А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 9 класса
общеобразовательных учебных заведений

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины

Харьков
«Гимназия»
2009

УДК 373:512
ББК 22.151я721
М52

Издано за счет государственных средств
Продажа запрещена

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины
(Приказ от 02.02.2009 г. № 56)

Ответственные за подготовку к изданию:

Главный специалист Министерства образования и науки Украины
Н. С. Прокопенко
Методист высшей категории Института инновационных технологий и содержания образования *О. А. Литвиненко*

Эксперты, которые провели экспертизу и рекомендовали учебник к изданию:

О. В. Горелова, учитель-методист общеобразовательной школы № 10 г. Измаила Одесской области
Е. М. Петечук, методист Закарпатского института последипломного педагогического образования
Е. Н. Синюкова, преподаватель кафедры геометрии Южноукраинского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского г. Одессы, кандидат физико-математических наук, доцент
В. В. Шарко, заведующий отделом топологии Института математики НАН Украины, доктор физико-математических наук, профессор
Т. Н. Хмара, ведущий научный сотрудник лаборатории математического и физического образования Института педагогики АПН Украины, кандидат педагогических наук

ISBN 978-966-474-020-0

ОТ АВТОРОВ

Дорогие девятиклассники!

В этом учебном году вы продолжите изучение геометрии. Надеемся, что вы успели полюбить эту важную и красивую науку, а значит, с интересом будете овладевать новыми знаниями, и этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделен на шесть параграфов, каждый из которых состоит из пунктов. В пунктах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным *шрифтом***. Также обращайте внимание на слова, напечатанные *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому пункту подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно те, которые обозначены «звездочкой» (*)). Свои знания можно проверить, решая задачи в тестовой форме из рубрики «Проверь себя».

Если после выполнения домашних заданий остается свободное время и вы хотите знать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный там, непрост. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успеха!

Уважаемые коллеги!

Мы надеемся, что этот учебник станет надежным помощником в вашем нелегком и благородном труде, и будем искренне рады, если он вам понравится.

В книге собран обширный и разнообразный дидактический материал. Однако за один учебный год все задачи решить невозможно, да в этом и нет необходимости. Вместе с тем намного удобнее работать, когда есть значительный запас задач. Это дает возможность реализовать принципы уровневой дифференциации и индивидуального подхода в обучении.

Красным цветом отмечены номера задач, которые рекомендуются для домашней работы, **синим** цветом — номера задач, которые с учетом индивидуальных особенностей учащихся класса на усмотрение учителя можно решать устно.

Материал рубрики «Когда сделаны уроки» можно использовать для работы математического кружка и факультативных занятий.

Желаем творческого вдохновения и терпения.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

n° задания, соответствующие начальному и среднему уровням учебных достижений;

$n^{\bullet}$ задания, соответствующие достаточному уровню учебных достижений;

$n^{\bullet\bullet}$ задания, соответствующие высокому уровню учебных достижений;

n^{*} задачи для математических кружков и факультативов;

задачи, в которых получен результат, который можно использовать при решении других задач;

доказательство теоремы, соответствующее достаточному уровню учебных достижений;

доказательство теоремы, соответствующее высокому уровню учебных достижений;

доказательство теоремы, не обязательное для изучения;

▲ окончание доказательства теоремы.

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ §1

В этом параграфе вы узнаете, что представляют собой синус, косинус и тангенс угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Вы научитесь по двум сторонам треугольника и углу между ними находить третью сторону, а также по стороне и двум прилежащим к ней углам находить две другие стороны треугольника.

В 8 классе вы научились решать прямоугольные треугольники. Изучив материал этого параграфа, вы сможете решать любые треугольники.

Вы узнаете о новых формулах, с помощью которых можно находить площадь треугольника.

1. Синус, косинус и тангенс угла от 0° до 180°

Перед изучением этого пункта рекомендуем повторить содержание пункта 14 на с. 249.

Понятия «синус», «косинус» и «тангенс» острого угла вам знакомы из курса геометрии 8 класса. Расширим эти понятия для любого угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

В верхней полуплоскости координатной плоскости рассмотрим полуокружность с центром в начале координат, радиус которой равен 1 (рис. 1). Такую полуокружность называют **единичной.**

Будем говорить, что **углу** α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) **соответствует точка** M единичной полуокружности, если $\angle MOA = \alpha$, где точки O и A имеют соответственно координаты (0; 0) и (1; 0) (рис. 1). Например, на рисунке 1 углу, равному 90°, соответствует точка C; углу, равному 180°, — точка B; углу, равному 0°, — точка A.

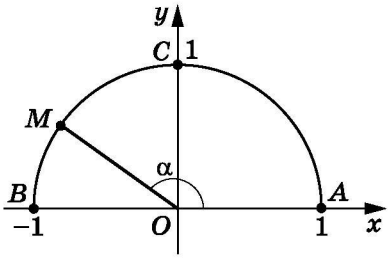


Рис. 1

Пусть α — острый угол. Ему соответствует некоторая точка M $(x;\ y)$ дуги AC (рис. 2). Из прямоугольного треугольника OMN имеем:

$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM},\quad \sin\alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Поскольку $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, то

$$\cos\alpha = x,\ \sin\alpha = y.$$

Итак, косинус и синус острого угла α — это соответственно абсцисса и ордината точки M единичной полуокружности, соответствующей углу α.

Полученный результат подсказывает, как определить синус и косинус любого угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Определение. Косинусом и синусом угла α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) называют соответственно абсциссу x и ординату y точки M единичной полуокружности, соответствующей углу α (рис. 3).

Пользуясь таким определением, можно, например, записать: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

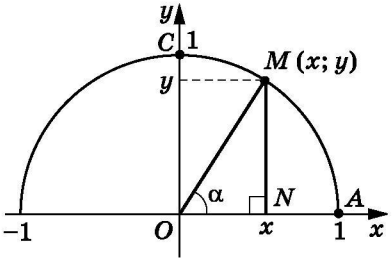


Рис. 2

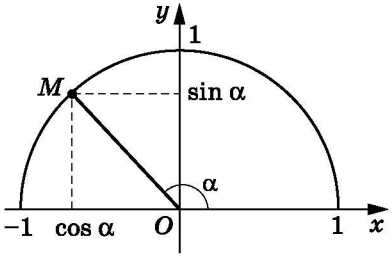


Рис. 3

Если M $(x;\ y)$ — произвольная точка единичной полуокружности, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$. Следовательно, для любого угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, имеем:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Если α — тупой угол, то абсцисса точки единичной полуокружности, соответствующей этому углу, отрицательна. Следовательно, косинус тупого угла является отрицатель-

ным числом. Понятно, что справедливо и такое утверждение: если $\cos\alpha < 0$, то α — тупой или развернутый угол.

Из курса геометрии 8 класса вы знаете, что для любого острого угла α

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

Эти формулы остаются справедливыми и для $\alpha = 0°$, и для $\alpha = 90°$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Пусть углам α и $180° - \alpha$, где $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 90°$ и $\alpha \neq 180°$, соответствуют точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$ единичной полуокружности (рис. 4).

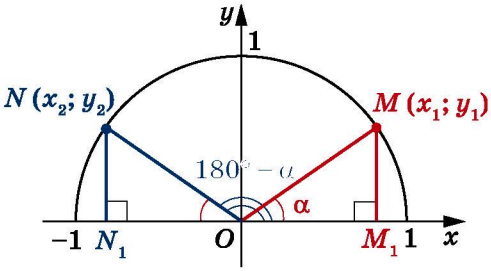


Рис. 4

Прямоугольные треугольники OMM_1 и ONN_1 равны по гипотенузе и острому углу ($ON = OM = 1$, $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \alpha$). Отсюда $y_2 = y_1$ и $x_2 = -x_1$. Следовательно,

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

Убедитесь самостоятельно, что эти равенства остаются верными для $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$.

Если α — острый угол, то, как вы знаете из курса геометрии 8 класса, справедливо тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

которое остается верным для $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Пусть α — тупой угол. Тогда угол $180° - \alpha$ является острым. Имеем:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin(180° - \alpha))^2 + (-\cos(180° - \alpha))^2 =$$
$$= \sin^2(180° - \alpha) + \cos^2(180° - \alpha) = 1.$$

Следовательно, равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ выполняется для всех $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Определение. Тангенсом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ и $\alpha \neq 90°$, называют отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то есть

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Поскольку $\cos 90° = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha$ не определен для $\alpha = 90°$.

Очевидно, что каждому углу α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) соответствует *единственная* точка единичной полуокружности. Значит, каждому углу α соответствует единственное число, которое является значением синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq 90°$). Поэтому зависимость значения синуса (косинуса, тангенса) от величины угла является функциональной.

Функции $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, соответствующие этим функциональным зависимостям, называют **тригонометрическими функциями** угла α.

Задача. *Докажите, что* $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Решение

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Пример. Найдите $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$.

Решение. Имеем:

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$
$$\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(180° - 60°) = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}.$$

1. Какую полуокружность называют единичной?
2. Поясните, в каком случае говорят, что углу α соответствует точка M единичной полуокружности.

3. Что называют синусом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
4. Что называют косинусом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
5. Чему равен $\sin 0°$? $\cos 0°$? $\sin 90°$? $\cos 90°$? $\sin 180°$? $\cos 180°$?
6. В каких пределах находятся значения $\sin\alpha$, если $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
7. В каких пределах находятся значения $\cos\alpha$, если $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
8. Каким числом, положительным или отрицательным, является синус острого угла? синус тупого угла? косинус острого угла? косинус тупого угла?
9. Каким углом является угол α, если $\cos\alpha < 0$?
10. Чему равен $\sin(180° - \alpha)$? $\cos(180° - \alpha)$?
11. Как связаны между собой синус и косинус одного и того же угла?
12. Что называют тангенсом угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ и $\alpha \neq 90°$?
13. Почему $\operatorname{tg}\alpha$ не определен для $\alpha = 90°$?
14. Какое общее название имеют функции $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$ и $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

1.° Начертите единичную полуокружность, взяв за единичный отрезок пять клеточек тетради. Постройте угол, вершиной которого является начало координат, а одной из сторон — положительная полуось x:

1) косинус которого равен $\frac{1}{5}$;
2) косинус которого равен $-0{,}4$;
3) синус которого равен $0{,}6$;
4) синус которого равен 1;
5) косинус которого равен 0;
6) косинус которого равен -1.

УПРАЖНЕНИЯ

2.° Чему равен:

1) $\sin(180° - \alpha)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$;

2) $\cos(180° - \alpha)$, если $\cos\alpha = 0{,}7$;

3) $\cos(180° - \alpha)$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{9}$;

4) $\operatorname{tg}(180° - \alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -5$?

3.° Углы α и β смежные, $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$.

1) Найдите $\cos\beta$.

2) Какой из углов α и β является острым, а какой — тупым?

4.° Найдите значение выражения:

1) $2\sin 90° + 3\cos 0°$;

2) $3\sin 0° - 5\cos 180°$;

3) $\operatorname{tg} 23° \cdot \operatorname{tg} 0° \cdot \operatorname{tg} 106°$;

4) $6\operatorname{tg} 180° + 5\sin 180°$;

5) $\cos^2 165° + \sin^2 165°$;

6) $\frac{\sin 0° + \sin 90°}{\cos 0° - \cos 90°}$.

5.° Вычислите:

1) $4\cos 90° + 2\cos 180°$; 2) $\cos 0° - \cos 180° + \sin 90°$.

6.° Чему равен синус угла, если его косинус равен: 1) 1; 2) 0?

7.° Чему равен косинус угла, если его синус равен: 1) 1; 2) 0?

8.° Найдите $\sin 135°$, $\cos 135°$, $\operatorname{tg} 135°$.

9.° Найдите $\sin 150°$, $\cos 150°$, $\operatorname{tg} 150°$.

10.° Существует ли угол α, для которого:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$;

2) $\sin\alpha = 0{,}3$;

3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$;

4) $\cos\alpha = -0{,}99$;

5) $\cos\alpha = 1{,}001$;

6) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$?

11.• Найдите:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$;

2) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

3) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

4) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}8$.

12.• Найдите:

1) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$;

2) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{6}$.

13.• Верно ли утверждение (ответ обоснуйте):

1) косинус острого угла больше косинуса тупого угла;
2) существует угол, синус и косинус которого равны;
3) существует угол, синус и косинус которого равны нулю;
4) косинус угла треугольника может быть равным отрицательному числу;
5) синус угла треугольника может быть равным отрицательному числу;
6) косинус угла треугольника может быть равным нулю;
7) синус угла треугольника может быть равным нулю;
8) косинус угла треугольника может быть равным −1;
9) синус угла треугольника может быть равным 1;
10) синус угла, отличного от прямого, меньше синуса прямого угла;
11) косинус развернутого угла меньше косинуса угла, отличного от развернутого;
12) синусы смежных углов равны;
13) косинусы неравных смежных углов являются противоположными числами;
14) если косинусы двух углов равны, то равны и сами углы;
15) если синусы двух углов равны, то равны и сами углы;
16) тангенс острого угла больше тангенса тупого угла?

14.• Сравните с нулем значение выражения:

1) $\sin 110° \cos 140°$;
2) $\sin 80° \cos 100° \cos 148°$;
3) $\sin 128° \cos^2 130° \operatorname{tg} 92°$;
4) $\sin 70° \cos 90° \operatorname{tg} 104°$.

15.• В треугольнике ABC известно, что $\angle B = 60°$, точка O — центр вписанной окружности. Чему равен косинус угла AOC?

16.• Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, $\cos \angle BOC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите угол A треугольника.

17.• Найдите значение выражения:

1) $2 \sin 120° + 4 \cos 150° - 2 \operatorname{tg} 135°$;
2) $\cos 120° - 8 \sin^2 150° + 3 \cos 90° \cos 162°$;
3) $\cos 180° (\sin 135° \operatorname{tg} 60° - \cos 135°)^2$.

18.• Чему равно значение выражения:

1) $2\sin 150° - 4\cos 120°$;

2) $\sin 90° (\operatorname{tg} 150° \cos 135° - \operatorname{tg} 120° \cos 135°)^2$?

19.• Найдите значение выражения, не пользуясь таблицами и калькулятором:

1) $\frac{\sin 18°}{\sin 162°}$; 2) $\frac{\cos 18°}{\cos 162°}$; 3) $\frac{\operatorname{tg} 18°}{\operatorname{tg} 162°}$.

20.• Вычислите:

1) $\frac{\sin 28°}{\sin 152°}$; 2) $\frac{\cos 49°}{\cos 131°}$; 3) $\frac{\operatorname{tg} 12°}{\operatorname{tg} 168°}$.

21.• Найдите сумму квадратов синусов всех углов прямоугольного треугольника.

22.• Найдите сумму квадратов косинусов всех углов прямоугольного треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

23. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, равна 5 см и делит сторону параллелограмма пополам. Острый угол параллелограмма равен 30°. Найдите диагональ параллелограмма, проведенную из вершины тупого угла, и углы, которые она образует со сторонами параллелограмма.

24. Прямая CE параллельна боковой стороне AB трапеции $ABCD$ и делит основание AD на отрезки AE и DE такие, что $AE = 7$ см, $DE = 10$ см. Найдите среднюю линию трапеции.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

25. Две стороны треугольника равны 8 см и 11 см. Может ли угол, противолежащий стороне длиной 8 см, быть: 1) тупым; 2) прямым? Ответ обоснуйте.

26. В треугольнике ABC проведена высота BD, $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$, $AB = 10$ см. Найдите сторону BC.

27. Найдите высоту BD треугольника ABC и проекцию стороны AB на прямую AC, если $\angle BAC = 150°$, $AB = 12$ см.

2. Теорема косинусов

Из первого признака равенства треугольников следует, что две стороны и угол между ними однозначно определяют треугольник. А значит, по указанным элементам можно, например, найти третью сторону треугольника. Как это сделать, показывает следующая теорема.

Теорема 2.1 (теорема косинусов). ***Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.***

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Докажем, например, что

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

Возможны три случая:

1) угол A — острый;
2) угол A — тупой;
3) угол A — прямой.

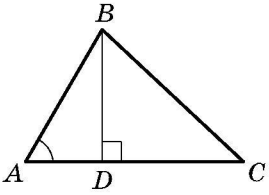


Рис. 5

• Рассмотрим первый случай. Если $\angle A < 90°$, то тогда хотя бы один из углов B и C является острым. Пусть, например, $\angle C < 90°$. Проведем высоту BD (рис. 5).

Из ΔABD получаем: $BD = AB \cdot \sin A$, $AD = AB \cdot \cos A$.

Из ΔBDC получаем: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$$
$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$$
$$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Если $\angle C \geqslant 90°$, то $\angle B < 90°$. Тогда надо провести высоту треугольника ABC из вершины C. Дальнейшее доказательство аналогично рассмотренному.

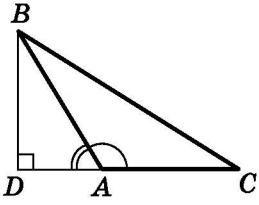


Рис. 6

• Для случая, когда угол A — тупой, проведем высоту BD треугольника ABC (рис. 6).

Из ΔABD получаем: $BD = AB \times \sin\angle BAD = AB \cdot \sin(180° - \angle BAC) = AB \cdot \sin\angle BAC$, $AD = AB \cdot \cos\angle BAD = AB \cdot \cos(180° - \angle BAC) = -AB \cdot \cos\angle BAC$.

Из $\Delta\, BDC$ получаем: $BC^2 = BD^2 + CD^2 = BD^2 + (AC + AD)^2 =$
$= AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos\angle BAC)^2 =$
$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC.$

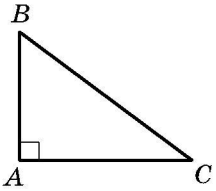


Рис. 7

• Если угол A — прямой (рис. 7), то $\cos A = 0$. Доказываемое равенство принимает вид

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

и выражает теорему Пифагора для треугольника ABC ($\angle A = 90°$). ▲

Та часть доказательства, в которой рассмотрен случай, когда $\angle A$ — прямой, показывает, что теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов. Поэтому теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора.

Если воспользоваться обозначением для сторон и углов треугольника ABC (см. форзац), то, например, для стороны a можно записать:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha.$$

С помощью теоремы косинусов, зная три стороны треугольника, можно определить, является ли он остроугольным, тупоугольным или прямоугольным.

Теорема 2.2 (следствие из теоремы косинусов). ***Пусть a, b и c — стороны треугольника ABC, причем a — его наибольшая сторона. Если $a^2 < b^2 + c^2$, то треугольник остроугольный. Если $a^2 > b^2 + c^2$, то треугольник тупоугольный. Если $a^2 = b^2 + c^2$, то треугольник прямоугольный.***

Доказательство. Имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Отсюда $2bc \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

Пусть $a^2 < b^2 + c^2$. Тогда $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Следовательно, $2bc \cos\alpha > 0$, то есть $\cos\alpha > 0$. Поэтому угол α — острый.

Поскольку a — наибольшая сторона треугольника, то против нее лежит наибольший угол, который, как мы доказали, является острым. Следовательно, в этом случае треугольник является остроугольным.

Пусть $a^2 > b^2 + c^2$. Тогда $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, а значит, $2bc\cos\alpha < 0$, то есть $\cos\alpha < 0$. Следовательно, угол α — тупой.

Пусть $a^2 = b^2 + c^2$. Тогда $2bc \cos\alpha = 0$, то есть $\cos\alpha = 0$. Отсюда $\alpha = 90°$. ▲

Задача. *Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.*

Решение. На рисунке 8 изображен параллелограмм $ABCD$.

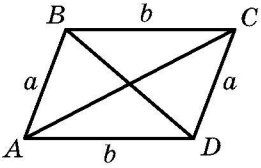


Рис. 8

Пусть $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle ADC = 180° - \alpha$.

Из ΔABD по теореме косинусов

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\alpha. \qquad (1)$$

Из ΔACD по теореме косинусов

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180° - \alpha)$ или

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

Сложив равенства (1) и (2), получим

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Пример 1. В треугольнике ABC сторона AB на 4 см больше стороны BC, $\angle B = 120°$, $AC = 14$ см. Найдите стороны AB и BC.

Решение. По теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B.$$

Пусть $BC = x$ см, $x > 0$, тогда $AB = (x + 4)$ см.

Имеем:

$$14^2 = (x + 4)^2 + x^2 - 2x\,(x + 4) \cos 120°;$$

$$196 = x^2 + 8x + 16 + x^2 - 2x\,(x+4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$196 = 2x^2 + 8x + 16 + x\,(x + 4);$$

$$3x^2 + 12x - 180 = 0;$$

$$x^2 + 4x - 60 = 0;$$

$$x_1 = 6;\ x_2 = -10.$$

Корень $x_2 = -10$ не удовлетворяет условию $x > 0$.

Следовательно, $BC = 6$ см, $AB = 10$ см.

Ответ: 10 см, 6 см.

Пример 2. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $CD : AD = 1 : 2$. Найдите отрезок BD, если $AB = 14$ см, $BC = 13$ см, $AC = 15$ см.

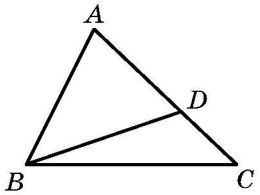


Рис. 9

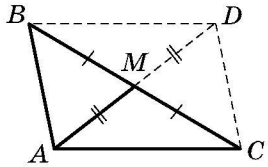


Рис. 10

Решение. По теореме косинусов из $\Delta\, ABC$ (рис. 9):

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C,$$

отсюда

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{33}{65}.$$

Поскольку $CD : AD = 1 : 2$, то $CD = \frac{1}{3}AC = 5$ см.

Тогда из $\Delta\, BCD$:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C =$$

$$= 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$$

Следовательно, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $8\sqrt{2}$ см.

Пример 3. Две стороны треугольника равны 23 см и 30 см, а медиана, проведенная к большей из известных сторон, — 10 см. Найдите третью сторону треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике ABC (рис. 10) $AC = 23$ см, $BC = 30$ см, отрезок AM — медиана, $AM = 10$ см.

На продолжении отрезка AM за точку M отложим отрезок MD, равный медиане AM. Тогда $AD = 20$ см.

В четырехугольнике $ABDC$ диагонали AD и BC точкой M пересечения делятся пополам ($BM = MC$ по условию, $AM = MD$ по построению). Следовательно, четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм.

По свойству диагоналей параллелограмма имеем:

$$AD^2 + BC^2 = 2\,(AB^2 + AC^2).$$

Тогда

$$20^2 + 30^2 = 2\,(AB^2 + 23^2);$$

$$400 + 900 = 2\,(AB^2 + 529);$$
$$AB^2 = 121;$$
$$AB = 11 \text{ см}.$$

Ответ: 11 см.

1. Сформулируйте теорему косинусов.
2. Остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник со сторонами a, b и c, где a — его наибольшая сторона, если:
   1) $a^2 < b^2 + c^2$;
   2) $a^2 > b^2 + c^2$;
   3) $a^2 = b^2 + c^2$?
3. Как связаны между собой диагонали и стороны параллелограмма?

УПРАЖНЕНИЯ

28.° Найдите неизвестную сторону треугольника ABC, если:

1) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;
2) $AB = 3$ см, $AC = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 135°$.

29.° Найдите неизвестную сторону треугольника DEF, если:

1) $DE = 4$ см, $DF = 2\sqrt{3}$ см, $\angle D = 30°$;
2) $DF = 3$ см, $EF = 5$ см, $\angle F = 120°$.

30.° Стороны треугольника равны 12 см, 20 см и 28 см. Найдите наибольший угол треугольника.

31.° Стороны треугольника равны $\sqrt{18}$ см, 5 см и 7 см. Найдите средний по величине угол треугольника.

32.° Установите, остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник, стороны которого равны:

1) 5 см, 7 см и 9 см;
2) 5 см, 12 см и 13 см;
3) 10 см, 15 см и 18 см.

33.° Стороны треугольника равны 7 см, 8 см и 12 см. Верно ли утверждение, что данный треугольник — остроугольный?

34.° Докажите, что треугольник со сторонами 8 см, 15 см и 17 см является прямоугольным.

35.° Стороны параллелограмма равны $2\sqrt{2}$ см и 5 см, а один из углов равен 45°. Найдите диагонали параллелограмма.

36.° В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) известно, что $BC = 3$ см, $AD = 10$ см, $CD = 4$ см, $\angle D = 60°$. Найдите диагонали трапеции.

37.° На стороне AB равностороннего треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD : DB = 2 : 1$. Найдите отрезок CD, если $AB = 6$ см.

38.° На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отмечена точка M так, что $AM : BM = 1 : 3$. Найдите отрезок CM, если $AC = BC = 4$ см.

39.• Две стороны треугольника равны 3 см и 4 см, а синус угла между ними равен $\frac{\sqrt{35}}{6}$. Найдите третью сторону треугольника. Сколько решений имеет задача?

40.• В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AC = 20$ см, $BC = 15$ см. На стороне AB отметили точку M так, что $BM = 4$ см. Найдите длину отрезка CM.

41.• На продолжении гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC за точку B отметили точку D так, что $BD = BC$. Найдите отрезок CD, если катет треугольника ABC равен a.

42.• В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $AC = 12$ см. На продолжении гипотенузы AB за точку B отметили точку D так, что $BD = 26$ см. Найдите длину отрезка CD.

43.• Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, находится на расстояниях a и b от концов гипотенузы. Найдите гипотенузу треугольника.

44.• Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120°$. Найдите сторону AB.

45.• Две стороны треугольника, угол между которыми равен 60°, относятся как 5 : 8, а третья сторона равна 21 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

46.• Две стороны треугольника относятся как $1 : 2\sqrt{3}$ и образуют угол, равный 30°. Третья сторона треугольника равна $2\sqrt{7}$ см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

47.• Сумма двух сторон треугольника, образующих угол 120°, равна 8 см, а длина третьей стороны составляет 7 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

48.• Две стороны треугольника, угол между которыми равен 120°, относятся как 5 : 3. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 30 см.

49.• Две стороны треугольника равны 16 см и 14 см, а угол, противолежащий меньшей из известных сторон, равен 60°. Найдите неизвестную сторону треугольника.

50.• Две стороны треугольника равны 15 см и 35 см, а угол, противолежащий большей из известных сторон, равен 120°. Найдите периметр треугольника.

51.• На стороне BC треугольника ABC отметили точку D так, что $CD = 14$ см. Найдите отрезок AD, если $AB = 37$ см, $BC = 44$ см и $AC = 15$ см.

52.• На стороне AB треугольника ABC отметили точку K, а на продолжении стороны BC за точку C — точку M. Найдите отрезок MK, если $AB = 15$ см, $BC = 7$ см, $AC = 13$ см, $AK = 8$ см, $MC = 3$ см.

53.• Одна из сторон треугольника в 2 раза больше другой, а угол между этими сторонами составляет 60°. Докажите, что данный треугольник является прямоугольным.

54.• Докажите, что если квадрат стороны треугольника равен неполному квадрату суммы двух других сторон, то противолежащий этой стороне угол равен 120°.

55.• Докажите, что если квадрат стороны треугольника равен неполному квадрату разности двух других сторон, то противолежащий этой стороне угол равен 60°.

56.• Две стороны параллелограмма равны 7 см и 11 см, а одна из диагоналей — 12 см. Найдите вторую диагональ параллелограмма.

57.• Диагонали параллелограмма равны 13 см и 11 см, а одна из сторон — 9 см. Найдите периметр параллелограмма.

58.• Диагонали параллелограмма равны 8 см и 14 см, а одна из сторон на 2 см больше другой. Найдите стороны параллелограмма.

59.• Стороны параллелограмма равны 11 см и 23 см, а его диагонали относятся как 2 : 3. Найдите диагонали параллелограмма.

60.•• В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) известно, что $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AD = 16$ см, $\cos A = \frac{1}{7}$. Найдите сторону CD трапеции.

61.•• В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) известно, что $AB = \sqrt{15}$ см, $BC = 6$ см, $CD = 4$ см, $AD = 11$ см. Найдите косинус угла D трапеции.

62.•• Найдите диагональ AC четырехугольника $ABCD$, если около него можно описать окружность, и $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см, $AD = 6$ см.

63.•• Можно ли описать окружность около четырехугольника $ABCD$, если $AB = 4$ см, $AD = 3$ см, $BD = 6$ см и $\angle C = 30°$?

64.•• Докажите, что против большего угла параллелограмма лежит бóльшая диагональ. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

65.•• Стороны треугольника равны 12 см, 15 см и 18 см. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины его наибольшего угла.

66.•• Основание равнобедренного треугольника равно 5 см, а боковая сторона — 20 см. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины угла при его основании.

67.•• Стороны треугольника равны 16 см, 18 см и 26 см. Найдите медиану треугольника, проведенную к его большей стороне.

68.•• Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана, проведенная к боковой стороне, — 5 см. Найдите боковую сторону треугольника.

69.•• Две стороны треугольника равны 12 см и 14 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, — 7 см. Найдите неизвестную сторону треугольника.

70.•• В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 120°$. На продолжении отрезка AB за точку B отметили

точку D так, что $BD = 2AB$. Докажите, что треугольник ACD равнобедренный.

71.•• Докажите, что $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a, b и c — стороны треугольника, m_c — медиана треугольника, проведенная к стороне c.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

72. В окружности проведены диаметр AC и хорда AB, равная радиусу окружности. Найдите углы треугольника ABC.

73. Один из углов, образовавшихся при пересечении биссектрисы угла параллелограмма с его стороной, равен одному из углов параллелограмма. Найдите углы параллелограмма.

74. В треугольник ABC вписан параллелограмм $ADEF$ так, что угол A у них общий, а точки D, E и F принадлежат соответственно сторонам AB, BC и AC треугольника. Найдите стороны параллелограмма $ADEF$, если $AB = 8$ см, $AC = 12$ см, $AD : AF = 2 : 3$.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

75. Найдите угол ADC (рис. 11), если $\angle ABC = 140°$.

76. Найдите угол ABC (рис. 12), если $\angle ADC = 43°$.

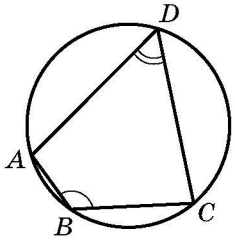


Рис. 11

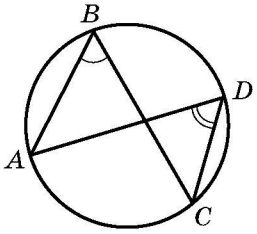


Рис. 12

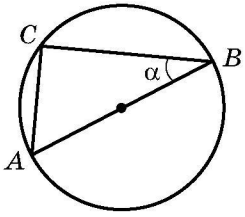


Рис. 13

77. Отрезок AB — диаметр окружности, радиус которой равен R, $\angle ABC = \alpha$ (рис. 13). Найдите хорду AC.

Обновите в памяти содержание пункта 8 на с. 247.

3. Теорема синусов

Из второго признака равенства треугольников следует, что сторона и два прилежащих к ней угла однозначно определяют треугольник. Следовательно, по указанным элементам можно найти две другие стороны треугольника. Как это сделать, подсказывает такая теорема.

Теорема 3.1 (теорема синусов). ***Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.***

Лемма. ***Хорда окружности равна произведению диаметра на синус любого вписанного угла, опирающегося на эту хорду.***

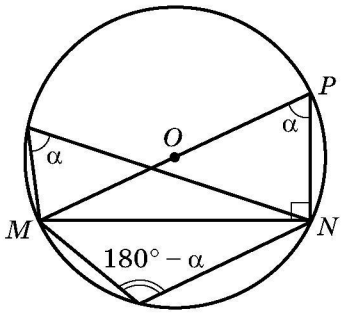


Рис. 14

Доказательство. ⊙ На рисунке 14 отрезок MN — хорда окружности с центром в точке O. Проведем диаметр MP. Тогда $\angle MNP = 90°$ как вписанный, опирающийся на диаметр. Пусть величина вписанного угла MPN равна α. Тогда из прямоугольного треугольника MPN получаем

$$MN = MP \sin\alpha. \qquad (1)$$

Все вписанные углы, опирающиеся на хорду MN, равны α или $180° - \alpha$. Следовательно, их синусы равны. Поэтому полученное равенство (1) справедливо для всех вписанных углов, опирающихся на хорду MN. ▲

Теперь мы можем доказать теорему синусов.

Доказательство. ⊙ Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, что

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Пусть радиус описанной окружности треугольника ABC равен R. Тогда по лемме $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$. Отсюда

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

▲

Следствие. ***Радиус описанной окружности треугольника можно вычислить по формуле***

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha},$$

где a — сторона треугольника, α — противолежащий ей угол.

Пример 1. В треугольнике ABC известно, что $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 45°$. Найдите угол A.

Решение. По теореме синусов

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Тогда имеем:

$$\sin A = \frac{BC \sin B}{AC} = \frac{1 \cdot \sin 45°}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Следовательно, $\angle A$ — острый. Отсюда, учитывая, что $\sin A = \frac{1}{2}$, получаем $\angle A = 30°$.

Ответ: 30°.

Пример 2. В треугольнике ABC известно, что $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle A = 30°$. Найдите угол B.

Решение. Имеем:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B},$$

$$\sin B = \frac{AC \sin A}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так как $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Тогда угол B может быть как острым, так и тупым. Отсюда $\angle B = 45°$ или $\angle B = 180° - 45° = 135°$.

Ответ: 45° или 135°.

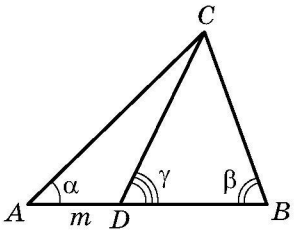


Рис. 15

Пример 3. На стороне AB треугольника ABC (рис. 15) отметили точку D так, что $\angle BDC = \gamma$, $AD = m$. Найдите BD, если $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Решение. $\angle BDC$ — внешний угол треугольника ADC. Тогда $\angle ACD + \angle A = \angle BDC$, отсюда $\angle ACD = \gamma - \alpha$.

Из ΔADC по теореме синусов:

$$\frac{CD}{\sin\angle CAD} = \frac{AD}{\sin\angle ACD}.$$

Следовательно, $CD = \dfrac{AD\sin\angle CAD}{\sin\angle ACD} = \dfrac{m\sin\alpha}{\sin(\gamma-\alpha)}$.

Из ΔBCD:

$$\frac{BD}{\sin\angle BCD} = \frac{CD}{\sin\angle CBD};$$

$$BD = \frac{CD\sin\angle BCD}{\sin\angle CBD} = \frac{m\sin\alpha\sin(180^\circ-(\beta+\gamma))}{\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)} = \frac{m\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)}.$$

Ответ: $\dfrac{m\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)}$.

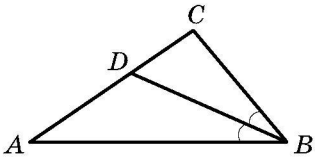


Рис. 16

Пример 4. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 105^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если радиус окружности, описанной около треугольника BDC, равен $8\sqrt{6}$ см.

Решение. Пусть R_1 — радиус окружности, описанной около треугольника BDC (рис. 16), $R_1 = 8\sqrt{6}$ см.

$\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 15^\circ$.

Из ΔBDC:

$\angle BDC = 180^\circ - (\angle CBD + \angle C) = 180^\circ - (15^\circ + 105^\circ) = 60^\circ$.

Тогда $\dfrac{BC}{\sin\angle BDC} = 2R_1$, отсюда

$$BC = 2R_1\sin\angle BDC = 2\cdot 8\sqrt{6}\sin 60^\circ = 24\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Из ΔABC:

$\angle A = 180^\circ - (\angle ABC + \angle C) = 180^\circ - (30^\circ + 105^\circ) = 45^\circ$.

Пусть R — искомый радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Тогда $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R$, отсюда $R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{24\sqrt{2}}{2\sin 45^\circ} = 24$ (см).

Ответ: 24 см.

1. Как найти хорду окружности, если известны диаметр окружности и вписанный угол, опирающийся на эту хорду?
2. Сформулируйте теорему синусов.
3. Как найти радиус окружности, описанной около треугольника со стороной a и противолежащим этой стороне углом α?

УПРАЖНЕНИЯ

78.° Найдите сторону BC треугольника ABC, изображенного на рисунке 17 (длины отрезков даны в сантиметрах).

79.° Найдите угол A треугольника ABC, изображенного на рисунке 18 (длины отрезков даны в сантиметрах).

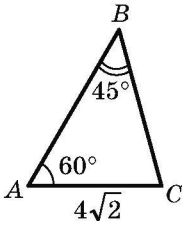


Рис. 17

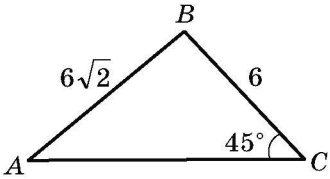


Рис. 18

80.° Найдите сторону AB треугольника ABC, если $AC = \sqrt{6}$ см, $\angle B = 120°$, $\angle C = 45°$.

81.° В треугольнике ABC известно, что $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, $\sin A = 0{,}2$. Найдите синус угла C треугольника.

82.° В треугольнике DEF известно, что $DE = 16$ см, $\angle F = 50°$, $\angle D = 38°$. Найдите неизвестные стороны треугольника.

83.° В треугольнике MKP известно, что $KP = 8$ см, $\angle K = 106°$, $\angle P = 32°$. Найдите неизвестные стороны треугольника.

84.° Для нахождения расстояния от точки A до колокольни B, расположенной на другом берегу речки (рис. 19), с помощью вех, рулетки и при-

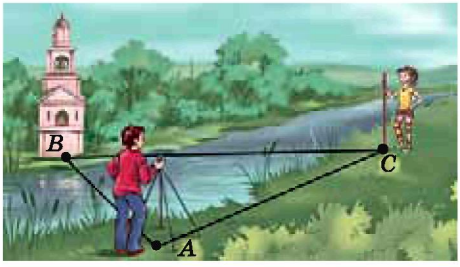


Рис. 19

бора для измерения углов (теодолита) отметили на местности точку C такую, что $\angle BAC = 42°$, $\angle ACB = 64°$, $AC = 20$ м. Как найти расстояние от A до B? Найдите это расстояние.

85.° В треугольнике ABC известно, что $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Найдите AB и AC.

86.° Диагональ параллелограмма равна d и образует с его сторонами углы α и β. Найдите стороны параллелограмма.

87.° Найдите угол A треугольника ABC, если:

1) $AC = 2$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 135°$;

2) $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 45°$.

Сколько решений в каждом случае имеет задача? Ответ обоснуйте.

88.° Существует ли треугольник ABC такой, что $\sin A = 0{,}4$, $AC = 18$ см, $BC = 6$ см? Ответ обоснуйте.

89.° В треугольнике DEF известно, что $DE = 8$ см, $\sin F = 0{,}16$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника DEF.

90.° Радиус окружности, описанной около треугольника MKP, равен 5 см, $\sin M = 0{,}7$. Найдите сторону KP.

91.• На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку B отметили точку D. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ACD, если $\angle ABC = 60°$, $\angle ADC = 45°$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4 см.

92.• Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 6 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AOC, где O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, если $\angle ABC = 60°$.

93.• По рисунку 20 найдите AD, если $CD = a$.

94.• По рисунку 21 найдите AC, если $BD = m$.

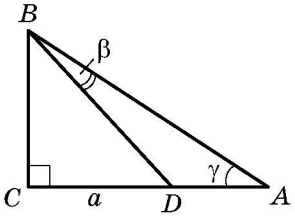


Рис. 20

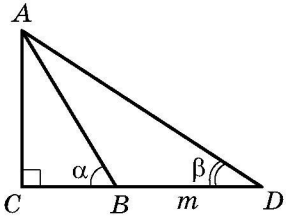


Рис. 21

95.• На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $\angle AMC = \varphi$. Найдите отрезок CM, если $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$.

96.• В треугольнике ABC известно, что $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороне BC отметили точку D так, что $\angle ADB = \varphi$, $AD = m$. Найдите сторону BC.

97.• Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, длины которых обратно пропорциональны синусам прилежащих к этой стороне углов.

98.• Две стороны треугольника равны 6 см и 12 см, а высота, проведенная к третьей стороне, — 4 см. Найдите радиус окружности, описанной около данного треугольника.

99.• Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 16 см и боковой стороной 10 см.

100.• Сторона треугольника равна 24 см, а радиус описанной окружности — $8\sqrt{3}$ см. Чему равен угол треугольника, противолежащий данной стороне?

101.• Трасса для велосипедистов имеет форму треугольника, два угла которого равны 50° и 100°. Меньшую сторону этого треугольника один из велосипедистов проезжает за 1 ч. За какое время он проедет всю трассу? Ответ представьте в часах с точностью до десятых.

102.•• В треугольнике ABC известно, что $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Найдите биссектрису BD треугольника.

103.•• Основание равнобедренного треугольника равно a, противолежащий ему угол равен α. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины угла при основании.

104.•• Докажите, пользуясь теоремой синусов, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, длины которых пропорциональны прилежащим сторонам[1].

105.•• Основания равнобокой трапеции равны 9 см и 21 см, а высота — 8 см. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

---

[1] Напомним, что этот факт с использованием теоремы о пропорциональных отрезках был доказан в учебнике: А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. «Геометрия. 8 класс». — Х.: Гимназия, 2008.

106.•• Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC, в котором $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая сторону AC в точке E, причем $AE = a$. Найдите CE.

107.•• Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы α и β соответственно. Найдите стороны AB и AC.

108.•• Медиана CD треугольника ABC образует со сторонами AC и BC углы α и β соответственно, $BC = a$. Найдите медиану CD.

109.•• Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AHB, BHC, AHC и ABC, равны.

110.•• Дороги, соединяющие села A, B и C (рис. 22), образуют треугольник, причем дорога из села A в село C заасфальтирована, а дороги из села A в село B и из села B в село C — грунтовые. Дороги, ведущие из села A в села B и C, образуют угол в 15°, а дороги, ведущие из села B в села A и C, — угол в 5°. Скорость движения автомобиля по асфальтированной дороге в 2 раза больше скорости его движения по грунтовой. Какой путь выбрать водителю автомобиля, чтобы как можно скорее добраться из села A в село B?

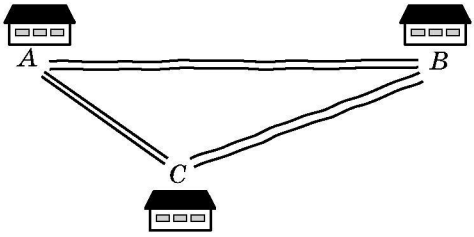


Рис. 22

111.•• Дороги из сел A и B сходятся у развилки C (рис. 23). Дорога из села A до развилки образует с дорогой в село B угол в 30°, а дорога из села B с дорогой в село A — угол в 70°. Одновременно из села A в направлении развил-

ки выехал автомобиль со скоростью 90 км/ч, а из села B — автобус со скоростью 60 км/ч. Кто из них первым доедет до развилки?

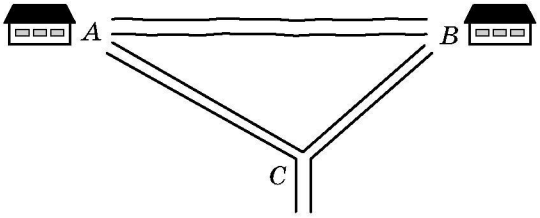


Рис. 23

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

112. Биссектрисы углов B и C прямоугольника $ABCD$ пересекают сторону AD в точках M и K соответственно. Докажите, что $BM = CK$.

113. На рисунке 24 $DE \parallel AC$, $FK \parallel AB$. Укажите, какие треугольники на этом рисунке подобны.

114. На стороне AB квадрата $ABCD$ отметили точку K, а на стороне CD — точку M так, что $AK : KB = 1 : 2$, $DM : MC = 3 : 1$. Найдите сторону квадрата, если $MK = 13$ см.

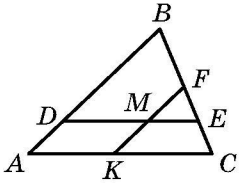


Рис. 24

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

115. Решите прямоугольный треугольник:

1) по двум катетам $a = 7$ см и $b = 35$ см;
2) по гипотенузе $c = 17$ см и катету $a = 8$ см;
3) по гипотенузе $c = 4$ см и острому углу $\alpha = 50°$;
4) по катету $a = 8$ см и противолежащему углу $\alpha = 42°$.

Обновите в памяти содержание пункта 15 на с. 249–250.

4. Решение треугольников

Решить треугольник — это значит найти неизвестные его стороны и углы по известным сторонам и углам.

В 8 классе вы научились решать прямоугольные треугольники. Теоремы косинусов и синусов позволяют решить любой треугольник.

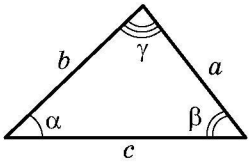


Рис. 25

Пример 1. Решите треугольник (рис. 25) по стороне $a = 12$ см и двум углам $\beta = 36°$, $\gamma = 119°$.

Решение. Имеем:

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 155° = 25°$.

По теореме синусов:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha};$$

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{12\sin 36°}{\sin 25°} \approx \frac{12\cdot 0{,}588}{0{,}423} \approx 16{,}7 \text{ (см)};$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha};$$

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{12\sin 119°}{\sin 25°} = \frac{12\sin 61°}{\sin 25°} \approx \frac{12\cdot 0{,}875}{0{,}423} \approx 24{,}8 \text{ (см)}.$$

Ответ: $b \approx 16{,}7$ см, $c \approx 24{,}8$ см; $\alpha = 25°$.

Заметим, что значения тригонометрических функций были найдены по таблице, расположенной на с. 268 учебника. Их также можно было найти с помощью микрокалькулятора.

Пример 2. Решите треугольник (рис. 25) по двум сторонам $a = 14$ см, $b = 8$ см и углу $\gamma = 38°$ между ними.

Решение. По теореме косинусов:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 196 + 64 - 2\cdot 14\cdot 8\cos 38° \approx$
$\approx 260 - 224\cdot 0{,}788 = 83{,}488$;

$c \approx 9{,}1$ см.

Далее имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx -0{,}338.$$

Найдем угол α_1 такой, что $\cos\alpha_1 = 0{,}338$.

Число 0,338 отсутствует в таблице значений косинусов, ближайшим к нему является число 0,342. Тогда получаем $\alpha_1 \approx 70°$. Отсюда

$\alpha = 180° - \alpha_1 \approx 110°$.

$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) \approx 180° - 148° = 32°$.

Ответ: $c \approx 9{,}1$ см, $\alpha \approx 110°$, $\beta \approx 32°$.

Пример 3. Решите треугольник (рис. 25) по трем сторонам $a = 7$ см, $b = 2$ см, $c = 8$ см.

Решение. Имеем: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, отсюда

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} \approx 0{,}594. \text{ Тогда } \alpha \approx 54°.$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \quad \sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} \approx \frac{2\sin 54°}{7} \approx \frac{2 \cdot 0{,}809}{7} \approx 0{,}231.$$

Поскольку b является наименьшей стороной данного треугольника, то угол β — острый, $\beta \approx 13°$.

Тогда $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 180° - 67° = 113°$.

Ответ: $\alpha \approx 54°$, $\beta \approx 13°$, $\gamma \approx 113°$.

Пример 4. Решите треугольник (рис. 25) по двум сторонам и углу, противолежащему одной из сторон: 1) $a = 17$ см, $b = 6$ см, $\alpha = 156°$; 2) $b = 7$ см, $c = 8$ см, $\beta = 65°$; 3) $a = 6$ см, $b = 5$ см, $\beta = 50°$.

Решение.

1) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$,

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{6\sin 156°}{17} = \frac{6\sin 24°}{17} \approx \frac{6 \cdot 0{,}407}{17} \approx 0{,}144.$$

Так как угол α данного треугольника тупой, то угол β — острый, $\beta \approx 8°$.

Тогда $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 16°$.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}, \quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx \frac{a\sin 16°}{\sin 156°} \approx \frac{17 \cdot 0{,}276}{0{,}407} \approx 11{,}5 \text{ (см)}.$$

Ответ: $\beta \approx 8°$, $\gamma \approx 16°$, $c \approx 11{,}5$ см.

2) $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, $\quad \sin\gamma = \dfrac{c\sin\beta}{b} = \dfrac{8\sin 65°}{7} \approx \dfrac{8 \cdot 0{,}906}{7} \approx 1{,}035 > 1$,

что невозможно.

Ответ: задача не имеет решения.

3) $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, $\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b} = \frac{6\sin 50°}{5} \approx \frac{6 \cdot 0{,}766}{5} \approx 0{,}919$.

Возможны два случая: $\alpha \approx 67°$ или $\alpha \approx 180° - 67° = 113°$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha \approx 67°$:

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 180° - 117° = 63°$;

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \quad c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} \approx \frac{5\sin 63°}{\sin 50°} \approx \frac{5 \cdot 0{,}891}{0{,}766} \approx 5{,}8 \text{ (см)}.$$

При $\alpha \approx 113°$ получаем:

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \approx 180° - 163° = 17°$;

$$c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} \approx \frac{5\sin 17°}{\sin 50°} \approx \frac{5 \cdot 0{,}292}{0{,}766} \approx 1{,}9 \text{ (см)}.$$

Ответ: $\alpha \approx 67°$, $\gamma \approx 63°$, $c \approx 5{,}8$ см или $\alpha \approx 113°$, $\gamma \approx 17°$, $c \approx 1{,}9$ см.

Что означает решить треугольник?

УПРАЖНЕНИЯ

116.° Решите треугольник по стороне и двум углам[1]:

1) $a = 10$ см, $\beta = 20°$, $\gamma = 85°$;

2) $b = 16$ см, $\alpha = 40°$, $\beta = 110°$.

117.° Решите треугольник по стороне и двум углам:

1) $b = 9$ см, $\alpha = 35°$, $\gamma = 70°$;

2) $c = 14$ см, $\beta = 132°$, $\gamma = 24°$.

118.° Решите треугольник по двум сторонам и углу между ними:

1) $b = 18$ см, $c = 22$ см, $\alpha = 76°$;

2) $a = 20$ см, $b = 15$ см, $\gamma = 104°$.

119.° Решите треугольник по двум сторонам и углу между ними:

1) $a = 8$ см, $c = 6$ см, $\beta = 15°$;

2) $b = 7$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 145°$.

[1] В задачах №№ 116–124 приняты обозначения: a, b и c — стороны треугольника, α, β и γ — углы, противолежащие соответственно сторонам a, b и c.

120.° Решите треугольник по трем сторонам:

1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 7$ см;

2) $a = 26$ см, $b = 19$ см, $c = 42$ см.

121.° Решите треугольник по трем сторонам:

1) $a = 5$ см, $b = 6$ см, $c = 8$ см;

2) $a = 21$ см, $b = 17$ см, $c = 32$ см.

122.° Решите треугольник, в котором:

1) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10°$, угол α — острый;

2) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10°$, угол α — тупой.

123.• Решите треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из данных сторон:

1) $a = 7$ см, $b = 11$ см, $\beta = 46°$;

2) $b = 15$ см, $c = 17$ см, $\beta = 32°$;

3) $a = 7$ см, $c = 3$ см, $\gamma = 27°$.

124.• Решите треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из данных сторон:

1) $a = 23$ см, $c = 30$ см, $\gamma = 102°$;

2) $a = 18$ см, $b = 25$ см, $\alpha = 36°$.

125.• В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 20$ см, $\angle A = 70°$. Найдите: 1) сторону AC; 2) медиану CM; 3) биссектрису AD; 4) радиус описанной окружности треугольника ABC.

126.• Диагональ AC равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 8 см, $\angle CAD = 38°$, $\angle BAD = 72°$. Найдите: 1) стороны трапеции; 2) радиус описанной окружности треугольника ABC.

127.•• Основания трапеции равны 12 см и 16 см, а боковые стороны — 7 см и 9 см. Найдите углы трапеции.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

128. Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону AD в точке M, а продолжение стороны CD за точку D — в точке K. Найдите длину отрезка DK, если $AM = 8$ см, а периметр параллелограмма равен 50 см.

129. Периметр одного из двух подобных треугольников на 18 см меньше периметра другого треугольника, а наибольшие стороны этих треугольников равны 5 см и 8 см. Найдите периметры данных треугольников.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

130. Точка M — середина стороны CD прямоугольника $ABCD$ (рис. 26), $AB = 6$ см, $AD = 5$ см. Чему равна площадь треугольника ACM?

131. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $\angle ADB = \alpha$. Докажите, что площадь треугольника ABC $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha$.

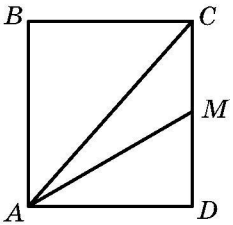


Рис. 26

Обновите в памяти содержание пункта 17 на с. 250.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Тригонометрия — наука об измерении треугольников

Вы знаете, что древние путешественники ориентировались по звездам и планетам. Они могли достаточно точно определить положение корабля в океане или каравана в пустыне по расположению светил на небосклоне. При этом одним из ориентиров служила высота над горизонтом, на которую поднималось то или иное небесное светило в данной местности в данный момент времени.

Понятно, что непосредственно измерить эту высоту невозможно. Поэтому ученые стали разрабатывать методы косвенных измерений. Здесь существенную роль играло решение треугольника, две вершины которого лежали на поверхности Земли, а третья являлась звездой или планетой (рис. 27) — знакомая вам задача № 94.

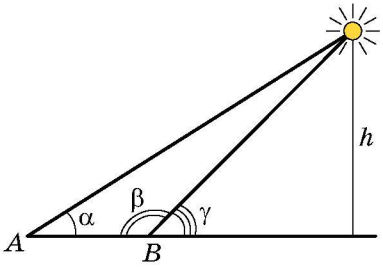


Рис. 27

Для решения подобных задач древним астрономам необходимо было научиться находить взаимосвязи между элементами треугольника. Так возникла **тригонометрия** — наука, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника. Термин «тригонометрия» (от греческих слов «тригоном» — треугольник и «метрео» — измерять) означает «измерение треугольников».

На рисунке 28 изображен центральный угол AOB, равный 2α. Из прямоугольного треугольника OMB имеем: $MB = OB\sin\alpha$. Следовательно, если в единичной окружности измерить половины длин хорд, на которые опираются центральные углы с величинами 2°, 4°, 6°, ..., 180°, то тем самым мы вычислим значения синусов углов 1°, 2°, 3°, ..., 90° соответственно.

Измеряя длины полухорд, древнегреческий астроном Гиппарх (II в. до н. э.) составил первые тригонометрические таблицы.

Понятия «синус» и «косинус» появляются в тригонометрических трактатах индийских ученых в IV–V вв. В X в. арабские ученые оперировали понятием «тангенс», которое возникло из потребностей гномоники — учения о солнечных часах (рис. 29).

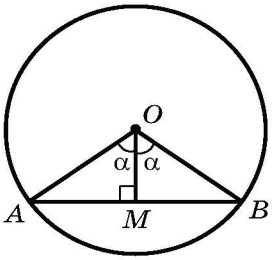


Рис. 28


Рис. 29

Леонард Эйлер
(1707–1783)

Выдающийся математик, физик, механик, астроном

В Европе первый трактат по тригонометрии «Пять книг о треугольниках всех видов», автором которого был немецкий ученый Региомонтан (1436–1476), был опубликован в 1533 г. Этот же ученый открыл и теорему тангенсов:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}},\quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}},\quad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}},$$

где a, b и c — стороны треугольника, α, β и γ — углы треугольника, противолежащие соответственно сторонам a, b и c.

Современный вид тригонометрия приобрела в работах выдающегося математика Леонарда Эйлера (1707–1783).

5. Формулы для нахождения площади треугольника

Из курса геометрии 8 класса вы знаете, что площадь S треугольника можно вычислить по формулам

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c,$$

где a, b и c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — высоты, проведенные к этим сторонам соответственно.

Теперь у нас появилась возможность получить еще несколько формул для нахождения площади треугольника.

Теорема 5.1. ***Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними.***

Доказательство. Докажем, что площадь S треугольника ABC можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

где a и b — стороны треугольника, γ — угол между ними.

Возможны три случая:

1) угол γ — острый (рис. 30);
2) угол γ — тупой (рис. 31);
3) угол γ — прямой.

На рисунках 30 и 31 проведем высоту BD треугольника ABC. Тогда $S = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2}BD \cdot b$.

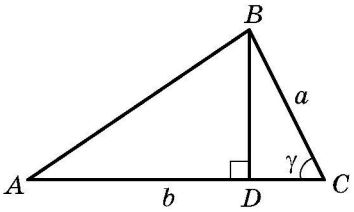


Рис. 30

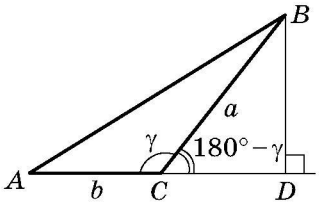


Рис. 31

Из $\Delta\, BDC$ в первом случае $BD = a\sin\gamma$, а во втором $BD = a\sin(180° - \gamma) = a\sin\gamma$. Отсюда для двух первых случаев имеем $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Если угол C — прямой, то $\sin\gamma = 1$. Для прямоугольного треугольника ABC с катетами a и b имеем:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab\sin 90° = \frac{1}{2}ab\sin\gamma. \blacktriangle$$

Теорема 5.2 (формула Герона[1]). ***Площадь S треугольника ABC можно вычислить по формуле***

$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$

где a, b, c — стороны треугольника, p — его полупериметр.

Доказательство. Имеем:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Отсюда $S^2=\frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\gamma.$

По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Отсюда $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$

Так как $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma)$, то имеем:

$$S^2=\frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)=$$

$$=\frac{1}{4}a^2b^2\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}a^2b^2\cdot\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}=$$

$$=\frac{1}{16}\left(c^2-(a-b)^2\right)\left((a+b)^2-c^2\right)=$$

$$=\frac{c-a+b}{2}\cdot\frac{c+a-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}=$$

$$=\frac{(a+b+c)-2a}{2}\cdot\frac{(a+b+c)-2b}{2}\cdot\frac{(a+b+c)-2c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}=$$

$$=\frac{2p-2a}{2}\cdot\frac{2p-2b}{2}\cdot\frac{2p-2c}{2}\cdot\frac{2p}{2}=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Отсюда $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$ ▲

[1] Герон Александрийский — древнегреческий ученый, живший в I в. н. э.

Теорема 5.3. ***Площадь S треугольника ABC можно вычислить по формуле***

$$S = \frac{abc}{4R},$$

где a, b, c — стороны треугольника, R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

Доказательство. ⊙ Имеем: $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

Из леммы пункта 3 следует, что $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$. Тогда

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}. \blacktriangle$$

Заметим, что доказанная теорема позволяет находить радиус описанной окружности треугольника по формуле

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Теорема 5.4. ***Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 32 изображен треугольник ABC, в который вписана окружность радиуса r. Докажем, что

$$S = pr,$$

где S — площадь данного треугольника, p — его полупериметр.

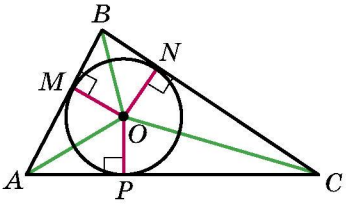


Рис. 32

Пусть точка O — центр вписанной окружности, которая касается сторон треугольника ABC в точках M, N и P. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AOB, BOC, COA. Это удобно записать в такой форме:

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}.$$

Проведем радиусы в точки касания. Получаем: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CA$. Отсюда:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}OM \cdot AB = \frac{1}{2}r \cdot AB;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}ON \cdot BC = \frac{1}{2}r \cdot BC;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2}OP \cdot AC = \frac{1}{2}r \cdot AC.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot AC = r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = pr. \blacktriangle$$

Вышесказанное обобщает такая теорема.

Теорема 5.5. ***Площадь описанного многоугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.***

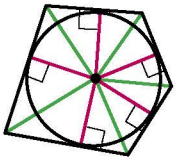


Рис. 33

Докажите эту теорему самостоятельно (рис. 33).

Заметим, что теорема 5.5 позволяет находить радиус вписанной окружности многоугольника по формуле

$$\boxed{r = \frac{S}{p}}$$

Задача 1. *Докажите, что площадь S параллелограмма можно вычислить по формуле*

$$S = ab \sin\alpha,$$

где a и b — соседние стороны параллелограмма, α — угол между ними.

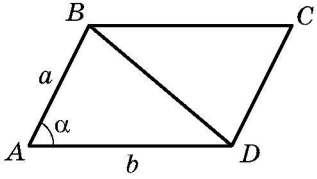


Рис. 34

Решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $AD = b$, $\angle BAD = \alpha$ (рис. 34). Проведем диагональ BD. Поскольку $\Delta ABD = \Delta CBD$, то запишем:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2}ab \sin\alpha = ab \sin\alpha.$$

Задача 2. *Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей и синуса угла между ними.*

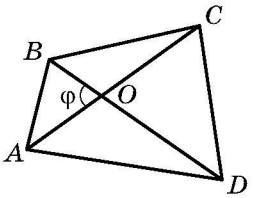


Рис. 35

Решение. Пусть угол между диагоналями AC и BD четырехугольника $ABCD$ равен φ. На рисунке 35 $\angle AOB = \varphi$. Тогда $\angle BOC = \angle AOD = 180° - \varphi$ и $\angle COD = \varphi$. Имеем:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2}OB \cdot OA \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot \sin(180° - \varphi) +$$

$$+ \frac{1}{2}OC \cdot OD \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2}OD \cdot OA \cdot \sin(180° - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}OB(OA + OC) \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2}OD(OC + OA) \cdot \sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}OB \cdot AC \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2}OD \cdot AC \cdot \sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}AC(OB + OD) \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\varphi.$$

Пример. Стороны треугольника равны 17 см, 65 см и 80 см. Найдите наименьшую высоту треугольника, радиусы его вписанной и описанной окружностей.

Решение. Пусть $a = 17$ см, $b = 65$ см, $c = 80$ см.

Полупериметр треугольника $p = \frac{17 + 65 + 80}{2} = 81$ (см), его площадь

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{81(81-17)(81-65)(81-80)} =$$

$$= \sqrt{81 \cdot 64 \cdot 16} = 9 \cdot 8 \cdot 4 = 288\ (\text{см}^2).$$

Наименьшей высотой треугольника является высота h, проведенная к его наибольшей стороне c.

Так как $S = \frac{1}{2}ch$, то $h = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 288}{80} = 7{,}2$ (см).

Радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = \frac{288}{81} = \frac{32}{9}$ (см).

Радиус описанной окружности

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 80}{4 \cdot 288} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 5}{4 \cdot 18} = \frac{5525}{72} \text{ (см).}$$

Ответ: 7,2 см, $\frac{32}{9}$ см, $\frac{5525}{72}$ см.

1. Как можно найти площадь треугольника, если известны две его стороны и угол между ними?
2. Запишите формулу Герона для вычисления площади треугольника.
3. Как можно найти площадь треугольника, если известны три его стороны и радиус описанной окружности?
4. Как можно найти площадь треугольника, если известны три его стороны и радиус вписанной окружности?
5. Как можно найти радиус описанной окружности треугольника, если известны площадь треугольника и его стороны?
6. Как можно найти радиус вписанной окружности треугольника, если известны площадь треугольника и его стороны?
7. Чему равна площадь описанного многоугольника?

УПРАЖНЕНИЯ

132.° Найдите площадь треугольника ABC, если:

1) $AB = 12$ см, $AC = 9$ см, $\angle A = 30°$;

2) $AC = 3$ см, $BC = 6\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135°$.

133.° Найдите площадь треугольника DEF, если:

1) $DE = 7$ см, $DF = 8$ см, $\angle D = 60°$;

2) $DE = 10$ см, $EF = 6$ см, $\angle E = 150°$.

134.° Площадь треугольника MKN равна 75 см^2. Найдите сторону MK, если $KN = 15$ см, $\angle K = 30°$.

135.° Найдите угол между данными сторонами треугольника ABC, если:

1) $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, площадь треугольника равна $30\sqrt{3}$ см^2;

2) $AB = 14$ см, $AC = 8$ см, площадь треугольника равна 56 см^2.

136.° Площадь треугольника ABC равна 18 см^2, $AC = 8$ см, $BC = 9$ см. Найдите угол C.

137.° Найдите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной 16 см и углом 15° при основании.

138.° Найдите площадь треугольника со сторонами: 1) 13 см, 14 см, 15 см; 2) 2 см, 3 см, 4 см.

139.° Найдите площадь треугольника со сторонами: 1) 9 см, 10 см, 17 см; 2) 4 см, 5 см, 7 см.

140.° Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами 13 см, 20 см и 21 см.

141.° Найдите наибольшую высоту треугольника со сторонами 11 см, 25 см и 30 см.

142.° Периметр треугольника равен 32 см, а радиус вписанной окружности — 1,5 см. Найдите площадь треугольника.

143.° Площадь треугольника равна 84 см^2, а его периметр — 72 см. Найдите радиус вписанной окружности треугольника.

144.° Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами:

1) 5 см, 5 см и 6 см; 2) 25 см, 29 см и 36 см.

145.° Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 6 см, 25 см и 29 см.

146.° Найдите площадь параллелограмма по его сторонам a и b и углу α между ними, если:

1) $a = 5\sqrt{2}$ см, $b = 9$ см, $\alpha = 45°$;

2) $a = 10$ см, $b = 18$ см, $\alpha = 150°$.

147.° Чему равна площадь параллелограмма, стороны которого равны 7 см и 12 см, а один из углов — 120°?

148.° Найдите площадь ромба со стороной $9\sqrt{3}$ см и углом 60°.

149.° Диагонали выпуклого четырехугольника равны 8 см и 12 см, а угол между ними — 30°. Найдите площадь четырехугольника.

150.° Найдите площадь выпуклого четырехугольника, диагонали которого равны $3\sqrt{3}$ см и 4 см, а угол между ними — 60°.

151.° Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, площадь которого равна 36 см^2, а угол при вершине — 30°.

152.• Какой треугольник с двумя данными сторонами имеет наибольшую площадь?

153.• Может ли площадь треугольника со сторонами 4 см и 6 см быть равной: 1) 6 см^2; 2) 14 см^2; 3) 12 см^2?

154.• Две соседние стороны параллелограмма соответственно равны двум соседним сторонам прямоугольника. Чему равен острый угол параллелограмма, если его площадь в два раза меньше площади прямоугольника?

155.• Найдите отношение площадей S_1 и S_2 треугольников, изображенных на рисунке 36 (длины отрезков даны в сантиметрах).

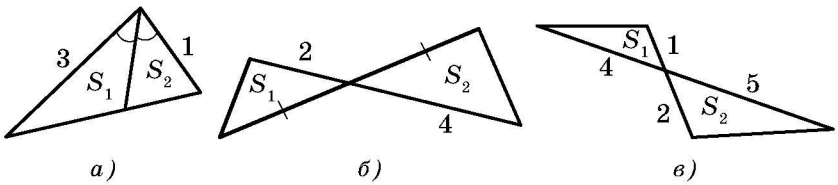


Рис. 36

156.• Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, площадь треугольника ABD равна 12 см^2, а треугольника ACD — 20 см^2. Найдите отношение стороны AB к стороне AC.

157.• Найдите площадь треугольника, сторона которого равна a, а прилежащие к ней углы равны β и γ.

158.• Радиус окружности, описанной около треугольника, равен R, а два угла равны α и β. Найдите площадь треугольника.

159.• В треугольнике ABC известно, что $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Найдите площадь треугольника.

160.• В треугольнике ABC угол A равен α, а высоты BD и CE равны соответственно h_1 и h_2. Найдите площадь треугольника ABC.

161.• Отрезок BM — высота треугольника ABC, $BM = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Найдите площадь треугольника ABC.

162.• В треугольник со сторонами 17 см, 25 см и 28 см вписана окружность, центр которой соединен с вершинами

треугольника. Найдите площади образовавшихся при этом треугольников.

163.•• Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC, $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, $\angle BAC = 120°$. Найдите биссектрису AD.

164.•• Найдите площадь трапеции, основания которой равны 10 см и 50 см, а боковые стороны — 13 см и 37 см.

165.•• Основания трапеции равны 4 см и 5 см, а диагонали — 7 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

166.•• Отрезки BM и CK — высоты остроугольного треугольника ABC, $\angle A = 45°$. Найдите отношение площадей треугольников AMK и ABC.

167.•• Стороны треугольника равны 39 см, 41 см и 50 см. Найдите радиус окружности, центр которой принадлежит большей стороне треугольника и которая касается двух других сторон.

168.•• Вершины треугольника соединены с центром вписанной в него окружности. Проведенные отрезки разбивают данный треугольник на треугольники, площади которых равны 26 см^2, 28 см^2 и 30 см^2. Найдите стороны данного треугольника.

169.•• Докажите, что $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$, где h_1, h_2 и h_3 — высоты треугольника, r — радиус вписанной окружности.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

170. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, делит его угол в отношении 4 : 5. Определите угол между этим перпендикуляром и другой диагональю.

171. Средняя линия MK трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 56 см. Через середину M стороны AB проведена прямая, которая параллельна стороне CD и пересекает основание AD в точке E так, что $AE : ED = 5 : 8$. Найдите основания трапеции.

172. Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, которая параллельна прямой AC и пересекает сторону BC в точке E. Найдите DE, если $AC = 16$ см, $BC = 24$ см.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

173. Найдите сумму углов выпуклого семиугольника.

174. Существует ли выпуклый многоугольник, сумма углов которого равна: 1) 1080°; 2) 1200°?

175. Существует ли многоугольник, каждый угол которого равен: 1) 72°; 2) 171°?

176. Верно ли утверждение (ответ обоснуйте):

1) если все стороны многоугольника, вписанного в окружность, равны, то и все его углы также равны;
2) если все углы многоугольника, вписанного в окружность, равны, то и все его стороны также равны;
3) если все стороны многоугольника, описанного около окружности, равны, то и все его углы также равны;
4) если все углы многоугольника, описанного около окружности, равны, то и все его стороны также равны?

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Вневписанная окружность треугольника

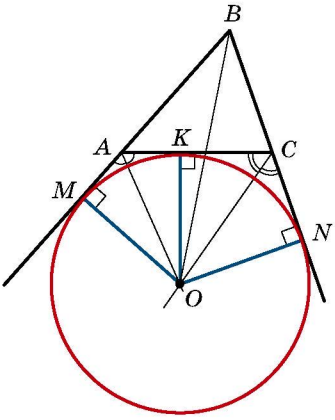


Рис. 37

Проведем биссектрисы двух внешних углов с вершинами A и C треугольника ABC (рис. 37). Пусть O — точка пересечения этих биссектрис. Эта точка равноудалена от прямых AB, BC и AC.

Проведем три перпендикуляра: $OM \perp AB$, $OK \perp AC$, $ON \perp BC$. Очевидно, что $OM = OK = ON$. Следовательно, существует окружность с центром в точке O, которая касается стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Такую окружность называют **вневписанной** (рис. 37).

Так как $OM = ON$, то точка O принадлежит биссектрисе угла ABC.

Очевидно, что любой треугольник имеет три вневписанные окружности. На рисунке 38 их центры обозначены O_A, O_B, O_C. Радиусы этих окружностей обозначим соответственно r_a, r_b, r_c.

По свойству касательных, проведенных к окружности через одну точку, имеем: $CK = CN$, $AK = AM$ (рис. 37). Тогда $AC = CN + AM$. Следовательно, периметр треугольника ABC равен сумме $BM + BN$. Однако $BM = BN$. Тогда $BM = BN = p$, где p — полупериметр треугольника ABC.

Имеем:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OCB} - S_{OAC} =$$

$$= \frac{1}{2} OM \cdot AB + \frac{1}{2} ON \cdot BC - \frac{1}{2} OK \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2} r_b (c + a - b) = r_b \cdot \frac{a + b + c - 2b}{2} = r_b \cdot \frac{2p - 2b}{2} = r_b (p - b).$$

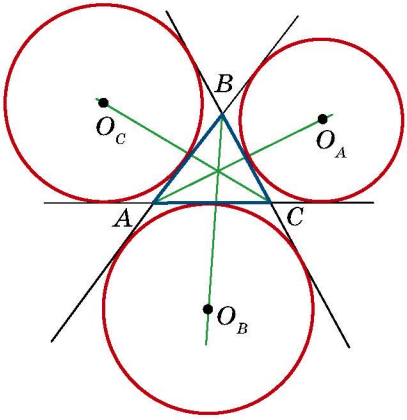


Рис. 38

Отсюда $r_b = \frac{S}{p - b}$, где S — площадь треугольника ABC.

Аналогично можно показать, что $r_a = \frac{S}{p - a}$, $r_c = \frac{S}{p - c}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$, где r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

2. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника $S = r_c \cdot r$, где r_c — радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы треугольника, r — радиус вписанной окружности данного треугольника.

3. В равносторонний треугольник со стороной a вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что ее отрезок внутри треугольника равен b. Найдите площадь треугольника, который эта касательная отсекает от равностороннего треугольника.

4. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне AD, $\angle ADC = 135°$, $\angle BAD = \angle BCD = 60°$. Докажите, что диагональ AC является биссектрисой угла BAD.

Указание. Докажите, что точка C — центр вневписанной окружности треугольника ABD.

5. В треугольнике ABC угол B равен 120°. Отрезки AN, CF и BK — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что угол NKF равен 90°.

Указание. На продолжении стороны AB за точку B отметим точку M. Тогда $\angle MBC = \angle KBC = 60°$, то есть BC — биссектриса внешнего угла MBK треугольника ABK. Отсюда следует, что точка N — центр вневписанной окружности треугольника ABK. Аналогично можно доказать, что точка F — центр вневписанной окружности треугольника BCK.

6. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1 см. На сторонах AB и BC отметили точки M и N соответственно так, что периметр треугольника MBN равен 2 см. Найдите величину угла MDN.

Указание. Докажите, что точка D — центр вневписанной окружности треугольника MBN.

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 1

1. Какое из равенств верно?

А) $\cos(180° - \alpha) = \sin\alpha$; В) $\sin(180° - \alpha) = \cos\alpha$;
Б) $\cos(180° - \alpha) = \cos\alpha$; Г) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

2. Какое из неравенств верно?

А) $\sin 100° \cos 110° > 0$; В) $\sin 100° \cos 110° < 0$;
Б) $\sin 100° \cos 10° < 0$; Г) $\sin 100° \cos 90° > 0$.

3. Найдите третью сторону треугольника, если две его стороны равны 3 см и 8 см, а угол между ними равен 120°.

А) $\sqrt{97}$ см; Б) 7 см; В) 9 см; Г) $\sqrt{32}$ см.

4. Какой вид угла, лежащего против большей стороны треугольника со сторонами 4 см, 7 см и 9 см?

А) острый; В) прямой;
Б) тупой; Г) невозможно установить.

5. Угол между двумя сторонами треугольника, одна из которых на 10 см больше другой, равен 60°, а третья сторона равна 14 см. Какова длина наибольшей стороны треугольника?

А) 16 см; Б) 14 см; В) 18 см; Г) 15 см.

6. Диагонали параллелограмма равны 17 см и 19 см, а его стороны относятся как 2 : 3. Чему равен периметр параллелограмма?

А) 25 см; Б) 30 см; В) 40 см; Г) 50 см.

7. В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$ см, $\angle C = 30°$, $\angle A = 45°$. Найдите сторону BC.

А) $8\sqrt{2}$ см; Б) $4\sqrt{2}$ см; В) $16\sqrt{2}$ см; Г) $12\sqrt{2}$ см.

8. Найдите отношение $AC : BC$ сторон треугольника ABC, если $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$.

А) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Б) $\sqrt{3}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Г) $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

9. В треугольнике ABC $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135°$. Найдите диаметр окружности, описанной около треугольника.

А) 4 см; Б) 8 см; В) 16 см; Г) 2 см.

10. Какое наибольшее значение может принимать площадь треугольника со сторонами 8 см и 12 см?

А) 96 см^2; В) 24 см^2;

Б) 48 см^2; Г) невозможно установить.

11. Найдите сумму длин радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 25 см, 33 см и 52 см.

А) 36 см; Б) 30 см; В) 32,5 см; Г) 38,5 см.

12. Две стороны треугольника равны 11 см и 23 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, — 10 см. Найдите неизвестную сторону треугольника.

А) 15 см; Б) 30 см; В) 25 см; Г) 20 см.

ИТОГИ

В ЭТОМ ПАРАГРАФЕ:

- были введены такие понятия:
  - единичная полуокружность;
  - синус, косинус, тангенс угла от 0° до 180°;
- вы узнали, что значит решить треугольник;
- вы научились решать треугольники;
- вы изучили:
  - некоторые свойства тригонометрических функций;
  - теорему косинусов;
  - теорему синусов;
  - формулы для нахождения радиуса описанной окружности треугольника;
  - формулы для нахождения площади треугольника;
  - формулу для нахождения радиуса вписанной окружности треугольника.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ §2

В этом параграфе вы узнаете, какие многоугольники называют правильными.

Изучите свойства правильных многоугольников. Научитесь с помощью циркуля и линейки строить некоторые их виды.

Научитесь находить радиусы вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника, длину дуги окружности, площадь частей круга.

6. Правильные многоугольники и их свойства

Определение. Многоугольник называют правильным, если у него все стороны равны и все углы равны.

С некоторыми правильными многоугольниками вы уже знакомы: равносторонний треугольник — это правильный треугольник, квадрат — это правильный четырехугольник. На рисунке 39 изображены правильные пятиугольник и восьмиугольник.

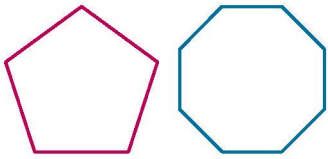


Рис. 39

Ознакомимся с некоторыми свойствами, которыми обладают все правильные n-угольники.

Теорема 6.1. ***Правильный многоугольник является выпуклым многоугольником.***

С доказательством этой теоремы вы можете ознакомиться на с. 61.

Каждый угол правильного n-угольника равен $\frac{180°(n-2)}{n}$. Действительно, поскольку сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$ и все они равны, то каждый из них равен $\frac{180°(n-2)}{n}$.

В правильном треугольнике существует точка, равноудаленная от всех его вершин и от всех его сторон. Это точка пересечения биссектрис правильного треугольника. Точка пересечения диагоналей квадрата также обладает аналогичным свойством. То, что в любом правильном многоугольнике существует точка, равноудаленная от всех его вершин и от всех его сторон, подтверждает такая теорема.

Теорема 6.2. ***Любой правильный многоугольник является одновременно вписанным и описанным, причем центры описанной и вписанной окружностей совпадают.***

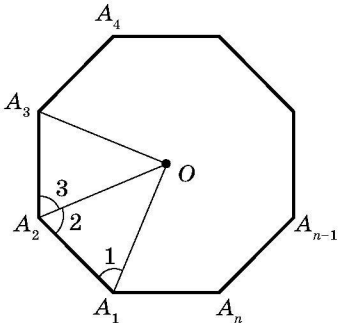


Рис. 40

Доказательство. На рисунке 40 изображен правильный n-угольник $A_1A_2A_3...A_n$. Проведем биссектрисы углов A_1 и A_2. Пусть O — точка их пересечения. Соединим точки O и A_3. Так как в треугольниках OA_1A_2 и OA_2A_3 $\angle 2 = \angle 3$, $A_1A_2 = A_2A_3$ и OA_2 — общая сторона, то эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Кроме того, углы 1 и 2 равны как половины равных углов. Отсюда треугольник OA_1A_2 — равнобедренный, следовательно, равнобедренным является треугольник OA_2A_3. Поэтому $OA_1 = OA_2 = OA_3$.

Соединяя точку O с вершинами A_4, A_5, ..., A_{n-1}, A_n, аналогично можно показать, что $OA_3 = OA_4 = ... = OA_{n-1} = OA_n$.

Таким образом, для многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ существует точка, равноудаленная от всех его вершин. Это точка O — центр описанной окружности.

Так как равнобедренные треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 равны, то равны и их высоты, проведенные из вершины O. Отсюда делаем вывод: точка O равноудалена от всех сторон многоугольника. Следовательно, точка O — центр вписанной окружности. ▲

Точку, которая является центром описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника, называют **центром правильного многоугольника**.

На рисунке 41 изображен фрагмент правильного n-угольника с центром O и стороной AB, длину которой обозначим a_n. Угол AOB называют **центральным углом правильного многоугольника**.

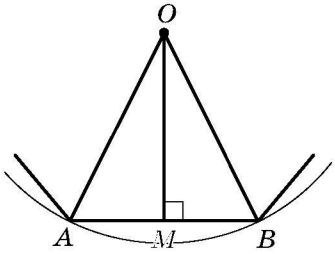


Рис. 41

Понятно, что $\angle AOB = \frac{360°}{n}$.

В равнобедренном треугольнике AOB проведем высоту OM. Тогда $\angle AOM = \angle BOM = \frac{180°}{n}$, $AM = MB = \frac{a_n}{2}$. Из $\Delta\, OMB$

$$OB = \frac{MB}{\sin\frac{180°}{n}} = \frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}} \quad \text{и} \quad OM = \frac{MB}{\operatorname{tg}\frac{180°}{n}} = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}.$$

Отрезки OB и OM — радиусы описанной и вписанной окружностей правильного n-угольника. Если их длины обозначить R_n и r_n соответственно, то полученные результаты можно записать в виде формул:

$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$$

$$r_n = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$$

Подставив в эти формулы вместо n числа 3, 4, 6, получим формулы для нахождения радиусов описанной и вписанной окружностей для правильных треугольника, четырехугольника и шестиугольника со стороной a:

Количество сторон правильного n-угольника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радиус описанной окружности	$R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радиус вписанной окружности	$r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Из сказанного следует, что сторона правильного шестиугольника равна радиусу его описанной окружности. Отсюда получаем простой алгоритм построения правильного шестиугольника: от произвольной точки M окружности надо последовательно откладывать хорды, равные радиусу (рис. 42). Таким образом получаем вершины правильного шестиугольника.

Соединив через одну вершины правильного шестиугольника, получим правильный треугольник (рис. 43).

Для построения правильного четырехугольника достаточно в окружности провести два перпендикулярных диаметра AC и BD (рис. 44). Тогда четырехугольник $ABCD$ — квадрат (докажите это самостоятельно).

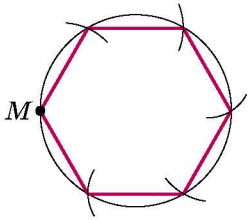


Рис. 42

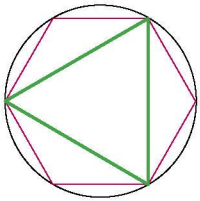


Рис. 43

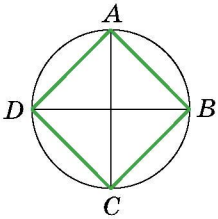


Рис. 44

Если уже построен правильный n-угольник, то легко построить правильный $2n$-угольник. Для этого надо найти середины всех сторон n-угольника и провести радиусы описанной окружности через полученные точки. Тогда концы радиусов и вершины данного n-угольника будут вершинами правильного $2n$-угольника. На рисунках 45 и 46 показано построение правильных 8-угольника и 12-угольника.

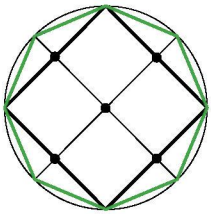


Рис. 45

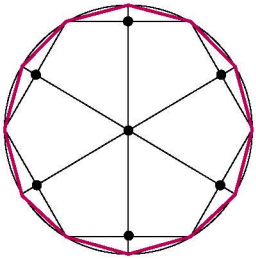


Рис. 46

Пример 1. Существует ли правильный многоугольник, угол которого равен: 1) 177°; 2) 155°? В случае утвердительного ответа укажите вид многоугольника.

Решение

1) Пусть n — количество сторон искомого правильного многоугольника. С одной стороны, сумма его углов равна $180°(n - 2)$. С другой стороны, эта сумма равна $177°n$. Следовательно,

$180°(n - 2) = 177°n$; $180°n - 360° = 177°n$; $n = 120$.

Ответ: существует, это — стодвадцатиугольник.

2) Имеем: $180°(n - 2) = 155°n$; $25°n = 360°$; $n = 14{,}4$, что невозможно, так как n должно быть натуральным числом.

Ответ: не существует.

Пример 2. В окружность вписан правильный треугольник со стороной 18 см. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.

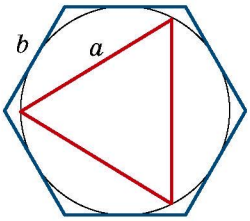


Рис. 47

Решение. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, вычисляется по формуле $R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, где a — сторона треугольника (рис. 47).

Следовательно, $R_3 = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$ (см).

По условию радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен радиусу окружности, описанной около правильного треугольника, то есть $r_6 = R_3 = 6\sqrt{3}$ см.

Так как $r_6 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, где b — сторона правильного шестиугольника, то $b = \frac{2r_6}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

1. Какой многоугольник называют правильным?

2. Какое другое название имеет правильный треугольник?

3. Какое другое название имеет правильный четырехугольник?
4. Около какого правильного многоугольника можно описать окружность?
5. В какой правильный многоугольник можно вписать окружность?
6. Как расположены друг относительно друга центры вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника?
7. Что называют центром правильного многоугольника?
8. Запишите формулы радиусов вписанной и описанной окружностей правильного n-угольника, треугольника, четырехугольника, шестиугольника.
9. Опишите построение правильного шестиугольника.
10. Опишите построение правильного четырехугольника.
11. Как, имея построенный правильный n-угольник, можно построить правильный $2n$-угольник?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

177.° Начертите окружность, радиус которой равен 3 см. Постройте вписанный в эту окружность:

1) правильный шестиугольник;
2) правильный треугольник;
3) правильный двенадцатиугольник.

178.° Начертите окружность, радиус которой равен 2,5 см. Постройте вписанный в эту окружность: 1) правильный четырехугольник; 2) правильный восьмиугольник.

УПРАЖНЕНИЯ

179.° Найдите углы правильного n-угольника, если: 1) $n = 6$; 2) $n = 9$; 3) $n = 15$.

180.° Найдите углы правильного: 1) восьмиугольника; 2) десятиугольника; 3) двадцатичетырехугольника.

181.° Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого равен: 1) 60°; 2) 160°; 3) 171°?

182.° Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого равен: 1) 90°; 2) 108°; 3) 175°?

183.° Существует ли правильный многоугольник, угол которого равен: 1) 140°; 2) 150°?

184.° Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если угол, смежный с углом многоугольника, составляет $\frac{1}{9}$ угла многоугольника?

185.° Определите количество сторон правильного многоугольника, если его угол на 168° больше смежного с ним угла.

186.° Сколько сторон имеет правильный вписанный многоугольник, если градусная мера дуги описанной окружности, которую стягивает сторона многоугольника, равна: 1) 90°; 2) 45°; 3) 24°?

187.° Найдите количество сторон правильного многоугольника, центральный угол которого равен: 1) 120°; 2) 60°; 3) 72°.

188.° Пусть a_3 — сторона правильного треугольника, R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной его окружностей. Заполните таблицу (размеры даны в сантиметрах):

a_3	R	r
$6\sqrt{3}$		
	$4\sqrt{3}$	
		2

189.° Пусть a_4 — сторона квадрата, R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной его окружностей. Заполните таблицу (размеры даны в сантиметрах):

a_4	R	r
8		
	4	
		$\sqrt{2}$

190.° Высота правильного треугольника равна 15 см. Чему равен радиус: 1) описанной окружности; 2) вписанной окружности?

191.° Диагональ квадрата равна $6\sqrt{2}$ см. Чему равен радиус: 1) описанной окружности; 2) вписанной окружности?

192.° Радиус окружности равен 12 см. Найдите сторону вписанного в эту окружность правильного: 1) шестиугольника; 2) двенадцатиугольника.

193.° Радиус окружности равен $8\sqrt{3}$ см. Найдите сторону описанного около этой окружности правильного шестиугольника.

194.° Докажите, что радиус окружности, описанной около правильного треугольника, в два раза больше радиуса окружности, вписанной в этот треугольник.

195.° Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, на 4 см больше радиуса вписанной окружности. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей и сторону треугольника.

196.° Сторона правильного многоугольника равна a, радиус описанной окружности равен R. Найдите радиус вписанной окружности.

197.° Радиусы вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника равны соответственно r и R. Найдите сторону многоугольника.

198.° Сторона правильного многоугольника равна a, радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиус описанной окружности.

199.° Около окружности описан правильный шестиугольник со стороной $4\sqrt{3}$ см. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

200.° В окружность вписан квадрат со стороной $6\sqrt{2}$ см. Найдите сторону правильного треугольника, описанного около этой окружности.

201.° Диаметр круга равен 16 см. Можно ли из него вырезать квадрат со стороной 12 см?

202.° Каким должен быть наименьший диаметр круглого бревна, чтобы из него можно было изготовить брус, попереч-

ным сечением которого является правильный треугольник со стороной 15 см?

203.° Каким должен быть наименьший диаметр круглого бревна, чтобы из него можно было изготовить брус, поперечным сечением которого является квадрат со стороной 14 см?

204.• Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого на 36° больше его центрального угла?

205.• Угол между радиусами вписанной окружности правильного многоугольника, проведенными в точки касания этой окружности с соседними сторонами многоугольника, равен 20°. Найдите количество сторон многоугольника.

206.• Докажите, что все диагонали правильного пятиугольника равны.

207.• Докажите, что каждая диагональ правильного пятиугольника параллельна одной из его сторон.

208.• Общая хорда двух пересекающихся окружностей является стороной правильного треугольника, вписанного в одну окружность, и стороной квадрата, вписанного в другую окружность. Длина этой хорды равна a. Найдите расстояние между центрами окружностей, если они лежат: 1) по разные стороны от хорды; 2) по одну сторону от хорды.

209.• Общая хорда двух пересекающихся окружностей является стороной правильного треугольника, вписанного в одну окружность, и стороной правильного шестиугольника, вписанного в другую окружность. Длина этой хорды равна a. Найдите расстояние между центрами окружностей, если они лежат: 1) по разные стороны от хорды; 2) по одну сторону от хорды.

210.• В окружность вписан и около нее описан правильный треугольник. Найдите отношение сторон этих треугольников.

211.• В окружность вписан и около нее описан правильный шестиугольник. Найдите отношение сторон этих шестиугольников.

212.• Докажите, что сторона правильного восьмиугольника равна $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, где R — радиус его описанной окружности.

213.• Докажите, что сторона правильного двенадцатиугольника равна $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, где R — радиус его описанной окружности.

214.• Какой размер проема должен быть у ключа для шестигранной гайки, основания которой имеют форму правильного шестиугольника (рис. 48), если ширина грани гайки равна 25 мм, а зазор между гранями гайки и ключа — 0,5 мм?

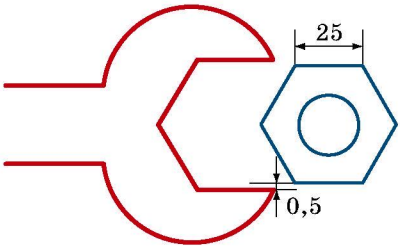


Рис. 48

215.• Найдите площадь правильного восьмиугольника, если радиус описанной около него окружности равен R.

216.• Найдите диагонали и площадь правильного шестиугольника, сторона которого равна a.

217.•• Углы квадрата со стороной 6 см срезали так, что получили правильный восьмиугольник. Найдите сторону полученного восьмиугольника.

218.•• Углы правильного треугольника со стороной 24 см срезали так, что получили правильный шестиугольник. Найдите сторону полученного шестиугольника.

219.•• Найдите диагонали правильного восьмиугольника, сторона которого равна a.

220.•• В правильном двенадцатиугольнике, длина стороны которого равна a, последовательно соединили середины шести сторон, взятых через одну. Найдите сторону образовавшегося при этом правильного шестиугольника.

221.•• В правильном восьмиугольнике, длина стороны которого равна a, последовательно соединили середины четырех сторон, взятых через одну. Найдите сторону образовавшегося при этом квадрата.

222.* Форму каких равных правильных многоугольников могут иметь дощечки паркета, чтобы ими можно было выстлать пол?

223.* Нарисован правильный шестиугольник, длина стороны которого равна 1. Пользуясь только линейкой, постройте отрезок длиной $\sqrt{7}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

224. Окружность разделена на 5 равных дуг: $\cup AB = \cup BC = \cup CD = \cup DE = \cup AE$. Найдите: 1) $\angle BAC$; 2) $\angle BAD$; 3) $\angle BAE$; 4) $\angle CAD$; 5) $\angle DAE$.

225. На одной стороне угла с вершиной в точке A отметили точки B и C (точка B лежит между точками A и C), а на другой — точки D и E (точка D лежит между точками A и E), причем $AB = 28$ см, $BC = 8$ см, $AD = 24$ см, $AE = 42$ см, $BE = 21$ см. Найдите CD.

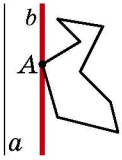
226. Основание равнобедренного тупоугольного треугольника равно 24 см, а радиус окружности, описанной около него, — 13 см. Найдите площадь треугольника.

227. Через точку A к окружности проведены две касательные. Расстояние от точки A до точки касания равно 12 см, а расстояние между точками касания — 14,4 см. Найдите радиус окружности.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

О построении правильных n-угольников

Докажем, что любой правильный n-угольник является выпуклым многоугольником. Для этого достаточно показать, что в любом многоугольнике есть хотя бы один угол, меньший 180°. Тогда из того, что в правильном n-угольнике все углы равны, будет следовать, что каждый из них меньше 180°, то есть многоугольник будет выпуклым.



Рассмотрим произвольный многоугольник и прямую a, не имеющую с ним общих точек (см. рисунок). Из каждой вершины многоугольника опустим перпендикуляр на прямую a.

Сравнив длины этих перпендикуляров, мы сможем выбрать вершину многоугольника, наименее удаленную от прямой a (если таких вершин несколько, то выберем любую из них). Пусть этим свойством обладает вершина A. Через точку A проведем прямую b, параллельную прямой a. Тогда угол A многоугольника лежит в одной полуплоскости относительно прямой b. Следовательно, $\angle A < 180°$.

Вы умеете с помощью циркуля и линейки строить правильный 4-угольник, а значит, и 8-угольник, 16-угольник, 32-угольник, то есть любой 2^n-угольник (n — натуральное, $n > 1$). Умение строить правильный треугольник дает возможность построить следующую цепочку из правильных многоугольников: 6-угольник, 12-угольник, 24-угольник и т. д., то есть любой $3 \cdot 2^n$-угольник (n — натуральное).

Задачу построения правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки изучали еще древнегреческие геометры. В частности, помимо указанных выше многоугольников, они умели строить правильные 5-угольник и 15-угольник — задача довольно непростая.

Древние ученые, умевшие строить любой из правильных n-угольников, где n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, пытались решить эту задачу и для n = 7, 9. Им это не удалось. Вообще, более двух тысяч лет никто не мог продвинуться в решении этой проблемы. Лишь в 1796 г. великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) смог доказать, что циркулем и линейкой построить правильные 7-угольник и 9-угольник нельзя. В 1801 г. Гаусс показал, что циркулем и линейкой можно построить правильный n-угольник тогда и только тогда, когда $n = 2^k$, где $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, или $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$, где k — целое неотрицательное число, $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — разные простые числа вида $2^{2^m}+1$, которые называют простыми числами Ферма[1]. Сейчас известны лишь пять простых чисел Ферма: 3, 5, 17, 257, 65537.

Гауссу удалось построить правильный 17-угольник. Он придавал этому открытию столь большое значение, что завещал увековечить 17-угольник на своем надгробии. На могильной плите Гаусса этого рисунка нет, но сам памятник стоит на семнадцатиугольном постаменте.

[1] Пьер Ферма (1601–1665) — французский математик, один из основателей теории чисел.

7. Длина окружности. Площадь круга

На рисунке 49 изображены правильные 4-угольник, 8-угольник и 16-угольник, вписанные в окружность.

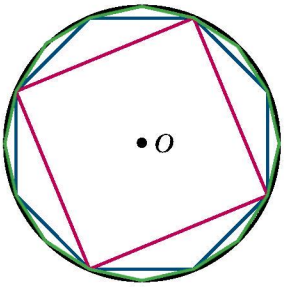


Рис. 49

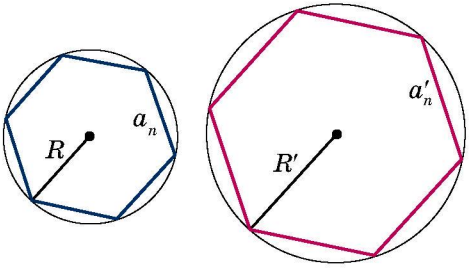


Рис. 50

Мы видим, что при увеличении количества сторон правильного n-угольника его периметр P_n все меньше и меньше отличается от длины C описанной окружности.

Так, для нашего примера можно записать:

$$C - P_4 > C - P_8 > C - P_{16} \text{ и т. д.}$$

При неограниченном увеличении количества сторон правильного многоугольника его периметр будет как угодно мало отличаться от длины окружности. Это означает, что разность $C - P_n$ можно сделать меньшей, чем, например, 10^{-6}, 10^{-9}, и вообще меньшей любого положительного числа.

Рассмотрим два правильных n-угольника со сторонами a_n и a'_n и радиусами описанных окружностей R и R' соответственно (рис. 50). Тогда их периметры P_n и P'_n вычисляют по формулам:

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin\frac{180°}{n},$$

$$P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin\frac{180°}{n}.$$

Отсюда

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (*)$$

Это равенство справедливо при любом значении n (n — натуральное, $n \geqslant 3$). При неограниченном увеличении зна-

чения n периметры P_n и P'_n соответственно будут сколь угодно мало отличаться от длин C и C' описанных окружностей. Тогда при неограниченном увеличении n отношение $\frac{P_n}{P'_n}$ будет сколь угодно мало отличаться от отношения $\frac{C}{C'}$. С учетом равенства (*) приходим к выводу, что число $\frac{2R}{2R'}$ сколь угодно мало отличается от числа $\frac{C}{C'}$. А это значит, что $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$ или $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$.

Последнее равенство означает, что ***для всех окружностей отношение длины окружности к диаметру есть одно и то же число.***

Вы знаете, что это число принято обозначать греческой буквой π (читают: «пи»).

Из равенства $\frac{C}{2R} = \pi$ получаем формулу для вычисления длины окружности:

$$\boxed{C = 2\pi R}$$

Число π иррациональное, а значит, оно может быть представлено в виде конечной десятичной дроби лишь приближенно. Обычно при решении задач в качестве приближенного значения π принимают число 3,14.

Великий древнегреческий ученый Архимед (III в. до н. э.), выразив через диаметр описанной окружности периметр правильного 96-угольника, установил, что $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Отсюда и следует, что $\pi \approx 3{,}14$.

С помощью современных компьютеров и специальных программ можно вычислить число π с огромной точностью. Приведем запись числа π с 47 цифрами после запятой:

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937\ldots$.

В 1992 г. число π вычислили с точностью до 1 011 196 691 цифры после запятой. Этот факт был занесен в Книгу рекордов Гиннесса. Само число в книге не приведено, так как для этого понадобилось бы более тысячи страниц.

Найдем формулу для вычисления длины дуги окружности с градусной мерой $n°$. Поскольку градусная мера всей окружности равна 360°, то длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тогда длина l дуги в $n°$ вычисляется по формуле

$$\boxed{l = \frac{\pi R n}{180}}$$

Выведем формулу для вычисления площади круга.

Опять-таки, обратимся к рисунку 49. Мы видим, что при увеличении количества сторон правильного n-угольника его площадь S_n все меньше и меньше отличается от площади S круга. При неограниченном увеличении количества сторон его площадь стремится к площади круга.

На рисунке 51 изображен фрагмент правильного n-угольника с центром в точке O, со стороной $AB = a_n$ и радиусом описанной окружности, равным R. Опустим перпендикуляр OM на сторону AB. Имеем:

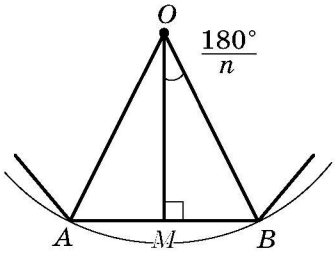


Рис. 51

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} a_n \cdot R \cos \frac{180°}{n}.$$

Поскольку радиусы, проведенные в вершины правильного n-угольника, разбивают его на n равных треугольников, то площадь n-угольника S_n в n раз больше площади треугольника AOB. Тогда

$$S_n = n \cdot S_{AOB} = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot R \cos \frac{180°}{n}.$$

Отсюда

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot R \cos \frac{180°}{n}, \qquad (**)$$

где P_n — периметр данного правильного n-угольника.

При неограниченном увеличении значения n величина $\frac{180°}{n}$ будет сколь угодно мало отличаться от 0°, а следова-

тельно, $\cos\frac{180°}{n}$ будет стремиться к 1. Периметр P_n будет стремиться к длине C окружности, а площадь S_n — к площади S круга. Отсюда с учетом равенства (**) можно записать $S = \frac{1}{2}C \cdot R$.

Из этого равенства получаем формулу для нахождения площади круга:

$$S = \pi R^2$$

На рисунке 52 радиусы OA и OB делят круг на две части, закрашенные разными цветами. Каждую из этих частей вместе с радиусами OA и OB называют **круговым сектором** или просто **сектором**.

Понятно, что круг радиуса R можно разделить на 360 равных секторов, каждый из которых будет содержать дугу в 1°. Площадь такого сектора равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Тогда площадь S сектора, содержащего дугу окружности в $n°$, вычисляется по формуле:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

На рисунке 53 хорда AB делит круг на две части, закрашенные разными цветами. Каждую из этих частей вместе с хордой AB называют **круговым сегментом** или просто **сегментом**. Хорду AB при этом называют **основанием сегмента**.

Чтобы найти площадь сегмента, закрашенного синим цветом (рис. 54), надо из площади сектора, содержащего хорду AB, вычесть площадь треугольника AOB (точка O —

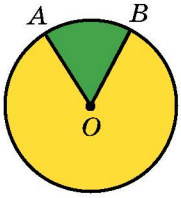


Рис. 52

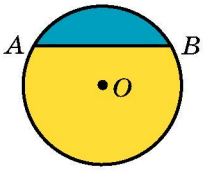


Рис. 53

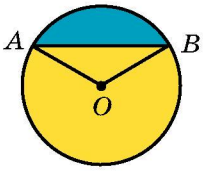


Рис. 54

центр круга). Чтобы найти площадь сегмента, закрашенного желтым цветом, надо к площади сектора, не содержащего хорду AB, прибавить площадь треугольника AOB.

Если хорда AB является диаметром круга, то она делит круг на два сегмента, которые называют **полукругами**. Площадь S полукруга вычисляют по формуле $S=\frac{\pi R^2}{2}$, где R — радиус круга.

Пример 1. Длина дуги окружности, радиус которой 25 см, равна π см. Найдите градусную меру дуги.

Решение. Из формулы $l=\frac{\pi R n}{180}$ получаем $n=\frac{180l}{\pi R}$. Следовательно, искомая градусная мера $n^\circ=\left(\frac{180\pi}{\pi\cdot 25}\right)^\circ=7{,}2^\circ$.

Ответ: $7{,}2^\circ$.

Пример 2. В окружность с центром O, радиус которой равен 8 см, вписан правильный восьмиугольник $ABCDEFMK$ (рис. 55). Найдите площади сектора и сегмента, содержащих дугу AB.

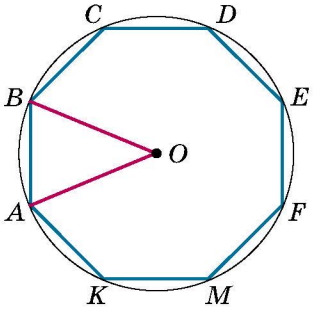


Рис. 55

Решение. $\angle AOB$ — центральный угол правильного восьмиугольника, $\angle AOB=\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$.

Тогда площадь сектора, которую требуется найти, $S_{\text{сект}}=\frac{\pi\cdot 8^2\cdot 45}{360}=$ $=8\pi$ (см^2), площадь сегмента

$$S_{\text{сегм}}=S_{\text{сект}}-S_{\Delta AOB}=8\pi-\frac{1}{2}OA^2\sin\angle AOB=8\pi-16\sqrt{2}\ \text{(см}^2\text{)}.$$

Ответ: 8π см^2, $\left(8\pi-16\sqrt{2}\right)$ см^2.

?

1. Какое отношение обозначают буквой π?
2. Назовите приближенное значение числа π с точностью до сотых.
3. По какой формуле вычисляют длину окружности?

4. По какой формуле вычисляют длину дуги окружности?
5. По какой формуле вычисляют площадь круга?
6. Поясните, какую геометрическую фигуру называют круговым сектором.
7. По какой формуле вычисляют площадь кругового сектора?
8. Поясните, какую геометрическую фигуру называют круговым сегментом.
9. Поясните, как можно найти площадь кругового сегмента.

УПРАЖНЕНИЯ

228.° Найдите длину окружности, диаметр которой равен: 1) 1,2 см; 2) 3,5 см.

229.° Найдите длину окружности, радиус которой равен: 1) 6 см; 2) 1,4 м.

230.° Найдите площадь круга, радиус которого равен: 1) 4 см; 2) 14 дм.

231.° Найдите площадь круга, диаметр которого равен: 1) 20 см; 2) 3,2 дм.

232.° Найдите площадь круга, длина окружности которого равна l.

233.° Вычислите площадь поперечного сечения дерева, которое в обхвате составляет 125,6 см.

234.° Как изменится длина окружности, если ее радиус:
1) увеличить в 2 раза;
2) уменьшить в 3 раза?

235.° Радиус окружности увеличили на 1 см. На сколько увеличилась при этом длина окружности?

236.° Самый большой оптический телескоп (рефлектор) в Украине находится в Крымской астрономической обсерватории. Диаметр его зеркала равен 2,6 м. Самый большой в мире оптический телескоп находится в обсерватории Калифорнийского университета на Гавайях (США). Диаметр его зеркала составляет 10 м. Во сколько раз длина обода американского телескопа больше длины обода украинского? Ответ округлите до десятых.

237.° Вычислите длину красной линии, изображенной на рисунке 56.

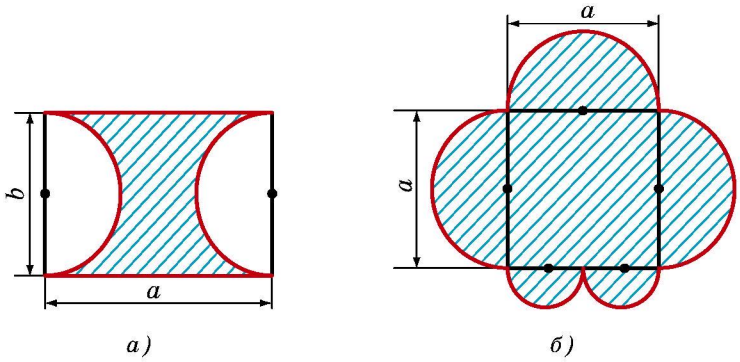


Рис. 56

238.° Как изменится площадь круга, если его радиус:

1) увеличить в 4 раза;

2) уменьшить в 5 раз?

239.° Вычислите площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 57.

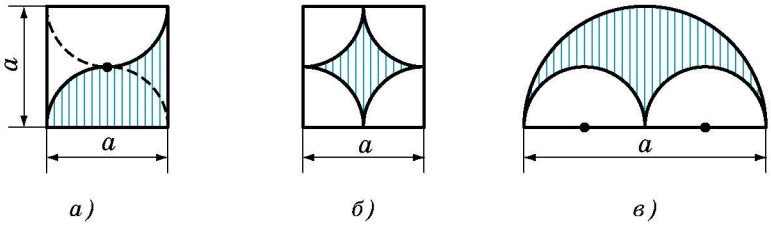


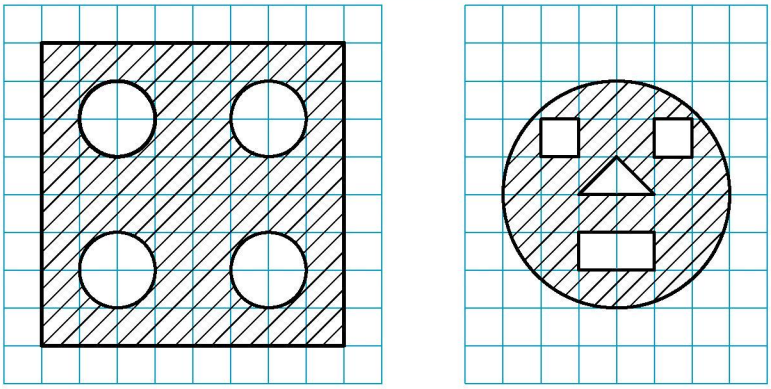
Рис. 57

240.° Вычислите площадь заштрихованной фигуры (рис. 58), если длина стороны клеточки равна a.

241.° Блинчик, диаметр которого равен 30 см, стоит столько же, сколько два блинчика, диаметр которых 20 см. Если толщина всех блинчиков одинакова, то в каком случае покупатель съест больше: когда купит один большой блинчик или два меньших?

242.° Найдите длину окружности, описанной около правильного треугольника со стороной a.

243.° Найдите длину окружности, вписанной в квадрат со стороной a.



а) *б)*

Рис. 58

244.° Найдите площадь круга, описанного около квадрата со стороной a.

245.° Найдите площадь круга, вписанного в правильный шестиугольник со стороной a.

246.° Найдите площадь круга, вписанного в правильный треугольник со стороной a.

247.° Найдите площадь круга, описанного около прямоугольника со сторонами a и b.

248.° Найдите площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника с боковой стороной b и углом α при основании.

249.° Найдите длину окружности, описанной около прямоугольника со стороной a и углом α между данной стороной и диагональю прямоугольника.

250.° Радиус окружности равен 8 см. Найдите длину дуги окружности, градусная мера которой равна: 1) 4°; 2) 18°; 3) 160°; 4) 320°.

251.° Длина дуги окружности равна 12π см, а ее градусная мера — 27°. Найдите радиус окружности.

252.° Длина дуги окружности радиусом 24 см равна 3π см. Найдите градусную меру дуги.

253.° Вычислите длину дуги экватора Земли, градусная мера которой равна 1°, если радиус экватора приближенно равен 6400 км.

254.° Радиус круга равен 6 см. Найдите площадь сектора, если градусная мера его дуги равна: 1) 15°; 2) 144°; 3) 280°.

255.° Площадь сектора составляет $\frac{5}{8}$ площади круга. Найдите градусную меру его дуги.

256.° Площадь сектора равна 6π дм^2. Найдите градусную меру дуги этого сектора, если радиус круга равен 12 дм.

257.° Площадь сектора равна $\frac{5\pi}{4}$ см^2, а градусная мера дуги этого сектора составляет 75°. Найдите радиус круга, частью которого является данный сектор.

258.° Может ли сектор круга быть его сегментом?

259.° Найдите площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 5 см, а градусная мера дуги сегмента равна: 1) 45°; 2) 150°; 3) 330°.

260.° Найдите площадь кругового сегмента, если радиус круга равен 2 см, а градусная мера дуги сегмента равна: 1) 60°; 2) 300°.

261.• Колеса автомобиля имеют диаметр 65 см. Он движется с такой скоростью, что колеса делают ежесекундно 6 оборотов. Найдите скорость автомобиля в километрах в час. Ответ округлите до десятых.

262.• Найдите длину дуги, которую описывает часовая стрелка длиной 6 см за 1 ч.

263.• Найдите длину дуги, которую описывает минутная стрелка длиной 24 см за 40 мин.

264.• Радиус окружности увеличили на a. Докажите, что длина окружности увеличится на величину, не зависящую от радиуса данной окружности.

265.• Сторона треугольника равна 6 см, а прилежащие к ней углы равны 50° и 100°. Найдите длины дуг, на которые делят описанную окружность треугольника его вершины.

266.• Сторона треугольника равна $5\sqrt{3}$ см, а прилежащие к ней углы равны 35° и 25°. Найдите длины дуг, на которые делят описанную окружность треугольника его вершины.

267.• На катете AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) как на диаметре построена окружность. Найди-

те длину дуги этой окружности, принадлежащей треугольнику, если $\angle A = 24°$, $AC = 20$ см.

268.• Угол при основании равнобедренного треугольника равен 70°. На высоте треугольника, проведенной к основанию и равной 27 см, как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги окружности, принадлежащей треугольнику.

269.• Отрезок AB разбили на n отрезков. На каждом из них как на диаметре построили полуокружность. Это действие повторили, разбив данный отрезок на m отрезков. Найдите отношение сумм длин полуокружностей, полученных в первом и втором случаях.

270.• Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника как на диаметре (рис. 59), равна сумме площадей полукругов, построенных на его катетах как на диаметрах.

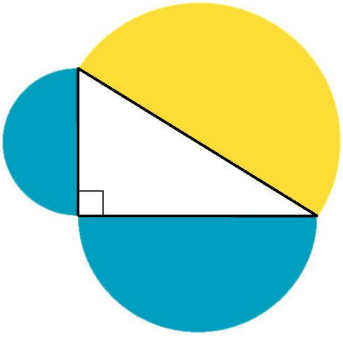


Рис. 59

271.• Две трубы, диаметры которых равны 30 см и 40 см, надо заменить одной трубой с такой же пропускной способностью. Каким должен быть диаметр этой трубы?

272.• На сколько процентов увеличится площадь круга, если его радиус увеличить на 10 %?

273.• В круг вписан квадрат со стороной a. Найдите площадь меньшего из сегментов, основанием которых является сторона квадрата.

274.• Из листа жести, имеющего форму круга, вырезали правильный шестиугольник наибольшей площади. Сколько процентов жести пошло в отходы?

275.• В круг вписан правильный треугольник со стороной a. Найдите площадь меньшего из сегментов, основанием которых является сторона треугольника.

276.• В круговой сектор, радиус которого равен R, а центральный угол составляет 60°, вписан круг. Найдите площадь этого круга.

277.•• Найдите площадь розетки (заштрихованной фигуры), изображенной на рисунке 60, если сторона квадрата $ABCD$ равна a.

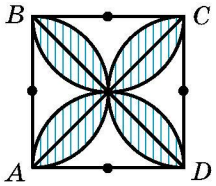


Рис. 60

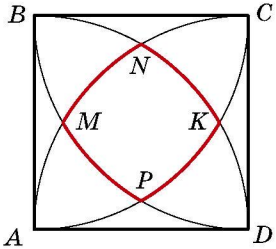


Рис. 61

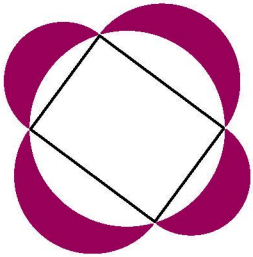


Рис. 62

278.•• При построении четырех дуг с центрами в вершинах квадрата $ABCD$ и радиусами, равными стороне a квадрата, образовалась фигура, ограниченная красной линией (рис. 61). Найдите длину этой линии.

279.•• (Задача Гиппократа[1]). Около прямоугольника описали окружность и на каждой его стороне как на диаметре построили полуокружность (рис. 62). Докажите, что сумма площадей закрашенных фигур (луночек Гиппократа) равна площади прямоугольника.

280.•• Два квадрата со сторонами 1 см имеют общий центр (рис. 63). Докажите, что площадь их общей части больше, чем $\frac{\pi}{4}$.

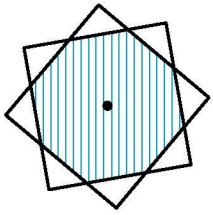


Рис. 63

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

281. Найдите сторону ромба, если его высота равна 6 см, а угол между стороной ромба и одной из диагоналей равен 15°.

282. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ делит его сторону BC на отрезки BM и MC длиной 10 см и 14 см

[1] Гиппократ Хиосский — древнегреческий геометр (V в. до н. э.).

соответственно. На отрезки какой длины эта биссектриса делит диагональ прямоугольника?

283. Сумма углов при большем основании трапеции равна 90°. Докажите, что расстояние между серединами оснований трапеции равно полуразности оснований.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

284. Чему равно расстояние между точками A и B координатной прямой, если:

1) A (3) и B (7);
2) A (−2) и B (4);
3) A (−2) и B (−6);
4) A (a) и B (b)?

285. Начертите на координатной плоскости отрезок AB, найдите по рисунку координаты середины отрезка и сравните их со средним арифметическим соответствующих координат точек A и B, если:

1) A (−1; −6), B (5; −6);
2) A (3; 1), B (3; 5);
3) A (3; −5), B (−1; 3).

286. Постройте на координатной плоскости треугольник ABC и найдите его стороны, если A (5; −1), B (−3; 5), C (−3; −1).

287. В какой координатной четверти находится точка: 1) A (3; −4); 2) B (−3; 1); 3) C (−4; −5); 4) D (1; 9)?

288. В какой координатной четверти находится точка M, если:

1) ее абсцисса положительна, а ордината отрицательна;
2) произведение ее абсциссы и ординаты — отрицательное число;
3) ее абсцисса и ордината отрицательны?

289. Что можно сказать о координатах точки A, если:

1) точка A лежит на оси абсцисс;
2) точка A лежит на биссектрисе четвертого координатного угла;
3) точка A лежит на оси ординат;
4) точка A лежит на биссектрисе третьего координатного угла;
5) точка A лежит на биссектрисе первого координатного угла?

290. Укажите координаты вершин прямоугольника $ABCD$ (рис. 64).

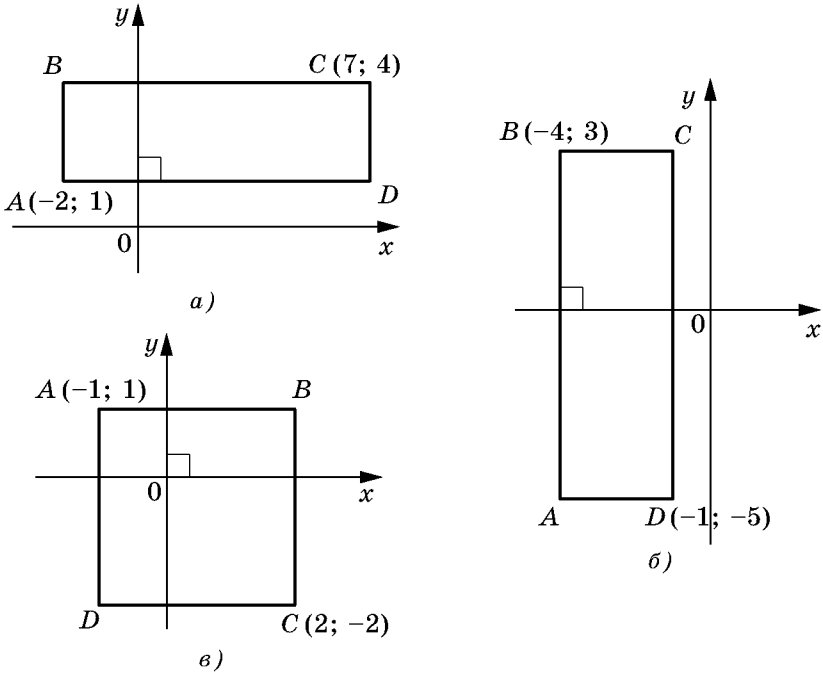


Рис. 64

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 2

1. Найдите количество сторон правильного многоугольника, если его угол равен 170°.

А) 30; В) 36;
Б) 32; Г) такого многоугольника не существует.

2. Чему равен центральный угол правильного десятиугольника?

А) 18°; Б) 36°; В) 144°; Г) 10°.

3. Какой наибольший центральный угол может иметь правильный многоугольник?

А) 90°; В) 150°;
Б) 120°; Г) указать невозможно.

4. Найдите длину дуги окружности, градусная мера которой равна 207°, если радиус окружности — 4 см.

А) $4{,}6\pi$ см; Б) 4,6 см; В) 23π см; Г) 23 см.

5. Какую часть площади круга составляет площадь сектора, центральный угол которого равен 140°?

А) $\frac{7}{9}$; Б) $\frac{7}{12}$; В) $\frac{7}{15}$; Г) $\frac{7}{18}$.

6. В окружность вписан правильный шестиугольник, сторона которого равна a. Найдите сторону треугольника, описанного около этой окружности.

А) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; Б) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; В) $a\sqrt{3}$; Г) $2a\sqrt{3}$.

7. Чему равен радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, меньшая диагональ которого равна 12 см?

А) 6 см; Б) $6\sqrt{3}$ см; В) $2\sqrt{3}$ см; Г) 12 см.

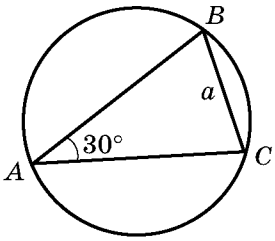
8. Вписанный в окружность угол, равный 40°, опирается на дугу длиной 8 см. Какова длина данной окружности?

А) 36 см; Б) 72π см; В) 72 см; Г) 36π см.

9. Какой должна быть длина хорды окружности, радиус которой равен R, чтобы длины дуг, на которые концы этой хорды делят окружность, относились как 2 : 1?

А) R; Б) $2R$; В) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; Г) $R\sqrt{3}$.

10. На рисунке изображен вписанный в окружность треугольник ABC, $\angle A = 30°$, $BC = a$. Чему равна площадь сегмента, основание которого стягивает дугу BAC?



А) $\frac{a^2(2\pi+3\sqrt{3})}{12}$; В) $\frac{a^2(10\pi+3\sqrt{3})}{12}$;

Б) $\frac{a^2(2\pi-3\sqrt{3})}{12}$; Г) $\frac{a^2(10\pi-3\sqrt{3})}{12}$.

11. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 20°$, $\angle C = 30°$, $AC = 14$ см. Окружность с центром в точке A касается прямой BC. Найдите длину дуги этой окружности, принадлежащей треугольнику ABC.

А) $\frac{7\pi}{18}$ см; Б) $\frac{7\pi}{9}$ см; В) $\frac{7\pi}{12}$ см; Г) $\frac{7\pi}{6}$ см.

12. Радиус окружности, описанной около правильного многоугольника, равен $6\sqrt{3}$ см, а радиус вписанной в него окружности — 9 см. Сколько сторон имеет многоугольник?

А) 6; Б) 12; В) 9; Г) 18.

ИТОГИ

В ЭТОМ ПАРАГРАФЕ:

- были введены такие понятия:
  - правильный многоугольник;
  - центр правильного многоугольника;
  - центральный угол правильного многоугольника;
  - круговой сектор;
  - круговой сегмент;
  - основание сегмента;
- вы изучили:
  - свойства правильного многоугольника;
  - формулы для нахождения радиусов описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника;
  - формулы для вычисления длины окружности и длины дуги окружности;
  - формулы для вычисления площади круга и площади сектора;
- вы ознакомились со способом нахождения площади сегмента.

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ §3

В этом параграфе вы расширите свои знания о координатной плоскости.

Вы научитесь находить длину отрезка и координаты его середины, зная координаты его концов.

Сформируете представление об уравнении фигуры, выведете уравнения прямой и окружности.

Ознакомитесь с методом координат, позволяющим решать геометрические задачи средствами алгебры.

8. Расстояние между двумя точками с заданными координатами. Координаты середины отрезка

В 6 классе вы ознакомились с координатной плоскостью, то есть с плоскостью, на которой изображены две перпендикулярные координатные прямые (ось абсцисс и ось ординат) с общим началом отсчета (рис. 65). Вы умеете отмечать на ней точки по их координатам и наоборот, находить координаты точки, отмеченной на координатной плоскости.

Договоримся координатную плоскость с осью x (осью абсцисс) и осью y (осью ординат) называть **плоскостью xy**.

Координаты точки на плоскости xy называют **декартовыми координатами** в честь французского математика Рене Декарта (см. рассказ на с. 105–106).

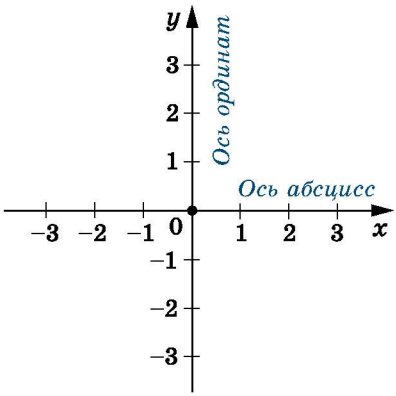


Рис. 65

Вы знаете, как находить расстояние между двумя точками, заданными своими ко-

ординатами на координатной прямой: для точек A (x_1) и B (x_2) (рис. 66) имеем:

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

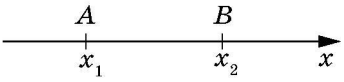


Рис. 66

Научимся находить расстояние между точками A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$, заданными на плоскости xy.

Рассмотрим случай, когда отрезок AB не перпендикулярен ни одной из координатных осей (рис. 67).

Через точки A и B проведем прямые, перпендикулярные координатным осям. Получим прямоугольный треугольник ACB. Очевидно, что $BC = |x_2 - x_1|$, $AC = |y_2 - y_1|$. Отсюда $AB^2 = BC^2 + AC^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

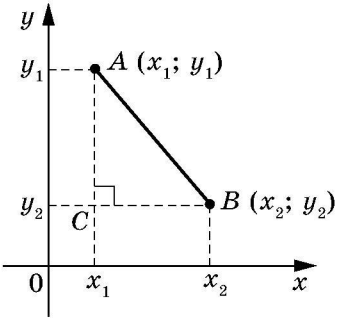


Рис. 67

Тогда формулу расстояния между точками A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ можно записать так:

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Докажите самостоятельно, что эта формула остается верной и для случая, когда отрезок AB перпендикулярен одной из осей координат.

Пусть A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ — точки плоскости xy. Научимся находить координаты $(x_0; y_0)$ точки M — середины отрезка AB.

Опять-таки рассмотрим случай, когда отрезок AB не перпендикулярен ни одной из координатных осей (рис. 68). Будем считать, что $x_2 > x_1$ (случай, когда $x_2 < x_1$, рассматривается аналогично). Через точки A, M и B проведем прямые, перпендикулярные оси абсцисс, которые пересекут эту ось соответ-

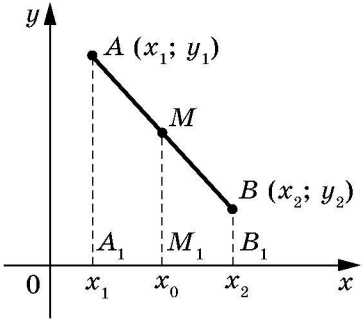


Рис. 68

ственно в точках A_1, M_1 и B_1. По теореме Фалеса $A_1M_1 = M_1B_1$, то есть $|x_0 - x_1| = |x_2 - x_0|$. Так как $x_2 > x_0 > x_1$, то можем записать: $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$. Отсюда

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

Аналогично можно показать, что

$$\boxed{y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

Формулы для нахождения координат середины отрезка остаются верными и для случая, когда отрезок AB перпендикулярен одной из осей координат (докажите это самостоятельно).

Пример 1. Докажите, что треугольник с вершинами в точках A (−1; 7), B (1; 3) и C (5; 5) является равнобедренным прямоугольным.

Решение. Найдем длины сторон данного треугольника:

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20};$$

$$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20};$$

$$AC = \sqrt{(5+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Следовательно, $AB = BC$, то есть ΔABC — равнобедренный.

Так как $AB^2 + BC^2 = 20 + 20 = 40 = AC^2$, то ΔABC — прямоугольный.

Пример 2. Точка M (2; −5) — середина отрезка AB, A(−1; 3). Найдите координаты точки B.

Решение. Обозначим $(x_B; y_B)$ — координаты точки B, $(x_A; y_A)$ — координаты точки A, $(x_M; y_M)$ — координаты точки M.

Поскольку $\frac{x_A + x_B}{2} = x_M$, то имеем $\frac{-1 + x_B}{2} = 2$; $-1 + x_B = 4$; $x_B = 5$.

Аналогично $\frac{y_A + y_B}{2} = y_M$; $\frac{3 + y_B}{2} = -5$; $y_B = -13$.

Ответ: B (5; −13).

Пример 3. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (2; −1), B (1; 3), C (−3; 2) и D (−2; −2) является прямоугольником.

Решение. Пусть точка M — середина диагонали AC. Тогда

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2-3}{2} = -0,5; \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+2}{2} = 0,5.$$

Следовательно, M (−0,5; 0,5).

Пусть точка K — середина диагонали BD. Тогда

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1-2}{2} = -0,5; \quad y_K = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{3-2}{2} = 0,5,$$

K (−0,5; 0,5).

Следовательно, точки M и K совпадают. То есть диагонали четырехугольника $ABCD$ имеют общую середину. Отсюда следует, что $ABCD$ — параллелограмм. Далее,

$$AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34}, \quad BD = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}.$$

Следовательно, диагонали параллелограмма $ABCD$ равны. Отсюда следует, что этот параллелограмм является прямоугольником.

1. Как найти расстояние между двумя точками, если известны их координаты?
2. Как найти координаты середины отрезка, если известны координаты его концов?

УПРАЖНЕНИЯ

291.° Найдите расстояние между точками A и B, если:
1) A (10; 14), B (5; 2); 2) A (−1; 2), B (4; −3).

292.° Найдите расстояние между точками C и D, если:
1) C (−2; −4), D (4; −12); 2) C (6; 3), D (7; −1).

293.° Вершинами треугольника являются точки A(−1; 3), B(5; 9), C(6; 2). Докажите, что ΔABC — равнобедренный.

294.° Докажите, что точка M (0; −1) является центром окружности, описанной около треугольника ABC, если A (6; −9), B (−6; 7), C (8; 5).

295.° Докажите, что углы B и C треугольника ABC равны, если A (5; −7), B (−3; 8), C (−10; −15).

296.° Найдите координаты середины отрезка BC, если:

1) B (5; 4), C (3; 2); 2) B (−2; −1), C (−1; 7).

297.° Точка C — середина отрезка AB. Найдите координаты точки B, если:

1) A (3; −4), C (2; 1); 2) A (−1; 1), C (0,5; −1).

298.° Точка K — середина отрезка AD. Заполните таблицу:

Точка	Координаты точки		
A	(−3; 1)	(−8; 2)	
D	(−1; −3)		(−9; 2)
K		(−4; 6)	(1; 2)

299.° Найдите длину медианы BM треугольника, вершинами которого являются точки A (3; −2), B (2; 3) и C (7; 4).

300.° Даны точки A (−2; 4) и B (2; −8). Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка AB.

301.• Докажите, что треугольник с вершинами в точках A (2; 7), B (−1; 4), C (1; 2) является прямоугольным.

302.• Точки A (−1; 2) и B (7; 4) являются вершинами прямоугольного треугольника. Может ли третья вершина треугольника иметь координаты: 1) (7; 2); 2) (2; −3)?

303.• Лежат ли на одной прямой точки:

1) A (−2; −7), B(−1; −4) и C (5; 14);

2) D (−1; 3), E (2; 13) и F (5; 21)?

В случае утвердительного ответа укажите, какая из точек лежит между двумя другими.

304.• Докажите, что точки M (−4; 5), N (−10; 7) и K (8; 1) лежат на одной прямой, и укажите, какая из них лежит между двумя другими.

305.• При каком значении x расстояние между точками C (3; 2) и D (x; −1) равно 5?

306.• На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек A (−1; −1) и B (2; 4).

307.• Найдите координаты точки, принадлежащей оси ординат и равноудаленной от точек D (−2; −3) и E (4; 1).

308.• Найдите координаты точки, которая делит отрезок AB в отношении 1 : 3, считая от точки A, если A (5; −3) и B (−3; 7).

309.• Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, A (−5; 1), B (−4; 4), C (−1; 5). Найдите координаты вершины D.

310.• Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, A (−2; −2), C (4; 1), D (−1; 1). Найдите координаты вершины B.

311.• Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (−2; 8), B (3; −3), C (6; 2) и D (1; 13) является параллелограммом.

312.• Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (−3; −2), B (−1; 2), C (1; −2) и D (−1; −6) является ромбом.

313.• Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (−2; 6), B (−8; −2), C (0; −8) и D (6; 0) является квадратом.

314.• Точки D (1; 4) и E (2; 2) — середины сторон AC и BC треугольника ABC соответственно. Найдите координаты вершин A и C, если B (−3; −1).

315.• Найдите длину отрезка, концы которого принадлежат осям координат, а серединой является точка M (−3; 8).

316.•• Найдите координаты вершины C равностороннего треугольника ABC, если A (2; −3) и B (−2; 3).

317.•• Найдите координаты вершины E равностороннего треугольника DEF, если D (−6; 0) и F (2; 0).

318.•• В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, A (5; 9), C (1; −3), модули координат точки B равны. Найдите координаты точки B.

319.•• Найдите координаты всех точек C оси абсцисс таких, что ΔABC — равнобедренный, если A (1; 1), B (2; 3).

320.•• Найдите координаты всех точек B оси ординат таких, что ΔABC — прямоугольный, если A (1; 3), C (3; 7).

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

321. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AB = 9$ см, $BC = 3$ см. На гипотенузе AB отметили точку M так, что $AM : MB = 1 : 2$. Найдите CM.

322. Найдите углы ромба, если угол между высотой и диагональю ромба, проведенными из одной вершины, равен 28°.

323. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ равна 24 см, точка E — середина стороны BC. Найдите отрезки, на которые прямая AE делит диагональ BD.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

324. Точка A (1; −6) — центр окружности, точка B (10; 6) принадлежит этой окружности. Чему равен радиус окружности?

325. Отрезок CD — диаметр окружности. Найдите координаты центра окружности и ее радиус, если C (6; −4), D (−2; 10).

326. Какая фигура является графиком уравнения:

1) $y = 1$;
2) $y = 3x - 4$;
3) $x = -2$;
4) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$;
5) $xy = 1$;
6) $y = \sqrt{x}$?

9. Уравнение фигуры. Уравнение окружности

Координаты $(x; y)$ каждой точки параболы, изображенной на рисунке 69, являются решением уравнения $y = x^2$. И наоборот, каждое решение уравнения с двумя переменными $y = x^2$ является координатами точки, лежащей на этой параболе. В этом случае говорят, что уравнение параболы, изображенной на рисунке 69, имеет вид $y = x^2$.

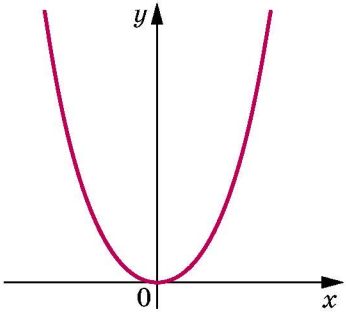


Рис. 69

Вообще, **уравнением фигуры F, заданной на плоскости xy, называют уравнение с двумя переменными x и y, имеющее два свойства:**

1) если точка принадлежит фигуре F, то ее координаты являются решением данного уравнения;

2) любое решение $(x; y)$ данного уравнения является координатами точки, принадлежащей фигуре F.

Например, уравнение прямой, изображенной на рисунке 70, имеет вид $y = 2x - 1$, а уравнение гиперболы, изображенной на рисунке 71, — $y = \frac{1}{x}$. Также принято говорить, что, например, уравнения $y = 2x - 1$ и $y = \frac{1}{x}$ **задают** прямую и гиперболу соответственно.

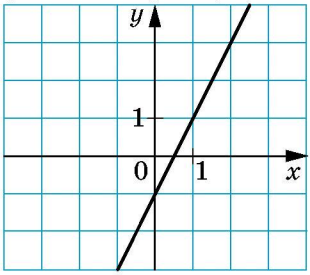


Рис. 70

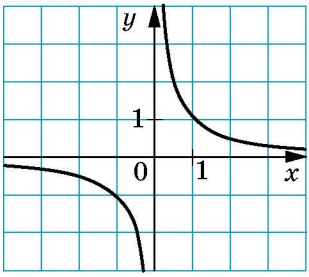


Рис. 71

Если данное уравнение является уравнением фигуры F, то эту фигуру можно рассматривать как геометрическое место точек (ГМТ), координаты которых удовлетворяют данному уравнению.

Пользуясь этими соображениями, выведем уравнение окружности радиуса R с центром в точке A $(a; b)$.

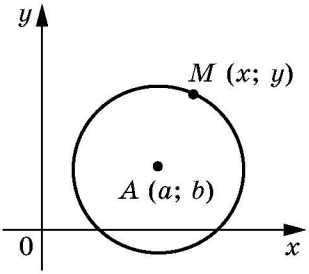


Рис. 72

Пусть M $(x; y)$ — произвольная точка данной окружности (рис. 72). Тогда $AM = R$ или

$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$. Отсюда

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (*)$$

Мы показали, что координаты $(x; y)$ произвольной точки M окружности являются решением уравнения (*). Теперь покажем, что любое ре-

шение уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, где $R > 0$, является координатами точки, принадлежащей данной окружности.

Пусть пара $(x_1; y_1)$ — произвольное решение уравнения (*). Имеем: $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2$. Отсюда

$$\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}=R.$$

Эта равенство показывает, что точка $N(x_1; y_1)$ удалена от центра окружности $A(a; b)$ на расстояние, равное радиусу окружности, а следовательно, точка $N(x_1; y_1)$ принадлежит данной окружности.

Итак, мы доказали такую теорему.

Теорема 9.1. ***Уравнение***

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,}$$

где $R > 0$, является уравнением окружности с центром в точке $A(a; b)$ и радиусом R.

Если центром окружности является начало координат, то $a = b = 0$. Уравнение окружности, изображенной на рисунке 73, имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Пример 1. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, если $A(-5; 9)$, $B(7; -3)$.

Решение. Так как центр окружности является серединой диаметра, то можем найти координаты $(a; b)$ центра C окружности:

$$a=\frac{-5+7}{2}=1,\quad b=\frac{9-3}{2}=3.$$

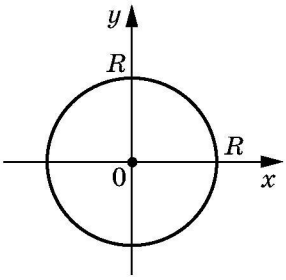


Рис. 73

Следовательно, $C(1; 3)$.

Радиус окружности $R = AC$.

Тогда $R^2 = (1 + 5)^2 + (3 - 9)^2 = 72$.

Следовательно, искомое уравнение является таким:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 72.$$

Пример 2. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 50 = 0$ задает окружность. Найдите координаты центра и радиус этой окружности.

Решение. Представим данное уравнение в виде $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 + 50 - 58 = 0;$$
$$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 8.$$

Следовательно, данное уравнение является уравнением окружности с центром в точке $(-3; 7)$ и радиусом $\sqrt{8}$.

Пример 3. Докажите, что треугольник с вершинами в точках $A(-2; -3)$, $B(1; 3)$ и $C(5; 1)$ является прямоугольным, и составьте уравнение окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. Найдем квадраты сторон данного треугольника:

$AB^2 = (1 + 2)^2 + (3 + 3)^2 = 45;$
$AC^2 = (5 + 2)^2 + (1 + 3)^2 = 65;$
$BC^2 = (5 - 1)^2 + (1 - 3)^2 = 20.$

Так как $AB^2 + BC^2 = AC^2$, то данный треугольник является прямоугольным с прямым углом при вершине B. Центром описанной окружности является середина гипотенузы AC — точка $(1{,}5; -1)$, радиус окружности $R = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

Следовательно, искомое уравнение имеет вид:

$$(x - 1{,}5)^2 + (y + 1)^2 = \frac{65}{4}.$$

1. Что называют уравнением фигуры, заданной на плоскости xy?
2. Какой вид имеет уравнение окружности с центром в точке $(a; b)$ и радиусом R?
3. Какой вид имеет уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R?

УПРАЖНЕНИЯ

327.° Определите по уравнению окружности координаты ее центра и радиус:

1) $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$;
2) $(x + 5)^2 + y^2 = 9$;
3) $x^2 + y^2 = 7$;
4) $x^2 + (y + 1)^2 = 3$.

328.° Составьте уравнение окружности, если известны координаты ее центра A и радиус R:

1) A (3; 4), $R = 4$;
2) A (−2; 0), $R = 1$;
3) A (7; −6), $R = \sqrt{2}$;
4) A (0; 5), $R = \sqrt{7}$.

329.° Составьте уравнение окружности, если известны координаты ее центра B и радиус R:

1) B (−1; 9), $R = 9$;
2) B (−8; −8), $R = \sqrt{3}$.

330.° Определите координаты центра и радиус окружности, изображенной на рисунке 74, и запишите уравнение этой окружности.

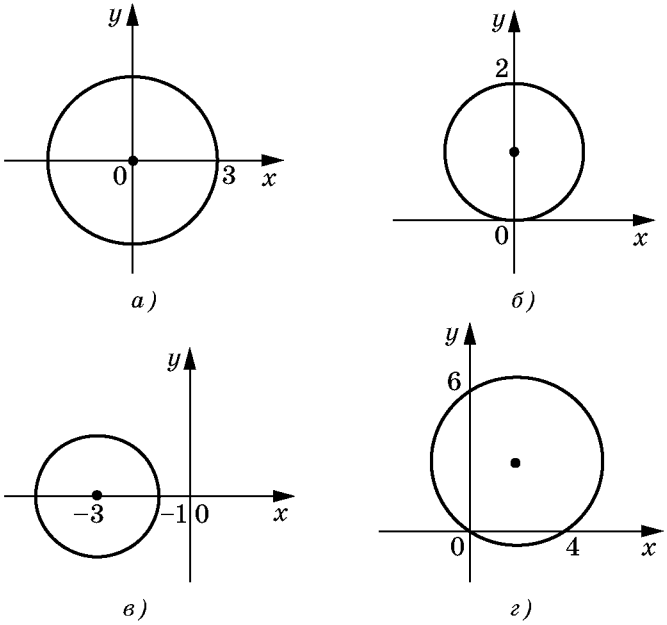


Рис. 74

331.° Радиус окружности с центром в точке A равен 4 (рис. 75). Составьте уравнение этой окружности.

332.° Постройте на координатной плоскости окружность, уравнение которой имеет вид:

1) $x^2 + y^2 = 4$;
2) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

333.° Постройте на координатной плоскости окружность по ее уравнению $(x - 4)^2 + y^2 = 9$.

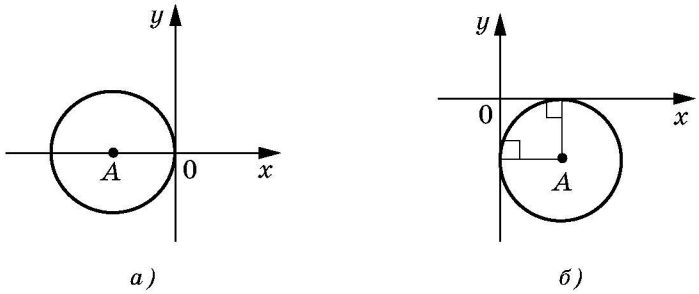


Рис. 75

334.° Окружность задана уравнением $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 10$. Выясните, какие из точек A (−3; 0), B (−5; −2), C (1; 0), D (−4; 3), E (−7; −3), F (−9; 0) лежат: 1) на окружности; 2) внутри окружности; 3) вне окружности.

335.° Принадлежит ли окружности $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 100$ точка:

1) A (8; −8); 2) B (6; −9); 3) C (−3; 7); 4) D (−4; 6)?

336.° Составьте уравнение окружности с центром в точке M (−3; 1), проходящей через точку K (−1; 5).

337.° Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, если A (2; −7), B (−2; 3).

338.• Докажите, что отрезок AB является диаметром окружности $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 17$, если A (1; −5), B (9; −3).

339.• Докажите, что отрезок CD является хордой окружности $x^2 + (y - 9)^2 = 169$, если C (5; −3), D (−12; 4).

340.• Составьте уравнение окружности, центром которой является точка P (−6; 7) и которая касается оси ординат.

341.• Составьте уравнение окружности, центр которой находится на прямой $y = -5$ и которая касается оси абсцисс в точке S (2; 0).

342.• Сколько существует окружностей, радиусы которых равны $3\sqrt{5}$, центры принадлежат оси ординат и которые проходят через точку (3; 5)? Запишите уравнение каждой такой окружности.

343.• Составьте уравнение окружности, центр которой принадлежит оси абсцисс и которая проходит через точки A (−4; 1) и B (8; 5).

344.• Докажите, что окружность $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 36$:

1) касается оси ординат;

2) пересекает ось абсцисс;

3) не имеет общих точек с прямой $y = 10$.

345.•• Установите, является ли данное уравнение уравнением окружности. В случае утвердительного ответа укажите координаты центра и радиус R этой окружности:

1) $x^2 + 2x + y^2 - 10y - 23 = 0$;

2) $x^2 - 12x + y^2 + 4y + 40 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 6y + 8x + 34 = 0$;

4) $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 51 = 0$.

346.•• Докажите, что данное уравнение является уравнением окружности, и укажите координаты центра и радиус R этой окружности:

1) $x^2 + y^2 + 16y + 60 = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$.

347.•• Докажите, что треугольник с вершинами в точках A $(-1; -2)$, B $(-1; 2)$, C $(5; 2)$ является прямоугольным, и составьте уравнение окружности, описанной около этого треугольника.

348.•• Составьте уравнение окружности, радиус которой равен 5 и которая проходит через точки C $(-1; 5)$ и D $(6; 4)$.

349.•• Составьте уравнение окружности, радиус которой равен $\sqrt{10}$ и которая проходит через точки M $(-2; 1)$ и K $(-4; -1)$.

350.•• Составьте уравнение окружности, которая касается координатных осей и прямой $y = -4$.

351.•• Составьте уравнение окружности, касающейся координатных осей и прямой $x = 2$.

352.* Составьте уравнение окружности, проходящей через точки:

1) A $(-3; 7)$, B $(-8; 2)$, C $(-6; -2)$;

2) M $(-1; 10)$, N $(12; -3)$, K $(4; 9)$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

353. Биссектриса угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону AD в точке E, $AB = BE = 12$ см, $ED = 18$ см. Найдите площадь параллелограмма.

354. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямоугольника на его диагональ, делит эту диагональ на отрезки длиной 9 см и 16 см. Найдите периметр прямоугольника.

355. В равнобокую трапецию вписана окружность радиуса 12 см. Одна из боковых сторон точкой касания делится на два отрезка, один из которых равен 16 см. Найдите площадь трапеции.

10. Уравнение прямой

В предыдущем пункте, рассматривая окружность как ГМТ, равноудаленных от данной точки, мы вывели ее уравнение. Для того, чтобы вывести уравнение прямой, рассмотрим ее как ГМТ, равноудаленных от двух точек.

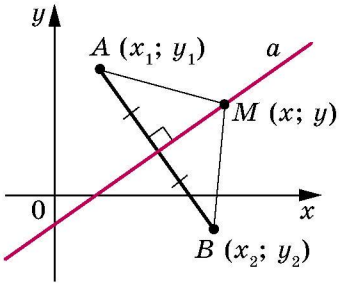


Рис. 76

Пусть a — данная прямая. Выберем две точки A $(x_1;\ y_1)$ и B $(x_2;\ y_2)$ так, чтобы прямая a была серединным перпендикуляром отрезка AB (рис. 76).

Пусть M $(x;\ y)$ — произвольная точка прямой a. Тогда $MA = MB$, то есть

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}. \qquad (*)$$

Мы показали, что координаты $(x;\ y)$ произвольной точки M прямой a являются решением уравнения (*).

Теперь покажем, что любое решение уравнения (*) является координатами точки, принадлежащей данной прямой a.

Пусть $(x_0;\ y_0)$ — произвольное решение уравнения (*). Имеем: $\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}=\sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2}$. Это равенство означает, что точка $N(x_0;\ y_0)$ равноудалена от точек A $(x_1;\ y_1)$ и B $(x_2;\ y_2)$, следовательно, точка N принадлежит серединному перпендикуляру отрезка AB, то есть прямой a.

Итак, мы доказали, что уравнение (*) и есть уравнение данной прямой a.

Однако из курса алгебры 7 класса вы знаете, что уравнение прямой выглядит гораздо проще, а именно: $ax + by = c$,

где a, b, c — некоторые числа, причем a и b не равны нулю одновременно. Покажем, что уравнение (*) можно преобразовать к такому виду.

Имеем: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$. Возведя все двучлены в квадрат и приведя подобные слагаемые, получим:

$$2\,(x_2 - x_1)\,x + 2\,(y_2 - y_1)\,y = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2.$$

Обозначив $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = c$, получим уравнение $ax + by = c$.

Поскольку точки $A\,(x_1;\, y_1)$ и $B\,(x_2;\, y_2)$ различны, то хотя бы одна из разностей $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ не равна нулю. Следовательно, числа a и b не равны нулю одновременно.

Итак, мы доказали такую теорему.

Теорема 10.1. ***Уравнение прямой имеет вид***

$$\boxed{ax + by = c,}$$

где a, b и c — некоторые числа, причем a и b не равны нулю одновременно.

Рис. 77

Замечание. Верно и такое утверждение: любое уравнение вида $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые числа, причем a и b не равны нулю одновременно, является уравнением прямой. Если $a = b = c = 0$, то графиком уравнения $ax + by = c$ является вся плоскость xy. Если $a = b = 0$ и $c \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

Из курса алгебры 7 класса вы знаете, что уравнение вида $ax + by = c$ называют линейным уравнением с двумя переменными. Схема, изображенная на рисунке 77, иллюстрирует вышесказанное.

Также на уроках алгебры в 7 классе мы приняли без доказательства тот факт, что графиком линейной функции $y = kx + p$ является прямая. Сейчас мы это можем доказать.

Действительно, перепишем уравнение $y = kx + p$ так: $-kx + y = p$. Мы получили уравнение вида $ax + by = c$ для случая, когда $a = -k$, $b = 1$, $c = p$.

А любую ли прямую на плоскости можно задать уравнением вида $y = kx + p$? Ответ на этот вопрос отрицательный.

Дело в том, что прямая, перпендикулярная оси абсцисс, не может являться графиком функции, а следовательно, не может иметь уравнение вида $y = kx + p$.

Вместе с тем, если в уравнении прямой $ax + by = c$ положить $b = 0$, то его можно переписать так: $x = \frac{c}{a}$. Мы получили частный вид уравнения прямой, все точки которой имеют одинаковые абсциссы. Следовательно, эта прямая перпендикулярна оси абсцисс. Ее называют вертикальной.

Также отметим, что если $b \neq 0$, то уравнение прямой $ax + by = c$ можно записать так: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Обозначив $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{a} = p$, получим уравнение $y = kx + p$.

Следовательно, ***если $b = 0$ и $a \neq 0$, то уравнение прямой $ax + by = c$ задает вертикальную прямую; если $b \neq 0$, то это уравнение задает невертикальную прямую.***

Уравнение невертикальной прямой удобно записывать в виде $y = kx + p$.

Данная таблица подытоживает материал, рассмотренный в этом пункте.

Уравнение	Значения a, b, c	График
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a и c — любые	невертикальная прямая
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c — любое	вертикальная прямая
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	вся координатная плоскость
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

Пример 1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки: 1) A (−3; 5) и B (−3; −6); 2) C (6; 1) и D (−18; −7).

Решение

1) Так как данные точки имеют равные абсциссы, то прямая AB является вертикальной и ее уравнение имеет вид $x = -3$.

Ответ: $x = -3$.

2) Так как данные точки имеют разные абсциссы, то прямая CD не является вертикальной, и можно воспользоваться уравнением прямой в виде $y = kx + p$.

Подставив координаты точек C и D в уравнение $y = kx + p$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 6k + p = 1, \\ -18k + p = -7. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, находим, что $k = \frac{1}{3}$, $p = -1$.

Ответ: $y = \frac{1}{3}x - 1$.

Пример 2. Найдите периметр и площадь треугольника, ограниченного прямой $5x + 12y = -60$ и осями координат.

Решение. Найдем точки пересечения данной прямой с осями координат.

С осью абсцисс: $5x = -60$, $x = -12$.

С осью ординат: $12y = -60$, $y = -5$.

Следовательно, данная прямая и оси координат ограничивают прямоугольный треугольник AOB (рис. 78) такой, что A (−12; 0), B (0; −5), O (0; 0). Тогда $OA = 12$, $OB = 5$, $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 13$. Искомый периметр $P = OA + OB + AB = 30$, площадь $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 30$.

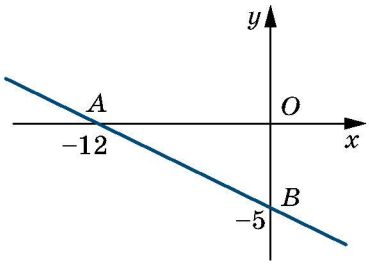


Рис. 78

Ответ: $P = 30$, $S = 30$.

1. Какой вид имеет уравнение прямой на плоскости xy?
2. Как принято называть прямую, все точки которой имеют одинаковые абсциссы? Как расположена эта прямая относительно оси абсцисс?
3. В каком виде удобно записывать уравнение невертикальной прямой?
4. Любое ли линейное уравнение с двумя переменными является уравнением прямой?
5. Любую ли прямую на плоскости можно задать уравнением вида $y = kx + p$?
6. При каком условии уравнение прямой $ax + by = c$ является уравнением вертикальной прямой? невертикальной прямой?

УПРАЖНЕНИЯ

356.° Какие из данных уравнений являются уравнениями прямой:

1) $2x - 3y = 5$;
2) $2x - 3y = 0$;
3) $2x^2 - 3y = 5$;
4) $2x = 5$;
5) $-3y = 5$;
6) $2x + 0y = 0$;
7) $0x + 0y = 0$;
8) $0x + 0y = 5$?

357.° Найдите координаты точек пересечения прямой $4x - 5y = 20$ с осями координат. Принадлежит ли этой прямой точка: 1) A (10; 4); 2) B (6; 1); 3) C (−1,5; 5,2); 4) D (−1; 5)?

358.° Найдите координаты точек пересечения прямой $3x + 4y = 12$ с осями координат. Какая из точек M (−2; 4) и K (8; −3) принадлежит этой прямой?

359.° Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A (6; −3) и перпендикулярной оси x. Какие координаты имеет точка пересечения этой прямой с осью x?

360.° Составьте уравнение прямой, проходящей через точку B (5; −8) и перпендикулярной оси y. Какие координаты имеет точка пересечения этой прямой с осью y?

361.° Составьте уравнение прямой, проходящей через точку C (−4; 9) параллельно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат.

362.° Составьте уравнение прямой, проходящей через точки:

1) A (1; −3) и B (−2; −9); 3) E (−4; −1) и F (9; −1);

2) C (3; 5) и D (3; −10); 4) M (3; −3) и K (− 6; 12).

363.° Составьте уравнение прямой, проходящей через точки:

1) A (2; −5) и B (−3; 10); 2) C (6; −1) и D (24; 2).

364.° Найдите координаты точки пересечения прямых:

1) $y = 3x - 7$ и $y = 5x + 9$;

2) $2x - 7y = -16$ и $6x + 11y = 16$.

365.° Найдите координаты точки пересечения прямых:

1) $y = -4x + 1$ и $y = 2x - 11$;

2) $3x + 2y = 10$ и $x - 8y = 12$.

366.• Точки A (−6; −1), B (1; 2) и C (−5; −8) — вершины треугольника ABC. Составьте уравнение прямой, содержащей медиану AK треугольника.

367.• Точки A (−3; −4), B (−2; 2), C (1; 3) и D (3; −2) — вершины трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Составьте уравнение прямой, содержащей среднюю линию трапеции.

368.• Абсциссы середин боковых сторон трапеции равны. Верно ли утверждение, что основания трапеции перпендикулярны оси абсцисс?

369.• Найдите периметр треугольника, ограниченного осями координат и прямой $4x - 3y = 12$.

370.• Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и прямой $7y - 2x = 28$.

371.• Найдите площадь треугольника, ограниченного прямыми $3x + 2y = 6$ и $y = -\frac{9}{4}x$ и осью ординат.

372.• Докажите, что окружность $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 9$ и прямая $x + y = 7$ пересекаются, и найдите координаты их точек пересечения.

373.• Докажите, что прямая $x + y = 5$ является касательной к окружности $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$, и найдите координаты точки касания.

374.• Докажите, что окружность $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$ и прямая $3x + y = 3$ не имеют общих точек.

375.•• Найдите расстояние от начала координат до прямой $5x - 2y = 10$.

376.•• Найдите расстояние от начала координат до прямой $x + y = -8$.

377.•• Найдите длину хорды окружности $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, лежащей на прямой $y = 3x$.

378.•• Составьте уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точки A (1; −7) и B (−3; 5).

379.•• Составьте уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точки C (2; 3) и D (−5; −2).

380.•• Найдите координаты точки, равноудаленной от осей координат и от точки A (3; 6).

381.•• Найдите координаты точки, равноудаленной от осей координат и от точки B (−4; 2).

382.* Составьте уравнение окружности, проходящей через точки A (2; 0) и B (4; 0), центр которой принадлежит прямой $2x + 3y = 18$.

383.* Составьте уравнение геометрического места центров окружностей, радиус которых равен 5 и которые отсекают на оси абсцисс хорду длиной 6.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

384. Диагонали параллелограмма равны $6\sqrt{2}$ см и 8 см, а угол между ними составляет 45°. Найдите стороны параллелограмма.

385. Одна из сторон треугольника на 15 см больше другой, а высота, проведенная к третьей стороне, делит ее на отрезки длиной 32 см и 7 см. Найдите периметр треугольника.

386. Центр окружности, описанной около равнобокой трапеции, лежит на ее большем основании. Найдите радиус окружности, если диагональ трапеции равна 20 см, а высота — 12 см.

11. Угловой коэффициент прямой

Рассмотрим уравнение $y = kx$. Оно задает невертикальную прямую, проходящую через начало координат.

Покажем, что прямые $y = kx$ и $y = kx + b$, где $b \neq 0$, параллельны. Точки O (0; 0) и C (1; k) принадлежат прямой $y = kx$, а точки A (0; b) и B (1; $k + b$) принадлежат прямой $y = kx + b$ (рис. 79). Легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что середины диагоналей AC и OB четырехугольника $OABC$ совпадают. Следовательно, $OABC$ — параллелограмм. Отсюда $AB \parallel OC$.

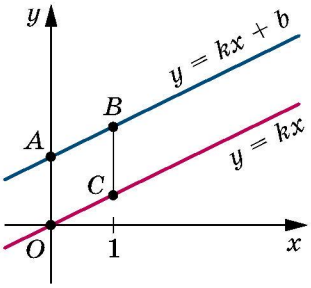


Рис. 79

Теперь мы можем сделать такой вывод:

если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны (1).

Пусть прямая $y = kx$ пересекает единичную полуокружность в точке M (x_0; y_0) (рис. 80). Угол AOM называют **углом между данной прямой и положительным направлением оси абсцисс**.

Если прямая $y = kx$ совпадает с осью абсцисс, то угол между этой прямой и положительным направлением оси абсцисс считают равным 0°.

Если прямая $y = kx$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол α, то естественно считать, что и прямая $y = kx + b$, параллельная прямой $y = kx$, также образует угол α с положительным направлением оси абсцисс.

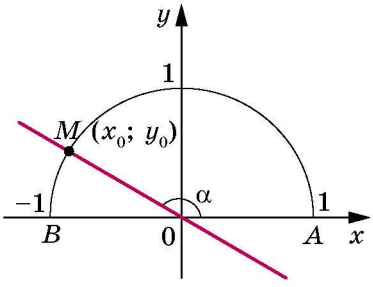


Рис. 80

Рассмотрим прямую MO, уравнение которой имеет вид $y = kx$ (рис. 80). Если $\angle MOA = \alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_0}{x_0}$. Так

как точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит прямой $y = kx$, то $\frac{y_0}{x_0} = k$. Отсюда $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом, для прямой $y = kx + b$ получаем, что

$$\boxed{k = \operatorname{tg}\alpha,}$$

где α — угол, который образует эта прямая с положительным направлением оси абсцисс. Поэтому коэффициент k называют **угловым коэффициентом** этой прямой.

Из сказанного следует, что если невертикальные прямые параллельны, то они образуют равные углы с положительным направлением оси абсцисс. Тогда тангенсы этих углов равны, следовательно, равны и их угловые коэффициенты.

Таким образом,

если прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, то $k_1 = k_2$ (2).

Выводы (1) и (2) объединим в одну теорему.

Теорема 11.1. ***Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.***

Пример. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку A (−4; 3) и параллельна прямой $y = 0{,}5x - 4$.

Решение. Пусть уравнение искомой прямой $y = kx + p$. Так как эта прямая и прямая $y = 0{,}5x - 4$ параллельны, то их угловые коэффициенты равны, то есть $k = 0{,}5$.

Следовательно, имеем $y = 0{,}5x + p$. Учитывая, что данная прямая проходит через точку A (−4; 3), получаем: $0{,}5 \cdot (-4) + p = 3$, отсюда $p = 5$.

Искомое уравнение имеет вид: $y = 0{,}5x + 5$.

1. Поясните, что называют углом между прямой и положительным направлением оси абсцисс.
2. Чему считают равным угол между прямой, параллельной оси абсцисс или совпадающей с ней, и положительным направлением оси абсцисс?

3. Что называют угловым коэффициентом прямой?

4. Как связаны угловой коэффициент прямой и угол между прямой и положительным направлением оси абсцисс?

5. Какое необходимое и достаточное условие параллельности двух невертикальных прямых на координатной плоскости?

УПРАЖНЕНИЯ

387.° Чему равен угловой коэффициент прямой:

1) $y = 2x - 7$; 3) $y = x + 10$; 5) $y = 4$;
2) $y = -3x$; 4) $y = 5 - x$; 6) $3x - 2y = 4$?

388.° Какие из прямых $y = 6x - 5$, $y = 0{,}6x + 1$, $y = \frac{3}{5}x + 4$, $y = 2 - 6x$ и $y = 600 + 0{,}6x$ параллельны?

389.° Какое число надо подставить вместо звездочки, чтобы были параллельными прямые:

1) $y = 8x - 14$ и $y = {*}x + 2$;
2) $y = {*}x - 1$ и $y = 3 - 4x$?

390.° Каково уравнение прямой, проходящей через начало координат и параллельной прямой:

1) $y = 14x - 11$; 2) $y = -1{,}15x + 2$?

391.• Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A (−3; 7), угловой коэффициент которой равен: 1) 4; 2) −3; 3) 0.

392.• Составьте уравнение прямой, проходящей через точку B (2; −5), угловой коэффициент которой равен −0,5.

393.• Составьте уравнение прямой, проходящей через точку M (−1; 9) и параллельной прямой: 1) $y = -7x + 3$; 2) $3x - 4y = -8$.

394.• Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $K\left(-\frac{1}{3}; 10\right)$ и параллельной прямой: 1) $y = 9x - 16$; 2) $6x + 2y = 7$.

395.• Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку A (2; 6) и образует с положительным направлением оси абсцисс угол: 1) 60°; 2) 120°.

396.• Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку B (3; −2) и образует с положительным направлением оси абсцисс угол: 1) 45°; 2) 135°.

397.• Составьте уравнение прямой, изображенной на рисунке 81.

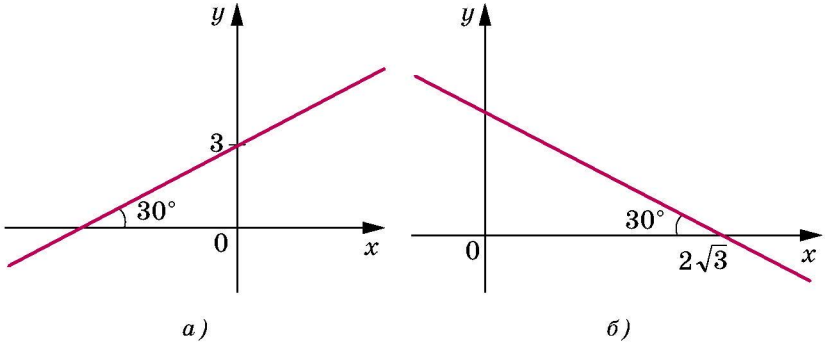


Рис. 81

398.• Определите, параллельны ли прямые:

1) $2x - 5y = 9$ и $5y - 2x = 1$;
2) $8x + 12y = 15$ и $4x + 6y = 9$;
3) $7x - 2y = 12$ и $7x - 3y = 12$;
4) $3x + 2y = 3$ и $6x + 4y = 6$.

399.• Докажите, что прямые $7x - 6y = 3$ и $6y - 7x = 6$ параллельны.

400.•• Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 4x + 2$ и пересекает прямую $y = -8x + 9$ в точке, принадлежащей оси ординат.

401.•• Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = 3x + 4$ и пересекает прямую $y = -4x + 16$ в точке, принадлежащей оси абсцисс.

402.* Составьте уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой $y = -x + 3$ и проходит через точку A (1; 5).

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

403. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O (рис. 82). Докажите, что угол AOB равен полусумме углов C и D.

404. Высота ромба, проведенная из вершины его тупого угла, делит сторону ромба на отрезки 7 см и 18 см, считая от вершины острого угла. Найдите диагонали ромба.

405. Медианы равнобедренного треугольника равны 15 см, 15 см и 18 см. Найдите площадь треугольника.

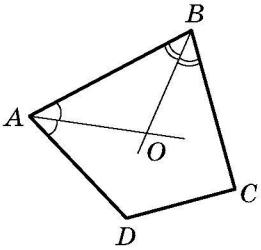


Рис. 82

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Метод координат

Мы часто говорим: прямая $y = 2x - 1$, парабола $y = x^2$, окружность $x^2 + y^2 = 1$, тем самым отождествляя фигуру с ее уравнением. Такой подход позволяет сводить задачу о поиске свойств фигуры к задаче об исследовании ее уравнения. В этом и состоит суть метода координат.

Проиллюстрируем сказанное на таком примере.

Из наглядных соображений очевидно, что прямая и окружность имеют не более двух общих точек. Однако это утверждение не является аксиомой и его надо доказывать.

Эта задача сводится к исследованию количества решений системы уравнений

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ (x-m)^2 + (y-n)^2 = R^2, \end{cases}$$

где числа a и b одновременно не равны нулю и $R > 0$.

Решая эту систему методом подстановки, мы получим квадратное уравнение, которое может иметь два решения, одно решение или вообще не иметь решений. Следова-

тельно, для данной системы существует три возможных случая:

1) система имеет два решения — прямая и окружность пересекаются;

2) система имеет одно решение — прямая касается окружности;

3) система не имеет решений — прямая и окружность не имеют общих точек.

С каждым из этих случаев вы встречались, решая задачи 372–374 соответственно.

Метод координат особенно эффективен в тех случаях, когда требуется найти фигуру, все точки которой обладают некоторым свойством, то есть найти ГМТ.

Зафиксируем на плоскости две точки A и B. Вы хорошо знаете, какой фигурой является геометрическое место точек M таких, что $\frac{MA}{MB}=1$. Это серединный перпендикуляр отрезка AB. Интересно выяснить, какую фигуру образуют все точки M, для которых $\frac{MA}{MB}=k$, где $k \neq 1$. Решим эту задачу для $k=\frac{1}{2}$.

Плоскость, на которой зафиксированы точки A и B, «превратим» в координатную. Сделаем это так: в качестве начала отсчета выберем точку A, в качестве единичного отрезка — отрезок AB, ось абсцисс проведем так, чтобы точка B имела координаты (1; 0) (рис. 83).

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка искомой фигуры F.

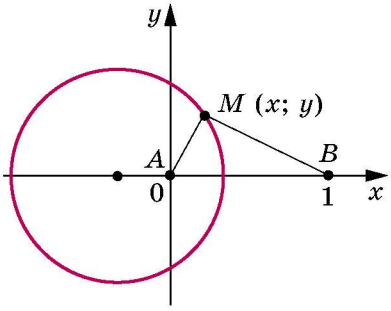


Рис. 83

Тогда $2MA = MB$,
или $4MA^2 = MB^2$. Отсюда:

$$4(x^2 + y^2) = (x - 1)^2 + y^2;$$

$$3x^2 + 2x + 3y^2 = 1;$$

$$x^2+\frac{2}{3}x+y^2=\frac{1}{3};$$

$$x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}+y^2=\frac{4}{9};$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}. \qquad (*)$$

Следовательно, если точка M $(x;\ y)$ принадлежит фигуре F, то ее координаты являются решением уравнения (*).

Пусть $(x_1;\ y_1)$ — некоторое решение уравнения (*). Тогда легко показать, что

$$4\left(x_1^2+y_1^2\right)=(x_1-1)^2+y_1^2.$$

А это означает, что точка $N(x_1;\ y_1)$ такова, что $4NA^2 = NB^2$ или $2NA = NB$. Следовательно, точка N принадлежит фигуре F.

Таким образом, уравнением фигуры F является уравнение (*), то есть фигура F — это окружность с центром в точке $O\left(-\frac{1}{3};0\right)$ и радиусом $\frac{2}{3}$.

Мы решили задачу для частного случая, когда $k=\frac{1}{2}$. Можно показать, что искомой фигурой для любого положительного $k \neq 1$ будет окружность. Эту окружность называют **окружностью Аполлония**[1].

Как строили мост между геометрией и алгеброй

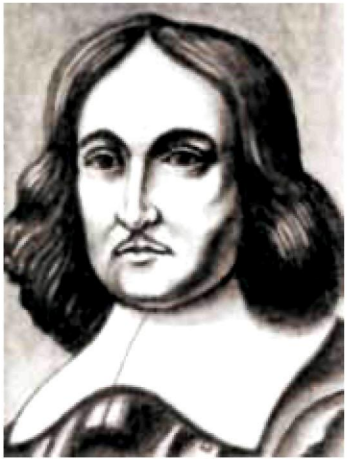
Идея координат зародилась очень давно. Ведь еще в старину люди изучали Землю, наблюдали звезды, а по результатам своих исследований составляли карты, схемы.

Во II в. до н. э. древнегреческий ученый Гиппарх впервые использовал идею координат для определения места расположения объектов на поверхности Земли.

Только в XIV в. французский ученый Николя Орем (около 1323–1392) впервые применил в математике идею Гиппарха: он разбил плоскость на клеточки (как разбита страница вашей тетради) и стал задавать положение точек широтой и долготой.

Однако огромные возможности применения этой идеи были раскрыты лишь в XVII в. в работах выдающихся французских математиков Пьера Ферма (1601–1665) и Рене Декарта (1596–1650). В своих трудах эти ученые показали, как, благодаря системе координат, можно переходить от

[1] Аполлоний Пергский (III в. до н. э.) — древнегреческий математик и астроном.



Пьер Ферма

Рене Декарт

точек к числам, от линий к уравнениям, от геометрии к алгебре.

Несмотря на то, что П. Ферма опубликовал свою работу на год раньше Р. Декарта, систему координат, которой мы сегодня пользуемся, называют **декартовой**. Это связано с тем, что Р. Декарт в своей работе «Рассуждение о методе» изобрел новую удобную буквенную символику, которой с незначительными изменениями мы пользуемся и сегодня. Вслед за Декартом мы обозначаем переменные последними буквами латинского алфавита x, y, z, а коэффициенты — первыми: a, b, c, ... Привычные нам обозначения степеней x^2, y^3, z^5 и т. д. также ввел Р. Декарт.

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 3

1. Какие координаты середины отрезка AB, если A (−6; 7), B (4; −9)?

А) (−5; 8); Б) (−1; −1); В) (−5; −1); Г) (−1; 8).

2. Чему равно расстояние между точками C (8; −11) и D (2; −3)?

А) 100; Б) 10; В) $\sqrt{296}$; Г) $\sqrt{164}$.

3. Какие координаты имеет центр окружности $(x - 5)^2 + (y + 9)^2 = 16$?

А) (5; −9); Б) (−5; 9); В) (5; 9); Г) (−5; −9).

4. Центром которой из данных окружностей является начало координат?

А) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; В) $x^2 + y^2 = 1$;
Б) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; Г) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

5. Найдите радиус окружности, диаметром которой является отрезок MK, если M (14; 12) и K (−10; 2).

А) 26; Б) 13; В) 25; Г) 5.

6. Каковы координаты точки пересечения прямой $5x - 3y = 15$ с осью абсцисс?

А) (0; −5); Б) (−5; 0); В) (0; 3); Г) (3; 0).

7. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, B (−2; 3), C (10; 9), D (7; 0). Найдите координаты вершины A.

А) (1; 6); Б) (19; −3); В) (−5; −6); Г) (6; 5).

8. Найдите координаты точки оси ординат, равноудаленной от точек A (−3; 4) и B (1; 8).

А) (−5; 0); Б) (0; −5); В) (5; 0); Г) (0; 5).

9. Найдите абсциссу точки прямой AB, где A (−7; 4), B (9; 12), ордината которой равна 2.

А) 8,5; Б) −11; В) 4; Г) −2.

10. Найдите расстояние между точкой пересечения прямых $x - y = 4$ и $x + 3y = 12$ и точкой M (1; 7).

А) 5; Б) 50; В) $5\sqrt{2}$; Г) $2\sqrt{5}$.

11. Каково уравнение прямой, проходящей через точку P (−1; 6) параллельно прямой $y = 2x - 5$?

А) $y = 6 - 5x$; В) $y = 5x - 6$;
Б) $y = 2x + 8$; Г) $y = 2x - 8$.

12. Чему равен радиус окружности $x^2 + y^2 + 14y - 12x + 78 = 0$?

А) $\sqrt{7}$; Б) 7; В) 14; Г) $\sqrt{14}$.

ИТОГИ

В ЭТОМ ПАРАГРАФЕ:

- были введены такие понятия:
  - координатная плоскость;
  - декартовы координаты;
  - уравнение фигуры;
  - угол между прямой и положительным направлением оси абсцисс;
  - угловой коэффициент прямой;
- вы изучили:
  - формулы нахождения длины отрезка и координат его середины;
  - уравнение окружности;
  - уравнение прямой;
  - необходимое и достаточное условие параллельности двух прямых;
- вы ознакомились с методом координат.

ВЕКТОРЫ §4

Изучая материал этого параграфа, вы узнаете, что векторы существуют не только в физике, а и в геометрии.

Вы научитесь складывать и вычитать векторы, умножать вектор на число, находить угол между двумя векторами, применять свойства векторов для решения задач.

12. Понятие вектора

Вы знаете много величин, которые определяются своими числовыми значениями: масса, площадь, длина, объем, время, температура и т. д. Такие величины называют **скалярными величинами**, или просто **скалярами**.

Из курса физики вам знакомы величины, для задания которых недостаточно знать только их числовое значение. Например, если на пружину действует сила 5Н, то из этой информации не ясно, будет ли пружина сжиматься или растягиваться (рис. 84). Надо еще знать, в каком направлении действует сила.

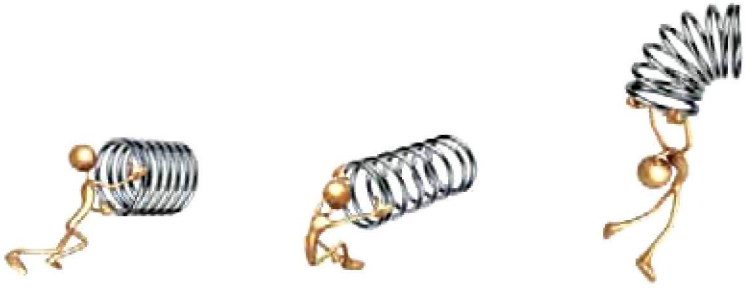


Рис. 84

Величины, которые определяются не только числовым значением, но и направлением, называют **векторными величинами**, или просто **векторами**.

Сила, перемещение, скорость, ускорение, вес — примеры векторных величин.

Есть векторы и в геометрии. Это **направленные отрезки.**

Рассмотрим отрезок AB. Если мы договоримся точку A считать **началом** отрезка, а точку B — его **концом**, то такой отрезок будет характеризоваться не только длиной, но и направлением от точки A к точке B.

Если указано, какая точка является началом отрезка, а какая точка — его концом, то такой отрезок называют **направленным отрезком**, или **вектором.**

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначают так: $\overrightarrow{AB}$ (читают: «вектор AB»).

На рисунках вектор изображают отрезком со стрелкой, указывающей его конец. На рисунке 85 изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Для обозначения векторов также используют строчные буквы латинского алфавита со стрелкой сверху. На рисунке 86 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

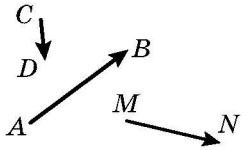


Рис. 85

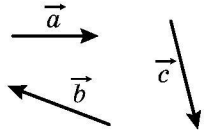


Рис. 86

Договорились вектор, у которого начало и конец — одна и та же точка, называть **нулевым вектором**, или **нуль-вектором**, и обозначать $\vec{0}$. Если начало и конец нулевого вектора — это точка A, то его можно обозначить и так: $\overrightarrow{AA}$. На рисунке нулевой вектор изображают одной точкой.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называют длину отрезка AB. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначают так: $|\overrightarrow{AB}|$, а модуль вектора $\vec{a}$ — так: $|\vec{a}|$.

Модуль нулевого вектора считают равным нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Определение. Ненулевые векторы называют коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.

Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

На рисунке 87 изображены коллинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{MN}$.

Тот факт, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, обозначают так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

На рисунке 88 ненулевые коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены. Такие векторы называют **сонаправленными** и обозначают $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Понятно, что если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ (рис. 89).

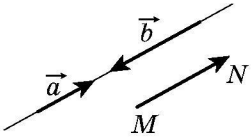


Рис. 87

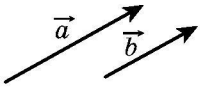


Рис. 88

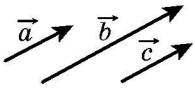


Рис. 89

На рисунке 90 ненулевые коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **противоположно направлены**. Этот факт обозначают так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Определение. Ненулевые векторы называют равными, если их модули равны и они сонаправлены. Любые два нулевых вектора равны.

На рисунке 91 изображены равные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это обозначают так: $\vec{a} = \vec{b}$.

Равенство ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ означает, что $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Очевидно, что если $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.

На рисунке 92 изображен вектор $\vec{a}$ с началом в точке A. Говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен от точки** A.

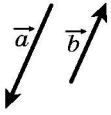


Рис. 90

Рис. 91

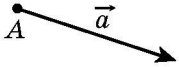


Рис. 92

Покажем, как от произвольной точки M отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$.

Если вектор $\vec{a}$ нулевой, то искомым вектором будет вектор $\overrightarrow{MM}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$. Пусть точка M лежит на прямой, содержащей вектор $\vec{a}$ (рис. 93). На этой прямой существуют две точки E и F такие, что $ME = MF = |\vec{a}|$. На этом рисунке вектор $\overrightarrow{MF}$ будет равен вектору $\vec{a}$. Его и следует выбрать.

Если точка M не принадлежит прямой, содержащей вектор $\vec{a}$, то через точку M проведем прямую, ей параллельную (рис. 94). Дальнейшее построение аналогично уже рассмотренному.

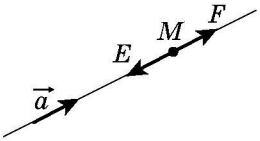


Рис. 93

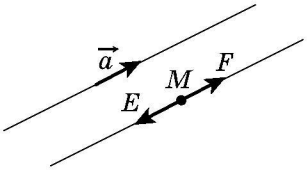


Рис. 94

Ясно, что от данной точки можно отложить только один вектор, равный данному.

Пример. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

Решение. Из условия $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ следует, что $AB \parallel DC$ и $AB = DC$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Равенство $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ означает, что диагонали четырехугольника $ABCD$ равны. А параллелограмм с равными диагоналями — прямоугольник.

1. Приведите примеры скалярных величин.
2. Какие величины называют векторными?
3. Что в геометрии называют векторами?
4. Какие из величин являются векторными: время, вес, ускорение, импульс, масса, перемещение, путь, площадь, давление?

5. Чем характеризуется направленный отрезок?
6. Какой отрезок называют направленным отрезком, или вектором?
7. Как обозначают вектор с началом в точке A и концом в точке B?
8. Какой вектор называют нулевым?
9. Что называют модулем вектора $\overrightarrow{AB}$?
10. Чему равен модуль нулевого вектора?
11. Какие векторы называют коллинеарными?
12. Как обозначают сонаправленные векторы? противоположно направленные векторы?
13. Какие векторы называют равными?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

406.° Отметьте три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Начертите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

407.° Проведите прямую a и отметьте на ней точку A. Начертите два сонаправленных вектора, принадлежащих прямой a, концы которых совпадают с точкой A.

408.° Начертите треугольник ABC. Начертите вектор, сонаправленный с вектором $\overrightarrow{CA}$, начало которого находится в точке B.

409.° Даны вектор $\vec{a}$ и точка A (рис. 95). Отложите от точки A вектор, равный вектору $\vec{a}$.

410.° Даны вектор $\vec{b}$ и точка B (рис. 96). Отложите от точки B вектор, равный вектору $\vec{b}$.

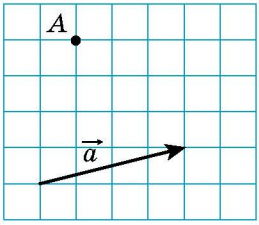


Рис. 95

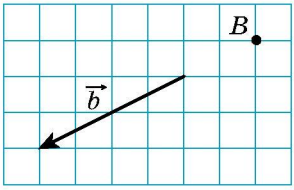


Рис. 96

411.° Отметьте точки A и B. Начертите вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\overrightarrow{AB}$.

412.° Начертите вектор $\vec{a}$ и отметьте точки M и N. Отложите от этих точек векторы, равные вектору $\vec{a}$.

413.• Начертите треугольник ABC и отметьте точку M — середину стороны BC. От точки M отложите вектор, равный вектору $\overrightarrow{AM}$, а от точки B — вектор, равный вектору $\overrightarrow{AC}$. Докажите, что концы построенных векторов совпадают.

414.• Начертите треугольник ABC. От точек B и C отложите векторы, соответственно равные векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$. Докажите, что концы построенных векторов совпадают.

УПРАЖНЕНИЯ

415.° Укажите равные векторы, начала и концы которых находятся в вершинах квадрата $ABCD$.

416.° В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Укажите равные векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, D, O.

417.° Какие из векторов, изображенных на рисунке 97: 1) равны; 2) сонаправлены; 3) противоположно направлены; 4) коллинеарны?

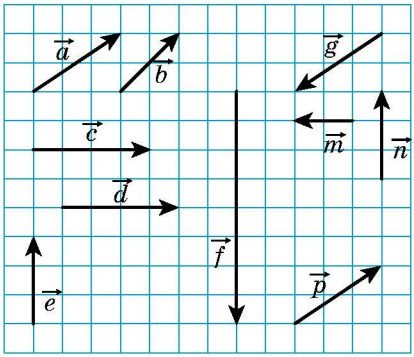


Рис. 97

418.° Точки M и N — соответственно середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Укажите векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, D, M, N: 1) равные вектору $\overrightarrow{AM}$; 2) коллинеарные вектору $\overrightarrow{CD}$; 3) противоположно направленные с вектором $\overrightarrow{NC}$; 4) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{BC}$.

419.° Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Укажите векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, D, O: 1) равные; 2) сонаправленные; 3) противоположно направленные.

420.° Точки M, N, P — соответственно середины сторон AB, BC, CA треугольника ABC. Укажите векторы, начала и концы которых находятся в точках A, B, C, M, N, P: 1) равные вектору $\overrightarrow{MN}$; 2) коллинеарные вектору $\overrightarrow{AB}$; 3) противоположно направленные с вектором $\overrightarrow{MP}$; 4) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{CA}$.

421.° Верно ли утверждение:

1) если $\vec{m} = \vec{n}$, то $|\vec{m}| = |\vec{n}|$;

2) если $\vec{m} = \vec{n}$, то $\vec{m} \parallel \vec{n}$;

3) если $\vec{m} \neq \vec{n}$, то $|\vec{m}| \neq |\vec{n}|$?

422.° Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

423.° Определите вид четырехугольника $ABCD$, если $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$.

424.° Определите вид четырехугольника $ABCD$, если векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны и $|\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AD}|$.

425.° Найдите модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 98), если сторона клеточки равна 0,5 см.

426.° В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, O — точка пересечения диагоналей. Найдите модули векторов $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$.

427.° В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $|\overrightarrow{AB}| = 5$ см, $|\overrightarrow{AO}| = 6{,}5$ см. Найдите модули векторов $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$.

428.° Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Верно ли, что точки A, B, C и D являются вершинами параллелограмма?

429.° Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Какие еще равные векторы задают точки A, B, C и D?

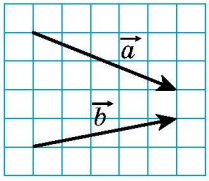


Рис. 98

430.° Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

431.° Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

432.° Что следует из равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$?

433.• В прямоугольном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы AB и $\angle B = 30°$. Найдите модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MC}$, если $AC = 2$ см.

434.• В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медиана CM равна 6 см. Найдите модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $\angle A = 30°$.

435.• Известно, что векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны. Вектор $\vec{a}$ коллинеарен каждому из векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Докажите, что вектор $\vec{a}$ является нулевым.

436.• Известно, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой. Верно ли обратное утверждение: если точки A, B и C лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны?

437.• Для четырех точек A, B, C и D известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Докажите, что середины отрезков AD и BC совпадают. Докажите обратное утверждение: если середины отрезков AD и BC совпадают, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

438.• Известно, что $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$. Докажите, что точка O — середина отрезка MN. Докажите обратное утверждение: если точка O — середина отрезка MN, то $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

439. Один из углов параллелограмма равен полусумме трех остальных его углов. Найдите углы параллелограмма.

440. Периметр одного из двух подобных треугольников на 8 см больше периметра другого треугольника. Найдите

периметры данных треугольников, если коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$.

441. На сторонах BC и AD ромба $ABCD$ отметили соответственно точки M и K такие, что $BM : MC = KD : AK = 1 : 2$. Найдите MK, если $AB = a$, $\angle ABC = 60°$.

13. Координаты вектора

Рассмотрим на координатной плоскости вектор $\vec{a}$. От начала координат отложим равный ему вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 99). **Координатами вектора** $\vec{a}$ будем называть координаты точки A. Запись $\vec{a}\,(x; y)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(x; y)$.

Числа x и y называют соответственно **первой** и **второй координатами вектора** $\vec{a}$.

Из определения следует, что *равные векторы имеют равные соответствующие координаты*. Например, каждый из равных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 100) имеет координаты (2; 1).

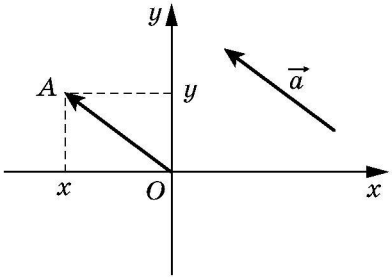


Рис. 99

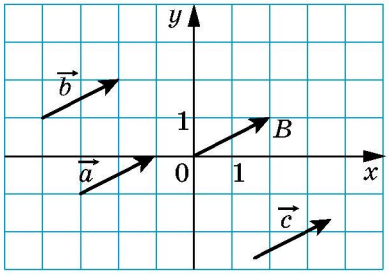


Рис. 100

Справедливо и обратное утверждение: *если соответствующие координаты векторов равны, то равны и сами векторы*.

Действительно, если отложить такие векторы от начала координат, то их концы совпадут.

Очевидно, что нулевой вектор имеет координаты (0; 0).

Теорема 13.1. ***Если точки A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ соответственно являются началом и концом вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ равны соответственно первой и второй координатам вектора $\vec{a}$.***

Доказательство. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то теорема очевидна. Пусть теперь $\vec{a} \neq \vec{0}$. Отложим от начала координат вектор $\overrightarrow{OM}$, равный вектору $\overrightarrow{AB}$. Если обозначить координаты точки M через $(a_1; a_2)$, то требуется доказать, что $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Поскольку $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, то, воспользовавшись результатом задачи 437, можем сделать вывод, что середины отрезков OB и AM совпадают. Координаты середин отрезков OB и AM соответственно равны $\left(\frac{0+x_2}{2}; \frac{0+y_2}{2}\right)$ и $\left(\frac{x_1+a_1}{2}; \frac{y_1+a_2}{2}\right)$.

Тогда $\frac{0+x_2}{2} = \frac{x_1+a_1}{2}$, $\frac{0+y_2}{2} = \frac{y_1+a_2}{2}$. (Эти равенства выполняются и тогда, когда точка O совпадает с точкой B или точка A совпадает с точкой M).

Отсюда $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. ▲

Из формулы расстояния между двумя точками следует, что если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Пример. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: A (3; −2), B (−4; 1), C (−2; −3). Найдите координаты вершины D.

Решение. Так как четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Следовательно, координаты этих векторов равны.

Пусть координаты точки D равны $(x; y)$. Для нахождения координат векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ воспользуемся теоремой 13.1. Имеем:

$\overrightarrow{AB}(-4-3; 1-(-2)) = \overrightarrow{AB}(-7; 3)$; $\overrightarrow{DC}(-2-x; -3-y)$.

Отсюда: $\begin{cases} -7 = -2 - x, \\ 3 = -3 - y; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5, \\ y = -6. \end{cases}$

Ответ: D (5; −6).

1. Поясните, что называют координатами данного вектора.
2. Что можно сказать о координатах равных векторов?
3. Что можно сказать о векторах, соответствующие координаты которых равны?
4. Как найти координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?
5. Как найти модуль вектора, если известны его координаты?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

442.° С помощью циркуля и линейки постройте точку, координаты которой равны координатам данного вектора $\vec{a}$ (рис. 101).

443.° Отложите от начала координат векторы $\vec{a}(-3; 2)$, $\vec{b}(0; -2)$, $\vec{c}(4; 0)$.

444.° Отложите от точки M (−1; 2) векторы $\vec{a}(1; -3)$, $\vec{b}(-2; 0)$, $\vec{c}(0; -1)$.

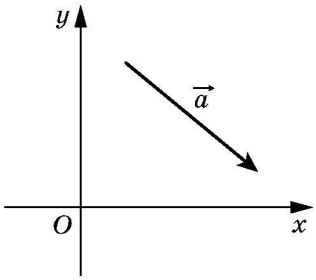


Рис. 101

УПРАЖНЕНИЯ

445.° Найдите координаты векторов, изображенных на рисунке 102.

446.° Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

1) A (2; 3), B (−1; 4);
2) A (3; 0), B (0; −3);
3) A (0; 0), B (−2; −8);
4) A (m; n), B (p, k).

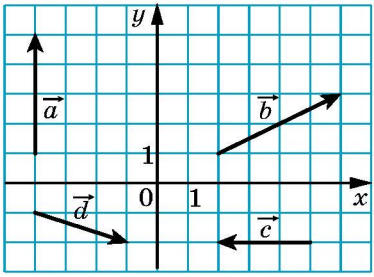


Рис. 102

447.° Даны точка A (1; 3) и вектор $\vec{a}(-2;1)$. Найдите координаты точки B такой, что $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$.

448.° Даны точки A (3; −7), B (4; −5), C (5; 8). Найдите координаты точки D такой, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

449.° От точки A (4; −3) отложен вектор $\vec{m}(-1;8)$. Найдите координаты конца вектора.

450.° Даны точки A (3; −4), B (−2; 7), C (−4; 16), D (1; 5). Докажите, что $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

451.° Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (1; −5), B (2; 3), C (−3; 1), D (−4; −7) является параллелограммом.

452.° Среди векторов $\vec{a}(3;-4)$, $\vec{b}(-4;2)$, $\vec{c}\left(3;\sqrt{11}\right)$, $\vec{d}(-2;-4)$, $\vec{e}\left(-1;-2\sqrt{6}\right)$, $\vec{f}(-4;5)$ найдите те, которые имеют равные модули.

453.° Даны точки A (1; −4), B (−2; 5), C (1 + a; −4 + b), D (−2 + a; 5 + b). Докажите, что $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$.

454.° Модуль вектора $\vec{a}(x;-8)$ равен 10. Найдите x.

455.° При каких значениях y модуль вектора $\vec{b}(12;y)$ равен 13?

456.• Отрезок BM — медиана треугольника с вершинами A (3; −5), B (2; −3), C (−1; 7). Найдите координаты и модуль вектора $\overrightarrow{BM}$.

457.• Точка F делит сторону BC прямоугольника $ABCD$ в отношении 1 : 2, считая от вершины B (рис. 103). Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{FD}$.

458.• Точка E — середина стороны AC прямоугольника $OACD$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{EO}$ (рис. 104).

459.• Модуль вектора $\vec{a}$ равен 10. Его первая координата на 2 больше второй. Найдите координаты вектора $\vec{a}$.

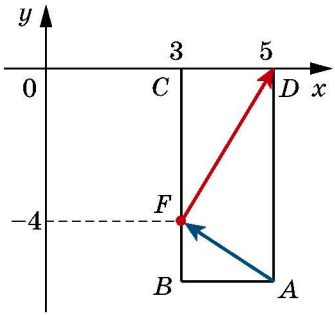


Рис. 103

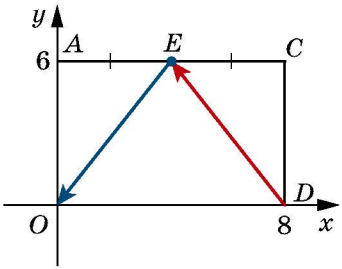


Рис. 104

460.• Модуль вектора $\vec{c}$ равен 2, а его координаты равны. Найдите координаты вектора $\vec{c}$.

461.•• Точки A (2; 5) и B (7; 5) — вершины прямоугольника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ равен 13. Найдите координаты точек C и D.

462.•• Точки A (1; 2) и D (1; −6) — вершины прямоугольника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{AC}$ равен 17. Найдите координаты вершин B и C.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

463. Два равных равнобедренных треугольника ADB и CBD ($AB = BD = CD$) имеют общую боковую сторону (рис. 105). Определите вид четырехугольника $ABCD$.

464. Периметр треугольника равен 48 см, а его биссектриса делит противолежащую сторону на отрезки длиной 5 см и 15 см. Найдите стороны треугольника.

465. Боковая сторона равнобокой трапеции, описанной около окружности, равна a, а один из углов — 60°. Найдите площадь трапеции.

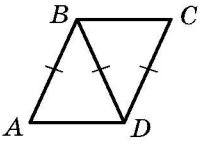


Рис. 105

14. Сложение и вычитание векторов

Если тело переместилось из точки A в точку B, а затем из точки B в точку C, то суммарное перемещение из точки A в точку C естественно представить в виде вектора $\overrightarrow{AC}$, считая этот вектор суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, то есть $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 106).

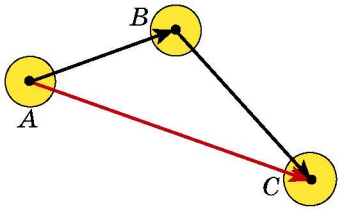


Рис. 106

Этот пример подсказывает, как ввести понятие «сумма векторов», то есть как сложить два данных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$. Далее от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называют **суммой векторов** $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ (рис. 107) и записывают $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

Описанный алгоритм сложения двух векторов называют **правилом треугольника**.

Это название связано с тем, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то точки A, B и C являются вершинами треугольника (рис. 107).

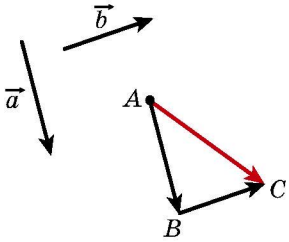


Рис. 107

По правилу треугольника можно складывать и коллинеарные векторы. На рисунке 108 вектор $\overrightarrow{AC}$ равен сумме коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) б)

Рис. 108

Итак, ***для любых трех точек A, B и C выполняется равенство*** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, которое выражает **правило треугольника для сложения векторов.**

Теорема 14.1. ***Если координаты векторов*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ ***соответственно равны*** $(a_1;\ a_2)$ ***и*** $(b_1;\ b_2)$, ***то координаты вектора*** $\vec{a}+\vec{b}$ ***равны*** $(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$.

Доказательство. ⊙ Пусть точки $A\ (x_1;\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$, $C\ (x_3;\ y_3)$ таковы, что $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$. Тогда $\vec{a}\,(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$, $\vec{b}\,(x_3-x_2;\ y_3-y_2)$; $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}\,(x_3-x_1;\ y_3-y_1)=$

$$=\overrightarrow{AC}\,(x_3-x_2+x_2-x_1;\ y_3-y_2+y_2-y_1)=\overrightarrow{AC}\,(a_1+b_1;\ a_2+b_2).\ \blacktriangle$$

Замечание. Описывая правило треугольника для нахождения суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, мы отложили вектор $\vec{a}$ от произвольной точки. Если точку A заменить точкой A_1, то вместо вектора $\overrightarrow{AC}$, равного сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим некоторый вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$. Из теоремы 14.1 следует, что координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ равны $(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$, следовательно, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$. Это означает, что сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не зависит от того, от какой точки откладывается вектор $\vec{a}$.

Свойства сложения векторов аналогичны свойствам сложения чисел.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ ***и*** $\vec{c}$ ***выполняются равенства:***

1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительное свойство);

3) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательное свойство).

Для доказательства этих свойств достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, записанных в правой и левой частях равенств. Сделайте это самостоятельно.

Сумму трех и более векторов находят так: сначала складывают первый и второй векторы, затем складывают полученный вектор с третьим и т. д. Например, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=$ $=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Из переместительного и сочетательного свойств сложения векторов следует, что при сложении нескольких векторов можно менять местами слагаемые и расставлять скобки любым способом.

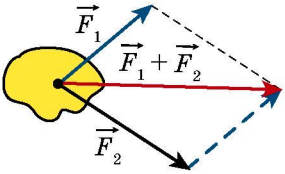


Рис. 109

В физике часто приходится складывать векторы, отложенные от одной точки. Так, если к телу приложены силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 109), то равнодействующая этих сил равна сумме $\vec{F}_1+\vec{F}_2$.

Для нахождения суммы двух неколлинеарных векторов, отложенных от одной точки, удобно пользоваться **правилом параллелограмма для сложения векторов**.

Пусть надо найти сумму неколлинеарных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ (рис. 110). Отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\overrightarrow{AD}$. Тогда по правилу треугольника $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Поскольку векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ равны, то четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм с диагональю AC.

Приведенные соображения позволяют сформулировать правило параллелограмма для сложения неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Отложим от произвольной точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, *равный вектору* $\vec{a}$, *и вектор* $\overrightarrow{AD}$, *равный вектору* $\vec{b}$. *Построим параллелограмм ABCD* (рис. 111). *Тогда искомая сумма* $\vec{a}+\vec{b}$ *равна вектору* $\overrightarrow{AC}$.

Определение. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

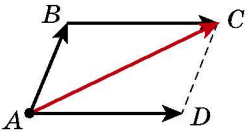


Рис. 110

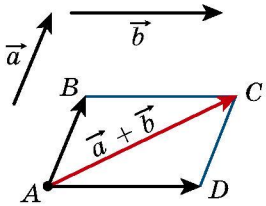


Рис. 111

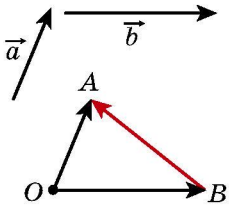


Рис. 112

Пишут: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Покажем, как построить вектор, равный разности данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 112). Тогда вектор $\overrightarrow{BA}$ будет разностью $\vec{a} - \vec{b}$. Действительно, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$. Следовательно, по определению разности двух векторов $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, то есть $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$.

На рисунке 112 векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ неколлинеарны. Однако описанный алгоритм применим и для нахождения разности коллинеарных векторов. На рисунке 113 вектор $\overrightarrow{BA}$ равен разности коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

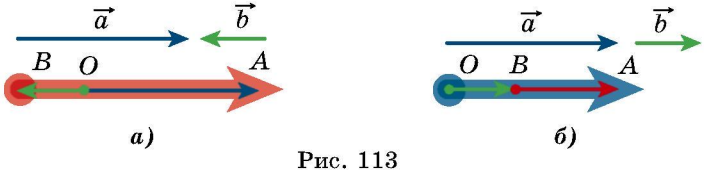


Рис. 113

Следовательно, ***для любых трех точек O, A и B выполняется равенство*** $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, которое выражает правило нахождения разности двух векторов, отложенных от одной точки.

Теорема 14.2. ***Если координаты векторов*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ ***соответственно равны*** $(a_1; a_2)$ ***и*** $(b_1; b_2)$, ***то координаты вектора*** $\vec{a} - \vec{b}$ ***равны*** $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Из этой теоремы следует, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует единственный вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

Определение. **Два ненулевых вектора называют противоположными, если их модули равны и векторы противоположно направлены.**

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположны, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **противоположный** вектору $\vec{b}$, а вектор $\vec{b}$ — противоположный вектору $\vec{a}$.

Вектором, противоположным нулевому вектору, считают нулевой вектор.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают так: $-\vec{a}$.

Из определения следует, что вектору $\overrightarrow{AB}$ противоположным является вектор $\overrightarrow{BA}$. Тогда ***для любых точек A и B выполняется равенство*** $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Из правила треугольника следует, что

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

А из этого равенства следует, что если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то вектор $-\vec{a}$ имеет координаты $(-a_1; -a_2)$.

Теорема 14.3. ***Для любых векторов*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ ***выполняется равенство*** $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Для доказательства достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, записанных в правой и левой частях равенства. Сделайте это самостоятельно.

Теорема 14.3 позволяет свести вычитание векторов к сложению: *чтобы из вектора* $\vec{a}$ *вычесть вектор* $\vec{b}$, *надо к вектору* $\vec{a}$ *прибавить вектор* $-\vec{b}$ (рис. 114).

Пример. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 115). Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$ через векторы $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

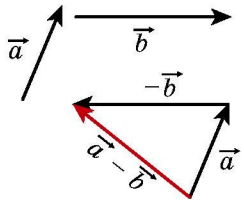


Рис. 114

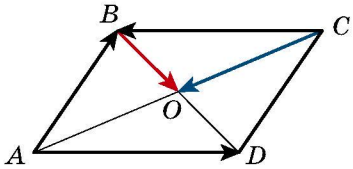


Рис. 115

Решение. Так как точка O — середина отрезков BD и AC, то $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

Имеем: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BO} = -\vec{a} - \vec{b}$;

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a};$$

$$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \vec{a} - \vec{b}.$$

1. Опишите правило треугольника для нахождения суммы векторов.
2. Какое равенство выражает правило треугольника для нахождения суммы векторов?
3. Чему равны координаты вектора, равного сумме двух данных векторов?
4. Запишите равенства, выражающие свойства сложения векторов.
5. Опишите правило параллелограмма для нахождения суммы двух векторов.
6. Какой вектор называют разностью двух векторов?
7. Какое равенство выражает правило нахождения разности двух векторов, отложенных от одной точки?
8. Чему равны координаты вектора, равного разности двух данных векторов?
9. Какие векторы называют противоположными?
10. Как обозначают вектор, противоположный вектору $\vec{a}$?
11. Как можно свести вычитание векторов к сложению векторов?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

466.° С помощью правила треугольника постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 116.

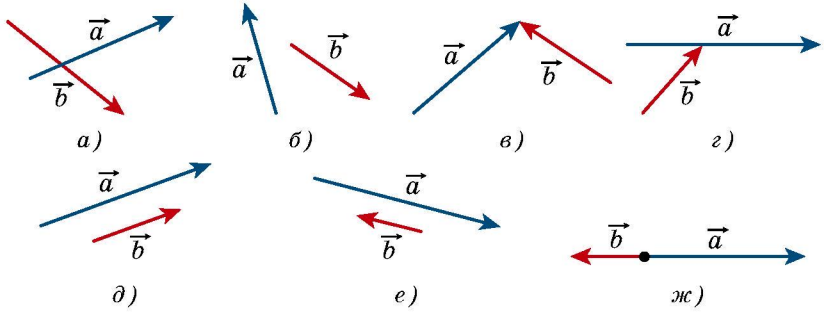


Рис. 116

467.° С помощью правила параллелограмма постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 116, *а*) – *г*).

468.° Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенных на рисунке 116, постройте вектор $\vec{a}-\vec{b}$.

469.° Начертите треугольник ABC. Отложите от точки A вектор, противоположный вектору: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{BC}$.

470.° Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте векторы $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

471.° Начертите треугольник MNP. Постройте векторы $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

472.° Начертите параллелограмм $ABCD$. Постройте векторы $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$.

473.° Начертите треугольник ABC. Постройте векторы $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.

474.° Отметьте четыре точки M, N, P, Q. Постройте вектор $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}$.

475.° Для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, изображенных на рисунке 117, постройте вектор: 1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 3) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

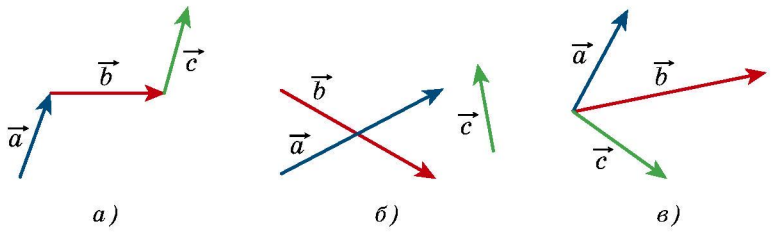


Рис. 117

476.• Отложите от одной точки три вектора, модули которых равны, так, чтобы сумма двух из них была равной третьему вектору.

477.• Отложите от одной точки три вектора, модули которых равны, так, чтобы их сумма была равной нуль-вектору.

478.• Для точек A, B, C, D, изображенных на рисунке 118, постройте такой вектор $\vec{x}$, чтобы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\vec{x}=\vec{0}$.

479.• Начертите треугольник ABC. Постройте такую точку X, чтобы:

1) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XC}$;
2) $\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XA}$.

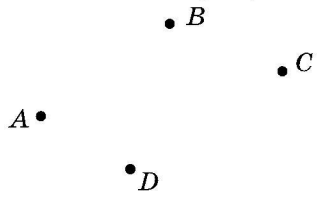


Рис. 118

УПРАЖНЕНИЯ

480.° Дан треугольник ABC. Выразите вектор $\overrightarrow{BC}$ через векторы:

1) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

481.° Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$.

482.° Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DA}=\vec{b}$.

483.° Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$.

484.° Докажите, что для любых точек A, B, C, D выполняется равенство:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$;
2) $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$;
3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

485.° Докажите, что для любых точек A, B, C, D выполняется равенство:

1) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$;
2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$.

486.° Точки M и N — середины соответственно сторон BA и BC треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NB}$ через векторы $\overrightarrow{BM}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{BN}=\vec{n}$.

487.° В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

488.° Даны четырехугольник $ABCD$ и некоторая точка O. Известно, что $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

489.° Даны четырехугольник $ABCD$ и некоторая точка O. Известно, что $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

490.° Даны векторы $\vec{a}(4;-5)$ и $\vec{b}(-1;7)$. Найдите:

1) координаты векторов $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$;

2) $|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$.

491.° Даны точки A (1; −3), B (4; 5), C (−2; −1), D (3; 0). Найдите:

1) координаты векторов $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$;

2) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|$, $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$.

492.° Сумма векторов $\vec{a}(5;-3)$ и $\vec{b}(x;4)$ равна вектору $\vec{c}(2;y)$. Найдите x и y.

493.° Сумма векторов $\vec{a}(x;-1)$ и $\vec{b}(2;y)$ равна вектору $\vec{c}(-3;4)$. Найдите x и y.

494.° Дан вектор $\overrightarrow{MN}(3;-5)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{NM}$.

495.° Сторона равностороннего треугольника ABC равна 3 см. Найдите $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$.

496.° Катет равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) равен 4 см. Найдите $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}|$.

497.° Даны точки N (3; −5) и F (4; 1). Найдите $|\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OF}|$ и $|\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{ON}|$, где O — произвольная точка.

498.• Докажите, что для любых n точек A_1, A_2, …, A_n выполняется равенство

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}.$$

499.• Докажите, что для любых точек A, B, C, D, E выполняется равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}$.

500.• Выразите вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (рис. 119).

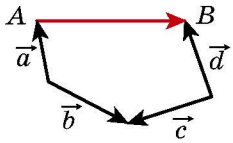


Рис. 119

501.• В параллелограмме $ABCD$ точки M, N, K — середины соответственно сторон AB, BC и CD. Выразите векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{MN}=\vec{m}$, $\overrightarrow{KN}=\vec{n}$.

502.• В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразите векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{DO}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$.

503.• Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{DA}$, где M — произвольная точка.

504.• Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}$, где M — произвольная точка.

505.• Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что:

1) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

506.• В треугольнике ABC проведена медиана BM. Докажите, что:

1) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$; 2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

507.• Докажите, что для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

508.• Докажите, что для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $|\vec{a}-\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

509.•• Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Докажите, что $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

510.•• Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$. Докажите, что $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

511.•• Может ли быть нулевым вектором сумма трех векторов, модули которых равны:

1) 5; 2; 3; 2) 4; 6; 3; 3) 8; 9; 18?

512.•• Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

513.•• Векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{EF}$ попарно неколлинеарны, причем $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны отрезкам MN, PQ и EF.

514.•• Докажите, что для параллелограмма $ABCD$ и произвольной точки X выполняется равенство

$$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}.$$

515.•• Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

516.•• Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}\right|=\left|\overrightarrow{BX}\right|$.

517.* Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

518.* На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены параллелограммы AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A. Прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 попарно непараллельны. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

519. В треугольник ABC вписан параллелограмм $CDMK$ так, что угол C у них общий, а точки D, M и K принадлежат соответственно сторонам AC, AB и BC треугольника. Найдите стороны параллелограмма $CDMK$, если его периметр равен 20 см, AC = 12 см, BC = 9 см.

520. Три окружности, радиусы которых равны 1 см, 2 см и 3 см, попарно касаются внешне друг друга. Найдите радиус окружности, проходящей через центры данных окружностей.

521. Докажите, что площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность, составляет $\frac{3}{4}$ площади правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.

15. Умножение вектора на число

Пусть дан ненулевой вектор $\vec{a}$. На рисунке 120 изображены вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}+\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{CD}$, равный вектору $(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$. Очевидно, что

$$|\overrightarrow{AB}|=2|\vec{a}| \text{ и } \overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\vec{a},$$

$$|\overrightarrow{CD}|=3|\vec{a}| \text{ и } \overrightarrow{CD}\uparrow\downarrow\vec{a}.$$

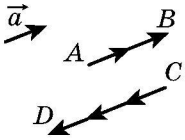


Рис. 120

Вектор $\overrightarrow{AB}$ естественно обозначить $2\vec{a}$ и считать, что он получен в результате **умножения вектора $\vec{a}$ на число 2**. Аналогично можно считать, что вектор $\overrightarrow{CD}$ получен в результате умножения вектора $\vec{a}$ на число -3, и принять обозначение $\overrightarrow{CD}=-3\vec{a}$.

Этот пример подсказывает, как ввести понятие «умножение вектора на число».

Определение. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа k, отличного от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что:

1) $|\vec{b}|=|k||\vec{a}|$;

2) если $k>0$, то $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$; если $k<0$, то $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

Пишут: $\vec{b}=k\vec{a}$.

Если $\vec{a}=\vec{0}$ или $k=0$, то считают, что $k\vec{a}=\vec{0}$.

На рисунке 121 изображены векторы $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\sqrt{3}\,\vec{a}$.

Из определения следует, что

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a},$$

$$-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}.$$

Также из определения следует, что ***если $\vec{b}=k\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.***

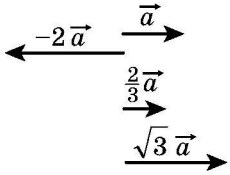


Рис. 121

А если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то можно ли представить вектор $\vec{b}$ в виде произведения $k\vec{a}$? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 15.1. ***Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.***

Доказательство. ⊛ Если $\vec{b} = \vec{0}$, то при $k = 0$ получаем, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Если $\vec{b} \neq \vec{0}$, то или $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, или $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

1) Пусть $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Рассмотрим вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, где $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Поскольку $k > 0$, то $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, следовательно, $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Кроме того, $|\vec{c}| = k|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Таким образом, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ сонаправлены и модули их равны. Отсюда $\vec{b} = \vec{c} = k\vec{a}$.

2) Пусть $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Рассмотрим вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, где $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Для этого случая завершите доказательство самостоятельно. ▲

Теорема 15.2. ***Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $(ka_1; ka_2)$.***

Доказательство. ⊛ Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то утверждение теоремы очевидно.

Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $k \neq 0$. Рассмотрим вектор $\vec{b}\,(ka_1; ka_2)$. Покажем, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Имеем: $|\vec{b}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |k||\vec{a}|$.

Отложим от начала координат векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, равные соответственно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Так как прямая OA проходит через начало координат, то ее уравнение имеет вид $ax + by = 0$.

Этой прямой принадлежит точка $A\ (a_1; a_2)$. Тогда

$$a \cdot a_1 + b \cdot a_2 = 0. \text{ Отсюда } a\ (ka_1) + b\ (ka_2) = 0.$$

Следовательно, точка $B\ (ka_1; ka_2)$ также принадлежит прямой OA, поэтому векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ коллинеарны, то есть $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

При $k > 0$ числа a_1 и ka_1 имеют одинаковые знаки (или оба равны нулю). Таким же свойством обладают числа a_2 и ka_2. Следовательно, при $k > 0$ точки A и B лежат в одной

четверти (или на одном координатном луче), поэтому векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ сонаправлены (рис. 122), то есть $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. При $k < 0$ векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ будут противоположно направленными, то есть $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Итак, мы получили, что $\vec{b} = k\vec{a}$. ▲

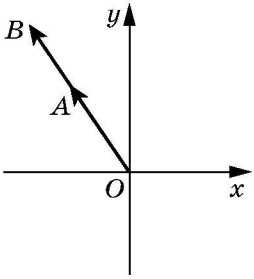


Рис. 122

Следствие 1. ***Векторы $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(ka_1; ka_2)$ коллинеарны.***

Следствие 2. ***Если векторы $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ коллинеарны, причем $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $b_1 = ka_1$ и $b_2 = ka_2$.***

С помощью теоремы 15.2 можно доказать такие свойства умножения вектора на число.

Для любых чисел k, m и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

$(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ (сочетательное свойство);

$(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ (первое распределительное свойство);

$k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (второе распределительное свойство).

Для доказательства этих свойств достаточно сравнить соответствующие координаты векторов, записанных в правых и левых частях равенств. Сделайте это самостоятельно.

Эти свойства позволяют преобразовывать выражения, содержащие суммы векторов, разности векторов и произведения векторов на число аналогично тому, как мы это делаем в алгебре. Например,

$$2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}.$$

Задача 1. *Докажите, что если $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$, то точки O, A и B лежат на одной прямой.*

Решение. Из условия следует, что векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ коллинеарны. Кроме того, эти векторы отложены от одной точки O. Следовательно, точки O, A и B лежат на одной прямой.

Задача 2. *Пусть точка M — середина отрезка AB и X — произвольная точка* (рис. 123). *Докажите, что*

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}\right).$$

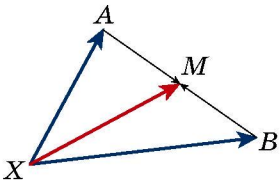


Рис. 123

Решение. Применяя правило треугольника, запишем:

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AM};$$

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BM}.$$

Сложим эти два равенства:

$$2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}.$$

Так как векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ противоположны, то $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$. Имеем: $2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$.

Отсюда $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}\right)$.

Пример 1. Докажите, что середины оснований трапеции и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой.

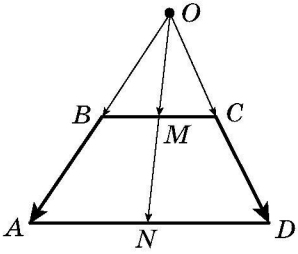


Рис. 124

Решение. Пусть точки M и N — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$, O — точка пересечения прямых AB и CD (рис. 124).

Применяя ключевую задачу 2, запишем:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right), \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right).$$

Так как векторы в парах $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ коллинеарны, то $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC} = k_1\overrightarrow{OD}$, где k и k_1 — некоторые числа.

Так как $\Delta\ BOC \sim \Delta\ AOD$, то $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$. Следовательно, $k = k_1$.

Имеем:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}\right) = k \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right) = k \cdot \overrightarrow{ON}.$$

Из ключевой задачи 1 следует, что точки O, M, N лежат на одной прямой.

Пример 2. Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Решение[1]. Пусть отрезки AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC (рис. 125). Имеем:

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC});$$

$$\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC});$$

$$\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right).$$

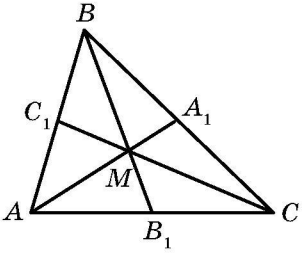


Рис. 125

Отсюда

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})=\vec{0}.$$

Из свойства медиан треугольника следует, что

$$AM=\frac{2}{3}AA_1. \text{ Тогда } \overrightarrow{MA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}.$$

Аналогично $\overrightarrow{MB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$. Отсюда

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}=-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right)=\vec{0}.$$

1. Что называют произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $k\neq 0$?

2. Чему равно произведение $k\vec{a}$, если $k=0$ или $\vec{a}=\vec{0}$?

3. Что можно сказать о ненулевых векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{b}=k\vec{a}$, где k — некоторое число?

4. Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, причем $\vec{a}\neq\vec{0}$. Как можно выразить вектор $\vec{b}$ через вектор $\vec{a}$?

5. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1;\ a_2)$. Чему равны координаты вектора $k\vec{a}$?

[1] В указании к задаче 517 приведен другой способ решения этого примера.

6. Что можно сказать о векторах, координаты которых равны $(a_1; a_2)$ и $(ka_1; ka_2)$?

7. Как связаны между собой соответствующие координаты коллинеарных векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$?

8. Запишите сочетательное и распределительные свойства умножения вектора на число.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

522.° Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 126). Постройте вектор: 1) $2\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{c}$; 3) $\frac{2}{3}\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{6}\vec{a}$.

523.° Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 126). Постройте вектор: 1) $\frac{1}{2}\vec{a}$; 2) $-2\vec{b}$; 3) $-\frac{2}{3}\vec{c}$.

524.° Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 127). Постройте вектор: 1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.

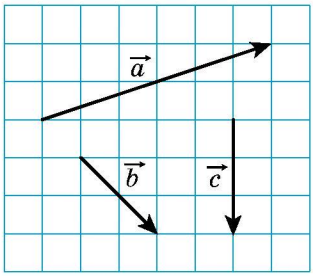


Рис. 126

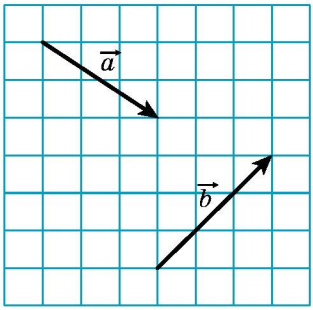


Рис. 127

525.° Постройте два неколлинеарных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Отметьте какую-либо точку O. От точки O отложите векторы: 1) $3\vec{x}+\vec{y}$; 2) $\vec{x}+2\vec{y}$; 3) $-\frac{1}{2}\vec{x}+3\vec{y}$; 4) $-2\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

526.• Отметьте на плоскости три точки A, B и C такие, что: 1) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

527.• Начертите треугольник ABC. Отметьте точку M — середину стороны AC.

1) От точки M отложите вектор, равный вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

2) От точки B отложите вектор, равный вектору

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

528.• Начертите трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Отметьте точку M — середину стороны AB. От точки M отложите вектор, равный вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

529.• Начертите треугольник ABC. Постройте вектор, равный вектору $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, так, чтобы его начало принадлежало стороне AB, а конец — стороне BC.

УПРАЖНЕНИЯ

530.° Найдите модули векторов $3\vec{m}$ и $-\frac{1}{2}\vec{m}$, если $|\vec{m}|=4$.

531.° Какой из векторов, $3\vec{a}$ или $-\frac{1}{3}\vec{a}$, сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $\vec{a}\neq\vec{0}$?

532.° Являются ли ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленными или противоположно направленными, если: 1) $\vec{b}=2\vec{a}$; 2) $\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $\vec{b}=\sqrt{2}\,\vec{a}$? Найдите отношение $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

533.° Выразите вектор $\vec{p}$ из равенства:

1) $\vec{q}=3\vec{p}$; 2) $\overrightarrow{AC}=-2\vec{p}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{p}=\vec{q}$; 4) $2\vec{p}=3\vec{q}$.

534.° В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразите: 1) вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$; 2) вектор $\overrightarrow{BD}$ через вектор $\overrightarrow{BO}$; 3) вектор $\overrightarrow{CO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.

535.° В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Выразите вектор $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

536.° В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отметили точку M так, что $AM : MC = 1 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{MC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

537.° В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны BC, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Выразите векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

538.° В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Выразите: 1) вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CA}$; 2) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{MN}$.

539.° На отрезке AB длиной 18 см отметили точку C так, что $BC = 6$ см. Выразите: 1) вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$; 2) вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$; 3) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{BC}$.

540.° Дан вектор $\vec{a}\,(-4; 2)$. Найдите координаты и модули векторов $3\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$, $\frac{3}{2}\vec{a}$.

541.° Дан вектор $\vec{b}\,(-6; 12)$. Найдите координаты и модули векторов $2\vec{b}$, $-\frac{1}{6}\vec{b}$, $\frac{2}{3}\vec{b}$.

542.° Дан вектор $\vec{a}\,(3; -2)$. Какие из векторов $\vec{b}\,(-3; -2)$, $\vec{c}\,(-6; 4)$, $\vec{d}\left(\frac{3}{2}; -1\right)$, $\vec{e}\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{f}\left(-3\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ коллинеарны вектору $\vec{a}$?

543.° Даны векторы $\vec{a}\,(3; -3)$ и $\vec{b}\,(-16; 8)$. Найдите координаты вектора: 1) $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$.

544.° Даны векторы $\vec{m}\,(-2; 4)$ и $\vec{n}\,(3; -1)$. Найдите координаты вектора: 1) $3\vec{m}+2\vec{n}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{m}+2\vec{n}$; 3) $\vec{m}-3\vec{n}$.

545.• На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки M и N так, что $AM : MB = AN : NC = 1 : 2$. Выразите вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CB}$.

546.• Точки O, A и B лежат на одной прямой. Докажите, что существует такое число k, что $\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OB}$.

547.• На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки M и N так, что $AM : MB = 1 : 2$, $BN : NC = 2 : 1$. Выразите вектор $\overrightarrow{NM}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

548.• На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки E и F так, что $BE : EC = 3 : 1$, $CF : FD = 1 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

549.• Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, если $A\ (1;\ 1)$, $B\ (3;\ -2)$, $C\ (-1;\ 3)$, $D\ (5;\ -6)$.

550.• Среди векторов $\vec{a}\,(1; -2)$, $\vec{b}\,(-3; -6)$, $\vec{c}\,(-4; 8)$, $\vec{d}\,(-1; -2)$ укажите пары коллинеарных векторов.

551.• Даны векторы $\vec{m}\,(4; -6)$, $\vec{n}\left(-1; \frac{3}{2}\right)$, $\vec{k}\left(3; -\frac{9}{2}\right)$. Укажите пары сонаправленных и противоположно направленных векторов.

552.• Найдите значения x, при которых векторы $\vec{a}\,(1; x)$ и $\vec{b}\left(\frac{x}{4}; 4\right)$ коллинеарны.

553.• При каких значениях y векторы $\vec{a}\,(2; 3)$ и $\vec{b}\,(-1; y)$ коллинеарны?

554.• Дан вектор $\vec{b}\,(-3; 1)$. Найдите координаты вектора, коллинеарного вектору $\vec{b}$, модуль которого в два раза больше модуля вектора $\vec{b}$. Сколько решений имеет задача?

555.• Найдите координаты вектора $\vec{m}$, противоположно направленного вектору $\vec{n}\,(5; -12)$, если $|\vec{m}| = 39$.

556.• Найдите координаты вектора $\vec{a}$, сонаправленного с вектором $\vec{b}\,(-9; 12)$, если $|\vec{a}| = 5$.

557.• Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами A (−1; 2), B (3; 5), C (14; 6), D (2; −3) является трапецией.

558.• Докажите, что точки A (−1; 3), B (4; −7), D (−2; 5) лежат на одной прямой.

559.• Даны векторы $\vec{a}(1;-4)$, $\vec{b}(0;3)$, $\vec{c}(2;-17)$. Найдите такие числа x и y, что $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

560.•• В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. На стороне BC отметили точку K так, что $BK : KC = 2 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{OK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

561.•• Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O так, что $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 4 : 3$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

562.•• На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки K и F так, что $AK : KB = 1 : 2$ и $BF : FC = 2 : 3$. Выразите векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{KF}$ через векторы $\overrightarrow{BK}=\vec{m}$, $\overrightarrow{CF}=\vec{n}$.

563.•• На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили соответственно точки M и N так, что $AM : MC = 1 : 3$ и $BN : NC = 4 : 3$. Выразите векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NM}$ через векторы $\overrightarrow{BN}=\vec{k}$, $\overrightarrow{AM}=\vec{p}$.

564.•• Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Выразите вектор $\overrightarrow{BM}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

565.•• С помощью векторов докажите теорему о средней линии треугольника.

566.•• Пусть точки M_1 и M_2 — середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}\right).$$

567.•• Используя задачу 566, докажите теорему о средней линии трапеции.

568.•• Пусть точки M и N — соответственно середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Используя задачу 566, докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$.

569.•• Пусть точки M и N — соответственно середины диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$. Используя задачу 566, докажите, что $MN \parallel AD$.

570.•• На стороне AC треугольника ABC отметили точку M так, что $AM : MC = 2 : 3$. Докажите, что

$$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}.$$

571.•• На стороне BC треугольника ABC отметили точку D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Докажите, что $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

572.* Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны медианам данного треугольника.

573.* Пусть точки M_1 и M_2 — середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что середины отрезков A_1A_2, M_1M_2, B_1B_2 лежат на одной прямой.

574.* На стороне AD и на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки M и N так, что $AM = \frac{1}{5}AD$ и $AN = \frac{1}{6}AC$. Докажите, что точки M, N и B лежат на одной прямой.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

575. Меньшее основание и боковая сторона равнобокой трапеции равны 12 см. Чему равна средняя линия трапеции, если один из ее углов равен 60°?

576. Диагонали параллелограмма равны 6 см и 16 см, а одна из сторон — 7 см. Найдите угол между диагоналями параллелограмма и его площадь.

577. Найдите длину хорды окружности радиуса R, концы которой разбивают эту окружность на две дуги, длины которых относятся как 2 : 1.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Применение векторов

Применяя векторы к решению задач, часто используют такую лемму.

Лемма. ***Пусть M — такая точка отрезка AB, что*** $\frac{AM}{MB}=\frac{m}{n}$ (рис. 128). ***Тогда для любой точки X выполняется равенство:***

$$\overrightarrow{XM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$

Доказательство. Имеем: $\overrightarrow{XM}-\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{AM}$.

Поскольку $AM=\frac{m}{m+n}AB$, то $\overrightarrow{AM}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Запишем $\overrightarrow{XM}-\overrightarrow{XA}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Поскольку $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA}$, то имеем:

$$\overrightarrow{XM}-\overrightarrow{XA}=\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA});\quad \overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}-\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB};$$

$$\overrightarrow{XM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.\ \blacktriangle$$

Заметим, что эта лемма является обобщением ключевой задачи 2 пункта 15.

Пример 1. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC и X — произвольная точка (рис. 129). Докажите, что $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC})$.

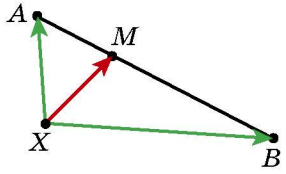


Рис. 128

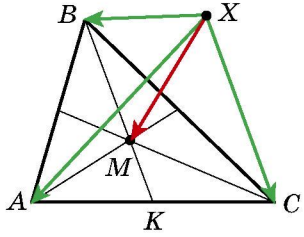


Рис. 129

Решение. Пусть K — середина отрезка AC. Имеем: $BM : MK = 2 : 1$. Тогда, используя лемму, можно записать

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right).$$

Докажем одно векторное равенство, связывающее две замечательные[1] точки треугольника.

Теорема. ***Если точка H — ортоцентр треугольника ABC, а точка O — центр его описанной окружности, то***

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \qquad (*)$$

Доказательство. Опустим из точки O перпендикуляр OK на сторону AC треугольника ABC (рис. 130). В курсе геометрии 8 класса было доказано, что $BH = 2OK$ (с. 114).

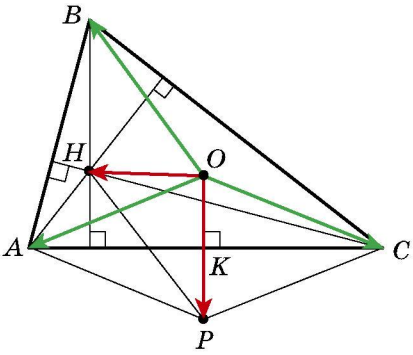


Рис. 130

На луче OK отметим точку P такую, что $OK = KP$. Тогда $BH = OP$. Так как $BH \parallel OP$, то четырехугольник $HBOP$ — параллелограмм.

По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}$.

Поскольку точка K является серединой отрезка AC, то в четырехугольнике $AOCP$ диагонали точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, этот четырехугольник — параллелограмм. Отсюда $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

Имеем: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. ▲

Обратимся к векторному равенству $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Так

[1] О замечательных точках треугольника см. в учебнике «Геометрия. 8 класс», с. 113–115.

как X — произвольная точка, то равенство остается справедливым, если в качестве точки X выбрать точку O — центр описанной окружности треугольника ABC.

Имеем: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Учитывая равенство (*), получаем: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}$.

Это равенство означает, что точки O, M и H лежат на одной прямой, которую называют **прямой Эйлера**. Напомним, что это замечательное свойство было доказано в учебнике 8 класса (с. 115), но другим способом.

16. Скалярное произведение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два ненулевых и несонаправленных вектора (рис. 131). От произвольной точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Величину угла AOB будем называть **углом между векторами** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Например, на рисунке 131 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$, а на рисунке 132 $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 180°$.

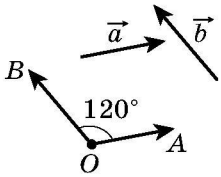


Рис. 131

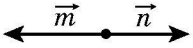


Рис. 132

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то также считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Следовательно, для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место неравенство:

$$0° \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant 180°.$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°. Пишут: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Вы умеете складывать и вычитать векторы, умножать вектор на число. Также из курса физики вы знаете, что если под действием постоянной силы $\vec{F}$ тело переместилось из точки A в точку B (рис. 133), то совершенная механическая работа равна $|\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, где $\varphi = \angle(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$.

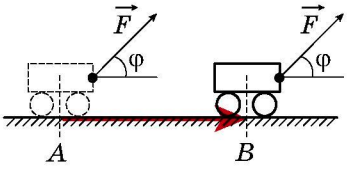


Рис. 133

Этот факт подсказывает, что целесообразно ввести еще одно действие над векторами.

Определение. Скалярным произведением двух векторов называют произведение их модулей и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Имеем: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то очевидно, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Пусть $\vec{a} = \vec{b}$. Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0° = |\vec{a}|^2$.

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называют **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}^2$.

Следовательно, мы получили, что $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, то есть ***скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.***

Теорема 16.1. ***Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.***

Доказательство. ⊙ Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$. Тогда $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90° = 0$.

Пусть теперь $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Тогда $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Поскольку $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$, то $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Отсюда $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, то есть $\vec{a} \perp \vec{b}$. ▲

Теорема 16.2. ***Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ можно вычислить по формуле:***

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

Доказательство. ⊛ Сначала рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны.

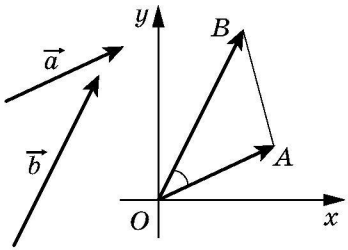


Рис. 134

Отложим от начала координат векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 134). Получаем, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle AOB$.

Применим теорему косинусов к треугольнику AOB:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB.$$

Отсюда

$$OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2).$$

Поскольку $|\vec{a}| = OA$ и $|\vec{b}| = OB$, то $OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Кроме того, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$.

Отсюда $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1;\ b_2 - a_2)$.

Имеем: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2\right)$. Воспользовавшись формулой нахождения модуля вектора по его координатам, запишем:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left((a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2\right).$$

Упрощая выражение, записанное в правой части последнего равенства, получаем:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то доказываемая формула верна. Рассмотрим случай, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$. Тогда существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$, то есть $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$.

Рассмотрим случай, когда $k > 0$. Тогда $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{a}) = |\vec{a}||k\vec{a}|\cos 0° = |k||\vec{a}|^2 =$$

$$= k(a_1^2 + a_2^2) = a_1 \cdot ka_1 + a_2 \cdot ka_2 = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Случай, когда $k < 0$, рассмотрите самостоятельно. ▲

Следствие. ***Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ можно вычислить по формуле***

$$\boxed{\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}} \qquad (*)$$

Доказательство. ⊙ Из определения скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следует, что $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Воспользовавшись теоремой 16.2 и формулой нахождения модуля вектора по его координатам, получаем формулу (*). ▲

С помощью теоремы 16.2 легко доказать следующие свойства скалярного произведения векторов.

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Для доказательства этих свойств достаточно выразить через координаты векторов скалярные произведения, записанные в правых и левых частях равенств. Сделайте это самостоятельно.

Эти свойства вместе со свойствами сложения векторов и умножения вектора на число позволяют преобразовать выражения, содержащие скалярное произведение векторов, по привычным правилам, которые вы знаете из курса алгебры. Например,

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} =$$

$$= \vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

Пример 1. С помощью векторов докажите, что диагонали ромба перпендикулярны.

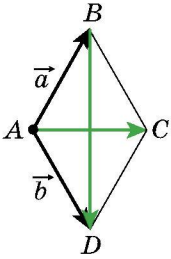


Рис. 135

Решение. На рисунке 135 изображен ромб $ABCD$. Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Очевидно, что $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. По правилу параллелограмма имеем: $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{BD}=-\vec{a}+\vec{b}$. Отсюда $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\vec{a}+\vec{b})=\vec{b}^2-\vec{a}^2=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=0$. Следовательно, $AC\perp BD$.

Пример 2. Известно, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$. Найдите $|2\vec{a}-3\vec{b}|$.

Решение. Поскольку скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, то можно записать:

$$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})^2.\ \text{Отсюда}\ |2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b})^2}=$$

$$=\sqrt{4\vec{a}^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2}=\sqrt{4|\vec{a}|^2-12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})+9|\vec{b}|^2}=$$

$$=\sqrt{36+18+9}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}.$$

Пример 3. В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $BC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 30°$. Найдите длину медианы BM.

Решение. Применяя ключевую задачу 2 п. 15, запишем $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$ (рис. 136). Отсюда

$$\overrightarrow{BM}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{BA}|^2+2|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\angle ABC+|\overrightarrow{BC}|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(16+48\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+108\right)=49.$$

Следовательно, $BM^2 = 49$; $BM = 7$ см.

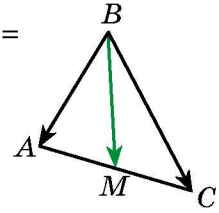


Рис. 136

1. Опишите, как можно построить угол между двумя ненулевыми и несонаправленными векторами.
2. Чему равен угол между двумя сонаправленными векторами?
3. Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если хотя бы один из них нулевой?
4. Как обозначают угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
5. В каких пределах находится угол между любыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
6. Какие векторы называют перпендикулярными?
7. Что называют скалярным произведением двух векторов?
8. Что называют скалярным квадратом вектора?
9. Чему равен скалярный квадрат вектора?
10. Сформулируйте условие перпендикулярности двух ненулевых векторов.
11. Что следует из равенства $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$?
12. Как найти скалярное произведение векторов, если известны их координаты?
13. Запишите свойства скалярного произведения векторов.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

578.° Постройте угол, величина которого равна углу между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 137).

579.° Постройте угол, величина которого равна углу между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ (рис. 138).

580.° На рисунке 139 изображен вектор $\vec{a}$ (длина стороны клеточки равна 0,5 см). Отложите от точки A вектор $\vec{b}$ такой, что $|\vec{b}| = 3$ см и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Сколько решений имеет задача?

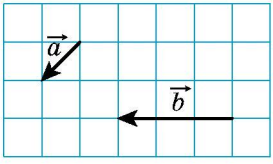


Рис. 137

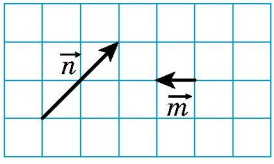


Рис. 138

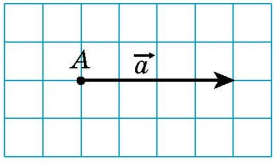


Рис. 139

УПРАЖНЕНИЯ

581.° На рисунке 140 изображен равносторонний треугольник ABC, медианы которого AM и BK пересекаются в точке F. Найдите угол между векторами: 1) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AM}$; 4) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$; 5) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BK}$; 6) $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BK}$; 7) $\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{AB}$.

582.° На рисунке 141 изображен квадрат $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Найдите угол между векторами: 1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$; 4) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{CB}$; 5) $\overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{CD}$.

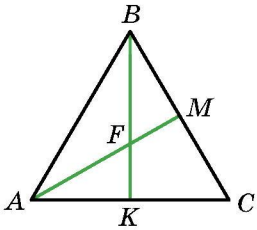


Рис. 140

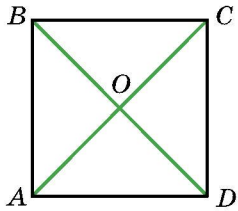


Рис. 141

583.° Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=5,\ \angle(\vec{a},\vec{b})=60°$;

2) $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2\sqrt{2},\ \angle(\vec{a},\vec{b})=135°$;

3) $|\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=1,\ \angle(\vec{a},\vec{b})=0°$;

4) $|\vec{a}|=\frac{1}{2},\ |\vec{b}|=6,\ \angle(\vec{a},\vec{b})=180°$;

5) $|\vec{a}|=0{,}3,\ |\vec{b}|=0,\ \angle(\vec{a},\vec{b})=137°$.

584.° Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если:

1) $|\vec{m}|=7\sqrt{2},\ |\vec{n}|=4,\ \angle(\vec{m},\vec{n})=45°$;

2) $|\vec{m}|=8,\ |\vec{n}|=\sqrt{3},\ \angle(\vec{m},\vec{n})=150°$.

585.° Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a}(2; -1)$, $\vec{b}(1; -3)$;

2) $\vec{a}(-5; 1)$, $\vec{b}(2; 7)$;

3) $\vec{a}(1; -4)$, $\vec{b}(8; 2)$.

586.° Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если:

1) $\vec{m}(3; -2)$, $\vec{n}(1; 0)$;

2) $\vec{m}\left(\frac{3}{2}; -1\right)$, $\vec{n}(6; 9)$.

587.° На рисунке 142 изображен ромб $ABCD$, в котором $AB = 6$ см, $\angle ABC = 120°$. Найдите скалярное произведение векторов: 1) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; 4) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$; 5) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$; 6) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$; 7) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$.

588.° В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CB = 2$ см. Найдите скалярное произведение векторов: 1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

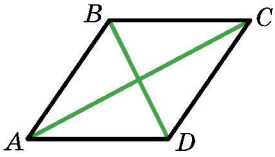


Рис. 142

589.° Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}(1; -2)$ и $\vec{b}(2; -3)$.

590.° Какой знак имеет скалярное произведение векторов, если угол между ними: 1) острый; 2) тупой?

591.° Известно, что скалярное произведение векторов является: 1) положительным числом; 2) отрицательным числом. Определите вид угла между векторами.

592.• В равностороннем треугольнике ABC, сторона которого равна 1, медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Вычислите:

1) $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1}$;

2) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MA_1}$.

593.• Пусть точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, сторона которого равна 1. Вычислите:

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$;

2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{ED}$;

4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$.

594.• При каком значении x векторы $\vec{a}(3; x)$ и $\vec{b}(1; 9)$ перпендикулярны?

595.• Известно, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Докажите, что векторы $\vec{a}(-x; y)$ и $\vec{b}(y; x)$ перпендикулярны.

596.• При каких значениях x векторы $\vec{a}(2x; -3)$ и $\vec{b}(x; 6)$ перпендикулярны?

597.• При каком значении y скалярное произведение векторов $\vec{a}(4; y)$ и $\vec{b}(3; -2)$ равно 14?

598.• При каких значениях x угол между векторами $\vec{a}(2; 5)$ и $\vec{b}(x; 4)$: 1) острый; 2) тупой?

599.• Найдите координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a}(3; -4)$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = -100$.

600.• Известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны и $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$. При каких значениях x векторы $\vec{a} + x\vec{b}$ и $\vec{a} - x\vec{b}$ перпендикулярны?

601.• Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны. Докажите, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

602.• Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45°$. Найдите скалярное произведение $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}$.

603.• Найдите скалярное произведение $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$.

604.• Известно, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150°$. Найдите $|2\vec{a} + 5\vec{b}|$.

605.• Известно, что $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 60°$. Найдите $|2\vec{m} - 3\vec{n}|$.

606.• Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами A (3; −2), B (4; 0), C (2; 1), D (1; −1) является прямоугольником.

607.• Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами A (−1; 4), B (−2; 5), C (−1; 6), D (0; 5) является квадратом.

608.• Найдите косинусы углов треугольника с вершинами A (1; 6), B (−2; 3), C (2; −1).

609.• Найдите углы треугольника с вершинами A (0; 6), $B(4\sqrt{3}; 6)$, $C(3\sqrt{3}; 3)$.

610.• Докажите, что для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство $-|\vec{a}||\vec{b}| \leqslant \vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant |\vec{a}||\vec{b}|$.

611.• Определите взаимное расположение двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$.

612.•• Найдите угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $(\vec{m}+3\vec{n})\cdot(\vec{m}-\vec{n})=-11$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$.

613.•• Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=\frac{3}{2}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$.

614.•• В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90°$, $AC = 1$, $BC=\sqrt{2}$. Докажите, что медианы AK и CM перпендикулярны.

615.•• В четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке O. Известно, что $OB = OC = 1$, $OA = 2$, $OD = 3$. Найдите угол между прямыми AB и DC.

616.•• В треугольнике ABC проведена медиана BD. Известно, что $\angle DBC = 90°$, $BD=\frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Найдите $\angle ABD$.

617.* На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABMN$ и $BCKF$. Докажите, что медиана BD треугольника ABC перпендикулярна прямой MF.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

618. Точка M — середина диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис. 143). Докажите, что четырехугольники $ABMD$ и $CBMD$ равновелики.

619. Перпендикуляр, проведенный из точки пересечения диагоналей ромба, делит его сторону на отрезки, один из которых на 7 см больше другого. Найдите периметр ромба, если его высота равна 24 см.

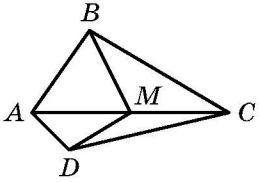


Рис. 143

620. На высоте правильного треугольника со стороной $6\sqrt{3}$ см как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги этой окружности, расположенной вне треугольника.

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 4

1. Какая из данных величин является векторной?

А) масса; Б) объем; В) скорость; Г) время.

2. Чему равен модуль вектора, начало и конец которого совпадают?

А) 1; Б) −1; В) 5; Г) 0.

3. Дан параллелограмм $ABCD$. Какое из равенств является правильным?

А) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; Б) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$; В) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}$; Г) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

4. Известно, что $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$. Какое из данных утверждений верно?

А) точка B — середина отрезка AM;

Б) точка A — середина отрезка MB;

В) точка M — середина отрезка AB;

Г) точка M — вершина равнобедренного треугольника AMB.

5. Даны точки A (−3; 4), B (1; −8). Точка M — середина отрезка AB. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AM}$.

А) (2; −6); Б) (−2; 6); В) (−2; −6); Г) (6; −2).

6. При каком значении x векторы $\vec{a}(x;2)$ и $\vec{b}(-4;8)$ коллинеарны?

А) −1; Б) 1; В) 0; Г) $\frac{1}{2}$.

7. Какое из данных равенств верно?

А) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$; В) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$;

Б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$; Г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}$.

8. Дан вектор $\vec{a}\left(\sqrt{3};-2\right)$. Какой из векторов равен вектору $\sqrt{3}\vec{a}$?

А) $\vec{m}\left(1;-2\sqrt{3}\right)$; В) $\vec{p}(3;-2)$;

Б) $\vec{n}\left(-3;-2\sqrt{3}\right)$; Г) $\vec{q}\left(3;-2\sqrt{3}\right)$.

9. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Какое из данных равенств верно?

А) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;

Б) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

В) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

Г) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

10. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}(2; -3)$ и $\vec{b}(3; -2)$.

А) 12; Б) −12; В) 0; Г) 6.

11. При каком значении x векторы $\vec{a}(2x; -3)$ и $\vec{b}(1; 4)$ перпендикулярны?

А) −6; Б) 3; В) 12; Г) 6.

12. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}(5; -12)$ и $\vec{b}(-3; 4)$.

А) $\frac{63}{65}$; Б) $\frac{65}{63}$; В) $-\frac{63}{65}$; Г) $\frac{1}{2}$.

ИТОГИ

В ЭТОМ ПАРАГРАФЕ:

- были введены такие понятия:
  - направленные отрезки;
  - вектор;
  - нулевой вектор;
  - модуль вектора;
  - коллинеарные векторы;
  - равные векторы;
  - координаты вектора;
  - сумма и разность векторов;
  - умножение вектора на число;
  - угол между двумя векторами;
  - скалярное произведение векторов;
- вы изучили:
  - правила треугольника и параллелограмма для сложения двух векторов;
  - правило вычитания двух векторов;
  - условия коллинеарности двух векторов;
  - свойства сложения векторов и умножения вектора на число;
  - условие перпендикулярности двух векторов;
- вы научились применять векторы для решения задач.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ §5

В этом параграфе вы узнаете, что такое преобразование фигуры. Ознакомитесь с некоторыми видами преобразований: параллельным переносом, центральной симметрией, осевой симметрией, поворотом, гомотетией, подобием.

Вы научитесь применять свойства преобразований при решении задач и доказательстве теорем.

17. Движение (перемещение) фигуры. Параллельный перенос

Пример 1. На рисунке 144 изображены отрезок AB, прямая a и точка O, не принадлежащая ни прямой a, ни прямой AB. Каждой точке X отрезка AB поставим в соответствие точку X_1 прямой a так, чтобы точки O, X и X_1 лежали на одной прямой. Точке A будет соответствовать точка A_1, точке B — точка B_1. Понятно, что все такие точки X_1 образуют отрезок A_1B_1.

Мы указали правило, с помощью которого каждой точке X отрезка AB поставлена в соответствие единственная точка X_1 отрезка A_1B_1. В этом случае говорят, что отрезок A_1B_1 получен в результате **преобразования** отрезка AB.

Пример 2. На рисунке 145 изображены полуокружность AB и прямая a, параллельная диаметру AB. Каждой точке X полуокружности поставим в соответствие точку X_1 прямой так,

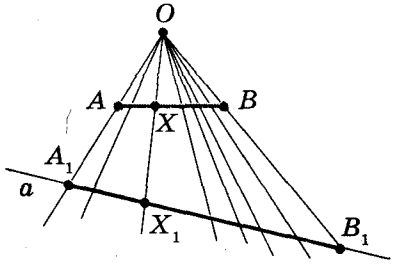


Рис. 144

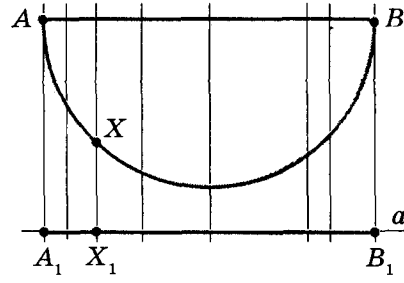


Рис. 145

чтобы прямая XX_1 была перпендикулярна прямой a. Понятно, что все такие точки X_1 образуют отрезок A_1B_1. Будем говорить, что отрезок A_1B_1 получен в результате преобразования полуокружности AB.

Пример 3. Пусть даны некоторая фигура F и вектор $\vec{a}$ (рис. 146). Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1 такую, что $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. В результате такого преобразования фигуры F получили фигуру F_1 (рис. 146). Такое преобразование фигуры F называют **параллельным переносом на вектор $\vec{a}$.**

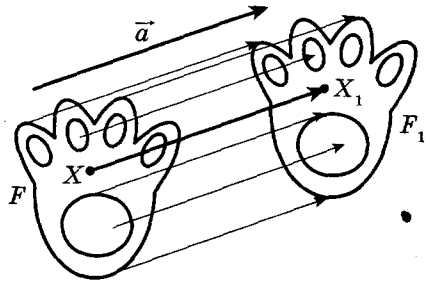


Рис. 146

Обобщим приведенные примеры.

Пусть задана некоторая фигура F. Каждой точке фигуры F поставим в соответствие (сопоставим) по определенному правилу некоторую точку. Все сопоставленные точки образуют фигуру F_1. Говорят, что **фигура F_1 получена в результате преобразования фигуры F**. При этом фигуру F_1 называют **образом фигуры F**, а фигуру F называют **прообразом фигуры F_1**.

Так, в примере 1 отрезок A_1B_1 является образом отрезка AB. Точку X_1 называют **образом точки** X. Отрезок AB — это прообраз отрезка A_1B_1.

Обратим внимание на то, что в примере 3 фигура F равна своему образу F_1. Преобразования, описанные в примерах 1 и 2, таким свойством не обладают.

Какими же свойствами должно обладать преобразование, чтобы образ и прообраз были равными фигурами? Оказывается, что достаточно лишь одного свойства: преобразование должно сохранять расстояние между точками, то есть если A и B — произвольные точки фигуры F, а A_1 и B_1 — их образы, то должно выполняться равенство $AB = A_1B_1$.

Определение. Преобразование фигуры F, сохраняющее расстояние между точками, называют движением (перемещением) фигуры F.

Если каждой точке X фигуры F поставлена в соответствие эта же точка X, то такое преобразование фигуры F называют **тождественным**. При тождественном преобразовании образом фигуры F является сама фигура F. Очевидно, что тождественное преобразование является движением.

Мы давно используем понятие «равенство фигур», хотя не давали ему строгого определения.

На то, что движение связано с равенством фигур, указывают следующие свойства движения.

Если преобразование является движением, то:

- образом прямой является прямая;
- образом отрезка является отрезок, равный данному;
- образом угла является угол, равный данному;
- образом треугольника является треугольник, равный данному;
- образом многоугольника является многоугольник, равновеликий данному.

Эти свойства вы можете доказать на занятиях математического кружка.

Свойства движения подсказывают договориться о следующем определении.

Определение. Две фигуры называют равными, если существует движение, при котором одна из данных фигур является образом другой.

Запись $F = F_1$ означает, что фигуры F и F_1 равны.

Если существует движение, при котором фигура F_1 является образом фигуры F, то обязательно существует движение, при котором фигура F является образом фигуры F_1. Такие движения называют **взаимно обратными**.

Замечание. С пятого класса мы под равными понимали такие фигуры, которые совпадали при наложении. Термин «наложение» интуитивно понятен, и в нашем представлении он связывается с наложением реальных тел. Но геометрические фигуры нельзя наложить в буквальном смысле этого слова.

Теперь наложение фигуры F на фигуру F_1 можно рассматривать как движение фигуры F, при котором ее образом будет фигура F_1.

Термин «движение» также ассоциируется с определенным физическим действием: изменением положения тела без деформации. Именно с этим связано появление этого термина в математике. Однако в геометрии предметом исследования является не процесс, происходящий во времени, а лишь свойства фигуры и ее образа.

То, что изображенные на рисунке 146 фигуры F и F_1 равны, понятно из наглядных соображений. Строгое обоснование этого факта дает следующая теорема.

Теорема 17.1 (свойство параллельного переноса). ***Параллельный перенос является движением.***

Доказательство. ⊙ Пусть A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ — произвольные точки фигуры F (рис. 147), точки A_1 и B_1 — их соответствующие образы при параллельном переносе на вектор $\vec{a}(m; n)$. Тогда векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ имеют координаты $(m; n)$. Следовательно, координатами точек A_1 и B_1 являются соответственно пары чисел $(x_1 + m; y_1 + n)$ и $(x_2 + m; y_2 + n)$.

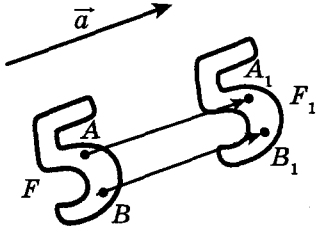


Рис. 147

Имеем:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 + m - x_1 - m)^2 + (y_2 + n - y_1 - n)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Итак, мы показали, что $AB = A_1B_1$, то есть параллельный перенос сохраняет расстояние между точками. ▲

Следствие. ***Если фигура F_1 — образ фигуры F при параллельном переносе, то $F_1 = F$.***

Это свойство используется при создании тканей, обоев, покрытий для пола и т. п. (рис. 148).

Если фигура F_1 является образом фигуры F при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$, то фигура F является образом фигуры F_1 при параллельном переносе на вектор $-\vec{a}$ (рис. 149).

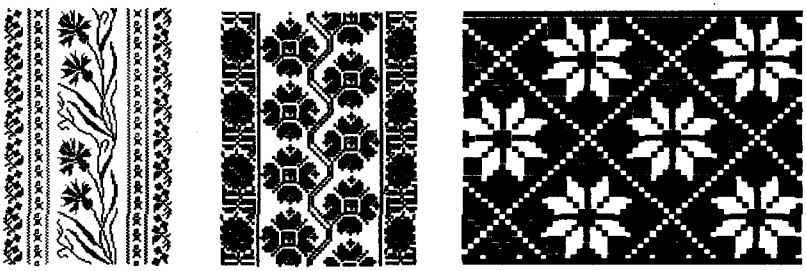


Рис. 148

Параллельные переносы на векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ являются взаимно обратными движениями.

Задача. *Каждой точке X $(x; y)$ фигуры F ставится в соответствие точка X_1 $(x + m; y + n)$, где m и n — заданные числа. Докажите, что такое преобразование фигуры F является параллельным переносом на вектор $\vec{a}(m; n)$.*

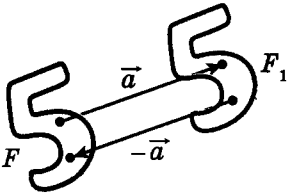


Рис. 149

Решение. Рассмотрим вектор $\vec{a}(m; n)$. Заметим, что координаты вектора $\overrightarrow{XX_1}$ равны $(m; n)$, то есть $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. Следовательно, описанное преобразование фигуры F — параллельный перенос на вектор $\vec{a}$.

Пример 4. Точка A_1 $(-2; 3)$ является образом точки A $(-1; 2)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$ и координаты образа точки B $(-7; -3)$.

Решение. Из условия следует, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$. Отсюда $\vec{a}(-1; 1)$. Пусть B_1 $(x; y)$ — образ точки B $(-7; -3)$. Тогда $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, то есть $x + 7 = -1$ и $y + 3 = 1$. Отсюда $x = -8$, $y = -2$.

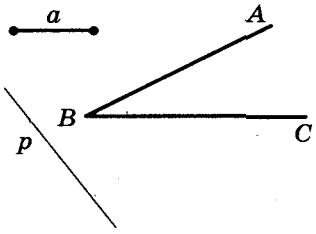


Рис. 150

Пример 5. Даны угол ABC и прямая p, не параллельная ни одной из сторон этого угла (рис. 150). Постройте прямую p_1, параллельную прямой p, так, чтобы стороны угла отсекали на ней отрезок заданной длины a.

Решение. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{MN}$ такой, что $MN \parallel p$ и $|\overrightarrow{MN}| = a$ (рис. 151). Построим луч B_1A_1, являющийся образом луча BA при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$, так, чтобы лучи BC и B_1A_1 пересекались в некоторой точке E. Пусть F — прообраз точки E при рассматриваемом параллельном переносе. Тогда $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{MN}$, то есть $|\overrightarrow{FE}| = a$ и $FE \parallel p$.

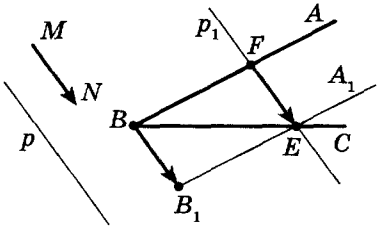


Рис. 151

Приведенные рассуждения подсказывают следующий алгоритм построения:

1) найти образ луча BA при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$;

2) отметить точку пересечения луча BC с построенным образом;

3) через найденную точку провести прямую p_1, параллельную прямой p. Прямая p_1 будет искомой.

1. Приведите примеры преобразований фигур.
2. Опишите, что такое преобразование фигуры.
3. Опишите преобразование фигуры F, которое называют параллельным переносом на вектор $\vec{a}$.
4. В каком случае фигуру F_1 называют образом фигуры F, а фигуру F — прообразом фигуры F_1?
5. Какое преобразование фигуры называют движением?
6. Какое преобразование фигуры называют тождественным?
7. Сформулируйте свойства движения.
8. Какие две фигуры называют равными?
9. Опишите, какие движения называют взаимно обратными.
10. Сформулируйте свойство параллельного переноса.
11. Какими движениями являются параллельные переносы на векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

621.° На рисунке 152 изображены угол AOB и прямая p, не параллельная его сторонам. Каждой точке X стороны OA поставлена в соответствие такая точка X_1 стороны OB, что $XX_1 \parallel p$ (точке O поставлена в соответствие точка O). Постройте образ точки M и прообраз точки K при данном преобразовании. Какая фигура является образом луча OA?

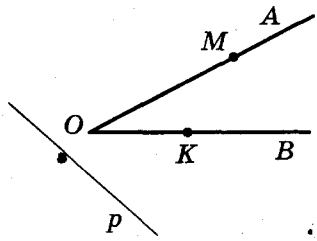


Рис. 152

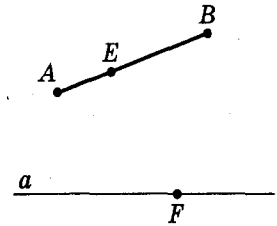


Рис. 153

622.° На рисунке 153 изображены отрезок AB и прямая a. Каждой точке X отрезка AB поставлено в соответствие основание перпендикуляра, опущенного из точки X на прямую a. Постройте образ точки E и прообраз точки F при данном преобразовании. Существуют ли точки прямой a, не имеющие прообраза? Постройте образ отрезка AB.

623.° Постройте образы отрезка AB и луча OM при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 154).

624.° На рисунке 155 прямая a является образом некоторой прямой при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$. Постройте прообраз прямой a.

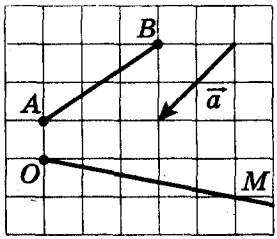


Рис. 154

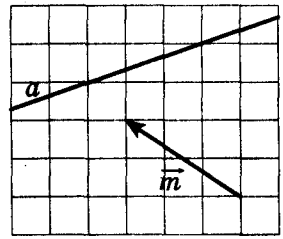


Рис. 155

625.° Окружность с центром O_1 является образом окружности с центром O при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (рис. 156). Отложите вектор $\vec{a}$ от точки M.

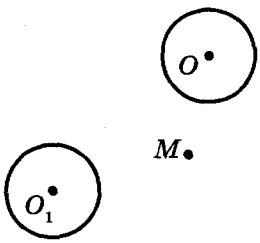


Рис. 156

626.• Постройте образ параболы $y = x^2$ при параллельном переносе на вектор: 1) $\vec{a}(0;2)$; 2) $\vec{b}(-1;0)$; 3) $\vec{c}(-1;2)$. Запишите уравнение образа параболы $y = x^2$.

627.• Постройте образ окружности $x^2 + y^2 = 4$ при параллельном переносе на вектор: 1) $\vec{a}(2;0)$; 2) $\vec{b}(0;-1)$; 3) $\vec{c}(2;-1)$. Запишите уравнение образа окружности $x^2 + y^2 = 4$.

628.• Прямая a касается полуокружности AB с центром в точке O (рис. 157). Придумайте какое-нибудь преобразование, при котором прямая a является образом полуокружности AB с «выколотыми» точками A и B.

629.• Придумайте какое-нибудь преобразование, при котором отрезок CD является образом отрезка AB (рис. 158).

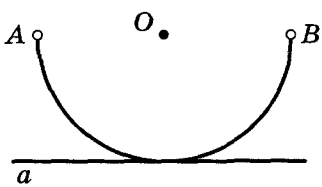


Рис. 157

Рис. 158

УПРАЖНЕНИЯ

630.° Рассмотрим окружность радиуса r с центром в точке O. Каждой точке X окружности поставим в соответствие точку X_1, принадлежащую радиусу OX, такую, что $OX_1 = \frac{1}{2}r$. Какая фигура является образом данной окружности? Является ли движением описанное преобразование?

631.° Дан угол AOB (рис. 159). Каждой точке X стороны OA поставим в соответствие точку X_1, которая принадлежит стороне OB и лежит на окружности с центром O радиуса OX

(точке O поставим в соответствие точку O). Какая фигура является образом стороны OA? Докажите, что описанное преобразование является движением.

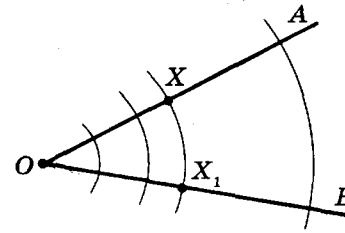


Рис. 159

632.° Дан угол MON. Каждой точке X стороны OM поставлена в соответствие такая точка X_1 стороны ON, что прямая XX_1 перпендикулярна биссектрисе угла MON (точке O соответствует точка O). Докажите, что описанное преобразование является движением.

633.° Даны прямая a и отрезок AB, не имеющий с ней общих точек. Каждой точке X отрезка AB поставлено в соответствие основание перпендикуляра, опущенного из точки X на прямую a. При каком взаимном расположении прямой a и отрезка AB описанное преобразование является движением?

634.° Точки A_1 и B_1 не принадлежат прямой AB и являются образами соответственно точек A и B при параллельном переносе. Докажите, что четырехугольник AA_1B_1B — параллелограмм.

635.° Точки A_1 и B_1 являются образами соответственно точек A и B при параллельном переносе. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $AB = 5$ см.

636.° Вектор $\vec{m}$ параллелен прямой a. Какая фигура является образом прямой a при параллельном переносе на вектор $\vec{m}$?

637.° Дан параллелограмм $ABCD$. Какой вектор задает параллельный перенос, при котором сторона AD является образом стороны BC?

638.° Существует ли параллельный перенос, при котором сторона AB равностороннего треугольника ABC является образом стороны BC?

639.° Найдите точки, являющиеся образами точек A (−2; 3) и B (1; −4) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ (−1; −3).

640.° Существует ли параллельный перенос, при котором образом точки A (1; 3) является точка A_1 (4; 0), а образом точки B (−2; 1) — точка B_1 (1; 4)?

641.° При параллельном переносе на вектор $\vec{a}(2; -1)$ образом точки A является точка A_1 $(-3; 4)$. Найдите координаты точки A.

642.° Точка M_1 $(x; 2)$ является образом точки M $(3; y)$ при параллельном переносе, при котором точка A $(2; 3)$ является образом начала координат. Найдите x и y.

643.• Сколько существует параллельных переносов, при которых образом прямой a является: 1) прямая a; 2) прямая b, параллельная прямой a?

644.• Рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, принадлежащих сторонам прямоугольника. Опишите какое-нибудь преобразование, при котором образом этой фигуры является окружность.

645.• Рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, принадлежащих сторонам прямоугольника. Опишите какое-нибудь преобразование, при котором образом этой фигуры является фигура, состоящая из всех точек сторон ромба.

646.• Известно, что при преобразовании фигуры F ее образом является эта же фигура F. Верно ли, что это преобразование является тождественным?

647.• Даны точки A $(3; -2)$ и B $(5; -4)$. При параллельном переносе образом середины отрезка AB является точка M_1 $(-4; 3)$. Найдите образы точек A и B при таком параллельном переносе.

648.• Точки A $(1; 3)$, B $(2; 6)$, C $(-3; 1)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. При параллельном переносе образом точки пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ является точка O_1 $(-2; -4)$. Найдите образы точек A, B, C и D при таком параллельном переносе.

649.• Найдите уравнение окружности, являющейся образом окружности $x^2 + y^2 = 1$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}(-3; 4)$.

650.• Найдите уравнение параболы, являющейся образом параболы $y = x^2$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}(2; -3)$.

651.•• Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

652.•• Постройте трапецию по четырем сторонам.

653.•• Постройте отрезок, равный и параллельный данному отрезку AB, так, чтобы один его конец принадлежал данной прямой, а другой — данной окружности.

654.•• Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную данному отрезку AB.

655.* Постройте четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно непараллельны, по четырем углам и двум противоположным сторонам.

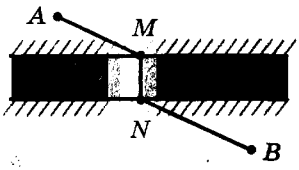


Рис. 160

656.* В каком месте надо построить мост MN через реку, разделяющую два населенных пункта A и B (рис. 160), чтобы путь $AMNB$ был кратчайшим (берега реки считаем параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам реки)?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

657. Через каждую вершину треугольника проведена прямая, параллельная противоположной стороне. Чему равен периметр образовавшегося треугольника, если периметр данного треугольника равен 18 см?

658. Докажите, что четырехугольник с вершинами A (−3; −4), B (0; 3), C (7; 6) и D (4; −1) является ромбом, и найдите его площадь.

659. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит большую из боковых сторон трапеции на отрезки 4 см и 25 см. Найдите площадь трапеции.

18. Осевая и центральная симметрии. Поворот

Определение. Точки A и A_1 называют симметричными относительно прямой l, если прямая l является серединным перпендикуляром отрезка AA_1 (рис. 161).

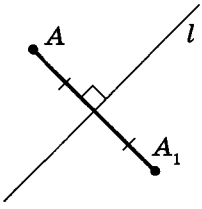


Рис. 161

Если точка A принадлежит прямой l, то ее считают симметричной самой себе относительно прямой l.

Например, точки A и A_1, ординаты которых равны, а абсциссы — противоположные числа, симметричны относительно оси ординат (рис. 162).

Рассмотрим фигуру F и прямую l. Каждой точке X фигуры F поставим в соответ-

ствие симметричную ей относительно прямой l точку X_1. В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 163). Такое преобразование фигуры F называют **осевой симметрией относительно прямой l**. Прямую l называют **осью симметрии**. Также говорят, что фигуры F и F_1 **симметричны относительно прямой l**.

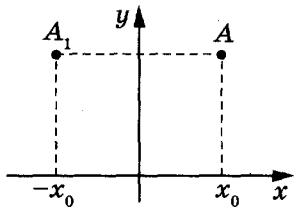


Рис. 162

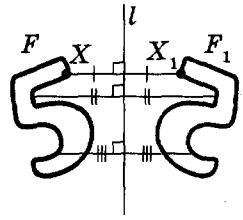


Рис. 163

Теорема 18.1 (свойство осевой симметрии). ***Осевая симметрия является движением.***

Доказательство. ⊙ Выберем систему координат так, чтобы ось симметрии совпала с осью ординат.

Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — произвольные точки фигуры F. Очевидно, что точки $A_1(-x_1; y_1)$ и $B_1(-x_2; y_2)$ — их соответствующие образы при осевой симметрии относительно оси ординат.

Имеем:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Итак, мы получили, что $AB = A_1B_1$, то есть осевая симметрия сохраняет расстояние между точками. ▲

Следствие. ***Если фигуры F и F_1 симметричны относительно прямой, то $F = F_1$.***

Определение. Фигуру называют симметричной относительно прямой l, если для каждой точки данной фигуры точка, симметричная ей относительно прямой l, также принадлежит этой фигуре.

Прямую l называют **осью симметрии фигуры**. Также говорят, что **фигура имеет ось симметрии**.

Приведем примеры фигур, имеющих ось симметрии.

На рисунке 164 изображен равнобедренный треугольник. Прямая, содержащая его высоту, проведенную к основанию, является осью симметрии треугольника.

Любой угол имеет ось симметрии — это прямая, содержащая его биссектрису (рис. 165).

Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии (рис. 166).

Рис. 164

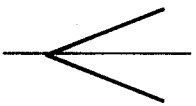


Рис. 165

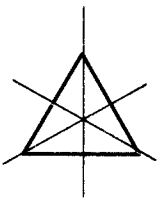


Рис. 166

Две оси симметрии имеет отрезок: это его серединный перпендикуляр и прямая, содержащая этот отрезок (рис. 167).

Квадрат имеет четыре оси симметрии (рис. 168).

Есть фигуры, имеющие бесконечно много осей симметрии, например, окружность. Любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии (рис. 169).

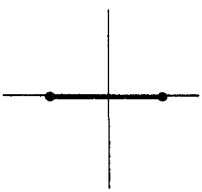


Рис. 167

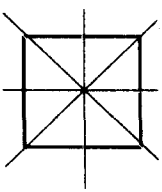


Рис. 168

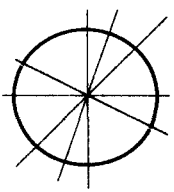


Рис. 169

Бесконечно много осей симметрии имеет и прямая: сама прямая и любая прямая, ей перпендикулярная, являются осями симметрии.

Пример 1. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Провели прямую l, содержащую биссектрису угла C. Потом весь рисунок вытерли, оставив только точки A и B и прямую l. Восстановите треугольник ABC.

Решение. Так как прямая l является осью симметрии угла ACB, то точка A_1 — образ точки A при симметрии относительно прямой l — принадлежит лучу CB. Тогда пересечением

прямых l и BA_1 является вершина C искомого треугольника ABC (рис. 170).

Пример 2. Точка O принадлежит острому углу ABC (рис. 171). На сторонах BA и BC угла найдите такие точки E и F, чтобы периметр треугольника OEF был наименьшим.

Решение. Пусть точки O_1 и O_2 — образы точки O при симметриях относительно прямых BA и BC соответственно (рис. 172) и прямая O_1O_2 пересекает стороны BA и BC в точках E и F соответственно. Докажем, что точки E и F — искомые.

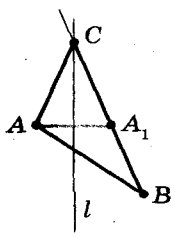


Рис. 170

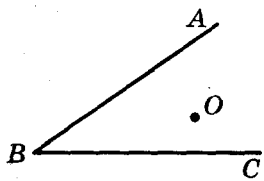


Рис. 171

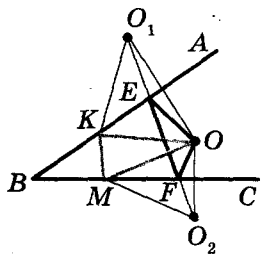


Рис. 172

Заметим, что отрезки EO_1 и EO симметричны относительно прямой BA. Следовательно, $EO_1 = EO$. Аналогично $FO = FO_2$. Тогда периметр треугольника OEF равен длине отрезка O_1O_2.

Пусть K и M — произвольные точки лучей BA и BC соответственно. Понятно, что $KO = KO_1$ и $MO = MO_2$. Тогда периметр треугольника KOM равен сумме $O_1K + KM + MO_2$. Однако $O_1K + KM + MO_2 \geqslant O_1O_2$.

Определение. Точки A и A_1 называют симметричными относительно точки O, если точка O является серединой отрезка AA_1 (рис. 173).

Точку O считают симметричной самой себе.

Например, точки A и A_1, у которых абсциссы и ординаты — противоположные числа, симметричны относительно начала координат (рис. 174).

Рассмотрим фигуру F и точку O. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие симметричную ей относительно точки O точку X_1.

В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 175). Такое преобразование фигуры F называют **центральной симметрией относительно точки O**. Точку O

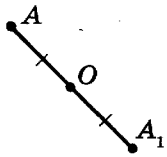


Рис. 173

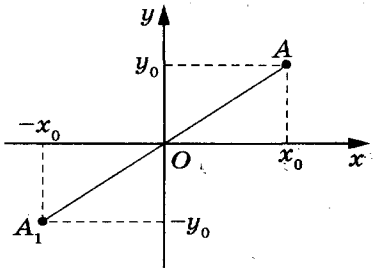


Рис. 174

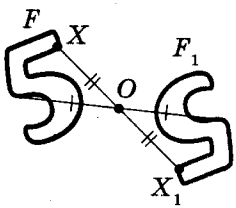


Рис. 175

называют **центром симметрии**. Также говорят, что фигуры F и F_1 **симметричны относительно точки** O.

Теорема 18.2 (свойство центральной симметрии). ***Центральная симметрия является движением.***

Доказательство. ⊙ Выберем систему координат так, чтобы центр симметрии совпал с началом координат. Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — произвольные точки фигуры F. Точки $A_1(-x_1; -y_1)$ и $B_1(-x_2; -y_2)$ — соответственно их образы при центральной симметрии относительно начала координат.

Имеем:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (-y_2 - (-y_1))^2} =$$

$$= \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = AB.$$

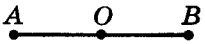


Рис. 176

Следовательно, $AB = A_1B_1$, то есть центральная симметрия сохраняет расстояние между точками. ▲

Следствие. ***Если фигуры F и F_1 симметричны относительно точки, то $F = F_1$.***

Определение. Фигуру называют симметричной относительно точки O, если для каждой точки данной фигуры точка, симметричная ей относительно точки O, также принадлежит этой фигуре.

Точку O называют **центром симметрии фигуры**. Также говорят, что **фигура имеет центр симметрии**.

Приведем примеры фигур, имеющих центр симметрии.

Центром симметрии отрезка является его середина (рис. 176).

Точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии (рис. 177).

Существуют фигуры, имеющие бесконечно много центров симметрии. Например, каждая точка прямой является ее центром симметрии.

Также бесконечно много центров симметрии имеет фигура, состоящая из двух параллельных прямых. Любая точка прямой, равноудаленной от двух данных, является центром симметрии рассматриваемой фигуры (рис. 178).

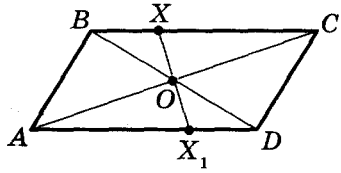


Рис. 177

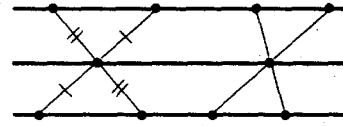


Рис. 178

Задача. *Докажите, что образом данной прямой l при симметрии относительно точки O, не принадлежащей прямой l, является прямая, параллельная данной.*

Решение. Так как центральная симметрия — это движение, то образом прямой l будет прямая. Для построения прямой достаточно знать две любые ее точки.

Выберем на прямой l произвольные точки A и B (рис. 179). Пусть точки A_1 и B_1 — их образы при центральной симметрии относительно точки O. Тогда прямая A_1B_1 — образ прямой l.

Так как $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, $\angle AOB$ и $\angle A_1OB_1$ равны как вертикальные, то треугольники AOB и A_1OB_1 равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 179). Следовательно, $l \parallel A_1B_1$.

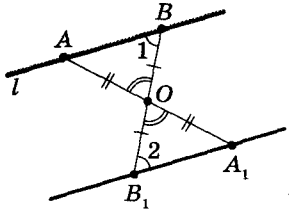


Рис. 179

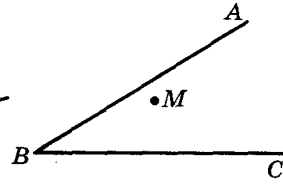


Рис. 180

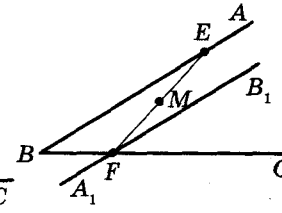


Рис. 181

Пример 3. Точка M принадлежит углу ABC (рис. 180). На сторонах BA и BC угла найдите такие точки E и F, чтобы точка M была серединой отрезка EF.

Решение. Пусть прямая A_1B_1 — образ прямой AB при центральной симметрии относительно точки M (рис. 181). Обозначим F — точку пересечения прямых A_1B_1 и BC.

Найдем прообраз точки F. Очевидно, что он лежит на прямой AB. Поэтому достаточно найти точку пересечения прямых FM и AB. Обозначим эту точку E. Тогда ясно, что E и F — искомые точки.

Рис. 182

Изучая окружающий мир, мы часто встречаемся с симметрией. Примеры проявления симметрии в природе показаны на рисунке 182. Объекты, имеющие ось или центр симметрии, легко воспринимаются и радуют взгляд. Недаром в Древней Греции слово «симметрия» служило синонимом слов «гармония», «красота».

Идея симметрии широко используется в изобразительном искусстве, архитектуре и технике (рис. 183). Химики и физики говорят о симметрии явлений. Можно найти проявления симметрии в музыке и поэзии.

На рисунке 184 изображены точки O, X, X_1 и X_2 такие, что $OX_1 = OX_2 = OX$, $\angle X_1OX = \angle X_2OX = \alpha$. Говорят, что точка X_1 является образом точки X при **повороте вокруг центра O против часовой стрелки на угол α**. Также

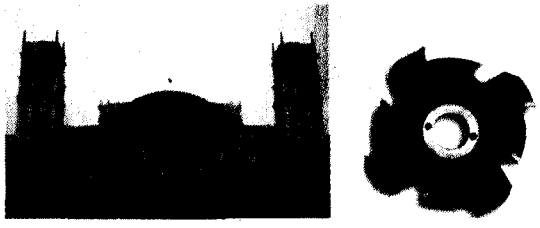


Рис. 183

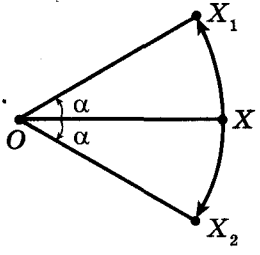


Рис. 184

говорят, что точка X_2 — это образ точки X при **повороте вокруг центра O по часовой стрелке на угол α.**

Точку O называют **центром поворота**, угол α — **углом поворота.**

Рассмотрим фигуру F, точку O и угол α. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1, являющуюся образом точки X при повороте вокруг центра O против часовой стрелки на угол α (если точка O принадлежит фигуре F, то ей сопоставляется она сама). В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 185). Такое преобразование фигуры F называют **поворотом вокруг центра O против часовой стрелки на угол α.** Точку O называют **центром поворота.**

Аналогично определяют преобразование поворота фигуры F по часовой стрелке на угол α (рис. 186).

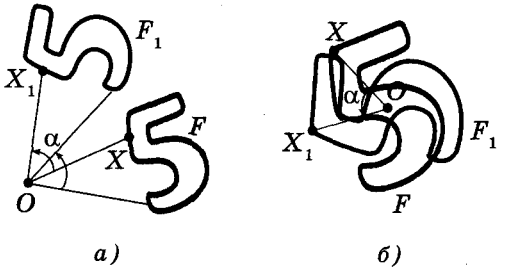


Рис. 185

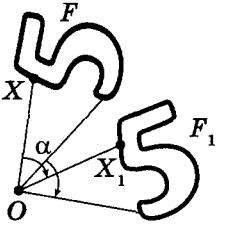


Рис. 186

Заметим, что центральная симметрия является поворотом вокруг центра симметрии на угол 180°.

Теорема 18.3 (свойство поворота). ***Поворот является движением.***

Доказать эту теорему вы можете на занятиях математического кружка.

Следствие. ***Если фигура F_1 — образ фигуры F при повороте, то $F = F_1$.***

Пример 4. На рисунке 187 изображены прямая a и точка O. Постройте образ прямой a при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 45°.

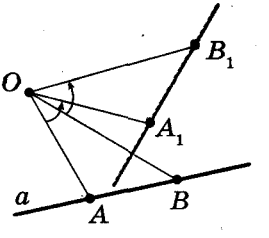


Рис. 187

Решение. Так как поворот — это движение, то образом прямой a будет прямая. Для построения прямой достаточно знать две любые ее точки. Выберем на прямой a произвольные точки A и B (рис. 187). Пусть точки A_1 и B_1 — их образы при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 45°. Тогда прямая A_1B_1 — образ прямой a.

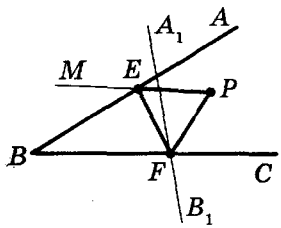


Рис. 188

Пример 5. Точка P принадлежит углу ABC (рис. 188). Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого является точкой P, а две другие принадлежат сторонам BA и BC.

Решение. Пусть прямая A_1B_1 — образ прямой AB при повороте вокруг центра P против часовой стрелки на угол 60°. Обозначим F — точку пересечения прямых A_1B_1 и BC.

Найдем прообраз точки F при выполненном повороте. Очевидно, что он лежит на прямой AB. Поэтому достаточно построить угол MPF, равный 60°. Пусть прямые MP и AB пересекаются в точке E. Эта точка и является прообразом точки F.

Имеем: $PF = PE$ и $\angle FPE = 60°$. Следовательно, ΔEPF — равносторонний, а точки F и E — искомые.

1. Какие точки называют симметричными относительно прямой l? Как называют прямую l?
2. Какие фигуры называют симметричными относительно прямой l?
3. Сформулируйте свойство осевой симметрии.
4. Каким свойством обладают фигуры, симметричные относительно прямой?
5. О какой фигуре говорят, что она имеет ось симметрии?
6. Приведите примеры фигур, имеющих ось симметрии.
7. Какие точки называют симметричными относительно точки O? Как называют точку O?
8. Какие фигуры называют симметричными относительно точки O?
9. Сформулируйте свойство центральной симметрии.
10. Каким свойством обладают фигуры, симметричные относительно точки?

11. О какой фигуре говорят, что она имеет центр симметрии?

12. Приведите примеры фигур, имеющих центр симметрии.

13. Опишите преобразование поворот вокруг точки.

14. Сформулируйте свойство поворота.

15. Каким свойством обладают фигуры, если одна из них является образом другой при повороте?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

660.° Постройте образы фигур, изображенных на рисунке 189, при симметрии относительно прямой l.

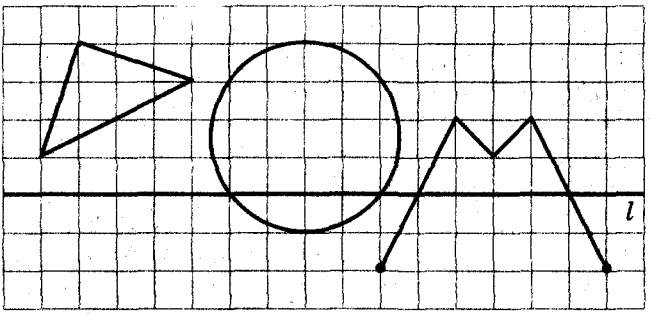


Рис. 189

661.° Начертите треугольник. Постройте треугольник, симметричный ему относительно прямой, содержащей одну из его средних линий.

662.° Точки A и B симметричны относительно прямой l (рис. 190). Постройте прямую l.

Рис. 190

663.° Начертите треугольник ABC и отметьте точку O, не принадлежащую ему. Постройте треугольник, симметричный данному относительно точки O.

664.° Начертите треугольник ABC. Постройте треугольник, симметричный данному относительно середины стороны AB.

665.° Начертите окружность и отметьте на ней точку. Постройте окружность, симметричную данной относительно отмеченной точки.

666.° Постройте образ отрезка AB при повороте вокруг центра O против часовой стрелки на угол 45° (рис. 191).

667.° Постройте образ треугольника ABC при повороте вокруг центра O по часовой стрелке на угол 90° (рис. 192).

668.• Проведите пересекающиеся прямые a и a_1. Постройте прямую, относительно которой прямая a_1 будет симметрична прямой a. Сколько решений имеет задача?

669.• Проведите параллельные прямые a и a_1. Постройте прямую, относительно которой прямая a_1 будет симметрична прямой a.

670.• Восстановите ромб $ABCD$ по его вершинам B и C и прямой l, содержащей его диагональ BD (рис. 193).

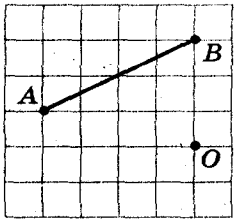


Рис. 191

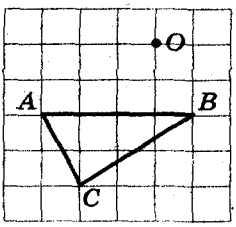


Рис. 192

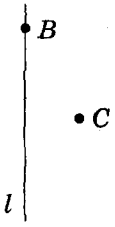


Рис. 193

671.• Восстановите равнобедренный треугольник ABC по вершине A, точке K, принадлежащей боковой стороне BC, и прямой, содержащей высоту, проведенную к основанию AB (рис. 194).

672.• Восстановите параллелограмм $ABCD$ по его вершинам A и B и точке O пересечения его диагоналей (рис. 195).

673.• Даны две параллельные прямые a и b (рис. 196). Найдите точку, относительно которой прямая a будет симметрична прямой b.

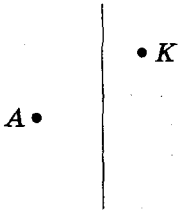


Рис. 194

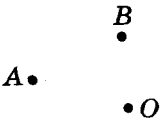


Рис. 195

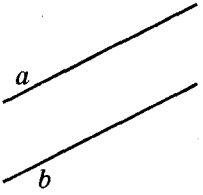


Рис. 196

674.• На рисунке 197 изображены два равных отрезка AB и BC такие, что $\angle ABC = 60°$. Найдите точку O такую, чтобы отрезок AB был образом отрезка BC при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 120°.

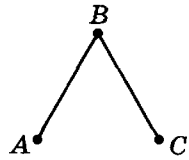


Рис. 197

675.• На рисунке 198 изображены два равных отрезка MN и NK такие, что $\angle MNK = 90°$. Найдите точку O такую, чтобы отрезок NK был образом отрезка MN при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол 90°.

676.• Посмотрите на рисунок 199 через стеклянную пробирку, заполненную водой. Почему некоторые буквы во втором слове оказались перевернутыми, а в первом — нет?

677.•• Окружности с центрами O_1 и O_2 имеют две общие точки (рис. 200). С помощью только циркуля постройте окружности, симметричные данным относительно прямой AB.

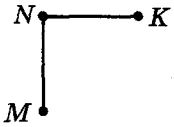


Рис. 198

Рис. 199

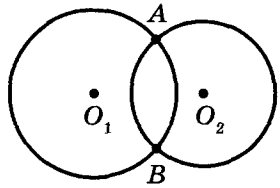


Рис. 200

678.* Постройте фигуру, не имеющую осей симметрии, образом которой является сама эта фигура при повороте вокруг некоторой точки: 1) на угол 90°; 2) на угол 120°.

УПРАЖНЕНИЯ

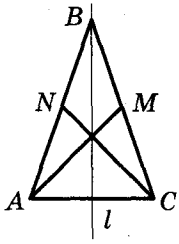


Рис. 201

679.• Прямая l проходит через середину отрезка AB. Обязательно ли точки A и B являются симметричными относительно прямой l?

680.• На рисунке 201 изображены равнобедренный треугольник ABC и прямая l, содержащая его высоту, проведенную к основанию AC. Отрезки AM и CN — его медианы. Укажите образы точек A и B, медианы CN и стороны AC при симметрии относительно прямой l.

681.° Докажите, что прямая, проходящая через середины оснований равнобокой трапеции, является ее осью симметрии.

682.° Докажите, что прямая, содержащая медиану равнобедренного треугольника, проведенную к основанию, является его осью симметрии.

683.° На рисунке 202 изображены равнобокая трапеция $ABCD$ и прямая l, проходящая через середины ее оснований. Укажите образы точек B и D, диагонали AC и основания BC при симметрии относительно прямой l.

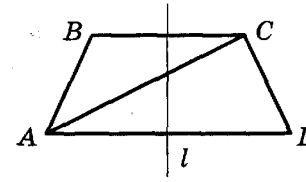


Рис. 202

684.° Докажите, что прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии.

685.° Докажите, что прямые, проходящие через середины противоположных сторон прямоугольника, являются его осями симметрии.

686.° Точки A_1 и B_1 являются соответственно образами точек A и B при осевой симметрии. Известно, что $AB = 5$ см. Найдите A_1B_1.

687.° Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла, является его осью симметрии.

688.° Найдите координаты точек, симметричных точкам A (−2; 1) и B (0; −4) относительно осей координат.

689.° Точки A (x; 3) и B (−2; y) симметричны относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат. Найдите x и y.

690.° Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 203). Точка M — середина стороны BC. Укажите образы точек A, D и M, стороны CD, диагонали BD при симметрии относительно точки O.

691.° Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

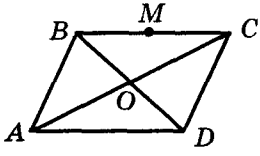


Рис. 203

692.° Докажите, что окружность имеет центр симметрии.

693.° Точки A_1 и B_1 являются образами соответственно точек A и B при симметрии относительно точки, не принадлежащей прямой AB. Докажите, что четырехугольник ABA_1B_1 — параллелограмм.

694.° Найдите координаты точек, симметричных точкам A (3; −1) и B (0; −2) относительно: 1) начала координат; 2) точки M (2; −3).

695.° Докажите, что образом прямой, проходящей через центр симметрии, является сама эта прямая.

696.• Точки A (x; −2) и B (1; y) симметричны относительно: 1) начала координат; 2) точки M (−1; 3). Найдите x и y.

697.° На рисунке 204 изображены фигуры, составленные из равных полукругов. Какие из этих фигур при некотором повороте вокруг точки O совпадают со своими образами?

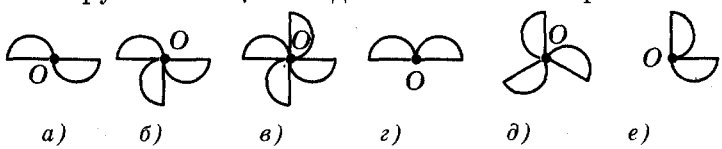


Рис. 204

698.° Медианы равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 205). Укажите образы точек C, C_1 и O, стороны BC, медианы BB_1, отрезка OC_1, треугольника $A_1B_1C_1$ при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 120°.

699.° Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 206). Укажите образы стороны AF, диагонали BF, диагонали AD, шестиугольника $ABCDEF$ при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол: 1) 60°; 2) 120°.

700.• Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 207). Укажите образы точек A, O и C, стороны AD, диагонали BD при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол 90°.

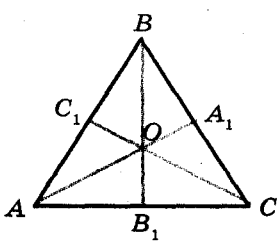


Рис. 205

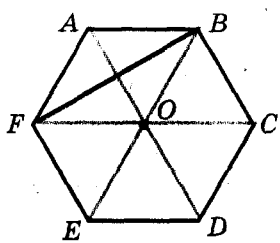


Рис. 206

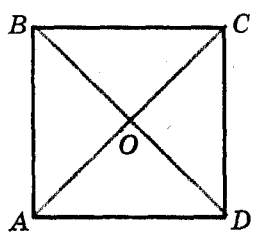


Рис. 207

701.• Образом прямой a при симметрии относительно прямой l является сама прямая a. Каково взаимное расположение прямых a и l?

702.• Докажите, что треугольник, имеющий ось симметрии, является равнобедренным.

703.• Докажите, что треугольник, имеющий две оси симметрии, является равносторонним. Может ли треугольник иметь ровно две оси симметрии?

704.• Докажите, что если параллелограмм имеет ровно две оси симметрии, то он является или прямоугольником, или ромбом.

705.• Докажите, что если четырехугольник имеет четыре оси симметрии, то он является квадратом.

706.• Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что точки A и B симметричны относительно прямой O_1O_2.

707.• Точка M принадлежит прямому углу ABC (рис. 208). Точки M_1 и M_2 — образы точки M при симметрии относительно прямых BA и BC соответственно. Докажите, что точки M_1, B, M_2 лежат на одной прямой.

708.• Найдите координаты точек, симметричных точкам A (−2; 0) и B (3; −1) относительно прямой, содержащей биссектрисы: 1) первого и третьего координатных углов; 2) второго и четвертого координатных углов.

709.• Точки A (x; −1) и B (y; 2) симметричны относительно прямой, содержащей биссектрисы первого и третьего координатных углов. Найдите x и y.

710.• Докажите, что треугольник не имеет центра симметрии.

711.• Докажите, что луч не имеет центра симметрии.

712.• Докажите, что если четырехугольник имеет центр симметрии, то он является параллелограммом.

713.• Окружности с центрами O_1 и O_2 симметричны относительно точки O (рис. 209). Прямая, проходящая через центр

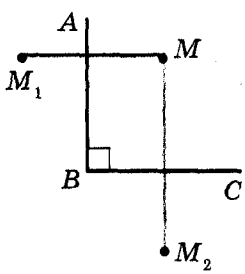


Рис. 208

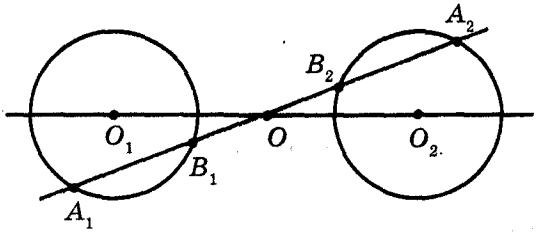


Рис. 209

симметрии, пересекает первую окружность в точках A_1 и B_1, а вторую — в точках A_2 и B_2. Докажите, что $A_1B_1 = A_2B_2$.

714.• Пусть вершина A равностороннего треугольника ABC является центром поворота на угол 120°. Найдите длину отрезка BC_1, где точка C_1 — образ точки C при данном повороте, если $AB = 1$ см. Сколько решений имеет задача?

715.• Пусть вершина A квадрата $ABCD$ является центром поворота против часовой стрелки на угол 90°. Найдите длину отрезка CC_1, где точка C_1 — образ точки C при данном повороте, если $AB = 1$ см.

716.•• Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a. На прямой a найдите такую точку X, чтобы прямая a содержала биссектрису угла AXB.

717.•• Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a. Найдите на прямой a такую точку X, чтобы лучи XA и XB образовывали с этой прямой равные углы.

718.•• Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a. Найдите на прямой a такую точку X, чтобы сумма $AX + XB$ была наименьшей.

719.•• Вершины одного параллелограмма лежат на сторонах другого: по одной вершине на каждой стороне. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих параллелограммов совпадают.

720.•• Точки A и C принадлежат острому углу, но не лежат на его сторонах. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы точки B и D лежали на сторонах угла.

721.•• Постройте отрезок, серединой которого является данная точка, а концы принадлежат данным непараллельным прямым.

722.•• Точка M принадлежит углу ABC и не принадлежит его сторонам. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, вершиной прямого угла которого является точка M, а две другие принадлежат сторонам BA и BC соответственно.

723.* На стороне BC равностороннего треугольника ABC отметили точку D. Вне треугольника ABC выбрали точку E такую, что треугольник DEC — равносторонний (рис. 210). Докажите, что точка C и середины отрезков BE и AD являются вершинами равностороннего треугольника.

724.* Постройте равносторонний треугольник так, чтобы его вершины принадлежали трем данным параллельным прямым.

725.* Постройте треугольник ABC по двум сторонам AB и AC ($AB < AC$) и разности углов B и C.

726.* Точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB (рис. 211). На прямой AB найдите такую точку X, чтобы $\angle AXC = \frac{1}{2}\angle DXB$.

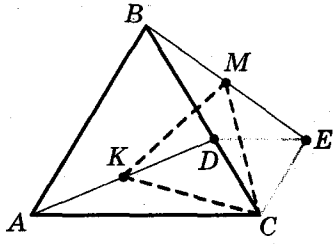


Рис. 210

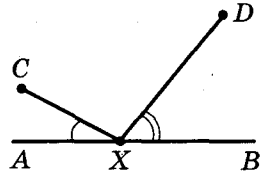


Рис. 211

727.* Постройте ромб, точкой пересечения диагоналей которого является данная точка, а три вершины принадлежат трем данным попарно непараллельным прямым.

728.* На стороне CD квадрата $ABCD$ отметили точку E. Биссектриса угла BAE пересекает сторону BC в точке F. Докажите, что $AE = BF + ED$.

729.* В равностороннем треугольнике ABC выбрали точку P так, что $\angle APB = 150°$. Докажите, что существует прямоугольный треугольник, стороны которого равны отрезкам PA, PB и PC.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

730. Найдите стороны треугольника ABC, если $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$, а высота, проведенная из вершины C, равна 4 см.

731. На оси абсцисс найдите точку, равноудаленную от точек A (−2; 4) и B (6; 8).

732. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону треугольника в отношении 25 : 12, считая от вершины равнобедренного треугольника. Найдите радиус вписанной окружности, если площадь треугольника равна 1680 см^2.

19. Гомотетия. Подобие фигур

На рисунке 212 изображены точки O, X и X_1 такие, что $\overrightarrow{OX_1} = 2\overrightarrow{OX}$. Говорят, что точка X_1 — это образ точки X при **гомотетии с центром O и коэффициентом 2.**

На рисунке 213 изображены точки O, X и X_1 такие, что $\overrightarrow{OX_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OX}$. Говорят, что точка X_1 — это образ точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом $-\frac{1}{2}$.

Рис. 212

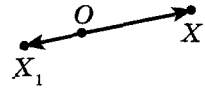
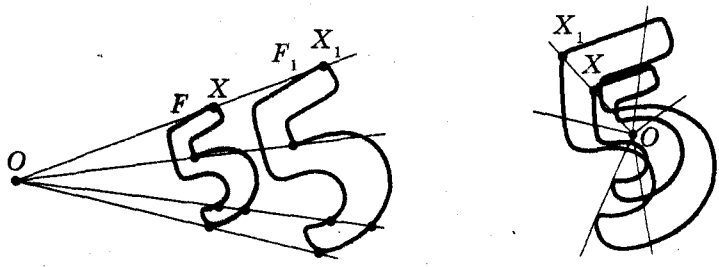


Рис. 213

Вообще, если точки O, X и X_1 таковы, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, где $k \neq 0$, то говорят, что точка X_1 — это образ точки X при **гомотетии с центром O и коэффициентом k.**

Точку O называют **центром гомотетии**, число k — **коэффициентом гомотетии**, $k \neq 0$.

Рассмотрим фигуру F и точку O. Каждой точке X фигуры F поставим в соответствие точку X_1, являющуюся образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k (если точка O принадлежит фигуре F, то ей сопоставляется она сама). В результате такого преобразования фигуры F получим фигуру F_1 (рис. 214). Такое преобразование фигуры F называют **гомотетией с центром O и коэффициентом k.** Также говорят, что фигура F_1 **гомотетична** фигуре F с центром O и коэффициентом k.



а) *б)*

Рис. 214

Например, на рисунке 215 треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC с центром O и коэффициентом, равным -3. Также можно сказать, что треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с тем же центром, но коэффициентом, равным $-\frac{1}{3}$.

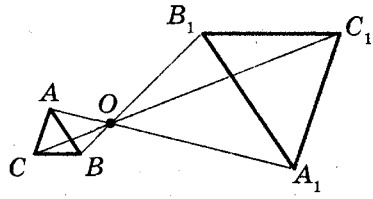


Рис. 215

Отметим, что при $k = -1$ гомотетия является центральной симметрией относительно центра O (рис. 216). Если $k = 1$, то гомотетия является тождественным преобразованием.

Очевидно, что при $k \neq 1$ и $k \neq -1$ гомотетия не является движением.

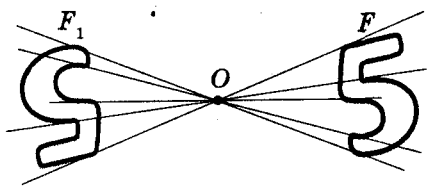


Рис. 216

Теорема 19.1. ***При гомотетии фигуры F с коэффициентом k все расстояния между ее точками изменяются в | k | раз, то есть если A и B — произвольные точки фигуры F, а A_1 и B_1 — их соответствующие образы при гомотетии с коэффициентом k, то $A_1B_1 = |k|AB$.***

Доказательство. ⊙ Пусть точка O — центр гомотетии. Тогда $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$. Имеем:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k\overrightarrow{AB},$$

то есть, $A_1B_1 = |k|AB$. ▲

Следствие. ***Если треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику ABC с коэффициентом гомотетии k, то $\Delta A_1B_1C_1 \overset{k}{\sim} \Delta ABC$.***

Для доказательства этой теоремы достаточно воспользоваться теоремой 19.1 и третьим признаком подобия треугольников.

Гомотетия обладает целым рядом других свойств.

При гомотетии:

- образом прямой является прямая;
- образом отрезка является отрезок;
- образом угла является угол, равный данному;
- образом треугольника является треугольник, подобный данному;
- образом окружности является окружность;
- площадь многоугольника изменяется в k^2 раз, где k — коэффициент гомотетии.

Эти свойства вы можете доказать на занятиях математического кружка.

Перечисленные свойства гомотетии указывают на то, что это преобразование может изменить размеры фигуры, но не меняет ее форму, то есть при гомотетии образ и прообраз являются подобными фигурами. Заметим, что в 8 классе, говоря о подобии фигур, мы давали определение только подобных треугольников. Сейчас определим понятие «подобие фигур», не ограничиваясь треугольниками.

На рисунке 217 фигура F_1 гомотетична фигуре F, а фигура F_2 симметрична фигуре F_1 относительно прямой l.

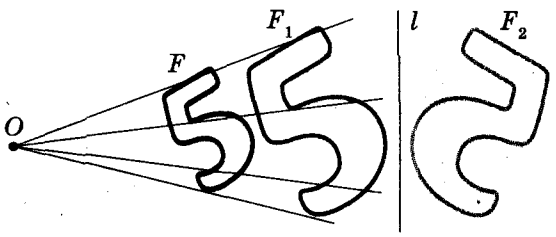


Рис. 217

Говорят, что фигура F_2 получена из фигуры F в результате **композиции** двух преобразований: гомотетии и осевой симметрии.

Поскольку $F_1 = F_2$, то у фигур F и F_2 одинаковые формы, но разные размеры, то есть они подобны. Говорят, что фигура F_2 получена из фигуры F в результате **преобразования подобия**.

На рисунке 218 фигура F_1 гомотетична фигуре F, а фигура F_2 — образ фигуры F_1 при некотором движении. Рассуждая аналогично, можно утверждать, что фигуры F и F_2 подобны.

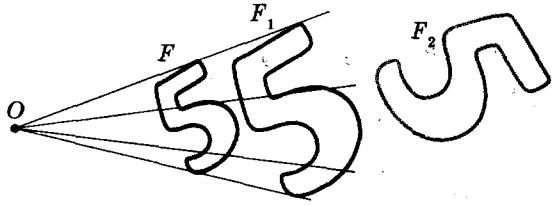


Рис. 218

Из сказанного следует, что целесообразно принять такое определение.

Определение. Две фигуры называют подобными, если одну из них можно получить из другой в результате композиции двух преобразований: гомотетии и движения.

Это определение иллюстрирует схема, изображенная на рисунке 219.

Подобие	=	гомотетия	+	движение

Рис. 219

Запись $F \sim F_1$ означает, что фигуры F и F_1 подобны. Также говорят, что фигура F_1 — образ фигуры F при **преобразовании подобия**.

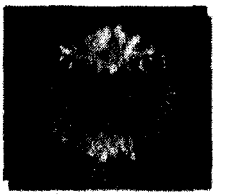
Из приведенного определения следует, что *при преобразовании подобия фигуры F расстояния между ее точками изменяются в одно и то же количество раз.*

Так как тождественное преобразование является движением, то из схемы, изображенной на рисунке 219, следует, что гомотетия — частный случай преобразования подобия.

Пусть A и B — произвольные точки фигуры F, а точки A_1 и B_1 — их образы при преобразовании подобия. Точки A_1 и B_1 принадлежат фигуре F_1, которая подобна фигуре F. Число $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ называют **коэффициентом подобия**. Говорят, что фигура F_1 подобна фигуре F с коэффициентом подобия k, а фигура F подобна фигуре F_1 с коэффициентом подобия $\frac{1}{k}$.

Заметим, что преобразование подобия с коэффициентом $k = 1$ является движением. Отсюда следует, что движение — частный случай преобразования подобия.

С преобразованием подобия мы часто встречаемся в повседневной жизни. Например, в результате изменения масштаба карты получается карта, подобная данной. Фотография — это преобразование негатива в подобное изображение на фотобумаге. Перенося в свою тетрадь рисунок, сделанный учителем на доске, вы также выполняете преобразование подобия.



Теорема 19.2. ***Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.***

Эту теорему вы можете доказать на занятиях математического кружка. Мы же докажем эту теорему для частного случая, рассмотрев подобные треугольники.

Доказательство. ⊙ Пусть $\Delta A_1B_1C_1$ — образ ΔABC при преобразовании подобия с коэффициентом k (рис. 220). Сторона A_1C_1 — образ стороны AC. Тогда $A_1C_1 = k \cdot AC$. Проведем высоты BD и B_1D_1. Ясно, что высота B_1D_1 — это образ высоты BD. Отсюда $B_1D_1 = k \cdot BD$. Имеем:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1}{\frac{1}{2}AC \cdot BD} = \frac{kAC \cdot kBD}{AC \cdot BD} = k^2. \ ▲$$

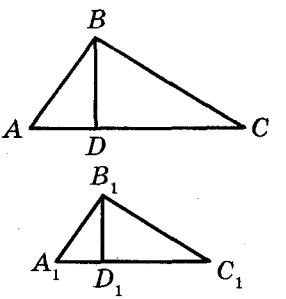


Рис. 220

Задача. *Докажите, что образом прямой l при гомотетии с центром O, не принадлежащим прямой l, является прямая, параллельная данной.*

Решение. Из свойств гомотетии следует, что образом прямой l будет прямая. Для построения прямой достаточно знать две любые ее точки. Выберем на прямой l произвольные точки A и B (рис. 221). Пусть точки A_1 и B_1) — их образы при гомотетии с центром O и коэффициентом k (рисунок 221 соответствует случаю, когда $k > 1$). Тогда прямая A_1B_1 — образ прямой AB.

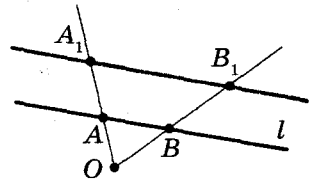


Рис. 221

При доказательстве теоремы 19.1 мы показали, что $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$. Следовательно, $AB \parallel A_1B_1$.

Пример 1. В остроугольный треугольник ABC впишите квадрат так, чтобы две его вершины лежали соответственно на сторонах AB и BC, а две другие — на стороне AC.

Решение. Из произвольной точки M стороны AB опустим перпендикуляр MQ на сторону AC (рис. 222). Построим квадрат $MQPN$ так, чтобы точка P лежала на луче AC. Пусть луч AN пересекает сторону BC в точке N_1. Рассмотрим гомотетию с центром A и коэффициентом $k = \frac{AN_1}{AN}$. Тогда точка N_1 — образ точки N при этой гомотетии. Образом отрезка MN будет отрезок M_1N_1, где точка M_1 принадлежит лучу AB, причем $M_1N_1 \parallel MN$. Аналогично отрезок N_1P_1 такой, что точка P_1 принадлежит лучу AC и $N_1P_1 \parallel NP$, будет образом отрезка NP. Следовательно, отрезки M_1N_1 и N_1P_1 — соседние стороны искомого квадрата. Для завершения построения осталось опустить перпендикуляр M_1Q_1 на сторону AC.

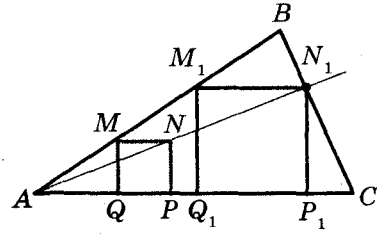


Рис. 222

Пример 2. Пусть CD — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Найдите радиус r вписанной

окружности треугольника ABC, если радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, соответственно равны r_1 и r_2.

Решение. Так как угол A — общий для прямоугольных треугольников ACD и ABC, то эти треугольники подобны (рис. 223). Пусть коэффициент подобия равен k_1. Очевидно, что $k_1 = \frac{r_1}{r}$. Аналогично $\Delta\, BCD \sim \Delta\, ABC$ с коэффициентом $k_2 = \frac{r_2}{r}$.

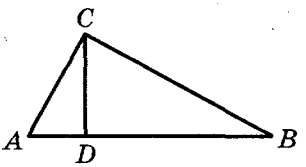


Рис. 223

Обозначим площади треугольников ACD, BCD и ABC соответственно S_1, S_2 и S. Имеем:

$$\frac{S_1}{S} = k_1^2 = \frac{r_1^2}{r^2}; \quad \frac{S_2}{S} = k_2^2 = \frac{r_2^2}{r^2}.$$

Отсюда $\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{S_1 + S_2}{S} = 1.$

Получаем, что $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, то есть $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

1. В каком случае говорят, что точка X_1 является образом точки X при гомотетии с центром O и коэффициентом k?
2. Опишите преобразование фигуры F, которое называют гомотетией с центром O и коэффициентом k.
3. Как изменяется расстояние между точками при гомотетии с коэффициентом k?
4. Сформулируйте свойства гомотетии.
5. Какие фигуры называют подобными?
6. Чему равно отношение площадей подобных многоугольников?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

733.° Постройте образ отрезка AB (рис. 224) при гомотетии с центром O и коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

734.° Начертите отрезок AB. Постройте образ этого отрезка при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в точке A, $k = 3$;
2) в точке B, $k = -2$;
3) в середине отрезка AB, $k = 2$.

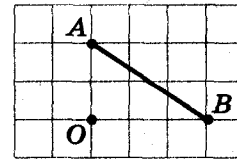


Рис. 224

735.° Начертите окружность, радиус которой равен 2 см, и отметьте на ней точку A. Постройте образ этой окружности при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в центре окружности, $k = -\frac{1}{2}$, $k = 2$;

2) в точке A, $k = 2$, $k = -\frac{1}{2}$.

736.° Начертите треугольник ABC. Постройте образ этого треугольника при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в точке B, $k = 3$;

2) в точке C, $k = -\frac{1}{2}$;

3) в точке A, $k = \frac{1}{2}$;

4) в середине стороны AB, $k = \frac{1}{2}$;

5) в середине стороны AC, $k = -\frac{1}{3}$.

737.° Начертите треугольник ABC. Найдите точку пересечения его медиан. Постройте образ этого треугольника при гомотетии с центром в точке пересечения его медиан и коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$.

738.° Начертите параллелограмм $ABCD$. Точку пересечения его диагоналей обозначьте O. Постройте образ этого параллелограмма при гомотетии с центром O и коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$.

739.° Начертите квадрат $ABCD$. Постройте образ этого квадрата при гомотетии с коэффициентом k и центром:

1) в точке A, $k = \frac{1}{3}$;

2) в точке B, $k = -2$;

3) в точке C, $k = 2$.

740.° Ориентируясь по клеточкам, начертите пятиугольник $ABCDE$ (рис. 225). Постройте пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, подобный данному с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$.

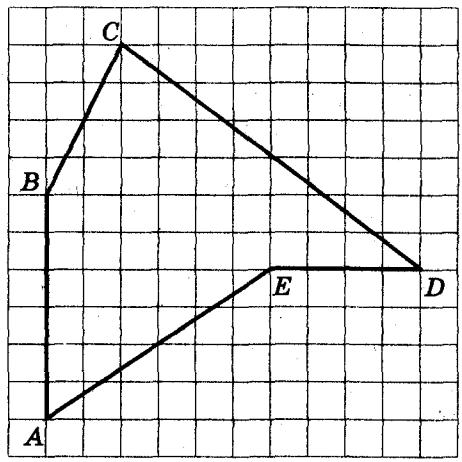


Рис. 225

741.• На рисунке 226 точка A_1 — образ точки A при гомотетии с центром O. Постройте образ точки B при этой гомотетии.

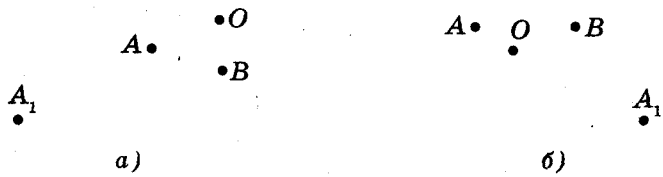


Рис. 226

742.• На рисунке 227 точка A_1 — образ точки A при гомотетии с коэффициентом: 1) $k = 3$; 2) $k = -2$. Постройте центр гомотетии.

Рис. 227

743.• На рисунке 228 изображены прямоугольник $ABCD$ и точки A_1 и D_1, которые являются образами соответственно точек A и D при преобразовании подобия. Постройте образ прямоугольника $ABCD$ при этом преобразовании. Сколько решений имеет задача?

744.• На рисунке 229 изображены прямоугольник $ABCD$ и точки A_1 и C_1, являющиеся образами соответственно точек A и C при преобразовании подобия. Постройте образ прямоугольника $ABCD$ при этом преобразовании. Сколько решений имеет задача?

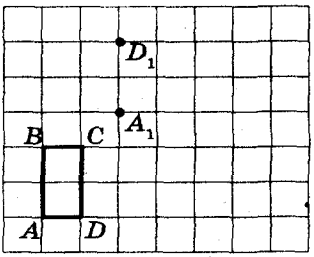


Рис. 228

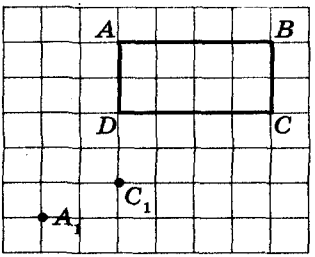


Рис. 229

745.• Постройте образ треугольника ABC при преобразовании подобия, которое является композицией двух преобразований: гомотетии с центром O и коэффициентом $k = 2$ и осевой симметрии относительно прямой l (рис. 230). Укажите коэффициент подобия.

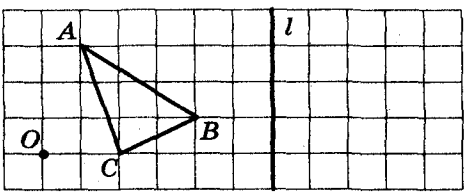


Рис. 230

746.• Начертите окружность, радиус которой равен 2 см. Отметьте точку O на расстоянии 4 см от ее центра. Постройте образ этой окружности при преобразовании подобия, которое является композицией двух преобразований: гомотетии с центром O и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$ и поворота с центром O по часовой стрелке на угол 45°. Укажите коэффициент подобия.

747.• На рисунке 231 изображены две параллельные прямые a и b. Постройте центр гомотетии, при которой прямая b является образом прямой a с коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$. Сколько решений имеет задача?

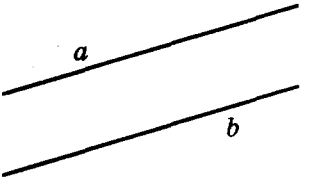


Рис. 231

748.• Начертите трапецию $ABCD$, основание BC которой в два раза меньше основания AD. Постройте центр гомотетии, при которой отрезок AD является образом отрезка BC с коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$.

УПРАЖНЕНИЯ

749.° В параллелограмме $ABCD$ точка D_1 — середина стороны AD. При гомотетии с центром A точка D_1 является образом точки D. Найдите коэффициент гомотетии. Укажите, какие точки являются образами точек B и C при этой гомотетии.

750.° Какие из фигур, изображенных на рисунке 232, совпадают со своими образами при гомотетии с центром O и коэффициентом $k > 0$ и $k \neq 1$?

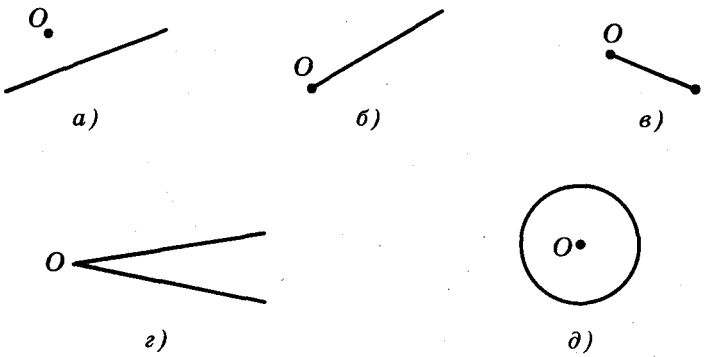


Рис. 232

751.° Какие из фигур, изображенных на рисунке 233, совпадают со своими образами при гомотетии с центром O и коэффициентом $k < 0$?

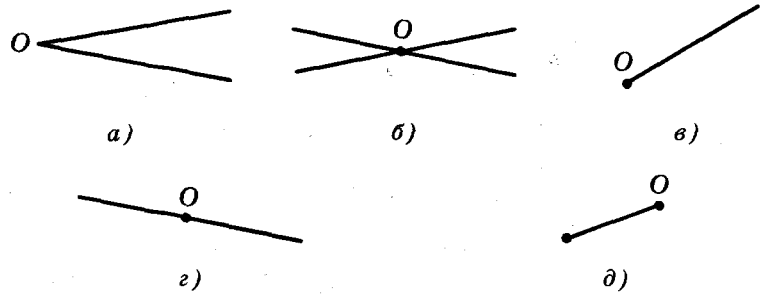


Рис. 233

752.° Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M (рис. 234). Найдите коэффициент гомотетии с центром: 1) в точке B, при которой точка B_1 является образом точки M; 2) в точке M, при которой точка A_1 является образом точки A; 3) в точке C, при которой точка M является образом точки C_1.

753.° Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M (рис. 234). Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой треугольник $A_1B_1C_1$ является образом треугольника ABC.

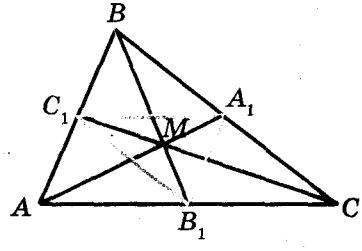


Рис. 234

754.° В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Точки K, F и N — середины отрезков AM, BM и CM соответственно. Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой треугольник ABC является образом треугольника KFN.

755.° Найдите образы точек A (−2; 1), B (3; 0), D (0; −6) при гомотетии с центром O(0; 0) и коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = 3$; 3) $k = -\frac{1}{2}$; 4) $k = -\frac{1}{3}$.

756.° Точка A_1 (−1; 2) — образ точки A (−3; 6) при гомотетии с центром в начале координат. Найдите коэффициент гомотетии.

757.° Площади двух подобных треугольников равны 28 см^2 и 63 см^2. Одна из сторон первого треугольника равна 8 см. Найдите сторону другого треугольника, соответствующую данной стороне первого.

758.° Соответствующие стороны двух подобных треугольников равны 30 см и 24 см. Площадь треугольника со стороной 30 см равна 45 см^2. Найдите площадь другого треугольника.

759.° Площадь треугольника равна S. Чему равна площадь треугольника, который отсекает от данного его средняя линия?

760.° Площадь треугольника равна S. Найдите площадь треугольника, вершины которого — середины средних линий данного треугольника.

761.• Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 235). Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой: 1) отрезок AC является образом отрезка MN; 2) отрезок MN является образом отрезка AC.

762.• Параллельные прямые пересекают стороны угла A в точках M, N, P и Q (рис. 236). Известно, что $AM : MP = 3 : 1$. Укажите коэффициент и центр гомотетии, при которой: 1) отрезок PQ является образом отрезка MN; 2) отрезок MN является образом отрезка PQ.

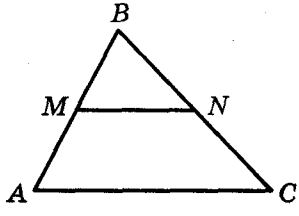


Рис. 235

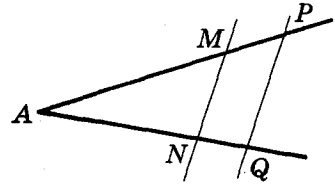


Рис. 236

763.• Параллельные отрезки BC и AD таковы, что $AD = 3BC$. Сколько существует точек, являющихся центрами гомотетии, при которой образом отрезка BC является отрезок AD? Для каждой такой точки определите коэффициент гомотетии.

764.• Окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно с радиусами R и r касаются внешним образом в точке O (рис. 237). Докажите, что окружность с центром O_1 является образом окружности с центром O_2 при гомотетии с центром O и коэффициентом $-\frac{R}{r}$.

765.• Окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно с радиусами R и r касаются внутренним образом в точке O (рис. 238). Докажите, что окружность с центром O_1 является образом окружности с центром O_2 при гомотетии с центром O и коэффициентом $\frac{R}{r}$.

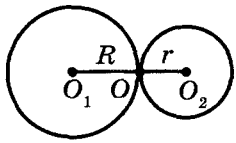


Рис. 237

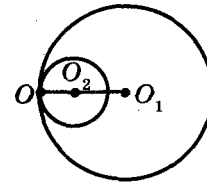


Рис. 238

766.• Окружность с центром O касается прямой a. Докажите, что образ этой окружности при гомотетии с центром A, где A — произвольная точка прямой a (рис. 239), касается этой прямой.

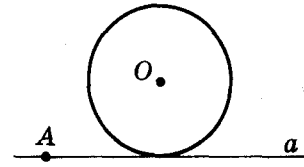


Рис. 239

767.• Точка A (2; −3) — образ точки B (8; 6) при гомотетии с центром M (4; 0). Найдите коэффициент гомотетии.

768.• Точка A (−7; 10) — образ точки B (−1; −2) при гомотетии с коэффициентом −2. Найдите центр гомотетии.

769.• Точка A_1 (x; 4) — образ точки A (−6; y) при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом: 1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$. Найдите x и y.

770.• Точка A_1(4; y) — образ точки A (x; −4) при гомотетии с центром B (1; −1) и коэффициентом $k = -3$. Найдите x и y.

771.• Средняя линия треугольника отсекает от него трапецию, площадь которой равна 21 см^2. Найдите площадь данного треугольника.

772.• Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает его сторону AB в точке M, а сторону BC — в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $BM = 4$ см, $AC = 8$ см, $AM = MK$, а площадь треугольника MBK равна 5 см^2.

773.• Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите площадь трапеции, если $BC : AD = 3 : 5$, а площадь треугольника AED равна 175 см^2.

774.• На рисунке 240 изображен план школы. Вычислите, какую площадь занимает школа, если план начерчен в масштабе 1 : 2000. Длина стороны клеточки равна 0,5 см.

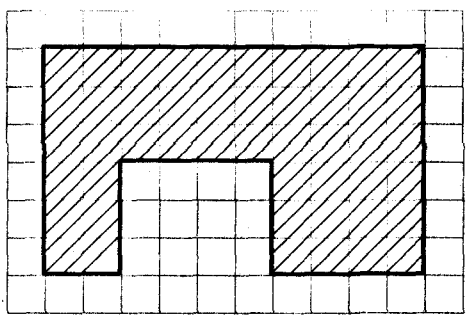


Рис. 240

775.•• Найдите образ прямой $y = 2x + 1$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом: 1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

776.•• Найдите образ окружности $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом: 1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.

777.•• Две окружности касаются внутренним образом. Через точку касания проведены две прямые, пересекающие окружности в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 241). Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

778.•• Две окружности касаются внешним образом. Через точку касания проведены две прямые, пересекающие окружности в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 242). Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

779.•• Точка A принадлежит окружности (рис. 243). Найдите геометрическое место точек, являющихся серединами хорд данной окружности, одним из концов которых является точка A.

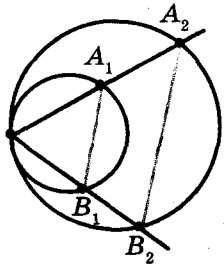


Рис. 241

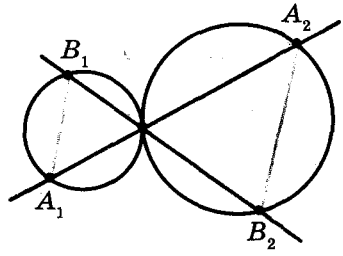


Рис. 242

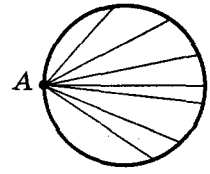


Рис. 243

780.•• Две окружности касаются внутренним образом, причем меньшая окружность проходит через центр большей. Докажите, что любую хорду большей окружности, проходящую через точку касания, меньшая окружность делит пополам.

781.•• Даны треугольник ABC и произвольная точка M. Докажите, что точки, симметричные точке M относительно середин сторон треугольника ABC, являются вершинами треугольника, равного данному.

782.•• Постройте треугольник по двум его углам и радиусу описанной окружности.

783.•• Постройте треугольник по двум его углам и радиусу вписанной окружности.

784.•• Впишите в данный треугольник ABC прямоугольник, стороны которого относятся как 2 : 1, так, чтобы две вершины большей стороны прямоугольника лежали на стороне AC треугольника, а две другие вершины — на сторонах AB и BC.

785.* Отрезок AB — хорда данной окружности, точка C — произвольная точка этой окружности. Найдите геометрическое место точек, являющихся точками пересечения медиан треугольника ABC.

786.* Даны две точки A и B и прямая l. Найдите геометрическое место точек, являющихся точками пересечения медиан треугольников ABC, где C — произвольная точка прямой l.

787.* Точка M принадлежит углу ABC, но не принадлежит его сторонам. Постройте окружность, которая касается сторон угла и проходит через точку M.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

788. Найдите площадь ромба и радиус окружности, вписанной в ромб, если его диагонали равны 12 см и 16 см.

789. Найдите периметр треугольника, образованного при пересечении прямой $3x + 4y = 24$ с осями координат.

790. Две окружности касаются внешним образом в точке A, точки B и C — точки касания с этими окружностями их общей касательной. Докажите, что $\angle BAC$ — прямой.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Применение преобразований фигур при решении задач

Преобразование фигур — эффективный метод решения целого ряда геометрических задач. Проиллюстрируем это на следующих примерах.

Пример 1. На сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC найдите такие точки M, N и P соответственно, чтобы периметр треугольника MNP был наименьшим.

Решение. Пусть P — произвольная точка отрезка AC треугольника ABC, P_1 и P_2 — ее образы при симметрии относительно прямых AB и BC соответственно (рис. 244). Прямая P_1P_2 пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и N. В примере 2 п. 18 мы показали, что периметр треугольника MNP является наименьшим при фиксированном положении точки P. Этот периметр равен длине отрезка P_1P_2.

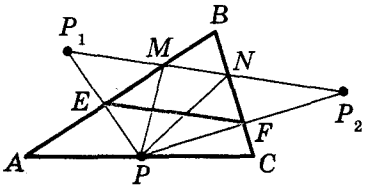


Рис. 244

Заметим, что EF — средняя линия треугольника PP_1P_2. Тогда $EF = \frac{1}{2}P_1P_2$.

Поскольку $\angle BEP + \angle BFP = 180°$, то точки P, E, B, F лежат на одной окружности с диаметром BP. Отсюда $EF = BP \cdot \sin B$. Следовательно, длина отрезка EF будет наименьшей при наи-

меньшей длине отрезка BP, то есть тогда, когда BP — высота треугольника ABC.

На рисунке 245 отрезок BP — высота треугольника ABC. Строим искомый треугольник MNP по знакомому алгоритму.

Из построения следует, что периметр любого другого треугольника, вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC, больше периметра треугольника MNP. Поэтому искомый треугольник является единственным — это построенный треугольник MNP.

Этот же треугольник можно получить, проведя высоты из вершин A и C.

Следовательно, вершины искомого треугольника — это основания высот данного треугольника ABC. Такой треугольник называют **ортоцентрическим**.

Пример 2. Пусть точка O — центр правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$ (рис. 246). Докажите, что

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}.$$

Решение. Пусть $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}$. Рассмотрим поворот с центром O на угол $\frac{360°}{n}$, например, против часовой стрелки. Очевидно, что при таком преобразовании образом данного n-угольника будет этот же n-угольник. Следовательно, искомая сумма не изменится. А это возможно лишь тогда, когда $\vec{a}=\vec{0}$.

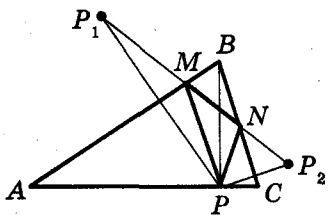


Рис. 245

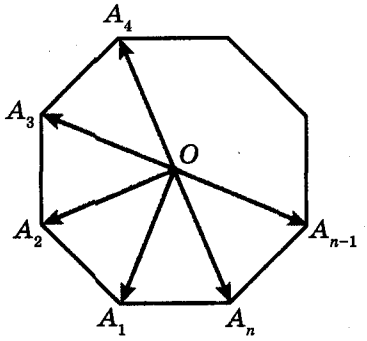


Рис. 246

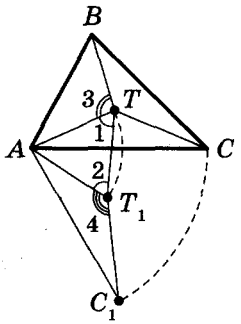


Рис. 247

Пример 3. Внутри треугольника ABC, все углы которого меньше 120°, найдите такую точку T, чтобы сумма $TA + TB + TC$ была наименьшей.

Решение. Пусть T — произвольная точка данного треугольника ABC (рис. 247). Рассмотрим поворот с центром A на угол 60° по часовой стрелке. Пусть точки T_1 и C_1 — образы точек T и C соответственно (рис. 247). Так как поворот является движением, то $T_1C_1 = TC$. Очевидно, что треугольник ATT_1 является равносторонним. Тогда $AT = TT_1$.

Имеем: $TA + TB + TC = TT_1 + TB + T_1C_1$.

Понятно, что сумма $TT_1 + TB + T_1C_1$ будет наименьшей, если точки B, T, T_1, C_1 лежат на одной прямой. Поскольку $\angle 1 = \angle 2 = 60°$, то это условие будет выполнено тогда, когда $\angle 3 = \angle 4 = 120°$.

Так как угол AT_1C_1 — образ угла ATC при указанном повороте, то должно выполняться условие $\angle ATC = 120°$.

Итак, точки B, T, T_1 и C_1 будут принадлежать одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle ATB = \angle ATC = 120°$. Отсюда $\angle BTC = 120°$.

Таким образом, сумма $TA + TB + TC$ будет наименьшей, если $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120°$.

Найти точку T можно, например, построив ГМТ, из которых отрезки AB и AC видны под углами 120° (рис. 248).

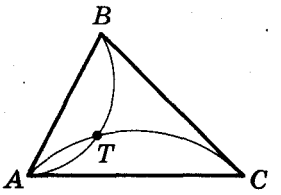


Рис. 248

Понятно, что если один из углов треугольника ABC не меньше 120°, то точка пересечения построенных дуг не будет расположена внутри треугольника. Можно показать, что в треугольнике с углом, не меньшим 120°, точка T, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является наименьшей, совпадает с вершиной тупого угла.

Пример 4. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что радиус описанной

окружности треугольника ABC в два раза больше радиуса описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение. Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекают описанную окружность треугольника ABC соответственно в точках M, N и P (рис. 249). Докажем, что $HA_1 = A_1M$, где точка H — ортоцентр треугольника ABC.

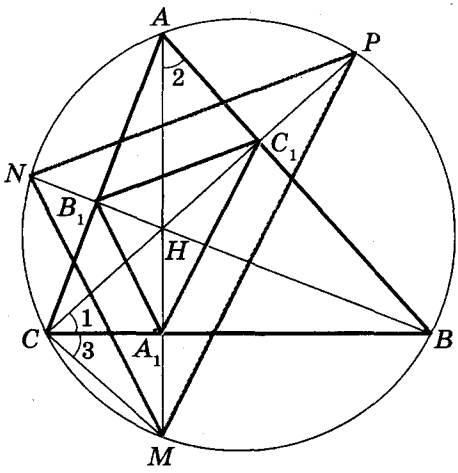


Рис. 249

Имеем: $\angle 1 = \angle 2 = 90° - \angle ABC$.

Углы 2 и 3 равны как вписанные, опирающиеся на дугу MB. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

Тогда в треугольнике HCM отрезок CA_1 является биссектрисой и высотой, а следовательно, и медианой. Отсюда $HA_1 = A_1M$.

Аналогично $HB_1 = B_1N$, $HC_1 = C_1P$.

Теперь понятно, что треугольник MNP гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с центром H и коэффициентом 2. Тогда радиус описанной окружности треугольника MNP в два раза больше радиуса описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Осталось заметить, что треугольники MNP и ABC вписаны в одну окружность.

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 5

1. Какой из отрезков может быть образом отрезка AB при движении (рис. 250)?

А) MN; Б) PQ; В) EF; Г) DC.

2. Укажите уравнение образа прямой $y = 2x$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}(0;1)$.

А) $y = 2x + 1$; В) $y = x + 1$;
Б) $y = 2x - 1$; Г) $y = x - 1$.

3. Какая из прямых, изображенных на рисунке 251, может быть образом прямой a при параллельном переносе?

А) b; Б) c; В) d; Г) a.

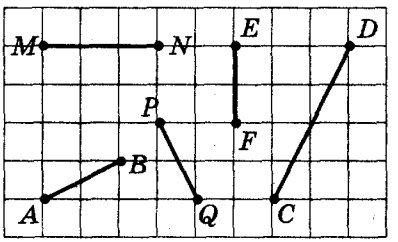


Рис. 250

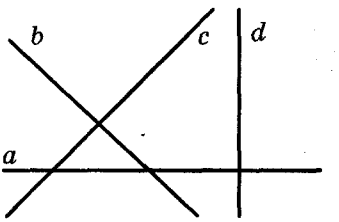


Рис. 251

4. Какая фигура имеет только одну ось симметрии?

А) квадрат; Б) окружность; В) парабола; Г) отрезок.

5. При каких значениях x и y точки A $(-1; y)$ и B $(x; 6)$ симметричны относительно оси абсцисс?

А) $x = -1$, $y = 6$; В) $x = -1$, $y = -6$;
Б) $x = 1$, $y = -6$; Г) $x = 1$, $y = 6$.

6. Какая фигура имеет центр симметрии?

А) треугольник; Б) отрезок; В) трапеция; Г) угол.

7. Какая фигура имеет центр симметрии и ось симметрии?

А) равносторонний треугольник;
Б) параллелограмм;
В) равнобокая трапеция;
Г) прямая.

8. При каких значениях x и y точки A $(x; 7)$ и B $(-4; y)$ симметричны относительно начала координат?

А) $x = 4$, $y = -7$; В) $x = -4$, $y = 7$;
Б) $x = 4$, $y = 7$; Г) $x = -4$, $y = -7$.

9. Точка O — центр правильного восьмиугольника $ABCDEFKM$ (рис. 252). Укажите образ стороны EF при повороте вокруг точки O по часовой стрелке на угол 135°.

А) AB; Б) BC; В) AM; Г) CD.

10. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ (рис. 253) пересекаются в точке M. Укажите коэффициент гомотетии с центром в точке M, при которой отрезок BC является образом отрезка AD, если $AB : BM = 7 : 2$.

А) $\frac{2}{7}$; Б) $\frac{7}{2}$; В) $\frac{2}{9}$; Г) $\frac{9}{2}$.

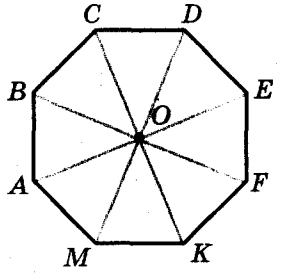


Рис. 252

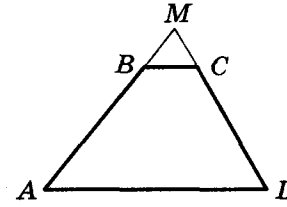


Рис. 253

11. Точка M (6; −3) — образ точки N (2; 1) при гомотетии с коэффициентом $-\frac{1}{3}$. Укажите координаты центра гомотетии.

А) (5; −2); Б) (8; −1); В) (−5; 2); Г) (−8; 1).

12. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его сторону AC в точке E, а сторону BC — в точке F. Найдите площадь треугольника CEF, если $AE : EC = 3 : 2$, а площадь треугольника ABC равна 75 см^2.

А) 36 см^2; Б) 50 см^2; В) 30 см^2; Г) 12 см^2.

ИТОГИ

В ЭТОМ ПАРАГРАФЕ:

- были введены такие понятия:
  - преобразование фигуры;
  - образ и прообраз фигуры;
  - параллельный перенос;
  - движение;
  - тождественное преобразование;
  - центральная симметрия;
  - осевая симметрия;
  - поворот;
  - гомотетия;
  - преобразование подобия;
- вы узнали:
  - какие фигуры называют равными;
  - какие фигуры называют подобными;
  - в каких случаях говорят, что фигура имеет центр симметрии, ось симметрии;
- вы изучили:
  - свойства движения;
  - свойства гомотетии;
  - свойства преобразования подобия;
  - теорему об отношении площадей подобных многоугольников.

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ §6

При изучении этого параграфа вы ознакомитесь с такими понятиями: скрещивающиеся прямые, параллельные прямая и плоскость, параллельные плоскости, прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикуляр к плоскости, призма, прямая призма, пирамида, цилиндр, конус, шар.

Вы изучите формулы для вычисления объемов прямой призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара.

Вы узнаете, что называют площадью поверхности призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара, и научитесь их вычислять.

20. Прямые и плоскости в пространстве

Вы завершили изучение курса планиметрии — раздела геометрии, изучающего свойства фигур, расположенных в одной плоскости. Однако большинство окружающих нас объектов не являются плоскими. Раздел геометрии, изучающий свойства фигур в **пространстве**, называют **стереометрией** («стереос» в переводе с греческого — «пространственный»).

Курс стереометрии вы будете изучать в 10–12 классах. Сейчас вы ознакомитесь с начальными сведениями этого раздела геометрии.

В стереометрии наряду с точками и прямыми рассматривают **плоскости**. Представление о плоскости дают поверхность стола, футбольное поле, поверхность водоема в безветренную погоду.

Понятно, что всю плоскость, как и прямую, изобразить нельзя. На рисунках изображают только часть плоскости, чаще всего в виде параллелограмма (рис. 254). Как правило, плоскости обозначают буквами греческого алфавита: α, β, γ... .

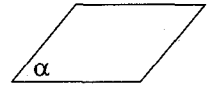
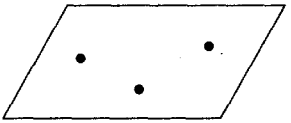
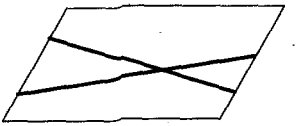


Рис. 254

Вы знаете, что прямая однозначно задается любыми двумя своими точками. Следующие утверждения указывают, как однозначно задать плоскость:

через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну 	через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну 
через две параллельные прямые можно провести плоскость и притом только одну 	через прямую и точку, ей не принадлежащую, можно провести плоскость и притом только одну 

То, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну, позволяет обозначать плоскость любыми тремя ее точками, не лежащими на одной прямой. Так, на рисунке 255 изображена плоскость ABC.

На рисунке 256 изображена прямая a, **пересекающая** плоскость α в точке A.

Если прямая a и плоскость α не имеют общих точек, то их называют **параллельными** (рис. 257). Пишут: $a \parallel \alpha$.

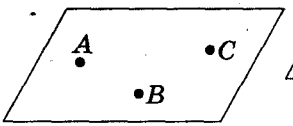


Рис. 255

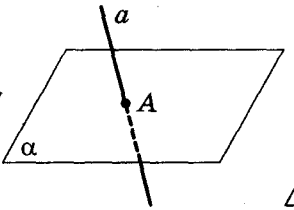


Рис. 256

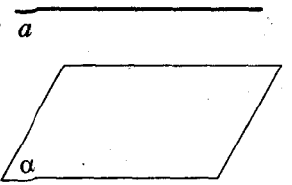


Рис. 257

Прямая a может принадлежать плоскости α (рис. 258), причем справедливо такое утверждение: *если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.*

На рисунке 259 изображена прямая a, пересекающая плоскость α в точке A так, что она перпендикулярна любой прямой, принадлежащей плоскости и проходящей через точку A. Говорят, что прямая a **перпендикулярна** плоскости α, и записывают $a \perp \alpha$.

Представление о прямой, перпендикулярной плоскости, дает вертикально установленная мачта (рис. 260).

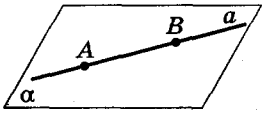


Рис. 258

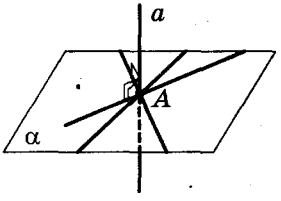


Рис. 259

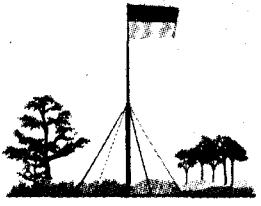


Рис. 260

Пусть прямая a, перпендикулярная плоскости α, пересекает ее в точке A. Выберем на прямой a точку B (рис. 261). Отрезок BA называют **перпендикуляром**, опущенным из точки B на плоскость α.

Если плоскости α и β не имеют общих точек, то их называют **параллельными** (рис. 262). Пишут: $\alpha \parallel \beta$.

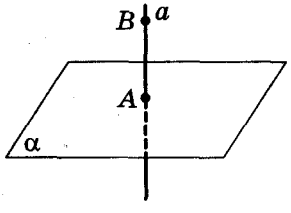


Рис. 261

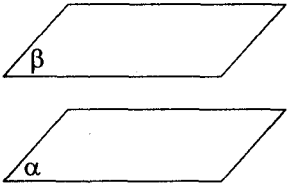


Рис. 262

На рисунке 263 плоскости α и β пересекаются. Их пересечением является прямая a.

Из курса планиметрии вы знаете, что две прямые на плоскости пересекаются или параллельны. В пространстве возможен и третий способ расположения двух прямых. На рисунке 264 изображены прямые a и b, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости. Такие прямые называют **скрещивающимися**.

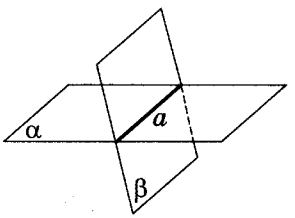


Рис. 263

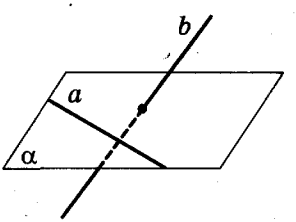


Рис. 264

1. Как называют раздел геометрии, изучающий свойства фигур в пространстве?
2. Как обозначают плоскости?
3. Как однозначно можно задать плоскость?
4. Какие возможны случаи взаимного расположения в пространстве: 1) двух прямых; 2) прямой и плоскости; 3) двух плоскостей?
5. Какие прямую и плоскость называют параллельными?
6. Как записать, что прямая a и плоскость α параллельны?
7. Какое условие принадлежности прямой плоскости?
8. В каком случае говорят, что прямая перпендикулярна плоскости?
9. Как записать, что прямая a и плоскость α перпендикулярны?
10. Поясните, что называют перпендикуляром, опущенным из точки на плоскость.
11. Какие плоскости называют параллельными?
12. Как записать, что плоскости α и β параллельны?
13. Какая геометрическая фигура является пересечением двух плоскостей?
14. Какие две прямые называют скрещивающимися?

УПРАЖНЕНИЯ

791.° Сколько плоскостей можно провести через две точки:
1) одну; 2) две; 3) бесконечно много; 4) ни одной?

792.° Сколько плоскостей можно провести через три точки:
1) одну; 3) одну или бесконечно много;
2) бесконечно много; 4) одну или ни одной?

793.° Сколько плоскостей можно провести через две прямые:
1) одну; 3) одну или ни одной;
2) бесконечно много; 4) одну или бесконечно много?

794.° Сколько плоскостей можно провести через одну прямую:
1) одну; 3) ни одной;
2) бесконечно много; 4) бесконечно много или ни одной?

795.° Через три точки проведены две плоскости. Как расположены эти точки?

796.° Точка A не принадлежит плоскости α. Сколько существует прямых, проходящих через точку A и параллельных плоскости α:
1) одна; 2) две; 3) бесконечно много; 4) ни одной?

797.° Верно ли утверждение:
1) если прямая a перпендикулярна прямой b, лежащей в плоскости α, то $a \perp \alpha$;
2) если прямая a не перпендикулярна плоскости α, то она не перпендикулярна ни одной прямой этой плоскости?

798.° Из точки A опущен перпендикуляр AB на плоскость α, точка C принадлежит плоскости α. Найдите:
1) AB, если $AC = 13$ см, $BC = 5$ см;
2) AC, если $AB = 4\sqrt{3}$ см, $\angle ACB = 60°$.

799.° Из точки M опущен перпендикуляр MK на плоскость β, точка P принадлежит плоскости β. Найдите:
1) MP, если $MK = 8$ см, $KP = 6$ см;
2) MK, если $MP = 10$ см, $\angle MPK = 45°$.

800.° Могут ли две плоскости иметь только одну общую точку?

801.° Могут ли три плоскости иметь только одну общую точку? Ответ проиллюстрируйте, приведя пример из окружающей среды.

802.° Прямая a и плоскость α параллельны. Сколько плоскостей, параллельных плоскости α, можно провести через прямую a:

1) одну; 2) две; 3) бесконечно много; 4) ни одной?

803.° Прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей. Каково взаимное расположение данной прямой и второй из плоскостей?

804.° Известно, что прямая a параллельна каждой из плоскостей α и β. Каким может быть взаимное расположение плоскостей α и β?

805.° Точка A лежит вне плоскости α, точки B, C и D принадлежат плоскости α (рис. 265). Укажите линию пересечения: 1) плоскостей ABC и ACD; 2) плоскостей α и ABC.

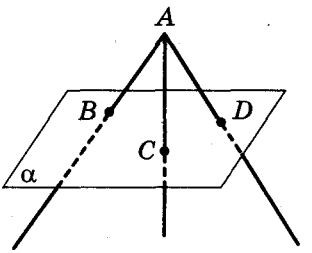
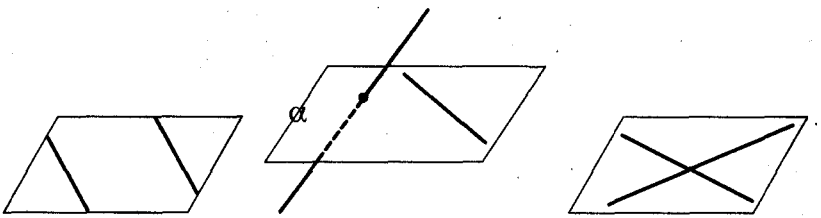


Рис. 265

806.° Точка A лежит вне плоскости α, точки B, C и D принадлежат плоскости α (рис. 265). Укажите линию пересечения: 1) плоскостей ACD и ABD; 2) плоскостей α и ACD.

807.° На рисунке 266 укажите изображение: 1) пересекающихся прямых; 2) параллельных прямых; 3) скрещивающихся прямых.



а) *б)* *в)*

Рис. 266

808.° Прямая a пересекает сторону AC треугольника ABC. Каково взаимное расположение прямых a и AB, если прямая a не лежит в плоскости ABC?

809.° Прямая m параллельна стороне DE треугольника DEF. Каково взаимное расположение прямых m и EF, если прямая m не лежит в плоскости DEF?

810.° Верно ли утверждение:

1) если прямая a параллельна прямой b, лежащей в плоскости α, то прямая a параллельна плоскости α;
2) если прямая a не параллельна прямой b, лежащей в плоскости α, то прямая a не параллельна плоскости α;
3) если прямая a пересекает плоскость β, а прямая b принадлежит плоскости β, то прямая a пересекает прямую b;
4) если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны;
5) если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и вторую прямую;
6) если прямая параллельна плоскости, то она параллельна любой прямой этой плоскости;
7) если две плоскости параллельны одной и той же прямой, то эти плоскости параллельны;
8) если прямые a и b не пересекаются, то они не лежат в одной плоскости?

811.• Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Каково взаимное расположение прямых AB и CD?

812.• Точка K лежит вне плоскости треугольника DEF. Каково взаимное расположение прямых DK и EF?

813.• Из точки A опущен перпендикуляр AB на плоскость α, точки C и D принадлежат плоскости α, $AD = 10\sqrt{3}$ см, $\angle ADB = 60°$, $\angle ACB = 45°$. Найдите длину отрезка AC.

814.• Из точки B опущен перпендикуляр BM на плоскость β, точки A и C принадлежат плоскости β, $BC = 17$ см, $MC = 8$ см, $\angle BAM = 30°$. Найдите длину отрезка AM.

815.• Из точки A опущен перпендикуляр AD на плоскость α, точки B и C принадлежат плоскости α, $AB = 25$ см, $AC = 17$ см, $BD : DC = 5 : 2$. Найдите длину перпендикуляра AD.

816.• Из точки B опущен перпендикуляр BO на плоскость γ, точки A и C принадлежат плоскости γ, $AB = 12$ см, $BC = 30$ см, $AO : OC = 10 : 17$. Найдите длину отрезка AO.

817.•• Из точки A опущен перпендикуляр AD на плоскость α, точки B и C принадлежат плоскости α. Найдите расстояние между точками B и C, если $AD = 6$ см, $\angle ABD = 45°$, $\angle ACD = 60°$, $\angle BDC = 150°$.

818.•• Из точки M опущен перпендикуляр MB на плоскость β, точки A и C принадлежат плоскости β, $MC = 4\sqrt{3}$ см, $\angle MCB = 30°$, $\angle MAB = 45°$, $\angle ABC = 135°$. Найдите расстояние между точками A и C.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

819. Один из углов параллелограмма равен полусумме двух его углов. Найдите углы параллелограмма.

820. Одна из сторон треугольника на 1 см больше второй стороны и на 1 см меньше третьей. Найдите периметр треугольника, если косинус среднего по величине угла равен $\frac{2}{3}$.

821. Докажите, что треугольник с вершинами в точках A (1; 2), B (2; −3) и C (6; 3) является равнобедренным, и вычислите его площадь.

21. Прямая призма. Пирамида

В стереометрии, кроме точек, прямых и плоскостей, рассматривают **геометрические тела**. Примерами тел являются **многогранники** (рис. 267). **Поверхность** многогранника состоит из многоугольников. Их называют **гранями многогранника**. Стороны многоугольников называют **ребрами многогранника**, а вершины — **вершинами многогранника**.

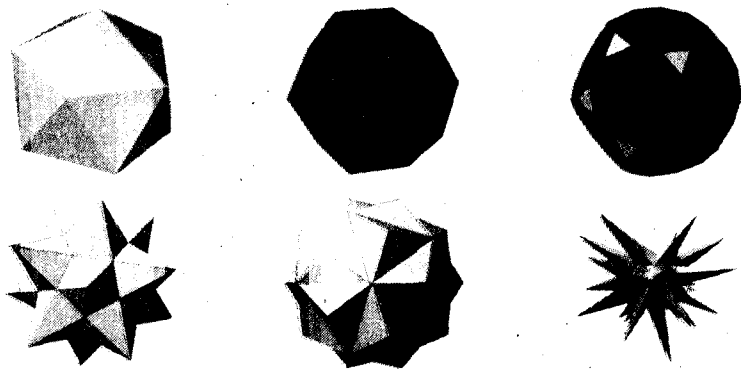


Рис. 267

В 5 классе вы познакомились с одним из видов многогранника — прямоугольным параллелепипедом и его частным видом — кубом. На рисунке 268 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Прямоугольный параллелепипед является частным видом **призмы**.

Многогранник, изображенный на рисунке 269, является **шестиугольной призмой**. Две его грани $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — равные шестиугольники, лежащие в параллельных плоскостях. Их называют **основаниями призмы**. Остальные шесть граней — это параллелограммы. Их называют **боковыми гранями призмы**.

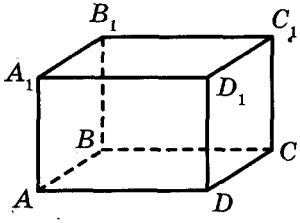


Рис. 268

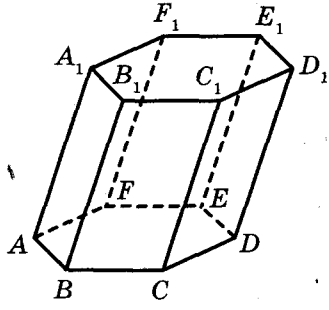


Рис. 269

Ребра призмы, принадлежащие основаниям, называют **ребрами оснований призмы**, а остальные ребра — **боковыми ребрами призмы**. Все боковые ребра призмы параллельны и равны.

Аналогично можно говорить о n-угольной призме.

Если боковые ребра призмы перпендикулярны плоскости основания, то призму называют **прямой**. На рисунке 270 изображена прямая пятиугольная призма. Боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками.

Прямоугольный параллелепипед — это частный вид прямоугольной призмы.

Площадь боковой поверхности призмы — это сумма площадей всех ее боковых граней.

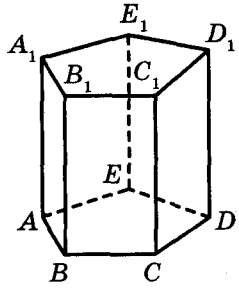


Рис. 270

Теорема 21.1. ***Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра ее основания на длину бокового ребра.***

Доказательство. ⊙ Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — стороны основания прямой призмы, h — длина бокового ребра, $P_{осн}$ — периметр основания, $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности. Поскольку боковые грани прямой призмы — прямоугольники, то:

$$S_{бок} = a_1h + a_2h + \ldots + a_nh =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,h = P_{осн} \cdot h. \blacktriangle$$

Площадь поверхности призмы — это сумма площадей всех ее граней.

Обозначив площадь основания $S_{осн}$, можно записать очевидную формулу для нахождения площади S поверхности призмы:

$$S = S_{бок} + 2S_{осн}.$$

Каждое геометрическое тело имеет определенный объем. За единицу объема принимают куб, ребро которого равно единице длины.

Объем V прямой призмы вычисляют по формуле

$$\boxed{V = S_{осн} \cdot h,}$$

где $S_{осн}$ — площадь основания призмы, h — длина бокового ребра.

Эта формула будет доказана в курсе стереометрии.

На рисунке 271 изображен многогранник, одна грань которого — многоугольник, а остальные — треугольники, имеющие общую вершину. Такой многогранник называют **пирамидой**. Эту общую вершину называют **вершиной пирамиды**. Грань, не содержащую вершину пирамиды, называют **основанием пирамиды**, остальные грани — **боковыми гранями пирамиды**.

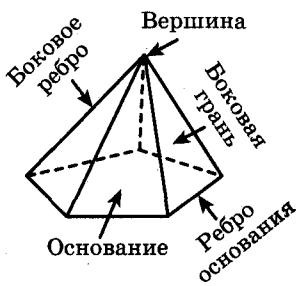


Рис. 271

Ребра, принадлежащие основанию, называют **ребрами основания пирамиды**, остальные ребра — **боковыми ребрами пирамиды**.

На рисунке 272 изображены треугольная пирамида $SABC$ и четырехугольная пирамида $SABCD$.

Площадь поверхности пирамиды — это сумма площадей всех ее граней.

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания, называют **высотой** пирамиды. На рисунке 272 отрезок SO — высота пирамиды.

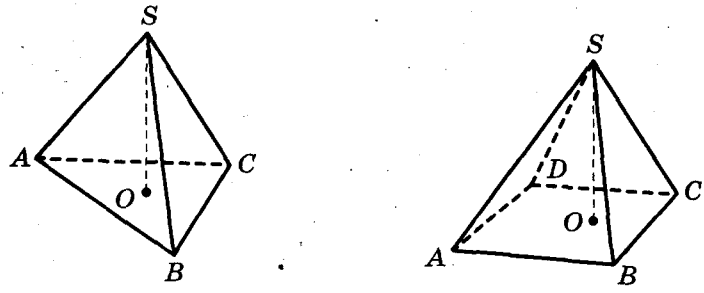


Рис. 272

Объем V пирамиды вычисляют по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h,$$

где $S_{осн}$ — площадь основания пирамиды, h — длина высоты пирамиды.

Эта формула будет доказана в курсе стереометрии.

Связь между частными видами многогранников иллюстрирует схема, изображенная на рисунке 273.

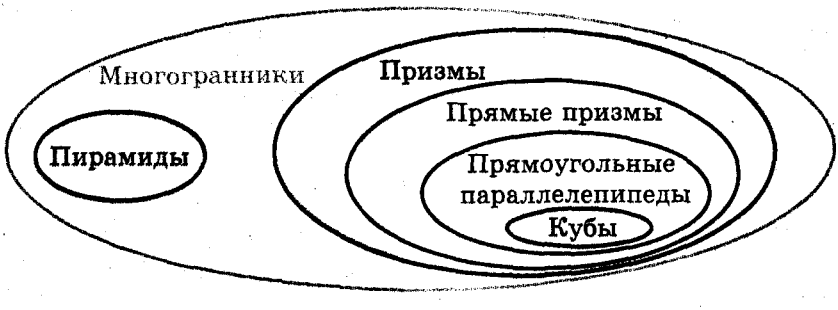


Рис. 273

1. Из каких фигур состоит поверхность многогранника?
2. Что называют гранями многогранника?
3. Что называют ребрами многогранника?
4. Что называют вершинами многогранника?
5. Частным видом какого многогранника является прямоугольный параллелепипед?
6. Каково взаимное расположение плоскостей, в которых лежат основания призмы?
7. Как называют грани призмы, отличные от ее оснований?
8. Какой геометрической фигурой является боковая грань призмы?
9. Поясните, что называют боковыми ребрами и ребрами оснований призмы.
10. Каково взаимное расположение боковых ребер призмы?
11. Какую призму называют прямой?
12. Какой геометрической фигурой является боковая грань прямой призмы?
13. Что такое площадь боковой поверхности призмы?
14. Сформулируйте теорему о площади боковой поверхности прямой призмы.
15. Что такое площадь поверхности призмы?
16. Что принимают за единицу объема?
17. По какой формуле вычисляют объем прямой призмы?
18. Поясните, какой многогранник называют пирамидой.
19. Что называют вершиной пирамиды?
20. Как называют грань пирамиды, не содержащую вершину пирамиды?
21. Какие грани пирамиды называют боковыми?
22. Какие ребра пирамиды называют боковыми?
23. Какие ребра пирамиды называют ребрами основания?
24. Что такое площадь поверхности пирамиды?
25. Что называют высотой пирамиды?
26. По какой формуле вычисляют объем пирамиды?

УПРАЖНЕНИЯ

822.° На рисунке 274 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите:

1) основания параллелепипеда;
2) боковые грани параллелепипеда;
3) боковые ребра параллелепипеда;
4) ребра нижнего основания параллелепипеда;
5) ребра, параллельные ребру AB;
6) ребра, параллельные ребру BB_1;
7) ребра, скрещивающиеся с ребром BC.

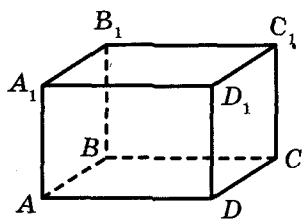


Рис. 274

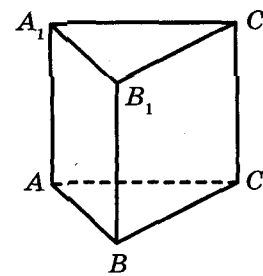


Рис. 275

823.° На рисунке 275 изображена прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Укажите:

1) основания призмы;
2) боковые грани призмы;
3) боковые ребра призмы;
4) ребра основания призмы;
5) все пары параллельных ребер призмы.

824.° На рисунке 276 изображена пирамида $MABC$. Укажите:

1) основание пирамиды;
2) вершину пирамиды;
3) боковые грани пирамиды;
4) боковые ребра пирамиды;
5) ребра основания пирамиды.

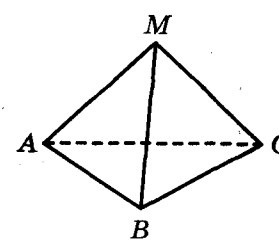


Рис. 276

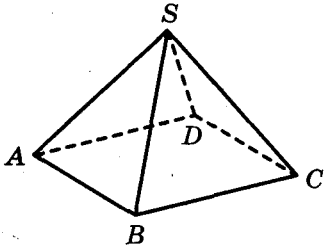


Рис. 277

825.° На рисунке 277 изображена пирамида $SABCD$.

Укажите:

1) основание пирамиды;
2) вершину пирамиды;
3) боковые грани пирамиды;
4) боковые ребра пирамиды;
5) ребра основания пирамиды.

826.° Найдите площадь поверхности и объем куба с ребром 3 см.

827.° Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 274), если $AB = 3$ см, $BC = 2$ см, $AA_1 = 5$ см.

828.° Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем прямой треугольной призмы, основанием которой является правильный треугольник со стороной 6 см, а боковое ребро равно 4 см.

829.° Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем прямой четырехугольной призмы, основанием которой является квадрат со стороной 7 см, а боковое ребро равно 6 см.

830.° Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем прямой призмы, изображенной на рисунке 278 (длины отрезков даны в сантиметрах).

831.° Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем прямой призмы, изображенной на рисунке 279 (длины отрезков даны в сантиметрах).

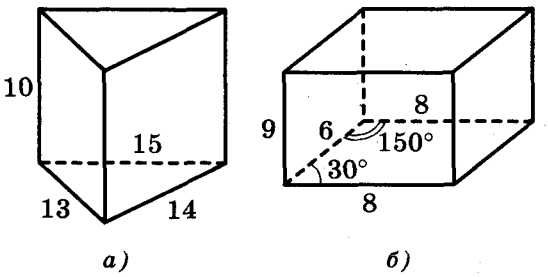


Рис. 278

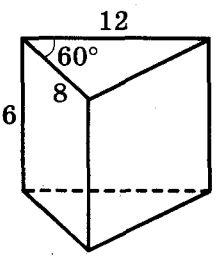


Рис. 279

832.° Все грани треугольной пирамиды — правильные треугольники со стороной a. Найдите площадь поверхности пирамиды.

833.° Основание пирамиды является квадратом со стороной 6 см, а каждая боковая грань — правильным треугольником. Найдите площадь боковой поверхности и площадь поверхности пирамиды.

834.° Вычислите объем пирамиды $MABC$ (рис. 280), основание которой — треугольник ABC, $BC = 4{,}8$ см, AK — высота треугольника ABC, $AK = 3{,}5$ см, MO — высота пирамиды, $MO = 4{,}5$ см.

835.° Вычислите объем пирамиды $MABCD$ (рис. 281), основание которой — квадрат $ABCD$ со стороной 6 см, ME — высота пирамиды, $ME = 7{,}2$ см.

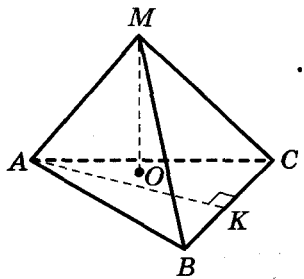


Рис. 280

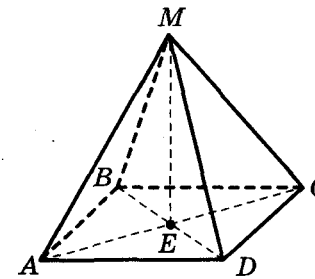


Рис. 281

836.° Вычислите объем пирамиды $AMNKP$ (рис. 282), основание которой — прямоугольник $MNKP$, $MN = 1{,}2$ см, $NK = 2{,}6$ см, AD — высота пирамиды, $AD = 2{,}5$ см.

837.° Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 15 см, а гипотенуза — 25 см. Найдите площадь поверхности и объем призмы, если ее боковое ребро равно 9 см.

838.° Основанием прямой призмы является равнобокая трапеция с основаниями 4 см и 16 см и диагона-

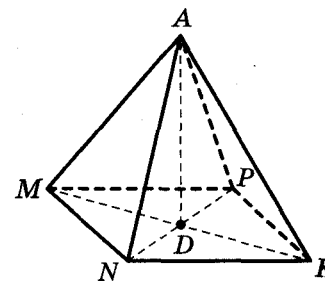


Рис. 282

лью $2\sqrt{41}$ см. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем призмы, если ее боковое ребро равно 17 см.

839.• Основание прямой призмы — равнобедренный треугольник, основание которого равно 24 см, а проведенная к нему высота — 5 см. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы, если ее боковое ребро равно 7 см.

840.• Найдите площадь поверхности и объем куба, если диагональ его грани равна d.

841.• Классная комната имеет форму прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 8,5 м, 6 м и 3,6 м. Можно ли в этой комнате разместить на урок 30 учащихся, если в соответствии с санитарными нормами на одного учащегося должно приходиться 6 м^3 воздуха?

842.• Поперечное сечение чугунной трубы имеет форму квадрата. Внешняя ширина трубы равна 30 см, а толщина стенок — 5 см. Найдите массу погонного метра трубы, если плотность чугуна составляет $7{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3.

843.• Поперечное сечение канавы имеет форму равнобокой трапеции, основания которой равны 1 м и 0,8 м, а высота — 0,6 м. Сколько понадобится рабочих, чтобы за 4 ч выкопать такую канаву длиной 15 м, если за час один рабочий выкапывает 0,75 м^3 грунта?

844.• Слиток меди длиной 50 см имеет форму прямой призмы, основанием которой является равнобокая трапеция, параллельные стороны которой равны 6 см и 14 см, а боковая сторона — 8,5 см. Установите, есть ли внутри слитка пустоты или он является сплошным, если масса слитка равна 32 кг, а плотность меди — $9{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

845.• Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $SABC$, если $SA = SB = SC = 8$ см, $\angle ASB = \angle ASC = \angle CSB = 45°$.

846.• Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $SABCD$, если $SA = SB = SC = SD = 6$ см, $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle ASD = 30°$.

847.• Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см, высота пирамиды равна 12 см. Найдите объем пирамиды.

848.• Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 10 см, а одна из диагоналей — 16 см. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 11 см.

849.• Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 17 см, 17 см и 16 см. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 20 см.

850.•• Найдите объем прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $A_1B = d$, $\angle ABA_1 = \beta$, $AB = AC$, $\angle BAC = \alpha$.

851.•• Найдите площадь боковой поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC = m$, $\angle CAD = \alpha$, $\angle CAC_1 = \beta$.

852.•• Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб, $AB = a$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle ACA_1 = \beta$. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы.

853.•• Найдите объем треугольной пирамиды, боковые грани которой — равнобедренные прямоугольные треугольники с катетом a.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

854. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 48 см, $AD = 7$ см. Какую сторону параллелограмма пересекает биссектриса угла B? Найдите отрезки, на которые биссектриса делит сторону параллелограмма.

855. Два треугольника имеют по две равные стороны, а сумма углов между соответственно равными сторонами этих треугольников равна 180°. Докажите, что данные треугольники равновелики.

856. Даны точки A (5; 2), B (−7; 1) и C (1; −5), отрезок AM — медиана треугольника ABC. Составьте уравнение прямой AM.

22. Цилиндр. Конус. Шар

В повседневной жизни мы часто встречаемся с предметами, имеющими форму **цилиндра**: консервная банка (рис. 283), хоккейная шайба (рис. 284), колонны здания (рис. 285), бочка (рис. 286).

Рис. 283

Рис. 284

Рис. 285

Рис. 286

Цилиндр можно представить как тело, полученное в результате вращения прямоугольника $ABCD$ вокруг одной из его сторон, например, стороны AB (рис. 287). Прямую AB называют **осью цилиндра**.

Стороны BC и AD, вращаясь, образуют равные круги, которые называют **основаниями цилиндра**. При вращении стороны CD образуется **цилиндрическая поверхность**, которую называют **боковой поверхностью цилиндра**.

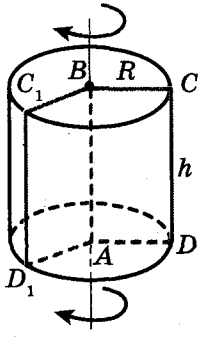


Рис. 287

Пусть при вращении прямоугольника отрезок CD занял положение C_1D_1 (рис. 287). Говорят, что отрезок C_1D_1 — образ отрезка CD. Все образы отрезка CD называют **образующими цилиндра**. Все образующие цилиндра равны и параллельны. Кроме того, каждая образующая перпендикулярна плоскостям оснований цилиндра.

Если боковую поверхность цилиндра разрезать по одной из его образующих, а потом развернуть ее на плоскости, то получим прямоугольник. Одна из его сторон равна образующей, а длина другой стороны равна длине окружности, ограничивающей основание цилиндра (рис. 288). Полученный прямоугольник называют **разверткой боковой поверхности цилиндра**.

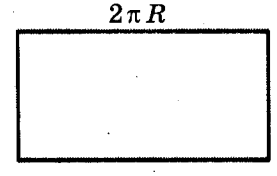


Рис. 288

Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{бок}$ равна площади ее развертки:

$$S_{бок} = 2\pi Rh,$$

где R — радиус основания цилиндра, h — длина его образующей.

Площадь S поверхности цилиндра равна сумме площади боковой поверхности и площадей его оснований:

$$S = S_{бок} + 2S_{осн},$$

где $S_{осн}$ — площадь основания цилиндра.

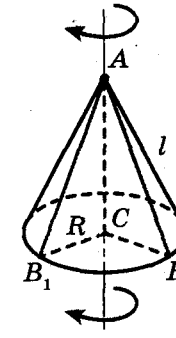


Рис. 289

Объем V цилиндра вычисляют по формуле

$$V = \pi R^2 h,$$

где R — радиус основания цилиндра, h — длина его образующей.

Конус можно представить как тело, полученное в результате вращения прямоугольного треугольника ABC вокруг одного из его катетов, например, катета AC (рис. 289).

Катет BC, вращаясь, образует круг, который называют **основанием конуса**. При вращении гипотенузы AB образуется **боковая поверхность конуса**.

Пусть при вращении треугольника гипотенуза AB заняла положение AB_1 (рис. 289). Говорят, что AB_1 — образ отрезка AB. Все образы отрезка AB называют **образующими конуса**. Все образующие конуса равны.

Прямую AC называют **осью конуса**, отрезок AC — **высотой конуса**, точку A — **вершиной конуса**. Высота конуса перпендикулярна плоскости его основания.

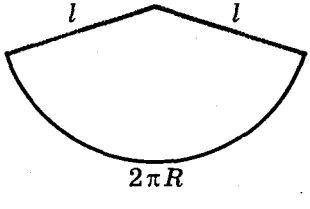


Рис. 290

Если боковую поверхность конуса разрезать по одной из его образующих, а затем развернуть ее на плоскости, то получим сектор. Радиус этого сектора равен длине l образующей конуса, а длина дуги, ограничивающей сектор, — длине окружности, ограничивающей основание конуса (рис. 290).

Полученный сектор называют **разверткой боковой поверхности конуса.**

Площадь боковой поверхности конуса $S_{бок}$ равна площади ее развертки:

$$S_{бок} = \pi Rl,$$

где R — радиус основания конуса, l — длина его образующей.

Площадь S поверхности конуса равна сумме площади боковой поверхности и площади его основания:

$$S = S_{бок} + S_{осн},$$

где $S_{осн}$ — площадь основания конуса.

Объем V конуса вычисляют по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

где R — радиус основания конуса, h — длина его высоты.

Все точки пространства, удаленные от данной точки на данное расстояние R, образуют фигуру, которую называют **сферой** (рис. 291). Данную точку называют **центром сферы**, а число R — **радиусом сферы**. Любой отрезок, соединяющий центр сферы с точкой сферы, также называют радиусом сферы. На рисунке 291 точка O — центр сферы, R — радиус.

Тело, представляющее часть пространства, ограниченную сферой, вместе со сферой, называют **шаром**. Сферу, ограничивающую шар, называют **поверхностью шара**. Центр и радиус сферы называют также центром и радиусом шара.

Шар можно представить как тело, полученное в результате вращения круга вокруг одного из диаметров (рис. 292).

Площадь S поверхности шара, то есть площадь сферы, вычисляют по формуле

$$S = 4\pi R^2,$$

где R — радиус шара.

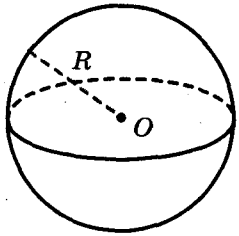


Рис. 291

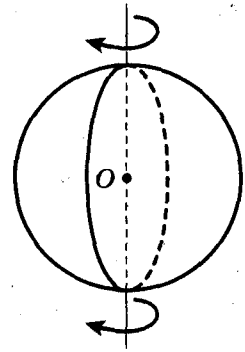


Рис. 292

Объем V шара вычисляют по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где R — радиус шара.

1. Поясните, как можно представить цилиндр как тело вращения.
2. Поясните, что называют основаниями, боковой поверхностью и образующими цилиндра.
3. Каково взаимное расположение образующих цилиндра?
4. Каково взаимное расположение образующих цилиндра и плоскостей его оснований?
5. Поясните, что называют осью цилиндра.
6. Какая геометрическая фигура является разверткой боковой поверхности цилиндра?
7. По какой формуле вычисляют площадь боковой поверхности цилиндра?
8. Чему равна площадь поверхности цилиндра?
9. По какой формуле вычисляют объем цилиндра?
10. Поясните, как можно представить конус как тело вращения.
11. Поясните, что называют основанием, боковой поверхностью и образующими конуса.
12. Поясните, что называют осью, высотой и вершиной конуса.
13. Какая геометрическая фигура является разверткой боковой поверхности конуса?

14. По какой формуле вычисляют площадь боковой поверхности конуса?
15. Чему равна площадь поверхности конуса?
16. По какой формуле вычисляют объем конуса?
17. Какую фигуру называют сферой?
18. Что называют центром сферы?
19. Что называют радиусом сферы?
20. Какую фигуру называют шаром?
21. Что называют поверхностью шара?
22. Что называют центром и радиусом шара?
23. Поясните, как можно представить шар как тело вращения.
24. По какой формуле вычисляют площадь поверхности шара?
25. По какой формуле вычисляют объем шара?

УПРАЖНЕНИЯ

857.° На рисунке 293 изображен цилиндр. Укажите:
1) ось цилиндра;
2) образующую цилиндра;
3) радиус нижнего основания цилиндра;
4) радиус верхнего основания цилиндра.

858.° Радиус основания цилиндра равен 6 см, а его образующая — 8 см. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем цилиндра.

859.° Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем цилиндра, развертка которого изображена на рисунке 294 (длины отрезков даны в сантиметрах).

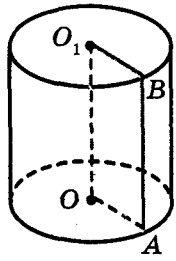


Рис. 293

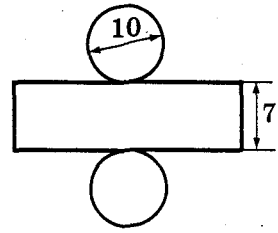


Рис. 294

860.° На рисунке 295 изображен конус. Укажите:

1) вершину конуса;
2) центр его основания;
3) образующую конуса;
4) радиус основания конуса;
5) высоту конуса.

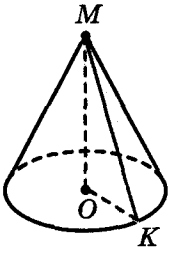


Рис. 295

861.° Радиус основания конуса равен 4 см, а его образующая — 7 см. Найдите площадь боковой поверхности и площадь поверхности конуса.

862.° Найдите площадь поверхности конуса, развертка которого изображена на рисунке 296 (длины отрезков даны в сантиметрах).

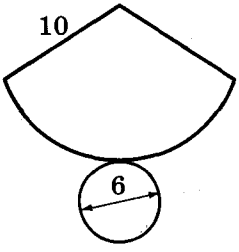


Рис. 296

863.° Найдите объем конуса, высота которого равна 12 см, а радиус основания — 3 см.

864.° Найдите площадь поверхности и объем шара, радиус которого равен 3 см.

865.• Прямоугольник, стороны которого равны 12 см и 5 см, вращается вокруг большей стороны. Найдите площадь поверхности и объем цилиндра, образовавшегося при этом.

866.• Образующая цилиндра равна 6 см, а объем — 150π см^3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

867.• Масса 10 м медного провода кругового сечения равна 106,8 г. Найдите диаметр провода, если плотность меди составляет $8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

868.• Определите давление кирпичной колонны цилиндрической формы высотой 3 м на фундамент, если диаметр колонны равен 1,2 м, а масса 1 м^3 кирпича равна 1,8 т.

869.• Диаметр основания конуса равен 16 см, а его образующая — 17 см. Найдите площадь поверхности и объем конуса.

870.• Прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 16 см вращается вокруг меньшего катета. Найдите площадь боковой поверхности и объем конуса, образовавшегося при этом.

871.• Зерно ссыпали в кучу конической формы высотой 1,2 м. Какова масса этой кучи, если радиус ее основания равен 2 м, а масса 1 м^3 зерна составляет 750 кг?

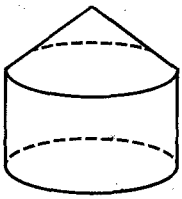


Рис. 297

872.• Жидкость из полного сосуда конической формы, высота которого равна 24 см, а радиус основания — 6 см, перелили в сосуд цилиндрической формы, радиус основания которого равен 8 см. Определите высоту уровня жидкости в сосуде цилиндрической формы.

873.• Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом (рис. 297). Радиус его основания равен 1,5 м, высота — 3 м, причем высота цилиндрической части стога — 2,4 м. Найдите массу стога, если масса 1 м^3 сена составляет 30 кг.

874.• Как изменятся площадь поверхности и объем шара, если его радиус увеличить в 2 раза?

875.• Радиус одного шара равен 3 см, а другого — 4 см. Найдите отношение площадей поверхностей и отношение объемов данных шаров.

876.• Внешний диаметр железного пустотелого шара равен 12 см, а внутренний диаметр — 10 см. Найдите массу шара, если плотность железа равна $7{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

877.•• Отрезок AB — диаметр основания конуса (рис. 298), $\angle AMB = 90°$, MO — высота конуса, $MO = h$. Найдите площадь боковой поверхности и объем конуса.

878.•• Отрезок AB — диаметр основания конуса (рис. 298), $\angle AMB = 60°$, точка O — центр основания конуса, $OA = R$. Найдите площадь боковой поверхности и объем конуса.

879.•• Стороны прямоугольника равны a и b, $a > b$. Он вращается сначала вокруг стороны a, потом — вокруг стороны b. Сравните площади боковых поверхностей и объемы цилиндров, образовавшихся при этом.

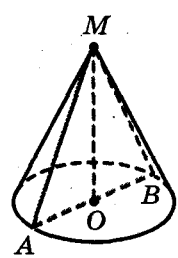


Рис. 298

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

880. Две стороны треугольника равны 17 см и 28 см, а его площадь — 210 см^2. Найдите третью сторону треугольника.

881. Составьте уравнение окружности, центр которой принадлежит оси абсцисс, радиус равен 5, и которая проходит через точку $M(1; 4)$.

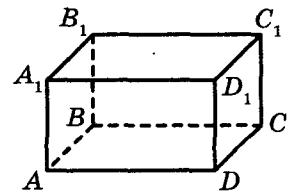
ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ» № 6

1. Две прямые не параллельны и не пересекаются. Сколько плоскостей можно провести через эти прямые?

А) одну; Б) две; В) ни одной; Г) бесконечно много.

2. Прямые a и b параллельны плоскости α. Каково взаимное расположение прямых a и b?

А) обязательно параллельны;
Б) обязательно пересекаются;
В) обязательно скрещивающиеся;
Г) невозможно установить.



3. На рисунке изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какая из данных пар прямых является парой скрещивающихся прямых?

А) AA_1 и CC_1; Б) BC и DD_1; В) AD и B_1C_1; Г) A_1B_1 и BB_1.

4. Чему равна площадь поверхности прямой призмы, основанием которой является правильный треугольник со стороной $2\sqrt{3}$ см, а боковое ребро равно $3\sqrt{3}$ см?

А) 54 см^2; В) $(54+6\sqrt{3})$ см^2;
Б) 18 см^2; Г) $(18+6\sqrt{3})$ см^2.

5. Основанием прямой призмы является квадрат со стороной 6 см, а площадь боковой поверхности равна 120 см^2. Чему равен объем призмы?

А) 180 см^3; В) 120 см^3;
Б) 30 см^3; Г) невозможно установить.

6. Боковые грани четырехугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники с боковой стороной a и углом α при вершине. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

А) $a^2\sin\alpha$; Б) $\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$; В) $4a^2\sin\alpha$; Г) $2a^2\sin\alpha$.

7. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 13 см, 13 см и 10 см, высота пирамиды равна 9 см. Найдите объем пирамиды.

А) 540 см^3; Б) 180 см^3; В) 360 см^3; Г) 195 см^3.

8. Площадь основания цилиндра равна 36π см^2, а его образующая — 10 см. Чему равна площадь боковой поверхности цилиндра?

А) $60\ \pi$ см^2; Б) $120\ \pi$ см^2; В) $180\ \pi$ см^2; Г) $360\ \pi$ см^2.

9. Радиус основания цилиндра равен 4 см, а площадь боковой поверхности — 48π см^2. Найдите объем цилиндра.

А) 24π см^3; Б) 288π см^3; В) 144π см^3; Г) 96π см^3.

10. Найдите площадь поверхности конуса, образующая которого равна 7 см, а радиус основания — 3 см.

А) $30\ \pi$ см^2; Б) $41\ \pi$ см^2; В) $27\ \pi$ см^2; Г) $39\ \pi$ см^2.

11. Площадь поверхности первого шара равна 324π см^2, а второго — 144π см^2. Найдите отношение радиуса первого шара к радиусу второго.

А) 9 : 4; Б) 3 : 1; В) 2 : 1; Г) 3 : 2.

12. Радиус основания конуса и радиус шара равны 2 см, а их объемы равны. Найдите высоту конуса.

А) 8 см; Б) 6 см; В) 4 см; Г) 12 см.

ИТОГИ

В ЭТОМ ПАРАГРАФЕ:

- были введены такие понятия:
  - скрещивающиеся прямые;
  - параллельные прямая и плоскость;
  - параллельные плоскости;
  - прямая, перпендикулярная плоскости;
  - перпендикуляр к плоскости;
  - призма;
  - прямая призма;
  - пирамида;
  - цилиндр;
  - конус;
  - сфера;
  - шар;
- вы научились:
  - вычислять объемы и площади поверхностей призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара;
- вы узнали:
  - каким образом можно однозначно задать плоскость;
  - каким может быть взаимное расположение в пространстве двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей;
  - каково условие принадлежности прямой плоскости;
  - что является пересечением двух плоскостей.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 9 КЛАССА

1. Решение треугольников

882. Две стороны треугольника равны 4 см и 10 см, а синус угла между ними равен $\frac{4}{5}$. Найдите третью сторону треугольника.

883. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 2$ см, $AD = 4$ см, $\angle BAD = 60°$. Найдите косинус угла между прямыми AC и BD.

884. Установите, остроугольным, прямоугольным или тупоугольным является треугольник со сторонами: 1) 4 см, 4 см, 5 см; 2) 5 см, 6 см, 9 см; 3) 5 см, 12 см, 13 см.

885. Одна из сторон треугольника равна 21 см, а две другие стороны относятся как 3 : 8. Найдите неизвестные стороны треугольника, если угол между ними равен 60°.

886. Одна из сторон треугольника равна 3 см, а вторая сторона — $\sqrt{7}$ см, причем угол, противолежащий второй стороне, равен 60°. Найдите неизвестную сторону треугольника.

887. Одна из сторон параллелограмма на 4 см больше другой, а его диагонали равны 12 см и 14 см. Найдите периметр параллелограмма.

888. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AD = a$, $BD = d$, $BD \perp AD$. Найдите диагональ AC.

889. В трапеции $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, $AD = 8$ см, $CD = 4\sqrt{3}$ см. Окружность, проходящая через точки A, B и C, пересекает прямую AD в точке K, $\angle AKB = 60°$. Найдите BK.

890. Основания трапеции равны 3 см и 7 см, а боковые стороны — 6 см и 5 см. Найдите косинусы углов трапеции.

891. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке D, $BD = 1$ см, $AD = 5$ см, $\angle ABC = 120°$. Найдите CD.

892. Стороны треугольника равны 11 см, 12 см и 13 см. Найдите медиану треугольника, проведенную к его большей стороне.

893. Найдите биссектрису треугольника, которая делит его сторону на отрезки длиной 3 см и 4 см и образует с этой стороной угол, равный 60°.

894. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, $BD = a$, $\angle A = 45°$, $\angle C = 75°$. Найдите AD.

895. Найдите отношение сторон равнобедренного треугольника, один из углов в которого равен 120°.

896. В треугольнике ABC известно, что $AC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 60°$. Найдите радиус окружности, проходящей через центр вписанной окружности треугольника ABC и точки A и C.

897. Две стороны треугольника равны 5 см и 8 см, а угол между ними — 60°. Найдите радиус окружности, описанной около данного треугольника.

898. Найдите биссектрису треугольника ABC, проведенную из вершины A, если $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$.

899. Биссектриса угла BAD параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M. Найдите площадь треугольника ABM, если $AB = 4$ см, $\angle BAD = 60°$.

900. Найдите наибольшую высоту, радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника со сторонами 4 см, 13 см и 15 см.

901. Радиусы двух окружностей равны 17 см и 39 см, а расстояние между их центрами — 44 см. Найдите длину общей хорды данных окружностей.

902. Вычислите площадь параллелограмма, одна из сторон которого равна 15 см, а диагонали — 11 см и 25 см.

903. Основания трапеции равны 16 см и 44 см, а боковые стороны — 17 см и 25 см. Найдите площадь трапеции.

904. Основания трапеции равны 5 см и 12 см, а диагонали — 9 см и 10 см. Найдите площадь трапеции.

2. Правильные многоугольники

905. Найдите площадь правильного n-угольника, если радиус вписанной в него окружности равен 6 см, а n равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

906. В окружность вписан квадрат со стороной 4 см. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в эту же окружность.

907. Найдите отношение площадей правильных треугольника и шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

908. Середины сторон правильного двенадцатиугольника соединены через одну так, что полученной фигурой является правильный шестиугольник. Найдите сторону данного двенадцатиугольника, если сторона полученного шестиугольника равна a.

909. Длина дуги окружности равна 6π см, а ее градусная мера — $24°$. Найдите радиус окружности.

910. На катете AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) как на диаметре построена окружность. Найдите длину дуги этой окружности, которая содержится вне треугольника и отсекается гипотенузой AB, если $\angle A = 42°$, $AC = 8$ см.

911. Сторона квадрата равна $2\sqrt{2}$ см. Найдите длину дуги описанной окружности данного квадрата, концами которой являются две его соседние вершины.

912. Расстояние между центрами двух кругов радиуса R равно R. Найдите площадь фигуры, являющейся общей частью этих кругов, и длину линии, ограничивающей эту фигуру.

913. Площадь кругового сектора равна $2{,}4\pi$ см^2. Найдите градусную меру дуги этого сектора, если радиус круга равен 4 см.

914. Диаметр колеса вагона метрополитена равен 78 см. За 2,5 мин колесо делает 1000 оборотов. Найдите скорость поезда метро в километрах в час. Ответ округлите до десятых.

915. Найдите длину окружности, вписанной в сегмент, длина дуги которого равна m, а градусная мера равна $120°$.

916. К окружности, радиус которой равен R, проведены две касательные, угол между которыми равен $60°$. Найдите площадь фигуры, ограниченной касательными и меньшей из дуг, концами которых являются точки касания.

3. Декартовы координаты на плоскости

917. Вершинами треугольника являются точки A $(-4; 1)$, B $(-2; 4)$ и C $(0; 1)$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный, и найдите его площадь.

918. Найдите координаты точки пересечения серединного перпендикуляра отрезка AB с осью абсцисс, если A $(5; -3)$, B $(4; 6)$.

919. Найдите координаты точки пересечения серединного перпендикуляра отрезка CD с осью ординат, если C $(2; 1)$, D $(4; -3)$.

920. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках A (−12; 6), B (0; 11), C (5; −1), D (−7; −6) является квадратом.

921. Точка M (5; −2) является одним из концов диаметра окружности, точка N (2; 0) — центр окружности. Найдите координаты второго конца диаметра.

922. Установите, лежат ли точки A (−4; −3), B (26; 7), C (2; −1) на одной прямой. В случае утвердительного ответа укажите, какая из точек лежит между двумя другими.

923. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются точки A (5; 1), B (9; −2), C (7; 2), — прямоугольный, и составьте уравнение окружности, описанной около него.

924. Установите, является ли отрезок CD диаметром окружности $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 52$, если C (−8; 7), D (4; −1).

925. Окружность, центр которой принадлежит оси ординат, проходит через точки A(1; 2) и B(3; 6). Принадлежит ли этой окружности точка C (−3; 4)?

926. Окружность с центром в точке M(−5; 3) касается оси ординат. Найдите координаты точек пересечения окружности с осью абсцисс.

927. Найдите длину линии, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

928. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку P (−3; 5), угловой коэффициент которой равен 6.

929. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку S (−1; 4) и образует угол 135° с положительным направлением оси абсцисс.

930. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A (−3; 1) параллельно прямой $5x + 3y = 6$.

931. Найдите уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точки A (−3; −2) и B (2; 5).

4. Векторы на плоскости

932. Две вершины прямоугольника $ABCD$ — точки A (3; 2) и B (3; −4). Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ равен 10. Найдите координаты точек C и D.

933. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 299). Выразите векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{CO}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

934. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Найдите:

1) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$;

2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$;

3) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}$.

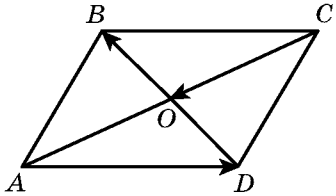


Рис. 299

935. Найдите модуль вектора $\vec{n}=3\vec{a}-2\vec{b}$, где $\vec{a}\,(1;-2)$, $\vec{b}\,(-1;3)$.

936. Точки E и F — середины сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$ соответственно (рис. 300). Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$.

937. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно, причем $BM=\frac{1}{4}BC$, $CK=\frac{2}{3}CD$ (рис. 301). Выразите:

1) векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$;

2) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AM}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{AK}=\vec{n}$.

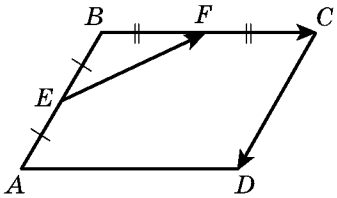


Рис. 300

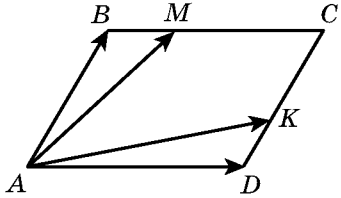


Рис. 301

938. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены такие точки D и E соответственно, что $AD : DC = 1 : 2$, $BE : EC = 2 : 1$. Выразите:

1) векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{BE}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$;

2) векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{AE}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$.

939. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KP}$, если M (4; −1), N (−6; 5), K (7; −2), P (2; 1)?

940. Найдите значение k, при котором векторы $\vec{a}(k; -2)$ и $\vec{b}(6; 3)$ коллинеарны.

941. Даны векторы $\vec{a}(3; -2)$ и $\vec{b}(x; 4)$. При каком значении x выполняется равенство $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$?

942. Найдите косинусы углов треугольника ABC, если A (−3; −4), B (2; −3), C (3; 5). Установите вид треугольника.

943. Даны векторы $\vec{a}(2; -1)$ и $\vec{b}(1; -2)$. Найдите значение m, при котором векторы $\vec{a} + m\vec{b}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

944. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, если $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и $\vec{m} \perp \vec{n}$.

945. Даны векторы $\vec{a}(2; -4)$ и $\vec{b}(-1; 1)$. Найдите:

1) $|\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|2\vec{a} + \vec{b}|$.

946. Составьте уравнение прямой, которая касается окружности с центром M (0; −4) в точке A (5; −3).

5. Геометрические преобразования

947. При параллельном переносе образом точки A (3; −2) является точка B (5; −3). Какая точка является образом точки C (−3; 4) при этом параллельном переносе?

948. Постройте образы точек A (1; −3), B (0; −5) и C (2; 1) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}(-2; 1)$. Запишите координаты построенных точек.

949. Даны точки C (7; −4) и D (−1; 8). При параллельном переносе образом середины отрезка CD является точка P (−1; −3). Найдите координаты точек, являющихся образами точек C и D.

950. На рисунке 302 $CB = CD$, $\angle ACB = \angle ACD$. Докажите, что точки B и D симметричны относительно прямой AC.

951. Найдите координаты точек, симметричных точке K (4; −2) относительно осей координат и начала координат.

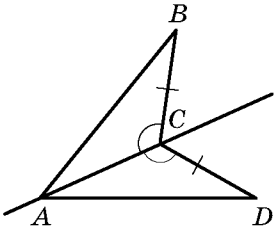


Рис. 302

952. Найдите x и y, если точки A (x; −2) и B (3; y) симметричны относительно оси абсцисс.

953. Даны луч OA и точка B, ему не принадлежащая. Постройте луч, симметричный данному относительно точки B.

954. Симметричны ли точки M (−3; 10) и N (−1; 6) относительно точки K (1; 4)?

955. Запишите уравнение окружности, симметричной окружности $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 11$ относительно:

1) начала координат; 2) точки M(−3; 3).

956. Даны точки K и O. Постройте точку K_1, являющуюся образом точки K при повороте вокруг точки O: 1) на угол 130° против часовой стрелки; 2) на угол 40° по часовой стрелке.

957. Даны отрезок AB и точка O, ему не принадлежащая. Постройте отрезок A_1B_1, являющийся образом отрезка AB при повороте на угол 50° вокруг точки O по часовой стрелке.

958. На какой угол надо повернуть прямоугольник вокруг его центра симметрии, чтобы его образом был этот же прямоугольник?

959. Постройте треугольник, гомотетичный данному тупоугольному треугольнику, если центром гомотетии является центр описанной окружности треугольника, коэффициент гомотетии $k = -2$.

960. Образом точки A (8; −2) при гомотетии с центром в начале координат является точка B (4; −1). Найдите коэффициент гомотетии.

961. Стороны двух правильных треугольников равны 8 см и 28 см. Чему равно отношение их площадей?

962. Многоугольник F_1 подобен многоугольнику F_2 с коэффициентом подобия k. Буквами P_1, P_2, S_1, S_2 обозначили соответственно их периметры и площади. Заполните пустые клеточки в таблице.

P_1	P_2	S_1	S_2	k
	19	64	16	
12	36	7		
	35	4	100	
	21	36		2

963. Прямая, параллельная стороне треугольника длиной 6 см, делит его на две фигуры, площади которых относятся как 1 : 3. Найдите отрезок этой прямой, содержащийся между сторонами треугольника.

964. На стороне BC квадрата $ABCD$ отметили точку M так, что $BM : MC = 1 : 2$. Отрезки AM и BD пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника APD, если площадь треугольника BPM равна 27 см^2.

965. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите площадь трапеции, если $AB : BM = 5 : 3$, $AD > BC$, а площадь треугольника AMD равна 32 см^2.

966. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. К окружности, вписанной в этот треугольник, проведена касательная, параллельная основанию AC, которая пересекает стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Вычислите площадь треугольника MBK.

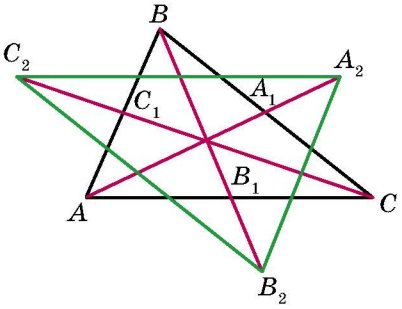


Рис. 303

967. На продолжениях медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC отметили соответственно точки A_2, B_2 и C_2 так, что $A_1A_2 = \frac{1}{2}AA_1$, $B_1B_2 = \frac{1}{2}BB_1$, $C_1C_2 = \frac{1}{2}CC_1$ (рис. 303). Найдите площадь треугольника $A_2B_2C_2$, если площадь треугольника ABC равна 1.

6. Начальные сведения по стереометрии

968. Сколько разных плоскостей можно провести через две произвольные точки?

969. Точка A не принадлежит плоскости α. Сколько существует прямых, проходящих через точку A и параллельных плоскости α?

970. Верно ли утверждение, что если две прямые лежат в разных плоскостях, то они скрещивающиеся?

971. Прямые a и b параллельны. Как расположена прямая b относительно плоскости α, если прямая a пересекает плоскость α?

972. Прямые a и b параллельны плоскости α. Можно ли утверждать, что прямые a и b параллельны?

973. Основанием прямой призмы является параллелограмм, стороны которого равны 3 см и $4\sqrt{2}$ см, а острый угол — $45°$. Найдите площадь боковой поверхности, площадь поверхности и объем призмы, если ее боковое ребро равно 6 см.

974. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 13 см, а один из катетов — 12 см. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы, если ее боковое ребро равно 10 см.

975. Найдите объем треугольной пирамиды, основание которой — правильный треугольник со стороной 8 см, а высота пирамиды равна 5 см.

976. Радиус основания цилиндра равен 3 см, а его образующая — 6 см. Найдите площадь поверхности и объем цилиндра.

977. Прямоугольник, стороны которого равны 6 см и 4 см, вращается вокруг большей стороны. Найдите площадь поверхности и объем образовавшегося цилиндра.

978. Радиус основания конуса равен 8 см, а высота — 15 см. Найдите площадь поверхности и объем конуса.

979. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 см и 4 см, вращается вокруг меньшего катета. Найдите площадь поверхности и объем образовавшегося конуса.

980. Полукруг, диаметр которого равен 6 см, вращается вокруг диаметра. Найдите площадь поверхности и объем образовавшегося шара.

981. Радиус шара увеличили в k раз. Как при этом изменились площадь поверхности и объем шара?

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА ГЕОМЕТРИИ 8 КЛАССА

Четырехугольник

1. Параллелограмм. Свойства параллелограмма

Параллелограммом называют четырехугольник, у которого каждые две противоположные стороны параллельны.

У параллелограмма противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Высотой параллелограмма называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей сторону параллелограмма, на прямую, содержащую противоположную сторону.

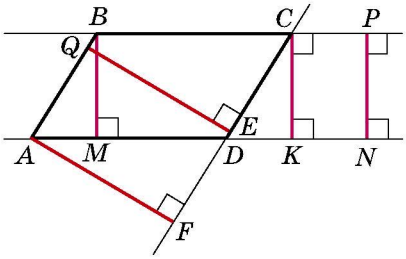


Рис. 304

На рисунке 304 каждый из отрезков AF, QE, BM, PN, CK является высотой параллелограмма $ABCD$.

2. Признаки параллелограмма

Если в четырехугольнике каждые две противоположные стороны равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

3. Прямоугольник

Прямоугольником называют параллелограмм, у которого все углы прямые.

Диагонали прямоугольника равны.

Если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

4. Ромб

Ромбом называют параллелограмм, у которого все стороны равны.

Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм — ромб.

5. Квадрат

Квадратом называют прямоугольник, у которого все стороны равны. Также квадрат — это ромб, у которого все углы прямые.

6. Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.

7. Трапеция

Трапецией называют четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называют основаниями, а непараллельные — боковыми сторонами (рис. 305).

В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) углы A и D называют углами при основании AD, а углы B и C — углами при основании BC.

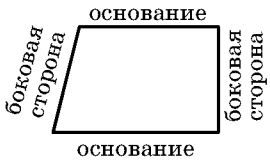


Рис. 305

Высотой трапеции называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей одно из оснований, на прямую, содержащую другое основание.

Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

8. Центральные и вписанные углы

Центральным углом окружности называют угол с вершиной в центре окружности.

Вписанным углом окружности называют угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

Вписанный угол измеряется половиной градусной меры дуги, на которую он опирается.

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

Вписанный угол, опирающийся на диаметр (полуокружность), — прямой.

9. Вписанные и описанные четырехугольники

Четырехугольник называют вписанным, если существует окружность, которой принадлежат все его вершины.

Если четырехугольник является вписанным, то сумма его противоположных углов равна 180°.

Если в четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то он является вписанным.

Четырехугольник называют описанным, если существует окружность, которая касается всех его сторон.

Если четырехугольник является описанным, то суммы его противоположных сторон равны.

Если в выпуклом четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то этот четырехугольник является описанным.

Подобие треугольников

10. Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках

Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Отношением двух отрезков называют отношение их длин, выраженных в одних и тех же единицах измерения.

Теорема о пропорциональных отрезках. Если параллельные прямые пересекают стороны угла, то отрезки, образовавшиеся на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам, образовавшимся на другой стороне угла.

Свойство медиан треугольника. Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса треугольника делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам.

11. Подобие треугольников

Два треугольника называют подобными, если у них равны углы и соответственные стороны пропорциональны.

Лемма о подобных треугольниках. Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от данного треугольника ему подобный.

Первый признак подобия треугольников. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Второй признак подобия треугольников. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Третий признак подобия треугольников. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Решение прямоугольных треугольников

12. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

Квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, равен произведению проекций катетов на гипотенузу. Квадрат катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

$$CD^2 = AD \cdot DB;$$
$$AC^2 = AB \cdot AD;$$
$$BC^2 = AB \cdot DB.$$

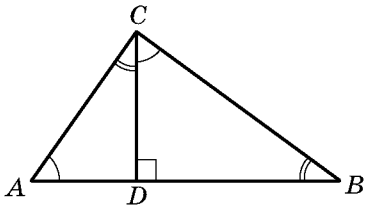


Рис. 306

13. Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

14. Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к прилежащему.

Синус, косинус и тангенс угла зависят только от величины этого угла.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

15. Решение прямоугольных треугольников

Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус угла, противолежащего этому катету.

Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус угла, прилежащего к этому катету.

Катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на тангенс угла, противолежащего первому катету.

Катет прямоугольного треугольника равен частному от деления второго катета на тангенс угла, прилежащего к первому катету.

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на синус противолежащего ему угла.

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на косинус прилежащего к нему угла.

Решить прямоугольный треугольник означает найти его неизвестные стороны и углы по известным сторонам и углам.

Площадь многоугольника

16. Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, соответствующую этой стороне.

17. Площадь треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведенную к ней высоту.

Площадь прямоугольного треугольника равна полупроизведению его катетов.

18. Площадь трапеции

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.

11. 3) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ или $-\frac{\sqrt{13}}{4}$; 4) 0,6. **12.** 1) $\frac{12}{13}$ или $-\frac{12}{13}$; 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$. **15.** $-\frac{1}{2}$. **16.** 120°. **17.** 1) $2-\sqrt{3}$; 2) −2,5; 3) $-\sqrt{3}-2$. **18.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$. **23.** 10 см, 30°, 120°. **26.** $5\sqrt{6}$ см. **30.** 120°. **31.** 45°. **37.** $2\sqrt{7}$ см. **38.** $\sqrt{10}$ см. **39.** $\sqrt{21}$ см или $\sqrt{29}$ см. **40.** 13 см. **41.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **42.** $3\sqrt{89}$ см. **43.** $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$. **44.** $\sqrt{a^2+b^2-ab}$. **45.** 15 см, 24 см. **46.** 2 см, $4\sqrt{3}$ см. **47.** 3 см, 5 см. **48.** 10 см, 6 см, 14 см. **49.** 6 см или 10 см. **50.** 75 см. **51.** 13 см. **52.** $\sqrt{79}$ см. **56.** 14 см. **57.** 34 см. **58.** 7 см, 9 см. **59.** 20 см, 30 см. **60.** 8 см. *Указание.* Проведите через вершину B прямую, параллельную стороне CD, и рассмотрите образовавшийся треугольник. **61.** $\frac{13}{20}$. **62.** $\sqrt{\frac{247}{7}}$ см. **63.** Нет. **65.** 10 см. **66.** 6 см. **67.** 11 см. **68.** 6 см. **69.** 22 см. **74.** 4 см, 6 см. **91.** $2\sqrt{6}$ см. **92.** 6 см. **93.** $\frac{a\sin\beta}{\cos(\beta+\gamma)\sin\gamma}$. **94.** $\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **95.** $\frac{c\sin\alpha\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma\sin\varphi}$. **96.** $\frac{m\sin\alpha\sin\varphi}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}$. **98.** 9 см. **99.** $\frac{25}{3}$ см. **100.** 60° или 120°. **101.** 4,5 ч. **102.** $\frac{b\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$. **103.** $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ+\frac{3\alpha}{4}\right)}$. **105.** $\frac{85}{8}$ см. *Указание.* Искомый радиус можно найти как радиус окружности, описанной около треугольника, сторонами которого являются одно из оснований, боковая сторона и диагональ трапеции. **106.** $\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}$. *Указание.* Докажите, что $CE = DE$. **107.** $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Указание. На продолжении медианы AM за точку M отметьте точку K такую, что $AM = MK$, и примените теорему синусов к треугольнику ACK. **108.** $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$. **109.** *Указание.* Выразите углы AHB, BHC и AHC через углы треугольника ABC. **110.** Скорее доехать через село C. *Указание.* Примите расстояние между какими-нибудь двумя селами за a и выразите через a расстояния между другими селами. **111.** Автобус. **114.** 12 см. **127.** 107°, 73°, 132°, 48°. *Указание.* Проведите через одну из вершин верхнего основания прямую, параллельную боковой стороне трапеции, и рассмотрите образовавшийся треугольник. **128.** 9 см. **129.** 30 см, 48 см. **135.** 1) 60° или 120°; 2) 90°. **136.** 30° или 150°. **140.** 12 см. **141.** 24 см. **142.** 24 см². **143.** $\frac{7}{3}$ см. **144.** 1) $\frac{3}{2}$ см, $\frac{25}{8}$ см; 2) 8 см, $\frac{145}{8}$ см. **145.** 2 см, $\frac{145}{8}$ см. **156.** 3 : 5. **157.** $\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$. **158.** $2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$. **159.** $\frac{b^2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$. **160.** $\frac{h_1h_2}{2\sin\alpha}$. **161.** $\frac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$. **162.** 51 см², 75 см², 84 см². **163.** $\frac{24}{7}$ см. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD}$. **164.** 360 см². *Указание.* Проведите через один из концов верхнего основания трапеции прямую, параллельную боковой стороне трапеции, и найдите высоту треугольника, который эта прямая отсекает от трапеции. **165.** $12\sqrt{5}$ см². *Указание.* Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $BC \parallel AD$. Проведите через вершину C прямую, параллельную прямой BD и пересекающую прямую AD в точке E. Докажите, что треугольник ACE и данная трапеция равновелики. **166.** 1 : 2. *Указание.* $\frac{S_{\Delta AMK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AK\cdot AM\sin A}{\frac{1}{2}AC\cdot AB\sin A} = \cos^2 A$. **167.** 19,5 см. **168.** 13 см, 14 см, 15 см. **170.** 10°. **171.** 91 см,

21 см. **172.** 9,6 см. **196.** $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$. **197.** $2\sqrt{R^2-r^2}$. **198.** $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$. **202.** ≈17,4 см. **203.** ≈19,8 см. **204.** 5 сторон. **205.** 18 сторон. **208.** 1) $\frac{a(3+\sqrt{3})}{6}$; 2) $\frac{a(3-\sqrt{3})}{6}$. **209.** 1) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **210.** 1 : 2. **211.** $\sqrt{3}$: 2. **214.** 4,4 см. **215.** $2R^2\sqrt{2}$. **216.** $a\sqrt{3}$; $2a$; $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **217.** $6(\sqrt{2}-1)$ см. **218.** 8 см. **219.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $a(\sqrt{2}+1)$; $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **220.** $\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$. **221.** $\frac{a(2+\sqrt{2})}{2}$. **222.** Треугольников, или квадратов, или шестиугольников. *Указание.* Около одной точки можно уложить столько дощечек, во сколько раз угол при вершине дощечки, равный $\frac{180°(n-2)}{n}$, меньше 360°, то есть $360°:\frac{180°(n-2)}{n}=\frac{2n}{n-2}$ дощечек. Значение выражения $\frac{2n}{n-2}$ должно быть натуральным числом. Так как $\frac{2n}{n-2}=\frac{2n-4+4}{n-2}=$ $=2+\frac{4}{n-2}$, то значение выражения $\frac{4}{n-2}$ должно быть натуральным числом. **223.** *Указание.* Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник (рис. 307), K — точка пересечения прямых CD и EF. Тогда AK — искомый отрезок. **225.** 18 см. **226.** 96 см². **227.** 9 см. **252.** 22,5°.

257. $\sqrt{6}$ см. **259.** 1) $\frac{25(\pi-2\sqrt{2})}{8}$ см²; 2) $\frac{25(5\pi-3)}{12}$ см²; 3) $\frac{25(11\pi+3)}{12}$ см². **260.** 1) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}$ см²; 2) $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{3}$ см². **265.** 2π см, $\frac{10\pi}{3}$ см, $\frac{20\pi}{3}$ см.

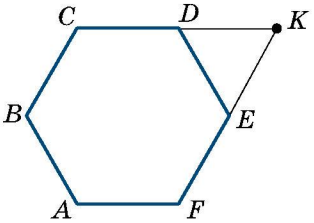


Рис. 307

266. $\frac{25\pi}{18}$ см, $\frac{35\pi}{18}$ см, $\frac{20\pi}{3}$ см. **267.** $\frac{8\pi}{3}$ см. **268.** 6π см. **269.** 1 : 1. *Указание.* Докажите, что в обоих случаях сумма длин полуокружностей равна $\frac{1}{2}\pi \cdot AB$. **271.** 50 см. **273.** $\frac{a^2(\pi-2)}{8}$. **274.** ≈17,3 %. **275.** $\frac{a^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{36}$. **276.** $\frac{\pi R^2}{9}$. **277.** $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **278.** $\frac{2\pi a}{3}$. *Указание.* Рассмотрите ΔAND и докажите, что он равносторонний. **279.** *Указание.* Сумма площадей всех закрашенных и незакрашенных серпиков равна сумме площадей двух кругов, диаметры которых являются соседними сторонами прямоугольника, а сумма площадей незакрашенных серпиков и прямоугольника равна площади круга, диаметр которого является диагональю прямоугольника. Покажите, что эти суммы равны. **280.** *Указание.* Общая часть квадратов содержит круг, радиус которого равен $\frac{1}{2}$ см (рис. 308). **282.** $\frac{130}{17}$ см, $\frac{312}{17}$ см. **283.** *Указание.* Через середину меньшего основания проведите прямые, параллельные боковым сторонам трапеции. **303.** 1) Да, точка B лежит между точками A и C; 2) нет.

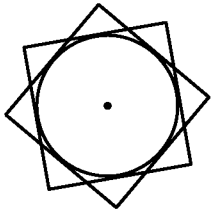


Рис. 308

305. $x = 7$ или $x = -1$. **306.** (3; 0). **307.** (0; 0,5). **308.** (3; −0,5). **309.** (−2; 2). **310.** (3; −2). **314.** A (−5; 3), C (7; 5). **315.** $2\sqrt{73}$. **316.** $\left(3\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$ или $\left(-3\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right)$. **317.** $\left(-2;4\sqrt{3}\right)$ или $\left(-2;-4\sqrt{3}\right)$. **318.** (3; 3) или (−6; 6). *Указание.* Рассмотрите два случая: B (a; a) или B (a; $-a$). **319.** (5,5; 0), (3; 0), (−1; 0). *Указание.* Рассмотрите три случая: $AC = BC$, $AC = AB$ и $BC = AB$. **320.** (0; 6), (0; 4), (0; 3,5), (0; 8,5). *Указание.* Рассмотрите три случая: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AC^2 + AB^2 = BC^2$. **321.** $\sqrt{33}$ см. **322.** 56°, 124°. **323.** 8 см и 16 см. **342.** Две окружности: $x^2 + (y - 11)^2 = 45$ и $x^2 + (y + 1)^2 = 45$. **343.** $(x - 3)^2 + y^2 = 50$. **345.** 1) Да, точка (−1; 5) — центр окружности, $R = 7$; 2) нет; 3) нет; 4) да,

точка (2; 7) — центр окружности, $R=\sqrt{2}$. **346.** 1) Точка (0; −8) — центр окружности, $R = 2$; 2) точка (4; −2) — центр окружности, $R=\sqrt{5}$. **347.** $(x - 2)^2 + y^2 = 13$. **348.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ или $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 25$. **349.** $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 10$ или $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$. **350.** $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ или $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. *Указание.* Диаметр искомой окружности равен расстоянию между осью абсцисс и прямой $y = -4$, а центр окружности принадлежит биссектрисе третьего или четвертого координатного угла. **351.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ или $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$. **352.** 1) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$; 2) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 169$. **353.** $180\sqrt{3}$ см². **354.** 70 см. **355.** 600 см². **362.** 1) $y = 2x - 5$; 2) $x = 3$; 3) $y = -1$; 4) $5x + 3y = 6$. **363.** 1) $y = -3x + 1$; 2) $x - 6y = 12$. **364.** 1) (−8; −31); 2) (−1; 2). **365.** 1) (2; −7); 2) (4; −1). **366.** $y = -0{,}5x - 4$. **367.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}$. **369.** 12. **370.** 28. **371.** 6. **372.** (2; 5), (5; 2). **373.** (5; 0). **375.** $\frac{10\sqrt{29}}{29}$. *Указание.* Искомое расстояние равно высоте треугольника, ограниченного осями координат и данной прямой. **376.** $4\sqrt{2}$. **377.** $3\sqrt{10}$. **378.** $x - 3y = 2$. **379.** $7x + 5y = -8$. **380.** (3; 3) или (15; 15). **381.** (−2; 2) или (−10; 10). **382.** $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 17$. **383.** $(y - 4)(y + 4) = 0$. **384.** $\sqrt{10}$ см, $\sqrt{58}$ см. **385.** 104 см. **386.** 12,5 см. **391.** 1) $y = 4x + 19$; 2) $y = -3x - 2$; 4) $y = 7$. **392.** $y = -0{,}5x - 4$. **393.** 1) $y = -7x + 2$; 2) $3x - 4y = -39$. **394.** 1) $y = 9x + 13$; 2) $3x + y = 9$. **395.** 1) $y=x\sqrt{3}+6-2\sqrt{3}$; 2) $y=-x\sqrt{3}+6+2\sqrt{3}$. **396.** 1) $y = x - 5$; 2) $y = -x + 1$. **397.** *а*) $y=\frac{x\sqrt{3}}{3}+3$; *б*) $y=-\frac{x\sqrt{3}}{3}+2$. **398.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет. **400.** $y = 4x + 9$. **401.** $y = 3x - 12$. **404.** 30 см, 40 см. **405.** 144 см². **431.** Прямоугольник или равнобокая трапеция. **439.** 60°, 120°. **440.** 4 см, 12 см. **441.** $\frac{a\sqrt{13}}{3}$. *Указание.* Проведите через вершину B прямую, параллельную прямой MK.

457. $\overrightarrow{AF}(-2;2)$, $\overrightarrow{FD}(2;4)$. **458.** $\overrightarrow{DE}(-4;6)$, $\overrightarrow{EO}(-4;-6)$. **459.** $\vec{a}(-6;-8)$ или $\vec{a}(8;6)$. **460.** $\vec{c}(\sqrt{2};\sqrt{2})$ или $\vec{c}(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$. **461.** C (7; 17), D (2; 17) или C (7; −7), D (2; −7). **462.** B (16; 2), C (16; −6) или B (−14; 2), C (−14; −6). **464.** 20 см, 7 см, 21 см. **465.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **511.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **512.** *Указание.* Покажите, что каждый из векторов $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ равен нуль-вектору. **514.** *Указание.* Достаточно показать, что $\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{XD}-\overrightarrow{XC}$. **515.** Окружность радиуса AB с центром в точке A. **516.** Серединный перпендикуляр отрезка AB. **517.** *Указание.* Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC. На продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложите отрезок A_1D, равный MA_1. **518.** *Указание.* Имеем: $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_2A_2}=\vec{0}$, $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_2A_2}=\vec{0}$, отсюда $\overrightarrow{A_2A_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}$. **519.** 4 см, 6 см. **520.** 2,5 см. **552.** −4; 4. **553.** −1,5. **555.** $\vec{m}(-15;36)$. **556.** $\vec{a}(-3;4)$. **559.** $x=2, y=-3$. **560.** $\overrightarrow{OK}=0,5\vec{a}-0,1\vec{b}$. **564.** $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. **566.** *Указание.* $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1B_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2M_2}$. С другой стороны, $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2M_2}$. Сложите эти равенства. **572.** *Указание.* Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC. Воспользуйтесь тем, что $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$. **573.** *Указание.* Воспользуйтесь задачей 566 и ключевой задачей 1 п. 15. **574.** *Указание.* Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$. **575.** 18 см. **576.** 60°; $24\sqrt{3}$ см². **577.** $R\sqrt{3}$. **593.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0. **596.** −3 и 3. **597.** −1. **599.** $\vec{b}(-12;16)$. **600.** −1 и 1. **602.** 4. **603.** −0,5. **604.** $\sqrt{7}$. **605.** $2\sqrt{7}$. **608.** $\frac{3}{5}$, 0, $\frac{4}{5}$. **609.** 30°, 60°, 90°. **612.** 0°. **613.** 120°. **614.** *Указание.* Пусть $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$,

$\overrightarrow{AK} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Найдите $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AK}$. **615.** 45°. *Указание.* Пусть $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Очевидно, что $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$. Тогда $\overrightarrow{AO} = 2\vec{c}$, $\overrightarrow{DO} = 3\vec{b}$. Отсюда $\overrightarrow{AB} = 2\vec{c} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c} + 3\vec{b}$. **616.** 30°. *Указание.* $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$. Отсюда $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos\angle ABD$. **617.** *Указание.* $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BF}$. Осталось показать, что $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$. **619.** 100 см. **620.** 6π см. **633.** При $AB \parallel a$. **643.** 1) Бесконечно много; 2) бесконечно много. **649.** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$. **650.** $y = x^2 - 4x + 1$. **651.** *Указание.* Пусть $ABCD$ — искомая трапеция ($BC \parallel AD$). Постройте образ диагонали BD при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$. **653.** *Указание.* Постройте образ данной прямой при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ (или $\overrightarrow{BA}$). Рассмотрите точки пересечения образа с данной окружностью. Заметим, что если построенный образ и данная окружность не имеют общих точек, то задача не имеет решения. **655.** *Указание.* Пусть $ABCD$ — искомый четырехугольник с данными сторонами AB и CD (рис. 309). Рассмотрим параллельный перенос стороны AB на вектор $\overrightarrow{BC}$. Треугольник A_1CD можно построить по двум сторонам CD и $CA_1 = BA$ и углу A_1CD, равному $\angle BCD - (180° - \angle ABC)$. Треугольник AA_1D можно построить по стороне A_1D и двум прилежащим углам AA_1D и ADA_1. **656.** *Указание.* Пусть точка A_1 — образ точки A при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MN}$. Соедините точки A_1 и B. **657.** 36 см. **658.** 40. **659.** 490 см². **701.** $a \perp l$ или прямые a и l совпадают. **704.** *Указание.* Если четырехугольник имеет ось симметрии, то образом любой его вершины является вершина этого же четырехугольника. Выберите некоторую вершину параллелограмма и рассмотрите две

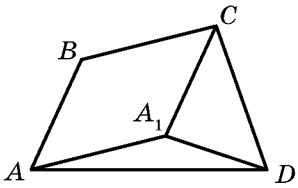


Рис. 309

возможности: ее образом является или соседняя вершина, или противолежащая. **707.** *Указание.* Углы M_1BA и MBA симметричны относительно прямой AB. Следовательно, $\angle M_1BA = \angle MBA$. Аналогично $\angle M_2BC = \angle MBC$. Осталось показать, что $\angle M_1BM_2 = 180°$. **708.** 1) $A_1(0; -2)$, $B_1(-1; 3)$; 2) $A_2(0; 2)$, $B_2(1; -3)$. **709.** $x = 2$, $y = -1$. **710.** *Указание.* Пусть ΔABC имеет центр симметрии. Тогда, например, образом вершины A является вершина B. Следовательно, центр симметрии — это середина стороны AB. Однако в этом случае образ вершины C не будет принадлежать треугольнику ABC. **712.** *Указание.* При центральной симметрии образом стороны данного четырехугольника является сторона этого же четырехугольника. Далее воспользуйтесь ключевой задачей п. 18. **713.** *Указание.* При симметрии относительно точки O образы точек A_1 и B_1 принадлежат окружности с центром O_2. Так как образом прямой, проходящей через центр симметрии, является эта же прямая, то образы точек A_1 и B_1 также принадлежат прямой A_1B_1. Следовательно, отрезок A_2B_2 — образ отрезка A_1B_1. **714.** 2 см или 1 см. **715.** 2 см. *Указание.* При рассматриваемом повороте точка B является образом точки D, точка C_1 — образом точки C, точка A — образом точки A (рис. 310). Следовательно, ΔABC_1 — образ ΔADC. Отсюда $\angle ABC_1 = \angle ADC = 90°$. Следовательно, точки C_1, B, C лежат на одной прямой. **716.** *Указание.* Пусть точка A_1 — образ точки A при симметрии относительно прямой a. Тогда точка пересечения прямых a и A_1B будет искомой. Заметим, что если точки A и B симметричны относительно прямой a, то задача имеет бесконечно много решений. **718.** *Указание.* Пусть точка A_1 — образ точки A при симметрии относительно прямой a. Тогда точка пересечения прямых a и A_1B будет искомой. **719.** *Указание.*

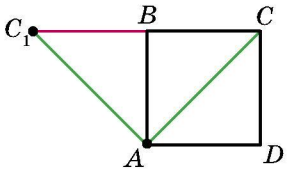


Рис. 310

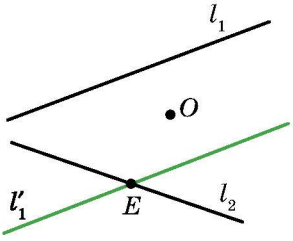


Рис. 311

Рассмотрите центральную симметрию с центром в точке пересечения диагоналей параллелограмма. **720.** *Указание.* Найдите середину отрезка AC, а далее воспользуйтесь примером 3 п. 18. **721.** *Указание.* Пусть O — данная точка, l_1 и l_2 — данные прямые. Построим образ прямой l_1 при симметрии относительно точки O. Получим прямую l_1' (рис. 311), которая пересекает прямую l_2 в точке E. Найдем прообраз точки E при рассматриваемой симметрии. Очевидно, что он должен принадлежать прямой l_1. Следовательно, точка, симметричная точке E относительно точки O, также принадлежит прямой l_1. **722.** *Указание.* Воспользуйтесь идеей решения примера 5 п. 18. **723.** *Указание.* Рассмотрим поворот с центром в точке C против часовой стрелки на угол 60°. При таком повороте образами точек E и B будут соответственно точки D и A. Следовательно, отрезок AD и его середина K будут соответственно образами отрезка BE и его середины M. **724.** *Указание.* Пусть l_1, l_2, l_3 — данные параллельные прямые, O — произвольная точка прямой l_2 (рис. 312). Прямая l_1' — образ прямой l_1 при повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол 60° — пересекает прямую l_3 в точке M. Найдем прообраз точки M при заданном повороте. Очевидно, что он принадлежит прямой l_1. Поэтому достаточно отложить от луча OM угол, равный 60°. **725.** *Указание.* Пусть треугольник A_1BC — образ треугольника ABC при симметрии относительно серединного перпендикуляра отрезка BC (рис. 313). Треугольник ACA_1 можно построить по известным сторонам AC и A_1C ($A_1C = AB$) и углу ACA_1, равному разности углов B и C. **726.** *Указание.* Пусть точка C_1 симметрична точке C относительно прямой AB. Постройте окружность с центром

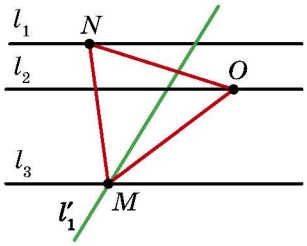


Рис. 312

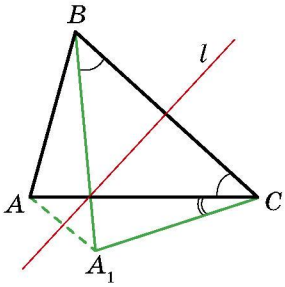


Рис. 313

в точке C_1, которая касается прямой AB. Проведите через точку D касательную к построенной окружности. Эта касательная пересекает прямую AB в искомой точке. **727.** *Указание.* Пусть O — данная точка, l_1, l_2 и l_3 — данные прямые. Постройте отрезок AC, серединой которого является точка O, а концы принадлежат прямым l_1 и l_2. Этот отрезок является одной из диагоналей ромба. Найдите точку пересечения прямой l_3 с серединным перпендикуляром отрезка AC. **728.** *Указание.* Рассмотрим поворот с центром в точке A против часовой стрелки на угол $90°$. При этом повороте образом отрезка AD будет отрезок AB (рис. 314). Пусть E_1 — образ точки E. Тогда треугольник ABE_1 — образ треугольника ADE. Отсюда $\Delta ABE_1 = \Delta ADE$. Тогда $DE = BE_1$, $AE = AE_1$, $\angle E_1AB = \angle EAD$. Имеем: $\angle E_1AF = \angle E_1AB + \angle BAF = \angle EAD + \angle FAE = \angle FAD$. Но $\angle FAD = \angle E_1FA$. Следовательно, ΔAE_1F — равнобедренный и $AE_1 = E_1F$. **729.** *Указание.* Рассмотрим поворот с центром в точке A по часовой стрелке на угол $60°$ (рис. 315). При этом повороте образом треугольника ABP будет треугольник ACP_1 (точка P_1 — образ точки P). Отсюда $\angle AP_1C = \angle APB = 150°$. Треугольник APP_1 — равносторонний. Тогда $\angle AP_1P = 60°$. Следовательно, $\angle PP_1C = 90°$. Осталось заметить, что $P_1C = PB$ и $PP_1 = AP$. **732.** $\frac{120}{7}$ см. **752.** 1) 1,5; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$. **756.** $\frac{1}{3}$. **757.** 12 см. **758.** 28,8 см^2. **760.** $\frac{S}{16}$. **761.** 1) $k = 2$, точка B или $k = -2$, точка пересечения диагоналей трапеции

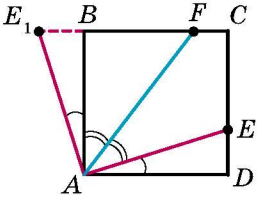


Рис. 314

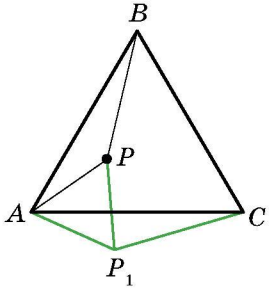


Рис. 315

$AMNC$. **766.** *Указание.* Пусть данная окружность касается прямой a в точке M. Точка M_1 — образ точки M при гомотетии с центром A. Так как образом прямой a является эта же прямая, то точка M_1 принадлежит прямой a. Покажите, что образ данной окружности и прямая a имеют только одну общую точку M_1. **767.** $-\frac{1}{2}$. *Указание.* По определению гомотетии $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$. **768.** (−3; 2). **769.** 1) $x = -3$, $y = 8$; 2) $x = 12$, $y = -2$. **770.** $x = 0$, $y = 8$. **771.** 28 см^2. **772.** 20 см^2. **773.** 112 см^2. **775.** 1) $y = 2x + 2$; 2) $y = 2x - \frac{1}{2}$. *Указание.* Выберите произвольную точку M, принадлежащую данной прямой. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM_1} = 2\overrightarrow{OM}$. Точка M_1 — образ точки M при данной гомотетии. Воспользуйтесь тем, что угловой коэффициент искомой прямой равен 2. **776.** 1) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$; 2) $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 16$. **777.** *Указание.* Прямая A_2B_2 является образом прямой A_1B_1 при гомотетии с центром в точке касания и коэффициентом, равным отношению большего радиуса к меньшему. **779.** Окружность, которая является образом данной окружности при гомотетии с центром A и коэффициентом, равным $\frac{1}{2}$, за исключением точки A. **781.** *Указание.* Треугольник с вершинами в полученных точках является образом треугольника с вершинами в серединах сторон данного треугольника при гомотетии с центром M и коэффициентом, равным 2. **782.** *Указание.* Постройте произвольный треугольник, два угла которого равны двум данным углам. Опишите около него окружность. Искомый треугольник является образом построенного треугольника при гомотетии с центром в произвольной точке и коэффициентом, равным отношению данного радиуса к радиусу построенной окружности. **784.** *Указание.* См. решение примера 1 п. 19. **785.** *Указание.* Рассмотрите гомотетию с центром в середине отрезка AB и коэффициентом, равным $\frac{1}{3}$. **786.** Прямая, являющаяся образом прямой l при гомотетии с центром в

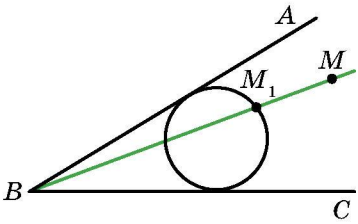


Рис. 316

середине отрезка AB и коэффициентом, равным $\frac{1}{3}$, за исключением точки пересечения прямых AB и l (если такая точка существует). **787.** *Указание.* Постройте любую окружность, касающуюся сторон угла (рис. 316). Пусть M_1 — одна из точек пересечения прямой BM с построенной окружностью. Рассмотрите гомотетию с центром в точке B и коэффициентом, равным $\frac{BM}{BM_1}$. Задача имеет два решения. **788.** 96 см^2, 4,8 см. **789.** 24. **795.** Точки лежат на одной прямой. **804.** Плоскости могут пересекаться или быть параллельными. **808.** Пересекаются или скрещивающиеся. **813.** $15\sqrt{2}$ см. **814.** $15\sqrt{3}$ см. **815.** 15 см. **816.** 20 см. **817.** $2\sqrt{21}$ см. **818.** $2\sqrt{12+3\sqrt{6}}$ см. **819.** 90°. **820.** $3\sqrt{10}$ см. **821.** 13. **838.** 680 см^2, 840 см^2, 1360 см^3. **839.** 350 см^2, 420 см^3. **840.** $3d^2$, $\frac{\sqrt{2}}{4}d^3$. **845.** $48\sqrt{2}$ см^2. **846.** 36 см^2. **850.** $\frac{1}{2}d^3 \sin\alpha \sin\beta \cos^2\beta$. **851.** $m^2 \operatorname{tg}\beta\,(\sin\alpha + \cos\alpha)$; $m^3 \sin\alpha \cos\alpha \operatorname{tg}\beta$. **852.** $8a^2 \cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta$; $2a^3 \sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta$. **853.** $\frac{a^3}{6}$. **854.** CD; 7 см, 10 см. **856.** $y = 0{,}5x - 0{,}5$. **867.** ≈ 1,24 мм. **868.** ≈ 60 000 Н. **869.** 200π см^2; 320π см^3. **870.** 320π см^2; 1024π см^3. **871.** ≈ 3770 кг. **872.** 4,5 см. **873.** ≈ 550 кг. **876.** ≈ 3 кг. **877.** $\pi h^2\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}\pi h^3$. **878.** $2\pi R^2$; $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$. **880.** 25 см или 39 см. *Указание.* Найдите синус угла между данными сторонами, а затем — его косинус. **881.** $(x - 4)^2 + y^2 = 25$ или $(x + 2)^2 + y^2 = 25$. **882.** $2\sqrt{17}$ см или $2\sqrt{41}$ см. **883.** $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}-2}{2\sqrt{21}}$. **885.** 9 см, 24 см. **886.** 1 см или 2 см.

887. 36 см. **888.** $\sqrt{4a^2+d^2}$. **889.** 4 см. *Указание.* Так как трапеция $ABCK$ является вписанной, то $AB = CK$. Тогда $\angle KAC = \angle AKB$, $AC = BK$. **890.** $\frac{9}{16}$; $-\frac{9}{16}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}$. **891.** $\sqrt{111}$ см. **892.** 9,5 см. **893.** 12 см. **894.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **895.** $1:1:\sqrt{3}$. **896.** 6 см. **897.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см. **898.** $\frac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}$. *Указание.* Воспользуйтесь формулой для вычисления площади треугольника по двум сторонам и углу между ними. **899.** $4\sqrt{3}$ см^2. **900.** 3 см, $\frac{3}{4}$ см, $\frac{65}{4}$ см. **901.** 15 см. **902.** 132 см^2. **903.** 450 см^2. **904.** 36 см^2. **906.** $6\sqrt{3}$ см^2. **907.** 1 : 2. **908.** $2a(2-\sqrt{3})$. **909.** 45 см. **910.** $\frac{32\pi}{15}$ см. **912.** $\frac{R^2(4\pi-3\sqrt{3})}{6}$; $\frac{4}{3}\pi R$. **913.** 54°. **915.** $3m$. **916.** $\frac{R^2(3\sqrt{3}-\pi)}{3}$. **918.** (−9; 0). **919.** (0; −2,5). **923.** $(x-7)^2+(y+0{,}5)^2=6{,}25$. **924.** Да. **925.** Да. **926.** (−1; 0), (−9; 0). **927.** 10π. **928.** $y = 6x + 23$. **929.** $y = -x + 3$. **930.** $y=-\frac{5}{3}x-4$. **943.** $-\frac{4}{5}$. **944.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **946.** $5x + y - 22 = 0$. **963.** 3 см или $3\sqrt{3}$ см. **964.** 3 см^2. **965.** 27,5 см^2. **966.** $\frac{320}{27}$ см^2. **967.** $\frac{25}{16}$. *Указание.* Треугольник $A_2B_2C_2$ является образом треугольника ABC при гомотетии с коэффициентом, равным $-\frac{5}{4}$, и центром в точке пересечения медиан треугольника ABC.

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Г	В	А	Б	А	Г	А	В	Б	Б	Г	Б
2	В	Б	Б	А	Г	Г	А	В	Г	В	Б	А
3	Б	Б	А	В	Б	Г	В	Г	Б	В	Б	А
4	В	Г	А	В	А	А	Б	Г	В	А	Г	В
5	Б	А	Г	В	В	Б	Г	А	В	В	А	Г
6	В	Г	Б	В	А	Г	Б	Б	Г	А	Г	А

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Таблица значений тригонометрических функций

Величина угла (в градусах)	Синус	Косинус	Тангенс	Величина угла (в градусах)	Синус	Косинус	Тангенс
0	0,000	1,000	0,000	46	0,719	0,695	1,036
1	0,017	1,000	0,017	47	0,731	0,682	1,072
2	0,035	0,999	0,035	48	0,743	0,669	1,111
3	0,052	0,999	0,052	49	0,755	0,656	1,150
4	0,070	0,998	0,070	50	0,766	0,643	1,192
5	0,087	0,996	0,087	51	0,777	0,629	1,235
6	0,105	0,995	0,105	52	0,788	0,616	1,280
7	0,122	0,993	0,123	53	0,799	0,602	1,327
8	0,139	0,990	0,141	54	0,809	0,588	1,376
9	0,156	0,988	0,158	55	0,819	0,574	1,428
10	0,174	0,985	0,176	56	0,829	0,559	1,483
11	0,191	0,982	0,194	57	0,839	0,545	1,540
12	0,208	0,978	0,213	58	0,848	0,530	1,600
13	0,225	0,974	0,231	59	0,857	0,515	1,664
14	0,242	0,970	0,249	60	0,866	0,500	1,732
15	0,259	0,966	0,268	61	0,875	0,485	1,804
16	0,276	0,961	0,287	62	0,883	0,469	1,881
17	0,292	0,956	0,306	63	0,891	0,454	1,963
18	0,309	0,951	0,335	64	0,899	0,438	2,050
19	0,326	0,946	0,344	65	0,906	0,423	2,145
20	0,342	0,940	0,364	66	0,914	0,407	2,246
21	0,358	0,934	0,384	67	0,921	0,391	2,356
22	0,375	0,927	0,404	68	0,927	0,375	2,475
23	0,391	0,921	0,424	69	0,934	0,358	2,605
24	0,407	0,914	0,445	70	0,940	0,342	2,747
25	0,423	0,906	0,466	71	0,946	0,326	2,904
26	0,438	0,899	0,488	72	0,951	0,309	3,078
27	0,454	0,891	0,510	73	0,956	0,292	3,271
28	0,469	0,883	0,532	74	0,961	0,276	3,487
29	0,485	0,875	0,554	75	0,966	0,259	3,732
30	0,500	0,866	0,577	76	0,970	0,242	4,011
31	0,515	0,857	0,601	77	0,974	0,225	4,331
32	0,530	0,848	0,625	78	0,978	0,208	4,705
33	0,545	0,839	0,649	79	0,982	0,191	5,145
34	0,559	0,829	0,675	80	0,985	0,174	5,671
35	0,574	0,819	0,700	81	0,988	0,156	6,314
36	0,588	0,809	0,727	82	0,990	0,139	7,115
37	0,602	0,799	0,754	83	0,993	0,122	8,144
38	0,616	0,788	0,781	84	0,995	0,105	9,514
39	0,629	0,777	0,810	85	0,996	0,087	11,430
40	0,643	0,766	0,839	86	0,998	0,070	14,301
41	0,656	0,755	0,869	87	0,999	0,052	19,081
42	0,669	0,743	0,900	88	0,999	0,035	28,636
43	0,682	0,731	0,933	89	1,000	0,017	57,290
44	0,695	0,719	0,966	90	1,000	0,000	
45	0,707	0,707	1,000				

СОДЕРЖАНИЕ

Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

(Російською мовою)

Редактор *Г. Ф. Висоцька*
Художник *С. Е. Кулинич*
Комп'ютерна верстка *О. О. Удалов*
Коректор *Т. Є. Цента*

Підписано до друку 12.08.2009. Формат 60×90/16. Гарнітура шкільна.
Папір офсетний. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 17,00.
Обл.-вид. арк. 14,50. Наклад 61 050 прим. Зам. № 390.

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, 719-46-80, факс: (057) 758-83-93

Віддруковано з готових діапозитивів
у друкарні ПП «Модем»
Тел. (057) 758-15-80

Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.

М52 Геометрия: Учебн. для 9 кл. общеобразовательных учебных заведений. — Х.: Гимназия, 2009. — 272 с.: ил.

ISBN 978-966-474-020-0.

УДК 373:512

ББК 22.151я721