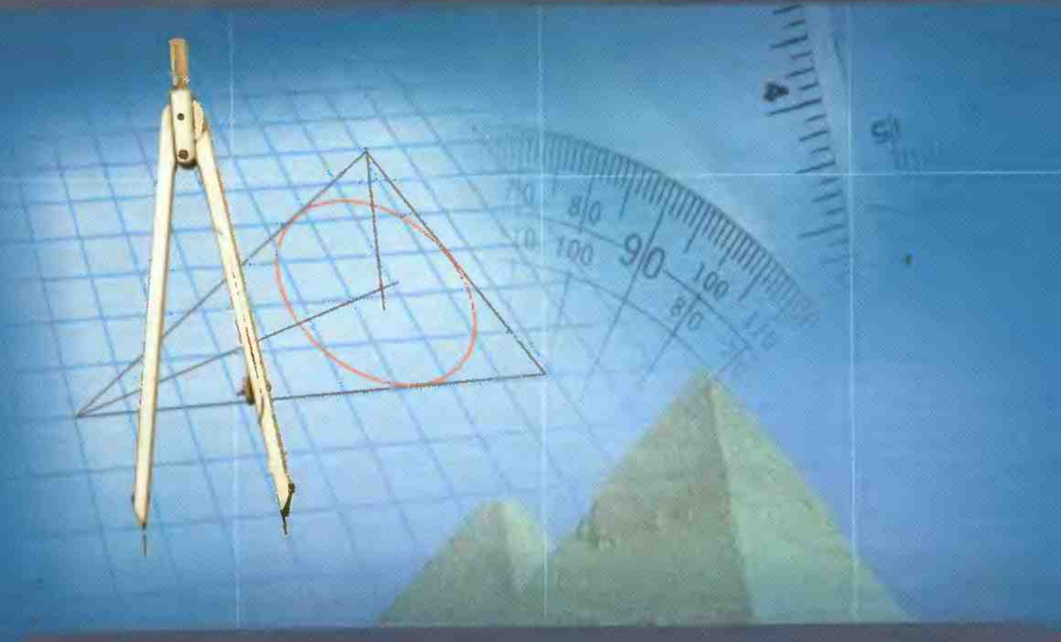
А. П. Ершова, В. В. Голобородько, А. Ф. Крижановский

Геометрия 7 класс



- общеобразовательная программа
- допрофильная подготовка
- углубленное изучение

ИЗДАТЕЛЬСТВО
РАНОК

Геометрия есть познание всего сущего.

Платон, древнегреческий философ

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Вы начинаете изучение нового математического предмета. Со страниц этого учебника вы почерпнете знания, которые уже много веков приносят людям огромную пользу. В будущем эти знания помогут и вам.

Наверное, каждый из вас когда-нибудь представлял себя великим путешественником, который, подобно Христофору Колумбу, прокладывает курс к неизведанным странам в бушующем океане. Кто-то мечтал стать знаменитым детективом, современным Шерлоком Холмсом, чтобы, используя стройное логическое мышление, решать самые сложные задачи, разгадывать тайны. Кто-то видел себя прославленным египетским фараоном, по чьей воле среди пустыни возводятся величественные пирамиды. Но, вероятно, не все вы догадывались, что есть наука, без которой невозможно осуществить эти мечты. Эта наука — ***геометрия***, к изучению которой вы приступаете.

Почему именно геометрия? Прежде всего, это одна из наиболее древних математических наук. Она возникла еще в Древнем Египте, где каждый год после разливов Нила жители вынуждены были восстанавливать границы земельных участков. Сам термин «геометрия» в переводе с греческого означает «землемерие». Изучать геометрические формы нужно было не только земледельцам, но и строителям, ведь без геометрии ни одна из египетских пирамид не была бы построена.

Геометрия как раздел математики, связанный с вычислениями и расчетами, способствовала их развитию. Благодаря геометрии стали возможны великие научные открытия, в частности географические. Не случайно в эпоху Средневековья геометрию относили к тем немногим наукам, которыми должен был овладеть каждый просвещенный человек.

Отметим также, что геометрия — это искусство правильного мышления. Изучая этот предмет, можно увидеть, как закономерности окружающего мира отражаются в логических утверждениях, из которых извлекают полезные следствия.

На протяжении многих веков основы геометрии почти не изменялись. Немало утверждений, которые вы будете изучать, даже более древние, чем Библия. Благодаря многим выдающимся ученым, среди которых Евклид, Пифагор, Декарт, Лобачевский, эта наука вышла на качественно новый уровень.

Итак, в добрый путь! Не бойтесь задавать вопросы, находить и применять собственные методы решения задач. Не все будет получаться сразу, но внимание и настойчивость помогут вам получить истинное удовольствие от изучения геометрии.

Желаем вам успехов!

Как пользоваться учебником

Учебник имеет три главы, каждая из которых состоит из параграфов, а параграфы — из пунктов. В тексте содержится как теоретический материал, так и примеры решения задач. Важнейшие понятия и факты выделены полужирным шрифтом.

Упражнения и задачи, представленные в учебнике, делятся на четыре группы.

Устные задачи помогут вам понять, насколько успешно вы усвоили теоретический материал. Эти упражнения не обязательно решать мысленно — вы можете выполнить необходимые рисунки, вычисления, записать ход рассуждений в черновике. После устных упражнений можно переходить к ***графическим упражнениям***, которые выполняются в тетради или на компьютере. Далее следуют ***письменные задания***. Сначала проверьте свои знания, выполняя задачи ***уровня А***. Более сложными являются задачи ***уровня Б***. И наконец, если вы хорошо овладели материалом и желаете проявить свои творческие способности, вас ждут задачи ***уровня В***.

После каждого параграфа в рубрике ***«Повторение»*** указано, какие именно понятия и факты следует вспомнить для успешного изучения дальнейшего материала, и приведены задачи для повторения, которые подготовят вас к восприятию следующей темы. Для самостоятельной работы дома предназначены задачи, номера которых обозначены стрелками. Решать все задачи каждого уровня не обязательно.

В конце каждой главы помещены ***контрольные вопросы и задачи для подготовки к контрольным работам***, благодаря которым вы сможете лучше выполнить тематическое оценивание. ***Дополнительные задачи*** к главам откроют вам новые грани геометрии, помогут обобщить изученный материал и почувствовать красоту нестандартного мышления.

Итоговые обзоры в конце каждой главы послужат своеобразным геометрическим компасом и помогут ориентироваться в изученном материале. ***Приложения***, приведенные в конце учебника, углубят ваши знания по отдельным изученным темам, а ***исторические справки*** познакомят с некоторыми интересными фактами, касающимися развития геометрии и деятельности выдающихся ученых-геометров.

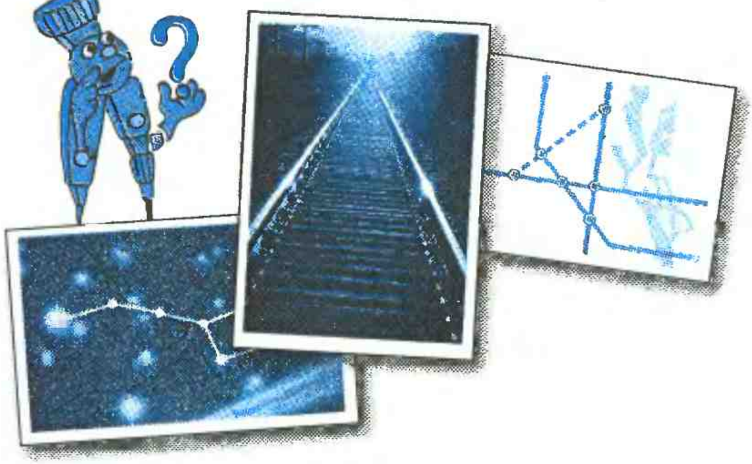
Глава I
ПРОСТЕЙШИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Геометрия — правительница
всех мысленных изысканий.
Михаил Ломоносов, российский ученый

Начиная возводить дом, строители сначала закладывают фундамент — основу, на которой будет держаться сооружение. Нечто подобное необходимо сделать и нам.

Мы начинаем изучать **планиметрию** — раздел геометрии, в котором рассматриваются фигуры на плоскости. Из курса математики вы уже имеете представление о некоторых из них. Наша ближайшая цель — восстановить и дополнить эти начальные знания. Геометрические сведения мы будем излагать в определенной логической последовательности, чтобы они стали прочным фундаментом для дальнейшего изучения геометрии.

Основу любой науки составляют утверждения, которые принимаются как исходные и не требуют обоснования. В математике такие утверждения называют **аксиомами**. Аксиомы планиметрии, которые мы рассмотрим в этой главе, выражают основные свойства простейших геометрических фигур. На их основе с помощью логических рассуждений мы будем получать более сложные геометрические факты.



§1. Основные геометрические фигуры

Планиметрия — от латинского «планум» — плоскость и греческого «метрео» — измеряю

1.1. Точка и прямая

Основными геометрическими фигурами на плоскости являются **точка** и **прямая**. Плоскость можно представить как лист бумаги, точку — как след, оставленный иголкой на этом листе, а прямую — как тонкую натянутую нить. Точки обычно обозначают прописными латинскими буквами (A, B, C, D, ...), а прямые — строчными латинскими буквами (a, b, c, d, ...).

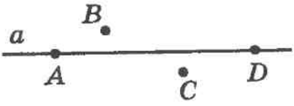


Рис. 1. Точки A и D лежат на прямой a, а точки B и C не лежат на прямой a

На рисунке 1 точки A и D ***лежат на прямой*** a, а точки B и C ***не лежат на прямой*** a. Можно это же сказать иначе: прямая a проходит через точки A и D, но не проходит через точки B и C.

Прямая бесконечна и состоит из бесконечного множества точек. На рисунках мы изображаем лишь часть прямой.

1.2. Свойства точек и прямых

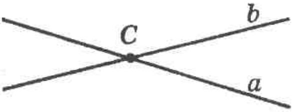


Рис. 2. Прямые a и b пересекаются в точке C

Через одну точку на плоскости можно провести бесконечно много прямых. Рассмотрим прямые a и b, проходящие через точку C (рис. 2). В этом случае говорят, что прямые a и b ***пересекаются в точке*** C, а их общая точка C является ***точкой пересечения прямых*** a и b.

Рис. 3. Прямая c проходит через точки A и B

Если на плоскости обозначены две точки[1] A и B, то через них можно провести прямую c (рис. 3). Отметим, что через точки A и B невозможно провести другую прямую, которая не совпадала бы с прямой c.

---

[1] Здесь и далее, говоря «две точки» («две прямые», «три точки» и т. д.), мы будем считать, что эти точки (прямые) различны.

Аксиома — от греческого «аксиос» — общепринятый, безоговорочный, не вызывающий сомнения

Это свойство называют аксиомой проведения прямой.

Аксиома проведения прямой

Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.

Из этого следует, что две прямые не могут иметь две или более общих точек: они либо имеют одну общую точку, либо не имеют общих точек вообще. Прямую, с выбранными на ней двумя точками, можно обозначать прописными буквами, которыми названы эти точки. Так, прямую на рисунке 3 можно назвать прямой AB или прямой BA.

Через три точки плоскости не всегда можно провести прямую. Так на рисунке 1 нельзя провести прямую через точки A, B, D.

Рис. 4. Точка C лежит между точками A и B

На рисунке 4 точки A, B, C лежат на одной прямой, причем точка C ***лежит между точками*** A и B. Можно также сказать, что точки A и B ***лежат по разные стороны*** от точки C.

Точки B и C ***лежат по одну сторону*** от точки A, а точки A и C ***лежат по одну сторону*** от точки B.

Аксиома расположения точек на прямой

Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

1.3. Луч

Рис. 5. Точка A делит прямую a на две полупрямые AA_1 и AA_2

Любая точка делит прямую на две части (рис. 5). Каждую из этих частей можно условно считать половиной прямой, поэтому образовавшиеся части прямой и получили название «полупрямые», или иначе — лучи.

Лучом (или **полупрямой**) называется часть прямой, состоящая из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от некоторой данной на ней точки, а также самой этой точки. Данная точка называется **начальной точкой** (или **началом**) **луча**.

Рис. 6. Луч BC

На рисунке 5 точка A — начальная точка двух лучей прямой a. Лучи, как и прямые, можно обозначать строчными латинскими буквами или двумя точками: начальной (обязательно на первом месте!) и еще какой-нибудь точкой этого луча. Так, луч на рисунке 6 можно обозначить b или BC, но нельзя обозначить CB.

Два различных луча одной прямой с общей начальной точкой называются **дополнительными лучами**.

На рисунке 5 AA_1 и AA_2 — дополнительные лучи. Они дополняют друг друга до прямой a и имеют только одну общую точку — их начало.

Задача

На прямой точка C лежит между точками A и B. Могут ли лучи AB и AC быть дополнительными? Ответ обоснуйте.

Решение

Пусть A, B и C — данные точки (рис. 7). Поскольку точка C лежит между точками A и B, то точки C и B лежат по одну сторону от точки A, значит, они принадлежат одному лучу с началом A. Этот луч можно назвать AB или AC. Следовательно, данные лучи совпадают, поэтому они не являются дополнительными.

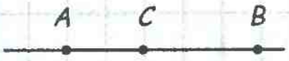


Рис. 7

Ответ: не могут.

1.4. Определение и его роль в геометрии

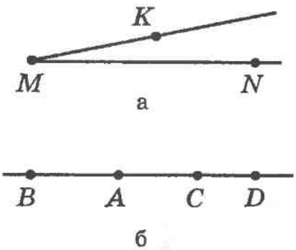


Рис. 8. К объяснению понятия «дополнительные лучи»:
а) лучи MN и MK не дополнительные;
б) лучи AB и CD не дополнительные

В пункте 1.3 описаны два понятия — «луч», которое известно вам из курса математики 5 класса, и новое понятие — «дополнительные лучи». Благодаря этим описаниям можно четко представить, какие именно фигуры рассматриваются. Данные нами описания являются **определениями**, указывающими на особенности описанной фигуры, которые отличают ее от других фигур.

Прочитаем еще раз определение дополнительных лучей. Если в нем пропустить лишь слова «одной прямой», то лучи MN и MK на рисунке 8, *а* придется считать дополнительными. Если же не уточнить, что дополнительные лучи должны иметь общее начало, то лучи AB и CD на рисунке 8, *б* тоже следует назвать дополнительными. Таким образом, эти измененные определения не будут описывать тот объект, который мы имеем в виду.

Эти соображения свидетельствуют о том, как важно уделять внимание каждому слову в определении: только так можно по-настоящему понять геометрию.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. На прямой AB отмечена точка C. Лежит ли точка A на прямой BC? Лежит ли точка B на прямой AC?

2. Точка A лежит на прямой c, а точка B не лежит на прямой c. Пересекаются ли прямые c и AB? Если да, то назовите точку их пересечения.

3. Через точку A проведены две прямые. Могут ли эти прямые иметь общую точку B, отличную от точки A?

4. Точка B лежит на прямой между точками A и C. Как расположены точки B и C относительно точки A?

Рис. 9

5. На прямой отмечены точки K, L, M, N (рис. 9). Назовите:

а) точку, лежащую между точками L и N;

б) точки, лежащие между точками K и N;

в) две точки, лежащие по одну сторону от точки L;

г) точку, по разные стороны которой лежат точки K и M.

6. На луче AB отмечена точка C. Может ли точка A лежать между точками B и C? Может ли точка B лежать между точками A и C?

7. Лучи DE и DF — дополнительные. Какая из точек D, E и F лежит между двумя другими?

8. Два луча имеют общую начальную точку. Обязательно ли они являются дополнительными?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

9. Проведите прямую.

а) Отметьте точки A и B, лежащие на данной прямой, и точки C и D, не лежащие на данной прямой. Как можно обозначить данную прямую?

б) Проведите еще одну прямую через точки A и C. Сколько общих точек имеют построенные прямые?

10. Отметьте точку A.

а) Проведите луч с началом A и отметьте на нем точку B. Назовите прямую, частью которой является луч AB.

б) Проведите луч с началом B, который не проходит через точку A. Можно ли назвать построенный луч BA?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

11. Отметьте точки B и C. Проведите через них прямую. Проведите еще одну прямую так, чтобы она проходила через точку B, но не проходила через точку C. Сколько общих точек имеют эти прямые?

12. Отметьте две точки и от руки проведите через них прямую. Проверьте правильность построения с помощью линейки. Какую аксиому вы использовали?

13. На прямой точки E и F лежат по разные стороны от точки D. Как расположены точки D и F относительно точки E? Может ли точка F лежать между точками D и E?

→ **14.** Точки M и N лежат на прямой по одну сторону от точки K. Какая из этих трех точек не может лежать между двумя другими? Ответ объясните.

15. Отметьте точки A и B. Проведите луч AB. Являются ли дополнительными лучи AB и BA?

16. На прямой отмечены две точки. Сколько пар дополнительных лучей при этом образовалось?

→ **17.** Постройте дополнительные полупрямые PQ и PR. Назовите точки, лежащие по одну сторону от точки R. Лежит ли точка Q на луче RP?

Уровень Б

18. Даны четыре точки, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Через каждые две из данных точек проведена прямая. Сколько прямых проведено?

→ **19.** Точки A, B, C находятся на одной прямой, а точка D не лежит на данной прямой. Через каждые две из данных точек проведена прямая. Сколько всего прямых проведено?

20. По пути из Днепропетровска в Харьков автомобиль проезжает Красноград, а по пути из Краснограда в Днепропетровск — Перещепино. Какой из этих городов расположен на пути из Харькова до Перещепино?

→ **21.** На прямой отмечены точки X, Y, Z, причем точки X и Y лежат по одну сторону от точки Z, а точки X и Z — по одну сторону от точки Y. Какая из трех точек лежит между двумя другими?

22. Точка C лежит на луче AB, а точка B — на луче CA. Какая из этих трех точек лежит между двумя другими?

→ **23.** Точки A, B и C находятся на одной прямой, причем лучи AB и AC не являются дополнительными, а точки A и C лежат по одну сторону от точки B. Какая из этих трех точек лежит между двумя другими?

24. Могут ли два луча одной прямой не быть дополнительными? Сделайте рисунок.

→ **25.** Два луча имеют единственную общую точку. Будут ли такие лучи дополнительными? Сделайте рисунки.

Уровень В

26. Сколько прямых трасс необходимо проложить, чтобы соединить любые два из четырех городов? Рассмотрите все возможные случаи. Сделайте рисунки.

27. Даны три прямые, причем любые две из них пересекаются. Сколько точек пересечения может при этом образоваться? Рассмотрите все возможные случаи. Сделайте рисунки.

28. Как должны быть расположены на плоскости n точек, чтобы они определяли ровно n прямых, если $n>2$?

29. На прямой отмечены три точки A, B и C. Сколько различных лучей можно назвать с помощью этих точек? Сколько среди этих лучей пар дополнительных лучей? Изменится ли ответ, если данные точки не лежат на одной прямой?

ПОВТОРЕНИЕ

Теоретический материал

5 класс

- прямая и отрезок
- построение и измерение отрезков

Задачи

30. На прямой точка B лежит между точками A и C. Существует ли на данной прямой:

а) точка, которая лежит между точками A и B, но не лежит между точками A и C;

б) точка, которая лежит между точками A и C, но не лежит между точками A и B?

31. На прямой отмечены пять точек. Определите, какие из данных утверждений верны:

а) любые три из данных точек лежат между двумя другими;

б) среди данных точек найдутся три, лежащие между двумя другими;

в) среди данных точек существует по крайней мере одна, не лежащая между двумя другими данными точками;

г) среди данных точек существует ровно одна, не лежащая между двумя другими данными точками.

§ 2. Отрезок. Измерение и откладывание отрезков

2.1. Определение отрезка

Любой луч является частью прямой, «ограниченной» с одной стороны начальной точкой. Рассмотрим теперь отрезок — часть прямой, «ограниченную» точками с обеих сторон.

Определение

Отрезком называется часть прямой, состоящая из двух данных точек этой прямой (**концов отрезка**) и всех точек, лежащих между ними.

Рис. 10. Отрезок AB — часть прямой AB

Отрезок обозначают, записывая его концы в произвольном порядке. Так, отрезок на рисунке 10 можно назвать «отрезок AB» или «отрезок BA». Очевидно, что отрезок AB является частью прямой AB. При этом следует различать, идет ли речь о прямой AB или об отрезке AB.

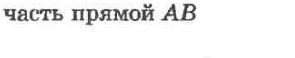


Рис. 11. Точка C_1 лежит на отрезке AB, точка C_2 не лежит на отрезке AB

Если рассмотреть вместе с точками A и B некоторую другую точку прямой, то, в соответствии с аксиомой расположения точек на прямой, она либо лежит между точками A и B, то есть принадлежит отрезку AB (на рисунке 11 такой точкой является C_1), либо не лежит между точками A и B, то есть не принадлежит отрезку AB (на рисунке 11 такой точкой является C_2).

2.2. Равенство отрезков. Середина отрезка

Определение

Два отрезка называются **равными**, если они совмещаются наложением.

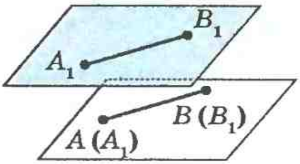


Рис. 12. Отрезки AB и A_1B_1 совмещаются наложением

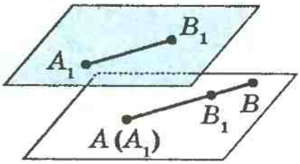


Рис. 13. Отрезки AB и A_1B_1 не совмещаются наложением

Рис. 14. Точка E — середина отрезка DF

Нанесем отрезок A_1B_1 на прозрачную пленку и наложим его на отрезок AB так, чтобы точка A_1 совпала с точкой A и эти отрезки имели другие общие точки. Если точка B_1 совместится с точкой B (рис. 12), то отрезки AB и A_1B_1 равны (пишут так: $AB = A_1B_1$). Если же точки B и B_1 не совместятся, то меньшим из двух отрезков является тот, который составляет часть другого.

На рисунке 13 точка B_1 совместилась с некоторой точкой отрезка AB, отличной от точки B, поэтому отрезок AB больше отрезка A_1B_1. Кратко это обозначают так: $AB > A_1B_1$.

Определение

Серединой отрезка называется точка отрезка, делящая его пополам (то есть на два равных отрезка).

На рисунке 14 отрезки DE и EF равны, то есть точка E — середина отрезка DF. Обычно на рисунках равные отрезки обозначают одинаковым количеством черточек.

2.3. Измерение и откладывание отрезков

Важным свойством отрезка является его длина. Она выражается положительным числом, которое может быть определено сравнением данного отрезка с отрезком, принятым за единицу измерения,— единичным отрезком. В качестве единичного отрезка можно выбрать отрезок любой длины. На практике выбирают единичные отрезки длиной 1 мм, 1 см, 1 м и др.

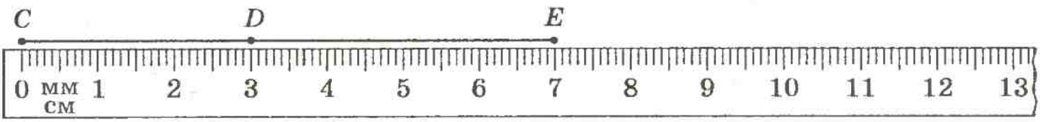


Рис. 15. Измерение отрезка с помощью линейки

Например, на измерительной линейке, которой мы обычно пользуемся, маленькие деления задают единичные отрезки длиной 1 миллиметр, а большие — длиной 1 сантиметр (рис. 15).

Прикладывая линейку к данному отрезку, мы определяем, сколько единичных отрезков и их частей в нем содержится. Это число выражает **длину отрезка.** Число, выражающее длину отрезка, зависит от единицы измерения.

На рисунке 15 длина отрезка CE равна 70 мм, или 7 см, или 0,07 м и т. д. Длина отрезка CD равна 3 см, а отрезка DE — 4 см. Можно сказать, что отрезок CE состоит из двух частей — отрезков CD и DE. Точка D лежит между точками C и E, а длина отрезка CE равна сумме длин отрезков CD и DE (пишут так: $CD + DE = CE$).

Сформулируем аксиомы измерения и откладывания отрезков.

Аксиома измерения отрезков

Каждый отрезок имеет определенную длину, которая выражается положительным числом в заданных единицах измерения. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые отрезок делится любой его точкой.

Аксиома откладывания отрезков

На любом луче от его начальной точки можно отложить отрезок данной длины и только один.

Очевидно, что измерение отрезков состоит в последовательном наложении на данный отрезок определенного количества единичных отрезков. Поэтому ***равные отрезки имеют равные длины, а больший отрезок имеет большую длину.*** Верно и другое утверждение: ***если отрезки имеют равные длины, то они равны, а большим из двух отрезков является тот, который имеет большую длину.*** Таким образом, для сравнения отрезков можно сравнить их длины.

Длину отрезка AB называют также **расстоянием между точками** A и B. Часто, говоря «отрезок AB», мы имеем в виду его длину.

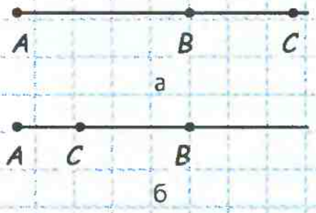


Рис. 16

Задача

На луче AB отмечена точка C, причем $AB = 12$см, $BC = 7$ см. Найдите длину отрезка AC.

Решение

Рассмотрим два случая расположения точки C на луче AB.

1. Точка C не лежит на отрезке AB (рис. 16, а). Тогда точка B лежит на отрезке AC. По аксиоме измерения отрезков $AC = AB + BC$, то есть $AC = 12 + 7 = 19$ (см).
2. Точка C лежит на отрезке AB (рис. 16, б). Тогда $AB = AC + BC$, то есть $12 = AC + 7$. Таким образом, $AC = 12 - 7 = 5$ (см).

Ответ: 19 см или 5 см.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

32. На прямой отмечены три точки. Сколько отрезков образовалось?

33. На прямой точка A лежит между точками B и C. Какой из отрезков с концами в данных точках является наибольшим?

34. Если точка C лежит на отрезке AB, то она лежит и на луче AB. Верно ли такое утверждение?

35. Если точка C лежит на луче AB, то она обязательно лежит и на отрезке AB. Верно ли такое утверждение?

36. Можно ли разбить прямую на отрезок и два луча? Если да, то могут ли полученные лучи быть дополнительными?

37. Точки A, B и C находятся на одной прямой. Отрезок AB больше отрезка AC. Может ли точка C лежать между точками A и B? Может ли точка A лежать между точками B и C?

38. Отрезки AB и BC равны и лежат на одной прямой. Какая из точек A, B, C лежит между двумя другими?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

39. Проведите луч с началом в точке A.

а) На данном луче отложите отрезок AB, равный 6 см, и отметьте на этом отрезке точку C

б) Измерьте длину отрезка AC.

в) Вычислите длину отрезка CB. Проверьте полученный результат измерением.

→ **40.** Проведите луч с началом в точке C.

а) На данном луче отложите отрезок CD, равный 4 см.

б) Постройте точку E так, чтобы точка D была серединой отрезка CE. Какова длина отрезка CE?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

41. На прямой точка M лежит между точками K и N. Найдите длину отрезка:

а) KN, если $KM = 2{,}9$ см, $MN = 4{,}1$ см;

б) MN, если $KN = 8{,}3$ см, $KM = 5{,}8$ см.

→ **42.** Точки B и C лежат на отрезке AD, равном 10 см. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 2{,}4$ см, $CD = 3{,}6$ см.

43. На отрезке MN отмечены точки P и R так, что $MP = PR = RN$. Сделайте рисунок. Какие еще равные отрезки с концами в данных точках образовались на рисунке?

→ **44.** На прямой точка B лежит между точками A и C. Какие из отрезков с концами в данных точках могут быть равными? Ответ обоснуйте.

45. На луче с началом A отмечены точки B и C так, что $AB=6,4$ см, $BC=2,6$ см. Какой может быть длина отрезка AC? Рассмотрите два возможных случая расположения точек на луче.

→ **46.** На луче CD отмечена точка E. Найдите длину отрезка CE, если $CD=8$ м, $DE=6,2$ м. Сколько решений имеет задача?

47. На прямой отмечены точки P, R и S, причем $PR<PS<RS$. Какая из трех данных точек лежит между двумя другими? Ответ обоснуйте.

Уровень Б

48. На прямой точка M лежит между точками K и N. Найдите длины отрезков:

а) KM и MN, если $KN=24$ см, а отрезок KM больше отрезка MN на 8 см;

б) KM и KN, если $MN=9$ см, а $KN:KM=7:4$.

49. Точки B и C лежат на отрезке AD. Найдите длину отрезка BC, если $AD=10$ см, $AB=6,8$ см, $CD=8,3$ см.

→ **50.** На отрезке MN отмечены точки A и B так, что $MA=7$ мм, $AB=4,3$ мм, $BN=5,1$ мм. Найдите длину отрезка MN. Рассмотрите все возможные случаи.

51. На луче с началом A отмечены точки B, C и D, причем $AB=4$ см, $BC=5,2$ см, $CD=2,4$ см. Какой может быть длина отрезка AD? Рассмотрите все возможные случаи.

→ **52.** Точка C — середина отрезка AB, а точка D — середина отрезка AC. Найдите длину отрезка:

а) BD, если $AC=16$ см;

б) AB, если $BD=12$ см.

53. На прямой отмечены точки M, N и K, причем отрезок MN больше NK, а отрезок NK не является наименьшим среди образовавшихся отрезков. Какой из полученных отрезков наименьший? Ответ обоснуйте.

→ **54.** Точки A, B и C лежат на одной прямой. Назовите наибольший из отрезков с концами в данных точках, если точка C лежит на луче AB, а точка B лежит на луче CA. Ответ обоснуйте.

Уровень В

55. На прямой отмечены точки A и B, расстояние между которыми составляет 6 см. Укажите расположение на данной прямой всех точек M таких, что:

а) $AM + MB = 8$ см;

б) $AM + MB = 6$ см;

в) $AM = 2MB$.

56. Отрезок разделен тремя точками на четыре части, каждая из которых равна a. Сколько при этом образовалось равных отрезков, длина которых не равна a? Укажите их длины.

57. Точка C лежит на отрезке AB. Докажите, что расстояние между серединами отрезков AC и CB не зависит от расположения точки C. Найдите это расстояние, если $AB = 20$ см.

58. Точка C лежит на отрезке AB. Найдите длину отрезка AB, если расстояние между серединами отрезков AC и CB равно 5 см.

59. Отрезки AB и CD лежат на одной прямой. Докажите, что если они имеют общую середину, то $AC = BD$.

60. На прямой отмечены точки A, B, C и D, причем $AB = CD$. Образовались ли при этом другие равные отрезки с концами в данных точках? Если да, то докажите их равенство.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 3

Теоретический материал

- угол
- построение и измерение углов

5 класс

Задачи

61. Из точки A проведены лучи AB и AC, не являющиеся дополнительными. Обязательно ли данные лучи будут совпадать?

62. Отрезки BD и DK имеют единственную общую точку D.

а) Обязательно ли точка D лежит между точками B и K?

б) Может ли некоторая прямая, не проходящая через точку D, пересекать оба данных отрезка?

§3. Угол. Измерение и откладывание углов

3.1. Определение угла

При изучении дополнительных лучей мы рассматривали случай, когда два луча имеют общую начальную точку. Рассмотрим теперь случай, когда два луча имеют общую начальную точку, но не обязательно являются полупрямыми одной прямой.

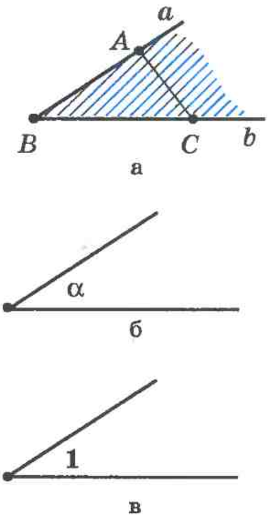


Рис. 17. Обозначение угла

Определение

Углом называется геометрическая фигура, которая состоит из двух лучей (**сторон угла**), исходящих из одной точки (**вершины угла**).

Для обозначения углов используют знак $\angle$. На рисунке 17, *а* изображен угол с вершиной B, сторонами которого являются лучи a и b (или BA и BC). Этот угол можно обозначить одним из следующих способов: $\angle B$, $\angle ABC$, $\angle CBA$, $\angle(ab)$, $\angle(ba)$. Если угол обозначают по вершине и двум точкам на сторонах, то вершину обязательно указывают на втором месте. Иногда углы обозначают греческими буквами $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ (рис. 17, *б*), или числами (рис. 17, *в*).

Стороны угла делят плоскость на две части. ***Внутренней областью угла*** считается та из них, которая целиком содержит любой отрезок с концами на сторонах угла (на рисунке 17, *а* она заштрихована). Луч, который исходит из вершины угла и проходит в его внутренней области, ***делит данный угол на два угла***. На рисунке 18 луч BD делит угол ABC на углы ABD и DBC.

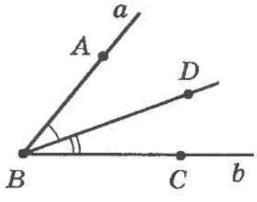


Рис. 18. Луч BD делит угол ABC на два угла

Определение

Развернутым углом называется угол, стороны которого являются дополнительными лучами.

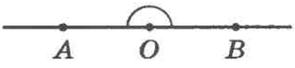


Рис. 19. Развернутый угол AOB

На рисунке 19 изображен развернутый угол AOB.

Прямая AB делит плоскость на две части, каждую из которых можно считать внутренней областью развернутого угла AOB. Договоримся ту из частей, которую мы рассматриваем как внутреннюю, обозначать дужкой.

3.2. Равенство углов. Биссектриса угла

Определение

Два угла называются **равными**, если они совмещаются наложением.

Биссектриса — от латинского «бис» — дважды и «секто» — рассекаю — рассекающая пополам.

На рисунке 20 изображены углы 1 и 2. Наложим угол 1 на угол 2 так, чтобы их вершины совпали, сторона первого угла совместилась со стороной второго, а внутренние области этих углов были расположены по одну сторону от прямой, содержащей совместившиеся стороны. Если другие стороны этих углов тоже совместятся, то углы 1 и 2 являются равными (пишут так: $\angle 1 = \angle 2$).

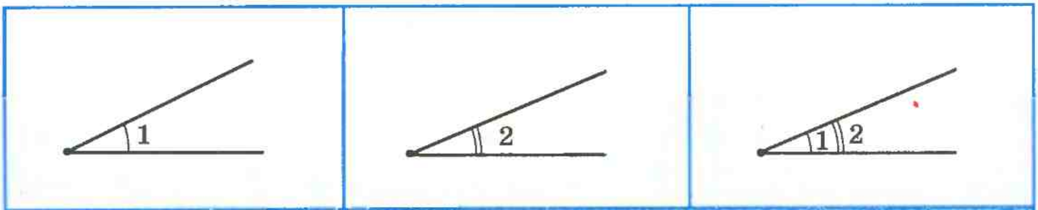


Рис. 20. Углы 1 и 2 совмещаются наложением

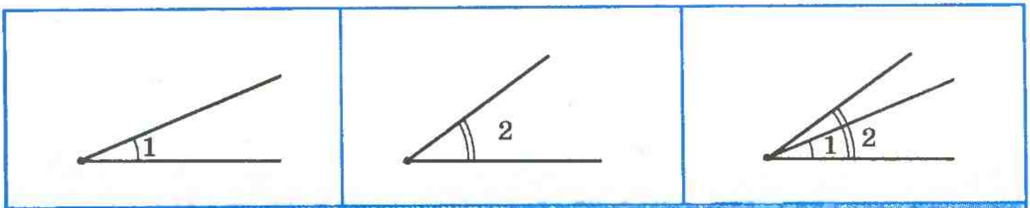


Рис. 21. Углы 1 и 2 не совмещаются наложением

Если же эти стороны не совместятся, то меньшим считается тот угол, сторона которого принадлежит внутренней области второго угла. На рисунке 21 угол 1 является частью угла 2, то есть он меньше угла 2 (пишут так: $\angle 1 < \angle 2$).

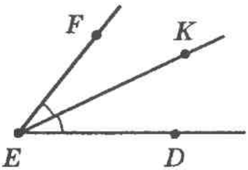


Рис. 22. Луч EK — биссектриса угла DEF

Определение

Биссектрисой угла называется луч, который исходит из вершины угла и делит угол пополам (то есть на два равных угла).

На рисунке 22 углы DEK и KEF равны, поэтому луч EK — биссектриса угла DEF. Обычно на рисунках равные углы обозначают одинаковым количеством дужек.

3.3. Измерение и откладывание углов

Градус — от латинского «градус» — шаг. По наблюдению вавилонян солнечный диск на дневном пути «делает 180 шагов»

Измерение углов имеет много общего с измерением отрезков. Величина отрезка количественно выражается мерой (длиной) отрезка, а величина угла — мерой угла. Мера угла выражается положительным числом, которое можно определить измерением, основанным на сравнении данного угла с углом, принятым за единицу измерения.

Обычно такой единицей является 1 градус (обозначается 1°) — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла. Градусная мера угла указывает, сколько углов величиной 1° и их частей содержится в данном угле. Для измерения углов обычно используют транспортир, деления которого задают меру угла в градусах (рис. 23)[1].

Сформулируем аксиомы измерения и откладывания углов.

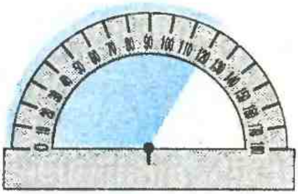


Рис. 23. Измерение угла с помощью транспортира

Аксиома измерения углов

Каждый угол имеет градусную меру, которая выражается положительным числом. Развернутый угол равен 180°.
Если луч делит данный угол на два угла, то градусная мера данного угла равна сумме градусных мер двух полученных углов.

Аксиома откладывания углов

От любого луча данной прямой можно отложить в заданную сторону от прямой угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

Так, на рисунке 18 градусная мера угла ABC равна сумме градусных мер углов ABD и DBC (это утверждение можно записать в виде равенства: $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$). Часто, говоря «угол ABC », мы имеем в виду градусную меру этого угла.

Биссектриса развернутого угла делит его на два угла, каждый из которых равен 90° (рис. 24). Такие углы называются прямыми. В отличие от других углов, обычно обозначаемых дужками, прямой угол обозначают знаком ¬.

Рис. 24. Биссектриса делит развернутый угол на два прямых угла

[1] В 7 классе мы будем рассматривать углы, градусная мера которых не превышает 180°. Для более точных измерений используется 1 минута (обозначается $1'$) — $\frac{1}{60}$ часть градуса и 1 секунда (обозначается $1''$) — $\frac{1}{60}$ часть минуты.

Рис. 25. Виды неразвернутых углов

Неразвернутые углы делятся на три вида (рис. 25):

- **острые углы,** меньше 90°;
- **прямые углы,** равны 90°;
- **тупые углы,** больше 90°, но меньше 180°.

На практике для построения углов используют транспортир. Для построения прямых углов используют угольник.

Измерение углов можно считать последовательным наложением на данный угол определенного (не обязательно целого) числа углов, равных 1°. Поэтому ***равные углы имеют равные градусные меры, а больший угол имеет большую градусную меру.*** Верно и другое утверждение: ***если углы имеют равные градусные меры, то они равны, а из двух углов большим является тот, который имеет большую градусную меру.*** Таким образом, для сравнения двух углов достаточно сравнить их градусные меры.

Задача

Луч b делит угол (ac), равный 120°, на два угла, один из которых втрое меньше угла (ac). Найдите эти углы.

Решение

Пусть угол (ab) втрое меньше угла (ac). Тогда $\angle(ab) = 120° : 3 = 40°$. Согласно аксиоме измерения углов, если луч b делит угол (ac) на два угла, то их сумма равна данному углу: $\angle(ac) = \angle(ab) + \angle(bc)$. Тогда $\angle(bc) = \angle(ac) - \angle(ab)$; $\angle(bc) = 120° - 40° = 80°$.

Ответ: 40°, 80°.

3.4. Аналогия в геометрии

Иногда при решении задач о свойствах отрезков и углов применяются одни и те же методы и подходы. Это объясняется сходством некоторых свойств этих фигур. Такое сходство в науке называется **аналогией.**

Объясним суть аналогии на примере двух следующих задач.

Задача 1

На отрезке AB, равном 20 см, отмечена точка C. Найдите расстояние между серединами отрезков AC и CB.

Задача 2

Луч C делит угол (ab), равный 140°, на два угла. Найдите угол между биссектрисами углов (ac) и (cb).

На первый взгляд, перед нами совершенно разные задачи, поскольку в одной речь идет об отрезках, а во второй — об углах. Однако в обеих задачах дано некоторое «целое», разделенное на части. Кроме того, понятия середины отрезка и биссектрисы угла связаны с делением целого пополам, и в обеих задачах нам необходимо найти сумму половин каждой из частей фигуры.

Решение

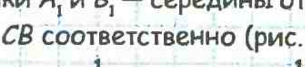


Рис. 26

Пусть точка C принадлежит отрезку AB, точки A_1 и B_1 — середины отрезков AC и CB соответственно (рис. 26).

Тогда $A_1C = \frac{1}{2}AC$, $CB_1 = \frac{1}{2}CB$.

Найдем длину отрезка A_1B_1:

$A_1B_1 = A_1C + CB_1 = \frac{1}{2}(AC + CB) = \frac{1}{2}AB$.

Решение

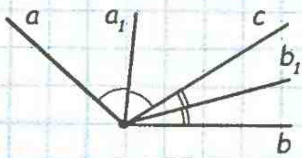


Рис. 27

Пусть луч c делит угол (ab) на два угла, лучи a_1 и b_1 — биссектрисы углов (ac) и (cb) соответственно (рис. 27).

Тогда $\angle(a_1c) = \frac{1}{2}\angle(ac), \angle(cb_1) = \frac{1}{2}\angle(cb)$.

Поскольку по условию задачи $AB = 20$ см, имеем:

$A_1B_1 = \frac{20}{2} = 10$ см.

Ответ: 10 см.

Найдем градусную меру угла (a_1b_1):

$\angle(a_1b_1) = \angle(a_1c) + \angle(cb_1) =$

$= \frac{1}{2}(\angle(ac) + \angle(cb)) = \frac{1}{2}\angle(ab)$.

Поскольку по условию задачи $\angle(ab) = 140°$, имеем:

$\angle(a_1b_1) = \frac{140}{2} = 70°$.

Ответ: 70°.

Как видим, в основе обоих решений лежит общая идея. Найдя ее при решении первой задачи, мы можем повторить основные этапы рассуждений применительно к условиям второй задачи, то есть решить ее *аналогично*.

Рассуждения по аналогии довольно часто применяются и в других науках. Например, биологи установили, что летучая мышь в полете испускает ультразвуковые колебания и, воспринимая колебания, отраженные от преграды, ориентируется по этим сигналам в темноте. По аналогичному принципу ученые создали радиолокатор, определяющий местонахождение объектов в любых погодных условиях. Но аналогия в науке не всегда дает желаемый результат: в течение многих веков человек старался взлететь в небо с помощью искусственных крыльев, аналогичных птичьим, но эти старания были напрасными. И только более основательные научные исследования привели к созданию дельтапланов, самолетов и других летательных аппаратов, с помощью которых человек поднялся в воздух. Выдающийся немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер считал аналогии «своими верными учителями» и подчеркивал, что «аналогиями менее всего следует пренебрегать в геометрии». Однако при этом нужно учитывать, что аналогия, полезная как способ рассуждений, сама по себе не может служить доказательством каких-либо свойств геометрических фигур.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

63. Точки A, B и C не лежат на одной прямой. Может ли угол ABC быть развернутым?

64. Определите, каким (острым, прямым, тупым или развернутым) является угол, который образуют стрелки часов в 3 часа; в 8 часов; в 11 часов; в 6 часов.

65. Назовите градусную меру угла, на который поворачивается:

а) минутная стрелка часов в течение 15 минут; 30 минут; 10 минут;

б) часовая стрелка часов в течение 3 часов; 1 часа; 30 минут.

66. Луч l делит угол (mn) на два угла. Сравните углы (ml) и (mn).

67. На рисунке 28 назовите все острые углы; все прямые углы; все тупые углы.

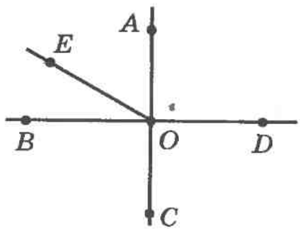


Рис. 28

68. Может ли сумма градусных мер двух острых углов быть:

а) меньше градусной меры прямого угла;

б) равна градусной мере прямого угла;

в) больше градусной меры прямого угла;

г) больше градусной меры развернутого угла?

69. Луч b — биссектриса неразвернутого угла (ac). Может ли угол (ab) быть прямым; тупым?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

70. Начертите угол ABC, равный 100°.

а) Проведите биссектрису BD данного угла. Какова градусная мера угла DBC?

б) Перегните рисунок по прямой BD. Совпадают ли лучи BA и BC? Как это объяснить?

71. Начертите на отдельном листе острый угол (ab) и проведите из его вершины луч c, делящий данный угол на два угла.

а) С помощью транспортира измерьте все образовавшиеся углы и сравните градусные меры углов (ac) и (cb).

б) Покажите с помощью наложения, какой из углов меньше: (ac) или (cb).

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

72. Луч b делит угол (ac) на два угла. Найдите:

а) угол (ac), если $\angle(ab)=63°$, $\angle(bc)=63°$;

б) угол (ab), если $\angle(ac)=109°$, $\angle(bc)=28°$.

73. Лучи OB и OC делят угол AOD на три угла. Найдите угол BOC, если $\angle AOD=142°$, $\angle AOB=12°$, а угол COD прямой.

74. Может ли луч b делить угол (ac) на два угла, если $\angle(bc)=70°$, $\angle(ac)=65°$? Ответ обоснуйте.

75. Луч BD — биссектриса угла ABC. Найдите углы ABC и ABD, если угол ABC больше угла DBC на 38°.

76. Луч b — биссектриса угла (ac). Найдите:

а) угол (ac), если $\angle(bc)=52°$;

б) угол (ab), если $\angle(ac)$ прямой.

Уровень Б

77. Луч b делит угол (ac), равный 150°, на два угла. Найдите углы (ab) и (bc), если:

а) угол (ab) меньше угла (bc) на 40°;

б) градусные меры углов (ab) и (bc) относятся как $2:3$.

78. Луч OB делит угол AOC, равный 120°, на два угла. Найдите углы AOB и BOC, если:

а) угол BOC больше угла AOB в 5 раз;

б) градусные меры углов AOB и BOC относятся как $3:5$.

79. Лучи OB и OC делят угол AOD на три угла. Найдите угол BOC, если $\angle AOD=110°$, $\angle AOC=85°$, $\angle BOD=60°$.

80. Угол (ad) разделен лучами b и c на три угла. Найдите угол (ac), если $\angle(ab)=28°$, $\angle(bd)=92°$, $\angle(cd)=44°$.

81. Луч l — биссектриса угла (mn). Найдите угол (mn), если угол между биссектрисами углов (ml) и (ln) равен 70°.

82. Луч OB — биссектриса угла AOC, а луч OE — биссектриса угла BOC. Найдите угол AOC, если угол AOE прямой.

Уровень В

83. Луч OK делит угол MON на два угла. Найдите угол MON, если угол между биссектрисами углов MOK и KON равен 40°.

84. Из данной точки проведены три луча так, что углы между любыми двумя из них равны. Найдите эти углы.

85. Из данной точки проведено несколько лучей так, что угол между любыми двумя соседними лучами равен 72°. Сколько всего лучей проведено?

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ §4

Теоретический материал

- параллельные прямые

5 класс

Задачи

86. На плоскости отмечены точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Существует ли прямая, которая проходит через точку A:

а) и пересекает прямую BC, но не пересекает луч BC;

б) пересекает луч BC, но не пересекает прямую BC;

в) не пересекает прямую BC? Выскажите предположение.

87. Внутри острого угла ABC отмечена точка D. Определите, какие из данных утверждений верны:

а) существует прямая, которая проходит через точку D, пересекает луч BA и не пересекает луч BC;

б) существует прямая, которая проходит через точку D, пересекает луч BA и не пересекает прямую BC;

в) существует прямая, которая проходит через точку D и не пересекает ни одну из прямых BA и BC.

Изменятся ли ответы, если угол ABC будет прямым; тупым; развернутым? Выскажите предположение.

§ 4. Параллельные прямые

4.1. Определение параллельных прямых

Параллельный — от греческого слова «параллелос» — идущий рядом

Известно, что если две прямые на плоскости имеют только одну общую точку, то они пересекаются. Рассмотрим теперь случай, когда две прямые не имеют общих точек.

Определение

Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Представление о параллельных прямых дают, например, железнодорожные рельсы или линейки нотного стана.

Рис. 29. Параллельные прямые

На рисунке 29 прямые a и b параллельны. Кратко это обозначают так: $a \parallel b$. Такая запись читается: «Прямая a параллельна прямой b».

Итак, можно выделить два случая взаимного расположения прямых на плоскости: ***две прямые на плоскости или параллельны, или пересекаются.***

Наряду с параллельностью прямых мы будем рассматривать также параллельность отрезков и лучей.

Определение

Два отрезка называются **параллельными**, если они лежат на параллельных прямых.

Аналогично формулируются определения параллельности двух лучей, прямой и отрезка, луча и отрезка и т. п.

Рис. 30. Параллельные отрезки

На рисунке 30 прямые AB и CD параллельны, поэтому отрезки AB и CD параллельны, лучи BA и CD параллельны, отрезок AB параллелен прямой CD и т. д.

На практике довольно часто приходится проводить прямую, параллельную данной,— например, делать разметку дороги или чертить поля в тетради. Всегда ли можно провести через данную точку прямую, параллельную данной? Сколько таких прямых проходит через точку, не лежащую на данной прямой? Ответ на эти вопросы дает аксиома параллельных прямых (аксиома Евклида).

Аксиома параллельных прямых (аксиома Евклида)

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной[1].

Мы сформулировали лишь некоторые из аксиом планиметрии. Более полный перечень аксиом представлен в Приложении 1.

4.2. Теорема о двух прямых, параллельных третьей

На основе аксиом с помощью логических рассуждений (доказательств) мы будем получать новые геометрические факты. В математике утверждение, справедливость которого устанавливается путем доказательства, называется **теоремой**. Доказывая теорему, используют определения, аксиомы и теоремы, доказанные ранее.

Итак, сформулируем и докажем первую теорему — теорему о параллельных прямых (рис. 31).

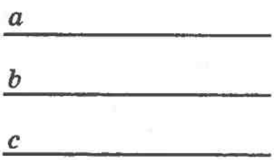


Рис. 31. Две прямые параллельны третьей

Теорема (о двух прямых, параллельных третьей)

Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

[1] На самом деле имеет место такое утверждение: «Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну». Возможность провести такую прямую мы докажем в п. 14.3.

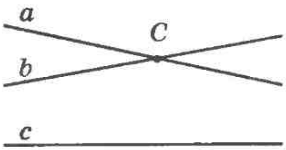


Рис. 32. К предположению о том, что прямые a и b не параллельны

Доказательство[1]

□ Пусть a, b и c — данные прямые, причем $a \parallel c$, $b \parallel c$. Докажем, что прямые a и b параллельны.

Предположим, что прямые a и b не параллельны. Тогда они должны пересекаться в некоторой точке C (рис. 32). Таким образом, через точку C проходят две прямые, параллельные прямой c. Но согласно аксиоме параллельных прямых через точку вне данной прямой может проходить не более одной прямой, параллельной данной. Следовательно, наше предположение о том, что прямые a и b могут пересекаться, неверно, то есть эти прямые параллельны. Теорема доказана. ■

Применим доказанную теорему для решения задачи.

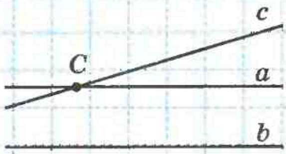


Рис. 33

Задача

Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и вторую прямую. Докажите.

Решение

Пусть $a \parallel b$, и прямая c пересекает прямую a (рис. 33). Докажем, что прямые b и c пересекаются. Предположим, что эти прямые не пересекаются. В таком случае $b \parallel c$. Поскольку $c \parallel b$ и $a \parallel b$, то по теореме о двух прямых, параллельных третьей, прямые a и c параллельны. Но это невозможно, так как по условию задачи прямые a и c пересекаются.

Таким образом, предположение о том, что $b \parallel c$, неверно. Значит, прямые b и c пересекаются, что и требовалось доказать.

[1] Начало и окончание доказательства мы будем обозначать знаками □ и ■ соответственно.

Теорема – от греческого «теоремос» – рассматривать, обдумывать

Обратим внимание на рисунок 32, который использовался в ходе доказательства теоремы. Взаимное расположение прямых a, b, c на этом рисунке не соответствует формулировке теоремы, и это легко объяснить: ведь рисунок отражает предположение, впоследствии оказавшееся неверным. Вообще, рисункам в геометрических теоремах и задачах отводится особая роль — то, что на них изображено, следует из имеющихся у нас сведений, но не наоборот.

Недоказанные свойства геометрических фигур, даже если они кажутся очевидными из рисунков, использовать нельзя. Рисунок в геометрии лишь отражает свойства и утверждения, выраженные словами, но сам по себе не является доказательством. К тому же рисунок может не охватывать всех возможных вариантов расположения элементов фигур, которые подразумеваются в задаче или теореме. Недаром геометрию называют «искусством правильно рассуждать на неправильных чертежах».

4.3. Условие и заключение теоремы. Доказательство от противного

В формулировке любой теоремы всегда можно четко выделить две части: то, что дано (**условие**), и то, что надо доказать (**заключение**). Переформулируем теорему о двух прямых, параллельных третьей, следующим образом: «Если две прямые параллельны третьей прямой, то эти прямые параллельны между собой». Нам известно, ***что две прямые параллельны третьей прямой*** — это условие теоремы. Требуется доказать, что ***эти прямые параллельны между собой*** — это заключение теоремы. Вообще говоря, выделить условие и заключение легче всего для утверждения, представленного в виде: «Если... (*условие*), то... (*заключение*)».

Проанализируем доказательство теоремы о двух прямых, параллельных третьей. Сначала мы предположили, что прямые a и b не параллельны, то есть что заключение теоремы ошибочно. Затем, опираясь на известные свойства взаимного расположения прямых, установили, что через некоторую точку C проходят две прямые, параллельные c, то есть пришли к противоречию с аксиомой параллельных прямых. На основании этого противоречия мы сделали вывод о том, что наше предположение было неверным, а значит, верным является утверждение теоремы. Этот метод доказательства называется **доказательством от противного,** им мы воспользовались и в задаче, которую рассматривали после теоремы. Но этот метод не единственный: уже в следующем параграфе мы будем применять и другие методы доказательств.

Метод доказательства от противного иногда используется как в других науках, так и в повседневной жизни. Например, врач, чтобы убедиться, что пациент не болен гриппом, может рассуждать так: «Допустим, что у больного грипп; тогда у него должны быть характерные симптомы: повышение температуры, головная боль и т. п. Но этих симптомов нет, то есть предположение о гриппе неверно. Значит, пациент не болен гриппом».

Схема доказательства от противного

Утверждение	**Если А, то В**
Доказательство	
1. Пусть А, но не В	Предполагаем, что условие теоремы выполняется, а заключение — нет
2. Рассуждения	Проводим рассуждения, опираясь на аксиомы и ранее доказанные теоремы
3. Противоречие	Получаем новое утверждение, противоречащее либо данному условию, либо одной из аксиом, либо ранее доказанной теореме
4. Тогда В	Убеждаемся, что наше предположение ошибочно, т. е. данное утверждение является верным

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

88. Известно, что $a \parallel b$. Означает ли это, что $b \parallel a$?

89. Два отрезка не имеют общих точек. Означает ли это, что данные отрезки обязательно параллельны?

90. Прямые KM и EF параллельны. Могут ли лучи MK и FE пересекаться?

91. На плоскости проведены три параллельные прямые. Может ли некоторая четвертая прямая:

а) пересекать только одну из данных прямых;

б) пересекать только две из данных прямых;

в) не пересекать ни одной из данных прямых?

92. Можно ли провести два луча с началом в точке вне данной прямой, которые были бы параллельны данной прямой? Какими должны быть эти лучи?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

93. С помощью линейки проведите параллельные прямые a и b.

а) Отметьте на прямой a точку A. Можно ли провести через точку A другую прямую, параллельную прямой b? Почему?

б) Постройте отрезок AD, параллельный прямой b. Лежит ли точка D на прямой a?

в) Проведите через точку A прямую c, не совпадающую с прямой a. Пересекаются ли прямые b и c? Почему?

→ **94.** С помощью линейки проведите параллельные прямые a и b.

а) Проведите прямую c, параллельную прямой a. Параллельны ли прямые b и c? Почему?

б) Отметьте на прямой c точки A, B и C. Назовите два луча, параллельные прямой b.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

95. Даны прямая a и точки A, B и C (рис. 34). Сколько прямых, параллельных прямой a, можно провести через данные точки? Проведите все такие прямые. Могут ли они пересекаться? Ответ обоснуйте.

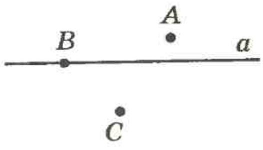


Рис. 34

96. Прямая параллельна одной из двух параллельных прямых. Может ли она пересекать вторую прямую? Ответ обоснуйте.

97. Две прямые параллельны. Докажите методом от противного, что любая третья прямая не может пересекать обе данные прямые в одной и той же точке.

98. Докажите методом от противного утверждение: «Если прямая параллельна одной из сторон неразвернутого угла, то она не может быть параллельна другой его стороне».

Уровень Б

99. Три параллельные шоссейные трассы пересекаются двумя другими параллельными трассами. Сколько пересечений образуется?

100. На плоскости проведены прямые a, b, c и d, причем $a \parallel b$, $c \parallel d$. Прямые a и c пересекаются. Сколько всего точек пересечения имеют данные прямые?

101. Через точку, не лежащую на прямой c, проведены четыре прямые. Сколько из них могут пересекать прямую c? Рассмотрите все возможные случаи.

102. На плоскости проведены четыре прямые, причем три из них имеют одну общую точку. Сколько пар параллельных прямых может образоваться на плоскости? Рассмотрите все возможные случаи.

103. Прямая a параллельна прямой b и не параллельна прямой c. Докажите, что прямые b и c пересекаются.

104. Прямые a и b пересекаются, прямая c параллельна прямой b. Докажите, что любая прямая, параллельная прямой a, пересекает прямые b и c.

Уровень В

105. На плоскости проведены несколько прямых, причем никакие три из них не пересекаются в одной точке. Всего образовалось три точки пересечения. Сколько прямых проведено? Рассмотрите все возможные случаи.

→ **106.** На плоскости проведены три прямые. При этом образовалось две точки пересечения. Докажите, что среди данных прямых есть параллельные.

107. На плоскости проведены четыре прямые. При этом образовалось шесть точек пересечения. Докажите, что среди данных прямых нет параллельных.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 5

Теоретический материал

- дополнительные лучи
- измерение углов

п. 1.3; 3.3

Задачи

108. Лучи b и c делят развернутый угол (ad) на три угла. Найдите угол (bd), если $\angle(ac) = 135°$, $\angle(bc) = 20°$. Сколько решений имеет задача?

109. Луч OA_1 является дополнительным к стороне OA угла AOB. Найдите угол AOB, если он равен углу A_1OB.

§ 5. Смежные углы

5.1. Определение смежных углов

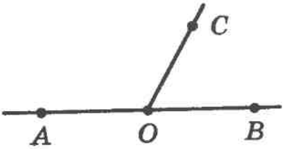


Рис. 35. Углы AOC и COB смежные

В предыдущих параграфах мы рассматривали виды углов в зависимости от их градусной меры. Перейдем к изучению углов, имеющих общие элементы.

Пусть на прямой точка O лежит между точками A и B, а C — произвольная точка вне прямой AB (рис. 35). Тогда углы AOC и COB имеют общую сторону, а стороны OA и OB данных углов являются дополнительными лучами.

Определение

Два угла называются **смежными**, если они имеют общую сторону, а другие стороны этих углов являются дополнительными лучами.

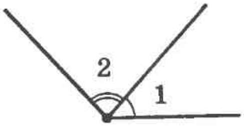


Рис. 36. Углы 1 и 2 имеют общую сторону, но не смежные

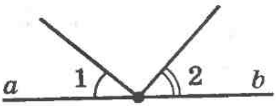


Рис. 37. Стороны a и b углов 1 и 2 — дополнительные лучи, но эти углы не смежные

Пропуск хотя бы одного условия в формулировании определения недопустим; это может привести к тому, что будет описан иной геометрический объект. Так, если стороны двух углов не являются дополнительными лучами, то даже при наличии общей стороны такие углы — не смежные (рис. 36). Не являются смежными и углы, которые не удовлетворяют первому условию определения, то есть не имеют общей стороны (рис. 37).

5.2. Теорема о смежных углах. Следствия из теоремы

Теорема (о смежных углах)

Сумма смежных углов равна 180°.

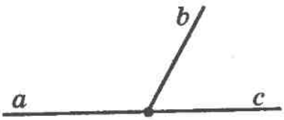


Рис. 38. Сумма углов (ab) и (bc) равна 180°

Доказательство

☐ Пусть углы (ab) и (bc) — данные смежные углы (рис. 38). Тогда по определению смежных углов лучи a и c дополнительные, то есть угол (ac)

развернутый, а его градусная мера равна 180°. Луч b делит угол (ac) на два угла, и по аксиоме измерения углов $\angle(ab)+\angle(bc)=\angle(ac)=180°$. Теорема доказана. ■

Сформулируем теперь несколько утверждений, которые легко обосновать с помощью доказанной теоремы.

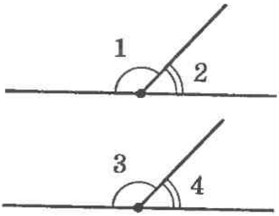


Рис. 39. Углы, смежные с равными углами, также равны

1. ***Если два угла равны, то смежные с ними углы также равны.***

Действительно, по теореме о смежных углах $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4=180°$ (рис. 39). Если $\angle 1=\angle 3$, то $180°-\angle 1=180°-\angle 3$, то есть $\angle 2=\angle 4$.

2. ***Два угла, смежные с одним и тем же углом, равны.***

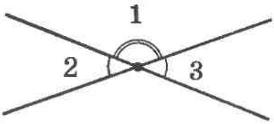


Рис. 40. Углы, смежные с одним и тем же углом, равны

На рисунке 40 углы 1 и 2, а также углы 1 и 3 являются смежными. Поскольку сумма смежных углов равна 180°, то $\angle 2=\angle 3=180°-\angle 1$.

3. ***Угол, смежный с прямым углом, также прямой. Угол, смежный с тупым углом,— острый. Угол, смежный с острым углом,— тупой.***

Эти утверждения вытекают из теоремы о смежных углах, поскольку $180°-90°=90°$ (рис. 41), а если два неравных угла в сумме составляют 180°, то один из них больше 90° (то есть тупой), а второй — меньше 90° (то есть острый).

Рис. 41. Угол, смежный с прямым углом, прямой

В математике утверждения, непосредственно вытекающие из теорем (или аксиом), называют **следствиями**. Обосновывая следствия 1—3, мы всякий раз упоминали теорему о смежных углах, причем делали это двумя способами: либо указывали ее название, либо пересказывали ее содержание. Такие обращения к известному утверждению с целью обоснования нового называют **ссылками**.

Решая геометрическую задачу или доказывая новую теорему, необходимо ссылаться на ранее изученные определения, аксиомы, теоремы и их следствия, а также на данные, содержащиеся в условии задачи или вытекающие из него. Например, при доказательстве теоремы о смежных углах мы ссылались на определения смежных углов, развернутого угла и аксиому измерения углов, а при доказательстве теоремы о двух прямых, параллельных третьей, — на аксиому параллельных прямых.

Задача

Докажите, что если два смежных угла равны, то они прямые.

Решение

Если $\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные углы, то $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (по теореме о смежных углах). Поскольку по условию задачи $\angle 1 = \angle 2$, то каждый из этих углов равен $180° : 2 = 90°$, то есть данные углы являются прямыми, что и требовалось доказать.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

110. Два угла имеют общую сторону. Означает ли это, что:
а) данные углы имеют общую вершину;
б) сумма этих углов равна 180°?

111. Могут ли оба смежных угла быть:
а) острыми;
б) прямыми;
в) тупыми?

112. Лучи b и c делят развернутый угол (ad) на три угла (рис. 42). Сколько пар смежных углов при этом образовалось? Назовите эти углы.

Рис. 42

113. Рисунок, на котором изображены смежные углы, перегнули по прямой, содержащей их общую сторону. При этом другие стороны данных углов совпали. Найдите данные смежные углы.

114. Найдите угол, смежный с углом, равным: 30°; 60°; 90°; 135°.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

115. Начертите развернутый угол (ab).

а) Из вершины данного угла проведите луч c так, чтобы угол (ac) был тупым. Назовите образовавшиеся смежные углы.

б) Измерьте транспортиром угол (cb) и вычислите градусную меру угла (ac), пользуясь теоремой о смежных углах.

в) Проведите луч d, делящий угол (ac) на два угла. Сколько пар смежных углов образовалось на рисунке?

→ **116.** Начертите угол ABC, равный 45°.

а) Проведите луч BD так, чтобы углы DBA и ABC были смежными. Найдите градусную меру угла DBA.

б) Проведите луч BM, делящий угол DBA на два угла, один из которых равен углу ABC. Сколькими способами это можно сделать? Будут ли равные углы смежными?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

117. Две прямые пересекаются. Сколько пар смежных углов при этом образовалось?

→ **118.** Через вершину неразвернутого угла проведена прямая, содержащая его биссектрису. Сколько пар смежных углов при этом образовалось?

119. Найдите смежные углы, если:
а) их градусные меры относятся как 5 : 31;
б) их разность равна 70°.

120. Найдите смежные углы, если один из них:
а) втрое больше другого;
б) на 20° меньше другого.

121. Биссектриса делит угол AOB на два угла, один из которых равен 50°. Найдите градусную меру угла, смежного с углом AOB.

122. Углы 1 и 2, а также углы 3 и 4 — две пары смежных углов. Сравните углы 2 и 4, если $\angle 1 > \angle 3$.

123. На рисунке 43 $\angle AOB = 72°$, $\angle COD = 37°$. Найдите угол BOC.

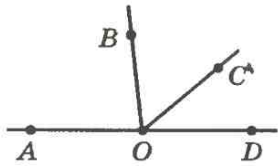


Рис. 43

Уровень Б

124. Найдите данный угол, если сумма двух смежных с ним углов равна 240°.

125. Биссектриса угла образует с лучом, дополнительным к стороне данного угла, угол 130°. Найдите данный угол.

126. Найдите угол, сторона которого образует с лучом, дополнительным к биссектрисе данного угла, угол 165°.

127. Лучи b и c делят развернутый угол (ad) на три угла (рис. 42). Найдите наибольший из этих углов, если $\angle(ac) = 160°$, $\angle(bd) = 140°$.

128. Найдите угол BOC (рис. 43), если $\angle BOD = 112°$, $\angle AOC = 138°$.

Уровень В

129. Разность двух смежных углов относится к одному из них как 5 : 2. Найдите эти смежные углы.

130. Биссектриса данного угла образует с его стороной угол, равный углу, смежному с данным. Найдите данный угол.

131. Найдите угол между биссектрисами смежных углов.

132. Сумма двух углов, имеющих общую сторону, равна 180°. Обязательно ли эти углы смежные?

→ **133.** Если биссектрисы углов AOB и BOC образуют прямой угол, то точки A, O и C лежат на одной прямой. Докажите.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 6

Теоретический материал

- перпендикулярные прямые
- измерение углов

6 класс

п. 3.3

Задачи

134. Углы (mn) и (kp) являются смежными с углом (np). Среди лучей m, n, k, p назовите пары дополнительных лучей.

135. Углы (ab) и (bc) смежные. Углы (bc) и (cd) также смежные, причем $\angle(cd) = 32°$. Найдите углы (ad) и (ab).

§ 6. Вертикальные углы. Перпендикулярные прямые

6.1. Определение вертикальных углов

Вертикальный — от латинского «вертикалис» — вершинный

Рассмотрим еще один случай взаимного расположения углов с общими элементами.

Определение

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон второго.

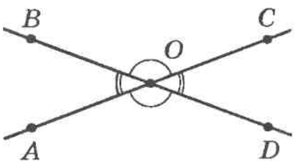


Рис. 44. При пересечении двух прямых образуются две пары вертикальных углов

На рисунке 44 прямые AC и BD пересекаются в точке O. Стороны OD и OA угла AOD являются дополнительными лучами сторон OB и OC угла BOC, поэтому эти углы — вертикальные. Вертикальными являются также углы AOB и DOC.

Таким образом, ***при пересечении двух прямых***[1] ***образуются две пары вертикальных углов.***

Наглядное представление о вертикальных углах дают, например, обычные ножницы.

6.2. Теорема о вертикальных углах. Угол между прямыми

Основное свойство вертикальных углов выражает следующая теорема.

Теорема (о вертикальных углах)

Вертикальные углы равны.

[1] Здесь и далее, говоря об углах, образованных при пересечении двух прямых, мы будем иметь в виду неразвернутые углы.

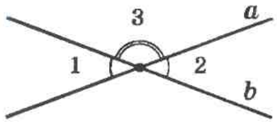


Рис. 45. Вертикальные углы являются смежными с одним и тем же углом

Доказательство

☐ Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ — вертикальные углы, образовавшиеся при пересечении прямых a и b (рис. 45). Рассмотрим угол 3, сторонами которого также являются полупрямые прямых a и b. Углы 1 и 2 смежные с углом 3 (по определению смежных углов), поэтому по следствию из теоремы о смежных углах $\angle 1 = \angle 2$. Теорема доказана. ■

Задача

Сумма двух углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равна 100°. Найдите все образовавшиеся углы.

Решение

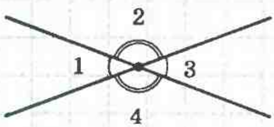


Рис. 46

По условию задачи при пересечении двух прямых образовались два угла, сумма которых составляет 100°. Эти углы могут быть или смежными, или вертикальными. Сумма смежных углов равна 180°, поэтому данные углы не могут быть смежными, значит, они вертикальные.

Пусть $\angle 1 + \angle 3 = 100$ (рис. 46).

Так как вертикальные углы равны, то каждый из двух данных углов равен $100° : 2 = 50°$. Таким образом, $\angle 1 = \angle 3 = 50°$.

Поскольку углы 1 и 2 смежные, то

$\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 50° = 130°$ (по теореме о смежных углах).

Поскольку углы 2 и 4 вертикальные, то $\angle 4 = \angle 2 = 130°$ (по теореме о вертикальных углах).

Ответ: 50°; 130°; 50°; 130°.

Определение

Углом между двумя прямыми называется меньший из углов, образовавшихся при их пересечении.

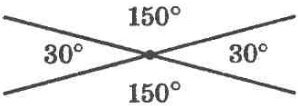


Рис. 47. Две данные прямые пересекаются под углом 30°

На рисунке 47 две прямые при пересечении образуют два угла по 30° и два угла по 150°. Угол между данными прямыми по определению равен 30° (иначе говорят: прямые ***пересекаются под углом*** 30°).

Очевидно, что если при пересечении двух прямых образуются четыре равных угла, то все они равны 90°, то есть данные прямые пересекаются под прямым углом.

6.3. Перпендикулярные прямые

Определение

Две прямые называются **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым углом.

Перпендикулярный — от латинского слова «перпендикулярис» — отвесный

На рисунке 48 прямые a и b перпендикулярны. Кратко это обозначают так: $a \perp b$.

Отрезки или лучи называются **перпендикулярными**, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Докажем важное утверждение, связывающее понятия перпендикулярности и параллельности прямых.

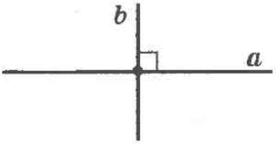


Рис. 48. Прямые a и b перпендикулярны

Теорема (о двух прямых, перпендикулярных третьей)

Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.

Утверждение теоремы иллюстрирует рисунок 49. На этом рисунке $a \perp c$, $b \perp c$, $a \parallel b$.

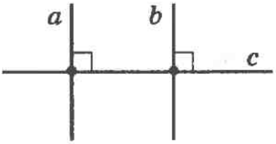


Рис. 49. Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны

Доказательство

□ Пусть даны прямые A_1A_2 и B_1B_2, перпендикулярные прямой AB. Докажем методом от противного, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.

Предположим, что данные прямые не параллельны. Тогда они пересекаются в некоторой точке K_1 (рис. 50).

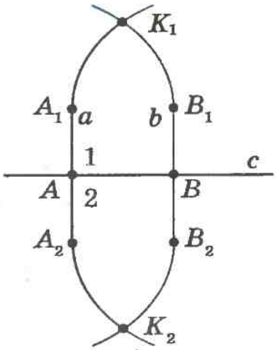


Рис. 50. К предположению о том, что прямые A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются

Перегнем рисунок по прямой AB. Поскольку прямые углы 1 и 2 равны, то при перегибе луч AA_1 совместится с лучом AA_2. Аналогично луч BB_1 совместится с лучом BB_2. Поэтому точка K_1, в которой пересекаются данные прямые, должна совместиться с некоторой точкой K_2, также лежащей на этих прямых. Таким образом, через точки K_1 и K_2 проходят две прямые A_1A_2 и B_1B_2, что невозможно по аксиоме проведения прямой. Следовательно, наше предположение неверно, то есть прямые A_1A_2 и B_1B_2 параллельны. Теорема доказана. ■

Свойство, описанное в теореме, используется для построения параллельных прямых с помощью линейки и угольника (рис. 51). Дважды прикладывая угольник к линейке, можно провести две прямые, перпендикулярные краю линейки. По доказанной теореме такие прямые параллельны.

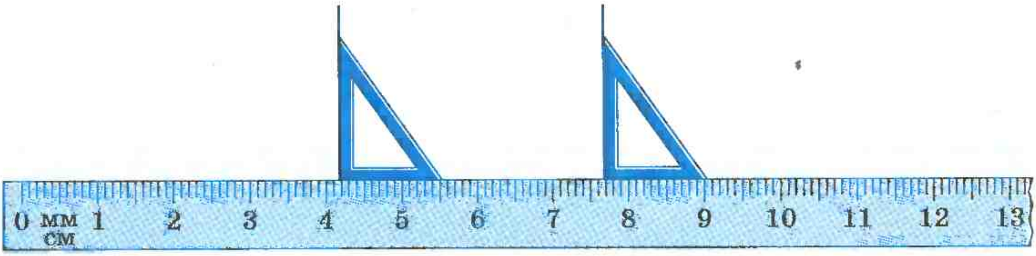


Рис. 51. Построение параллельных прямых с помощью линейки и угольника

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

136. Могут ли две прямые при пересечении образовать три острых угла; только один тупой угол; четыре прямых угла?

137. Верно ли утверждение: «Два равных угла с общей вершиной являются вертикальными»?

138. Углы 1 и 2 образовались при пересечении двух неперпендикулярных прямых. Определите, являются ли данные углы смежными или вертикальными, если:

а) их сумма больше 180°;

б) лишь один из них острый;

в) их сумма меньше суммы двух других полученных углов.

139. Градусные меры двух смежных углов — α и β. Могут ли α и β быть градусными мерами двух вертикальных углов? В каком случае?

140. При пересечении двух прямых образовался тупой угол α. Чему равен угол между данными прямыми?

141. При пересечении двух прямых образовались четыре угла, ни один из которых не является острым. Под каким углом пересекаются данные прямые?

142. Через точку пересечения двух перпендикулярных прямых a и b проведена прямая c. Может ли она быть перпендикулярна какой-либо из прямых a и b?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

143. Начертите прямые a и b, пересекающиеся в точке O под углом 80°.

а) Выделите цветом все пары вертикальных углов, образовавшихся на рисунке. Каковы градусные меры этих углов?

б) Проведите через точку O прямую, перпендикулярную прямой a. Будет ли эта прямая перпендикулярна прямой b?

→ **144.** Начертите перпендикулярные прямые a и b, пересекающиеся в точке O.

а) Отметьте на прямой a точку B. С помощью угольника проведите через эту точку прямую c, перпендикулярную прямой a.

б) Параллельны ли прямые b и c? Почему?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

145. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равен 125°. Найдите остальные углы. Чему равен угол между данными прямыми?

146. Найдите все углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, если:

а) биссектриса отсекает от одного из них угол 23°;

б) один из углов втрое больше другого.

→ **147.** Найдите все углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, если:

а) сумма двух из них равна 320°;

б) один из этих углов на 50° меньше другого.

148. Перпендикулярные прямые AB и CD пересекаются в точке K. Назовите:

а) три отрезка, перпендикулярных прямой CD;

б) четыре луча, перпендикулярных отрезку AK.

149. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, тупой. Докажите методом от противного, что ни один из остальных образовавшихся углов не может быть прямым.

→ **150.** При пересечении двух прямых образовались четыре угла, один из которых прямой. Докажите, что остальные углы также являются прямыми.

151. Прямые a и b перпендикулярны. Прямая c проходит через точку их пересечения и образует с прямой a угол 70°. Найдите угол между прямыми c и b.

→ **152.** Прямая c проходит через точку пересечения прямых a и b, причем прямые a и b пересекаются под углом 25°, прямые a и c перпендикулярны. Найдите угол между прямыми b и c.

Уровень Б

153. Найдите все углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, если:

а) сумма трех из них равна 295°;

б) градусные меры двух из этих углов относятся как 4 : 5.

154. Найдите угол между двумя пересекающимися прямыми, если:

а) сумма двух образовавшихся углов на 80° меньше суммы двух других углов;

б) один из образовавшихся углов вдвое меньше суммы трех остальных углов.

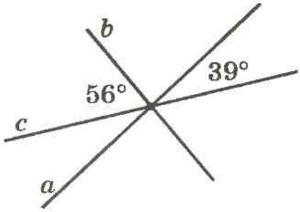


Рис. 52

155. Три прямые пересекаются в одной точке так, что два из образовавшихся при пересечении углов равны 56° и 39° (рис. 52). Найдите четыре других угла между соседними лучами.

156. Две прямые пересекаются в точке O. Биссектриса одного из углов, образовавшихся при пересечении, составляет с одной из данных прямых угол 72°. Найдите угол, под которым пересекаются данные прямые.

157. Даны прямые a, b, c и d, причем $a \perp c$, $b \perp c$, $a \parallel d$. Докажите, что прямые b и d параллельны.

158. Прямые a и b пересекаются, а прямая c перпендикулярна прямой a. Докажите, что прямые b и c не могут быть перпендикулярными.

Уровень В

159. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равен сумме двух других углов. Найдите угол между данными прямыми.

160. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов являются дополнительными полупрямыми.

161. Два равных угла имеют общую вершину, а их биссектрисы являются дополнительными лучами. Докажите, что эти углы вертикальные.

162. Через точку пересечения двух перпендикулярных прямых проведена третья прямая. Найдите наименьший из тупых углов, которые образовались при пересечении этих трех прямых, если наибольший из образовавшихся тупых углов равен 165°.

163. Через точку на плоскости проведены пять прямых. Какое наибольшее количество пар перпендикулярных прямых может быть среди данных прямых?

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ §7

Теоретический материал

- треугольник
- равные отрезки
- равные углы

5 класс

п. 2.2; 3.2

Задачи

164. Отрезки AB и CD лежат на одной прямой и имеют общую середину O. Найдите длину отрезка CD, если $OA = 4$ см, $AC = 12$ см. Сколько решений имеет задача?

165. Углы (ab) и (cd) имеют общую вершину и общую биссектрису l. Найдите угол (cb), если $\angle(ab) = 50°$, $\angle(dl) = 10°$. Сколько решений имеет задача?

Задачи для подготовки к контрольной работе № 1

1. На луче с началом в точке A постройте отрезки AB и AC так, чтобы $AB = 8$ см, $AC = 5$ см.

а) Какая из трех данных точек лежит между двумя другими?

б) Какова длина отрезка BC?

2. Луч OL делит угол MON на два угла так, что $\angle MOL = 84°$ и $\angle LON = 18°$. Луч OK — биссектриса угла MON. Найдите угол KOL.

3. Прямые a и b пересекаются, прямая c параллельна прямой a. Докажите методом от противного, что прямые b и c не параллельны.

4. Разность двух смежных углов равна одному из них. Найдите эти смежные углы.

5. Сумма трех углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, на $60°$ больше четвертого угла. Найдите угол между данными прямыми.

6. Углы AOB и COB смежные, причем $\angle AOB = 108°$. Из точки O проведен луч OD так, что $\angle COD = 126°$. Является ли луч OD биссектрисой угла AOB? Ответ обоснуйте.

Итоги

ИТОГОВЫЙ ОБЗОР ГЛАВЫ I

ТОЧКА И ПРЯМАЯ

Аксиома проведения прямой

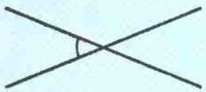
Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну

Аксиома расположения точек на прямой

Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ

Пересекаются



Углом между двумя пересекающимися прямыми называется меньший из углов, образовавшихся при их пересечении

Перпендикулярными прямыми называются две прямые, пересекающиеся под прямым углом

Параллельны

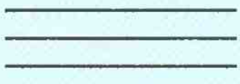
Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются

Аксиома параллельных прямых

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной

ТЕОРЕМЫ О ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРЯМЫХ

Теорема о двух прямых, параллельных третьей



Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой

Теорема о двух прямых, перпендикулярных третьей

Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны

Луч

Лучом называется часть прямой, состоящая из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от некоторой данной на ней точки (начала луча), а также самой этой точки

Дополнительными лучами называются два разных луча одной прямой с общей начальной точкой

Отрезок

Отрезком называется часть прямой, состоящая из двух данных точек этой прямой (концов отрезка) и всех точек, лежащих между ними

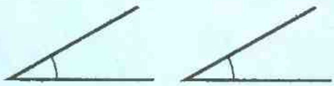
Равными отрезками называются отрезки, которые совмещаются наложением

Аксиомы измерения и откладывания отрезков

- Каждый отрезок имеет определенную длину, которая выражается положительным числом в заданных единицах измерения. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые отрезок делится любой его точкой.
- На любом луче от его начальной точки можно отложить отрезок данной длины, и только один

Угол

Углом называется геометрическая фигура, которая состоит из двух лучей (сторон угла), исходящих из одной точки (вершины угла)

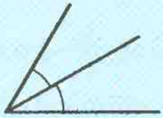


Равными углами называются углы, которые совмещаются наложением

Аксиомы измерения и откладывания углов

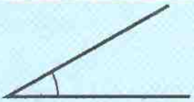
- Каждый угол имеет градусную меру, которая выражается положительным числом. Развернутый угол равен 180°. Если луч делит данный угол на два угла, то градусная мера данного угла равна сумме градусных мер двух полученных углов
- От любого луча данной прямой можно отложить в заданную сторону от прямой угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один

Серединой отрезка называется точка отрезка, которая делит его пополам



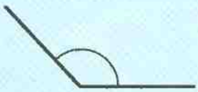
Биссектрисой угла называется луч, который исходит из вершины угла и делит угол пополам

ВИДЫ УГЛОВ (ПО ГРАДУСНОЙ МЕРЕ)



Острый угол — угол, меньший 90°

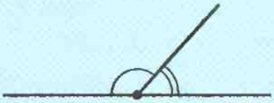
Прямой угол — угол, равный 90°



Тупой угол — угол, больше 90°, но меньше 180°

Развернутый угол — угол, равный 180°

УГЛЫ, ОБРАЗУЮЩИЕСЯ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ ДВУХ ПРЯМЫХ



Смежные углы — два угла, которые имеют общую сторону, а другие стороны этих углов являются дополнительными лучами

Теорема о смежных углах
Сумма смежных углов равна 180°

Вертикальные углы — два угла, стороны одного из которых являются дополнительными лучами сторон другого

Теорема о вертикальных углах
Вертикальные углы равны

Следствия из теоремы о смежных углах

1. Если два угла равны, то смежные с ними углы также равны.
2. Два угла, смежные с одним и тем же углом, равны.
3. Угол, смежный с прямым углом, также прямой. Угол, смежный с тупым углом, — острый. Угол, смежный с острым углом, — тупой

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите основные геометрические фигуры на плоскости. Как они обозначаются?
2. Сформулируйте аксиому проведения прямой.
3. Сформулируйте аксиому расположения точек на прямой.
4. Какая фигура называется лучом (полупрямой)? Как обозначаются лучи?
5. Какие лучи называются дополнительными?
6. Дайте определение отрезка. Как обозначается отрезок?
7. Какие отрезки называются равными? Как сравнить два отрезка?
8. Сформулируйте аксиому измерения и откладывания отрезков. Как сравнить два отрезка с заданными длинами?
9. Дайте определение середины отрезка.
10. Дайте определение угла. Как обозначаются углы?
11. Какой угол называется развернутым?
12. Какие углы называются равными? Как сравнить два угла?
13. Сформулируйте аксиомы измерения и откладывания углов. Как сравнить два угла с заданными градусными мерами?
14. Назовите единицу измерения углов. Какие углы называются острыми, прямыми, тупыми?
15. Дайте определение биссектрисы угла.
16. Дайте определение параллельных прямых. Назовите два случая взаимного расположения прямых на плоскости. Какие отрезки (лучи) называются параллельными?
17. Сформулируйте аксиому параллельных прямых. В чем состоит отличие аксиом от теорем? Приведите примеры аксиом из курса геометрии.
18. Сформулируйте и докажите теорему о двух прямых, параллельных третьей.
19. В чем состоит метод доказательства от противного? Опишите этапы рассуждений при доказательстве от противного.
20. Дайте определение смежных углов.
21. Сформулируйте и докажите теорему о смежных углах.
22. Сформулируйте следствия из теоремы о смежных углах.

23. Дайте определение вертикальных углов.

24. Сформулируйте и докажите теорему о вертикальных углах.

25. Дайте определение угла между прямыми. Сколько острых, тупых, прямых углов может образоваться при пересечении двух прямых?

26. Дайте определение перпендикулярных прямых.

27. Сформулируйте и докажите теорему о двух прямых, перпендикулярных третьей.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

166. На прямой отмечены точки A и C так, что $AC=3$. Точка B лежит на отрезке AC, причем $AB:BC=2:1$. Найдите на данной прямой все точки D такие, что $AD+BD=CD$.

167. Точки A и B движутся по прямой. Определите, на какую величину переместится середина отрезка AB, если точка A переместится на 3 единицы, а точка B — на 7 единиц. Рассмотрите случаи движения точек в одном направлении и в противоположных направлениях.

168. На линейке отмечены три деления: 0 см, 2 см и 5 см. Как при помощи такой линейки построить отрезок длиной 6 см?

169. Как при помощи угольника с углом 35° отложить угол 40°?

170. Дан шаблон угла в 17°. Как при помощи этого шаблона построить: а) угол 7°; б) угол 10°?

171. Как при помощи шаблона угла в 27° построить две перпендикулярные прямые?

172. Сколько углов, меньших 180°, изображено на рисунке 53?

173. Лучи b и c делят угол (ad) на три равных угла. Докажите, что биссектриса угла (bc) является биссектрисой угла (ad).

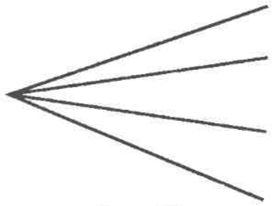


Рис. 53

174. Точка M лежит вне внутренней области угла AOB. Луч OC — биссектриса этого угла. Докажите, что угол MOC равен полусумме углов AOM и BOM.

175. Точка M лежит во внутренней области угла AOB. Луч OC — биссектриса этого угла. Докажите, что угол MOC равен модулю полуразности углов AOM и BOM.

Историческая справка

Евклид

Древнейшая наука геометрия, как и математика в целом, зарождалась из потребностей практической деятельности. Везде, где жили и работали люди, необходимо было измерять, вычислять, размышлять.

Первые документальные свидетельства о геометрических знаниях дошли до нас из Древнего Египта. Каждый год воды Нила затапливали почти все прибрежные земли, поэтому египтянам приходилось вновь их размежевывать. Именно так в процессе работы устанавливались простейшие свойства геометрических фигур.

Становление геометрии. Становление геометрии как строгой науки связано с работами древнегреческих ученых: Фалеса (ориент. 625–547 гг. до н. э.), Пифагора (ориент. 570–500 гг. до н. э.), Евдокса (ориент. 408–355 гг. до н. э.). Одной из выдающихся фигур в истории геометрии по праву считается Евклид Александрийский (ориент. 330–275 гг. до н. э.). Его произведение «Начала» стало учебником, по которому изучали геометрию на протяжении почти двух тысяч лет. Евклид первым применил именно тот подход к изложению геометрии, которым мы пользуемся сейчас: сначала сформулировал основные определения и свойства простейших фигур (аксиомы), а затем, опираясь на них, доказал многие другие утверждения.

Возведенные за две-четыре тысячи лет до нашей эры, **египетские пирамиды** и сегодня поражают точностью метрических отношений; строители уже тогда знали немало геометрических положений и расчетов.

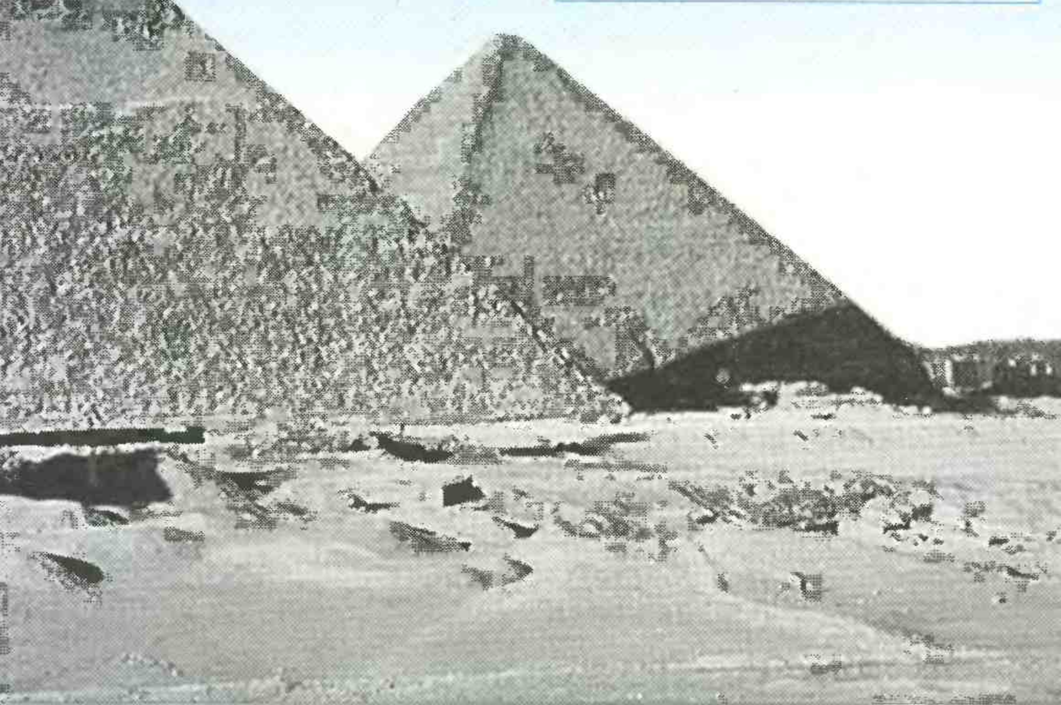
А. П. Киселев

А. В. Погорелов

Геометрия в Украине. Интересные страницы истории развития геометрии, в частности ее преподавания в школе, связаны с Украиной. Именно здесь, в одной из харьковских гимназий, в конце XIX в. начинал свою деятельность известный русский педагог Андрей Петрович Киселев (1852–1940), по учебнику которого изучали геометрию на протяжении почти 60 лет.

Профессор Харьковского университета Алексей Васильевич Погорелов (1919–2002) обогатил современную геометрию новейшими исследованиями и создал школьный учебник, по которому занимались несколько поколений учащихся.

Исследования и открытия ученых-геометров нашли применение во многих областях человеческой деятельности. Геометрия стала элементом общечеловеческой культуры — ведь без знания основ геометрии невозможно представить себе современного просвещенного человека.

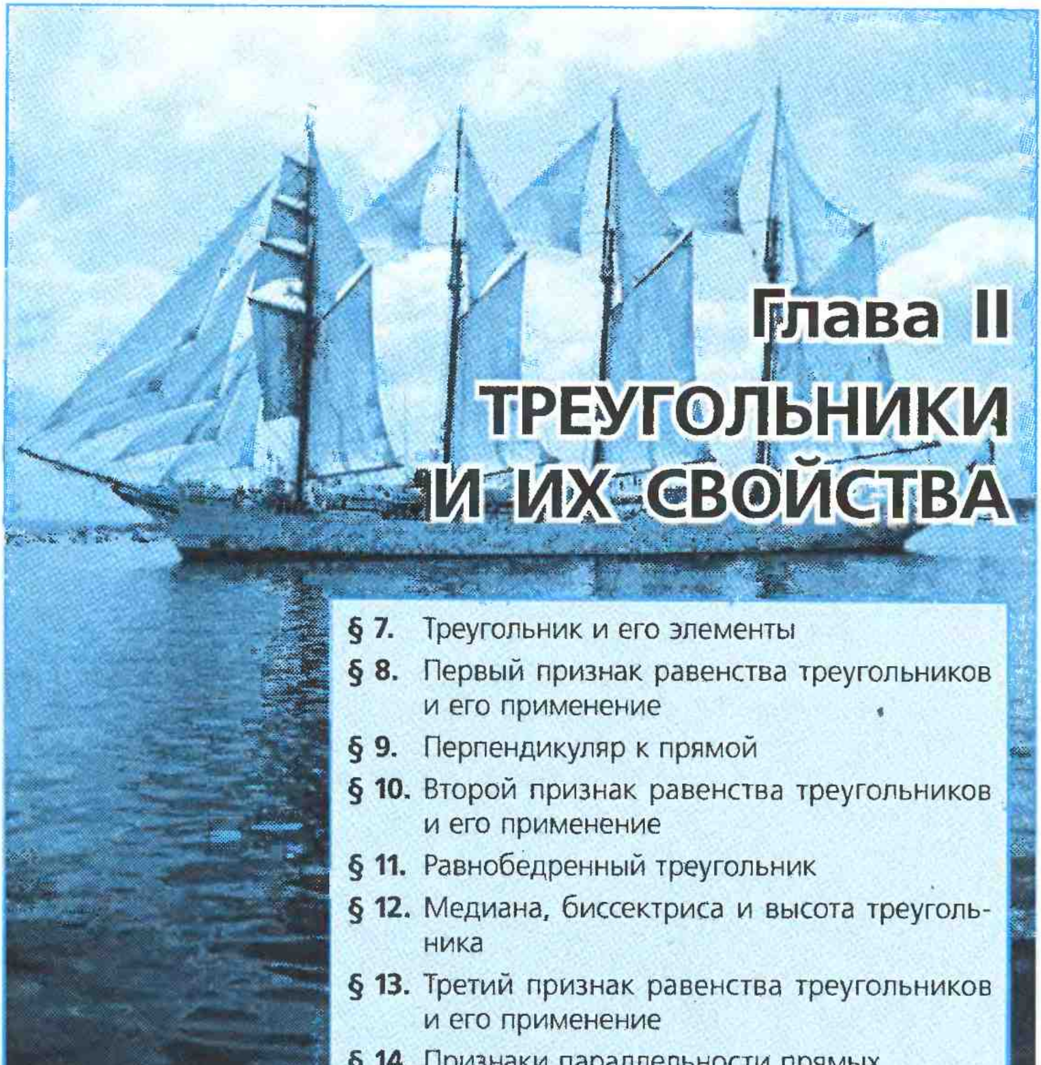


ТЕМАТИКА СООБЩЕНИЙ И РЕФЕРАТОВ К ГЛАВЕ I

1. Измерение расстояний и углов на местности.
2. Происхождение основных геометрических терминов.
3. Система геометрических аксиом — от Евклида до наших дней.
4. А. В. Погорелов — выдающийся украинский геометр.
5. Логическая правильность определений.
6. Аналогия как вид умозаключения.

Рекомендованные источники информации

1. Математична хрестоматія.— К.: Рад. шк., 1970.— Т. 1, 2.
2. Глейзер Г. И. История математики в школе. VII—VIII кл.— М.: Просвещение, 1982.
3. Шрейдер Ю. А. Что такое расстояние? (Популярные лекции по математике, вып. 38).— М.: Физматгиз, 1963.
4. Перельман Я. И. Занимательная геометрия.— М.: Физматгиз, 1959.
5. Гетманова А. Д. Логика.— М.: Дрофа, 1995.
6. Интернет-библиотека МЦНМО. http://ilib.mirror0.mccme.ru/
7. Гранд геометрии. А. В. Погорелов. http://kharkov.vbelous.net/avp/homepage.htm/



Глава II
ТРЕУГОЛЬНИКИ И ИХ СВОЙСТВА

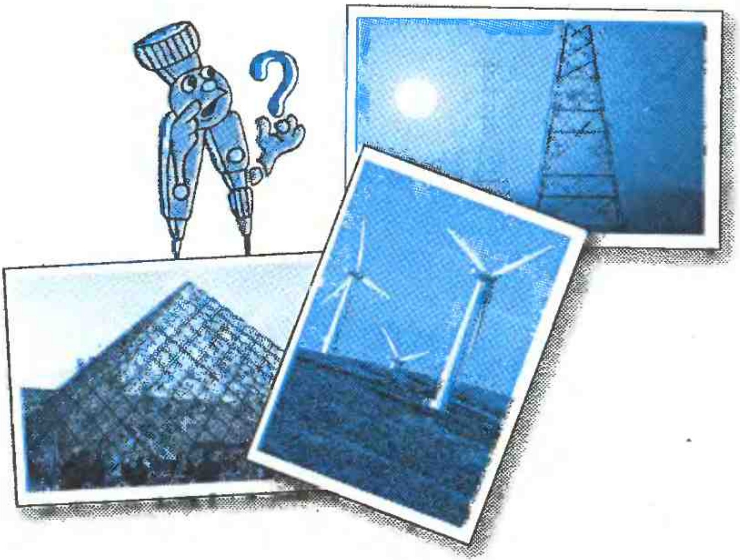
Среди равных умов — при одинаковых прочих условиях — превосходит тот, кто знает геометрию.

Блез Паскаль, французский ученый

Роль треугольника в геометрии трудно переоценить. Ученые не зря называют треугольники клетками организма геометрии. Действительно, многие более сложные геометрические фигуры можно разбить на треугольники.

В этой главе мы не только изучим «внутреннее устройство» треугольников и выделим их виды, но и докажем признаки, по которым можно установить равенство треугольников, сравнивая их стороны и углы. Полученные в ходе наших рассуждений теоремы и соотношения расширят ваши представления об отрезках и углах, параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.

В процессе решения задач и доказательства теорем о свойствах треугольников вам предстоит освоить важные геометрические методы, которые помогут в ходе дальнейшего изучения геометрии.



§ 7. Треугольник и его элементы

7.1. Определение треугольника и его элементов

Определение

Треугольником называется геометрическая фигура, которая состоит из трех точек (**вершин треугольника**), не лежащих на одной прямой, и трех отрезков (**сторон треугольника**), попарно соединяющих эти точки.

Треугольник обозначается знаком $\triangle$ и перечислением его вершин в произвольном порядке.

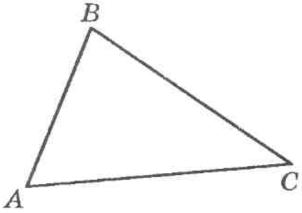


Рис. 54. Треугольник ABC

На рисунке 54 изображен треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC, AC. Этот треугольник можно обозначить так: $\triangle ABC$, $\triangle BAC$, $\triangle CBA$ и т. д.

Определение

Углом треугольника ABC при вершине A называется угол BAC.

Угол треугольника обозначают тремя буквами (например, «угол ABC») или одной буквой, которая указывает его вершину (например, «угол A треугольника ABC»).

Если вершина данного угла треугольника не принадлежит стороне, то говорят, что данный угол *противолежащий этой стороне*. В противном случае угол является *прилежащим к стороне*. Так, в треугольнике ABC угол A — прилежащий к сторонам AB и AC и противолежащий стороне BC.

Стороны и углы треугольника часто называют его *элементами*.

Периметр — от греческого «пери» — вокруг и «метрео» — измеряю, измеренный вокруг

Определение

Периметром треугольника называется сумма всех его сторон.

Периметр обозначается буквой P.

По определению $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC$.

Любой треугольник ограничивает часть плоскости. Будем считать, что точки, принадлежащие этой части, расположены ***внутри треугольника***, а точки, которые ей не принадлежат,— ***вне треугольника***.

7.2. Равенство фигур. Равные треугольники

Согласно ранее данным определениям, два отрезка (угла) называются равными, если они совмещаются наложением. Обобщим это определение для произвольных фигур.

Определение

Две геометрические фигуры называются **равными**, если они совмещаются наложением.

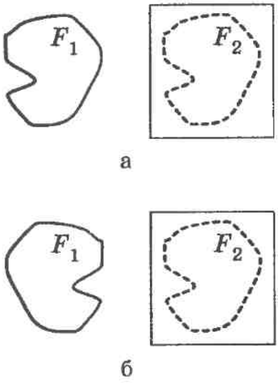


Рис. 55. Фигуры F_1 и F_2 совмещаются наложением

На рисунках 55 изображены фигуры F_1 и F_2. Если представить, что фигура F_2 изображена на прозрачной пленке, то с помощью наложения этой пленки на фигуру F_1 (той или другой стороной (рис. 55, *а*, *б*) можно совместить фигуры F_1 и F_2. В таком случае фигуры F_1 и F_2 по определению равны.

Для обозначения равенства фигур используют знак математического равенства «=». Запись $F_1 = F_2$ означает «фигура F_1 равна фигуре F_2».

Рассмотрим равные треугольники[1] ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 56).

По определению, такие треугольники можно совместить наложением. Очевидно, что при наложении соответственно совместятся стороны и углы этих треугольников, то есть каждому эле-

[1] Существование треугольника, равного данному, является одной из аксиом планиметрии. Эта аксиома приведена в Приложении 1.

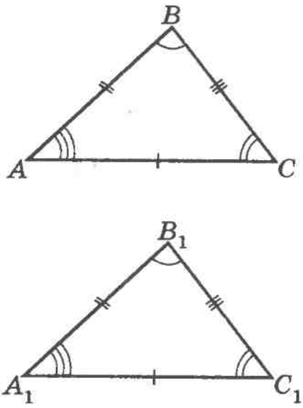


Рис. 56. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны

менту треугольника ABC будет соответствовать равный элемент треугольника $A_1B_1C_1$. Условимся, что в записи $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ мы будем упорядочивать названия треугольников так, чтобы вершины равных углов указывались в порядке соответствия. Это означает: ***если*** $\boldsymbol{\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1}$, ***то*** $\boldsymbol{\angle A = \angle A_1}$, $\boldsymbol{\angle B = \angle B_1}$, $\boldsymbol{\angle C = \angle C_1}$, $\boldsymbol{AB = A_1B_1}$, $\boldsymbol{BC = B_1C_1}$, $\boldsymbol{AC = A_1C_1}$.

Таким образом, из равенства двух треугольников вытекают шесть равенств соответствующих элементов: три — для углов и три — для сторон. На рисунках соответственно равные стороны обычно обозначают одинаковым количеством черточек, а соответственно равные углы — одинаковым количеством дужек (рис. 56).

А верно ли, что треугольники, имеющие соответственно равные стороны и углы, совмещаются наложением? Можно ли по равенству некоторых соответствующих элементов доказать равенство самих треугольников? Ответить на эти вопросы мы попытаемся в дальнейшем.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

176. На прямой отмечены три точки. Могут ли эти точки быть вершинами треугольника?

177. В треугольнике KMP назовите:

а) углы, прилежащие к стороне MP;

б) угол, противолежащий стороне KP;

в) сторону, противолежащую углу K;

г) стороны, прилежащие к углу P.

178. Два треугольника равны. Равны ли их периметры?

179. Периметры двух треугольников равны. Обязательно ли равны сами треугольники?

180. Известно, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Означает ли это, что:

а) $\triangle CAB = \triangle C_1A_1B_1$;

б) $\triangle ABC = \triangle A_1C_1B_1$?

181. Известно, что $\triangle ABC = \triangle DEF$. Назовите:

а) угол, который при наложении треугольников совместится с углом E;

б) сторону, которая при наложении треугольников совместится со стороной AC;

в) угол, равный углу C;

г) сторону, равную стороне DE.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

182. Начертите треугольник ABC.

а) Измерьте стороны треугольника и вычислите его периметр.

б) Вырежьте построенный треугольник и с помощью полученного шаблона начертите треугольник, равный данному (или скопируйте построенный треугольник на экране компьютера). Почему треугольники будут равны?

→ **183.** Начертите треугольник ABC и вырежьте его из бумаги.

а) С помощью полученного шаблона начертите треугольник MNK, равный треугольнику ABC.

б) Приложите шаблон к треугольнику MNK так, чтобы отрезки MN и AB совместились, а точки C и K лежали по разные стороны от прямой AB. Обведите шаблон.

в) Перегните рисунок по прямой AB. Обязательно ли точки C и K совпадут?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

184. В треугольнике ABC $AC = 6$ см, сторона AB меньше BC на 2 см, а стороны, прилежащие к углу C, равны. Найдите периметр треугольника.

→ **185.** Периметр треугольника ABC равен 24 м, причем $AB = 10$ м, а сторона BC втрое меньше AC. Назовите угол треугольника, противолежащий его наибольшей стороне.

186. Известно, что $\triangle ABC = \triangle KMN$. Найдите:

а) угол N, если $\angle C = 125°$;

б) сторону AB, если $KM = 11$ см;

в) периметр треугольника KMN, если $AB = 11$ см, $MN = 8$ см, $KN = 7$ см.

→ **187.** Известно, что $\triangle BAC = \triangle EFK$.

а) Назовите наибольший угол треугольника BAC, если наибольший угол треугольника EFK является противолежащим стороне EF.

б) Назовите наименьшую сторону треугольника EFK, если $AB > BC > AC$.

в) Назовите треугольник, равный треугольнику ABC.

188. На рисунке 57 треугольник ABC равен треугольнику с вершинами в точках P, Q, R. Закончите равенство $\triangle ABC = \triangle \ldots$.

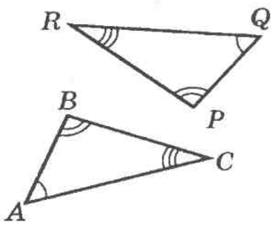


Рис. 57

→ **189.** Треугольник ABC равен треугольнику с вершинами в точках X, Y, Z. Запишите равенство этих треугольников, если $AB = YZ$, $BC = ZX$, $AC = YZ$.

Уровень Б

190. Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка D не лежит на прямой AC. Сколько треугольников с вершинами в данных точках можно построить? Сделайте рисунок.

191. В треугольнике ABC $AB : BC : AC = 3 : 5 : 7$. Найдите:

а) периметр треугольника, если $BC = 15$ мм.

б) наименьшую сторону треугольника, если его периметр равен 60 мм.

в) наибольшую сторону треугольника, если разность двух других его сторон равна 4 мм.

→ **192.** Периметр треугольника ABC равен 18 см, причем $AB + BC = 12$ см, $BC + AC = 13$ см. Назовите углы, прилежащие к наибольшей стороне треугольника.

193. Известно, что $\triangle ABC = \triangle DEF = \triangle KMN$, причем $\angle A = 45°$, $\angle F = 80°$, $\angle M = 55°$. Найдите неизвестные углы этих треугольников.

194. Известно, что $\triangle ABC = \triangle DEF = \triangle KMN$, причем $AB = 9$ см, $MN = 8$ см, $P_{\triangle DEF} = 24$ см. Найдите неизвестные стороны этих треугольников.

195. Могут ли быть равными треугольники, у которых наибольшие углы не равны? Ответ обоснуйте.

196. Если периметры двух треугольников не равны, то и сами треугольники не равны. Докажите.

Уровень В

197. Известно, что $\triangle ABC = \triangle KMN$ и $\angle A = \angle N$. Докажите, что треугольник ABC имеет равные углы, назовите их.

198. Известно, что $\triangle ABC = \triangle KMN$. Назовите наименьший угол треугольника ABC, если в треугольнике KMN $\angle K > \angle N$, а угол, противолежащий стороне KM, не наименьший.

199. Треугольник ABC равен треугольнику с вершинами в точках X, Y, Z. Запишите равенство этих треугольников, если $\angle A > \angle X$, $\angle A < \angle Z$, $\angle B > \angle Z$.

200. Треугольник ABC равен треугольнику с вершинами в точках X, Y, Z. Запишите равенство этих треугольников, если $AB = YZ$, $\angle A < \angle Y$, а все стороны треугольника ABC имеют разные длины.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 8

Теоретический материал

- равенство отрезков
- равенство углов
- условие и заключение теоремы

п. 2.2; 3.2

п. 4.3

Задачи

201. На сторонах равных углов B и B_1 отложены равные отрезки $BA = B_1A_1$ и $BC = B_1C_1$. При наложении углы B и B_1 и отрезки BA и B_1A_1 совместились. Совместятся ли при таком наложении отрезки BC и B_1C_1?

202. Общая сторона двух смежных углов делит угол между биссектрисами этих углов пополам. Докажите, что данные углы прямые.

§ 8. Первый признак равенства треугольников и его применение

8.1. Первый признак равенства треугольников

В соответствии с определением равных фигур, два треугольника равны, если они совмещаются наложением. Но на практике наложить один треугольник на другой не всегда возможно. Например, таким образом невозможно сравнить два земельных участка. Значит, возникает необходимость свести вопрос о равенстве треугольников к сравнению их сторон и углов. Но нужно ли для установления равенства сравнивать все шесть элементов данных треугольников? Если нет, то какие именно элементы двух треугольников должны быть соответственно равными, чтобы данные треугольники были равны? Ответ на этот вопрос дают ***признаки равенства треугольников.***

Докажем первый из этих признаков.

Теорема (первый признак равенства треугольников — по двум сторонам и углу между ними)

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

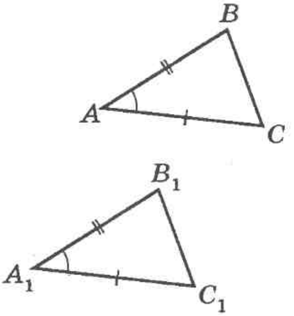


Рис. 58. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними

Доказательство

☐ Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 58). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Поскольку $\angle A = \angle A_1$, то треугольник $A_1B_1C_1$ можно наложить на треугольник ABC так, чтобы точки A и A_1 совместились, а стороны A_1B_1 и A_1C_1 наложились на лучи AB и AC соответственно. По условию $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$, следовательно, сторона A_1B_1 совместится со стороной AB, а сторона A_1C_1 — со стороной AC. Таким образом, точка B_1 совместится с точкой B, а точка C_1 — с точкой C, то есть стороны B_1C_1 и BC также совместятся. Значит, при наложении треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ совместятся полностью. Итак, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по определению. Теорема доказана. ■

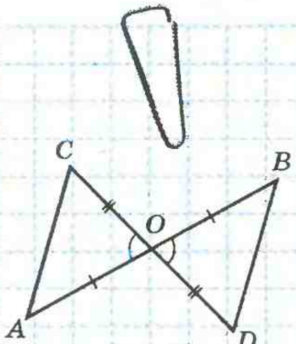


Рис. 59

Задача

Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Докажите равенство треугольников AOC и BOD (рис. 59).

Решение

В треугольниках AOC и BOD $AO = BO$ и $CO = DO$ по условию, $\angle AOC = \angle BOD$ по теореме о вертикальных углах. Таким образом, $\Delta AOC = \Delta BOD$ по первому признаку равенства треугольников.

Практическое значение доказанной теоремы очевидно из такого примера.

Пусть на местности необходимо определить расстояние между точками A и C, прямой проход между которыми невозможен (рис. 60). Один из способов измерения следующий: на местности выбирают некоторую точку O, к которой можно пройти из точек A, C, B, D, и на лучах AO и CO откладывают отрезки $BO = AO$ и $DO = CO$.

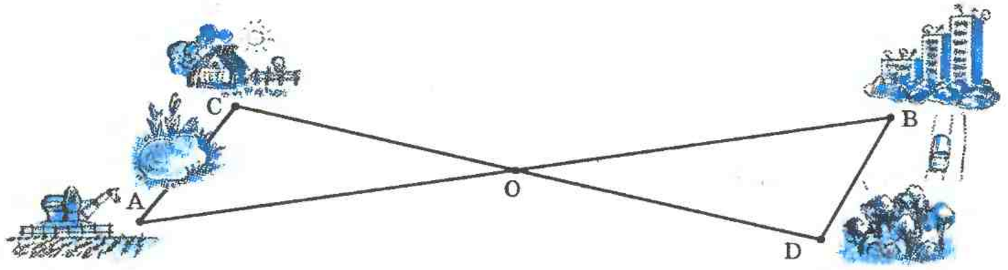


Рис. 60. Определение расстояния на местности с помощью первого признака равенства треугольников

Тогда, согласно предыдущей задаче, $\triangle AOC = \triangle BOD$ по первому признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что искомое расстояние AC равно расстоянию BD, которое можно измерить.

8.2. Опровержение утверждений. Контрпример

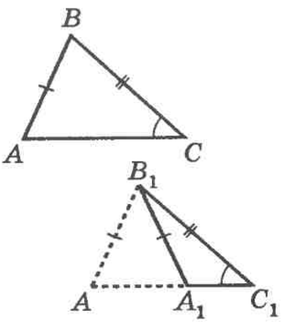


Рис. 61. Две стороны и угол двух треугольников соответственно равны, но сами треугольники не равны

Проанализируем первый признак равенства треугольников. Согласно ему для доказательства равенства двух треугольников достаточно доказать равенство трех пар соответствующих элементов — двух сторон и угла между ними. Требование того, чтобы равные углы обязательно лежали между равными сторонами, является очень важным.

Действительно, рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 61). Они имеют две пары соответственно равных сторон ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$), но равные углы C и C_1 лежат не между равными сторонами, поэтому данные треугольники не равны.

С помощью приведенного примера мы показали, что утверждение «Если две стороны и некоторый угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и некоторому углу другого треугольника, то такие треугольники равны» является ошибочным. Иначе говоря, мы опровергли это утверждение конкретным примером. Такой пример, с помощью которого можно показать, что некоторое общее утверждение является неправильным, называется ***контрпримером.*** Принцип построения контрпримера для опровержения неправильного утверждения довольно прост: нужно смоделировать ситуацию, когда условие утверждения выполняется, а заключение — нет.

Контрпример — от латинского «контра» — против

Изобразим схематически опровержение утверждения с помощью контрпримера.

УТВЕРЖДЕНИЕ	КОНТРПРИМЕР
Если А, то В	А, но не В

Контрпримеры используются только для опровержения неправильных утверждений, но не для доказательства правильных. Заметим также, что не всякое ошибочное утверждение можно опровергнуть контрпримером. Если для опровержения некоторого утверждения не удалось подобрать контрпример, это не означает, что данное утверждение верно.

Опровержение утверждений с помощью контрпримеров применяется не только в математике. Пусть, например, некто утверждает, что все птицы, которые водятся в Украине, осенью улетают на юг. Это утверждение можно опровергнуть, приведя в качестве контрпримера воробьев. А опровергнуть утверждение «В русском языке нет существительного, в котором содержались бы пять согласных подряд» можно с помощью самого слова «контрпример».

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

203. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$. Какое равенство необходимо добавить к условию, чтобы можно было доказать равенство данных треугольников по первому признаку?

204. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$ и $\angle C = \angle C_1$. Какое равенство необходимо добавить к условию, чтобы можно было доказать равенство данных треугольников по первому признаку?

205. Можно ли утверждать, что $\triangle ABC = \triangle DEF$, если $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle A = \angle E$?

206. Если сумма двух сторон и угол между ними одного треугольника соответственно равны сумме двух сторон и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны. Верно ли это утверждение? Приведите контрпример.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

207. Начертите две прямые, пересекающиеся в точке O.

а) Отложите на одной прямой по разные стороны от точки O равные отрезки OA и OB, а на другой – равные отрезки OC и OD.

б) Соедините последовательно точки A, C, B и D. Выделите цветом пары равных треугольников. Как доказать их равенство?

→ **208.** Начертите треугольник ABC.

а) От луча AC отложите угол CAM, равный углу CAB, так, чтобы точки B и M лежали по разные стороны от прямой AC.

б) На луче AM отложите отрезок AD, равный отрезку AB. Соедините точки D и C.

в) Докажите равенство треугольников ABC и ADC по первому признаку равенства треугольников. Как нужно перегнуть рисунок, чтобы доказать равенство этих треугольников по определению?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

209. По данным рисунка 62 докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

210. На рисунке 63 $\angle BAC = \angle DAC$, $AB = AD$. Докажите равенство треугольников ABC и ADC.

→ **211.** На рисунке 64 $\angle ABD = \angle CDB$, $AB = CD$. Докажите равенство треугольников ABD и CDB.

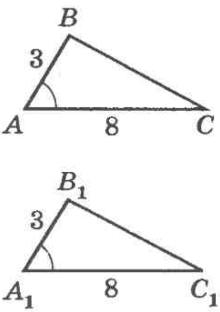


Рис. 62

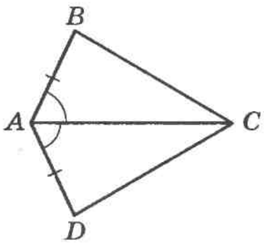


Рис. 63

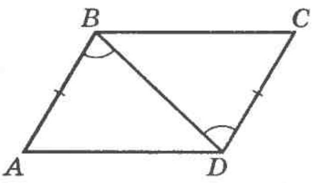


Рис. 64

212. Через точку D — середину отрезка AB — проведена прямая CD, перпендикулярная AB.

а) Докажите равенство треугольников ACD и BCD.

б) Найдите длину отрезка BC, если $AC = 8$ см.

→ **213.** В треугольнике ABC $AB = CB$, $\angle A = \angle C$. Точка M — середина стороны AC.

а) Докажите равенство треугольников ABM и CBM.

б) Найдите угол ABM, если $\angle CBM = 25°$.

214. С помощью рисунка-контрпримера опровергните утверждения:

а) если точка C лежит на луче AB, то она лежит между точками A и B;

б) если два равных угла имеют общую вершину, то эти углы вертикальные.

→ **215.** С помощью рисунка-контрпримера опровергните утверждения:

а) если луч OC делит тупой угол AOB на два угла, то оба эти угла острые;

б) если два луча не пересекаются, то они параллельны.

Уровень Б

216. На рисунке 65 $AD = AE$, $BD = CE$. Докажите, что $\angle B = \angle C$.

→ **217.** На рисунке 66 точка C — середина отрезка AE, $AB = DE$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $BC = DC$.

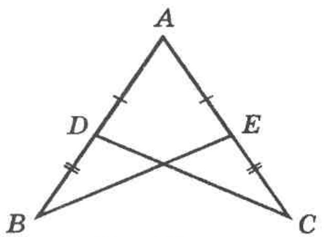


Рис. 65

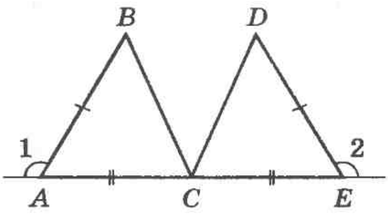


Рис. 66

218. В треугольнике ABC $\angle A = \angle C$. На сторонах AB и BC отложены равные отрезки AA_1 и CC_1 соответственно. Найдите длину отрезка AC_1, если $CA_1 = 14$ см.

→ **219.** В треугольнике ABC $AB = CB$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Найдите длину отрезка AD, если $AC = 8$ см.

220. Известно, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отложены равные отрезки AD и A_1D_1 соответственно. Докажите, что $\triangle ACD = \triangle A_1C_1D_1$.

→ **221.** Известно, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Точки D и E — середины сторон AB и BC, а точки D_1 и E_1 — середины сторон A_1B_1 и B_1C_1 соответственно. Докажите, что $DE = D_1E_1$.

222. С помощью рисунка-контрпримера опровергните утверждения:

а) если прямая параллельна стороне треугольника, то она пересекает две другие его стороны;

б) если два угла имеют общую сторону и в сумме составляют 180°, то эти углы смежные.

→ **223.** С помощью рисунка-контрпримера опровергните утверждения:

а) если прямая пересекает один из двух параллельных лучей, то она пересекает и второй луч;

б) если биссектрисы двух углов являются дополнительными лучами, то эти углы вертикальные.

Уровень В

224. В треугольнике ABC $AB = CB$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что прямые AC и BD перпендикулярны.

→ **225.** Через середину отрезка AB проведена прямая l, перпендикулярная прямой AB. Докажите, что каждая точка прямой l равноудалена (лежит на одинаковом расстоянии) от точек A и B.

Повторение перед изучением § 9

Теоретический материал

- теорема о смежных углах и ее следствия
- перпендикулярные прямые

п. 5.2; 6.3

Задачи

226. Представьте, что на рисунке изображена пара смежных углов и их биссектрисы. Какое наибольшее количество прямых углов может быть на таком рисунке?

227. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M, причем $\triangle BAM = \triangle CAM$. Найдите градусные меры углов AMB и AMC.

§ 9. Перпендикуляр к прямой

9.1. Существование и единственность прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой

Признаки равенства треугольников применяются не только для решения задач, но и для доказательства новых геометрических утверждений, в частности и тех, в формулировках которых не упоминается треугольник. Докажем с помощью первого признака равенства треугольников теорему о прямой, проходящей через данную точку плоскости перпендикулярно данной прямой.

Теорема (о существовании и единственности перпендикулярной прямой)

Через любую точку плоскости можно провести прямую, перпендикулярную данной, и только одну.

Перед началом доказательства теоремы проанализируем ее формулировку. Теорема содержит два утверждения:

1) существует прямая, проходящая через данную точку плоскости и перпендикулярная данной прямой;

2) такая прямая единственна.

Первое утверждение теоремы говорит о ***существовании прямой*** с описанными свойствами, второе — о ее ***единственности.*** Каждое из этих утверждений необходимо доказать отдельно.

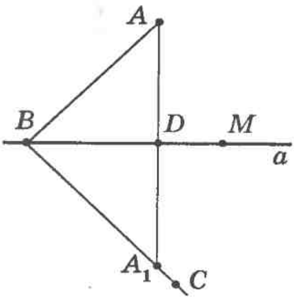


Рис. 67. Прямая AA_1 проходит через точку A и перпендикулярна прямой a

Доказательство

☐ Рассмотрим сначала случай, когда данная точка не лежит на данной прямой.

1) ***Существование.*** Пусть даны прямая a и точка A, не лежащая на данной прямой. Выберем на прямой a точки B и M так, чтобы угол ABM был острым (рис. 67).

С помощью транспортира отложим от луча BM угол CBM, равный углу ABM так, чтобы точки A и C лежали по разные стороны от прямой a. На луче BC отложим отрезок BA_1, равный отрезку BA, и соединим точки A и A_1. Пусть D — точка пересечения отрезка AA_1 с прямой a.

Рассмотрим треугольники ABD и A_1BD. Они имеют общую сторону BD, а $\angle ABD = \angle A_1BD$ и $BA = BA_1$ по построению. Таким образом, $\triangle ABD = \triangle A_1BD$ по первому признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что $\angle ADB = \angle A_1DB$. Но эти углы смежные, поэтому по теореме о смежных углах $\angle ADB = \angle A_1DB = 180° : 2 = 90°$. Итак, прямая AA_1 перпендикулярна прямой a.

2) ***Единственность.*** Применим метод доказательства от противного.

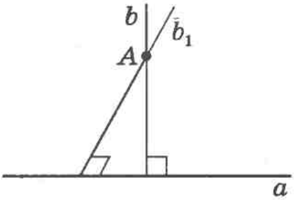


Рис. 68. К предположению о том, что прямые b и b_1 перпендикулярны a и проходят через точку A

Пусть через точку A проходят две прямые b и b_1, перпендикулярные прямой a (рис. 68). Тогда по теореме о двух прямых, перпендикулярных третьей, $b \parallel b_1$. Но это невозможно, поскольку прямые b и b_1 имеют общую точку A. Итак, наше предположение неверно, то есть прямая, проходящая через точку A перпендикулярно прямой a, единственна.

Теперь рассмотрим случай, когда точка A лежит на прямой a. От любой полупрямой прямой a с начальной точкой A можно отложить прямой угол (рис. 69). Отсюда вытекает существование перпендикулярной прямой, содержащей сторону этого угла.

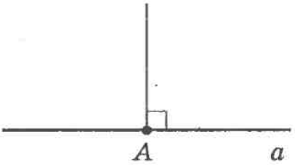
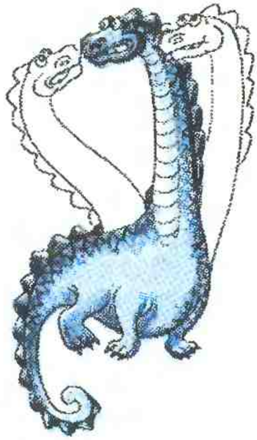


Рис. 69. От любой полупрямой прямой a можно отложить прямой угол

Доказательство единственности такой прямой повторяет доказательство, представленное выше. Теорема доказана. ■

Утверждения о существовании и единственности уже встречались нам в аксиомах, но необходимость доказывать их возникла впервые. В математике существует целый ряд теорем, аналогичных доказанной (их называют ***теоремами***



существования и единственности). Общий подход к таким теоремам состоит в отдельном доказательстве каждого из двух утверждений.

Необходимость двух отдельных этапов доказательства в шутку можно пояснить так: утверждение «У дракона есть голова» не означает, что эта голова единственная. Доказательство существования определенного объекта чаще всего сводится к описанию способа его получения. Единственность обычно доказывают методом от противного.

9.2. Перпендикуляр. Расстояние от точки до прямой

Определение

Перпендикуляром к данной прямой, проведенным из точки *A*, называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, одним из концов которого является точка A, а вторым (**основанием перпендикуляра**) — точка пересечения этих прямых.

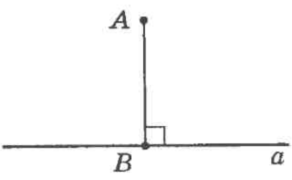


Рис. 70. Отрезок AB — перпендикуляр к прямой a

На рисунке 70 отрезок AB является перпендикуляром к прямой a, проведенным из точки A. Точка B — основание этого перпендикуляра. Поскольку по предыдущей теореме через точку A можно провести единственную прямую, перпендикулярную прямой a, то отрезок AB — единственный перпендикуляр к прямой a, проведенный из точки A.

Из доказанной теоремы следует, что **из точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один.**

Это утверждение называют **теоремой о существовании и единственности перпендикуляра к прямой.**

Определение

Расстоянием от точки до прямой, не проходящей через эту точку, называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.

Иногда расстоянием от точки до прямой называют сам этот перпендикуляр. Таким образом, отрезок AB (см. рис. 70) является расстоянием от точки A до прямой a.

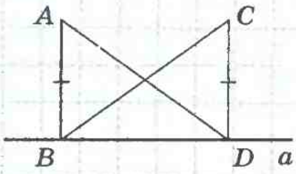


Рис. 71

Задача

Точки A и C лежат по одну сторону от прямой a, AB и CD — расстояние от данных точек до прямой a, причем $AB = CD$ (рис. 71). Докажите, что $AD = CB$.

Решение

Рассмотрим треугольники ABD и CDB. У них сторона BD общая, $AB = CD$ по условию. По определению расстояния от точки до прямой AB и CD — перпендикуляры к прямой a, то есть $\angle ABD = \angle CDB = 90°$. Тогда $\Delta ABD = \Delta CDB$ по первому признаку равенства треугольников. Из этого следует, что $AD = CB$, что и требовалось доказать.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

228. Могут ли два угла треугольника быть прямыми? Почему?

229. На прямой отмечена точка. Сколько через эту точку можно провести:

а) прямых, перпендикулярных данной прямой;

б) перпендикуляров к данной прямой?

Изменятся ли ответы, если точка не будет лежать на данной прямой?

230. Среди геометрических фигур с заданными свойствами укажите те, которые существуют и являются единственными:

а) луч, дополнительный к данному лучу;

б) отрезок, равный данному отрезку;

в) угол, смежный с данным неразвернутым углом;

г) угол, вертикальный данному неразвернутому углу.

231. Среди геометрических фигур с заданными свойствами укажите те, которые существуют, но не являются единственными:

а) прямая, параллельная данной прямой;
б) прямая, проходящая через точку вне данной прямой и параллельная данной прямой;
в) точка, являющаяся концом данного отрезка;
г) точка, делящая данный отрезок пополам.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

232. Проведите прямую a и отметьте точку A, не лежащую на этой прямой.

а) С помощью угольника проведите через точку A перпендикуляр AB к данной прямой.
б) Измерьте расстояние от точки A до прямой a.
в) Отметьте на данной прямой точку C, не совпадающую с точкой B. Измерьте отрезок AC и сравните его длину с длиной отрезка AB. Выскажите предположение о сравнении длины отрезка AB и длин других отрезков, соединяющих точку A с точками прямой a.

→ **233.** Проведите прямую b и отметьте на ней точку B.

а) С помощью угольника проведите через точку B прямую, перпендикулярную прямой b, и отметьте на ней точку A.
б) На прямой b по разные стороны от точки B отложите равные отрезки BC и BD. Соедините точки C и D с точкой A. Равны ли треугольники ABC и ABD? Почему?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

234. В треугольнике ABC $\angle B = 90^\circ$. Назовите отрезок, который является расстоянием:

а) от точки C до прямой AB;
б) от точки A до прямой BC.

→ **235.** Точки A, B и C не лежат на одной прямой. Отрезок AD — расстояние от точки A до прямой BC. Какой отрезок является расстоянием от точки C до прямой AD?

236. Через точку на плоскости проведены три прямые. Сколько прямых углов может при этом образоваться? Рассмотрите все возможные случаи.

→ **237.** Отрезки AC и BC — перпендикуляры, опущенные из точек A и B на прямую c. Могут ли точки A, B и C не лежать на одной прямой? Ответ обоснуйте.

Уровень Б

238. Точка A лежит на прямой a, а точка B лежит на прямой b. Отрезок AB — расстояние от точки A до прямой b и расстояние от точки B до прямой a. Определите взаимное расположение прямых a и b. Ответ обоснуйте.

→ **239.** На плоскости даны точки A, B, C, D, E. Определите, какие четыре из этих точек лежат на одной прямой, если BD — расстояние от точки B до прямой AC, а ED — расстояние от точки E до прямой BD.

240. Известно, что $\triangle ABC = \triangle KMN$ и отрезок AC — расстояние от точки A до прямой BC. Какой отрезок является расстоянием:

а) от точки K до прямой MN;

б) от точки M до прямой KN?

→ **241.** Известно, что $\triangle ABC = \triangle ABC_1$ и точка B лежит на отрезке CC_1. Какой отрезок является расстоянием:

а) от точки A до прямой CC_1;

б) от точки C до прямой AB?

Уровень В

242. Точка D лежит внутри неразвернутого угла B. Отрезки DA и DC — расстояния от точки D до сторон угла, причем $DA = DC$ и $BA = BC$. Докажите, что луч BD — биссектриса угла B.

→ **243.** Точка C — середина отрезка AB, отрезок DC — расстояние от точки D до прямой AB. Докажите, что луч DC — биссектриса угла ADB.

244. Расстояния от сел Антоновка и Вольное до прямой автомагистрали равны 5 км и 7 км соответственно. Может ли расстояние между Антоновкой и Вольным быть равным 12 км; 2 км? Ответ обоснуйте.

245. Отрезки AA_1 и BB_1 — расстояния от точек A и B до прямой c. При каком условии прямые AB и c будут перпендикулярны? Ответ обоснуйте.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 10

Теоретический материал

- определение треугольника и его элементов
- равные треугольники

п. 7.1; 7.2

Задачи

246. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC. Данный треугольник перегнули по прямой AM, причем углы AMB и AMC и отрезки MB и MC совместились. Совместятся ли при таких условиях углы AMB и ACM; отрезки AB и AC?

247. Известно, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. На сторонах BC и B_1C_1 отмечены точки M и M_1 соответственно, причем $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$. Докажите равенство треугольников ACM и $A_1C_1M_1$.

§ 10. Второй признак равенства треугольников и его применение

10.1. Второй признак равенства треугольников

В первом признаке равенства треугольников равенство двух треугольников было доказано по трем элементам: двум сторонам и углу между ними. Однако это не единственный возможный набор элементов, равенство которых гарантирует равенство треугольников. Еще один такой набор — это сторона и прилежащие к ней углы.

Теорема (второй признак равенства треугольников — по стороне и прилежащим к ней углам)

Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

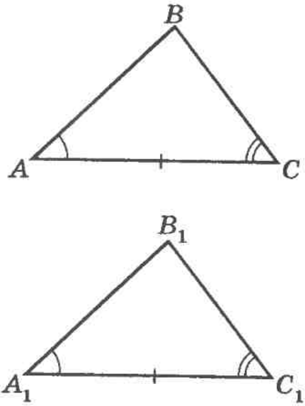


Рис. 72. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и прилежащим к ней углам

Доказательство

☐ Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 72). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Поскольку $AC = A_1C_1$, то треугольник $A_1B_1C_1$ можно наложить на треугольник ABC так, чтобы сторона AC совместилась со стороной A_1C_1, а точки B и B_1 лежали по одну сторону от прямой AC. По условию $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, поэтому сторона A_1B_1 наложится на луч AB, а сторона C_1B_1 — на луч CB. Тогда точка B_1 — общая точка сторон A_1B_1 и C_1B_1 — будет лежать как на луче AB, так и на луче CB, то есть совместится с общей точкой этих лучей — точкой B. Таким образом, совместятся стороны AB и A_1B_1, а также BC и B_1C_1. Значит, при наложении треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ совместятся полностью, то есть по определению $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана. ■

10.2. Решение геометрических задач «от конца к началу»

Рассмотрим пример применения второго признака равенства треугольников для решения задачи.

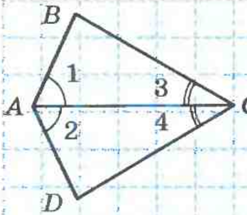


Рис. 73

Задача

На рисунке 73 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Найдите угол D, если $\angle B = 110°$.

Прежде чем привести решение этой задачи, попытаемся ответить на вопрос: как именно надо рассуждать, чтобы найти путь к нему?

1) Сначала проанализируем вопрос задачи. Нам необходимо найти градусную меру угла D. Очевидно, что для этого должны быть использованы числовые данные. Мы имеем лишь одно такое условие: $\angle B = 110°$. Таким образом, можно предположить, что углы B и D должны быть как-то связаны. Как именно?

2) Заметим, что углы B и D являются углами треугольников ABC и ADC соответственно, причем оба эти угла противолежат стороне AC. Отсюда возникает идея о том, что углы B и D могут быть равными, и их равенство может следовать из равенства треугольников ABC и ADC.

3) Следующий шаг рассуждений: действительно ли треугольники ABC и ADC равны? Если да, то на основании какого признака можно доказать их равенство? Здесь на помощь приходят другие данные задачи — равенства углов: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Как вы уже знаете, две пары соответственно равных углов рассматриваются в формулировке второго признака равенства треугольников, то есть следует попробовать применить именно его.
4) Для окончательного определения хода решения задачи осталось ответить на вопрос: каких еще данных нам не достает для применения второго признака равенства треугольников? Откуда их можно получить? Отметим, что углы 1 и 3 треугольника ABC, а также углы 2 и 4 треугольника ADC являются прилежащими к стороне AC, которая, кроме того, является общей стороной данных треугольников.

Итак, путь определен, и остается лишь записать решение, повторяя рассуждения в обратном порядке — от 4-го к 1-му пункту.

Решение

Рассмотрим треугольники ABC и ADC. В них сторона AC общая, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ по условию, и эти углы прилежат к стороне AC. Таким образом, $\Delta ABC = \Delta ADC$ по второму признаку равенства треугольников.

Углы B и D — соответственно равные углы равных треугольников. Значит, $\angle D = \angle B = 110°$.

Ответ: 110°.

Отметим, что в рассуждениях 1) — 4) мы начинали с вопроса задачи, а затем использовали ее условия, то есть шли «от конца к началу». Во многих геометрических задачах именно такой способ рассуждений позволяет найти правильный путь к решению.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

248. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Какое равенство необходимо добавить к условию, чтобы равенство данных треугольников можно было доказать по второму признаку?

249. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$ $\angle A = \angle A_1$. Какое равенство необходимо добавить к условию, чтобы равенство данных треугольников можно было доказать по второму признаку?

250. Можно ли утверждать, что $\triangle ABC = \triangle DEF$, если $AB = DE$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle F$?

251. Если сторона и сумма прилежащих к ней углов одного треугольника соответственно равны стороне и сумме прилежащих к ней углов другого треугольника, то такие треугольники равны. Верно ли это утверждение?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

252. Начертите острый угол A и проведите его биссектрису AD.

а) От луча DA по разные стороны от прямой DA отложите равные углы и отметьте точки B и C — точки пересечения сторон построенных углов со сторонами угла A.

б) Равны ли треугольники ABD и ACD? Как это доказать?

→ **253.** Начертите тупой угол A и проведите его биссектрису AD.

а) Проведите через точку D прямую, перпендикулярную прямой AD, и отметьте точки B и C — точки пересечения построенной прямой со сторонами угла A.

б) Выделите цветом равные треугольники и докажите их равенство.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

254. По данным рисунка 74 докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

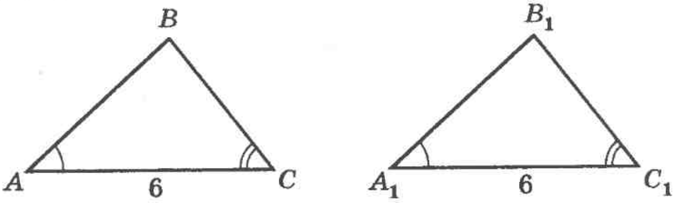


Рис. 74

255. На рисунке 75 $\angle B = \angle C$, $BO = CO$. Докажите равенство треугольников AOB и DOC.

256. На рисунке 76 $\angle ABD = \angle CDB$, $\angle ADB = \angle CBD$. Докажите равенство треугольников ABD и CDB.

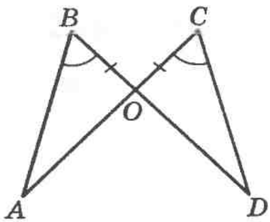


Рис. 75

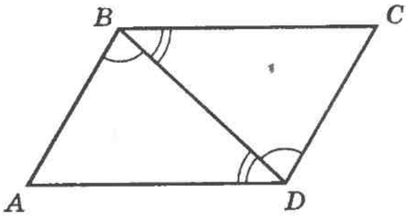


Рис. 76

257. На биссектрисе угла B отмечена точка D, а на сторонах угла — точки A и C, причем $\angle ADB = \angle CDB$. Найдите длину отрезка DC, если $DA = 8$ см.

258. В треугольнике ABC $AB = CB$, $\angle A = \angle C$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке M. Докажите:

а) равенство треугольников ABM и CBM;

б) что прямые AC и BM перпендикулярны.

Уровень Б

259. На рисунке 77 $\angle A = \angle F$, $\angle ADE = \angle FCB$, $AD = FC$. Докажите равенство треугольников ABC и FED.

260. На рисунке 78 $\angle BAD = \angle CDA$, $\angle CAD = \angle BDA$. Докажите равенство треугольников ABD и DCA.

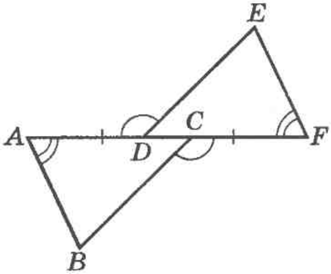


Рис. 77

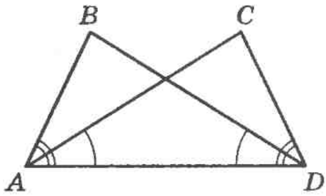


Рис. 78

261. В треугольнике ABC на равных сторонах AC и BC отмечены точки D и E соответственно, причем $\angle CAE = \angle CBD$. Докажите, что $AE = BD$.

262. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O, которая является серединой отрезка BD, причем $AB \perp BD$, $CD \perp BD$.

а) Докажите равенство треугольников AOB и COD.

б) Найдите длину отрезка AC, если $AO = 4$ см.

263. На биссектрисе неразвернутого угла A отмечена точка B. Докажите, что прямая, перпендикулярная биссектрисе AB и проходящая через точку B, отсекает на сторонах угла равные отрезки.

Уровень В

264. С помощью контрпримера опровергните утверждение: «Если сторона и два угла одного треугольника равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны».

265. В пункте 8.1 приведен способ нахождения расстояния между точками A и C на местности (см. рис. 60), основанный на применении первого признака равенства треугольников. Предложите другой способ нахождения этого расстояния на основании второго признака равенства треугольников.

266. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. На сторонах AC и A_1C_1 отмечены точки D и D_1 соответственно, причем $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$. Докажите, что $BD = B_1D_1$.

267. На рисунке 79 $\triangle ABC = \triangle DCB$. Докажите, что $\triangle AOB = \triangle DOC$.

268. На рисунке 80 $\triangle AOD = \triangle COE$. Докажите, что $\triangle ABE = \triangle CBD$.

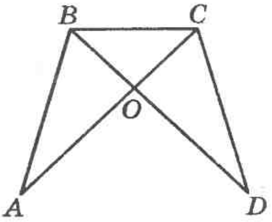


Рис. 79

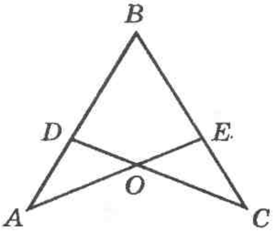


Рис. 80

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 11

Теоретический материал

- равенство отрезков
- равенство углов

п. 2.2; 3.2

- существование и единственность перпендикуляра к прямой

п. 9.2

Задачи

269. Известно, что $\triangle ABC = \triangle MNK$, $AB = BC$, $NK = MK$. Докажите, что все стороны данных треугольников равны.

270. Точки C и D лежат по разные стороны прямой AB, причем $\angle CAB = \angle DAB$, $\angle CBA = \angle DBA$. Среди треугольников, вершинами которых являются данные точки, назовите треугольники, обязательно имеющие две равные стороны. Ответ обоснуйте.

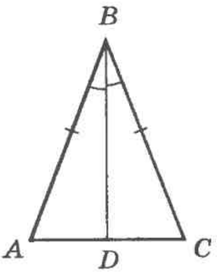


Рис. 83. Луч BD — биссектриса угла B

Доказательство

☐ Пусть дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Докажем, что $\angle A = \angle C$.

Проведем биссектрису угла B. Пусть она пересекает сторону AC в точке D (рис. 83). Рассмотрим треугольники ABD и CBD. У них сторона BD общая, $AB = CB$ как боковые стороны равнобедренного треугольника, $\angle ABD = \angle CBD$ по определению биссектрисы угла. Значит, $\triangle ABD = \triangle CBD$ по первому признаку равенства треугольников.

Отсюда следует равенство соответствующих углов этих треугольников, то есть $\angle A = \angle C$, что и требовалось доказать. ■

Следствие

В равностороннем треугольнике все углы равны.

Задача

Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

Решение

Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AC, точки D, E, F — середины сторон AB, BC и AC соответственно (рис. 84). Докажем, что треугольник DEF равнобедренный. Рассмотрим треугольники DAF и ECF. У них $AD = CE$ как половины равных сторон AB и CB, $AF = CF$ (поскольку по условию точка F — середина AC), $\angle A = \angle C$ как углы при основании равнобедренного треугольника ABC. Следовательно, $\Delta DAF = \Delta ECF$ по первому признаку равенства треугольников. Тогда отрезки $DF = EF$ как соответствующие стороны равных треугольников, то есть треугольник DEF равнобедренный.

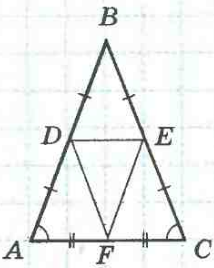


Рис. 84

11.3. Признак равнобедренного треугольника

Из предыдущей теоремы следует, что в треугольнике против равных сторон лежат равные углы. Но всегда ли стороны, противолежащие равным углам, должны быть равными? Ответим на этот вопрос следующей теоремой.

Теорема (признак равнобедренного треугольника)

Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Доказательство

☐ Пусть в треугольнике ABC $\angle A = \angle C$. Докажем, что этот треугольник равнобедренный.

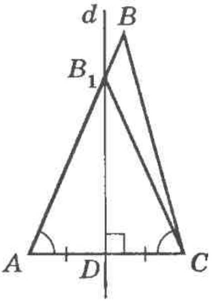


Рис. 85. К доказательству признака равнобедренного треугольника

Через точку D — середину стороны AC — проведем прямую d, перпендикулярную AC. Пусть эта прямая пересекает луч AB в точке B_1 (рис. 85). Соединим точки C и B_1 и рассмотрим треугольники AB_1D и CB_1D. У них сторона B_1D общая, $\angle ADB_1 = \angle CDB_1 = 90°$ и $AD = CD$ по построению. Таким образом, $\triangle AB_1D = \triangle CB_1D$ по первому признаку. Отсюда $AB_1 = CB_1$, $\angle B_1AD = \angle B_1CD$. Поскольку по построению точка B_1 лежит на луче AB, угол B_1AD совпадает с углом A треугольника ABC. Тогда по условию теоремы и по доказанному имеем: $\angle B_1AD = \angle BAD = \angle BCD = \angle B_1CD$. Таким образом, по аксиоме откладывания углов углы B_1CD и BCD совпадают, то есть точка B_1 лежит и на луче CB. Поскольку лучи AB и CB имеют единственную точку пересечения, точки B и B_1 совпадают, то есть $AB = CB$. Теорема доказана. ■

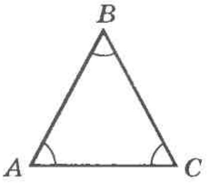


Рис. 86. Признак равностороннего треугольника

Следствие

Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний.

Отметим, что теперь мы имеем два пути доказательства того, что треугольник равнобедренный:

1) по определению равнобедренного треугольника (то есть путем доказательства равенства двух сторон);
2) по признаку равнобедренного треугольника (то есть путем доказательства равенства двух углов).

Задача

На продолжении основания AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки D и E, причем $AD = CE$ (рис. 87). Докажите, что треугольник DBE равнобедренный.

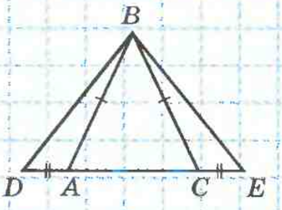


Рис. 87

Решение

Рассмотрим треугольники DAB и ECB. У них $AD = CE$ по условию, $AB = CB$ как боковые стороны равнобедренного треугольника ABC. По свойству углов при основании равнобедренного треугольника ABC $\angle BAC = \angle BCA$, тогда $\angle DAB = \angle ECB$ как углы, смежные с равными углами. Значит, $\Delta DAB = \Delta ECB$ по первому признаку равенства треугольников.

Завершить доказательство можно одним из двух способов.

1-й способ. Поскольку $\Delta DAB = \Delta ECB$, то $BD = BE$. Таким образом, треугольник DBE равнобедренный по определению.

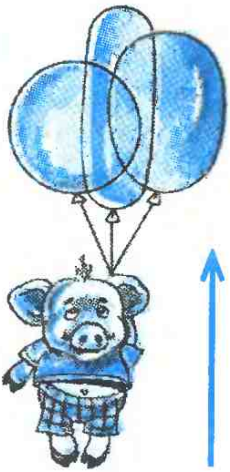
2-й способ. Поскольку $\Delta DAB = \Delta ECB$, то $\angle D = \angle C$. Таким образом, треугольник DBE равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника.

11.4. Прямая и обратная теоремы

Проанализируем две предыдущие теоремы о равнобедренном треугольнике, выделив в каждой из них условие и заключение. Свойство углов равнобедренного треугольника можно сформулировать так: «Если треугольник равнобедренный, то в нем два угла (при основании) равны». Теперь становится очевидным, что условие первой теоремы («треугольник равнобедренный») — это заключение второй, а заключение первой теоремы («в треугольнике два угла равны») — это условие второй теоремы. В таком случае вторая теорема является **обратной** первой **(прямой)**.

Изобразим наглядно связь прямой и обратной теорем.

ПРЯМАЯ ТЕОРЕМА	ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА
Если А, то В	Если В, то А



Теорема, обратная данной, не обязательно верна. Рассмотрим, например, теорему о вертикальных углах, сформулировав ее так: «Если два угла вертикальные, то они равны». Понятно, что обратная теорема неверна: ведь если два угла равны, то они не обязательно вертикальные.

Немало подобных примеров можно привести и из повседневной жизни. Например, если ученик является семиклассником, то он изучает геометрию. Обратное утверждение ошибочно: если ученик изучает геометрию, то он не обязательно семиклассник, ведь геометрию изучают и в старших классах. Попробуйте самостоятельно найти примеры прямых и обратных утверждений в других науках, изучаемых в школе.

Таким образом, ***пользоваться утверждением, обратным доказанной теореме, можно лишь тогда, когда оно также доказано.***

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

271. Является ли равнобедренным любой равносторонний треугольник? Является ли равносторонним любой равнобедренный треугольник?

272. В треугольнике DEF $DE = EF$. Назовите равные углы треугольника.

273. В треугольнике KMN $\angle M = \angle N$. Назовите равные стороны треугольника.

274. В треугольнике ABC стороны, прилежащие к углу B, равны, и углы, прилежащие к стороне AB, равны. Определите вид треугольника.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

275. Начертите угол B и отложите на его сторонах равные отрезки BA и BC.

а) Соедините точки A и C. Является ли треугольник ABC равнобедренным? Почему?

б) Измерьте углы A и C треугольника ABC. Сделайте вывод.

→ **276.** Начертите угол A, равный 60°, и проведите его биссектрису AD.

а) Проведите через точку D прямую, перпендикулярную прямой AD, и отметьте точки B и C — точки пересечения построенной прямой со сторонами угла A.

б) Измерьте стороны и углы треугольника ABC. Сделайте вывод.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

277. Периметр равнобедренного треугольника равен 2,6 м. Найдите стороны треугольника, если его основание больше боковой стороны на 0,2 м.

278. Периметр равнобедренного треугольника равен 20 см. Найдите:
а) основание треугольника, если его боковая сторона равна 7,5 см;
б) боковую сторону треугольника, если его основание равно 4 см;
в) стороны треугольника, если его боковая сторона относится к основанию как 3 : 4.

279. Если боковая сторона и угол, противолежащий основанию одного равнобедренного треугольника, соответственно равны боковой стороне и углу, противолежащему основанию другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны. Докажите.

280. Если основание и угол, прилежащий к основанию одного равнобедренного треугольника, соответственно равны основанию и углу, прилежащему к основанию другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны. Докажите.

281. По данным рисунка 88 докажите, что треугольник ABC равнобедренный, и назовите его боковые стороны.

282. По данным рисунка 89 докажите, что треугольник ABC равнобедренный, и назовите его основание.

283. Треугольники ABD и CBD равны (рис. 90). Докажите, что треугольники ABC и ADC равнобедренные.

284. В равнобедренном треугольнике ABC точки A_1 и C_1 — середины боковых сторон AB и BC соответственно. Докажите, что $\angle BA_1C_1 = \angle BC_1A_1$.

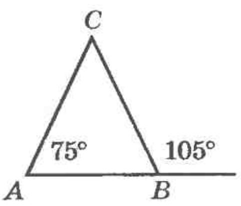


Рис. 88

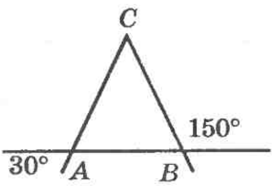


Рис. 89

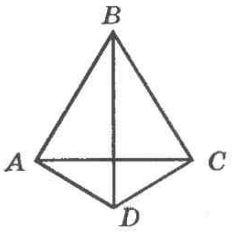


Рис. 90

Уровень Б

285. Периметр равнобедренного треугольника равен 21 м. Найдите стороны треугольника, если одна из них больше другой на 3 м. Сколько решений имеет задача?

286. Периметр равнобедренного треугольника ABC равен 18 см, причем основание AC меньше боковой стороны на 3 см. Найдите периметр равностороннего треугольника ADC.

287. В равнобедренном треугольнике углы, прилежащие к боковой стороне, равны. Докажите, что данный треугольник равносторонний.

288. Докажите, что середины сторон равностороннего треугольника являются вершинами другого равностороннего треугольника.

289. На рисунке 91 $AB = BC$, $CD = DE$. Докажите, что $\angle BAC = \angle DEC$.

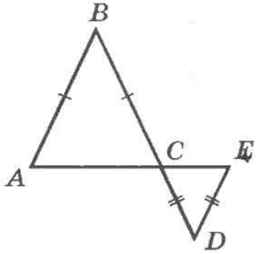


Рис. 91

290. Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC (см. рис. 90). Докажите равенство треугольников ABD и CBD.

291. На продолжениях боковых сторон AB и CB равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки BA_1 и BC_1 (рис. 92).

а) Докажите равенство треугольников AC_1B и CA_1B.

б) Докажите равенство треугольников AC_1C и CA_1A.

292. На рисунке 93 треугольник ABC равнобедренный с основанием AC, точка D — середина отрезка AC. Докажите, что треугольник AEC равнобедренный.

293. На рисунке 94 треугольник ADC равнобедренный с основанием AC, $\angle ADE = \angle CDE$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

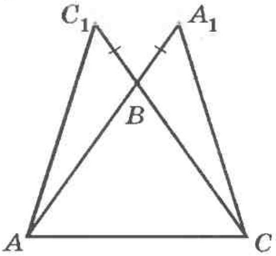


Рис. 92

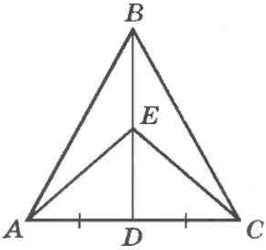


Рис. 93

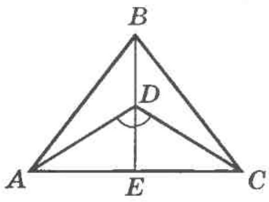


Рис. 94

Уровень В

294. Сформулируйте утверждения, обратные:

а) теореме о смежных углах;

б) теореме о двух прямых, параллельных третьей;

в) первому признаку равенства треугольников.

Какие из этих утверждений верны?

→ **295.** Проанализируйте доказательство признака равнобедренного треугольника (рис. 85). Почему прямая d не может быть параллельна:

а) каждой из прямых AB и CB;

б) одной из прямых AB или CB?

296. Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC (точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC). Отрезки BD и AC пересекаются в точке K. Докажите, что точка K — середина отрезка AC.

→ **297.** Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC (точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC). Докажите, что прямые BD и AC перпендикулярны.

298. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки AA_1 и CC_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC равнобедренный.

→ **299.** Треугольники ABC и ABD равны. Докажите, что их общая сторона перпендикулярна прямой CD.

Повторение перед изучением § 12

Теоретический материал

- середина отрезка
- биссектриса угла
- перпендикуляр к прямой

п. 2.2; 3.2

п. 9.2

Задачи

300. Дан угол AOB. Из точки A проведен перпендикуляр AD к прямой OB. Лежит ли точка O между точками B и D, если данный угол острый; тупой; прямой?

301. В треугольнике ABC $AB = BC$. Проведите из вершины B отрезок, который делит данный треугольник на два равных треугольника. Какие свойства имеет этот отрезок? Приведите необходимые доказательства, выскажите предположения.

§ 12. Медиана, биссектриса и высота треугольника

12.1. Определение медианы, биссектрисы и высоты треугольника

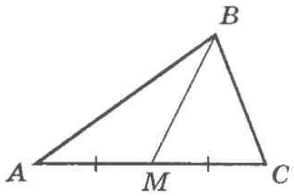


Рис. 95. Отрезок BM — медиана треугольника ABC

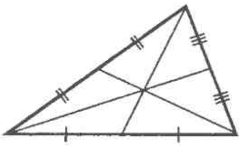


Рис. 96. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке

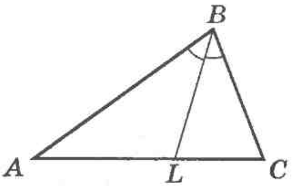


Рис. 97. Отрезок BL — биссектриса треугольника ABC

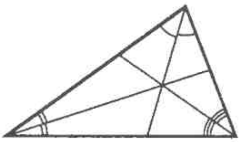


Рис. 98. Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке

Помимо сторон и углов, с треугольником связано несколько важных элементов, имеющих специальные названия.

Определение

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

На рисунке 95 отрезок BM является медианой треугольника ABC. В любом треугольнике можно провести три медианы — по одной из каждой вершины. Далее будет доказано, что все они пересекаются в одной точке (рис. 96)[1].

Определение

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину этого угла с точкой на противолежащей стороне.

На рисунке 97 отрезок BL — биссектриса треугольника ABC. Обратим внимание на то, что, в отличие от биссектрисы угла, являющейся лучом, биссектриса треугольника — отрезок. Очевидно, что любой треугольник имеет три биссектрисы (рис. 98). Все они также пересекаются в одной точке (этот факт будет доказан далее).

Определение

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, которая содержит его противолежащую сторону.

[1] Подчеркнем, что здесь и далее, приводя утверждения, которые будут доказаны позднее, мы не будем ссылаться на них до того момента, когда они будут доказаны.

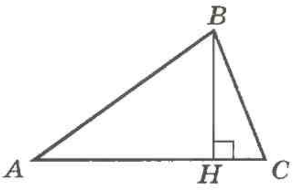


Рис. 99. Отрезок BH — высота треугольника ABC

На рисунке 99 отрезок BH — высота треугольника ABC.

По теореме о существовании и единственности перпендикуляра к прямой, из каждой вершины треугольника можно провести только одну его высоту. Высоты треугольника не обязательно лежат внутри него. В отличие от медиан и биссектрис, некоторые из высот могут совпадать со сторонами или проходить вне треугольника (рис. 100).

Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке (это утверждение докажем позднее).

Рис. 100. Расположение высот в треугольнике ABC

12.2. Свойство медианы, биссектрисы и высоты равнобедренного треугольника

Теорема (свойство медианы, биссектрисы и высоты равнобедренного треугольника)

В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.

Доказательство

□ Доказательство данной теоремы состоит из трех частей.

1) Пусть BD — медиана равнобедренного треугольника ABC, проведенная к основанию AC (рис. 101, *а*). Докажем, что BD является также биссектрисой и высотой треугольника ABC.

Рассмотрим треугольники ABD и CBD. У них $AB = CB$ по определению равнобедренного треугольника, $\angle A = \angle C$ как углы при основании равнобедренного треугольника, $AD = CD$ по определению медианы. Следовательно, $\triangle ABD = \triangle CBD$ по первому признаку равенства треугольников. Из этого вытекает, что $\angle ABD = \angle CBD$, то есть BD — биссектриса треугольника ABC.

Кроме того, $\angle ADB = \angle CDB$, а поскольку эти углы смежные, то оба они прямые. Значит, BD — высота треугольника ABC. Таким образом, отрезок BD — медиана треугольника ABC, проведенная к основанию,— является также биссектрисой и высотой треугольника.

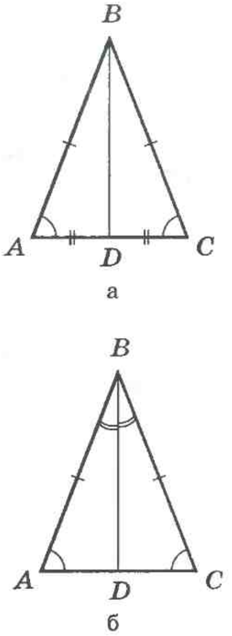


Рис. 101. Отрезок BD — медиана, биссектриса и высота равнобедренного треугольника ABC

2) Пусть теперь BD — биссектриса равнобедренного треугольника ABC, проведенная к основанию AC (рис. 101, *б*). Аналогично предыдущему случаю можно доказать, что BD является также медианой и высотой треугольника ABC. Действительно, в этом случае $\triangle ABD = \triangle CBD$ по второму признаку ($\angle A = \angle C$, $AB = CB$, $\angle ABD = \angle CBD$). Отсюда $AD = CD$, то есть BD — медиана треугольника, и $\angle ADB = \angle CDB = 90°$, то есть BD — высота треугольника.

3) Пусть BD — высота треугольника ABC. Докажем от противного, что BD является медианой и биссектрисой данного треугольника. Пусть существуют медиана BD_1 и биссектриса BD_2, не совпадающие с BD. Тогда по доказанному выше отрезки BD_1 и BD_2 также являются высотами треугольника. Таким образом, из точки B к прямой AC проведены три различных перпендикуляра, что противоречит теореме о существовании и единственности перпендикуляра к прямой. Из этого противоречия следует, что отрезки BD, BD_1 и BD_2 совпадают, то есть BD — медиана и биссектриса данного треугольника.

Итак, в равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.

Теорема доказана. ■

Медиана — от латинского «медианус» — средний

Следствие

В равностороннем треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, совпадают.

Теорема, обратная данной, также верна: если в треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, совпадают, то такой треугольник равнобедренный (докажите это утверждение самостоятельно).

На практике для решения задач вместо доказанной теоремы часто используют утверждение с условием совпадения лишь двух из трех указанных отрезков:

1) ***если в треугольнике медиана и высота, проведенные из одной вершины, совпадают, то такой треугольник равнобедренный;***
2) ***если в треугольнике биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, совпадают, то такой треугольник равнобедренный;***
3) ***если в треугольнике медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины, совпадают, то такой треугольник равнобедренный.***

Первые два утверждения докажите самостоятельно. Третье утверждение мы рассмотрим в п. 12.3.

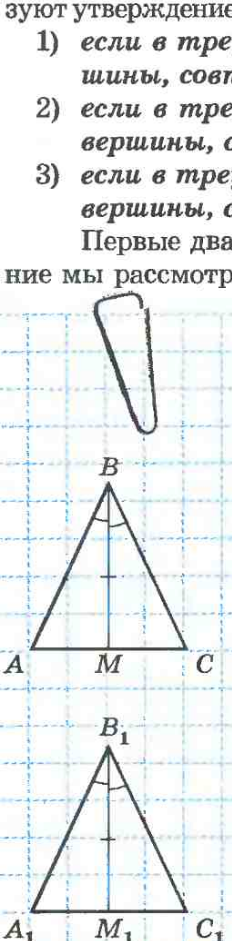


Рис. 102

Задача

Докажите равенство равнобедренных треугольников по углу, противолежащему основанию, и медиане, проведенной к основанию.

Решение

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — данные равнобедренные треугольники с основаниями AC и A_1C_1, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, BM и B_1M_1 — медианы этих треугольников, причем $BM = B_1M_1$ (рис. 102). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Рассмотрим треугольники ABM и $A_1B_1M_1$. По условию $BM = B_1M_1$. Поскольку по свойству медианы биссектрисы и высоты равнобедренного треугольника BM и B_1M_1 являются также биссектрисами равных углов ABC и $A_1B_1C_1$, то $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$; отрезки BM и B_1M_1 — высоты равнобедренных треугольников, поэтому $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1 = 90°$. Таким образом, $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ по второму признаку равенства треугольников, откуда $AB = A_1B_1$, тогда и $BC = B_1C_1$. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников.

12.3*. Дополнительные построения в геометрических задачах. Метод удвоения медианы[1]

Для решения некоторых геометрических задач необходимо проводить дополнительные построения, то есть достраивать отрезки и углы, не упомянутые в условии задачи. Это нужно для получения вспомогательных фигур, рассмотрение которых позволяет найти или доказать требуемое. Существуют определенные виды дополнительных построений, применяемые чаще других. Один из них мы рассмотрим в следующей задаче.

Задача

Если в треугольнике медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины, совпадают, то такой треугольник равнобедренный. Докажите.

Решение

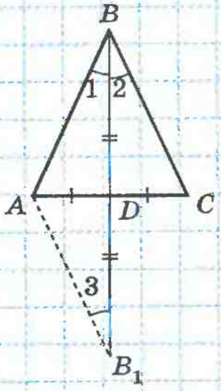


Рис. 103

Пусть BD — медиана и биссектриса данного треугольника ABC (рис. 103). Докажем, что треугольник ABC равнобедренный.

На луче BD от точки D отложим отрезок DB_1, равный BD (то есть удвоим медиану BD).

Рассмотрим треугольники BDC и B_1DA. У них $AD = CD$ по определению медианы, $BD = B_1D$ по построению, $\angle BDC = \angle B_1DA$ как вертикальные. Таким образом, $\triangle BDC = \triangle B_1DA$ по первому признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что $\angle 3 = \angle 2$ и $AB_1 = CB$. Рассмотрим теперь треугольник BAB_1. С учетом того, что BD — биссектриса угла ABC, имеем $\angle 1 = \angle 2$, тогда $\angle 1 = \angle 3$. По признаку равнобедренного треугольника, треугольник BAB_1 равнобедренный с основанием BB_1. Отсюда $AB_1 = AB$, а поскольку по доказанному $AB_1 = CB$, то $AB = CB$. Таким образом, треугольник ABC равнобедренный, что и требовалось доказать.

[1] Здесь и далее звездочкой обозначен теоретический материал, изучение которого не является обязательным.

Проанализируем решение этой задачи. Отображение всех данных условия на рисунке не выявило набора элементов, позволяющих сразу начать доказательство. Это обусловило необходимость дополнительного построения, благодаря которому образовался вспомогательный треугольник B_1DA. Доказав его равенство с треугольником BDC, мы получили дополнительные равенства отрезков и углов и решили задачу.

Дополнительное построение состояло в удвоении отрезка BD. Такое построение используется чаще всего именно для медиан треугольников, поэтому основанный на нем метод доказательства называют ***методом удвоения медианы.***

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

302. В треугольнике DEF проведен отрезок EA (рис. 104). Определите, является ли этот отрезок медианой, биссектрисой или высотой данного треугольника, если:

а) $DA = FA$;

б) $\angle DAE = \angle FAE$;

в) $\angle DEA = \angle FEA$;

г) $DE = FE$ и $DA = FA$.

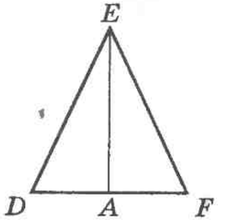


Рис. 104

303. Может ли лежать внутри треугольника только одна из трех его высот; только две из трех его высот?

304. Может ли медиана треугольника совпадать с его высотой, но не совпадать с биссектрисой, проведенной из той же вершины?

305. В треугольнике ABC отрезок AD — медиана, биссектриса и высота. Назовите равные стороны треугольника.

306. В треугольнике ABC $\angle A = \angle C$. Биссектриса какого из углов треугольника совпадает с медианой и высотой?

307. В равнобедренном, но не равностороннем треугольнике проведены все медианы, биссектрисы и высоты. Сколько разных отрезков проведено? Как изменится ответ, если данный треугольник равносторонний?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

308. Начертите неравнобедренный треугольник ABC.

а) Отметьте точку M — середину стороны BC. Проведите отрезок AM. Как он называется?

б) Проведите биссектрису угла B и отметьте точку L ее пересечения со стороной AC. Как называется отрезок BL?

в) Проведите из точки C перпендикуляр CH к прямой AB. Как называется построенный отрезок в треугольнике ABC?

→ **309.** Начертите равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и тупым углом B.

а) Проведите высоту AD. Лежит ли точка D на отрезке BC?

б) Проведите медиану BM. Равны ли углы ABM и CBM? Почему?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

310. В равнобедренном треугольнике ABC отрезок BD — медиана, проведенная к основанию. Найдите периметр треугольника ABC, если $P_{\triangle ABD}=12$ см, $BD=4$ см.

→ **311.** В равнобедренном треугольнике ABC отрезок BD — медиана, проведенная к основанию. Найдите периметр треугольника BDC, если $P_{\triangle ABC}=18$ см, $BD=5$ см.

312. В треугольнике ABC $\angle A=\angle C$, BD — биссектриса треугольника. Докажите, что $AD=CD$.

→ **313.** В треугольнике ABC отрезок CD является медианой и высотой. Докажите, что $\angle A=\angle B$.

314. На высоте MP равнобедренного треугольника KMN с основанием KN отмечена точка O (рис. 105). Докажите, что треугольник KON равнобедренный.

→ **315.** В равнобедренном треугольнике KON с основанием KN на продолжении биссектрисы OP отмечена точка M (см. рис. 105). Докажите, что треугольник KMN равнобедренный.

316. Докажите, что медианы равных треугольников, проведенные к соответственно равным сторонам, равны.

→ **317.** Докажите, что биссектрисы равных треугольников, проведенные из вершин соответственно равных углов, равны.

Уровень Б

318. В равнобедренном треугольнике ABC отрезок BD — биссектриса, проведенная к основанию. Найдите ее длину, если периметр треугольника ABC равен 28 см, а периметр треугольника ABD равен 20 см.

→ **319.** Докажите, что треугольник, в котором медиана делит периметр пополам, равнобедренный.

320. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны.

→ **321.** Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведенные из вершин при основании, равны.

322. Треугольники ABC и DBC равны (рис. 106). Докажите, что точка пересечения отрезков AD и BC делит отрезок AD пополам.

→ **323.** Перпендикулярные отрезки AD и BC пересекаются в точке O, причем $\angle ABC = \angle DBC$ (рис. 106). Докажите, что треугольник ACD равнобедренный.

324. Докажите равенство равнобедренных треугольников по основанию и проведенной к нему медиане.

→ **325.** Докажите равенство равнобедренных треугольников по углу, лежащему против основания, и высоте, проведенной из вершины этого угла.

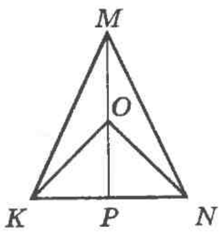


Рис. 105

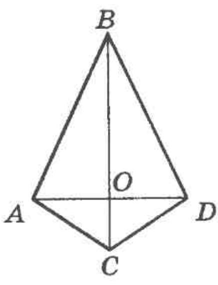


Рис. 106

Уровень В

326. Докажите равенство треугольников по стороне, прилежащему углу и биссектрисе, проведенной из вершины этого угла.

→ **327.** Докажите равенство треугольников по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и углу между ними.

328. Докажите равенство треугольников по медиане и двум углам, на которые она делит угол треугольника.

→ **329.** Докажите равенство треугольников по углу, биссектрисе, проведенной из вершины этого угла, и углу, который она образует с противолежащей стороной.

Повторение перед изучением § 13

Теоретический материал

- равенство треугольников
- равнобедренный треугольник

п. 7.2; § 11

Задачи

330. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Какое из четырех данных условий можно исключить, чтобы оставшихся условий было достаточно для доказательства равенства треугольников по первому признаку; по второму признаку?

331. Треугольники ABC и AB_1C имеют общую сторону AC, причем точки B и B_1 лежат по разные стороны от прямой AC, $\angle BAC = \angle B_1AC$. Назовите дополнительное условие, необходимое для доказательства равенства треугольников. Приведите все возможные ответы.

§ 13. Третий признак равенства треугольников и его применение

13.1. Третий признак равенства треугольников

Применим свойства равнобедренного треугольника для доказательства третьего признака равенства треугольников.

Теорема (третий признак равенства треугольников — по трем сторонам)

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

□ Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к треугольнику ABC так, чтобы вершина A_1 совместилась с вершиной A, вершина B_1 — с вершиной B, а точки C и C_1 лежали по разные стороны от прямой AB. Возможны три случая:

1) луч CC_1 проходит внутри угла ACB (рис. 107, *а*);
2) луч CC_1 проходит вне угла ACB (рис. 107, *б*);
3) луч CC_1 совпадает с одной из сторон угла ACB (рис. 107, *в*).

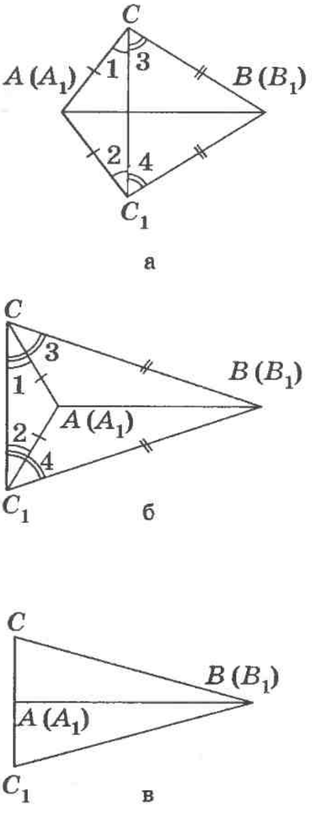


Рис. 107. Прикладывание треугольника $A_1B_1C_1$ к треугольнику ABC

Рассмотрим случаи 1 и 2. Поскольку по условию теоремы $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, то треугольники ACC_1 и BCC_1 равнобедренные с основанием CC_1. По свойству равнобедренного треугольника $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Тогда $\angle ACB = \angle AC_1B$ как суммы (или разности) равных углов. Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников. В случае 3 равенство углов C и C_1 следует из свойства равнобедренного треугольника с основанием CC_1, а дальнейшее доказательство проводится аналогично. Теорема доказана. ■

Обобщая признаки равенства треугольников, можно увидеть, что во всех трех признаках равенство треугольников следует из равенства трех пар соответствующих элементов. И это не случайно: как правило, треугольник можно задать (построить) именно по трем элементам, но не произвольным, а определяющим единственный треугольник. Например, треугольник однозначно определяется длинами трех его сторон (это следует из только что доказанного третьего признака). Однако, например, градусные меры трех углов не задают треугольник однозначно. Попробуйте самостоятельно построить соответствующий контрпример — два неравных треугольника с соответственно равными углами.

Задача

Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.

Решение

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — данные треугольники с медианами BM и B_1M_1 соответственно, причем $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BM = B_1M_1$ (рис. 108). Рассмотрим сначала треугольники ABM и $A_1B_1M_1$. В них $AB = A_1B_1$ и $BM = B_1M_1$ по условию, а $AM = A_1M_1$ как половины равных сторон AC и A_1C_1, то есть $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ по третьему признаку. Отсюда, в частности, следует, что $\angle A = \angle A_1$. Тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ по условию, $\angle A = \angle A_1$ по доказанному).

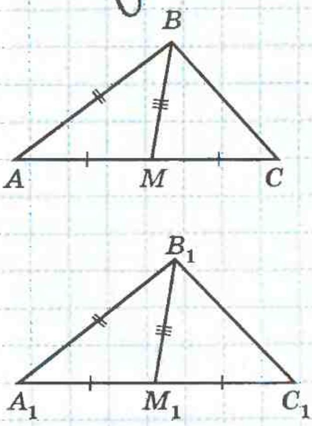


Рис. 108

13.2*. Свойства и признаки

Проанализируем признаки равенства треугольников. Все эти утверждения одинаковы по структуре: если треугольники имеют некоторую особенность, то они равны. Эта особенность (равенство трех пар соответствующих элементов) и составляет ***признак*** равенства треугольников. Нетрудно догадаться по аналогии, что, скажем, признак параллельности прямых может выглядеть так: «Если две прямые имеют определенную особенность, то они параллельны» (вспомните, рассматривались ли ранее похожие утверждения).

Во многих геометрических утверждениях мы получаем новые особенности фигур с помощью уже известных: например, если два угла вертикальные, то они равны. В этом случае равенство является ***свойством*** вертикальных углов. По аналогии, свойство смежных углов будет иметь следующий вид: «Если два угла смежные, то они имеют определенную особенность». Нетрудно догадаться, какое из изученных утверждений является свойством смежных углов.

Отметим еще один интересный факт. Если нам дан равнобедренный треугольник, то равенство двух его углов — свойство равнобедренного треугольника. Если же из условия равенства двух углов некоторого треугольника мы делаем заключение, что этот треугольник равнобедренный, то равенство этих углов — признак равнобедренного треугольника. Таким образом, одна и та же особенность фигуры в зависимости от условия задачи может рассматриваться либо как свойство, либо как признак.

Приведем примеры свойств и признаков, не связанные с геометрией. Наличие длинной шеи является свойством жирафа (если животное — жираф, то оно имеет длинную шею). Но длинную шею имеют также и страусы, то есть не любое животное с длинной шеей — жираф. Таким образом, наличие длинной шеи не является признаком жирафа. Другой пример: повышение температуры — признак болезни (ведь если у человека высокая температура, то он болен), но повышение температуры не свойство болезни (ведь многие болезни не сопровождаются повышением температуры). И наконец, пример из арифметики: последняя цифра 0 — и свойство, и признак чисел, которые делятся на 10.

Попробуйте привести собственные примеры свойств и признаков, изучаемых в школе.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

332. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$. Какое равенство необходимо добавить к условию, чтобы равенство данных треугольников можно было доказать по третьему признаку?

333. Три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника. Равны ли углы между соответственно равными сторонами этих треугольников? Почему?

334. Верно ли, что два равносторонних треугольника равны, если они имеют одинаковые периметры?

335. Верно ли, что два произвольных треугольника равны, если они имеют одинаковые периметры? Является ли верным обратное утверждение?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

336. Начертите равнобедренные треугольники ABC и ADC с общим основанием AC.

а) Соедините точки B и D. Выделите цветом равные треугольники, равенство которых можно доказать по третьему признаку.

б) Назовите углы, биссектрисы которых лежат на прямой BD.

→ **337.** Начертите равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

а) Проведите медианы BM и B_1M_1.

б) Выделите цветом пары равных треугольников, образовавшихся на рисунке. Можно ли доказать их равенство по первому признаку; по второму признаку; по третьему признаку?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

338. На рисунке 109 $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите равенство треугольников ABD и CDB.

→ **339.** На рисунке 110 $AB = CB$, $AD = CD$. Докажите равенство треугольников ABD и CDB.

340. Если основание и боковая сторона одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и боковой стороне другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны. Докажите.

341. Если две стороны и периметр одного треугольника соответственно равны двум сторонам и периметру другого треугольника, то такие треугольники равны. Докажите.

342. На рисунке 111 $\triangle ABC = \triangle CDA$. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CDB$.

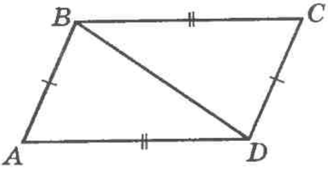


Рис. 109

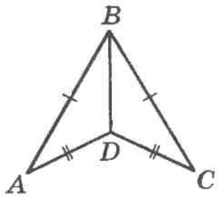


Рис. 110

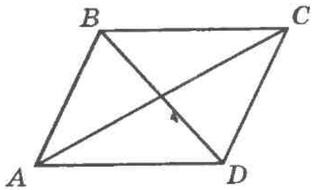


Рис. 111

Уровень Б

343. Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC и лежат по одну сторону от прямой AC. Докажите, что $\angle ADB = \angle CDB$.

344. На рисунке 112 $AB = CD$, $AC = BD$. Докажите равенство треугольников ABD и DCA.

345. На рисунке 113 $AB = CD$, $BF = CE$, $AE = FD$. Докажите, что треугольник EOF равнобедренный.

346. На рисунке 112 $\triangle AOB = \triangle DOC$. Докажите равенство треугольников ABC и DCB. С помощью каких признаков равенства треугольников его можно обосновать?

347. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Докажите равенство треугольников ABC и BAD.

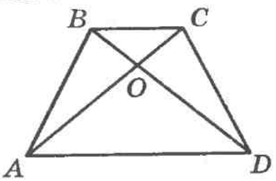


Рис. 112

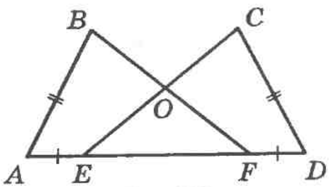


Рис. 113

Уровень В

348. Точки A, B, C и D лежат на одной прямой, причем $AE_1 = AE_2$, $BE_1 = BE_2$ (рис. 114). Докажите, что треугольники CDE_1 и CDE_2 равны.

349. Точки A, B, C и D лежат на одной прямой, причем $AE_1 = AE_2$, $CE_1 = CE_2$ (см. рис. 114). Докажите, что треугольники BDE_1 и BDE_2 равны.

350. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведенным из одной вершины.

351. Докажите равенство равнобедренных треугольников по боковой стороне и проведенной к ней медиане.

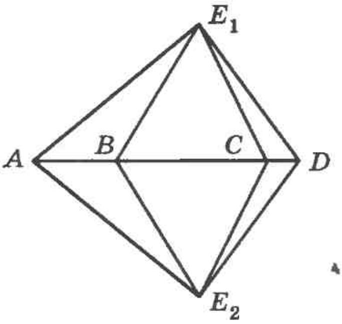


Рис. 114

Задачи для подготовки к контрольной работе № 2

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 105 см, а боковая сторона относится к основанию как 7 : 3. Найдите стороны этого треугольника.

2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, причем $AO = DO$, $CO = BO$ (рис. 115).

а) Докажите равенство треугольников AOC и DOB.

б) Найдите периметр треугольника AOC, если $AC = 4$ см, $CD = 8$ см.

3. Из концов отрезка AB, пересекающего прямую a в точке O, проведены к этой прямой перпендикуляры AC и BD, причем $CO = DO$ (рис. 116). Докажите, что точки A и B находятся на одинаковом расстоянии от прямой a.

4. Треугольник AOB равнобедренный с основанием AB, $AC = BD$ (рис. 117). Докажите, что треугольник COD также равнобедренный.

5. Докажите равенство равнобедренных треугольников по основанию и периметру.

6. В треугольнике ABC высота BH делит сторону AC пополам. Биссектриса AD треугольника равна 15 см. Найдите длину биссектрисы CE этого треугольника.

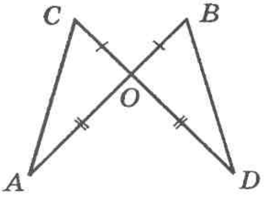


Рис. 115

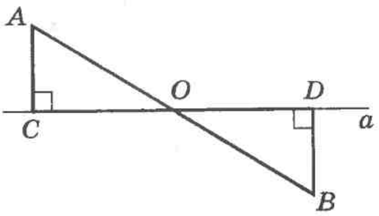


Рис. 116

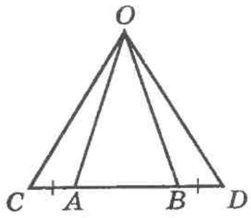


Рис. 117

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 14

Теоретический материал

- теорема о двух прямых, перпендикулярных третьей
- параллельные прямые

п. 6.3; § 4

Задачи

352. Определите, какие из приведенных утверждений верны:

а) две прямые, перпендикулярные третьей, перпендикулярны;

б) две прямые, параллельные третьей, параллельны;

в) через любую точку плоскости можно провести прямую, параллельную данной;

г) через любую точку плоскости можно провести не больше одной прямой, параллельной данной.

353. Через точку C, не принадлежащую ни одной из прямых a и b, проведена прямая c. Определите взаимное расположение прямых b и c, если:

а) $a \parallel b$, $c \parallel a$;

б) $a \perp b$, $c \perp a$.

Изменятся ли ответы, если точка C лежит на прямой b?

§ 14. Признаки параллельности прямых

14.1. Углы, образованные при пересечении двух прямых третьей

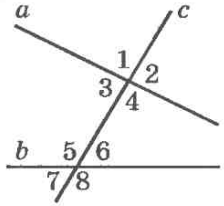


Рис. 118. Прямая c пересекает прямые a и b

Пусть прямая c пересекает каждую из двух прямых a и b (рис. 118). В таком случае говорят, что прямая c является секущей прямых a и b. При таком пересечении двух прямых третьей образуются пары неразвернутых углов, имеющих специальные названия:

- **внутренние накрест лежащие углы** лежат между прямыми a и b по разные стороны от секущей: 3 и 6, 4 и 5;
- **внутренние односторонние углы** лежат между прямыми a и b по одну сторону от секущей: 3 и 5, 4 и 6;
- **соответственные углы** лежат по одну сторону от секущей, причем сторона одного из них является частью стороны другого: 1 и 5, 3 и 7, 2 и 6, 4 и 8.

14.2. Признаки параллельности прямых

Вы уже изучили две теоремы, которые утверждают, что две прямые параллельны:

1) если две прямые параллельны третьей, то они параллельны;

2) если две прямые перпендикулярны третьей, то они параллельны.

Докажем еще несколько признаков параллельности прямых.

Теорема (признак параллельности двух прямых, которые пересекаются секущей)

Если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Доказательство

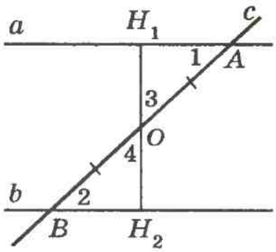


Рис. 119. $\angle 1 = \angle 2$, тогда $a \parallel b$

□ Пусть прямая c пересекает прямые a и b в точках A и B соответственно, причем $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 119). Докажем, что $a \parallel b$.

Если углы 1 и 2 прямые, то $a \perp c$ и $b \perp c$. Тогда $a \parallel b$ по теореме о двух прямых, перпендикулярных третьей.

Рассмотрим случай, когда углы 1 и 2 не прямые. Проведем из точки O — середины отрезка AB — перпендикуляр OH_1 к прямой a. Пусть H_2 — точка пересечения прямых OH_1 и b.

Рассмотрим треугольники OAH_1 и OBH_2. У них $\angle 1 = \angle 2$ по условию, $\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные и $AO = BO$ по построению. Итак, $\triangle OAH_1 = \triangle OBH_2$ по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle OH_1A = \angle OH_2B = 90°$, то есть прямая H_1H_2 перпендикулярна прямым a и b. Тогда $a \parallel b$ по теореме о двух прямых, перпендикулярных третьей. Теорема доказана. ■

Для доказательства параллельности прямых можно использовать не только внутренние накрест лежащие углы, но и другие пары образовавшихся углов.

Следствие 1

Если при пересечении двух прямых секущей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

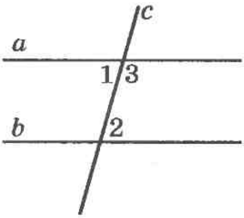


Рис. 120. $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, тогда $a \parallel b$

Действительно, если $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ (рис. 120) и по теореме о смежных углах $\angle 1 + \angle 3 = 180°$, то $\angle 1 = \angle 2 = 180° - \angle 3$. Тогда по доказанной теореме $a \parallel b$.

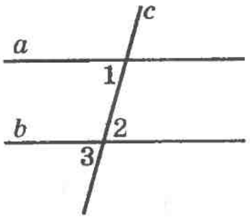


Рис. 121. $\angle 1 = \angle 3$, тогда $a \parallel b$

Следствие 2

Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Действительно, если $\angle 1 = \angle 3$ (рис. 121), а $\angle 2 = \angle 3$ как вертикальные, то $\angle 1 = \angle 2$. Тогда по доказанной теореме $a \parallel b$.

Следствия 1 и 2 можно объединить с доказанной теоремой в одно утверждение, выражающее признаки параллельности прямых.

Если при пересечении двух прямых секущей выполняется хотя бы одно из условий:

1) ***внутренние накрест лежащие углы равны;***
2) ***сумма внутренних односторонних углов равна*** $180°$***;***
3) ***соответственные углы равны,***

то данные прямые параллельны.

Если выполняется одно из трех приведенных условий, то выполняются и два других (докажите это самостоятельно).

Задача

На рисунке 122 $AB = BC$, AC — биссектриса угла BAD. Докажите, что $BC \parallel AD$.

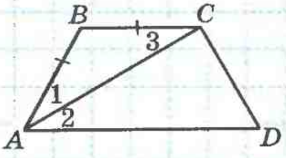


Рис. 122

Решение

По условию задачи треугольник ABC равнобедренный с основанием AC. По свойству углов равнобедренного треугольника $\angle 1 = \angle 3$. Вместе с тем $\angle 1 = \angle 2$, так как AC — биссектриса угла BAD. Отсюда, $\angle 2 = \angle 3$. Углы 2 и 3 внутренние накрест лежащие при прямых AD и BC и секущей AC. Поскольку эти углы равны, то по признаку параллельности прямых $AD \parallel BC$, что и требовалось доказать.

14.3. О существовании прямой, параллельной данной

Доказанные признаки параллельности прямых позволяют подробнее проанализировать формулировку аксиомы параллельных прямых (аксиомы Евклида, п. 4.1). В этой аксиоме утверждалась единственность прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой, но не утверждалось ее существование.

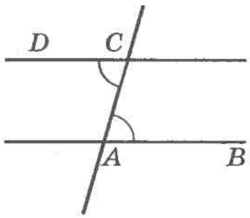


Рис. 123. Прямая CD проходит через точку C и параллельна прямой AB

На основании признака параллельности прямых существование такой прямой можно доказать.

Пусть даны прямая AB и точка C, не принадлежащая этой прямой (рис. 123). Проведем прямую AC. От луча CA отложим угол ACD, равный углу CAB, так, как показано на рисунке. Тогда углы ACD и CAB — внутренние накрест лежащие при прямых AB и CD и секущей AC. По доказанному признаку $AB \parallel CD$, то есть существует прямая, проходящая через точку C параллельно прямой AB.

Таким образом, мы можем объединить доказанный факт с аксиомой параллельных прямых в следующей теореме.

Теорема (о существовании и единственности прямой, параллельной данной)

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну.

Вообще, аксиома Евклида и связанные с ней утверждения были предметом особого внимания ученых на протяжении многих веков. В начале позапрошлого столетия выдающийся русский математик Николай Иванович Лобачевский создал неевклидову геометрию, в которой аксиома параллельных прямых не выполняется.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

354. На рисунке 124 укажите угол, который вместе с углом 4 составляет:

а) пару внутренних накрест лежащих углов;

б) пару внутренних односторонних углов;

в) пару соответственных углов.

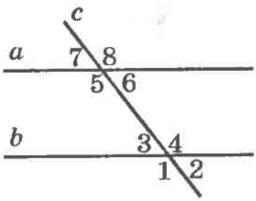


Рис. 124

355. По рисунку 124 определите, будут ли прямые a и b параллельными, если:

а) $\angle 3 = \angle 6$; б) $\angle 5 = \angle 8$;
в) $\angle 1 = \angle 7$; г) $\angle 2 = \angle 6$;
д) $\angle 3 + \angle 5 = 180°$; е) $\angle 2 + \angle 4 = 180°$.

356. По рисунку 124 определите, при каких значениях n будет верным утверждение:

а) если $\angle 6 = \angle n$, то $a \parallel b$;

б) если $\angle 6 + \angle n = 180°$, то $a \parallel b$.

357. Определите, какие из следующих утверждений верны:

а) если при пересечении двух прямых секущей образуются восемь равных углов, то прямые параллельны;

б) если при пересечении двух прямых секущей образуются четыре равных угла, то прямые параллельны;

в) сумма двух углов треугольника может быть равна $180°$.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

358. Начертите прямые a и b и проведите секущую c.

а) Выделите на рисунке одну пару внутренних накрест лежащих углов красным цветом, а другую пару — синим цветом.

б) Выделите углы, соответственные с «красными» углами, — красным цветом, а углы, соответственные с «синими» углами, — синим цветом.

359. Начертите угол ABC, равный $60°$.

а) От луча AB отложите угол DAB, равный $120°$, так, чтобы точки C и D лежали по одну сторону от прямой AB.

б) Параллельны ли прямые AD и BC? Почему?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

360. Дан треугольник ABC. Прямая l пересекает сторону AB в точке D, а сторону BC — в точке E. Назовите внутренние накрест лежащие, внутренние односторонние и соответственные углы при прямых AB и BC и секущей DE.

361. По данным рисунка 125, *а—в* докажите, что $a \parallel b$.

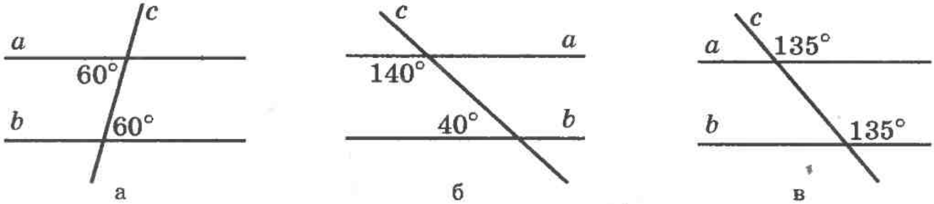


Рис. 125

→ **362.** По рисунку 124 определите, параллельны ли прямые a и b, если:

а) $\angle 4 = 125°$, $\angle 5 = 125°$;

б) $\angle 5 = 115°$, $\angle 3 = 65°$;

в) $\angle 3 = 65°$, $\angle 7 = 65°$.

363. На рисунке 126 $\triangle ABD = \triangle CDB$. Докажите, что $AD \parallel BC$.

→ **364.** На рисунке 127 $\triangle AOB = \triangle COD$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

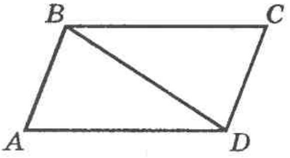


Рис. 126

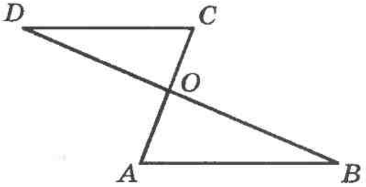


Рис. 127

Уровень Б

365. Прямые a и b пересекают прямую c под равными углами. Обязательно ли $a \parallel b$?

366. По данным рисунка 128, *а—в* докажите, что $a \parallel b$.

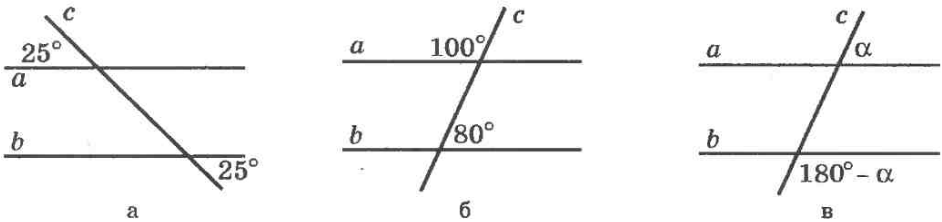


Рис. 128

367. По рисунку 124 определите, параллельны ли прямые a и b, если:

а) $\angle 5 = 135°$, а $\angle 4$ втрое больше, чем $\angle 3$;

б) $\angle 2 = 72°$, а $\angle 6 : \angle 8 = 2:3$.

368. Отрезки AB и CD пересекаются в точке, которая является их общей серединой. Докажите, что $AC \parallel BD$.

369. На рисунке 129 $AB = BC$, $CD = DE$. Докажите, что прямые AB и DE параллельны.

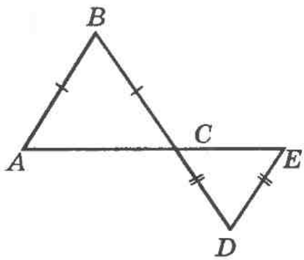


Рис. 129

370. Известно, что $\triangle ABC = \triangle CDA$. Назовите параллельные стороны этих треугольников и докажите их параллельность.

371. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На стороне BC отмечена точка K так, что $BK = KL$. Докажите параллельность прямых AB и KL.

372. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle C = 80°$. Прямая l пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно, причем $AD = DE$ и $\angle EAC = 40°$. Докажите, что $l \parallel AC$.

Уровень B

373. На рисунке 130 $AD = CF$, $BC = DE$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $AB \parallel EF$.

→ **374.** На рисунке 131 $AB = DE$, $BC = EF$, $AD = CF$. Докажите, что $BC \parallel EF$.

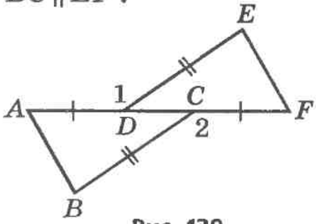


Рис. 130

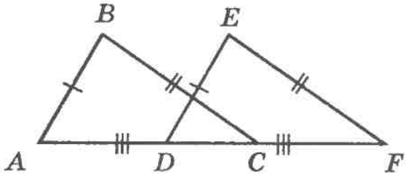


Рис. 131

375. В треугольнике ABC $\angle A = 20°$, $\angle B = 80°$. Из точки B проведен луч BD так, что BC — биссектриса угла ABD. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

→ **376.** В треугольнике ABC $\angle A = 70°$, $\angle B = 40°$. На луче CB отмечена точка D, не принадлежащая отрезку BC. Луч BE — биссектриса угла ABD. Докажите, что прямые AC и BE параллельны.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ §15

Теоретический материал:

- параллельные прямые
- определение перпендикуляра; расстояние от точки до прямой
- смежные углы
- вертикальные углы

§ 4:, п. 9.2

§ 5; 6

Задачи

377. В треугольнике построены все медианы, все биссектрисы и все высоты. Какое наименьшее количество отрезков построено внутри треугольника? Какое наибольшее количество отрезков построено вне треугольника?

378. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC и пересекающая сторону BC, пересекает также и сторону AC. Докажите.

§ 15. Свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей

15.1. Теорема о свойствах углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей

В предыдущем параграфе мы установили соотношения углов между двумя прямыми и секущей, гарантирующие параллельность данных прямых. Но обязательно ли эти соотношения сохраняются для любой пары параллельных прямых, пересеченных секущей? Докажем утверждение, обратное признаку параллельности прямых.

Теорема (свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей)

Если секущая пересекает две параллельные прямые, то:
1) внутренние накрест лежащие углы равны;
2) сумма внутренних односторонних углов равна 180°;
3) соответственные углы равны.

Доказательство

☐ Докажем первое из утверждений теоремы.

Пусть секущая c пересекает параллельные прямые a и b в точках A и B соответственно (рис. 132). Докажем методом от противного, что внутренние накрест лежащие углы при этих прямых равны.

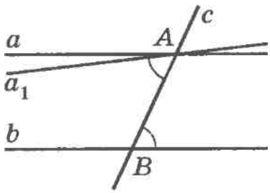


Рис. 132. К предположению о том, что внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых a и b не равны

Пусть эти углы не равны. Проведем через точку A прямую a_1 так, чтобы внутренние накрест лежащие углы при прямых a_1 и b и секущей c были равны. Тогда по признаку параллельности прямых имеем $a_1 \parallel b$. Но $a \parallel b$ по условию теоремы, а по аксиоме параллельных прямых через точку A можно провести лишь одну прямую, параллельную b. Таким образом, мы получили противоречие. Следовательно, наше предположение ошибочно, то есть внутренние накрест лежащие углы равны.

Из доказанного утверждения нетрудно получить другие два утверждения теоремы (сделайте это самостоятельно). ■

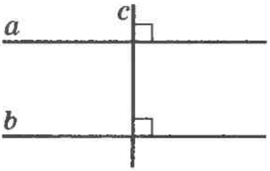


Рис. 133. $a \parallel b$, $c \perp a$, тогда $c \perp b$

Следствие

Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой.

Это следствие обоснуйте самостоятельно по рисунку 133.

Задача

Сумма двух внутренних углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 210°. Найдите все образовавшиеся углы.

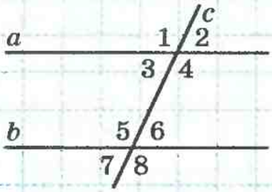


Рис. 134

Решение

Пусть $a \parallel b$, c — секущая. Внутренние углы, о которых говорится в условии, могут быть односторонними, накрест лежащими или смежными. Поскольку при пересечении параллельных прямых секущей сумма внутренних односторонних углов равна 180° и сумма смежных углов также равна 180°, то данные углы — внутренние накрест лежащие. Пусть $\angle 4 + \angle 5 = 210°$ (рис. 134). Поскольку $a \parallel b$, то $\angle 4 = \angle 5 = 210°:2 = 105°$. Тогда:

$\angle 1 = 105°$, так как углы 1 и 5 соответственные;

$\angle 3 = 180° - 105° = 75°$, так как углы 3 и 5 внутренние односторонние;

$\angle 2 = 75°$, так как углы 2 и 3 вертикальные;

$\angle 6 = 75°$, так как углы 5 и 6 смежные;

$\angle 7 = 75°$, так как углы 7 и 3 соответственные;

$\angle 8 = 105°$, так как углы 8 и 4 соответственные.

15.2. Расстояние между параллельными прямыми

Как вы уже знаете, расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую. Можно предположить, что расстояние между параллельными прямыми тоже будет определяться с помощью перпендикуляра. Но прежде чем сформулировать определение, докажем еще одно свойство параллельных прямых.

Теорема (о расстояниях от точек прямой до параллельной прямой)

Расстояния от любых двух точек прямой до параллельной ей прямой равны

Доказательство

☐ Пусть a и b — данные параллельные прямые, A_1B_1 и A_2B_2 — расстояния от точек A_1 и A_2 прямой a до прямой b (рис. 135). Докажем, что $A_1B_1 = A_2B_2$.

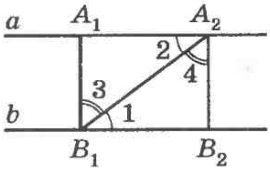


Рис. 135. $a \parallel b$, точки A_1 и A_2 равноудалены от прямой b

Поскольку по определению расстояния от точки до прямой $A_1B_1 \perp b$ и $A_2B_2 \perp b$, то по теореме о двух прямых, перпендикулярных третьей, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Рассмотрим треугольники $A_1B_1A_2$ и $B_2A_2B_1$. У них сторона B_1A_2 общая, $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых a и b и секущей B_1A_2, $\angle 3 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых A_1B_1 и A_2B_2 и секущей B_1A_2. Таким образом, $\triangle A_1B_1A_2 = \triangle B_2A_2B_1$ по второму признаку равенства треугольников, откуда $A_1B_1 = A_2B_2$. Теорема доказана. ■

Из только что доказанной теоремы следует, что расстояние от точки прямой a до прямой b не зависит от выбора точки, то есть одинаково для всех точек прямой a. Это позволяет сформулировать следующее определение.

Определение

Расстоянием между параллельными прямыми называется расстояние от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.

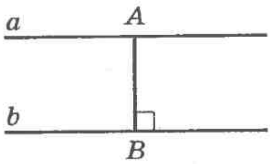


Рис. 136. Перпендикуляр AB — расстояние между прямыми a и b

Таким образом, расстояние между параллельными прямыми — длина перпендикуляра, опущенного из произвольной точки одной прямой на другую прямую.

На рисунке 136 $a \parallel b$, $AB \perp b$, то есть AB — расстояние между прямыми a и b. Заметим, что по следствию теоремы о свойствах углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, $AB \perp a$, то есть AB — **общий перпендикуляр** к прямым a и b.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

379. Обязательно ли среди углов, которые образуются при пересечении двух параллельных прямых секущей, найдутся:

а) ровно четыре острых угла;
б) не больше четырех острых углов;
в) не меньше четырех тупых углов;
г) не меньше четырех равных углов?

380. При пересечении двух параллельных прямых секущей образовались два угла с градусными мерами $80°$. Могут ли эти углы быть:

а) внутренними накрест лежащими;
б) внутренними односторонними;
в) соответственными?

381. Один из углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен $120°$. Может ли один из остальных семи углов равняться $50°$? Почему?

382. Внутренние односторонние углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, равны. Под каким углом секущая пересекает данные прямые?

383. Отрезок AB — расстояние между параллельными прямыми a и b. Под каким углом секущая AB пересекает прямые a и b?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

384. Начертите параллельные прямые a и b и секущую c, не перпендикулярную им.

а) Закрасьте восемь образовавшихся углов красным или синим цветом так, чтобы сумма любых двух углов разных цветов была равна $180°$.

б) Из точки пересечения прямых a и c проведите отрезок, являющийся расстоянием между параллельными прямыми a и b. Под каким углом этот отрезок пересекает прямую b?

→ **385.** Начертите треугольник ABC.

а) Проведите прямую, параллельную стороне AC и пересекающую стороны AB и BC в точках D и E соответственно.

б) Отметьте красным цветом угол треугольника ABC, равный углу BDE.

в) Отметьте синим цветом угол треугольника ABC, сумма которого с углом DEC равна $180°$.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень A

386. По данным рисунка 137, *а*, *б* найдите углы 1 и 2, если $a \parallel b$.

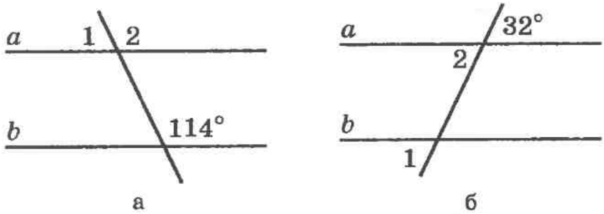


Рис. 137

387. Один из углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен $18°$. Найдите остальные углы.

388. Угол ABC равен $62°$, а угол BCD равен $118°$. Могут ли прямые AB и CD:

а) быть параллельными; б) пересекаться?

Ответ обоснуйте.

389. Угол ABC равен $29°$, а угол BAD равен $141°$. Могут ли прямые AD и BC быть параллельными? Ответ обоснуйте.

390. На плоскости проведены прямые a, b и c, причем $a \parallel b$, $a \perp c$. Определите взаимное размещение прямых b и c.

391. Прямые a и b параллельны. Точки A_1 и A_2 лежат на прямой a, отрезки A_1B_1 и A_2B_2 — расстояния между прямыми a и b. Назовите отрезки, которые являются расстояниями между прямыми A_1B_1 и A_2B_2. Ответ обоснуйте.

Уровень Б

392. По данным рисунка 138, *а*, *б* найдите угол x.

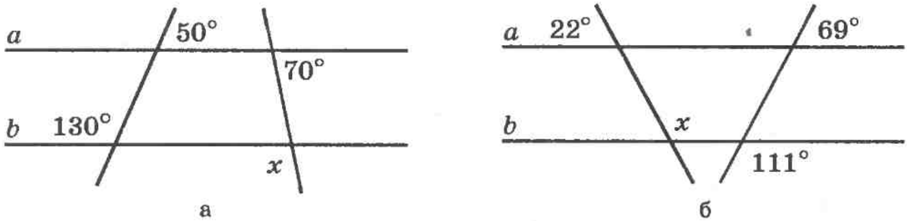


Рис. 138

393. Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если:

а) один из внутренних односторонних углов на $30°$ больше другого;

б) сумма двух соответственных углов равна $56°$.

394. По данным рисунка 137, *а* определите, параллельны ли прямые a и b, если $\angle 2 - \angle 1 = 54°$.

395. Угол ABC равен $72°$. Из точек A и C внутри угла проведены лучи, параллельные сторонам угла и пересекающиеся в точке D. Найдите угол ADC.

396. Дан угол ABC (рис. 139). Через точку A проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая биссектрису данного угла в точке D. Докажите, что треугольник ABD равнобедренный.

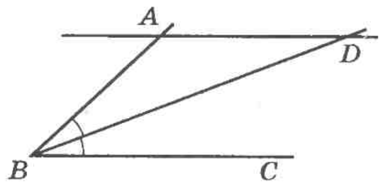


Рис. 139

397. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Прямая, параллельная AC, пересекает сторону AB в точке A_1, а сторону BC — в точке C_1. Докажите, что треугольник A_1BC_1 равнобедренный.

398. Отрезок AB — расстояние между параллельными прямыми a и b. Точка M — середина отрезка AB. Докажите, что любой отрезок с концами на данных прямых, проходящий через точку M, делится ею пополам.

399. Через вершину B равнобедренного треугольника ABC проведена прямая l, параллельная основанию AC. Отрезок BK — медиана треугольника ABC. Докажите, что BK — расстояние между прямыми l и AC.

Уровень В

400. По данным рисунка 140, *а*, *б* определите, параллельны ли прямые AB и CD.

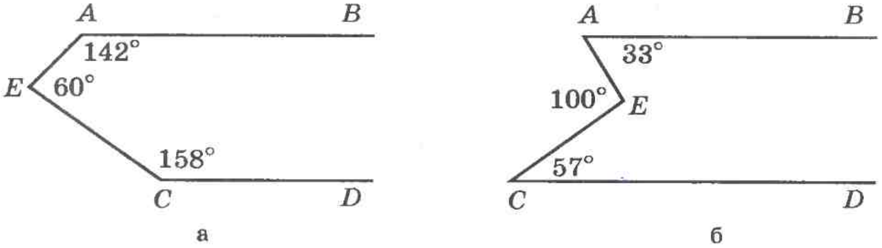


Рис. 140

401. Найдите все углы, которые образовались при пересечении двух параллельных прямых секущей, если:

а) пять из них — не острые;

б) сумма двух внутренних накрест лежащих углов в пять раз меньше суммы двух других внутренних углов;

в) сумма шести из них равна $620°$.

402. Биссектрисы внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, взаимно перпендикулярны. Докажите.

→ **403.** Биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, параллельны. Докажите.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ §16

Теоретический материал:

- смежные углы
- равнобедренный и равносторонний треугольники

§5; 11

Задачи

404. Прямая l проходит через вершину B остроугольного треугольника ABC параллельно стороне AC. Докажите, что прямая l образует с прямыми AB и CB углы, равные двум углам треугольника.

405. В треугольнике ABC $AB+BC=BC+AC=AB+AC$. Докажите, что $\angle A=\angle B=\angle C$.

§ 16. Сумма углов треугольника

16.1. Теорема о сумме углов треугольника и ее следствия

Теорема (о сумме углов треугольника)

Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство

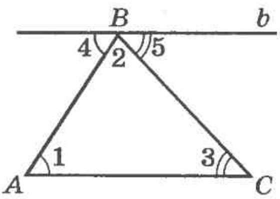


Рис. 141. К доказательству теоремы о сумме углов треугольника

□ Пусть ABC — произвольный треугольник. Докажем, что $\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

Проведем через вершину B прямую b, параллельную AC (рис. 141). Тогда углы 1 и 4 равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых b и AC и секущей AB. Аналогично $\angle 3=\angle 5$ как внутренние накрест лежащие при тех же параллельных прямых, но секущей BC. Имеем: $\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 4+\angle 2+\angle 5=180°$. Теорема доказана. ■

Следствие 1

В любом треугольнике по крайней мере два угла острые.

Действительно, если треугольник имел бы два неострых угла (тупых или прямых), то сумма всех углов превышала бы $180°$, что противоречит доказанной теореме.

Следствие 2

Каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

Поскольку все углы равностороннего треугольника равны, то каждый из них равен $180°:3=60°$.

Рассмотрим еще одно важное утверждение, которое следует из доказанной теоремы.

Задача

Если в равнобедренном треугольнике один из углов равен 60°, то этот треугольник равносторонний. Докажите.

Решение

Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AC. Рассмотрим два случая.

1) Пусть угол 60° — один из углов при основании, например $\angle A = 60°$ (рис. 142, *а*). Тогда $\angle C = \angle A = 60°$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Таким образом, $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180° - 60° - 60° = 60°$. Значит, $\angle A = \angle B = \angle C$, то есть ABC — равносторонний треугольник.

2) Пусть угол 60° — угол, противолежащий основанию, то есть $\angle B = 60°$ (рис. 142, *б*). Тогда $\angle A = \angle C$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Каждый из этих углов равен $(180° - 60°) : 2 = 60°$. Снова имеем, что все углы треугольника ABC равны, значит, этот треугольник равносторонний.

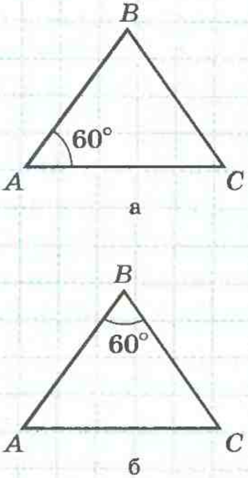


Рис. 142

Только что решенная задача является **опорной**, то есть на нее можно ссылаться при решении других задач, кратко пересказывая ее содержание. В дальнейшем условия таких задач в учебнике будут выделены полужирным шрифтом и словом «опорная».

16.2. Виды треугольников по величине углов. Классификация

Как уже было доказано, любой треугольник имеет не менее двух острых углов. Это означает, что возможны три случая:

1) все углы треугольника острые — **остроугольный** треугольник;
2) два угла треугольника острые, а третий угол прямой — **прямоугольный** треугольник;
3) два угла треугольника острые, а третий угол тупой — **тупоугольный** треугольник.

Исходя из этого, все треугольники можно разделить по величине углов на три вида: остроугольные, прямоугольные и тупоугольные (рис. 143).

Обратим внимание на то, что величина углов — это признак, по которому любой данный треугольник можно отнести лишь к одному из трех названных видов. Такое деление объектов на отдельные виды по определенному признаку называют ***классификацией***. Признак, по которому осуществляется классификация, является ее ***основанием***. Так, треугольники можно разделить и по другому основанию — длине сторон — на разносторонние (то есть не имеющие равных сторон), равнобедренные, но не равносторонние (у которых только две стороны равны) и равносторонние треугольники.

Классификация считается правильной, если любой из объектов можно отнести лишь к одному из названных классов. Так, неправильно будет разделять прямые на плоскости по взаимному расположению на параллельные, пересекающиеся и перпендикулярные (ведь перпендикулярность — частный случай пересечения). Ошибочно подразделять по величине неразвернутые углы на острые и тупые, поскольку есть еще и прямые углы.

Очень важно проводить классификацию лишь по одному основанию. Например, неверным было бы разделять треугольники на остроугольные,

Рис. 143. Виды треугольников по величине углов

прямоугольные, тупоугольные и равнобедренные, ведь равнобедренным может быть и остроугольный, и прямоугольный, и тупоугольный треугольник. Допустить такую ошибку — то же самое, что разделить всех людей на мужчин, женщин и учителей.

Примеры классификаций нетрудно найти и в других науках. Так, филологи делят члены предложения на главные (подлежащее и сказуемое) и второстепенные (дополнение, определение и обстоятельство). Попробуйте найти примеры классификации в физике, географии, биологии.

16.3. Внешний угол треугольника

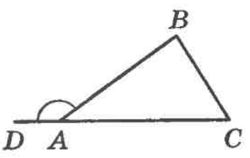


Рис. 144. Внешний угол треугольника ABC при вершине A

Определение

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с внутренним углом данного треугольника.

На рисунке 144 угол DAB — внешний угол треугольника ABC при вершине A.

Очевидно, что при любой вершине треугольника можно построить два внешних угла, которые по отношению друг к другу являются вертикальными (рис. 145).

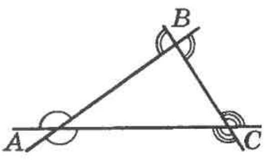


Рис. 145. Внешние углы треугольника ABC

Теорема (о внешнем угле треугольника)

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Доказательство

□ Пусть углы 1, 2 и 3 — внутренние углы треугольника ABC, а $\angle 4$ — внешний угол, смежный с углом 1 (рис. 146). По теореме о сумме углов треугольника $\angle 2 + \angle 3 = 180° - \angle 1$. С другой стороны, по теореме о смежных углах $\angle 4 = 180° - \angle 1$. Отсюда, $\angle 4 = \angle 2 + \angle 3$, что и требовалось доказать. ■

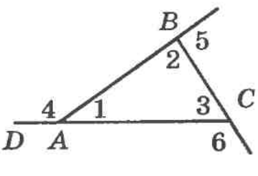


Рис. 146. Внешний угол 4 равен сумме углов 2 и 3

Следствие

Сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

Действительно, по доказанной теореме (рис. 146) $\angle 6 = \angle 1 + \angle 2$, $\angle 4 = \angle 2 + \angle 3$ и $\angle 5 = \angle 1 + \angle 3$. Тогда для их суммы имеем: $\angle 6 + \angle 4 + \angle 5 = (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 2 + \angle 3) + (\angle 1 + \angle 3) = 2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 2 \cdot 180° = 360°$.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

406. Может ли треугольник иметь три тупых угла; два тупых угла; не иметь ни одного тупого угла?

407. Может ли угол при основании равнобедренного треугольника быть тупым; прямым?

408. Может ли прямоугольный треугольник быть равнобедренным; равносторонним?

409. Могут ли быть равны тупоугольный и прямоугольный треугольники; тупоугольный и остроугольный треугольники?

410. Даны три внешних угла треугольника при разных вершинах. Сколько из них могут быть острыми?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

411. Начертите остроугольный треугольник ABC.

а) Измерьте углы треугольника и вычислите их сумму.

б) На луче AC отметьте точку D, не принадлежащую отрезку AC. Определите градусную меру угла BCD, используя теорему о внешнем угле треугольника.

в) Определите вид треугольника BCD по величине углов.

412. Начертите треугольник ABC с тупым углом A.

а) Проведите высоту BD и определите вид треугольника ABD по величине углов.

б) Измерьте угол BAD. Как связана его градусная мера с градусными мерами углов треугольника ABC?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

413. Найдите неизвестный угол треугольника, если два его угла равны:

а) $65°$ и $45°$; б) $120°$ и $18°$; в) $90°$ и $64°$.

414. Найдите неизвестные углы равнобедренного треугольника, если:

а) угол при его основании равен $40°$;

б) угол, противолежащий его основанию, равен $40°$.

415. Найдите неизвестные углы треугольника:

а) прямоугольного, с углом $28°$;

б) равнобедренного, с углом при основании $80°$.

416. Докажите методом от противного, что угол при основании равнобедренного треугольника не может быть тупым.

417. Докажите методом от противного, что треугольник не может иметь больше одного прямого угла.

418. Найдите внутренние углы треугольника, если внешние углы при двух его вершинах равны $135°$ и $110°$.

419. Один из внутренних углов треугольника равен $40°$, а один из внешних — $125°$. Найдите остальные внутренние и внешние углы.

Уровень Б

420. Найдите все углы треугольника, если:

а) один из них вдвое меньше второго и на $20°$ больше третьего;

б) их градусные меры относятся как $1 : 3 : 5$.

421. Один из углов равнобедренного треугольника равен $50°$. Найдите другие углы. Сколько решений имеет задача?

422. Найдите:

а) углы треугольника, если их градусные меры относятся как $2:7:9$;

б) углы равнобедренного треугольника, если один из них равен $100°$.

423. Может ли треугольник с углом $40°$ быть равным треугольнику с углом $140°$? Ответ обоснуйте.

424. Треугольник с углом $120°$ равен треугольнику с углом $30°$. Докажите, что данные треугольники равнобедренные.

425. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите углы данного треугольника, если $\angle ADC = 150°$.

426. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Найдите угол A, если $\angle C = 35°$, $\angle BDC = 105°$.

427. В треугольнике ABC биссектрисы, проведенные из вершин A и B, пересекаются в точке O. Найдите угол AOB, если $\angle A = 82°$, $\angle B = 38°$.

428. В равнобедренном треугольнике ABC биссектрисы, проведенные из вершин при основании AC, пересекаются в точке O. Найдите углы треугольника, если $\angle AOC = 140°$.

429. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен $60°$. Найдите внутренние углы треугольника.

430. Внешние углы треугольника относятся как $3:4:5$. Найдите внутренние углы треугольника.

431. Найдите внутренние углы треугольника, если сумма двух из них равна $150°$, а один из внешних углов равен $80°$.

Уровень В

432. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины угла при основании, равна основанию треугольника. Найдите его углы.

433. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины угла при основании, пересекает боковую сторону под углом, равным углу при основании. Найдите углы треугольника.

434. Биссектриса внешнего угла при основании равнобедренного треугольника пересекает продолжение боковой стороны. Длина отрезка биссектрисы от начала до точки пересечения равна основанию треугольника. Найдите внутренние углы треугольника.

435. Биссектриса внешнего угла при основании равнобедренного треугольника пересекает продолжение боковой стороны под углом, равным углу при основании треугольника. Найдите углы треугольника.

436. В треугольнике ABC биссектрисы, проведенные из вершин A и C, пересекаются в точке O. Найдите угол AOC, если $\angle B = \alpha$.

437. Биссектриса внешнего угла равнобедренного треугольника при вершине, противолежащей основанию, параллельна основанию треугольника. Докажите.

438. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению предыдущей задачи.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 17

Теоретический материал

- признаки равенства треугольников
- медиана, биссектриса и высота треугольника

§ 8, 10, 13

§ 12

Задачи

439. Известно, что $\triangle ABC = \triangle DBC$, причем точка C лежит на отрезке AD. Докажите, что равные треугольники прямоугольные.

440. Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC (точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC). Докажите, что $BD \perp AC$.

§ 17. Прямоугольные треугольники

17.1. Элементы прямоугольного треугольника

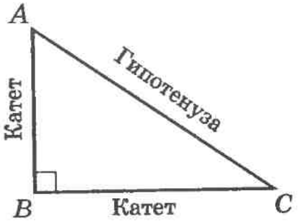


Рис. 147. Прямоугольный треугольник

Как известно, прямоугольный треугольник имеет один прямой и два острых угла. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется **гипотенузой**, две другие стороны — **катетами**. На рисунке 147 в треугольнике ABC $\angle B = 90°$, AC — гипотенуза, AB и BC — катеты.

Из теоремы о сумме углов треугольника следует: ***сумма острых углов прямоугольного треугольника равна*** $90°$. Имеет место и обратное утверждение — признак прямоугольного треугольника: ***если в треугольнике сумма двух углов равна*** $90°$, ***то этот треугольник прямоугольный.***

17.2. Признаки равенства прямоугольных треугольников

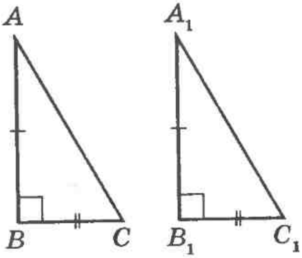


Рис. 148. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум катетам

Пользуясь признаками равенства треугольников и теоремой о сумме углов треугольника, можно сформулировать признаки равенства, характерные только для прямоугольных треугольников.

Приведем сначала два из них.

Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам (рис. 148)

Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

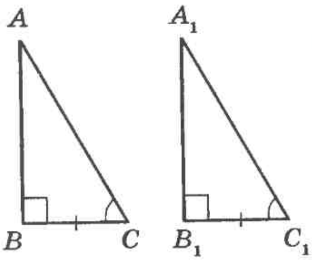


Рис. 149. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по катету и прилежащему острому углу

Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу (рис. 149)

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

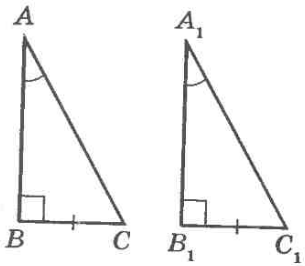


Рис. 150. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по катету и противолежащему углу

Данные признаки — частные случаи первого и второго признаков равенства треугольников.

Следующие два признака нетрудно получить из второго признака равенства треугольников, используя теорему о сумме углов треугольника.

Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу (рис. 150)

Если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

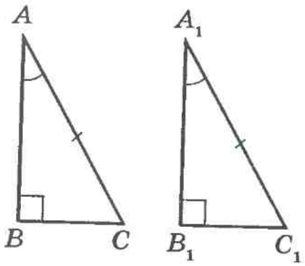


Рис. 151. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по гипотенузе и острому углу

Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу (рис. 151)

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Действительно, если данные треугольники имеют по равному острому углу α, то другие острые углы этих треугольников равны $90° - \alpha$, то есть также соответственно равны.

Еще один признак равенства прямоугольных треугольников докажем отдельно.

Теорема (признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету)

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

□ Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — данные прямоугольные треугольники, в которых $\angle B = \angle B_1 = 90°$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 152). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Гипотенуза — от греческого «гипотейнуса» — стягивающая. Название связано со способом построения прямоугольных треугольников натягиванием бечевки

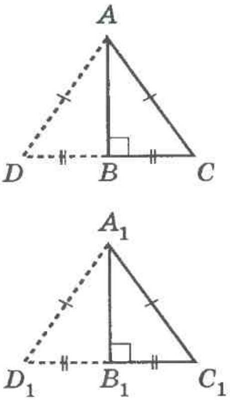


Рис. 152. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по гипотенузе и катету

На продолжениях сторон CB и C_1B_1 отложим отрезки BD и B_1D_1, равные катетам BC и B_1C_1 соответственно. Тогда $\triangle ABD = \triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1D_1 = \triangle A_1B_1C_1$ по двум катетам. Таким образом, $AD = AC = A_1C_1 = A_1D_1$. Это значит, что $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$ по трем сторонам. Отсюда $\angle C = \angle C_1$. И наконец, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по гипотенузе и острому углу. Теорема доказана. ■

Обратим внимание на дополнительное построение, состоящее в достраивании прямоугольного треугольника до равнобедренного.

Такой прием позволяет применять свойства равнобедренного треугольника при решении задач, в условиях которых о равнобедренном треугольнике речь не идет.

17.3*. Прямоугольный треугольник с углом 30°

Прямоугольный треугольник, в котором один из острых углов равен $30°$, имеет полезное свойство.

Опорная задача

В прямоугольном треугольнике катет, противолежащий углу 30°, равен половине гипотенузы. Докажите.

Решение

Пусть в треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$. Докажем, что $BC = 0{,}5\,AC$. Очевидно, что в треугольнике ABC $\angle C = 60°$. Отложим на продолжении стороны CB отрезок BD, равный BC (рис. 153). Прямоугольные треугольники ABC и ABD равны по двум катетам. Отсюда следует, что $\angle D = \angle C = 60°$ и $\angle DAC = 30° + 30° = 60°$. Таким образом, треугольник DAC равносторонний, а отрезок AB — его медиана, то есть $BC = 0{,}5\,DC = 0{,}5\,AC$, что и требовалось доказать.

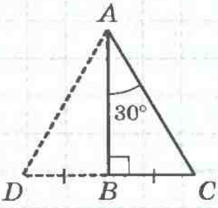


Рис. 153

Катет – от греческого «катетос» – отвес

Имеет место также обратное утверждение **(опорное):**
если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий данному катету, равен 30°.

Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно при помощи дополнительного построения, аналогичного только что описанному.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

441. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A + \angle B = \angle C$. Назовите гипотенузу треугольника.

442. В прямоугольном треугольнике DEF высота EA лежит внутри треугольника. Назовите катеты треугольника.

443. Прямоугольный треугольник с острым углом α равен прямоугольному треугольнику с острым углом $20°$. Каким может быть значение α?

444. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. По каким признакам можно доказать равенство этих треугольников, если:

а) угол A прямой;

б) угол B прямой?

445. Могут ли неравные прямоугольные треугольники иметь две пары соответственно равных катетов; равные гипотенузы?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

446. Начертите прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB.

а) Измерьте угол A и вычислите градусную меру угла B.

б) Отметьте на рисунке наименьший внешний угол треугольника. Какова его градусная мера?

в) Проведите высоты треугольника. Сколько отрезков вы провели?

447. Начертите равнобедренный треугольник ABC с основанием AC.
а) Проведите высоту BD. Выделите цветом равные треугольники и докажите их равенство с помощью различных признаков равенства прямоугольных треугольников.
б) Назовите высоты треугольника BCD, проведенные к катетам.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

448. Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

449. В равностороннем треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника CAD.

450. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если:
а) один из этих углов в пять раз меньше другого;
б) их разность равна $10°$.

451. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если:
а) один из его внешних углов равен $130°$;
б) их градусные меры относятся как $2 : 7$.

452. На рисунке 154 $\angle A = \angle C$, $\angle ADB = \angle CDB$. Докажите равенство треугольников ADB и CDB.

453. На рисунке 155 $AD \parallel BC$, $\angle BAC = \angle DCA = 90°$. Докажите равенство треугольников BAC и DCA.

454. В треугольнике ABC углы A и C острые, BD — высота треугольника. Какая из точек A, C, D лежит между двумя другими?

455. В треугольнике ABC угол C тупой, BD — высота треугольника. Какая из точек A, C, D лежит между двумя другими?

456. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе проведена высота BH. Найдите углы треугольника ABH, если $\angle C = 25°$.

457. В треугольнике ABC высота AD делит угол A на два угла, причем $\angle BAD = 38°$, $\angle CAD = 42°$. Найдите углы треугольника ABC.

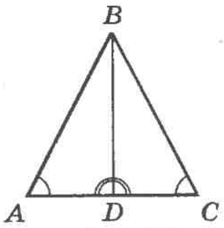


Рис. 154

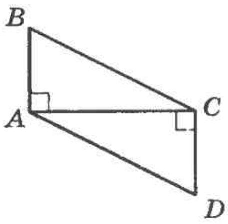


Рис. 155

Уровень Б

458. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC $\angle A = 45°$, катет $AB = 8$ см. Найдите катет BC.

459. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне, образует с основанием треугольника угол $35°$. Найдите углы данного треугольника.

→ **460.** В треугольнике ABC $\angle B = 90°$. Биссектриса угла A пересекает катет BC под углом $74°$. Найдите острые углы треугольника ABC.

461. Если в треугольнике две высоты равны, то этот треугольник равнобедренный. Докажите.

→ **462.** Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению предыдущей задачи.

463. В треугольнике ABC проведена высота BD. Найдите углы данного треугольника, если $\angle ABD = 25°$, $\angle CBD = 40°$. Сколько решений имеет задача?

→ **464.** Биссектриса, проведенная из вершины прямого угла треугольника, пересекает гипотенузу под углом $70°$. Найдите углы, которые образует с катетами высота, проведенная к гипотенузе.

465. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и высоте, проведенной к гипотенузе.

→ **466.** Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и биссектрисе, проведенной к гипотенузе.

467. В равнобедренном треугольнике KMN с основанием KN высоты KA и NB пересекаются в точке O. Найдите углы данного треугольника, если $\angle KON = 140°$.

→ **468.** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты AD и BE пересекаются под углом $50°$. Найдите углы данного треугольника.

Уровень В

469 (опорная). Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Докажите.

→ **470 (опорная).** Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный. Докажите.

471. Угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины наибольшего угла прямоугольного треугольника, равен $22°$. Найдите острые углы треугольника.

472. Высота, проведенная из вершины при основании равнобедренного треугольника, делит пополам угол между основанием и биссектрисой угла при основании. Найдите углы данного треугольника.

473. Один из углов прямоугольного треугольника равен $60°$, а разность между гипотенузой и катетом, прилежащим к данному углу, равна 6 см. Найдите эти стороны треугольника.

474. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, а внешний угол при вершине C равен $120°$. Найдите стороны BC и AC, если их сумма равна 21 см.

475. В прямоугольном треугольнике катет, прилежащий к углу $30°$, равен 18 см. Найдите длину биссектрисы треугольника, проведенной к данному катету.

476. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. Биссектриса BE образует с катетом AC угол $60°$. Найдите катет AC, если $CE = 4$ см.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 18

Теоретический материал

- свойства точек и прямых
- равнобедренный треугольник

п. 1.2; § 11

Задачи

477. В треугольнике ABC медиана BM равна стороне BC. Отрезок BH — высота треугольника. Найдите длину стороны AC, если $HC = 2$ см.

478. В треугольнике ABC биссектриса BL равна стороне BC. Отрезок BH — высота треугольника. Найдите угол ABC, если $\angle CBH = 20°$.

§ 18. Сравнение сторон и углов треугольника

18.1. Соотношения между сторонами и углами треугольника

Теорема (соотношения между сторонами и углами треугольника)

В треугольнике:

1) против бо́льшей стороны лежит бо́льший угол;

2) против бо́льшего угла лежит бо́льшая сторона.

Доказательство

☐ Данная теорема содержит два утверждения — прямое и обратное. Докажем каждое из них отдельно.

1) Пусть в треугольнике ABC $AB > AC$. Докажем, что $\angle C > \angle B$. Отложим на стороне AB отрезок AD, равный стороне AC (рис. 156). Поскольку $AD < AB$, то точка D лежит между точками A и B, значит, угол 1 является частью угла C, то есть $\angle C > \angle 1$. Очевидно, что треугольник ADC равнобедренный с основанием DC, откуда $\angle 1 = \angle 2$.
Кроме того, угол 2 — внешний угол треугольника BDC, поэтому $\angle 2 > \angle B$. Следовательно, имеем: $\angle B < \angle 2$, $\angle 2 = \angle 1$, $\angle 1 < \angle C$, откуда $\angle B < \angle C$.

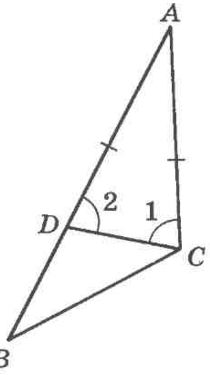


Рис. 156. К доказательству соотношений между сторонами и углами треугольника

2) Пусть в треугольнике ABC $\angle C > \angle B$. Докажем от противного, что $AB > AC$. Если это не так, то $AB = AC$ или $AB < AC$. В первом случае треугольник ABC равнобедренный с основанием BC, то есть $\angle B = \angle C$. Во втором случае, по только что доказанному утверждению, против большей стороны должен лежать больший угол, то есть $\angle B > \angle C$. В обоих случаях имеем противоречие условию $\angle C > \angle B$. Таким образом, наше предположение неверно, то есть $AB > AC$. Теорема доказана. ■

Следствие 1

В тупоугольном треугольнике сторона, лежащая против тупого угла, — наибольшая.

Следствие 2

В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

18.2. Неравенство треугольника

Теорема (неравенство треугольника)

В треугольнике длина каждой стороны меньше суммы длин двух других сторон.

Доказательство

□ Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что $AC < AB + BC$. Отложим на продолжении стороны AB отрезок BD, равный стороне BC (рис. 157). Треугольник BCD равнобедренный с основанием CD, откуда $\angle 1 = \angle 2$. Но угол 2 является частью угла ACD, то есть $\angle 2 < \angle ACD$. Таким образом, в треугольнике ACD $\angle C > \angle D$. Учитывая соотношение между сторонами и углами треугольника, имеем: $AC < AD = AB + BD = AB + BC$. Теорема доказана. ■

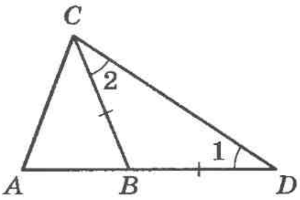


Рис. 157. К доказательству неравенства треугольника

Следствие

Если для трех точек A, B, C справедливо равенство $AC = AB + BC$, то эти точки лежат на одной прямой, причем точка B лежит между точками A и C.

Действительно, если точка B не лежит на прямой AC, то по неравенству треугольника $AC < AB + BC$. Если точка B лежит на прямой AC вне отрезка AC, это неравенство также очевидно справедливо. Остается единственная возможность: точка B лежит на отрезке AC.

Неравенство треугольника позволяет проанализировать возможность построения треугольника с заданными сторонами. В частности, если хотя бы одно из трех положительных чисел a, b, c больше или равно сумме двух других, то построить треугольник со сторонами a, b, c невозможно.

С неравенством треугольника связана классическая задача о нахождении кратчайшего пути на плоскости. Ее решение было известно еще великому древнегреческому ученому Архимеду (287—212 гг. до н. э.).

Задача

Точки A и B лежат по одну сторону от прямой c. Найдите на данной прямой такую точку C, чтобы сумма расстояний $AC + CB$ была наименьшей (рис. 158).

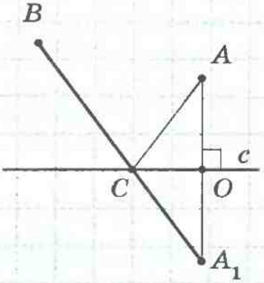


Рис. 158

Решение

Опустим из точки A перпендикуляр AO к прямой c и отложим на его продолжении отрезок OA_1, равный AO. Для любой точки C прямой c прямоугольные треугольники AOC и A_1OC равны по двум катетам, откуда $AC = A_1C$ и $AC + CB = A_1C + CB$.
Очевидно, что по следствию неравенства треугольника сумма $A_1C + CB$ будет наименьшей в случае, когда точки A_1, C и B лежат на одной прямой. Таким образом, искомая точка должна быть точкой пересечения отрезка A_1B с прямой c.

Отметим, что в условиях данной задачи прямые AC и CB образуют с прямой c равные углы. Именно так распространяется луч света, который исходит из точки A, отражается от прямой c и попадает в точку B. Физики в таком случае говорят, что угол падения светового луча равен углу отражения.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

479. Назовите:

а) наибольшую сторону треугольника DEF, если $\angle D < \angle E < \angle F$;

б) наименьший угол треугольника MNK, если $MK > NK > MN$.

480. Из одной вершины треугольника проведены медиана, биссектриса и высота, причем никакие два из этих отрезков не совпадают. Какой из данных отрезков наименьший?

481. Определите:

а) могут ли стороны треугольника быть равны 13 см, 20 см и 6 см;

б) может ли сторона треугольника составлять половину его периметра;

в) могут ли стороны треугольника относиться как 2 : 3 : 5;

г) может ли основание равнобедренного треугольника быть втрое больше боковой стороны?

482. В треугольнике ABC сторона AC наименьшая. Может ли угол B быть прямым или тупым? Ответ обоснуйте.

483. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 16 см, а другая — 5 см. Найдите длину основания треугольника.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

484. Начертите треугольник ABC, в котором $\angle C = 100°$.

а) Назовите наибольшую сторону треугольника и проверьте свой ответ с помощью измерений.

б) Измерьте все стороны треугольника и проверьте, выполняется ли неравенство треугольника для сторон треугольника ABC.

в) Пользуясь результатами измерений, назовите наименьший угол треугольника.

→ **485.** Начертите остроугольный треугольник ABC.

а) Измерьте углы треугольника и определите его наибольшую и наименьшую стороны.

б) Проведите медиану BD. Запишите неравенство треугольника для стороны BD в треугольниках ABD и CBD.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

486. В треугольнике ABC $AB = 3{,}3$ см, $BC = 3\frac{1}{3}$ см, $AC = 3\frac{19}{60}$ см. Назовите наибольший угол треугольника.

487. В треугольнике ABC $AB < BC$, $\angle A < \angle B$. Назовите наименьший угол треугольника.

→ **488.** В прямоугольном треугольнике ABC $\angle B < \angle C$, $AB < BC$. Назовите гипотенузу треугольника.

489. Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие его стороны равны:

а) 14 см и 6 см;

б) 5 см и 10 см;

в) 3 см и 4 см.

→ **490.** Найдите периметр равнобедренного треугольника, две стороны которого равны 2 см и 7 см.

491. Точка на основании равнобедренного треугольника, отличная от вершины, соединена с вершиной, противолежащей основанию. Докажите, что полученный отрезок меньше боковой стороны треугольника.

→ **492.** Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

493. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой, если $AB = 12{,}3$ см, $BC = 9{,}7$ см, $AC = 2{,}6$ см.

→ **494.** Определите, лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если:

а) $AB = 7{,}5$ см, $BC = 8{,}3$ см, $AC = 11{,}5$ см;

б) $AB = 16{,}3$ см, $BC = 0{,}8$ см, $AC = 15{,}5$ см.

Уровень Б

495. В равнобедренном треугольнике ABC $AB > BC$, $\angle B > \angle A$. Назовите основание треугольника.

→ **496.** В треугольнике ABC $\angle A = \angle C$. Назовите наименьший угол треугольника, если $AC < AB$.

497. Сторона равнобедренного треугольника на 3 см больше другой стороны. Найдите все стороны треугольника, если его периметр равен 18 см.

498. Периметр равнобедренного треугольника равен 70 м. Найдите стороны треугольника, если одна из них равна 10 м.

499. Две стороны треугольника равны 1,2 м и 0,4 м. Найдите длину третьей стороны, если она выражается целым числом метров.

500. Докажите, что медиана треугольника меньше половины его периметра.

501. Докажите, что каждая сторона треугольника меньше половины его периметра.

Уровень В

502. В прямоугольном треугольнике ABC отрезок CD — биссектриса, проведенная из вершины прямого угла. Назовите наименьшую сторону треугольника, если угол CDA тупой.

503. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе проведена высота CD. Назовите наименьший угол треугольника, если $AD < BD$.

504. Высота тупоугольного треугольника, проведенная из вершины острого угла, лежит вне треугольника. Докажите.

505. Даны положительные числа a и b. Известно, что существует треугольник со сторонами $a+5b$, $5a+6b$ и $3a+2b$. Какое из чисел больше: a или b?

506. Две стороны треугольника равны a и b $(a>b)$. В каких пределах может изменяться:

а) длина третьей стороны;

б) периметр треугольника?

507. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она проходит.

508. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 19

Теоретический материал

- окружность и круг
- свойство медианы, биссектрисы и высоты равнобедренного треугольника

5 класс; п. 12.2

Задачи

509. На плоскости отмечена точка O. Сколько точек, удаленных от точки O на заданное расстояние a, существует:

а) на луче с началом O;

б) на прямой, проходящей через точку O;

в) на двух прямых, пересекающихся в точке O;

г) на плоскости?

Выскажите предположения.

510. Прямые a и b пересекаются в точке O. На прямой a от точки O отложены равные отрезки OA и OC, на прямой b — равные отрезки OB и OD. Запишите все пары образовавшихся равных треугольников и докажите их равенство.

Задачи для подготовки к контрольной работе № 3

1. Определите, параллельны ли прямые a и b, если $\angle 1 = 36°$, а угол 2 в 4 раза меньше угла 3 (рис. 159).

2. Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если внутренние односторонние углы относятся как 11 : 25.

3. Найдите углы треугольника ABC, если угол A на 35° меньше угла B, а угол B на 25° больше угла C.

4. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекаются в точке O, $\angle AOC = 100°$. Найдите $\angle ABC$.

5. Докажите, что треугольники ABD и DCA равны, если $\angle B = \angle C = 90°$ и $AO = DO$ (рис. 160).

6. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle ADB = 120°$, $\angle ABC = 60°$, $AD = 16$ см (рис. 161). Найдите CD.

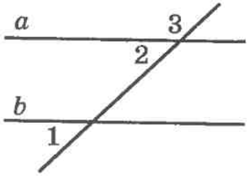


Рис. 159

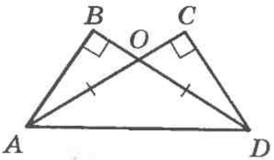


Рис. 160

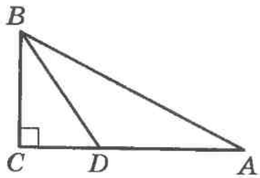


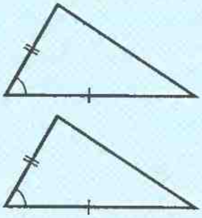
Рис. 161

Итоги

ИТОГОВЫЙ ОБЗОР ГЛАВЫ II

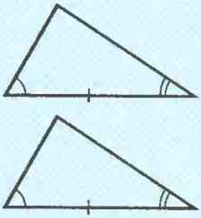
ТРИ ПРИЗНАКА РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Первый признак (по двум сторонам и углу между ними)



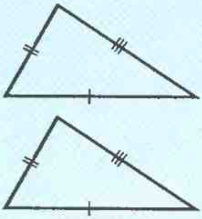
Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны

Второй признак (по стороне и прилежащим к ней углам)



Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника соответственно равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны

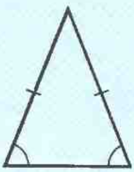
Третий признак (по трем сторонам)



Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Равнобедренный треугольник — треугольник, у которого две стороны равны.

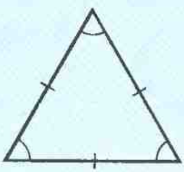


В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Равносторонний треугольник — треугольник, у которого все стороны равны.



В равностороннем треугольнике все углы равны.

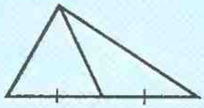
Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний

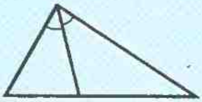
МЕДИАНА, БИССЕКТРИСА И ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА

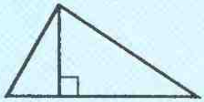
Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину данного угла с точкой на противолежащей стороне

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, которая содержит противолежащую сторону







СВОЙСТВО МЕДИАНЫ, БИССЕКТРИСЫ И ВЫСОТЫ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

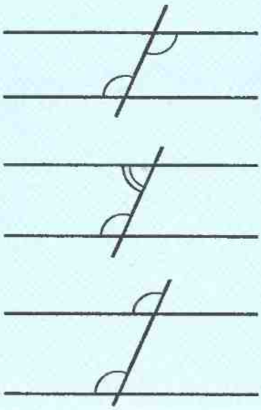
Если при пересечении двух прямых третьей выполняется хотя бы одно из условий:

1) внутренние накрест лежащие углы равны;

2) сумма внутренних односторонних углов равна 180°;

3) соответственные углы равны,

то прямые параллельны



СВОЙСТВА УГЛОВ, ОБРАЗОВАННЫХ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ СЕКУЩЕЙ

Если секущая пересекает две параллельные прямые, то:

1) внутренние накрест лежащие углы равны;

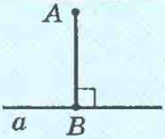
2) сумма внутренних односторонних углов равна 180°;

3) соответственные углы равны

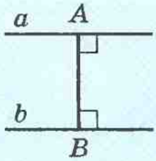
ПЕРПЕНДИКУЛЯРЫ И РАССТОЯНИЯ

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ПРЯМОЙ

Через любую точку плоскости можно провести прямую, перпендикулярную данной, и только одну



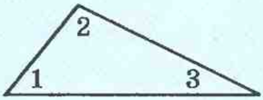
Расстояние от точки до прямой — длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую



Расстояние между параллельными прямыми — расстояние от любой точки одной из данных прямых до другой прямой

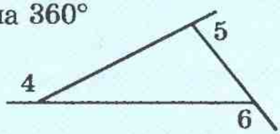
СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Сумма углов треугольника равна 180°



$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

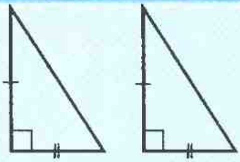
Сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°



$\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360^\circ$

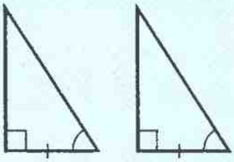
ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

По двум катетам



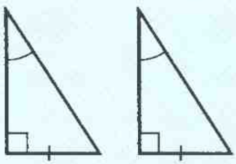
Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны

По катету и прилежащему острому углу



Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны

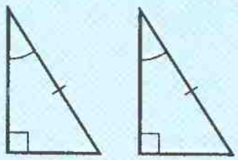
По катету и противолежащему углу



Если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны

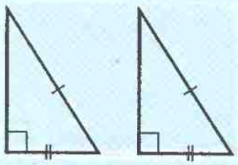
ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ (продолжение)

По гипотенузе и острому углу



Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны

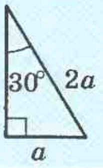
По гипотенузе и катету



Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК С УГЛОМ 30°

В прямоугольном треугольнике катет, противолежащий углу 30°, равен половине гипотенузы



Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30°

СРАВНЕНИЕ СТОРОН И УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

В треугольнике:

1) против бо́льшей стороны лежит бо́льший угол;
2) против бо́льшего угла лежит бо́льшая сторона

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон

? КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение треугольника.

2. Какие фигуры называются равными?

3. Сформулируйте и докажите первый признак равенства треугольников.

4. Сформулируйте и докажите теорему о существовании и единственности прямой, перпендикулярной данной.

5. Дайте определение перпендикуляра и расстояния от точки до прямой.

6. Сформулируйте и докажите второй признак равенства треугольников.
7. Дайте определение равнобедренного треугольника. Как называются его стороны?
8. Сформулируйте и докажите свойство углов равнобедренного треугольника.
9. Сформулируйте и докажите признак равнобедренного треугольника.
10. Дайте определение равностороннего треугольника. Сформулируйте его свойство и признак.
11. Дайте определения медианы, биссектрисы и высоты треугольника.
12. Сформулируйте и докажите свойство медианы, биссектрисы и высоты равнобедренного треугольника.
13. Сформулируйте и докажите третий признак равенства треугольников.
14. Объясните по рисунку, какие углы при двух прямых и секущей называются внутренними накрест лежащими, внутренними односторонними, соответственными.
15. Сформулируйте и докажите признак параллельности двух прямых, пересеченных третьей. Сформулируйте следствия этой теоремы.
16. Сформулируйте теорему о существовании и единственности прямой, параллельной данной, и докажите существование такой прямой.
17. Сформулируйте и докажите свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей.
18. Докажите теорему о расстояниях от точек прямой до параллельной ей прямой. Дайте определение расстояния между параллельными прямыми.
19. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов треугольника. Какие следствия она имеет?
20. Назовите виды треугольников по величине углов.
21. Дайте определение внешнего угла треугольника.
22. Сформулируйте и докажите теорему о внешнем угле треугольника.
23. Как называются стороны прямоугольного треугольника?
24. Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников. Докажите равенство прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.
25. Сформулируйте свойство прямоугольного треугольника с углом 30°.
26. Сформулируйте и докажите теорему о сравнении сторон и углов треугольника. Какие следствия она имеет?
27. Сформулируйте и докажите неравенство треугольника.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

511. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если:
а) $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1 = 85°$, $\angle B = 40°$, $\angle C_1 = 55°$;
б) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = 30°$, $\angle A_1 = 72°$, $\angle C_1 = 78°$.

512. Через вершины треугольника проведены прямые, параллельные противолежащим сторонам. Сколько треугольников, равных данному, при этом образовалось? Докажите их равенство.

513. Угол одного из двух равных треугольников равен сумме двух углов другого треугольника. Докажите, что данные треугольники прямоугольные.

514. В треугольниках ABC и MNK $AB = MN$, $\angle A = \angle M$, $\angle B \neq \angle N$. Может ли треугольник ABC быть равен треугольнику с вершинами M, N, K?

515. Треугольник пересекается четырьмя параллельными прямыми. Докажите, что по крайней мере одна из них не проходит через вершину треугольника.

516. Стороны треугольника лежат на прямых, углы между которыми равны $20°$, $30°$ и $50°$. Найдите углы треугольника.

517. Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть взаимно перпендикулярными? Ответ обоснуйте.

518. Докажите, что две высоты треугольника не могут точкой пересечения делиться пополам.

519. Докажите равенство равнобедренных треугольников по боковой стороне и углу при основании.

520. Треугольники ABC, BCD и DCE равносторонние. Докажите:
а) параллельность прямых AE и BD;
б) равенство треугольников ABD и EDB;
в) равенство треугольников ABE и EDA.
Найдите углы треугольника ABE.

521. Треугольники ABC и AB_1C равны, причем точки B и B_1 лежат по разные стороны от прямой AC. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек B и B_1 на прямую AC, имеют общее основание.

522. Прямая CD перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину. Докажите равенство треугольников ACD и BCD.

523. Прямые a и b параллельны, если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b. Докажите.

524. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a на равных расстояниях от нее. Докажите, что $AB \parallel a$.

525. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся ею в отношении $AO : OB = CO : OD$. Прямые AD и BC пересекаются в точке M. Докажите, что треугольник DMB равнобедренный.

526. Один из углов треугольника равен α. Найдите угол между прямыми, которые содержат высоты, проведенные из вершин двух других углов.

527. Угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины одного из углов треугольника, равен половине разности двух других углов треугольника. Докажите.

528. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BL. Найдите BC, если $AB = 3$ см.

529. Перпендикуляр, проведенный из вершины A треугольника ABC к медиане BM, делит эту медиану пополам. Найдите AB, если $AC = 10$ см.

530. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC и пересекающие лучи BC и BA в точках K и M соответственно. Найдите длину стороны AB, если $AM = 2$ см, $BC = 7$ см. Сколько решений имеет задача?

531. В треугольнике ABC $AB < BC < AC$. Один из углов треугольника вдвое меньше второго угла и на $100°$ меньше третьего. Найдите угол B.

532. Докажите, что расстояние между любыми двумя точками, лежащими на сторонах треугольника, не больше наибольшей из его сторон.

533. Определите, сколько треугольников можно составить из отрезков длиной:

а) 2, 3, 4, 5;

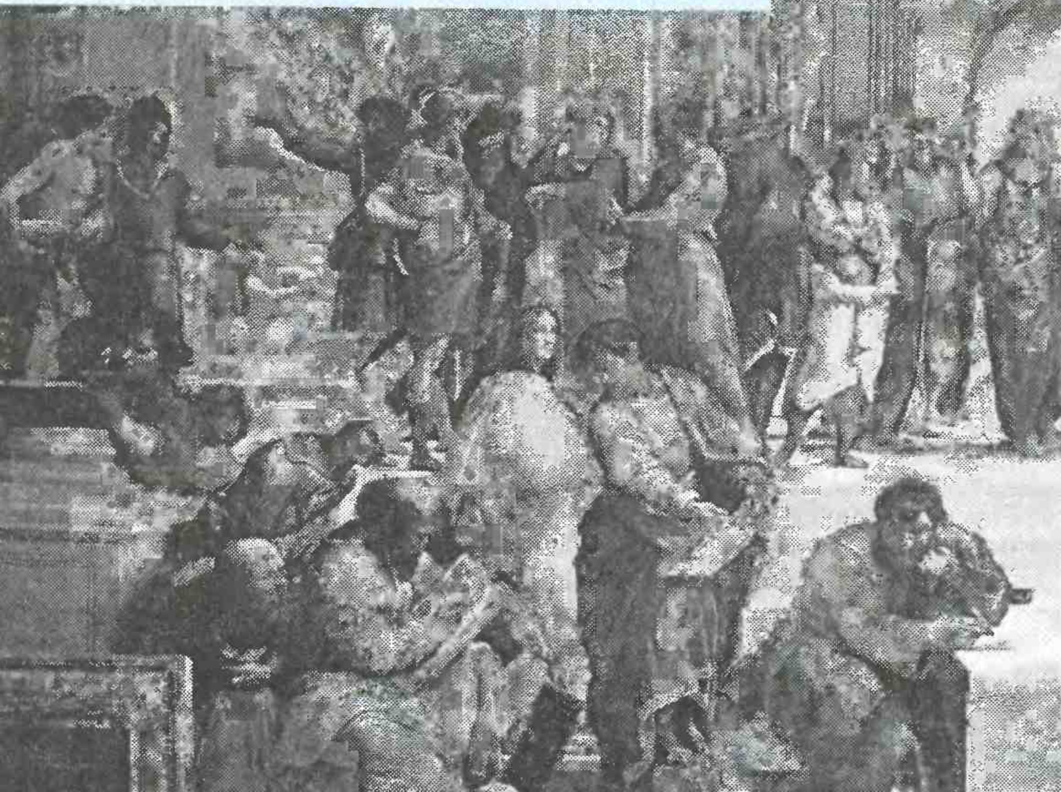
б) 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Историческая справка

Аксиомы Евклида. Аксиомы, сформулированные Евклидом, легли в основу современной геометрии. Ученые на протяжении более двух тысяч лет исследовали, возможно ли доказать некоторые из евклидовых постулатов (аксиом), опираясь на другие. Особое внимание вызывала аксиома параллельных прямых (аксиома Евклида). Среди великих геометров прошлого не было, пожалуй, ни одного, кто не попытался бы доказать ее как теорему. И только в начале XIX века выдающийся русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) доказал, что эту аксиому невозможно вывести из других аксиом.

М. И. Лобачевский

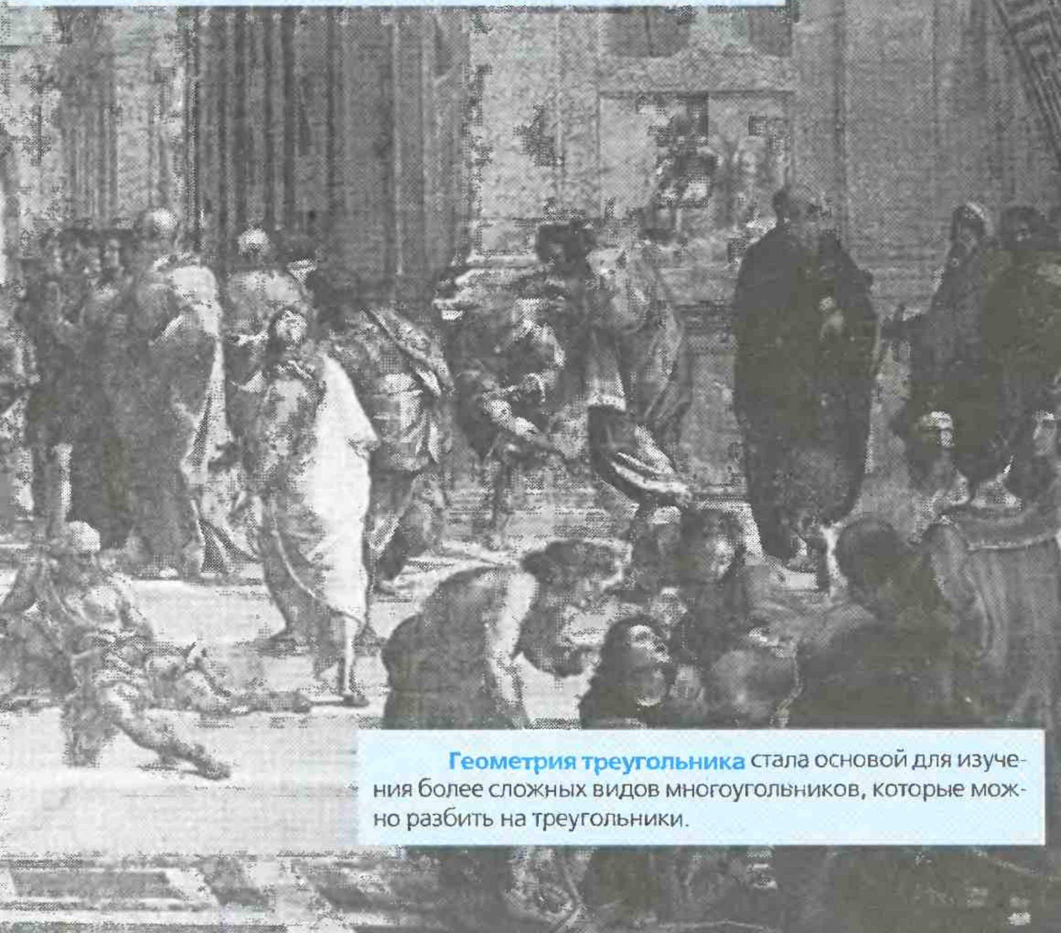
Неевклидова геометрия. Лобачевский создал другую, неевклидову геометрию. По Лобачевскому, прямая, параллельная данной прямой и проходящая через данную точку вне ее, не является единственной. Большинство современников это открытие не приняли. Такая же судьба постигла и работы других ученых, получивших аналогичные результаты: венгра Яноша Больяи и немца Карла Гаусса. И только через столетие неевклидова геометрия была признана и оценена как выдающееся научное открытие.



Становление геометрической аксиоматики. В XX в. исследования вопросов аксиоматического построения геометрии вышли на качественно новый уровень. Немецкий математик Давид Гильберт (1862—1943) обобщил и усовершенствовал систему евклидовых аксиом. Авторский вариант геометрических аксиом, разработанный на основе трудов Евклида и Гильберта, предложил наш соотечественник Алексей Васильевич Погорелов (1919—2002).

Давид Гильберт

Геометрия треугольников. Евклид ввел понятие о равенстве геометрических фигур, совмещаемых наложением. В исследованиях древнегреческих геометров многие задачи и теоремы сводились к доказательству равенства треугольников (доказательство второго признака равенства треугольников приписывают Фалесу). Грекам была известна и теорема о сумме углов треугольника (впервые она встречается в комментариях Прокла к «Началам» Евклида).



Геометрия треугольника стала основой для изучения более сложных видов многоугольников, которые можно разбить на треугольники.

ТЕМАТИКА СООБЩЕНИЙ И РЕФЕРАТОВ

1. Евклид Александрийский — родоначальник современной геометрии.
2. Н. И. Лобачевский — реформатор геометрической науки.
3. Признаки равенства для различных видов треугольников. Прикладные задачи, связанные с равенством треугольников.
4. Неравенства в треугольнике и их следствия. Кратчайшие пути на плоскости.
5. Доказательство и опровержение. Логические основы теории аргументации.
6. Деление и классификация понятий.

Рекомендованные источники информации

1. Бевз Г. П. Геометрія трикутника.— К.: Генеза, 2005.
2. Гетманова А. Д. Логика.— М.: Дрофа, 1995.
3. Глейзер Г. И. История математики в школе. VII—VIII кл.— М.: Просвещение, 1982.
4. Интернет-библиотека МЦНМО. http://ilib.mirror0.mccme.ru/
5. Кушнір І. А. Трикутник і тетраедр в задачах.— К.: Рад. шк., 1991.
6. Математична хрестоматія. Т. 1, 2.— К.: Рад. шк., 1970.
7. Холодковський В. Микола Іванович Лобачевський.— К.: Рад. шк., 1950.
8. Шарыгин И. Ф. Геометрия 7—9.— М.: Дрофа, 1997.

Глава III
ОКРУЖНОСТЬ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

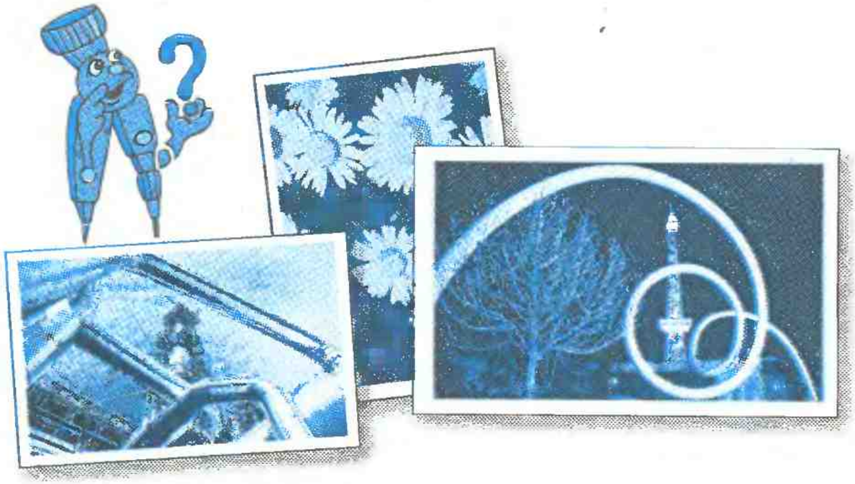
Пусть в природе не существовало бы ни одного круга или треугольника, и все-таки истины, доказанные Евклидом, навсегда сохранили бы свою достоверность и очевидность.

Дэвид Юм, английский философ

В предыдущих главах вы знакомились с основными геометрическими фигурами, устанавливали особенности этих фигур и их взаимное расположение. Но на практике довольно часто приходится решать «обратную» задачу — по определенным особенностям находить фигуру, имеющую их. Именно таково содержание задач на построение, которые будут рассматриваться в этом разделе.

Еще в работах древнегреческих математиков описаны задачи на построение и методы их решения.

Многие из этих задач составляют классику евклидовой геометрии. Кроме практической ценности, такие задачи представляют значительный исследовательский интерес, поскольку в ходе их решения определяются новые особенности построенных фигур.



§ 19. Окружность

19.1. Определение окружности и ее элементов

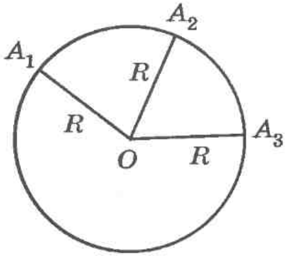


Рис. 162. Расположение точек плоскости, удаленных от точки O на расстояние R

Пусть на плоскости отмечена точка O. Очевидно, что от точки O можно отложить бесконечное множество отрезков длиной R (рис. 162). Концы всех таких отрезков на плоскости образуют окружность — фигуру, уже известную из курса математики.

Определение

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от данной точки **(центра окружности)** на одинаковое расстояние.

Иначе говорят, что все точки окружности равноудалены от ее центра.

Определение

Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью и содержащая ее центр.

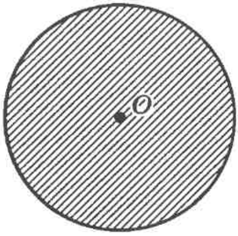


Рис. 163. Окружность и круг

Иначе говоря, круг состоит из всех точек плоскости, удаленных от данной точки **(центра круга)** на расстояние, не превышающее заданного.

На рисунке 163 заштрихованная часть плоскости — круг, ограниченный окружностью с тем же центром. Центр окружности и круга является точкой круга, но не является точкой окружности.

Определение

Радиусом окружности (круга) называется расстояние от центра окружности до любой ее точки.

Радиусом также называется любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром. На рисунке 162 OA_1, OA_2,… — радиусы окружности с центром O. Как правило, радиус обозначается буквой R (или r).

Радиус — от латинского «радиус» — луч, спица

Хорда — от греческого «хорда» — струна, тетива

Диаметр — от греческого «диа» — насквозь и «метрео» — измеряющий насквозь; другое значение этого слова — поперечник

Рис. 164. Хорда, радиус и диаметр окружности

Определение

Хордой называется отрезок, соединяющий две точки окружности.
Диаметром называется хорда, проходящая через центр окружности.

На рисунке 164 изображены две хорды окружности, одна из которых является ее диаметром. Обычно диаметр обозначают буквой d. Очевидно, что диаметр вдвое больше радиуса, то есть $d = 2R$.

Построение окружности выполняют с помощью циркуля.

19.2. Свойство диаметра, перпендикулярного хорде

Опорная задача

Диаметр, перпендикулярный хорде, проходит через ее середину. Доказите.

Решение

Пусть CD — диаметр окружности с центром O, AB — хорда этой окружности, $AB \perp CD$. Докажем, что M — точка пересечения отрезков AB и CD — середина отрезка AB.
В случае, когда хорда AB сама является диаметром, точка M совпадает с центром O и утверждение задачи очевидно. Пусть хорда AB не является диаметром (рис. 165). Проведем радиусы OA и OB. Тогда в равнобедренном треугольнике AOB высота OM является медианой. Итак, $AM = BM$, что и требовалось доказать.

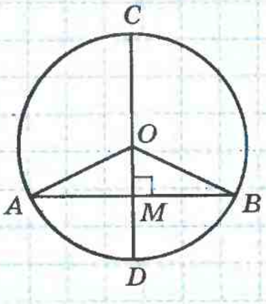


Рис. 165

Докажите самостоятельно еще одно утверждение **(опорное):**
диаметр окружности, проведенной через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

534. Даны окружность радиуса R с центром O и точка A. Сравните R с длиной отрезка OA, если точка A:

а) лежит на данной окружности;

б) лежит внутри круга, ограниченного данной окружностью;

в) не принадлежит кругу, ограниченному данной окружностью.

535. Сколько общих точек с окружностью имеет:

а) луч, началом которого является центр окружности;

б) прямая, проходящая через центр окружности?

536. Точка пересечения двух диаметров окружности соединена с точкой окружности. Какую длину имеет полученный отрезок, если диаметр окружности равен d?

537. Две хорды окружности имеют общий конец. Могут ли обе они быть диаметрами?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

538. Начертите окружность с центром O и радиусом 3 см.

а) Проведите в данной окружности радиус, диаметр и хорду, не являющуюся диаметром. Какой из этих отрезков не проходит через центр окружности?

б) Выделите на рисунке отрезок, длина которого равна 6 см.

в) Отметьте внутри окружности точку, не совпадающую с точкой O. Сколько радиусов, диаметров, хорд можно провести через отмеченную точку?

→ **539.** Начертите окружность. Сотрите изображение центра окружности и вырежьте круг из бумаги. С помощью сгибаний полученного шаблона восстановите центр окружности.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

540. Найдите диаметр окружности, если он на 8 см больше радиуса этой окружности.

541. Диаметр циферблата часов равен 11 см. Найдите длину минутной стрелки.

542. Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O.

а) Докажите равенство треугольников AOB и COD.

б) Найдите периметр треугольника COD, если $AC = 14$ см, $AB = 8$ см.

543. Отрезки OA и OB — радиусы окружности с центром O, причем $\angle AOB = 60°$. Найдите периметр треугольника AOB, если $AB = 5$ см.

Уровень Б

544. Из одной точки окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу окружности. Найдите угол между ними.

545. Из одной точки окружности проведены две хорды, равные радиусу окружности. Найдите угол между ними.

546. На рисунке 166 отрезки AB и CD — равные хорды окружности с центром O. Докажите равенство углов AOC и BOD.

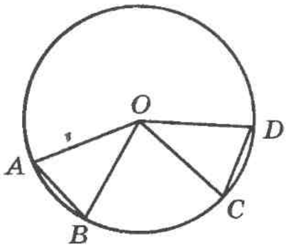


Рис. 166

547. Отрезок AB — диаметр окружности с центром O, AC и CB — равные хорды этой окружности. Найдите угол COB.

548. Докажите, что равные хорды окружности равноудалены от ее центра.

549. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению задачи № 548.

550. Докажите, что диаметр является наибольшей хордой окружности.

Уровень В

551. Если одна из двух перпендикулярных хорд точкой пересечения делится пополам, то вторая хорда является диаметром окружности. Докажите.

552. Расстояние от центра окружности O до хорды AB вдвое меньше радиуса окружности. Найдите угол AOB.

553. Расстояние от центра окружности O до хорды AB вдвое меньше хорды AB. Найдите угол AOB.

554. Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от центра окружности до точки их пересечения равно расстоянию между серединами этих хорд.

555. Хорды, пересекающие диаметр в точках, которые делят данные хорды пополам, параллельны. Докажите.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 20

Теоретический материал

- существование и единственность перпендикуляра к прямой
- медиана, биссектриса и высота равнобедренного треугольника
- сумма углов треугольника
- свойства и признаки

п. 9.1; 12.2

п. 16.1; 13.2

Задачи

556. Докажите, что прямые a и b, перпендикулярные параллельным прямым c и d, отсекают на этих прямых равные отрезки.

557. В треугольнике ABC, $\angle B = 130°$, AD — высота треугольника. Найдите углы треугольника ABD.

§ 20. Касательная к окружности

20.1. Определение и свойство касательной

Любая прямая, проходящая через точки окружности, называется **секущей**; ее отрезок, лежащий внутри окружности, является хордой. На рисунке 167 хорда CD — отрезок секущей b. Рассмотрим теперь прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку.

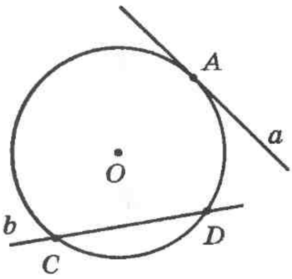


Рис. 167. Секущая и касательная к окружности

Определение

Касательной к окружности называется прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку.

Общая точка касательной и окружности называется **точкой касания.** На рисунке 167 прямая a является касательной к окружности с центром O. Иначе говоря, прямая a касается окружности с центром O в точке A.

Определим взаимное расположение касательной и радиуса окружности, проведенного в точку касания.

Теорема (свойство касательной)

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Доказательство

□ Пусть прямая a касается окружности с центром O в точке A (рис. 168). Докажем, что $OA \perp a$. Применим метод доказательства от противного.

Пусть отрезок OA не является перпендикуляром к прямой a. Тогда, по теореме о существовании и единственности перпендикуляра к прямой, из точки O можно провести перпендикуляр OB к прямой a.

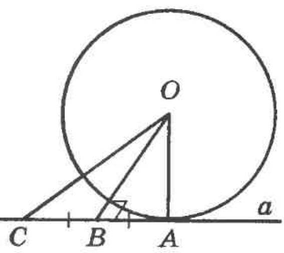


Рис. 168. К доказательству свойства касательной

На луче AB от точки B отложим отрезок BC, равный AB, и соединим точки O и C. Поскольку по построению отрезок OB — медиана и высота треугольника AOC, то этот треугольник равнобедренный с основанием AC, то есть $OA = OC$. Таким образом, расстояние между точками O и C равно радиусу окружности, и, по определению радиуса, точка C должна лежать на данной окружности. Но это противоречит определению касательной, поскольку A — единственная общая точка окружности с прямой a. Из этого противоречия следует, что наше предположение неверно, то есть $OA \perp a$. Теорема доказана. ■

20.2. Признак касательной

Докажем теорему, обратную предыдущей.

Теорема (признак касательной)

Если прямая проходит через точку окружности перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной к окружности.

Доказательство

□ Пусть прямая a проходит через точку A, лежащую на окружности с центром O, причем $OA \perp a$. Докажем, что a — касательная к окружности. Согласно определению касательной, нам необходимо доказать, что окружность имеет с прямой a единственную общую точку. Применим метод доказательства от противного.

Пусть прямая a имеет с окружностью общую точку B, отличную от A (рис. 169). Тогда из определения окружности $OA = OB$ как радиусы, то есть треугольник AOB равнобедренный с основанием AB. По свойству углов равнобедренного треугольника $\angle OBA = \angle OAB = 90°$, что противоречит теореме о сумме углов треугольника.

Следовательно, точка A — единственная общая точка окружности и прямой a, значит, прямая a — касательная к окружности. ■

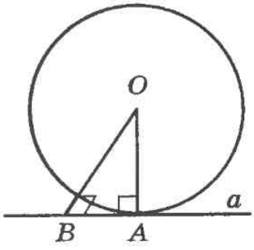


Рис. 169. К доказательству признака касательной

20.3. Свойство отрезков касательных

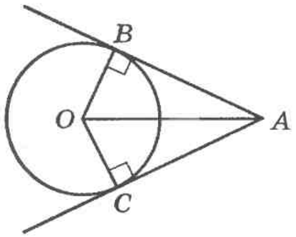


Рис. 170. Отрезки касательных, проведенных к окружности из точки A

Пусть даны окружность с центром O и точка A, не принадлежащая кругу, ограниченному данной окружностью (рис. 170).

Через точку A можно провести две касательные к данной окружности. Отрезки, соединяющие данную точку A с точками касания, называют **отрезками касательных,** проведенных из точки A к данной окружности. На рисунке 170 AB и AC — отрезки касательных, проведенных к окружности из точки A.

Опорная задача

Отрезки касательных, проведенных из данной точки к окружности, равны. Доказите.

Решение

Пусть AB и AC — отрезки касательных, проведенных к окружности с центром O из точки A (рис. 170). Рассмотрим треугольники AOB и AOC. По свойству касательной $OB \perp AB$, $OC \perp AC$, то есть эти треугольники являются прямоугольными с общей гипотенузой AO и равными катетами ($OB = OC$ как радиусы окружности). Следовательно, $\triangle AOB = \triangle AOC$ по гипотенузе и катету, откуда $AB = AC$.

20.4*. Касание двух окружностей

Определение

Две окружности, имеющие общую точку, **касаются** в этой точке, если они имеют в ней общую касательную.

Общая точка двух окружностей в таком случае называется **точкой касания окружностей.**

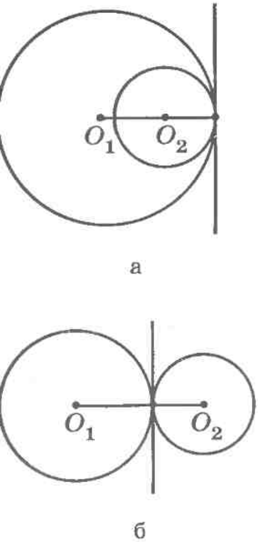


Рис. 171. Касание двух окружностей:
а) внутреннее;
б) внешнее

Различают два вида касания окружностей: внутреннее и внешнее.

Касание окружностей называется **внутренним**, если центры окружностей лежат по одну сторону от общей касательной, проведенной через точку касания (рис. 171, *а*);

Касание окружностей называется **внешним**, если центры окружностей лежат по разные стороны от общей касательной, проведенной через точку касания (рис. 171, *б*).

По свойству касательной радиусы данных окружностей, проведенные в точку касания, перпендикулярны общей касательной. Из теоремы о существовании и единственности прямой, перпендикулярной данной, следует, что центры касающихся окружностей и точка касания окружностей лежат на одной прямой.

Касающиеся окружности имеют единственную общую точку — точку касания.

Если данные окружности имеют радиусы R и r $(R>r)$, то расстояние между центрами окружностей равно $R-r$ в случае внутреннего касания и $R+r$ в случае внешнего касания.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

558. Прямая AB касается окружности с центром O в точке A. Может ли треугольник OAB иметь тупой угол?

559. Сколько касательных к данной окружности можно провести через точку, которая лежит:

а) на данной окружности;

б) внутри круга, ограниченного данной окружностью?

560. AB и AC — отрезки касательных, проведенных из точки A к данной окружности. Определите вид треугольника ABC.

561. Расстояние между центрами двух касающихся окружностей, имеющих радиусы R_1 и R_2, равно d. Определите, является ли касание данных окружностей внутренним или внешним, если:

а) $R_1 = 8$ см, $R_2 = 2$ см, $d = 6$ см;
б) $R_1 = 3$ см, $R_2 = 6$ см, $d = 9$ см.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

562. Начертите окружность с центром O и отметьте на ней точку A.

а) С помощью угольника проведите через точку A касательную к данной окружности. Какая теорема при этом используется?

б) Проведите хорду AB, не являющуюся диаметром. Проведите касательную к окружности в точке B. Отметьте точку C — точку пересечения двух касательных — и сравните длины отрезков AC и BC.

563. Начертите окружность с центром O и радиусом 2,5 см.

а) Отметьте на окружности точку A и начертите окружность с центром K и радиусом 1,5 см, касающуюся данной окружности в точке A внешним образом.

б) Проведите общую касательную построенных окружностей. Под каким углом она пересекает прямую OK?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

564. Прямая AB касается окружности с центром O в точке A. Найдите:

а) угол OBA, если $\angle AOB = 20°$;
б) радиус окружности, если $\angle AOB = 45°$, $AB = 8$ см.

→ **565.** Прямая AB касается окружности с центром O в точке A. Найдите углы OBA и AOB, если $OA = AB$.

566. Через точку окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу окружности. Найдите угол между ними.

→ **567.** В окружности с центром O проведена хорда AB, причем $\angle AOB = 120°$. Найдите угол между этой хордой и касательной, проведенной к окружности в точке B.

568. На рисунке 170 $\angle BOC = 150°$. Найдите угол BAC.

569. На рисунке 170 $\angle BAC = 50°$. Найдите угол BOC.

570. Радиусы двух касающихся окружностей равны 14 см и 11 см. Найдите расстояния между центрами окружностей в случаях внутреннего и внешнего касания.

Уровень Б

571. Докажите, что касательные, проведенные к концам диаметра окружности, параллельны.

572. Радиус, проведенный в точку касания окружности с прямой a, делит пополам хорду AB. Докажите, что $AB \parallel a$.

573. Окружность касается сторон неразвернутого угла. Докажите, что центр окружности лежит на биссектрисе угла.

574. Через концы хорды AB, равной радиусу окружности, проведены касательные, пересекающиеся в точке C. Найдите угол ACB.

575. Прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C. Найдите угол BAC, если $\angle OBC = 40°$.

576. Две окружности, расстояние между центрами которых равно 8 см, касаются внутренним образом. Радиус одной из окружностей равен 10 см. Какую длину может иметь радиус второй окружности?

577. Две окружности, расстояние между центрами которых равно 8 см, касаются внешним образом. Найдите диаметры этих окружностей, если их разность равна 4 см.

Уровень В

578. Докажите, что:

а) три касательные к одной окружности не могут пересекаться в одной точке;

б) прямая не может пересекать окружность более чем в двух точках.

579. Прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C. Найдите радиус окружности, если $\angle BOC = 120°$, $AO = 30$ см.

580. Прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C. Найдите расстояние AO, если $AB = 7$ см, $\angle ABC = 30°$.

581. Даны две окружности. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и имеет центр на прямой, проходящей через их центры, если радиусы данных окружностей и расстояние между их центрами равны соответственно:

а) 5, 2 и 1;

б) 3, 4 и 5.

Для каждого случая найдите все возможные решения.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 21

Теоретический материал

- измерение отрезков
- измерение углов
- неравенство треугольника

п. 2.3; 3.3

п. 18.2

Задачи

582. Докажите, что в равностороннем треугольнике:

а) любые две медианы пересекаются под углом 60°;

б) расстояния от вершин до прямых, содержащих противолежащие стороны, равны.

583. Прямая l пересекает отрезок AB в его середине. Докажите, что расстояния от точек A и B до прямой l равны.

§ 21. Задачи на построение

21.1. Что такое задачи на построение?

Циркуль — от латинского «циркулус» — окружность, круг

Задачи на построение представляют собой отдельный класс геометрических задач, решение которых подчиняется определенным правилам.

Цель решения этих задач — построение геометрических фигур с заданными свойствами с помощью чертежных инструментов. Если в условии задачи нет специальных примечаний, то имеются в виду построения с помощью циркуля и линейки.

С помощью ***линейки*** можно провести:

- произвольную прямую;
- прямую, проходящую через данную точку;
- прямую, проходящую через две данные точки.

Заметим, что никаких других построений линейкой выполнять нельзя. В частности, с помощью линейки нельзя откладывать отрезки заданной длины.

С помощью ***циркуля*** можно:

- провести окружность (часть окружности) произвольного или заданного радиуса с произвольным или заданным центром;
- отложить от начала данного луча отрезок заданной длины.

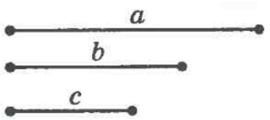
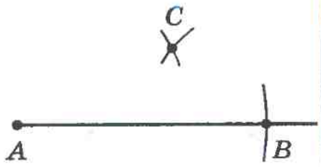
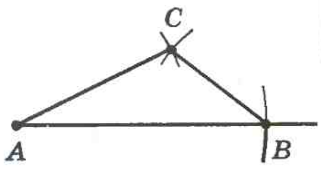
Кроме того, можно отмечать на плоскости точки и находить точки пересечения прямых и окружностей.

Все перечисленные операции называют **элементарными построениями**, а решить задачу на построение — это значит найти последовательность элементарных построений, после выполнения которых искомая фигура считается построенной, и доказать, что именно эта фигура удовлетворяет условию задачи.

Итак, решение задач на построение заключается не столько в самом построении фигуры, сколько в нахождении способа построения и доказательстве того, что полученная фигура искомая.

21.2. Основные задачи на построение

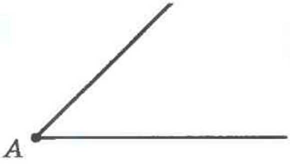
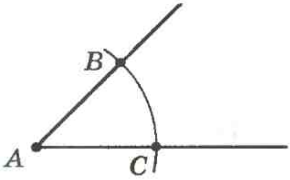
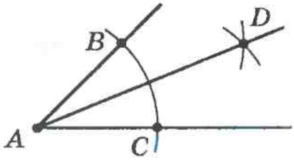
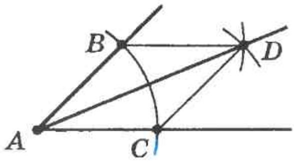
Если каждый шаг построений описывать полностью, решение некоторых задач может оказаться довольно громоздким. С целью упрощения работы выделяют несколько важнейших задач, которые считаются основными и не детализируются каждый раз при решении более сложных задач.

ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА С ДАННЫМИ СТОРОНАМИ	
	Пусть даны отрезки длиной a, b и c. Построим треугольник со сторонами a, b и c.
	Проведем произвольный луч и отметим на нем точку A. Раствором циркуля, равным a, построим окружность с центром A. Пусть B — точка пересечения этой окружности с лучом.
	Раствором циркуля, равным b, опишем окружность с центром A, а раствором циркуля, равным c,— окружность с центром B. Пусть C — точка пересечения этих окружностей.
	Проведем отрезки AC и BC. По построению треугольник ABC имеет стороны длиной a, b и c, то есть треугольник ABC искомый[1].

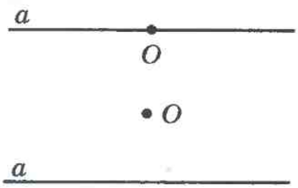
[1] По данным задачи можно построить четыре разных треугольника с общей стороной AB. По третьему признаку эти треугольники равны, то есть совмещаются наложением. В таких случаях решением задачи считают любой из этих равных треугольников.

Отметим, что эта задача имеет решение при условии, что длины отрезков a, b и c удовлетворяют неравенству треугольника.

С помощью описанных операций несложно решить задачу ***о построении угла, равного данному неразвернутому углу A.*** Для этого достаточно отложить на сторонах данного угла A отрезки AB и AC и построить треугольник, равный треугольнику ABC.

ПОСТРОЕНИЕ БИССЕКТРИСЫ УГЛА	
	Пусть дан неразвернутый угол с вершиной A. Построим его биссектрису.
	С помощью циркуля построим окружность произвольного радиуса с центром A. Пусть B и C — точки пересечения этой окружности со сторонами данного угла.
	Построим окружности того же радиуса с центрами B и C. Пусть D — точка пересечения этих окружностей.
	Проведем луч AD. По построению $\triangle ABD = \triangle ACD$ (по третьему признаку). Отсюда $\angle BAD = \angle CAD$, то есть AD — биссектриса данного угла A.

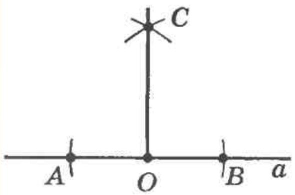
ПОСТРОЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ПРЯМОЙ



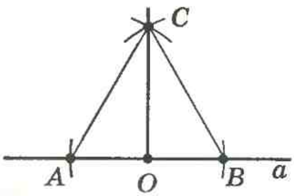
Пусть даны прямая a и точка O. Построим прямую, проходящую через точку O и перпендикулярную прямой a. Рассмотрим два случая.

Точка O лежит на прямой a

Построим окружность произвольного радиуса с центром O. Пусть A и B — точки пересечения этой окружности с прямой a.

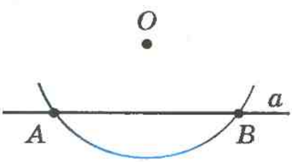


Построим окружности радиуса AB с центрами A и B. Пусть C — одна из точек их пересечения. Проведем прямую через точки C и O.

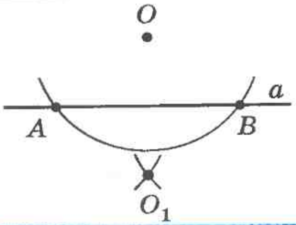
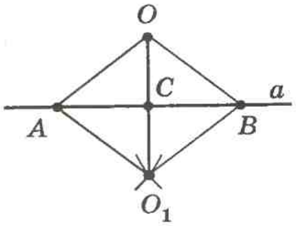


По построению отрезок CO — медиана равностороннего треугольника ABC, которая является также его высотой. Итак, $CO \perp AB$, то есть прямая CO — искомая.

Точка O не лежит на прямой a



Построим окружность с центром O, которая пересекает прямую a в точках A и B.

	Построим окружности того же радиуса с центрами A и B. Пусть O_1 — точка пересечения этих окружностей, причем точки O и O_1 лежат по разные стороны от прямой a.
	Проведем прямую OO_1. Пусть C — точка пересечения прямых OO_1 и a. По построению $\triangle AOO_1 = \triangle BOO_1$ (по третьему признаку). Отсюда $\angle AOC = \angle BOC$. Тогда OC — биссектриса равнобедренного треугольника AOB, проведенная к основанию. Она также является медианой и высотой треугольника. Следовательно, $OC \perp a$, то есть прямая OO_1 — искомая.

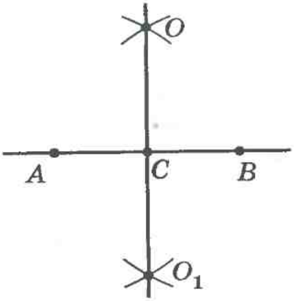


Рис. 172. Построение середины отрезка

Отметим, что построенная прямая OO_1 перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину. Такую прямую называют **серединным перпендикуляром к отрезку.**

Пользуясь описанными построениями, несложно решить задачи на ***построение середины данного отрезка и на построение прямой, параллельной данной.***

Для построения середины отрезка AB достаточно провести две окружности радиуса AB с центрами в точках A и B (рис. 172). Обозначив точки пересечения этих окружностей через O и O_1, можно определить середину отрезка AB как точку пересечения прямых AB и OO_1, после чего провести доказательство, аналогичное доказательству предыдущей задачи.

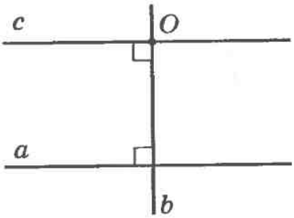


Рис. 173. Построение прямой, параллельной данной

Для построения прямой, проходящей через данную точку O параллельно данной прямой a, достаточно провести через точку O прямую b, перпендикулярную a, и прямую c, перпендикулярную b (рис. 173). Тогда $a \parallel c$ по теореме о двух прямых, перпендикулярных третьей.

Таким образом, ***основными задачами на построение*** будем считать следующие:

1) построение треугольника с данными сторонами;
2) построение угла, равного данному неразвернутому углу;
3) построение биссектрисы данного неразвернутого угла;
4) построение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой;
5) построение серединного перпендикуляра к данному отрезку;
6) построение середины данного отрезка;
7) построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.

Если эти задачи применяются как вспомогательные при решении более сложных задач, соответствующие построения можно подробно не описывать.

21.3.* Решение задач на построение

Решение задач на построение состоит из четырех основных этапов: ***анализ, построение, доказательство, исследование.***

ОБЩАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ		
1	Анализ	Выполнение рисунка-эскиза искомой фигуры и установление связи между ее элементами и данными задачи. Определение плана построения искомой фигуры.
2	Построение	Осуществление плана, разработанного в ходе анализа.
3	Доказательство	Обоснование того, что построенная фигура имеет заданную форму, а размеры и расположение ее элементов удовлетворяют условию задачи.
4	Исследование[1]	Определение количества решений и условий существования искомой фигуры или обоснование невозможности ее построения.

Если задача достаточно проста, то отдельные этапы ее решения можно проводить устно.

[1] В некоторых задачах для исследования необходимы геометрические утверждения и соотношения, изучаемые в 8—9 классах. В этих случаях исследования мы будем проводить в сокращенном виде или вообще опускать.

Рассмотрим на конкретных примерах некоторые методы решения задач на построение.

Задача

Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них.

Решение

Пусть a, b, m_b — две стороны и медиана треугольника ABC, который необходимо построить (рис. 174).

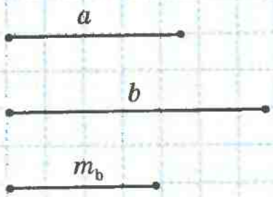


Рис. 174

Анализ

Допустим, что треугольник ABC построен (рис. 175). Если BM — данная медиана треугольника ABC, то в треугольнике ABM известны длины трех сторон ($AB = a$, $BM = m_b$, $AM = \frac{b}{2}$ по условию задачи). Таким образом, мы можем построить треугольник ABM и найти вершины A и B искомого треугольника. Чтобы найти вершину C, достаточно отложить на луче AM отрезок MC длиной $\frac{b}{2}$.

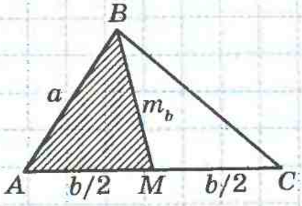


Рис. 175

Построение

1. Разделим отрезок b пополам.
2. Построим треугольник ABM со сторонами $AB = a$, $BM = m_b$, $AM = \frac{b}{2}$.
3. Отложим на луче AM отрезок $MC = \frac{b}{2}$.
4. Соединим точки B и C.

Доказательство

В треугольнике ABC $AB = a$, $AC = b$, $BM = m_b$, BM — медиана (по построению). Следовательно, треугольник ABC искомый.

Исследование

Задача имеет решение при условии существования треугольника ABM, то есть, если числа a, m_b, $\frac{b}{2}$ удовлетворяют неравенству треугольника.

Сравним только что решенную задачу с задачей о доказательстве равенства треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из них (п. 13.1). Решая обе эти задачи, мы использовали треугольник ABM, в котором все стороны известны по условию. Его рассмотрение помогло в задаче на доказательство получить необходимые соотношения для углов данных треугольников, а в задаче на построение — найти две вершины искомого треугольника. Треугольник ABM называют ***вспомогательным***, а соответствующий метод решения — ***методом вспомогательного треугольника.***

Решение задач на построение с помощью метода вспомогательного треугольника подробно рассмотрено в Приложении 2.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

584. Опишите, как разделить:

а) данный отрезок на четыре равных отрезка;

б) данный угол в отношении 1 : 3.

585. Опишите, как построить:

а) угол 45°;

б) угол 135°.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

586. Решите в тетради или на экране компьютера основные задачи на построение. Выделите полужирными линиями исходные данные задачи, пунктирными линиями — промежуточные построения, красным цветом — результаты решения.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

587. Даны отрезки a и b, причем $a < b$. Постройте отрезок длиной:

а) $3a$; б) $b-a$; в) $a+2b$.

→ **588.** Даны острые углы α и β, причем $\alpha < \beta$. Постройте угол с градусной мерой:

а) $0,5\beta$;

б) $\alpha + \beta$;

в) $2\beta - \alpha$.

589. Постройте треугольник ABC по следующим данным:

а) $AB = 4$ см, $BC = 3$ см, $\angle B = 45°$;

б) $AB = 6$ см, $BC = 10$ см, $AC = 8$ см;

в) $AB = 3$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 70°$.

→ **590.** Постройте треугольник ABC по следующим данным:

а) $AC = 5$ см, $AB = 3$ см, $\angle A = 60°$;

б) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $AC = 6$ см;

в) $BC = 4$ см, $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$.

591. Дан треугольник ABC. Постройте треугольник ABC_1, равный данному треугольнику.

592. Дан треугольник. Постройте все его:

а) медианы;

б) биссектрисы;

в) высоты, если данный треугольник остроугольный;

г) высоты, если данный треугольник тупоугольный.

→ **593.** Постройте:

а) отрезок, равный расстоянию между двумя данными параллельными прямыми;

б) касательную, проходящую через точку данной окружности.

Уровень Б

594. Постройте угол $60°$.

→ **595.** Постройте углы и $120°$ и $30°$.

596. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и периметру.

→ **597.** Постройте равнобедренный треугольник по основанию и высоте, проведенной к основанию.

598. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при основании.

599. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

600. Постройте прямоугольный треугольник по катету и углу, противолежащему данному катету.

601. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и углу, противолежащему основанию.

Уровень В

602. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и медиане, проведенной к боковой стороне.

603. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

604. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведенной к этой стороне.

605. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и высоте, проведенной к одной из двух других сторон.

606. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

607. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и разности двух других сторон.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 22

Теоретический материал

- определение окружности
- перпендикуляр к прямой
- биссектриса угла

п. 19.1
§ 9; п. 3.2

Задачи

608. На сторонах острого угла O отмечены точки A и B, причем $OA = OB$. Через эти точки проведены прямые, пересекающиеся в точке C. Докажите, что OC — биссектриса данного угла, если:

а) $AC \perp OA$, $BC \perp OB$;

б) $AC \perp OB$, $BC \perp OA$.

609. Найдите расстояние между параллельными прямыми, если от секущей, пересекающей их под углом 30°, они отсекают отрезок длиной 22 см.

§ 22. Геометрическое место точек

22.1. Понятие о геометрическом месте точек

До сих пор мы описывали геометрические фигуры с помощью определений и устанавливали их особенности путем доказательства свойств и признаков, относящихся к фигуре в целом. Для случаев, когда определенное свойство и соответствующий ему признак имеет каждая точка фигуры, существует еще один способ описания.

Определение

Геометрическим местом точек (сокращенно **ГМТ**) на плоскости называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, удовлетворяющих определенному условию.

Например, по определению **окружность является геометрическим местом точек, удаленных от данной точки плоскости на одинаковое расстояние.**

В определении ГМТ обратим внимание на слово «всех». Оно указывает на то, что для выяснения геометрического места точек недостаточно доказать, что точки указанной фигуры удовлетворяют определенному условию (то есть установить свойство точек). Необходимо также показать, что других точек, удовлетворяющих данному условию, на плоскости нет, то есть доказать соответствующий признак: если точка удовлетворяет указанному условию, то она принадлежит данной фигуре.

Иначе говоря, *доказательство того, что некоторая фигура F является геометрическим местом точек, удовлетворяющих условию P, состоит из доказательства двух утверждений — прямого и обратного:*

1) *если определенная точка принадлежит фигуре F, то она удовлетворяет условию P;*
2) *если определенная точка удовлетворяет условию P, то она принадлежит фигуре F.*

22.2. Основные теоремы о ГМТ

Часто геометрическим местом точек является прямая или часть прямой. Докажем две важные теоремы о ГМТ.

Теорема (о серединном перпендикуляре)

Серединный перпендикуляр к отрезку является геометрическим местом точек, равноудаленных от концов этого отрезка.

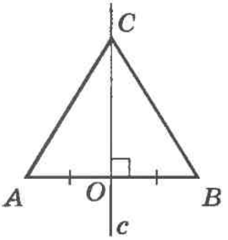


Рис. 176. Точка серединного перпендикуляра равноудалена от концов отрезка

Доказательство

□ Нам необходимо доказать два утверждения:

1) если точка принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку, то она равноудалена от концов этого отрезка;
2) если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру к этому отрезку.

Докажем первое из этих утверждений.

Пусть точка C лежит на прямой c, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину — точку O (рис. 176). В треугольнике ACB отрезок CO — медиана и высота, значит, этот треугольник равнобедренный с основанием AB. Отсюда $AC = BC$, то есть расстояния от точки C до концов отрезка AB равны.

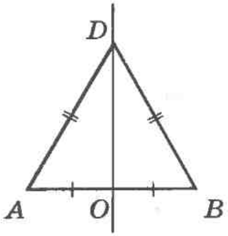


Рис. 177. Точка, равноудаленная от концов отрезка, принадлежит серединному перпендикуляру

Докажем второе утверждение.

Пусть точка D равноудалена от точек A и B, то есть $AD = BD$ (рис. 177). Тогда в равнобедренном треугольнике ADB отрезок DO — медиана, проведенная к основанию, которая является также и высотой. Таким образом, прямая DO — серединный перпендикуляр к отрезку AB. Теорема доказана. ■

Теорема (о биссектрисе угла)

Биссектриса неразвернутого угла является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон этого угла[1].

Доказательство

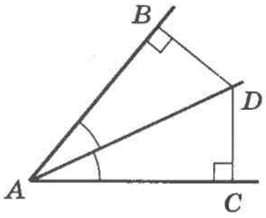


Рис. 178. Точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон

☐ По аналогии с предыдущей теоремой докажем сначала, что любая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла.

Пусть даны неразвернутый угол с вершиной A и точка D на его биссектрисе (рис. 178). Опустим из точки D перпендикуляры DB и DC на стороны данного угла. По определению, DB и DC — расстояния от точки D до сторон угла A.

Прямоугольные треугольники DBA и DCA имеют общую гипотенузу DA, $\angle DAB = \angle DAC$ по условию. Тогда $\triangle DBA = \triangle DCA$ по гипотенузе и острому углу. Отсюда $DB = DC$, то есть точка D равноудалена от сторон данного угла.

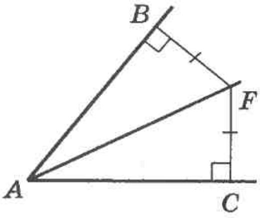


Рис. 179. Точка, равноудаленная от сторон угла, принадлежит его биссектрисе

Теперь докажем, что любая точка, равноудаленная от сторон угла, принадлежит его биссектрисе. Пусть F — некоторая точка, равноудаленная от сторон угла A, то есть перпендикуляры FB и FC, опущенные из точки F на стороны данного угла, равны (рис. 179). Соединим точки F и A. Тогда прямоугольные треугольники FBA и FCA равны по гипотенузе и катету.

Отсюда $\angle FAB = \angle FAC$, то есть луч AF — биссектриса угла A.

Теорема доказана. ■

---

[1] Здесь и далее, говоря о точках, равноудаленных от сторон угла, мы имеем в виду точки, лежащие внутри угла и равноудаленные от прямых, содержащих его стороны.

22.3. Метод геометрических мест

Понятие ГМТ часто используется при решении задач на построение. Например, пусть необходимо построить точку, удовлетворяющую условиям P_1 и P_2. Если геометрическим местом точек, удовлетворяющих условию P_1, является фигура F_1, а геометрическим местом точек, удовлетворяющих условию P_2,— фигура F_2, то искомая точка будет общей для фигур F_1 и F_2, то есть точкой их пересечения.

Рассуждения по такой схеме лежат в основе ***метода геометрических мест.***

Задача

Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

Решение

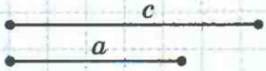


Рис. 180

Пусть в искомом прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна c, катет BC равен a (рис. 180). Для построения треугольника воспользуемся методом геометрических мест. Для этого на стороне прямого угла C отложим катет BC, $BC = a$ (рис. 181). Точка A должна принадлежать второй стороне прямого угла и быть удаленной от точки B на расстояние c, то есть A — точка пересечения окружности с центром B радиуса c со второй стороной прямого угла. Построенные точки A, B и C являются вершинами искомого прямоугольного треугольника ABC. В соответствии со следствием теоремы о сравнении сторон и углов треугольника задача имеет решение при условии $a < c$.

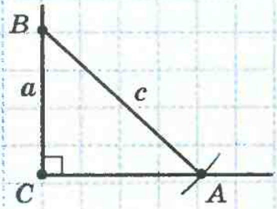


Рис. 181

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

610. Фигура F — геометрическое место точек, удовлетворяющих условию P. Верно ли, что:

а) на плоскости существуют точки, удовлетворяющие условию P, но не принадлежащие F;

б) среди точек фигуры F есть точки, не удовлетворяющие условию P;

в) любая точка, удовлетворяющая условию P, принадлежит фигуре F?

611. Можно ли круг радиуса 5 см считать геометрическим местом точек, удаленных от центра этого круга на расстояние:

а) равное 5 см;

б) не более 5 см;

в) не менее 5 см;

г) не более 4 см?

612. Отрезок AB равен 4 см. Можно ли считать серединный перпендикуляр к этому отрезку геометрическим местом точек, которые:

а) удалены от A и B на 2 см;

б) удалены от A и B на одинаковые расстояния;

в) являются вершинами равнобедренных треугольников с основанием AB?

613. Луч BD — биссектриса угла ABC. Можно ли считать его геометрическим местом точек, которые равноудалены:

а) от лучей BA и BC;

а) от прямых BA и BC?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

614. Начертите треугольник ABC.

а) Постройте геометрическое место точек, равноудаленных от вершин A и B.

б) Постройте геометрическое место точек, равноудаленных от сторон AC и AB.

в) Отметьте точку пересечения построенных геометрических мест и опишите ее свойства.

→ **615.** Начертите окружность с центром O и проведите хорду AB, не являющуюся диаметром.

а) Постройте геометрическое место точек, равноудаленных от точек A и B. Проходит ли построенная прямая через точку O? Почему?

б) Постройте геометрическое место точек окружности, равноудаленных от сторон угла AOB.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

616. Дан отрезок AB. Постройте геометрическое место точек C, таких, что треугольник ABC равносторонний.

→ **617.** Дан луч BC. Постройте геометрическое место точек A таких, что угол ABC прямой.

618. На географической карте Украины постройте точку, равноудаленную от Чернигова, Луцка и Запорожья.

→ **619.** Даны точки A, B, C. Постройте точку, которая равноудалена от точек A и B и находится на заданном расстоянии от точки C.

620. Постройте точку, которая равноудалена от сторон данного угла и лежит на расстоянии d от его вершины.

→ **621.** Точка A лежит на данной окружности радиуса R. Постройте точки данной окружности, которые удалены от точки A на расстояние R.

Уровень Б

622. Докажите, что геометрическим местом точек, удаленных от данной прямой a на расстояние d, являются две прямые, параллельные a и отстоящие от нее на d.

→ **623.** Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух параллельных прямых, является прямая, параллельная данным прямым и проходящая через середину их общего перпендикуляра. Докажите.

624. Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через данные точки A и B.

625. Найдите геометрическое место центров окружностей радиуса R, проходящих через данную точку A.

626. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся сторон данного неразвернутого угла.

627. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место точек C, которые являются вершинами треугольников с основанием AB и заданной высотой h.

628. Дана прямая AB. Постройте точки, которые равноудалены от точек A и B и лежат на расстоянии l от прямой AB.

629. На сторонах неразвернутого угла B отмечены точки A и C, причем $AB \neq CB$. Постройте точку, равноудаленную от сторон данного угла и равноудаленную от точек A и C. Сколько решений имеет задача, если $AB = CB$?

630. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из этих сторон.

Уровень В

631. Найдите геометрическое место середин всех хорд данной окружности, параллельных данной прямой.

632. Найдите геометрическое место середин всех хорд данной окружности, имеющих заданную длину.

633. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности с центром O в данной точке A.

634. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых.

635. Постройте окружность, касающуюся каждой из двух пересекающихся прямых, причем одной из них — в данной точке.

636. Постройте окружность данного радиуса, которая проходит через данную точку и касается данной прямой.

637. На рисунке 182 изображен угол (ab), вершина которого недоступна. Постройте биссектрису этого угла.

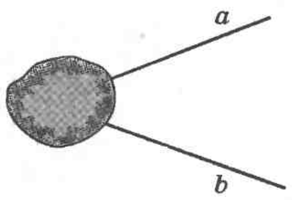


Рис. 182

638. Постройте треугольник по стороне и двум высотам, проведенным к другим сторонам.

639. Постройте треугольник по стороне и проведенным к ней медиане и высоте.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 23

Теоретический материал

- окружность
- касательная к окружности

§ 19; 20

Задачи

640. Окружность касается катетов прямоугольного треугольника в точках A и B, а центр окружности O лежит на гипотенузе. Найдите угол AOB.

641. Вершины A и B треугольника ABC лежат на окружности с центром O, причем точка O лежит на стороне AC. Докажите, что касательная к окружности в точке B параллельна прямой AC, если $\angle BAO = 45°$.

§ 23. Описанная и вписанная окружности треугольника

23.1. Окружность, описанная около треугольника

Определение

Окружность называется **описанной около треугольника**, если все вершины треугольника лежат на данной окружности.

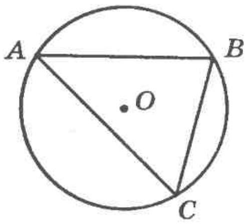


Рис. 183. Окружность, описанная около треугольника ABC

В этом случае говорят, что треугольник является вписанным в данную окружность.

На рисунке 183 окружность с центром O описана около треугольника ABC.

Поскольку все вершины треугольника лежат на описанной окружности, то все они равноудалены от центра окружности. Этот факт лежит в основе доказательства теоремы об описанной окружности.

Теорема (об окружности, описанной около треугольника)

Около любого треугольника можно описать единственную окружность. Центр этой окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

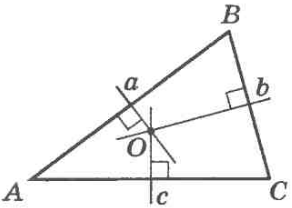


Рис. 184. Точка O — точка пересечения серединных перпердикуляров к сторонам треугольника ABC

Доказательство

□ Пусть прямые a и b — серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC данного треугольника ABC (рис. 184).

Сначала докажем методом от противного, что прямые a и b пересекаются. Предположим, что эти прямые не пересекаются, то есть $a \parallel b$. Тогда поскольку $a \perp AB$, то $AB \perp b$ по следствию из теоремы о свойствах углов при параллельных прямых. Но $BC \perp b$ по построению, отсюда $AB \parallel BC$, что невозможно по условию. Следовательно, прямые a и b пересекаются в некоторой точке O.

По теореме о серединном перпендикуляре точка O равноудалена от точек A и B (то есть $OA = OB$) и равноудалена от точек B и C (то есть $OB = OC$). Отсюда $OA = OB = OC$. Следовательно, существует окружность с центром O, проходящая через все вершины треугольника ABC.

Докажем методом от противного, что такая окружность единственна.

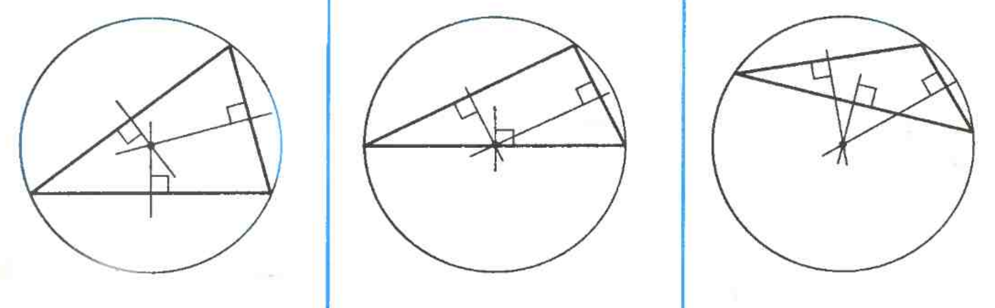
Допустим, что около треугольника можно описать еще одну окружность, отличную от построенной. Тогда центр этой окружности равноудален от вершин треугольника и потому совпадает с O, точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до вершин треугольника. Значит, эта окружность совпадает с построенной.

И наконец, серединный перпендикуляр c к стороне AC содержит все точки, равноудаленные от точек A и C. Поскольку точка O также равноудалена от точек A и C, то этот серединный перпендикуляр проходит через точку O. Теорема доказана. ■

Следствие

Три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Отметим, что центр описанной окружности не всегда лежит внутри треугольника; он также может лежать на одной из его сторон или вне треугольника (рис. 185).



Внутри треугольника | На стороне треугольника | Вне треугольника

Рис. 185. Расположение центра описанной окружности

23.2. Окружность, вписанная в треугольник

Определение

Окружность называется **вписанной в треугольник**, если она касается всех его сторон.

В этом случае треугольник является описанным около данной окружности.

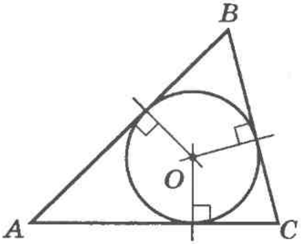


Рис. 186. Окружность, вписанная в треугольник ABC

На рисунке 186 окружность с центром O вписана в треугольник ABC. Прямые, содержащие стороны треугольника, являются касательными к вписанной окружности, а точки касания лежат на сторонах треугольника. Радиусы вписанной окружности, проведенные в точки касания, перпендикулярны сторонам данного треугольника.

Далее в таком случае мы будем говорить, что центр вписанной окружности равноудален от сторон треугольника.

Теорема (об окружности, вписанной в треугольник)

В любой треугольник можно вписать единственную окружность. Центр этой окружности является точкой пересечения биссектрис треугольника.

Доказательство

☐ Пусть AD и BE — биссектрисы данного треугольника ABC (рис. 187).

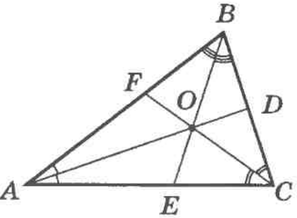


Рис. 187. Точка O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC

Докажем методом от противного, что эти биссектрисы пересекаются. Пусть AD и BE не пересекаются. Тогда $AD \parallel BE$, а углы BAD и ABE — внутренние односторонние при параллельных прямых AD и BE и секущей AB. Сумма этих углов должна быть равна 180°, что противоречит теореме о сумме углов треугольника.

Итак, биссектрисы AD и BE пересекаются в некоторой точке O. Тогда по теореме о биссектрисе угла точка O равноудалена от сторон AB и AC, а также равноудалена от сторон AB и BC. Таким образом, три перпендикуляра, опущенные из точки O на стороны данного треугольника, равны. Следовательно, существует окружность с центром O, которая касается всех сторон треугольника ABC.

Докажем методом от противного, что эта окружность единственна.

Допустим, что в треугольник можно вписать еще одну окружность, отличную от построенной. Тогда ее центр одинаково удален от сторон треугольника и совпадает с O, точкой пересечения биссектрис треугольника. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до сторон треугольника. Таким образом, эта окружность совпадает с построенной.

И наконец, биссектриса CF содержит все точки, равноудаленные от сторон CA и CB. Поскольку точка O также равноудалена от CA и CB, то эта биссектриса проходит через точку O. Теорема доказана. ■

Следствие

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Поскольку все биссектрисы треугольника лежат внутри него, то и центр вписанной окружности всегда лежит внутри треугольника.

Задача

В равностороннем треугольнике центры описанной и вписанной окружностей совпадают. Докажите.

Решение

В равностороннем треугольнике ABC биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 являются также медианами и высотами (рис. 188). Это означает, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 — серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC. Поскольку все они пересекаются в одной точке, то эта точка — центр описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

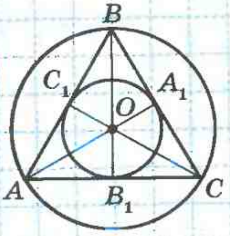


Рис. 188

Верно также и обратное утверждение: ***если в треугольнике центры описанной и вписанной окружностей совпадают, то этот треугольник равносторонний.*** Попробуйте доказать это самостоятельно.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

642. Даны треугольник и окружность. Определите, является ли данная окружность описанной около треугольника или вписанной в него, если:

а) центр окружности равноудален от всех сторон треугольника;

б) центр окружности равноудален от всех вершин треугольника;

в) все стороны треугольника — хорды окружности;

г) все стороны треугольника касаются окружности.

643. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC пересекаются в точке O. Означает ли это, что:

а) $OA = OB$;

б) $\angle ABO = \angle CBO$;

в) точка O может лежать на одной из сторон треугольника?

644. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Означает ли это, что:

а) $OA = OB$;

б) $\angle ABO = \angle CBO$;

в) точка O может лежать вне данного треугольника?

645. Около треугольника описана окружность и в него вписана окружность. Могут ли эти окружности иметь равные радиусы; общий центр?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

646. Начертите окружность и отметьте на ней точки A, B и C. Проведите перпендикуляры из центра окружности к сторонам треугольника ABC. В каком отношении они делят стороны треугольника?

647. Начертите окружность с центром O и проведите к ней три попарно пересекающиеся касательные. Обозначьте точки пересечения касательных A, B и C. В каком отношении лучи AO, BO и CO делят углы треугольника ABC?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

648. Около равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ описана окружность с центром O (рис. 189).

а) Докажите, что $\angle AOB = \angle COB$.

б) Найдите угол AOC, если $\angle ABC = 40°$.

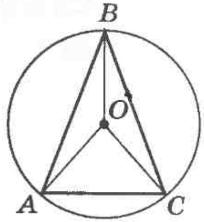


Рис. 189

→ **649.** В равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$ вписана окружность с центром O (рис. 190).

а) Докажите, что треугольник AOC равнобедренный.

б) Найдите угол ABC, если $\angle AOC = 100°$.

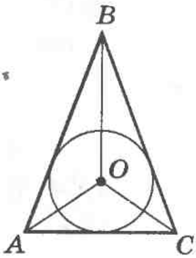


Рис. 190

650. Постройте окружность, вписанную в данный треугольник.

→ **651.** Постройте окружность, описанную около данного треугольника.

652. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, OD — расстояние от точки O до стороны AB. Найдите длину отрезка AB, если $AD = 9$ см.

→ **653.** Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите угол BAO, если $\angle BAC = 100°$.

Уровень Б

654. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите длину стороны AB, если $OA = 8$ см, $\angle AOB = 60°$.

→ **655.** В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Найдите угол BAC, если $AB = BC$, $\angle ABO = 35°$.

656. Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности.

657. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.

658. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вписанная окружность касается сторон треугольника в точках D, E и F (рис. 191). Найдите периметр треугольника, если $AF = 5$ см, $BD = 6$ см.

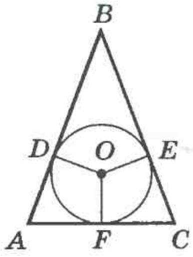


Рис. 191

659. Точка касания вписанной окружности делит боковую сторону равнобедренного треугольника на отрезки 3 см и 5 см, начиная от основания. Найдите периметр треугольника.

Уровень В

660. Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к этой стороне, и радиусу описанной окружности.

661. Постройте треугольник по высоте и медиане, проведенным из одной вершины, и радиусу описанной окружности.

662. Периметр равнобедренного треугольника равен 220 см. Точка касания вписанной окружности делит боковую сторону на отрезки в отношении 3 : 4. Найдите стороны треугольника. Сколько решений имеет задача?

663. а) В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон треугольника AB, BC и AC в точках D, E, F соответственно. Докажите, что $AD = \frac{AB + AC - BC}{2}$.

б) **(Опорная.) В прямоугольном треугольнике с катетами a, b и гипотенузой c радиус вписанной окружности вычисляется по формуле $r = \frac{a + b - c}{2}$.** Докажите.

664 (Опорная.)

а) **В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы.**

б) **Если радиус окружности, описанной около треугольника, равен половине его стороны, то этот треугольник прямоугольный.**

Докажите.

Задачи для подготовки к контрольной работе №4

1. Через точку A окружности с центром O проведены хорда AB и диаметр AC. Найдите угол BAC, если угол BOC равен 70°.

2. Прямые CA и CB — касательные к окружности с центром в точке O (рис. 192). Докажите, что OC — биссектриса угла AOB.

3. Две окружности с радиусами 32 см и 12 см касаются. Найдите расстояние между центрами окружностей. Сколько решений имеет задача?

4. Точка касания вписанной окружности делит сторону равностороннего треугольника на два отрезка, один из которых на 15 см меньше периметра треугольника. Найдите сторону треугольника.

5. Постройте равнобедренный треугольник по биссектрисе, проведенной к основанию, и радиусу описанной окружности.

6. Две равные и взаимно перпендикулярные хорды окружности точкой пересечения делятся на части длиной 4 см и 16 см (рис. 193). Найдите радиус окружности, которая касается этих хорд и имеет общий центр с данной окружностью.

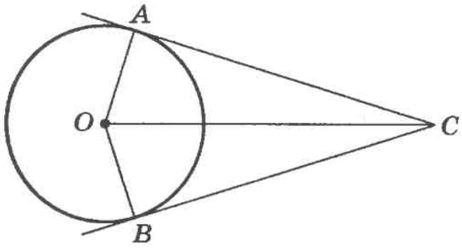


Рис. 192

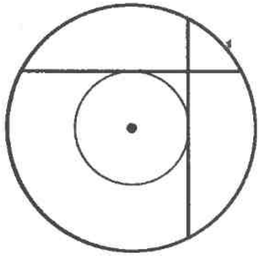


Рис. 193

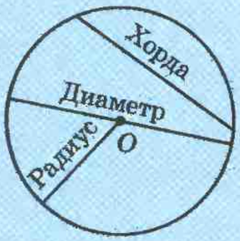
Итоги

ИТОГОВЫЙ ОБЗОР ГЛАВЫ III

ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от данной точки (центра окружности) на одинаковое расстояние.

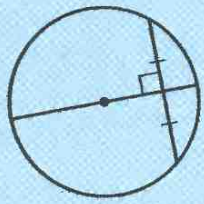
Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью и содержащая ее центр



Радиусом окружности (круга) называется расстояние от центра окружности до любой ее точки.

Хордой называется отрезок, соединяющий две точки окружности.

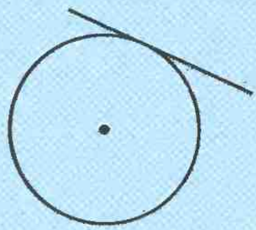
Диаметром называется хорда, проходящая через центр окружности.



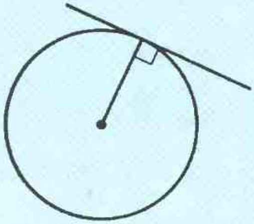
Диаметр, перпендикулярный хорде, проходит через ее середину.

Диаметр, проведенный через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде

КАСАНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

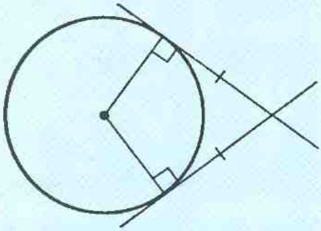


Касательной к окружности называется прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку



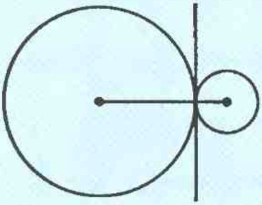
Свойство касательной: касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания

Признак касательной: если прямая проходит через точку окружности перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной к окружности



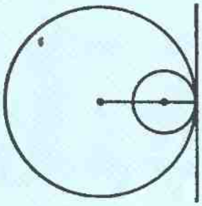
Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны

КАСАНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ



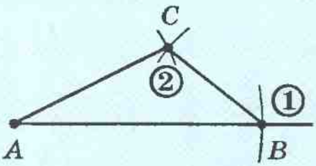
Внешнее касание

Две окружности, имеющие общую точку, касаются в этой точке, если они имеют в ней общую касательную

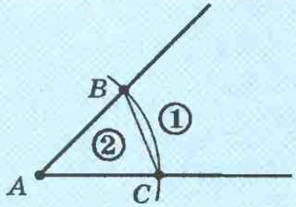


Внутреннее касание

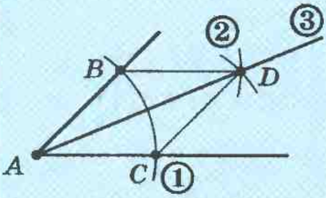
ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ



Построение треугольника с данными сторонами

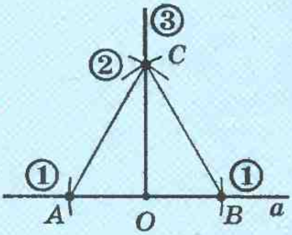


Построение угла, равного данному

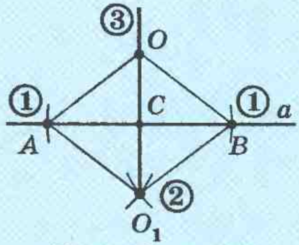


Построение биссектрисы данного неразвернутого угла

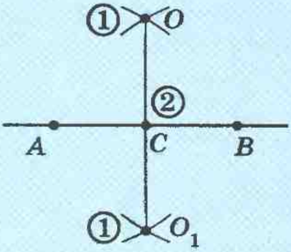
Построение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через точку O



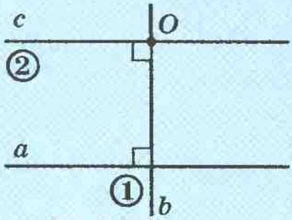
Точка O лежит на данной прямой



Точка O лежит вне данной прямой

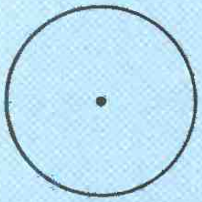


Построение середины данного отрезка и серединного перпендикуляра к нему

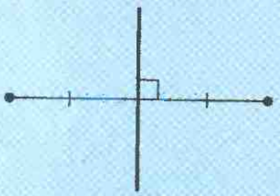


Построение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой

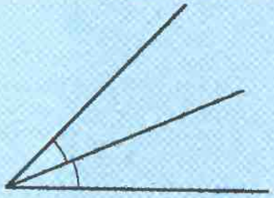
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК



Окружность — геометрическое место точек, удаленных от данной точки плоскости на одинаковое расстояние

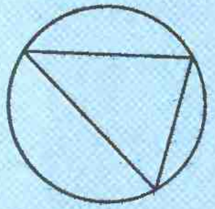


Серединный перпендикуляр к отрезку является геометрическим местом точек, равноудаленных от концов этого отрезка

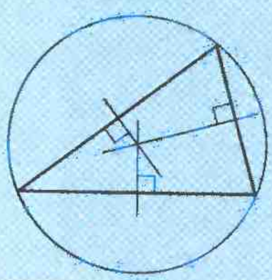


Биссектриса неразвернутого угла является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон этого угла

ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ

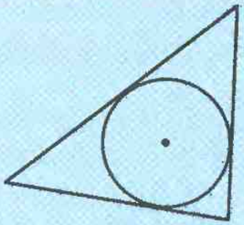


Окружность называется **описанной около треугольника**, если все вершины треугольника лежат на данной окружности

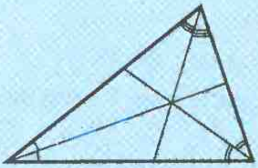


Около любого треугольника можно описать единственную окружность. Центр этой окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника

ВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ



Окружность называется **вписанной в треугольник**, если она касается всех его сторон



В любой треугольник можно вписать единственную окружность. Центр этой окружности является точкой пересечения биссектрис треугольника

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение окружности. В данной окружности укажите центр, радиус, диаметр, хорду.

2. Дайте определение касательной к окружности.

3. Сформулируйте и докажите свойство и признак касательной.

4. Сформулируйте и докажите свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности.

5. Дайте определение касания двух окружностей. Назовите виды касания окружностей.

6. Объясните, как построить треугольник с данными сторонами.

7. Объясните, как построить угол, равный данному неразвернутому углу.

8. Объясните, как разделить данный угол пополам.

9. Объясните, как провести через данную точку прямую, перпендикулярную данной прямой.

10. Объясните, как построить серединный перпендикуляр к данному отрезку.

11. Объясните, как разделить данный отрезок пополам.

12. Объясните, как провести через данную точку прямую, параллельную данной прямой.

13. Дайте определение геометрического места точек. Назовите геометрическое место точек, удаленных от данной точки на заданное расстояние.

14. Сформулируйте и докажите теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

15. Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисе угла.

16. Дайте определение окружности, описанной около треугольника.

17. Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около треугольника.

18. Дайте определение окружности, вписанной в треугольник.

19. Сформулируйте и докажите теорему об окружности, вписанной в треугольник.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

665. Параллельные прямые a и b являются касательными к окружности радиуса R. Найдите расстояние между данными прямыми.

666. Отрезок AB — диаметр окружности, хорды AC и BD параллельны друг другу. Докажите, что отрезок CD также является диаметром окружности.

667. На плоскости необходимо найти точки, удаленные от каждой из данных точек A и B на 3 см. Как зависит количество таких точек от длины отрезка AB?

668. Если прямая пересекает две окружности, имеющие общий центр (концентрические окружности), то ее отрезки, заключенные между этими окружностями, равны. Докажите.

669. Прямая, параллельная хорде AB, касается окружности в точке C. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

670. Докажите равенство равнобедренных треугольников по боковой стороне и радиусу описанной окружности.

671. Докажите, что радиусы окружностей, вписанных в равные треугольники, равны.

672. К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной a, проведена касательная, пересекающая две стороны треугольника. Найдите периметр треугольника, отсекаемого от данного.

673. На окружности строится последовательность точек: первая точка выбирается произвольно, а каждая последующая точка удалена от предыдущей на расстояние, равное радиусу окружности. Какое наибольшее количество различных точек можно построить таким способом?

674. Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на одной из его высот. Найдите углы треугольника, если один из них втрое больше другого.

675. Центр O окружности, описанной вокруг треугольника ABC, лежит на медиане BM. Найдите углы данного треугольника, если $\angle AOB = 140°$.

676. Известно, что $\triangle ABC = \triangle ADC$.

а) Докажите, что прямая AC — геометрическое место точек, равноудаленных от B и D.

б) Всегда ли луч AC является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла BAD? Ответ обоснуйте.

677. Постройте на катете прямоугольного треугольника точку, одинаково удаленную от гипотенузы и второго катета.

678. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону BC в точке M. Найдите угол MAC, если $\angle C = 70°$.

679. Точки D, E, F — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC. Докажите, что биссектрисы углов треугольника ABC перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника DEF.

680. Если две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B, то прямые AB и O_1O_2 взаимно перпендикулярны. Докажите.

681. Точка A лежит вне окружности с центром O. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через точку A.

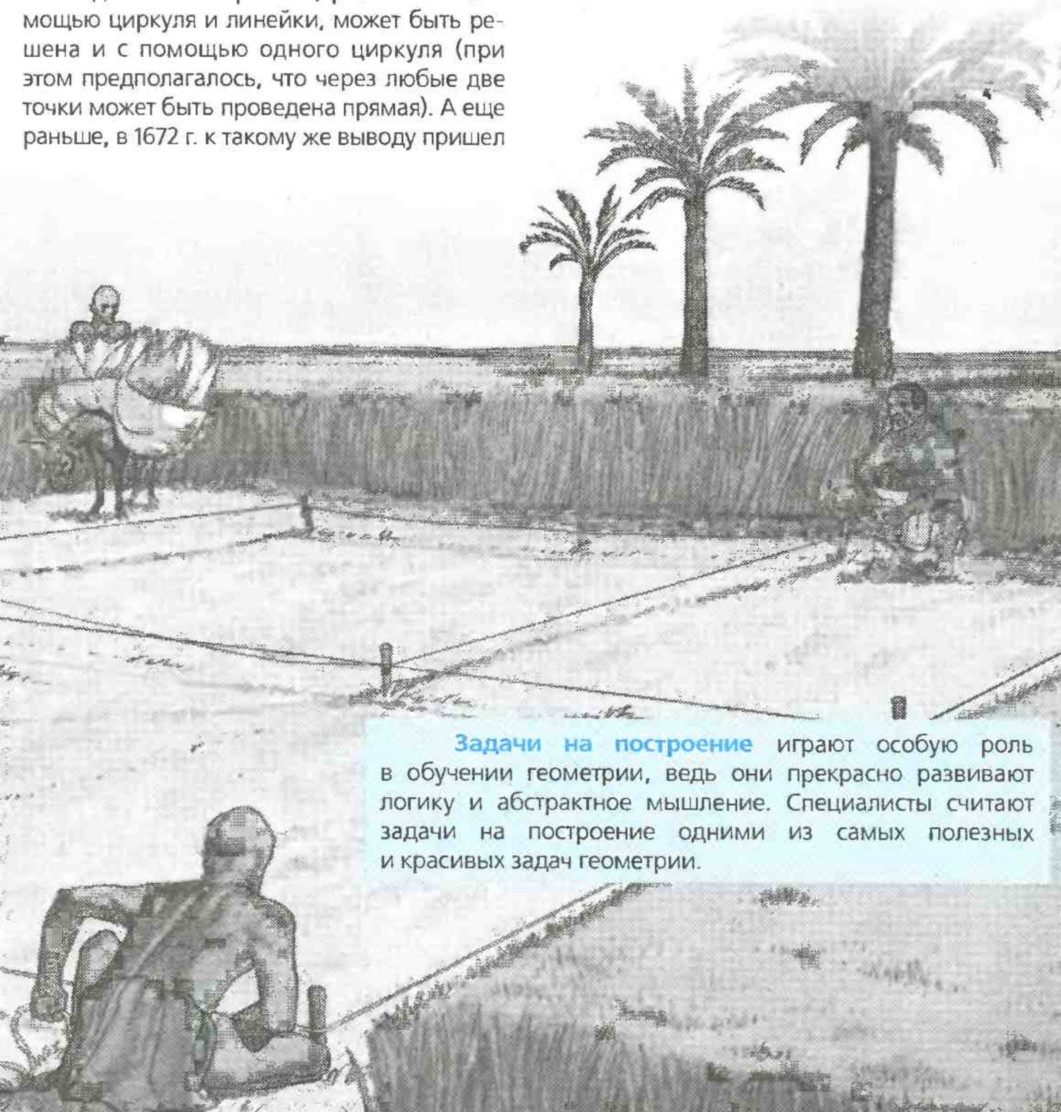
682. В треугольник ABC ($AB = c$, $BC = a$, $AC = b$) вписана окружность. Касательная к этой окружности пересекает стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Найдите периметр треугольника KBL.

Историческая справка

Простейшие геометрические задачи на построение. Возникновение задач на построение было обусловлено необходимостью измерения земельных участков и строительством. Значительных успехов в решении таких задач достигли древнегреческие ученые, прежде всего Евклид и Платон, в VII—III в. до н. э. Именно со времен Платона в решении задач на построение стали выделять четыре этапа: анализ, собственно построение, доказательство и исследование.

Задачи, которые невозможно решить с помощью циркуля и линейки. Особый интерес математиков древности вызывали три классические задачи, которые не удавалось решить с помощью циркуля и линейки — о квадратуре круга, трисекции угла и удвоении куба. Задача о квадратуре круга состояла в построении квадрата, площадь которого равна площади данного круга. В задаче о трисекции угла пытались разделить данный угол на три равные части. Такую задачу несложно решить для некоторых конкретных углов, например развернутого, прямого, но не для любого угла. Задача об удвоении куба состояла в построении куба, объем которого вдвое больше объема данного куба. Невозможность решить эти задачи с помощью циркуля и линейки была доказана в XIX в.

Циркуль или линейка? Интересна история ограничений в выборе инструментов для решения задач на построение. В X веке арабский математик Абу-ль-Вафа предложил ограничиться в геометрических построениях односторонней линейкой и циркулем постоянного раствора. В 1797 г. итальянец Лоренцо Маскерони доказал: любая задача на построение, решенная с помощью циркуля и линейки, может быть решена и с помощью одного циркуля (при этом предполагалось, что через любые две точки может быть проведена прямая). А еще раньше, в 1672 г. к такому же выводу пришел датчанин Г. Мор. Так, теорема о возможности построений только циркулем получила название «теоремы Мора — Маскерони». В 1833 г. швейцарский геометр Якоб Штейнер показал, что, при наличии на плоскости окружности с отмеченным центром, любую задачу на построение можно решить с помощью одной линейки.



Задачи на построение играют особую роль в обучении геометрии, ведь они прекрасно развивают логику и абстрактное мышление. Специалисты считают задачи на построение одними из самых полезных и красивых задач геометрии.

ТЕМАТИКА СООБЩЕНИЙ И РЕФЕРАТОВ К ГЛАВЕ III

1. Окружность в математических играх и головоломках.
2. Касание двух и трех окружностей.
3. Вневписанная окружность треугольника.
4. Методы геометрических построений. Построения, выполненные одним циркулем, одной линейкой.
5. Геометрические места точек.

Рекомендованные источники информации

1. Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение.— М.: УРСС, 2004.
2. Бурда М. І. Розв'язування задач на побудову.— К.: Рад. шк., 1986.
3. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения.— М.: Оникс, 1994.
4. Глейзер Г. И. История математики в школе. VII—VIII кл.— М.: Просвещение, 1982.
5. Интернет-библиотека МЦНМО. http://ilib.mirror0.mccme.ru/
6. Методика розв'язування задач на побудову / О. М. Астряб, О. С. Смогоржевський, М. Б. Гельфанд та ін.— К.: Рад. шк., 1960.
7. Перельман Я. И. Занимательная геометрия.— М.: Физматгиз, 1959.
8. Тесленко І. Ф. Геометричні побудови.— К.: Рад. шк., 1956.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Об аксиомах геометрии

В главе I вы ознакомились с начальными понятиями геометрии: точкой и прямой, а также лучом, отрезком и углом. Их основные свойства — аксиомы — не доказываются, но являются фундаментом для доказательства других утверждений.

Первую попытку провести логическое обоснование геометрии с помощью систематизированного перечня исходных положений (аксиом или постулатов) осуществил древнегреческий математик Евклид в своей знаменитой книге «Начала». На протяжении многих веков ученые-геометры опирались именно на евклидовы аксиомы. Но в XIX—XX вв., после создания Лобачевским неевклидовой геометрии, исследования системы геометрических аксиом вышли на качественно новый уровень. Одним из тех, кто внес заметный вклад в усовершенствование аксиоматики, был выдающийся украинский математик Алексей Васильевич Погорелов. В своей фундаментальной работе «Основания геометрии» (1983) он разработал собственную усовершенствованную систему аксиом евклидовой геометрии, которая решила проблему преодоления ряда существенных трудностей, возникших при введении понятия меры для отрезков и углов. Более того, А. В. Погорелов предложил упрощенный вариант геометрической аксиоматики, предназначенный именно для преподавания геометрии в школе. Этот вариант был положен в основу учебника «Геометрия», по которому свыше четверти века изучали и, без сомнения, будут изучать геометрию в школе.

Вот как выглядит система аксиом школьного курса, предложенная А. В. Погореловым.

I. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

II. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

III. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

IV. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

V. Каждый угол имеет градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

VI. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

VII. От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

VIII. Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник, в заданном расположении относительно данной полупрямой.

IX. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

Этой системы аксиом мы придерживаемся и в нашем учебнике с учетом принятой нами терминологии. Некоторые аксиомы были сформулированы в главе I, другие аксиомы не формулировались, но фактически использовались в рассуждениях. Отметим, что авторы не ставили цель представлять в этом учебнике абсолютно совершенную и логически завершенную систему аксиом, а сосредоточили основное внимание на практическом применении основных свойств простейших геометрических фигур при доказательстве теорем и решении задач. В дальнейшем, при изучении свойств фигур в пространстве, формулировки некоторых аксиом будут уточнены, а сама система аксиом — расширена.

Вообще же, система аксиом должна удовлетворять условиям ***независимости*** (не содержать аксиомы, которые можно вывести с помощью других аксиом), ***непротиворечивости*** (не иметь явных или скрытых противоречий) и ***полноты*** (содержать достаточное количество аксиом, чтобы доказать основные утверждения). Исследование проблем построения таких систем аксиом является содержанием одного из разделов современной геометрии.

Приложение 2. Метод вспомогательного треугольника

Метод вспомогательного треугольника применяется при решении многих задач на построение. Используя этот метод, необходимо придерживаться следующей последовательности действий:

1) предположив, что искомый треугольник построен, выполнить рисунок-эскиз и найти на нем вспомогательный треугольник, способ построения которого известен (или получить такой треугольник путем дополнительных построений);
2) установить, какие вершины искомого треугольника мы получим, построив вспомогательный треугольник;

3) определить на основании данных задачи последовательность построения других вершин, предположив, что вспомогательный треугольник построен;
4) осуществить все намеченные построения;
5) провести необходимые доказательства и исследования.

Довольно часто метод вспомогательного треугольника используют в сочетании с другими методами. Рассмотрим такие случаи на примерах.

Задача

Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме второго катета и гипотенузы.

Решение

Пусть a и $b+c$ — катет и сумма второго катета и гипотенузы треугольника ABC, который необходимо построить (рис. 194).

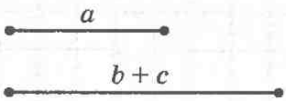


Рис. 194

Анализ

Допустим, что треугольник ABC построен (рис. 195). Отложим на луче BC отрезок CD длиной c и соединим точки A и D. Треугольник ABD прямоугольный с катетами a и $b+c$, то есть может быть построен по данным задачи и является вспомогательным. Построив его, получим вершины A и B искомого треугольника. Для построения вершины C воспользуемся одним из признаков равнобедренного треугольника. Точка C является точкой пересечения серединного перпендикуляра к стороне AD с лучом BD.

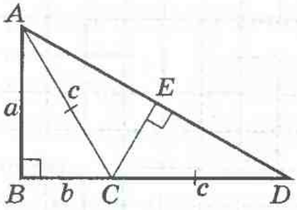


Рис. 195

Построение

1. Построим прямой угол с вершиной B.
2. Отложим на сторонах этого угла отрезки $AB=a$ и $BD=b+c$ и соединим точки A и D. Треугольник ABD вспомогательный.
3. Построим перпендикуляр к отрезку AD, который проходит через его середину E. Пусть C — точка его пересечения с лучом BD.
4. Соединим точки A и C.

Доказательство

В треугольнике ABC $\angle B=90°$, $AB=a$ по построению. В треугольнике ACD CE — высота и медиана (по построению). Значит, треугольник ACD равнобедренный с основанием AD, откуда $CA=CD=c$. По построению $BD=BC+CD=b+c$, следовательно, $BC+CA=b+c$. Таким образом, треугольник ABC искомый.

Исследование

В соответствии с неравенством треугольника, задача имеет решение при условии $a<b+c$.

При решении этой задачи мы использовали ***метод спрямления.*** Суть его такова: если в условии задачи на построение заданы сумма (или разность) отрезков, то на рисунке-эскизе их необходимо отложить на одной прямой от общего конца так, чтобы другие концы этих отрезков образовали заданный отрезок-сумму (разность). Благодаря такому дополнительному построению, удается получить вспомогательный треугольник.

Задача

Постройте треугольник по медиане и двум углам, на которые она делит угол треугольника.

Решение

Пусть m — медиана треугольника ABC, который необходимо построить, α и β — углы, на которые медиана делит угол треугольника (рис. 196).

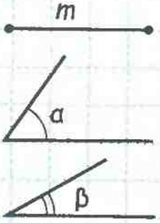


Рис. 196

Анализ

Допустим, что треугольник ABC построен (рис. 197). Применим метод удвоения медианы. Для этого на луче BM отложим отрезок MD, равный m, и соединим точки D и A. По первому признаку равенства треугольников $\Delta AMD=\Delta CMB$ ($AM=CM$ по определению медианы, $BM=DM$ по построению, $\angle AMD=$ $=\angle CMB$ как вертикальные). Тогда $\angle ADM=\angle CBM=\beta$.

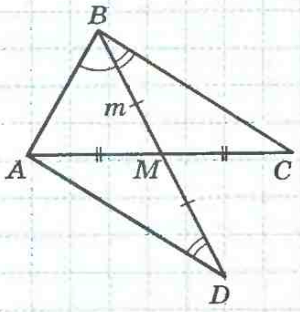


Рис. 197

Следовательно, треугольник ABD вспомогательный, поскольку его можно построить по стороне и прилежащим к ней углам ($BD=2m$, $\angle ABD=\alpha$, $\angle ADB=\beta$). Построив этот треугольник, получим вершины A и B искомого треугольника. Для построения вершины C достаточно удвоить в треугольнике ABD медиану AM.

Построение (сокращенный план)

1. Построим треугольник ABD, в котором $BD=2m$, $\angle ABD=\alpha$, $\angle ADB=\beta$. Треугольник ABD вспомогательный.
2. Построим в треугольнике ABD медиану AM и на ее продолжении отложим отрезок MC, равный AM.
3. Соединим точки B и C.

Доказательство

$\Delta AMD=\Delta CMB$ по первому признаку равенства треугольников ($MD=MB$, $AM=MC$ по построению, $\angle AMD=\angle CMB$ как вертикальные). Тогда $\angle CBM=\angle ADM=\beta$. Также по построению $\angle ABM=\alpha$. В треугольнике ABC $BM=m$ — медиана, поскольку по построению $BD=2m$ и $AM=MC$. Таким образом, треугольник ABC — искомый.

Задача

Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и высоте, опущенной на другую сторону.

Решение

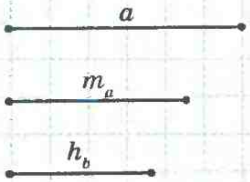


Рис. 198

Пусть a — сторона искомого треугольника ABC, m_a — проведенная к ней медиана, h_b — высота треугольника, проведенная к другой стороне (рис. 198). Построим этот треугольник.

Анализ

Пусть треугольник ABC построен (рис. 199). Тогда прямоугольный треугольник BCH можно построить по гипотенузе BC и катету BH: на стороне прямого

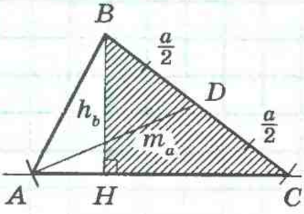


Рис. 199

угла H отложим катет $BH=h_b$, тогда C — точка пересечения окружности с центром B радиуса a со второй стороной прямого угла.

Таким образом, мы построим вершины B и C искомого треугольника. Для построения вершины A снова используем метод геометрических мест. Поскольку основание высоты BH принадлежит стороне AC, то точка A лежит на прямой HC. Поскольку $AD=m_a$, то точка A должна лежать на расстоянии m_a от точки D. Это означает, что A — точка пересечения прямой CH и окружности радиуса m_a с центром D.

Построение

1. Построим прямой угол с вершиной H.
2. Отложим на стороне этого угла отрезок BH, $BH=h_b$.
3. Построим окружность с центром B радиуса a. Пусть C — точка пересечения этой окружности с другой стороной прямого угла.
4. Соединим точки B и C и разделим отрезок BC пополам. Пусть точка D — его середина.
5. Проведем прямую CH.
6. Построим окружность с центром D радиуса m_a. Пусть A — точка пересечения этой окружности с прямой CH.
7. Соединим точки A и B.

Доказательство

В треугольнике ABC $BC=a$, $AD=m_a$, AD — медиана, $BH=h_b$, BH — высота (по построению). Следовательно, треугольник ABC — искомый.

Исследование

В соответствии со следствием теоремы о сравнении сторон и углов треугольника вспомогательный треугольник существует, если $h_b<a$. В зависимости от длины медианы m_a задача имеет одно или два решения, или не имеет ни одного.