$, то $\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2}$. Это очевидное рассуждение иллюстрирует такое свойство арифметического квадратного корня: ***для любых неотрицательных чисел a_1 и a_2 таких, что $a_1 > a_2$, выполняется неравенство $\sqrt{a_1} > \sqrt{a_2}$.***

ПРИМЕР 1

Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{(-7,3)^2}$; 2) $\sqrt{1,2^4}$; 3) $\sqrt{0,81 \cdot 225}$; 4) $\sqrt{\frac{16}{49}}$.

Решение

1) $\sqrt{(-7,3)^2} = |-7,3| = 7,3.$

2) $\sqrt{1,2^4} = 1,2^2 = 1,44.$

3) $\sqrt{0,81 \cdot 225} = \sqrt{0,81} \cdot \sqrt{225} = 0,9 \cdot 15 = 13,5.$

4) $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}.$

ПРИМЕР 2

Найдите значение выражения: 1) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$.

Решение

1) Заменив произведение корней корнем из произведения, получаем:

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6.$$

2) Заменив частное корней корнем из частного (дроби), имеем:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{24}{150}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.$$

ПРИМЕР 3

Упростите выражение: 1) $\sqrt{a^{14}}$; 2) $\sqrt{9a^6}$, если $a \leqslant 0$; 3) $\sqrt{m^2n^2}$, если $m \geqslant 0$, $n \leqslant 0$; 4) $\sqrt{a^{36}}$.

Решение

1) По теореме о корне из степени имеем:

$$\sqrt{a^{14}} = |a^7| = \begin{cases} a^7, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a^7, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

2) Имеем $\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3|$. Поскольку по условию $a \leqslant 0$, то $a^3 \leqslant 0$. Тогда

$$\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3| = -3a^3.$$

3) $\sqrt{m^2n^2} = |m| \cdot |n| = m \cdot (-n) = -mn.$

4) $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}|$. Поскольку $a^{18} \geqslant 0$, то $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}| = a^{18}$.

ПРИМЕР 4

Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{37^2 - 12^2}$; 2) $\sqrt{8 \cdot 648}$; 3) $\sqrt{16,9 \cdot 0,4}$.

Решение

1) Преобразовав подкоренное выражение по формуле разности квадратов, получаем:

$$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{(37-12)(37+12)} = \sqrt{25 \cdot 49} = 5 \cdot 7 = 35.$$

2) Представив подкоренное выражение в виде произведения квадратов рациональных чисел, имеем:

$$\sqrt{8 \cdot 648} = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 324} = \sqrt{16 \cdot 324} = 4 \cdot 18 = 72.$$

3) $\sqrt{16,9 \cdot 0,4} = \sqrt{169 \cdot 0,04} = 13 \cdot 0,2 = 2,6.$

ПРИМЕР 5

Постройте график функции

$$y = \sqrt{x^2} + x.$$

Решение

Поскольку $\sqrt{x^2} = |x|$, то $y = |x| + x$.

Если $x \geqslant 0$, то $y = x + x = 2x$.

Если $x < 0$, то $y = -x + x = 0$.

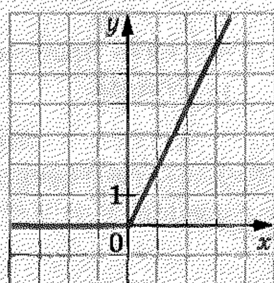


Рис. 26

Следовательно, $y = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ 0, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

График функции изображен на рисунке 26.

?

1. Какому выражению тождественно равно выражение $\sqrt{a^2}$?
2. Сформулируйте теорему об арифметическом квадратном корне из степени.
3. Сформулируйте теорему о корне из произведения.
4. Сформулируйте теорему о корне из дроби.
5. Известно, что неотрицательные числа a_1 и a_2 такие, что $a_1 > a_2$. Сравните значения выражений $\sqrt{a_1}$ и $\sqrt{a_2}$.

452.° **Чему равно значение выражения:**

1) $\sqrt{0,4^2}$; 4) $3\sqrt{1,2^2}$; 7) $5\sqrt{(-10)^4}$;

2) $\sqrt{(-1,8)^2}$; 5) $\sqrt{6^4}$; 8) $-4\sqrt{(-1)^{14}}$;

3) $2\sqrt{(-15)^2}$; 6) $\sqrt{(-2)^{10}}$; 9) $-10\sqrt{3^6}$?

453.° **Найдите значение выражения:**

1) $\sqrt{a^2}$, если $a = 4,6$; $-18,6$;

2) $\sqrt{b^4}$, если $b = -3$; $1,2$;

3) $0,1\sqrt{c^6}$, если $c = -2$; 5.

454.° **Вычислите значение выражения:**

1) $\sqrt{9 \cdot 25}$; 7) $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$;

2) $\sqrt{16 \cdot 2500}$; 8) $\sqrt{7^2 \cdot 2^8}$;

3) $\sqrt{0,64 \cdot 36}$; 9) $\sqrt{25 \cdot 64 \cdot 0,36}$;

4) $\sqrt{400 \cdot 1,44}$; 10) $\sqrt{0,01 \cdot 0,81 \cdot 2500}$;

5) $\sqrt{0,09 \cdot 0,04}$; 11) $\sqrt{\frac{81}{100}}$;

6) $\sqrt{6,25 \cdot 0,16}$; 12) $\sqrt{\frac{49}{256}}$;

13) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$;
14) $\sqrt{3\frac{1}{16}\cdot 2\frac{14}{25}}$;
15) $\sqrt{\frac{169}{36\cdot 81}}$;
16) $\sqrt{\frac{121\cdot 256}{25\cdot 100}}$.

455.° Чему равно значение выражения:

1) $\sqrt{36\cdot 81}$;
2) $\sqrt{900\cdot 49}$;
3) $\sqrt{16\cdot 0,25}$;
4) $\sqrt{9\cdot 1,69}$;
5) $\sqrt{0,36\cdot 1,21}$;
6) $\sqrt{5^2\cdot 3^6}$;
7) $\sqrt{4^4\cdot 3^2}$;
8) $\sqrt{2^6\cdot 5^2}$;
9) $\sqrt{2,25\cdot 0,04\cdot 1600}$;
10) $\sqrt{13\frac{4}{9}}$;
11) $\sqrt{1\frac{7}{9}\cdot\frac{4}{25}}$;
12) $\sqrt{\frac{1}{16}\cdot\frac{9}{25}}$?

456.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$;
2) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$;
3) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}$;
4) $\sqrt{0,009}\cdot\sqrt{1000}$;
5) $\sqrt{200}\cdot\sqrt{0,18}$;
6) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}$;
7) $\sqrt{2,4}\cdot\sqrt{1\frac{2}{3}}$;
8) $\sqrt{\frac{2}{11}}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{\frac{1}{11}}$;
9) $\sqrt{2^3\cdot 3}\cdot\sqrt{2^5\cdot 3^3}$.

457.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$;
2) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$;
3) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{12,1}$;
4) $\sqrt{0,5}\cdot\sqrt{50}$;
5) $\sqrt{1\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{2,8}$;
6) $\sqrt{5\cdot 2^3}\cdot\sqrt{5^3\cdot 2^3}$.

458.° Найдите значение частного:

1) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$;
2) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$;
3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$;
4) $\frac{\sqrt{3,2}}{\sqrt{0,2}}$;
5) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$;
6) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{147}}$;
7) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;
8) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}}$.

459.° Найдите значение выражения:

1) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$;
2) $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$;
3) $\frac{\sqrt{6,3}}{\sqrt{0,7}}$;
4) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{242}}$;
5) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

460.° При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt{a^2} = a$; 2) $\sqrt{a^2} = -a$?

461.° При каких значениях a и b выполняется равенство:

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; 3) $\sqrt{-ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}$?

2) $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$;

462.° Найдите значение выражения, представив предварительно подкоренное выражение в виде произведения квадратов рациональных чисел:

1) $\sqrt{18 \cdot 32}$; 4) $\sqrt{75 \cdot 48}$; 7) $\sqrt{2,7 \cdot 1,2}$;

2) $\sqrt{8 \cdot 98}$; 5) $\sqrt{288 \cdot 50}$; 8) $\sqrt{80 \cdot 45}$;

3) $\sqrt{3,6 \cdot 14,4}$; 6) $\sqrt{4,5 \cdot 72}$; 9) $\sqrt{33 \cdot 297}$.

463.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{18 \cdot 200}$; 3) $\sqrt{14,4 \cdot 0,9}$; 5) $\sqrt{12,5 \cdot 32}$;

2) $\sqrt{3,6 \cdot 0,4}$; 4) $\sqrt{13 \cdot 52}$; 6) $\sqrt{108 \cdot 27}$.

464.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{41^2 - 40^2}$; 3) $\sqrt{8,5^2 - 7,5^2}$; 5) $\sqrt{\dfrac{155^2 - 134^2}{84}}$;

2) $\sqrt{145^2 - 144^2}$; 4) $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$; 6) $\sqrt{\dfrac{139^2 - 86^2}{98,5^2 - 45,5^2}}$.

465.° Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$; 2) $\sqrt{98,5^2 - 97,5^2}$; 3) $\sqrt{\dfrac{98}{228^2 - 164^2}}$.

466.° Замените выражение тождественно равным, не содержащим знака корня:

1) $\sqrt{b^2}$; 2) $-0,4\sqrt{c^2}$; 3) $\sqrt{a^6}$; 4) $\sqrt{m^8}$.

467.° Замените выражение тождественно равным, не содержащим знака корня:

1) $1,2\sqrt{x^2}$; 2) $\sqrt{y^4}$; 3) $\sqrt{n^{10}}$.

468.° Упростите выражение:

1) $\sqrt{m^2}$, если $m > 0$; 3) $\sqrt{16p^2}$, если $p \geqslant 0$;

2) $\sqrt{n^2}$, если $n < 0$; 4) $\sqrt{0,36k^2}$, если $k \leqslant 0$;

5) $\sqrt{c^{12}}$;

6) $\sqrt{0,25b^{14}}$, если $b \leqslant 0$;

7) $\sqrt{81x^4y^2}$, если $y \geqslant 0$;

8) $\sqrt{0,01a^6b^{10}}$, если $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;

9) $-1,2x\sqrt{64x^{18}}$, если $x \leq 0$;

10) $\dfrac{\sqrt{a^{12}b^{22}c^{36}}}{a^4b^6c^{10}}$, если $b < 0$;

11) $\dfrac{3,3a^4}{b^3}\sqrt{\dfrac{b^{24}}{121a^{26}}}$, если $a < 0$;

12) $-0,5m^5\sqrt{1,96m^6n^8}$, если $m \leqslant 0$.

469.* Упростите выражение:

1) $\sqrt{9a^{16}}$;

2) $\sqrt{0,81d^6}$, если $d \geqslant 0$;

3) $-5\sqrt{4x^2}$, если $x \leqslant 0$;

4) $-0,1\sqrt{100z^{10}}$, если $z \geqslant 0$;

5) $\sqrt{p^6q^8}$, если $p \geqslant 0$;

6) $\sqrt{25m^{34}n^{38}}$, если $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;

7) $ab^2\sqrt{a^4b^{18}c^{22}}$, если $b \geqslant 0$, $c \leqslant 0$;

8) $-\dfrac{8m^3p^4}{k^2}\sqrt{\dfrac{625k^{30}p^{40}}{144m^6}}$, если $m < 0$, $k > 0$.

470.** Какие из приведенных равенств выполняются при всех действительных значениях a:

1) $\sqrt{a^2} = a$; 2) $\sqrt{a^4} = a^2$; 3) $\sqrt{a^6} = a^3$; 4) $\sqrt{a^8} = a^4$?

471.** При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt{a^{10}} = a^5$;

2) $\sqrt{a^{10}} = -a^5$;

3) $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2$;

4) $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{-a}\right)^2$?

472.** Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x^2} - x$, если $x \leqslant 0$;
3) $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$;
2) $y = 2x + \sqrt{x^2}$;
4) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}} + 3$.

473.** Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x^2} - 2x$, если $x \geqslant 0$;
2) $y = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}$.

474.* При каком значении x выполняется равенство:

1) $\sqrt{x^2} = x - 4$;
2) $\sqrt{x^2} = 6 - x$;
3) $2\sqrt{x^2} = x + 3$?

475.* Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2} = x + 8$;
2) $\sqrt{x^2} = 6x - 10$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

476. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{a^2 - 5a}{a^2 - 10a + 25} + \frac{25}{a^2 - 25}\right) : \frac{125 - a^3}{5 + a}$$

при $a = 4{,}5$.

477. Тракторист должен был засеять поле за 8 дней. Однако из-за плохой погоды он засеивал ежедневно на 3 га меньше нормы и поэтому выполнил работу за 10 дней. Какова площадь поля?

478. Натуральное число a — четное, а число b — нечетное. Значение какого из данных выражений обязательно является четным числом:

1) $(a + b)\,b$;
2) $\dfrac{ab}{2}$;
3) $\dfrac{a^2b}{2}$;
4) $\dfrac{ab^2}{2}$?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

479. На доске написаны 102 последовательных натуральных числа. Можно ли разбить их на две группы так, чтобы сумма чисел в каждой группе была простым числом (в каждой группе должно быть не менее двух чисел)?

15. Тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни

Воспользовавшись теоремой о корне из произведения, преобразуем выражение $\sqrt{48}$:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Следовательно, выражение $\sqrt{48}$ мы представили в виде произведения рационального числа 4 и иррационального числа $\sqrt{3}$. Такое преобразование называют ***вынесением множителя из-под знака корня.*** В данном случае был вынесен из-под знака корня множитель 4.

Рассмотрим выполненное преобразование в обратном порядке:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

Такое преобразование называют ***внесением множителя под знак корня.***

ПРИМЕР 1

Вынесите множитель из-под знака корня: 1) $\sqrt{150}$; 2) $\sqrt{72a^8}$; 3) $\sqrt{b^{35}}$; 4) $\sqrt{-b^{35}}$; 5) $\sqrt{a^2b^3}$, если $a < 0$.

Решение

1) Представим число, стоящее под знаком корня, в виде произведения двух чисел, одно из которых является квадратом рационального числа:

$$\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5\sqrt{6}.$$

2) $\sqrt{72a^8} = \sqrt{36a^8 \cdot 2} = 6a^4\sqrt{2}.$

3) Из условия следует, что $b \geqslant 0$. Тогда

$$\sqrt{b^{35}} = \sqrt{b^{34}b} = |b^{17}|\sqrt{b} = b^{17}\sqrt{b}.$$

4) Из условия следует, что $b \leqslant 0$. Тогда

$$\sqrt{-b^{35}} = \sqrt{b^{34} \cdot (-b)} = |b^{17}|\sqrt{-b} = -b^{17}\sqrt{-b}.$$

5) Из условия следует, что $b \geqslant 0$. Тогда $\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2b} = |a| \cdot |b|\sqrt{b} = -ab\sqrt{b}.$

ПРИМЕР 2

Внесите множитель под знак корня:

1) $-2\sqrt{7}$; 2) $a\sqrt{7}$; 3) $3b\sqrt{-\frac{b}{3}}$; 4) $c\sqrt{c^7}$.

Решение

1) $-2\sqrt{7} = -\sqrt{4}\cdot\sqrt{7} = -\sqrt{28}$.

2) Если $a \geqslant 0$, то $a\sqrt{7} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$; если $a < 0$, то $a\sqrt{7} = -\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{7} = -\sqrt{7a^2}$.

3) Из условия следует, что $b \leqslant 0$. Тогда $3b\sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2}\cdot\sqrt{-\frac{b}{3}} =$
$= -\sqrt{9b^2\cdot\left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt{-3b^3}$.

4) Из условия следует, что $c \geqslant 0$. Тогда

$$c\sqrt{c^7} = \sqrt{c^2}\cdot\sqrt{c^7} = \sqrt{c^9}.$$

ПРИМЕР 3

Упростите выражение:

1) $\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a}$;

2) $(3+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$; 3) $(7-3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{5})$.

Решение

1) Имеем:

$\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a} = \sqrt{9\cdot 6a} + \sqrt{4\cdot 6a} - \sqrt{100\cdot 6a} =$

$= 3\sqrt{6a} + 2\sqrt{6a} - 10\sqrt{6a} = \sqrt{6a}\,(3+2-10) =$

$= \sqrt{6a}\cdot(-5) = -5\sqrt{6a}$.

2) $(3+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^2 =$

$= 6 + \sqrt{3} - 6 = \sqrt{3}$.

3) Применяя формулы сокращенного умножения (квадрат двучлена и произведение суммы и разности двух выражений), получаем:

$(7-3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{5}) = 7^2 - 2\cdot 7\cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 -$
$-\left((\sqrt{10})^2 - (\sqrt{5})^2\right) = 49 - 42\sqrt{2} + 18 - (10-5) = 62 - 42\sqrt{2}$.

ПРИМЕР 4

Разложите на множители выражение:

1) a^2-2; 3) $9c-6\sqrt{5c}+5$; 5) $\sqrt{3}+6$;

2) $b-4$, если $b\geqslant 0$; 4) $a+\sqrt{a}$; 6) $\sqrt{35}-\sqrt{15}$.

Решение

1) Представив данное выражение в виде разности квадратов, получаем:

$$a^2-2=a^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a+\sqrt{2}\right).$$

2) Поскольку по условию $b\geqslant 0$, то

$$b-4=\left(\sqrt{b}\right)^2-4=\left(\sqrt{b}-2\right)\left(\sqrt{b}+2\right).$$

3) Применим формулу квадрата разности:

$$9c-6\sqrt{5c}+5=\left(3\sqrt{c}\right)^2-2\cdot3\sqrt{c}\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(3\sqrt{c}-\sqrt{5}\right)^2.$$

4) Имеем: $a+\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)$.

5) $\sqrt{3}+6=\sqrt{3}+2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=\sqrt{3}\left(1+2\sqrt{3}\right)$.

6) $\sqrt{35}-\sqrt{15}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$.

ПРИМЕР 5

Сократите дробь:

1) $\dfrac{b-1}{\sqrt{b}+1}$; 2) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b}$, если $a>0$, $b>0$.

Решение

1) Разложив числитель данной дроби на множители, получаем:

$$\frac{b-1}{\sqrt{b}+1}=\frac{\left(\sqrt{b}\right)^2-1}{\sqrt{b}+1}=\frac{\left(\sqrt{b}-1\right)\left(\sqrt{b}+1\right)}{\sqrt{b}+1}=\sqrt{b}-1.$$

2) $$\frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-3\right)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-3.$$

3) Так как по условию $a>0$ и $b>0$, то числитель и знаменатель данной дроби можно разложить на множители следующим образом:

$$\frac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

ПРИМЕР 6

Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:
1) $\frac{15}{2\sqrt{3}}$; 2) $\frac{14}{5\sqrt{2}-1}$.

Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби означает преобразовать дробь так, чтобы ее знаменатель не содержал квадратного корня.

Решение

1) Умножив числитель и знаменатель данной дроби на $\sqrt{3}$, получаем:

$$\frac{15}{2\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2}=\frac{15\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

2) Умножив числитель и знаменатель данной дроби на выражение $5\sqrt{2}+1$, получаем:

$$\frac{14}{5\sqrt{2}-1}=\frac{14(5\sqrt{2}+1)}{(5\sqrt{2}-1)(5\sqrt{2}+1)}=\frac{14(5\sqrt{2}+1)}{(5\sqrt{2})^2-1}=\frac{14(5\sqrt{2}+1)}{50-1}=$$

$$=\frac{14(5\sqrt{2}+1)}{49}=\frac{2(5\sqrt{2}+1)}{7}=\frac{10\sqrt{2}+2}{7}.$$

Ответ: 1) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{10\sqrt{2}+2}{7}$.

ПРИМЕР 7

Докажите тождество

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Решение

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})+2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\frac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{a-b}\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})=\frac{(a+2\sqrt{ab}+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

ПРИМЕР 8

Упростите выражение $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$.

Решение

Представив подкоренное выражение в виде квадрата суммы, получаем:

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}}=\sqrt{9+2\cdot 3\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}=3+\sqrt{3}.$$

Ответ: $3+\sqrt{3}$.

480.° Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{8}$; 4) $\sqrt{54}$; 7) $\sqrt{275}$; 10) $\sqrt{0,48}$;
2) $\sqrt{12}$; 5) $\sqrt{490}$; 8) $\sqrt{108}$; 11) $\sqrt{450}$;
3) $\sqrt{32}$; 6) $\sqrt{500}$; 9) $\sqrt{0,72}$; 12) $\sqrt{36\,300}$.

481.° Упростите выражение:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 3) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$;
2) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$; 4) $-0,05\sqrt{4400}$.

482.° Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{27}$; 4) $\sqrt{125}$; 7) $-2\sqrt{0,18}$; 10) $\frac{3}{7}\sqrt{98}$;
2) $\sqrt{24}$; 5) $\frac{1}{8}\sqrt{96}$; 8) $\frac{4}{9}\sqrt{63}$; 11) $10\sqrt{0,03}$;
3) $\sqrt{20}$; 6) $0,4\sqrt{250}$; 9) $0,8\sqrt{1250}$; 12) $0,7\sqrt{1000}$.

483.° Внесите множитель под знак корня:

1) $7\sqrt{2}$; 4) $-10\sqrt{14}$; 7) $\frac{1}{4}\sqrt{32}$; 10) $-0,3\sqrt{10b}$;
2) $3\sqrt{13}$; 5) $5\sqrt{8}$; 8) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$; 11) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$;
3) $-2\sqrt{17}$; 6) $6\sqrt{a}$; 9) $\frac{1}{8}\sqrt{128a}$; 12) $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{27}{28}}$.

484.° Внесите множитель под знак корня:

1) $2\sqrt{6}$; 3) $-11\sqrt{3}$; 5) $-7\sqrt{3c}$; 7) $8\sqrt{\frac{n}{8}}$;
2) $9\sqrt{2}$; 4) $12\sqrt{b}$; 6) $-10\sqrt{0,7m}$; 8) $-\frac{1}{3}\sqrt{18p}$.

485.° Упростите выражение:

1) $4\sqrt{a}+3\sqrt{a}-5\sqrt{a}$;
2) $6\sqrt{b}+2\sqrt{b}-8\sqrt{b}$;
3) $5\sqrt{c}+3\sqrt{d}-\sqrt{c}+3\sqrt{d}$;
4) $\sqrt{5}+7\sqrt{5}-4\sqrt{5}$.

486.° Упростите выражение:

1) $3\sqrt{a}-2\sqrt{a}$;
2) $\sqrt{c}+10\sqrt{c}-14\sqrt{c}$;
3) $9\sqrt{6}-2\sqrt{3}+8\sqrt{3}-3\sqrt{6}$.

487.° Замените выражение на тождественно равное ему:

1) $\sqrt{9a}+\sqrt{25a}-\sqrt{49a}$;
2) $\sqrt{64b}-\frac{1}{6}\sqrt{36b}$;
3) $2\sqrt{0,04c}-0,3\sqrt{16c}+\frac{1}{3}\sqrt{0,81c}$;
4) $0,4\sqrt{100m}+15\sqrt{\frac{4}{9}m}-1,2\sqrt{2,25m}$.

488.° Упростите выражение:

1) $2\sqrt{4x}+6\sqrt{16x}-\sqrt{625x}$;
2) $3\sqrt{0,09y}-0,6\sqrt{144y}+\frac{18}{11}\sqrt{\frac{121}{36}y}$.

489.° Упростите выражение:

1) $8\sqrt{2}-\sqrt{32}$;
2) $6\sqrt{3}-\sqrt{27}$;
3) $\sqrt{96}-3\sqrt{6}$;
4) $2\sqrt{500}-8\sqrt{5}$;
5) $5\sqrt{7}-\sqrt{700}-0,5\sqrt{28}$;
6) $2\sqrt{20}-\frac{1}{3}\sqrt{45}-0,6\sqrt{125}$.

490.° Рациональным или иррациональным является значение выражения:

1) $\sqrt{48}-6-4\sqrt{3}$;
2) $\sqrt{162}-9\sqrt{2}+\sqrt{27}$?

491.° Упростите выражение:

1) $4\sqrt{700}-27\sqrt{7}$;
2) $\sqrt{75}-6\sqrt{3}$;
3) $2\sqrt{50}-8\sqrt{2}$;
4) $5\sqrt{12}-7\sqrt{3}$;
5) $3\sqrt{72}-4\sqrt{2}+2\sqrt{98}$;
6) $\frac{1}{3}\sqrt{108}+\sqrt{363}-\frac{2}{9}\sqrt{243}$.

492.° Упростите выражение:

1) $\sqrt{2}(\sqrt{50}+\sqrt{8})$; 3) $(3\sqrt{5}-4\sqrt{3})\cdot\sqrt{5}$;

2) $(\sqrt{3}-\sqrt{12})\cdot\sqrt{3}$; 4) $2\sqrt{2}\left(3\sqrt{18}-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\sqrt{32}\right)$.

493.° Упростите выражение:

1) $\sqrt{7}(\sqrt{7}-\sqrt{28})$; 3) $(4\sqrt{3}-\sqrt{75}+4)\cdot 3\sqrt{3}$;

2) $(\sqrt{18}+\sqrt{72})\cdot\sqrt{2}$; 4) $(\sqrt{600}+\sqrt{6}-\sqrt{24})\cdot\sqrt{6}$.

494.° Выполните умножение:

1) $(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)$; 6) $(y-\sqrt{7})(y+\sqrt{7})$;

2) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(2\sqrt{2}-\sqrt{5})$; 7) $(4\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+4\sqrt{2})$;

3) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$; 8) $(m+\sqrt{n})^2$;

4) $(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})$; 9) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$;

5) $(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})$; 10) $(2-3\sqrt{3})^2$.

495.° Выполните умножение:

1) $(\sqrt{7}+3)(3\sqrt{7}-1)$; 5) $(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)$;

2) $(4\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})$; 6) $(\sqrt{19}+\sqrt{17})(\sqrt{19}-\sqrt{17})$;

3) $(\sqrt{p}-q)(\sqrt{p}+q)$; 7) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$;

4) $(6-\sqrt{13})(6+\sqrt{13})$; 8) $(3-2\sqrt{15})^2$.

496.° Чему равно значение выражения:

1) $(2+\sqrt{7})^2-4\sqrt{7}$; 2) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+6\sqrt{2}$?

497.° Найдите значение выражения:

1) $(3+\sqrt{5})^2-6\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt{12}-2\sqrt{2})^2+8\sqrt{6}$.

498.° Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{4}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{18}{\sqrt{5}}$; 5) $\frac{a}{b\sqrt{b}}$; 7) $\frac{7}{\sqrt{7}}$;

2) $\frac{12}{\sqrt{6}}$; 4) $\frac{m}{\sqrt{n}}$; 6) $\frac{5}{\sqrt{15}}$; 8) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$.

4) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; 6) $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{28}}{\sqrt{54}-\sqrt{63}}$; 8) $\frac{b-8\sqrt{b}+16}{\sqrt{b}-4}$.

5) $\frac{23-\sqrt{23}}{\sqrt{23}}$; 7) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-2\sqrt{ab}+b}$;

504.° Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{3a^2}$, если $a \geqslant 0$; 3) $\sqrt{12a^4}$;

2) $\sqrt{5b^2}$, если $b \leqslant 0$; 4) $\sqrt{c^5}$.

505.° Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{18x^{12}}$; 2) $\sqrt{y^9}$.

506.° Упростите выражение:

1) $\sqrt{98}-\sqrt{50}+\sqrt{32}$;

2) $3\sqrt{8}+\sqrt{128}-\frac{1}{3}\sqrt{162}$;

3) $0,7\sqrt{300}-7\sqrt{\frac{3}{49}}+\frac{2}{3}\sqrt{108}$;

4) $\sqrt{5a}-2\sqrt{20a}+3\sqrt{80a}$;

5) $\sqrt{a^3b}-\frac{2}{a}\sqrt{a^5b}$, если $a > 0$, $b \geqslant 0$;

6) $\sqrt{c^5}+4c\sqrt{c^3}-5c^2\sqrt{c}$.

507.° Упростите выражение:

1) $0,5\sqrt{12}-3\sqrt{27}+0,4\sqrt{75}$;

2) $2,5\sqrt{28b}+\frac{2}{3}\sqrt{63b}-10\sqrt{0,07b}$;

3) $\sqrt{81a^7}-5a^3\sqrt{a}+\frac{6}{a}\sqrt{a^9}$.

508.° Докажите, что:

1) $\sqrt{11+4\sqrt{7}}=\sqrt{7}+2$; 2) $\sqrt{14+8\sqrt{3}}=\sqrt{8}+\sqrt{6}$.

509.° Упростите выражение:

1) $(2\sqrt{3}-1)(\sqrt{27}+2)$; 4) $(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2$;

2) $(\sqrt{5}-2)^2-(3+\sqrt{5})^2$; 5) $\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$.

3) $\sqrt{\sqrt{17}-4}\cdot\sqrt{\sqrt{17}+4}$;

510.* Найдите значение выражения:

1) $(3\sqrt{2}+1)(\sqrt{8}-2)$;
3) $(10-4\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^2$;
2) $(3-2\sqrt{7})^2+(3+2\sqrt{7})^2$;
4) $\left(\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}\right)^2$.

511.* Сократите дробь:

1) $\dfrac{4a+4\sqrt{5}}{a^2-5}$;
4) $\dfrac{x^2-6y}{x^2+6y-x\sqrt{24y}}$;
2) $\dfrac{\sqrt{28}-2\sqrt{2a}}{6a-21}$;
5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}$;
3) $\dfrac{a+4\sqrt{ab}+4b}{a-4b}$, если $a>0$, $b>0$;
6) $\dfrac{m\sqrt{m}-27}{\sqrt{m}-3}$.

512.* Сократите дробь:

1) $\dfrac{a-b}{\sqrt{11b}-\sqrt{11a}}$;
3) $\dfrac{a-2\sqrt{a}+4}{a\sqrt{a}+8}$.
2) $\dfrac{2a+10\sqrt{2ab}+25b}{6a-75b}$, если $a>0$, $b>0$;

513.* Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$;
3) $\dfrac{15}{\sqrt{15}-\sqrt{12}}$;
5) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;
2) $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$;
4) $\dfrac{19}{2\sqrt{5}-1}$;
6) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

514.* Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$; 2) $\dfrac{8}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{9}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 4) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

515.* Докажите равенство:

1) $\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}+\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}=10$;
3) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=4\sqrt{2}$.
2) $\dfrac{2}{3\sqrt{2}+4}-\dfrac{2}{3\sqrt{2}-4}=-8$;

516.* Докажите, что значение выражения — рациональное число:

1) $\dfrac{6}{3+2\sqrt{3}}+\dfrac{6}{3-2\sqrt{3}}$;
2) $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$.

517.° Упростите выражение:

1) $\frac{a}{\sqrt{a}-2}-\frac{4\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2}$;

2) $\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-2}-\frac{\sqrt{m}+3}{\sqrt{m}}$;

3) $\frac{\sqrt{y}+4}{\sqrt{xy}+y}-\frac{\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{xy}}$;

4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}-\frac{a}{a-16}$;

5) $\frac{a}{\sqrt{ab}-b}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$;

6) $\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{a}+2}$;

7) $\frac{\sqrt{c}-5}{\sqrt{c}}:\frac{c-25}{3c}$;

8) $\left(\sqrt{a}-\frac{a}{\sqrt{a}+1}\right):\frac{\sqrt{a}}{a-1}$;

9) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

10) $\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}+\frac{12\sqrt{x}}{x-9}\right):\frac{\sqrt{x}+3}{x-3\sqrt{x}}$.

518.° Упростите выражение:

1) $\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}$;

2) $\frac{\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{ab}-b}$;

3) $\frac{\sqrt{x}}{y-2\sqrt{y}}:\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{y}-6}$;

4) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}:\left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)$;

5) $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{4\sqrt{x}}{x-1}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

6) $\frac{a-64}{\sqrt{a}+3}\cdot\frac{1}{a+8\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}+8}{a-3\sqrt{a}}$.

519.°° Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{-m^9}$;

2) $\sqrt{a^4b^{13}}$, если $a \neq 0$;

3) $\sqrt{4x^6y}$, если $x < 0$;

4) $\sqrt{m^7n^7}$, если $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;

5) $\sqrt{45x^3y^{14}}$, если $y < 0$;

6) $\sqrt{64a^2b^9}$, если $a > 0$;

7) $\sqrt{242m^{11}b^{18}}$, если $b < 0$;

8) $\sqrt{-m^2n^2p^{15}}$, если $m > 0$, $n < 0$.

520.°° Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{-m^{19}}$;

2) $\sqrt{a^{23}b^{24}}$, если $b \neq 0$;

3) $\sqrt{49a^2b}$, если $a < 0$;

4) $\sqrt{a^9b^9}$;

5) $\sqrt{27x^{15}y^{34}}$, если $y < 0$;

6) $\sqrt{-50m^6n^6p^7}$, если $m > 0$, $n > 0$.

521.°° Внесите множитель под знак корня:

1) $a\sqrt{3}$;

2) $b\sqrt{-b}$;

3) $c\sqrt{c^5}$;

4) $m\sqrt{n}$, если $m \geqslant 0$;

5) $xy^2\sqrt{xy}$, если $x \leqslant 0$;

6) $2p\sqrt{\frac{p}{2}}$;

7) $2p\sqrt{-\frac{p}{2}}$;

8) $ab^2\sqrt{\frac{a}{b}}$, если $a \geqslant 0$.

522.°° Внесите множитель под знак корня:

1) $m\sqrt{7}$, если $m \geqslant 0$;

2) $3n\sqrt{6}$, если $n \leqslant 0$;

3) $p\sqrt{p^3}$;

4) $x^4y\sqrt{x^5y}$, если $y \leqslant 0$;

5) $7a\sqrt{\frac{3}{a}}$;

6) $5ab\sqrt{-\frac{a^7}{5b}}$, если $a \leqslant 0$, $b > 0$.

523.°° Докажите тождество:

1) $\left(\frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}+7} - \frac{15\sqrt{a}}{a+14\sqrt{a}+49}\right) : \frac{8\sqrt{a}+41}{a-49} + \frac{7\sqrt{a}-49}{\sqrt{a}+7} = \sqrt{a}-7$;

2) $\frac{a\sqrt{a}+27}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-3}{a-3\sqrt{a}+9} - \frac{\sqrt{ab}-9}{a\sqrt{a}+27}\right) = \sqrt{a}$.

524.°° Упростите выражение:

1) $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}} - \frac{1}{a-b} \cdot \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}$;

2) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right).$

525.* Упростите выражение:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$.

526.* Упростите выражение:

1) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$; 2) $\sqrt{15+6\sqrt{6}}$; 3) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$.

527.* Упростите выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

528.* Докажите, что:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{91}+\sqrt{89}}=\frac{\sqrt{91}-1}{2}.$$

529.* Докажите, что:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2.$$

530.* Упростите выражение:

1) $\sqrt{10+8\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$; 2) $\sqrt{22+6\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

531. Рабочий должен был изготовлять ежедневно по 12 деталей. Однако он изготовлял ежедневно по 15 деталей, и уже за 5 дней до окончания срока работы ему осталось изготовить 30 деталей. Сколько деталей должен был изготовить рабочий?

532. При распродаже цену на товар снизили на 20 %. На сколько процентов нужно повысить цену на товар, чтобы она стала равна первоначальной?

533. Лодка проплыла 32 км по течению реки за 4 ч, а против течения — за 8 ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.

534. Федя и Олеся ехали в одном поезде. Федя сел в двенадцатый вагон от головы поезда, а Олеся — в шестой вагон от хвоста поезда. Оказалось, что они едут в одном вагоне. Сколько вагонов в поезде?

535. Число a — положительное, а число b — отрицательное. Какое из данных выражений принимает наибольшее значение:
1) a^2b; 2) $-a^2b^2$; 3) $-ab^2$; 4) ab; 5) $-a^2b$?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

536. Космический корабль посещает планету Гостеприимную через равные промежутки времени (не обязательно через целое число дней). Может ли быть так, что первое посещение в этом году состоялось в понедельник, второе — во вторник, а четвертое — в воскресенье?

16. Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график

Если площадь квадрата равна x, то его сторону y можно найти по формуле $y = \sqrt{x}$. Изменение площади x квадрата приводит и к изменению его стороны y.

Понятно, что каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y. Следовательно, зависимость переменной y от переменной x является функциональной, а формула $y = \sqrt{x}$ задает функцию.

Поскольку в выражении $\sqrt{x}$ допустимые значения переменной x — все неотрицательные числа, то областью определения функции $y = \sqrt{x}$ также являются все неотрицательные числа.

Выражение $\sqrt{x}$ не может принимать отрицательных значений, то есть ни одно отрицательное число не может принадлежать области значений рассматриваемой функции. Покажем, что функция $y = \sqrt{x}$ может принимать любые неотрицательные значения, например, $y = 7{,}2$. Действительно, существует такое значение аргумента x, что $\sqrt{x} = 7{,}2$, а именно, $x = 7{,}2^2$. На этом примере мы видим, что для

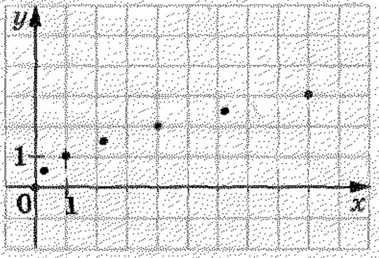


Рис. 27

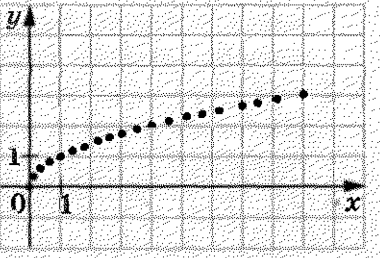


Рис. 28

любого неотрицательного числа b всегда найдется такое значение x, что $\sqrt{x} = b$. Таким значением аргумента x является число b^2.

Следовательно, областью значений функции $y = \sqrt{x}$ являются все неотрицательные числа.

Учитывая область определения и область значений функции $y = \sqrt{x}$, можно сделать вывод, что ее график расположен только в первой координатной четверти.

В таблице приведены некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции $y = \sqrt{x}$:

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых приведены в таблице (рис. 27).

Чем больше точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = \sqrt{x}$, отметить, тем меньше полученная фигура будет отличаться от графика функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 28).

Если бы удалось на координатной плоскости отметить все такие точки, то получили бы фигуру, изображенную на рисунке 29. В старших классах будет доказано, что графиком функции $y = \sqrt{x}$ является фигура, равная ветви параболы $y = x^2$.

Пусть x_1 и x_2 — два произвольных аргумента функции $y = \sqrt{x}$ такие, что $x_1 < x_2$. Тогда из свойства арифметического квадратного корня следует, что $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Это озна-

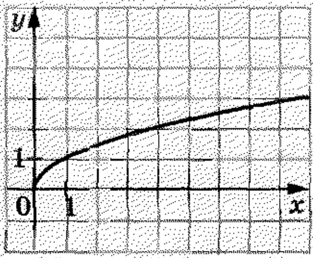


Рис. 29

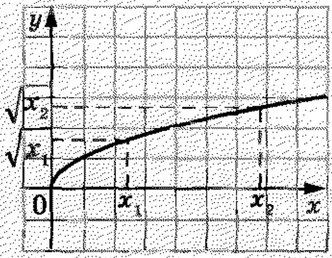


Рис. 30

чает, что большему значению аргумента функции $y = \sqrt{x}$ соответствует большее значение функции, и наоборот, большему значению функции соответствует большее значение аргумента, то есть если $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, то $x_1 < x_2$ (рис. 30).

В таблице приведены свойства функции $y = \sqrt{x}$, изученные в этом пункте:

Область определения	Все неотрицательные числа
Область значений	Все неотрицательные числа
График	Ветвь параболы
Нуль функции (значение аргумента, при котором значение функции равно 0)	$x = 0$

ПРИМЕР 1

Решите графически уравнение $\sqrt{x} = 6 - x$.

Решение

В одной системе координат построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 6 - x$ (рис. 31). Эти графики пересекаются в точке, абсцисса которой равна 4. Проверка подтверждает, что число 4 является корнем данного уравнения.

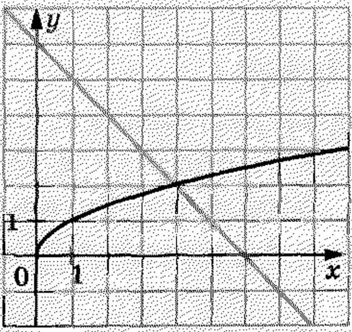


Рис. 31

ПРИМЕР 2

Сравните числа: 1) 6 и $\sqrt{31}$; 2) $3\sqrt{7}$ и $\sqrt{65}$.

Решение

1) Поскольку $6 = \sqrt{36}$ и $36 > 31$, то $\sqrt{36} > \sqrt{31}$, то есть $6 > \sqrt{31}$.

2) Имеем $3\sqrt{7} = \sqrt{63}$, $63 < 65$, $\sqrt{63} < \sqrt{65}$. Следовательно, $3\sqrt{7} < \sqrt{65}$.

ПРИМЕР 3

При каких значениях x выполняется неравенство $\sqrt{x} < 3$?

Решение

Запишем данное неравенство следующим образом: $\sqrt{x} < \sqrt{9}$. Поскольку большему значению функции $y = \sqrt{x}$ соответствует большее значение аргумента, то можно сделать вывод, что $x < 9$. Учитывая, что выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл только при $x \geqslant 0$, получаем, что данное неравенство выполняется при $0 \leqslant x < 9$.

ПРИМЕР 4

Упростите выражение $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$.

Решение

Так как $\sqrt{5} > 2$ и $\sqrt{5} < 3$, то $\sqrt{5} - 2 > 0$ и $\sqrt{5} - 3 < 0$. Следовательно, имеем:

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} = |\sqrt{5}-2| + |\sqrt{5}-3| =$$

$$= \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1.$$

Ответ: 1.

?

1. Какова область определения функции $y = \sqrt{x}$?
2. Какова область значений функции $y = \sqrt{x}$?
3. В какой координатной четверти находится график функции $y = \sqrt{x}$?
4. Какая фигура является графиком функции $y = \sqrt{x}$?
5. Чему равен нуль функции $y = \sqrt{x}$?

6. Неотрицательные числа a и b такие, что $a > b$. Сравните $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$.

7. Известно, что $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Сравните числа a и b.

537.° Функция задана формулой $y = \sqrt{x}$. Заполните таблицу:

x	0,01	3				1600
y			9	11	1,5	

538.° Функция задана формулой $y = \sqrt{x}$.
1) Чему равно значение функции, если значение аргумента равно: 0,16; 64; 1,44; 3600?
2) При каком значении аргумента значение функции равно: 0,2; 5; 120; –4?

539.° Не выполняя построения, определите, через какие из данных точек проходит график функции $y = \sqrt{x}$: A (36; 6), B (4; –2), C (0,81; 0,9), D (–1; 1), E (42,25; 6,5).

540.° Через какую из данных точек проходит график функции $y = \sqrt{x}$:
1) A (16; 4);
2) B (49; –7);
3) C (3,6; 0,6);
4) D (–36; 6)?

541.° Сравните числа:
1) $\sqrt{86}$ и $\sqrt{78}$;
2) $\sqrt{1,4}$ и $\sqrt{1,6}$;
3) 5 и $\sqrt{26}$;
4) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ и 1;
5) -7 и $-\sqrt{48}$;
6) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$;
7) $\sqrt{41}$ и $2\sqrt{10}$;
8) $0,6\sqrt{3\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{1,1}$;
9) $\sqrt{75}$ и $4\sqrt{3}$.

542.° Сравните числа:
1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{5}}$;
2) $\sqrt{32}$ и $\sqrt{6}$;
3) $\sqrt{33}$ и 6;
4) $3\sqrt{5}$ и $\sqrt{42}$;
5) $\sqrt{30}$ и $2\sqrt{7}$;
6) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{20}$.

543.° Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графика функции $y = \sqrt{x}$ и прямой:
1) $y = 1$; 2) $y = 0,8$; 3) $y = -6$; 4) $y = 500$.

544.° Запишите в порядке убывания числа 8; $\sqrt{62}$; 7,9; $\sqrt{65}$; 8,2.

545.° Запишите в порядке возрастания числа $\sqrt{38}$; 6,1; 6; $\sqrt{35}$; 5,9.

546.° Между какими двумя последовательными целыми числами на координатной прямой находится число:

1) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{7}$; 7) $\sqrt{59}$;

2) $\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{13}$; 8) $-\sqrt{115}$;

3) $\sqrt{5}$; 6) $\sqrt{0,98}$; 9) $-\sqrt{76,19}$?

547.° Между какими двумя последовательными целыми числами на координатной прямой находится число:

1) $\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{29}$; 5) $-\sqrt{86}$;

2) $\sqrt{19}$; 4) $\sqrt{160}$; 6) $-\sqrt{30,5}$?

548.° Укажите все целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

1) 3 и $\sqrt{68}$; 3) $-\sqrt{31}$ и $-2,3$;

2) $\sqrt{7}$ и $\sqrt{77}$; 4) $-\sqrt{42}$ и 2,8.

549.° Укажите все целые числа, расположенные на координатной прямой между числами:

1) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$ и $\sqrt{90}$; 3) $-\sqrt{145}$ и $-\sqrt{47}$.

550.° При каких значениях x выполняется неравенство:

1) $\sqrt{x} \geqslant 2$; 2) $\sqrt{x} < 4$; 3) $6 \leqslant \sqrt{x} < 9$?

551.° При каких значениях x выполняется неравенство:

1) $\sqrt{x} \leqslant 8$; 2) $\sqrt{x} > 7$; 3) $10 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 20$?

552.° Решите графически уравнение:

1) $\sqrt{x} = x$; 3) $\sqrt{x} = x + 2$; 5) $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$;

2) $\sqrt{x} = x^2$; 4) $\sqrt{x} = 0,5x + 0,5$; 6) $\sqrt{x} = 1,5 - 0,5x$.

553.° Решите графически уравнение:

1) $\sqrt{x} = -x - 1$; 2) $\sqrt{x} = 2 - x$; 3) $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$.

554.° Упростите выражение:

1) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{7})^2}$;

3) $\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$.

555.* Упростите выражение:

1) $\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$.

556.** Решите уравнение $\sqrt{x}=-x^2$.

557.** Дана функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, \text{ если } x<0,\\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0.\end{cases}$

1) Найдите $f(-8)$, $f(0)$, $f(9)$.
2) Постройте график данной функции.

558.** Дана функция $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ если } x \leqslant 1,\\ \sqrt{x}, \text{ если } x>1.\end{cases}$

1) Найдите $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.
2) Постройте график данной функции.

559.** Найдите область определения, область значений и нули функции $y=\sqrt{-x}$. Постройте график данной функции.

560.** Постройте график функции $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$.

561.* Упростите выражение:

1) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$;

2) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{38-12\sqrt{2}}$.

562.* Упростите выражение:

1) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$; 2) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$; 3) $\sqrt{37-20\sqrt{3}}$.

563.* Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x}=a-x$ в зависимости от значения a?

564.* Упростите выражение

$$\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2-4\sqrt{a}}+\sqrt{(\sqrt{a}-2)^2+8\sqrt{a}}.$$

565.* Упростите выражение

$$\sqrt{(\sqrt{a}-6)^2+24\sqrt{a}}-\sqrt{(\sqrt{a}+6)^2-24\sqrt{a}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

566. В одном контейнере было 90 кг яблок, а в другом — 75 кг. После того как из первого контейнера взяли в 3 раза больше яблок, чем из второго, в первом осталось в 2 раза меньше яблок, чем во втором. Сколько килограммов яблок взяли из первого контейнера?

567. От пристани против течения реки отплыла моторная лодка, собственная скорость которой равна 12 км/ч. Через 40 мин после отправления лодки вышел из строя мотор, и лодку течением реки через 2 ч принесло к пристани. Какова скорость течения реки?

568. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{a-2b}{a^2+2ab}-\dfrac{1}{a^2-4b^2}:\dfrac{a+2b}{(2b-a)^2}\right):\dfrac{a^2-2ab}{a^2+4ab+4b^2}=\dfrac{2b}{a^2}$;

2) $\left(\dfrac{2a}{a+3}-\dfrac{4a}{a^2+6a+9}\right)\cdot\dfrac{a^2-9}{a+1}-\dfrac{a^2-9a}{a+3}=a.$

569. Расстояние между двумя городами легковая машина проезжает за 2 ч, а грузовая — за 3 ч. Через какое время после начала движения они встретятся, если выедут одновременно навстречу друг другу из этих городов?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

570. Решите уравнение:

1) $x^2=0$;	4) $-3x^2+12=0$;	7) $\frac{1}{6}x^2-5x=0$;
2) $x^2-1=0$;	5) $5x^2-6x=0$;	8) $x^2-2x+1=0$;
3) $x^2+5x=0$;	6) $0{,}2x^2+2=0$;	9) $9x^2+30x+25=0$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

571. Натуральные числа от 1 до 37 написаны в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число написано на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором — 1?

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 4

1. Какое из приведенных утверждений неверно?
А) −5 — целое число;
Б) −5 — рациональное число;
В) −5 — иррациональное число;
Г) −5 — действительное число.

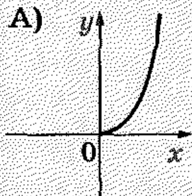
2. Какое из чисел является иррациональным?

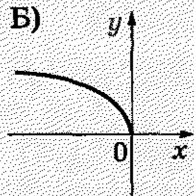
А) $\sqrt{4}$; Б) $\sqrt{0,4}$; В) $\sqrt{0,04}$; Г) $\sqrt{400}$.

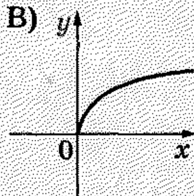
3. Графиком какой из функций является парабола?

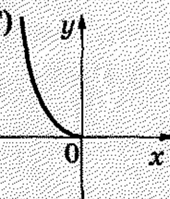
А) $y = 2x$; Б) $y = x^2$; В) $y = \frac{2}{x}$; Г) $y = \frac{x}{2}$.

4. На каком из рисунков изображен график функции $y = \sqrt{x}$?

А)


Б)


В)


Г)


5. Какое из приведенных выражений не имеет смысла?

А) $\sqrt{2}$; Б) $-\sqrt{2}$; В) $\sqrt{-2}$; Г) $\sqrt{(-2)^2}$.

6. Вычислите значение выражения $\sqrt{7x-3}$ при $x = 4$.
А) 5; Б) −5; В) 25; Г) −25.

7. Чему равно значение выражения $\sqrt{36 \cdot 0,81}$?

А) 6,9; Б) 54; В) 5,4; Г) 0,54.

8. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{5}\sqrt{10}\right)^2$.

А) 2; Б) 4; В) 2,5; Г) 0,4.

9. Упростите выражение $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{64a}$.

А) $15\sqrt{a}$; Б) $15a$; В) $7\sqrt{a}$; Г) $7a$.

10. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{12}{\sqrt{2}}$.

А) $\sqrt{2}$; Б) $4\sqrt{2}$; В) $6\sqrt{2}$; Г) $10\sqrt{2}$.

11. **Сократите дробь** $\dfrac{a-2}{a-2\sqrt{2a}+2}$.

А) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$; Б) $\dfrac{a+2}{a-2}$; В) 1; Г) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$.

12. **Упростите выражение** $(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})+(\sqrt{5}+1)^2-\sqrt{20}$.

А) 15; Б) 5; В) $10-\sqrt{5}$; Г) $10+5\sqrt{5}$.

ИТОГИ

В этом параграфе:

- были введены следующие понятия:
  - квадратный корень;
  - арифметический квадратный корень;
  - множество;
  - подмножество;
  - иррациональное число;
  - действительные числа;
- вы научились:
  - извлекать квадратные корни из неотрицательных чисел;
  - упрощать выражения, содержащие квадратные корни;
  - строить графики функций $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$;
- вы изучили:
  - свойства арифметического квадратного корня;
  - некоторые свойства функций $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

§ 3. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Вы научитесь решать уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$.
- Изучите знаменитую теорему Виета для квадратного уравнения.
- Овладеете приемами решения уравнений, которые сводятся к квадратным.

17. Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных уравнений

Вы умеете решать линейные уравнения, то есть уравнения вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа.

Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ называют **уравнением первой степени**.

Например, каждое из линейных уравнений $2x = 3$, $3x = 0$, $\frac{1}{3}x = -7$ является уравнением первой степени, а линейные уравнения $0x = 0$, $0x = 2$ не являются уравнениями первой степени.

Числа a и b называют **коэффициентами уравнения первой степени** $ax = b$.

То, что уравнение первой степени является отдельным видом линейного уравнения, иллюстрирует схема, представленная на рисунке 32.

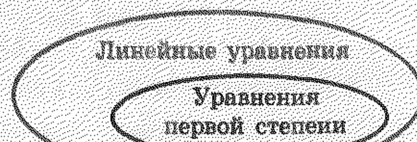


Рис. 32

Вы умеете решать также некоторые уравнения, содержащие переменную во второй степени. Например, приступая к изучению этого пункта, вы решили уравнения $x^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 5x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$ (упражнение № 570). Каждое из этих уравнений имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$.

Определение. **Квадратным уравнением** называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Числа a, b и c называют **коэффициентами квадратного уравнения**. Число a называют **первым или старшим коэффициентом**, число b — **вторым коэффициентом**, число c — **свободным членом.**

Например, квадратное уравнение $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ имеет следующие коэффициенты: $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$.

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называют **приведенным.**

Например, $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 3x = 0$ — приведенные квадратные уравнения.

Поскольку в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ старший коэффициент не равен нулю, то неприведенное квадратное уравнение всегда можно преобразовать в приведенное, равносильное данному. Разделив обе части уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ на число a, получим приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют **неполным квадратным уравнением.**

Существуют три вида неполных квадратных уравнений:

1. При $b = c = 0$ имеем: $ax^2 = 0$.
2. При $c = 0$ и $b \neq 0$ имеем: $ax^2 + bx = 0$.
3. При $b = 0$ и $c \neq 0$ имеем: $ax^2 + c = 0$.

Решим неполное квадратное уравнение каждого вида.

1. Поскольку $a \neq 0$, то уравнение $ax^2 = 0$ имеет единственный корень $x = 0$.
2. Уравнение $ax^2 + bx = 0$ представим в виде $x(ax + b) = 0$. Это уравнение всегда имеет два корня: x_1 и x_2, один из которых равен нулю, а другой является корнем уравнения первой степени $ax + b = 0$. Отсюда $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{b}{a}$.
3. Уравнение $ax^2 + c = 0$ представим в виде $x^2 = -\frac{c}{a}$. Так как $c \neq 0$, то возможны два случая: $-\frac{c}{a} < 0$ или $-\frac{c}{a} > 0$. Очевидно, что в первом случае уравнение корней не име-

ет. Во втором случае уравнение имеет два корня: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Полученные результаты приведены в следующей таблице.

Значения коэффициентов b и c	Уравнение	Корни
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0,\ c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0,\ -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Корней нет
$b = 0,\ -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

ПРИМЕР

Решите уравнение $x^2 - \frac{4x}{|x|} = 0$.

Решение

При $x > 0$ имеем: $x^2 - \frac{4x}{x} = 0$; $x^2 - 4 = 0$; $x = 2$ или $x = -2$. Но корень $x = -2$ не удовлетворяет условию $x > 0$.

При $x < 0$ имеем: $x^2 + \frac{4x}{x} = 0$; $x^2 + 4 = 0$. Последнее уравнение не имеет корней.

Ответ: 2.

?

1. Какое уравнение называют линейным?
2. Какое уравнение называют уравнением первой степени?
3. Приведите пример линейного уравнения, являющегося уравнением первой степени, и пример линейного уравнения, которое не является уравнением первой степени.
4. Какое уравнение называют квадратным?
5. Как называют коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?

6. Какое квадратное уравнение называют приведенным?
7. Какое квадратное уравнение называют неполным?
8. Какие существуют виды неполных квадратных уравнений? Сколько корней может иметь уравнение каждого вида?

572.° Укажите среди данных уравнений квадратные и назовите, чему равны старший коэффициент, второй коэффициент и свободный член каждого из них:

1) $x = 0$;
2) $x^2 = 0$;
3) $x^2 + x = 0$;
4) $x^2 + 1 = 0$;
5) $x^2 - 4x + 2 = 0$;
6) $3x^3 - x^2 + 6 = 0$;
7) $-2x^2 + 7x - 8 = 0$;
8) $x^3 - x - 9 = 0$;
9) $6 - x^2 + 4x = 0$;
10) $-x^2 - 2x + 3 = 0$.

573.° Составьте квадратное уравнение, в котором:

1) старший коэффициент равен 6, второй коэффициент равен 7, а свободный член равен 2;
2) старший коэффициент равен 1, второй коэффициент равен -8, а свободный член равен $-\frac{1}{3}$;
3) старший коэффициент равен $-0{,}5$, второй коэффициент равен 0, а свободный член равен $2\frac{3}{7}$;
4) старший коэффициент равен 7,2, второй коэффициент равен -2, а свободный член равен 0.

574.° Составьте квадратное уравнение, в котором:

1) старший коэффициент равен -1, второй коэффициент равен -2, а свободный член равен 1,6;
2) старший коэффициент и свободный член равны 2, а второй коэффициент равен 0.

575.° Представьте данное уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$, укажите значения коэффициентов a, b и c:

1) $6x(3 - x) = 7 - 2x^2$;
2) $x(x + 1) = (x - 3)(7x + 2)$;
3) $(5x - 1)^2 = (x + 4)(x - 2)$;
4) $4x(x + 8) - (x - 6)(x + 6) = 0$.

576.° Представьте данное уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$, укажите значения коэффициентов a, b и c:

1) $x(x + 10) = 8x + 3$;
2) $(x + 2)^2 = 2x^2 + 4$.

577.° Укажите, какие из данных уравнений являются приведенными, и преобразуйте неприведенные уравнения в приведенные:

1) $x^2 - 5x + 34 = 0$;
2) $2x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $\frac{1}{3}x^2 + x - 5 = 0$;
4) $16 - 6x + x^2 = 0$;
5) $-x^2 + 8x - 7 = 0$;
6) $-0{,}2x^2 + 0{,}8x + 1 = 0$.

578.° Преобразуйте данное квадратное уравнение в приведенное:

1) $\frac{1}{6}x^2 - 2x - 3 = 0$;
2) $-4x^2 + 20x - 16 = 0$;
3) $3x^2 + x + 2 = 0$.

579.° Какие из чисел 1; 0; −3; 2; −10 являются корнями уравнения $x^2 + 9x - 10 = 0$?

580.° Докажите, что:

1) число −1 не является корнем уравнения $x^2 - 2x + 3 = 0$;
2) числа $-\frac{1}{3}$ и −3 являются корнями уравнения $3x^2 + 10x + 3 = 0$;
3) числа $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ являются корнями уравнения $3x^2 - 6 = 0$.

581.° Докажите, что:

1) число −5 является корнем уравнения $x^2 + 3x - 10 = 0$;
2) число 4 не является корнем уравнения $\frac{1}{4}x^2 - 4x = 0$.

582.° Решите уравнение:

1) $5x^2 - 45 = 0$;
2) $x^2 + 8x = 0$;
3) $2x^2 - 10 = 0$;
4) $2x^2 - 10x = 0$;
5) $64x^2 - 9 = 0$;
6) $x^2 + 16 = 0$.

583.° Решите уравнение:

1) $x^2 + 7x = 0$;
2) $2x^2 - 11x = 0$;
3) $3x^2 - 6 = 0$;
4) $-8x^2 = 0$.

584.° Решите уравнение:

1) $(3x - 1)(x + 4) = -4$;
2) $(2x - 1)^2 - 6(6 - x) = 2x$;
3) $(x + 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = x^2 - x$.

585.° Решите уравнение:
1) $(3x - 2)(3x + 2) + (4x - 5)^2 = 10x + 21$;
2) $(2x - 1)(x + 8) - (x - 1)(x + 1) = 15x$.

586.° Найдите два последовательных натуральных числа, произведение которых на 36 больше меньшего из них.

587.° Найдите два последовательных натуральных числа, произведение которых на 80 больше большего из них.

588.• Докажите, что числа $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$ являются корнями уравнения $x^2 - 4x + 1 = 0$.

589.• Решите уравнение:
1) $\frac{x^2 - 8x}{6} = x$;
2) $\frac{x^2 - 3}{5} - \frac{x^2 - 1}{2} = 2$.

590.• Решите уравнение:
1) $\frac{x^2 + x}{7} - \frac{x}{3} = 0$;
2) $\frac{x^2 + 1}{6} - \frac{x^2 + 2}{4} = -1$.

591.• При каком значении m:
1) число 2 является корнем уравнения $x^2 + mx - 6 = 0$;
2) число -3 является корнем уравнения $2x^2 - 7x + m = 0$;
3) число $\frac{1}{7}$ является корнем уравнения $m^2x^2 + 14x - 3 = 0$?

592.• При каком значении n:
1) число 6 является корнем уравнения $x^2 - nx + 3 = 0$;
2) число 0,5 является корнем уравнения $nx^2 - 8x + 10 = 0$?

593.• Решите уравнение, разложив его левую часть на множители способом группировки:
1) $x^2 - 6x + 8 = 0$;
2) $x^2 + 12x + 20 = 0$;
3) $x^2 + 22x - 23 = 0$.

594.• Решите уравнение, выделив в его левой части квадрат двучлена:
1) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
2) $x^2 + 6x - 7 = 0$;
3) $x^2 + 8x + 20 = 0$.

595.• Решите уравнение, разложив его левую часть на множители:
1) $x^2 - 10x + 9 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 3 = 0$;
3) $x^2 - x - 2 = 0$;
4) $x^2 + 6x + 5 = 0$.

596.° Сумма квадратов двух последовательных целых чисел на 17 больше удвоенного большего из них. Найдите эти числа.

597.° Найдите два последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 1.

598.° При каком значении m не является квадратным уравнение:

1) $(m-4)x^2+mx+7=0$;
2) $(m^2+8m)x^2+(m+8)x+10=0$;
3) $(m^2-81)x^2-6x+m=0$?

599.° Каким числом, положительным или отрицательным, является отличный от 0 корень неполного квадратного уравнения $ax^2+bx=0$, если:

1) $a>0$, $b>0$;
2) $a<0$, $b>0$;
3) $a>0$, $b<0$;
4) $a<0$, $b<0$?

600.° Имеет ли корни неполное квадратное уравнение $ax^2+c=0$, если:

1) $a>0$, $c>0$;
2) $a<0$, $c>0$;
3) $a>0$, $c<0$;
4) $a<0$, $c<0$?

601.°° Каким многочленом можно заменить звездочку в уравнении $3x^2-2x+4+*=0$, чтобы получилось неполное квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

1) 0 и 4;
2) -1 и 1?

602.°° Каким многочленом можно заменить звездочку в уравнении $x^2+5x-1+*=0$, чтобы получилось неполное квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

1) 0; -7;
2) -4; 4?

603.°° Решите уравнение:

1) $x^2-3|x|=0$;
2) $x^2+|x|-2x=0$;
3) $x^2-\frac{|x|}{x}=0$;
4) $x^2-\frac{2x^2}{|x|}=0$.

604.°° Решите уравнение:

1) $x^2-7|x|=0$;
2) $x^2-6|x|+x=0$;
3) $2x^2-\frac{3x^2}{|x|}=0$.

605.** При каком значении a уравнение $(a-2)x^2+(2a-1)x+a^2-4=0$ является:
1) линейным;
2) приведенным квадратным;
3) неполным неприведенным квадратным уравнением;
4) неполным приведенным квадратным уравнением?

606.** Установите, при каком значении a один из корней квадратного уравнения равен 0, и найдите второй корень уравнения:
1) $x^2+ax+a-4=0$;
2) $4x^2+(a-8)x+a^2+a=0$;
3) $ax^2+(a+3)x+a^2-3a=0$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

607. Выполните действия:

1) $\frac{3-2a}{2a}-\frac{1-a^2}{a^2}$;
2) $\frac{a^2-6b^2}{3b}+2b$;
3) $\frac{4}{c^2-4c}-\frac{c+4}{c^2-16}$;
4) $\frac{56a^5}{b^4}\cdot\frac{b^2}{14b^5}$;
5) $\frac{72a^3b}{c}:(27a^2b)$;
6) $\frac{4a^2-1}{a^2-9}:\frac{10a+5}{a+3}$.

608. Упростите выражение:

1) $10\sqrt{3}-5\sqrt{48}+2\sqrt{75}$;
2) $(3\sqrt{5}-\sqrt{20})\sqrt{5}$;
3) $(5-\sqrt{2})^2$;
4) $(\sqrt{18}-\sqrt{3})\sqrt{2}+0,5\sqrt{24}$.

609. Какой из графиков, представленных на рисунке 33, является графиком функции:
1) $y=x^2$; 2) $y=2x$; 3) $y=\frac{x}{2}$; 4) $y=\frac{2}{x}$?

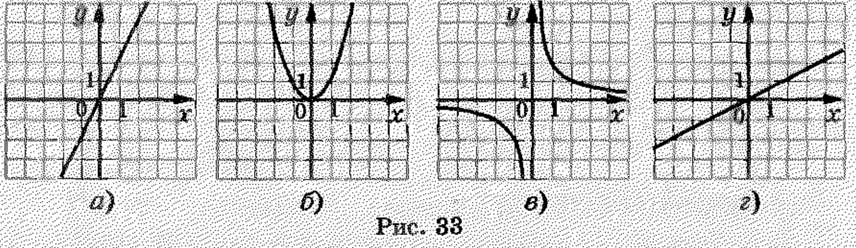


Рис. 33

610. Ученик задумал двузначное число. Если каждую цифру этого числа увеличить на 2, то полученное число будет на 13 меньше удвоенного задуманного числа. Какое число было задумано?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

611. Печатный автомат получает на входе карточку с числами $(a;\ b)$ и выдает на выходе карточку с числами $\left(\dfrac{a+b}{2};\ \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)$. Можно ли с помощью этого автомата из карточки с числами (0,25; 1000) получить карточку с числами (1,25; 250)?

18. Формула корней квадратного уравнения

Зная коэффициенты a и b уравнения первой степени $ax = b$, можно найти его корень по формуле $x = \dfrac{b}{a}$.

Выведем формулу, которая даст возможность по коэффициентам a, b и c квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находить его корни.

Имеем:

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Поскольку $a \neq 0$, то, умножив обе части этого уравнения на $4a$, получим уравнение, равносильное данному:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Выделим в левой части этого уравнения квадрат двучлена:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0;$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \qquad (2)$$

Существование корней уравнения (2) и их количество зависит от знака выражения $b^2 - 4ac$. Это выражение называют **дискриминантом квадратного уравнения** $ax^2 + bx + c = 0$ и обозначают буквой D, то есть $D = b^2 - 4ac$. Термин «дискриминант» происходит от латинского слова *discriminare*, что означает «различать», «разделять».

Теперь уравнение (2) можно записать следующим образом:

$$(2ax + b)^2 = D. \qquad (3)$$

Возможны три случая: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Если $D < 0$, то уравнение (3), а следовательно, и уравнение (1) корней не имеет. Действительно, при любом значении x выражение $(2ax + b)^2$ принимает только неотрицательные значения.

   Вывод: ***если D < 0, то квадратное уравнение корней не имеет.***

2. Если $D = 0$, то уравнение (3) принимает вид:

$$(2ax + b)^2 = 0.$$

   Отсюда $2ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{2a}$.

   Вывод: ***если D = 0, то квадратное уравнение имеет один корень*** $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Если $D > 0$, то уравнение (3) можно записать в виде:

$$(2ax + b)^2 = \left(\sqrt{D}\right)^2.$$

   Отсюда $2ax + b = -\sqrt{D}$ или $2ax + b = \sqrt{D}$. Тогда $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ или $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

   Вывод: ***если D > 0, то квадратное уравнение имеет два корня:***

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Применяют также короткую форму записи:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

Эту запись называют **формулой корней квадратного уравнения** $ax^2 + bx + c = 0$.

Полученную формулу можно применять и для случая, когда $D = 0$. Тогда

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

При решении квадратных уравнений удобно руководствоваться следующим алгоритмом:

- найти дискриминант D квадратного уравнения;
- если $D < 0$, то в ответе записать, что корней нет;
- если $D \geqslant 0$, то воспользоваться формулой корней квадратного уравнения.

Если второй коэффициент квадратного уравнения представить в виде $2k$, то можно воспользоваться другой формулой, которая во многих случаях облегчает вычисления.

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + 2kx + c = 0$.

Найдем его дискриминант: $D = 4k^2 - 4ac = 4\,(k^2 - ac)$.

Обозначим выражение $k^2 - ac$ через D_1.

Если $D_1 \geqslant 0$, то по формуле корней квадратного уравнения получаем:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2\left(-k \pm \sqrt{D_1}\right)}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

то есть

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = k^2 - ac.$$

ПРИМЕР 1

Решите уравнение:

1) $3x^2 - 2x - 16 = 0$;
2) $-0{,}5x^2 + 2x - 2 = 0$;
3) $x^2 + 5x - 3 = 0$;
4) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
5) $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

Решение

1) Для данного уравнения $a = 3$, $b = -2$, $c = -16$.

Дискриминант уравнения

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 3\cdot(-16) = 4 + 192 = 196.$$

Итак, $x_1 = \frac{2 - \sqrt{196}}{6} = \frac{2 - 14}{6} = -2$, $x_2 = \frac{2 + 14}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Ответ: -2; $2\frac{2}{3}$.

2) Имеем:

$$D = 2^2 - 4\cdot(-0{,}5)\cdot(-2) = 4 - 4 = 0.$$

Следовательно, данное уравнение имеет один корень:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-1} = 2.$$

Заметим, что данное уравнение можно решить иным способом. Умножив обе части уравнения на -2, получаем:

$$x^2 - 4x + 4 = 0;\ (x-2)^2 = 0;\ x - 2 = 0;\ x = 2.$$

Ответ: 2.

3) $D = 5^2 - 4\cdot1\cdot(-3) = 25 + 12 = 37.$

Уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{-5-\sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \frac{-5+\sqrt{37}}{2}$.

Ответ: $\frac{-5\pm\sqrt{37}}{2}$.

4) $D = (-6)^2 - 4\cdot1\cdot11 = 36 - 44 = -8 < 0.$

Следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

5) Представим данное уравнение в виде $5x^2 + 2\cdot(-8)x + 3 = 0$ и применим формулу корней для уравнения вида $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$$D_1 = (-8)^2 - 5\cdot3 = 49;$$

$$x_1 = \frac{8-7}{5} = \frac{1}{5};\ x_2 = \frac{8+7}{5} = 3.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$; 3.

ПРИМЕР 2

Решите уравнение:

1) $x^2 + 6\sqrt{x^2} - 16 = 0;$

2) $x^2 - 10\left(\sqrt{x}\right)^2 - 24 = 0;$

3) $9x^2 - 8x + \frac{5}{x-1} = 1 + \frac{5}{x-1}.$

Решение

1) Имеем: $x^2 + 6|x| - 16 = 0.$

При $x \geqslant 0$ получаем уравнение $x^2 + 6x - 16 = 0$, которое имеет корни -8 и 2, однако корень -8 не удовлетворяет условию $x \geqslant 0$.

При $x < 0$ получаем уравнение $x^2 - 6x - 16 = 0$, которое имеет корни -2 и 8, однако корень 8 не удовлетворяет условию $x < 0$.

Ответ: -2; 2.

2) Поскольку $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ при $x \geqslant 0$, то искомые корни должны удовлетворять двум условиям одновременно: $x^2 - 10x -$

$-\ 24 = 0$ и $x \geqslant 0$. В таком случае говорят, что данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 10x - 24 = 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Уравнение $x^2 - 10x - 24$ имеет корни -2 и 12, но корень -2 не удовлетворяет условию $x \geqslant 0$.

Ответ: 12.

3) Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 9x^2 - 8x = 1, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$

Имеем:

$$\begin{cases} 9x^2 - 8x - 1 = 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \text{ или } x = -\frac{1}{9}, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{9}.$$

Ответ: $-\frac{1}{9}$.

ПРИМЕР 3

При каком значении b имеет единственный корень уравнение:

1) $2x^2 - bx + 18 = 0$; 2)* $(b + 6)\,x^2 - (b - 2)\,x + 1 = 0$?

Решение

1) Данное уравнение является квадратным и имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю.

Имеем:

$$D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = b^2 - 144;$$

$$b^2 - 144 = 0;$$

$$b = -12 \text{ или } b = 12.$$

Ответ: $b = -12$ или $b = 12$.

2) При $b = -6$ получаем уравнение $8x + 1 = 0$, которое имеет один корень.

При $b \neq -6$ данное уравнение является квадратным и имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю:

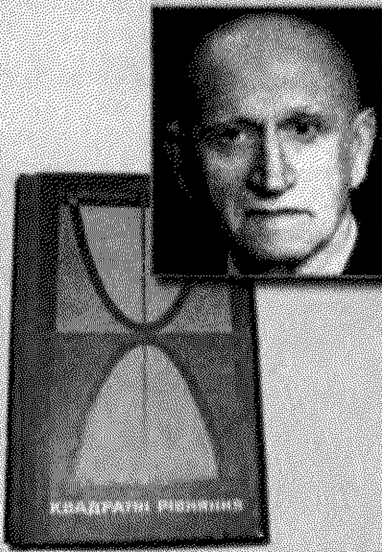
$$D = (b - 2)^2 - 4\,(b + 6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 = \\ = b^2 - 8b - 20.$$

Имеем: $b^2 - 8b - 20 = 0$, отсюда $b = -2$ или $b = 10$.

Ответ: $b = -2$ или $b = 10$, или $b = -6$.

Несколько поколений учителей математики приобретали педагогический опыт, а их ученики углубляли свои знания, пользуясь прекрасной книгой «Квадратные уравнения» блестящего украинского педагога и математика Николая Андреевича Чайковского (1887–1970).

Н. А. Чайковский оставил большое научное и педагогическое наследие. Его работы известны далеко за пределами Украины.



Н. А. Чайковский

1. Какое выражение называют дискриминантом квадратного уравнения?
2. Как зависит количество корней квадратного уравнения от знака дискриминанта?
3. Запишите формулу корней квадратного уравнения.
4. Каким алгоритмом удобно пользоваться при решении квадратных уравнений?

612.° Найдите дискриминант и определите количество корней уравнения:

1) $x^2 + 2x - 4 = 0$;
2) $x^2 - 3x + 5 = 0$;
3) $2x^2 - 6x - 3{,}5 = 0$;
4) $5x^2 - 2x + 0{,}2 = 0$.

613.° Какое из данных уравнений имеет два корня:

1) $x^2 + 4x + 8 = 0$;
2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$;
3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
4) $2x^2 - 9x + 15 = 0$?

614.° Какое из данных уравнений не имеет корней:

1) $x^2 - 6x + 4 = 0$;
2) $5x^2 - 10x + 6 = 0$;
3) $3x^2 + 4x - 2 = 0$;
4) $0{,}04x^2 - 0{,}4x + 1 = 0$?

615.° Решите уравнение:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 3 = 0$;
3) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
4) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
5) $x^2 + x - 56 = 0$;
6) $x^2 - 6x - 7 = 0$;
7) $x^2 - 8x + 12 = 0$;
8) $x^2 + 7x + 6 = 0$;
9) $-x^2 + 6x + 55 = 0$;
10) $2x^2 - 3x - 2 = 0$;
11) $2x^2 - x - 6 = 0$;
12) $3x^2 - 4x - 20 = 0$;
13) $10x^2 - 7x - 3 = 0$;
14) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$;
15) $-6x^2 - 7x - 1 = 0$;
16) $3x^2 - 10x + 3 = 0$;
17) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$;
18) $x^2 - 4x + 1 = 0$;
19) $2x^2 - x - 4 = 0$;
20) $x^2 - 8x + 20 = 0$.

616.° Решите уравнение:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 12x - 13 = 0$;
3) $x^2 - 7x + 10 = 0$;
4) $x^2 - x - 72 = 0$;
5) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;
6) $2x^2 - 7x - 4 = 0$;
7) $4x^2 - 3x - 1 = 0$;
8) $-2x^2 + x + 15 = 0$;
9) $6x^2 + 7x - 5 = 0$;
10) $18x^2 - 9x - 5 = 0$;
11) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
12) $-x^2 - 8x + 12 = 0$.

617.° При каких значениях переменной:

1) значения многочленов $6x^2 - 2$ и $5 - x$ равны;
2) значение двучлена $y - 6$ равно значению трехчлена $y^2 - 9y + 3$;
3) трехчлены $4m^2 + 4m + 2$ и $2m^2 + 10m + 8$ принимают равные значения?

618.° При каких значениях переменной:

1) значение двучлена $4x + 4$ равно значению трехчлена $3x^2 + 5x - 10$;
2) значения трехчленов $10p^2 + 10p + 8$ и $3p^2 - 10p + 11$ равны?

619.° Найдите корни уравнения:

1) $(2x - 5)(x + 2) = 18$;
2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
3) $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 16$;
4) $(x - 6)^2 - 2x(x + 3) = 30 - 12x$;
5) $(x + 7)(x - 8) - (4x + 1)(x - 2) = -21x$;
6) $(2x - 1)(2x + 1) - x(1 - x) = 2x(x + 1)$.

620.° Решите уравнение:

1) $(x - 4)^2 = 4x - 11$;

2) $(x + 5)^2 + (x - 7)(x + 7) = 6x - 19$;
3) $(3x - 1)(x + 4) = (2x + 3)(x + 3) - 17$.

621.° Найдите натуральное число, квадрат которого на 42 больше данного числа.

622.° Найдите периметр прямоугольника, площадь которого равна 70 см^2, а одна из сторон на 9 см больше другой.

623.° Произведение двух чисел равно 84. Найдите эти числа, если одно из них на 8 меньше другого.

624.° Произведение двух последовательных натуральных чисел на 89 больше их суммы. Найдите эти числа.

625.° Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 365. Найдите эти числа.

626.• Решите уравнение:

1) $2x^2 + x\sqrt{5} - 15 = 0$;
3) $\frac{x^2 - 4}{8} - \frac{2x + 3}{3} = -1$;
2) $x^2 - x(\sqrt{6} - 1) - \sqrt{6} = 0$;
4) $\frac{4x^2 + x}{3} - \frac{x^2 + 17}{9} = \frac{5x - 1}{6}$.

627.• Решите уравнение:

1) $x^2 + 3x\sqrt{2} + 4 = 0$;
2) $x^2 - x(\sqrt{3} + 2) + 2\sqrt{3} = 0$;
3) $\frac{2x^2 + x}{3} - \frac{x + 3}{4} = x - 1$.

628.• При каком значении a число $\frac{1}{4}$ является корнем уравнения $a^2x^2 + 4ax - 5 = 0$?

629.• При каком значении a число 2 является корнем уравнения $x^2 - 0,5ax - 3a^2 = 0$?

630.• От квадратного листа картона отрезали полоску в форме прямоугольника шириной 3 см. Площадь оставшейся части листа составляет 40 см^2. Какой была длина стороны квадратного листа картона?

631.• От прямоугольного листа бумаги, длина которого 18 см, отрезали квадрат, сторона которого равна ширине листа. Площадь оставшейся части прямоугольника составляет 72 см^2. Какой была ширина листа бумаги?

632.* Найдите катеты прямоугольного треугольника, если один из них на 14 см меньше другого, а гипотенуза равна 34 см.

633.* Найдите стороны прямоугольника, если их разность равна 31 см, а диагональ прямоугольника равна 41 см.

634.* Найдите три последовательных нечетных натуральных числа, если квадрат первого из них на 33 больше, чем удвоенная сумма второго и третьего.

635.* Найдите четыре последовательных четных натуральных числа, если сумма первого и третьего чисел в 5 раз меньше, чем произведение второго и четвертого чисел.

636.* Докажите, что если старший коэффициент и свободный член квадратного уравнения имеют разные знаки, то уравнение имеет два корня.

637.* (*Древняя индийская задача.*)

Обезьянок резвых стая,
Всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам
Стали прыгать, повисая.
Сколько было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?

638.** В турнире по футболу было сыграно 36 матчей. Сколько команд принимало участие в турнире, если каждая команда сыграла по одному разу с каждой из остальных команд?

639.** Сколько сторон имеет многоугольник, если в нем можно провести 90 диагоналей?

640.** Решите уравнение:

1) $|x^2 + 7x - 4| = 4$;
2) $5x^2 - 8|x| + 3 = 0$;
3) $x|x| + 6x - 5 = 0$;
4) $x^2 + \frac{4x^2}{|x|} - 12 = 0$;
5) $x^2 - 8\sqrt{x^2} + 15 = 0$;
6) $x^2 + 4\sqrt{x^2} - 12 = 0$.

641.** Решите уравнение:

1) $|x^2 + 10x - 4| = 20$;
2) $x|x| + 12x - 45 = 0$;

3) $\frac{x^3}{|x|} - 14x - 15 = 0;$ 4) $x^2 - 8\sqrt{x^2} - 9 = 0.$

642.** Решите уравнение:

1) $x^2 + 2x + \frac{3}{x-8} = \frac{3}{x-8} + 80;$ 2) $x^2 + 8\left(\sqrt{x}\right)^2 - 33 = 0.$

643.** Решите уравнение:

1) $6x^2 + 5x - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1};$ 2) $5x^2 - 14\left(\sqrt{x}\right)^2 - 3 = 0.$

644.** При каком значении b имеет единственный корень уравнение:

1) $2x^2 + 4x - b = 0;$ 2) $3x^2 - bx + 12 = 0$?

645.** При каком значении b имеет единственный корень уравнение:

1) $6x^2 - 18x + b = 0;$ 2) $8x^2 + bx + 2 = 0$?

646.** Докажите, что при любом значении p имеет два корня уравнение:

1) $4x^2 - px - 3 = 0;$ 2) $x^2 + px + p - 2 = 0.$

647.** Докажите, что при любом значении m не имеет корней уравнение:

1) $x^2 + mx + m^2 + 1 = 0;$ 2) $x^2 - 2mx + 2m^2 + 9 = 0.$

648.** Докажите, что при любом значении b уравнение $x^2 + bx - 7 = 0$ имеет два корня.

649.* Решите уравнение:

1) $x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + a = 0;$

2) $x^2 - (2a + 4)x + 8a = 0;$

3) $a^2x^2 - 24ax - 25 = 0;$

4) $3(2a - 1)x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0.$

650.* Решите уравнение:

1) $x^2 - (2a - 5)x - 3a^2 + 5a = 0;$

2) $x^2 + (3a - 4)x - 12a = 0;$

3) $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0.$

651.* При каком значении b имеет единственный корень уравнение:

1) $bx^2 - 6x - 7 = 0;$

2) $(b + 5)x^2 - (b + 6)x + 3 = 0;$

3) $(b - 4)x^2 + (2b - 8)x + 15 = 0$?

652.* При каком значении b имеет единственный корень уравнение:

1) $bx^2 + x + b = 0$; 2) $(b + 3)x^2 + (b + 1)x - 2 = 0$?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

653. Упростите выражение

$$\left(\frac{a+b}{a} - \frac{4b}{a+b}\right) \cdot \frac{a+b}{a-b}.$$

654. Найдите значение выражения $\frac{\left(a^{-3}\right)^3}{a^{-2} \cdot a^{-5}}$ при $a = \frac{1}{3}$.

655. Расположите в порядке возрастания $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$ и 4.

656. Имеется лом двух сплавов, которые содержат 5 % и 45 % никеля соответственно. Сколько металлолома каждого из этих сплавов нужно взять, чтобы получить 120 т сплава с 30 %-ным содержанием никеля?

657. В книге недостает нескольких листов. На левой странице разворота стоит номер страницы 24, а на правой — номер 53. Сколько листов недостает между этими страницами?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

658. Решите уравнение, найдите сумму и произведение его корней и сравните их со вторым коэффициентом и свободным членом уравнения:

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$; 2) $x^2 + 9x + 14 = 0$.

659. Заполните таблицу, где a, b и c — коэффициенты квадратного уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, а x_1 и x_2 — его корни:

Уравнение	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	x_1x_2
$7x^2 - 8x + 1 = 0$						
$6x^2 + 13x - 15 = 0$						

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

660. Докажите, что из 101 кубика, окрашенных в произвольные цвета, можно выбрать либо 11 кубиков одного цвета, либо 11 кубиков разного цвета.

19. Теорема Виета

Готовясь к изучению этого пункта, вы выполнили упражнения №№ 658, 659. Возможно, эти упражнения подсказали вам, каким образом сумма и произведение корней квадратного уравнения связаны с его коэффициентами.

Теорема 19.1 (теорема Виета). ***Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, то***

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Доказательство. ⊙ Пусть дискриминант данного уравнения $D>0$. Применяя формулу корней квадратного уравнения, запишем:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Имеем: $x_1+x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}+\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-b-\sqrt{D}-b+\sqrt{D}}{2a}=-\dfrac{b}{a}$;

$$x_1x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2}=\frac{b^2-D}{4a^2}=$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}.\ ▲$$

Примечание. Теорема Виета справедлива и тогда, когда $D=0$. При этом считают, что $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$. Имеем:

Франсуа Виет (1540–1603) — французский математик, по специальности юрист. В 1591 г. ввел буквенные обозначения не только неизвестных величин, но и коэффициентов уравнений, благодаря чему стало возможным выражать свойства уравнений и их корни в виде общих формул. Среди своих открытий сам Виет особенно высоко ценил установление зависимости между корнями и коэффициентами уравнений.

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Следствие. ***Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$, то***

$$x_1 + x_2 = -b,$$
$$x_1 x_2 = c,$$

то есть *сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.*

Теорема 19.2 (обратная теореме Виета). ***Если числа α и β такие, что $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ и $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.***

Доказательство. ⊙ Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Преобразуем его в приведенное:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Согласно условию теоремы это уравнение можно записать следующим образом:

$$x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\beta = 0. \qquad (*)$$

Подставляя в левую часть этого уравнения вместо x сначала число α, а затем число β, получаем:

$$\alpha^2 - (\alpha + \beta)\,\alpha + \alpha\beta = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0;$$
$$\beta^2 - (\alpha + \beta)\,\beta + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta = 0.$$

Таким образом, числа α и β являются корнями уравнения (*), а следовательно, и корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. ▲

Следствие. ***Если числа α и β такие, что $\alpha + \beta = -b$ и $\alpha\beta = c$, то эти числа являются корнями приведенного квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$.***

Применяя это следствие, можно решать некоторые квадратные уравнения устно, не используя формулу корней.

ПРИМЕР 1

Найдите сумму и произведение корней уравнения

$$3x^2 - 15x + 2 = 0.$$

Решение

Выясним, имеет ли данное уравнение корни.

Находим: $D = (-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 225 - 24 > 0$. Следовательно, уравнение имеет два корня: x_1 и x_2.

Тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{-15}{3} = 5$, $x_1 x_2 = \frac{2}{3}$.

ПРИМЕР 2

Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, если его корнями являются числа -7 и 4.

Решение

По теореме Виета $b = -(-7 + 4) = 3$, $c = -7 \cdot 4 = -28$.

ПРИМЕР 3

Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны: 1) 4 и $-\frac{5}{7}$; 2) $\frac{6-\sqrt{7}}{2}$ и $\frac{6+\sqrt{7}}{2}$.

Решение

1) Пусть $x_1 = 4$ и $x_2 = -\frac{5}{7}$. Тогда

$$x_1 + x_2 = 4 - \frac{5}{7} = \frac{23}{7}, \quad x_1 x_2 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{20}{7}.$$

По теореме, обратной теореме Виета, числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 - \frac{23}{7}x - \frac{20}{7} = 0$. Умножив обе части этого уравнения на 7, получаем квадратное уравнение с целыми коэффициентами:

$$7x^2 - 23x - 20 = 0.$$

2) Пусть $x_1 = \frac{6-\sqrt{7}}{2}$ и $x_2 = \frac{6+\sqrt{7}}{2}$. Тогда

$$x_1 + x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} + \frac{6+\sqrt{7}}{2} = 6,$$

$$x_1 x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{6+\sqrt{7}}{2} = \frac{36-7}{4} = \frac{29}{4}.$$

Следовательно, x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$x^2 - 6x + \frac{29}{4} = 0$. Отсюда находим искомое уравнение $4x^2 - 24x + 29 = 0$.

ПРИМЕР 4

Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 3x - 9 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$.

Решение

По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1x_2 = -\frac{9}{2}$.

Тогда имеем:

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

ПРИМЕР 5

Число 4 является корнем уравнения $3x^2 - 10x + n = 0$. Найдите второй корень уравнения и значение n.

Решение

Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения, причем $x_1 = 4$. По теореме Виета

$$x_1 + x_2 = \frac{10}{3},\ x_2 = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3},\ n = x_1x_2 = -\frac{8}{3}.$$

Ответ: $x_2 = -\frac{2}{3}$, $n = -\frac{8}{3}$.

ПРИМЕР 6

Составьте квадратное уравнение, каждый из корней которого на 4 больше соответствующего корня уравнения $x^2 + 6x - 14 = 0$.

Решение

Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения, x_1' и x_2' — корни искомого уравнения.

По условию $x_1' = x_1 + 4$, $x_2' = x_2 + 4$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -6$, $x_1x_2 = -14$.

Тогда имеем:

$$x_1' + x_2' = x_1 + 4 + x_2 + 4 = (x_1 + x_2) + 8 = -6 + 8 = 2;$$

$$x_1'x_2' = (x_1 + 4)(x_2 + 4) = x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 =$$
$$= -14 + 4\cdot(-6) + 16 = -22.$$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Виета, искомым является уравнение $x^2 - 2x - 22 = 0$.
Ответ: $x^2 - 2x - 22 = 0$.

1. Сформулируйте теорему Виета.
2. Сформулируйте следствие из теоремы Виета.
3. Сформулируйте теорему, обратную теореме Виета.
4. Сформулируйте следствие из теоремы, обратной теореме Виета.

661.° Чему равна сумма корней уравнения $x^2 + 5x - 10 = 0$:
1) 5; 2) −5; 3) −10; 4) 10?

662.° Чему равно произведение корней уравнения $x^2 - 14x + 12 = 0$:
1) −14; 2) 14; 3) 12; 4) −12?

663.° Не решая уравнения, найдите сумму и произведение его корней:
1) $x^2 + 6x - 32 = 0$; 3) $2x^2 - 6x + 3 = 0$;
2) $x^2 - 10x + 4 = 0$; 4) $10x^2 + 42x + 25 = 0$.

664.° Не решая уравнения, найдите сумму и произведение его корней:
1) $x^2 - 12x - 18 = 0$; 3) $3x^2 + 7x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 9 = 0$; 4) $-4x^2 - 8x + 27 = 0$.

665.° Пользуясь теоремой, обратной теореме Виета, установите, являются ли корнями уравнения:
1) $x^2 - 8x + 12 = 0$ числа 2 и 6;
2) $x^2 + x - 56 = 0$ числа −7 и 8;
3) $x^2 - 13x + 42 = 0$ числа 5 и 8;
4) $x^2 - 20x - 99 = 0$ числа 9 и 11.

666.° Пользуясь теоремой, обратной теореме Виета, установите, являются ли корнями уравнения:
1) $x^2 + 2x - 3 = 0$ числа 1 и −2;
2) $x^2 + 5x + 6 = 0$ числа −2 и −3.

667.° Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, если его корнями являются числа:
1) −8 и 6; 2) 4 и 5.

668.° Найдите коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, если его корнями являются числа:
1) −2 и 0,5; 2) −10 и −20.

669.° Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны:

1) 2 и 5; 3) $-0{,}2$ и -10; 5) 0 и 6;

2) $-\frac{1}{3}$ и 2; 4) $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$; 6) $-\sqrt{7}$ и $\sqrt{7}$.

670.° Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны:

1) -7 и -8; 3) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$;

2) 5 и $-0{,}4$; 4) $5-\sqrt{10}$ и $5+\sqrt{10}$.

671.° Число -2 является корнем уравнения $x^2 - 8x + q = 0$. Найдите значение свободного члена q и второй корень уравнения.

672.° Число 7 является корнем уравнения $x^2 + px - 42 = 0$. Найдите значение коэффициента p и второй корень уравнения.

673.° Число $\frac{1}{3}$ является корнем уравнения $6x^2 - bx + 4 = 0$. Найдите значение коэффициента b и второй корень уравнения.

674.° Число $-0{,}2$ является корнем уравнения $4x^2 - 5{,}6x + m = 0$. Найдите значение свободного члена m и второй корень уравнения.

675.° Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 7x - 13 = 0$. Не решая это уравнение, найдите значение выражения $x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$.

676.° Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $5x^2 + 4x - 13 = 0$. Не решая это уравнение, найдите значение выражения $3x_1x_2 - x_1 - x_2$.

677.° При каком значении b корни уравнения $x^2 + bx - 17 = 0$ являются противоположными числами? Найдите эти корни.

678.° Применяя теорему, обратную теореме Виета, решите уравнение:

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$; 5) $x^2 - 9x + 20 = 0$;
2) $x^2 + 5x + 4 = 0$; 6) $x^2 - x - 2 = 0$;
3) $x^2 - 4x - 5 = 0$; 7) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
4) $x^2 + 4x - 5 = 0$; 8) $x^2 - 3x - 18 = 0$.

679.* Применяя теорему, обратную теореме Виета, решите уравнение:

1) $x^2 - 10x + 24 = 0$;
2) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $x^2 - 2x - 8 = 0$;
4) $x^2 + x - 12 = 0$.

680.* Какие из данных уравнений имеют два положительных корня, какие — два отрицательных, а какие — корни разных знаков:

1) $x^2 - 12x + 14 = 0$;
2) $x^2 + 6x - 42 = 0$;
3) $x^2 - 7x - 30 = 0$;
4) $x^2 + 16x + 10 = 0$;
5) $x^2 - 24x + 0{,}1 = 0$;
6) $x^2 + 20x + 3 = 0$?

681.** Один из корней уравнения $x^2 - 10x + c = 0$ на 8 меньше второго. Найдите значение c и корни уравнения.

682.** Корни уравнения $x^2 + 20x + a = 0$ относятся как $7 : 3$. Найдите значение a и корни уравнения.

683.** Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 7x + m = 0$ удовлетворяют условию $2x_1 - 5x_2 = 28$. Найдите корни уравнения и значение m.

684.** Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 4x + n = 0$ удовлетворяют условию $3x_1 - x_2 = 8$. Найдите корни уравнения и значение n.

685.** Найдите, пользуясь теоремой, обратной теореме Виета, корни уравнения:

1) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;
2) $2x^2 + 5x + 3 = 0$;
3) $16x^2 - 23x + 7 = 0$;
4) $-8x^2 - 19x + 27 = 0$.

686.** Найдите, пользуясь теоремой, обратной теореме Виета, корни уравнения:

1) $7x^2 + 11x - 18 = 0$;
2) $9x^2 - 5x - 4 = 0$.

687.** Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 9x + 6 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;
2) $x_1^2 + x_2^2$;
3) $(x_1 - x_2)^2$;
4) $x_1^3 + x_2^3$.

688.** Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 5x - 16 = 0$. Не решая уравнения, найдите значение выражения:

1) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$;
2) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$;
3) $|x_2 - x_1|$.

689.** Составьте квадратное уравнение, корни которого на 2 меньше соответствующих корней уравнения $x^2 + 8x - 3 = 0$.

690.** Составьте квадратное уравнение, корни которого на 3 больше соответствующих корней уравнения $x^2 - 12x + 4 = 0$.

691.** Составьте квадратное уравнение, корни которого в 3 раза меньше соответствующих корней уравнения $2x^2 - 14x + 9 = 0$.

692.** Составьте квадратное уравнение, корни которого в 2 раза больше соответствующих корней уравнения $2x^2 - 15x + 4 = 0$.

693.* Сумма квадратов корней уравнения $3x^2 + ax - 7 = 0$ равна $\frac{46}{9}$. Найдите значение a.

694.* Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - ax + 8 = 0$ удовлетворяют условию $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$. Найдите значение a.

695.* Верно ли утверждение:

1) уравнение $7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$ имеет корни разных знаков при любом значении a;
2) если уравнение $x^2 + 6x + a^2 + 4 = 0$ имеет корни, то независимо от значения a они оба отрицательны?

696.* Найдите все целые значения b, при которых имеет целые корни уравнение:

1) $x^2 + bx + 6 = 0$; 2) $x^2 + bx - 12 = 0$.

697.* Найдите все целые значения b, при которых имеет целые корни уравнение:

1) $x^2 + bx + 8 = 0$; 2) $x^2 + bx - 18 = 0$.

698.* Корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$ равны его коэффициентам b и c. Найдите b и c.

699.* При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ равна:

1) 12; 2) 6?

700.* При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$ равна 9?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

701. Сократите дробь:

1) $\frac{4a-16}{a^2-16}$; 3) $\frac{c^2+10c+25}{5c+25}$; 5) $\frac{n^3-n^5}{n^3-n}$;

2) $\frac{12b^3-8b^2}{2-3b}$; 4) $\frac{4-m^2}{m^2-4m+4}$; 6) $\frac{2-2x^2}{4x^2-8x+4}$.

702. В саду посадили 48 деревьев рядами с одинаковым количеством деревьев в каждом ряду. Рядов оказалось на 8 меньше, чем деревьев в каждом из них. Сколько деревьев посадили в каждом ряду и сколько было рядов?

703. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = x + 2$. Начертите графики данных функций и отметьте найденные точки.

704. В саду 60 % деревьев составляют вишни и сливы, из них 30 % составляют сливы. Какой процент всех деревьев сада составляют сливы?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

705. Пользуясь методом группировки, разложите на множители многочлен:

1) $x^2 - 7x + 10$; 3) $a^2 + 8a + 12$;

2) $y^2 + 3y - 4$; 4) $x^2 - x - 6$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

706. Вася задумал три цифры x, y, z. Петя называет три числа a, b, c. Вася сообщает Пете значение выражения $ax + by + cz$. Какие числа должен назвать Петя, чтобы по полученной информации определить, какие цифры задумал Вася?

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 5

1. Какое из данных уравнений не является квадратным?

А) $x^2 = 0$; В) $x^3 + x = 0$;

Б) $x^2 + x = 0$; Г) $x^2 + x - 2 = 0$.

2. Решите уравнение $9x - x^2 = 0$.

А) $-3; 0; 3$; Б) $0; 3$; В) $-3; 3$; Г) $0; 9$.

3. Решите уравнение $\frac{x^2 - x}{6} - \frac{x - 2}{3} = \frac{3 - x}{2}$.

А) $0; 5$; Б) 5; В) $\sqrt{5}$; Г) $-\sqrt{5}; \sqrt{5}$.

4. Какое из данных уравнений не имеет корней?

А) $x^2 - 5x - 2 = 0$; В) $x^2 - 2x + 5 = 0$;
Б) $x^2 - 5x + 2 = 0$; Г) $x^2 + 2x - 5 = 0$.

5. Сколько корней имеет уравнение $6x^2 + 13x + 5 = 0$?

А) два корня; В) ни одного корня;
Б) бесконечно много корней; Г) один корень.

6. Найдите корни уравнения $x^2 + 4x - 21 = 0$.

А) $7; -3$; Б) $-7; 3$; В) $-7; -3$; Г) $3; 7$.

7. Чему равна сумма корней уравнения $x^2 - 10x - 12 = 0$?

А) 10; Б) -10; В) -12; Г) 12.

8. Чему равно произведение корней уравнения $3x^2 - 16x + 6 = 0$?

А) 6; Б) 2; В) -16; Г) $\frac{16}{3}$.

9. При каких значениях переменной принимают равные значения выражения $(3x - 1)(x + 2)$ и $(x - 12)(x - 4)$?

А) $-12,5; 2$; В) $-25; 4$;
Б) $12,5; -2$; Г) $25; -4$.

10. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны $3 - \sqrt{2}$ и $3 + \sqrt{2}$.

А) $x^2 + 6x - 7 = 0$; В) $x^2 + 6x + 7 = 0$;
Б) $x^2 - 6x - 7 = 0$; Г) $x^2 - 6x + 7 = 0$.

11. Решите уравнение $x|x| - 9x - 10 = 0$.

А) $-1; 10; \frac{-9 - \sqrt{41}}{2}; \frac{-9 + \sqrt{41}}{2}$; В) $-1; \frac{-9 - \sqrt{41}}{2}$;
Б) $10; \frac{-9 - \sqrt{41}}{2}; \frac{-9 + \sqrt{41}}{2}$; Г) $-1; 10$.

12. Число -5 является корнем уравнения $2x^2 + 9x + c = 0$. Найдите второй корень уравнения и значение c.

А) $x_2 = 0,5; c = -5$; В) $x_2 = 9,5; c = 22,5$;
Б) $x_2 = -0,5; c = 5$; Г) $x_2 = 9,5; c = -22,5$.

20. Квадратный трехчлен

Определение. **Квадратным трехчленом называют многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.**

Приведем примеры многочленов, являющихся квадратными трехчленами:

$$2x^2 - 3x + 5;\ x^2 + 7x;\ x^2 - 5;\ 3x^2.$$

Заметим, что левая часть квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ является квадратным трехчленом.

Определение. **Корнем квадратного трехчлена называют значение переменной, при котором значение квадратного трехчлена равно нулю.**

Например, число 2 является корнем квадратного трехчлена $x^2 - 6x + 8$.

Чтобы найти корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, надо решить соответствующее квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют **дискриминантом квадратного трехчлена** $ax^2 + bx + c$.

Если $D < 0$, то квадратный трехчлен корней не имеет. Если $D = 0$, то квадратный трехчлен имеет один корень, если $D > 0$ — то два корня.

Рассмотрим квадратный трехчлен $x^2 - 3x + 2$. Разложим его на множители методом группировки (подобное упражнение 705 вы выполняли во время подготовки к изучению этого пункта).

Имеем:

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2).$$

О таком тождественном преобразовании говорят, что квадратный трехчлен $x^2 - 3x + 2$ разложили на **линейные множители** $x - 1$ и $x - 2$.

Связь между корнями квадратного трехчлена и линейными множителями, на которые он раскладывается, устанавливает следующая теорема.

Теорема 20.1. ***Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ положителен, то данный трехчлен можно разложить на линейные множители:***

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена.

Доказательство. ⊙ Поскольку числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Тогда $a(x - x_1)(x - x_2) =$ $= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c.$ ▲

Примечание. Если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то считают, что квадратный трехчлен имеет два равных корня, то есть $x_1 = x_2$. В этом случае разложение квадратного трехчлена на множители имеет следующий вид:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Теорема 20.2. ***Если дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, то данный трехчлен нельзя разложить на линейные множители.***

Доказательство. ⊙ Предположим, что данный квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно разложить на линейные множители, то есть $ax^2 + bx + c = a(x - m)(x - n)$. Тогда m и n — корни данного квадратного трехчлена. Следовательно, его дискриминант неотрицателен, что противоречит условию. ▲

ПРИМЕР 1

Разложите на множители квадратный трехчлен:

1) $x^2 - 14x - 32$; 2) $-x^2 + 17x - 30$; 3) $3x^2 - 7x + 2$.

Решение

1) Находим корни данного трехчлена:

$$x^2 - 14x - 32 = 0;$$

$$x_1 = -2,\ x_2 = 16.$$

Следовательно, $x^2 - 14x - 32 = (x + 2)(x - 16)$.

2) Имеем:

$$-x^2 + 17x - 30 = 0;$$

$$x^2 - 17x + 30 = 0;$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = 15.$$

Итак, $-x^2 + 17x - 30 = -(x - 2)(x - 15)$.

3) Решим уравнение $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Имеем:

$$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 2.$$

Тогда $3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) = (3x - 1)(x - 2)$.

ПРИМЕР 2

Сократите дробь $\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1}$.

Решение

Разложим на множители квадратный трехчлен, являющийся числителем данной дроби:

$$6a^2 - a - 1 = 0;$$

$$a_1 = -\frac{1}{3};\ a_2 = \frac{1}{2};$$

$$6a^2 - a - 1 = 6\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) = 3\left(a + \frac{1}{3}\right) \cdot 2\left(a - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= (3a + 1)(2a - 1).$$

Тогда имеем:

$$\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1} = \frac{(3a + 1)(2a - 1)}{(3a + 1)(3a - 1)} = \frac{2a - 1}{3a - 1}.$$

Ответ: $\frac{2a - 1}{3a - 1}$.

ПРИМЕР 3

При каком значении m разложение на множители трехчлена $2x^2 + 9x + m$ содержит множитель $(x + 5)$?

Решение

Поскольку разложение данного трехчлена на множители должно содержать множитель $(x + 5)$, то один из корней этого трехчлена равен -5.

Тогда имеем:

$$2 \cdot (-5)^2 + 9 \cdot (-5) + m = 0;$$
$$m = -5.$$

Ответ: $m = -5$.

1. Какой многочлен называют квадратным трехчленом?
2. Что называют корнем квадратного трехчлена?
3. Что называют дискриминантом квадратного трехчлена?
4. В каком случае квадратный трехчлен не имеет корней? имеет один корень? имеет два корня?
5. В каком случае квадратный трехчлен можно разложить на линейные множители?
6. По какой формуле квадратный трехчлен можно разложить на линейные множители?
7. В каком случае квадратный трехчлен нельзя разложить на линейные множители?

707.° Найдите корни квадратного трехчлена:
1) $x^2 - x - 12$; 3) $3x^2 - 16x + 5$; 5) $4x^2 + 28x + 49$;
2) $x^2 + 2x - 35$; 4) $16x^2 - 24x + 3$; 6) $3x^2 + 21x - 90$.

708.° Можно ли разложить на линейные множители квадратный трехчлен:
1) $x^2 - 12x + 6$; 3) $2a^2 - 8a + 8$;
2) $3x^2 - 8x + 6$; 4) $-6b^2 + b + 12$?

709.° Разложите на линейные множители квадратный трехчлен:
1) $x^2 - 7x + 12$; 7) $4x^2 + 3x - 22$;
2) $x^2 + 8x + 15$; 8) $-3a^2 + 8a + 3$;
3) $x^2 - 3x - 10$; 9) $\frac{1}{6}b^2 - \frac{5}{6}b + 1$;
4) $-x^2 - 5x - 6$; 10) $-2x^2 - 0{,}5x + 1{,}5$;
5) $-x^2 + x + 2$; 11) $0{,}4x^2 - 2x + 2{,}5$;
6) $6x^2 - 5x - 1$; 12) $-1{,}2m^2 + 2{,}6m - 1$.

710.° Разложите на линейные множители квадратный трехчлен:
1) $x^2 - 3x - 18$; 4) $5x^2 + 8x - 4$; 7) $-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$;
2) $x^2 + 5x - 14$; 5) $2a^2 - 3a + 1$; 8) $0{,}3m^2 - 3m + 7{,}5$.
3) $-x^2 + 3x + 4$; 6) $4b^2 - 11b - 3$;

711.° Сократите дробь:
1) $\frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$; 2) $\frac{x - 4}{x^2 - 10x + 24}$; 3) $\frac{3x - 15}{x^2 - x - 20}$;

4) $\dfrac{x^2-3x+2}{6x-6}$; 5) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x}$; 6) $\dfrac{x^2+4x}{x^2+2x-8}$.

712.° Сократите дробь:

1) $\dfrac{x^2-6x+5}{x-5}$; 2) $\dfrac{2x+12}{x^2+3x-18}$; 3) $\dfrac{x^2+9x+14}{x^2+7x}$.

713.• Сократите дробь:

1) $\dfrac{4a^2-9}{2a^2-9a-18}$; 3) $\dfrac{c^2-5c-6}{c^2-8c+12}$; 5) $\dfrac{x^2-16}{32-4x-x^2}$;

2) $\dfrac{2b^2-7b+3}{4b^2-4b+1}$; 4) $\dfrac{m^3-1}{m^2+9m-10}$; 6) $\dfrac{4n^2-9n+2}{2+9n-5n^2}$.

714.• Сократите дробь:

1) $\dfrac{4x^2+x-3}{x^2-1}$; 3) $\dfrac{a^2+5a+4}{a^2-a-20}$;

2) $\dfrac{2y^2+3y-5}{y^2-2y+1}$; 4) $\dfrac{3+20b-7b^2}{7b^2-6b-1}$.

715.•• При каком значении b разложение на линейные множители трехчлена:

1) $2x^2-5x+b$ содержит множитель $(x-3)$;

2) $-4x^2+bx+2$ содержит множитель $(x+1)$;

3) $3x^2-4x+b$ содержит множитель $(3x-2)$?

716.•• При каком значении a разложение на линейные множители трехчлена:

1) $2x^2-7x+a$ содержит множитель $(x-4)$;

2) $4x^2-ax+6$ содержит множитель $(2x+1)$?

717.•• Упростите выражение:

1) $\dfrac{9a^2-4}{2a^2-5a+2}\cdot\dfrac{a-2}{3a+2}+\dfrac{a-1}{1-2a}$;

2) $\dfrac{b-4}{b^3-b}:\left(\dfrac{b-1}{2b^2+3b+1}-\dfrac{1}{b^2-1}\right)$;

3) $\left(\dfrac{c+2}{c^2-c-6}-\dfrac{2c}{c^2-6c+9}\right):\dfrac{c^2+3c}{(2c-6)^2}$;

4) $\left(\dfrac{3}{m-4}+\dfrac{2m}{m+1}+\dfrac{4m-6}{m^2-3m-4}\right)\cdot\dfrac{4m-16}{2m-3}$.

718.•• Докажите, что при всех допустимых значениях a значение выражения не зависит от значения переменной:

1) $\dfrac{25a^2-36}{10a^2-9a+2}:\dfrac{5a+6}{5a-2}+\dfrac{9a-8}{1-2a}$;

2) $\left(\dfrac{2a}{a+3}+\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{4}{a^2+2a-3}\right):\dfrac{2a+1}{a+3}$.

719.** Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{x^2-6x+5}{x-1}$; 2) $y=\dfrac{3x^2-10x+3}{x-3}-\dfrac{x^2-4}{x+2}$.

720.** Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$; 2) $y=\dfrac{x^2-x-2}{x+1}-\dfrac{x^2-x-30}{x+5}$.

721.* Разложите на множители многочлен:

1) $x^2-6xy+5y^2$; 3) $3m^2-8mn-3n^2$;

2) $a^2+5ab-36b^2$; 4) $4x^2-5xy+y^2$.

722.* Разложите на множители многочлен:

1) $a^2-14ab+40b^2$; 2) $12b^2+bc-6c^2$.

723.* Решите уравнение:

1) $(a^2-a-6)\,x=a^2-9$;

2) $(a^2-8a+7)\,x=2a^2-13a-7$.

724.* Решите уравнение $(a^2+7a-8)\,x=a^2+16a+64$.

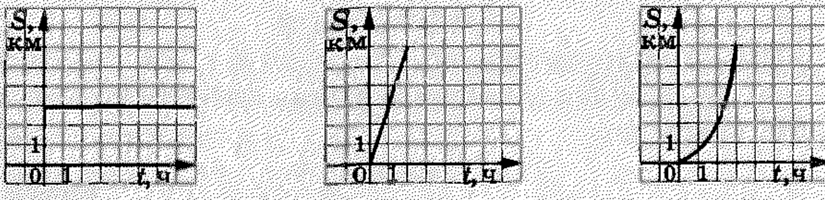
УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

725. Сократите дробь:

1) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-3}$; 5) $\dfrac{9a-b^2}{9a+6b\sqrt{a}+b^2}$;

2) $\dfrac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{10}-5\sqrt{2}}$; 4) $\dfrac{4a-2}{2\sqrt{a}+\sqrt{2}}$; 6) $\dfrac{a\sqrt{a}-8}{a+2\sqrt{a}+4}$.

726. Какой из графиков, представленных на рисунке 34, является графиком движения пешехода, идущего с постоянной скоростью? Определите скорость движения этого пешехода.



а) *б)* *в)*

Рис. 34

727. Смешали 2 л молока жирностью 8 % и 3 л молока жирностью 6 %. Какова жирность полученной смеси?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

728. Решите уравнение:

1) $x^2 = 9$;
2) $x^2 = -9$;
3) $(4x + 1)^2 = 9$;
4) $(x - 1)^2 = 5$;
5) $\sqrt{x} = 9$;
6) $\sqrt{x} = -9$.

729. Решите уравнение:

1) $\frac{4x-1}{x-2} = \frac{x+5}{x-2}$;
2) $\frac{2y^2-3y-20}{y-4} - y = 1$;
3) $\frac{5x-3}{x+1} - \frac{4x-2}{x+2} = 1$;
4) $\frac{1}{y-5} - \frac{1}{y+4} = \frac{9}{(y-5)(y+4)}$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

730. Рассматриваются все прямоугольники, длины сторон которых — натуральные числа. Каких прямоугольников больше: с периметром 1000 или с периметром 1002?

21. Решение уравнений, которые сводятся к квадратным уравнениям

ПРИМЕР 1

Решите уравнение $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Решение

Обозначим $x^2 = t$. Тогда $x^4 = t^2$. Получим квадратное уравнение с переменной t:

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Решая это уравнение, находим: $t_1 = 4$, $t_2 = 9$. Поскольку $t = x^2$, то решение данного уравнения сводится к решению двух уравнений:

$$x^2 = 4 \text{ и } x^2 = 9.$$

Отсюда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Ответ: -2; 2; -3; 3.

Определение. **Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют биквадратным уравнением.**

Заменой $x^2 = t$ биквадратное уравнение сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$. Такой способ решения уравнений называют **методом замены переменной.**

Метод замены переменной можно использовать не только при решении биквадратных уравнений.

ПРИМЕР 2

Решите уравнение $(2x - 1)^4 + (2x - 1)^2 - 2 = 0$.

Решение

Выполним замену $(2x - 1)^2 = t$. Тогда данное уравнение сводится к квадратному уравнению

$$t^2 + t - 2 = 0.$$

Отсюда $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Теперь надо решить следующие два уравнения:

$$(2x - 1)^2 = -2 \text{ и } (2x - 1)^2 = 1.$$

Первое из них корней не имеет. Из второго уравнения получаем: $2x - 1 = -1$ или $2x - 1 = 1$.

Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Ответ: 0; 1.

ПРИМЕР 3

Решите уравнение $6x + 5\sqrt{x} + 1 = 0$.

Решение

Пусть $\sqrt{x} = t$. Тогда $x = t^2$. Имеем: $6t^2 + 5t + 1 = 0$.

Отсюда $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Получаем два уравнения:

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{3}, \ \sqrt{x} = -\frac{1}{2}.$$

Так как $\sqrt{x} \geqslant 0$, то эти уравнения корней не имеют, а следовательно, и данное уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

ПРИМЕР 4

Решите уравнение $\frac{x^2 + 2x}{x - 6} = \frac{5x + 18}{x - 6}$.

Решение

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2+2x=5x+18, \\ x-6\neq 0. \end{cases}$

Отсюда:

$$\begin{cases} x^2-3x-18=0, \\ x\neq 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-3 \text{ или } x=6, \\ x\neq 6; \end{cases}$$

$$x=-3.$$

Ответ: -3.

ПРИМЕР 5

Решите уравнение $\dfrac{5}{x^2-4x+4}-\dfrac{4}{x^2-4}=\dfrac{1}{x+2}$.

Решение

Имеем: $\dfrac{5}{(x-2)^2}-\dfrac{4}{(x-2)(x+2)}-\dfrac{1}{x+2}=0;$

$$\frac{5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)}=0.$$

Следовательно, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2=0, \\ x\neq 2, \\ x\neq -2. \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} 5x+10-4x+8-x^2+4x-4=0, \\ x\neq 2, \\ x\neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5x-14=0, \\ x\neq 2, \\ x\neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=7 \text{ или } x=-2, \\ x\neq 2, \\ x\neq -2; \end{cases}$$

$$x=7.$$

Ответ: 7.

? Какое уравнение называют биквадратным?

731.° Решите уравнение:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;
3) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
4) $x^4 + 14x^2 - 32 = 0$;
5) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$;
6) $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0$.

732.° Решите уравнение:

1) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$;
2) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$;
3) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$;
4) $x^4 + 3x^2 - 70 = 0$;
5) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;
6) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

733.° Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1} = 0$;
2) $\frac{x^2 - 6x - 7}{x - 7} = 0$;
3) $\frac{3x^2 - x - 2}{1 - x} = 0$;
4) $\frac{x^2 - 8x}{x + 10} = \frac{20}{x + 10}$;
5) $\frac{x^2 - 14}{x + 2} = \frac{5x}{x + 2}$;
6) $\frac{x^2 + 10x}{x - 8} = \frac{12x + 48}{x - 8}$;
7) $\frac{x^2 + 4x}{x - 5} - \frac{9x + 50}{x - 5} = 0$;
8) $\frac{x^2 - 6x}{x - 3} + \frac{15 - 2x}{x - 3} = 0$;
9) $\frac{x^2 - 6x}{x - 4} = 4$;
10) $\frac{5x + 18}{x - 2} = x$;
11) $x + 1 = \frac{6}{x}$;
12) $5 - \frac{8}{x^2} = \frac{18}{x}$.

734.° Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 5x - 6}{x - 6} = 0$;
2) $\frac{4x^2 - 7x - 2}{x - 2} = 0$;
3) $\frac{2x^2 + 6}{x + 8} = \frac{13x}{x + 8}$;
4) $\frac{x^2 + 4x}{x + 7} = \frac{5x + 56}{x + 7}$;
5) $\frac{x^2 + 12x}{x + 4} - \frac{5x - 12}{x + 4} = 0$;
6) $\frac{x^2 - 3x}{x + 6} = 6$;
7) $\frac{2 - 33y}{y - 4} = 7y$;
8) $y - \frac{39}{y} = 10$.

735.• Решите уравнение:

1) $(x + 3)^4 - 3(x + 3)^2 - 4 = 0$;
2) $(2x + 1)^4 - 10(2x + 1)^2 + 9 = 0$;
3) $(6x - 7)^4 + 4(6x - 7)^2 + 3 = 0$;
4) $(x - 4)^4 + 2(x - 4)^2 - 8 = 0$.

736.* Решите уравнение:

1) $(3x-1)^4-20(3x-1)^2+64=0$;

2) $(2x+3)^4-24(2x+3)^2-25=0$.

737.* Решите уравнение:

1) $x-3\sqrt{x}+2=0$;

2) $x-\sqrt{x}-12=0$;

3) $3x-10\sqrt{x}+3=0$;

4) $8\sqrt{x}+x+7=0$;

5) $6\sqrt{x}-27+x=0$;

6) $8x-10\sqrt{x}+3=0$.

738.* Решите уравнение:

1) $x-6\sqrt{x}+8=0$;

2) $x-5\sqrt{x}-50=0$;

3) $2x-3\sqrt{x}+1=0$.

739.* Решите уравнение:

1) $\frac{x^2-9x+18}{x^2-9}=0$;

2) $\frac{3x^2-14x-5}{3x^2+x}=0$;

3) $\frac{x^2-12x+35}{x^2-10x+25}=0$;

4) $\frac{x^2-7x+6}{x^2+2x-3}=0$.

740.* Решите уравнение:

1) $\frac{x^2-9x-10}{x^2-1}=0$;

2) $\frac{x^2+5x-14}{x^2-6x+8}=0$.

741.* Решите уравнение:

1) $\frac{2y}{y-3}=\frac{3y+3}{y}$;

2) $\frac{3x+4}{x-3}=\frac{2x-9}{x+1}$;

3) $\frac{5x+2}{x-1}=\frac{4x+13}{x+7}$;

4) $\frac{2x^2-3x+1}{x-1}=3x-4$.

742.* Найдите корни уравнения:

1) $\frac{2x-13}{x-6}=\frac{x+6}{x}$;

2) $\frac{3x^2-4x-20}{x+2}=2x-5$.

743.* Найдите корни уравнения:

1) $\frac{10}{x+2}+\frac{9}{x}=1$;

2) $\frac{48}{14-x}-\frac{48}{14+x}=1$;

3) $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$;

4) $\frac{x-1}{x+3}+\frac{x+1}{x-3}=\frac{2x+18}{x^2-9}$;

5) $\frac{4x-10}{x-1}+\frac{x+6}{x+1}=4$;

6) $\frac{1}{x}-\frac{10}{x^2-5x}=\frac{3-x}{x-5}$;

7) $\frac{4x}{x^2+4x+4}-\frac{x-2}{x^2+2x}=\frac{1}{x}$;

8) $\frac{6}{x^2-36}-\frac{3}{x^2-6x}+\frac{x-12}{x^2+6x}=0$;

9) $\frac{x}{x+7}+\frac{x+7}{x-7}=\frac{63-5x}{x^2-49}$;

10) $\frac{4}{x^2-10x+25}-\frac{1}{x+5}=\frac{10}{x^2-25}$.

744.° Решите уравнение:

1) $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=\frac{1}{5}$;

2) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{16}{x^2-4}$;

3) $\frac{9}{x+3}+\frac{14}{x-3}=\frac{24}{x}$;

4) $\frac{2y+3}{2y+2}-\frac{y+1}{2y-2}+\frac{1}{y^2-1}=0$;

5) $\frac{3x}{x^2-10x+25}-\frac{x-3}{x^2-5x}=\frac{1}{x}$;

6) $\frac{x-20}{x^2+10x}+\frac{10}{x^2-100}-\frac{5}{x^2-10x}=0$.

745.° При каком значении переменной:

1) сумма дробей $\frac{24}{x-2}$ и $\frac{16}{x+2}$ равна 3;

2) значение дроби $\frac{42}{x}$ на $\frac{1}{4}$ больше значения дроби $\frac{36}{x+20}$?

746.° При каком значении переменной:

1) значение дроби $\frac{30}{x+3}$ на $\frac{1}{2}$ меньше значения дроби $\frac{30}{x}$;

2) значение дроби $\frac{20}{x}$ на 9 больше значения дроби $\frac{20}{x+18}$?

747.•• Решите уравнение:

1) $\frac{2x-10}{x^3+1}+\frac{4}{x+1}=\frac{5x-1}{x^2-x+1}$;

2) $\frac{6}{x^2-4x+3}+\frac{5-2x}{x-1}=\frac{3}{x-3}$;

3) $\frac{4x-6}{x+2}-\frac{x}{x+1}=\frac{14}{x^2+3x+2}$;

4) $\frac{x}{x^2-4}-\frac{3x-1}{x^2+x-6}=\frac{2}{x^2+5x+6}$.

748.** Решите уравнение:

1) $\frac{3x+2}{x^2+2x+4}+\frac{x^2+39}{x^3-8}=\frac{5}{x-2}$;

2) $\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x+3}=\frac{8}{x^2+2x-3}$.

749.** Решите уравнение методом замены переменной:

1) $(x^2-2)^2-8(x^2-2)+7=0$;

2) $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)-24=0$;

3) $(x^2-3x+1)(x^2-3x+3)=3$;

4) $(x^2+2x+2)(x^2+2x-4)=-5$.

750.** Решите уравнение методом замены переменной:

1) $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2-\frac{6(2x-1)}{x}+5=0$; 2) $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{3x-1}=3\frac{1}{3}$.

751.** Решите уравнение:

1) $(x^2-6x)^2+(x^2-6x)-56=0$;

2) $(x^2+8x+3)(x^2+8x+5)=63$;

3) $\frac{x^4}{(x-2)^2}-\frac{4x^2}{x-2}-5=0$;

4) $\frac{x+4}{x-3}-\frac{x-3}{x+4}=\frac{3}{2}$.

752.* Для каждого значения a решите уравнение:

1) $\frac{x^2-8x+7}{x-a}=0$;

2) $\frac{x-a}{x^2-8x+7}=0$;

3) $\frac{x^2-(3a+2)x+6a}{x-6}=0$;

4) $\frac{a(x-a)}{x+3}=0$.

753.* При каких значениях a уравнение $\frac{x^2-ax+5}{x-1}=0$ имеет один корень?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

754. Верно ли утверждение, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения

$$(a-1)^2\left(\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{a^2-2a+1}\right)+\frac{2}{a+1}$$

является положительным числом?

755. Каким числом, рациональным или иррациональным, является значение выражения $\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}-\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}$?

756. Постройте график функции

$$y=\begin{cases}-\frac{8}{x}, \text{ если } x<-2,\\ x^2, \text{ если } x\geqslant -2.\end{cases}$$

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

757. На экране монитора компьютера записано число 1. Ежесекундно компьютер прибавляет к числу, находящемуся на экране, сумму его цифр. Может ли через какое-то время на экране появиться число 123 456 789?

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Решение уравнений методом замены переменной

В п. 21 вы ознакомились с решением уравнений методом замены переменной. Рассмотрим еще несколько примеров, иллюстрирующих эффективность этого метода.

ПРИМЕР 1

Решите уравнение $\frac{x^2-3x-6}{x}-\frac{8x}{x^2-3x-6}=-2$.

Решение

Пусть $\frac{x^2-3x-6}{x}=t$. Тогда $\frac{8x}{x^2-3x-6}=\frac{8}{t}$. Получаем уравнение $t-\frac{8}{t}=-2$, равносильное системе $\begin{cases}t^2+2t-8=0,\\ t\neq 0.\end{cases}$

Отсюда $t_1=-4$, $t_2=2$.

Теперь решение данного уравнения сводится к решению двух уравнений:

1) $\frac{x^2-3x-6}{x}=-4$;

2) $\frac{x^2-3x-6}{x}=2$.

Решите эти уравнения самостоятельно.

Ответ: -3; -1; 2; 6.

ПРИМЕР 2

Решите уравнение $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$.

Решение

Запишем это уравнение следующим образом:

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 5 + 4 = 0;$$
$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5(2x^2 + 3x - 1) + 4 = 0.$$

Пусть $2x^2 + 3x - 1 = t$. Тогда $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

Следовательно, $2x^2 + 3x - 1 = 1$ или $2x^2 + 3x - 1 = 4$.

Решив эти два квадратных уравнения, получим ответ.

Ответ: -2; $\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{2}$; 1.

ПРИМЕР 3

Решите уравнение $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$.

Решение

С помощью проверки легко убедиться, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения. Тогда, разделив обе части этого уравнения на x^2, получим равносильное уравнение

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \cdot \frac{2x^2 + 5x + 1}{x} = 9.$$

Отсюда $\left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9$.

Произведем замену: $2x + \frac{1}{x} - 3 = t$. Тогда $t(t + 8) = 9$.

Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = -9$.

С учетом замены получаем два уравнения:

1) $2x + \frac{1}{x} - 3 = 1$;

2) $2x + \frac{1}{x} - 3 = -9$.

Предлагаем решить эти уравнения самостоятельно.

Ответ: $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$, $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$, $\frac{-3 - \sqrt{7}}{2}$, $\frac{-3 + \sqrt{7}}{2}$.

ПРИМЕР 4

Решите уравнение $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$.

Решение

Пусть $x+\frac{1}{x}=t$. Тогда

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=t^2;\ x^2+2+\frac{1}{x^2}=t^2;\ x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2.$$

Такая замена позволяет переписать исходное уравнение следующим образом:

$$7t-2\,(t^2-2)=9;$$
$$2t^2-7t+5=0.$$

Отсюда $t_1=1,\ t_2=\frac{5}{2}$.

Следовательно, $x+\frac{1}{x}=1$ или $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$.

Предлагаем решить эти уравнения самостоятельно.

Ответ: $\frac{1}{2}$; 2.

ПРИМЕР 5

Решите уравнение $(x^2-2x+2)^2+3x\,(x^2-2x+2)=$ $=10x^2$.

Решение

С помощью проверки убедимся, что $x=0$ не является корнем данного уравнения. Тогда уравнение

$$\frac{(x^2-2x+2)^2}{x^2}+\frac{3\,(x^2-2x+2)}{x}=10,$$

полученное в результате деления обеих частей исходного уравнения на x^2, равносильно исходному.

Замена $\frac{x^2-2x+2}{x}=t$ приводит к квадратному уравнению

$$t^2+3t-10=0.$$

Закончите решение самостоятельно.

Ответ: $2-\sqrt{2}$; $2+\sqrt{2}$; -1; -2.

После рассмотрения приведенных примеров может возникнуть вопрос: почему при решении этих уравнений мы не пытались упростить их с помощью тождественных преобразований?

Дело в том, что попытка упростить уравнение привела бы к необходимости решать уравнение вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (вы можете убедиться в этом самостоятельно). При $a \neq 0$ такое уравнение называют **уравнением четвертой степени**, при $a = 0$ и $b \neq 0$ его называют **уравнением третьей степени.** Частным случаем этого уравнения, когда $b = 0$ и $d = 0$, является биквадратное уравнение. Его вы решать умеете.

В общем случае для решения уравнений третьей и четвертой степеней необходимо знать формулы нахождения их корней. С историей открытия этих формул вы можете ознакомиться в следующем рассказе.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решите уравнение:

1) $\dfrac{3x^2 - 9x}{2} - \dfrac{12}{x^2 - 3x} = 3;$

2) $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{8}{(x-1)(x+4)} = 1;$

3) $x(x+3)(x+5)(x+8) = 100;$

4) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2;$

5) $7\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 9;$

6) $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1);$

7) $(x-6)^4 + (x-4)^4 = 82.$

Ответ: 1) -1; 1; 2; 4; 2) -3; 0; $\dfrac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$; 3) $-4 \pm \sqrt{21}$; 4) -6; -4; $\dfrac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$; 5) $\dfrac{1}{2}$; 2; 6) 2; 4; -1; $-\dfrac{1}{2}$; 7) 3; 7.

Секретное оружие Сципиона Даль Ферро

Вы легко решите каждое из следующих уравнений третьей степени:

$$x^3 - 8 = 0,\ x^3 + x^2 = 0,\ x^3 - x = 0.$$

Все они являются частными случаями уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где x — переменная, a, b, c и d — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Вывести формулу его корней — задача сложная. Недаром появление этой формулы считают значительным математическим открытием XVI в.

Первым нашел решение уравнения вида $x^3 + px = q$, где p и q — положительные числа, итальянский математик Сципион Даль Ферро (1465–1526). Найденную формулу он хранил в секрете. Это было обусловлено тем, что карьера ученого того времени во многом зависела от его выступлений в публичных математических турнирах. Поэтому было выгодно хранить открытия в тайне и использовать их при случае как «секретное оружие».

После смерти Даль Ферро его ученик Фиоре, владея секретной формулой, вызвал на математический поединок талантливого математика-самоучку Никколо Тарталья (1499–1557). За несколько дней до турнира Тарталья сам вывел формулу корней уравнения третьей степени. Диспут, на котором Тарталья одержал убедительную победу, состоялся 20 февраля 1535 г.

Впервые секретная формула была опубликована в книге известного итальянского ученого Джероламо Кардано (1501–1576) «Великое искусство». В этой работе также описан метод решения уравнения четвертой степени, открытый Лудовико Феррари (1522–1565).

В XVII–XVIII вв. усилия многих ведущих математиков сосредоточились на поиске формулы для решения уравнений 5-й степени. Получению результата способствовали

Никколо Тарталья

Джероламо Кардано

Нильс Хенрик Абель

работы итальянского математика Паоло Руффини (1765–1822) и норвежского математика Нильса Хенрика Абеля (1802–1829). Сам результат оказался весьма неожиданным: было доказано, что не существует формулы, с помощью которой можно выразить корни любого уравнения 5-й степени и выше через коэффициенты уравнения, используя лишь четыре арифметических действия и действие извлечения корня.

22. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций

В п. 7 вы уже ознакомились с использованием рациональных уравнений как математических моделей реальных ситуаций. Рассмотрим еще несколько примеров.

ПРИМЕР 1

Из пункта A выехал велосипедист, а через 45 мин после этого в том же направлении выехал грузовик, догнавший велосипедиста на расстоянии 15 км от пункта A. Найдите скорость велосипедиста и скорость грузовика, если скорость грузовика на 18 км/ч больше скорости велосипедиста.

Решение

Пусть скорость велосипедиста равна x км/ч, тогда скорость грузовика составляет $(x + 18)$ км/ч. Велосипедист проезжает 15 км за $\frac{15}{x}$ ч, а грузовик — за $\frac{15}{x+18}$ ч. Поскольку грузовик проехал 15 км на 45 мин, то есть на $\frac{3}{4}$ ч, быстрее, чем велосипедист, то имеем уравнение $\frac{15}{x}-\frac{15}{x+18}=\frac{3}{4}$ или

$$\frac{5}{x}-\frac{5}{x+18}=\frac{1}{4}.$$

Решим это уравнение:

$$\frac{20x+360-20x-x^2-18x}{4x(x+18)}=0;$$

$$\begin{cases} x^2 + 18x - 360 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -18; \end{cases}$$

$$x = 12 \text{ или } x = -30.$$

Корень −30 не удовлетворяет условию задачи.

Следовательно, скорость велосипедиста равна 12 км/ч, а скорость грузовика составляет 12 + 18 = 30 (км/ч).

Ответ: 12 км/ч, 30 км/ч.

ПРИМЕР 2

Одна бригада работала на ремонте дороги 7 ч, после чего к ней присоединилась другая бригада. Через 2 ч их совместной работы ремонт был закончен. За сколько часов может отремонтировать дорогу каждая бригада, работая самостоятельно, если первой бригаде для этого нужно на 4 ч больше, чем второй?

Решение

Пусть первая бригада может самостоятельно отремонтировать дорогу за x ч, тогда второй для этого нужно $(x - 4)$ ч. За 1 ч первая бригада ремонтирует $\frac{1}{x}$ часть дороги, а вторая — $\frac{1}{x-4}$ часть дороги. Первая бригада работала 9 ч и отремонтировала $\frac{9}{x}$ дороги, а вторая бригада работала 2 ч и отремонтировала соответственно $\frac{2}{x-4}$ дороги. Так как в результате была отремонтирована вся дорога, то

$$\frac{9}{x} + \frac{2}{x-4} = 1.$$

Полученное уравнение имеет два корня: $x_1 = 12$ и $x_2 = 3$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи, поскольку тогда вторая бригада должна была бы отремонтировать дорогу за 3 − 4 = −1 (ч), что не имеет смысла.

Следовательно, первая бригада может отремонтировать дорогу за 12 ч, а вторая — за 8 ч.

Ответ: 12 ч, 8 ч.

ПРИМЕР 3

Водный раствор соли содержал 120 г воды. После того как к раствору добавили 10 г соли, ее концентрация увеличилась на 5 %. Сколько граммов соли содержал раствор сначала?

Решение

Пусть исходный раствор содержал x г соли. Тогда его масса была равна $(x + 120)$ г, а масса соли составляла $\frac{x}{x+120}$ часть массы всего раствора. После того как к раствору добавили 10 г соли, ее масса в растворе составила $(x + 10)$ г, а масса раствора — $(x + 130)$ г. Теперь соль составляет $\frac{x+10}{x+130}$ часть раствора, что на 5 %, то есть на $\frac{1}{20}$, больше, чем $\frac{x}{x+120}$. Отсюда имеем $\frac{x+10}{x+130}-\frac{x}{x+120}=\frac{1}{20}$.

Полученное уравнение имеет два корня: $x_1 = 30$ и $x_2 = -280$, из которых второй корень не удовлетворяет условию задачи.

Следовательно, раствор содержал сначала 30 г соли.

Ответ: 30 г.

758.° Первые 150 км дороги из города A в город B автомобиль проехал с некоторой скоростью, а последние 240 км — со скоростью на 5 км/ч большей. Найдите начальную скорость автомобиля, если на весь путь из города A в город B он затратил 5 ч.

759.° Один мотоциклист проезжает 90 км на 18 мин быстрее другого, поскольку его скорость на 10 км/ч больше скорости второго мотоциклиста. Найдите скорость каждого мотоциклиста.

760.° Из одного города в другой, расстояние между которыми 240 км, выехали одновременно автобус и автомобиль. Автобус двигался со скоростью на 20 км/ч меньшей, чем скорость автомобиля, и прибыл в пункт назначения на 1 ч позже автомобиля. Найдите скорость автомобиля и скорость автобуса.

761.° Поезд опаздывал на 10 мин. Чтобы прибыть на станцию назначения вовремя, он за 80 км от этой станции увеличил свою скорость на 16 км/ч. Найдите начальную скорость поезда.

762.° Расстояние от села Вишневое до села Яблоневое, равное 15 км, всадник проскакал с определенной скоростью, а возвращался со скоростью на 3 км/ч большей. На обратный путь он затратил на 15 мин меньше, чем на путь от Вишневого до Яблоневого. Найдите начальную скорость всадника.

763.° Машинистка должна была за определенное время напечатать 180 страниц. Однако она выполнила эту работу на 5 ч раньше срока, так как печатала на 3 страницы в час больше, чем планировала. Сколько страниц в час печатала машинистка?

764.° Один насос перекачивает 90 $м^3$ воды на 1 ч быстрее, чем другой 100 $м^3$. Сколько воды ежечасно перекачивает каждый насос, если первый перекачивает за каждый час на 5 $м^3$ воды больше, чем второй?

765.° Рабочий должен был за определенное время изготовить 72 детали. Однако ежедневно он изготавливал на 4 детали больше, чем планировал, и закончил работу на 3 дня раньше срока. За сколько дней он выполнил работу?

766.° Катер прошел 16 км по течению реки и 30 км против течения, затратив на весь путь 1 ч 30 мин. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки составляет 1 км/ч.

767.° Лодка проплыла 15 км по течению реки и вернулась, затратив на обратный путь на 1 ч больше. Найдите скорость лодки по течению реки, если скорость течения составляет 2 км/ч.

768.° По течению реки от пристани отправился плот. Через 4 ч от той же пристани в том же направлении отошла лодка, которая догнала плот на расстоянии 15 км от пристани. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки составляет 12 км/ч.

769.° Катер проплыл 45 км по течению реки и 28 км против течения, затратив на весь путь 4 ч. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость катера составляет 18 км/ч.

770.* Турист проехал $\frac{5}{8}$ всего пути на катере, а остальную часть — на автомобиле. Скорость автомобиля на 20 км/ч больше скорости катера. На автомобиле он ехал на 1 ч 30 мин меньше, чем на катере. Найдите скорость автомобиля и скорость катера, если всего турист преодолел 160 км.

771.* Междугородный автобус должен был проехать 72 км. Проехав 24 км, он задержался у железнодорожного переезда на 12 мин. Потом он увеличил скорость на 12 км/ч и прибыл в пункт назначения с опозданием на 4 мин. Найдите начальную скорость автобуса.

772.* Группа школьников выехала на экскурсию из города A в город B автобусом, а вернулась в город A по железной дороге, затратив на обратный путь на 30 мин больше, чем на путь в город B. Найдите скорость поезда, если она на 20 км/ч меньше, чем скорость автобуса, длина шоссе между городами A и B составляет 160 км, а длина железной дороги — 150 км.

773.* Турист проплыл на байдарке 4 км по озеру и 5 км по течению реки за то же время, за которое он проплыл бы 6 км против течения. С какой скоростью турист плыл по озеру, если скорость течения реки равна 2 км/ч?

774.* Теплоход прошел 16 км по озеру, а затем 18 км по реке, берущей начало из этого озера, за 1 ч. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения реки составляет 4 км/ч.

775.* Знаменатель обыкновенной дроби на 3 больше ее числителя. Если числитель этой дроби увеличить на 4, а знаменатель — на 8, то полученная дробь будет на $\frac{1}{6}$ больше данной. Найдите данную дробь.

776.* Числитель обыкновенной дроби на 5 меньше ее знаменателя. Если числитель этой дроби уменьшить на 3, а знаменатель увеличить на 4, то полученная дробь будет на $\frac{1}{3}$ меньше данной. Найдите эту дробь.

777.* Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить производственное задание за 20 дней. За сколько дней может выполнить это задание каждый из них, работая самостоятельно, если одному из них нужно для этого на 9 дней больше, чем другому?

778.* Чтобы покрасить фасад дома, одному маляру требуется на 5 ч больше, чем другому. После того как первый маляр проработал 3 ч, его сменил второй маляр, который проработал 2 ч. Оказалось, что окрашено 40 % фасада. За сколько часов может покрасить фасад каждый маляр, работая самостоятельно?

779.* В первый день тракторист пахал поле 6 ч. На второй день к нему присоединился другой тракторист, и через 8 ч совместной работы они закончили пахоту. За сколько часов может вспахать это поле каждый тракторист, работая отдельно, если первому для этого нужно на 3 ч меньше, чем второму?

780.* К раствору, содержащему 20 г соли, добавили 100 г воды, после чего концентрация соли уменьшилась на 10 %. Сколько граммов воды содержал раствор сначала?

781.* Кусок сплава меди и цинка, содержащий 10 кг цинка, сплавили с 10 кг меди и получили сплав, в котором на 5 % меди больше, чем в исходном. Сколько килограммов меди содержал кусок исходного сплава?

782.** Через 2 ч 40 мин после отправления плота от пристани *A* по течению реки навстречу ему от пристани *B* отошел катер. Найдите скорость течения реки, если плот и катер встретились на расстоянии 14 км от пристани *A*, скорость катера в стоячей воде равна 12 км/ч, а расстояние между пристанями *A* и *B* равно 32 км.

783.** К бассейну подведены две трубы. Через одну трубу бассейн наполняют водой, а через другую опоражнивают, причем на опорожнение бассейна нужно на 1 ч больше, чем на его наполнение. Если же открыть обе трубы одновременно, то бассейн наполнится водой за 30 ч. За сколько часов можно наполнить пустой бассейн водой через первую трубу?

784.** Для наполнения бассейна через первую трубу нужно столько же времени, сколько и для наполнения через вторую и третью трубы одновременно. Через первую трубу бассейн наполняется на 2 ч быстрее, чем через вторую, и на 8 ч быстрее, чем через третью. Сколько времени требуется для наполнения бассейна через каждую трубу?

785.** Автобус должен был проехать расстояние между двумя городами, равное 400 км, с некоторой скоростью. Проехав 2 ч с запланированной скоростью, он остановился на 20 мин и, чтобы прибыть в пункт назначения вовремя, увеличил скорость движения на 10 км/ч. С какой скоростью автобус должен был проехать расстояние между городами?

786.** Рабочий за определенное время должен был изготовить 360 деталей. Первые 5 дней он изготавливал ежедневно запланированное количество деталей, а затем ежедневно изготавливал на 4 детали больше, и уже за день до срока изготовил 372 детали. Сколько деталей ежедневно должен был изготавливать по плану рабочий?

787.* Чтобы выполнить определенное производственное задание, одному рабочему требуется на 12 ч меньше, чем другому, и на 4 ч больше, чем обоим рабочим для совместного выполнения задания. За сколько часов может выполнить это задание первый рабочий?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

788. Вычислите:

1) $(27 \cdot 3^{-4})^2$; 2) $\dfrac{7^{-4} \cdot 7^{-9}}{7^{-12}}$; 3) $(10^9)^2 \cdot 1000^{-6}$.

789. Найдите значение выражения $a^2 - 2\sqrt{5}a + 2$ при $a = \sqrt{5} - 3$.

790. Постройте график функции $y = -2x + 4$.

1) Чему равен нуль данной функции?

2) Укажите значения x, при которых $y > 0$.

3) Проходит ли график функции через точку $M(-36; 68)$?

791. При каком значении k график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A\left(-\sqrt{12}; \sqrt{3}\right)$? Постройте этот график.

792. Какое из равенств верно: $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} = \sqrt{3}-2$ или $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} = 2-\sqrt{3}$? Ответ обоснуйте.

793. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{1}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}$; 2) $\left(\frac{a^4}{b^{-5}}\right)^{-3}$; 3) $(0{,}2a^{-1}b^2)^2 \cdot 4a^5b^{-4}$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

794. На тарелке лежат 9 кусочков сыра разной массы. Докажите, что можно один из кусочков сыра разрезать на две части так, что полученные 10 кусочков можно будет разложить на две тарелки, и при этом масса сыра на каждой из них будет одинаковой.

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 6

1. Найдите корни квадратного трехчлена $5x^2 - x - 6$.

А) 2; −0,6; Б) −2; 0,6; В) 1; −1,2; Г) −1; 1,2.

2. Разложите на множители квадратный трехчлен

$$-x^2 - 4x + 5.$$

А) $(x-1)(x+5)$; В) $-(x-1)(x+5)$;

Б) $(x+1)(x-5)$; Г) $-(x+1)(x-5)$.

3. Сократите дробь $\frac{x^2+7x+12}{x^2+x-6}$.

А) $\frac{x+4}{x-2}$; Б) $\frac{x-4}{x-2}$; В) $\frac{x+4}{x+2}$; Г) $\frac{x-4}{x+2}$.

4. Решите уравнение $x^4 + 7x^2 - 18 = 0$.

А) −3; 3; В) -3; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 3;

Б) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; Г) $\sqrt{2}$; 3.

5. Найдите корни уравнения

$$(x^2-4x)^2 - 2(x^2-4x) - 15 = 0.$$

А) −1; 1; 3; 5; Б) −1; 5; В) 1; 3; Г) 1; 3; 5.

6. Решите уравнение $x-\sqrt{x}-12=0$.

А) -3; 4; Б) -2; 2; В) 16; Г) 9; 16.

7. Решите уравнение $\dfrac{x^2-6}{x-3}=\dfrac{x}{x-3}$.

А) -2; Б) 3; В) -2; 3; Г) -3; 2.

8. Решите уравнение $\dfrac{3x-1}{x}-\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{10-9x}{x^2-2x}$.

А) $-\dfrac{4}{3}$; 2; Б) $\dfrac{4}{3}$; -2; В) $-\dfrac{4}{3}$; Г) 2.

9. Из одного города в другой, расстояние между которыми равно 350 км, выехали одновременно грузовой и легковой автомобили. Скорость грузовика на 20 км/ч меньше скорости легкового автомобиля, в результате чего грузовик прибыл к пункту назначения на 2 ч позже легкового автомобиля.

Пусть скорость грузового автомобиля равна x км/ч. Какое из уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии задачи?

А) $\dfrac{350}{x}-\dfrac{350}{x+20}=2$; В) $\dfrac{350}{x+20}-\dfrac{350}{x}=2$;

Б) $\dfrac{350}{x}+\dfrac{350}{x+20}=2$; Г) $\dfrac{350}{x}-\dfrac{350}{x-20}=2$.

10. Катер проплыл 30 км по течению реки и вернулся обратно, затратив на весь путь 3 ч 10 мин. Скорость течения реки равна 1 км/ч.

Пусть собственная скорость катера составляет x км/ч. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

А) $\dfrac{30}{x+1}+\dfrac{30}{x-1}=3{,}1$; В) $\dfrac{30}{x+1}+\dfrac{30}{x}=3\dfrac{1}{6}$;

Б) $\dfrac{30}{x+1}-\dfrac{30}{x-1}=3{,}1$; Г) $\dfrac{30}{x+1}+\dfrac{30}{x-1}=3\dfrac{1}{6}$.

11. Рабочий должен был за некоторое время изготовить 96 деталей. Ежедневно он изготавливал на 2 детали больше, чем планировал, и закончил работу на 3 дня раньше срока.

Пусть рабочий изготовлял ежедневно x деталей. Какое из уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии задачи?

А) $\frac{96}{x} - \frac{96}{x-2} = 3$;

Б) $\frac{96}{x-2} - \frac{96}{x} = 3$;

В) $\frac{96}{x} - \frac{96}{x-3} = 2$;

Г) $\frac{96}{x-3} - \frac{96}{x} = 2$.

12. **Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторое производственное задание за 10 ч, причем первый из них может выполнить это задание самостоятельно на 15 ч быстрее второго.**

Пусть первый рабочий может выполнить самостоятельно задание за x ч. Какое из уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии задачи?

А) $\frac{15}{x} + \frac{15}{10-x} = 1$;

Б) $\frac{15}{x} + \frac{15}{x-10} = 1$;

В) $\frac{10}{x} + \frac{10}{x+15} = 1$;

Г) $\frac{10}{x} + \frac{10}{x-15} = 1$.

ИТОГИ

В этом параграфе:

- были введены следующие понятия:
  - уравнение первой степени;
  - квадратное уравнение;
  - коэффициенты квадратного уравнения;
  - неполное квадратное уравнение;
  - приведенное квадратное уравнение;
  - дискриминант квадратного уравнения;
  - квадратный трехчлен;
  - корень квадратного трехчлена;
  - дискриминант квадратного трехчлена;
  - биквадратное уравнение;
- вы научились:
  - решать неполные квадратные уравнения;
  - решать квадратные уравнения с помощью формулы корней квадратного уравнения;
  - применять теорему Виета;
  - раскладывать на множители квадратный трехчлен с неотрицательным дискриминантом;
  - решать рациональные уравнения, которые сводятся к квадратным;
  - решать некоторые уравнения методом замены переменной;
- вы изучили:
  - алгоритм решения неполных квадратных уравнений;
  - формулу корней квадратного уравнения;
  - теорему Виета (прямую и обратную);
  - правило разложения квадратного трехчлена на множители.

Упражнения для повторения курса алгебры 8 класса

795. Найдите значение выражения:

1) $\frac{3m-n}{m+2n}$, если $m=-4$, $n=3$;

2) $\frac{a^2-2a}{4a+2}$, если $a=-0{,}8$.

796. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $7b-11$;

2) $\frac{9}{x}$;

3) $\frac{5}{2-y}$;

4) $\frac{m-3}{7}$;

5) $\frac{3+t}{4-t}$;

6) $\frac{2x}{x-1}-\frac{3}{x-6}$;

7) $\frac{5}{x^8+3}$;

8) $\frac{x-2}{|x|+7}$;

9) $\frac{4}{x^2-25}$;

10) $\frac{3}{|x|-5}$;

11) $\frac{x}{8+\frac{4}{x}}$;

12) $\frac{5}{6-\frac{2}{x}}$;

13) $\frac{1}{(x-3)(x-4)}$;

14) $\frac{x+8}{(x+8)(x-3)}$?

797. Упростите выражение:

1) $(5x-7y)(5x+7y)+(7x-5y)(7x+5y)$;

2) $(x+4)^2-(x-2)(x+2)$;

3) $(8a-3b)(8a+3b)-(6a-5b)^2$;

4) $(m-3)(m+4)-(m+2)^2+(4-m)(m+4)$;

5) $0{,}4a(5a-1)(5a+1)-0{,}5(5-2a)^2+0{,}3(3+2a)\times$ $\times(3-2a)$.

798. Представьте частное в виде дроби и сократите полученную дробь:

1) $4mn^2p:(28m^2np^6)$;

2) $-30x^5y^3:(36x^4y^8)$;

3) $-63xy^9:(-72xy^7)$.

799. Сократите дробь:

1) $\frac{3x-6y}{3x}$;
2) $\frac{3a+9b}{4a+12b}$;
3) $\frac{a^2-49}{3a+21}$;
4) $\frac{12x^2-4x}{2-6x}$;
5) $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$;
6) $\frac{b^7+b^4}{b^2+b^5}$;
7) $\frac{a^3+64}{3a+12}$;
8) $\frac{xb-5y+5b-xy}{x^2-25}$;
9) $\frac{7m^2-7m+7}{14m^3+14}$;
10) $\frac{a^2+bc-b^2+ac}{ab+c^2+ac-b^2}$;
11) $\frac{20mn^2-20m^2n+5m^3}{10mn-5m^2}$;
12) $\frac{x^2-yz+xz-y^2}{x^2+yz-xz-y^2}$.

800. Найдите значение выражения:

1) $\frac{x^5y^7-x^3y^9}{x^3y^7}$, если $x=-0{,}2$, $y=0{,}5$;
2) $\frac{4a^2-36}{5a^2-30a+45}$, если $a=2$;
3) $\frac{(3a+3b)^2}{3a^2-3b^2}$, если $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{6}$;
4) $\frac{20x^2-140xy+245y^2}{4x-14y}$, если $2x-7y=-0{,}5$.

801. Сократите дробь (n — натуральное число):

1) $\frac{100^n}{2^{2n+3}\cdot5^{2n+1}}$;
2) $\frac{2^{2n+1}\cdot7^{n+1}}{6\cdot28^n}$;
3) $\frac{5^{n+1}-5^n}{2\cdot5^n}$;
4) $\frac{18^n}{3^{2n+2}\cdot2^{n+3}}$;
5) $\frac{41\cdot9^n}{9^{n+2}+9^n}$.

802. Решите уравнение:

1) $(a+2)x=7$;
2) $(a+6)x=a+6$;
3) $(a+3)x=a^2+6a+9$;
4) $(a^2-4)x=a-2$.

803. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{7a}{22}+\frac{4a}{22}$;
2) $\frac{8x}{3y}-\frac{5x}{3y}$;
3) $\frac{7x-2y}{15p}+\frac{3x+7y}{15p}$;
4) $\frac{x+y}{9p}-\frac{x}{9p}$;

5) $\frac{a}{8}-\frac{a-b}{8}$;

6) $\frac{7p-17}{5k}+\frac{7-2p}{5k}$;

7) $\frac{6a^2-4a}{15a}-\frac{a^2+a}{15a}$;

8) $\frac{x-y}{8}+\frac{x+y}{8}$;

9) $\frac{10x-6}{x}-\frac{4x+11}{x}$.

804. Упростите выражение:

1) $\frac{7y}{y^2-4}-\frac{14}{y^2-4}$;

2) $\frac{y^2-3y}{25-y^2}-\frac{7y-25}{25-y^2}$;

3) $\frac{9p+5}{3p+6}-\frac{10p-12}{3p+6}+\frac{9p-1}{3p+6}$;

4) $\frac{7x+5}{3-x}+\frac{5x+11}{x-3}$;

5) $\frac{(3a-1)^2}{4a-4}+\frac{(a-3)^2}{4-4a}$;

6) $\frac{x^2-3x}{(2-x)^2}-\frac{x-4}{(x-2)^2}$;

7) $\frac{7}{a-2}-\frac{b}{2-a}$;

8) $\frac{6a}{5-a}-\frac{4a}{a-5}$.

805. Выполните сложение и вычитание дробей:

1) $\frac{8}{x}-\frac{5}{y}$;

2) $\frac{7}{ab}+\frac{5}{b}$;

3) $\frac{5}{24xy}-\frac{7}{18xy}$;

4) $\frac{5b^2-8b+1}{a^2b^2}-\frac{2b-1}{a^2b}$.

806. Выполните действия:

1) $\frac{2a-1}{a-4}-\frac{3a+2}{2(a-4)}$;

2) $\frac{x+2}{3x+9}-\frac{4-x}{5x+15}$;

3) $\frac{m+1}{m-3}-\frac{m+2}{m+3}$;

4) $\frac{x}{x+y}-\frac{2y^2}{y^2-x^2}-\frac{y}{x-y}$;

5) $\frac{m}{3m-2n}-\frac{3m^2-3mn}{9m^2-12m+4n^2}$;

6) $\frac{a+3}{a^2-2a}-\frac{a-2}{5a-10}+\frac{a+2}{5a}$;

7) $\frac{3}{3a-3}-\frac{a-1}{2a^2-4a+2}$;

8) $2-\frac{14}{m-2}-m$;

9) $\frac{2x+1}{x^2-6x+9}-\frac{8}{x^2-9}-\frac{2x-1}{x^2+6x+9}$.

807. Докажите тождество:

$$\frac{2}{(b-c)(c-a)}-\frac{2}{(a-b)(c-b)}+\frac{2}{(a-c)(b-a)}=0.$$

808. Запишите дробь в виде суммы целого выражения и дроби:

1) $\frac{a-7}{a}$; 2) $\frac{a^2+2a-2}{a+2}$; 3) $\frac{x^2+3x-2}{x-3}$.

809. Известно, что $\frac{x}{y}=4$. Найдите значение выражения:

1) $\frac{x+y}{x}$; 2) $\frac{3x+4y}{x}$.

810. Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения — натуральное число:

1) $\frac{12n^2-5n+33}{n}$; 3) $\frac{10-4n}{n}$;

2) $\frac{n^3-6n^2+54}{n^2}$; 4) $\frac{12-3n}{n}$.

811. Выразите переменную x через другие переменные, если:

1) $x+\frac{a}{b}=1$; 2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=b$; 3) $\frac{a}{b}+\frac{x}{4}=\frac{b}{a}$.

812. Докажите тождество:

1) $\frac{1}{a^2+12a+36}+\frac{2}{36-a^2}+\frac{1}{a^2-12a+36}=\frac{144}{(a^2-36)^2}$;

2) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$.

813.* Упростите выражение:

$$\frac{1}{a(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+9)}+\frac{1}{(a+9)(a+12)}.$$

814.* Докажите, что если $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{a-b+c}{a-b-c}$, то $b=0$ или $c=0$.

815. Выполните умножение:

1) $\frac{9x}{y}\cdot\frac{y}{24x}$; 3) $\frac{16a^4}{21b^5}\cdot\frac{9b^2}{10a^3}$;

2) $\frac{m^2n^3}{25t}\cdot\left(\frac{-5t}{mn^2}\right)$; 4) $26m^2\cdot\frac{3n^2}{13m^4}$;

5) $\frac{24t^7}{16u^8} \cdot 34u^5$;

6) $\frac{4x^5y^2}{7a^3b} \cdot \frac{21xb^2}{10y^3a^2} \cdot \frac{25a^5y}{3x^4b}$.

816. Выполните умножение:

1) $\frac{2xy - y^2}{9} \cdot \frac{36}{y^4}$;

2) $\frac{a^2 - 7ab}{a^2 + 2ab} \cdot \frac{a^2b + 2ab^2}{a^3 - 7a^2b}$;

3) $\frac{m^2 - 64}{m^3 - 9m^2} \cdot \frac{m^2 - 81}{m^2 + 8m}$;

4) $\frac{2x^2 - 16x + 32}{3x^2 - 6x + 12} \cdot \frac{x^3 + 8}{4x^2 - 64}$.

817. Представьте выражение в виде дроби:

1) $\left(\frac{a^5}{x^4}\right)^2$;

2) $\left(-\frac{4y}{3m^2}\right)^4$;

3) $\left(-\frac{10x^2y^5}{3a^4b^3}\right)^3$;

4) $\left(-\frac{2a^4b^4}{25x^5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{5x^2}{4a^2b^3}\right)^3$.

818. Выполните деление:

1) $\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 100} : \frac{x - 5}{x - 10}$;

2) $\frac{a^2 - 1}{a - 8} : \frac{a^2 + 2a + 1}{a - 8}$;

3) $\frac{ab + b^2}{8b} : \frac{ab + a^2}{2a}$;

4) $\frac{2c - 3}{c - 1} : (2c - 3)$;

5) $\frac{x^2 - 16y^2}{25x^2 - 4y^2} : \frac{x^2 + 8xy + 16y^2}{25x^2 + 20xy + 4y^2}$;

6) $\frac{n^2 - 3n}{49n^2 - 1} : \frac{n^4 - 27n}{49n^2 - 14n + 1}$;

7) $\frac{m^{12} - n^{15}}{2m^{10} - 8n^{14}} : \frac{5m^8 + 5m^4n^5 + 5n^{10}}{3m^5 + 6n^7}$;

8) $\frac{5a^2 - 20ab}{3a^2 + b^2} : \frac{30(a - 4b)^2}{9a^4 - b^4}$.

819. Полагая данные дроби несократимыми, замените x и y такими одночленами, чтобы образовалось тождество:

1) $\frac{x}{7a^2b^3} \cdot \frac{y}{4c} = \frac{6a^3c^2}{b}$;

2) $\frac{36m^2n^4}{x} : \frac{y}{35p^6} = \frac{21n}{5mp^3}$.

820. Дано: $3x - \frac{1}{x} = 8$. Найдите значение выражения $9x^2 + \frac{1}{x^2}$.

821. Дано: $4x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$. Найдите значение выражения $2x - \frac{1}{x}$.

822. Упростите выражение:

1) $\frac{x^{3k}}{y^{2n}} : \frac{x^{6k}}{y^{5n}}$, где k и n — целые числа;

2) $\frac{a^{k+5} \cdot b^{k+3}}{c^{3k+2}} : \frac{a^{k+3} \cdot b^{k+2}}{c^{2k+1}}$, где k — целое число;

3) $\frac{(x^n + 3y^n)^2 - 12x^ny^n}{x^{3n} + 27y^{3n}} : \frac{x^{2n} - 9y^{2n}}{(x^n - 3y^n)^2 + 12x^ny^n}$, где n — целое число.

823. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{a+4}{a-4} - \frac{a-4}{a+4}\right) \cdot \frac{16-a^2}{32a^3}$;

2) $\left(7x - \frac{4x}{x-3}\right) : \frac{14x-50}{3x-9}$;

3) $\frac{2a}{a-2} + \frac{a+7}{8-4a} \cdot \frac{32}{7a+a^2}$;

4) $\left(\frac{9c}{c-8} + \frac{7c}{c^2-16c+64}\right) : \frac{9c-65}{c^2-64} - \frac{8c+64}{c-8}$;

5) $\left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2+ab+b^2}\right) : \left(\frac{a}{a-b} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$;

6) $\left(\frac{b}{b+6} + \frac{36+b^2}{36-b^2} - \frac{b}{b-6}\right) : \frac{6b+b^2}{(6-b)^2}$;

7) $\left(\frac{2x}{x^3+1} : \frac{1-x}{x^2-x+1} + \frac{2}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2-2x+1}{4} : \frac{x-1}{x+1}$.

824. Докажите, что при всех допустимых значениях a значение выражения

$$\left(\frac{1}{(a-3)^2} - \frac{6}{9-a^2} + \frac{1}{(a+3)^2}\right) : \frac{4(2a^2-9)}{81-a^4} - \frac{2a^2}{9-a^2}$$

не зависит от значения a.

825. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a + \frac{25}{a+10}}{\frac{25}{a} - a}$;

2) $1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{a}{1 - \frac{1}{a+1}}}$.

826. Решите уравнение:

1) $\frac{2x+6}{x+3}=2;$

2) $\frac{x^2-16}{x+4}=-8;$

3) $\frac{2x-9}{2x+5}+\frac{3x}{3x-2}=2;$

4) $\frac{5x^2+8}{x^2-16}=\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}.$

827. Решите уравнение:

1) $\frac{x+2}{x+a}=0;$

2) $\frac{x-a}{x-1}=0.$

828. Найдите значение выражения:

1) $2^{-3}+4^{-2};$

2) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}+(-1,8)^0-5^{-1};$

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2;$

4) $2^{-3}-6^{-1}+3^{-2}.$

829. Преобразуйте выражение так, чтобы оно не содержало степеней с отрицательными и нулевыми показателями:

1) $\frac{3x^{-8}y^5z^{-12}}{7a^0b^{-3}c^4};$

2) $\frac{1,001^0m^{-15}n^{-7}p^{-4}}{2^{-3}a^{-11}b^{16}c^{-22}}.$

830. Представьте выражение в виде степени или произведения степеней:

1) $a^{-7}\cdot a^{10};$

2) $a^{-9}\cdot a^5;$

3) $b^{17}\cdot b^{-4}\cdot b^{-11};$

4) $x^{-2}:x^3;$

5) $a^{12}:a^{-4};$

6) $a^{-7}:a^{-11};$

7) $a^{-12}:a^{-10}\cdot a^4;$

8) $(a^3)^{-5};$

9) $(a^{-12})^{-2};$

10) $(a^{-3})^4:(a^{-2})^5:(a^{-1})^{-7};$

11) $(m^{-3}n^4p^7)^{-4};$

12) $(a^{-1}b^{-2})^{-3};$

13) $(x^3y^{-4})^5\cdot(x^{-2}y^{-3})^3;$

14) $\left(\frac{a^{11}b^{-7}}{c^{-3}d^4}\right)^{-3};$

15) $\left(\frac{a^{-7}}{b^5}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{a^4}{b^{-7}}\right)^{-5}.$

831. Найдите значение выражения:

1) $11^{-23}\cdot 11^{25};$

2) $3^{17}\cdot 3^{-14};$

3) $4^{-16}:4^{-12};$

4) $10^{-15}:10^{-14}\cdot 10^{-2};$

5) $(14^{-10})^5\cdot(14^{-6})^{-8};$

6) $\frac{3^{-12}\cdot(3^{-5})^{-3}}{(3^{-3})^{-4}\cdot(3^{-4})^2}.$

832. Найдите значение выражения:

1) $25^{-3}\cdot 5^8;$

2) $64^{-3}:32^{-3};$

3) $10^{-10} : 1000^{-3} \cdot (0{,}001)^{-5}$; 5) $\dfrac{15^4 \cdot 5^{-6}}{45^{-3} \cdot 3^9}$;

4) $\dfrac{(-27)^{-12} \cdot 9^5}{81^{-4} \cdot 3^{-7}}$; 6) $\dfrac{(0{,}125)^{-8} \cdot 16^{-7}}{32^{-2}}$.

833. Упростите выражение:

1) $\dfrac{3}{5}x^{-3}y^5 \cdot \dfrac{5}{9}x^4y^{-7}$;

2) $0{,}2a^{12}b^{-9} \cdot 50a^{-10}b^{10}$;

3) $-0{,}3a^{10}b^7 \cdot 5a^{-8}b^{-6}$;

4) $0{,}36a^{-5}b^6c^3 \cdot \left(-2\dfrac{2}{9}\right)a^4b^{-4}c^{-5}$;

5) $2x^7 \cdot (-3x^{-2}y^3)^3$;

6) $(a^2b^9)^{-3} \cdot (-2a^4b^{10})$;

7) $(-5a^{-3}b^2c^{-2})^{-2} \cdot (0{,}1a^2b^{-3}c)^{-3}$;

8) $0{,}1m^{-5}n^4 \cdot (0{,}01m^{-3}n)^{-2}$;

9) $-6\dfrac{1}{4}a^{-7}b^4 \cdot \left(\dfrac{5}{2}a^{-2}b^2\right)^{-3}$;

10) $-(4a^{-4}b^3)^{-2} \cdot \left(-\dfrac{1}{8}a^8b^{-3}\right)^{-3}$;

11) $\dfrac{19a^{-15}}{33b^{-14}} \cdot \dfrac{11b^{-11}}{76a^{-17}}$;

12) $\left(\dfrac{9x^{-3}}{5y^{-2}}\right)^{-2} \cdot (27x^{-2}y^4)^2$.

834. Упростите выражение:

1) $(a^{-5} - 1)(a^{-5} + 1) - (a^{-5} - 2)^2$;

2) $\dfrac{y^{-2} - x^{-2}}{x + y}$;

3) $\dfrac{a^{-3} - 3b^{-6}}{a^{-6} - 2a^{-3}b^{-6} + b^{-12}} - \dfrac{a^{-3} + 3b^{-6}}{a^{-6} - b^{-12}}$;

4) $\dfrac{m^{-4} + n^{-4}}{n^{-10}} : \dfrac{m^{-4}n^{-6} + n^{-10}}{n^{-2}}$;

5) $\dfrac{x^{-2}}{x^{-2} - y^{-2}} : \left(\dfrac{x^{-2}}{x^{-2} - y^{-2}} - \dfrac{x^{-2} + y^{-2}}{x^{-2}}\right)$;

6) $\frac{x^{-10}-4}{x^{-5}} \cdot \frac{1}{x^{-5}+2} - \frac{x^{-5}+2}{x^{-5}}$;

7) $\left(\frac{4c^{-6}}{c^{-6}+1} - \frac{c^{-6}}{c^{-12}+2c^{-6}+1}\right) : \frac{4c^{-6}+3}{c^{-12}-1} + \frac{2c^{-6}}{c^{-6}+1}$.

835. Выполните действия и результат представьте в стандартном виде:

1) $1{,}3 \cdot 10^4 + 1{,}8 \cdot 10^5$;
2) $1{,}5 \cdot 10^2 - 2{,}8 \cdot 10^{-2}$;
3) $5{,}6 \cdot 10^3 - 3{,}2 \cdot 10^2$;
4) $4{,}8 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}$.

836. Сократите дробь (n — целое число):

1) $\frac{9^{n-1}}{3^{2n-3}}$;
2) $\frac{7^{n+1} \cdot 2^{n-1}}{14^n}$;
3) $\frac{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}{12^n}$;
4) $\frac{a^6+a^{11}}{a^{-4}+a}$;
5) $\frac{a^{-3}+a^{-2}+a^{-1}}{a^3+a^2+a}$;
6) $\frac{6^{n+2}-6^n}{35}$;
7) $\frac{5^{n+2}-5^{n-2}}{5^n}$;
8) $\frac{2^{-n}+1}{2^n+1}$.

837. Функция задана формулой $y = -\frac{24}{x}$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: −4; 8; 1,2;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 24; −18; 60.

838. Постройте график функции $y = \frac{6}{x}$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 2; −1,5; 4;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: −2; 3; −4,5;
3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

839. Постройте график функции $y = \frac{5}{|x|}$.

840. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{4}{x}$ и $y = x - 3$ и укажите координаты точек их пересечения.

841. Найдите значение p, если известно, что график функции $y = \frac{p}{x}$ проходит через точку: 1) $A(-3;\ 2)$; 2) $B\left(-\frac{1}{7};\ 3\right)$; $C(-0{,}4;\ 1{,}6)$.

842. Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} -\frac{12}{x}, \text{ если } x \leqslant -3, \\ 1 - x, \text{ если } x > -3; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 3x - 1, \text{ если } x < 2, \\ \frac{10}{x}, \text{ если } 2 \leqslant x < 5, \\ x - 3, \text{ если } x \geqslant 5. \end{cases}$

843. Постройте график функции:

1) $y = \frac{4x + 12}{x^2 + 3x}$; 2) $y = \frac{32 - 2x^2}{x^3 - 16x}$.

844. Найдите значение выражения:

1) $0{,}4\sqrt{625} - \frac{1}{4}\sqrt{144}$; 4) $\sqrt{1\frac{11}{25}} + \sqrt{3\frac{6}{25}} - 0{,}04\sqrt{10\,000}$;

2) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{0{,}25} + \sqrt{2^4 + 9}$; 5) $\frac{1}{5}\sqrt{625} - \frac{3}{17}\sqrt{289}$.

3) $3\sqrt{0{,}25} - \sqrt{7^2 + 24^2}$;

845. Найдите значение выражения:

1) $\left(\sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{1{,}69}$;

2) $\left(3\sqrt{15}\right)^2 - \left(15\sqrt{3}\right)^2$;

3) $50 \cdot \left(-\frac{1}{5}\sqrt{7}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2$;

4) $\sqrt{1089} - \left(\frac{1}{6}\sqrt{216}\right)^2$;

5) $\frac{4}{9}\sqrt{39{,}69} - \frac{5}{49}\sqrt{59{,}29} + \left(-\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2$;

6) $\frac{1}{2}\sqrt{17^2 - 15^2} + \left(2\sqrt{5\frac{1}{2}}\right)^2 - 0{,}3\sqrt{900}$.

846. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} = 2$;
2) $\sqrt{x} = \frac{1}{4}$;
3) $\sqrt{x} - 3 = 0$;
4) $2\sqrt{x} - 7 = 0$;
5) $\sqrt{x} + 5 = 0$;
6) $\frac{1}{4}\sqrt{x} + 5 = 0$;
7) $\sqrt{7x} - 4 = 0$;
8) $\sqrt{7x - 4} = 0$;
9) $\sqrt{7x - 4} = 2$;
10) $\frac{28}{\sqrt{x}} = 7$;
11) $\frac{15}{\sqrt{x+4}} = 3$;
12) $\sqrt{4 + \sqrt{3 + x}} = 5$.

847. Найдите значение корня:

1) $\sqrt{9 \cdot 100}$;
2) $\sqrt{0,49 \cdot 16}$;
3) $\sqrt{676 \cdot 0,04}$;
4) $\sqrt{0,64 \cdot 0,25 \cdot 121}$;
5) $\sqrt{\frac{25}{196}}$;
6) $\sqrt{18\frac{1}{16}}$;
7) $\sqrt{\frac{9}{64} \cdot \frac{1024}{1089}}$;
8) $\sqrt{3\frac{13}{36} \cdot 4\frac{29}{49}}$.

848. Найдите значение корня:

1) $\sqrt{75 \cdot 234}$;
2) $\sqrt{2 \cdot 800}$;
3) $\sqrt{1,6 \cdot 12,1}$;
4) $\sqrt{2890 \cdot 2,5}$.

849. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{108} \cdot \sqrt{3}$;
2) $\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}$;
3) $\sqrt{160} \cdot \sqrt{250}$;
4) $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{4,9}$;
5) $\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}}$;
6) $\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{0,225}}$.

850. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{(17,1)^2}$;
2) $\sqrt{(-1,17)^2}$;
3) $\frac{1}{2}\sqrt{62^2}$;
4) $-2,4\sqrt{(-4)^2}$;

5) $\sqrt{11^4}$;

6) $\sqrt{(-23)^4}$;

7) $\sqrt{2^6 \cdot 7^4}$;

8) $\sqrt{(-3)^4 \cdot 2^6 \cdot (-0,1)^2}$.

851. Упростите выражение:

1) $\sqrt{q^2}$, если $q > 0$;

2) $\sqrt{t^2}$, если $t \leqslant 0$;

3) $\sqrt{49m^2n^8}$, если $m \geqslant 0$;

4) $\sqrt{0,81a^6b^{10}}$, если $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$;

5) $\frac{1}{5}x\sqrt{100x^{26}}$, если $x \leqslant 0$;

6) $\frac{\sqrt{a^6b^{20}c^{34}}}{ab^8c^{12}}$, если $a > 0$, $c < 0$;

7) $\frac{1,2x^3}{y^5}\sqrt{\frac{y^{14}}{x^{10}}}$, если $y > 0$, $x < 0$;

8) $-0,1x^2\sqrt{1,96x^{18}y^{16}}$, если $x \leqslant 0$.

852. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(10-\sqrt{11})^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{10}-11)^2}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{11})^2}$;

4) $\sqrt{(3-\sqrt{6})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{6})^2}$;

5) $\sqrt{(\sqrt{24}-5)^2}-\sqrt{(\sqrt{24}-4)^2}$.

853. Упростите выражение:

1) $\sqrt{18+8\sqrt{2}}$;

2) $\sqrt{38-12\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{16+6\sqrt{7}}+\sqrt{23-8\sqrt{7}}$;

4) $\sqrt{26-6\sqrt{17}}-\sqrt{66-14\sqrt{17}}$;

5) $\sqrt{46+10\sqrt{21}}+\sqrt{46-10\sqrt{21}}$.

854. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{24}$; 3) $\sqrt{700}$; 5) $\frac{1}{7}\sqrt{196}$; 7) $-1{,}6\sqrt{50}$;

2) $\sqrt{63}$; 4) $\sqrt{0{,}32}$; 6) $-2{,}4\sqrt{600}$; 8) $\frac{5}{8}\sqrt{3\frac{21}{25}}$.

855. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{10a^2}$, если $a \geqslant 0$;

2) $\sqrt{15b^2}$, если $b \leqslant 0$;

3) $\sqrt{x^{11}y^{12}}$;

4) $\sqrt{36m^2n}$, если $m \leqslant 0$;

5) $\sqrt{4x^6y^5}$, если $x \geqslant 0$;

6) $\sqrt{700a^5b^{22}}$, если $b \leqslant 0$.

856. Внесите множитель под знак корня:

1) $3\sqrt{10}$; 3) $0{,}3\sqrt{3}$; 5) $\frac{2}{7}\sqrt{98}$; 7) $-0{,}5\sqrt{30}$;

2) $2\sqrt{13}$; 4) $\frac{1}{5}\sqrt{175}$; 6) $-5\sqrt{7}$; 8) $4\sqrt{a}$.

857. Внесите множитель под знак корня:

1) $a\sqrt{5}$;

2) $b\sqrt{-b}$;

3) $x\sqrt{x^7}$;

4) $n\sqrt{m}$, если $n \leqslant 0$.

858. Сравните числа:

1) $5\sqrt{6}$ и $6\sqrt{5}$;

2) $\sqrt{55}$ и $3\sqrt{6}$;

3) $0{,}3\sqrt{3\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{0{,}3}$;

4) $\frac{3}{7}\sqrt{16\frac{1}{3}}$ и $\frac{3}{4}\sqrt{5\frac{1}{3}}$.

859. Упростите выражение:

1) $\sqrt{64a}+\sqrt{4a}-\sqrt{121a}$;

2) $\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{320}$;

3) $6\sqrt{125a}-2\sqrt{80a}+3\sqrt{180a}$.

860. Выполните умножение:

1) $(\sqrt{80}-\sqrt{45})\sqrt{5}$;

2) $(2\sqrt{6}+\sqrt{54}-\sqrt{96})\sqrt{6}$;

3) $(12-\sqrt{10})(3+\sqrt{10})$;

4) $(2\sqrt{5}+\sqrt{7})(2\sqrt{7}-\sqrt{5})$;

5) $(\sqrt{19}-\sqrt{13})(\sqrt{19}+\sqrt{13})$;

6) $(4\sqrt{m}+9\sqrt{n})(4\sqrt{m}-9\sqrt{n})$;

7) $(\sqrt{5x}+\sqrt{11y})^2$;

8) $(3\sqrt{11}-2\sqrt{10})^2$.

861. Сократите дробь:

1) $\frac{x^2-19}{x+\sqrt{19}}$;

2) $\frac{\sqrt{x}-6}{x-36}$;

3) $\frac{m+8\sqrt{m}}{m-64}$;

4) $\frac{29-\sqrt{29}}{\sqrt{29}}$;

5) $\frac{a-6\sqrt{ab}+9b}{a-9b}$, если $a>0$, $b>0$;

6) $\frac{11-\sqrt{33}}{\sqrt{33}-3}$.

862. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{a^3}{\sqrt{b}}$;

2) $\frac{7}{a\sqrt{a}}$;

3) $\frac{2}{\sqrt{13}}$;

4) $\frac{6}{\sqrt{3}}$;

5) $\frac{n+9}{\sqrt{n+9}}$;

6) $\frac{3}{\sqrt{13}-2}$;

7) $\frac{6}{\sqrt{21}+\sqrt{15}}$;

8) $\frac{18}{\sqrt{47}-\sqrt{29}}$.

863.* Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}+1}$;

2) $\frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

864. Найдите значение выражения:

1) $\frac{5}{4-3\sqrt{2}}-\frac{5}{4+3\sqrt{2}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}+1}-\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}-1}$;

3) $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$.

865. Упростите выражение:

1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\frac{x}{x-9}$;

2) $\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\right):\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

866.* Упростите выражение:

1) $\sqrt{(\sqrt{x}+5)^2-20\sqrt{x}}+\sqrt{(\sqrt{x}-4)^2+16\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt{a+2\sqrt{a+3}+4}+\sqrt{a-2\sqrt{a+3}+4}$.

867.* Упростите выражение

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{47}}.$$

868.* Докажите, что:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$$

869. Расположите в порядке возрастания числа: 13; $\sqrt{165}$; 12,7; $\sqrt{171}$; 13,4.

870. Постройте в одной системе координат графики функций $y=\sqrt{x}$ и $y=x-6$ и определите координаты точки их пересечения.

871. Между какими двумя последовательными целыми числами находится число: 1) $\sqrt{17}$; 2) $\sqrt{67}$; 3) $\sqrt{103}$; 4) $-\sqrt{51,25}$?

872. Какие целые числа расположены на координатной прямой между числами:

1) 6 и $\sqrt{67}$;
2) $\sqrt{14}$ и $\sqrt{52}$;
3) $-\sqrt{53}$ и $-4,9$;
4) $-\sqrt{31}$ и 2,7?

873. Дана функция $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x}, \text{ если } x<0,\\ 3, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant 4,\\ \sqrt{x}, \text{ если } x>4.\end{cases}$

1) Найдите $f(-0,5)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(9)$.
2) Постройте график данной функции.

874. Решите уравнение:

1) $x^2-4x-32=0$;
2) $x^2-10x+21=0$;
3) $6x^2-5x+1=0$;
4) $8x^2+2x-3=0$;
5) $x^2+6x-15=0$;
6) $3x^2-x-5=0$;
7) $4x^2+28x+49=0$;
8) $x^2-16x+71=0$.

875. Решите уравнение:

1) $(x-4)(x+2)-2(3x+1)(x-3)=x(x+27)$;

2) $(4x-3)^2+(3x-1)(3x+1)=9$;

3) $(x+4)(x^2+x-13)-(x+7)(x^2+2x-5)=x+1$;

4) $\frac{2(x^2-9)}{5}-\frac{x+1}{2}=\frac{x-41}{4}$;

5) $\frac{x^2+5x}{3}-\frac{x+3}{2}=\frac{2x^2-2}{8}$.

876. Решите уравнение:

1) $x^2+(5a-1)x+4a^2-a=0$;

2) $x^2-(2a+3)+6a=0$;

3) $a^2x^2-10ax+16=0$.

877. Решите уравнение:

1) $|x^2-2x-6|=6$;

2) $x^2-6|x|-16=0$;

3) $x|x|+2x-15=0$;

4) $||x^2-6x-4|-3|=1$.

878. Решите уравнение:

1) $x^2-6x+\frac{2}{x-2}=\frac{2}{x-2}-8$;

2) $(\sqrt{x}-5)(15x^2-7x-2)=0$;

3) $(x^2+6x)(\sqrt{x}-4)(x^2-8x-48)=0$.

879. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2+3x-4}+\sqrt{x^2+6x+8}=0$;

2) $x^2-4x+4+|x^2-3x+2|=0$;

3) $\sqrt{25-x^2}+|x^2+8x-20|=0$.

880. Не вычисляя дискриминанта, найдите, при каком значении a уравнение:

1) $x^2+22x+a=0$;

2) $x^2-ax+81=0$

имеет единственный корень. Найдите этот корень.

881. При каком значении b корнями уравнения $x^2+bx-23=0$ являются противоположные числа? Найдите эти корни.

882. Число $-\frac{1}{3}$ является корнем уравнения $12x^2-bx+5=0$. Найдите значение b и второй корень уравнения.

883. Число 0,2 является корнем уравнения $8x^2-3{,}2x+k=0$. Найдите значение k и второй корень уравнения.

884. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - bx + 20 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 = 5x_2$. Найдите значение b и корни уравнения.

885. Составьте квадратное уравнение, корни которого меньше соответствующих корней уравнения $x^2 - 3x - 5 = 0$ на 1.

886. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 7x}{x+1} = \frac{8}{x+1}$;

2) $\frac{3x^2 + 4x}{x^2 - 9} = \frac{3 - 4x}{x^2 - 9}$;

3) $\frac{4 - x}{4x - 3} = \frac{2x - 2}{7 - x}$;

4) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-6} = \frac{7}{12}$;

5) $\frac{63}{x^2 + 3x} - \frac{2}{x^2 - 3x} = \frac{7}{x}$;

6) $\frac{2x}{x-2} + \frac{3}{x+4} = \frac{4x - 2}{(x+4)(x-2)}$;

7) $\frac{1}{x^2 + 2x} - \frac{2}{x^2 - 4} = \frac{x+4}{5x(2-x)}$;

8) $\frac{2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{x^3 - 1} = \frac{3}{x^2 + x + 1}$.

887. Решите уравнение:

1) $\frac{x-1}{x+5} + \frac{x+5}{x-1} = \frac{10}{3}$;

2) $\frac{x^2 - 3x + 6}{x} + \frac{2x}{x^2 - 3x + 6} = 3$;

3) $\frac{x^2}{(3x-1)^2} - \frac{4x}{3x-1} - 5 = 0$;

4) $\frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2$.

888.* При каких значениях a уравнение $\frac{x^2 - 2ax + 3}{x - 2} = 0$ имеет единственный корень?

889. Верно ли утверждение (ответ обоснуйте):

1) если числа m и n являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$ и $c \neq 0$, то

числа $-m$ и $-n$ являются корнями уравнения $ax^2 - bx + c = 0$;

2) если числа m и n являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$ и $c \neq 0$, то числа $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$ являются корнями уравнения $cx^2 + bx + a = 0$?

890.* Найдите все целые значения b, при которых имеет целые корни уравнение:

1) $x^2 + bx - 6 = 0$; 2) $x^2 + bx + 21 = 0$.

891.* Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - (2a - 5)x + a^2 - 7 = 0$. При каком значении a выполняется равенство $2x_1 + 2x_2 = x_1x_2$?

892.* При каком значении a произведение корней уравнения $x^2 + (a + 9)x + a^2 + 2a = 0$ равно 15?

893. Автобус должен был проехать 255 км. Проехав $\frac{7}{17}$ пути, он остановился на 1 ч, а затем продолжил движение со скоростью на 5 км/ч меньше начальной. Найдите начальную скорость автобуса, если в пункт назначения он прибыл через 9 ч после выезда.

894. В куске сплава меди и цинка содержится 20 кг цинка. К этому сплаву добавили 3 кг меди и 4 кг цинка. Полученный сплав содержит на 5 % больше меди, чем исходный. Сколько меди содержал исходный сплав?

Сведения из курса алгебры 7 класса

Целые выражения

1. Выражения с переменными. Целые рациональные выражения. Числовое значение выражения

Выражение, составленное из переменных, чисел, знаков арифметических действий и скобок, называют выражением с переменными (или с переменной, если она одна).

Если вместо переменных (переменной) подставить в выражение их значения, то получим числовое выражение, значение которого называют значением выражения с переменными при данных значениях переменных.

Числовые выражения и выражения с переменными называют алгебраическими выражениями.

Выражения с переменными, не содержащие деления на выражения с переменными, называют целыми выражениями.

Запись $\overline{ab}$ является обозначением двузначного числа, в котором a десятков и b единиц, то есть $\overline{ab} = 10a + b$. Аналогично запись $\overline{abc}$ является обозначением трехзначного числа, в котором a сотен, b десятков и c единиц, то есть $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, и т. п.

2. Тождественно равные выражения. Тождества

Выражения, соответственные значения которых равны при любых значениях переменных, называют тождественно равными.

Равенство, верное при любых значениях переменных, входящих в него, называют тождеством.

Замену одного выражения другим, тождественно равным ему, называют тождественным преобразованием.

Доказать тождество — значит доказать, что данное равенство является тождеством.

Для доказательства тождеств используют следующие приемы (методы):

- тождественно преобразуют одну из частей данного равенства, получая другую часть;

- тождественно преобразуют каждую из частей данного равенства, получая одно и то же выражение;
- показывают, что разность левой и правой частей данного равенства тождественно равна нулю.

Чтобы доказать, что равенство не является тождеством, достаточно привести контрпример: указать такие значения переменных (переменной), при которых данное равенство не выполняется.

3. Степень с натуральным показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a.

Степень с основанием a и показателем n обозначают a^n и читают: «a в n-й степени». Степени с показателями 2 и 3 можно прочитать иначе: запись a^2 читают «a в квадрате», запись a^3 — «a в кубе».

Степенью числа a с показателем 1 называют само это число.

Из приведённых определений следует, что

$$a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ множителей}}, \text{ где } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

При возведении неотрицательного числа в степень получаем неотрицательное число.

При возведении отрицательного числа в степень с четным показателем получаем положительное число, а при возведении отрицательного числа в степень с нечетным показателем получаем отрицательное число.

4. Свойства степени с натуральным показателем

Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n выполняется равенство

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

то есть при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складывают, а основание оставляют тем же.

Для любого числа a, отличного от нуля, и любых натуральных чисел m и n таких, что $m > n$, выполняется равенство

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

то есть при делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя, а основание оставляют тем же.

Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n выполняется равенство

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

то есть при возведении степени в степень показатели перемножают, а основание оставляют тем же.

Для любых чисел a и b и любого натурального числа n выполняется равенство

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

то есть при возведении произведения в степень каждый множитель возводят в степень и полученные результаты перемножают.

5. Одночлены

Выражения, являющиеся произведениями чисел, переменных и их степеней, называют одночленами.

Одночлен, который содержит только один отличный от нуля числовой множитель, стоящий на первом месте, и у которого все остальные множители — степени с разными основаниями, называют стандартным видом одночлена.

Число 0, а также одночлены, тождественно равные нулю, называют нуль-одночленами. Их не относят к одночленам стандартного вида.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют коэффициентом одночлена.

Одночлены, имеющие одинаковые буквенные части, называют подобными.

Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех входящих в него переменных. Степень одночлена, являющегося числом, отличным от нуля, принимают равной нулю.

Считают, что нуль-одночлен степени не имеет.

Произведением двух одночленов является одночлен. При возведении одночлена в степень получают также одночлен.

6. Многочлены

Выражение, являющееся суммой нескольких одночленов, называют многочленом.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют членами многочлена.

Многочлен, состоящий из двух членов, называют двучленом, а состоящий из трех членов — трехчленом. Одночлен является отдельным видом многочлена. Считают, что такой многочлен состоит из одного члена.

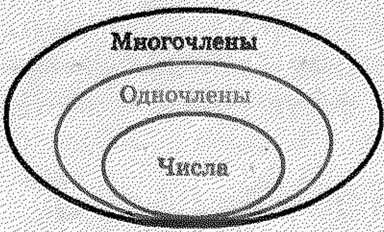


Рис. 35

Связи между многочленами, одночленами и их отдельным видом — числами иллюстрирует схема, представленная на рисунке 35.

Если среди одночленов, из которых состоит многочлен, есть подобные, то их называют подобными членами многочлена.

Приведение подобных членов многочлена дает возможность заменить многочлен на тождественно равный ему, но более простой — с меньшим количеством членов.

Чтобы сложить два многочлена, надо каждый из них заключить в скобки и поставить знак «плюс», потом раскрыть скобки и привести подобные слагаемые (если таковые имеются).

Чтобы из одного многочлена вычесть другой, надо каждый из них заключить в скобки, поставить перед вычитаемым знак «минус», потом раскрыть скобки и привести подобные слагаемые (если таковые имеются).

Представление многочлена в виде произведения нескольких многочленов называют разложением многочлена на множители.

Универсальных рекомендаций относительно последовательности действий для разложения многочлена на множители не существует. Однако можно воспользоваться следующим алгоритмом:

1) если это возможно, то разложение на множители надо начинать с вынесения общего множителя за скобки;
2) проверить, можно ли применить формулы сокращенного умножения;
3) если не удается применить формулы, то попытайтесь применить метод группировки (то есть объединить члены многочлена в группы выгодным способом).

7. Умножение одночлена на многочлен

Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

При умножении одночлена и многочлена выполняется переместительное свойство умножения. Поэтому приведенное правило дает возможность умножать многочлен на одночлен.

8. Умножение многочлена на многочлен

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

При умножении многочлена на многочлен всегда получается многочлен.

Формулы сокращенного умножения

9. Произведение разности и суммы двух выражений

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

10. Разность квадратов двух выражений

Разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

11. Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

12. Преобразование многочлена в квадрат суммы или разности двух выражений

Формулы
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$
дают возможность «свернуть» трехчлен в квадрат двучлена.

Трехчлен, который можно представить в виде квадрата двучлена, называют полным квадратом.

13. Сумма и разность кубов двух выражений

Многочлен $a^2 - ab + b^2$ называют неполным квадратом разности.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Многочлен $a^2 + ab + b^2$ называют неполным квадратом суммы.

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Уравнения

14. Корень уравнения

Корнем уравнения называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни или убедиться, что их не существует.

Часто условие задачи является описанием некоторой реальной ситуации. Составленное по этому условию уравнение называют математической моделью данной ситуации. Однако найденный корень уравнения не всегда является ответом задачи. Следует выяснить, не противоречит ли полученный результат реальной ситуации, которая описана в условии задачи.

При решении задач на составление уравнений удобно использовать следующую схему:

1) по условию задачи составить уравнение (сконструировать математическую модель задачи);
2) решить полученное уравнение;
3) выяснить, соответствует ли найденный корень условию задачи, и дать ответ.

15. Свойства уравнений

Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получится уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Если данное уравнение не имеет корней, то, прибавив к обеим его частям одно и то же число, получим уравнение, также не имеющее корней.

Если какое-нибудь слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

16. Линейное уравнение с одной переменной

Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, называют линейным уравнением с одной переменной.

Если $a \neq 0$, то, разделив обе части уравнения $ax = b$ на a, получим $x = \frac{b}{a}$. Следовательно, если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень, равный $\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, то линейное уравнение принимает следующий вид: $0x = b$. Тогда возможны два случая: $b = 0$ или $b \neq 0$.

В первом случае получаем уравнение $0x = 0$. Отсюда, если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение $ax = b$ имеет бесконечно много корней: любое число является его корнем.

Во втором случае, если $b \neq 0$, то при любом значении x имеем неверное равенство $0x = b$. Отсюда, если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ корней не имеет.

Уравнение $ax = b$	$a \neq 0$	$a = 0,\ b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
	$x = \frac{b}{a}$	x — любое число	Корней нет

Функции

17. Функция. Область определения и область значений функции

Правило, с помощью которого для каждого значения независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной, называют функцией, а соответствующую зависимость одной переменной от другой — функциональной.

Обычно независимую переменную обозначают буквой x, зависимую — буквой y, функцию (правило) — буквой f. Если переменная y функционально зависит от переменной x, то этот факт обозначают так: $y = f(x)$ (читают: «игрек равен эф от икс»).

Независимую переменную еще называют аргументом функции.

Для функции f каждому значению аргумента x соответствует некоторое значение зависимой переменной y. Значение зависимой переменной еще называют значением функции и обозначают $f(x)$.

Все значения, принимаемые аргументом, образуют область определения функции. Все значения, принимаемые зависимой переменной, образуют область значений функции.

Обозначения некоторых функций:

$y = [x]$ — «целая часть числа». Значение функции равно наибольшему целому числу, не превышающему соответственное значение аргумента.

$y = \{x\}$ — «дробная часть числа». $\{x\} = x - [x]$.

18. Способы задания функции

Функция считается заданной, если указана ее область определения и правило, с помощью которого можно для каждого значения независимой переменной найти значение зависимой переменной.

Поскольку функция — это правило, то ее можно задать с помощью предложений. Такой способ задания функции называют заданием функции описанием.

Самым распространенным способом задания функции является задание функции с помощью формулы.

Если функция задана формулой, правая часть которой — целое выражение, и при этом не указана область ее определения, то считаем, что областью определения такой функции являются все числа.

Еще одним способом задания функции является табличный, при котором функцию задают таблицей, состоящей из двух строк. Все числа, записанные в первой строке таблицы, составляют область определения данной функции. Столбец таблицы представляет собой пару чисел: «независимая переменная — зависимая переменная». Этот способ удобно применять в тех случаях, когда область определения функции состоит из нескольких чисел.

Если значение аргумента в каждом следующем столбце на единицу больше значения аргумента в предыдущем столбце, то говорят, что таблица составлена с шагом 1.

19. График функции

Графиком функции f называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответственным значениям функции f.

Если какая-нибудь фигура является графиком функции f, то выполняются два условия:

1) если x_0 — некоторое значение аргумента, а $f(x_0)$ — соответственное значение функции, то точка с координатами $(x_0; f(x_0))$ обязательно принадлежит графику;
2) если $(x_0; y_0)$ — координаты произвольной точки графика, то x_0 и y_0 — соответственные значения независимой и зависимой переменных функции f, то есть $y_0 = f(x_0)$.

Фигура, изображенная на координатной плоскости, не может служить графиком некоторой функции, если существует значение аргумента x, для которого значение переменной y находится неоднозначно.

Фигура может быть графиком некоторой функции, если любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, имеет с этой фигурой не более чем одну общую точку.

20. Линейная функция, ее график и свойства

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, x — независимая переменная, называют линейной.

Графиком линейной функции, область определения которой — все числа, является прямая.

Линейную функцию, заданную формулой $y = kx$, где $k \neq 0$, называют прямой пропорциональностью.

Рис. 36

Прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции (это отражает схема, представленная на рисунке 36).

Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат. Поэтому для построения графика прямой пропорциональности достаточно указать какую-нибудь точку графика, отличную от начала координат, и провести прямую через эту точку и точку O (0; 0).

Если в формуле $y = kx + b$ принять $k = 0$, то получим $y = b$. В этом случае значения функции будут оставаться неизменными при любых изменениях значений аргумента.

График такой функции — прямая, параллельная оси абсцисс.

Системы линейных уравнений с двумя переменными

21. Уравнение с двумя переменными

Равенство, содержащее две переменные, называют уравнением с двумя переменными.

Пару значений переменных, обращающую уравнение с двумя переменными в верное равенство, называют решением уравнения с двумя переменными.

Тот факт, что пара $x = a$, $y = b$ является решением уравнения, принято записывать так: $(a; b)$ — решение уравнения. В скобках на первом месте пишут значения переменной x, а на втором — значения переменной y. Если переменные в уравнении обозначены буквами, отличными от x и y, то, записывая решение в виде пары, надо договориться, значение какой переменной ставить на первое место в паре, а какой — на второе. Обычно принимают во внимание порядок букв латинского алфавита.

Решить уравнение с двумя переменными — значит найти все его решения или показать, что оно не имеет решений.

Свойства уравнений с двумя переменными аналогичны свойствам с одной переменной (см. п. 15 на с. 235).

Графиком уравнения с двумя переменными называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, координаты которых (пары чисел) являются решениями данного уравнения.

Если какая-нибудь фигура является графиком уравнения, то выполняются два условия:

1) все решения уравнения являются координатами точек, принадлежащих графику;
2) координаты любой точки, принадлежащей графику, — это пара чисел, являющаяся решением данного уравнения.

22. Линейное уравнение с двумя переменными и его график

Линейным уравнением с двумя переменными называют уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b, c — некоторые числа.

В каждом из случаев, когда $b \neq 0$ или $b = 0$ и $a \neq 0$, графиком уравнения $ax + by = c$ является прямая.

Пусть $a = b = 0$ в линейном уравнении $ax + by = c$. Тогда имеем $0x + 0y = c$.

Если $c \neq 0$, то это уравнение не имеет решений, а значит, на координатной плоскости не существует точек, которые могли бы служить графиком уравнения.

Если $c = 0$, то уравнение принимает вид

$$0x + 0y = 0.$$

Любая пара чисел является его решением. Следовательно, в этом случае графиком уравнения является вся координатная плоскость.

Следующая таблица подытоживает сказанное выше.

Уравнение	Значения a, b, c	График
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a и c — любые	Невертикальная прямая
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c — любое	Вертикальная прямая
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	Вся координатная плоскость
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

23. Системы уравнений с двумя переменными

Если требуется найти все общие решения нескольких уравнений, то говорят, что надо решить систему уравнений.

Систему уравнений записывают с помощью фигурной скобки.

Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающих каждое уравнение в верное равенство.

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений не существует.

24. Графический метод решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными

Графический метод решения системы уравнений заключается в следующем:

- построить на одной координатной плоскости графики уравнений, входящих в систему;
- найти координаты всех точек пересечения построенных графиков;
- полученные пары чисел и будут искомыми решениями.

Графический метод является эффективным тогда, когда нужно определить количество решений системы.

Если графиками уравнений, входящих в систему линейных уравнений, являются прямые, то количество решений этой системы зависит от взаимного расположения двух прямых на плоскости:

- если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение;
- если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений;
- если прямые параллельны, то система решений не имеет.

25. Решение систем линейных уравнений методом подстановки

С помощью этого метода решение системы линейных уравнений с двумя переменными сводится к решению линейного уравнения с одной переменной.

Чтобы решить систему линейных уравнений методом подстановки, следует:

1) выразить из любого уравнения системы одну переменную через другую;
2) подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной выражение, полученное на первом шаге;
3) решить уравнение с одной переменной, полученное на втором шаге;

4) подставить найденное значение переменной в выражение, полученное на первом шаге;
5) вычислить значение второй переменной;
6) записать ответ.

26. Решение систем линейных уравнений методом сложения

С помощью этого метода решение системы линейных уравнений с двумя переменными сводится к решению линейного уравнения с одной переменной.

Чтобы решить систему линейных уравнений методом сложения, надо:

1) подобрав «выгодные» множители, преобразовать одно или оба уравнения системы так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;
2) сложить почленно левые и правые части уравнений, полученных на первом шаге;
3) решить уравнение с одной переменной, полученное на втором шаге;
4) подставить найденное на третьем шаге значение переменной в любое из уравнений исходной системы;
5) вычислить значение второй переменной;
6) записать ответ.

Модуль числа

27. Модуль числа

Модулем числа a называют расстояние от начала отсчета до точки, изображающей это число на координатной прямой.

Модуль числа a обозначают так: $|a|$ (читают: «модуль a»).

Модуль положительного числа равен этому числу, модуль отрицательного числа равен числу, противоположному данному.

$$|0| = 0.$$

С помощью фигурной скобки свойство модуля числа a можно записать так:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Модуль числа принимает только неотрицательные значения.

Модули противоположных чисел равны: $|a| = |-a|$.

Координатная плоскость

28. Прямоугольная система координат

Проведем на плоскости две перпендикулярные прямые так, чтобы их начала отсчета совпадали (рис. 37). Эти прямые называют осями координат, а точку O их пересечения — началом координат. Горизонтальную ось называют осью абсцисс и обозначают буквой x, вертикальную ось называют осью ординат и обозначают буквой y.

Ось абсцисс называют также осью x, а ось ординат — осью y, вместе они образуют прямоугольную систему координат. Такую систему координат называют декартовой.

Плоскость, на которой задана прямоугольная система координат, называют координатной плоскостью.

Координатные оси разбивают плоскость на четыре части, которые называют координатными четвертями и нумеруют так, как показано на рисунке 37.

На координатной плоскости отметим точку M (рис. 38). Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно оси

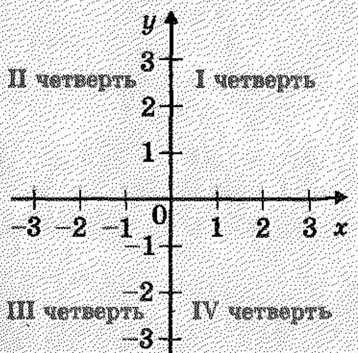


Рис. 37

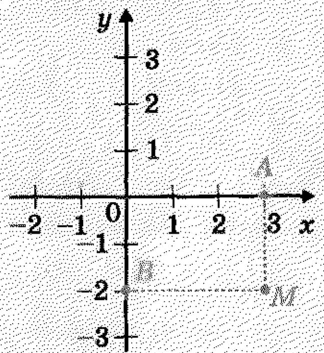


Рис. 38

абсцисс, пересекает ее в точке A, а прямая, перпендикулярная оси ординат, пересекает эту ось в точке B. Точка A на оси x имеет координату 3, а точка B на оси y — координату -2.

Число 3 называют абсциссой точки M, число -2 — ординатой точки M. Числа 3 и -2 однозначно определяют место точки M на координатной плоскости. Поэтому их называют координатами точки M и записывают так: $M\ (3;\ -2)$.

Записывая координаты точки, абсциссу всегда ставят на первое место, а ординату — на второе.

Если точка лежит на оси абсцисс, то ее ордината равна нулю, а если точка лежит на оси ординат, то нулю равна ее абсцисса.

50. 0,3. **51.** 5. **53.** $\frac{1}{32}$. **54.** Нет. *Указание.* Представьте данную дробь в виде $\frac{(a-1)^2}{a^2+1}$. **58.** 1) x — любое число, кроме -1; 2) корней нет; 3) корней нет. **59.** 1) Корней нет; 2) -7. **60.** 1) Если $a = 0$, то корней нет; если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; 2) если $a = 0$, то x — любое число; если $a \neq 0$, то $x = 1$; 3) если $a = 6$, то x — любое число; если $a \neq 6$, то $x = a - 6$; 4) если $a = -2$, то корней нет; если $a = 2$, то x — любое число; если $a \neq -2$ и $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{a+2}$. **61.** 1) Если $a = -3$, то корней нет; если $a \neq -3$, то $x = \frac{3}{a+3}$; 2) если $a = 0$, то корней нет; если $a = 9$, то x — любое число; если $a \neq 0$ и $a \neq 9$, то $x = \frac{a-9}{a}$. **64.** -4 при $a = 2b$. **65.** 48 км/ч, 60 км/ч. **76.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{m+2}$; 3) $\frac{1}{1-k}$. **77.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{a-5}{a+5}$. **78.** 1) $\frac{1}{1-a}$; 2) $\frac{3}{b-2}$; 3) $\frac{m}{n-5}$. **79.** 1) $\frac{1}{(x-7)^2}$; 2) $\frac{y+6}{y+2}$. **87.** 2) 5; 3) $4\frac{1}{4}$. **88.** 2) -3; 3) $-4{,}5$. **89.** 1) 1; 2; 3; 6; 2) 1; 2; 7; 14; 3) 1; 2; 8. **90.** 1) 1; 3; 9; 2) 1; 2; 4; 8; 3) 2. **91.** 15 км/ч, 12 км/ч. **92.** 1) -2; 2) корней нет. **112.** 6) $\frac{5}{p-5}$; 7) $\frac{16}{16y-y^3}$; 8) $\frac{2b+1}{12b-6}$. **113.** 5) $\frac{1}{x}$; 6) $\frac{8}{y+2}$. **116.** 2) 4. **117.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2,5; 3) 0,1. **118.** 1) 1,2; 2) $\frac{7}{17}$. **121.** 2) $\frac{3}{b^2-3b+9}$. **122.** 1) $\frac{2n^3}{9m^2-n^2}$; 2) $\frac{2-2b}{8b^3+1}$. **124.** 1) $-\frac{a+b}{ab}$; 2) $\frac{1}{2x}$; 3) $\frac{100b^2}{(a^2-25b^2)^2}$; 4) $\frac{1}{y-2}$. **128.** $\frac{3}{(a-1)(a-4)}$. *Указание.* Представьте каждое из слагаемых в виде разности двух дробей. Например, $\frac{1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-1}$. **129.** $\frac{3}{(a-7)(a-1)}$. **132.** *Указание.* К каждой из дробей, которые записаны в левой части равенства, прибавьте 1, а к правой части прибавьте 3. **135.** 270 км. **160.** 1) −5; 2) 0,9; 3) −5; 4) −3,2. **161.** 1) $\frac{40}{21}$; 2) $\frac{4}{11}$. **162.** 83. **163.** 10. **164.** 7 или −7. **165.** 2 или −2. **166.** 1) 1; 2) 1. **167.** 1) $\frac{(a-5)^2}{(a+5)^2}$; 2) 1. **170.** 1) 0,5; 2) x — любое число. **172.** 1,2 ч. **173.** 50 л, 30 л. **174.** 5 мужчин, 1 женщина, 6 детей. **178.** 1) $\frac{3}{1-a}$; 2) $\frac{2}{b-3}$; 3) $\frac{12}{3c-1}$; 4) $\frac{1}{a-2b}$; 5) $\frac{2}{a+5}$; 6) $\frac{x-3}{x+3}$. **179.** 1) $\frac{2}{3-b}$; 2) −1; 3) $x+y$; 4) $\frac{a+2}{a-2}$. **180.** 1) $\frac{x+8}{x-8}$; 2) $\frac{a-4}{2a}$; 3) $\frac{1}{b}$; 4) $\frac{a-1}{a}$; 5) 2; 6) $a-2$. **181.** 1) $\frac{7+x}{7-x}$; 2) $c-5$; 3) −2; 4) $\frac{y+2}{6}$. **184.** 1) Не зависит; 2) зависит. **186.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $a-3$; 3) $a+1$; 4) $\frac{a+b}{a}$. **187.** 1) $\frac{a^2+b^2}{b^2}$; 2) $-a$. **188.** 1) $-\frac{a+b}{2ab}$; 2) $\frac{1}{a}$. **189.** $-y$. **192.** 1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) 1. **193.** 1) $-1\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$. **195.** *Указание.* Представьте данное выражение в виде $10\cdot3^n-5\cdot2^n$. **196.** 480 кг. **197.** 500 грн., 700 грн. **198.** 2 ч. **199.** 90 деталей. **200.** 9 воробьев, 10 голубей, 11 горлиц. **207.** 2) Корней нет; 3) −2; 4) x — любое число, кроме 2; 5) x — любое число; 6) 3; 7) 0,5; 8) корней нет; 9) $-\frac{1}{3}$; 10) 17; 11) 12; 12) $1\frac{3}{4}$; 13) −4; 4; 14) 0; 15) 4. **208.** 1) −1; 2) корней нет; 3) 10; 4) корней нет; 5) 4; 6) x — любое число, кроме 0; 7) 6; 8) x — любое число, кроме −0,5; 9) −3; 3. **209.** 7. **210.** 10. **212.** 1) $\frac{13}{4}$; 2) корней нет; 3) 7; 4) 0; −2; 5) корней нет; 6) −17; 7) 0; 8) корней нет. **213.** 1) 10; 2) −0,5; 3) −3; 4) −4; 4; 5) корней нет; 6) −5. **214.** 2 км/ч. **215.** 29 км/ч. **216.** 9 км/ч. **217.** 1) Корней нет; 2) 9; 3) 0. **218.** 1) 0,6; 2) 0. **219.** 1) Если $a \neq 1$, то $x=1$; если $a=1$, то корней нет; 2) если $a \neq -5$, то $x=a$; если $a=-5$, то корней нет; 3) если $a=0$, то x — любое число, кроме 3; если $a \neq 0$ и $a \neq 3$, то $x=a$; если $a=3$, то корней нет; 4) если $a \neq 7$, то $x=a$ или $x=6$; если $a=7$, то $x=6$; 5) если $a \neq 4$ и $a \neq -2$, то $x=4$ или $x=-2$; если $a=4$, то $x=-2$; если $a=-2$, то

$x = 4$; 6) если $a \neq 4$ и $a \neq -2$, то $x = a$; если $a = 4$ или $a = -2$, то корней нет. **220.** $a = 2$ или $a = -2$. **221.** $a = -9$, или $a = -3$, или $a = 0$. **222.** 70 000 жителей. **223.** 60 км. **251.** 1) 2,7; 2) $9\frac{47}{125}$. **258.** 5. **259.** 6. **265.** 31 болванка. **266.** 80 000 жителей. **267.** 2 км. **280.** 6) $-\frac{1}{6}$; 7) $\frac{4}{9}$; 8) $\frac{4}{7}$. **281.** 5) 16; 6) 144. **291.** 1) -3; 2) -5; 3) -2; 4) -7; 5) 0; 6) 2. **292.** 1) 4; 2) 1; 3) -1; 4) 6. **295.** 8 мин. **296.** 5,34 кг. **297.** В 81 раз. **298.** 1) $\frac{1}{a+b}$; 2) $-4b^2$; 3) $15c^3+5$; 4) $-\frac{1}{m^4}$. **299.** 1) $\frac{2a^2}{3a^2-1}$; 2) $\frac{1-6b}{2}$. **300.** 1) -1 или 0; 2) 3 или 4; 3) 4 или 5; 4) 2 или 3. **301.** 1) 6 или 7; 2) 4 или 5; 3) 4 или 5; 4) 4 или 5. **302.** 28; 8. **303.** На 31,6 %. **304.** 5 ч 45 мин. **305.** Да, надо 5 купюр по 5 грн. и 3 купюры по 2 грн. **331.** 1) 2; 2) -1; 3; 3) корней нет. **332.** 1) 2; 4; 2) -1; 1; 3) корней нет. **345.** Корней нет. **346.** Уменьшилась на 9 %. **347.** 36 монет, 24 монеты. **348.** 12 км/ч. **353.** 1) Корней нет; 2) -1; 3; 3) 2. **354.** 1) -3; -1; 2) корней нет; 3) -1. **369.** 4. **371.** 5 км/ч, 3 км/ч. **397.** 1) -10; 2) 25; 3) $-23{,}8$; 4) 13; 5) 216; 6) -20. **398.** 1) 13,4; 2) 21; 3) -20. **399.** 2) $x \leqslant 0$; 3) x — любое число; 4) $x = 0$; 5) $x \geqslant 8$; 6) $x \leqslant 8$; 9) x — любое число, отличное от 8; 10) $x \geqslant 0$ и $x \neq 9$; 11) $x \geqslant 0$; 12) $x = 0$; 13) такого значения x не существует; 14) x — любое число; 15) $x = 0$; 16) x — любое число, отличное от 0. **400.** 2) $y \leqslant 0$; 3) $y \geqslant 0$; 4) $y \leqslant 0$; 5) $y = 0$; 6) $y > 0$; 7) $y \geqslant 0$ и $y \neq 1$. **401.** 6) -10; 10. **402.** 4) -7; 7. **405.** 1) 167; 2) 2116; 3) корней нет. **406.** 1) 4900; 2) корней нет. **407.** 1) Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то a и b — числа одного знака; если $a = 0$, то b — любое число; если $b = 0$, то a — любое число; 3) если $b \neq 0$, то $a \geqslant 0$; если $b = 0$, то a — любое число; 5) если $a \neq 0$, то $b \leqslant 0$; если $a = 0$, то b — любое число. **408.** 2) *Указание.* $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$. **409.** *Указание.* $-x^2 + 6x - 12 = -(x-3)^2 - 3$. **410.** Выражение 2). **411.** 1) 0; 2) корней нет; 3) 1; 4) -2; 5) -1; 1; 6) 1. **412.** 1) 0; 2) корней нет; 3) 1; 4) 3. **413.** 1) $a > -1$; 2) $a = -1$; 3) $a < -1$. **416.** 1) Если $a = 0$, то $x \geqslant 1$; если $a \neq 0$, то $x = 1$; 2) если $a = 1$, то x — любое число; если $a \neq 1$, то $x = 0$; 3) если $a = 0$, то $x \geqslant 1$; если

$a \neq 0$, то $x = 2$; 4) если $a < 0$, то корней нет; если $a \geqslant 0$, то $x = a^2 + 2$. **417.** $a < 0$ или $a = 1$. **418.** 13. **419.** $\frac{a+10}{5-a}$. **420.** 10 купюр по 5 грн., 21 купюра по 20 грн. **438.** *Указание.* Пусть $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ — данные рациональные числа. Тогда их сумма равна $\frac{mq+np}{nq}$, то есть является числом вида $\frac{s}{t}$, где $s \in \mathbf{Z}$, $t \in \mathbf{N}$. **439.** *Указание.* Если предположить, что данная сумма — число рациональное, то из этого следует, что данное иррациональное число можно представить в виде разности двух рациональных чисел. **440.** 1) Нет, например, $\sqrt{3} + \left(-\sqrt{3}\right) = 0$; 2) нет, например, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$; 3) нет, например, $\sqrt{3} \cdot 0 = 0$. **441.** В третьем подъезде на шестом этаже. **442.** $\frac{b^2}{a}$. **444.** 18 л. **474.** 1) Ни при каком значении x; 2) 3; 3) -1; 3. **475.** 1) -4; 2) 2. **476.** -4. **477.** 120 га. **506.** 1) $6\sqrt{2}$; 2) $11\sqrt{2}$; 3) $10\sqrt{3}$; 4) $9\sqrt{5a}$; 5) $-a\sqrt{ab}$; 6) 0. **507.** 1) $-6\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{7b}$; 3) $10a^3\sqrt{a}$. **509.** 1) $16 + \sqrt{3}$; 2) $-10\sqrt{5} - 5$; 3) 1; 4) 1; 5) 4. **510.** 1) $10 - 4\sqrt{2}$; 2) 74; 3) 4; 4) 32. **517.** 1) $\sqrt{a} - 2$; 2) $\frac{6}{m - 2\sqrt{m}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{xy}}$; 4) $\frac{4\sqrt{a}}{16-a}$; 5) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 6) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$; 7) $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c}+5}$; 8) $\sqrt{a} - 1$; 9) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 10) $\sqrt{x}$. **518.** 1) $\frac{4}{a+\sqrt{a}}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{y}}$; 4) $\sqrt{\frac{n}{m}}$; 5) $\sqrt{x}$; 6) $\frac{22}{9-a}$. **519.** 1) $m^4\sqrt{-m}$; 2) $a^2b^6\sqrt{b}$; 3) $-2x^3\sqrt{y}$; 4) $m^3n^3\sqrt{mn}$; 5) $-3xy^7\sqrt{5x}$; 6) $8ab^4\sqrt{b}$; 7) $-11m^5b^9\sqrt{2m}$; 8) $mnp^7\sqrt{-p}$. **520.** 1) $-m^9\sqrt{-m}$; 2) $a^{11}b^{12}\sqrt{a}$; 3) $-7a\sqrt{b}$; 4) $a^4b^4\sqrt{ab}$; 5) $-3x^7y^{17}\sqrt{3x}$; 6) $-5m^3n^3p^8\sqrt{-2p}$. **521.** 2) Так как из условия следует, что $b \leqslant 0$, то $b\sqrt{-b} = -\sqrt{-b^3}$; 3) $\sqrt{c^7}$; 5) $-\sqrt{x^8y^5}$;

8) $\sqrt{a^3b^3}$. **522.** 2) $-\sqrt{54n^2}$; 3) $\sqrt{p^5}$; 6) $-\sqrt{-5a^9b}$. **524.** 1) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 2) $\sqrt{a}$. **525.** 1) $\sqrt{2}+1$; 2) $\sqrt{3}+2$; 3) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$. **526.** 1) $\sqrt{7}+1$; 2) $\sqrt{6}+3$; 3) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$. **527.** 9. **530.** 1) $4+\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{3}+1$. **531.** 180 деталей. **532.** На 25 %. **533.** 6 км/ч, 2 км/ч. **534.** 17 вагонов. **552.** 1) 0; 1; 2) 0; 1; 3) корней нет; 4) 1; 5) 4; 6) 1. **554.** 4) $5-2\sqrt{3}$. **555.** 2) $-\sqrt{2}$. **556.** 0. *Указание.* Левая часть этого уравнения принимает только неотрицательные значения, а правая — только неположительные. **561.** 1) $\sqrt{7}-1$; 2) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 3) $3-\sqrt{3}$; 4) $6-\sqrt{2}$. **562.** 1) $\sqrt{5}-2$; 2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 3) $5-2\sqrt{3}$. **563.** Если $a \geqslant 0$, то один корень, если $a < 0$, то корней нет. **564.** $2\sqrt{a}+1$ при $a > 1$; 3 при $0 \leqslant a \leqslant 1$. **565.** 12 при $a > 36$; $2\sqrt{a}$ при $0 \leqslant a \leqslant 36$. **566.** 63 кг. **567.** 3 км/ч. **569.** 1 ч 12 мин. **586.** 6; 7. **587.** 9; 10. **589.** 1) 0; 14; 2) корней нет. **590.** 1) 0; $\frac{4}{3}$; 2) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. **596.** −3; −2 или 3; 4. **597.** −1; 0 или 0; 1. **598.** 1) 4; 2) 0; −8; 3) −9; 9. **603.** 1) 0; −3; 3; 2) 0; 1; 3) 1; 4) −2; 2. **604.** 1) 0; 7; −7; 2) 0; 5; −7; 3) −1,5; 1,5. **605.** 1) 2; 2) 3; 3) 0,5; −2; 4) такого значения не существует. **606.** 1) $a = 4$, $x_2 = -4$; 2) $a = 0$, $x_2 = 2$ или $a = -1$, $x_2 = \frac{9}{4}$; 3) $a = 3$, $x_2 = -2$. **610.** 35. **617.** 1) 1; $-\frac{7}{6}$; 2) 1; 9; 3) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$. **618.** 1) 2; $-\frac{7}{3}$; 2) −3; $\frac{1}{7}$. **619.** 1) 4; −3,5; 2) 1; $-\frac{1}{25}$; 3) 2; $\frac{4}{3}$; 4) $-3 \pm \sqrt{15}$; 5) 3; 6; 6) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$. **620.** 1) 3; 9; 2) $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$; 3) корней нет. **621.** 7. **622.** 38 см. **623.** 6 и 14 или −14 и −6. **624.** 10; 11. **625.** 13; 14. **626.** 1) $\sqrt{5}$; $\frac{-3\sqrt{5}}{2}$; 2) −1; $\sqrt{6}$; 3) 6; $-\frac{2}{3}$; 4) −1; $\frac{31}{22}$. **627.** 1) $-\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$; 2) 2; $\sqrt{3}$; 3) 1; $\frac{3}{8}$. **628.** −20; 4. **629.** 1; $-\frac{4}{3}$. **630.** 8 см. **631.** 6 см или 12 см. **632.** 16 см, 30 см. **633.** 9 см, 40 см. **634.** 9; 11; 13.

635. 4; 6; 8; 10. **637.** 16 обезьян или 48 обезьян. **638.** 9 команд. **639.** 15 сторон. **640.** 1) -8; -7; 0; 1; 2) -1; 1; 0,6; $-0{,}6$; 3) $-3+\sqrt{14}$; 4) -2; 2; 5) 3; 5; -3; -5; 6) 2; -2. **641.** 1) -12; 2; -2; -8; 2) 3; 3) 15; $-7\pm\sqrt{34}$; 4) 9; -9. **642.** 1) -10; 2) 3. **643.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 3. **644.** 1) $b=-2$; 2) $b=-12$ или $b=12$. **645.** 1) $b=13{,}5$; 2) $b=-8$ или $b=8$. **649.** 1) $x=2a+1$ или $x=a$; 2) $x=2a$ или $x=4$; 3) если $a\neq 0$, то $x=\frac{25}{a}$ или $x=-\frac{1}{a}$; если $a=0$, то корней нет; 4) если $a=\frac{1}{2}$, то $x=\frac{1}{3}$; если $a\neq\frac{1}{2}$, то $x=\frac{1}{3}$ или $x=\frac{1}{2a-1}$. **650.** 1) $x=3a-5$ или $x=-a$; 2) $x=-3a$ или $x=4$; 3) если $a=0$, то $x=1$; если $a\neq 0$, то $x=1$ или $x=\frac{1}{a}$. **651.** 1) $b=0$ или $b=-\frac{9}{7}$; 2) $b=-5$ или $b=2\sqrt{6}$ или $b=-2\sqrt{6}$; 3) $b=19$. **652.** 1) $b=0$ или $b=-0{,}5$ или $b=0{,}5$; 2) $b=-3$ или $b=-5$. **653.** $\frac{a-b}{a}$. **654.** 9. **655.** 4, $\sqrt{17}$, $3\sqrt{2}$. **656.** 45 т, 75 т. **657.** 14 листов. **671.** $x_2=10$, $q=-20$. **672.** $x_2=-6$, $p=-1$. **673.** $x_2=2$, $b=14$. **674.** $x_2=1{,}6$, $m=-1{,}28$. **675.** $-20{,}5$. **676.** -7. **681.** $x_1=1$, $x_2=9$, $c=9$. **682.** $x_1=-14$, $x_2=-6$, $a=84$. **683.** $x_1=9$, $x_2=-2$, $m=-18$. **684.** $x_1=1$, $x_2=-5$, $n=-5$. **687.** 1) 1,5; 2) 69. *Указание.* $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$; 3) 57; 4) 567. **688.** 1) 80; 2) $-\frac{57}{16}$; 3) $\sqrt{89}$. *Указание.* $|x_2-x_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}$. **689.** $x^2+12x+17=0$. **690.** $x^2-18x+49=0$. **691.** $6x^2-14x+3=0$. **692.** $x^2-15x+8=0$. **693.** $a=2$ или $a=-2$. **694.** $a=6$ или $a=-6$. **696.** 1) 7; -7; 5; -5; 2) -11; 11; -1; 1; -4; 4. **697.** 1) -9; 9; -6; 6; 2) -17; 17; -7; 7; -3; 3. **698.** $b=c=0$ или $b=1$, $c=-2$. **699.** 1) $a=2$; 2) такого значения a не существует. **700.** $a=2$. **702.** 4 ряда по 12 деревьев. **704.** 18 %. **713.** 1) $\frac{2a-3}{a-6}$; 2) $\frac{b-3}{2b-1}$; 3) $\frac{c+1}{c-2}$; 4) $\frac{m^2+m+1}{m+10}$; 5) $-\frac{x+4}{x+8}$; 6) $\frac{1-4n}{5n+1}$. **714.** 1) $\frac{4x-3}{x-1}$;

2) $\frac{2y+5}{y-1}$; 3) $\frac{a+1}{a-5}$; 4) $\frac{3-b}{b-1}$. **715.** 1) -3; 2) -2; 3) $\frac{4}{3}$. **716.** 1) -4; 2) -14. **717.** 1) 1; 2) $\frac{2b+1}{b^2}$; 3) $-\frac{4}{c}$; 4) 4. **721.** 1) $(x-y)(x-5y)$; 2) $(a+9b)(a-4b)$; 3) $(3m+n)(m-3n)$; 4) $(4x-y)(x-y)$. **722.** 1) $(a-4b)(a-10b)$; 2) $(3b-2c)(4b+3c)$. **723.** 1) Если $a=3$, то x — любое число; если $a=-2$, то корней нет; если $a \neq 3$ и $a \neq -2$, то $x=\frac{a+3}{a+2}$; 2) если $a=7$, то x — любое число; если $a=1$, то корней нет; если $a \neq 7$ и $a \neq 1$, то $x=\frac{2a+1}{a-1}$. **724.** Если $a=-8$, то x — любое число; если $a=1$, то корней нет; если $a \neq -8$ и $a \neq 1$, то $x=\frac{a+8}{a-1}$. **727.** 6,8 %. **729.** 1) Корней нет; 2) -4; 3) 3; 4) y — любое действительное число, отличное от -4 и от 5. **733.** 1) -4; 1; 2) -1; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) -2; 10; 5) 7; 6) -6; 7) -5; 10; 8) 5; 9) 2; 8; 10) -2; 9; 11) -3; 2; 12) 4; $-0{,}4$. **734.** 1) -1; 2) $-0{,}25$; 3) 0,5; 6; 4) 8; 5) -3; 6) -3; 12; 7) -1; $\frac{2}{7}$; 8) -3; 13. **739.** 1) 6; 2) 5; 3) 7; 4) 6. **740.** 1) 10; 2) -7. **741.** 1) $3 \pm \sqrt{18}$; 2) -23; 1; 3) -27; -1; 4) 3. **742.** 1) 4; 9; 2) 5. **743.** 1) -1; 18; 2) -98; 2; 3) $-1{,}5$; 4) -2; 5) -3; 4; 6) -3; 7) 2; 8) 9; 9) 1; 10) 9. **744.** 1) -60; 50; 2) -3; 3) -9; 24; 4) 2; 5) -20; 2; 6) 15. **745.** 1) $-\frac{2}{3}$; 14; 2) -56; 60. **746.** 1) -15; 12; 2) -20; 2. **747.** 1) -5; 2) корней нет; 3) $3\frac{1}{3}$; 4) 1. **748.** 1) -15; 1; 2) 1,5. **749.** 1) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; -3; 3; 2) -6; -4; -1; 1; 3) 0; 3; 4) -1; -3; 1. **750.** 1) $-\frac{1}{3}$; 1; 2) 0,5. **751.** 1) -1; 7; 2; 4; 2) -6; -2; $-4 \pm \sqrt{20}$; 3) -2; 1; 4) $-\frac{5}{3}$; 10. **752.** 1) Если $a=1$, то $x=7$; если $a=7$, то $x=1$; если $a \neq 1$ и $a \neq 7$, то $x=1$ или $x=7$; 2) если $a \neq 1$ и $a \neq 7$, то $x=a$; если $a=1$ или $a=7$, то корней нет; 3) если $a \neq 2$ и $a \neq \frac{2}{3}$, то $x=3a$ или $x=2$; если $a=2$ или $a=\frac{2}{3}$, то $x=2$; 4) если

$a = 0$, то x — любое число, отличное от -3; если $a = -3$, то корней нет; если $a \neq 0$ и $a \neq -3$, то $x = a$. **753.** $a = 2\sqrt{5}$, или $a = -2\sqrt{5}$, или $a = 6$. **758.** 75 км/ч. **759.** 50 км/ч, 60 км/ч. **760.** 80 км/ч, 60 км/ч. **761.** 80 км/ч. **762.** 12 км/ч. **763.** 12 страниц. **764.** 30 $м^3$, 25 $м^3$. **765.** 6 дней. **766.** 31 км/ч. **767.** 10 км/ч. **768.** 3 км/ч. **769.** 2 км/ч или 2,25 км/ч. **770.** 60 км/ч, 40 км/ч. **771.** 60 км/ч. **772.** 60 км/ч. **773.** 8 км/ч. **774.** 32 км/ч. **775.** $\frac{1}{4}$. **776.** $\frac{7}{12}$. **777.** 45 дней, 36 дней. **778.** 15 ч, 10 ч. **779.** 21 ч, 24 ч. **780.** 80 г. **781.** 30 кг. **782.** 3 км/ч. **783.** 5 ч. **784.** 4 ч, 6 ч, 12 ч. **785.** 80 км/ч. **786.** 24 детали. **787.** 12 ч. **789.** 6. **804.** 3) $\frac{8}{3}$. **810.** 4) 1, 2, 3. **813.** $\frac{4}{a(a+12)}$. **814.** *Указание.* Рассмотрите разность левой и правой частей данного равенства. **867.** $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{2}}{3}$. **890.** 1) -5; 5; -1; 1; 2) -10; 10; -22; 22. **891.** $a = 1$. **892.** $a = 3$.

Ответы к заданиям в тестовой форме «Проверь себя»

Номер задания	Номер задачи											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Б	В	А	А	Г	А	В	Г	В	Г	Б	В
2	Б	Г	Б	Г	А	А	В	Б	В	Б	В	А
3	В	Г	В	Б	В	А	Б	Б	Г	А	А	Г
4	В	Б	Б	В	В	А	В	Г	В	В	А	Б
5	В	Г	Г	В	А	Б	А	Б	А	Г	Б	А
6	Г	В	А	Б	А	В	А	В	А	Г	Б	В

Предметный указатель

Оглавление

§ 3. Квадратные уравнения