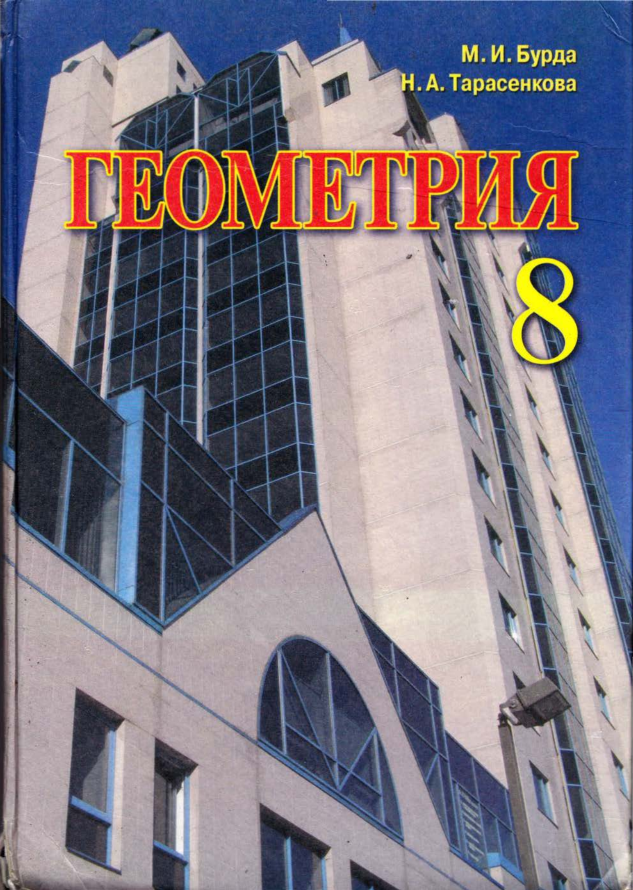
М. И. Бурда
Н. А. Тарасенкова

ГЕОМЕТРИЯ

8



ББК 22.151я721
Б91

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
(приказ № 179 от 17.03.2008 г.)

Переведено с издания:
М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова
Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. —
К.: Зодіак-ЕКО, 2008. — 240 с.: іл.
Переводчик *Е. С. Святицкая*

Издано за счёт государственных средств. Продажа запрещена

ОТВЕТСТВЕННЫЕ ЗА ПОДГОТОВКУ УЧЕБНИКА К ИЗДАНИЮ:
Н. С. Прокопенко – главный специалист Министерства образования и науки Украины;
Ж. В. Потапова – методист высшей категории Института инновационных технологий и содержания образования Министерства образования и науки Украины

ТВОРЧЕСКАЯ ГРУППА СОЗДАТЕЛЕЙ УЧЕБНИКА

Юрий КУЗНЕЦОВ – руководитель проекта,
автор концепций: дизайна, художественного оформления;

Михаил БУРДА, Нина ТАРАСЕНКОВА – авторы текста
и методического аппарата;

Олег КОСТЕНКО – координатор проекта;

Елена ПОПОВИЧ – редактор-организатор;

Андрей ВИКСЕНКО – макет, художественное оформление;

Валентина МАКСИМОВСКАЯ – организатор производственного процесса;

Галина КУЗНЕЦОВА – экономическое сопровождение проекта;

Роман КОСТЕНКО – маркетинговые исследования учебника;

Андрей КУЗНЕЦОВ – мониторинг апробации учебника

ISBN 978-966-7090-59-3 (укр.)
ISBN 978-966-7090-61-6 (рус.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Дорогие ребята!

В 7 классе вы ознакомились со свойствами смежных и вертикальных углов, параллельных и перпендикулярных прямых, треугольников, со свойствами элементов окружности; научились использовать признаки равенства треугольников при решении задач и решать задачи на построение.

Теперь вы расширите и углубите свои знания по геометрии. Узнаете о свойствах и признаках четырёхугольников и подобных треугольников, научитесь вычислять площади треугольников и четырёхугольников, используя свойства площади. Ознакомитесь с новыми способами измерения сторон и углов прямоугольных треугольников, научитесь применять эти способы на практике.

Как успешно изучать геометрию по данному учебнику? Весь материал разделён на четыре главы, а главы – на параграфы. В каждом параграфе излагается теоретический материал и содержатся задачи. Изучая теорию, особое внимание обратите на текст в рамке. Это наиболее важные определения и свойства геометрических фигур. Их необходимо понять, запомнить и уметь применять при решении задач. Другие важные сведения напечатаны **жирным** шрифтом. *Курсивом* выделены термины (научные названия) понятий.

Проверить, как усвоен материал параграфа, повторить его помогут вопросы рубрики «Вспомните основное» в конце каждого параграфа. После каждой главы приведены контрольные вопросы и тестовые задания, по которым можно проверить, как усвоена тема.

Ознакомьтесь с советами к решению задач, с решенной типовой задачей.

Задачи учебника имеют четыре уровня сложности.

Номера задач начального уровня сложности обозначены штрихом ('). Эти подготовительные упражнения предназначены для тех, кто не уверен, что хорошо усвоил теоретический материал. Номерами с кружочком (°) обозначены задачи среднего уровня сложности. Их необходимо уметь решать всем. Номера задач достаточного уровня сложности не имеют обозначений возле номера. Научившись решать такие задачи, вы сможете уверенно демонстрировать достаточный уровень достижений в учёбе. Звёздочками (*) обозначены задачи высокого уровня сложности. Не огорчайтесь, если не сможете их решить сразу, а проявите терпение и настойчивость. *Радость от решения сложной задачи послужит* вам наградой.

Решив задачи, выделенные жирным шрифтом, запомните их формулировки. Эти геометрические утверждения можно применять при решении других задач.

Воспользовавшись рубрикой «Узнайте больше», вы можете углубить и расширить свои знания.

В учебнике используются специальные значки (пиктограммы). Они помогут вам лучше сориентироваться в учебном материале.

Прочитайте	**Как записать**
Подумайте	**Как действовать**
Запомните	**Типовая задача**

Желаем вам успехов в познании нового и удовольствия от учёбы!

ГЛАВА 1

В главе вы узнаете:

- о четырёхугольнике, его элементах и классификации четырёхугольников;
- о свойствах сторон и углов некоторых видов четырёхугольников: параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции;
- как различать эти фигуры и строить их с помощью чертёжных инструментов;
- что такое центральные и вписанные углы в окружности, какова их градусная мера;
- каковы свойства и признаки четырёхугольников, вписанных в окружность и описанных около окружности;
- как использовать свойства и признаки четырёхугольников на практике и при решении задач

ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

§1. ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК И ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ

Обозначим четыре точки, например A, B, C, D, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Последовательно соединим их непересекающимися отрезками AB, BC, CD, DA. Получим *четырёхугольник* $ABCD$ (рис. 1).

Точки A, B, C, D – *вершины* четырёхугольника, отрезки AB, BC, CD, DA – его *стороны*. Углы DAB, ABC, BCD, CDA – это *углы* четырёхугольника. Их также обозначают одной буквой – $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$.

Вершины, стороны и углы четырёхугольника называют его *элементами*.

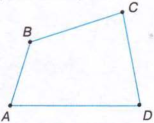


Рис. 1

? Почему фигуры, изображённые на рисунках 2 и 3, не являются четырёхугольниками?

У фигуры на рисунке 2 отрезки AC и BD пересекаются, а у фигуры на рисунке 3 точки A, D, C лежат на одной прямой.

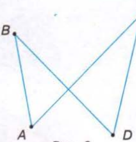


Рис. 2

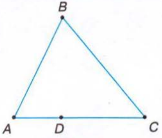


Рис. 3

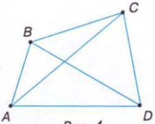


Рис. 4

Четырёхугольник обозначают, последовательно записывая его вершины, начиная с любой из них. Например, четырёхугольник на рисунке 4 можно обозначить так: $ABCD$, или $BCDA$, или $CDAB$ и т. д. Но для данного четырёхугольника запись, например, $ADBC$ либо $CDBA$ – неверна.

Две вершины, два угла или две стороны четырёхугольника могут быть либо *соседними*, либо *противоположными*. Например, в четырёхугольнике $ABCD$ (рис. 4) вершины A и D, $\angle A$ и $\angle D$, стороны AD и AB – соседние, а вершины A и C, $\angle A$ и $\angle C$, стороны AD и BC – противоположные.

Отрезки, соединяющие противоположные вершины четырёхугольника, называются его *диагоналями*. На рис. 4 отрезки AC и BD – диагонали четырёхугольника $ABCD$.

Четырёхугольники бывают *выпуклыми* и *невыпуклыми*.

Если четырёхугольник лежит по одну сторону от каждой прямой, соединяющей две его соседние вершины, то он выпуклый. На рисунке 5 четырёхугольник выпуклый, а на рисунке 6 – невыпуклый, поскольку он не лежит по одну сторону от прямой, проходящей через вершины M и N.

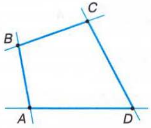


Рис. 5

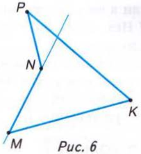


Рис. 6

Мы будем изучать лишь выпуклые четырёхугольники.

Сумма длин всех сторон четырёхугольника называется его *периметром*. Периметр обозначают буквой P.

Записать, что периметр четырёхугольника $ABCD$ равен 40 см, можно так: $P_{ABCD} = 40$ см.

Задача. Докажите, что каждая сторона четырёхугольника меньше суммы трёх других его сторон.

Решение. Диагональ AC четырёхугольника $ABCD$ делит его на два треугольника ABC и ADC (рис. 7). В ΔABC $AC < AB + BC$, а в ΔADC $AD < AC + CD$ (по неравенству треугольника).
Тогда $AD < AC + CD < AB + BC + CD$.
Аналогично $AB < BC + CD + AD$, $BC < CD + AD + AB$, $CD < AD + AB + BC$.

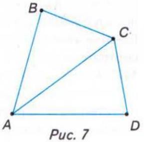


Рис. 7

? Может ли четырёхугольник иметь стороны: 1 см, 2 см, 3 см, 6 см? Не может, так как наибольшая сторона равна сумме трёх других.

Для того чтобы определить, можно ли из четырёх отрезков a, b, c, d построить четырёхугольник, проверьте, является ли наибольший из четырёх отрезков меньше, чем сумма трёх других.

Начертите произвольный четырёхугольник и измерьте транспортиром его углы. Чему равна их сумма?

Теорема (о сумме углов четырёхугольника).
Сумма углов четырёхугольника равна 360°.

Дано: четырёхугольник $ABCD$ (рис. 8).

Доказать: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

116

Доказательство. Диагональ AC четырёхугольника $ABCD$ разделяет его на два треугольника ABC и ACD. Сумма углов четырёхугольника равна сумме всех углов этих треугольников, то есть $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$.

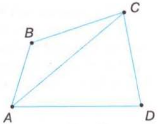


Рис. 8

? Могут ли в четырёхугольнике все углы быть острыми? Нет, поскольку тогда сумма этих углов будет меньше 360°.

Угол, смежный с углом четырёхугольника, называют *внешним углом* четырёхугольника.

На рисунке 9 $\angle CDK$ – внешний угол четырёхугольника при вершине D.

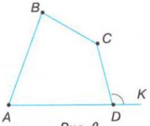


Рис. 9

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. У вас может возникнуть вопрос: *Чем отличаются выпуклые и невыпуклые четырёхугольники?*

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ (рис. 10) пересекаются, и каждая из них разделяет его на два треугольника. А диагонали невыпуклого четырёхугольника $MNKP$ (рис. 11) не пересекаются, и только одна из них разбивает его на два треугольника.

Каждый угол выпуклого четырёхугольника меньше 180°. Если четырёхугольник невыпуклый, то один из его углов больше 180°.

Понятие «внешний угол» относится только к выпуклым четырёхугольникам. Посмотрите на рисунок 11. В невыпуклом четырёхугольнике $MNKP$ угол N больше 180°. А понятие внешнего угла на углы, которые больше 180°, не распространяется, ведь согласно определению – это угол, смежный с углом четырёхугольника.

2. В отличие от треугольника четырёхугольник – фигура нежёсткая. Если взять четыре планки и соединить их шарнирами, то форму полученного четырёхугольника можно изменять (рис. 12).

3. Термин «диагональ» происходит от греческого слова *diagonios*, что означает «идущий от угла к углу». Этот термин стал общепринятым лишь в XVIII веке.

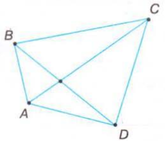


Рис. 10

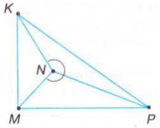


Рис. 11


Рис. 12

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Что такое четырёхугольник?
2. Какие вершины четырёхугольника называют соседними? Противоположными?
3. Какие стороны четырёхугольника называют смежными? Противоположными?
4. Что такое диагональ четырёхугольника?
5. Как обозначают четырёхугольник?
6. Что такое периметр четырёхугольника?
7. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов четырёхугольника.
8. Что такое внешний угол четырёхугольника?

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

1'. Какая из фигур, изображённых на рисунках 13 — 15, является четырёхугольником *ABCD*?

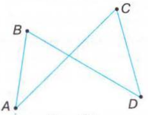


Рис. 13

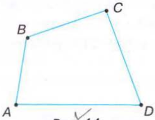


Рис. 14

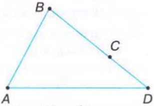


Рис. 15

2'. Начертите произвольный четырёхугольник *MNKP* и проведите его диагонали. Назовите:

1) противоположные стороны, вершины и углы;
2) соседние стороны, вершины и углы;
3) диагонали.

3'. Найдите периметр четырёхугольника, если его стороны равны:
1) 1 см, 3 см, 4 см, 6 см; 2) 5 см, 7 см, 9 см, 10 см;
3) 12 мм, 10 мм, 8 мм, 4 мм.

4'. Правильно ли указана на рисунках 16 и 17 градусная мера углов четырёхугольника *ABCD*? Ответ объясните.

5'. Назовите изображённые на рисунке 18 внешние углы четырёхугольника *MNPK* при вершине: 1) *N*; 2) *M*; 3) *K*.

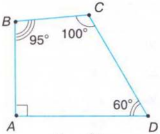


Рис. 16

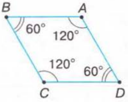


Рис. 17

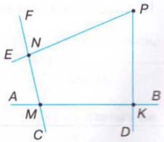


Рис. 18

6°. a, b, c, d – стороны четырёхугольника, P – его периметр. Заполните таблицу 1.

Таблица 1

a	8 см	10 см	5 см	23 см	
b	12 см	25 см	13 см		16 см
c	16 см	30 см		30 см	20 см
d	18 см		17 см	35 см	24 см
P		90 см	60 см	115 см	74 см

7°. Найдите стороны четырёхугольника, если его периметр равен 140 см, а одна из сторон в n раз меньше любой другой, при этом:
1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 9$.

8°. Может ли четырёхугольник иметь стороны:
1) 1 см, 2 см, 3 см, 4 см; 2) 2 см, 3 см, 5 см, 10 см;
3) 18 см, 6 см, 5 см, 6 см?

9°. По данным на рисунках 19 – 21 определите неизвестные углы четырёхугольника $ABCD$.

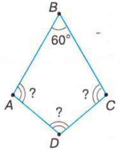


Рис. 19

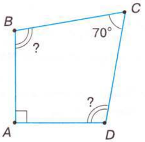


Рис. 20

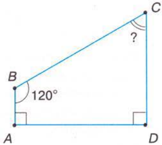


Рис. 21

10°. Найдите неизвестный угол четырёхугольника, если три его угла равны:
1) 60°, 100°, 50°; 2) 120°, 80°, 100°; 3) 70°, 130°, 90°.

11°. Могут ли углы четырёхугольника быть равны:
1) 55°, 75°, 100°, 80°; 2) 160°, 95°, 45°, 60°; 3) 145°, 85°, 70°, 65°?

12°. По данным таблицы 2 найдите углы четырёхугольника $ABCD$.

Таблица 2

$\angle A$	$n°$	$n° - 30°$	$n° + 10°$	$n°$
$\angle B$	$2n°$	$n° - 20°$	$n° + 20°$	$2n°$
$\angle C$	$3n°$	$n° - 10°$	$n° + 30°$	$n°$
$\angle D$	$4n°$	$n°$	$n°$	$5n°$

13°. Могут ли все углы четырёхугольника быть тупыми? Объясните ответ.

14°. Все углы четырёхугольника равны. Найдите их.

15°. Если в четырёхугольнике два угла прямые, то чему равна сумма остальных углов?

16°. Три угла четырёхугольника прямые. Докажите, что и четвёртый его угол прямой.

17°. Найдите внешний угол при вершине C четырёхугольника $ABCD$, если:
1) $\angle C = 75°$; 2) $\angle A = \angle B = \angle D = 90°$; 3) $\angle B = \angle D = 110°$, $\angle A = 60°$.

18. Найдите стороны четырёхугольника, если его периметр равен 66 см, одна сторона больше второй на 8 см и на столько же меньше третьей, а четвёртая сторона в три раза больше, чем вторая.

19. Одна из сторон четырёхугольника равна 9 см, вторая сторона в три раза больше, чем первая, а третья — на 8 см меньше второй и на 10 см больше, чем четвёртая. Найдите периметр четырёхугольника.

20. Три стороны четырёхугольника равны 10 см, 15 см, 20 см. Может ли периметр четырёхугольника быть равным:
1) 90 см; 2) 72 см; 3) 115 см?

21. Докажите, что каждая диагональ четырёхугольника меньше его полупериметра.

22. Докажите, что сумма диагоналей четырёхугольника меньше его периметра.

23. В четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD делит углы B и D пополам (рис. 22). Докажите, что $AB = BC$ и $CD = AD$.

24. Если в четырёхугольнике $ABCD$ стороны $AB = BC$ и $CD = DA$, то диагонали AC и BD перпендикулярны (рис. 22). Докажите это.

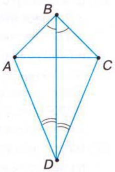


Рис. 22

25. Найдите углы четырёхугольника, если они пропорциональны числам:
1) 1, 2, 3, 4; 2) 1, 2, 4, 5; 3) 4, 6, 12, 14.

26. Каких углов в четырёхугольнике может быть больше всего: 1) тупых; 2) прямых; 3) острых?

27. Можно ли начертить четырёхугольник, в котором:
1) три угла прямые, а четвёртый — тупой;
2) один из углов равен сумме трёх оставшихся?

28. Сумма двух углов четырёхугольника, прилежащих к одной из его сторон, равна 180°. Найдите угол между биссектрисами этих углов.

29. Найдите внешние углы четырёхугольника, если три его угла равны:
1) 38°, 158°, 44°; 2) 50°, 150°, 65°; 3) 49°, 145°, 91°.

30. Докажите, что сумма внешних углов четырёхугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

31. Существует ли четырёхугольник, внешние углы которого равны:
1) 120°, 80°, 59°, 101°; 2) 49°, 98°, 68°, 125°;
3) 100°, 55°, 160°, 45°?

32. Найдите зависимость между суммой углов четырёхугольника и суммой его внешних углов.

33. По данным, указанным на рисунках 23 — 25, найдите угол α.

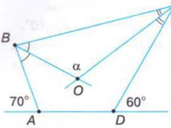


Рис. 23

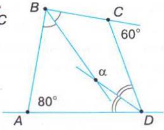


Рис. 24

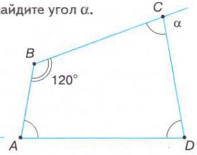


Рис. 25

34*. Четырёхугольник разделён диагональю на два треугольника с периметрами 30 см и 40 см. Найдите длину диагонали, если периметр четырёхугольника равен 50 см.

35*. Докажите, что сумма двух противоположных сторон четырёхугольника меньше суммы его диагоналей.

36*. В четырёхугольнике *ABCD* биссектрисы углов *A* и *B* пересекаются в точке *M*, а биссектрисы углов *C* и *D* — в точке *N*. Докажите, что сумма углов *AMB* и *CND* равна 180°.

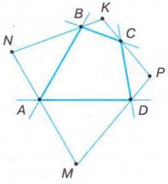


Рис. 26

37*. Биссектрисы внешних углов четырёхугольника *ABCD*, пересекаясь, образуют четырёхугольник *MNKP* (рис. 26). Докажите, что сумма противоположных углов четырёхугольника *MNKP* равна 180°.

38*. На рисунке 27 построен четырёхугольник *ABCD* по четырём его сторонам *a*, *b*, *c*, *d* и диагонали d_1. Составьте план построения.

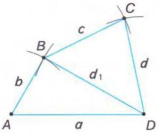


Рис. 27

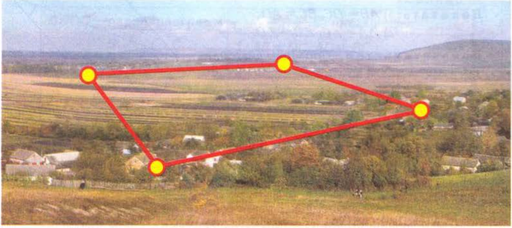
Для того, чтобы построить четырёхугольник, постройте два вспомогательных треугольника, составляющих четырёхугольник. Например (рис. 27), сначала постройте ΔABD, потом — ΔBCD. Для построения ΔABD нужно знать три его элемента, а для построения ΔBCD — только два, поскольку сторона *BD* уже известна.

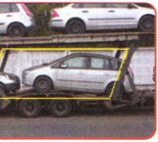
39*. Постройте четырёхугольник по четырём его сторонам *a*, *b*, *c*, *d* и углу α.

40*. Постройте четырёхугольник по его сторонам *a*, *b*, *c* и диагоналям d_1 и d_2.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

41*. Четыре населённых пункта расположены в вершинах четырёхугольника. В каком месте нужно построить завод, чтобы сумма расстояний от него до всех четырёх пунктов была наименьшей?





§2. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И ЕГО СВОЙСТВА

Если пару параллельных прямых пересечём другой парой параллельных прямых, то получим четырёхугольник, в котором противоположные стороны попарно параллельны. В четырёхугольнике $ABCD$ (рис. 28) $AD \parallel BC$ и $AB \parallel DC$.

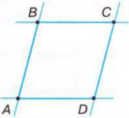


Рис. 28

Четырёхугольник, в котором противоположные стороны попарно параллельны, называется ***параллелограммом***.

Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, проведённый из любой точки одной стороны к параллельной ей стороне (либо её продолжению).

На рисунке 29 отрезки BM и BN – высоты параллелограмма $ABCD$.

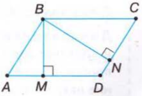


Рис. 29

Теорема (свойство сторон и углов параллелограмма). В параллелограмме: 1) противоположные стороны равны; 2) противоположные углы равны.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 30).
Доказать: 1) $AB = DC$, $BC = AD$;
2) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

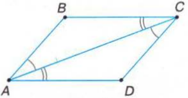


Рис. 30

Доказательство. Проведём диагональ AC. $\Delta ABC = \Delta CDA$ по стороне и прилежащим к ней углам. При этом AC — общая сторона, $\angle BCA = \angle DAC$ — внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, $\angle BAC = \angle DCA$ также, как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и DC и секущей AC. Из равенства треугольников ABC и CDA следует: 1) $AB = DC$, $BC = AD$; 2) $\angle B = \angle D$. Углы A и C параллелограмма равны как суммы равных углов.

? Может ли в параллелограмме быть только один острый угол? Не может, так как, согласно доказанной теореме, таких углов два.

Задача. Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°. Докажите это.

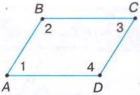


Рис. 31

Решение. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (рис. 31) по свойству внутренних односторонних углов при параллельных прямых BC и AD и секущей AB.
Аналогично $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ ($AB \parallel CD$, BC — секущая), $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ ($BC \parallel AD$, CD — секущая), $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ ($AB \parallel CD$, AD — секущая).

Теорема (свойство диагоналей параллелограмма). Диагонали параллелограмма точкой их пересечения делятся пополам.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 32),
AC и BD — диагонали,
O — точка пересечения диагоналей.
Доказать: $AO = OC$, $BO = OD$.

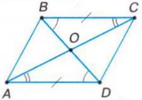


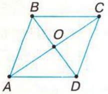
Рис. 32

Доказательство. $\Delta AOD = \Delta COB$ по стороне и прилежащим к ней углам. Из них $BC = AD$ как противоположные стороны параллелограмма, $\angle CBO = \angle ADO$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей BD, $\angle BCO = \angle DAO$ ($BC \parallel AD$, AC — секущая). Из равенства треугольников AOD и COB следует: $AO = OC$, $BO = OD$.

Для того чтобы доказать равенство отрезков (углов) в параллелограмме, докажите равенство треугольников, соответствующими элементами которых являются эти отрезки (углы).

Свойства параллелограмма приведены в таблице 3.

Таблица 3

ABCD **– параллелограмм**	**Свойство**
	**1.** $AB = DC$, $AD = BC$
	2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
	3. $AO = OC$, $BO = OD$
	4. $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. Возникает вопрос: *Сколько данных необходимо для построения параллелограмма?* Таких данных должно быть три, среди которых – не более одного из его углов (один угол параллелограмма определяет остальные углы).

2. Название «параллелограмм» (*parallelogrammon*) происходит от сочетания греческих слов: «параллелос» – идущий рядом и «грамма» – линия.
Этот термин впервые упоминается в «Началах» Евклида (III в. до н. э.). Сначала вместо термина «параллелограмм» древнегреческий учёный использовал словосочетание «образованная параллельными линиями площадь» (часть плоскости, ограниченная двумя парами параллельных прямых).

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Какой четырёхугольник называется параллелограммом?
2. Что такое высота параллелограмма?
3. Сформулируйте и докажите теорему о свойстве сторон и углов параллелограмма.
4. Сформулируйте и докажите теорему о свойстве диагоналей параллелограмма.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

42'. Верно ли указаны на рисунках 33 и 34 градусные меры углов и длины сторон параллелограмма? Объясните ответ.

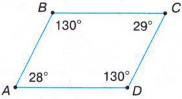


Рис. 33

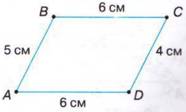


Рис. 34

43. В параллелограмме $MNPK$ $MN = a$, $NP = b$. Чему равны стороны PK и MK, если: 1) $a = 5$ см, $b = 10$ см;
2) $a = 1{,}2$ дм, $b = 0{,}4$ дм? Объясните ответ.

44. В параллелограмме $ABCD$ $\angle ABC = \alpha$, $\angle BCD = \beta$. Чему равны углы ADC и BAD, если: 1) $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$;
2) $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$; 3) $\alpha = \beta = 90°$?
Объясните ответ.

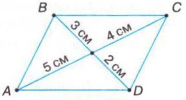


Рис. 35

45. Верно ли указаны на рисунке 35 длины отрезков диагоналей параллелограмма? Объясните ответ.

46. $ABCD$ – параллелограмм (рис. 36). По данным на рисунке найдите:
1) отрезки OC и OD; 2) диагонали AC и BD;
3) стороны AD и DC.

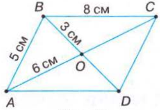


Рис. 36

47. A, B, C, D – углы параллелограмма $ABCD$. Начертите в тетради таблицу 4 и заполните её.

Таблица 4

$\angle A$	35°			
$\angle B$		140°		
$\angle C$			75°	
$\angle D$				64°

48. Могут ли в параллелограмме быть углы:
1) 30° и 60°; 2) 55° и 125°; 3) 116° и 123°?

49. Могут (может) ли в параллелограмме быть:
1) все углы острыми; 2) только три равных угла; 3) только один угол тупой?
Объясните ответ.

50. По данным на рисунках 37 – 39 найдите углы параллелограмма $ABCD$.

51. Найдите углы параллелограмма, если:
1) один из углов в три раза больше другого;
2) один из углов на 50° меньше другого;
3) сумма двух углов равна 120°;
4) внешний угол параллелограмма равен 140°.

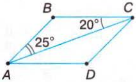


Рис. 37

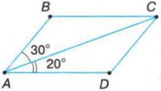


Рис. 38

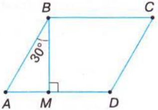


Рис. 39

52. Биссектриса угла параллелограмма пересекает его сторону под углом α. Найдите углы параллелограмма, если: 1) $\alpha = 29°$; 2) $\alpha = 34°$; 3) $\alpha = 45°$.

53. Могут ли в параллелограмме быть только три равные стороны? Объясните ответ.

54. Периметр параллелограмма равен 48 см. Составьте формулу и найдите стороны параллелограмма, если:

1) одна из сторон на 3 см больше другой;
2) одна из сторон в семь раз меньше другой;
3) разность двух сторон равна 7 см.

55. По данным на рисунках 40 – 42 найдите стороны параллелограмма *ABCD*.

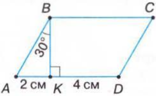


Рис. 40

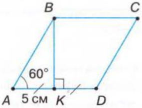


Рис. 41

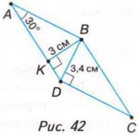


Рис. 42

56. **Докажите, что диагональ параллелограмма разделяет его на два равных треугольника.**

57. Стороны параллелограмма равны 3 см и 5 см.
Может ли его диагональ быть равной: 1) 10 см; 2) 8 см; 3) 4 см?

58. Существует ли параллелограмм, у которого две диагонали и сторона соответственно равны: 1) 4 см, 10 см, 6 см; 2) 8 см, 10 см, 9 см; 3) 8 см, 10 см, 10 см?

59. Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки параллелограмма до всех его сторон есть величина постоянная. Чему равна эта сумма?

60. Обозначьте три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько можно построить параллелограммов с вершинами в этих точках? Постройте их.

61. Найдите углы параллелограмма, если два его угла относятся, как:
1) 2 : 3; 2) 4 : 5; 3) 3 : 7.

62. Найдите углы параллелограмма, если:

1) один из них равен сумме двух других;
2) один из них в четыре раза больше суммы двух других;
3) половина одного угла равна трети другого.

63. На рисунках 43 – 45 изображены параллелограммы. Найдите угол x.

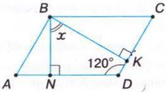


Рис. 43

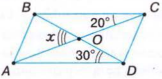


Рис. 44

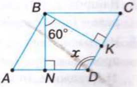


Рис. 45

64. Из вершины тупого угла параллелограмма проведены две высоты. Угол между ними равен α. Найдите углы параллелограмма, если:
1) $\alpha = 35°$; 2) $\alpha = 45°$; 3) $\alpha = 89°$.

65. Докажите, что угол между высотами параллелограмма равен его острому углу.

66. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD образует со стороной CD угол 68°, $\angle ABC = 84°$. Найдите углы ADB и BCD.

67. Найдите углы параллелограмма, если одна из его диагоналей равна стороне параллелограмма и перпендикулярна к ней.

68. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Какого вида треугольник ABK?

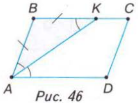


Рис. 46

69. Докажите:
1) биссектрисы углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, взаимно перпендикулярны;
2) биссектрисы двух противоположных углов параллелограмма параллельны.

70. Найдите углы параллелограмма, если биссектриса его угла пересекает сторону под углом, равным одному из углов параллелограмма.

Если в задаче дана биссектриса угла параллелограмма, то образовавшийся треугольник равнобедренный (ΔABK на рис. 46). **Используйте его свойства.**

71. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K (рис. 46). $BK = a$, $KC = b$. Найдите периметр параллелограмма, если:
1) $a = 14$ см, $b = 7$ см; 2) $a = 2$ см, $b = 3$ см.

72. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K. Найдите:
1) BK и KC, если $AB = 6$ см, $AD = 9$ см; 2) AD, если $AB = 4$ см, $KC = 11$ см;
3) периметр параллелограмма, если $AD = 14$ см, $BK : KC = 3 : 4$.

73. В параллелограмме $ABCD$ через точку O пересечения диагоналей проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках E и F.
1) Докажите, что: а) $OE = OF$; б) $BE = DF$; в) $CE = AF$.
2) Найдите стороны BC и AD параллелограмма, если $BE = 5$ см, $AF = 4$ см.

74. Точки M и N — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что диагональ AC делится отрезками BN и MD на три равные части.

75. Найдите длину диагонали AC параллелограмма $ABCD$, если его периметр равен 7 см, а периметр треугольника ABC — 6 см.

76. Из точки, лежащей на основании AC равнобедренного треугольника ABC, проведены прямые, параллельные боковым сторонам (рис. 47).
1) Докажите, что периметр полученного параллелограмма $MNBK$ не зависит от положения точки M.

2) Найдите периметр параллелограмма $MNBK$, если $AB = 15$ см.

77. Составьте план построения параллелограмма по:

1) сторонам a, b и углу α (рис. 48); 2) стороне a и диагоналям d_1 и d_2 (рис. 49).

Для того чтобы построить параллелограмм, сначала постройте вспомогательный треугольник (ΔADC на рис. 48 или ΔAOD на рис. 49). **Потом достройте этот треугольник до параллелограмма, используя свойства параллелограмма.**

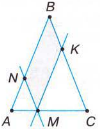


Рис. 47

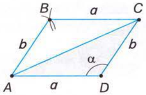


Рис. 48

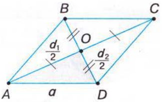


Рис. 49

78. Постройте параллелограмм по:

1) сторонам a и b и диагонали d;
2) диагоналям d_1 и d_2 и углу α между ними;
3) стороне a, диагонали d и лежащему против неё углу α;
4) стороне a, диагонали d и углу α между ними.

79*. Два угла параллелограмма относятся, как 1 : 3. Найдите угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины: 1) тупого угла; 2) острого угла.

80*. В параллелограмме острый угол равен 60°. Высота параллелограмма, проведённая из вершины тупого угла, делит сторону пополам. Найдите меньшую диагональ параллелограмма, если его периметр равен 24 см.

81*. Один из углов параллелограмма в три раза больше другого. Высота, проведённая из вершины тупого угла, делит противолежащую сторону на два отрезка — 2 см и 4 см. Найдите высоту параллелограмма.

82*. Параллелограмм, периметр которого равен 50 см, разделяется диагоналями на четыре треугольника. Найдите стороны параллелограмма, если разность периметров двух из этих треугольников равна 5 см.

83*. В каком параллелограмме биссектрисы двух углов, прилежащих к одной стороне, делят противоположную сторону на три равные части?

84*. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 48 см. Биссектрисы углов A и D делят сторону BC на три равные части. Найдите стороны параллелограмма.

85*. При каком условии точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, лежит на противоположной стороне?

86*. Периметр параллелограмма равен 42 см. Биссектрисы углов, прилежащих к одной стороне, пересекаются на другой стороне. Найдите стороны параллелограмма.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

87. На рисунке изображены два одинаковых колеса (рис. 50). Стержень AB, длина которого равна расстоянию OO_1 между центрами колёс, передаёт движение от одного колеса к другому. Каким может быть взаимное расположение стержня AB и линии центров OO_1?

88. Для проведения параллельных прямых используются параллельные линейки (рис. 51). Объясните, как ими пользоваться.

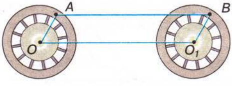


Рис. 50

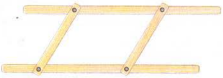


Рис. 51

§3. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Решая задачи, иногда требуется установить, что данный четырёхугольник – параллелограмм. Для этого используют признаки параллелограмма.

Теорема (признак параллелограмма).
Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то такой четырёхугольник – параллелограмм.

Дано: $ABCD$ – четырёхугольник (рис. 52), $AB = DC$, $BC = AD$.

Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

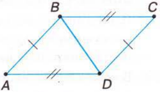


Рис. 52

Доказательство. Проведём диагональ BD (рис. 52). $\Delta BCD = \Delta DAB$ по трём сторонам. У них BD – общая сторона, $AB = DC$ и $BC = AD$ по условию. Из равенства треугольников следует: $\angle CBD = \angle ADB$ и $\angle ABD = \angle CDB$. Углы CBD и ADB – внутренние накрест лежащие при прямых BC и AD и секущей BD. Поэтому $BC \parallel AD$. Углы ABD и CDB также внутренние накрест лежащие при прямых AB и DC и секущей BD. Поэтому $AB \parallel DC$.
Так как в четырёхугольнике $ABCD$ $BC \parallel AD$ и $AB \parallel DC$, то, по определению, этот четырёхугольник – параллелограмм.

? Можно ли считать четырёхугольник параллелограммом, если в нём две противоположные стороны равны, а две другие – параллельны?

Нет, нельзя. На рисунке 53 $AB = CD$, $BC \parallel AD$, но четырёхугольник $ABCD$ – не параллелограмм.

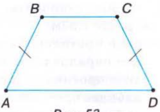


Рис. 53

Теорема (признак параллелограмма).
Если в четырёхугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то такой четырёхугольник – параллелограмм.

Дано: $ABCD$ – четырёхугольник (рис. 54), $AB = DC$, $AB \parallel DC$.

Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

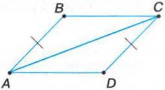


Рис. 54

Доказательство. Проведём диагональ AC (рис. 54). $\Delta ABC = \Delta CDA$ по двум сторонам и углу между ними. У них AC – общая сторона, $AB = DC$ по условию, $\angle BAC = \angle DCA$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и DC и секущей AC. Из равенства треугольников следует: $\angle DAC = \angle BCA$. Но углы DAC и BCA – внутренние накрест лежащие при прямых BC и AD и секущей AC. Поэтому $BC \parallel AD$.
Поскольку в четырёхугольнике $ABCD$ $AD \parallel BC$ (по доказанному) и $AB \parallel DC$ (по условию), то, по определению, этот четырёхугольник – параллелограмм.

Задача (признак параллелограмма). **Если диагонали четырёхугольника делятся точкой их пересечения пополам, то такой четырёхугольник – параллелограмм.** Докажите это.

Решение. Пусть $ABCD$ – данный четырёхугольник, O – точка пересечения его диагоналей и $BO = OD$, $AO = OC$ (рис. 55).
Докажем, что $ABCD$ – параллелограмм.
$\Delta BOC = \Delta DOA$ по двум сторонам и углу между ними.

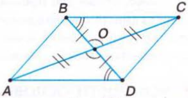


Рис. 55

У них $BO = OD$, $AO = OC$ по условию, $\angle BOC = \angle DOA$ как вертикальные.
Из равенства треугольников следует: $BC = AD$ и $\angle OBC = \angle ODA$.
Но углы OBC и ODA – внутренние накрест лежащие при прямых BC и AD и секущей BD.
Поэтому $BC \parallel AD$.
Поскольку в четырёхугольнике $ABCD$ $BC = AD$ и $BC \parallel AD$, то, согласно доказанному признаку, этот четырёхугольник – параллелограмм.

Чтобы установить, что четырёхугольник – параллелограмм, докажите, что в нём:

либо противоположные стороны попарно параллельны (определение параллелограмма),

либо противоположные стороны попарно равны (признак),

либо две противоположные стороны равны и параллельны (признак),

либо диагонали делятся точкой их пересечения пополам (признак).

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

Вам уже знакомы понятия «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно». В таблице 5 рассмотрите пары утверждений *A* и *B* и выясните смысл этих понятий.

Таблица 5

Утверждение *A*	Утверждение *B*	Связь между утверждениями	Вид условия
Четырёхугольник является параллелограммом	Две противоположные стороны четырёхугольника равны	Из *A* следует *B* ($A \Rightarrow B$)	*A – достаточное условие для B* *B – необходимое условие для A*
Четырёхугольник является параллелограммом	Противоположные стороны четырёхугольника попарно равны	Из *B* следует *A* и из *A* следует *B* ($A \Leftrightarrow B$)	*A – необходимое и достаточное условие для B и наоборот*

Обратите внимание, что утверждения «*A* достаточно для *B*» и «*A* необходимо для *B*» – взаимно обратные. Их можно объединить и сформулировать следующим образом.

Для того чтобы четырёхугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его противоположные стороны были попарно равны.

Иногда вместо «необходимое и достаточное условие» говорят «необходимый и достаточный признак», а чаще – просто «признак». Поэтому теоремы этого параграфа называем «признаками параллелограмма».

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Докажите, что если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то такой четырёхугольник – параллелограмм.
2. Докажите, что если в четырёхугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то такой четырёхугольник – параллелограмм.
3. Докажите, что если диагонали четырёхугольника делятся точкой их пересечения пополам, то такой четырёхугольник – параллелограмм.
4. Как убедиться, что данный четырёхугольник является параллелограммом?

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

89'. Является ли параллелограммом четырёхугольник, в котором только две противоположные стороны равны? Объясните ответ.

90'. Почему четырёхугольник на рисунке 56 не является параллелограммом?

91'. Является ли параллелограммом четырёхугольник, если две его противоположные стороны: 1) параллельны; 2) параллельны и равны?

92'. Начертите два равных и параллельных отрезка длиной 4 см. Их концы соедините отрезками так, чтобы они не пересекались. Почему образовавшийся четырёхугольник — параллелограмм?

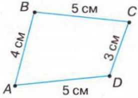


Рис. 56

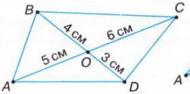


Рис. 57

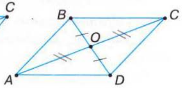


Рис. 58

93'. Какой из четырёхугольников, изображённых на рисунках 57 и 58, — параллелограмм? Объясните ответ.

94°. По данным на рисунках 59 и 60 докажите, что четырёхугольник *ABCD* — параллелограмм.

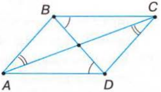


Рис. 59

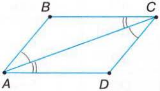


Рис. 60

95°. Постройте произвольный треугольник *ABC* и на стороне *AB* отметьте точку *M*. Через эту точку параллельно сторонам *BC* и *AC* треугольника проведите прямые, пересекающие их соответственно в точках *N* и *K*. Объясните, почему четырёхугольник *MNCK* — параллелограмм.

96°. Из произвольной точки внутренней области угла проведены прямые, параллельные сторонам угла. Является ли полученный четырёхугольник параллелограммом? Объясните ответ.

97°. Является ли параллелограммом четырёхугольник *KLMN*, у которого: 1) $KL = MN$; 2) $KL = MN$ и $KN = LM$; 3) $KL = LM$?

98°. В четырёхугольнике *ABCD* $AB = CD$, $BC = AD$.
Докажите: 1) $\angle B = \angle D$, $\angle A = \angle C$; 2) $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Для того чтобы доказать равенство (либо параллельность) двух отрезков:
1) выделите на рисунке четырёхугольник, у которого отрезки являются противоположными сторонами;
2) докажите, что четырёхугольник — параллелограмм;
3) сделайте вывод: отрезки равны (либо параллельны) как противоположные стороны параллелограмма.
Аналогично можно доказать равенство двух углов.

99°. В четырёхугольнике $MNKP$ противоположные стороны попарно равны. Найдите: 1) угол M, если $\angle K = 35°$; 2) MN, если $KP = 5$ см.

100°. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, если: 1) $AB \parallel CD$, $AB = 3$ см, $CD = 30$ мм; 2) $AD = BC$, $\angle ABC = 60°$, $\angle BAD = 120°$.

101°. Докажите, что четырёхугольник, в котором сумма углов, прилежащих к каждой из двух смежных сторон, равна 180°, — это параллелограмм.

102°. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180°$ и $\angle B + \angle C = 180°$. Докажите, что противоположные стороны четырёхугольника равны.

103°. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180°$ и $AD = BC$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

104°. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AD, а N — середина стороны BC. Докажите, что $BNDM$ — параллелограмм.

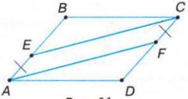


Рис. 61

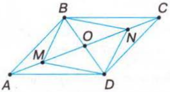


Рис. 62

105°. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 61), $AE = CF$. Докажите, что отрезки CE и AF равны и параллельны.

106°. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Дополните данные в таблице 6 так, чтобы правильный вывод был правильным.

Таблица 6

AO	3 см			0,6 дм
OC		2 дм	35 мм	
BO		4,8 дм		6 см
OD	5 см		2,1 см	
Вывод	$ABCD$ — параллелограмм	$ACBD$ — параллелограмм	$ABDC$ — параллелограмм	$DCBA$ — параллелограмм

107°. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 62), $OM = ON$. Докажите, что $MBND$ — параллелограмм.

108°. $MBND$ — параллелограмм (рис. 62), $OA = OC$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

109°. Медиана BD треугольника ABC продлена на отрезок $DE = BD$. Точка E соединена с вершинами A и C треугольника. Докажите, что четырёхугольник $ABCE$ — параллелограмм.

110°. Медиана LO треугольника KLM продлена на отрезок ON и достроен четырёхугольник *KLMN*. Заполните таблицу 7 и определите вид четырёхугольника *KLMN*.

Таблица 7

LO	4 см	0,05 дм	60 мм	2 см
ON	40 мм	0,5 дм	6 см	2 дм
KO	0,3 дм		0,6 дм	
OM		12 мм		2,2 дм

111. Если противоположные углы четырёхугольника равны, то такой четырёхугольник — параллелограмм. Докажите.

112. Является ли четырёхугольник параллелограммом, если три его угла равны: 1) 20°, 60°, 110°; 2) 60°, 60°, 120°; 3) 35°, 145°, 35°?

113. Является ли четырёхугольник параллелограммом, если биссектрисы двух его противоположных углов перпендикулярны к биссектрисе третьего угла?

114. На противоположных сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки $AB_1 = CD_1$ и проведены прямые B_1C, B_1D, AD_1 и BD_1. Докажите, что четырёхугольник, полученный при пересечении этих прямых, — параллелограмм.

115. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке N. Докажите, что $AMCN$ — параллелограмм.

116. На сторонах AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$ точки E, M, K, N отмечены так, что $BM = DN$, $BE = DK$ (рис. 63). Докажите, что $EMKN$ — параллелограмм.

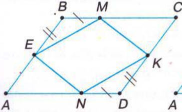


Рис. 63

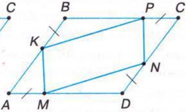


Рис. 64

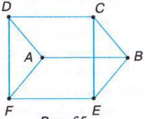


Рис. 65

117. На сторонах параллелограмма $ABCD$ отложены, как показано на рисунке 64, равные отрезки AM, DN, CP, BK. Докажите, что $MNPK$ — параллелограмм.

118. Вне параллелограмма $ABCD$ с острым углом A построены равносторонние треугольники ABE и CDF. Докажите, что $AECF$ — параллелограмм.

119. $ABCD$ и $ABEF$ — параллелограммы (рис. 65). Докажите, что $DF = CE$ и $DF \parallel CE$.

120. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 66). Найдите расстояние между точками B и B_1, если: 1) $AA_1 = 3$ см; 2) $AC = 10$ см, $A_1C = 6$ см; 3) $AC_1 = 20$ см, $A_1C = 12$ см.

121. На сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F так, что $\angle AEC = \angle AFC$ (рис. 67). Докажите, что четырёхугольник $AECF$ — параллелограмм.

122. Если две противоположные стороны четырёхугольника параллельны, а одна из диагоналей делит другую пополам, то такой четырёхугольник — параллелограмм. Докажите это.

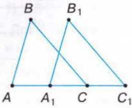


Рис. 66

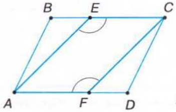


Рис. 67

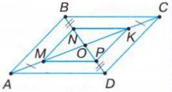


Рис. 68

123. Докажите, что если через точку пересечения диагоналей параллелограмма провести две прямые, то точки пересечения этих прямых с его сторонами являются вершинами параллелограмма.

124. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что четырёхугольник $MNPK$, с вершинами в серединах отрезков OA, OB, OC и OD, — параллелограмм.

125. $ABCD$ — параллелограмм (рис. 68), $AM = KC$, $BN = PD$. Докажите, что $MP = NK$ и $MP \parallel NK$.

126. Медиана AO треугольника ABC продлена на отрезок $OD = AO$. Точка D соединена с вершинами B и C треугольника.
1) Докажите, что $CD = AB$ и $CD \parallel AB$. 2) Найдите угол CDB, если $\angle CAB = 36°$.

127*. Если каждая диагональ четырёхугольника делит его периметр пополам, то такой четырёхугольник — параллелограмм. Докажите это.

128*. На продолжениях сторон AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ отмечены соответственно точки K, P, M, E так, что $AK = BP = CM = DE$. Докажите, что четырёхугольник $KPME$ — параллелограмм.

129*. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K и M так, что $\angle AKB = \angle CMD$. Докажите, что $KBMD$ — параллелограмм.

130*. Через точку K внутренней области угла ABC проведите прямую таким образом, чтобы её отрезок, заключённый между сторонами угла, этой точкой делился пополам.

131*. Из вершин тупых углов параллелограмма проведены высоты. Являются ли концы этих четырёх высот вершинами параллелограмма?

132*. К сторонам параллелограмма проведены серединные перпендикуляры, пересекающие противоположные стороны (либо их продолжения) в точках K, L, M, N. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм.

133*. Если вершины противоположных углов четырёхугольника равноудалены от соответствующих диагоналей, то такой четырёхугольник — параллелограмм. Докажите это.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

134. Объясните принцип действия механической рейсшины (рис. 69), весов (рис. 70).

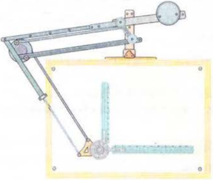


Рис. 69

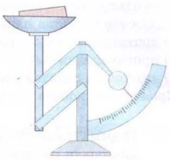


Рис. 70

135. На рисунках 71 и 72 изображены шарнирные устройства для регулирования высоты. Одна из сторон параллелограмма *ABCD* (сторона *AB*) закреплена неподвижно, а к стороне *CD* жёстко прикреплены лампа (рис. 71) и кольцо для игры в баскетбол (рис. 72). Объясните, почему при всех возможных положениях стороны *CD* ось *MN* лампы всегда вертикальна, а плоскость кольца — горизонтальна.

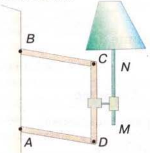


Рис. 71

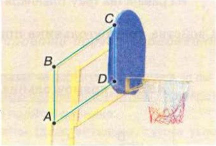


Рис. 72

§4. ПРЯМОУГОЛЬНИК

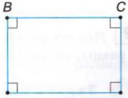


Рис. 73

Параллелограммы, как и треугольники, можно разделить на виды. Прямоугольник – один из видов параллелограмма. На рисунке 73 вы видите параллелограмм *ABCD*, являющийся прямоугольником. Дайте определение прямоугольнику и сравните его с приведённым в учебнике.

Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется ***прямоугольником.***

Поскольку прямоугольник – частный вид параллелограмма, то ему присущи все свойства параллелограмма:

1) противоположные стороны равны;
2) противоположные углы равны;
3) диагонали делятся точкой их пересечения пополам.

Кроме этих свойств прямоугольник имеет ещё и особое свойство.

Теорема (свойство диагоналей прямоугольника).
Диагонали прямоугольника равны.

Дано: $ABCD$ — прямоугольник, AC и BD — диагонали (рис. 74).

Доказать: $AC = BD$.

Доказательство. Прямоугольные треугольники ACD и DBA равны по двум катетам. При этом AD — общий катет, а катеты AB и DC равны как противоположные стороны параллелограмма.
Из равенства треугольников следует: $AC = BD$.

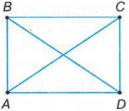
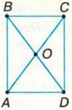


Рис. 74

Свойства прямоугольника приведены в таблице 8.

Таблица 8

ABCD **— прямоугольник**	**Свойство**
	**параллелограмма**
	1. $AB = DC$, $AD = BC$
	2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
	3. $AO = OC$, $BO = OD$
	4. $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$
	особое
	5. $AC = DB$

? Можно ли утверждать, что параллелограмм, в котором диагонали равны, является прямоугольником? Да, но это нужно доказать.

Задача (признак прямоугольника). **Если диагонали параллелограмма равны, то такой параллелограмм — прямоугольник.** Докажите это.

Решение. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, в котором $AC = BD$ (рис. в табл. 8). Докажем, что $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.
$\Delta ABD = \Delta DCA$ по трём сторонам. У них AD — общая сторона, $AC = BD$ по условию, $AB = DC$ — как противоположные стороны параллелограмма. Из этого следует, что $\angle A = \angle D$. Поскольку в параллелограмме противоположные углы равны, то: $\angle A = \angle C = \angle D = \angle B$. По свойству углов четырёхугольника, $\angle A + \angle C + \angle D + \angle B = 360°$.
Следовательно, $\angle A = \angle C = \angle D = \angle B = 360° : 4 = 90°$, то есть параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник.

Для того чтобы установить, что данный параллелограмм – прямоугольник, докажите, что у него:

либо все его углы прямые (определение прямоугольника),
либо диагонали равны (признак).

Можно ли утверждать, что четырёхугольник, в котором диагонали равны, – это прямоугольник? Нет, нельзя (см. рис. 75). Необходимо проверить, выполняется ли один из признаков параллелограмма. Например, делятся ли диагонали точкой их пересечения пополам.

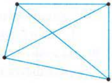


Рис. 75

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

Возникает вопрос: *Можно ли сформулировать другие определения прямоугольника?*

В младших классах прямоугольником называли четырёхугольник, все углы в котором прямые. Теперь мы определили прямоугольник как частный вид параллелограмма. Возможны и такие определения прямоугольника:

параллелограмм, в котором все углы равны (действительно, сумма углов параллелограмма составляет 360°, тогда каждый из них равен 90°);

параллелограмм, в котором есть прямой угол (действительно, в параллелограмме сумма смежных углов составляет 180°, а противоположные углы равны. Если один из его углов прямой, то и три остальные — прямые).

Эти определения прямоугольника *эквивалентны*.

Следовательно, существуют **разные определения одного и того же понятия.**

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Что такое прямоугольник?
2. Сформулируйте и докажите свойство диагоналей прямоугольника.
3. Докажите, что если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.
4. Как установить, что данный параллелограмм является прямоугольником?

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

136'. $ABCD$ — прямоугольник (рис. 76). По данным на рисунке найдите:
1) AD, DC; 2) BD; 3) AO, OC, BO, OD.

137'. По данным на рисунке 77 найдите:
1) диагонали прямоугольника; 2) сумму диагоналей прямоугольника.

138'. $ABCD$ — прямоугольник (рис. 78). По данным на рисунке найдите углы 1, 2, 3.

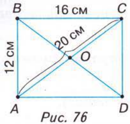


Рис. 76

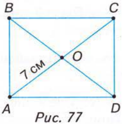


Рис. 77

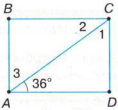


Рис. 78

139'. Найдите периметр прямоугольника, если его стороны равны:
1) 2 см и 3 см; 2) 0,4 дм и 0,5 дм; 3) 10 мм и 12 мм.

140'. Назовите свойство прямоугольника, которого нет у параллелограмма, не являющегося прямоугольником.

141°. Найдите диагонали прямоугольника, если их сумма равна:
1) 12 см; 2) 6 см; 3) 18 мм.

142°. O — точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Докажите:
1) треугольники AOD, BOC, AOB и DOC — равнобедренные;
2) $\Delta AOB = \Delta COD$, $\Delta BOC = \Delta DOA$.

143°. На рисунках 79 — 81 изображены прямоугольники. Найдите углы 1, 2, 3.

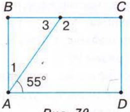


Рис. 79

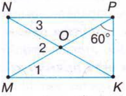


Рис. 80

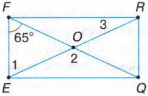


Рис. 81

144°. Найдите градусную меру угла между диагоналями прямоугольника (рис. 82 — 84).

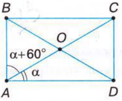


Рис. 82

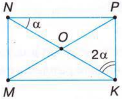


Рис. 83

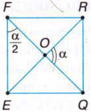


Рис. 84

145°. В параллелограмме ни один из углов не является острым. Докажите, что этот параллелограмм — прямоугольник.

146°. Диагональ прямоугольника равна d и образует со стороной угол 30°. Найдите меньшую сторону прямоугольника, если: 1) $d = 4$ см; 2) $d = 14$ мм; 3) $d = 0,44$ дм.

147°. Меньшая сторона прямоугольника равна a. Найдите диагонали прямоугольника, если они пересекаются под углом 60° и:
1) $a = 10$ см; 2) $a = 0,25$ дм; 3) $a = 7$ мм.

148°. a и b — стороны прямоугольника, P — его периметр. Заполните таблицу 9.

Таблица 9

a	6 см	4 см		10 см	9 см
b	12 см		5 см		7 см
P		32 см	30 см	44 см	

149°. Найдите периметр прямоугольника, если:
1) одна его сторона равна 4 см, а другая — в три раза больше;
2) одна сторона равна 10 см, а другая — в два раза меньше;
3) одна сторона равна 12 см, а другая — на 4 см больше.

150°. **Докажите, что если в параллелограмме хотя бы один угол прямой, то он является прямоугольником.**

151°. Если в параллелограмме хотя бы один угол прямой, то его диагонали равны. Докажите.

152. **Четырёхугольник, в котором три угла прямые, — прямоугольник.** Докажите.

153. **Если все углы четырёхугольника равны — это прямоугольник.** Докажите.

154. **Если в параллелограмме сумма двух противоположных углов равна 180° — это прямоугольник.** Докажите.

155. Докажите, что если в параллелограмме углы, прилежащие к одной стороне, равны, то он является прямоугольником.

156. Диагонали параллелограмма образуют равные углы с его стороной. Докажите, что этот параллелограмм является прямоугольником.

157. Тупой угол между диагоналями прямоугольника равен 120°. Докажите, что его диагональ в два раза больше, чем меньшая сторона.

158. Докажите, что если в прямоугольнике сторона равна половине диагонали, то угол между ними равен 60°.

159. Перпендикуляр, проведённый из вершины угла прямоугольника к диагонали, делит этот угол в отношении 2 : 3. Найдите:
1) углы, образованные диагоналями со сторонами прямоугольника;
2) угол между перпендикуляром и второй диагональю.

160. В четырёхугольнике диагонали делятся точкой их пересечения пополам, а один угол — прямой. Докажите, что этот четырёхугольник — прямоугольник.

161. Периметр прямоугольника равен 48 см. Найдите стороны прямоугольника, если:
1) две стороны относятся, как 2 : 3;
2) расстояние между серединами двух противоположных сторон равно 10 см;
3) точка пересечения диагоналей удалена от стороны на 4 см.

162. Периметр прямоугольника равен P. Найдите сумму расстояний от произвольной внутренней точки прямоугольника до его сторон, если:
1) $P = 12$ см; 2) $P = 8{,}6$ см.

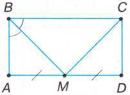


Рис. 85

163. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если биссектриса угла A делит сторону BC на отрезки m и n длиной: 1) $m = 3$ см, $n = 5$ см; 2) $m = 0{,}2$ дм, $n = 3$ см.

164. Биссектриса BM прямоугольника $ABCD$ (рис. 85) делит сторону AD пополам. Докажите, что CM — биссектриса угла C.

165. Докажите, что если биссектриса прямоугольника делит пополам сторону, которую она пересекает, то одна из сторон прямоугольника в два раза больше другой его стороны.

166. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит сторону, которую она пересекает, на равные отрезки. Найдите периметр прямоугольника, если меньшая сторона равна: 1) 15 см; 2) 3,8 дм.

167. По рисунку 86 составьте план построения прямоугольника по стороне a и диагонали d.

Для того чтобы построить прямоугольник, как и параллелограмм, сначала необходимо построить вспомогательный треугольник, а затем достроить его до прямоугольника. Вспомогательными могут быть: либо прямоугольный треугольник (рис. 86), **либо равнобедренный треугольник** (рис. 87).

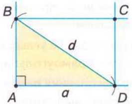


Рис. 86

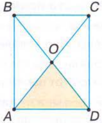


Рис. 87

168. Постройте прямоугольник по:
1) диагонали d и углу α между диагональю и стороной;
2) диагонали d и углу α между диагоналями.

169*. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметр треугольника ABD больше периметра треугольника AOB на 12 см, а периметр прямоугольника равен 50,2 см. Найдите стороны прямоугольника.

170*. Докажите, что если в четырёхугольнике диагонали равны и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырёхугольник — прямоугольник.

Для утверждения, что четырёхугольник является прямоугольником, докажите, что: либо этот четырёхугольник является параллелограммом, а параллелограмм — прямоугольником, либо три угла четырёхугольника — прямые.

171*. Четырёхугольник, в котором и противоположные стороны, и диагонали равны, является прямоугольником. Докажите это.

172*. Докажите, что если в четырёхугольнике диагонали равны и две противоположные стороны равны и параллельны, то такой четырёхугольник — прямоугольник.

173*. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами a и b проведены биссектрисы углов A и D, пересекающие сторону BC в точках M и N (рис. 88, 89). Найдите длину отрезка MN.

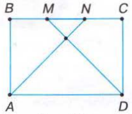


Рис. 88

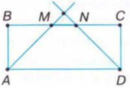


Рис. 89

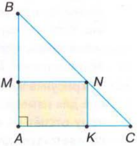


Рис. 90

174*. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Для того чтобы доказать равенство двух отрезков, покажите, что они: либо противоположные стороны прямоугольника (или параллелограмма), либо диагонали прямоугольника, либо часть диагонали прямоугольника (или параллелограмма), на которые она делится точкой пересечения с другой диагональю.

175*. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника, равной 6 см, проведены две прямые, параллельные его катетам. Найдите диагонали полученного прямоугольника.

176*. Докажите, что сумма расстояний от точки, лежащей на основании равнобедренного треугольника, до его боковых сторон, равна высоте, проведённой из вершины основания.

177*. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что угол у них — общий (рис. 90).

1) Докажите, что периметр прямоугольника не зависит от положения его вершины на гипотенузе.

2) Найдите периметр прямоугольника, если катет треугольника равен 5 см.

178*. Постройте прямоугольник по:

1) диагонали d и сумме s двух неравных сторон;

2) диагонали d и разности m двух сторон.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

Рис. 91

179. Чтобы измерить расстояние между недоступными пунктами A и B (рис. 91), построили прямые углы BAD и ABC. Затем на сторонах углов отложили равные отрезки AD и BC. Тогда искомое расстояние AB будет равно DC. Почему?

180. Какими способами можно проверить, что данный четырёхугольный предмет имеет форму прямоугольника? Объясните ответ.

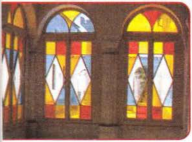
Рис. 92

181. Ученик изготовил из четырёх попарно равных планок рамку прямоугольной формы. Чтобы убедиться в правильности изготовления рамки, он проверил равенство её диагоналей. Достаточно ли этого?

182. На рисунке 92 изображено приспособление для измерения диаметра брёвен. Почему отсчёт на горизонтальной линейке соответствует диаметру бревна?

Рис. 93

183. Прямая, провешенная на местности, упирается в здание (рис. 93). Как продолжить эту прямую за зданием?



§5. РОМБ. КВАДРАТ

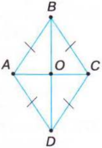


Рис. 94

? Могут ли в параллелограмме все стороны быть равными? Да, могут. На рисунке 94 в параллелограмме $ABCD$ $AB = BC = CD = AD$. Это ещё один вид параллелограмма – ромб.

Параллелограмм, в котором все стороны равны, называется ***ромбом***.

? Можно ли утверждать, что параллелограмм является ромбом, если две его смежные стороны равны? Да, можно. Равенство всех сторон такого параллелограмма следует из свойства: противоположные стороны параллелограмма равны.

Так как ромб – это частный вид параллелограмма, то он имеет все свойства параллелограмма (назовите их). Кроме того, ромб обладает особыми свойствами.

Теорема (свойства диагоналей ромба). Диагонали ромба взаимно перпендикулярны. Диагонали ромба делят его углы пополам.

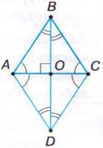


Рис. 95

Дано: $ABCD$ – ромб (рис. 95), O – точка пересечения диагоналей AC и BD.

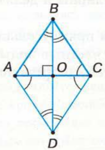
Доказать: $AC \perp BD$;
$\angle ABD = \angle CBD = \angle ADB = \angle CDB$;
$\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA$.

Доказательство. Согласно определению ромба $AB = BC$, поэтому треугольник ABC – равнобедренный. Так как ромб $ABCD$ – параллелограмм, то $AO = OC$. Отсюда BO – медиана равнобедренного треугольника ABC, следовательно, высота и биссектриса этого треугольника. Поэтому $AC \perp BD$ и $\angle ABD = \angle CBD$.

Аналогично доказываем, что диагональ BD делит пополам угол D, а диагональ AC – углы A и C ромба $ABCD$.

Свойства ромба приведены в таблице 10.

Таблица 10

$ABCD$ – ромб	Свойство
	**параллелограмма**
	1. $AB = DC$, $AD = BC$
	2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
	3. $AO = OC$, $BO = OD$
	4. $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle A + \angle D = 180^\circ$
	особое
	5. $AC \perp BD$
	6. $\angle ABD = \angle CBD = \angle ADB = \angle CDB$, $\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA$

Задача (признак ромба). **Докажите, что параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, является ромбом.**

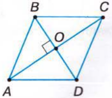


Рис. 96

Решение. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм, в котором $AC \perp BD$ (рис. 96). Докажем, что $ABCD$ – ромб.

$\Delta AOB = \Delta AOD$ по двум сторонам и углу между ними. У них сторона AO – общая, $OB = OD$ по свойству диагоналей параллелограмма, $\angle AOB = \angle AOD = 90^\circ$ по условию. Из равенства треугольников следует: $AB = AD$. Тогда $AB = CD$ и $AD = BC$ по свойству противоположных сторон параллелограмма. Итак, все стороны параллелограмма равны, поэтому он является ромбом.

Для того чтобы установить, что данный параллелограмм – ромб, докажите, что в нем:
либо все стороны равны (определение ромба),
либо диагонали взаимно перпендикулярны (признак).

Прямоугольник, в котором все стороны равны, называется ***квадратом.***

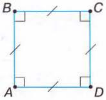


Рис. 97

На рисунке 97 вы видите квадрат $ABCD$.

Существуют и другие *определения квадрата*: ромб, в котором все углы прямые, называется квадратом; прямоугольник, в котором все стороны равны, называется квадратом; параллелограмм, в котором все стороны равны и все углы прямые, называется квадратом. Следовательно, квадрат имеет все свойства параллелограмма, прямоугольника и ромба. Перечислим свойства квадрата.

1) Противоположные стороны и противоположные углы квадрата равны. Диагонали квадрата в точке пересечения делятся пополам (свойства параллелограмма).

2) Диагонали квадрата равны (свойство прямоугольника).

3) Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам (свойства ромба).

Квадрат является частным видом и ромба, и прямоугольника, и параллелограмма. Ромб и прямоугольник – это частные виды параллелограмма. Соотношение между видами параллелограммов показано на рисунке 98.

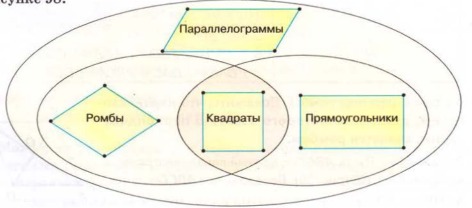


Рис. 98

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. Рассмотрите таблицу классификации параллелограммов по соседним углам и смежным сторонам. Предложите собственную классификацию изученных видов параллелограмма.

Таблица 11

По углам	По сторонам	
	Смежные стороны равны	Смежные стороны неравны
Углы прямые	Квадрат	Прямоугольник
Углы непрямые	Ромб	Параллелограмм

2. Кроме параллелограммов есть ещё один вид четырёхугольников — *дельтоид*. Эту фигуру получим, если два равнобедренных треугольника ABC и ADC с равными основаниями AC приложить друг к другу так, как показано на рисунке 99.

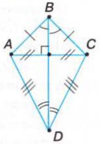


Рис. 99

Свойства дельтоида следуют из свойств равнобедренного треугольника. Например, диагонали взаимно перпендикулярны, одна из них делит углы пополам и другую диагональ — пополам. Сформулируйте, пользуясь рисунком, другие свойства дельтоида.
Если равнобедренные треугольники, из которых образован дельтоид, равны, то такой дельтоид является ромбом.
Если равнобедренные треугольники к тому же прямоугольные, то дельтоид является квадратом.

3. Слово «ромб» происходит от греческого *rhombos* — юла, вращение. Слово «квадрат» происходит от латинского *quadratum* — четырёхугольник. Квадрат был первым четырёхугольником, который рассматривался в геометрии.

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Что такое ромб?
2. Сформулируйте и докажите свойства диагоналей ромба.
3. Докажите, что параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, является ромбом.
4. Что такое квадрат?
5. Назовите свойства квадрата.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

184'. Правильно ли указаны на рисунке 100 длины сторон и градусные меры углов ромба? Объясните ответ.

185'. *ABCD* – ромб (рис. 101). По данным на рисунке найдите:
1) *BC, AD, DC*; 2) *AC, BD*.

186'. *ABCD* – ромб (рис. 102). По данным на рисунке найдите углы 1, 2, 3.

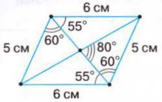


Рис. 100

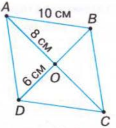


Рис. 101

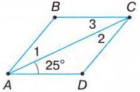


Рис. 102

187'. Перечислите свойства ромба, которых не имеет параллелограмм, не являющийся ромбом.

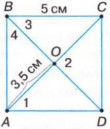


Рис. 103

188'. По данным на рисунке 103 найдите:
1) стороны квадрата; 2) диагонали квадрата;
3) углы 1, 2, 3, 4.

189°. Найдите сторону ромба, если его периметр равен:
1) 12 см; 2) 2,4 дм; 3) 280 мм.

190°. Докажите, что диагонали ромба разделяют его на четыре равных прямоугольных треугольника.

191°. Докажите, что диагональ ромба разделяет его на два равных треугольника.

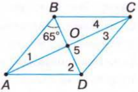


Рис. 104

192°. *ABCD* – ромб (рис. 104). По данным на рисунке найдите углы 1, 2, 3, 4, 5.

193°. Угол ромба равен α. Найдите углы, образованные диагоналями ромба с его сторонами, если:
1) $\alpha = 36°$; 2) $\alpha = 54°$; 3) $\alpha = 60°$.

194°. Найдите углы ромба, если одна из его диагоналей равна стороне.

195°. Найдите углы ромба, если его высота образует со стороной угол:
1) 30°; 2) 15°; 3) 65°.

196°. По данным на рисунках 105 – 107 найдите углы ромба.

197°. Угол ромба равен 60°, а меньшая диагональ – *d*. Найдите периметр ромба, если: 1) $d = 10$ см; 2) $d = 3{,}2$ дм; 3) $d = 45$ мм.

198°. Найдите периметр квадрата, если точка пересечения его диагоналей удалена от стороны на *n*, где: 1) $n = 8$ см; 2) $n = 0{,}3$ дм; 3) $P = 21$ мм.

199°. Диагональ квадрата равна *d*. Его сторона является диагональю другого

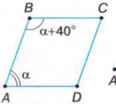


Рис. 105

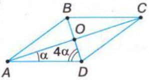


Рис. 106

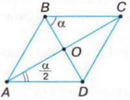


Рис. 107

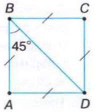


Рис. 108

квадрата. Найдите сторону другого квадрата, если:
1) $d = 6$ см; 2) $d = 29$ мм; 3) $d = 1{,}5$ дм.

200°. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ на рисунке 108 — квадрат.

201°. Начертите в тетради таблицу 12. В таблице поставьте знак «+», если геометрическая фигура имеет указанное свойство.

202. Ромб, в котором один угол прямой, — квадрат. Докажите это.

203. Докажите, что четырёхугольник, все стороны которого равны, является ромбом.

204. Параллелограмм, диагонали которого делят углы пополам, — ромб. Докажите это.

205. Найдите углы ромба, если его периметр равен 36 см, а высота — 4,5 см.

206. Докажите, что высоты ромба равны.

Таблица 12

	Свойство	Фигура			
		Параллелограмм	Прямоугольник	Ромб	Квадрат
1	Противоположные стороны попарно параллельны				
2	Противоположные стороны равны, противоположные углы равны				
3	Все стороны равны				
4	Все углы прямые				
5	Диагонали делятся точкой их пересечения пополам				
6	Диагонали равны				
7	Диагонали взаимно перпендикулярны				
8	Диагонали делят углы пополам				

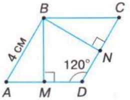


Рис. 109

207. Высота ромба, проведённая из вершины тупого угла, делит сторону пополам. Найдите:

1) углы ромба;

2) периметр ромба, если меньшая его диагональ равна 20 см.

208. Найдите углы ромба, если угол между его высотой и диагональю, проведёнными из одной вершины, равен:

1) 35°; 2) 20°; 3) 40°.

209. Сторона ромба $ABCD$ равна 4 см, $\angle D = 120°$ (рис. 109).

1) Найдите длины отрезков AM, MD, BM.

2) Докажите, что ΔMBN — равносторонний.

210. Найдите углы ромба, если его сторона образует с диагоналями углы, относящиеся, как: 1) 2 : 3; 2) 2 : 7; 3) 1 : 2.

211. Высота ромба в 8 раз меньше его периметра. Найдите углы ромба.

212. В равносторонний треугольник вписан ромб, имеющий с ним общий угол (рис. 110).

1) Найдите периметр ромба, если периметр треугольника равен 24 см.

2) Докажите, что сторона ромба равна половине стороны треугольника.

3) Найдите длины отрезков, на которые вершины ромба делят стороны треугольника.

213. Постройте ромб по:

1) диагоналям d_1 и d_2; 2) стороне a и диагонали d; 3) стороне a и углу α.

214. AN — биссектриса прямого угла A треугольника ABC (рис. 111); NM и NK — перпендикуляры к катетам. Докажите, что $AMNK$ — квадрат.

215. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найдите периметр квадрата, если катет треугольника равен: 1) 8 см; 2) 29 мм; 3) 0,41 дм.

216. Докажите, что ромб, диагонали которого равны, — квадрат.

217. На диагонали BD квадрата $ABCD$ отложены равные отрезки $BM = DN$ (рис. 112). Докажите, что $AMCN$ — ромб.

218. Справедливы ли утверждения, что четырёхугольник, в котором:

1) диагонали взаимно перпендикулярны и равны, — квадрат;

2) все стороны равны и один угол прямой, — квадрат;

3) диагонали взаимно перпендикулярны и точкой их пересечения делятся пополам, — квадрат?

219. Постройте квадрат по: 1) стороне a; 2) диагонали d.

220*. Докажите, что диагональ ромба делит пополам угол между высотами, проведёнными из одной вершины.

221*. Высоты, проведённые из вершины ромба, образуют угол 30°. Найдите углы ромба.

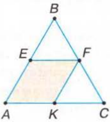


Рис. 110

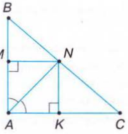


Рис. 111

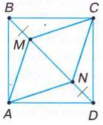


Рис. 112

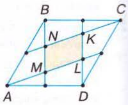


Рис. 113

222*. Вершины противоположных углов ромба соединены с серединами его сторон так, как показано на рисунке 113. Докажите, что данный четырёхугольник *MNKL* — параллелограмм.

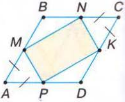


Рис. 114

223*. Из точки пересечения диагоналей ромба проведены перпендикуляры к его сторонам. Докажите, что основания этих перпендикуляров являются вершинами прямоугольника.

224*. Докажите, что четырёхугольник, вершины которого являются серединами сторон прямоугольника, — ромб.

225*. От двух противоположных вершин ромба на его сторонах отложены равные отрезки (рис. 114). Докажите, что концы этих отрезков являются вершинами прямоугольника.

226*. **Четырёхугольник, диагонали которого равны и являются биссектрисами его углов, — квадрат.** Докажите это.

227*. Сумма периметров четырёх треугольников, на которые квадрат разделяется диагоналями, больше периметра квадрата на 20 см. Найдите диагональ квадрата.

228*. **Докажите, что биссектрисы углов прямоугольника, пересекаясь, образуют квадрат.**

229*. Постройте квадрат по:

1) сумме *s* диагонали и стороны; 2) разности *m* диагонали и стороны.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

230. Швея выкроила из ткани четырёхугольник, который должен быть ромбом. Как проверить правильность изготовления выкройки, не пользуясь инструментами?

231. Столяр, чтобы проверить, имеет ли столешница форму квадрата, измерил её стороны и увидел, что они равны. Правильна ли такая проверка? Достаточно ли измерить диагонали столешницы и убедиться, что они равны?

232. Земельный участок, имеющий форму квадрата, был огорожен забором. Со временем от забора остались два столбика в противоположных вершинах квадрата. Как восстановить границы участка?

233. От прямоугольной детали вам необходимо отрезать кусок под углом 45° к краю. Как вы это сделаете?

234. Ученик решил проверить, имеет ли салфетка форму квадрата. Он сложил её по диагонали и убедился, что края обеих половинок салфетки совместились. Но ему подсказали, что такой проверки недостаточно. Нужно сложить салфетку по каждой диагонали. Если в обоих случаях края салфетки совместятся, то она имеет форму квадрата. Были ли правильными действия ученика или подсказка?

235*. Используя схемы раздвижных кронштейна (рис. 115) и решётки (рис. 116), объясните, почему точки A, B, C, D... всегда лежат на одной прямой.

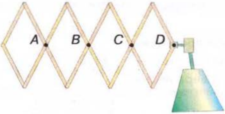


Рис. 115

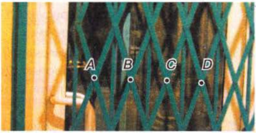


Рис. 116

§6. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Начертите угол ABC (рис. 117). Произвольным раствором циркуля отложите на стороне AB угла равные отрезки A_1A_2 и A_2A_3. Проведите с помощью чертёжного угольника и линейки через точки A_1, A_2, A_3 параллельные прямые, которые пересекут сторону BC этого угла в точках B_1, B_2, B_3. При помощи циркуля сравните длины отрезков B_1B_2 и B_2B_3. Сделайте вывод.

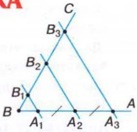


Рис. 117

Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

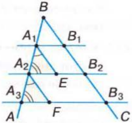


Рис. 118

Дано: $\angle ABC$ (рис. 118),
$A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.

Доказать: $B_1B_2 = B_2B_3$.

Доказательство. Проведём через точки A_1 и A_2 прямые A_1E и A_2F, параллельные BC. $\Delta A_1A_2E = \Delta A_2A_3F$ по стороне и прилежащим к ней углам. У них $A_1A_2 = A_2A_3$ по условию, $\angle A_1A_2E = \angle A_2A_3F$ и $\angle A_2A_1E = \angle A_3A_2F$ как соответственные углы при параллельных прямых. Из равенства этих треугольников следует, что $A_1E = A_2F$. Но $A_1E = B_1B_2$ и $A_2F = B_2B_3$ как противоположные стороны параллелограммов $A_1B_1B_2E$ и $A_2B_2B_3F$. Поэтому $B_1B_2 = B_2B_3$.

? Справедлива ли теорема Фалеса, если вместо сторон угла взять две произвольные прямые? Да, справедлива. Параллельные прямые, пересекающие две заданные прямые и отсекающие на одной прямой равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой (рис. 119).

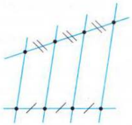


Рис. 119

Задача. Разделите данный отрезок AB на пять равных частей.

Решение. Проведём из точки A луч AC, не лежащий на прямой AB (рис. 120).

Отложим на луче AC пять равных отрезков: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5.

Проведём прямую A_5B.

Через точки A_1, A_2, A_3, A_4 проведём прямые, параллельные прямой A_5B. По теореме Фалеса, эти прямые делят отрезок AB на пять равных частей.

Рис. 120

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

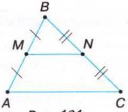


Рис. 121

На рисунке 121 отрезок MN – средняя линия ΔABC, так как точки M и N – середины сторон AB и BC.

Теорема (свойства средней линии треугольника). Средняя линия треугольника параллельна третьей его стороне и равна её половине.

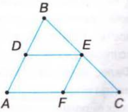


Рис. 122

Дано: ΔABC (рис. 122), $AD = BD$, $CE = BE$.

Доказать: 1) $DE \parallel AC$; 2) $DE = \frac{1}{2} AC$.

Доказательство. 1) Пусть DE – средняя линия ΔABC. Проведём через точку D прямую, параллельную AC. Согласно теореме Фалеса, она пересекает отрезок BC в его середине E, то есть содержит среднюю линию DE. Следовательно $DE \parallel AC$.

2) Проведём прямую $EF \parallel AB$. По теореме Фалеса, прямая EF делит отрезок AC пополам: $AF = FC = \frac{1}{2} AC$. По построению, четырёхугольник $ADEF$ – параллелограмм, поэтому $DE = AF$. Следовательно, $DE = \frac{1}{2} AC$.

Задача. Докажите, что середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

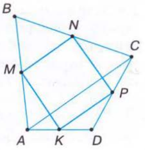


Рис. 123

Решение. Пусть ABC – данный четырёхугольник и M, N, P, K – середины его сторон (рис. 123). Докажем, что $MNPK$ – параллелограмм.

Проведём диагональ AC. MN – средняя линия ΔABC. Поэтому $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2} AC$. KP – средняя линия треугольника ADC. Поэтому $KP \parallel AC$ и $KP = \frac{1}{2} AC$.

Получаем: $MN \parallel AC$ и $KP \parallel AC$, отсюда $MN \parallel KP$;

$MN = \frac{1}{2} AC$ и $KP = \frac{1}{2} AC$, отсюда $MN = KP$.

Противоположные стороны MN и KP четырёхугольника $MNPK$ равны и параллельны, следовательно, это параллелограмм.

Если по условию задачи даны середины некоторых отрезков, то можно использовать свойства средней линии треугольника.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

Древнегреческого учёного Фале'са из Милета (625 – 548 гг. до н. э.) считают одним из семи мудрецов мира. Гений Фалеса нашёл воплощение в разных сферах деятельности. Он занимался инженерным делом, был государственным деятелем, математиком, астрономом. Особой заслугой Фалеса является то, что он ввёл в математику идею доказательства. Учёный доказал, что углы при основании равнобедренного треугольника равны, что диаметр делит окружность на две равные части, что прямой угол можно вписать в полуокружность и т. д. Историки полагают, что именно Фалес начал использовать основные геометрические инструменты – циркуль и линейку. Учёный измерял высоту египетских пирамид по длине их теней, впервые предсказал солнечное затмение, наблюдавшееся в 585 г. до н. э.

Фалес Милетский

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Сформулируйте и докажите теорему Фалеса.
2. Как разделить данный отрезок на n равных частей?
3. Что такое средняя линия треугольника?
4. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах средней линии треугольника.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

236'. Правильно ли указаны на рисунке 124 длины отрезков? Объясните ответ.

237'. По данным на рисунках 125, 126 найдите x ($a \parallel b$).

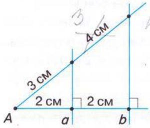


Рис. 124

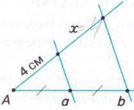


Рис. 125

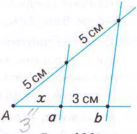


Рис. 126

238'. Правильно ли указаны на рисунке 127 длины отрезков? Объясните ответ.

239'. По данным на рисунках 128 и 129 найдите x.

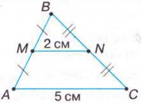


Рис. 127

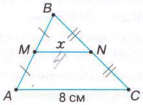


Рис. 128

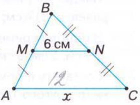


Рис. 129

240'. DE и EF — средние линии ΔABC, соответственно параллельные сторонам BC и AB. Найдите:

1) отрезок FC, если $DE = 4$ см; 2) отрезок BD, если $EF = 7$ см.

241°. На рисунке 130 $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$. Найдите:

1) AB_1, если $B_2B_3 = 6$ см; 2) AB_3, если $B_1B_2 = 5$ см; 3) B_2B_3, если $AB_3 = 12$ см.

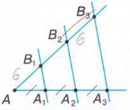


Рис. 130

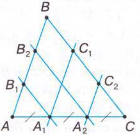


Рис. 131

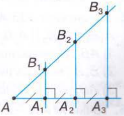


Рис. 132

242°. Разделите данный отрезок на следующее количество равных частей: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

243°. В ΔABC (рис. 131); $AB = 12$ см, $BC = 18$ см. Сторона AC разделена на три равные части, через точки деления проведены прямые, параллельные AB и BC. Найдите:

1) длины отрезков, полученных на сторонах AB и BC;

2) длины отрезков параллельных прямых, заключённых между сторонами треугольника.

244°. По данным на рисунке 132 докажите, что $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$.

245°. Найдите средние линии треугольника, если его стороны равны: 1) 8 см, 5 см, 7 см; 2) 30 мм, 40 мм, 50 мм; 3) 9 см, 10 см, 14 см.

246°. Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите стороны другого треугольника, вершины которого являются серединами сторон данного треугольника, если:

1) $a = 8$ см, $b = 10$ см, $c = 12$ см; 2) $a = 0{,}5$ дм, $b = 12$ см, $c = 1{,}3$ дм.

247°. Докажите, что в равностороннем треугольнике все средние линии равны. А в равнобедренном?

248°. Найдите средние линии равностороннего треугольника, если его периметр равен: 1) 12 см; 2) 24 дм; 3) 48 мм.

249°. Найдите периметр равностороннего треугольника, если его средняя линия равна: 1) 4 см; 2) 0,8 дм; 3) 100 мм.

250°. Найдите периметр треугольника, если его средние линии равны: 1) 3 см, 5 см, 6 см; 2) 7 см, 9 см, 12 см; 3) 8 см, 10 см, 12 см.

251°. Составьте формулу и вычислите периметр треугольника ABC, если периметр другого треугольника, образованного средними линиями ΔABC, равен: 1) 18 см; 2) 2,4 дм; 3) 300 мм.

252°. Найдите диагонали параллелограмма, если два отрезка, соединяющих середины его смежных сторон, равны:

1) 5 см и 11 см; 2) 0,6 дм и 0,9 дм; 3) 100 мм и 14 см.

253°. Определите вид треугольника, если равны:

1) его средние линии; 2) две его средние линии.

254. Разделите данный отрезок на две части так, чтобы они относились, как: 1) 2 : 3; 2) 3 : 4; 3) 2 : 5.

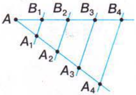


Рис. 133

255. На рисунке 133 $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ и $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$. Найдите:

1) AB_3, если разность длин отрезков AB_4 и B_2B_3 равна 9 см;

2) B_1B_4, если разность длин отрезков AB_4 и B_1B_3 равна 8 см;

3) AB_4, если разность длин отрезков B_1B_4 и B_1B_2 равна 10 см.

256. Точки M и N — середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AN и CM делят диагональ BD на три равные части.

257. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна m, а его периметр — P. Найдите стороны треугольника, если:
1) $m = 5$ см, $P = 40$ см; 2) $m = 2{,}5$ см, $P = 2{,}5$ дм.

258. Точки A и B лежат по обе стороны от прямой a на расстоянии 8 см и 4 см (рис. 134). Найдите расстояние от середины O отрезка AB до прямой a.

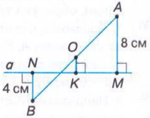


Рис. 134

259. Стороны треугольника относятся, как $3 : 4 : 5$, периметр равен P. Найдите стороны треугольника, образованного средними линиями данного треугольника, если: 1) $P = 60$ см; 2) $P = 4{,}8$ дм.

260. Стороны треугольника относятся, как $7 : 8 : 9$. Периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного равен P. Найдите стороны данного треугольника, если: 1) $P = 48$ см; 2) $P = 2{,}4$ дм.

261. Докажите, что периметр данного треугольника в два раза больше, чем периметр треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

262. Диагонали четырёхугольника равны m и n. Найдите периметр четырёхугольника с вершинами в серединах сторон данного четырёхугольника, если: 1) $m = 4$ см, $n = 6$ см; 2) $m = 24$ см, $n = 25$ см.

263. Сумма диагоналей четырёхугольника равна s. Найдите периметр четырёхугольника с вершинами в серединах сторон данного четырёхугольника, если: 1) $s = 25$ см; 2) $s = 3{,}5$ дм.

264. Диагональ квадрата равна d. Найдите периметр четырёхугольника с вершинами в серединах сторон квадрата, если: 1) $d = 8$ см; 2) $d = 1{,}3$ дм.

265. Докажите: 1) середины сторон прямоугольника — вершины ромба;
2) середины сторон ромба — вершины прямоугольника;
3) середины сторон квадрата — вершины квадрата.

266. Постройте треугольник по заданным серединам его сторон.

267. Внутри угла ABC дана точка M. Проведите через точку M прямую так, чтобы отрезок, отсекаемый от неё сторонами угла, делился в точке M пополам.

Построение (рис. 135).

Проводим $MN \parallel AB$; откладываем на стороне BC угла отрезок $NK = BN$; проводим через точки K и M искомую прямую. Докажите, что такое построение верно.

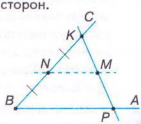


Рис. 135

268*. Точка K — середина медианы AM треугольника ABC. Прямая BK пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $AC = 3AD$.

269*. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

270*. Прямые, проведённые через вершины A, B и C треугольника ABC параллельно противоположным сторонам, образуют треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 136).

1) Докажите, что стороны треугольника $A_1B_1C_1$ делятся точками A, B и C пополам.

2) Найдите стороны треугольника $A_1B_1C_1$, если $AB = 6$ см, $BC = 12$ см, $AC = 15$ см.

3) Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника $A_1B_1C_1$ равен 48 см.

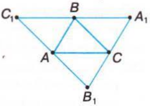


Рис. 136

271*. Докажите, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

272*. Докажите, что средние линии треугольника разделяют его на четыре равных треугольника.

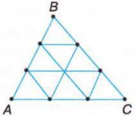


Рис. 137

273*. Каждая сторона треугольника ABC разделена на три равные части, а точки деления соединены отрезками (рис. 137).

1) Найдите сумму длин всех отрезков, соединяющих точки деления, если периметр треугольника ABC равен 36 см.

2) Решите задачу при условии, что каждая сторона треугольника разделена на четыре равные части.

274*. Докажите, что вершины треугольника лежат на одинаковом расстоянии от прямой, пересекающей середины двух его сторон.

275*. Через точку M внутри угла ABC проведите прямую так, чтобы отрезок, отсекаемый от неё сторонами угла, делился в точке M в отношении $1 : 2$.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

276. Нужно разделить прямоугольную полосу (доску, кусок жести, картона) на пять полосок одинаковой ширины. Для этого линейку разместили так, как показано на рисунке 138, и обозначили точки, соответствующие делениям одинаковой длины. Через эти точки провели прямые, параллельные краю полосы. Почему прямые разделили полосу на пять равных частей?

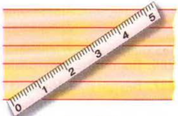


Рис. 138

277. У вас есть лист из тетради с параллельными горизонтальными линиями и циркуль. Нужно разделить данный отрезок AB на равные части, например на восемь (рис. 139). Пользуясь рисунком, объясните, как это можно сделать. Почему $AC = \frac{1}{8}AB$? А как разделить, например, карандаш на пять равных частей при помощи этого же тетрадного листа?

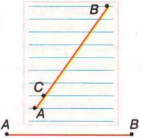


Рис. 139

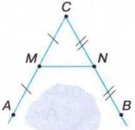


Рис. 140

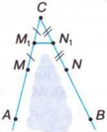


Рис. 141

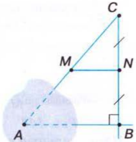


Рис. 142

278. На рисунке 140 показано, как измеряли на местности расстояние между пунктами A и B, разделёнными препятствием. Обозначили произвольную точку C и провесили прямые CA и CB. Нашли точки M и N — середины отрезков AC и BC, измерили расстояние между точками M и N. Объясните, почему искомое расстояние $AB = 2MN$.

279. Предположим, что провесить прямую между точками M и N, как в задаче 278, невозможно (рис. 141). Объясните, пользуясь рисунком, как измерить расстояние AB в этом случае. Почему искомое расстояние $AB = 4M_1N_1$?

280. На рисунке 142 показано, как измерить расстояние между пунктами A и B, если к пункту A нельзя подойти. Объясните измерения. Обязательно ли угол B должен быть прямым?

281*. Три населённых пункта A, B и C расположены на равнине и не лежат на одной прямой. Нужно проложить дорогу так, чтобы она прошла на одинаковом расстоянии от этих пунктов. Как это сделать? Покажите на рисунке. Сколько таких дорог можно проложить?

§7. ТРАПЕЦИЯ

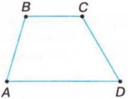


Рис. 143

Вы уже знаете, что четырёхугольник с попарно параллельными противоположными сторонами – параллелограмм.

На рисунке 143 изображён четырёхугольник $ABCD$, две стороны AD и BC которого параллельны, а две другие – AB и CD – непараллельны. Такой четырёхугольник – трапеция. Дайте определение трапеции и сравните его с приведённым в учебнике.

> ***Трапецией*** называется четырёхугольник, в котором две стороны параллельны, а две другие – непараллельны.

Рис. 144

Рис. 145

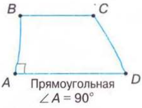


Рис. 146

Параллельные стороны трапеции называются её *основаниями*, а непараллельные – *боковыми сторонами*. На рисунке 144 AD и BC – основания трапеции, AB и CD – боковые стороны.

? Могут ли основания трапеции быть равными? Не могут, поскольку тогда получим параллелограмм.

Высотой трапеции называется перпендикуляр, проведённый из любой точки одного основания к другому основанию либо его продолжению (рис. 144).

Трапеция, в которой боковые стороны равны, называется *равнобедренной*. На рисунке 145 трапеция $MNKP$ – равнобедренная, поскольку $MN = KP$.

Трапецию, один из углов которой прямой, называют *прямоугольной*. Трапеция $ABCD$ (рис. 146) – прямоугольная, поскольку $\angle A = 90^\circ$.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон.

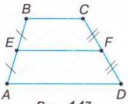


Рис. 147

На рисунке 147 отрезок EF – средняя линия трапеции $ABCD$, так как точки E и F – середины боковых сторон AB и CD.

Теорема (свойства средней линии трапеции). Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

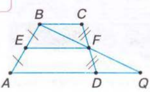


Рис. 148

Дано: $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC (рис. 148), EF – средняя линия.

Доказать: 1) $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$,

2) $EF = \dfrac{AD + BC}{2}$.

Доказательство. Поскольку EF – средняя линия трапеции $ABCD$, то $AE = BE$, $DF = CF$. Через точки B и F проведём прямую, пересекающую продолжение основания AD в точке Q. $\Delta BCF = \Delta QDF$ по стороне и прилежащим к ней углам. У них $CF = FD$ по условию, $\angle BFC = \angle QFD$ как вертикальные, $\angle BCF = \angle QDF$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AQ и секущей CD. Из равенства треугольников следует: $BF = FQ$, то есть средняя линия EF трапеции является средней линией треугольника ABQ.

1) По свойству средней линии треугольника $EF \parallel AQ$, поэтому $EF \parallel AD$. Поскольку $AD \parallel BC$, то $EF \parallel BC$.

2) $EF = \frac{1}{2}AQ = \frac{AD + DQ}{2}$, но $DQ = BC$ (из равенства треугольников BCF и QDF).

Тогда получим $EF = \frac{AD + BC}{2}$.

Задача (свойство равнобедренной трапеции).

В равнобедренной трапеции углы при основании равны. Докажите это.

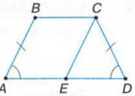


Рис. 149

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ (рис. 149) $AB = CD$. Докажем, что углы при основании AD равны.

Проведём $CE \parallel AB$. Полученный четырёхугольник $ABCE$ — параллелограмм, так как его противоположные стороны попарно параллельны. По свойству параллелограмма, $AB = CE$, а по условию — $AB = CD$. Следовательно, $CE = CD$ и $\triangle CDE$ — равнобедренный. Поэтому $\angle CDE = \angle CED$. Но $\angle CED = \angle BAD$ как соответственные углы при параллельных прямых CE и AB и секущей AE. Отсюда $\angle CDE = \angle BAE$.

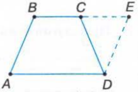


Рис. 150

Если в условии задачи дана трапеция, то полезно такое дополнительное построение: проведите через вершину трапеции прямую, параллельную боковой стороне (рис. 149 или 150), и используйте свойства полученных параллелограмма и треугольника.

Решите предыдущую задачу, используя рисунок 150.

Посмотрите на рисунок 151, где изображены изученные вами

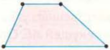
Рис. 151

четырёхугольники. Вы видите, что среди четырёхугольников можно выделить параллелограммы (противоположные стороны попарно параллельны) и трапеции (только две противоположные стороны параллельны). Среди трапеций, в свою очередь, – равнобедренные и прямоугольные. Если в параллелограмме все стороны равны либо все углы прямые, то получим ромбы или прямоугольники. Наконец, квадрат – это частный вид либо ромба (все углы прямые), либо прямоугольника (все стороны равны), либо параллелограмма (все углы прямые и все стороны равны).

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. Рассмотрите таблицу 13 классификации трапеций по боковым сторонам и углам.

Таблица 13

По углам	По сторонам	
	Равнобедренные	**Неравнобедренные**
Прямоугольные	—	
Непрямоугольные		

По боковым сторонам трапеции делятся на равнобедренные и неравнобедренные, а по углам — на прямоугольные и непрямоугольные. Равнобедренные трапеции бывают одного вида — непрямоугольные; неравнобедренные — как прямоугольные, так и непрямоугольные.

2. Слово «трапеция» происходит от греческого слова *trapezion*, что означает — столик, трапеза. Этот термин как название вида четырёхугольника применяется с XVIII века.

О том, что средняя линия трапеции равна полусумме её оснований, было известно ещё древним египтянам и вавилонским землемерам.

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Что такое трапеция?
2. Какие стороны трапеции называются основаниями? Боковыми сторонами?
3. Какая трапеция называется равнобедренной? Прямоугольной?
4. Что такое средняя линия трапеции?
5. Сформулируйте и докажите свойства средней линии трапеции.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

282'. На рисунке 152 изображена трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$. Назовите:

1) основания трапеции;
2) боковые стороны трапеции;
3) углы, прилежащие к основанию;
4) углы, прилежащие к боковой стороне.

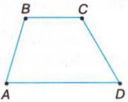


Рис. 152

283'. Начертите острый угол с вершиной O. Проведите две параллельные прямые, пересекающие стороны угла. Обозначьте точки пересечения прямых и сторон угла буквами A, B, C, D. Какого вида данный четырёхугольник $ABCD$?

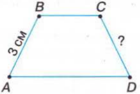


Рис. 153

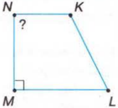


Рис. 154

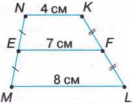


Рис. 155

284'. По рисункам 153 и 154 найдите:

1) сторону CD равнобедренной трапеции (рис. 153); 2) угол N трапеции (рис. 154).

285'. Начертите трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC.

1) Проведите среднюю линию MN.
2) Найдите длины отрезков BC, AD и MN.
3) Найдите сумму длин отрезков BC и AD. Во сколько раз сумма этих отрезков больше, чем средняя линия?

286'. Правильно ли указана на рисунке 155 длина средней линии трапеции? Объясните ответ.

287°. Докажите, что сумма градусных мер двух углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, равна 180°.

288°. По данным на рисунках 156 — 158 найдите неизвестные углы трапеции $ABCD$.

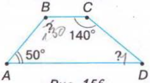


Рис. 156

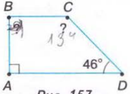


Рис. 157

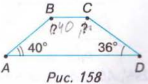


Рис. 158

289°. $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC. Найдите:

1) $\angle A$ и $\angle C$, если $\angle B = 110°$, $\angle D = 30°$;
2) $\angle A$ и $\angle D$, если $\angle B = 125°$, $\angle C = 145°$.

290°. В прямоугольной трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна к основанию AD. Найдите неизвестные углы трапеции, если:
1) $\angle C = 120°$; 2) $\angle D = 25°$; 3) $\angle C - \angle A = 40°$.

291°. AD и BC — основания трапеции $ABCD$. По данным таблицы 14 найдите неизвестные углы трапеции.

Таблица 14

$\angle A$	70°	65°		
$\angle B$			120°	135°
$\angle C$	154°			142°
$\angle D$		36°	28°	

292°. На рисунке 159 $ABCD$ — равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC, $CK \parallel AB$. Докажите, что:
1) четырёхугольник $ABCK$ — параллелограмм;
2) треугольник KCD — равнобедренный.

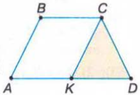


Рис. 159

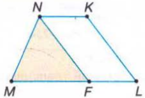


Рис. 160

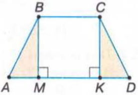


Рис. 161

293°. $MNKL$ — трапеция с основаниями ML и NK, $NF \parallel KL$ (рис. 160). Найдите:
1) основание ML, если $MF = 5$ см, $NK = 2$ см;
2) основание NK, если $ML = 10$ см, $MF = 7$ см;
3) отрезок MF, если основания равны 12 см и 4 см.

294°. BM и CK — высоты равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 161). Докажите, что $\triangle ABM = \triangle DCK$.

295°. По данным на рисунках 162 — 164 в трапеции $ABCD$ найдите отрезок x.

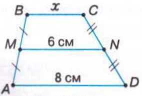


Рис. 162

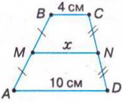


Рис. 163

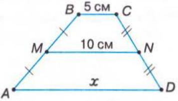


Рис. 164

296°. AD и BC — основания трапеции, MN — средняя линия. Заполните таблицу 15.

297°. Найдите периметр трапеции, в которой боковые стороны равны c и d, а средняя линия m, если:
1) $c = 8$ см, $d = 12$ см, $m = 10$ см; 2) $c = d = 17$ см, $m = 14$ см.

Таблица 15

AD	10 см	7 см		11 см	9 см
BC	6 см		5 см		15 см
MN		8 см	9 см	10 см	

298°. По данным на рисунках 165 и 166 найдите основания и среднюю линию трапеции.

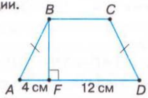


Рис. 165

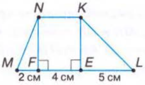


Рис. 166

299. Два угла трапеции равны: 1) 46° и 144°; 2) 35° и 155°; 3) 52° и 124°. Найдите два других её угла.

300. Могут ли углы трапеции, взятые последовательно, относиться, как: 1) 3 : 8 : 5 : 6; 2) 1 : 2 : 2 : 3; 3) 7 : 3 : 4 : 5?

301. Острый угол прямоугольной трапеции с основаниями a и b равен 45°. Найдите высоту трапеции, если: 1) $a = 6$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 62$ мм, $b = 10$ см.

302. Если углы при основании трапеции равны, то трапеция равнобедренная. Докажите это.

303. По данным на рисунках 167 — 169 найдите углы трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$).

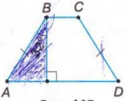


Рис. 167

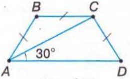


Рис. 168

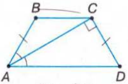


Рис. 169

304. Докажите, что в равнобедренной трапеции сумма противолежащих углов равна 180°.

305. Если в трапеции сумма противоположных углов равна 180°, то трапеция равнобедренная. Докажите это.

306. Найдите углы равнобокой трапеции, если:

1) разность противоположных углов равна 40°;
2) противоположные углы относятся, как 1 : 4.

307. Докажите, что диагонали равнобедренной трапеции равны.

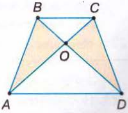


Рис. 170

308. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, $AD \parallel BC$, AC и BD — диагонали, O — точка их пересечения (рис. 170). Докажите, что: 1) ΔBOC и ΔAOD — равнобедренные; 2) $\Delta AOB = \Delta DOC$.

309. В равнобедренной трапеции большее основание равно 10 см, боковая сторона — 4 см, а угол между ними — 60°. Найдите меньшее основание.

310. Острый угол равнобедренной трапеции равен 60°, а основания — 15 см и 49 см. Найдите боковую сторону.

311. Найдите основания равнобедренной трапеции, если её высота, проведённая из вершины тупого угла, делит основание на отрезки: 1) 4 см и 8 см; 2) 2 см и 7 см.

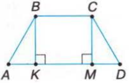


Рис. 171

312. *ABCD* — равнобедренная трапеция, *AD* ∥ *BC*, *BK* и *CM* — высоты (рис. 171). Докажите: 1) $AK = MD = (AD - BC) : 2$; 2) $KD = AM = (AD + BC) : 2$.

313. Найдите длины отрезков, на которые делит основание равнобедренной трапеции высота, проведённая из вершины тупого угла, если основания равны: 1) 12 см и 24 см; 2) 8 см и 14 см.

314. Докажите, что если боковая сторона трапеции равна меньшему основанию, то диагональ, соединяющая их концы, — биссектриса угла, прилежащего к большему основанию.

315. В равнобедренной трапеции диагональ является биссектрисой острого угла, а основания равны a и b. Найдите периметр трапеции, если:
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 62$ мм, $b = 10$ см.

316. Докажите теорему о свойствах средней линии трапеции, используя рисунки 172 — 174.

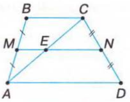


Рис. 172

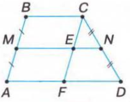


Рис. 173

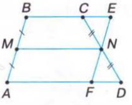


Рис. 174

317. Основания трапеции относятся, как 7 : 3, а разность их длин равна 4,8 см. Найдите среднюю линию трапеции.

318. Средняя линия трапеции равна 10 см. Одна из диагоналей делит её на два отрезка, разность длин которых равна 2 см. Найдите основания трапеции.

319. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен их полуразности.

320. Меньшее основание трапеции равно a, расстояние между серединами диагоналей — c. Найдите большее основание трапеции, если:
1) $a = 6$ см, $c = 4$ см; 2) $a = 50$ мм, $c = 2$ см.

321. Постройте трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, если:
1) $AD = 12$ см, $AB = 6$ см, $CD = 8$ см, $\angle D = 35°$;
2) $AD = 10$ см, $AB = 5$ см, $CD = 6$ см, $BD = 8$ см;
3) $AD = 7$ см, $AB = 3$ см, $\angle A = 60°$, $\angle D = 50°$;
4) $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AC = d$.

322*. Если биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются на другом её основании, то другое основание равно сумме боковых сторон трапеции. Докажите это.

323*. Найдите углы равнобедренной трапеции, если её боковая сторона равна 24 см, а диагональ делит среднюю линию на отрезки 8 см и 20 см.

324*. **Если диагонали трапеции равны, то трапеция равнобедренная.** Докажите это.

325*. **Докажите, что если диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, то средняя линия трапеции равна её высоте.**

326*. Если средняя линия равнобедренной трапеции равна её высоте, то диагонали трапеции перпендикулярны. Докажите это.

327*. Прямая делит трапецию на ромб и равносторонний треугольник. Найдите:
1) угол между диагоналями трапеции;
2) основания трапеции, если её средняя линия равна 18 см.

328*. Прямоугольная трапеция разделяется диагональю на два треугольника — равносторонний со стороной a и прямоугольный. Найдите среднюю линию трапеции.

329*. Периметр трапеции равен 60 см, углы при большем основании — по 60°. Диагональ делит среднюю линию на две части, одна из которых на 7 см длиннее другой. Найдите основания трапеции.

330*. По рисунку 175 составьте план построения трапеции $ABCD$ по основаниям a и b ($a > b$), а также боковым сторонам c и d.

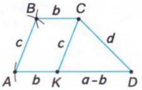


Рис. 175

Для построения трапеции, как и в случае с параллелограммом, сначала нужно построить вспомогательный треугольник (например, ΔKCD на рис. 175)**, а затем достроить его до трапеции.**

331*. Постройте трапецию по основаниям a и b ($a > b$) и диагоналям d_1 и d_2.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

332. Из плитки в форме равнобедренной трапеции нужно изготовить паркет. Как это сделать?

333. Над входом в дачный домик сооружён навес. Со временем возникла необходимость поставить подпоры к середине края навеса (точка F на рис. 176). Как без замеров найти длину подпоры (отрезка EF), если края навеса находятся на высоте 2,5 м и 3,5 м от поверхности земли?

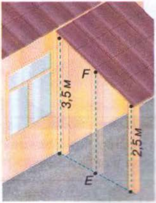


Рис. 176

334. Плитка для кровли имеет форму трапеции (трапеция неравнобедренная). Нужно определить размеры сторон, если:

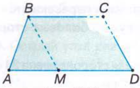


Рис. 177

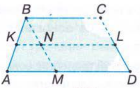


Рис. 178

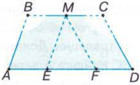


Рис. 179

1) обломан один уголок плитки (рис. 177);
2) обломаны два уголка плитки (рис. 178 и 179).
Объясните, как это сделать.

335. Найдите расстояние от конца транспортёра до поверхности земли (непосредственно измерить его нельзя), если противоположный конец и середина транспортёра находятся соответственно на высоте 0,5 м и 2 м (рис. 180).

336*. Посмотрите на рисунок 181. Строителям нужно определить расстояние между серединами боковых сторон кровли (точки A и B). Им предложили следующий способ: из верхней части кровли условно провесить прямую, перпендикулярную к нижнему основанию кровли, ориентируясь, например, на соответствующие края кровли. Обозначить точку C пересечения этих прямых и измерить расстояние CD. Тогда искомое расстояние AB будет равно CD. Правильный ли этот способ? Почему?

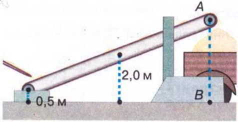


Рис. 180

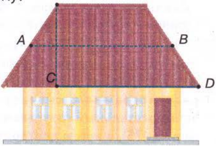


Рис. 181

§8. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

Проведём окружность с центром O и построим угол с вершиной в центре окружности (рис. 182). Получили центральный угол в окружности.

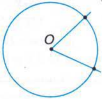
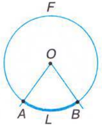


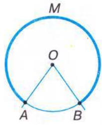
Рис. 182

Угол с вершиной в центре окружности называется ***центральным углом***.



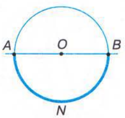
$\cup ALB = \angle AOB$

Рис. 183



$\cup AMB = 360° - \angle AOB$

Рис. 184



$\cup ANB = 180°$

Рис. 185

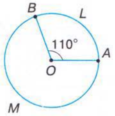


Рис. 186

Пусть стороны центрального угла пересекают окружность с центром O в точках A и B. Центральному углу AOB соответствуют две дуги с концами A и B – одна из них меньше полуокружности (рис. 183), другая – больше полуокружности (рис. 184). Если угол AOB – развёрнутый, то ему соответствуют также две дуги – две полуокружности (рис. 185). Чтобы различать эти дуги, на каждой из них обозначают промежуточные точки, например L и F (рис. 183).

Записывают: $\cup ALB$ и $\cup AFB$ (рис. 183). Дугу можно обозначить и без промежуточной точки, например $\cup AB$, если понятно, о какой из двух дуг идёт речь.

Дуга окружности измеряется в градусах. Если дуга AB окружности с центром O меньше полуокружности (рис. 183) либо является полуокружностью (рис. 185), то её градусная мера равна градусной мере центрального угла AOB. Если же дуга AB больше полуокружности (рис. 184), то её градусная мера равна $360° - \angle AOB$.

Градусная мера всей окружности равна 360°.

На рисунке 186 градусная мера дуги ALB равна 110°.

Кратко говорим: «Дуга ALB равна 110°» и записываем: $\cup ALB = 110°$. На этом же рисунке $\cup AMB = 360° - 110° = 250°$.

? Зависит ли градусная мера дуги окружности от длины её радиуса? Не зависит, поскольку от длины радиуса окружности не зависит градусная мера соответствующего центрального угла.

> Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется ***вписанным углом***.

На рисунке 187 $\angle ABC$ – вписанный, так как его вершина B лежит на окружности, а стороны пересекают окружность в точках A и C. Если дуга AC лежит во внутренней области вписанного угла ABC, то говорят, что данный ***вписанный угол опирается на дугу AC***.

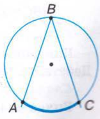


Рис. 187

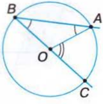


Рис. 188

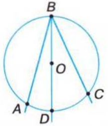


Рис. 189

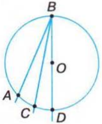


Рис. 190

Рис. 191

Теорема (о вписанном угле).
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Дано: $\angle ABC$ — вписанный в окружность с центром O (рис. 188 — 190).

Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Доказательство. Рассмотрим три случая расположения центра окружности относительно сторон данного вписанного угла.

1. Центр окружности лежит на стороне вписанного угла (рис. 188). Проведём отрезок OA, тогда центральный угол AOC является внешним углом ΔAOB. По свойству внешнего угла треугольника, $\angle AOC = \angle OBA + \angle OAB$.
Но $\angle OBA = \angle OAB$, так как ΔAOB — равнобедренный ($OB = OA = R$).
Поэтому $\angle AOC = 2\angle ABC$, или $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$. Но $\angle AOC$ измеряется дугой AC. Следовательно, вписанный угол ABC измеряется половиной дуги AC.

2. Центр окружности лежит во внутренней области вписанного угла (рис. 189). Проведём луч BO, тогда данный угол равен сумме двух углов:
$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$.
Из доказанного в первом случае следует, что $\angle ABD$ измеряется половиной дуги AD, а $\angle DBC$ — половиной дуги DC. Поэтому $\angle ABC$ измеряется суммой полудуг AD и DC, то есть половиной дуги AC.

3. Центр круга лежит во внешней области вписанного угла (рис. 190). Проведём луч BO, тогда:

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2} \cup AD - \frac{1}{2} \cup CD = \frac{1}{2} \cup AC.$$

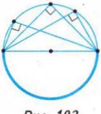


Рис. 192

Следствие 1.

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 191). Действительно, каждый из них измеряется половиной одной и той же дуги.

Следствие 2.

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, – прямой (рис. 192).

Действительно, такой угол измеряется половиной полуокружности, то есть $180^\circ : 2 = 90^\circ$.

Рис. 193

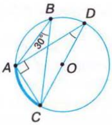


Рис. 194

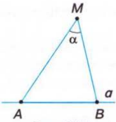


Рис. 195

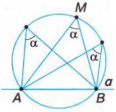


Рис. 196

? Равны ли вписанные углы, опирающиеся на равные дуги (рис. 193)? Да, так как каждый из этих углов измеряется половиной равных дуг, градусные меры которых равны.

Задача. Хорды окружности AB и BC образуют угол 30°. Найдите хорду AC, если диаметр окружности равен 10 см.

Решение. Проведём диаметр CD и соединим точки A и D (рис. 194). $\angle ABC = \angle ADC$ как вписанные, опирающиеся на дугу AC (следствие 1). Поэтому $\angle ADC = \angle ABC = 30°$. $\angle CAD = 90°$, так как опирается на диаметр окружности (следствие 2). Тогда в прямоугольном треугольнике ADC катет AC лежит против угла 30° и равен половине гипотенузы CD. Следовательно, $AC = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ (см).

Для того чтобы доказать равенство двух углов, покажите, что они являются вписанными в одну окружность и опираются на одну и ту же дугу либо на равные дуги данной окружности.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

Рассмотрим геометрическое место точек, которое используется при решении сложных задач на построение.

Пусть AB — некоторый отрезок прямой a, M — произвольная точка, не лежащая на прямой a, $\angle AMB = \alpha$ (рис. 195). Тогда говорят: из *точки M отрезок AB виден под углом α*.

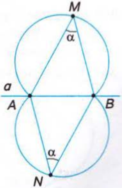


Рис. 197

Если описать окружность около ΔAMB (рис. 196), то из любой точки дуги AMB (кроме точек A и B) отрезок AB виден под углом α (следствие 1 из теоремы о вписанном угле). Поскольку точку можно взять и с другой стороны от прямой a, то существует ещё одна дуга, например ANB (рис. 197), из каждой точки которой (кроме точек A и B) отрезок AB виден под углом α. Поэтому **геометрическим местом точек, из которых отрезок AB виден под углом α, является фигура, состоящая из двух дуг AMB и ANB без точек A и B.**

Чтобы построить одну из двух дуг этого геометрического места точек для острого угла α, необходимо:

1) провести серединный перпендикуляр к отрезку AB (рис. 198);
2) из точки B провести луч под углом $90° - \alpha$ к отрезку AB. O — точка пересечения луча с серединным перпендикуляром;
3) описать окружность радиусом OB. Дуга AMB — искомое геометрическое место точек.

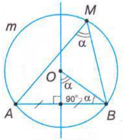


Рис. 198

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Какой угол называется центральным?
2. Что считают градусной мерой дуги окружности?
3. Что такое угол, вписанный в окружность?
4. Докажите, что вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.
5. Сформулируйте следствия из теоремы о вписанном угле.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

337'. Проведите окружность с центром O и отметьте на ней две точки A и B. Соедините эти точки с центром окружности. Назовите центральный угол, а также две дуги, соответствующие этому углу.

338'. По данным на рисунках 199 — 201 найдите градусную меру дуги ALB.

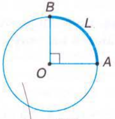


Рис. 199

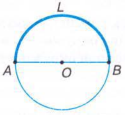


Рис. 200

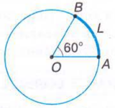


Рис. 201

339'. Проведите окружность с центром O. Отметьте на окружности точки A и B так, чтобы дуга AB была равна: 1) 70°; 2) 120°; 3) 55°.

340'. Начертите окружность и проведите диаметр AB. Постройте несколько вписанных углов, опирающихся на диаметр AB. Измерьте эти углы и сравните их градусные меры. Сделайте вывод.

341'. По данным на рисунках 202 — 204 найдите градусную меру угла α.

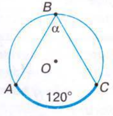


Рис. 202

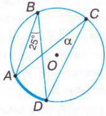


Рис. 203

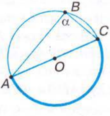


Рис. 204

342°. Какова градусная мера дуги, равной:

1) $\frac{1}{2}$ окружности; 2) $\frac{1}{3}$ окружности; 3) $\frac{2}{3}$ окружности?

Какова градусная мера соответствующего центрального угла?

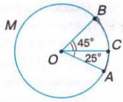


Рис. 205

343°. Центральный угол AOB равен α.

Какова градусная мера двух дуг, соответствующих углу AOB, если: 1) $\alpha = 30°$; 2) $\alpha = 62°$; 3) $\alpha = 100°$?

344°. По данным на рисунках 205, 206 найдите градусную меру: 1) дуги ACB; 2) дуги AMB.

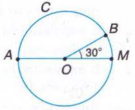


Рис. 206

345°. Начертите окружность с центром O и отметьте на ней точку A. Постройте хорду AB таким образом, чтобы:

1) $\angle AOB = 60°$; 2) $\angle AOB = 90°$;

3) $\angle AOB = 120°$; 4) $\angle AOB = 180°$.

Обозначьте *дуги окружности, стянутые хордой AB*, и найдите их градусные меры.

346°. На полуокружности с диаметром AB отмечены точки C и D, при этом $\cup AC = 59°$, $\cup BD = 61°$. Найдите хорду CD, если радиус окружности равен:

1) 12 см; 2) 0,2 дм; 3) 39 мм.

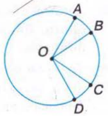


Рис. 207

347°. В окружности с центром O дуги AB и CD равны (рис. 207). Докажите, что $\angle AOC = \angle BOD$.

348°. Дуги ABC и BCD окружности с центром O равны (рис. 207). Докажите, что $\angle AOB = \angle COD$.

349°. Найдите вписанный угол, если дуга, на которую он опирается, равна: 1) 52°; 2) 126°; 3) 200°.

350°. Найдите дугу, на которую опирается вписанный угол, если он равен: 1) 16°; 2) 32°; 3) 110°.

351°. По данным на рисунках 208 – 210 найдите $x°$.

352°. Точки A, B и C делят окружность на три дуги, градусные меры которых относятся, как $m : n : k$. Найдите углы треугольника ABC, если:

1) $m = n = k = 1$; 2) $m = 1$, $n = k = 2$; 3) $m = 1$, $n = 2$, $k = 3$.

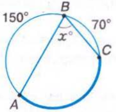


Рис. 208

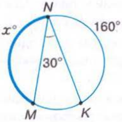


Рис. 209

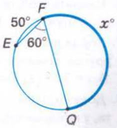


Рис. 210

353. Около треугольника ABC описана окружность. Найдите градусные меры дуг AB, BC и AC, если:
1) $\angle A = 65°$, $\angle C = 35°$; 2) $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$;
3) $\angle B = 110°$, $\angle C = 28°$.

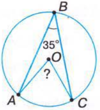


Рис. 211

354. Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, боковая сторона которого стягивает дугу: 1) 64°; 2) 120°; 3) 144°.

355. По данным на рисунках 211 и 212 найдите углы, обозначенные знаком «?».

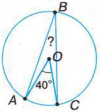


Рис. 212

356. В окружности равные дуги стянуты равными хордами. Докажите это.

357. В окружности равные хорды стягивают равные дуги. Докажите это.

358. Докажите, что диаметр, перпендикулярный к хорде, делит стягиваемые дуги пополам.

359. Диаметр проведён через середину хорды, не проходящей через центр. Докажите, что дуги, стягиваемые хордой, при этом делятся пополам.

360. Дуги, заключённые между параллельными хордами, равны. Докажите это.

361. Дуги, заключённые между касательной и параллельной ей хордой, равны. Докажите это.

362. Концы хорды AB делят окружность на две дуги ACB и ADB. Найдите вписанные в эту окружность углы ACB и ADB, если:
1) $\cup ACB : \cup ADB = 2 : 3$; 2) $\cup ACB : \cup ADB = 4 : 5$.

363. Точки P и T делят окружность на дуги, градусные меры которых относятся, как: 1) 3 : 5; 2) 2 : 7.
Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу PT.

364. Точки A и B делят окружность на две дуги, меньшая из которых равна 160°, а большая точкой C делится в отношении 2 : 3, начиная с точки A.
Найдите: 1) $\angle ABC$; 2) $\angle BAC$.

365. Докажите, что если хорды AB и BC образуют угол 30°, то хорда AC равна радиусу окружности.

366. Найдите угол, образованный хордами AB и BC, если хорда AC равна радиусу окружности. (Рассмотрите два случая.)

367. Хорда делит окружность на две дуги, одна из которых в n раз больше другой. Найдите вписанные углы, опирающиеся на эту хорду, если:
1) $n = 3$; 2) $n = 4$.

368. Докажите, что сумма вписанных углов, опирающихся на хорду окружности, у которых вершины лежат по разные стороны от неё, равна 180°.

369. По данным на рисунках 213 — 215 найдите угол α.

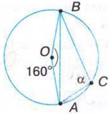


Рис. 213

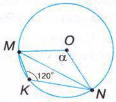


Рис. 214

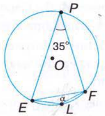


Рис. 215

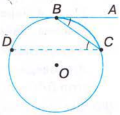


Рис. 216

370. Центральный угол на n° больше вписанного угла, опирающегося на одну и ту же дугу. Найдите градусную меру каждого угла, если:
1) $n = 35°$; 2) $n = 45°$.

371. Докажите, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.

372. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разделяет его на два равнобедренных треугольника.

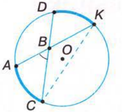
373. Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной дуги, заключённой между сторонами угла (рис. 216). Докажите это.

374. Через конец хорды, делящей окружность в отношении $m : n$, проведена касательная. Найдите острый угол между хордой и касательной, если:
1) $m = 1$, $n = 3$; 2) $m = 2$, $n = 7$.

375*. Докажите, что угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммой дуг, на которые опираются заданный угол и угол, вертикальный ему. (Используйте рис. 217.)

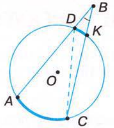
376*. Докажите, что угол, вершина которого лежит вне окружности, а стороны пересекают эту окружность, измеряется полуразностью большей и меньшей дуг, заключённых между его сторонами. (Используйте рис. 218.)

377*. По данным на рисунках 219 и 220 найдите угол ABC.



$$\angle ABC = \frac{\smile AC + \smile DK}{2}$$

Рис. 217



$$\angle ABC = \frac{\smile AC - \smile DK}{2}$$

Рис. 218

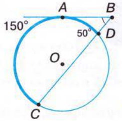


Рис. 219

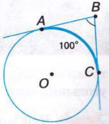


Рис. 220

378*. Окружность разделена точками A, B и C на дуги, которые относятся, как $11:3:4$. Через точки A, B и C проведены касательные до их взаимного пересечения. Найдите углы образованного треугольника.

379*. К двум окружностям с центрами O и O_1, имеющим внешнее касание в точке A, проведена общая касательная BC (B и C — точки касания). Докажите, что угол BAC — прямой.

380*. Две окружности имеют внутреннее касание, причём меньшая окружность проходит через центр большей. Докажите, что любая хорда большей окружности, проходящая через точку касания, делится меньшей окружностью пополам.

381*. Найдите геометрическое место вершин:

1) прямых углов, стороны которых проходят через две заданные точки;
2) треугольников с общим основанием AB, в которых угол, лежащий напротив основания, равен данному углу α.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

382. Правильность изготовления чертёжного угольника проверили следующим образом. Начертили окружность и её диаметр AB (рис. 221). Приложили угольник так, чтобы его катеты проходили через точки A и B. Если при этом вершина прямого угла лежит на окружности, то чертёжный угольник правильный. Объясните, почему.

383. В центре круглого диска нужно просверлить отверстие. Как найти центр диска, используя только чертёжный угольник?

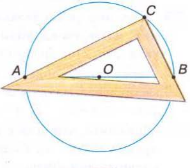


Рис. 221

§9. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

Отметим на окружности четыре точки и соединим их хордами (рис. 222). Получили четырёхугольник, вписанный в окружность.

Рис. 222

Четырёхугольник, все вершины которого лежат на окружности, называется ***вписанным*** в эту окружность, а ***окружность – описанной*** около этого четырёхугольника.

Отметим на окружности четыре точки и проведём через них отрезки касательных, как показано на рисунке 223. Получили четырёхугольник, описанный около окружности.

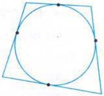


Рис. 223

Четырёхугольник, все стороны которого касаются окружности, называется ***описанным*** около этой окружности, а ***окружность – вписанной*** в этот четырёхугольник.

Свойство вписанного четырёхугольника и его признак связаны с углами этого четырёхугольника.

Теорема (свойство углов вписанного четырёхугольника).
Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180°.

Дано: четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность (рис. 224).

Доказать: $\angle A + \angle C = 180°, \angle B + \angle D = 180°$.

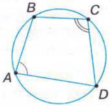


Рис. 224

Доказательство. Углы A, B, C и D вписаны в окружность.

Из теоремы о вписанном угле следует:

$\angle A = \frac{1}{2} \cup DCB$, $\angle C = \frac{1}{2} \cup DAB$.

Тогда $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\cup DCB + \cup DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

Сумма всех углов четырёхугольника равна 360°, а сумма углов A и C — 180°. Тогда $\angle B + \angle D = 360° - (\angle A + \angle C) = 360° - 180° = 180°$.

? Около каждого ли четырёхугольника можно описать окружность? В отличие от треугольника не каждый четырёхугольник – вписанный. Приведём признак вписанного четырёхугольника без доказательства.

Теорема (признак вписанного четырёхугольника).
Если в четырёхугольнике сумма двух противоположных углов равна 180°, то около такого четырёхугольника можно описать окружность.

Задача. Докажите, что около равнобедренной трапеции можно описать окружность.

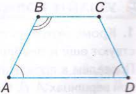


Рис. 225

Решение. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC (рис. 225).
Докажем, что $\angle B + \angle D = 180°$.

В любой трапеции сумма углов, прилежащих к одной боковой стороне, равна 180° (следует из свойства параллельных прямых). Поэтому, $\angle A + \angle B = 180°$. По свойству равнобокой трапеции, $\angle A = \angle D$. Тогда $\angle B + \angle D = 180°$ и, согласно признаку вписанного четырёхугольника, трапеция $ABCD$ — вписанная.

Свойство описанного четырёхугольника и его признак связаны со сторонами этого четырёхугольника.

Теорема (свойство сторон описанного четырёхугольника). Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника равны.

Дано: четырёхугольник $ABCD$, описанный около окружности (рис. 226), E, F, K и P — точки касания.

Доказать: $AB + CD = BC + AD$.

Доказательство. По свойству касательных, проведённых к окружности из одной точки:
$AE = AP, BE = BF, CK = CF, DK = DP$.
Сложив почленно эти равенства, получим:
$AE + BE + CK + DK = AP + BF + CF + DP$,
то есть $AB + CD = BC + AD$.

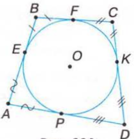


Рис. 226

? В каждый ли четырёхугольник можно вписать окружность? В отличие от треугольника, не в каждый четырёхугольник можно вписать окружность. Приведём признак описанного четырёхугольника без доказательства.

Теорема (признак описанного четырёхугольника). Если в четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

Чтобы доказать, что четырёхугольник $MNKP$ (рис. 227) – вписанный, покажите, что:
либо $\angle M + \angle K = 180°$,
либо $\angle N + \angle P = 180°$.

Чтобы доказать, что четырёхугольник $ABCD$ (рис. 227) – описанный, покажите, что:
$AB + CD = AD + BC$.

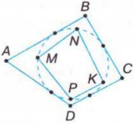


Рис. 227

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. Кроме окружностей, вписанной и описанной около четырёхугольника, существуют ещё и *вневписанные* окружности.

Проведём в произвольном четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы внешних углов при вершинах A, B, C и D (рис. 228). Точки их пересечения O, O_1, O_2, и O_3 — центры четырёх вневписанных окружностей. Каждая из них касается одной стороны четырёхугольника и продолжений двух других его сторон. Вневписанные окружности имеют следующее свойство: их центры являются вершинами четырёхугольника $OO_1O_2O_3$, вписанного в окружность.

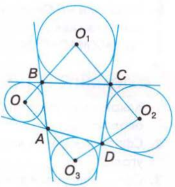


Рис. 228

Действительно,

$$\angle OO_1O_2 = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) \text{ і } \angle OO_3O_2 = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D),$$

поэтому

$$\angle OO_1O_2 + \angle OO_3O_2 = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

Следовательно, четырёхугольник $OO_1O_2O_3$ — вписанный в окружность.

2. Древнегреческие учёные открыли, кроме уже известных вам, другие интересные свойства вписанных и описанных четырёхугольников. Например.

Теорема Птолемея (II в.). Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.

Задача Архимеда (III в. до н. э.). Если диагонали вписанного четырёхугольника перпендикулярны, то сумма квадратов четырёх отрезков, на которые делятся диагонали точкой пересечения, равна квадрату диаметра описанной окружности.

Позднее (IX — XIII в.) арабские учёные дополнили сведения о вписанных и описанных четырёхугольниках и способах исследования их свойств.

Так, одарённый геометр Гасан ибн-Гайтем (умер в 1038 г.) предложил, способ, позволяющий установить, используя лишь циркуль, является ли данный четырёхугольник вписанным. Пусть дан четырёхугольник $ABCD$ (рис. 229). Продолжим сторону AD за точку D. Проведём дуги равных окружностей с центрами в точках B и D. Если $KL = MN$, то четырёхугольник $ABCD$ — вписанный, так как $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ (докажите это). В иных случаях четырёхугольник не является вписанным.

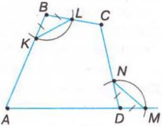


Рис. 229

3. При решении задач иногда рассматриваются окружности, не заданные в условии. На рисунке к задаче сначала находим четырёхугольник, около которого можно описать окружность либо в который можно вписать окружность, а потом используем свойства хорд, диаметров, вписанных углов, углов с вершиной внутри окружности и т. д.

Задача. Из произвольной точки M катета BC прямоугольного треугольника ABC проведён перпендикуляр MD к гипотенузе AB (рис. 230). Докажем, что $\angle MAD = \angle MCD$.

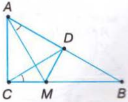


Рис. 230

Решение. Около четырёхугольника $ADMC$ можно описать окружность, так как $\angle ACM + \angle ADM = 180°$.
Тогда $\angle MAD = \angle MCD$ — вписанные углы, опирающиеся на одну дугу MD.

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Какой четырёхугольник называется вписанным в окружность? Описанным около окружности?
2. Сформулируйте и докажите теорему о свойстве углов вписанного четырёхугольника.
3. Сформулируйте и докажите теорему о свойстве сторон описанного четырёхугольника.
4. Сформулируйте признак вписанного четырёхугольника; описанного четырёхугольника.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

384'. Начертите окружность и отметьте на ней четыре точки A, B, C и D. Последовательно соедините эти точки отрезками. Измерьте транспортиром углы полученного вписанного четырёхугольника $ABCD$. Найдите суммы градусных мер противоположных углов A и C, B и D. Сравните эти суммы и сделайте вывод.

385'. Правильно ли указаны на рисунке 231 градусные меры углов четырёхугольника? Объясните ответ.

386'. Начертите окружность и проведите четыре касательные к окружности таким образом, чтобы получить описанный четырёхугольник. Измерьте стороны этого четырёхугольника. Найдите сумму длин противоположных сторон. Сравните эти суммы и сделайте вывод.

387'. Правильно ли указаны на рисунке 232 длины сторон четырёхугольника? Объясните ответ.

388'. По данным на рисунке 233 найдите:
1) сумму сторон AD и BC описанного четырёхугольника $ABCD$;
2) сумму углов M и P вписанного четырёхугольника $MNPK$.

389'. По данным на рисунках 234 — 236 найдите углы вписанных четырёхугольников.

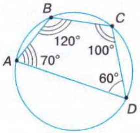


Рис. 231

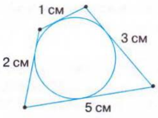


Рис. 232

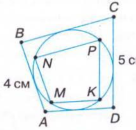


Рис. 233

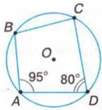


Рис. 234

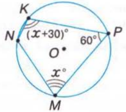


Рис. 235

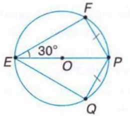


Рис. 236

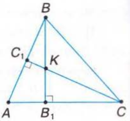


Рис. 237

390°. Можно ли описать окружность около четырёхугольника $ABCD$, если:

1) углы A, B, C и D соответственно равны:

а) 90°, 90°, 110°, 120°; б) 70°, 130°, 110°, 50°.

2) углы A, B, C соответственно равны:

а) 85°, 130°, 95°; б) 60°, 100°, 119°?

391°. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке K (рис. 237). Докажите, что около четырёхугольника AB_1KC_1 можно описать окружность. Найдите угол B_1KC_1, если угол A равен: 1) 55°; 2) 72°; 3) 60°.

392°. Можно ли описать окружность около произвольного:

1) прямоугольника; 2) квадрата; 3) ромба? Объясните ответ.

393°. **Докажите, что центр окружности, описанной около прямоугольника, — это точка пересечения диагоналей.**

394°. AD и BC — диаметры окружности.

1) Докажите, что четырёхугольник $ABDC$ — прямоугольник.

2) При каком условии прямоугольник $ABDC$ является квадратом?

395°. По данным на рисунках 238 — 240 найдите неизвестные стороны описанных четырёхугольников.

396°. Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна s. Найдите периметр четырёхугольника, если: 1) $s = 20$ см; 2) $s = 3{,}2$ дм.

397°. Найдите периметр описанного четырёхугольника, в котором последовательно взятые стороны равны: 1) 12 см, 16 см, 28 см; 2) 10 см, 14 см, 16 см.

398°. Можно ли вписать окружность в четырёхугольник, в котором последовательно взятые стороны равны: 1) 2 см, 3 см, 5 см, 4 см; 2) 7 см, 4 см, 3 см, 5 см?

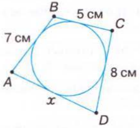


Рис. 238

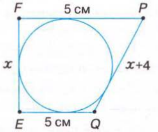


Рис. 239

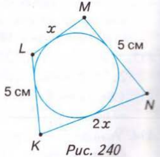


Рис. 240

399°. Можно ли вписать окружность в произвольный:
1) прямоугольник; 2) квадрат; 3) ромб? Объясните ответ.

400°. Докажите, что центр окружности, вписанной в ромб, — это точка пересечения диагоналей.

401. Углы A, B и C вписанного четырёхугольника $ABCD$ относятся, как $m : n : k$. Найдите угол D, если:
1) $m = 2$, $n = 3$, $k = 4$; 2) $m = 1$, $n = k = 2$.

402. Меньшая сторона прямоугольника равна b, а угол между диагоналями — 60°. Найдите радиус описанной окружности, если:
1) $b = 10$ см; 2) $b = 2{,}3$ дм.

403. Можно ли описать окружность около четырёхугольника, в котором последовательно взятые углы относятся, как: 1) 2 : 4 : 5 : 3; 2) 5 : 7 : 8 : 9?

404. Докажите, что:
1) любая трапеция, вписанная в окружность, — равнобедренная;
2) любой параллелограмм, вписанный в окружность, — прямоугольник;
3) любой ромб, вписанный в окружность, — квадрат.

405. Докажите, что угол A вписанного четырёхугольника $ABCD$ равен внешнему углу при вершине C.

406. Докажите, что биссектрисы углов трапеции $ABCD$, пересекаясь, образуют четырёхугольник $MNKL$, около которого можно описать окружность (рис. 241).

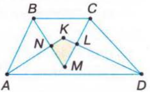


Рис. 241

407. Можно ли вписать окружность в четырёхугольник, в котором последовательно взятые стороны пропорциональны числам: 1) 2, 2, 3, 3; 2) 2, 5, 3, 4?

408. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а вершины лежат по разные стороны от него. Можно ли в полученный четырёхугольник вписать окружность?

409. Как расположить два равных разносторонних треугольника, чтобы в образованный ими четырёхугольник можно было вписать окружность?

410. Докажите, что боковую сторону трапеции, описанной около окружности с центром O, видно из точки O под углом 90°.

411. Если четырёхугольник описанный, то сумма углов, под которыми видны из центра вписанной окружности две его противоположные стороны, равна 180°. Докажите это.

412. Три стороны описанной трапеции, взятые последовательно, относятся, как 2 : 7 : 12. Найдите стороны трапеции, если её периметр равен: 1) 42 мм; 2) 56 см.

413. Составьте формулу и найдите среднюю линию описанной трапеции, если её периметр равен: 1) 16 см; 2) 200 мм.

414. Угол описанной равнобедренной трапеции равен 150°, а её средняя линия — 40 см. Найдите: 1) высоту трапеции; 2) радиус вписанной окружности.

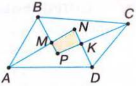


Рис. 242

415. Постройте квадрат:
1) вписанный в окружность;
2) описанный около окружности.

416. Постройте прямоугольник по радиусу R описанной около него окружности и:
1) стороне a; 2) углу α между диагоналями.

417*. **Докажите, что биссектрисы углов четырёхугольника, пересекаясь, образуют четырёхугольник, около которого можно описать окружность** (см. рис. 242).

418*. Докажите, что во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ биссектриса угла A пересекается с биссектрисой внешнего угла при вершине C в точке, лежащей на окружности, описанной около четырёхугольника.

419*. Из точки P пересечения взаимно перпендикулярных диагоналей четырёхугольника $ABCD$ проведены перпендикуляры PK, PL, PM и PN к сторонам. Точки K, L, M и N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — вписанный в окружность.

420*. Прямая, параллельная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него трапецию, боковая сторона которой — часть основания заданного треугольника и в два раза длиннее его меньшего основания. Можно ли в такую трапецию вписать окружность?

421*. Если около трапеции можно описать окружность и в эту же трапецию вписать окружность, то каждая боковая сторона трапеции равна её средней линии. Докажите это.

422*. Постройте ромб по радиусу R вписанной в него окружности и стороне a.

423*. Постройте четырёхугольник по радиусу R описанной около него окружности и сторонам a, b, c.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

424. Нужно просверлить четыре отверстия на одинаковом расстоянии вдоль края круглого диска и одно отверстие — в центре. Начертите рисунок и объясните, как это сделать.

425. Объясните, как из листа жести прямоугольной формы вырезать круг наибольшего радиуса.

426. Из листа картона круглой формы нужно вырезать квадрат, диагональ которого равна диаметру круга. Объясните, как это сделать.

427. Обитатели четырёх дачных домиков решили найти такое место для колодца, чтобы расстояния от него до каждого дома были одинаковыми. Оказалось, что дома расположены в вершинах равнобедренной трапеции. Сделайте рисунок и найдите место для колодца.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Докажите теорему о сумме углов четырёхугольника.
2. Какой четырёхугольник называется параллелограммом?
3. Сформулируйте и докажите теоремы о свойствах сторон и углов параллелограмма; диагоналей параллелограмма.
4. Каковы признаки параллелограмма?
5. Что такое прямоугольник? Ромб? Квадрат? Трапеция? Равнобедренная трапеция?
6. Сформулируйте и докажите теоремы о свойствах диагоналей прямоугольника; ромба.
7. Каковы свойства квадрата?
8. Докажите теоремы о свойствах средней линии треугольника; трапеции.
9. Какой угол называется центральным? Вписанным в окружность?
10. Докажите, что вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.
11. Какой четырёхугольник называется вписанным в окружность? Описанным около окружности?
12. Сформулируйте и докажите теоремы о свойстве сторон описанного четырёхугольника; о свойстве углов вписанного четырёхугольника.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Внимательно прочитайте задания и найдите среди предложенных ответов правильные. Для выполнения тестового задания необходимо 10 – 15 мин.

№ 1

1° Найдите тупой угол параллелограмма, если острый угол равен 30°.
А. 60°. **Б.** 120°. **В.** 150°. **Г.** 180°.

2° При каком из указанных условий четырёхугольник является параллелограммом?
А. Две противоположные стороны равны.
Б. Одна из диагоналей делит другую пополам.
В. Две противоположные стороны параллельны.
Г. Диагонали делятся точкой их пересечения пополам.

3° Диагональ прямоугольника равна 10 см и образует со стороной угол 30°. Найдите меньшую сторону прямоугольника.
А. 15 см. **Б.** 5 см. **В.** 20 см. **Г.** 6 см.

4 Найдите острый угол ромба, если его периметр равен 24 см, а высота – 3 см.
А. 60°. **Б.** 90°. **В.** 30°. **Г.** 45°.

5* Биссектриса угла *A* параллелограмма *ABCD* пересекает сторону *BC* в точке *K*. Найдите периметр параллелограмма, если *BK* = 12 см, *KC* = 8 см.
А. 20 см. **Б.** 40 см. **В.** 44 см. **Г.** 64 см.

№ 2

1° У ΔABC $BC = 18$ см. Сторона AB разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне AC. Найдите отрезки, отсекаемые параллельными прямыми на стороне BC треугольника.

А. 5 см, 5 см, 5 см. **Б.** 6 см, 6 см, 6 см.
В. 5 см, 6 см, 6 см. **Г.** 4 см, 4 см, 4 см.

2° Точки M и N — середины сторон AB и BC ΔABC. Найдите сторону AC треугольника, если $MN = 4$ см.

А. 8 см. **Б.** 12 см. **В.** 2 см. **Г.** 6 см.

3° $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC. Найдите углы A и C трапеции, если $\angle B = 100°$, $\angle D = 60°$.

А. 30° и 100°. **Б.** 70° и 120°. **В.** 80° и 120°. **Г.** 45° и 150°.

4 Одно из оснований трапеции равно 10 см. Найдите другое её основание, если средняя линия равна 8 см.

А. 6 см. **Б.** 16 см. **В.** 18 см. **Г.** 2 см.

5* Диагональ равнобедренной трапеции является биссектрисой её острого угла, а основания равны 5 см и 12 см. Найдите периметр трапеции.

А. 17 см. **Б.** 22 см. **В.** 25 см. **Г.** 27 см.

№ 3

1° Найдите вписанный угол, если дуга, на которую он опирается, равна 150°.

А. 150°. **Б.** 75°. **В.** 90°. **Г.** 85°.

2° Хорда окружности длиной 10 см стягивает дугу 60°. Найдите диаметр окружности.

А. 5 см. **Б.** 15 см. **В.** 20 см. **Г.** 16 см.

3° Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 10 см. Найдите периметр четырёхугольника.

А. 10 см. **Б.** 20 см. **В.** 30 см. **Г.** 40 см.

4 Углы A, B и C вписанного четырёхугольника $ABCD$ относятся, как $1 : 2 : 3$. Найдите угол D.

А. 30°. **Б.** 60°. **В.** 120°. **Г.** 90°.

5* Угол описанной равнобедренной трапеции равен 150°, а её средняя линия — 6 см. Найдите высоту трапеции.

А. 12 см. **Б.** 18 см. **В.** 3 см. **Г.** 4 см.

ГЛАВА 2

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В главе вы узнаете:

- что такое пропорциональные отрезки, как их находить;
- о подобных треугольниках, их свойствах и признаках;
- какие средние пропорциональные отрезки есть в прямоугольном треугольнике;
- о свойстве биссектрисы треугольника;
- как использовать метод подобия, решая задачи на построение

§10. ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Вы знаете, что в равных треугольниках равны соответственные стороны и углы. Посмотрите на рисунок 243. Углы $\Delta A_1B_1C_1$ равны соответственным углам ΔABC: $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$. Но стороны $\Delta A_1B_1C_1$ в два раза больше соответственных сторон ΔABC: $A_1B_1 = 2AB$, $B_1C_1 = 2BC$, $A_1C_1 = 2AC$. Следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$ не равен треугольнику ABC. Треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC – *подобные*.

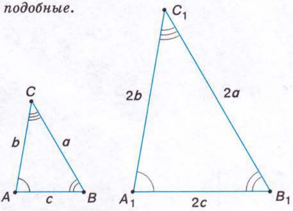


Рис. 243

Поскольку $A_1B_1 = 2AB$, составим *отношение* этих сторон: $\frac{A_1B_1}{AB} = 2$.

Аналогично получим: $\frac{B_1C_1}{BC} = 2$ и $\frac{A_1C_1}{AC} = 2$. Каждое из этих отношений равно числу 2. Следовательно, их можно приравнять: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$.

Из этого двойного равенства составим три пропорции:

1) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$; 2) $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$; 3) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$.

Именно поэтому говорят, что соответственные стороны подобных треугольников *пропорциональны*. Их называют *сходственными*.

Два треугольника называются ***подобными***, если в них соответственные углы равны, а сходственные стороны пропорциональны.

Число, которому равно отношение сходственных сторон подобных треугольников, называется *коэффициентом подобия*. Его обозначают буквой k.

Записываем: $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ и говорим: «Треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC». Знак $\backsim$ заменяет слово «подобный». Если коэффициент подобия треугольников известен, то записываем:

$$\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC\ (k = 2) \text{ или } \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1\ (k = \frac{1}{2}).$$

Для подобных треугольников, как и для равных треугольников, имеет значение порядок записи вершин. Для треугольников на рисунке 243 запись «$\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta BAC$» – неверна.

Задача. Два треугольника на рисунке 244 подобны. Найдите длину их неизвестных сторон.

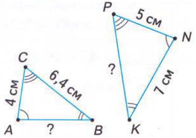


Рис. 244

Решение. В данных треугольниках: $\angle A = \angle N$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle P$.

Составим отношение сходственных сторон:

$$\frac{AB}{NK} = \frac{BC}{KP} = \frac{AC}{NP}.$$

Подставим известные длины сторон:

$$\frac{AB}{7} = \frac{6{,}4}{KP} = \frac{4}{5}.$$

Приравняем первое и третье отношения, а затем — второе и третье.

Получаем: $\frac{AB}{7} = \frac{4}{5}$, отсюда $AB = 5{,}6$ см;

$\frac{6{,}4}{KP} = \frac{4}{5}$, отсюда $KP = 8$ см.

Для того чтобы составить отношение сходственных сторон подобных треугольников:

1) определите соответственно равные углы треугольников;

2) выясните, какие их стороны являются сходственными;

3) запишите равенство трёх дробей, в их числителях – стороны одного треугольника, а в знаменателях – сходственные стороны другого.

Может ли коэффициент подобия быть равным 1? Да, может. В этом случае подобные треугольники имеют равные стороны, следовательно, они равны.

Равенство треугольников – это частный случай подобия треугольников с коэффициентом $k = 1$.

Задача. Отношение периметров подобных треугольников равно отношению их сходственных сторон. Докажите это.

Решение. Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 245) подобны с коэффициентом k.

Докажем, что $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Поскольку $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$,

то $AB = kA_1B_1$, $BC = kB_1C_1$,
$AC = kA_1C_1$.

Запишем периметры подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$:

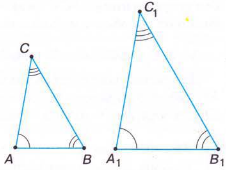


Рис. 245

$$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1 = k(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1) = kP_{\Delta A_1B_1C_1},$$

$$P_{\Delta A_1B_1C_1} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1.$$

Тогда $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{kP_{\Delta A_1B_1C_1}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = k$, или $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. Слово «подобный» означает «имеющий общие черты с кем-либо, чем-либо; похожий на кого-либо, что-либо». Этот термин часто используют в быту, науке, производстве. Например, эскиз треугольной косынки в масштабе 1 : 10 и её выкройка в натуральную величину — это подобные треугольники. А вот выкройка и сама косынка — равные треугольники.

2. Древнегреческие математики вместо термина «подобный» употребляли слово «похожий». В отечественной математической литературе русский термин «подобие» используется с 1739 г. Знак «∾» ввёл в 1679 г. немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646 — 1716).

3. На рисунке 246 вы видите подобные треугольники ABC и HTP. Они расположены так, что их стороны параллельны, а прямые AH, BT и CP, проходящие через соответственные

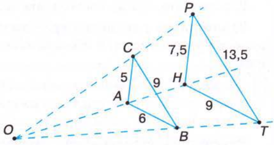


Рис. 246

вершины, пересекаются в одной точке *O*. Говорят, что такие подобные треугольники *ABC* и *HTP* имеют *перспективное расположение*.

Понятие перспективы известно с древности, но собственно научная теория начинает интенсивно развиваться только в эпоху Возрождения. Посредством перспективы художники достигали эффекта объёмности своих холстов. Первым, кому это удалось сделать, был выдающийся флорентийский художник Джотто ди Бондоне (1266 — 1337). Одновременно начинается поиск научных основ перспективы. Здесь первенство принадлежит также флорентийцу Филиппо Брунеллески (1377 — 1446). Учение о перспективе развивали и активно использовали в своём творчестве выдающиеся художники Леонардо да Винчи (Италия, 1452 — 1519), Альбрехт Дюрер (Германия, 1471 — 1528) и другие. Со временем из первых геометрических ростков учения о перспективе возникла новая наука — *проективная геометрия*. Её основателем был французский геометр, архитектор и инженер Жерар Дезарг (1591 — 1661), а развил до уровня стройной математической теории французский математик Жан Виктор Понселе (1788 — 1867)

Жерар Дезарг

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Какие треугольники называются подобными?
2. Как записать, что два треугольника подобны с коэффициентом *k*?
3. Объясните, как составить отношение соответственных сторон двух подобных треугольников.
4. Чему равен коэффициент подобия равных треугольников?
5. Какой коэффициент подобия имеют периметры подобных треугольников?

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

428'. На рисунках 247 и 248 изображены подобные треугольники. Назовите их. Запишите: 1) их соответственные углы; 2) их сходственные стороны.

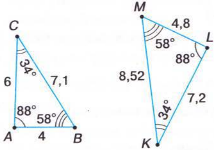


Рис. 247

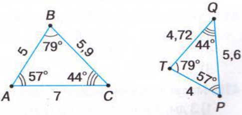


Рис. 248

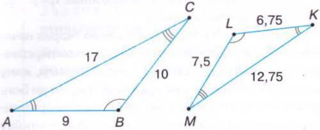


Рис. 249

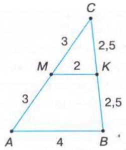


Рис. 250

429'. Даны подобные треугольники: 1) ABC и KLM (рис. 249);
2) ABC и MKC (рис. 250).
Составьте отношение их сходственных сторон. Определите коэффициент подобия. Сделайте запись.

430'. Постройте по клеточкам сначала треугольник KLM (рис. 251), а потом $\Delta KBC \sim \Delta KLM$, если:

1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = \frac{2}{3}$.

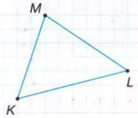


Рис. 251

431'. Вычислите периметры подобных треугольников, изображённых на рисунках:
1) 247; 2) 248; 3) 249; 4) 250.
Найдите отношение периметров подобных треугольников.

432°. На рисунке 252 $\Delta ABC \sim \Delta KDC$. Подберите пары отрезков так, чтобы из них можно было составить правую часть пропорции:

1) $\frac{KD}{AB} = \dots$; 2) $\frac{AC}{KC} = \dots$; 3) $\frac{BC}{DC} = \dots$.

Сколько таких пар отрезков можно подобрать?

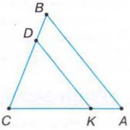


Рис. 252

433°. Могут ли быть подобными треугольники:
1) остроугольный и тупоугольный;
2) прямоугольный и тупоугольный;
3) равнобедренный и равносторонний?

434°. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Найдите неизвестные углы треугольников, если:
1) $\angle A = 30°$, $\angle B_1 = 60°$;
2) $\angle C = \angle B_1 = 50°$;
3) $\angle B = 110°$, $\angle C_1 = 25°$.

435°. Могут ли стороны двух подобных треугольников иметь длину:
1) 3 дм, 4 дм, 5 дм и 9 м, 12 м, 15 м;
2) 1,2 см, 1,3 см, 2,5 см и 24 мм, 26 мм, 50 мм;
3) 5 мм, 50 см, 50 см и 5 см, 50 мм, 50 мм ?

436°. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Найдите стороны AC и B_1C_1, если:

1) $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $A_1B_1 = 56$ мм, $A_1C_1 = 42$ мм;
2) $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $A_1B_1 = 3{,}9$ дм, $A_1C_1 = 4{,}5$ дм;
3) $AB = 40$ мм, $BC = 37$ мм, $A_1B_1 = 20$ см, $A_1C_1 = 6{,}5$ см.

437°. Прямая, пересекающая две стороны треугольника и отсекающая от него подобный треугольник, параллельна третьей стороне треугольника. Докажите это.

438°. Прямая пересекает две стороны треугольника ABC в точках M и N и отсекает от него подобный треугольник. Назовите параллельные прямые, образовавшиеся при этом, если:

1) $M \in AB$ и $N \in BC$; 2) $M \in AC$ и $N \in BC$; 3) $M \in AC$ и $N \in AB$.

439°. a, b, c — стороны треугольника с периметром P. Он подобен с коэффициентом k другому треугольнику, периметр которого равен P_1. Заполните таблицу 16.

Таблица 16

a	12 см	20 см	8 см	
b	16 см	21 см		8 см
c	18 см		17 см	14 см
P				
P_1		140 см	100 см	12,4 см
k	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{2}$

440°. Найдите стороны равностороннего треугольника, если периметр подобного ему треугольника с коэффициентом 4 равен:

1) 36 см; 2) 45 см; 3) 72 см.

441. Стороны треугольника относятся, как 3 : 5 : 7. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого:

1) меньшая сторона равна 5 см; 2) периметр равен 45 см.

442. Если треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC и треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику ABC, то и треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны. Докажите это.

443. $\Delta ABC \sim \Delta MOP$ $(k_1 = 3)$ и $\Delta ABC \sim \Delta TEH$ $(k_2 = 2)$.
Подобны ли треугольники MOP и TEH? С каким коэффициентом подобия?

444. $\Delta ABC \sim \Delta MOP$ $(k_1 = 4)$ и $\Delta MOP \sim \Delta TEH$ $(k_2 = \frac{1}{2})$.
Подобны ли треугольники ABC и TEH? С каким коэффициентом подобия?

445. Каждая сторона треугольника увеличена на: 1) 2 см; 2) 5 см.
Из полученных отрезков построен новый треугольник.
Может ли он быть подобен исходному?

446. Каждую сторону треугольника увеличили на:

1) треть её длины; 2) 25 % её длины.

Можно ли из образованных отрезков построить треугольник? Может ли он быть подобен исходному?

447. В равнобедренном треугольнике две стороны равны a и b. Какова третья сторона в подобном ему треугольнике с коэффициентом k, если:

1) $a = 12$ см, $b = 5$ см, $k = 0{,}5$;

2) $a = 6$ см, $b = 15$ см, $k = 2{,}5$?

448. Определите периметры двух подобных треугольников, если их сходственные стороны относятся, как $m : n$, а разность периметров равна a, при:

1) $m : n = 7 : 4$, $a = 48$ см;

2) $m : n = 2 : 3$, $a = 15$ см.

449. В трапеции с основаниями a и b одна из боковых сторон, равная c, продолжена до пересечения с продолжением другой боковой стороны. Образовалось два подобных треугольника с общей вершиной O. На какое расстояние продолжена первая боковая сторона, если:

1) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 6$ см; 2) $a = 8$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см?

450*. Стороны равностороннего треугольника сначала увеличили в n раз, а потом уменьшили в n раз. Будет ли искомый треугольник подобен данному? Каков коэффициент подобия первого и третьего треугольников?

451*. Два подобных прямоугольных треугольника имеют острый угол 30°. Гипотенуза одного из них равна меньшему катету другого. Определите коэффициент подобия треугольников.

452*. В равнобедренном треугольнике основание в n раз меньше боковой стороны, а периметр равен P. Найдите стороны подобного ему треугольника с коэффициентом k, если:

1) $n = 2$, $P = 50$ см, $k = 1{,}5$; 2) $n = 3$, $P = 35$ см, $k = 0{,}75$.

453*. Наибольшие стороны двух подобных треугольников равны соответственно a_1 и a_2, а разность их периметров $P_2 - P_1 = m$.

Докажите, что $P_1 = \dfrac{ma_1}{a_2 - a_1}$ и $P_2 = \dfrac{ma_2}{a_2 - a_1}$.

454*. Сходственные стороны двух подобных треугольников попарно сложили, а из полученных трёх отрезков построили новый треугольник. Подобен ли он заданным треугольникам?

455*. Существуют ли подобные треугольники, в которых отношение двух сторон одного треугольника равно отношению квадратов сходственных сторон другого?

456*. Докажите, что радиус окружности, проходящей через середины сторон треугольника, равен половине радиуса окружности, описанной около этого треугольника.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

457°. Равносторонний треугольник со стороной 0,1 мм рассматривают под микроскопом с увеличением в 40 раз. Во сколько раз увеличатся углы треугольника?

458. Сделайте необходимые измерения и выясните, подобны ли внутренний и внешний треугольники чертёжного угольника.

459. На географической карте три населённых пункта расположены на расстоянии 6 см, 5 см и 4 см. Наибольшее расстояние на местности равно 15 км. Найдите расстояния между другими пунктами. Каков масштаб этой карты?

460. Если к листу стали, имеющему форму трапеции с основаниями 15 см и 25 см и боковыми сторонами 18 см и 20 см, приложить стальной лист в форме треугольника с основанием 15 см, то получим стальной лист треугольной формы. Каковы размеры искомого листа?

461. Трёхярусную ёлку из тесьмы образуют три подобных равносторонних треугольника. У них сходственные стороны параллельны, а высоты к горизонтальным сторонам лежат на одной прямой. Достаточно ли 2,5 м тесьмы для такой ёлки, если её основание равно 40 см, а треугольники подобны с коэффициентом $\frac{1}{2}$? Сколько тесьмы понадобится, чтобы украсить такими ёлками шторы на окнах вашей классной комнаты?

§11. ОБОБЩЁННАЯ ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

В теореме Фалеса утверждается, что параллельные прямые отсекают на сторонах угла соответственно равные отрезки. Обобщённым является случай, когда параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки (рис. 253). Соответствующая теорема называется обобщённой теоремой Фалеса. Приведём её без доказательства.

Теорема (обобщённая теорема Фалеса).
Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на его сторонах пропорциональные отрезки.

Обобщённую теорему Фалеса иначе называют *теоремой о пропорциональных отрезках.*

Следствие. **Прямая, параллельная любой стороне треугольника, отсекает от него подобный треугольник.**

Действительно, в треугольниках ABC и MNC (рис. 254) общий угол C. Его пересекают параллельные прямые AB и MN. С секущей AC они образуют равные соответственные углы CAB и CMN. Третьи углы треугольников также равны. Докажем пропорциональность сторон треугольников.

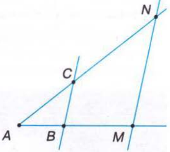


Рис. 253

Из обобщённой теоремы Фалеса, $\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{BN}{NC}$,

поэтому $\dfrac{AM+MC}{MC}=\dfrac{BN+NC}{NC}$, отсюда $\dfrac{AC}{MC}=\dfrac{BC}{NC}$.

Проводим прямую $NK \parallel AC$, аналогично получаем: $\dfrac{BC}{NC}=\dfrac{BA}{KA}$. Но $KA=MN$, поэтому $\dfrac{BC}{NC}=\dfrac{BA}{MN}$.

Итак, в треугольниках ABC и MNC соответственные углы равны, а сходственные стороны

пропорциональны: $\dfrac{AC}{MC}=\dfrac{BC}{NC}=\dfrac{BA}{MN}$.

Данные треугольники подобны по определению.

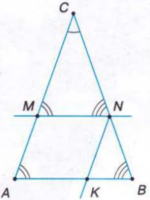


Рис. 254

Для того чтобы доказать подобие треугольников:

1) докажите равенство соответственных углов данных треугольников;

2) докажите пропорциональность сходственных сторон данных треугольников;

3) сделайте вывод: треугольники подобны по определению.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. Может возникнуть вопрос: *Как доказать обобщённую теорему Фалеса?*

Разделим отрезок AB на n равных отрезков (рис. 255). Пусть длина каждого из них равна d. Тогда $AB = dn$. Отложим от точки B на луче BM отрезки длиной d. Через все точки деления проведём прямые, параллельные BC. Из теоремы Фалеса следует, что эти прямые отсекают равные отрезки и на стороне AC данного угла.

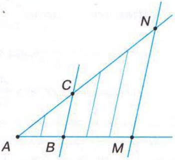


Рис. 255

Обозначим их длины d_1. На отрезке AC их будет одинаковое количество n, поэтому $AC = d_1 n$.

Пусть на отрезке BM помещается целое количество m таких отрезков (рис. 255). На отрезке CN их также будет m. Тогда $BM = dm$, а $CN = d_1 m$.

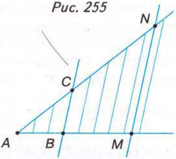


Рис. 256

Найдём отношение отрезков на двух сторонах угла:

$$\frac{AB}{BM}=\frac{n}{m},\ \frac{AC}{CN}=\frac{n}{m}.$$

Мы видим, что два отношения равны одному и тому же числу $\frac{n}{m}$. Следовательно, их можно приравнять: $\frac{AB}{BM}=\frac{AC}{CN}$.

Пусть на отрезке BM помещаются m отрезков длиной d и остаётся отрезок меньшей длины, чем d (рис. 256). Это означает, что отрезок из m частей длиной d меньше отрезка BM, а отрезок из $m+1$ частей длиной d — больше этого отрезка. Пришли к неравенству: $dm < BM < d(m+1)$.

Поскольку $d=\frac{AB}{n}$, то $\left(\frac{AB}{n}\right)m<BM<\left(\frac{AB}{n}\right)(m+1)$.

Разделим все члены неравенства на AB: $\frac{m}{n}<\frac{BM}{AB}<\frac{m+1}{n}$, или $\frac{m}{n}<\frac{BM}{AB}<\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$.

Если увеличивать количество точек деления, то число n будет бесконечно большим, а число $\frac{1}{n}$ — приближённым к нулю. Поэтому отношение $\frac{BM}{AB}$ отличается от числа $\frac{m}{n}$ на очень малое число $\frac{1}{n}$.

Аналогично получим: $d_1 m < CN < d_1(m+1)$; если $d_1 = \frac{AC}{n}$:

$$\left(\frac{AC}{n}\right)m < CN < \left(\frac{AC}{n}\right)(m+1) \quad \text{и} \quad \frac{m}{n} < \frac{CN}{AC} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

Итак, соотношение $\frac{CN}{AC}$ отличается от числа $\frac{m}{n}$ на одно и то же очень малое число $\frac{1}{n}$. А это возможно, если $\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC}$.

Отсюда следует, что $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}$.

2. Отрезок x называется ***четвёртым пропорциональным*** трёх заданных отрезков a, b и c, если выполняется равенство $a : b = c : x$. Для построения четвёртого пропорционального отрезка на стороне произвольного угла от его вершины O откладываем отрезки $OA = a$, $AB = b$, а на другой стороне угла — отрезок $OC = c$ (рис. 257). Соединив точки A и C, проводим $BX \parallel AC$. Отрезок CX — искомый, поскольку, по обобщённой теореме Фалеса, $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CX}$.

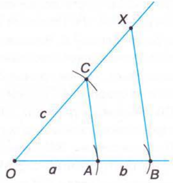


Рис. 257

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Как формулируется обобщённая теорема Фалеса?
2. Сформулируйте следствие из обобщённой теоремы Фалеса.
3. Как доказать подобие треугольников по определению.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

462'. По данным на рисунках 258 и 259 запишите, в каком отношении точка O делит отрезок AB.

463'. Точка M делит отрезок PH в заданном отношении. Какой из отрезков длиннее — PM или MH, если:
1) $PM : MH = 5 : 2$; 2) $PM : MH = 3 : 7$?

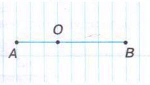


Рис. 258

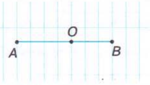


Рис. 259

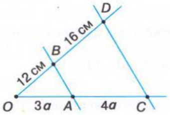


Рис. 260

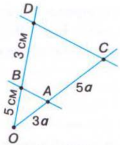


Рис. 261

464'. На рисунках 260 и 261 $AB \parallel CD$. Верно ли указаны длины отрезков? Объясните ответ.

465'. На стороне BA угла ABC отложите отрезки BM и MA длиной:
1) 2 см и 3 см; 2) 5 см и 1 см; 3) 4 см и 2 см.
Через точки A и M проведите параллельные прямые AC и MH.
Как относятся отрезки BH и HC?

466'. Сколько отрезков надо знать, чтобы выяснить, пропорциональны ли они?

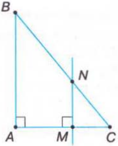


Рис. 262

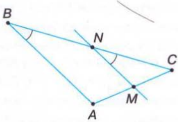


Рис. 263

467'. На рисунках 262 и 263 прямая MN параллельна стороне AB треугольника ABC. Подобны ли треугольники ABC и MNC?
Объясните ответ.

468°. Отрезок AB длиной d точка M делит в отношении $m : n$. Найдите длины отрезков AM и BM, если:
1) $d = 10$ см, $m = 2$, $n = 3$; 2) $d = 16$ см, $m = 3$, $n = 1$;
3) $d = 14$ см, $m = 3$, $n = 4$.

469°. Начертите отрезок AB, длина которого — 12 клеточек тетради.
Разделите его по клеточкам в отношении:
1) 1 : 2; 2) 5 : 7; 3) 2 : 3.

470°. Разделите данный отрезок AB в отношении 3 : 4.
По рисунку 264 составьте план построения.

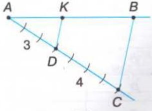


Рис. 264

471°. Начертите отрезок BC произвольной длины и разделите его в отношении:
1) 2 : 3; 2) 1 : 4; 3) 2 : 5.

472°. Определите, пропорциональны ли отрезки a, b, c и d, длины которых соответственно равны:
1) 8 см, 3 см, 24 см и 9 см; 2) 5 см, 6 см, 10 см и 18,5 см;
3) 7 см, 4 см, 2,1 см и 1,1 см.

473°. К трём заданным отрезкам a, b и c подберите четвёртый отрезок d так, чтобы они были пропорциональными.
Заданные отрезки имеют соответственно длины:
1) 1, 2, 3; 2) 6, 3, 4; 3) 3, 5, 7.
Сколько решений имеет задача?

474°. Начертите отрезок AB длиной 9 клеточек тетради. Обозначьте на нём точку C на расстоянии a клеточек от точки A. Постройте по клеточкам отрезки, пропорциональные отрезкам AC и CB, если:
1) $a = 2$; 2) $a = 3$; 3) $a = 4$.

475°. Отрезки AB и BC лежат на одной прямой и имеют длины:
1) 2 см и 3 см; 2) 1,5 см и 6 см; 3) 5 см и 4 см.
Постройте отрезки MN и NK, пропорциональные двум заданным отрезкам.

476°. На сторонах угла ABC размещены четыре точки: P и Q — на стороне BA, E и F — на стороне BC. Параллельны ли прямые PE и QF, если:
1) $BP = PQ$ и $BE = EF$; 2) $BQ = QP$ и $BF = FE$;
3) $BP = PQ$ и $BF = FE$; 4) $BQ = QP$ и $BE = EF$?
Выполните рисунки и объясните ответ.

477°. Подобны ли треугольники ABC и AMN, если MN — средняя линия треугольника ABC?

478°. Как проще всего построить треугольник, подобный заданному?

479°. Параллельно стороне $AB = a$ равностороннего треугольника ABC проведены две прямые, пересекающие AC в точках M и E, а BC — в точках N и F.
$MN = \frac{3}{4}a$, $EF = \frac{1}{2}a$.
Начертите в тетради таблицу 17 и заполните её.

Таблица 17

AB	4 см					
MN		6 см				
EF			3 см			
$P_{\Delta ABC}$				12 см		
$P_{\Delta MNC}$					9 см	
$P_{\Delta EFC}$						10 см

480. Отрезок AB длиной a точка C делит на отрезки AC и CB, отношение которых равно $m : n$. Выразите длины отрезков AC и CB с помощью числа a, m и n.

481. Отрезок длиной d две его внутренние точки делят на отрезки, относящиеся, как $a : b : c$. Найдите длины этих отрезков, если:

1) $d = 78$ см, $a = \frac{2}{5}$, $b = 0{,}8$, $c = \frac{3}{4}$;

2) $d = 50$ см, $a = 0{,}25$, $b = \frac{3}{5}$, $c = 0{,}4$.

Если члены отношения заданы дробями, то приведите эти дроби к общему знаменателю. Тогда числители полученных дробей будут соответствовать целым значениям членов отношения.

482. На продолжении отрезка AB длиной d взята точка N, при этом $AN : BN = m : n$. Найдите длины отрезков AN и BN, если:

1) $d = 5$ см, $m = 3$, $n = 2$;
2) $d = 16$ см, $m = 5$, $n = 1$.

483. На рисунке 265 $AM \parallel BN \parallel CK \parallel DP$.
Найдите длины отрезков MN, NK, KP, если:
1) $a = 2{,}5$ см, $b = 4$ см, $c = 2$ см, $MP = 12{,}5$ см;
2) $a = 10$ см, $b = 16$ см, $c = 8$ см, $MP = 50$ см.

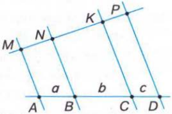


Рис. 265

484. Стороны угла A пересекают две параллельные прямые BC и OH, причём точка B лежит между точками A и O. Найдите:
1) AH, если $AB = 8$ см, $AO = 12$ см, $AC = 10$ см;
2) AO, если $AC : AH = \frac{3}{11} : 0{,}6$, $BO = 12$ дм.

485. На рисунке 266 $AB \parallel DC \parallel KL$, $AD : DK : KF = 2 : 3 : 2$. Найдите длины отрезков BC, CL, LF, DC и KL, если:
1) $AB = 70$ мм, $FC = 40$ мм;
2) $AB = 21$ см, $FC = 15$ см.

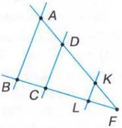


Рис. 266

486. На стороне MO треугольника MON обозначена точка A на расстоянии a от вершины O. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону ON прямая, проходящая через точку A параллельно MN, если:
1) $MO = 6$ см, $ON = 9$ см, $a = 2$ см;
2) $MO = 10$ см, $ON = 14$ см, $a = 4$ см.

487. Через точку P на стороне AB треугольника ABC проведена прямая параллельно стороне AC. Она пересекает сторону BC в точке O. Найдите длину отрезка BO, если:
1) $AP : PB = 5 : 6$, $BC = 22$ см;
2) $AP : PB = 4 : 3$, $BC = 2{,}8$ дм.

488. Точка делит сторону треугольника в отношении $x : y$. Найдите отношение каждого из полученных отрезков ко всей стороне, если:
1) $x = 1$, $y = 2$; 2) $x = 2$, $y = 3$; 3) $x = 4$, $y = 5$.

489. В треугольнике ABC три точки делят сторону BC на четыре равные части. Через эти точки проведены прямые, параллельные AC. Найдите длины отрезков этих прямых, имеющих концы на сторонах треугольника, если:
1) $AC = 1{,}6$ дм; 2) $AC = 124$ мм.

490. Как провести прямую, параллельную одной из сторон заданного треугольника, чтобы отношение периметров подобных треугольников было равным:
1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$?

491. Через вершину В параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая продолжение стороны AD в точке M, а сторону CD — в точке N. Найдите длину отрезка DM, если:
1) $AD = 5$, $BN : MN = 3 : 2$; 2) $AD = 3$, $BN : MN = 0{,}2 : 0{,}3$.

492. Постройте две окружности, имеющих внешнее касание, если их радиусы относятся, как: 1) $2 : 3$; 2) $3 : 4$.

493*. На отрезке AB обозначены две точки O и H ($AO < AH$). Полученные три части отрезка AB, начиная с точки A, имеют длину a, b и c. Найдите, какие части отрезка AB составляют отрезки AO, OH, HB, AH и OB.

494*. Отрезок AB имеет длину a. Точки M и T расположены на прямой AB так, что точка M лежит на отрезке AB и $AM : MB = 2 : 3$, точка T не принадлежит отрезку AB и $AT : TB = 4 : 3$.
Найдите расстояние между точками M и T, если: 1) $a = 6$ см; 2) $a = 10$ см.

495*. По данным на рисунке 267 докажите:
1) $a : c = b : d$; 2) $a : c = (a + b) : (c + d)$; 3) $c : a = (b - a) : (d - c)$.

496*. На рисунке 268 $AB \parallel CD$.
1) Докажите, используя теорему о пропорциональных отрезках, что $AO : OD = OB : OC$;
2) найдите AO и OD, если $AD = 10$ см, $OB = 5$ см, $OC = 3$ см.

497*. Отрезок MN с концами на сторонах AB и AC треугольника ABC, параллелен его стороне BC. Докажите, что медиана AA_1 делит этот отрезок пополам.

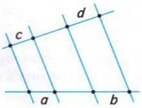


Рис. 267

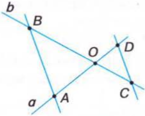


Рис. 268

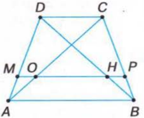


Рис. 269

498*. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$ (рис. 269), пересекает её боковые стороны в точках M и P, а диагонали — в точках O и H.

1) Равны ли отрезки MO и HP?

2) Для каждой ли трапеции выполняется равенство: $\frac{MO}{DC} + \frac{OP}{AB} = 1$?

499*. Основания трапеции равны a и b. Одна из боковых сторон разделена на три равных отрезка, через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Найдите длины отрезков этих прямых, имеющих концы на боковых сторонах трапеции, если:

1) $a = 7$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 10$ см, $b = 14$ см.

Если в трапеции проведено несколько прямых, параллельных основаниям, то через её вершину проведите прямую, параллельную одной из боковых сторон. Тогда трапеция будет разделена на параллелограмм и треугольник. Задача сводится к определению длин параллельных отрезков в треугольнике.

500*. В трапеции основания равны a и b ($a > b$). На одной из боковых сторон обозначено n точек, которые делят её на равные части. Через эти точки проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Составьте формулу для вычисления длины отрезков этих прямых, имеющих концы на боковых сторонах трапеции, если: 1) $n = 2$; 2) $n = 3$.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

501. Для уменьшения или увеличения отрезка в заданном отношении применяют пропорциональный циркуль (рис. 270). Объясните, на чём основан принцип его использования.

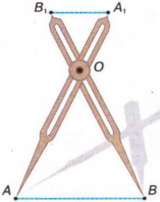


Рис. 270

502. Улицы Садовая и Апрельская начинаются возле Ботанического сада. Их пересекают параллельные улицы Яблоневая и Вишнёвая. Расстояние между Садовой и Апрельской до пересечения с Яблоневой составляет 750 м, а с Вишнёвой — 1 км 250 м. По Садовой трамвай преодолевает путь от Ботанического сада до Яблоневой улицы за 15 мин. Сколько времени ему понадобится, чтобы доехать до Вишнёвой улицы, не изменяя скорости?

503. Найдите расстояние между двумя усадьбами (обозначим их A и B), расположенными на противоположных берегах реки (рис. 271), если $AM \parallel BH$ и $CA = 4$ м, $CM = 5$ м, $MH = 35$ м.

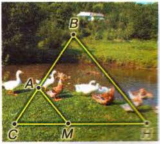


Рис. 271

504. Длина тени от башни равна 24 м, в это же время дня вертикальный шест высотой 1,2 м отбрасывает тень длиной 80 см. Какова высота башни?

§ 12. ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Для того чтобы установить подобие двух треугольников по определению, необходимо убедиться, что в них соответственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны. На практике это неудобно, поэтому используют *признаки подобия треугольников*.

Теорема (признак подобия треугольников по двум углам). Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 272), $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

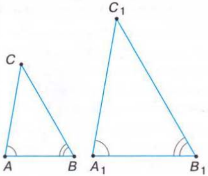


Рис. 272

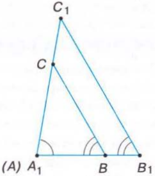


Рис. 273

Доказательство. Совместим наложением ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы угол A совместился с углом A_1 (рис. 273). Это возможно, поскольку $\angle A = \angle A_1$. Тогда стороны AB и AC будут лежать соответственно на лучах A_1B_1 и A_1C_1. Прямые BC и B_1C_1 образуют с секущей A_1B_1 равные соответственные углы: $\angle A_1BC = \angle A_1B_1C_1$. Из признака параллельности прямых следует, что, $BC \parallel B_1C_1$.

По следствию из обобщённой теоремы Фалеса, прямая BC, параллельная стороне B_1C_1, отсекает от треугольника $A_1B_1C_1$ подобный треугольник. Поэтому $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Следствие. **Равносторонние треугольники подобны.**

Действительно, в равносторонних треугольниках все углы – по 60°. Поэтому треугольники подобны по двум углам.

Задача. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O (рис. 274). Докажите, что $\Delta AOB \sim \Delta COD$.

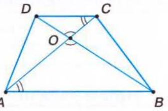


Рис. 274

Решение. Рассмотрим треугольники AOB и COD. В них: $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные, $\angle OAB = \angle OCD$ как внутренние разносторонние при параллельных прямых AB и CD и секущей AC. Следовательно, $\Delta AOB \sim \Delta COD$ по двум углам.

Для того чтобы доказать подобие двух треугольников:
1) выделите их на рисунке;
2) докажите равенство двух пар соответственных углов;
3) сделайте вывод: треугольники подобны по двум углам.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. На свойствах подобных треугольников базируется принцип построения *номограммы* — специального чертежа, при помощи которого, не выполняя расчётов, можно найти корни некоторого уравнения. Рассмотрим задачу.

Задача. К заданному отрезку AB в его концах и с одной стороны от него проведены два перпендикуляра $AM = a$ и $BN = b$, а также отрезки MB и NA, пересекающиеся в точке O. Расстояние от O до AB равно x. Найдите зависимость x от a и b.

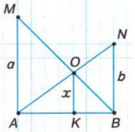


Рис. 275

Решение. Пусть точка K (рис. 275) — основание перпендикуляра, проведённого из точки O к прямой AB. По условию задачи, $AM \perp AB$, $BN \perp AB$. Тогда:

1) в прямоугольном треугольнике ABN $OK \parallel BN$, отсюда $\dfrac{x}{b} = \dfrac{AK}{AB}$;

2) в прямоугольном треугольнике BAM $OK \parallel AM$, отсюда $\dfrac{x}{a} = \dfrac{KB}{AB}$.

Сложив полученные равенства, имеем: $\dfrac{x}{b} + \dfrac{x}{a} = \dfrac{AK + KB}{AB} = \dfrac{AB}{AB} = 1$,

то есть $\dfrac{x}{b} + \dfrac{x}{a} = 1$. Отсюда $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{x}$.

Получили уравнение, выражающее искомую зависимость.

Для его приближённого решения можно на листе в клеточку или миллиметровой бумаге построить (аналогично рис. 275) отрезки a и b заданной длины и измерить расстояние x — это и будет искомый корень уравнения.

Такие номограммы можно использовать в задачах по физике, в частности в разделе «Оптика».

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по двум углам.
2. Почему равносторонние треугольники подобны?
3. Объясните, как доказать подобие двух треугольников.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

505'. По данным на рисунке 276 укажите две пары соответственно равных углов треугольников. Подобны ли данные треугольники? По какому признаку? Сделайте соответствующие записи.

506'. На рисунке 277 заданы элементы треугольников DFE и ABC. Подобны ли эти треугольники?

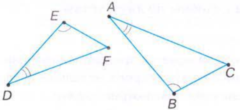


Рис. 276

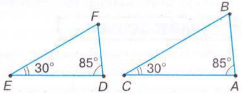


Рис. 277

507'. Начертите два равнобедренных треугольника, не являющихся подобными.

508'. Начертите два прямоугольных треугольника, не являющихся подобными.

509°. Найдите на рисунках 278 и 279 подобные треугольники. Объясните, почему они подобны.

510°. В треугольниках KLM и POH есть углы, равные α и β. Начертите в тетради таблицу 18 и заполните её по образцу, указанному в первом столбце.

511°. Два угла ΔABC и два угла ΔMHT соответственно равны:

1) 23° и 77°, 77° и 23°;
2) 105° и 15°, 15° и 105°;
3) 30° и 90°, 30° и 60°.

Подобны ли эти треугольники?

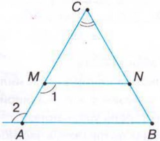


Рис. 278

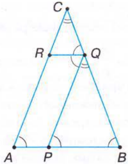


Рис. 279

Таблица 18

α	β	α	β	α	β	α	β
$\angle K$	$\angle L$	$\angle L$	$\angle K$	$\angle M$	$\angle K$	$\angle L$	$\angle M$
$\angle P$	$\angle O$	$\angle H$	$\angle O$	$\angle P$	$\angle H$	$\angle P$	$\angle O$
$\Delta KLM \sim \Delta POH$ по двум углам							

512°. Отношение двух углов одного треугольника равно отношению двух углов другого треугольника. Почему нельзя утверждать, что такие треугольники подобны?

513°. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Найдите стороны и углы треугольников, если:
1) $\angle A = \angle B_1 = 60°$, $AB = 2$ см, $A_1C_1 = 6$ см;
2) $\angle B = \angle C = 60°$, $A_1B_1 = 2$ см, $AC = 4$ см;
3) $\angle B = \angle C = 60°$, $BC = 9$ см, $A_1B_1 = 3$ см.

514°. В треугольниках ABC и KLM: $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$, $AB = c$, $BC = c + 2$, $AC = c - 2$, $KL = nc$. Найдите стороны треугольников, если:
1) $c = 5$ см, $n = 3$; 2) $c = 6$ см, $n = \frac{3}{4}$; 3) $c = 8$ см, $n = 2$.

515°. **Равнобедренные треугольники подобны, если они имеют по равному углу при: 1) основании; 2) вершине.** Докажите это.

516°. Подобны ли равнобедренные треугольники, в одном из которых угол между боковыми сторонами равен α, а в другом – β, если:
1) $\alpha = 52°$, $\beta = 64°$; 2) $\alpha = 43°$, $\beta = 68°30'$; 3) $\alpha = 105°$, $\beta = 38°30'$?

517°. **Прямоугольные треугольники с равным острым углом подобны.** Докажите это.

518°. Докажите, что данные прямоугольные треугольники подобны:
1) ΔABC и ΔKBA (рис. 280); 2) ΔOKA и ΔBAC (рис. 281);
3) ΔAMN и ΔCAB (рис. 282).

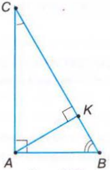


Рис. 280

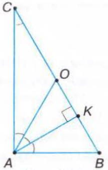


Рис. 281

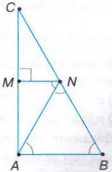


Рис. 282

519°. Подобны ли прямоугольные треугольники, в одном из которых острый угол равен α, а в другом — β, если:
1) $\alpha = 42°$, $\beta = 48°$; 2) $\alpha = 23°$, $\beta = 77°$; 3) $\alpha = 35°30'$, $\beta = 54°30'$?

520°. Равнобедренные прямоугольные треугольники подобны. Докажите это.

521°. По основаниям a и b трапеции определите, в каком отношении делят диагонали друг друга.

522°. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны a и b. Диагонали AC и BD равны c и пересекаются в точке O. Найдите периметры треугольников BCO и ADO, если:
1) $a = 32$ мм, $b = 52$ мм, $c = 48$ мм; 2) $a = 0{,}5$ дм, $b = 0{,}3$ дм, $c = 0{,}8$ дм;
3) $a = 3$ см, $b = 8$ см, $c = 7$ см.

523°. Боковые стороны AD и BC трапеции $ABCD$ продолжены до их пересечения в точке O. Докажите, что $\dfrac{AD}{AO} = \dfrac{BC}{BO} = \dfrac{AB}{DC}$.

524. По данным на рисунках 283 — 285 докажите подобие этих треугольников.

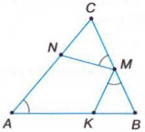


Рис. 283

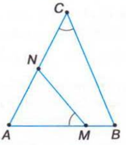


Рис. 284

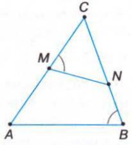


Рис. 285

525. Докажите, что треугольники с соответственно параллельными сторонами подобны.

526. Высоты AE и CD треугольника ABC пересекаются в точке H. Найдите эти высоты, если их сумма равна 18 см, $AH = 8$ см, $CH = 4$ см.

527. Периметр равностороннего треугольника равен P. Через точку пересечения его медиан проведена прямая, параллельная стороне . Докажите, что длину отрезка d этой прямой с концами на сторонах треугольника можно вычислить по формуле: $d = \dfrac{2P}{9}$.

528. В треугольнике со сторонами a, b, c прямая пересекает угол A и отсекает от него трапецию с периметром P. Найдите меньшее основание трапеции, если:
1) $a = 30$ см, $b = 20$ см, $c = 15$ см, $P = 63$ см;
2) $a = b = c = 18$ см, $P = 50$ см.

529. Докажите, что через вершину большего угла разностороннего треугольника всегда можно провести прямую, отсекающую от данного треугольника подобный ему треугольник.

530. Через точку M на стороне треугольника ABC проведена прямая, отсекающая от него подобный треугольник. Сколько решений имеет задача? Рассмотрите случаи, когда ΔABC:
1) разносторонний; 2) равнобедренный; 3) равносторонний.

531. В равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами треугольника, если
1) $a = 6$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 10$ см, $b = 13$ см.

532. Докажите, что расстояние d между точками касания вписанной окружности с боковыми сторонами b равнобедренного треугольника с основанием a можно вычислить по формуле: $d = \dfrac{a(2b-a)}{2b}$.

533. В равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b вписана окружность с центром O. Найдите отношение отрезков высоты, проведённой к основанию треугольника, на которые она делится точкой O (начиная с вершины), если: 1) $a = 12$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 10$ см, $b = 13$ см.

534. Докажите, что в подобных треугольниках соответственные высоты относятся, как стороны, к которым они проведены.

535. В двух подобных треугольниках есть равные между собой высоты. Почему нельзя утверждать, что эти треугольники равны?

536. Докажите, что в подобных треугольниках соответственные биссектрисы относятся, как стороны, к которым они проведены.

537. Треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны ($k = 1{,}5$). Найдите длины биссектрис углов C_1 и C этих треугольников, если их разность равна 4 см.

538. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите длины оснований трапеции, если её средняя линия равна 24 см. При этом известно, что: 1) $CO : AO = 1 : 3$; 2) $BO : DO = 3 : 5$.

539. В четырёхугольнике $ABCD$ с прямыми углами B и D проведена диагональ AC, а из её произвольной точки M — прямые ML и MN, соответственно перпендикулярные к прямым BC и AD. Докажите, что $\dfrac{ML}{AB} + \dfrac{MN}{CD} = 1$.

540. Две окружности радиусов R_1 и R_2 имеют внешнее касание. Их общая внешняя касательная пересекает линию центров в точке M. Найдите расстояния от центров этих окружностей до точки M, если:
1) $R_1 = 4$ см, $R_2 = 6$ см; 2) $R_1 = 3$ см, $R_2 = 6$ см.

541*. Докажите, что треугольники с соответственно перпендикулярными сторонами подобны.

542*. Докажите, что расстояние от точки пересечения медиан треугольника до каждой из его сторон в три раза меньше, чем длина соответствующей высоты треугольника.

543*. В равнобедренном треугольнике с основанием $AB = a$ через середину высоты CD проведены прямые AK и BL ($K \in BC$, $L \in AC$). Найдите длину отрезка KL, если: 1) $a = 3$ см; 2) $a = 4$ см; 3) $a = 5$ см.

544*. **Докажите, что высоты треугольника обратно пропорциональны сторонам, к которым они проведены.**

545*. Найдите соответственные высоты двух подобных треугольников с коэффициентом подобия k, если:

1) сумма этих высот равна 36, $k = 2$; 2) разность этих высот равна 10, $k = \frac{2}{3}$.

546*. В окружность радиуса R вписан треугольник ABC со сторонами $BC = a$ и $AB = c$. Докажите, что высоту h_b к третьей стороне треугольника можно вычислить по формуле: $h_b = \frac{ac}{2R}$.

547*. На окружности с центром O и радиусом R, в которой проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD, взята точка K. Хорда AK пересекает диаметр CD в точке M, а прямая BK — его продолжение в точке N. Докажите, что $OM \cdot ON = R^2$.

548*. В треугольник ABC со сторонами $AC = b$ и $BC = a$ вписан ромб $CKLM$ таким образом, что $K \in AC$, $L \in AB$, $M \in BC$. Докажите, что сторону x ромба можно вычислить по формуле: $x = \frac{ab}{a+b}$.

549*. В треугольнике ABC с тупым углом B проведены высоты BD и CM. Докажите, что треугольники ABC и ADM подобны.

550*. Основания трапеции $ABCD$ равны a и b ($a > b$), $\angle ADC$ — тупой. Найдите квадрат длины диагонали AC, которая делит трапецию на два подобных треугольника.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

551. Трёхэтажный дом на фотографии имеет высоту 8 мм. Зная, что его настоящая высота равна 13 м, а глубина камеры фотоаппарата — 12 см, определите, на каком расстоянии от дома находился фотоаппарат.

552. В треугольнике ABC все вершины недоступны (рис. 286). Как определить длины всех его сторон?

553. На участке дороги длиной 320 м подъём одинаковый. На концах участка есть отметки 186,5 м и 194,9 м. Какая отметка должна стоять на расстоянии 120 м от начала подъёма?

554*. Из посёлка выходят три дороги в направлениях: 1) юго-западном; 2) южном; 3) юго-юго-восточном. Какой бы дорогой ни шёл пешеход из посёлка, отношение его расстояний до двух других дорог остаётся постоянным. Объясните, почему.

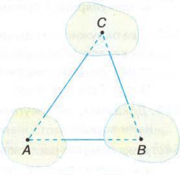


Рис. 286

§ 13. ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Вы уже знаете, что равенство треугольников можно установить по двум сторонам и углу между ними либо по трём сторонам. Признаки подобия треугольников аналогичны. Но в данном случае нужно определить не равенство, а пропорциональность соответственных сторон двух треугольников.

Теорема (признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними).
Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 287),

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство. Пусть $A_1B_1 = kAB = kc$, $A_1C_1 = kAC = kb$.

Отложим на стороне A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ отрезок $A_1B_2 = AB = c$ (рис. 288). Через точку B_2 проведём прямую $B_2C_2 \parallel B_1C_1$. Имеем треугольник $A_1B_2C_2$, который по следствию из теоремы Фалеса, подобен треугольнику $A_1B_1C_1$.

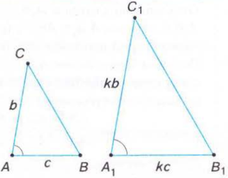


Рис. 287

Следовательно, $\frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1C_2}{A_1C_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1}$. Отсюда $\frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1C_2}{A_1C_1}$.

Подставим в эту пропорцию известные длины сторон и сократим полученные дроби.

Имеем: $\frac{c}{kc} = \frac{A_1C_2}{kb}$, $1 = \frac{A_1C_2}{b}$. Отсюда $A_1C_2 = b$.

Из равенства треугольников ABC и $A_1B_2C_2$ и подобия треугольников $A_1B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$ следует, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

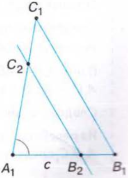


Рис. 288

Следствие. **Прямоугольные треугольники с соответственно пропорциональными катетами подобны.**

Действительно, в прямоугольном треугольнике между катетами заключён прямой угол, а прямые углы равны. Поэтому прямоугольные треугольники с соответственно пропорциональными катетами подобны по двум сторонам и углу между ними.

Теорема (признак подобия треугольников по трём сторонам). Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 289),

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство.

Пусть: $A_1B_1 = kAB = kc$, $A_1C_1 = kAC = kb$, $B_1C_1 = kBC = ka$.

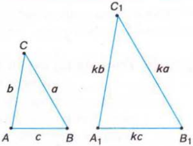


Рис. 289

Отложим на стороне A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ отрезок $A_1B_2 = AB = c$ (рис. 290).

Через точку B_2 проведём прямую $B_2C_2 \parallel B_1C_1$.

Получим треугольник $A_1B_2C_2$, который по следствию из обобщённой теоремы Фалеса подобен треугольнику $A_1B_1C_1$.

Следовательно, $\frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1C_2}{A_1C_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1}$.

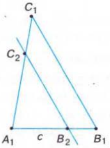


Рис. 290

Далее получаем:

$$\frac{c}{kc} = \frac{A_1C_2}{kb} = \frac{B_2C_2}{ka}, \text{ или } 1 = \frac{A_1C_2}{b} = \frac{B_2C_2}{a}.$$

Отсюда $A_1C_2 = b$, $B_2C_2 = a$.

Следовательно, $A_1C_2 = AC$ и $B_2C_2 = BC$.

Рассмотрим $\Delta A_1B_2C_2$ и ΔABC.

В них $A_1B_2 = AB = c$ по построению,

$A_1C_1 = AC = b$ и $B_2C_2 = BC = a$ по доказанному.

Следовательно, $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta ABC$ по трём сторонам.

Из равенства треугольников ABC и $A_1B_2C_2$ и подобия треугольников $A_1B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$ следует, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Задача. В каждом из треугольников ABC и RST (рис. 291) медиана, проведённая к большей стороне, равна половине этой стороны. Подобны ли заданные треугольники, если $AC = 9$, $AK = 7{,}5$, $TR = 6$, $MR = 5$?

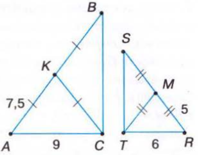


Рис. 291

Решение. Медианы CK и TM отсекают от треугольников ABC и RST соответственно ΔACK и ΔRTM. В каждом из них известны три стороны: $AC = 9$, $AK = KC = 7{,}5$; $RT = 6$, $RM = MT = 5$.

Выясним, пропорциональны ли сходственные стороны этих треугольников:

$$\frac{AC}{RT} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}, \quad \frac{AK}{RM} = \frac{KC}{MT} = \frac{7{,}5}{5} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, $\Delta ACK \sim \Delta RTM$ по трём сторонам. Из подобия этих треугольников следует, что $\angle A = \angle R$.

Рассмотрим ΔABC и ΔRST. У них: $\angle A = \angle R$, $\dfrac{AC}{RT} = \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{AB}{RS} = \dfrac{2AK}{2RM} = \dfrac{AK}{RM} = \dfrac{3}{2}$.

Следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta RST$ по двум сторонам и углу между ними.

Решая задачи, помните:

1) если на рисунке нет нужной пары треугольников, то для их получения проведите вспомогательные отрезки;

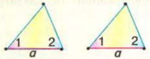
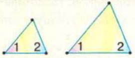
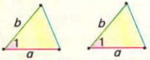
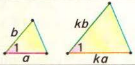
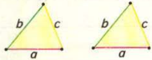
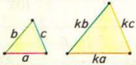
2) иногда необходимо доказать подобие нескольких треугольников.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. Вы, наверное, заметили, что признаки подобия и признаки равенства треугольников имеют много общего.

Пользуясь таблицей 19, сформулируйте попарно признак равенства и признак подобия треугольников. Чем отличаются соответствующие признаки?

Таблица 19

Треугольники равны, если:	Треугольники подобны, если:
	
	
	

2. Используя признаки подобия треугольников, можно доказать, что точка пересечения высот треугольника H, точка пересечения его медиан M и центр описанной окружности O лежат на одной прямой (рис. 292). Эту прямую называют *прямой Эйлера* в честь великого математика XVIII в. Леонарда Эйлера (1707 — 1783). Он родился в Базеле (Швейцария), в 1727 — 1741 гг. работал в Петербурге, затем — в Берлине, а с 1766 г. — снова в Петербурге. С его работами связаны выдающиеся достижения во всех областях математики, в механике, физике, астрономии. Теорему о прямой, получившей его имя, Л. Эйлер сформулировал, доказал и опубликовал в 1765 г.

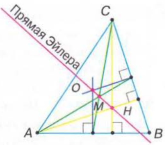


Рис. 292

Леонард Эйлер

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по двум сторонами и углу между ними.
2. Почему прямоугольные треугольники с пропорциональными катетами подобны?
3. Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по трём сторонам.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

555'. По данным на рисунке 293 укажите соответственно равные углы и соответственно пропорциональные стороны треугольников. Подобны ли эти треугольники? По какому признаку? Сделайте соответствующие записи.

556'. На рисунке 294 указаны элементы треугольников DEF и ABC. Подобны ли заданные треугольники?

557'. Стороны треугольника равны 5 см и 8 см, а угол между ними — 50°. Приведите пример подобного ему треугольника.

558'. По данным на рисунке 295 укажите соответственно пропорциональные стороны треугольников. Подобны ли эти треугольники? По какому признаку? Сделайте соответствующую запись.

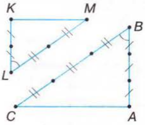


Рис. 293

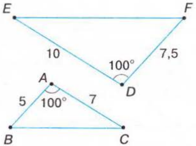


Рис. 294

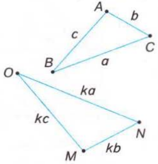


Рис. 295

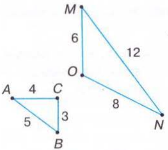


Рис. 296

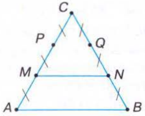


Рис. 297

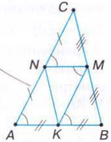


Рис. 298

559'. На рисунке 296 указаны элементы треугольников MON и ABC. Подобны ли заданные треугольники?

560'. Стороны треугольника равны 5 см, 6 см и 9 см. Какие стороны могут быть в подобном ему треугольнике?

561°. Найдите на рисунках 297 и 298 подобные треугольники. Объясните, почему они подобны.

562°. В треугольниках KLM и POH один из углов равен α. Какие две стороны в них должны быть соответственно пропорциональны, чтобы треугольники были подобны? Начертите в тетради таблицу 20 и заполните её по образцу, указанному в первом столбце.

Таблица 20

α	2 стороны		α	2 стороны		α	2 стороны	
$\angle K$	$a = KL$	$b = KM$	$\angle L$	$a =$	$b =$	$\angle M$	$a =$	$b =$
$\angle P$	$ka = PO$	$kb = PH$	$\angle H$	$ka =$	$kb =$	$\angle P$	$ka =$	$kb =$
$\triangle KLM \sim \triangle POH$ по двум сторонам и углу между ними								

563°. В первом треугольнике две стороны равны 5 см и 8 см; во втором — 6 см и 12 см; в третьем — 10 см и 16 см. Углы, заключённые между этими сторонами, равны. Какие из заданных треугольников подобны? Объясните ответ.

564°. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки D и E. Подобны ли треугольники ABC и ADE, если:

1) $AB = 12$ см, $AC = 15$ см, $BD = 2$ см, $CE = 7$ см;
2) $AB = 15$ см, $AC = 18$ см, $BD = 3$ см, $CE = 8$ см;
3) $AB = 20$ см, $AC = 21$ см, $BD = 10$ см, $CE = 10{,}5$ см?

565°. В треугольниках ABC и KLM: $\angle A = \angle K$, $AB = c$, $BC = c + 2$, $AC = c - 2$, $KL = nc$, $KM = nc - 2n$. Найдите стороны треугольников, если:

1) $c = 5$ см, $n = 3$; 2) $c = 6$ см, $n = \frac{3}{4}$; 3) $c = 8$ см, $n = 2$.

566°. Подобны ли два равнобедренных треугольника, если боковая сторона и основание одного из них пропорциональны боковой стороне и основанию другого?

567°. Какие из трёх прямоугольных треугольников подобны, если их катеты равны: 3 см и 4 см; 5 см и 12 см; 45 мм и 6 см?

568°. В прямоугольнике $ABCD$ точки P и T делят диагональ AC на три равные части. Из этих точек проведены перпендикуляры к стороне AB. Найдите периметры всех полученных прямоугольных треугольников, если:
1) $AB = 16$ см, $BC = 63$ см, $AC = 65$ см;
2) $AB = 8$ см, $BC = 15$ см, $AC = 17$ см;
3) $AB = 7$ см, $BC = 24$ см, $AC = 25$ см.

569°. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD равны c и делятся точкой O их пересечения в отношении $m : n$. $AD - BC = 4$ см.
Найдите основания трапеции и периметры треугольников BCO и ADO, если:
1) $c = 42$ мм, $m = 8$, $n = 13$; 2) $c = 0{,}8$ дм, $m = 5$, $n = 3$;
3) $c = 7$ см, $m = 2$, $n = 5$.

570°. Какие из трёх треугольников подобны, если их стороны равны:
8 см, 10 см, 14 см; 12 см, 15 см, 21 см; 16 см, 20 см, 30 см?

571°. Стороны одного треугольника равны a, b и c. В подобном треугольнике наименьшая сторона равна d. Найдите его стороны, если:
1) $a = 7$ см, $b = 9$ см, $c = 12$ см, $d = 21$ см;
2) $a = 17$ см, $b = 8$ см, $c = 15$ см, $d = 56$ см;
3) $a = 6$ см, $b = 5$ см, $c = 9$ см, $d = 25$ см.

572°. Основание равнобедренного треугольника равно b, боковая сторона — a. В подобном треугольнике основание равно c.
Найдите его периметр, если:
1) $a = 18$ см, $b = 12$ см, $c = 6$ см; 2) $a = 5$ см, $b = 8$ см, $c = 12$ см;
3) $a = 25$ см, $b = 14$ см, $c = 28$ см.

573°. Периметры двух тупоугольных треугольников относятся, как $m : n$. В первом треугольнике большая сторона равна a. Найдите большую сторону другого треугольника, если:
1) $a = 24$ мм, $m = 2$, $n = 3$; 2) $a = 1{,}5$ дм, $m = 5$, $n = 3$;
3) $a = 12$ см, $m = 3$, $n = 4$.

574. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$; $AB \cdot A_1B_1 = AC \cdot A_1C_1$.
Докажите, что $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

575. Докажите, что в подобных треугольниках соответственные медианы относятся, как стороны, к которым они проведены.

576. Два подобных треугольника имеют по равной медиане, которые равны между собой. Почему нельзя утверждать, что эти треугольники равны?

577. Стороны угла A одна прямая пересекает в точках K и L, а другая прямая — соответственно в точках M и N, при этом $KL : MN = \frac{1}{5} : 0{,}25$. $KM = 3$ см. Какой длины должен быть отрезок AK, чтобы заданные прямые были параллельны?

578. Высота треугольника делит сторону в отношении $m : n$. В каком отношении серединный перпендикуляр к основанию делит боковую сторону, если:
1) $m = 5$, $n = 9$; 2) $m = 3$, $n = 5$?

579. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BH и CM. Докажите, что $\Delta ABC \sim \Delta AMH$.

580. Медиана AA_1 треугольника ABC образует со стороной $\angle AA_1C = \angle BAC$. Чему равно отношение квадратов сторон BC и AC этого треугольника?

581. Точка E — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Отрезок AE пересекает диагональ BD в точке K.
Найдите отношение отрезков: 1) AK и KE; 2) BK и KD.

582. На продолжении стороны AB (за точку B) параллелограмма $ABCD$ взята точка F. Прямая DF пересекает диагональ AC в точке E.
Найдите длину отрезка BF, если $AB = 10$ см, $AE : CE = 4{,}5 : 3$.

583. Высота BM равнобедренной трапеции $ABCD$ делит диагональ AC в отношении $m : n$. В каком отношении она делит сторону AD, если:
1) $m = 1$, $n = 2$; 2) $m = 1$, $n = 1$?

584. Подобны ли два прямоугольных треугольника, если в них отношение:
1) гипотенуз равно отношению радиусов описанных окружностей;
2) двух катетов равно отношению радиусов описанных окружностей;
3) гипотенуз равно отношению радиусов вписанных окружностей?

585*. **Прямоугольные треугольники с соответственно пропорциональными катетом и гипотенузой подобны.** Докажите это.

586*. По стороне a треугольника определите расстояние между точками, делящими две другие стороны в отношении $1 : m$, начиная от стороны a.

587*. В треугольник вписан прямоугольник, при этом его диагонали соответственно параллельны боковым сторонам треугольника. Найдите отношение, в котором вершины прямоугольника делят боковые стороны, начиная с вершин основания.

588*. Из вершины тупого угла ромба проведены две высоты. Расстояние между концами высот равно половине большей диагонали. Найдите углы ромба.

589*. По основаниям a и b трапеции ($a > b$) определите:
1) расстояние между точками, делящими боковые стороны в отношении $1 : m$, начиная от меньшего основания;
2) длину отрезка, проходящего параллельно основаниям через точку пересечения диагоналей;
3) длину отрезка, который проходит параллельно основаниям через точку пересечения продолжений боковых сторон и имеет концы на продолжениях диагоналей.

590*. **Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции проходит через точку пересечения диагоналей и параллелен основаниям. Докажите, что этот отрезок делится точкой пересечения диагоналей пополам.**

591*. Основания трапеции относятся, как $m : n$. Середина O одного из оснований соединена отрезками с концами другого основания. Отрезки пересекают диагонали трапеции в точках M и N. Найдите расстояние между этими точками, если:
1) точка O лежит на меньшем основании трапеции, $m = 1$, $n = 4$;
2) точка O лежит на большем основании трапеции, $m = 2$, $n = 3$.

592*. Две окружности пересекаются в точках A и B. Касательные к окружностям в точке A пересекают окружности в точках M и N. Докажите, что середины хорд AM и AN, а также точки A и B лежат на одной окружности.

593*. Высота BH треугольника ABC делит медиану AM в отношении $3 : 1$, считая от вершины A. В каком отношении точка H делит сторону AC?

594*. Медиана BM делит высоту AH треугольника ABC в отношении $3 : 1$, считая от вершины. В каком отношении эта высота делит медиану BM?

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

595*. На рисунке 299 вы видите дачный столик в поперечном разрезе. AD и BC — две из четырёх его ножек. $AO = BO = 52$ см, $OC = OD = 88$ см, EF — разрез горизонтальной поверхности стола, GH — линия пола. Объясните, почему при таком строении столика прямые EF и GH параллельны.

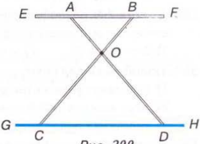


Рис. 299

596. Как найти расстояние между двумя пунктами A и B, разделёнными преградой?

597. В определённое время длина тени от двухметровой жерди была 1,4 м, а тени от дерева (если измерять от ствола) — 9,3 м. Определите высоту дерева, если известно, что диаметр ствола на уровне земли равен 8,3 м.

598. Почему днём по длине тени можно определить высоту дерева, а ночью по длине тени от фонаря — нельзя?

599*. Для того чтобы разделить отрезок AB на три равные части, на луче AD, не совпадающим с AB, отложили равные отрезки AE и EK. Затем на луче KB построили точку T так, чтобы $KB = BT$. Прямая TE разбила отрезок AB в отношении $2 : 1$. Получили, что меньший из искомых отрезков равен трети AB, а больший — делится пополам. Обоснуйте такое построение.

§ 14. ПРИМЕНЕНИЕ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Проведём высоту CD к гипотенузе AB в прямоугольном треугольнике ABC (рис. 300). Она делит гипотенузу на отрезки AD и BD, которые называются *проекциями катетов на гипотенузу*.

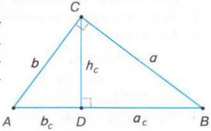


Рис. 300

Если стороны треугольника обозначены малыми буквами (рис. 300), то проекции катетов a и b на гипотенузу c обозначают соответственно: a_c и b_c.

Существуют ли зависимости между проекциями катетов на гипотенузу и сторонами прямоугольного треугольника? Да, существуют.

Одна из этих зависимостей очевидна: $a_c + b_c = c$. Другие зависимости требуют доказательства.

Отрезок x называется ***средним пропорциональным*** между отрезками a и b, если выполняется равенство $a : x = x : b$.

Из определения следует, что $x^2 = ab$. То есть **квадрат среднего пропорционального между двумя отрезками равен произведению этих отрезков.**

В прямоугольном треугольнике можно выделить три средних пропорциональных: высоту, проведённую к гипотенузе, и оба катета.

Теорема (о средних пропорциональных в прямоугольном треугольнике).
В прямоугольном треугольнике:
1) высота, проведённая к гипотенузе, является средним пропорциональным между проекциями катетов на гипотенузу;
2) катет является средним пропорциональным между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу.

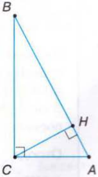


Рис. 301

Дано: ΔACB (рис. 301), $\angle C = 90°$, CH — высота.

Доказать: 1) $CH^2 = AH \cdot BH$;

2) $BC^2 = BA \cdot BH$ и $AC^2 = AB \cdot AH$.

Доказательство.

1) $\Delta AHC \sim \Delta CHB$ по двум углам.

Действительно, они имеют по прямому углу и $\angle ACH = \angle CBH$.

Из подобия треугольников следует: $\dfrac{AH}{CH} = \dfrac{CH}{BH}$.

Отсюда $CH^2 = AH \cdot BH$.

2) Каждый из треугольников AHC и CHB подобен заданному треугольнику ACB. Это следует из равенства их соответственных углов.

Тогда получим:

а) $\Delta AHC \sim \Delta ACB$,

поэтому $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$.

Отсюда $AC^2 = AH \cdot AB$.

б) $\Delta CHB \sim \Delta ACB$,

поэтому $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BC}{BA}$.

Отсюда $BC^2 = BH \cdot BA$.

Следствие. **Проекции катетов на гипотенузу относятся, как квадраты катетов.**

Действительно, по теореме о средних пропорциональных в прямоугольном треугольнике, квадраты катетов соответственно равны

$a^2 = ca_c$, $b^2 = cb_c$ (рис. 302).

Поэтому $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{ca_c}{cb_c} = \dfrac{a_c}{b_c}$, отсюда $\dfrac{a_c}{b_c} = \dfrac{a^2}{b^2}$.

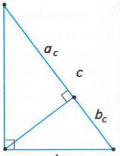


Рис. 302

? Вы знаете, что биссектриса треугольника делит его угол пополам. Существует ли зависимость между отрезками, на которые биссектриса делит противолежащую сторону треугольника? Да, существует.

Задача (свойство биссектрисы треугольника).

Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Докажите это.

Решение. Пусть в треугольнике ABC (рис. 303) проведена биссектриса CL. Надо доказать, что $\dfrac{AL}{BL} = \dfrac{AC}{BC}$.

Из точек A и B проводим перпендикуляры AM и BN к прямой CL.

$\Delta AMC \sim \Delta BNC$ по двум углам.

В них: $\angle AMC = \angle BNC = 90°$, $\angle ACM = \angle BCN$, поскольку CL — биссектриса $\angle C$.

Отсюда $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AM}{BN}$. (1)

$\Delta AML \sim \Delta BNL$ по двум углам.

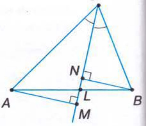


Рис. 303

В них: $\angle AML = \angle BNL = 90°$, $\angle ALM = \angle BLN$ как вертикальные.

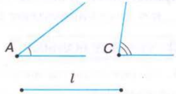
Отсюда $\dfrac{AM}{BN} = \dfrac{AL}{BL}$. (2)

Из равенств (1) и (2) получим: $\dfrac{AL}{BL} = \dfrac{AC}{BC}$.

Подобие треугольников используют не только в задачах на доказательство или вычисление, но и на построение.

Задача. Постройте треугольник по двум углам A и C и биссектрисе l угла B.

Дано:



Построить: ΔA_1BC_1, у которого $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$, l — биссектриса $\angle B$.

Решение.

Анализ (рис. 304). Углы A и C определяют треугольники, подобные искомому, а биссектриса — размеры искомого треугольника.

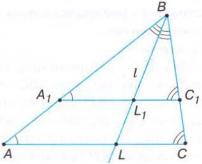


Рис. 304

Пусть ΔA_1BC_1 — искомый. Опустим требование задачи, что l — биссектриса $\angle B$, то есть $BL_1 = l$. Тогда можно построить вспомогательный $\Delta ABC \sim \Delta A_1BC_1$ по двум заданным углам A и C. Через точку L_1 на биссектрисе $\angle B$ ($BL_1 = l$) проходит прямая $A_1C_1 \parallel AC$, отсекающая от треугольника ABC подобный ему треугольник. Следовательно, вершины A_1 и C_1 искомого треугольника являются точками пересечения прямой A_1C_1 со сторонами BA и BC соответственно вспомогательного ΔABC.

Построение.

1. Строим вспомогательный ΔABC по двум углам A и C.
2. Проводим биссектрису BL угла B.
3. На луче BL откладываем отрезок $BL_1 = l$.
4. Через точку L_1 проводим прямую $A_1C_1 \parallel AC$.

Доказательство.

По построению, в треугольнике A_1BC_1: $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$, BL_1 — биссектриса угла B и $BL_1 = l$. Следовательно, ΔA_1BC_1 — искомый.

Способ применения подобия треугольников в задачах на построение называют *методом подобия*.

Для того чтобы решить задачу на построение треугольника методом подобия:

1) выделите из условия задачи те данные, которые определяют форму искомого треугольника;

2) постройте по этим данным вспомогательный треугольник, подобный искомому;

3) постройте искомый треугольник, используя те заданные условия, которые определяют его размеры.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. Важные свойства имеет биссектриса внешнего угла треугольника.

Если треугольник равнобедренный, то биссектриса внешнего угла параллельна основанию (рис. 305).

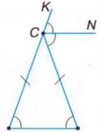


Рис. 305

Если треугольник не равнобедренный, то **биссектриса его внешнего угла пересекает противолежащую сторону в точке, расстояния от которой до вершин этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам треугольника.**

Докажем это.

Пусть ABC — заданный треугольник (рис. 306), биссектриса его внешнего угла KBC пересекает продолжение стороны AC в точке D. Докажем, что $DC : DA = BC : BA$.

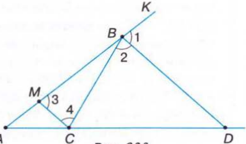


Рис. 306

Выполним вспомогательное построение: проведём $CM \parallel BD$. Две параллельные прямые пересекают стороны угла A, поэтому, по обобщённой теореме Фалеса, $AC : CD = AM : MB$, либо $AD : CD = AB : MB$.

Но $MB = CB$, поскольку ΔBCM — равнобедренный.

Действительно, в нём $\angle 3 = \angle 4$, так как $\angle 1 = \angle 2$ (BD — биссектриса $\angle KBC$); $\angle 1 = \angle 3$ как соответственные ($BD \parallel CM$, AB — секущая); $\angle 2 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие ($BD \parallel CM$, BC — секущая).

Следовательно, $AD : CD = AB : CB$, то есть $DC : DA = BC : BA$.

Рассмотрите самостоятельно случаи, когда треугольник ABC — остроугольный и $AB > BC$ ($AB > AC$).

2. Значительный вклад в развитие теории геометрических построений сделал известный украинский математик Александр Степанович Смогоржевский

(1896 — 1969), родившийся в с. Лесные Берлинцы, что на Винничине. В своих работах, адресованных ученикам и учителям, учёный раскрывает особенности решения задач на построение с помощью разных средств: циркуля и линейки; одного циркуля; одной линейки. До сих пор не утратила актуальности его книга «Исследование задач на построение» (1961 г.).

А. С. Смогоржевский

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Какие отрезки называют проекциями катетов на гипотенузу? Как их обозначают?
2. Что такое среднее пропорциональное между двумя отрезками? Каково его свойство?
3. Сформулируйте и докажите теорему о средних пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике и следствие из неё.
4. Какое свойство имеет биссектриса угла треугольника?
5. Объясните, как применить метод подобия в задачах на построение.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

600'. Треугольник ABC — прямоугольный (рис. 307 — 309).

1) Укажите проекции катетов на гипотенузу.
2) Запишите средние пропорциональные отрезки.

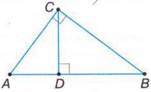


Рис. 307

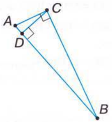


Рис. 308

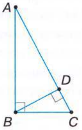


Рис. 309

601'. Найдите квадрат среднего пропорционального между двумя числами:

1) 3 и 12; 2) 2 и 12,5; 3) 1 и 9; 4) 2 и 8.

Чему равно среднее пропорциональное?

602'. По рисункам 310 — 312 укажите:

1) биссектрису угла треугольника;
2) прилежащие стороны к углу, в котором проведена биссектриса;
3) отрезки, на которые делит биссектриса противолежащую сторону треугольника.

Как обозначить отрезки противолежащей стороны малыми буквами?

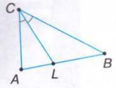


Рис. 310

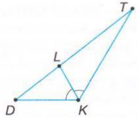


Рис. 311

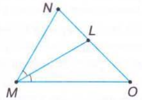


Рис. 312

603'. Запишите, чему равно отношение отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противолежащую сторону (рис. 310 – 312).

604°. По данным на рисунках 313 – 315 найдите:

1) гипотенузу; 2) катеты; 3) высоту, проведённую к гипотенузе.

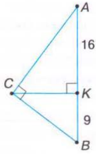


Рис. 313

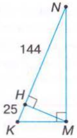


Рис. 314

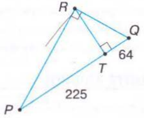


Рис. 315

605°. Может ли отношение катета к гипотенузе прямоугольного треугольника быть:

1) меньше единицы; 2) равно единице; 3) больше единицы?

606°. Докажите, что в равнобедренном прямоугольном треугольнике проекции катетов к гипотенузе равны.

607°. По данным на рисунках 316 – 318 определите длину отрезка x (AB – диаметр окружности).

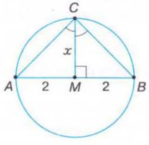


Рис. 316

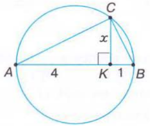


Рис. 317

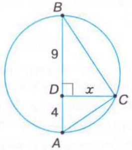


Рис. 318

608°. Из точки окружности проведён перпендикуляр к диаметру. Найдите расстояние от этой точки до диаметра, если полученные отрезки диаметра равны: 1) 16 см и 1 см; 2) 0,5 см и 8 см; 3) 9 см и 4 см.

609°. Докажите, что перпендикуляр, проведённый из любой точки окружности к диаметру, является средним пропорциональным отрезков диаметра, на которые его делит основание перпендикуляра.

610°. Постройте отрезок, который является средним пропорциональным между двумя отрезками длиной:

1) 16 см и 1 см; 2) 0,5 см и 8 см; 3) 9 см и 4 см.

611°. Постройте треугольник по двум сторонам a и b и углу C между ними. Проведите биссектрису угла C, измерьте отрезки, на которые биссектриса делит третью сторону треугольника, если:

1) $a = 3$ см, $b = 5$ см, $\angle C = 120°$; 2) $a = 5$ см, $b = 8$ см, $\angle C = 60°$;
3) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $\angle C = 90°$.

Проверьте, выполняется ли свойство биссектрисы угла треугольника.

612°. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD, которая делит сторону AC на отрезки AD и DC. Начертите в тетради таблицу 21 и заполните её.

Таблица 21

AB	10 см	21 см	3 см	5 см
BC	15 см	18 см	5	15 см
AC	20 см	20	4 см	12
AD	8	14 см	1,5	3 см
DC	12	6	2,5 см	9

613°. Из вершины B треугольника ABC ($AB > BC$) проведены биссектриса BL и медиана BM. Какая из точек — L или M — находится ближе к вершине C? Объясните вывод.

614°. Из вершины B треугольника ABC ($BC > AB$) проведены медиана BM и высота BH. Какая из точек — M или H — находится ближе к вершине A? Объясните вывод.

615°. Постройте треугольник по следующим данным:

1) $\angle A = 60°$, $\angle C = 90°$, $l_b = 4$ см; 2) $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$, $l_c = 3$ см;
3) $\angle B = 40°$, $\angle C = 140°$, $l_a = 3{,}5$ см.

616. Докажите, что два прямоугольных треугольника подобны, если их высоты, проведённые к гипотенузам, делят гипотенузы в равном отношении.

617. Из основания медианы равностороннего треугольника проведён перпендикуляр к его другой стороне. Найдите отношение отрезков, образовавшихся на этой стороне треугольника.

618. Острые углы прямоугольного треугольника относятся, как 1 : 2. Найдите отношение проекций катетов на гипотенузу.

619. Перпендикуляр, проведённый из вершины прямого угла треугольника, делит гипотенузу в отношении 1 : 3. Найдите углы треугольника.

620. В прямоугольном треугольнике с катетами 15 и 20 и гипотенузой 25 найдите высоту, проведённую к гипотенузе

Решение. В ΔABC (рис. 319) проведём высоту BK к гипотенузе AC. По теореме о средних пропорциональных в прямоугольном треугольнике $BK^2 = AK \cdot CK$.

Из следствия этой теоремы, $\dfrac{AK}{CK} = \dfrac{AB^2}{CB^2}$.

Кроме того, $AK + CK = AC = 25$.

Имеем систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{AK}{CK} = \dfrac{20^2}{15^2}, \\ AK + CK = 25. \end{cases}$

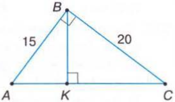


Рис. 319

Решив её, получим: $AK = 16$, $CK = 9$.
Итак, $BK^2 = 16 \cdot 9$, $BK = 12$.

Для того чтобы найти проекции катетов на гипотенузу по известным трём сторонам заданного прямоугольного треугольника:

1) приравняйте отношение искомых проекций катетов на гипотенузу к отношению квадратов соответствующих катетов;

2) запишите, что сумма искомых проекций катетов на гипотенузу равна заданной гипотенузе;

3) из полученных двух уравнений составьте систему и решите её.

621. В равнобедренном треугольнике основание равно a, боковая сторона — b, а высота, проведённая к основанию, — c.
Найдите расстояние от основания этой высоты треугольника до его боковой стороны, если:
1) $a = 12$ см, $b = 10$ см, $c = 8$ см; 2) $a = 14$ см, $b = 25$ см, $c = 24$ см.

622. Диагонали ромба со стороной a равны d_1 и d_2. Найдите высоту ромба, если:
1) $a = 25$ см, $d_1 = 30$ см, $d_2 = 40$ см; 2) $a = 169$ мм, $d_1 = 130$ мм, $d_2 = 312$ мм.

623. По данным на рисунках 320 — 322 докажите подобие:
1) ΔACM и ΔDBM (рис. 320); 2) ΔADM и ΔCBM (рис. 321);
3) ΔABC и ΔACM (рис. 322).

624. Если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. Докажите это.

625. Если из точки M вне окружности проведены две секущие, пересекающие окружность соответственно в точках A, B, C и D, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. Докажите это.

626. Если из точки M вне окружности проведены секущая, пересекающая окружность в точках A и B, и касательная к окружности с точкой касания C, то $AM \cdot BM = CM^2$. Докажите это.

627. Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе. Сколько случаев нужно рассмотреть?

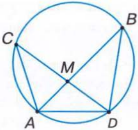


Рис. 320

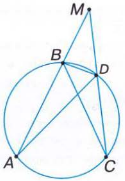


Рис. 321

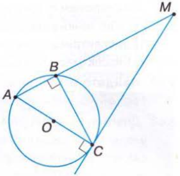


Рис. 322

628. Постройте треугольник по отношению сторон и:
1) наибольшей медиане; 2) наименьшей высоте.

629. Постройте равнобедренный треугольник по:
1) углу при вершине и сумме основания и высоты;
2) отношению двух неравных сторон и высоте, проведённой к боковой стороне.

630. Постройте треугольник по серединам отрезков, соединяющих центр вписанной окружности с вершинами.

631. Постройте прямоугольный треугольник по наименьшей высоте и отношению проекций катетов на гипотенузу.

632. В окружность впишите треугольник:
1) подобный данному треугольнику;
2) стороны которого параллельны сторонам данного треугольника.

633. Можно ли в данную окружность вписать (описать около неё) два подобных треугольника с коэффициентом $k \neq 1$?

634. Через точку внутренней области данного угла проведите окружность, касающуюся к его сторон.

635*. Докажите, что квадрат произведения катетов прямоугольного треугольника равен квадрату произведения его гипотенузы и высоты, проведённой к гипотенузе.

636*. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°. Докажите, что высота трапеции — это среднее пропорциональное между проекциями её боковых сторон на основание.

637*. Докажите, что биссектриса угла A треугольника ABC является геометрическим местом точек, которые делят в отношении $AB : AC$ все отрезки с концами на сторонах AB и AC, параллельные стороне BC.

638*. **Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен разности произведения двух сторон угла, между которыми проходит биссектриса, и произведения отрезков третьей стороны, на которые она делится биссектрисой.**

639*. По сторонам a, b и c треугольника определите расстояния от концов стороны a до точки пересечения:
1) биссектрисы угла треугольника с этой стороной;
2) биссектрисы внешнего угла треугольника с продолжением этой стороны.

640*. **Найдите отношение, в котором биссектрисы треугольника делятся точкой их пересечения.**

641*. Диагональ трапеции с основаниями a и $4a$ делит её на два подобных треугольника. В каждый из них вписана окружность. Радиус окружности, касающейся меньшего основания трапеции, равен $0{,}25a$. Чему равен радиус второй окружности?

642*. В острый угол вписаны три окружности, при этом средняя окружность касается двух других. Докажите, что радиус средней окружности — это среднее пропорциональное между радиусами крайних окружностей.

643*. Используя рисунок 323, докажите, что:
1) $\Delta ADB \sim \Delta ACB$; 2) $\Delta BAC \sim \Delta BDC$;
3) $\Delta ADK \sim \Delta ACB$; 4) $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$.

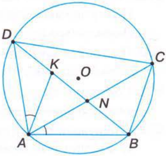


Рис. 323

644*. Постройте треугольник по двум углам и наибольшей высоте.

645*. Постройте треугольник по двум углам и наименьшей медиане.

646*. Постройте треугольник по отношению двух сторон, углу между ними и биссектрисе этого угла.

647*. Впишите в треугольник ABC такой треугольник, стороны которого соответственно перпендикулярны к сторонам треугольника ABC.

648*. Впишите в треугольник ABC прямоугольник, в котором основание в три раза больше высоты и лежит на основании треугольника, а две вершины лежат на его боковых сторонах.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

649. Используя свойство проекций катетов на гипотенузу, можно построить высоту к гипотенузе прямоугольного треугольника без транспортира или чертёжного угольника.
Объясните, как это сделать.

650. Объясните, как обозначить 12 точек в узлах сетки на листике в клеточку, чтобы эти точки лежали на окружности радиуса 5 клеточек.

651. Объясните, как построить биссектрису угла треугольника без транспортира.

652. На обломке круга показана часть хорды AB

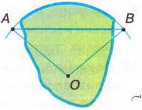


Рис. 324

(рис. 324). Определите построением центральный угол, соответствующий дуге *AB*.

653. Из пункта *B* до пересечения дорог *AC* и *AD* нужно проложить трассу. Объясните по рисунку 325, как это сделать, если пункт *A* недоступен.

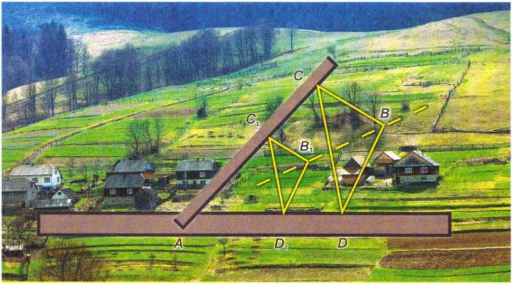


Рис. 325

654*. На рисунке 326 показано, как можно измерить высоту дерева, используя только веху. Объясните измерения.

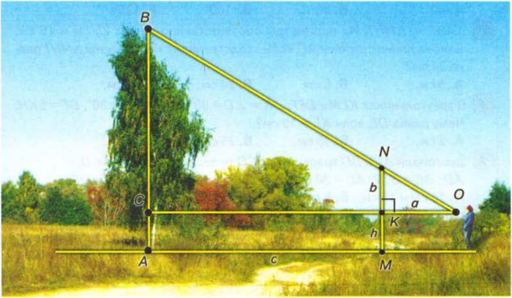


Рис. 326

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие треугольники называются подобными? Каковы их свойства?
2. Сформулируйте обобщённую теорему Фалеса.
3. Объясните, как доказать подобие треугольников по определению.
4. Сформулируйте и докажите признаки подобия треугольников по двум углам; по двум сторонам и углу между ними; по трём сторонам.
5. Что такое среднее пропорциональное между двумя отрезками? Каковы его свойства?
6. Сформулируйте и докажите теорему о средних пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.
7. Каково свойство биссектрисы угла треугольника?
8. Объясните, как применить метод подобия в задачах на построение.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Внимательно прочитайте задания и найдите среди предложенных ответов правильные. Для выполнения тестового задания необходимо 10 – 15 мин.

№ 1

1° $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$. Угол A равен $60°$, а угол B на $20°$ меньше $\angle A$. Найдите угол C_1.

А. 40°. **Б.** 80°. **В.** 100°. **Г.** 120°.

2° $\Delta ABC \sim \Delta MHT$. Их периметры соответственно равны 25 см и 75 см. Какова длина стороны AC, если сходственная с ней сторона ΔMHT равна 24 см?

А. 3 см. **Б.** 8 см. **В.** 24 см. **Г.** 72 см.

3° В треугольниках KLM и DEF: $\angle K = \angle D = 90°$, $\angle M = \angle F = 30°$, $DF = 5KM$. Чему равна DE, если $KL = 10$ см?

А. 2 см. **Б.** 15 см. **В.** 25 см. **Г.** 50 см.

4 Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. $AD : BC = 3 : 2$, $AC = 30$ см. Найдите длины отрезков AO и OC.

А. 10 см и 15 см. **Б.** 6 см и 9,5 см. **В.** 12 см и 18 см. **Г.** 18 см и 12 см.

5* Основание равнобедренного треугольника равно 30 см, а его боковые стороны — по 60 см. Прямая, параллельная основанию треугольника, отсекает от него трапецию, в которой меньшее основание равно сумме её боковых сторон. Найдите неизвестные стороны трапеции.

А. 20 см, 20 см, 30 см. **Б.** 15 см, 15 см, 15 см.
В. 12 см, 12 см, 12 см. **Г.** 12 см, 12 см, 24 см.

№ 2

1° На сторонах угла A отложены отрезки $AM = MB = 5$ см и $AP = PC = 8$ см. Найдите длину отрезка PM, если отрезок BC длиннее AB на 4 см.

А. 4 см. **Б.** 5 см. **В.** 7 см. **Г.** 8 см.

2° Треугольники ABC и DEF имеют соответственно пропорциональные стороны. Найдите периметр треугольника ABC, если $AB = 3DE$, а разность периметров данных треугольников равна 84 см.

А. 28 см. **Б.** 42 см. **В.** 126 см. **Г.** 168 см.

3° В треугольнике со сторонами 7 см, 15 см и 20 см проведена биссектриса меньшего угла. На какие отрезки биссектриса делит противолежащую сторону?

А. 1,5 см и 2 см. **Б.** 3,5 см и 3,5 см. **В.** 2 см и 5 см. **Г.** 3 см и 4 см.

4 $ABCD$ — прямоугольная трапеция с основаниями $AD = 9$ см и $BC = 4$ см. Найдите длину диагонали AC, если она перпендикулярна к боковой стороне трапеции.

А. 5 см. **Б.** 6 см. **В.** 6,5 см. **Г.** 36 см.

5* В ΔABC высота AH длиной 12 см проведена к стороне BC и отсекает на ней отрезок $BH = 9$ см. Найдите расстояние от точки H до стороны AB, длина которой равна 15 см.

А. 5,4 см. **Б.** 7,2 см. **В.** 9,6 см. **Г.** 12 см.

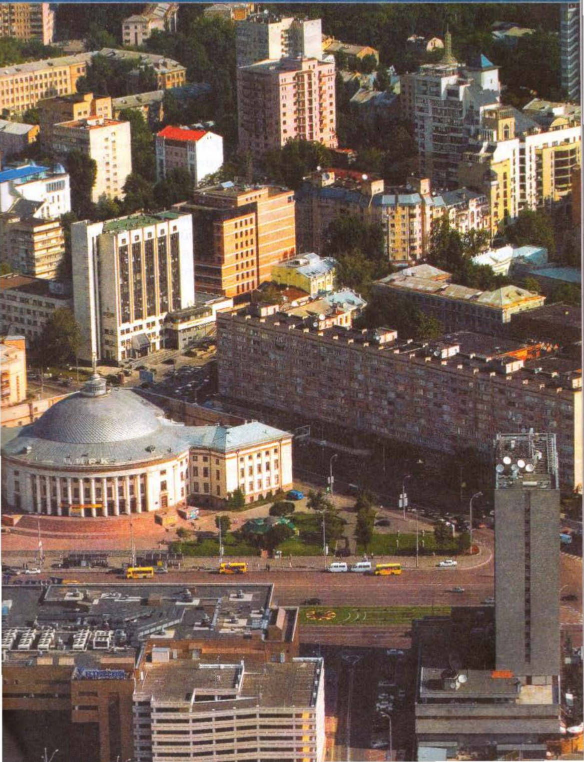
ГЛАВА 3

МНОГОУГОЛЬНИКИ.

В главе вы узнаете:

- о многоугольнике и его элементах;
- о сумме углов выпуклого многоугольника;
- каковы свойства многоугольников, вписанных в окружность и описанных около окружности;
- что такое площадь и каковы её свойства;
- как вычислить площадь треугольника и отдельных видов четырёхугольников: квадрата, прямоугольника, параллелограмма, ромба, трапеции

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ



§ 15. МНОГОУГОЛЬНИК И ЕГО СВОЙСТВА

Вы уже знаете, что такое треугольник и четырёхугольник. Более общим является понятие *многоугольника*. На рисунке 327 вы видите многоугольник $ABCDEF$. Он состоит из отрезков AB, BC, CD, DE, EF, FA, размещённых таким образом, что смежные отрезки не лежат на одной прямой, а несмежные – не имеют общих точек. Отрезки, из которых состоит многоугольник, называются его *сторонами*, углы, образованные смежными сторонами, – *углами*, а вершины этих углов – *вершинами* многоугольника.

В зависимости от количества вершин (углов либо сторон) многоугольник называется треугольником, четырёхугольником, пятиугольником и т. д. Многоугольник с n вершинами называется *n-угольником*.

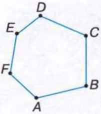


Рис. 327

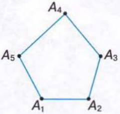


Рис. 328

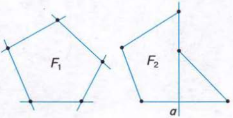


Рис. 329

Многоугольник обозначают названиями его вершин, например шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 327), пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ (рис. 328).

? На рисунке 329 вы видите многоугольники F_1 и F_2. В чём их различие?

Ни одна из прямых, проходящих через стороны многоугольника F_1, не пересекает другие его стороны. Он лежит по одну сторону от любой из этих прямых. Такой многоугольник называется *выпуклым*. Многоугольник F_2 не является выпуклым.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь выпуклые многоугольники.

Периметром многоугольника называется сумма длин всех его сторон. Его обозначают буквой P.

Посмотрите на рисунок 330. В шестиугольнике $ABCDEF$ отрезки AC, AD, AE соединяют вершину A с несоседними вершинами. Это – диагонали шестиугольника.

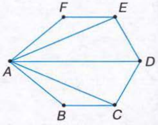


Рис. 330

Диагональю n-угольника называется отрезок, который соединяет две несоседние его вершины.

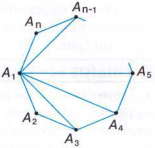


Рис. 331

Теорема (о сумме углов n-угольника).
Сумма углов n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$.

Дано: $A_1A_2A_3...A_n$ — n-угольник (рис. 331), A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 ... A_1A_{n-1} — диагонали.

Доказать: $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + ... + \angle A_n = 180^\circ \cdot (n-2)$.

Доказательство. В заданном n-угольнике диагонали A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 ... A_1A_{n-1} выходят из одной вершины A_1. Поэтому они разбивают n-угольник на $n-2$ треугольников. Сумма всех углов образованных треугольников равна сумме углов данного n-угольника. Поскольку в каждом треугольнике сумма углов равна 180°, то сумма углов данного n-угольника — $180^\circ \cdot (n-2)$.

Угол, смежный с углом многоугольника (рис. 332), называется *внешним углом многоугольника*.

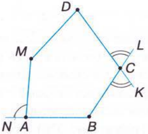


Рис. 332

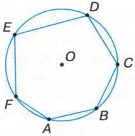


Рис. 333

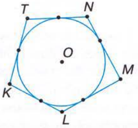


Рис. 334

Многоугольники могут быть вписанными в окружность (рис. 333) или описанными около окружности (рис. 334). Попытайтесь дать определения и сравните их с указанными в учебнике.

Многоугольник, все вершины которого лежат на окружности, называется ***вписанным*** в эту окружность, а ***окружность – описанной*** около этого многоугольника.

Стороны вписанного многоугольника и его диагонали – это хорды окружности. Каждый его угол является вписанным углом (рис. 335).

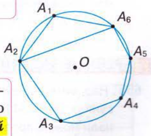


Рис. 335

Многоугольник, все стороны которого касаются окружности, называется ***описанным*** около этой окружности, а ***окружность – вписанной*** в этот многоугольник.

Стороны описанного многоугольника являются касательными к окружности, а его диагонали – секущими (рис. 336).

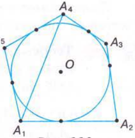


Рис. 336

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. Геометрическая фигура называется *простой*, если её можно разбить на конечное количество треугольников. Многоугольник — это простая фигура (см. рис. 330 и 331), а окружность не является простой фигурой (рис. 337). Даже вписав в окружность многоугольник с очень большим количеством сторон, мы только приблизим его контур к окружности. Поэтому в геометрии длину окружности и площадь круга находят другими методами, чем периметр и площадь многоугольника.

Рис. 337

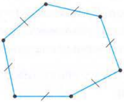


Рис. 338

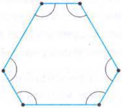


Рис. 339

2. У вас может возникнуть вопрос: *Всегда ли из равенства сторон многоугольника следует равенство его углов и наоборот?* Нет, это свойство лишь треугольника. Вы знаете пример четырёхугольника, в котором все стороны равны, а углы — не равны. Это ромб. В прямоугольнике все углы равны, а вот стороны — нет. Среди многоугольников с большим количеством вершин также можно выделить равносторонние многоугольники, в которых не все углы равны (рис. 338), и равноугольные многоугольники, в которых не все стороны равны (рис. 339).

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Что такое многоугольник; *n*-угольник? Как его обозначают?
2. Какой отрезок называется диагональю многоугольника?
3. Что такое периметр многоугольника?
4. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов многоугольника.
5. Что такое внешний угол многоугольника?
6. Какой многоугольник называется вписанным в окружность? Описанным около окружности?

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

655'. Назовите вершины, стороны и углы *n*-угольников, изображённых на рисунках 340 и 341. Как иначе можно назвать эти *n*-угольники? Какие диагонали можно провести в нём из вершины: 1) *B*; 2) *C*; 3) *F*?

656'. Почему многоугольник, изображённый на рисунке 342, не является выпуклым?

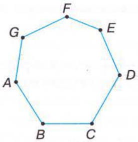


Рис. 340

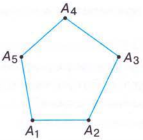


Рис. 341

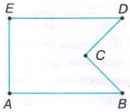


Рис. 342

657'. Найдите периметр n-угольника, если каждая его сторона равна 2 см и:

1) $n=7$; 2) $n=10$; 3) $n=9$.

658'. Назовите изображённые на рисунке 343 внешние углы пятиугольника $KLMNP$ при вершине:

1) L; 2) P; 3) K.

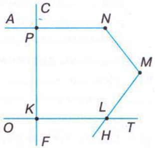


Рис. 343

659'. Начертите окружность и обозначьте на ней:

1) семь точек — от A_1 до A_7;

2) восемь точек — от A_1 до A_8.

Последовательно соедините эти точки отрезками. Какой n-угольник получили?

660'. Начертите окружность и проведите пять касательных к окружности таким образом, чтобы получить описанный пятиугольник. Измерьте отрезки сторон пятиугольника от его вершин до точек касания с окружностью. Обозначьте на рисунке равные отрезки.

661°. Начертите семиугольник $ABCDEOT$ и проведите его диагонали из вершины: 1) B; 2) C; 3) D. Сколько образовалось треугольников при данной вершине?

662°. Чему равна сумма углов:

1) пятиугольника; 2) девятиугольника; 3) семнадцатиугольника?

663°. Сколько вершин в n-угольнике, если сумма его углов равна:

1) 1440°; 2) 1080°; 3) 1620°?

664°. Сколько вершин в n-угольнике, если каждый его угол равен:

1) 90°; 2) 144°; 3) 156°?

665°. По данным таблицы 22 найдите углы пятиугольника $ABCDM$.

$S_5 = 180 \cdot 3 = 540$

Таблица 22

$\angle A$	$n°$	$n° - 30°$	$n° - 20°$	$n°$
$\angle B$	$2n°$	$n° - 10°$	$n° - 10°$	$5n°$
$\angle C$	$4n°$	$n°$	$n°$	$7n°$
$\angle D$	$5n°$	$n°$	$n° - 30°$	$9n°$
$\angle M$	$6n°$	$n° + 30°$	$n°$	$5n°$

$18n = 540$

$n =$

666°. Найдите внешний угол при вершине *n*-угольника, если каждый его угол равен:
1) 90°; 2) 144°; 3) 156°.

667°. Из центра окружности проведены радиусы таким образом, что образовалось семь центральных углов. Полученные точки на окружности соединены отрезками. Какой это многоугольник?

668°. Около окружности опишите:
1) шестиугольник;
2) пятиугольник.
Обозначьте точки их касания к окружности. Измерьте полученные на сторонах отрезки. Выполняется ли свойство отрезков касательных? Как найти периметр многоугольника?

669. **Сколько диагоналей в *n*-угольнике?**

670. Найдите количество диагоналей в:
1) десятиугольнике;
2) семнадцатиугольнике.

671. Существует ли пятиугольник, в котором углы равны:
1) 100°, 90°, 120°, 116°, 113°;
2) 110°, 100°, 118°, 112°, 101°?

672. Можно ли построить многоугольник, кроме треугольника, в котором все углы острые?

673. Три угла многоугольника равны:
1) по 80°; 2) по 90°.
Все остальные углы равны по 150°. Сколько вершин в многоугольнике?

674. Внешние углы пятиугольника относятся, как:
1) 3 : 4 : 5 : 7 : 8;
2) 1 : 2 : 4 : 5 : 6.
Как относятся его внутренние углы?
Решите задачу двумя способами.

675. **Докажите, что сумма всех внутренних и всех внешних углов *n*-угольника пропорциональна количеству его вершин.**

676. По какой формуле можно вычислить центральный угол, опирающийся на сторону вписанного многоугольника, в котором все стороны равны?

677. Сколько вершин во вписанном многоугольнике, если каждый центральный угол, опирающийся на его сторону, равен:
1) 60°; 2) 40°?

678*. Периметр пятиугольника равен 136,4 см. Длины четырёх сторон относятся, как 6 : 7 : 8 : 11. Найдите длину пятой стороны.

679*. Докажите, что каждая сторона многоугольника меньше его полупериметра.

680*. Докажите, что каждый угол многоугольника меньше 180°.

681*. В каждом из двух многоугольников все углы равны. Угол первого многоугольника:

1) в два раза меньше угла второго многоугольника;

2) равен внешнему углу второго многоугольника.

Сколько вершин имеет каждый многоугольник?

682*. Докажите, что вписанный многоугольник, в котором все стороны равны, имеет: 1) равные углы; 2) равные внешние углы.

683*. Сколько вершин во вписанном многоугольнике с равными сторонами, если его угол:

1) равен внешнему углу;

2) в два раза больше внешнего угла;

3) относится к внешнему углу, как 5 : 2?

684*. Докажите, что во вписанном n-угольнике с равными сторонами при $n > 4$ угол многоугольника больше его внешнего угла.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

685. Простое мансардное покрытие образует в вертикальном разрезе половину восьмиугольника, в котором все стороны равны и все углы равны (рис. 344). Найдите ширину перекрытия BD, сторону восьмиугольника и высоту мансардной комнаты $ABDE$, если $AE = 6$ м.

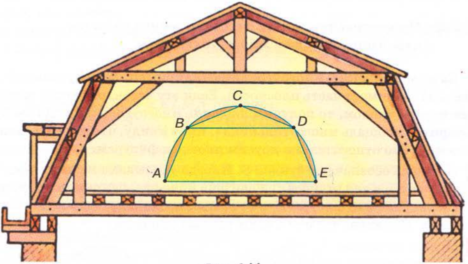


Рис. 344

§ 16. ПОНЯТИЕ ПЛОЩАДИ. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Многоугольник разбивает плоскость на две области – внутреннюю (рис. 345) и внешнюю (рис. 346).

Рис. 345

Рис. 346

Рис. 347

Многоугольник вместе с его внутренней областью называется *плоским многоугольником*.

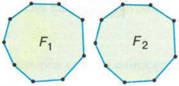
Каждый плоский многоугольник (например, многоугольник F на рис. 347) занимает часть плоскости. Если эту часть плоскости выразить некоторым числом, то получим *площадь* многоугольника. Далее будем говорить «площадь многоугольника», имея в виду, что многоугольник – плоский. Это относится и к другим плоским фигурам.

Площадь обозначают буквой S. Иногда указывают название фигуры, например S_F, а для нескольких фигур – индексы, например S_1, S_2 и т. д.

На рисунке 348 фигуры F_1 и F_2 равны, поскольку совмещаются наложением. Понятно, что они имеют равные площади.

Можем записать: $S_{F_1} = S_{F_2}$.

Для измерения площади фигуры выбирают единицу измерения. Для этого используют квадрат, со стороной равной единице измерения длины. Площадь квадрата со стороной 1 см – это единица измерения площади в *квадратных сантиметрах*, со стороной 1 м – в *квадратных метрах* и т. д.



$F_1 = F_2$

Рис. 348

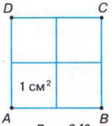


Рис. 349

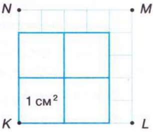


Рис. 350

Единицы измерения площади кратко записываем так: 1 см², а говорим: «один квадратный сантиметр». Говорить «сантиметр в квадрате» – неправильно!

Некоторые единицы измерения площади имеют специальные названия: ар (квадрат со стороной 10 м), гектар (квадрат со стороной 100 м) и т. д.

На рисунке 349 вы видите квадрат $ABCD$ со стороной 2 см. Он состоит из четырёх квадратов площадью 1 см², поэтому его площадь равна 4 см².

Можем записать: $S_{ABCD} = 4$ см².

Ясно, что площадь любой фигуры выражается положительным числом.

? Изменится ли площадь квадрата $ABCD$, если за единицу измерения принять 1 мм²? Нет, площадь квадрата не изменится, но будет выражена иначе: $S_{ABCD} = 400$ мм².

На рисунке 350 длина стороны квадрата $KLMN$ равна 2,5 см. Он вмещает четыре квадрата площадью 1 см² и ещё 9 маленьких квадратов площадью 0,25 см². Поэтому $S_{KLMN} = 4 + 9 \cdot 0{,}25 = 6{,}25$ (см²).

Ясно, что площадь любой фигуры равна сумме площадей частей, из которых она состоит.

Из предыдущих классов вы знаете, что площадь квадрата со стороной a можно вычислить иначе – по *формуле площади квадрата*:

$$\boxed{S = a^2}\ .$$

Для квадратов $ABCD$ и $KLMN$ получим:
$S_{ABCD} = 2^2 = 4$ (см²), $S_{KLMN} = 2{,}5^2 = 6{,}25$ (см²).

Поскольку 4 см² < 6,25 см², то можем записать: $S_{ABCD} < S_{KLMN}$.

Формулу площади квадрата будем считать основной, поэтому принимаем её без доказательства. Для других фигур формулы площади нужно *выводить*, исходя из основных свойств площади. Сформулируем их.

Основные свойства площади

1. Площадь каждой фигуры больше нуля.
2. Равные фигуры имеют равные площади.
3. Площадь фигуры равна сумме площадей фигур, из которых она состоит.
4. Единицей измерения площади является площадь квадрата со стороной, равной единице длины.

Основные свойства площади подсказывают способ выведения формул площади.

Для того чтобы вывести формулу площади многоугольника, нужно: либо разбить его на части, формулы площадей которых известны, либо дополнить его до такой фигуры, формула площади которой известна.

Теорема (о площади прямоугольника). Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

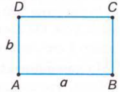


Рис. 351

Дано: $ABCD$ – прямоугольник (рис. 351), $AB = a$, $AD = b$.

Доказать: $S_{ABCD} = ab$.

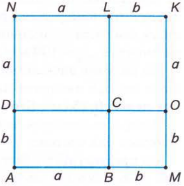


Рис. 352

Доказательство. Достроим данный прямоугольник $ABCD$ до квадрата $AMKN$ со стороной $a + b$ (рис. 352).

Тогда $S_{AMKN} = (a + b)^2$.

С другой стороны, квадрат $AMKN$ состоит из двух прямоугольников $ABCD$ и $OKLC$ и двух квадратов $BMOC$ и $DNLC$.

Поэтому, по третьему свойству площади, $S_{AMKN} = S_{ABCD} + S_{OKLC} + S_{BMOC} + S_{DNLC}$.

Прямоугольники $ABCD$ и $OKLC$ равны, поскольку равны смежные стороны a и b.

Поэтому, по второму свойству площади, $S_{ABCD} = S_{OKLC}$.

Квадраты $BMOC$ и $DNLC$ имеют соответственно стороны b и a, поэтому $S_{BMOC} = b^2$, $S_{DNLC} = a^2$. Итак, $S_{AMKN} = 2S_{ABCD} + a^2 + b^2$.

Далее получим:

$(a + b)^2 = 2S_{ABCD} + a^2 + b^2$, или $a^2 + 2\,ab + b^2 = 2S_{ABCD} + a^2 + b^2$.

Отсюда $S_{ABCD} = ab$.

Следствие. **Площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b равна половине произведения катетов.**

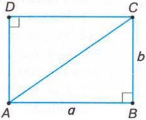


Рис. 353

Действительно, диагональ AC разбивает прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b (рис. 353) на два равных прямоугольных треугольника ABC и ADC с катетами a и b.

Поэтому $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}ab$.

Задача. Докажите, что отношение площадей подобных прямоугольных треугольников равно квадрату их коэффициента подобия.

Решение. Пусть один из заданных прямоугольных треугольников (рис. 354) имеет катеты a_1, b_1 и площадь S_1, другой – катеты a_2, b_2 и площадь S_2, а коэффициент их подобия равен k.

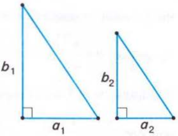


Рис. 354

Докажем, что $\frac{S_1}{S_2} = k^2$.

Поскольку треугольники подобны, то $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$. Найдём площади треугольников и их отношение:

$$S_1 = \frac{1}{2}a_1b_1 = \frac{1}{2}ka_2 \cdot kb_2 = \frac{1}{2}k^2a_2b_2; \quad S_2 = \frac{1}{2}a_2b_2; \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}k^2a_2b_2}{\frac{1}{2}a_2b_2} = k^2.$$

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. У вас может возникнуть вопрос: *Как доказать, что площадь квадрата равна квадрату его стороны?*

Пусть сторона квадрата $ABCD$ равна a. Возможны два случая: сторону AB можно разбить на целое число n единичных отрезков (рис. 355); на стороне AB можно разместить n единичных отрезков, но остаётся ещё отрезок, который короче единичного (рис. 356).

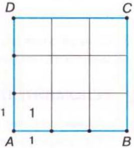


Рис. 355

Рассмотрим первый случай (рис. 355). Разобьём сторону AB на n единичных отрезков (на рисунке их три), тогда $a = n \cdot 1 = n$. Аналогично разобьём сторону AD. Через точки деления проведём прямые, перпендикулярные AB и AD. Эти прямые разбивают квадрат $ABCD$ на $n \cdot n = n^2$ равных квадратов площадью 1.

Поэтому $S_{ABCD} = n^2 \cdot 1 = a^2 \cdot 1 = a^2$.

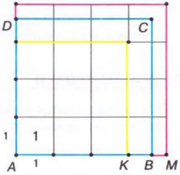


Рис. 356

Рассмотрим второй случай (рис. 356). Пусть на отрезке AB помещается n единичных отрезков и остаётся ещё отрезок длиной меньше 1. Это означает, что отрезок AK из n единичных отрезков меньше отрезка AB, а отрезок AM из $n + 1$ единичных отрезков – больше этого отрезка.

Получаем неравенство: $n < a < n + 1$.

Чтобы точнее оценить площадь заданного квадрата, разделим единичный отрезок на m равных частей. Тогда длина каждой части будет равна $\frac{1}{m}$.

Пусть на отрезке AK их помещается $n + \frac{k}{m}$, а на отрезке AM – $n + \frac{k+1}{m}$.

Число a будет лежать в пределах $n+\frac{k}{m}<a<n+\frac{k+1}{m}$, а квадрат этого числа — в пределах $\left(n+\frac{k}{m}\right)^2<a^2<\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2$.

Площадь квадрата со стороной AK будет равна $\left(n+\frac{k}{m}\right)^2$, а квадрата со стороной AM — $\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2$.

Поэтому площадь квадрата $ABCD$ будет лежать в пределах

$$\left(n+\frac{k}{m}\right)^2<S_{ABCD}<\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2.$$

При увеличении количества точек деления число m станет как угодно большим. Площадь квадрата $ABCD$ и квадрат числа a будут лежать в пределах, разность которых как угодно мала: $\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2-\left(n+\frac{k}{m}\right)^2=2\left(n+\frac{k}{m}\right)\cdot\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$.

А это возможно лишь в случае, если $S_{ABCD}=a^2$.

3. Символ S для обозначения площади фигуры происходит от латинского слова *superficils*, что означает «поверхность».

ВСПОМНИТЕ ГЛАВНОЕ

1. Объясните, что такое площадь фигуры.
2. Сформулируйте основные свойства площади.
3. В каких единицах измеряют площадь?
4. Выведите формулу площади прямоугольника.
5. Как вычислить площадь прямоугольного треугольника?
6. Чему равно отношение площадей подобных прямоугольных треугольников?

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

686'. Какова площадь фигур на рисунках 357 и 358, если за единицу измерения площадей принять одну клеточку?

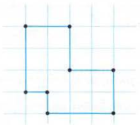


Рис. 357

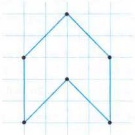


Рис. 358

687'. По данным на рисунках 359 — 361 вычислите площадь прямоугольника $ABCD$.

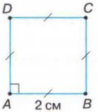


Рис. 359

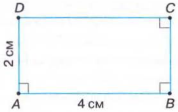


Рис. 360

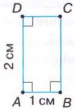


Рис. 361

688'. Чему равна площадь прямоугольного треугольника с катетами:
1) 3 см и 5 см; 2) 2 см и 5 см; 3) 10 см и 4,5 см?

689'. Найдите сторону квадрата, если его площадь равна:
1) 16 см²; 2) 9 см²; 3) 121 см².

690°. Докажите, что:
1) $S_{\Delta AKC} = S_{\Delta BKC}$ (рис. 362); 2) $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$ (рис. 363);
3) $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta BAC}$ (рис. 363).

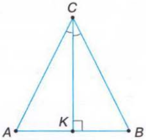


Рис. 362

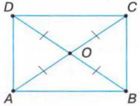


Рис. 363

691°. Точка внутри треугольника соединена отрезками с его вершинами. Найдите площадь треугольника, если площадь образовавшихся частей равна:
1) 12 см², 39 см² и 45 см²; 2) 90 см², 25 см² и 45 см².

692°. Как изменится площадь прямоугольника, если одну из его сторон:
1) увеличить в три раза; 2) уменьшить в четыре раза; 3) увеличить на 50%?

693°. Как изменится площадь прямоугольника, если каждую из его сторон:
1) увеличить в три раза; 2) уменьшить в четыре раза; 3) увеличить на 50%?

694°. Периметр прямоугольника со сторонами a и b равен P, а его площадь — S. Начертите в тетради таблицу 23 и заполните её.

Таблица 23

a	4 см			8 см
b		12 см	7 см	
P	11 см		21 см	
S		6 см²		4 см²

695°. Прямоугольники $ABCD$ и $MTOH$ имеют равные площади. В прямоугольнике $ABCD$ стороны равны 10 см и 60 см.
Найдите стороны прямоугольника $MTOH$, если они относятся, как:
1) 2 : 3; 2) 3 : 8; 3) 0,3 : 0,5.

696°. Найдите площадь прямоугольного треугольника с острым углом 45°, если один из его катетов равен:
1) 2 см; 2) 0,3 дм; 3) 0,05 м.

697°. Квадрат со стороной a и прямоугольник со сторонами b и c имеют равные площади. Найдите периметр каждого четырёхугольника, если:
1) $a = 6$ см, $b = 9$ см; 2) $a = 6$ см, $c = 2$ см; 3) $a = 10$ см, $c = 20$ см.
Периметр какого из двух четырёхугольников меньше?

698. В квадрате каждая сторона длиной a разделена на три равные части, а полученные точки соединены так, как указано на рисунках 364 и 365.
Найдите площади фигур внутри квадратов.

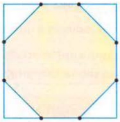


Рис. 364

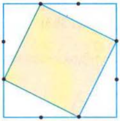


Рис. 365

699. Разность периметров двух квадратов равна c, а разность их площадей — d.
Найдите площади квадратов, если:
1) $c = 16$ см, $d = 56$ см^2; 2) $c = 12$ см, $d = 105$ см^2.

700. Ширина прямоугольной рамки равна c, а её площадь — S.
Найдите периметры внешней и внутренней частей, если:
1) $c = 2$ см, $S = 96$ см^2; 2) $c = 3$ см, $S = 564$ см^2.

701. Площадь прямоугольника равна S. Составьте формулы для нахождения сторон прямоугольника, если стороны относятся, как $m : n$.

702. Периметр прямоугольника равен P. Составьте формулы для нахождения сторон прямоугольника, если стороны относятся, как $m : n$.

703. Какой геометрический смысл при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ имеют формулы:
1) $(a + b)c = ac + bc$; 2) $(a - b)c = ac - bc$;
3) $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$?

704. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Точка O находится на расстоянии d от каждого катета.
Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы, если:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $d = 1$ см;
2) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $d = 2$ см.

705*. Два квадрата со стороной 10 см расположены так, что вершина каждого квадрата находится в точке пересечения диагоналей другого квадрата. Найдите площадь общей части двух квадратов.

706*. Точка M делит отрезок AB пополам, а точка N — на неравные части. Докажите, что площадь прямоугольника со сторонами AN и NB равна разности площадей квадратов со сторонами MB и MN.

707*. В прямоугольнике со сторонами 4 см и 6 см проведены биссектрисы углов при его большей стороне.
На какие части разделена площадь прямоугольника?

708*. Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то $AB^2 + BC^2 = AC^2 - 2AB \cdot BC$. Справедливо ли это утверждение?

709*. **Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения гипотенузы на высоту, проведённую к гипотенузе.**

710*. Докажите, что площади треугольников, на которые разбивает прямоугольный треугольник высота, проведённая к гипотенузе, относятся, как проекции катетов на гипотенузу.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

711*. По карте Украины (рис. 366) выясните, из каких частей состоит площадь нашей страны; какая часть имеет наименьшую площадь, наибольшую площадь. Какую часть площади Украины составляет площадь области, где вы живете?

Рис. 366

712.* Площадь участка равна 6 аров. Чему равна площадь этого участка в квадратных метрах; в гектарах?

713.* Участок прямоугольной формы на плане в масштабе 1 : 100 имеет стороны 10 см и 25 см. Какова площадь этого участка?

714. Прямоугольный кусок линолеума имеет размер 9x4 м. Достаточно ли этого для покрытия пола в двух комнатах размером 2x8 м и 4x5 м?

715. Какой должна быть наименьшая площадь гаража для двух автомобилей размером 4,5x1,8 м, чтобы между обеими машинами, машинами и стенами оставался проход шириной 1 м?

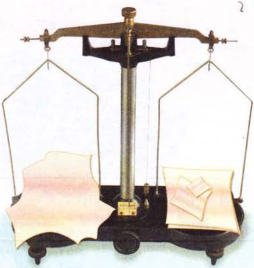
716. Проведите необходимые измерения и рассчитайте, сколько рулонов обоев (без подгонки рисунка) необходимо для ремонта комнаты у вас дома, если длина рулона 10,5 м, а ширина — 0,6 м.

717. Проведите необходимые измерения и рассчитайте, сколько кафельной плитки размером 20x30 см необходимо приобрести для ремонта ванной комнаты у вас дома.

718. Проведите необходимые измерения и рассчитайте, какое количество паркетных дощечек прямоугольной формы размером 30x5 см необходимо приобрести для укладки паркета в комнате у вас дома.

719. Проведите необходимые измерения и рассчитайте, сколько ламината прямоугольной формы размером 138x19,5 см необходимо для укладки в комнате у вас дома.

720.* Площадь фигуры можно определить способом взвешивания. Для этого фигуру чертят на листе плотной бумаги или картона и вырезают по контуру. Из этого же материала вырезают квадрат определённого размера. Затем сравнивают массу обеих фигур. Объясните, на чём основан такой способ.



§ 17. ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Вы уже знаете формулы площадей трёх фигур – квадрата, прямоугольника и прямоугольного треугольника. Выведем формулу площади параллелограмма.

Теорема (о площади параллелограмма).
Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

Дано: $ABCD$ – параллелограмм (рис. 367),
DH – высота,
$AB = a$, $DH = h_a$.

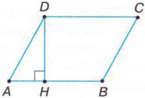


Рис. 367

Доказать: $S_{ABCD} = ah_a$.

Доказательство. Проведём из вершины C высоту $CM = DH = h_a$ (рис. 368). Получили трапецию $AMCD$. Рассмотрим две пары фигур, из которых она состоит: данный параллелограмм $ABCD$ и ΔBMC, прямоугольник $HMCD$ и ΔAHD. По третьему свойству площади,

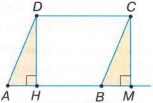


Рис. 368

$S_{AMCD} = S_{ABCD} + S_{\Delta BMC}$, а также $S_{AMCD} = S_{HMCD} + S_{\Delta AHD}$.
Поэтому $S_{ABCD} + S_{\Delta BMC} = S_{HMCD} + S_{\Delta AHD}$.
$\Delta BMC = \Delta AHD$ по катету и гипотенузе: $CM = DH$ как высоты, проведённые к одной стороне AB параллелограмма, $AD = BC$ как противоположные стороны параллелограмма.
Поэтому, согласно второму свойству площади, $S_{\Delta BMC} = S_{\Delta AHD}$.
Следовательно, $S_{ABCD} = S_{HMCD}$.
Для прямоугольника $HMCD$ имеем: $S_{HMCD} = CD \cdot DH = AB \cdot h_a = ah_a$.
Согласно доказанному, площадь данного параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $HMCD$, поэтому $S_{ABCD} = ah_a$.

Задача. В параллелограмме стороны равны 8 см и 6,4 см, а высота, проведённая к большей стороне, – 6 см. Найдите высоту параллелограмма, проведённую к меньшей его стороне.

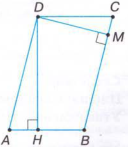


Рис. 369

Решение. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм (рис. 369), в котором $AB = 6{,}4$ см, $BC = 8$ см, $DM = 6$ см.

Требуется найти высоту DH.

Площадь параллелограмма $ABCD$ можно выразить двумя способами: либо как произведение стороны BC на высоту DM, либо как произведение стороны AB на высоту DH. Отсюда:

$$S_{ABCD} = BC \cdot DM = 8 \cdot 6 = 48\ (\text{см}^2), \qquad (1)$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot DH. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получим: $DH = S_{ABCD} : AB = 48 : 6{,}4 = 7{,}5$ (см).

Для того чтобы найти длину неизвестной стороны или высоту параллелограмма, выразите площадь двумя способами: через одну из двух смежных сторон параллелограмма и высоту, проведённую к ней, и через другую смежную сторону и соответствующую ей высоту. Составьте и решите уравнение относительно искомой величины.

? Можно ли найти площадь ромба по стороне и высоте, проведённой к ней? Можно, поскольку ромб – частный вид параллелограмма.

Вы знаете, как находить площадь прямоугольного треугольника по его катетам. Воспользуемся этим, чтобы вывести ещё одну формулу площади ромба.

Теорема (о площади ромба по его диагоналям).
Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Дано: $ABCD$ – ромб (рис. 370),
AC и BD – диагонали,
$AC = d_1$, $BD = d_2$.

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

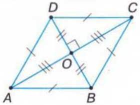


Рис. 370

Доказательство. В ромбе $ABCD$ все стороны равны. Его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам. Поэтому они разбивают ромб на четыре равных прямоугольных треугольника ABO, CBO, CDO и ADO с катетами $\frac{d_1}{2}$ и $\frac{d_2}{2}$. $S_{\Delta ABO} = S_{\Delta CBO} = S_{\Delta CDO} = S_{\Delta ADO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}$.

Поскольку площадь ромба равна сумме площадей этих треугольников, то $S_{ABCD} = 4S_{\Delta ABO} = 4 \cdot \frac{d_1 d_2}{8} = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

Следствие.

Площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали.

Утверждение следует из того, что квадрат – это частный вид ромба и имеет равные диагонали, пусть d. Следовательно, $S = \frac{1}{2} d^2$.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. У вас может возникнуть вопрос: *Зависит ли формула площади параллелограмма ABCD от расположения высоты DH* (рис. 368)? Нет, не зависит. В расположении точки *H* возможны три случая. Один из них рассмотрен в учебнике. Ещё два случая: точка *H* находится либо в вершине *B* параллелограмма (рис. 371), либо на продолжении его стороны *AB* (рис. 372).

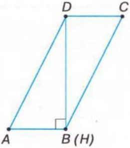


Рис. 371

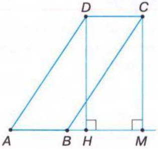


Рис. 372

Во втором случае (рис. 371) параллелограмм *ABCD* состоит из двух равных прямоугольных треугольников *ABD* и *CDB*, поэтому $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\Delta ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DH = ah_a$. В третьем случае (рис. 372) доказательство аналогично изложенному в учебнике. Проведите это самостоятельно.

2. Для фигур, имеющих равные площади, используют специальное название — *равновеликие*. Например, параллелограмм *ABCD* и прямоугольник *HMCD* на рисунке 372 являются равновеликими. Понятно, что два равных многоугольника всегда равновелики, но не любые два равновеликих многоугольника равны.

Два многоугольника называются *равносоставленными*, если их можно разбить на одинаковое количество попарно равных многоугольников, в частности треугольников. Таковы, например, параллелограмм *ABCD* и прямоугольник *HMCD* на рисунке 368, поскольку каждый состоит из общей для них трапеции и равных прямоугольных треугольников *ADH* и *BCM*.

Янош Больяи

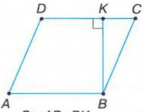
Между равновеликими и равносоставленными фигурами существует такая связь: равносоставленные многоугольники являются равновеликими (из определения о равносоставленных многоугольниках); равновеликие многоугольники являются равносоставленными. Последнее утверждение известно, как «теорема Больяи — Гервина», доказанная в XIX в. Интересно, что Фаркаш Больяи (1775 — 1856, Венгрия), доказавший теорему, был отцом Яноша Больяи (1802 — 1860) — одного из творцов неевклидовой геометрии.

ВСПОМНИТЕ ГЛАВНОЕ

1. По какой формуле можно вычислить площадь параллелограмма?
2. Как вывести формулу площади параллелограмма по стороне и высоте, проведённой к этой стороне?
3. Как вычислить площадь ромба, квадрата по его диагоналям?

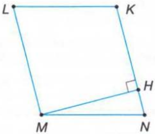
РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

721'. По данным на рисунках 373 — 375 выясните, можно ли правильно вычислить площадь параллелограмма, используя указанное равенство. Объясните ответ.



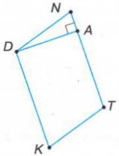
$S = AB \cdot BK$

Рис. 373



$S = MN \cdot MH$

Рис. 374



$S = DA \cdot NT$

Рис. 375

722'. По данным на рисунках 376 и 377 найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

723'. Чему равна площадь ромба $ABCD$ на рисунке 378?

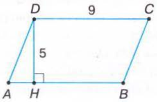


Рис. 376

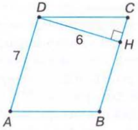


Рис. 377

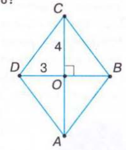


Рис. 378

724°. В параллелограмме $ABCD$ проведена высота BH к стороне CD. Найдите площадь параллелограмма, если:
1) $CD = 60$ см, $BH = 50$ см; 2) $CD = 25$ см, $BH = 40$ см;
3) $CD = 25$ см, $BH = 100$ см.

725°. К стороне a параллелограмма проведена высота h_a. Найдите его площадь, если:
1) $a = 10$ см, $h_a = 0{,}8a$; 2) $a = 2$ дм, $h_a = 0{,}75a$;
3) $h_a = 5$ см, $a = 1{,}2h_a$.

726°. Площадь параллелограмма равна S, а одна из его сторон — a. Найдите высоту, проведённую к этой стороне, если:
1) $S = 60$ см², $a = 15$ см; 2) $S = 175$ см², $a = 35$ см;
3) $S = 75$ см², $a = 25$ см.

727°. Найдите высоты параллелограмма со сторонами a, b и площадью S. Начертите в тетради таблицу 24 и заполните её.

Таблица 24

a	5 см	8,5 см	14 см	16 см
b	10 см	17 см	21 см	10 см
S	41 см²	34 см²	63 см²	64 см²
h_a				
h_b				

728°. Площадь параллелограмма равна S. Найдите расстояние между его сторонами длиною d, если:
1) $S = 56$ см², $d = 7$ см; 2) $S = 90$ см², $d = 18$ см;
3) $S = 24$ см², $d = 6$ см.

729°. Стороны параллелограмма равны a и b, а высота, проведённая к стороне a, равна h. Найдите высоту, проведённую к стороне b, если:
1) $a = 6$ см, $b = 3{,}6$ см, $h = 2{,}4$ см; 2) $a = 18$ мм, $b = 9$ мм, $h = 6$ мм;
3) $a = 30$ см, $b = 50$ см, $h = 25$ см.

730°. Докажите, что диагонали параллелограмма разбивают его на четыре треугольника с равными площадями.

731°. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Равны ли площади частей, на которые она делит параллелограмм?

732°. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны:
1) 12 см и 16 см; 2) 1,6 дм и 3 дм; 3) 40 мм и 42 мм.

733°. Докажите, что диагонали ромба разбивают его на четыре прямоугольных треугольника с равными площадями.

734°. В ромбе ABC диагонали пересекаются в точке O. Площадь прямоугольного треугольника AOB равна S. Найдите площадь ромба, если:
1) $S = 25$ см²; 2) $S = 30$ см²; 3) $S = 18$ см².

735°. Найдите площадь квадрата $ABCD$, если его диагональ AC равна:
1) 4 см; 2) 0,3 дм; 3) 1,2 м.

736. Параллелограмм со сторонами a и b имеет острый угол 30°. Найдите площадь параллелограмма, если:
1) $a = 15$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 25$ см, $b = 20$ см.

737. В параллелограмме со сторонами a и b высота, проведённая к большей стороне, образует с меньшей стороной угол 30°. Найдите площадь параллелограмма, если: 1) $a = 10$ мм, $b = 15$ мм; 2) $a = 20$ мм, $b = 25$ мм.

738. Найдите площадь ромба с тупым углом 150°, если его сторона равна: 1) 1 дм; 2) 2,6 см.

739. Две полосы шириной m и n, пересекаясь, образуют параллелограмм площадью S. Найдите стороны параллелограмма, если:
1) $m = 9$ см, $n = 24$ см, $S = 72$ см^2; 2) $m = 4$ дм, $n = 1$ дм, $S = 6$ дм^2.

740. Площадь параллелограмма равна S. Расстояния от точки пересечения его диагоналей до сторон соответственно равны m и n.
Найдите периметр параллелограмма, если:
1) $S = 56$ см^2, $m = 4$ см, $n = 3{,}5$ см; 2) $S = 36$ см^2, $m = 2$ см, $n = 3$ см.

741. В параллелограмме с периметром P точка пересечения диагоналей отстоит от его сторон на расстояниях m и n. Найдите площадь параллелограмма, если:
1) $P = 64$ см, $m = n = 4$ см; 2) $P = 63$ см, $m = 4$ см, $n = 5$ см.

742. Через произвольную точку диагонали параллелограмма проведены две прямые, параллельные его сторонам. Докажите, что полученные четырёхугольники, лежащие по разные стороны от диагонали, имеют равные площади.

743. Площадь ромба равна 36 см^2. Найдите его диагонали, если они относятся, как: 1) 3 : 4; 2) 2 : 3; 3) 1 : 1.

744. Два квадрата имеют диагонали 5 см и 3 см. Какова диагональ квадрата, площадь которого равна разности площадей данных квадратов?

745. Площадь ромба в два раза меньше площади квадрата с таким же периметром. Найдите острый угол ромба.

746. Во сколько раз площадь квадрата, вписанного в окружность, меньше площади квадрата, описанного около этой окружности?

747*. Высоты параллелограмма относятся, как 2 : 3, его периметр равен 40 см, а острый угол — 30°. Найдите площадь параллелограмма.

748*. Угол между высотами ромба равен 60°. Докажите, что площадь ромба в два раза больше площади треугольника, построенного на данных высотах ромба.

749*. По данным на рисунке 379 докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна 0,2 площади четырёхугольника $KLMN$.

750*. Произвольная точка M внутри параллелограмма $ABCD$ соединена отрезками с его вершинами. Докажите, что сумма площадей треугольников AMD и BMC равна сумме площадей треугольников AMB и CMD.

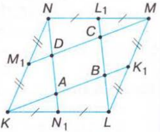


Рис. 379

751*. Диагональ параллелограмма перпендикулярна к его стороне. При каких условиях площадь данного параллелограмма равна квадрату этой диагонали?

752*. Радиус окружности, вписанной в ромб, делит его сторону на отрезки длиной m и n. Найдите площадь ромба, если:
1) $m = 1{,}8$ см, $n = 3{,}2$ см; 2) $m = 4$ см, $n = 9$ см.

753*. Найдите геометрическое место вершин параллелограммов с общей стороной, площадь которых равна площади данного параллелограмма.

754*. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырёхугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырёхугольника параллельна стороне параллелограмма.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

755. Поле имеет форму параллелограмма со стороной 250 м и проведённой к ней высотой 100 м. Через поле, перпендикулярно к его краю, проходит просёлок шириной 5 м. Какую площадь можно засеять?

756. Участок, имеющий форму параллелограмма, нужно разделить на три части одинаковой площади. Как это сделать?

757. Прямоугольную рамку сжали таким образом, что образовался параллелограмм с такими же сторонами, что и в прямоугольнике. Равны ли площади прямоугольника и параллелограмма?

758. Проведите измерения и рассчитайте, сколько потребуется кафельной плитки размером 33x33 см, чтобы вымостить пол в коридоре вашего дома способом «по диагонали», если края плитки не параллельны стенам.

§ 18. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Вы уже знаете, как вычислить площадь прямоугольного треугольника по его катетам. Возникает вопрос: *Как найти площадь любого треугольника по его стороне и высоте, проведённой к этой стороне?*

Теорема (о площади треугольника). Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

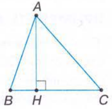


Рис. 380

Дано: ΔABC (рис. 380), AH — высота, $BC = a$, $AH = h_a$.

Доказать: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ah_a$.

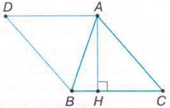


Рис. 381

Доказательство. На стороне AB заданного треугольника ABC построим равный ему треугольник BAD (рис. 381). Образованный четырёхугольник $ADBC$ — параллелограмм, поскольку, по построению, $AD = BC$, $BD = AC$. В нём сторона $BC = a$, высота $AH = h_a$, поэтому $S_{ADBC} = ah_a$. Поскольку параллелограмм состоит из двух равных треугольников ABC и BAD, то площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ADBC$.

Следовательно: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{ADBC} = \frac{1}{2} ah_a$.

Задача. Докажите, что площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

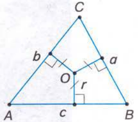


Рис. 382

Решение. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 382), в котором $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр, точка O — центр вписанной окружности, r — радиус вписанной окружности.

Докажем, что $S_{\Delta ABC} = pr$.

Соединим отрезками вершины треугольника ABC с центром O вписанной в него окружности (рис. 383). Получаем три треугольника — BOC, AOC и AOB. В каждом из них радиус вписанной окружности r является высотой, проведённой к стороне, равной соответственно a, b или c.

Поэтому $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}ar$, $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}br$, $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}cr$.

Площадь ΔABC равна сумме площадей этих треугольников. Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} + S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r = pr.$$

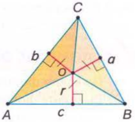


Рис. 383

Для того чтобы найти площадь треугольника (четырёхугольника), можно воспользоваться способом сложения площадей его частей. При этом иногда нужны дополнительные построения, чтобы образовались вспомогательные треугольники, площади которых можно найти по условию задачи.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. Способы вычисления площади треугольника (а также прямоугольника и трапеции) были известны ещё в Древнем Египте. Сведения об этом дошли до нас на папирусах. Среди них наиболее известные — папирус Ринда (около 1800 г. до н. э.), содержащий 84 задачи с решениями (страница из этого папируса на рис. 384), и так называемый московский папирус (около 1600 г. до н. э.), он содержит 25 задач с решениями. Чтобы найти площадь треугольника, древние египтяне основание треугольника делили пополам и умножали на высоту. А для определения площади равнобедренного треугольника использовали полупроизведение его боковых сторон.

2. Геометрические расчёты по точным формулам проводились и в древнем Вавилоне. Сведения сохранились на клинописных табличках (образец вы видите на рис. 385). Дошедшие до нас тексты свидетельствуют, что вавилоняне знали и использовали в практических задачах пропорциональность параллельных отрезков. Например, они умели вычислять длину отрезков MN, CM и BM (рис. 386) в треугольнике ABC по его стороне $AC = 30$, разности $S_1 - S_2 = 42$ площадей трапеции и

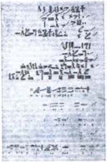


Рис. 384


Рис. 385

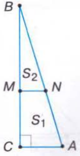


Рис. 386

треугольника, на которые разбивается данный треугольник параллельной прямой MN, и разности $BM - CM = 20$. Сейчас для решения этой задачи нам пришлось бы составлять систему уравнений.

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. По каким формулам можно вычислить площадь треугольника?
2. Выведите формулу площади треугольника по стороне и высоте, проведённой к этой стороне.
3. Объясните, как найти площадь треугольника, зная площади его частей. Приведите пример.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

759'. По данным на рисунках 387 – 389 назовите стороны треугольника ABC и проведённые к ним высоты.

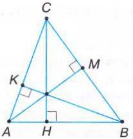


Рис. 387

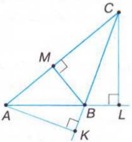


Рис. 388

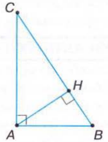


Рис. 389

760'. Можно ли правильно вычислить площадь треугольника по данному равенству:

1) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AM$ (рис. 387); 2) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK$ (рис. 387);

3) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BM \cdot AK$ (рис. 388); 4) $S_{\Delta ABC} = AB \cdot CL$ (рис. 388);

5) $S_{\Delta ABC} = AB \cdot AC$ (рис. 389); 6) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC$ (рис. 389).

Объясните ответ.

761'. По данным на рисунках 390 – 392 найдите площадь треугольника ABC.

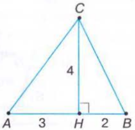


Рис. 390

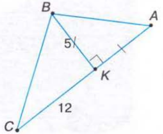


Рис. 391

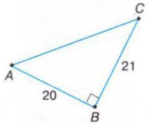


Рис. 392

762°. В треугольнике ABC проведена высота BH. Найдите площадь треугольника, если:

1) $AC = 6$ см, $BH = 5$ см; 2) $AC = 2{,}5$ дм, $BH = 4$ дм; 3) $AC = 25$ см, $BH = 100$ см.

763°. К стороне a треугольника проведена высота h_a. Найдите его площадь, если:

1) $a = 10$ см, $h_a = 0{,}8a$; 2) $a = 2$ дм, $h_a = 0{,}75a$;
3) $h_a = 12$ мм, $a = 1{,}5h_a$.

764°. Площадь треугольника равна S, а одна из его высот — h. Найдите сторону, к которой проведена эта высота, если:

1) $S = 72$ см², $h = 12$ см; 2) $S = 155$ см², $h = 10$ см;
3) $S = 75$ см², $h = 7{,}5$ см.

765°. Найдите высоты треугольника со сторонами a, b, c и площадью S. Начертите в тетради таблицу 25 и заполните её.

Таблица 25

a	13 см	13 см	7 см	9 см
b	14 см	20 см	15 см	10 см
c	15 см	21 см	20 см	17 см
S	84 см²	126 см²	42 см²	36 см²
h_a				
h_b				
h_c				

766°. Как изменится площадь данного треугольника, если:

1) одну из его сторон увеличить в два раза, а высоту, проведённую к этой стороне, уменьшить в два раза;

2) одну из его сторон уменьшить в два раза, а высоту, проведённую к этой стороне, увеличить в четыре раза;

3) одну из его сторон увеличить в четыре раза, а высоту, проведённую к этой стороне, уменьшить в два раза?

767°. По данным на рисунках 393 — 395 докажите, что треугольники AMC и BMC имеют равные площади.

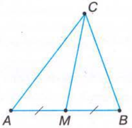


Рис. 393

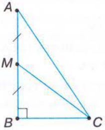


Рис. 394

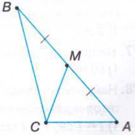


Рис. 395

768°. В треугольнике проведена медиана. В каком отношении разбивается его площадь? Ответ обоснуйте.

769°. В треугольнике проведена средняя линия. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь образованного треугольника?

770°. Средняя линия треугольника отсекает от него треугольник площадью S. Чему равна площадь данного треугольника, если:

1) $S = 52{,}5$ см²; 2) $S = 21$ см²; 3) $S = 105$ см²?

771°. В треугольнике со сторонами a, b и c радиус вписанной окружности равен r, а площадь — S. Начертите в тетради таблицу 26 и заполните её.

Таблица 26

a	17 см	13 см	7 см	13 см
b	28 см	20 см	15 см	37 см
c	39 см	21 см	20 см	40 см
p				
r	5 см	$\frac{14}{3}$ см	2 см	$\frac{16}{3}$ см
S				

772. Средняя линия треугольника равна q, а перпендикулярная к ней высота равна h. Найдите площадь треугольника, если:

1) $q + h = 12{,}5$ см, $q - h = 0{,}5$ см; 2) $q + h = 23$ см, $h - q = 17$ см.

773. Докажите, что два треугольника имеют равные площади, если в них соответственно равны средние линии и высоты, перпендикулярные средним линиям.

774. Площадь прямоугольного треугольника равна S, а его катеты относятся, как $m : n$. Найдите катеты, если:

1) $S = 720$ см², $m = 9$, $n = 40$; 2) $S = 1320$ см², $m = 11$, $n = 9{,}6$.

775. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу на отрезки:

1) 4 см и 9 см; 2) 1 см и 16 см.

776. Найдите площадь прямоугольного треугольника с острым углом 30°, если его гипотенуза равна:

1) 8 см; 2) 12 см.

777. Найдите площадь равностороннего треугольника, если его сторона равна:

1) 80 мм; 2) 1,2 дм.

778. Найдите площадь прямоугольного треугольника, зная полусумму t его катетов и радиусы r и R вписанной и описанной окружностей, если:

1) $t = 7$ см, $r = 2$ см, $R = 5$ см;

2) $t = 17$ см, $r = 4$ см, $R = 13$ см.

779. Треугольник имеет стороны a, b и c, при этом $a < b < c$. Составьте неравенство для высот треугольника h_a, h_b и h_c. Ответ обоснуйте.

780. Известна площадь одного из двух подобных треугольников. Какие измерения и вычисления надо выполнить, чтобы найти площадь другого треугольника?

781. Докажите, что площадь треугольника с вершиной в точке пересечения медиан данного треугольника и общей с ним стороной составляет треть площади данного треугольника.

782. В параллелограмме $ABCD$ вершина D находится на расстоянии 4 см от диагонали AC, равной 16 см. $AB = 12$ см. Найдите расстояние:

1) от точки D до прямой AB;
2) между прямыми AB и CD;
3) от середины диагонали до стороны CD параллелограмма.

783*. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, до его сторон равна высоте треугольника.

784*. Найдите геометрическое место вершин треугольников с общей стороной, в которых площадь равна площади данного треугольника.

785*. Докажите, что для треугольника с высотами h_a, h_b и h_c и радиусом вписанной окружности r выполняется равенство: $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$.

786*. Сторону AB треугольника ABC продолжили за точку A на $\frac{1}{n}$ её длины и получили точку D. Какова площадь треугольника DAC?

787*. Стороны треугольника продолжили (двигаясь по часовой стрелке) на их собственную длину. Полученные точки соединили отрезками. Какова площадь образовавшегося треугольника?

788*. В каком отношении, считая от вершины, надо разделить боковую сторону треугольника двумя прямыми, параллельными основанию, чтобы площадь треугольника была разделена на три равные части?

789*. Высота треугольника равна 4 см. На каком расстоянии от вершины треугольника надо провести прямую, параллельную противолежащей стороне, чтобы разделить площадь треугольника в отношении $m : n$, считая от вершины?

790*. Докажите, что окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, делит его гипотенузу на отрезки, произведение которых равно площади этого треугольника.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

791. Используя бумажные модели многоугольников, проиллюстрируйте равенства: $S=\frac{ah}{2}=\frac{a}{2}\cdot h=a\cdot\frac{h}{2}$.

792. Площадь треугольника можно вычислить при помощи линейки. Для этого надо приложить линейку к ΔABC так, как показано на рисунке 396, и через точку B провести $BM \parallel AC$. Объясните, как вычислить искомую площадь, зная ширину линейки и длину отрезка AM.

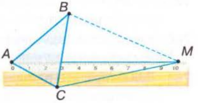


Рис. 396

793. Как нужно нанести деления на линейку (рис. 396), чтобы точка M сразу же указывала значение площади ΔABC?

794. Изготовили серию деталей треугольной формы, в которых равны наибольшие стороны и равны расстояния от противолежащей вершины до этих сторон. Задайте форму и размеры контейнера, в котором удобнее всего транспортировать эти детали одновременно.

795. Воздух давит с силой 1,03 кг на каждый квадратный сантиметр. Каково давление воздуха на треугольный тент над окном, если ширина тента — 1,8 м, а расстояние от его противолежащей вершины до этой стороны равно 0,5 м?

796. Луг треугольной формы надо разделить на две части с равными площадями. Как это сделать при помощи вех и полевого циркуля?

§ 19. ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

Вы знаете, чтобы вывести формулы площадей прямоугольника, параллелограмма или треугольника, надо составить из этих фигур такие, площади которых умеете находить. Воспользуемся этим способом и выведем формулу площади трапеции.

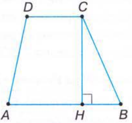


Рис. 397

Теорема (о площади трапеции).
Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.

Дано: $ABCD$ — трапеция (рис. 397), AB и CD — основания, CH — высота, $AB = a$, $CD = b$, $CH = h$.

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

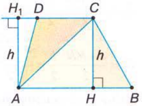


Рис. 398

Доказательство. Проведём в трапеции диагональ AC (рис. 398). Она разбивает трапецию на два треугольника ABC и ADC. Высота h трапеции является высотой треугольника ABC, проведённой к стороне $AB = a$, и равна высоте треугольника ADC, проведённой к стороне $CD = b$.

Площадь трапеции равна сумме площадей этих треугольников, поэтому

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Задача. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 399). Докажите, что треугольники AOD и BOC имеют равные площади.

Решение. Рассмотрим треугольники ABD и ABC. В них сторона AB — общая, а высоты, проведённые к этой стороне, равны высоте трапеции.

Поэтому $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ABC}$. Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ABC — из треугольников AOB и BOC.

Отсюда получим:

$S_{\Delta AOD} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AOB}$; $S_{\Delta BOC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AOB}$.

Следовательно, площади треугольников AOD и BOC равны как разности равных площадей.

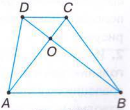


Рис. 399

Для того чтобы установить, что неравные фигуры имеют равные площади, нужно доказать, что площади этих фигур равны либо сумме равных площадей, либо разности равных площадей.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. У вас может возникнуть вопрос: *Существует ли трапеция, средняя линия которой делит её площадь пополам?*

Существование фигуры с заданными свойствами можно доказать, если привести пример такой фигуры. Однако не всегда этот путь — самый простой. История свидетельствует о том, что иногда на поиски примера, подтверждающего существование некоторого математического объекта, учёные затрачивали многие годы.

Чтобы упростить поиск, проводят предварительные аналитические расчёты. Именно это мы и сделаем, чтобы ответить на поставленный вопрос.

Пусть трапеция $ABCD$ (рис. 400) имеет основания a и b и высоту h. Средняя линия MN разбивает её на две трапеции с равными высотами $\frac{h}{2}$ (докажите это самостоятельно). Обозначим площади этих трапеций S_1 и S_2 и выразим их через основания данной трапеции и её высоту:

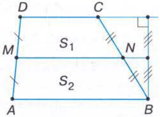


Рис. 400

$$S_1 = \frac{b+MN}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{b+\frac{a+b}{2}}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3b+a}{4} \cdot \frac{h}{2},$$

$$S_2 = \frac{a+MN}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{a+\frac{a+b}{2}}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3a+b}{4} \cdot \frac{h}{2}.$$

Найдём отношение площадей S_1 и S_2.

После сокращений получим: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3b+a}{3a+b}$.

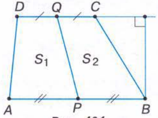


Рис. 401

Равенство площадей S_1 и S_2 возможно только в случае, если $3b + a = 3a + b$, то есть при $a = b$. А такой трапеции не существует.

Интересно, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции (иногда его называют второй средней линией трапеции), делит площадь трапеции пополам. Докажите это самостоятельно, используя рисунок 401.

2. Изучая четырёхугольники, вы узнали о дельтоиде (рис. 402). Этот четырёхугольник, как и ромб, имеет взаимно перпендикулярные диагонали. Существуют трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями (рис. 403), а также произвольные четырёхугольники с аналогичным свойством (рис. 404). И ромб, и дельтоид, и указанная трапеция являются частными видами четырёхугольников со взаимно перпендикулярными диагоналями.

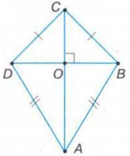


Рис. 402

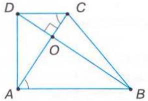


Рис. 403

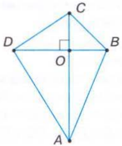


Рис. 404

Докажите самостоятельно, что **площадь четырёхугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями равна половине произведения этих диагоналей.** Эта формула справедлива и для ромба, и для дельтоида, и для трапеции.

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. По какой формуле вычисляют площадь трапеции? Как её вывести?
2. Как найти площадь трапеции, зная её среднюю линию и высоту?
3. Объясните, как можно доказать равенство площадей двух неравных фигур.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

797'. Можно ли найти площадь трапеции, исходя из равенства:

1) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot DH$ (рис. 405);

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB + DC \cdot BH$ (рис. 405);

3) $S_{KLMN} = \frac{1}{2} (KL + NM) \cdot TL$ (рис. 406);

4) $S_{KLMN} = (KN + LM) \cdot \frac{MH}{2}$ (рис. 406);

5) $S_{PQHT} = PQ \cdot PT$ (рис. 407);

6) $S_{PQHT} = \frac{HT + PQ}{2} \cdot PT$ (рис. 407)?

Объясните ответ.

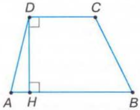


Рис. 405

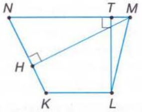


Рис. 406

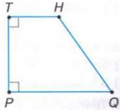


Рис. 407

798°. По данным на рисунках 408 и 409 найдите площадь трапеции $ABCD$.

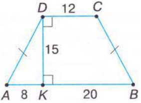


Рис. 408

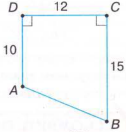


Рис. 409

799°. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD проведена высота CH.

Найдите площадь трапеции, если:

1) $AB = 60$ см, $CD = 36$ см, $CH = 50$ см;
2) $AB = 25$ см, $CD = 45$ см, $CH = 40$ см;
3) $AB = 25$ см, $CD = 55$ см, $CH = 100$ см.

800°. Основания трапеции равны a и b, а высота — h.

Найдите площадь трапеции, если:

1) $a = 10$ см, $b = 0{,}8a$, $h = a$;
2) $a = 2$ дм, $b = 0{,}75a$, $h = 0{,}5a$;
3) $b = 5$ см, $a = 1{,}2b$, $h = a$.

801°. Площадь трапеции равна S, а её высота — h.

Найдите сумму оснований трапеции, если:

1) $S = 60$ см², $h = 12$ см; 2) $S = 150$ см², $h = 25$ см;
3) $S = 90$ см², $h = 15$ см.

802°. Площадь трапеции равна S, а её средняя линия — q.

Найдите высоту трапеции, если:

1) $S = 60$ см², $q = 15$ см; 2) $S = 175$ см², $q = 35$ см; 3) $S = 75$ см², $q = 25$ см.

803°. Основания трапеции равны a и b, средняя линия — q, высота — h, а площадь — S. Начертите в тетради таблицу 27 и заполните её.

Таблица 27

a	10 см	23 см	20 см	23
b	14 см	27 см	22 см	9 см
q	12 см	25 см	21 см	16 см
h	7 см	5 см	10 см	11
S	84 см²	125 см²	210 см²	176 см²

804°. Как изменится площадь трапеции, если:

1) оба её основания увеличить в два раза, а высоту уменьшить в два раза;
2) оба её основания уменьшить в два раза, а высоту увеличить в два раза;
3) среднюю линию увеличить в два раза?

805°. Площадь трапеции равна S, высота — h, а её основания относятся, как $m : n$. Найдите основания трапеции, если:

1) $S = 36$ см², $h = 2$ см, $m = 4$, $n = 5$; 2) $S = 150$ см², $h = 5$ см, $m = 2$, $n = 3$;
3) $S = 90$ см², $h = 6$ см, $m = 1$, $n = 2$.

806°. В трапеции с основаниями a и b проведены диагонали. Чему равно отношение площадей треугольников, прилежащих к основаниям?

807. Периметр трапеции равен P, её боковые стороны — c и d, а высота — h. Найдите площадь трапеции, если:

1) $P = 120$ см, $c = d = 17$ см, $h = 15$ см;

2) $P = 58$ см, $c = 15$ см, $d = 13$ см, $h = 12$ см.

808. В прямоугольной трапеции основания равны a и b. Её бо́льшая боковая сторона образует с основанием угол $45°$. Найдите площадь трапеции, если:

1) $a = 2$ см, $b = 5$ см; 2) $a = 5$ см, $b = 3$ см.

809. В прямоугольной трапеции две наименьшие стороны имеют длину a. Наибольший угол трапеции равен $135°$. Найдите площадь трапеции, если:

1) $a = 2$ см; 2) $a = 3$ см.

810. Основания равнобедренной трапеции равны a и $3a$, а площадь — $2a^2$. Чему равен острый угол трапеции?

811. В трапеции меньшая диагональ d перпендикулярна к её основаниям a и b. Найдите площадь трапеции, если:

1) $a + 2b = 3{,}3$ см, $a - b = 1{,}8$ см, $d = 4$ см;

2) $3a + 2b = 44$ см, $a - 2b = 4$ см, $d = 12$ см.

812. Отрезок, проведённый из вершины тупого угла трапеции параллельно её боковой стороне, делит основание в отношении $1 : 2$. Найдите основания трапеции, если площадь полученного треугольника равна 6 см^2, а высота трапеции — 3 см. Сколько случаев нужно рассмотреть?

813. Меньшее основание трапеции равно 4 см. Прямая a разбивает трапецию на параллелограмм и треугольник с равными площадями. Найдите большее основание трапеции.

814. Докажите, что площадь трапеции, описанной около окружности, равна произведению полусуммы её боковых сторон на высоту.

815. Трапеция, описанная около окружности, имеет периметр P и площадь S. Найдите радиус окружности.

816. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из диагоналей равна 8 см, а площадь трапеции — 40 см^2. Найдите другую диагональ.

817*. Докажите, что существует множество неравных трапеций, имеющих с трапецией $ABCD$ общую среднюю линию и равную с ней площадь.

818*. В каких пределах может изменяться площадь трапеции, большее основание которой равно 16 см, а высота — 2 см?

819*. Отрезок, параллельный основаниям a и b трапеции, делит её площадь пополам. Какова длина этого отрезка?

820*. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что площадь треугольника BOC является средним пропорциональным между площадями треугольников AOB и COD.

821*. Основания трапеции относятся, как $m : n$. Найдите отношение площадей четырёх частей трапеции, на которые её разбивают диагонали.

822*. Высота равнобедренной трапеции равна h, а её площадь — h^2. Под каким углом пересекаются диагонали трапеции?

823*. Найдите площадь равнобедренной трапеции с боковой стороной c и перпендикулярной к ней диагонали d, если основания трапеции относятся, как $3 : 5$.

824*. В трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями отрезок, соединяющий середины оснований, равен средней линии трапеции. Докажите это.

825*. Если в трапеции середину одной боковой стороны соединить отрезками с концами другой боковой стороны, то площадь полученного треугольника будет в два раза меньше площади трапеции. Докажите это.

826*. В треугольнике через точку пересечения медиан проведены три отрезка. Каждый из них параллелен одной из сторон треугольника. Докажите, что три образованные трапеции, составляющие треугольник, имеют равные площади.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

827°. На рисунке 410 изображён план участка в масштабе 1 : 1 000. Какова площадь этого участка?

828°. Как, пользуясь планом на рисунке 411, найти площадь участка, если план выполнен в масштабе 1 : 1000?

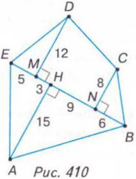


Рис. 410

Рис. 411

829. Участок имеет форму прямоугольной трапеции. Как провести перпендикуляр к её основаниям, чтобы разделить площадь участка пополам?

830. В фонаре стеклянные вставки имеют форму трапеции, в которой параллельные стороны равны 20 см и 16 см, а расстояние между ними — 10 см. Достаточно ли стекла прямоугольной формы размером 30 x 24 см, чтобы вырезать четыре вставки для фонаря? Объясните ответ.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое многоугольник; n-угольник? Как его обозначают?
2. Каковы элементы многоугольника? Что такое внешний угол многоугольника? Диагональ? Периметр?
3. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов многоугольника.
4. Какой многоугольник называется вписанным в окружность? Описанным около окружности?
5. Объясните, что такое площадь фигуры. Каковы основные свойства площади?
6. Выведите формулы площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции. По какой формуле вычисляют площадь квадрата?
7. Чему равно отношение площадей подобных треугольников?

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Внимательно прочитайте задачи и найдите среди предложенных ответов правильные. Для выполнения тестового задания необходимо 10 – 15 мин.

1° Найдите сумму углов шестиугольника.

А. 60°. **Б.** 120°. **В.** 540°. **Г.** 720°.

2° Квадрат и прямоугольник имеют равные площади. Периметр квадрата равен 24 см, а одна из сторон прямоугольника — 4 см. Найдите другую сторону прямоугольника.

А. 6 см. **Б.** 9 см. **В.** 20 см. **Г.** 36 см.

3° Площадь равнобедренного ΔABC с основанием AC равна 4800 см^2. Найдите высоты, проведённые к боковым сторонам треугольника, если $AB = 100$ см.

А. 24 см и 48 см. **Б.** 48 см и 48 см. **В.** 48 см и 96 см. **Г.** 96 см и 96 см.

4 В трапеции $ABCD$ меньшее основание CD и высота соответственно равны 7 см и 8 см. Найдите площадь трапеции, если площадь ΔABC равна 60 см^2.

А. 45 см^2. **Б.** 56 см^2. **В.** 75 см^2. **Г.** 88 см^2.

5* В ромбе $ABCD$ диагонали равны 9 см и 40 см. Бóльшую диагональ AC точка K делит в отношении 3 : 2, если считать от вершины A. Найдите площадь треугольника AKB.

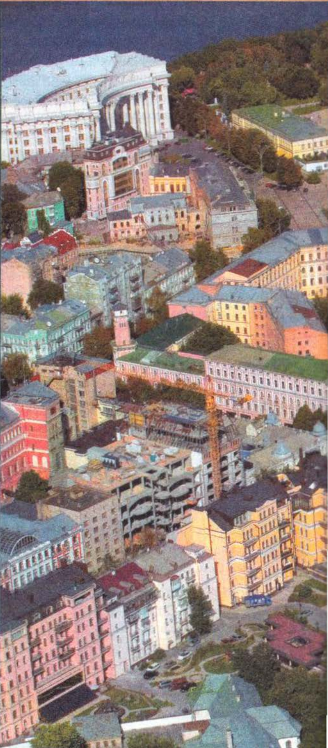
А. 90 см^2. **Б.** 135 см^2. **В.** 180 см^2. **Г.** 270 см^2.

ГЛАВА 4

РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ

В главе вы узнаете:

- о важнейшей теореме геометрии – теореме Пифагора и следствиях из неё;
- что такое синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника и о соотношениях между его сторонами;
- о новых алгоритмах нахождения по одной из сторон прямоугольного треугольника и острому углу двух других сторон, а по двум сторонам треугольника – острых углов;
- о применении изученных алгоритмов при решении геометрических задач и задач практического содержания



ТРЕУГОЛЬНИКОВ

§20. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Докажем теорему, открытие которой связано с именем древнегреческого учёного Пифагора (VI в. до н. э.).

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Дано: ΔABC, $\angle C = 90^\circ$ (рис. 412).

Доказать: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

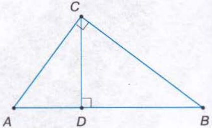


Рис. 412

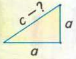
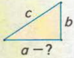
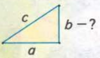
Доказательство. Проведём из вершины прямого угла C высоту CD. Каждый катет прямоугольного треугольника является средним пропорциональным между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу. Поэтому $AC^2 = AB \cdot AD$ и $BC^2 = AB \cdot BD$. Сложив равенства почленно и зная, что $AD + DB = AB$, получим: $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB = AB\,(AD + DB) = AB^2$.
Следовательно, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Если a, b – катеты прямоугольного треугольника, c – его гипотенуза, то из формулы $c^2 = a^2 + b^2$ получим следующие формулы:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a^2 = c^2 - b^2$, либо $a = \sqrt{c^2 - b^2}$; $b^2 = c^2 - a^2$, либо $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Используя эти формулы, по двум любым сторонам прямоугольного треугольника находим его третью сторону (табл. 28).

Таблица 28

 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	 $a = \sqrt{c^2 - b^2}$	 $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Например:

1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, тогда $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см);

2) $c = 13$ см, $a = 5$ см, тогда $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

Справедлива и теорема, обратная теореме Пифагора: **если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то этот треугольник – прямоугольный.**

Согласно теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник со сторонами 3 см, 4 см и 5 см – прямоугольный, поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$. Такой треугольник иногда называют *египетским*.

Задача. Сторона ромба равна 10 см, а одна из его диагоналей – 16 см. Найдите другую диагональ ромба.

Решение. Пусть $ABCD$ – ромб (рис. 413), $AC = 16$ см, $AD = 10$ см. Найдём диагональ BD. Как известно, диагонали ромба пересекаются под прямым углом и в точке пересечения делятся пополам. Поэтому ΔAOD – прямоугольный ($\angle O = 90°$).

В нём: катет $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ (см),

гипотенуза $AD = 10$ см.

По теореме Пифагора, $AD^2 = AO^2 + OD^2$, отсюда $OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ (см).

Тогда диагональ $BD = 2 \cdot OD = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

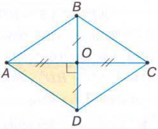


Рис. 413

Для того чтобы найти определённый элемент фигуры (сторону, высоту, диагональ), выделите на рисунке прямоугольный треугольник, воспользовавшись свойствами фигуры, и примените теорему Пифагора.

Пусть BC – перпендикуляр, проведённый из точки B на прямую a (рис. 414). Возьмём произвольную точку A на прямой a, отличную от точки C, и соединим точки A и B. Отрезок AB называется *наклонной*, проведённой из точки B на прямую a. Точка A называется *основанием наклонной*, а отрезок AC – *проекцией наклонной*.

Рис. 414

Наклонные имеют следующие свойства.

Если из данной точки к прямой провести перпендикуляр и наклонные, то:

1) любая наклонная больше перпендикуляра;

2) равные наклонные имеют равные проекции;

3) из двух наклонных больше та, проекция которой больше.

Покажем, что свойства наклонных следуют из теоремы Пифагора.

1) По теореме Пифагора, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (рис. 415), тогда $AB^2 > BC^2$ или $AB > BC$.

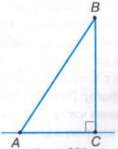


Рис. 415

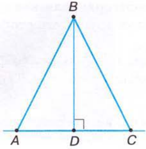


Рис. 416

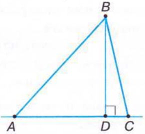


Рис. 417

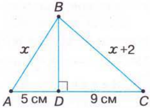


Рис. 418

2) Из прямоугольных треугольников ABD и CBD (рис. 416) имеем:

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}\ ,\ DC = \sqrt{BC^2 - BD^2}\ .$$

Поскольку в этих равенствах $AB = BC$ (по условию), то $AD = DC$.

3) Из прямоугольных треугольников ABD и CBD (рис. 417) имеем: $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2}$, $BC = \sqrt{DC^2 + BD^2}$. В этих равенствах $AD > DC$.

Тогда $AB > BC$.

Задача. Из точки к прямой проведены две наклонные, проекции которых равны 5 см и 9 см. Найдите наклонные, если одна из них на 2 см больше другой.

Решение. Пусть $AD = 5$ см, $DC = 9$ см (рис. 418). Поскольку $AD < DC$, то, по свойству трёх наклонных, $AB < BC$. Обозначим AB через x, тогда $BC = x + 2$. Из прямоугольных треугольников ABD и CBD находим BD^2.

Из ΔABD: $BD^2 = AB^2 - AD^2 = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$.

Из ΔCBD: $BD^2 = BC^2 - DC^2 = (x + 2)^2 - 9^2 = x^2 + 4x - 77$.

Приравниваем правые части равенств и получаем: $x^2 + 4x - 77 = x^2 - 25$.

Отсюда $4x = 52$, $x = 13$ см. Следовательно, $AB = 13$ см, $BC = x + 2 = 15$ (см).

Если в условии задачи даны две наклонные, проведённые из одной точки к прямой, то рассматриваем два прямоугольных треугольника, общим катетом которых является перпендикуляр, проведённый из общей точки к этой прямой.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

Теорема Пифагора — одна из наиболее значимых теорем математики. На протяжении многих столетий она являлась толчком для важнейших математических исследований. Предлагаем вам несколько интересных фактов, связанных с этой теоремой и её автором.

Пифагор (570 – 496 гг. до н. э.) родился на острове Самос (южная часть Эгейского моря). Длительное время изучал математику в Египте и Вавилоне. В г. Кротоне, на юге Италии, основал научную школу — так называемый пифаго-

Пифагор

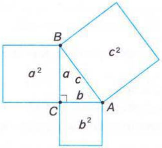


Рис. 419

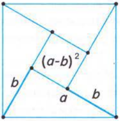


Рис. 420

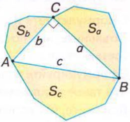


Рис. 421

рейский союз. Пифагор и его ученики занимались математикой, философией, астрономией и теорией музыки. Вследствие противоречий и противодействия со стороны общества здание школы было разгромлено, а сам Пифагор убит.

Среди важнейших достижений пифагорейцев — теорема, которую называют теоремой Пифагора, и её доказательство. (Ныне установлено, что эта теорема была известна за 1500 лет до Пифагора в древнем Вавилоне.)

Теорема формулируется так: **площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах** (рис. 419).

Доказательством теоремы Пифагора занимались многие математики на протяжении столетий. Известно более 150 доказательств этой теоремы. Так, индийский математик Бхаскара (XII в.) предложил такую фигуру, как на рисунке 420, без каких-либо объяснений. Под рисунком лишь одно слово — «смотри». Попытайтесь объяснить справедливость теоремы по этому рисунку.

Теорема Пифагора допускает интересные обобщения. Одно из них: если на сторонах прямоугольного треугольника построить произвольные, подобные между собой фигуры, то справедливо равенство $S_c = S_a + S_b$ (рис. 421), где S_a, S_b и S_c — площади построенных фигур.

С теоремой Пифагора связаны школьные шутки: рисунок к теореме для случая равнобедренного прямоугольного треугольника ученики называли «пифагоровы штаны» (рис. 422), а также изображали в виде смешных фигурок (рис. 423 и 424).

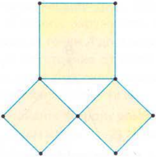


Рис. 422

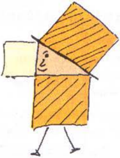


Рис. 423

Рис. 424

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.
2. Объясните, как по двум сторонам прямоугольного треугольника найти его третью сторону.
3. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора.
4. Что такое наклонная? Основание наклонной? Проекция наклонной?
5. Докажите, что если из одной точки к прямой провести перпендикуляр и наклонные, то:
   1) любая наклонная будет больше перпендикуляра;
   2) равные наклонные имеют равные проекции;
   3) из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

831'. Какое из этих утверждений справедливо?
В прямоугольном треугольнике:
1) квадрат гипотенузы равен разности квадратов катетов;
2) гипотенуза равна сумме квадратов катетов;
3) квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

832'. Правильно ли указаны на рисунках 425 и 426 длины сторон прямоугольных треугольников? Объясните ответ.

833'. Начертите прямую a и обозначьте точку A вне прямой. Проведите из точки A на прямую a перпендикуляр AB и наклонную AC. Измерьте длину перпендикуляра и наклонной. Сравните эти длины и сделайте вывод.

834'. На рисунке 427 AD и DC — проекции наклонных AB и BC. Известно, что $AD < DC$. Какое из этих соотношений справедливо?
1) $AB = BC$; 2) $AB > BC$; 3) $AB < BC$.

835°. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны:
1) 12 см и 5 см; 2) 9 м и 12 м; 3) 8 см и $8\sqrt{3}$ см.

836°. Найдите катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза и второй катет равны:
1) 13 см и 12 см; 2) 17 м и 15 м; 3) $15a$ и $9a$.

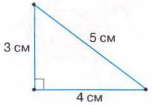


Рис. 425

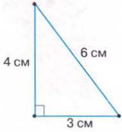


Рис. 426

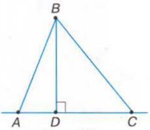


Рис. 427

837°. a, b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза. Заполните таблицу 29.

Таблица 29

a		12 см	$8a$
b	5 см		$6a$
c	13 см	20 см	

838°. a, b — стороны прямоугольника, d — его диагональ. Заполните таблицу 30.

Таблица 30

a	24 см	10 см	$12a$
b	7 см		
d		26 см	$15a$

839°. Докажите, что квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его смежных сторон.

840°. Найдите диагональ квадрата, если его сторона равна $2\sqrt{2}$ см.

841°. Найдите гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника, если его катет равен:
1) 1 см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) a.

842°. Найдите катеты равнобедренного прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна:
1) $\sqrt{2}$ см; 2) 8 см; 3) m.

843°. Найдите высоту равностороннего треугольника, если его сторона равны:
1) $\sqrt{3}$ см; 2) 10 см; 3) a.

844°. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведённую к основанию, если боковая сторона и основание соответственно равны:
1) 26 см и 20 см; 2) 17 см и 16 см; 3) 13 см и 10 см.

845°. Через точку A к окружности с центром O проведена касательная AB, где B — точка касания (рис. 428). Найдите:
1) радиус окружности, если отрезок касательной AB равен 8 см, а расстояние от точки A до центра окружности — 17 см;
2) расстояние от точки A до центра окружности, если радиус окружности равен 12 см, а отрезок касательной AB — 16 см.

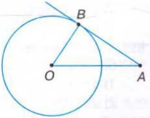


Рис. 428

846°. Найдите сторону ромба, если его диагонали равны:
1) 6 см и 8 см; 2) 18 см и 24 см; 3) 12 см и 16 см.

847°. Докажите, что если a — сторона ромба, d_1 и d_2 — его диагонали, то $4a^2 = d_1^2 + d_2^2$.

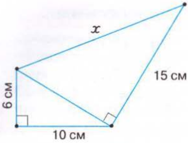


Рис. 429

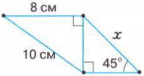


Рис. 430

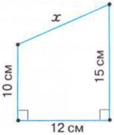


Рис. 431

848°. Из точки A к прямой проведены перпендикуляр AB и наклонная AC. Найдите:

1) наклонную AC, если её проекция BC равна 24 см, а перпендикуляр AB — 10 см;
2) проекцию BC наклонной, если перпендикуляр AB равен $8\sqrt{3}$ см, а наклонная AC — 16 см;
3) перпендикуляр AB, если наклонная AC равна 17 см, а её проекция BC — 8 см.

849. По данным на рисунках 429 — 431 найдите неизвестный отрезок x.

850. Один из катетов прямоугольного треугольника равен b, а другой — меньше гипотенузы на 1 см. Найдите стороны треугольника, если:
1) $b = 5$ см; 2) $b = 7$ см.

851. Катеты прямоугольного треугольника относятся, как 3 : 4, а гипотенуза равна c. Найдите катеты треугольника, если:
1) $c = 25$ см; 2) $c = 20$ см.

852. Периметр прямоугольного треугольника равен P, а катеты относятся, как $m : n$. Найдите стороны треугольника, если:
1) $P = 36$ см, $m = 3$, $n = 4$;
2) $P = 80$ см, $m = 15$, $n = 8$.

853. Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к основанию, как $m : n$, а высота, проведённая к основанию, равна h. Найдите основание и боковую сторону треугольника, если:
1) $m = 5$, $n = 6$, $h = 12$ см;
2) $m = 17$, $n = 16$, $h = 15$ см.

854. Стороны параллелограмма равны a и b. Одна из диагоналей перпендикулярна к стороне. Найдите длины диагоналей, если:
1) $a = 15$ см, $b = 9$ см;
2) $a = 7$ см, $b = 25$ см.

855. Основания прямоугольной трапеции равны a и b, а высота — h. Найдите бóльшую боковую сторону, если:
1) $a = 4$ см, $b = 12$ см, $h = 6$ см;
2) $a = 35$ см, $b = 15$ см, $h = 21$ см.

856. Докажите, что в прямоугольной трапеции разность квадратов диагоналей равна разности квадратов оснований.

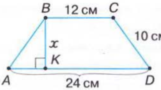


Рис. 432

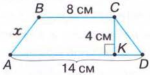


Рис. 433

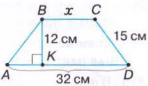


Рис. 434

857. По данным на рисунках 432 — 434 найдите неизвестный элемент x равнобедренной трапеции $ABCD$.

858. Основания равнобедренной трапеции равны a и b, а высота — h. Найдите диагональ трапеции, если:
1) $a = 6$ см, $b = 18$ см, $h = 16$ см; 2) $a = 16$ см, $b = 8$ см, $h = 5$ см.

859. В равнобедренную трапецию с основаниями a и b вписана окружность радиуса r. Найдите боковую сторону трапеции, если:
1) $a = 2$ см, $b = 18$ см, $r = 3$ см; 2) $a = 32$ см, $b = 18$ см, $r = 12$ см.

860. Высота ромба, проведённая из вершины тупого угла, делит сторону на отрезки b и c, если считать от вершины острого угла. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб, если: 1) $b = 6$ см, $c = 4$ см; 2) $b = 5$ см, $c = 8$ см.

861. В окружности радиуса r проведены параллельные хорды длиной a и b. Найдите расстояние между хордами, если:
1) $r = 25$ см, $a = 40$ см, $b = 48$ см; 2) $r = 65$ см, $a = 120$ см, $b = 32$ см.

862. Две окружности с радиусами 2 см и 8 см имеют внешнее касание. Найдите длину отрезка их внешней общей касательной, лежащей между точками касания (рис. 435).

863. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок:
1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) $\sqrt{a^2 - b^2}$.

864. Постройте квадрат, площадь которого равна:
1) сумме площадей двух заданных квадратов;
2) разности площадей двух заданных квадратов.

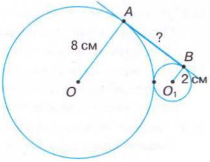


Рис. 435

865. Из точки к прямой проведены две наклонные. Одна из них равна 13 см, а её проекция — 12 см. Найдите длину другой наклонной, если она образует с прямой угол: 1) 30°; 2) 45°.

866. Из точки, лежащей на расстояния 12 см от прямой, проведены две наклонные, длины которых равны 13 см и 20 см. Найдите расстояние между основаниями наклонных. Сколько решений имеет задача?

867. Из точки к прямой проведены две наклонные, равные 10 см и 17 см, а их проекции относятся, как 2 : 5. Найдите:
1) проекции наклонных; 2) расстояние от точки до прямой.

868. **Если две наклонные, проведённые к прямой из одной точки, имеют равные проекции, то они равны между собой.** Докажите это.

869. **Если из одной точки проведены к прямой две наклонные, то бóльшая наклонная имеет и бóльшую проекцию на эту прямую.** Докажите.

870*. В прямоугольном треугольнике медиана и высота проведены из вершины прямого угла; они равны m и n. Найдите периметр треугольника, если:
1) $m = 25$ см, $n = 24$ см; 2) $m = 17$ см, $n = 15$ см.

871*. В прямоугольном треугольнике один катет равен b см, а сумма гипотенузы и другого катета на n см больше. Найдите гипотенузу и второй катет, если:
1) $b = 60$, $n = 12$; 2) $b = 35$, $n = 14$.

872*. Высота и медиана, проведённые к стороне c треугольника, равны h и m. Найдите две другие стороны треугольника, если:
1) $c = 60$ см, $h = 12$ см, $m = 13$ см; 2) $c = 42$ см, $h = 12$ см, $m = 13$ см.

873*. Найдите высоты треугольника, если его стороны равны:
1) 10 см, 10 см, 12 см; 2) 7 см, 15 см, 20 см.

874*. **Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.**

875*. **Докажите, что если d_1 и d_2 — диагонали трапеции, a и b — её основания, c и d — боковые стороны, то $d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$.**

876*. Докажите, что в прямоугольной трапеции разность квадратов диагоналей равна разности квадратов оснований.

877*. Постройте квадрат, который по площади в два раза меньше заданного.

878*. Докажите, что в окружности:
1) равные хорды равноудалены от центра;
2) из двух неравных хорд бóльшая хорда находится ближе к центру.

879*. Две окружности имеют внешнее касание. Докажите, что отрезок их внешней общей касательной, лежащий между точками касания, — среднее пропорциональное между диаметрами окружностей.

880*. Расстояние между центрами окружностей радиусов 6 см и 2 см равно 10 см. Найдите длину отрезка AB общей внутренней касательной (рис. 436).

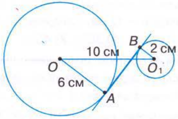


Рис. 436

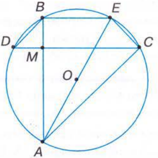


Рис. 437

881*. (Задача Архимеда) Две хорды, которые пересекаются, взаимно перпендикулярны. Докажите, что сумма квадратов отрезков этих хорд равна квадрату диаметра (рис. 437).

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

882. На рисунке 438 показано, как применить теорему Пифагора при вычислении расстояния между пунктами A и B, которые разделены препятствием. Объясните измерения.

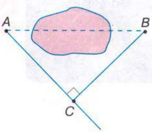


Рис. 438

883. Между двумя фабричными зданиями нужно сделать наклонный жёлоб для перемещения материалов. Концы жёлоба должны размещаться на высоте 7 м и 3 м над землей. Какой длины должен быть жёлоб, если расстояние между зданиями равно 15 м?

884. Диагональ прямоугольного участка земли равна 116 м, а одна из сторон — 84 м. Каков периметр этого участка?

885. Мачта высотой 12,5 м закреплена тремя тросами, а концы каждого из них удалены от концов мачты на 0,8 м и 4,4 м. Найдите длину каждого троса.

886. 1) Какой длины должна быть стремянка (рис. 439), чтобы её можно было приставить к окну, расположенному на высоте 6 м, если расстояние от нижнего конца стремянки до дома равно 2,5 м?

2) На какое расстояние надо отодвинуть от стены дома нижний конец стремянки, длина которой 9 м, чтобы верхний её конец оказался на высоте 6 м?

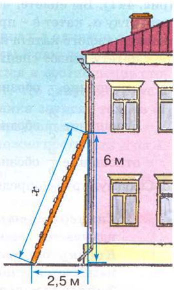


Рис. 439

887*. (Задача древнекитайского учёного Цзинь Киу-Чау, 1250 г. до н. э.). В центре колодца в форме квадрата со стороной 10 футов растёт камышина, высота которой над поверхностью воды 1 фут (1 фут ≈ 30 см). Если её наклонить к берегу (к середине стороны колодца), то она достаёт верхушкой берега (рис. 440). Какова глубина колодца?

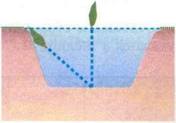


Рис. 440

§21. СИНУС, КОСИНУС И ТАНГЕНС ОСТРОГО УГЛА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Рис. 441

Пусть ABC – прямоугольный треугольник с катетами $BC = a$, $AC = b$, гипотенузой $AB = c$ и $\angle A = \alpha$ (рис. 441). Вы знаете, что катет a – противолежащий углу α, катет b – прилежащий к углу α. Отношение каждого катета к гипотенузе, а также катета к катету имеют специальные обозначения:

– отношение $\frac{a}{c}$ обозначают $\sin\alpha$ и читают «синус альфа»;

– отношение $\frac{b}{c}$ обозначают $\cos\alpha$ и читают «косинус альфа»;

– отношение $\frac{a}{b}$ обозначают $\operatorname{tg}\alpha$ и читают «тангенс альфа».

Сформулируем определения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

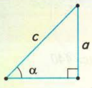
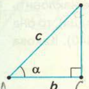
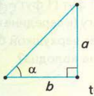
Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

Отношение сторон прямоугольного треугольника и их обозначения указаны в таблице 31.

Таблица 31

 $\sin\alpha = \frac{a}{c}$	B $tgB = \frac{AC}{BC}$  A C $\cos\alpha = \frac{b}{c}$	 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

? Зависят ли синус, косинус и тангенс острого угла от размеров треугольника?

Нет, не зависят. Итак, пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – два прямоугольных треугольника, в которых $\angle A = \angle A_1$ (рис. 442). Тогда $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по двум углам ($\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$). Соответствующие стороны этих треугольников пропорциональны: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

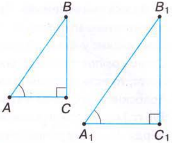


Рис. 442

Из этих равенств следует:

$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, то есть $\sin A = \sin A_1$; $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, то есть $\cos A = \cos A_1$;

$\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, то есть $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$.

Следовательно, в прямоугольных треугольниках с одним и тем же острым углом синусы этого угла равны, косинусы и тангенсы – равны. Если градусную меру угла изменить, то изменится и соотношение сторон прямоугольного треугольника. Это означает, что **синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника зависят только от градусной меры угла и не зависят от размеров треугольника.**

По исходному значению $\sin A$, $\cos A$ или $\operatorname{tg} A$ можно построить угол A.

Задача. Постройте угол, синус которого равен $\frac{2}{3}$.

Решение. Выбираем некоторый единичный отрезок (1 мм, 1 см, 1 дм). Строим прямоугольный треугольник, катет BC которого равен двум единичным отрезкам, а гипотенуза AB – трём (рис. 443). Угол A, лежащий против катета BC, – искомый, поскольку $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}$.

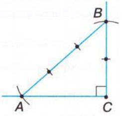


Рис. 443

В прямоугольном треугольнике любой из двух катетов меньше гипотенузы. Поэтому $\sin \alpha < 1$ и $\cos \alpha < 1$ для любого острого угла α. Поскольку один катет может быть и больше, и меньше другого катета, и быть равный ему, то $\operatorname{tg} \alpha$ может быть и больше 1, и меньше 1, и быть равным 1.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. Кроме косинуса, синуса и тангенса угла α есть ещё одно соотношение сторон прямоугольного треугольника, имеющее особое название – *котангенс*. Это отношение катета b, прилежащего к углу α, к противолежащему катету a (рис. 444). Обозначается: $\operatorname{ctg} \alpha$. Следовательно, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$.

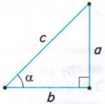


Рис. 444

2. Индийский математик Ариабхата (V в.) отношение противолежащего катета к гипотенузе назвал *ardhajya* — ардхажиа (полухорда), в переводе — тетива лука. В XII в. европейские учёные перевели это название на латинский язык как *sinus* — синус. Слово *cosinus* — косинус состоит из двух слов: *complementi* — дополнение и *sinus* — синус, то есть дополнительный синус. Почему — узнаете из § 23 этой главы. Арабские астрономы-математики аль-Баттани (858 — 929 гг.) и Абу-ль-Вефа (940 — 998 гг.) определили понятие тангенса, измеряя угловую высоту Солнца по тени от жерди. Поэтому отношение катета, противолежащего углу α, к прилежащему катету они называли словом «тень». Позднее, в XVI в., это отношение получило название «тангенс», что в переводе с латинского означает «касательная». Знаки «sin», «cos», «tg» ввёл Леонард Эйлер в XVIII веке.

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Дайте определение синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.
2. Объясните, почему синус, косинус и тангенс острого угла зависят от градусной меры угла и не зависят от размеров треугольника.
3. Докажите, что $\sin\alpha < 1$, $\cos\alpha < 1$ для любого острого угла α.
4. Объясните, как построить угол по заданному значению его синуса.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

888'. 1) По данным на рисунке 445 укажите: катет, прилежащий к углу α; катет, противолежащий углу α

2) Прочитайте отношения сторон $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ и $\frac{a}{b}$, используя слова «противолежащий катет», «прилежащий катет», «гипотенуза».

3) Поставьте перед каждым из отношений $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ и $\frac{a}{b}$ обозначение «$\cos\alpha$», «$\mathrm{tg}\,\alpha$» или «$\sin\alpha$».

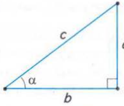


Рис. 445

889'. Укажите правильный ответ (рис. 446).

1) $\mathrm{tg}\,\beta$ равен:

а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{12}{5}$; в) $\frac{5}{13}$;

2) $\cos\beta$ равен:

а) $\frac{12}{13}$; б) $\frac{13}{5}$; в) $\frac{5}{13}$;

3) $\sin\beta$ равен:

а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{13}{5}$.

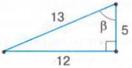


Рис. 446

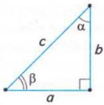


Рис. 447

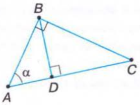


Рис. 448

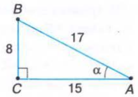


Рис. 449

890'. Пользуясь рисунком 447, укажите правильный ответ:

1) для угла α отношением $\frac{a}{c}$ является: а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$;

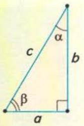
2) для угла β отношением $\frac{a}{c}$ является: а) $\sin\beta$; б) $\cos\beta$; в) $\operatorname{tg}\beta$;

3) для угла β отношением $\frac{b}{a}$ является: а) $\sin\beta$; б) $\cos\beta$; в) $\operatorname{tg}\beta$.

891'. На рисунке 448 $\angle ABC = \angle ADB = 90°$. Запишите отношения, которым равны $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, через стороны треугольников ABC и BDA.

892'. Начертите в тетради таблицу 32. Поставьте «+» в той клеточке, где отношение сторон треугольника соответствует его обозначению.

Таблица 32

Соотношение		Обозначение					
		$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\beta$
	$\frac{a}{b}$						
	$\frac{b}{a}$						
	$\frac{b}{c}$						
	$\frac{a}{c}$						

893'. По данным, указанным на рисунке 449, найдите синус, косинус и тангенс угла α с точностью до 0,1.

894'. Начертите произвольный острый угол C. На одной из его сторон обозначьте точки A и A_1 и проведите перпендикуляры AB и A_1B_1 к другой стороне угла. Измерьте в миллиметрах катеты AB и A_1B_1 и гипотенузы AC и A_1C образованных прямоугольных треугольников ABC и A_1B_1C. Найдите значения $\sin C$ для ΔABC и ΔA_1B_1C. Сравните эти значения и сделайте вывод.

895°. Постройте произвольный прямоугольный треугольник ABC, где $\angle C = 90°$. На катете AC обозначьте произвольную точку D и соедините точки D и B. Измерьте катеты прямоугольных треугольников ABC и DBC и найдите тангенсы $\angle ABC$ и $\angle DBC$. Сравните:
1) углы ABC и DBC; 2) значения тангенсов этих углов.
Сделайте вывод.

896°. Начертите при помощи транспортира углы: 1) 35°; 2) 40°; 3) 75°. Найдите синус, косинус и тангенс этих углов.

897°. Могут ли синус угла, косинус угла быть равными:
1) 1; 2) 0,9; 3) 2?

898°. Может ли тангенс угла быть равен:
1) 1; 2) 4; 3) 0,8?

899. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 18$ мм, $BC = 24$ мм. Найдите: 1) $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$; 2) $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$.

900. В прямоугольном треугольнике катеты равны 24 см и 7 см. Найдите:
1) косинус острого угла, лежащий против меньшего катета;
2) синус острого угла, лежащий против большего катета;
3) тангенс острого угла, лежащий против большего катета.

901. Из точки A к прямой провели наклонную $AB = 15$ см и перпендикуляр $AC = 9$ см. Найдите синус и косинус:
1) угла A; 2) угла B.

902. Постройте угол, синус которого равен:
1) $\frac{3}{5}$; 2) 0,5.

903. Постройте угол, косинус которого равен:
1) $\frac{5}{6}$; 2) 0,6.

904. Постройте угол, тангенс которого равен:
1) 2; 2) $\frac{4}{7}$.

905. Постройте прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), в котором:
1) $\sin A = 0{,}4$; 2) $\cos B = \frac{2}{7}$; 3) $\operatorname{tg} A = \frac{1}{3}$.

906. В равнобедренном треугольнике основание равно 12 см, а медиана, проведённая к основанию, — 8 см. Найдите синус, косинус и тангенс угла:
1) при основании треугольника;
2) между медианой и боковой стороной.

907*. Основания равнобедренной трапеции равны 9 см и 21 см, а боковая сторона — 10 см. Найдите синус и косинус угла:
1) при большем основании;
2) между диагональю и высотой.

908*. В равнобедренном треугольнике основание равно 6 см, а боковая сторона — 5 см. Найдите синус, косинус и тангенс угла при вершине треугольника.

909*. Стороны треугольника ABC равны 13 см, 14 см, 15 см.
Найдите с точностью до 0,01: 1) $\sin A$; 2) $\cos B$; 3) $\operatorname{tg} C$.

910*. Постройте равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, в котором:

1) $\sin A = 0{,}8$; 2) $\cos C = \frac{1}{3}$; 3) $\operatorname{tg} A = 0{,}6$.

911*. В прямоугольном треугольнике катет равен 8 см, а синус противолежащего угла — 0,8. Найдите гипотенузу и другой катет треугольника.

912*. Найдите неизвестные стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$), если:

1) $AC = 6$ см, $\sin B = 0{,}6$; 2) $BC = 36$ см, $\cos A = \frac{5}{13}$; 3) $AB = 20$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$.

913*. Постройте прямоугольный треугольник ABC, если:
1) гипотенуза $c = 8$ см, $\sin A = 0{,}75$;
2) катет $b = 20$ мм, $\cos A = 0{,}4$;
3) катет $a = 5$ см, $\operatorname{tg} A = 1{,}25$.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

914. В строительстве часто вместо градусной меры угла используется его тангенс. Например, при сооружении здания мастер вместо градусной меры угла α уклона крыши (рис. 450) учитывает соотношение длин сторон BC и AC, то есть $\operatorname{tg} \alpha$.
Пусть нужно построить крышу, длина стропила AD которой равна 20 м, а тангенс угла уклона крыши — 0,8. Какой должна быть длина стропила BC?

Рис. 450

§22. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Вы знаете, что $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$ (рис. 451).

Отсюда: 1) $a=c\sin\alpha$, 2) $b=c\cos\alpha$, 3) $a=b\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Эти равенства формулируются следующим образом.

1. Катет, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на $\sin\alpha$.

2. Катет, прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы на $\cos\alpha$.

3. Катет, противолежащий углу α, равен произведению другого катета на $\mathrm{tg}\,\alpha$.

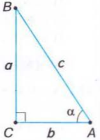


Рис. 451

Из равенств 1) и 2) можно найти гипотенузу c прямоугольного треугольника по катету a или b и острому углу α: 4) $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, 5) $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$.

Из равенства 3) можно найти катет b по прилежащему к нему углу α и катету a: 6) $b = \dfrac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha}$.

Для того чтобы найти по одной из сторон прямоугольного треугольника и острому углу две другие его стороны, используйте равенства 1) – 6) (табл. 33).

Таблица 33

1	$a = c \cdot \sin\alpha$	c, α, $a - ?$	4	a, α, $c - ?$	$c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$
2	$b = c \cdot \cos\alpha$	c, α, $b - ?$	5	b, α, $c - ?$	$c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$
3	$a = b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$	b, α, $a - ?$	6	a, α, $b - ?$	$b = \dfrac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha}$

Задача. Найдите основание равнобедренного треугольника с боковой стороной a и углом α при основании.

Решение. Пусть ABC – равнобедренный треугольник с боковой стороной $BC = a$ и $\angle C = \alpha$ (рис. 452). Проведём высоту BD. В прямоугольном треугольнике DBC катет DC, прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы a на $\cos \alpha$: $DC = a \cos \alpha$.
Поскольку высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, является медианой, то $DC = AD$.
Тогда основание $AC = 2 \cdot DC = 2a \cos \alpha$.

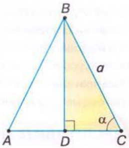


Рис. 452

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

В этой главе вы ознакомились с новыми приёмами вычисления длин сторон и градусных мер углов прямоугольного треугольника. Может возникнуть вопрос: *Какова необходимость использования этих приёмов?*

Вы знаете, что в древности расстояния и углы сначала измеряли *непосредственно* инструментами. Например, транспортиром пользовались вавилоняне ещё за 2 000 лет до н. э.

Но на практике непосредственно измерять расстояния и углы не всегда возможно. Как вычислить расстояние между двумя пунктами, которые разделяет препятствие (река, озеро, лес), расстояние до Солнца, Луны, как измерить высоту дерева, горы, как найти угол подъёма дороги либо угол при спуске с горы? Поэтому были открыты приёмы *опосредствованного* измерения расстояний и углов. При этом использовали равные либо подобные треугольники и геометрические построения. Строили на местности вспомогательный треугольник и измеряли необходимые его элементы.

Итак, вы знаете, как определить расстояние между пунктами A и B, разделёнными препятствием (рис. 453). Для этого строим $\Delta COD = \Delta AOB$ и вместо искомого расстояния AB измеряем равное ему расстояние CD.

Но при использовании этих приёмов получали недостаточно точные результаты, особенно при измерении значительных расстояний на местности. Кроме того, без угломерных инструментов нельзя найти градусные меры углов по длинам тех или других отрезков.

Поэтому возникла необходимость в таких приёмах, когда непосредственные измерения сводились к минимуму, а результаты получали преимущественно вычислением элементов прямоугольного треугольника. В основе таких приёмов лежит использование $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$.

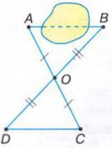


Рис. 453

Накопление вычислительных приёмов решения задач обусловило создание нового раздела математики, который в XVI в. назвали *тригонометрией*. Слово «тригонометрия» происходит от греческих слов *trigonon* — треугольник и *metreo* — измеряю. Греческих математиков Гиппарха (II в. до н. э.) и Птолемея (II в.) считают первыми, кто использовал тригонометрические приёмы для решения разных задач. В дальнейшем их усовершенствовали индийский математик Брамагупта (VI в.), узбекские математики аль-Каши и Улугбек (XII в.). В работах академика Леонарда Эйлера (XVIII в.) тригонометрия приобретает тот вид, который в основном имеет и в наше время.

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Сформулируйте равенства $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$, $a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где a, b — катеты прямоугольного треугольника, c — гипотенуза.
2. Объясните, как найти гипотенузу прямоугольного треугольника по катету и острому углу.
3. Как найти катет прямоугольного треугольника по углу и другому катету, прилежащим к нему?

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

915'. Какие из перечисленных утверждений справедливы?
Катет прямоугольного треугольника равен произведению:
1) тангенса прилежащего к нему угла и гипотенузы;
2) тангенса противолежащего ему угла и другого катета;
3) гипотенузы и синуса прилежащего угла;
4) гипотенузы и косинуса прилежащего угла;
5) гипотенузы и синуса противолежащего угла.

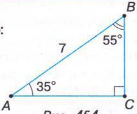


Рис. 454

916'. Значение какого выражения равно длине катета BC (рис. 454):
1) $7 \cdot \sin 55°$; 2) $7 \cdot \cos 55°$; 3) $7 \cdot \mathrm{tg}\,35°$?

917'. Значение какого выражения равно длине катета AC (рис. 455):
1) $11 \cdot \mathrm{tg}\,65°$; 2) $11 \cdot \cos 25°$; 3) $11 \cdot \mathrm{tg}\,25°$?

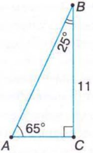


Рис. 455

918'. Значение какого выражения равно длине гипотенузы AB (рис. 455):
1) $11 \cdot \cos 25°$; 2) $\dfrac{11}{\sin 65°}$; 3) $11 \cdot \mathrm{tg}\,25°$?

919'. По данным на рисунках 456 — 461 найдите x.

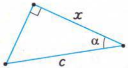


Рис. 456

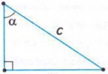


Рис. 457

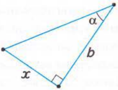


Рис. 458

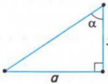


Рис. 459

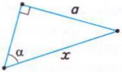


Рис. 460

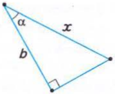
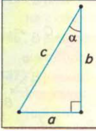


Рис. 461

920°. Начертите в тетради таблицу 34. Поставьте «+» в той клеточке, где значение выражения равно длине стороны прямоугольного треугольника.

Таблица 34

Сторона		Выражение				
		$c \cdot \cos\alpha$	$c \cdot \sin\alpha$	$b \cdot \operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{a}{\sin\alpha}$	$\dfrac{b}{\cos\alpha}$
	a					
	b					
	c					

921°. Найдите катет a прямоугольного треугольника, если синус угла A, противолежащего ему, и гипотенуза c равны:

1) $c = 12$ см, $\sin A = \dfrac{1}{4}$; 2) $c = 20$ см, $\sin A = \dfrac{2}{5}$; 3) $c = 18$ см, $\sin A = \dfrac{2}{3}$.

922°. Найдите катет b прямоугольного треугольника, если косинус угла A, прилежащего к нему, и гипотенуза c равны:

1) $c = 6$ см, $\cos A = \dfrac{1}{3}$; 2) $c = 14$ см, $\cos A = \dfrac{2}{7}$; 3) $c = 8$ см, $\cos A = \dfrac{3}{4}$.

923°. Найдите гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$), если:

1) $BC = 16$ см, $\cos B = \dfrac{1}{8}$; 2) $BC = 12$ см, $\cos B = \dfrac{3}{4}$;
3) $BC = 5$ см, $\cos B = 0{,}5$.

924°. Найдите гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$), если:

1) $BC = 24$ см, $\sin A = \dfrac{3}{8}$; 2) $BC = 10$ см, $\sin A = \dfrac{1}{5}$; 3) $BC = 7$ см, $\sin A = 0{,}7$.

925°. Найдите катет BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$), если:
1) $AC = 8$ см, $\operatorname{tg} A = 0{,}6$; 2) $AC = 12$ см, $\operatorname{tg} A = 4$; 3) $AC = 11$ см, $\operatorname{tg} A = 1{,}5$.

926°. Найдите неизвестные стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$), если: 1) $AB = c$, $\angle B = \beta$; 2) $BC = a$, $\angle A = \alpha$; 3) $AC = b$, $\angle B = \beta$.

927. В прямоугольном треугольнике катет равен b, а прилежащий к нему угол — α. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.

928. Острый угол прямоугольного треугольника равен α, а биссектриса этого угла — l. Найдите катет, прилежащий к углу α.

929. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна b, а угол при основании — α.

Найдите: 1) основание треугольника; 2) высоту, проведённую к основанию.

930. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна h, а угол при основании — α.

Найдите: 1) боковую сторону треугольника; 2) основание треугольника.

931. Основание равнобедренного треугольника равно a, а угол между боковыми сторонами — α. Найдите:

1) высоту, проведённую к основанию; 2) боковую сторону треугольника.

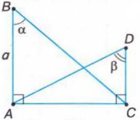


Рис. 462

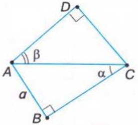


Рис. 463

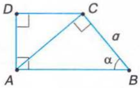


Рис. 464

932. По данным на рисунках 462 — 464 найдите отрезки AD и CD.

933. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если медиана, проведённая к гипотенузе, равна m, а острый угол треугольника — α.

934. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если его катет равен b, а острый угол — α.

935. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α, а радиус вписанной окружности — r.

Найдите: 1) основание треугольника; 2) боковую сторону треугольника.

936. Высота равнобедренного треугольника равна h, а угол при основании — α. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

937. Сторона AD прямоугольника $ABCD$ равна a и образует с диагональю AC угол α. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника.

938. Острый угол между диагоналями прямоугольника равен α, а сторона, лежащая против этого угла, — a.

Найдите: 1) другую сторону прямоугольника; 2) диагональ прямоугольника.

939. Найдите стороны треугольника, если радиус вписанной окружности равен r, а углы треугольника равны α, β, γ.

940. Из точки, расположенной на расстоянии m от прямой, проведены две наклонные, образующие с прямой углы α и β ($\alpha < \beta$). Найдите: 1) наклонные; 2) расстояние между основаниями наклонных.

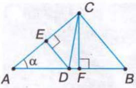


Рис. 465

941. Из точки к прямой проведены две наклонные. Одна из них равна a, а её проекция — b. Найдите длину другой наклонной, если она образует с прямой угол β.

942*. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$), CF — высота, CD — медиана, $DE \perp AC$ (рис. 465).
Выразите все отрезки, изображённые на рисунке, через катет $AC = a$ и $\angle A = \alpha$.

943*. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если его катет равен b, а угол, прилежащий к этому катету, — α.

944*. Большая диагональ ромба равна d, а его острый угол — α.
Найдите: 1) сторону ромба; 2) меньшую диагональ ромба.

945*. В равнобедренной трапеции меньшее основание равно b, а боковая сторона c образует с высотой угол α. Найдите большее основание трапеции.

946*. В равнобедренной трапеции большее основание равно a, а боковая сторона c образует с высотой угол α. Найдите меньшее основание трапеции.

947*. В равнобедренной трапеции высота h образует с боковой стороной угол α, а меньшее основание равно b.
Найдите: 1) боковую сторону трапеции; 2) большее основание трапеции.

948*. В остроугольном треугольнике ABC $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$. Найдите проекции сторон AB и BC на сторону AC.

949*. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B$.

950*. Докажите, что площадь остроугольного треугольника ABC вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C$.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

951*. Тень от фабричной трубы, высота которой 40 м, составляет 50 м. Выразите в градусах высоту Солнца над горизонтом (рис. 466) по следующему плану:
1) найдите тангенс угла α;
2) по искомому значению тангенса постройте $\angle A = \alpha$;
3) измерьте транспортиром $\angle A$.

Рис. 466

§23. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$

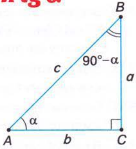


Рис. 467

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, тогда $\angle B = 90^\circ - \alpha$ (рис. 467). Из определения синуса и косинуса следует:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c};$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}; \qquad \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}.$$

Сравнивая эти два столбца, находим:
$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

Как видим, между синусом и косинусом углов α и $90^\circ - \alpha$, которые дополняют друг друга до 90°, существует зависимость: синус одного из этих углов равен косинусу другого.

Например: $\sin 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$;
$\sin 60^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ$.

Найдём значения синуса, косинуса и тангенса для углов 45°, 30°, 60°.

1) Для угла 45°.

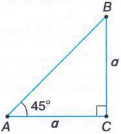


Рис. 468

Пусть ABC – прямоугольный треугольник с гипотенузой C и $\angle A = 45^\circ$ (рис. 468). Тогда $\angle B = 45^\circ$. Следовательно, ΔABC – равнобедренный. Пусть $AC = BC = a$. Согласно теореме Пифагора,

$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Тогда $\sin 45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \ \mathrm{tg}\,45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

2) Для углов 30° и 60°.

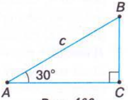


Рис. 469

Пусть ABC – прямоугольный треугольник с гипотенузой c и $\angle A = 30^\circ$ (рис. 469). Найдём катеты AC и BC.

$BC = \dfrac{c}{2}$ как катет, лежащий против угла 30°.

Согласно теореме Пифагора, $AC = \sqrt{c^2 - \left(\dfrac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3c^2}{4}} = \dfrac{c\sqrt{3}}{2}$.

Тогда $\sin 30^\circ = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\frac{c}{2}}{c} = \dfrac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\frac{c}{2}}{\frac{c\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$.

Если в прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$ (рис. 469),

то $\angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Тогда $\operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3}$.

Составим таблицу 35 значений синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45°, 60°.

Таблица 35

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Из таблицы видно, что **при увеличении угла синус и тангенс острого угла возрастают, а косинус – уменьшается.** При уменьшении угла синус и тангенс острого угла уменьшаются, а косинус – увеличивается.

Задача. Сторона ромба равна 6 см, а один из его углов — 60°. Найдите высоту ромба.

Решение. Пусть $ABCD$ – ромб (рис. 470), в котором $AB = 6$ см, $\angle A = 60^\circ$.
Проведём высоту BM.
Из прямоугольного треугольника ABM:

$BM = AB \cdot \sin A = 6 \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (см).

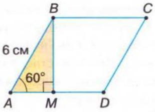


Рис. 470

? Как вычислить значения синусов, косинусов и тангенсов углов, отличных от 30°, 45°, 60°?

При помощи инженерных калькуляторов (или программы «калькулятор» компьютера) либо специальных таблиц можно решить две задачи:

1) для заданного угла α найти $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$;
2) по заданному значению $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ найти угол α.

Если вы используете калькулятор, а угол указан в градусах и минутах, то минуты переведите в десятые доли градуса (разделите их на 60). Например, для угла 55°42′ получите 55,7°. Если, например, для $\cos\alpha \approx 0{,}8796$ нашли $\alpha \approx 28{,}40585°$, то доли градуса переведите в минуты (умножьте дробную часть на 60). Округлив, получите: $\alpha \approx 28°24'$.

Значение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ находим по таблицам.

Таблица синусов и косинусов (см. приложение 1) состоит из четырёх столбцов. В первом столбце слева указаны градусы от 0° до 45°, а в четвёртом – от 90° до 45°. Над вторым и третьим столбцами указаны названия «синусы» и «косинусы», а в нижней части этих столбцов – «косинусы» и «синусы».

Верхние названия «синусы» и «косинусы» отображают значения углов, которые меньше 45°, а нижние – больше 45°. Например, по таблице находим: $\sin 34° \approx 0{,}559$, $\cos 67° \approx 0{,}391$, $\sin 85° \approx 0{,}996$ и т. д. По таблице можно найти угол α по заданному значению $\sin\alpha$, $\cos\alpha$. Например, нужно найти угол α, если $\sin\alpha \approx 0{,}615$. В столбцах синусов находим число, приближённое к 0,615. Таким числом является 0,616. Следовательно, $\alpha \approx 38°$.

Таблица тангенсов (см. приложение 2) состоит из двух столбцов: в одном указаны углы от 0° до 89°, в другом – значения тангенсов этих углов.

Например, $\operatorname{tg} 19° \approx 0{,}344$. Если $\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}869$, то $\alpha \approx 41°$.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

1. Вы уже знаете, что каждой градусной мере угла α прямоугольного треугольника соответствует единственное значение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому синус, косинус и тангенс угла α являются функциями данного угла. Эти функции называются *тригонометрическими функциями*, аргумент которых изменяется от 0° до 90°.

2. Уточним происхождение слова «косинус». Именно равенство $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ явилось основой образования латинского слова *cosinus* – дополнительный синус, то есть синус угла, дополняющий заданный до 90°.

Птолемей

3. Первые таблицы синусов углов от 0° до 90° составил греческий математик Гиппарх (II в. до н. э.). Эти таблицы не сохранились. Нам известны только тригонометрические таблицы, помещённые в работе «Альмагест» александрийского учёного Клавдия Птолемея (II в.).

Также сохранились таблицы синусов и косинусов индийского учёного Ариабхаты (V в.), таблицы тангенсов арабских учёных аль-Баттани и Абу-ль-Вефа (X в.).

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Сформулируйте зависимость между синусом и косинусом углов, дополняющих друг друга до 90°.
2. Назовите значения синуса, косинуса и тангенса углов 30°, 45°, 60°.
3. Объясните, как найти $\sin 36°$; $\cos 64°$; $\operatorname{tg} 57°$.
4. Объясните, как найти угол α, если: $\sin\alpha = 0{,}655$; $\cos\alpha = 0{,}818$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}467$.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

952'. Найдите угол A прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$), если угол B равен: 1) $30°$; 2) $70°$; 3) $85°$.

953'. Пользуясь формулами $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$, $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$, замените:
1) косинусы заданных углов на синусы: $\cos 20°$, $\cos 35°$, $\cos 50°$, $\cos 74°$;
2) синусы заданных углов на косинусы: $\sin 10°$, $\sin 65°$, $\sin 85°$, $\sin 25°$.

954'. Найдите значение выражения: 1) $2\sin 30°$; 2) $4\cos 60°$; 3) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,30°$.

955'. По таблицам (приложения 1 и 2) найдите:
1) $\sin 20°$, $\sin 75°$, $\sin 33°$, $\sin 85°$, $\sin 53°$, $\sin 2°$;
2) $\cos 6°$, $\cos 67°$, $\cos 51°$, $\cos 24°$, $\cos 62°$, $\cos 13°$;
3) $\mathrm{tg}\,65°$, $\mathrm{tg}\,1°$, $\mathrm{tg}\,73°$, $\mathrm{tg}\,19°$, $\mathrm{tg}\,10°$, $\mathrm{tg}\,16°$.

956'. По таблицам (приложения 1 и 2) найдите угол α, если:
1) $\sin\alpha = 0{,}999$; $\sin\alpha = 0{,}017$; $\sin\alpha = 0{,}574$; $\sin\alpha = 0{,}588$;
2) $\cos\alpha = 0{,}766$; $\cos\alpha = 0{,}966$; $\cos\alpha = 0{,}225$; $\cos\alpha = 0{,}731$;
3) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}900$; $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}344$; $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}781$; $\cos\alpha = 0{,}839$.

957°. Упростите выражение:
1) $2\cos(90° - \alpha) - \sin\alpha$; 2) $\sin\alpha + \cos(90° - \alpha)$;
3) $3\cos\alpha - 2\sin(90° - \alpha)$.

958°. По данным на рисунках 471 — 476 найдите x.

Рис. 471

Рис. 472

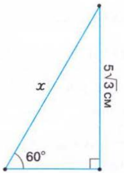


Рис. 473

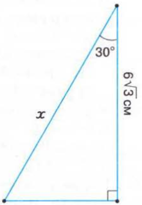


Рис. 474

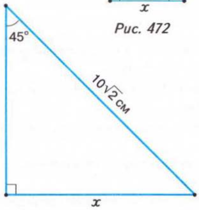


Рис. 475

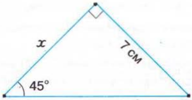


Рис. 476

959°. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) угол A равен 30°. Найдите:
1) BC, если $AB = 4$ см; 2) AC, если $BC = 2\sqrt{3}$ см; 3) AB, если $AC = 4\sqrt{3}$ см.

960°. В прямоугольном треугольнике MNK ($\angle K = 90°$) угол M равен 60°. Найдите:
1) MN, если $MK = 3$ см; 2) NK, если $MK = 2\sqrt{3}$ см; 3) MK, если $NK = 7\sqrt{3}$ см.

961°. Угол A прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) равен 45°. Найдите:
1) AB, если $AC = \sqrt{2}$ см; 2) BC, если $AB = 5\sqrt{2}$ см; 3) AC, если $BC = 9$ см.

962°. Из точки A на прямую проведена наклонная $AB = 10$ см, образующая с прямой угол 60°.
Найдите: 1) проекцию наклонной; 2) расстояние от точки A до прямой.

963°. Какова градусная мера угла α, если:
1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$?

964°. Найдите значение выражения:
1) $\operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 60°$; 2) $8\sin 30° \cdot \cos 60°$;
3) $2\sin 30° + \sqrt{3}\cos 30°$; 4) $6\cos 60° - \sqrt{3}\operatorname{tg} 30°$.

965°. Запишите в порядке возрастания:
1) sin 15°, sin 46°, sin 75°, sin 10°, sin 11°;
2) cos 50°, cos 34°, cos 20°, cos 72°, cos 25°;
3) tg 37°, tg 87°, tg 66°, tg 17°, tg 48°.

966°. Пользуясь калькулятором, найдите:
1) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$,
если α равен: 43°6'; 22°25'; 35°48'; 58°20'; 64°13'; 39°21'; 54°12'; 83°18';
2) угол α, если:
$\sin\alpha$ равен: 0,642; 0,771; 0,910; 0,640; 0,712; 0,750; 0,515; 0,892;
$\cos\alpha$ равен: 0,342; 0,962; 0,087; 0,914; 0,809; 0,602; 0,915; 0,839;
$\operatorname{tg}\alpha$ равен: 0,178; 0,269; 0,035; 0,447; 0,532; 0,934; 0,781; 0,578.

967. Упростите выражение:
1) $1 - \cos(90° - \alpha) + \sin\alpha$;
2) $2\sin\alpha + \cos(90° - \alpha) + \sin(90° - \alpha) - \cos\alpha$;
3) $(1 - \sin(90° - \alpha))(1 + \cos\alpha)$.

968. В прямоугольном треугольнике катет равен 8 см, а противолежащий ему угол — 60°. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.

969. Катет прямоугольного треугольника равен $9\sqrt{3}$ см, а прилежащий к нему угол — 60°. Найдите биссектрису этого угла.

970. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, а угол при основании — 30°. Найдите:
1) основание треугольника; 2) высоту, проведённую к основанию;
3) высоту, проведённую к боковой стороне.

971. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если медиана, проведённая к гипотенузе, равна 8 см, а угол треугольника: 1) 30°; 2) 45°.

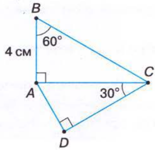


Рис. 477

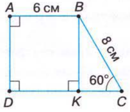


Рис. 478

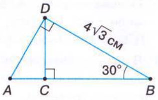


Рис. 479

972. По данным на рисунках 477 — 479 найдите отрезки AD и CD.

973. Сторона ромба равна 4 см, а один из его углов — 60°. Найдите диагонали ромба.

974. Бо́льшая диагональ ромба равна $12\sqrt{3}$ см, а один из его углов — 120°. Найдите сторону и меньшую диагональ ромба.

975. Диагональ параллелограмма равна 12 см и перпендикулярна к его стороне. Найдите стороны параллелограмма, если один из углов равен:
1) 30°; 2) 45°.

976. Найдите радиус r окружности, вписанной в равносторонний треугольник, и радиус R окружности, описанной около этого треугольника, если сторона треугольника равна a.

977. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб, если его сторона равна 16 см, а острый угол: 1) 30°; 2) 60°.

978. Найдите соотношение диаметров окружностей -- вписанной в квадрат и описанной около этого квадрата.

979. Из точки, расположенной на расстоянии 5 см от прямой, проведены две наклонные, образующие с прямой углы 45° и 30°. Найдите:
1) наклонные; 2) проекции наклонных на прямую.

980. Из точки к прямой проведены две наклонные, образующие с этой прямой углы по 45°. Найдите длину наклонных, если расстояние между их основаниями равно 10 см.

981. Найдите значение выражения:
1) $2\cos 60° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 60°$; 2) $3\operatorname{tg}^2 60° - 4\cos^2 30°$;
3) $\cos 30° \cdot \operatorname{tg} 30° + \sin 60° \cdot \operatorname{tg} 60°$.

982. Определите знак разности:
1) $\operatorname{tg} 64° - \operatorname{tg} 58°$; 2) $\sin 21° - \sin 36°$; 3) $\cos 51° - \cos 41°$.

983*. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 1 см. Найдите катеты треугольника, если его острый угол равен: 1) 30°; 2) 45°.

984*. Сторона треугольника равна 1 см, а прилежащие к ней углы — 45° и 60°. Найдите две другие стороны треугольника.

985*. Около окружности радиуса R описан равнобедренный треугольник с углом $120°$. Найдите стороны треугольника.

986*. Основания равнобедренной трапеции равны 6 см и 10 см, а угол при основании — $60°$. Найдите:

1) боковую сторону трапеции; 2) высоту трапеции; 3) диагональ трапеции.

987*. В прямоугольной трапеции большая боковая сторона равна 16 см. Меньшая диагональ является биссектрисой тупого угла, равного $120°$. Найдите площадь трапеции.

988*. Периметр трапеции — 144 см, а углы при большем основании равны по $60°$. Диагональ трапеции делит среднюю линию на отрезки, один из которых на 16 см больше другого. Найдите основания трапеции.

989*. Диагональ равнобедренной трапеции делит среднюю линию в отношении $5 : 9$, а углы при меньшем основании равны по $120°$. Найдите боковые стороны трапеции, если её периметр равен 220 см.

990*. Две высоты параллелограмма, проведённые из вершины тупого угла, равны 12 см и 18 см, а угол между ними — $30°$. Найдите стороны параллелограмма.

991*. Две высоты параллелограмма, проведённые из вершины острого угла, равны 5 см и 12 см, а угол между ними — $150°$. Найдите стороны параллелограмма.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

992. Ширина верхней части насыпи шоссе, поперечный разрез которого — равнобедренная трапеция, равна 60 м (рис. 480). Какова ширина основания насыпи, если высота составляет 10 м, а угол уклона — $60°$?

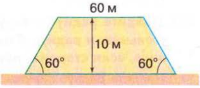


Рис. 480

993. Наблюдатель, стоящий на высоте 50 м, видит автомобиль под углом $30°$ к горизонту (рис. 481). Каково расстояние от наблюдателя до автомобиля?

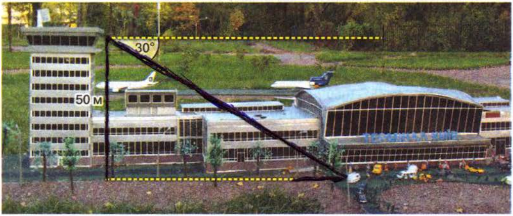


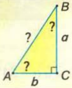
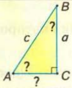
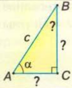
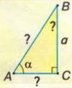
Рис. 481

§24. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Решить прямоугольный треугольник – это означает по заданным двум сторонам либо стороне и острому углу найти другие его стороны и острые углы.

Возможны следующие виды задач, в которых требуется решить прямоугольный треугольник по: 1) катетам; 2) гипотенузе и катету; 3) гипотенузе и острому углу; 4) катету и острому углу. Алгоритмы решения этих четырёх видов задач изложены в таблице 36.

Таблица 36

Условие задачи		Алгоритм решения
1 	Дано: $AC=a$, $BC=b$. Найти: $AB, \angle A, \angle B$	1) $AB=\sqrt{a^2+b^2}$, 2) $\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}$, 3) $\angle B=90^\circ-\angle A$
2 	Дано: $AB=c$, $BC=a$. Найти: $AC, \angle A, \angle B$	1) $AC=\sqrt{c^2-a^2}$, 2) $\sin A=\frac{a}{c}$, 3) $\angle B=90^\circ-\angle A$
3 	Дано: $AB=c$, $\angle A=\alpha$. Найти: $AC, BC, \angle B$	1) $\angle B=90^\circ-\alpha$, 2) $AC=c\cdot\cos\alpha$, 3) $BC=c\cdot\sin\alpha$
4 	Дано: $BC=a$, $\angle A=\alpha$. Найти: $AB, AC, \angle B$	1) $\angle B=90^\circ-\alpha$, 2) $AB=\frac{a}{\sin\alpha}$, 3) $AC=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$

Задача. Решите прямоугольный треугольник по гипотенузе $c = 16$ и углу $\alpha = 76°21'$ (рис. 482).

Решение. Это задача третьего вида. Алгоритм её решения указан в таблице 38.

1) $\angle B = 90° - \alpha = 90° - 76°21' = 13°39'$;

2) $AC = c \cdot \cos\alpha = 16 \cdot \cos 76°21' \approx 16 \cdot 0{,}2360 \approx 3{,}78$;

3) $BC = c \cdot \sin\alpha = 16 \cdot \sin 76°21' \approx 16 \cdot 0{,}9816 \approx 15{,}55$.

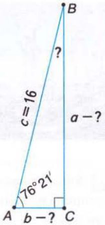


Рис. 482

Решение многих прикладных задач основано на решении прямоугольных треугольников. Рассмотрим некоторые виды прикладных задач.

1. Задачи на нахождение высоты предмета, основание которого доступно.

Задача. Найдите высоту дерева (рис. 483).

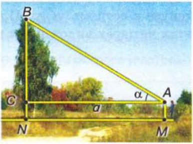


Рис. 483

Решение. На некотором расстоянии $MN = a$ от дерева устанавливаем угломерный прибор AM (например, теодолит) и находим угол α между горизонтальным направлением AC и направлением на верхнюю точку B дерева. Из прямоугольного треугольника ABC получим: $BC = a \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$. С учётом высоты угломерного прибора $AM = h$ имеем формулу для вычисления высоты дерева: $BN = a \cdot \mathrm{tg}\,\alpha + h$.

Пусть результаты измерения следующие: $a \approx 40$ м, $h = 1{,}5$ м и $\alpha \approx 31°$.
Тогда $BN \approx 1{,}5 + 40 \cdot \mathrm{tg}\,31° \approx 1{,}5 + 40 \cdot 0{,}601 \approx 25{,}5$ (м).

2. Задачи на нахождение высоты предмета, основание которого недоступно.

Задача. Найдите высоту башни, которая отделена от вас рекой (рис. 484).

Решение. На горизонтальной прямой, проходящей через основание башни (рис. 484), обозначим две точки M и N, измерим отрезок $MN = a$ и углы α и β. Из прямоугольных треугольников ADC и BDC

получим: $AC = \dfrac{DC}{\mathrm{tg}\alpha}$, $BC = \dfrac{DC}{\mathrm{tg}\beta}$.

Почленно вычитаем полученные равенства:

$$AC - BC = \frac{DC}{\mathrm{tg}\alpha} - \frac{DC}{\mathrm{tg}\beta}.$$

Отсюда $AB = DC\dfrac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$.

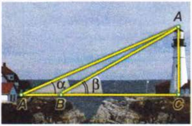


Рис. 484

Следовательно, $DC = \dfrac{a \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$.

Прибавив к DC высоту прибора $AM = h$, которым измеряли углы, получим формулу для вычисления высоты башни: $DK = \dfrac{a \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha} + h$.

Пусть результаты измерения следующие: $a \approx 10$ м, $h = 1{,}5$ м и $\alpha = 35°$, $\beta = 40°$.

Тогда $DK = \dfrac{10 \cdot \operatorname{tg}35° \cdot \operatorname{tg}40°}{\operatorname{tg}40° - \operatorname{tg}35°} + 1{,}5 \approx \dfrac{10 \cdot 0{,}7002 \cdot 0{,}8391}{0{,}8391 - 0{,}7002} + 1{,}5 \approx 43{,}8$ (м).

3. Задачи на нахождение расстояния между двумя пунктами, которые разделяет препятствие.

Задача. Найдите расстояние между пунктами A и B, разделёнными рекой (рис. 485).

Решение. Провешиваем прямую $AD \perp AB$ и отмечаем на ней точку C. Измеряем расстояние $AC = a$ и угол α. Из прямоугольного треугольника ABC получим формулу $AB = a \cdot \operatorname{tg}\alpha$ для определения расстояния между пунктами A и B.

Пусть результаты измерения следующие:

$a = 50$ м, $\alpha = 72°$.

Тогда $AB = 50 \cdot \operatorname{tg} 72° \approx 50 \cdot 3{,}0777 \approx 154$ (м).

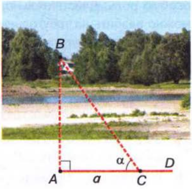


Рис. 485

4. Задачи на нахождение углов (угла подъёма дороги; угла уклона; угла, под которым виден некоторый предмет, и т. д.).

Задача. Найдите угол подъёма шоссе, если на расстоянии 200 м высота подъёма составляет 8 м.

Решение. На рисунке 486 угол α — это угол подъёма дороги, AC — горизонтальная прямая. Проведём $BC \perp AC$, тогда BC — высота подъёма дороги.

По условию, $AB = 200$ м, $BC = 8$ м. Угол α найдём из прямоугольного треугольника ABC: $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{8}{200} = 0{,}04$.

Тогда $\alpha \approx 2°18'$.

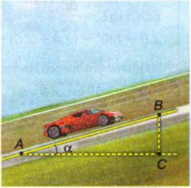


Рис. 486

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

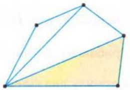


Рис. 487

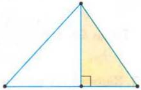


Рис. 488

У вас может возникнуть вопрос: *Почему в геометрии особое внимание уделяется прямоугольному треугольнику, хотя не часто встречаются предметы подобной формы?*

Итак, поразмыслим. Как в химии изучают вначале элементы, а затем — их соединения, в биологии — одноклеточные, а потом — многоклеточные организмы, так и в геометрии изучают сначала простые геометрические фигуры — точки, отрезки и треугольники, из которых состоят другие геометрические фигуры.

Среди этих фигур прямоугольный треугольник играет особую роль. Действительно, любой многоугольник можно разбить на треугольники (рис. 487). Умея находить угловые и линейные элементы этих треугольников, можно найти все элементы многоугольника. В свою очередь, любой треугольник можно разбить одной из его высот на два прямоугольных треугольника, элементы которых связаны более простой зависимостью (рис. 488). Найти элементы треугольника можно, если свести задачу к решению этих двух прямоугольных треугольников. Проиллюстрируем это на примере.

Задача. В ΔABC $b = 50$ см, $c = 35$ см и $\angle A = 76°$ (рис. 489). Найдите $\angle B$, $\angle C$ и сторону a.

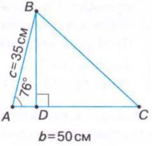


Рис. 489

Решение. Проведём высоту BD. Точка D будет лежать между точками A и C, поскольку $\angle A$ — острый и $b > c$.

Из прямоугольного треугольника ABD:

$BD = c \cdot \sin A = 35 \cdot \sin 76° \approx 35 \cdot 0{,}9703 \approx 40$ (см).

$DC = AC - AD = b - c \cdot \cos A = 50 - 35 \cdot \cos 76° \approx$
$\approx 50 - 35 \cdot 0{,}2419 \approx 50 - 8{,}4665 \approx 42$ (см).

Из прямоугольного треугольника

BDC: $\operatorname{tg} C = \dfrac{BD}{DC} \approx \dfrac{40}{42} \approx 0{,}9524$. Отсюда $\angle C \approx 43{,}6° \approx 43°$.

$\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) \approx 180° - (76° + 43°) \approx 180° - 119° \approx 61°$.

Из прямоугольного треугольника BDC: $a = \dfrac{BD}{\sin C} = \dfrac{40}{\sin 43°} \approx \dfrac{40}{0{,}6820} \approx 59$ (см).

Итак, $a \approx 59$ см, $\angle B \approx 61°$, $\angle C \approx 43°$.

ВСПОМНИТЕ ОСНОВНОЕ

1. Что означает *решить прямоугольный треугольник*?
2. Какие виды задач связаны с решением прямоугольных треугольников?
3. Запишите алгоритмы решения каждого вида этих задач.
4. Перечислите виды прикладных задач.

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

994'. По данным на рисунках 490 и 491 найдите x и y.

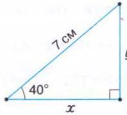


Рис. 490

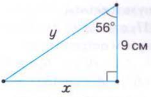


Рис. 491

995'. По данным на рисунках 492 и 493 найдите углы α и β.

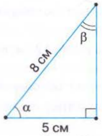


Рис. 492

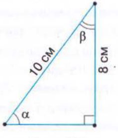


Рис. 493

996°. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) найдите:
1) BC, если $AB = 5$ см, $\angle A = 55°$; 2) AB, если $AC = 7$ см, $\angle B = 41°$;
3) AC, если $BC = 6$ см, $\angle B = 38°$.

997°. Найдите неизвестные стороны прямоугольного треугольника, если:
1) катет равен 9 см, а противолежащий ему угол – 38°;
2) катет равен 10 см, а прилежащий к нему угол – 54°.

998°. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой 14 см и углом 65° найдите:
1) катет, прилежащий к этому углу; 2) катет, противолежащий этому углу.

999°. Найдите угол A прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$), если:
1) $AB = 12$ см, $BC = 9$ см; 2) $AB = 10$ см, $AC = 6$ см;
3) $AC = 8$ см, $BC = 16$ см.

1000°. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой 20 см и катетом 14 см найдите:
1) угол, прилежащий к этому катету; 2) угол, противолежащий этому катету.

1001°. В прямоугольном треугольнике катет равен 0,2 гипотенузы. Найдите острые углы треугольника.

1002°. Найдите угол между диагональю и большей стороной прямоугольника, если его стороны равны: 1) 6 см и 8 см; 2) 18 см и 20 см; 3) 7 см и 14 см.

1003°. Через точку A к окружности радиуса 45 см проведены касательные AB и AC (B и C – точки касания). Найдите угол, образованный касательными, если:
1) $AB = 60$ см; 2) $AB = 50$ см; 3) $AB = 45$ см.

1004. Найдите неизвестные стороны и острые углы прямоугольного треугольника по заданным:

1) двум катетам:

а) $a = 20$, $b = 21$; б) $a = 9$, $b = 12$; в) $a = 24$, $b = 18$; г) $a = 23{,}5$, $b = 40{,}2$;

2) гипотенузе и катету:

а) $c = 17$, $a = 15$; б) $c = 20$, $a = 16$; в) $c = 65$, $a = 56$; г) $c = 2{,}93$ $b = 2{,}85$;

3) гипотенузе и острому углу:

а) $c = 8$, $\angle A = 70°$; б) $c = 82$, $\angle A = 42°$; в) $c = 18{,}2$, $\angle A = 32°20'$;
г) $c = 4{,}67$, $\angle A = 65°15'$;

4) катету и прилежащему углу:

а) $a = 12$, $\angle A = 32°$; б) $a = 18$, $\angle A = 17°$; в) $a = 12$, $\angle A = 53°20'$;
г) $a = 3{,}71$, $\angle A = 19°30'$.

1005. Диагональ прямоугольника равна 25 см и образует со стороной угол 36° 18'. Найдите стороны прямоугольника.

1006. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 12 см, а угол при основании — 75°. Найдите:

1) основание треугольника; 2) высоту, проведённую к основанию.

1007. В окружность радиуса 5 см вписан равнобедренный треугольник с углом между боковыми сторонами 70°. Найдите:

1) высоту, проведённую к основанию;

2) боковую сторону треугольника.

1008. Основание равнобедренного треугольника равно 25 см, а высота, проведённая к боковой стороне, — 21 см. Найдите:

1) боковую сторону; 2) угол между боковыми сторонами треугольника.

1009. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $\angle A = 27°$, $BC = 21$ см. Найдите:

1) второй катет; 2) гипотенузу; 3) проекцию каждого катета на гипотенузу.

1010. Из точки, находящейся на расстоянии 15 см от прямой, проведены две наклонные, образующие с прямой углы 24° и 61°.

Найдите: 1) длину наклонных; 2) проекции наклонных на прямую.

1011. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 7,5 см, а острый угол — 22°.

1012. Стороны параллелограмма равны 5 см и 8 см, а острый угол — 36°. Найдите высоты параллелограмма.

1013. Сторона ромба равна 64,5 см, а острый угол — 28°30'. Найдите диагонали ромба.

1014*. Угол между диагоналями прямоугольника равен 46°, а его площадь — 545 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

1015*. В трапеции углы при большем основании равны 16° и 54°, высота трапеции — 24 см, а меньшее основание — 18 см. Найдите большее основание трапеции.

1016*. Основания трапеции равны 15 см и 20 см, а боковая сторона, равная 10 см, образует с бóльшим основанием угол 48°. Найдите площадь трапеции.

1017*. В равнобедренной трапеции большее основание равно 8 см, угол при основании — 41°, высота трапеции — 2 см. Найдите меньшее основание.

1018*. Найдите периметр равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 49°54', а основание больше боковой стороны на 10,8 см.

ПРИМЕНИТЕ НА ПРАКТИКЕ

1019. Тень от столба высотой 9 м составляет 5 м. Выразите в градусах высоту Солнца над горизонтом.

1020. Горная железная дорога на одном из перегонов поднимается на 1 м на каждые 60 м пути. Найдите угол подъёма дороги на этом участке.

1021. На какую высоту h поднялся пешеход, который прошёл n км по прямой дороге, поднимающейся под углом α к горизонту?
Вычислите h, если: 1) $n = 1{,}5$ км, $\alpha = 4°30'$; 2) $n = 3$ км, $\alpha = 8°18'$.

1022. Вертикальный луч прожектора пересекает облако. Какова высота нижней границы облака, если наблюдатель стоит на расстоянии 600 м от прожектора, а место пересечения луча прожектора и облака видит под углом 75°?

1023. Найдите расстояние между пунктами A и B (пункт B недоступен), если $AC = 60$ м, $\angle BAC = 41°$, $\angle ACB = 90°$ (рис. 494).

1024. Санаторий расположен на вершине горы. Прямая дорога к санаторию длиной 1500 м имеет угол подъёма 5°. На какой высоте от подножия горы расположен санаторий?

1025. Мачта закреплена тремя одинаковыми тросами, которые расположены к земле под углом 64°. Нижние концы тросов удалены от мачты на 35 м. На какой высоте закреплены на мачте верхние концы тросов?

1026. На расстоянии 800 м от места взлёта самолёта растут деревья высотой до 20 м. Под каким углом должен подниматься самолет, чтобы не задеть деревья?

1027*. Найдите угол подъёма улицы, на которой расположена школа, если длина фундамента школы — 40 м, а его высота в начале и в конце здания равна соответственно 180 см и 90 см (рис. 495).

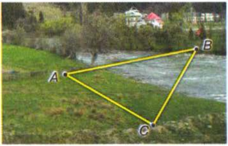


Рис. 494

Рис. 495

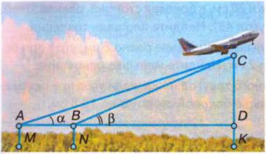


Рис. 496

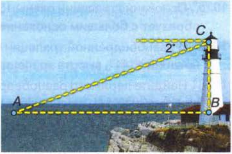


Рис. 497

1028*. Чтобы вычислить высоту полёта самолёта C (рис. 496), два наблюдателя в пунктах M и N установили угломерные приборы для измерения расстояния $MN = a$. В тот момент, когда точки A, B и C лежали в одной вертикальной плоскости, измеряли одновременно углы α и β. Зная расстояние a, углы α и β, высоту h приборов, определили искомую высоту CK. Объясните способ нахождения высоты.

Найдите высоту, на который находился самолёт, если результаты измерения следующие: $a = 80$ м, $h = 1{,}5$ м, $\alpha = 39°$, $\beta = 44°$.

1029*. Из башни маяка высотой 75 м над уровнем моря виден корабль под углом снижения 2° (рис. 497). Найдите расстояние от маяка до корабля.

1030*. На рисунке 498 схематично изображён способ измерения недоступного расстояния AB. Объясните измерения. Найдите расстояние AB, если $CD = 200$ м, $\angle KCB = 28°$, $\angle KCA = 39°$.

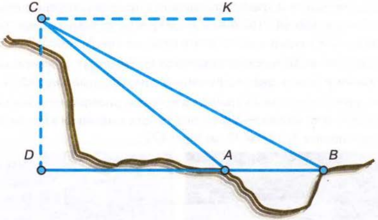


Рис. 498

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.
2. Перечислите свойства наклонных.
3. Дайте определения синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.
4. Объясните, как по одной из сторон прямоугольного треугольника и острому углу найти две другие стороны.
5. Как по двум сторонам прямоугольного треугольника найти его острые углы?
6. Назовите виды задач, связанные с решением прямоугольных треугольников и поясните алгоритмы решения каждого вида этих задач.

Внимательно прочитайте задания и найдите среди предложенных ответов правильные. Для выполнения тестового задания необходимо 10 – 15 мин.

№ 1

1° Найдите диагональ прямоугольника, если его стороны равны 9 см и 12 см.

А. 21 см. **Б.** 3 см. **В.** 20 см. **Г.** 15 см.

2° Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если его основание равно 10 см, а высота — 12 см.

А. 22 см. **Б.** 14 см. **В.** 13 см. **Г.** 15 см.

3° Из точки к прямой проведена наклонная длиной 8 см, образующая с прямой угол 60°. Найдите проекцию наклонной на прямую.

А. 4 см. **Б.** 2 см. **В.** 6 см. **Г.** 16 см.

4 Катеты прямоугольного треугольника относятся, как 3 : 4, а его гипотенуза равна 10 см. Найдите катеты треугольника.

А. 3 см и 4 см. **Б.** 30 см и 40 см. **В.** 6 см и 8 см. **Г.** 4 см и 6 см.

5* Основания прямоугольной трапеции равны 5 см и 17 см, а бóльшая боковая сторона — 15 см. Найдите меньшую диагональ трапеции.

А. 12 см. **Б.** 13 см. **В.** 22 см. **Г.** 20 см.

№ 2

1° Найдите катет прямоугольного треугольника, если синус противолежащего ему угла равен 0,6 , а гипотенуза — 10 см.

А. 6 см. **Б.** 16 см. **В.** 4 см. **Г.** 60 см.

2° Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если катет равен 8 см, а прилежащий к нему угол 60°.

А. 10 см. **Б.** 48 см. **В.** 14 см. **Г.** 16 см.

3° Диагональ прямоугольника равна 2 см и образует со стороной угол 30°. Найдите стороны прямоугольника.

А. 1 см и $\sqrt{3}$ см. **Б.** 2 см и 1 см. **В.** 2 см и $\sqrt{3}$ см. **Г.** 3 см и 1 см.

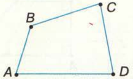
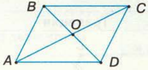
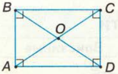
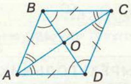
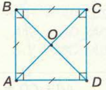
4 Найдите основание равнобедренного треугольника, если высота, проведённая к основанию, равна h, а угол между боковыми сторонами — α.

А. $h \cdot \sin\alpha$. **Б.** $h \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$. **В.** $2h \cdot \mathrm{tg}\alpha$. **Г.** $2h \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

5* Тень от столба высотой 12 м составляет 5 м. Выразите в градусах высоту Солнца над горизонтом.

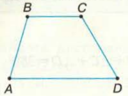
А. 35° **Б.** 67° **В.** 87° **Г.** 76°

ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК	
	$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$
Параллелограмм	**Свойства**
 $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$	1. $AB = DC$, $AD = BC$ 2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ 3. $AO = OC$, $BO = OD$ 4. $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$
Виды параллелограммов	**Свойства**
Прямоугольник  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$	**параллелограмма** 1. $AB = DC$, $AD = BC$ 2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ 3. $AO = OC$, $BO = OD$ 4. $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$ **Особое свойство** 5. $AC = BD$
Ромб  $AB = BC = CD = DA$	**параллелограмма** 1. $AB = DC$, $AD = BC$ 2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ 3. $AO = OC$, $BO = OD$ 4. $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$ **Особые свойства** 5. $AC \perp BD$ 6. $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle BAC = \angle DAC$
Квадрат 	**Все свойства параллелограмма, прямоугольника, ромба**

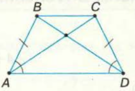
ТРАПЕЦИЯ

Неравнобедренная



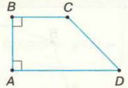
$AB \neq CD$

Равнобедренная



$AB = CD, \angle A = \angle D$

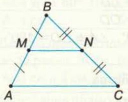
Прямоугольная



$\angle A = \angle B = 90°$

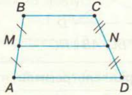
СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ

Треугольника



$MN \parallel AC, MN = \dfrac{AC}{2}$

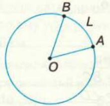
Трапеции



$MN \parallel AD, MN \parallel BC, MN = \dfrac{AD+BC}{2}$

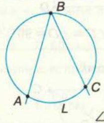
УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ

Центральные



$\smile ALB = \angle AOB$

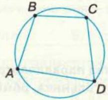
Вписанные



$\angle ABC = \dfrac{1}{2} \smile ALC$

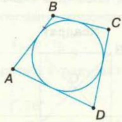
ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

Вписанные



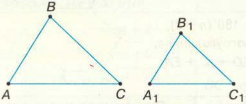
$\angle A + \angle C = 180°, \angle B + \angle D = 180°$

Описанные



$AB + CD = AD + BC$

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

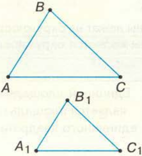


$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1,$
$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

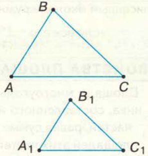
ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

По двум углам



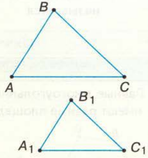
$\angle A = \angle A_1, \angle C = \angle C_1$

По двум сторонам и углу между ними



$AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1,$
$\angle A = \angle A_1$

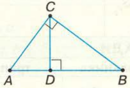
По трём сторонам



$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 =$
$= AC : A_1C_1$

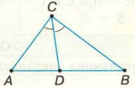
ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ

В прямоугольном треугольнике



$CD^2 = AD \cdot DB$
$AC^2 = AD \cdot AB$
$BC^2 = BD \cdot AB$

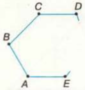
Свойство биссектрисы

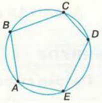
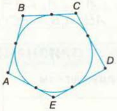


$AD : BD = AC : BC$

МНОГОУГОЛЬНИКИ. ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

$\angle A + \angle B + \angle C + \ldots + \angle E = 180^\circ(n-2)$,
где n — количество сторон многоугольника,
Периметр $P = AB + BC + CD + \ldots + EA$

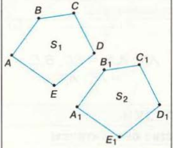


Вписанные многоугольники	Описанные многоугольники
	

Многоугольник называется вписанным в окружность, / описанным около окружности, если все его вершины лежат на окружности / стороны касаются окружности

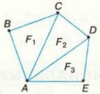
СВОЙСТВА ПЛОЩАДИ

Равные многоугольники имеют равные площади



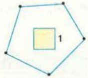
$ABCDE = A_1B_1C_1D_1E_1$
$S_1 = S_2$

Площадь многоугольника, составленного из частей, равна сумме площадей этих частей



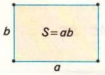
$S_{ABCDE} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$

Единицей площади является площадь единичного квадрата

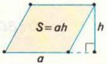


ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ

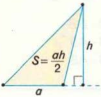
прямоугольника



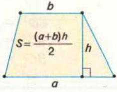
параллелограмма



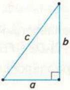
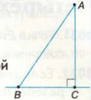
треугольника

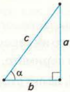


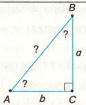
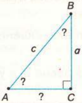
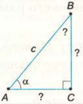
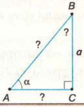
трапеции



РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема Пифагора	Следствия
 $c^2 = a^2 + b^2$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$	AC – перпендикуляр AB – наклонная BC – проекция наклонной $AB > AC$, $AB > BC$ 

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника	
 $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ $\frac{b}{c} = \cos\alpha$ $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$	$a = c \cdot \sin\alpha$, $b = c \cdot \cos\alpha$, $a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$ $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\cos\alpha}$ $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$

Решения прямоугольных треугольников	
Задача	**Алгоритм решения**
Дано: a, b Найти: c, $\angle A$, $\angle B$ 	1) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 2) $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, 3) $\angle B = 90° - \angle A$
Дано: a, c Найти: b, $\angle A$, $\angle B$ 	1) $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, 2) $\sin A = \frac{a}{c}$, 3) $\angle B = 90° - \angle A$
Дано: c, α Найти: a, b, $\angle B$ 	1) $\angle B = 90° - \alpha$, 2) $a = c \cdot \sin\alpha$, 3) $b = c \cdot \cos\alpha$
Дано: a, α Найти: c, b, $\angle B$ 	1) $\angle B = 90° - \alpha$, 2) $c = \frac{a}{\sin\alpha}$, 3) $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$

РЕШИТЕ ЗАДАЧИ

Четырёхугольники

1031. Точки E и F — середины противоположных сторон AB и CD параллелограмма, соединены с вершинами B и D. Докажите, что: 1) $\triangle ADE = \triangle CBF$; 2) $DE \parallel FB$.

1032. Если соединить в предыдущей задаче точки E и F, то параллелограмм разобьётся на четыре равных треугольника. Докажите это.

1033. Стороны параллелограмма равны 3 см и 5 см. Биссектрисы углов, прилежащих к меньшей стороне, пересекают продолжение противолежащей ей стороны в точках M и N. Найдите длину отрезка MN.

1034. Диагонали параллелограмма равны d_1 и d_2. Через вершины параллелограмма проведены прямые, параллельные диагоналям, до взаимного их пересечения. Какого вида полученный четырёхугольник? Найдите его периметр.

1035. В параллелограмме биссектриса тупого угла, равного 120°, делит сторону на отрезки 24 см и 16 см, считая от вершины острого угла. Найдите отрезки, на которые делит эта биссектриса бóльшую диагональ параллелограмма.

1036. Через середины сторон параллелограмма проведены перпендикулярные к ним прямые. Какого вида четырёхугольник, образованный этими прямыми?

1037. Постройте параллелограмм по двум его высотам h_1 и h_2, проведённым из одной вершины, и углу α между ними.

1038. Стороны параллелограмма относятся, как 7 : 11, а диагонали соответственно равны 24 см и 28 см. Найдите периметр параллелограмма.

1039. Стороны параллелограмма равны 10 см и 15 см, а разность диагоналей — 2 см. Найдите диагонали параллелограмма.

1040. В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении 2 : 3. Найдите острый угол между диагоналями.

1041. Найдите высоту ромба, если его сторона равна a, а угол — 150°.

1042. Докажите, что высоты ромба равны.

1043. Найдите острый угол ромба, если его периметр равен 16 см, а высота — 2 см.

1044. Диагональ ромба разделяет его на два треугольника. Найдите длину этой диагонали, если сумма периметров обоих треугольников на 15 см больше периметра ромба.

1045. Постройте ромб по его периметру $2p$ и высоте h.

1046. Постройте ромб по острому углу α и диагонали d, исходящей из вершины этого угла.

1047. Сумма периметров четырёх треугольников, на которые разбивается квадрат его диагоналями, больше периметра квадрата на 20 см. Чему равна диагональ квадрата?

1048. Докажите, что в равнобедренной трапеции квадрат диагонали равен сумме квадрата боковой стороны и произведения оснований.

1049. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна к боковой стороне. Найдите углы трапеции.

1050. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A — острый, а угол D — тупой. Докажите, что разность проекций боковых сторон трапеции на основание равна разности оснований.

Подобие треугольников

1051. Деление отрезка на два отрезка, больший из которых относится к меньшему, как весь отрезок к большей его части, называется *золотым сечением*. Это отношение приблизительно равно 1,62. Чтобы получить такое деление отрезка AB, постройте на нём как на катете прямоугольный треугольник ABC ($BC < AB$). На гипотенузе AC из вершины C отложите отрезок $CM = BC$, а на катете AB из вершины A — отрезок $AO = CM$. Точка O делит отрезок AB в отношении *золотого сечения*. Выполните построение, измерьте полученные отрезки и проверьте, получено ли отношение *золотого сечения*.

1052. Отношение *золотого сечения* в пропорциях тела взрослого человека издавна считается критерием красоты и гармонии его телосложения. В таком отношении находятся следующие расстояния: от подошвы ступней до конца среднего пальца опущенной руки и от него — до макушки головы; от локтевого сгиба до кисти и длина кисти; от предплечья до локтевого сгиба и от локтевого сгиба — до конца кисти и т. д. Измерьте эти расстояния на себе и найдите их соотношение.

1053. Равнобедренный треугольник с углом при основании 72° называют *золотым*: в нём отношение длины боковой стороны к длине основания соответствует *золотому сечению* и приближённо равно 1,62. Начертите такой треугольник. Измерьте его стороны и найдите их отношение.

1054. Знаменитая пифагорейская пентаграмма (символ древнегреческой школы Пифагора) — это пятиконечная звезда, связанная с *золотым* треугольником. Если пронумеровать вершины этой звезды (1, 2, 3, 4, 5) и соединить их отрезками последовательно 1 — 3 — 5 или 2 — 4 — 1 и т. д., то получим *золотые* треугольники. Сколько таких треугольников содержит пифагорейская пентаграмма? Какова сумма углов при вершинах всех этих треугольников?

1055. Пифагорейцы пользовались пентаграммой, рисуя её на песке, чтобы узнавать и приветствовать друг друга. Как начертить пентаграмму, не отрывая карандаш от листа бумаги?

1056. Свойства *золотого сечения* использовали ещё древние египтяне. Если большую пирамиду Хеопса пересечь вертикальной плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и середину стороны основания, то получим так называемый двойной золотой треугольник. Это равнобедренный треугольник, в котором отношение боковой стороны к половине основания равно отношению *золотого сечения* ≈ 1,62. В пирамиде Хеопса размеры этого треугольника следующие: боковая сторона 186,526 м, основание — 230,4 м. Проверьте по этим данным, выполняется ли отношение *золотого сечения*. Постройте треугольник с отношением сторон, как в треугольнике пирамиды Хеопса. Действительно ли угол при основании такого треугольника равен 51°51'?

1057. Прямоугольник со сторонами 10 и 16 называют *золотым*. Если от него отрезать квадрат со стороной 10, то получим также *золотой* прямоугольник. Квадрат со стороной какой длины надо отрезать от образовавшегося прямоугольника, чтобы получить *золотой* прямоугольник? Сформулируйте обобщённое правило.

1058. В прямоугольном треугольнике один из катетов продолжен за вершину прямого угла на некоторый отрезок. Из построенной точки провели перпендикуляр к гипотенузе треугольника. Какие из полученных при этом треугольников подобны заданному треугольнику?

1059. Через вершины треугольника вне его проведены прямые, перпендикулярные последовательно к каждой его стороне. При пересечении этих прямых образовался треугольник. Подобен ли он заданному треугольнику? Объясните ответ.

1060. Биссектрисы внешних углов треугольника образуют треугольник. Подобен ли он заданному треугольнику? Объясните ответ.

1061. $ABCK$ и $MKTP$ — равные квадраты с общей вершиной K. Стороны CK и KT взаимно перпендикулярны. Найдите площадь четырёхугольника $ACTM$, если $AB = 6$ см.

1062. Из вершин острых углов параллелограмма проведены высоты. Подобны ли образовавшиеся при этом треугольники? Объясните ответ.

1063. *Теорема Птолемея*. Докажите, что во вписанном четырёхугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон.

1064. Найдите диагонали равнобедренной трапеции с основаниями 3 см и 5 см и боковой стороной 7 см.

1065. Из точки M, лежащей вне окружности радиуса 6 см, проведены к ней две касательные. Найдите расстояние между точками касания, если расстояние от точки M до центра окружности равно 10 см.

1066. Треугольник ABC вписан в окружность. Биссектриса его угла C продлена до пересечения с окружностью, а полученная точка на окружности соединена с вершиной A.

1) Какие при этом образовались подобные треугольники?

2) Выразите квадрат биссектрисы треугольника через его стороны a, b и отрезки на стороне c.

1067. В треугольнике со сторонами 3 см, 4 см и 5 см найдите биссектрису наибольшего угла.

1068. Как построить отрезок, являющийся средним пропорциональным между двумя заданными отрезками a и b?

1069. Постройте треугольник по его периметру P и двум острым углам α и β.

1070. Впишите в треугольник ABC квадрат так, чтобы две его вершины лежали на большей стороне треугольника, а две другие вершины — на двух других сторонах треугольника.

Многоугольники. Площади многоугольников

1071. Раньше циркуль называли «шестернёю». Это объясняется следующим: если раствор циркуля равен радиусу окружности, то окружность можно разделить на 6 равных частей. Проверьте это.

1072. Шестиугольник имеет три пары равных углов. Известно, что один угол равен 120°, а два других относятся, как 7 : 9. Найдите углы шестиугольника.

1073. Стороны прямоугольника относятся, как 8 : 15, а его диагональ равна 34 см. Найдите площадь прямоугольника.

1074. В параллелограмме одна из сторон равна 10 см, а один из углов — 30°. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр равен 56 см.

1075. Найдите площадь ромба со стороной 4 см, если радиус вписанной окружности равен 1,5 см.

1076. Высота треугольника равна 4 см. Она делит сторону, к которой проведена, в отношении 1 : 8. Найдите длину отрезка с концами на сторонах треугольника, параллельного высоте, и который делит треугольник на части с равными площадями.

1077. Длины наибольшей и наименьшей сторон треугольника равны 6 см и 13 см. Найдите третью сторону треугольника, если утроенный квадрат его наименьшей высоты равен произведению двух других высот треугольника.

1078. Высота трапеции в три раза больше одного из её оснований, но в два раза меньше другого основания. Найдите основания трапеции, если её площадь равна 168 см^2.

1079. В трапеции $ABCD$ через середину O диагонали AC параллельно диагонали BD проведена прямая MN ($M \in AB$, $N \in AD$). Разделит ли пополам площадь трапеции отрезок: 1) DM; 2) BN? Объясните ответ.

1080. Две парадные лестницы имеют одинаковые основания m (длина по горизонтали) и одинаковые высоты h (длина по вертикали от основания до верхней площадки). Будет ли одинаковой длина ковровой дорожки для этих лестниц, если одна из них имеет 9 ступенек, а другая — 12?

Решение прямоугольных треугольников

1081. Длины катетов прямоугольного треугольника 7 см и 24 см. Найдите значения синуса и косинуса острого угла между гипотенузой и проведённой к ней медианой.

1082. Основания равнобедренной трапеции равны 9 см и 21 см, а боковая сторона — 10 см. Найдите синусы углов:

1) при большем основании; 2) между диагональю и средней линией.

1083. Найдите значения синуса и косинуса наименьшего угла прямоугольного треугольника, если:

1) $a - b = 17$ см, $c = 25$ см;
2) $c - a = 1$ см, $c - b = 50$ см;
3) $c + a = 49$ см, $c + b = 50$ см.

1084. Точка A лежит на расстоянии 2 см от окружности радиуса 3 см. Найдите косинус угла между касательными, проведёнными из точки A к этой окружности.

1085. Радиус окружности R. Найдите длину хорды этой окружности, стягивающей дугу $n°$.

1086. a, b — катеты прямоугольного треугольника, c — гипотенуза, A и B — острые углы. Заполните таблицу 37.

Таблица 37

Элемент треугольника	1	2	3	4	5	6	7	8
a			47,2	10,2	17		12,7	
b						75	13,4	8
c	13,5	0,25			20			12
$\angle A$	40		67			52		
$\angle B$		32		53				

1087. Диагональ прямоугольника равна 32,5 см и делит его угол в отношении 4 : 11. Найдите периметр прямоугольника.

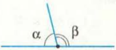
1088. Две взаимно перпендикулярные хорды AB и AC равны 38,5 см и 21,3 см. Под какими углами они наклонены к диаметру AM?

1089. Найдите стороны равнобедренного треугольника, если угол между боковыми сторонами равен 47°12', а сумма основания и боковой стороны — 59,4 см.

1090. Две окружности радиусов 3 см и 12 см имеют внешнее касание. Найдите угол между общими внешними касательными этих окружностей.

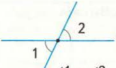
УГЛЫ

смежные



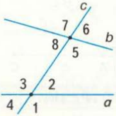
$\alpha + \beta = 180^\circ$

вертикальные



$\angle 1 = \angle 2$

при двух прямых и секущей



Внутренние: а) односторонние $\angle 2$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 8$
б) накрест лежащие $\angle 2$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 5$

соответственные: $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 8$,

Внешние: а) односторонние $\angle 1$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 7$;
б) накрест лежащие $\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 6$

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

ПРИЗНАКИ

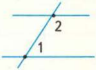
ЕСЛИ

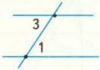
при двух прямых и секущей
- сумма внутренних односторонних углов равна 180°
- внутренние накрест лежащие углы равны
- соответственные углы равны

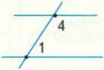
две прямые
- перпендикулярны к третьей прямой

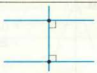
ТО

данные прямые параллельны









СВОЙСТВА

ЕСЛИ

две прямые параллельны и их пересекает третья прямая (секущая)

прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых

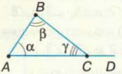
ТО

- сумма внутренних односторонних углов равна 180°
- внутренние накрест лежащие углы равны
- соответственные углы равны
- она перпендикулярна и к другой прямой

ТРЕУГОЛЬНИКИ

СВОЙСТВА

углов



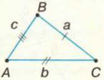
$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

$\angle BCD=\alpha+\beta$

$\angle BCD>\alpha$

$\angle BCD>\beta$

сторон



$a+b+c=P$

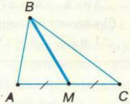
$a<b+c$

$b<a+c$

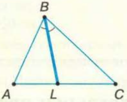
$c<a+b$

ВАЖНЫЕ ОТРЕЗКИ

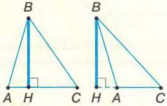
Медиана



Биссектриса



Высота



РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Свойства

ЕСЛИ

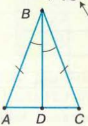
ΔABC – равнобедренный ($AB=BC$)

ТО

$\angle A=\angle C$

биссектриса BD – медиана

биссектриса BD – высота



ЕСЛИ

признаки

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Свойства

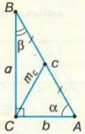
ЕСЛИ

ΔABC – прямоугольный ($\angle C=90^\circ$)

ТО

$\alpha+\beta=90^\circ$

$m_c=0{,}5c$

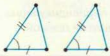


ЕСЛИ

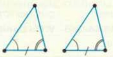
признаки

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

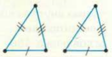
по двум сторонам и углу между ними



по стороне и двум прилежащим углам

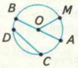


по трём сторонам



ОКРУЖНОСТЬ

ВАЖНЫЕ ОТРЕЗКИ



AB – диаметр,
CD – хорда,
OM – радиус

$AB = 2OM$
$CD \le AB$

СВОЙСТВА

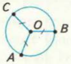
Если $\dfrac{AB \perp CD}{CK = KD}$, то $\dfrac{CK = KD}{AB \perp CD}$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

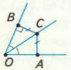
Фигура F – геометрическое место точек плоскости (ГМТ), *если:*

1) каждая точка фигуры обладает одним и тем же свойством;

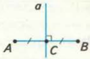
2) каждая точка плоскости, обладающая этим свойством, принадлежит данной фигуре



Окружность – это ГМТ, равноудалённых от заданной точки



Биссектриса угла – это ГМТ, равноудалённых от сторон угла



Серединный перпендикуляр к отрезку – это ГМТ, равноудалённых от концов отрезка

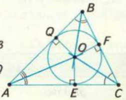
ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК

Центр O окружности – точка пересечения

серединных перпендикуляров
$R = OA = OB = OC$

биссектрис углов
$r = OE = OF = OQ$



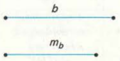
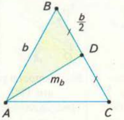
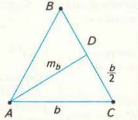
$\dfrac{\text{Около любого треугольника}}{\text{В любой треугольник}}$ можно $\dfrac{\text{описать}}{\text{вписать}}$ окружность, причём только одну

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

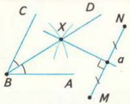
При помощи линейки можно провести:	*При помощи циркуля можно:*
• произвольную прямую; • прямую, проходящую через данную точку; • прямую, проходящую через две данные точки	• провести окружность из данного центра данным радиусом; • отложить отрезок на луче от его начала

Никакие другие операции выполнять циркулем и линейкой нельзя

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Задача	*Анализ*	*Построение*	*Доказательство*
Дано:  **Построить:** ΔABC так, чтобы $AB = BC = b$, $AD = m_b$, (D — середина BC)	 1) начертим рисунок-эскиз; 2) ΔABD — вспомогательный ($AB = b$, $BD = \frac{b}{2}$, $AD = m_b$); 3) $BC = b$	 Построение: 1) ΔABD по трём сторонам $AB = b$, $BD = \frac{b}{2}$, $AD = m_b$; 2) отрезок $BC = b$ на луче BD; 3) отрезок AC ΔABC — искомый	У ΔABC $AB = BC = b$, $AD = m_b$, (D — середина BC) по построению

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Задача	*Анализ*	*Построение*	*Доказательство*
Дано:  **Построить** точку X, равноудалённую от сторон $\angle ABC$ и точек M, N	Точка X: 1) равноудалена от сторон $\angle ABC$; 2) равноудалена от M и N ГМТ, удовлетворяющее: • условие 1 — биссектриса $\angle ABC$; • условие 2 — серединный перпендикуляр к отрезку MN X — точка пересечения этих ГМТ	 Строим: 1) биссектрису BD $\angle ABC$; 2) серединный перпендикуляр a к отрезку MN; 3) X — точку пересечения BD и a	$X \in BD$, поэтому X равноудалена от сторон $\angle ABC$; $X \in a$, поэтому $MX = NX$

Глава I

§ 1

3. 1) 14 см; 2) 31 см; 3) 34 см. **4.** Нет (рис. 16); да (рис. 17). **6.** 1) 54 см; 2) 25 см; 3) 25 см; 4) 27 см; 5) 14 см. **7.** 1) 20 см, 40 см, 40 см, 40 см; 2) 14 см, 42 см, 42 см, 42 см; 3) 5 см, 45 см, 45 см, 45 см. **8.** 1) Да; 2) нет; 3) нет. **9.** 100°, 100°, 100° (рис. 19); 100°, 100° (рис. 20); 60° (рис. 21). **10.** 1) 150°; 2) 60°; 3) 70°. **11.** 1) Нет; 2) да; 3) нет. **12.** 1) 36°, 72°, 108°, 144°; 2) 75°, 85°, 95°, 105°; 3) 85°, 95°, 105°, 75°; 4) 40°, 80°, 40°, 200°. **13.** Нет. **14.** 90°, 90°, 90°, 90°. **15.** 180°. **16.** *Указание*: найдите градусную меру четвёртого угла. **17.** 1) 105°; 2) 90°; 3) 100°. **18.** 15 см, 7 см, 23 см, 21 см. **19.** 64 см. **20.** 1) Нет; 2) да; 3) нет. **21.** *Указание*: используйте неравенство треугольника. **22.** *Указание*: используйте неравенство треугольника. **23.** *Указание*: используйте признак равенства треугольников по стороне и прилежащим углам. **24.** *Указание*: используйте признак равенства треугольников по трём сторонам и свойству равнобедренного треугольника ABC. **25.** 1) 36°, 72°, 108°, 144°; 2) 30°, 60°, 120°, 150°; 3) 40°, 60°, 120°, 140°. **26.** 1) 2; 2) 4; 3) 2. **27.** 1) Нет; 2) нет. **28.** 90°. **29.** 1) 142°, 22°, 136°, 60°; 2) 130°, 30°, 115°, 85°; 3) 131°, 35°, 89°, 105°. **30.** *Указание*: сумма внешних углов четырёхугольника равна сумме углов, смежных с углами этого четырёхугольника. **31.** 1) Да; 2) нет; 3) да. **32.** *Указание*: сумма внешних углов четырёхугольника в два раза больше суммы его углов. **33.** 115° (рис. 23); 160° (рис. 24); 100° (рис. 25). **34.** 10 см. **35.** *Указание*: пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$. Запишите неравенства для сторон треугольников AOB и COD и сделайте вывод. **36.** *Указание*: в $\triangle ABM$ $\angle M = 180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B$, в $\triangle CDN$ $\angle N = 180° - \frac{1}{2}\angle C - \frac{1}{2}\angle D$. Сложите эти равенства и сделайте вывод. **41.** *Указание*: место строительства завода — точка пересечения диагоналей четырёхугольника.

§ 2

42. Нет (рис. 33); нет (рис. 34). **43.** 1) 5 см, 10 см; 2) 1,2 дм, 0,4 дм. **44.** 1) 120°, 60°; 2) 45°, 135°; 3) 90°, 90°. **45.** Нет. **5.** 1) $OC = 6$ см, $OD = 3$ см; 2) $AC = 12$ см, $BD = 6$ см; 3) $AD = 8$ см, $DC = 5$ см. **47.** 1) $\angle B = \angle D = 145°$, $\angle C = 35°$; 2) $\angle A = \angle C = 40°$, $\angle D = 140°$; 3) $\angle A = 75°$, $\angle B = \angle D = 105°$; 4) $\angle B = 64°$, $\angle A = \angle C = 116°$. **48.** 1) Нет; 2) да; 3) нет. **49.** 1) Нет; 2) нет; 3) нет. **50.** $\angle A = \angle C = 45°$, $\angle B = \angle D = 135°$ (рис. 37); $\angle A = \angle C = 50°$, $\angle B = \angle D = 130°$ (рис. 38); $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle B = \angle D = 120°$ (рис. 39). **51.** 1) 135°, 45°, 135°, 45°; 2) 65°, 115°, 65°, 115°; 3) 60°, 120°, 60°, 120°; 4) 40°, 140°, 40°, 140°. **52.** 1) 58°, 122°, 58°, 122°; 2) 68°, 112°, 68°, 112°; 3) 90°, 90°, 90°, 90°. **53.** Нет. **54.** 1) 13,5 см, 10,5 см, 13,5 см, 10,5 см; 2) 3 см, 21 см, 3 см, 21 см; 3) 15 см, 5 см, 8,5 см, 15,5 см, 8,5 см. **55.** $AB = CD = 4$ см, $AD = BC = 6$ см (рис. 40); $AB = CD = 10$ см, $AD = BC = 10$ см (рис. 40); $AB = CD = 6$ см, $AD = BC = 6,8$ см (рис. 40). **56.** *Указание*: используйте признак равенства треугольников по трём сторонам. **57.** 1) Нет; 2) нет; 3) да. **58.** 1) Да; 2) нет; 3) нет. **59.** *Указание*: эта сумма равна сумме двух разных высот параллелограмма. **60.** 3. **61.** 1) 72°, 108°, 72°, 108°; 2) 80°, 100°, 80°, 100°; 3) 54°, 126°, 54°, 126°. **62.** 1) 120°, 60°, 120°, 60°; 2) 160°, 20°, 160°, 20°; 3) 72°, 108°, 72°, 108°. **63.** 60° (рис. 43); 50° (рис. 44); 120° (рис. 45). **64.** 1) 35°, 145°, 35°, 145°; 2) 45°, 135°, 45°, 135°; 3) 89°, 91°, 89°, 91°. **65.** *Указание*: проведите высоты из вершины тупого угла параллелограмма и рассмотрите полученные прямоугольные треугольники. **66.** 16°, 96°. **67.** 45°, 135°, 45°, 135°. **68.** Прямоугольный. **69.** 1) *Указание*: докажите, что треугольник, образованный биссектрисами со стороной параллелограмма, — прямоугольный; 2) *указание*: используйте признак параллельности прямых. **70.** 60°, 120°, 60°, 120°. **71.** 1) 70 см; 2) 14 см. **72.** 1) 6 см, 3 см; 2) 15 см; 3) 40 см. **73.** 1) *Указание*: докажите равенство соответствующих треугольников; 2) 9 см. **74.** *Указание:* сначала докажите параллельность BN и MD. **75.** 2,5 см. **76.** 1) *Указание*: используйте признак равнобедренного треугольника; 2) 30 см. **79.** 1) 45°; 2) 135°. **80.** 6 см. **81.** 2 см или 4 см. **82.** 10 см, 15 см, 10 см, 15 см. **83.** Стороны относятся, как 2 : 3. **84.** 9,6 см, 14,4 см, 9,6 см, 14,4 см. **85.** Стороны относятся, как 1 : 2. **86.** 7 см, 14 см, 7 см, 14 см. **87.** $AB \parallel OO_1$.

§ 3

89. Нет. **91.** 1) нет; 2) да. **92.** По признаку параллелограмма. **93.** 1) Нет; 2) да. **95.** По определению параллелограмма. **96.** Да. **97.** 1) Нет; 2) да; 3) нет. **98.** 1) *Указание*: используйте признак параллелограмма; 2) *указание*: используйте признак параллелограмма. **99.** 1) 35°; 2) 5 см. **100.** 1) *Указание*: используйте признак параллелограмма; 2) *указание*: используйте свойство сторон и углов параллелограмма. **101.** *Указание*: используйте свойство сторон и углов параллелограмма. **102.** *Указание*: докажите, что $\angle A = \angle C$, и используйте свойство сторон и углов параллелограмма. **103.** *Указание*: используйте свойство сторон и углов параллелограмма. **104.** *Указание*: используйте признак параллелограмма. **105.** *Указание:* вначале докажите, что $AECF$ — параллелограмм. **106.** 1) $OC = 3$ см, $BO = 5$ см; 2) $AO = 4{,}8$ дм, $OD = 2$ дм; 3) $AO = 2{,}1$ см, $BO = 35$ мм; 4) $OC = 0{,}6$ дм, $OD = 6$ см. **107.** *Указание:* используйте признак параллелограмма. **108.** *Указание:* используйте признак параллелограмма. **109.** *Указание*: используйте свойство диагоналей параллелограмма. **110.** 1) Параллелограмм; 2) четырёхугольник; 3) параллелограмм; 4) четырёхугольник. **111.** *Указание*: используйте признак параллельности прямых, а затем — признак параллелограмма. **112.** 1) Нет; 2) да; 3) да. **113.** Да. **114.** *Указание*: сначала докажите, что AB_1CD_1 и B_1BD_1D — параллелограммы. **115.** *Указание*: используйте признак параллелограмма. **116.** *Указание:* сначала докажите равенство треугольников EBM и KDN. **117.** *Указание*: сначала докажите, что $\triangle AKM = \triangle CNP$ и $\triangle BPK = \triangle DMN$. **118.** *Указание*: сначала докажите равенство треугольников EBC и FDA. **119.** *Указание*: сначала докажите, что $DCEF$ — параллелограмм. **120.** 1) 3 см; 2) 4 см; 3) 4 см. **121.** *Указание*: сначала докажите равенство треугольников ABE и CDF, а затем используйте признак параллелограмма. **122.** *Указание*: сначала докажите равенство треугольников, а затем используйте свойство диагоналей параллелограмма. **123.** *Указание*: сначала докажите равенство треугольников, а затем используйте признак параллелограмма. **124.** *Указание*: используйте свойство диагоналей параллелограмма. **125.** *Указание*: сначала докажите, что *MNKP* — параллелограмм, затем используйте признак параллелограмма. **126.** 1) *Указание*: используйте свойство диагоналей параллелограмма; 2) 36°. **129.** *Указание*: сначала докажите равенство треугольников, а затем используйте признак параллелограмма. **130.** *Указание*: используйте свойство диагоналей параллелограмма. **131.** Да. **132.** *Указание*: используйте признак параллельности прямых, а затем признак параллелограмма. **133.** *Указание*: используйте свойство диагоналей параллелограмма.

§ 4

136. 1) $AD = 16$ см, $DC = 12$ см; 2) $BD = 20$ см; 3) $AO = OC = BO = OD = 10$ см. **137.** 1) 14 см и 14 см; 2) 28 см. **138.** 54°, 36°, 54°. **139.** 1) 10 см; 2) 1,8 дм; 3) 44 мм. **140.** Диагонали равны. **141.** 1) По 6 см; 2) по 3 см; 3) по 9 мм. **142.** *Указание*: используйте свойства диагоналей прямоугольника. **143.** $\angle 1 = 35°$, $\angle 2 = 125°$, $\angle 3 = 55°$ (рис. 79); $\angle 1 = \angle 3 = 30°$, $\angle 2 = 60°$ (рис. 80); $\angle 1 = 65°$, $\angle 2 = 130°$, $\angle 3 = 25°$ (рис. 81). **144.** 30° (рис. 82); 60°(рис. 83); 90° (рис. 84). **146.** 1) 2 см; 2) 7 мм; 3) 0,22 дм. **147.** 1) 20 см; 2) 0,5 дм; 3) 14 мм. **148.** 1) $P = 36$ см; 2) $b = 12$ см; 3) $a = 10$ см; 4) $b = 12$ см; 5) $P = 32$ см. **149.** 1) 32 см; 2) 30 см; 3) 56 см. **150.** *Указание*: докажите, что углы заданного параллелограмма — прямые. **151.** *Указание*: докажите, что параллелограмм — прямоугольник. **152.** *Указание*: покажите, что в четырёхугольнике противоположные стороны равны; вычислите четвёртый угол прямоугольника. **153.** *Указание*: вычислите углы четырёхугольника; см. задачу 152. **156.** *Указание*: пусть α — угол между диагональю и стороной параллелограмма; найдите углы параллелограмма. **157.** *Указание*: вычислите угол между диагональю и стороной прямоугольника; воспользуйтесь свойством катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла 30°. **158.** *Указание*: воспользуйтесь тем, что углы равностороннего треугольника равны по 60°. **159.** 1) 54°, 36°; 2) 18°. **161.** 1) 9,6 см, 14,4 см; 2) 10 см, 14 см; 3) 8 см, 16 см. **162.** 1) 6 см; 2) 4,3 см. **163.** 1) 26 см или 22 см; 2) 14 см или 16 см. **165.** *Указание*: покажите, что биссектриса прямоугольника отсекает от него равнобедренный треугольник. **166.** 1) 90 см; 2) 22,8 дм. **167.** *Указание*: постройте вспомогательный прямоугольный треугольник по гипотенузе d и катету a. **168.** 1) *Указание*: постройте вспомогательный прямоугольный треугольник по гипотенузе d и углу α; 2) *указание*: постройте вспомогательный треугольник по сторонам $\frac{1}{2}d$, $\frac{1}{2}d$ и углу α между ними. **169.** 1) 12 см, 12 см, 13,1 см, 13,1 см. **174.** *Указание*: достройте треугольник до прямоугольника; воспользуйтесь тем, что диагонали прямоугольника делятся точкой пересечения пополам. **175.** 3 см, 3 см. **176.** *Указание*: через заданную точку на основании проведите прямую, параллельную боковой стороне треугольника; покажите, что эта прямая отсекает от заданного треугольника равнобедренный треугольник; используйте свойство высот, проведённых к боковым сторонам равнобедренного треугольника. **177.** 2) 10 см. **178.** 1) *Указание*: постройте вспомогательный треугольник по сторонам d, s и углу

45°, лежащему против стороны d. **179.** *Указание*: докажите, что $ABCD$ — прямоугольник. **180.** *Указание*: можно, например, проверить, что в данном предмете противоположные стороны равны и диагонали равны. **181.** Нет. **182.** *Указание*: в прямоугольнике противоположные стороны равны.

§ 5

184. Нет. **185.** 1) $BC = AD = DC = 10$ см; 2) $AC = 16$ см, $BD = 12$ см. **186.** $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 25°$. **187.** Диагонали ромба перпендикулярны. Диагонали ромба являются биссектрисами углов ромба. **188.** 1) 5 см; 2) по 7 см; 3) $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = 45°$, $\angle 2 = 90°$. **189.** 1) 3 см; 2) 0,6 дм; 3) 70 мм. **190.** *Указание*: воспользуйтесь тем, что диагонали ромба перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. **191.** *Указание*: используйте определение ромба и признак равенства треугольников по трём сторонам. **192.** $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = 25°$, $\angle 2 = 65°$, $\angle 5 = 90°$. **193.** 1) 18°, 72°; 2) 27°, 63°; 3) 30°, 60°. **194.** *Указание*: диагональ заданного ромба разбивает его на два равносторонних треугольника. **195.** 1) 60°, 120°, 60°, 120°; 2) 75°, 105°, 75°, 105°; 3) 25°, 155°, 25°, 155°. **196.** 70°, 110°, 70°, 110° (рис. 105); 36°, 144°, 36°, 144° (рис. 106); 60°, 120°, 60°, 120° (рис. 107). **197.** 1) 40 см; 2) 12,8 дм; 3) 180 мм. **198.** 1) 64 см; 2) 2,4 дм; 3) 168 мм. **199.** 1) 3 см; 2) 14,5 мм; 3) 0,75 дм. **200.** *Указание*: вычислите углы четырёхугольника. **202.** *Указание*: вычислите углы ромба. **204.** *Указание*: покажите, что стороны данного параллелограмма равны. **205.** 30°, 150°, 30°, 150°. **206.** *Указание*: пусть $ABCD$ — ромб, AM и AP — его высоты, проведённые соответственно к сторонам BC и CD; докажите, что $\triangle ABM = \triangle ADP$. **207.** 1) 60°, 120°, 60°, 120°; 2) 80 см. **208.** 1) 70°, 110°, 70°, 110°; 2) 40°, 140°, 40°, 140°; 3) 80°, 100°, 80°, 100°. **209.** $BM = 2\sqrt{3}$, $MD = 2$, $AM = 2$. **210.** 1) 72°, 108°, 72°, 108°; 2) 40°, 140°, 40°, 140°; 3) 60°, 120°, 60°, 120°. **211.** 30°, 150°, 30°, 150°. **212.** 1) 16 см; 3) все по 4 см. **213.** 1) *Указание*: постройте вспомогательный прямоугольный треугольник по катетам $\frac{d_1}{2}$ и $\frac{d_2}{2}$; 2) *указание*: постройте вспомогательный треугольник по сторонам d, a, a; 3) *указание*: постройте вспомогательный равнобедренный треугольник по боковым сторонам a и углу α между ними. **215.** 1) 16 см; 2) 58 мм; 3) 0,82 дм. **217.** *Указание*: докажите, что $\triangle AND = \triangle CND = \triangle AMB = \triangle CMB$. **218.** 1) Нет; 2) да; 3) нет. **219.** 1) *Указание*: постройте вспомогательный равнобедренный прямоугольный треугольник по катету a; 2) *указание*: постройте вспомогательный равнобедренный прямоугольный треугольник по катету $\frac{d}{2}$. **220.** *Указание*: пусть $ABCD$ — ромб, AM, AP — его высоты, проведённые соответственно к сторонам BC и CD; докажите, что $\triangle ACM = \triangle ACP$; см. задачу 206. **221.** 30°, 150°, 30°, 150°. **222.** *Указание*: проведите диагонали ромба и покажите, что углы ACN и CAL и углы BDK и DBM соответственно равны. **223.** *Указание*: покажите сначала, что точка пересечения диагоналей и основания перпендикуляров, проведённых к противоположным сторонам ромба, лежат на одной прямой; а затем, что диагонали четырёхугольника с вершинами в основаниях построенных перпендикуляров равны. **224.** *Указание*: докажите, что стороны четырёхугольника параллельны диагоналям прямоугольника и равны их половине. **225.** *Указание*: вычислите углы четырёхугольника *MPKN*. **227.** 5 см. **228.** *Указание*: покажите сначала, что биссектрисы двух пар смежных углов прямоугольника пересекаются под прямым углом; затем докажите, что полученный прямоугольник — квадрат. **229.** 1) *Указание*: постройте вспомогательный прямоугольный треугольник по катету *s* и прилежащему углу 22,5°. **230.** *Указание*: если сложить ткань по диагонали, то края ткани должны совместиться. **231.** Нет, может быть и ромб. **232.** *Указание*: обозначьте столбцы — *A* и *B*; проведите прямую через середину *O* отрезка *AB* перпендикулярно прямой *AB*; на построенной прямой от точки *O* по обе стороны отложите отрезки длиной *OA*. **234.** Совет неправильный. Может быть ромб. **235.** *Указание*: покажите, что лучи *BA* и *BC* являются дополнительными.

§ 6

236. Нет, поскольку $\frac{3}{2} \neq \frac{4}{2}$. **237.** 4 (рис. 125); 3 (рис. 126). **238.** Нет. **239.** 4 (рис. 128); 12 (рис. 129). **240.** 1) 4 см; 2) 7 см. **241.** 1) 6 см; 2) 15 см; 3) 4 см. **243.** 1) По 4 см и по 6 см; 2) 6 см и 12 см; 4 см и 8 см. **245.** 1) 4 см, 2,5 см, 3,5 см; 2) 15 мм, 20 мм, 25 мм; 3) 4,5 см, 5 см, 7 см. **246.** 1) 4 см, 5 см, 6 см; 2) 0,25 дм, 6 см, 6,5 см. **247.** *Указание*: выразите средние линии треугольника через его стороны. **248.** 1) По 2 см; 2) по 4 дм; 3) по 8 мм. **249.** 1) 24 см; 2) 4,8 дм; 3) 600 мм. **250.** 1) 28 см; 2) 56 см; 3) 60 см. **251.** 1) 36 см; 2) 4,8 дм; 3) 600 мм. **252.** 1) 10 см и 22 см; 2) 1,2 дм и 1,8 дм; 3) 200 мм и 28 см. **253.** 1) Равносторонний; 2) равнобедренный. **255.** 1) 9 см; 2) 12 см; 3) 20 см. **256.** *Указание*: используйте теорему Фалеса для углов *ADB* и *DBC* и прямых *MC* и *AN*. **257.** 1) 15 см, 10 см; 2) 10 см, 5 см. **258.** 2 см. *Указание*: продолжите луч *AM* на 4 см за точку *M* и получите точку *P*; продолжите отрезок *OK* за точку *K* на 4 см и получите точку *D*; рассмотрите треугольник *BAP*. **259.** 1) 7,5 см, 10 см, 12,5 см; 2) 6 см, 8 см, 10 см. **260.** 1) 28 см, 32 см, 36 см; 2) 1,4 дм, 1,6 дм, 1,8 дм. **261.** *Указание*: выразите периметры треугольников через стороны одного из них. **262.** 1) 10 см; 2) 49 см. **263.** 1) 25 см; 2) 3,5 дм. **264.** 1) 16 см; 2) 2,6 дм. **266.** *Указание*: проведите прямые, проходящие через заданные точки параллельно средним линиям треугольника. **268.** *Указание*: через точку *M* проведите прямую, параллельную *BD*; используйте теорему Фалеса. **269.** *Указание*: через основание медианы треугольника проведите прямую, параллельную другой его медиане; используйте теорему Фалеса. **270.** 2) 12 см, 24 см, 30 см; 3) 24 см. **272.** *Указание*: выразите стороны каждого из четырёх треугольников через стороны данного треугольника. **273.** 1) 36 см. **275.** *Указание*: через точку *M* проведите прямую, параллельную *BC*; используйте теорему Фалеса. **277.** *Указание*: отложите отрезок *AB* так, чтобы точка *B* лежала на первой линии листа, а точка *A* — на девятой линии. **278.** *Указание*: *MN* — средняя линия треугольника *ABC*. **281.** Таких дорог — три. Они являются средними линиями треугольника.

§ 7

282. 1) BC и AD; 2) AB и CD; 3) $\angle A$ и $\angle D$ прилежащие к основанию AD, $\angle B$ и $\angle C$ прилежащие к основанию BC; 4) $\angle A$ и $\angle B$ прилежащие к боковой стороне AB, $\angle C$ и $\angle D$ прилежащие к боковой стороне CD. **283.** $ABCD$ – трапеция. **284.** 1) 3 см; 2) 90°. **286.** Нет. **287.** *Указание*: используйте свойство параллельных прямых. **288.** $\angle B = 130°$, $\angle D = 40°$ (рис. 156); $\angle B = 90°$, $\angle C = 134°$ (рис. 157); $\angle B = 140°$, $\angle C = 144°$ (рис. 158). **289.** 1) $\angle A = 70°$, $\angle C = 150°$; 2) $\angle A = 55°$, $\angle D = 35°$. **290.** 1) $\angle D = 60°$; 2) $\angle C = 155°$; 3) $\angle C = 130°$, $\angle D = 50°$. **291.** 1) $\angle B = 110°$, $\angle D = 26°$; 2) $\angle B = 115°$, $\angle C = 144°$; 3) $\angle A = 60°$, $\angle C = 152°$; 4) $\angle A = 45°$, $\angle D = 38°$. **293.** 1) 7 см; 2) 3 см; 3) 8 см. **294.** *Указание*: используйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу. **295.** 4 см (рис. 162); 7 см (рис. 163); 15 см (рис. 164). **296.** 1) $MN = 8$ см; 2) $BC = 9$ см; 3) $AD = 13$ см; 4) $BC = 9$ см; 3) $MN = 12$ см. **297.** 1) 40 см; 2) 62 см. **298.** 8 см, 16 см, 12 см (рис. 165); 4 см, 11 см, 7,5 см (рис. 166). **299.** 1) 134° и 36°; 2) 145° и 25°; 3) 128° и 56°. **300.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **301.** 1) 2 см; 2) 38 мм. **302.** *Указание*: пусть $ABCD$ – заданная трапеция с основаниями BC и AD ($BC < AD$). Проведите $CE \parallel AB$ и докажите, что треугольник CED – равнобедренный. **303.** $\angle A = \angle D = 58°$, $\angle B = \angle C = 122°$ (рис. 167); $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$ (рис. 168); $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$ (рис. 169). **304.** *Указание*: используйте свойство равнобедренной трапеции и свойство параллельных прямых. **305.** *Указание*: используйте свойство параллельных прямых. **306.** 1) 70°, 110°, 110°, 70°; 2) 36°, 144°, 144°, 36°. **307.** *Указание*: используйте признак равенства треугольников по стороне и прилежащим углам. **308.** *Указание*: докажите равенство треугольников ABD и DCA. **309.** 6 см. **310.** 34 см. **311.** 1) 4 см и 12 см; 2) 5 см и 9 см. **312.** 1) *Указание*: докажите, что $\triangle ABK = \triangle DCM$. **313.** 1) 6 см и 18 см; 2) 3 см и 11 см. **314.** *Указание*: используйте свойство равнобедренного треугольника и свойство параллельных прямых. **315.** 1) 26 см; 2) 286 мм. **317.** 6 см. **318.** 8 см и 12 см. **319.** *Указание*: продолжите отрезок до пересечения с боковыми сторонами трапеции и используйте теорему Фалеса, затем – свойства средних линий трапеции и треугольника. **320.** 1) 14 см; 2) 9 см. **322.** *Указание*: используйте свойства параллельных прямых. **323.** 120°, 60°, 120°, 60°. **324.** *Указание*: пусть трапеция $ABCD$ имеет основания AB и CD, а её диагонали пересекаются в точке O; докажите равенство треугольников ABC и BAD. **325.** *Указание*: из вершины тупого угла трапеции проведите прямую, параллельную диагонали, до пересечения с бо́льшим основанием и используйте свойство высоты равнобедренного треугольника. **327.** 1) 60°; 2) 12 см и 24 см. **328.** $\frac{3a}{4}$. **329.** 9 см и 23 см. **331.** *Указание*: сначала постройте вспомогательный треугольник по сторонам $a + b$, d_1 и d_2. **333.** EF – средняя линия трапеции, $EF = 3$ см. **335.** 3,5 м. **336.** Да.

§ 8

338. 90° (рис. 199); 180° (рис. 200); 60° (рис. 201). **340.** Все углы по 90°. **341.** 60° (рис. 202); 25° (рис. 203); 90° (рис. 204). **342.** 1) 180°; 2) 120°; 3) 240°. **343.** 1) 30° и 330°; 2) 62° и 298°; 3) 100° и 260°. **344.** 1) 70°; 2) 210°. **346.** 1) 12 см; 2) 0,2 дм; 3) 39 мм.

347. *Указание*: докажите равенство дуг AC и BD. **348.** *Указание*: воспользуйтесь тем, что дуга BC — общая. **349.** 1) 26°; 2) 63°; 3) 100°. **350.** 1) 32°; 2) 64°; 3) 220°. **351.** 70° (рис. 208); 140° (рис. 209); 190° (рис. 210). **352.** 1) 60°, 60°, 60°; 2) 36°, 72°, 72°; 3) 30°, 60°, 90°. **353.** 1) 70°, 130°, 160°; 2) 120°, 60°, 180°; 3) 56°, 84°, 220°. **354.** 1) 32°, 32°, 116°; 2) 60°, 60°, 60°; 3) 72°, 72°, 36°. **355.** 70° (рис. 211); 20° (рис. 212). **356.** *Указание*: используйте следствие 1 из теоремы о вписанном угле. **357.** *Указание*: пусть AB и CD — хорды окружности и $AB = CD$; соедините точки A, B, C и D с центром O окружности; докажите, что $\triangle AOB = \triangle COD$. **358.** *Указание*: пусть хорда AC и диаметр BD окружности с центром O пересекаются в точке K; докажите равенство треугольников AKO и CKO. **359.** *Указание*: пусть хорда AC и диаметр BD окружности с центром O пересекаются в точке K, причём $AK = KC$; докажите равенство треугольников AKO и CKO. **362.** 1) 72° и 108°; 2) 80° и 100°. **363.** 1) 67°30′; 2) 40°. **364.** 1) 40°; 2) 60°. **365.** *Указание*: используйте теорему о вписанном угле. **366.** 30° или 150°. **367.** 1) 45° и 135°; 2) 36° и 144°. **368.** *Указание*: воспользуйтесь тем, что вся окружность содержит 360°, и теоремой о вписанном угле. **369.** 100° (рис. 213); 120° (рис. 214); 145° (рис. 215). **370.** 1) 70° и 35°; 2) 90° и 45°. **371.** *Указание*: используйте следствие 2 из теоремы о вписанном угле. **372.** *Указание*: см. задачу 371. **374.** 1) 45°; 2) 40°. **375.** *Указание*: используйте теорему о внешнем угле треугольника и найдите $\angle ABC$. **376.** *Указание*: используйте теорему о сумме углов треугольника и теорему о смежных углах; найдите $\angle DBC$ треугольника DBC. **377.** 50° (рис. 219); 80° (рис. 220). **378.** 40°, 60°, 80°. **381.** 1) Окружность, радиус которой равен половине отрезка, соединяющего данные точки; 2) дуга окружности, описанной около треугольника со стороной AB и противолежащим острым углом α. **382.** *Указание*: используйте следствие 2 из теоремы о вписанном угле. **383.** *Решение*. Совместим вершину прямого угла угольника с любыми двумя точками окружности, которая является внешним контуром диска, и проведём две хорды этой окружности по гипотенузе угольника; по следствию 1 из теоремы о вписанном угле, хорды являются диаметрами окружности; точка пересечения этих диаметров — искомый центр диска.

§ 9

385. Нет. **387.** Нет. **388.** 1) 9 см; 2) 180°. **389.** $\angle B = 100°$, $\angle C = 85°$ (рис. 234); $\angle M = 75°$, $\angle N = 120°$, $\angle K = 105°$ (рис. 235); $\angle F = 90°$, $\angle E = 60°$, $\angle Q = 90°$, $\angle P = 120°$ (рис. 236). **390.** 1) а) Нет; б) да; 2) а) да, если $\angle D = 50°$; б) нет. **391.** 1) 125°; 2) 108°; 3) 120°. **392.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **393.** *Указание*: воспользуйтесь следствием 2 из теоремы о вписанном угле. **394.** 1) *Указание*: воспользуйтесь следствием 2 из теоремы о вписанном угле; 2) при условии, что $AD \perp BC$. **395.** 10 см (рис. 238); 3 см и 7 см (рис. 239); $3\frac{1}{3}$ см и $6\frac{2}{3}$ см (рис. 240). **396.** 1) 40 см; 2) 6,4 дм. **397.** 1) 80 см; 2) 52 см. **398.** 1) Да; 2) нет. **399.** 1) Нет; 2) да; 3) да. **401.** 1) 90°; 2) 60°. **402.** 1) 10 см; 2) 2,3 дм. **403.** 1) Да; 2) нет. **407.** 1) Да; 2) нет. **408.** Да. **409.** *Указание*: в полученном четырёхугольнике смежные стороны должны быть равны. **412.** 1) 3 мм, 10,5 мм, 18 мм, 10,5 мм; 2) 4 см, 14 см, 24 см, 14 см. **413.** Средняя линия трапеции равна $\frac{P}{4}$, поэтому: 1) 4 см; 2) 50 мм.

414. 1) 20 см; 2) 10 см. **415.** 1) *Указание*: постройте окружность радиуса R и проведите в ней два перпендикулярных диаметра; последовательно соедините точки пересечения диаметров с окружностью. **416.** 1) *Указание*: постройте окружность радиуса R, проведите в ней произвольный диаметр, из точек пересечения диаметра с окружностью проведите окружность радиуса a; рассмотрите разные случаи. **420.** Да. *Указание*: используйте признак описанного четырёхугольника. **422.** *Указание*: следует учесть, что $h = 2r$, где h — высота ромба, r — радиус вписанной окружности. **425.** *Указание*: диаметр окружности равен меньшей стороне прямоугольника. **426.** *Указание*: проведите в данной окружности два перпендикулярных диаметра. **427.** *Указание*: колодец должен быть размещён в центре окружности, описанной около трапеции.

Глава 2

§ 10

429. 1) $1\frac{1}{3}$; 2) 2. **431.** 1) $P_1 = 17{,}1$, $P_2 = 20{,}51$, $P_2 : P_1 = 1{,}2$; 2) $P_1 = 17{,}9$, $P_2 = 14{,}32$, $P_2 : P_1 = 0{,}8$; 3) $P_1 = 36$, $P_2 = 27$, $P_2 : P_1 = 0{,}75$; 4) $P_1 = 7{,}5$, $P_2 = 15$, $P_2 : P_1 = 2$. **433.** 1) Нет; 2) нет; 3) нет. **434.** 1) $\angle A_1 = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$; 2) $\angle A = \angle A_1 = 80°$, $\angle B = \angle C_1 = 50°$; 3) $\angle A = \angle A_1 = 45°$, $\angle B_1 = 110°$, $\angle C = 25°$. **435.** 1) Да; 2) треугольников с такими длинами сторон не существует; 3) нет. **436.** 1) 6 см, 7 см; 2) 15 см, 4,2 см; 3) 13 см, 18,5 см. **437.** *Указание*: воспользуйтесь тем, что в подобных треугольниках соответственные углы равны, а затем — признаком параллельности прямых. **438.** 1) $MN \parallel AC$; 2) $MN \parallel AB$; 3) $MN \parallel BC$. **439.** 1) 46 см, 23 см; 2) 29 см, 70 см; 3) 15 см, 40 см; 4) 31 см, 9 см. **440.** 1) 3 см; 2) 3,75 см; 3) 6 см. **441.** 1) 5 см, $8\frac{1}{3}$ см, $11\frac{2}{3}$ см; 2) 9 см, 15 см, 21 см. **442.** *Указание*: воспользуйтесь тем, что в подобных треугольниках соответственные углы равны. **443.** Да, $k = \frac{2}{3}$. **444.** Да, $k = 2$. **445.** 1) Нет; 2) нет. **446.** 1) Да; 2) да. **447.** 1) 6 см; 2) 37,5 см. **448.** 1) 112 см, 64 см; 2) 30 см, 45 см. **449.** 1) 12 см; 2) 10 см. **450.** Да, $k = 1$. **451.** $k = \frac{1}{2}$. **452.** 1) 15 см, 30 см, 30 см; 2) 3,75 см, 11,25 см, 11,25 см. **453.** *Указание*: используйте свойство периметров подобных треугольников. **454.** Да. **455.** Да, в равнобедренных треугольниках. **456.** *Указание*: используйте свойство периметров подобных треугольников. **457.** *Указание*: под микроскопом градусные меры углов не изменяются. **458.** Да. **459.** Масштаб 1 : 250000. **460.** 45 см, 50 см, 25 см. **461.** Да.

§ 11

462. 3 : 5 (рис. 258); 4 : 3 (рис. 259). **463.** 1) MH; 2) PM; 3) MH. **464.** 1) Да; 2) нет. **465.** 1) 2 : 3; 2) 5 : 1; 3) 2 : 1. **466.** 4. **467.** 1) Да; 2) да. **468.** 1) 4 см, 6 см; 2) 12 см, 4 см; 3) 6 см, 8 см; 4) 15 см, 3 см. **472.** 1) Да; 2) нет; 3) нет. **473.** 1) 6 или 1,5; 2) 8 или 4,5;

3) $11\frac{2}{3}$ или 4,2. **476.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет. **477.** Да. **478.** *Указание*: используйте следствие из обобщённой теоремы Фалеса. **479.** 1) 3 см, 2 см, 12 см, 9 см, 6 см; 2) 8 см, 4 см, 24 см, 18 см, 12 см; 3) 6 см, 4,5 см, 18 см, 13,5 см, 9 см; 4) 4 см, 3 см, 2 см, 9 см, 6 см; 5) 4 см, 3 см, 2 см, 12 см, 6 см; 6) $6\frac{2}{3}$ см, 5 см, $3\frac{1}{3}$ см, 20 см, 15 см. **480.** $AC=\frac{am}{m+n}$. **481.** 1) 16 см, 32 см, 30 см; 2) 10 см, 24 см, 16 см. **482.** 1) 15 см, 10 см; 2) 20 см, 4 см. **483.** 1) $\frac{125}{34}$ см, $\frac{100}{17}$ см, $\frac{50}{17}$ см, 2) $\frac{250}{17}$ см, $\frac{400}{17}$ см, $\frac{200}{17}$ см. **484.** 1) 15 см; 2) 100 см. **485.** 1) $BC=16$ мм, $CL=24$ мм, $LF=16$ мм, $DC=50$ мм, $KL=20$ мм; 2) $BC=6$ см, $CL=9$ см, $LF=6$ см, $DC=15$ см, $KL=6$ см. **486.** 1) 3 см, 6 см; 2) 5,6 см, 8,4 см. **487.** 1) 12 см; 2) 12 см. **488.** 1) 15 см, 10 см; 2) 20 см, 4 см; 3) 21 см, 3 см. **489.** 1) 4 см, 8 см, 12 см; 2) 3,1 см, 6,2 см, 9,3 см. **490.** *Указание*: используйте свойство периметров подобных треугольников. **491.** 1) 7,5; 2) 4,5. **493.** $\frac{a}{a+b+c}$; $\frac{b}{a+b+c}$; $\frac{c}{a+b+c}$; $\frac{a+b}{a+b+c}$; $\frac{b+c}{a+b+c}$. **494.** 1) 21,6 см; 2) 36 см. **495.** *Указание:* используйте обобщённую теорему Фалеса. **496.** 1) *Указание:* сначала докажите, что $\triangle AOB \backsim \triangle DOC$; 2) 6,25 и 3,75. **497.** *Указание:* пусть AA_1 пересекает MN в точке O; докажите, что $\triangle AMO \backsim \triangle ABA_1$ и $\triangle ANO \backsim \triangle ACA_1$. **498.** 1) Нет; 2) нет, лишь для равнобедренной трапеции. **499.** 1) 8 см, 9 см; 2) $11\frac{1}{3}$ см, $12\frac{2}{3}$ см. **500.** 1) $\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b$, $\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b$. **501.** *Указание*: $\triangle AOB \backsim \triangle A_1OB_1$. **502.** 10 мин. **503.** 28 м. **504.** 36 м.

§ 12

507. Например, треугольник с углами 50°, 50°, 80° и треугольник с углами 40°, 40°, 100°. **508.** Например, треугольник с углами 40°, 50°, 90° и треугольник с углами 30°, 60°, 90°. **510.** 1) $\triangle LKM \backsim \triangle HOP$; 2) $\triangle MKL \backsim \triangle PHO$; 3) $\triangle LMK \backsim \triangle POH$. **511.** 1) Да; 2) да; 3) да. **512.** Поскольку из равенства данных отношений не следует равенство соответственных углов треугольников. **513.** 1) $\angle A=\angle B=\angle C=60°$, $AB=BC=AC=2$ см, $\angle A_1=\angle B_1=\angle C_1=60°$, $AB_1=BC_1=AC_1=6$ см; 2) $\angle A=\angle B==\angle C=60°$, $AB=BC=AC=4$ см, $\angle A_1=\angle B_1=\angle C_1=60°$, $AB_1=BC_1=AC_1=2$ см; 3) $\angle A=\angle B=\angle C=60°$, $AB=BC=AC=9$ см, $\angle A_1=\angle B_1=\angle C_1=60°$, $AB_1=BC_1=AC_1=3$ см. **514.** 1) 5 см, 7 см, 3 см и 15 см, 21 см, 9 см; 2) 6 см, 8 см, 4 см и 4,5 см, 6 см, 3 см; 3) 8 см, 10 см, 6 см и 16 см, 20 см, 12 см. **515.** *Указание*: используйте признак равнобедренного треугольника и признак подобия треугольников по двум углам. **516.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **517.** *Указание*: используйте признак подобия треугольников по двум углам. **518.** *Указание*: используйте признак подобия треугольников по двум углам. **519.** 1) Да; 2) нет; 3) да. **520.** *Указание*: найдите острые углы треугольников и используйте признак подобия треугольников по двум углам.

521. $a : b$ или $b : a$. **522.** 1) $68\frac{4}{7}$ мм, $111\frac{3}{7}$ мм; 2) 1,5 дм, 0,9 дм; 3) $6\frac{9}{11}$ см, $18\frac{2}{11}$ см. **523.** *Указание*: используйте признак подобия треугольников по двум углам. **524.** *Указание*: используйте признак подобия треугольников по двум углам. **525.** *Указание*: используйте признак параллельности прямых и признак подобия треугольников по двум углам. **526.** 10 см, 8 см. **527.** *Указание*: воспользуйтесь тем, что медианы треугольника точкой их пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины, и рассмотрите полученные подобные треугольники. **528.** 1) 12 см; 2) 4 см. **529.** *Указание*: один из углов, образованный данной прямой с наибольшей стороной данного треугольника, должен быть равен наибольшему его углу. **530.** 1) 4; 2) 3; 3) 2. **531.** 1) 4,2 см; 2) $6\frac{2}{13}$ см. **532.** *Указание*: см. задачу № 531. **533.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{13}{5}$. **534.** *Указание*: используйте признак подобия треугольников по двум углам. **535.** *Указание*: равные высоты могут не быть соответственными. **536.** *Указание*: используйте признак подобия треугольников по двум углам. **537.** 8 см, 12 см. **538.** 1) 12 см, 36 см; 2) 18 см, 30 см. **539.** *Указание*: рассмотрите две пары подобных треугольников и почленно сложите полученные пропорции. **540.** 1) 20 см, 30 см; 2) 9 см, 18 см. **541.** *Указание*: используйте признак подобия треугольников по двум углам. **542.** *Указание*: воспользуйтесь тем, что медианы точкой их пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины, и рассмотрите полученные подобные треугольники. **543.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) 1; 3) $1\frac{1}{4}$. **544.** *Указание*: проведите две высоты и рассмотрите два подобных треугольника, катетами которых являются данные высоты. **545.** 1) 12 см, 24 см; 2) 30 см, 20 см. **546.** *Указание*: проведите диаметр окружности BD и используйте свойство вписанных углов, опирающихся на хорду BC. **547.** *Указание*: докажите подобие сначала треугольников AOM и NKM, а также BON и BKA, затем треугольников BKA и MKN. **548.** *Указание*: докажите подобие $\triangle ABC$ и, например, $\triangle ALK$. **549.** *Указание*: воспользуйтесь тем, что около четырёхугольника $BDCM$ можно описать окружность, а вписанные углы BCD и BMD опираются на одну хорду. **550.** *Указание:* докажите, что $\angle B$ не может быть тупым; рассмотрите внутренние односторонние углы при параллельных прямых AB и CD и секущей AC. **551.** 195 м. **552.** *Указание*: постройте подобный треугольник с соответственно параллельными сторонам данного треугольника сторонами. **553.** 189,65 м. **554.** *Указание*: на одном из трёх лучей возьмите две точки и проведите из них перпендикуляры к двум другим лучам, рассмотрите две пары подобных прямоугольных треугольника, образовавшихся при этом.

§ 13

557. Например, треугольник со сторонами 10 см, 16 см и углом между ними 50°. **559.** Нет. **560.** 10 см, 12 см, 18 см. **562.** 1) $a = LM$, $b = LK$, $ka = HP$, $kb = HO$, $\triangle LMK \backsim \triangle HPO$; 2) $a = MK$, $b = ML$, $ka = PO$, $kb = PH$, $\triangle MKL \backsim \triangle POH$. **563.** 1 – 3. **564.** 1) Нет; 2) нет; 3) да. **565.** 1) $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 3$ см, $KL = 15$ см,

$LM = 21$ см, $KM = 9$ см; 2) $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 4$ см, $KL = 4{,}5$ см, $LM = 6$ см, $KM = 3$ см; 3) $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 6$ см, $KL = 16$ см, $LM = 20$ см, $KM = 12$ см.

566. Да. **567.** Первый и третий. **568.** 1) 144 см, 96 см, 48 см; 2) 40 см, $26\frac{2}{3}$ см, $13\frac{1}{3}$ см; 3) 56 см, $37\frac{1}{3}$ см, $18\frac{2}{3}$ см. **569.** 1) 6,4 мм, 10,4 мм, 38,4 мм, 62,4 мм; 2) 6 см, 10 см, 12 см, 20 см; 3) $2\frac{2}{3}$ см, $6\frac{2}{3}$ см, $6\frac{2}{3}$ м, $16\frac{2}{3}$ см. **570.** Первый и второй. **571.** 1) 21 см, 27 см, 36 см; 2) 119 см, 56 см, 105 см; 3) 30 см, 25 см, 45 см. **572.** 1) 24 см; 2) 27 см; 3) 128 см. **573.** 1) 36 мм; 2) 0,9 дм; 3) 16 см. **574.** *Указание*: преобразуйте заданное равенство произведений в пропорцию. **575.** *Указание*: используйте признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними. **576.** Равные медианы могут не быть соответственными. **577.** 12. **578.** 1) 2 : 7; 2) 1 : 4. **579.** *Указание*: пусть O — точка пересечения высот BH и CM; сначала на стороне BC как на диаметре постройте вспомогательную окружность и докажите подобие треугольников BOC и MOH. **580.** 2. **581.** 1) 2 : 1; 2) 1 : 2. **582.** 5. **583.** 1) 1 : 3; 2) 1 : 2. **584.** 1) Нет; 2) да; 3) да. **585.** *Указание*: используйте способ, аналогичный доказательству признака подобия треугольников по трём сторонам. **586.** $\frac{ma}{1+m}$. **587.** 2 : 1. **588.** 60°, 120°. **589.** 1) $\frac{a+mb}{1+m}$; 2) $\frac{2ab}{a+b}$; 3) $\frac{2ab}{a-b}$. **590.** *Указание*: рассмотрите три пары подобных треугольников. **591.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{3}{7}$. **592.** *Указание*: докажите, что указанные четыре точки являются вершинами четырёхугольника, в котором суммы противоположных углов равны по 180°. **593.** 3 : 2. **594.** 1 : 1. **595.** *Указание*: используйте признак подобия треугольников по двум углам. **596.** *Указание*: используйте признак подобия треугольников по двум углам. **597.** $\approx$ 14 м. **599.** *Указание*: в $\triangle AKB$ проведите вспомогательную среднюю линию, параллельную AB, и рассмотрите две пары подобных треугольников, образовашихся при этом.

§ 14

601. 1) 36; 6; 2) 25; 5; 3) 9; 3; 4) 16; 4. **604.** 1) 25, 20, 15, 12; 2) 169, 65, 156, 60; 3) 289, 136, 255, 120. **605.** 1) Да; 2) нет; 3) нет. **606.** *Указание*: проведите высоту из вершины прямого угла и докажите равенство полученных треугольников. **607.** 1) 2; 2) 2; 3) 6. **608.** 1) 4 см; 2) 2 см; 3) 5 см; 4) 6 см. **609.** *Указание*: используйте свойство вписанного угла, опирающегося на диаметр. **610.** *Указание*: см. задачу 609. **612.** 1) 8 см, 12 см; 2) $5\frac{5}{13}$ см, $4\frac{8}{13}$ см; 3) 1,5 см, 2,5 см; 4) 3 см, 9 см. **613.** *Указание*: используйте свойство биссектрисы и свойство медианы треугольника. **614.** *Н.* **616.** *Указание*: используйте свойство высоты, проведённой к гипотенузе прямоугольного треугольника. **617.** 1 : 3 или 3 : 1. **618.** 1 : 3. **619.** 30°, 60°, 90°. **621.** 1) 4,8; 2) 6,72. **622.** 1) 24 см;

2) 120 мм. **623.** *Указание*: используйте признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними. **624.** *Указание*: см. задачу 624 (1). **625.** *Указание*: см. задачу 624 (2). **626.** *Указание*: см. задачу 624 (3). **627.** Два случая. **632.** 1) *Указание*: используйте то, что центральные углы, опирающиеся на стороны треугольника, в два раза больше, чем углы треугольника. **633.** Нет. **635.** *Указание*: используйте теорему о средних пропорциональных в прямоугольном треугольнике и следствие из неё. **636.** *Указание*: через вершину тупого угла проведите прямую, параллельную боковой стороне; рассмотрите полученный прямоугольный треугольник и используйте свойство высоты, проведённой к гипотенузе. **637.** *Указание*: используйте свойство биссектрисы треугольника. **638.** *Указание*: используйте свойство биссектрисы треугольника. **639.** 1) $\frac{ab}{b+c}$, $\frac{ac}{b+c}$; 2) $\frac{ab}{b-c}$, $\frac{ac}{b-c}$, $b \neq c$. **640.** $\frac{a+b}{c}$. **641.** $0{,}5a$. **642.** *Указание*: докажите, что треугольник с вершинами в центре средней окружности и точках касания двух других окружностей с одной из сторон данного угла — прямоугольный. **643.** *Указание*: используйте свойство вписанных углов, опирающихся на одну хорду. **649.** *Указание*: см. задачу 609. **650.** *Указание*: чтобы построить точки, которые не являются концами двух перпендикулярных диаметров, разделите диаметр в отношении 1 : 9 и используйте свойство высоты, проведённой к гипотенузе прямоугольного треугольника. **651.** *Указание*: используйте свойство биссектрисы треугольника. **654.** *Указание*: три точки — глаз, верхушка вехи и верхушка дерева должны лежать на одной прямой. Это можно сделать, если поставить веху и отойти от неё на такое расстояние, с которого, если смотреть одновременно на верхушки вехи и дерева, они совмещаются.

Глава 3

§ 15

657. 1) 14 см; 2) 20 см; 3) 18 см. **659.** 1) Семиугольник; 2) восьмиугольник. **661.** 1) 5; 2) 5; 3) 5. **662.** 1) 540°; 2) 1260°; 3) 2700°. **663.** 1) 10; 2) 8; 3) 11. **664.** 1) 4; 2) 10; 3) 15. **665.** 1) 30°, 60°, 120°, 150°, 180°; 2) 80°, 100°, 110°, 110°, 140°; 3) 100°, 110°, 120°, 90°, 120°; 4) 20°, 100°, 140°, 180°, 100°. **666.** 1) 90°; 2) 36°; 3) 24°. **667.** Семиугольник. **669.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **670.** 1) 35; 2) 119. **671.** 1) Нет; 2) нет. **672.** Нет. **673.** 1) 5; 2) 6. **674.** 1) 6:5:4:2:1; 2) 8:7:5:4:3. **675.** *Указание*: сумма внутреннего и внешнего углов многоугольника равна 180°. **676.** $\frac{360^\circ}{n}$. **677.** 1) 6; 2) 9. **678.** 8,4 см или 40,4 см. **679.** *Указание*: используйте неравенство треугольника. **681.** 1) 3 и 6; 2) 6 и 3; 4 и 4. **683.** 1) 4; 2) 6; 3) 7. **684.** *Указание*: рассмотрите треугольник, в котором сторона является стороной данного многоугольника, а противоположная вершина лежит в центре описанной окружности. **685.** *Указание*: пусть O — центр окружности; докажите, что $\triangle BOD$ — прямоугольный, и используйте теорему о средних пропорциональных в прямоугольном треугольнике.

§ 16

686. 11 кв. ед. (рис. 357); 12 кв. ед. (рис. 358). **687.** 4 см^2 (рис. 359); 8 см^2 (рис. 360); 2 см^2 (рис. 361). **688.** 1) 7,5 см^2; 2) 5 см^2; 3) 22,5 см^2. **689.** 1) 4 см; 2) 3 см; 3) 11 см. **691.** 1) 96 см^2; 2) 160 см^2. **692.** 1) Увеличится в 3 раза; 2) уменьшится в 4 раза; 3) увеличится в 1,5 раза. **693.** 1) Увеличится в 9 раз; 2) уменьшится в 16 раз; 3) увеличится в 2,25 раза. **694.** 1) $b = 1,5$ см; $S = 6$ см^2; 2) $a = 0,5$ см; $P = 25$ см; 3) $a = 3,5$ см; $S = 24,5$ см^2; 4) $b = 0,5$ см; $P = 17$ см. **695.** 1) 20; 30; 2) 15; 40. **696.** 1) 2 см^2; 2) 4,5 см^2; 3) $\frac{25}{2}$ см^2. **697.** 1) 24 см, 26 см; 2) 24 см, 40 см; 3) 40 см, 50 см. Квадрат. **698.** $\frac{7a^2}{9}$ (рис. 364); $\frac{5a^2}{9}$ (рис. 365). **699.** 1) 81 см^2, 25 см^2; 2) 361 см^2, 256 см^2. **700.** 1) 56 см, 40 см; 2) 200 см, 176 см. **701.** $\sqrt{\frac{mS}{n}}; \sqrt{\frac{nS}{m}}$. **702.** $\frac{nP}{2(m+n)}$; $\frac{mP}{2(m+n)}$. **703.** 1) Площадь прямоугольника со сторонами $b + a$ и c равна сумме площадей прямоугольников со сторонами a и c, b и c; 2) площадь прямоугольника со сторонами $a - b$ и c равна разности площадей прямоугольников со сторонами a и c и b и c. **704.** 1) 1 см; 2) 2 см. **705.** 25 см^2. **707.** 9 см^2, 1 см^2, 7 см^2, 7 см^2. **708.** Да. *Указание*: покажите, что сумма площадей квадратов со сторонами соответственно AB и BC равна площади квадрата со стороной AC без удвоенной площади прямоугольника со сторонами AB и BC. **709.** *Указание*: площадь прямоугольного треугольника равна сумме площадей прямоугольных треугольников, на которые его разбивает высота. **713.** 250 м^2. **714.** Да. **715.** 42,9 м^2.

§ 17

721. Да (рис. 373); нет (рис. 374); да (рис. 375). **722.** 45 кв. ед. (рис. 376); 42 кв. ед. (рис. 377). **723.** 24 кв. ед. **724.** 1) 3000 см^2; 2) 1000 см^2; 3) 2500 см^2. **725.** 1) 80 см^2; 2) 300 см^2; 3) 30 см^2. **726.** 1) 4 см; 2) 5 см; 3) 3 см. **727.** 1) $h_a = 8,2$ см; $h_b = 4,1$ см; 2) $h_a = 4$ см; $h_b = 2$ см; 3) $h_a = 4,5$ см; $h_b = 3$ см; 4) $h_a = 4$ см; $h_b = 6,4$ см. **728.** 1) 8 см; 2) 5 см; 3) 4 см. **729.** 1) 4 см; 2) 12 мм; 3) 15 см. **730.** *Указание*: проведите диагонали параллелограмма и прямые, проходящие через точку пересечения диагоналей параллельно сторонам; покажите, что площадь каждого из 8 треугольников равна $\frac{1}{8}$ площади данного параллелограмма. **731.** Да. **732.** 1) 96 см^2; 2) 2,4 дм^2; 3) 840 мм^2. **733.** *Указание*: воспользуйтесь тем, что диагонали ромба перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. **734.** 1) 100 см^2; 2) 120 см^2; 3) 72 см^2. **735.** 1) 8 см^2; 2) 4,5 см^2; 3) 0,72 м^2. **736.** 1) 75 см^2; 2) 250 см^2. **737.** 1) $75\sqrt{3}$ мм^2; 2) $250\sqrt{3}$ мм^2. **738.** 2) 3,38 см^2. **739.** 1) 8 см; 3 см; 2) $\frac{3}{2}$ дм; 6 дм. **740.** 1) 30 см; 2) 30 см. **741.** 1) 128 см^2; 2) 140 см^2. **742.** *Указание*: если от треугольников, имеющих равные площади, отсечь треугольники с равными площадями, то получим фигуры с равными площадями. **743.** 1) $3\sqrt{6}$ см; $4\sqrt{6}$ см; 2) $4\sqrt{3}$ см; $6\sqrt{3}$ см; 3) $6\sqrt{2}$ см; $6\sqrt{2}$ см.

744. 4 см. **745.** 30°. **746.** 1 : 2. **747.** 48 см^2. **748.** *Указание*: покажите, что диагональ ромба разделяет его на два равносторонних треугольника, а затем выразите площадь ромба и площадь треугольника, образованного высотами, через сторону и высоту ромба. **750.** *Указание*: треугольники *AMD* и *CMD* разделите высотами, проведёнными из вершины *M*, на прямоугольные треугольники и покажите, что сумма их площадей равна половине площади параллелограмма. **751.** Диагональ равна стороне, к которой эта диагональ перпендикулярна. **752.** 1) 24 см^2. **753.** Две прямые, параллельные данной стороне параллелограмма и находящиеся от неё на расстоянии $\frac{S}{h}$. **755.** 24 500 м^2. **757.** Площадь прямоугольника больше площади параллелограмма.

§ 18.

760. 1) Нет; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) нет; 6) нет. **761.** 10 кв. ед. (рис. 390); 42,5 кв. ед. (рис. 391); 210 кв. ед. (рис. 392). **762.** 1) 15 см^2; 2) 5 дм^2; 3) 1250 см^2. **763.** 1) 40 см^2; 2) 1,5 дм^2; 3) 108 мм^2. **764.** 1) 12 см; 2) 31 см; 3) 20 см. **765.** 1) $h_a = \frac{168}{13}$ см, $h_b = 12$ см, $h_c = \frac{168}{15}$ см; 2) $h_a = \frac{252}{13}$ см, $h_b = 12{,}6$ см, $h_c = 12$ см; 3) $h_a = 12$ см, $h_b = \frac{42}{15}$ см, $h_c = 2{,}1$ см; 4) $h_a = 8$ см, $h_b = 7{,}2$ см, $h_c = \frac{72}{17}$ см. **766.** 1) Не изменится; 2) увеличится в 2 раза; 3) увеличится в 2 раза. **767.** *Указание*: сравните высоты и основания треугольников. **768.** Пополам. **769.** 0,25. **770.** 1) 210 см^2; 2) 84 см^2; 3) 420 см^2. **771.** 1) $p = 42$ см, $S = 210$ см^2; 2) $p = 27$ см, $S = 126$ см^2; 3) $p = 21$ см, $S = 42$ см^2; 4) $p = 45$ см, $S = 240$ см^2. **772.** 1) 39 см^2; 2) 60 см^2. **773.** *Указание*: используйте свойства средней линии треугольника. **774.** 1) 18 см, 80 см; 2) 48 см, 55 см. **775.** 1) 39 см^2; 2) 34 см^2. **776.** 1) $8\sqrt{3}$ см^2; 2) $18\sqrt{3}$ см^2. **777.** 1) $16\sqrt{3}$ см^2; 2) $36\sqrt{3}$ см^2. **778.** 1) 24 см^2; 2) 120 см^2. **779.** $h_c < h_b < h_a$. **780.** *Указание*: измерьте соответственные стороны треугольников. **781.** *Указание*: воспользуйтесь тем, что медианы треугольника точкой их пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. **782.** 1) $\frac{16}{3}$ см; 2) $\frac{16}{3}$ см; 3) $\frac{8}{3}$ см. **783.** *Указание*: соедините данную точку с вершинами треугольника, потом найдите площадь треугольника как сумму площадей полученных трёх треугольников. **784.** Две прямые, параллельные данной стороне треугольника и отстоящие от неё на расстоянии, равном высоте, проведённой к этой стороне. **785.** *Указание*: используйте две формулы площади треугольника. **786.** $\frac{S_{\Delta ABC}}{n}$. **787.** $7S$, где S — площадь заданного треугольника. **788.** $1 : \sqrt{2} - 1 : \sqrt{3} - \sqrt{2}$. **789.** $4 \cdot \sqrt{\frac{m}{m+n}}$.
792. *Указание*: треугольники *ABC* и *ACM* имеют равные площади, поэтому площадь треугольника *ABC* равна половине произведения длины отрезка *AM* на ширину линейки. **795.** 0,927 кг.

§ 19.

797. 1) Нет; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) нет; 6) да. **798.** 300 кв. ед. (рис. 408); 150 кв. ед. (рис. 409). **799.** 1) 2400 см^2; 2) 1400 см^2; 3) 4000 см^2. **800.** 1) 90 см^2. **801.** 1) 10 см; 2) 12 см; 3) 12 см. **802.** 1) 4 см; 2) 5 см; 3) 3 см. **803.** 1) $q = 12$ см, $S = 84$ см^2; 2) $b = 27$ см, $h = 5$ см; 3) $a = 20$ см, $q = 21$ см; 4) $a = 23$ см, $h = 11$ см. **804.** 1) Не изменится; 2) не изменится; 3) увеличится в 2 раза. **805.** 1) 20 см, 16 см; 2) 36 см, 24 см; 3) 20 см, 10 см. **806.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **807.** 1) 645 см^2; 2) 180 см^2. **808.** 1) 10,5 см^2; 2) 8 см^2. **809.** 1) 6 см^2; 2) 13,5 см^2. **810.** 45°. **811.** 1) 5,6 см^2; 2) 96 см^2. **812.** Рассмотрите два случая. 8 см и 12 см или 2 см и 6 см. **813.** 12 см. **814.** *Указание*: если трапеция описана около окружности, то сумма её оснований равна сумме боковых сторон. **815.** $\frac{2S}{P}$. **816.** 10 см. **817.** *Указание*: используйте свойство средней линии трапеции. **818.** От 16 см до 32 см. **819.** $\frac{2ab}{a+b}$. **820.** *Указание*: докажите, что площади треугольников BOC и COD и площади треугольников AOB и BOC относятся, как $AB : CD$. **821.** $\left(\frac{m}{n}\right)^2 : 1 : \frac{m}{n} : \frac{m}{n}$. **822.** 90°. **823.** $\frac{4dc}{5}$. **824.** *Указание*: используйте свойство медианы прямоугольного треугольника, проведённой к его гипотенузе. **825.** *Указание*: покажите, что сумма площадей двух других из образовавшихся треугольников равна половине площади трапеции. **826.** *Указание*: покажите, что площадь каждой такой трапеции равна половине площади заданного треугольника. **827.** 346 500 кв. ед. **828.** *Указание*: разбейте четырёхугольник на прямоугольные треугольники и вычислите их площади. **829.** *Указание*: покажите, что расстояние от меньшей боковой стороны трапеции до искомой прямой равно половине средней линии трапеции. **830.** Недостаточно.

Глава IV

§ 20

831. 3). **832.** Да (рис. 425); нет (рис. 426). **834.** 3). **835.** 1) 13 см; 2) 15 м; 3) 16 см. **836.** 1) 5 см; 2) 8 м; 3) $12a$. **837.** 1) $a = 12$ см; 2) $b = 16$ см; 3) $c = 10a$. **838.** 1) $d = 25$ см; 2) $b = 24$ см; 3) $b = 9a$. **839.** *Указание*: в данном прямоугольнике проведите диагональ и используйте теорему Пифагора в полученном прямоугольном треугольнике. **840.** 4 см. **841.** 1) $\sqrt{2}$ см; 2) 8 см; 3) $a\sqrt{2}$. **842.** 1) 1 см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$. **843.** 1) 1,5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **844.** 1) 24 см; 2) 15 см; 3) 12 см. **845.** 1) 15 см; 2) 20 см. **846.** 1) 5 см; 2) 15 см; 3) 10 см. **847.** *Указание*: используйте теорему Пифагора в прямоугольном треугольнике с вершинами в двух соседних вершинах ромба и точке пересечения его диагоналей. **848.** 1) 26 см; 2) 8 см; 3) 15 см. **849.** 17 см (рис. 429); $6\sqrt{2}$ см (рис. 430); 13 см (рис. 431). **850.** 1) 5 см, 12 см, 13 см; 2) 7 см, 24 см, 25 см. **851.** 1) 15 см, 20 см; 2) 12 см, 16 см. **852.** 1) 9 см, 12 см, 15 см; 2) 30 см, 16 см, 34 см. **853.** 1) 15 см, 18 см; 2) 16 см, 17 см. **854.** 1) 9 см, $3\sqrt{73} \approx 25{,}6$ см; 2) 24 см, $2\sqrt{193} \approx 27{,}8$ см. **855.** 1) 10 см; 2) $\sqrt{41} \approx 6{,}4$ см. **856.** *Указание*: рассмотрите два прямоугольных треугольника, одним из катетов которых является меньшая боковая сторона трапеции. **857.** 8 см (рис. 432); 5 см (рис. 433); 14 см (рис. 434). **858.** 1) 20 см; 2) 13 см. **859.** 1) 10 см; 2) 25 см. **860.** 1) 4 см; 2) 6 см. **861.** 1) 8 см или 22 см; 2) 38 см или 88 см. **862.** 8 см. **865.** 1) 10 см; 2) $5\sqrt{2}$ см. **866.** 21 см или 11 см. **867.** 1) 6 см, 15 см; 2) 8 см. **868.** *Указание*: используйте признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам. **869.** *Указание*: используйте теорему Пифагора. **870.** 1) 120 см; 2) $34 + 8\sqrt{34} \approx 80{,}6$ см. **871.** 1) 61 см, 11 см; 2) 37 см, 12 см. **872.** 1) 37 см, $\sqrt{769} \approx 27{,}7$ см; 2) 20 см, $2\sqrt{205} \approx 28{,}6$ см. **873.** 1) 8 см, 9,6 см, 9,6 см; 2) 12 см, 5,6 см, 4,2 см. **874.** *Указание*: пусть *ABCD* — данный параллелограмм, *O* — точка пересечения его диагоналей; проведите перпендикуляры из вершин *B* и *C* к прямой *AD*; рассмотрите полученные прямоугольные треугольники, используйте теорему Пифагора. **875.** *Указание*: см. задачу 874. **876.** *Указание*: используйте теорему Пифагора. **877.** *Указание*: в данном квадрате проведите диагонали; квадраты, построенные на половинах этих диагоналей, — искомые. **878.** *Указание*: используйте теорему Пифагора. **880.** 6 см. **881.** *Указание*: проведите $BE \parallel CD$ и обоснуйте, что *AE* — диаметр и $CE = DB$. **883.** $\sqrt{241} \approx 15{,}5$ м. **884.** 328 м. **885.** 12,5 м. **886.** 1) 6,5 м; 2) 6,7 м. **887.** 12 футов.

§ 21

889. 1) б; 2) в; 3) б. **890.** 1) а; 2) б; 3) в. **893.** $\sin\alpha \approx 0{,}5$, $\cos\alpha \approx 0{,}9$, $\operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}5$. **896.** 1) $\sin 35^\circ \approx 0{,}57$, $\cos 35^\circ \approx 0{,}82$, $\operatorname{tg} 35^\circ \approx 0{,}7$; 2) $\sin 40^\circ \approx 0{,}64$, $\cos 40^\circ \approx 0{,}77$, $\operatorname{tg} 40^\circ \approx 0{,}84$; 3) $\sin 75^\circ \approx 0{,}97$, $\cos 75^\circ \approx 0{,}26$, $\operatorname{tg} 75^\circ \approx 3{,}73$. **897.** 1) Да; 2) да; 3) нет. **898.** 1) Да; 2) да; 3) да. **899.** 1) $\sin A = 0{,}8$; $\cos A = 0{,}6$; $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$; 2) $\sin B = 0{,}6$; $\cos B = 0{,}8$; $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$. **900.** 1) 0,96; 2) 0,96; 3) $\frac{24}{7}$. **901.** 1) $\sin A = 0{,}8$; $\cos A = 0{,}6$; 2) $\sin B = 0{,}6$; $\cos B = 0{,}8$. **902.** 1) *Указание*: пусть один из катетов прямоугольного треугольника равен 3 см, тогда его гипотенуза равна 5 см; постройте прямоугольный треугольник по этим катетам и гипотенузе; угол, лежащий против катета 3 см, — искомый. **903.** См. задачу 902. **904.** См. задачу 902. **906.** 1) 0,8; 0,6; $\frac{4}{3}$; 2) 0,6; 0,8; $\frac{3}{4}$. **907.** 1) 0,8; 0,6; 2) $\frac{15}{17}$, $\frac{8}{17}$. **908.** 0,96; 0,28; $\frac{24}{7}$. **909.** 1) 0,86; 2) 0,38; 3) 1,33. **911.** 10 см и 6 см. **912.** 1) 8 см и 10 см; 2) 15 см и 39 см; 3) 12 см и 16 см. **914.** 8 м.

§ 22

915. 2), 4), 5). **916.** 2). **917.** 3). **918.** 2). **919.** $c \cdot \cos\alpha$ (рис. 456); $c \cdot \sin\alpha$ (рис. 457); $b \cdot \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 458); $\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$ (рис. 459); $\frac{a}{\sin\alpha}$ (рис. 460); $\frac{b}{\cos\alpha}$ (рис. 461). **921.** 1) 3 см; 2) 8 см; 3) 12 см. **922.** 1) 2 см; 2) 4 см; 3) 6 см. **923.** 1) 128 см; 2) 16 см; 3) 10 см. **924.** 1) 64 см; 2) 50 см; 3) 10 см. **925.** 1) 4,8 см; 2) 48 см; 3) 16,5 см. **926.** 1) $BC = c \cdot \cos\beta$, $AC = c \cdot \sin\beta$; 2) $AB = \frac{a}{\sin\alpha}$, $AC = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$; 3) $AB = \frac{b}{\sin\beta}$, $BC = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$. **927.** $b \cdot \sin\alpha$. **928.** $l \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$. **929.** 1) $2b \cdot \cos\alpha$; 2) $b \cdot \sin\alpha$. **930.** 1) $\frac{h}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{2h}{\operatorname{tg}\alpha}$. **931.** 1) $\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **932.** $\frac{a\operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta}$ и $\frac{a\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$ (рис. 462); $\frac{a\cos\beta}{\sin\alpha}$ и $\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ (рис. 463); $a \cdot \sin\alpha$ и $a \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 464). **933.** $2m \cdot \cos\alpha$, $2m \cdot \sin\alpha$. **934.** $\frac{b}{2\cos\alpha}$. **935.** 1) $\frac{2r}{tg\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{r}{\cos\alpha\, tg\frac{\alpha}{2}}$. **936.** $\frac{h\,tg\frac{\alpha}{2}}{tg\alpha}$. **937.** $\frac{a}{2\cos\alpha}$. **938.** 1) $\frac{a}{tg\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **939.** $r\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right)$, $r\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\right)$, $r\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\right)$. **940.** 1) $\frac{m}{\sin\alpha}$, $\frac{m}{\sin\beta}$; 2) $\frac{m(tg\alpha + tg\beta)}{tg\alpha\, tg\beta}$ или $\frac{m(tg\alpha - tg\beta)}{tg\alpha\, tg\beta}$. **941.** $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sin\beta}$. **943.** $\frac{b\,tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg\frac{\alpha}{2}}$. **944.** 1) $\frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; 2) $d\,tg\frac{\alpha}{2}$. **945.** $b + 2c \cdot \cos\alpha$. **946.** $a - 2c \cdot \sin\alpha$. **947.** 1) $\frac{h}{\cos\alpha}$; 2) $b + 2h \cdot \operatorname{tg}\alpha$. **948.** $\frac{b\,tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}$, $\frac{b\,tg\alpha}{tg\alpha + tg\beta}$. **949.** *Указание:* используйте формулу площади прямоугольного треугольника и выразите один из катетов по формулам 1 и 2 таблицы 33 (с. 180). **951.** 1) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}8$.

§ 23

952. 1) 60°; 2) 20°; 3) 5°. **954.** 1) 1; 2) 2; 3) 1. **957.** 1) $\sin\alpha$; 2) $2\sin\alpha$; 3) $\cos\alpha$. **958.** 2 см (рис. 471); 4 см (рис. 472); 10 см (рис. 473); 12 см (рис. 474); 10 см (рис. 475); 7 см (рис. 476). **959.** 1) 2 см; 2) 9 см; 3) 8 см. **960.** 1) 6 см; 2) 6 см; 3) 7 см. **961.** 1) 2 см; 2) 5 см; 3) 9 см. **962.** 1) 5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см. **963.** 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°. **964.** 1) 1; 2) 2; 3) 2,5; 4) 2. **967.** 1) 1; 2) $3\sin\alpha$; 3) $1 - \cos^2\alpha$. **968.** 4 см. **969.** 18 см. **970.** 1) $10\sqrt{3}$ см; 2) 5 см; 3) $5\sqrt{3}$ см. **971.** 1) 8 см и $8\sqrt{3}$ см; 2) $2\sqrt{2}$ см и $2\sqrt{2}$ см. **972.** $2\sqrt{3}$ см и 6 см (рис. 477); $3\sqrt{3}$ см и 9 см (рис. 478); 4 см и $2\sqrt{3}$ см (рис. 479). **973.** 4 см, $4\sqrt{3}$ см. **974.** 12 см и 12 см. **975.** 1) $12\sqrt{3}$ см и 24 см; 2) 12 см и $12\sqrt{3}$ см. **976.** $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **977.** 1) 4 см; 2) $4\sqrt{3}$ см. **978.** $\sqrt{2}$. **979.** 1) $5\sqrt{2}$ см и 10 см; 2) 5 см и $5\sqrt{3}$ см. **980.** 1) по $5\sqrt{3}$ см;

2) по 3 см. **981.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 6; 3) 2. **983.** 1) $1+\sqrt{3}$ см и $3+\sqrt{3}$ см; 2) $2+\sqrt{2}$ см и $2+\sqrt{2}$ см. **984.** $\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2} \approx 0{,}9$ см, $\sqrt{3}-1 \approx 0{,}73$ см. **985.** $2R+\frac{4R\sqrt{3}}{3}$ и $2\sqrt{3}R+4R$. **986.** 1) 4 см; 2) $2\sqrt{3}$ см; 3) $2\sqrt{19}$ см. **987.** $96\sqrt{3}$ см². **988.** 24 см и 56 см. **989.** 40 см и 40 см. **990.** 24 см и 36 см. **991.** 10 см и 24 см. **992.** $60+\frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 71{,}5$ м. **993.** 100 м.

§ 24

995. ≈ 51°19′ и ≈ 38°41′ (рис. 492); ≈ 53°8′ и ≈ 36°52′ (рис. 493). **996.** 1) ≈ 4,1; 2) ≈ 10,67; 3) ≈ 4,69. **997.** 1) ≈ 11,52 и ≈ 14,62; 2) ≈ 13,76 и ≈ 17,01. **998.** 1) ≈ 5,92; 2) ≈ 12,69. **999.** 1) ≈ 48°35′; 2) ≈ 53°8′; 3) ≈ 63°26′. **1000.** 1) ≈ 45°34′; 2) ≈ 44°26′. **1001.** ≈ 78°28′, ≈ 11°32′. **1002.** 1) ≈ 36°52′; 2) ≈ 41°59′; 3) ≈ 26°34′. **1003.** 1) ≈ 73°44′; 2) ≈ 83°58′; 3) 90°. **1004.** 1) а) $c=29$, $\alpha \approx 43°36'$, $\beta \approx 46°24'$; б) $c=15$, $\alpha \approx 36°52'$, $\beta \approx 53°8'$; в) $c=30$, $\alpha \approx 53°8'$, $\beta \approx 36°52'$; г) $c \approx 46{,}56$; $\alpha \approx 30°19'$; $\beta \approx 59°41'$; 2) а) $b=8$, $\alpha \approx 61°56'$, $\beta \approx 28°4'$; б) $b=12$, $\alpha \approx 53°8'$, $\beta \approx 36°52'$; в) $b=33$, $\alpha \approx 59°29'$, $\beta \approx 30°31'$; г) $a \approx 0{,}68$; $\alpha \approx 13°25'$; $\beta \approx 76°35'$; 3) а) $a \approx 7{,}52$; $b \approx 2{,}74$; $\angle B=20°$; б) $a \approx 54{,}87$; $b \approx 60{,}94$; $\angle B=48°$; в) $a \approx 9{,}73$; $b \approx 15{,}38$; $\angle B=57°40'$; г) $a \approx 4{,}24$; $b \approx 1{,}94$; $\angle B=24°45'$; 4) а) $b \approx 7{,}5$, $c \approx 14{,}15$, $\angle B=58°$; б) $b \approx 5{,}5$, $c \approx 18{,}82$, $\angle B=73°$; в) $b \approx 16{,}12$, $c \approx 20{,}1$, $\angle B=36°40'$; г) $b \approx 1{,}31$, $c \approx 3{,}94$, $\angle B=70°30'$. **1005.** ≈ 14,8 см и ≈ 20,15 см. **1006.** 1) ≈ 6,21 см; 2) ≈ 11,59 см. **1007.** 1) ≈ 6,71 см; 2) ≈ 8,19 см. **1008.** 1) ≈ 23,04 см; 2) ≈ 65°42′. **1009.** 1) ≈ 41,21 см; 2) ≈ 46,26 см; 3) ≈ 36,72 см и ≈ 9,54 см. **1010.** 1) ≈ 17,15 см и ≈ 36,88 см; 2) ≈ 8,31 см и ≈ 33,69 см. **1011.** ≈ 21,07 см². **1012.** ≈ 2,94 см и ≈ 4,70 см. **1013.** ≈ 31,75 см и ≈ 125,03 см. **1014.** ≈ 15,21 см и ≈ 35,83 см. **1015.** ≈ 119,14 см. **1016.** ≈ 130,03 см². **1017.** ≈ 3,4 см. **1018.** ≈ 123,3 см. **1019.** ≈ 60°57′. **1020.** ≈ 0°57′. **1021.** 1) ≈ 0,118 км; 2) ≈ 0,433 км. **1022.** ≈ 2239 м. **1023.** ≈ 79,5 м. **1024.** ≈ 130 м. **1025.** ≈ 71,76 м. **1026.** ≈ 1°26′. **1027.** ≈ 1°17′. **1028.** ≈ 403 м. **1029.** ≈ 2149 м. **1030.** ≈ 129,1 м.

Повторение изученного

1031. 1) *Указание*: используйте признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними. **1032.** *Указание*: прямая EF разделяет параллелограмм на два равных параллелограмма. **1033.** 7 см. **1034.** Параллелограмм; $P=2(d_1+d_2)$. **1035.** 3 : 5. **1036.** Параллелограмм, углы которого равны углам данного параллелограмма. **1037.** *Указание*: постройте угол α и отложите на его сторонах отрезки h_1 и h_2; проведите через основания высот перпендикулярные к ним прямые, а через вершину угла α — прямые, параллельные проведённым прямым. **1038.** 72 см. **1039.** 17 см и 19 см. **1040.** 72°. **1041.** $\frac{a}{2}$. **1042.** *Указание*: если из вершины тупого угла ромба провести две высоты, то образовавшиеся прямоугольные треугольники будут равны по гипотенузе и острому углу. **1043.** 30. **1044.** *Указание*: при вычислении суммы длин сторон обоих треугольников диагональ учитывают два раза, поэтому её длина: 15 : 2 = 7,5 (см). **1045.** *Указание*: сначала постройте прямоугольный треугольник по катету h и гипотенузе $\frac{p}{2}$. **1046.** *Указание*: сначала постройте равнобедренный треугольник по основанию d и углу при основании, равном $\frac{\alpha}{2}$. **1047.** 5 см. **1049.** 60°, 60°, 120°, 120°. **1053.** 1 : 1 : 1,62. **1054.** 5. **1056.** Да. **1057.** *Указание*: сторона квадрата должна быть равна меньшей стороне прямоугольника. **1058.** Подобных треугольников либо 3, либо 2, либо 1. **1059.** Да. **1060.** Да, если заданный треугольник — равносторонний. *Указание*: выразите углы построенного треугольника через углы данного треугольника. **1061.** 72 см^2. **1062.** Да. **1063.** *Указание*: на диагонали BD четырёхугольника $ABCD$ возьмите точку K так, чтобы $\angle BAC = \angle KAD$, и рассмотрите полученные подобные треугольники. **1064.** 8 см. **1065.** 9,6 см. **1066.** б) $CO^2 = a \cdot b - AO \cdot OB$, где CO — биссектриса $\triangle ABC$. **1067.** $\frac{12\sqrt{2}}{2}$ см. **1068.** *Указание*: используйте свойство высоты, проведённой к гипотенузе прямоугольного треугольника. **1069.** *Указание*: постройте вспомогательный треугольник по двум углам α и β; найдите периметр полученного треугольника и коэффициент его подобия с данным треугольником; используйте полученный коэффициент подобия для построения искомого треугольника. **1070.** *Указание*: сначала проведите высоту к бóльшей стороне треугольника, затем из подобия треугольников выразите сторону квадрата. **1072.** 105°, 120°, 135°, 105°, 120°, 135°. **1073.** 480 см^2. **1074.** 90 см^2. **1075.** 12 см^2. **1076.** 3 см. **1077.** $\frac{169}{18}$ см. **1078.** 4 см, 24 см. **1079.** Так. **1081.** 0,53; 0,84. **1082.** 1) 0,8; 2) $\frac{8}{17}$. **1083.** 1) $\sin\alpha = 0{,}28$, $\cos\alpha = 0{,}96$, 2) $\sin\alpha = \frac{11}{61}$, $\cos\alpha = \frac{60}{61}$; 3) $\sin\alpha = \frac{20}{29}$, $\cos\alpha = \frac{21}{29}$. **1084.** 0,28. **1085.** $2R\sin\frac{n^\circ}{2}$. **1086.** 1) $a \approx 8{,}64$, $b \approx 10{,}4$, $\angle B = 50°$; 2) $a \approx 0{,}21$, $b \approx 0{,}13$, $\angle A = 58°$; 3) $b \approx 20{,}04$, $c \approx 45{,}87$, $\angle B = 23°$; 4) $b \approx 13{,}54$, $c \approx 16{,}95$, $\angle A = 37°$; 5) $b \approx 10{,}54$, $\angle A \approx 58°13'$, $\angle B \approx 31°47'$; 6) $a \approx 96$, $c \approx 120{,}96$, $\angle B = 38°$; 7) $c \approx 18{,}46$, $\angle A \approx 43°27'$, $\angle B \approx 46°32'$; 8) $a \approx 8{,}94$, $\angle A \approx 47°56'$, $\angle B = 42°4'$. **1087.** 85,82 см. **1088.** 29°, 61°. **1089.** 26,4 см и 33 см. **1090.** 73°44'.

Приложение 1

Таблица синусов и косинусов

α	sin α cos β	cos α sin β	β
0°	0,000	1,000	90°
1°	0,017	1,000	89°
2°	0,035	0,999	88°
3°	0,052	0,999	87°
4°	0,070	0,998	86°
5°	0,087	0,996	85°
6°	0,105	0,995	84°
7°	0,122	0,993	83°
8°	0,139	0,990	82°
9°	0,156	0,988	81°
10°	0,174	0,985	80°
11°	0,191	0,982	79°
12°	0,208	0,978	78°
13°	0,225	0,974	77°
14°	0,242	0,970	76°
15°	0,259	0,966	75°
16°	0,276	0,961	74°
17°	0,292	0,956	73°
18°	0,309	0,951	72°
19°	0,326	0,946	71°
20°	0,342	0,940	70°
21°	0,358	0,934	69°
22°	0,375	0,927	68°
23°	0,391	0,921	67°
24°	0,407	0,914	66°
25°	0,423	0,906	65°
26°	0,438	0,899	64°
27°	0,454	0,891	63°
28°	0,469	0,883	62°
29°	0,485	0,875	61°
30°	0,500	0,866	60°
31°	0,515	0,857	59°
32°	0,530	0,848	58°
33°	0,545	0,839	57°
34°	0,559	0,829	56°
35°	0,574	0,819	55°
36°	0,588	0,809	54°
37°	0,602	0,799	53°
38°	0,616	0,788	52°
39°	0,629	0,777	51°
40°	0,643	0,766	50°
41°	0,656	0,755	49°
42°	0,669	0,743	48°
43°	0,682	0,731	47°
44°	0,695	0,719	46°
45°	0,707	0,707	45°

Приложение 2

Таблица тангенсов

α	tg α	α	tg α	α	tg α	α	tg α	α	tg α
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,062	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	57°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	52°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

Приложение 3

Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801