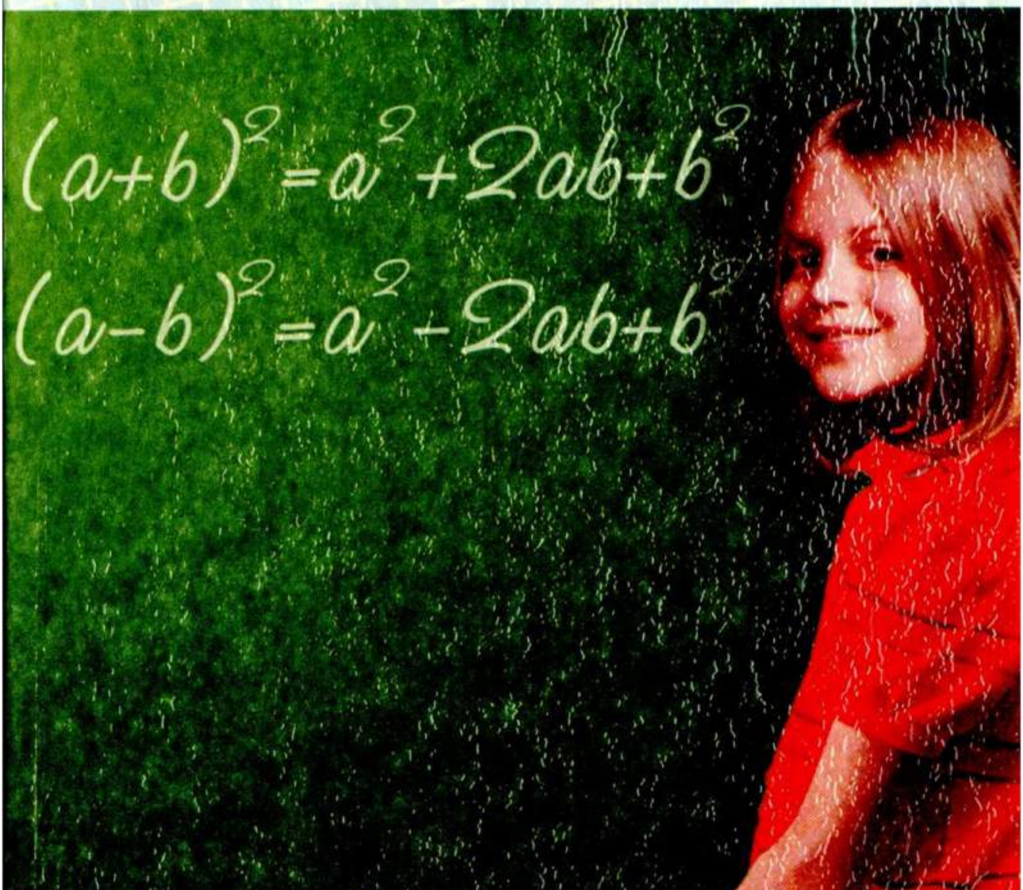
А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонский
М.С. Якир

7

АЛГЕБРА



УДК 373:512
ББК 22.141я721
М52

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины
(Письмо № 1/11-6718 от 04.09.2007 г.)

Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.
М52 Алгебра: Учебник для 7 класса.— Х.: Гимназия, 2008.— 288 с.
ISBN 978-966-8319-81-5.

УДК 373:512
ББК 22.141я721

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу
Для середнього шкільного віку
Російською мовою

Відповідальний за випуск *В. Л. Маркіанов*
Редактор *М. В. Москаленко*
Художники *П. М. Репринцев, О. С. Юхтман*
Художній редактор *С. Е. Кулинич*
Комп'ютерна верстка *І. Л. Маркіанової*
Коректор *І. Л. Безсонова*

Підписано до друку 23.02.2008. Формат 60×90/16. Гарнітура шкільна.
Папір офсетний. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 18,0.

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001

ТОВ ТО «Гімназія»
Україна, 61103, м. Харків, вул. Дерев'янка, 16а
Тел. (057) 758-83-93, 719-46-80

Віддруковано з готових позитивів
у друкарні ПП «Модем», м. Харків, вул. Дерев'янка, 16а
Тел. (057) 758-15-80, 758-15-90

ISBN 978-966-8319-81-5

От авторов

ДОРОГИЕ СЕМИКЛАССНИКИ!

Вы начинаете изучать новый школьный предмет — **алгебру.**

Алгебра — очень древняя и мудрая наука. С ее азами вам предстоит познакомиться. Знать алгебру чрезвычайно важно. По-видимому, нет сегодня такой области знаний, в которой не применялись бы достижения этой науки: физики и химики, астрономы и биологи, географы и экономисты, даже языковеды и историки используют «алгебраический инструмент».

Алгебра — не только полезный, но и очень интересный предмет, развивающий сообразительность и логическое мышление. И мы надеемся, что вы в этом скоро убедитесь с помощью учебника, который вы держите в руках. Познакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделен на четыре параграфа, каждый из которых состоит из пунктов. В пунктах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным *шрифтом***. Также обращайте внимание на слова, напечатанные *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому пункту подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно те, которые обозначены «звездочкой» (*)).

Каждый пункт завершает особая рубрика, которую мы назвали «Учимся делать нестандартные шаги». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные алгебраические знания, а лишь здравый смысл, изобретательность и сообразительность. Эти задачи полезны, как витамины. Они помогут вам научиться принимать неожиданные и нестандартные решения не только в математике, но и в жизни.

Кроме того, в учебнике вы сможете прочитать рассказы по истории алгебры. Названия этих рассказов напечатаны синим цветом.

Дерзайте! Желаем успеха!

УЧИТЕЛЯМ

Уважаемые коллеги!

Мы очень надеемся, что этот учебник станет надежным помощником в вашей нелегкой и благородной работе, и будем искренне рады, если он вам понравится.

Желаем творческого вдохновения и терпения.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ:

n° задания, соответствующие начальному и среднему уровням учебных достижений;

$n^{\bullet}$ задания, соответствующие достаточному уровню учебных достижений;

$n^{\bullet\bullet}$ задания, соответствующие высокому уровню учебных достижений;

n^{*} задачи для математических кружков и факультативов;

▲ окончание доказательства теоремы.

Красным цветом отмечены номера задач, которые рекомендуются для домашней работы, синим цветом — номера задач, которые с учетом индивидуальных особенностей учащихся класса на усмотрение учителя можно решать устно.

1. Введение

Алгебра — это новый школьный предмет. Тем не менее вам уже знакомы некоторые элементы этой науки. Так, когда вы записывали формулы и составляли уравнения, вам приходилось обозначать числа буквами, конструируя **буквенные выражения**.

Например, записи a^2, $(x + y)^2$,

$$2(a + b), \quad \frac{x - y + z}{2},$$

$$abc, \quad \frac{m}{n}$$

являются буквенными выражениями.

Подчеркнем, что не всякая запись, состоящая из чисел, букв, знаков арифметических действий и скобок, является буквенным выражением. Например, запись $2x$ +) − (представляет собой бессмысленный набор символов.

Вместе с тем выражение, составленное из одной буквы, считают буквенным выражением.

Рассмотрим буквенное выражение $2(a + b)$. Вы знаете, что с его помощью можно найти периметр прямоугольника со сторонами a и b. Если, например, буквы a и b заменить соответственно числами 3 и 4, то получим **числовое выражение** $2(3 + 4)$. В этом случае периметр прямоугольника будет равен 14 единицам длины. Число 14 называют **значением числового выражения** $2(3 + 4)$.

Понятно, что вместо букв a и b можно подставлять и другие числа, получая каждый раз новое числовое выражение.

Поскольку буквы можно заменять произвольными числами, то эти буквы называют **переменными**, а само буквенное выражение — **выражением с переменными** (или с переменной, если она одна).

Рассмотрим выражение $2x + 3$. Если переменную x заменить, например, числом $\frac{1}{2}$, то получим числовое выражение $2 \cdot \frac{1}{2} + 3$. При этом говорят, что $\frac{1}{2}$ — **значение переменной** x, а число 4 — **значение выражения** $2x + 3$ при $x = \frac{1}{2}$.

Числовые выражения и выражения с переменными называют **алгебраическими выражениями:**

Алгебраические выражения

- **Числовые выражения**
- **Выражения с переменными (буквенные выражения)**

Рассмотрим две группы выражений:

I группа	**II группа**
$x - y^3$	$\frac{1}{x}$
$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{(a+b)^2}$
$\frac{1}{3}b^2 + 5a$	$\frac{m}{n+3}$
$\frac{mn}{7}$	$5 - \frac{x}{y^2}$

Выражения каждой группы содержат такие действия: сложение, вычитание, умножение, возведение в степень, деление. Однако выражения первой группы не содержат деления на выражения с переменными. Их называют **целыми выражениями.** Выражения второй группы целыми не являются.

В 7 классе мы будем изучать целые выражения.

ПРИМЕР

Значения переменных a и b таковы, что $a - b = 4$, $m = -5$. Чему равно значение выражения $7bm - 7am$ при этих же значениях переменных?

Р е ш е н и е. Используя распределительное и сочетательное свойства умножения, получаем:

$7bm - 7am = 7m(b - a) = 7 \cdot (-5) \cdot (-4) = 7 \cdot 20 = 140.$

О т в е т: 140.

?

1. Как иначе называют буквенные выражения?
2. Какие выражения называют алгебраическими?
3. Какие алгебраические выражения называют целыми?

1.° Найдите значение числового выражения:

1) $0{,}72 + 3{,}018$; 3) $1{,}8 \cdot 0{,}3$; 5) $72 : 0{,}09$;
2) $4 - 2{,}8$; 4) $5{,}4 : 6$; 6) $9 : 4$.

2.° Чему равно значение выражения:

1) $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$; 5) $\frac{46}{75}:\frac{23}{45}$; 9) $6-1\frac{3}{5}$;
2) $\frac{3}{7}-\frac{2}{9}$; 6) $\frac{2}{3}:4$; 10) $4\frac{2}{7}-1\frac{4}{9}$;
3) $\frac{7}{16}\cdot\frac{8}{35}$; 7) $10:\frac{5}{11}$; 11) $8\frac{3}{4}\cdot1\frac{3}{14}$;
4) $\frac{4}{9}\cdot18$; 8) $2\frac{3}{8}+4\frac{1}{6}$; 12) $1\frac{3}{5}:5\frac{1}{3}$?

3.° Вычислите значение выражения:

1) $3{,}8 + (-2{,}5)$; 6) $0 - 7{,}8$; 11) $-48 \cdot 0$;
2) $-4{,}8 + 4{,}8$; 7) $0 - (-2{,}4)$; 12) $-3{,}3 : (-11)$;
3) $-1 + 0{,}39$; 8) $-4{,}5 - 2{,}5$; 13) $3{,}2 : (-4)$;
4) $9{,}4 - (-7{,}8)$; 9) $8 \cdot (-0{,}4)$; 14) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$;
5) $4{,}2 - 5{,}7$; 10) $-1{,}2 \cdot (-0{,}5)$; 15) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2$.

4.° Чему равно значение выражения:

1) $18\frac{5}{12}-\frac{7}{12}\cdot1\frac{19}{21}-\frac{17}{72}\cdot\frac{2}{3}$;

2) $\left(6\frac{3}{4}-5\frac{1}{8}:1\frac{9}{32}\right)\cdot\frac{5}{11}$;

3) $(-1{,}42 - (-3{,}22)) : (-0{,}4) + (-6) \cdot (-0{,}7)$;

4) $\left(-\frac{7}{18}+\frac{11}{12}\right):\left(-\frac{19}{48}\right)$;

5) $\left(-3\frac{1}{12}-2\frac{1}{15}\right):\left(-5\frac{3}{20}\right)$?

5.° Вычислите значение числового выражения:

1) $14\frac{7}{15}-3\frac{3}{23}\cdot\frac{23}{27}-1\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}$;

2) $\left(5\frac{8}{9}:1\frac{17}{36}+1\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{5}{21}$;

3) $(-3{,}25 - 2{,}75) : (-0{,}6) + 0{,}8 \cdot (-7)$;

4) $\left(-1\frac{3}{8}-2\frac{5}{12}\right):5\frac{5}{12}$.

6.° Составьте числовое выражение и найдите его значение:
1) произведение суммы чисел -12 и 8 и числа $0{,}5$;
2) сумма произведения чисел -12 и 8 и числа $0{,}5$;
3) частное суммы и разности чисел $-1{,}6$ и $-1{,}2$;
4) квадрат суммы чисел -10 и 6;
5) сумма квадратов чисел -10 и 6.

7.° Составьте числовое выражение и найдите его значение:
1) частное от деления суммы чисел $\frac{4}{9}$ и $-\frac{5}{6}$ на число $-\frac{14}{27}$;
2) разность произведения чисел $-1{,}5$ и 4 и числа 2;
3) произведение суммы и разности чисел $-1{,}9$ и $0{,}9$;
4) куб разности чисел 6 и 8.

8.° Найдите значение выражения:
1) $2x - 3$ при $x = 4,\ 0,\ -3$;
2) $\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b$ при $a = -6,\ b = 16$;
3) $3m - 5n + 3k$ при $m = -7,\ n = 1{,}4,\ k = -0{,}1$.

9.° Вычислите значение выражения:
1) $0{,}4y + 1$ при $y = -0{,}5;\ 8;\ -10$;
2) $\frac{2}{7}c - 0{,}2d$ при $c = -28,\ d = 15$.

10.° Какие из данных выражений являются целыми:
1) $7a + 0{,}3$;
2) $5x\left(y - \frac{1}{3}\right)$;
3) $\frac{a+b}{c}$;
4) $\frac{a+b}{4}$;
5) $\frac{3m}{5} + \frac{5}{3m}$;
6) $9x - 5y + \frac{1}{z}$?

11.° Используя термины «сумма», «разность», «произведение», «частное», прочитайте алгебраические выражения и укажите, какие из них являются целыми:
1) $a - (b + c)$;
2) $a + bc$;
3) $x - \frac{y}{z}$;
4) $2m - 10$;
5) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$;
6) $(a + b)c$;
7) $ac + bc$;
8) $\frac{a}{b+4}$;
9) $(a - b)(c + d)$.

12.° Запишите в виде выражения:
1) число, противоположное числу a;
2) число, обратное числу a;
3) сумму чисел x и y;
4) число, обратное сумме чисел x и y;

5) сумму чисел, обратных числам x и y;
6) сумму числа a и его квадрата;
7) частное от деления числа a на число, противоположное числу b;
8) произведение суммы чисел a и b и числа, обратного числу c;
9) разность произведения чисел m и n и частного чисел p и q.

13.° Карандаш стоит x грн., а тетрадь — y грн.
1) Сколько стоят 5 карандашей и 7 тетрадей?
2) На сколько больше надо заплатить за a тетрадей, чем за b карандашей?

14.° Работнику выдали заработную плату одной купюрой номиналом 100 грн., a купюрами номиналом 50 грн. и b купюрами по 20 грн. Сколько денег получил работник?

15.° Из двух городов, расстояние между которыми равно 300 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля со скоростями m км/ч и n км/ч. Через сколько часов после начала движения они встретятся?

16.° Из двух сел, расстояние между которыми равно s км, одновременно в одном направлении отправились пешеход и велосипедист. Через сколько часов после начала движения велосипедист догонит пешехода, если пешеход шел впереди со скоростью a км/ч, а велосипедист ехал со скоростью b км/ч? Вычислите значение полученного выражения при $a = 4$, $b = 12$, $s = 12$.

17.° Запишите в виде выражения:
1) утроенное произведение разности чисел a и b на их сумму;
2) сумму трех последовательных натуральных чисел, меньшее из которых равно n;
3) произведение трех последовательных четных натуральных чисел, большее из которых равно $2k$;
4) число, в котором a тысяч, b сотен и c единиц;
5) количество сантиметров в x метрах и y сантиметрах;
6) количество секунд в m часах, n минутах и p секундах.

18.˙ Запишите в виде выражения:

1) произведение четырех последовательных натуральных чисел, большее из которых равно x;
2) разность произведения двух последовательных нечетных чисел и меньшего из них, если большее число равно $2k + 1$;
3) количество килограммов в a тоннах и b центнерах.

19.¨ Составьте выражения для вычисления длины синей линии и площади фигуры, которую она ограничивает (рис. 1).

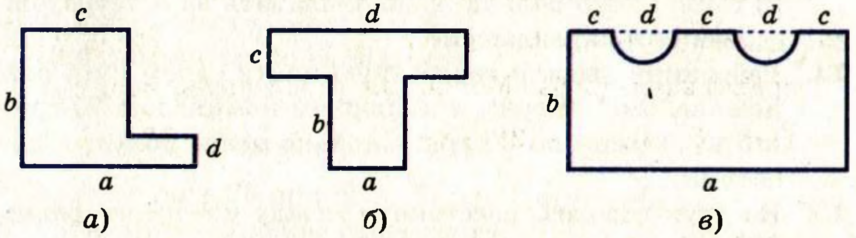


Рис. 1

20.¨ Составьте выражения для вычисления длины синей линии и площади фигуры, которую она ограничивает (рис. 2).

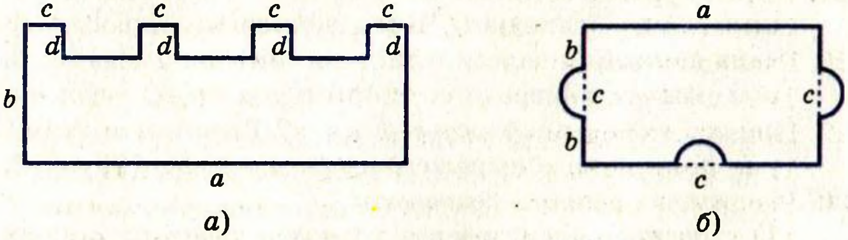


Рис. 2

21.¨ Значения переменных a и b таковы, что $a + b = -8$, $c = 4$. Чему равно значение выражения:

1) $a + b - c$; 2) $0{,}5\,(a + b) + c$; 3) $3ac + 3bc$

при этих же значениях переменных?

22.¨ Значения переменных m и n таковы, что $m - n = 5$, $k = -2$. Чему равно значение выражения:

1) $(n - m)\,k$; 2) $2m - 2n + 3k$

при этих же значениях переменных?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

23. (*Задача из украинского фольклора*). Мельник берет за работу $\frac{1}{10}$ смолотой муки. Сколько муки намололи крестьянину, если домой он повез 99 пудов муки?

24. В столовую завезли капусту, морковь и картофель. Капусты было 64 кг, масса моркови составляла $\frac{5}{8}$ массы капусты, а масса картофеля — 180 % массы моркови. Сколько всего килограммов овощей завезли в столовую?

25. Известно, что a и b — натуральные числа, а число $\frac{a}{b}$ — правильная дробь. Можно ли утверждать, что:

1) $a - b > 0$; 2) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; 3) $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

26. Докажите, что:
1) число 5 является корнем уравнения $3x + 1 = 21 - x$;
2) число -2 не является корнем уравнения $x(x + 4) = 4$.

27. Решите уравнение:
1) $0{,}3x = 9$; 2) $-2x = 3$; 3) $15x = 0$.

28. Раскройте скобки:
1) $2(x - 3y + 4z)$; 2) $-0{,}4(-5 + 1{,}5y)$.

29. Приведите подобные слагаемые:
1) $4a + 9a - 18a + a$; 2) $1{,}2a - a + b - 2{,}1b$.

30. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:
1) $(x + 3{,}2) - (x + 4{,}5)$; 2) $1{,}4(a - 2) - (6 - 2a)$.

31. Найдите корень уравнения:
1) $2x - 7 = x + 4$; 2) $-0{,}7(5 - x) = -4{,}9$.

Обновите в памяти содержание пунктов 27, 28 на с. 270, 271.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

32. Дано 12 натуральных чисел. Докажите, что из них всегда можно выбрать два, разность которых делится нацело на 11.

Книга о восстановлении и противопоставлении

При подготовке к новой теме вы повторили основные свойства уравнений (п. 27, 28). Примечательно то, что с одним из этих свойств связано происхождение слова «алгебра».

В IX веке выдающийся арабский ученый Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми (что означает Мухаммед, сын Мусы, из Хорезма) написал трактат о способах решений уравнений. В те времена отрицательные числа считались ошибочными, ложными, абсурдными. Поэтому, если при решении уравнений появлялось «ложное число», его превращали в «настоящее», перенося в другую часть уравнения. Такое преобразование Мухаммед аль-Хорезми назвал *восстановлением* (по-арабски — аль-джабр). Уничтожение одинаковых членов в обеих частях уравнения он назвал *противопоставлением* (по-арабски — аль-мукабала).

Мухаммед аль-Хорезми

Сам трактат носит название «Краткая книга об исчислении восстановления и противопоставления» (по-арабски — «Китаб аль-мухтасар фи хисаб аль-джабр ва-аль-мукабала»).

Слово «аль-джабр» со временем превратилось в хорошо знакомое всем слово «алгебра».

В XII веке труды аль-Хорезми были переведены на латынь. В средневековой Европе имя аль-Хорезми записывали как *Algorizmi*, и многие правила из его трудов начинались словами *Dixit Algorizmi* («Алгоризми сказал»). Постепенно стали привыкать, что с этих слов начинаются многие правила, а слово *Algorizmi* перестали связывать с именем автора. Так возник термин «алгоритм», которым обозначают процесс, дающий за конечное число шагов решение задачи.

С такими процессами вы подробно познакомитесь на уроках информатики.

§ 1. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

- В этом параграфе вы повторите свойства уравнений, сможете усовершенствовать навыки решения уравнений и задач на составление уравнений.
- Вы узнаете, что многие известные вам уравнения можно объединить в один класс.

2. Линейное уравнение с одной переменной

Рассмотрим три уравнения:

$$2x = -3,$$
$$0x = 0,$$
$$0x = 2.$$

Очевидно, что число $-1{,}5$ является единственным корнем первого уравнения.

Поскольку произведение любого числа на нуль равно нулю, то корнем второго уравнения является любое число.

Понятно, что третье уравнение корней не имеет.

Несмотря на существенное различие полученных ответов, приведенные уравнения внешне похожи: все они имеют вид $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа.

Уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, называют линейным уравнением с одной переменной.

Вот еще примеры линейных уравнений: $\frac{1}{2}x = 7$; $-0{,}4x = 2{,}8$; $-x = 0$.

Текст, выделенный **жирным шрифтом**, разъясняет смысл термина **«линейное уравнение»**. В математике предложение, раскрывающее суть нового термина (слова, понятия, объекта), называют **определением**.

Итак, мы сформулировали (или говорят: «дали») определение линейного уравнения.

Заметим, что, например, уравнения $x^2 = 0$, $(x - 2)(x - 3) = 0$, $|x| = 5$ линейными не являются.

Если $a \neq 0$, то, разделив обе части уравнения $ax = b$ на a, получим $x = \frac{b}{a}$. Отсюда следует: *если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень, равный $\frac{b}{a}$.*

Если же $a = 0$, то линейное уравнение приобретает такой вид: $0x = b$. Здесь возможны два случая: $b = 0$ или $b \neq 0$.

В первом случае получаем уравнение $0x = 0$. Тогда, *если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение $ax = b$ имеет бесконечно много корней: любое число является его корнем.*

Во втором случае, когда $b \neq 0$, при любом значении x получим неверное равенство $0x = b$. Отсюда, *если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ корней не имеет.*

Следующая таблица подытоживает приведенные рассуждения.

Уравнение $ax = b$	$a \neq 0$	$a = 0$, $b = 0$	$a = 0$, $b \neq 0$
	$x = \frac{b}{a}$	x — любое число	корней нет

ПРИМЕР 1

Решите уравнение:

1) $(3x + 2{,}1)(8 - 2x) = 0$; 2) $|5x - 6| = 4$.

Решение

1) Так как произведение нескольких множителей равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, получаем: $3x + 2{,}1 = 0$ или $8 - 2x = 0$;
$x = -0{,}7$ или $x = 4$.

Ответ: $-0{,}7$; 4.

2) Учитывая, что модуль только чисел 4 и -4 равен числу 4, имеем: $5x - 6 = 4$ или $5x - 6 = -4$;
$x = 2$ или $x = 0{,}4$.

Ответ: 2; 0,4.

Обратим ваше внимание на то, что рассмотренные уравнения не являются линейными, однако решение каждого из них сводится к решению линейных уравнений.

ПРИМЕР 2

Решите уравнение:

1) $(a-1)x = 2$; 2) $(a+9)x = a+9$.

Решение

1) При $a = 1$ уравнение принимает вид $0x = 2$. В этом случае корней нет. При $a \neq 1$ имеем $x = \frac{2}{a-1}$.

Ответ: если $a = 1$, то уравнение не имеет корней; если $a \neq 1$, то $x = \frac{2}{a-1}$.

2) При $a = -9$ уравнение принимает вид $0x = 0$. В этом случае корнем уравнения является любое число. При $a \neq -9$ имеем $x = 1$.

Ответ: если $a = -9$, то x — любое число; если $a \neq -9$, то $x = 1$.

1. Какое уравнение называют линейным уравнением с одной переменной?
2. Сколько корней имеет линейное уравнение $ax = b$, если: 1) $a \neq 0$; 2) $a = 0$, $b \neq 0$; 3) $a = b = 0$?

33.° Какие из данных уравнений являются линейными:

1) $3x = 6$; 3) $x^2 = 4$; 5) $\frac{4}{x} = 2$; 7) $x = 0$;

2) $x = 4$; 4) $|x| = 2$; 6) $\frac{1}{4}x = 2$; 8) $0x = 8$?

34.° Решите уравнение:

1) $18 - 16x = -30x - 10$; 4) $6x - 19 = -2x - 15$;

2) $-7x + 2 = 3x - 1$; 5) $0{,}2x + 3{,}4 = 0{,}6x - 2{,}6$;

3) $10 - 2x = 12 + x$; 6) $\frac{5}{6}x + 12 = \frac{1}{4}x - 2$.

35.° Найдите корень уравнения:

1) $10x + 7 = 8x - 9$; 3) $2{,}7 + 1{,}9x = 2x + 1{,}5$;

2) $20 - 3x = 2x - 45$; 4) $\frac{13}{18}x + 13 = \frac{7}{12}x + 8$.

36.° Докажите, что:

1) корнем уравнения $4(x-5) = 4x - 20$ является любое число;

2) уравнение $2y - 8 = 4 + 2y$ не имеет корней.

37.° Решите уравнение:

1) $-3(x-4)=5x-12$; 3) $26-4x=3x-7(x-3)$;

2) $(16x-5)-(3-5x)=6$; 4) $-2(3-4x)+5(2-1{,}6x)=4$.

38.° Решите уравнение:

1) $4(13-3x)-17=-5x$;

2) $(18-3x)-(4+2x)=10$;

3) $14-x=0{,}5(4-2x)+12$;

4) $4x-3(20-x)=10x-3(11+x)$.

39.˙ Решите уравнение:

1) $0{,}8-(1{,}5x-2)=-0{,}8+4{,}5x$;

2) $0{,}6x-5(0{,}3x+0{,}2)=0{,}5(x-1)-0{,}8$;

3) $\frac{1}{7}\left(\frac{7}{8}y+7\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{9}y+1\frac{7}{9}\right)=\frac{1}{12}$;

4) $\frac{5}{27}(5{,}4-8{,}1y)=0{,}03+\frac{4}{17}(6{,}8-3{,}4y)$.

40.˙ Найдите корень уравнения:

1) $0{,}9x-0{,}6(x-3)=2(0{,}2x-1{,}3)$;

2) $-0{,}4(3x-1)+8(0{,}8x-0{,}3)=5-(3{,}8x+4)$;

3) $\frac{4}{7}(0{,}56-4{,}2y)+0{,}4=\frac{5}{13}(0{,}52-6{,}5y)$.

41.˙ Решите уравнение:

1) $8(7x-3)=-48(3x+2)$;

2) $4{,}5(8x+20)=6(6x+15)$.

42.˙ Чему равен корень уравнения:

1) $-36(6x+1)=9(4-2x)$;

2) $3{,}2(3x-2)=-4{,}8(6-2x)$?

43.˙ Решите уравнение:

1) $(4x-1{,}6)(8+x)=0$;

2) $x(5-0{,}2x)=0$;

3) $(3x-2)\left(4+\frac{1}{3}x\right)=0$;

4) $(2x+1{,}2)(x+1)(0{,}7x-0{,}21)=0$.

44.˙ Решите уравнение:

1) $(1{,}8-0{,}3y)(2y+9)=0$; 2) $(5y+4)(1{,}1y-3{,}3)=0$.

45.˙ Решите уравнение:

1) $\frac{5x-4}{2}=\frac{16x+1}{7}$; 2) $\frac{4y+33}{3}=\frac{17+y}{2}$.

46.˙ Найдите корень уравнения:

1) $\frac{3m+5}{4}=\frac{5m+1}{3}$; 2) $\frac{5x+3}{5}=\frac{x-5}{8}$.

47.° Чему равен корень уравнения:

1) $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{4}=23$; 2) $\frac{x}{6}-\frac{x}{8}=\frac{7}{36}$; 3) $\frac{3x}{10}-\frac{4}{15}=\frac{x}{6}$?

48.° Решите уравнение:

1) $\frac{7x}{6}-\frac{5x}{18}=\frac{4}{27}$; 2) $\frac{2x}{7}+\frac{x}{4}=\frac{15}{14}$; 3) $-\frac{x}{8}+1=\frac{x}{12}$.

49.° При каком значении переменной:

1) значение выражения $4x - 0,2(8x - 7)$ равно $-22,6$;
2) выражения $0,2(3 - 2y)$ и $0,3(7 - 6y) + 2,7$ принимают равные значения;
3) значение выражения $0,6y$ на $1,5$ больше значения выражения $0,3(y - 4)$;
4) значение выражения $5x - 1$ в 5 раз меньше значения выражения $6,5 + 2x$?

50.° При каком значении переменной:

1) выражения $6 - (2x - 9)$ и $(18 + 2x) - 3(x - 3)$ принимают равные значения;
2) значение выражения $-4(2y - 0,9)$ на $2,4$ меньше значения выражения $5,6 - 10y$?

51.° Решите уравнение:

1) $|x| + 6 = 13$;
2) $|x| - 7 = -12$;
3) $7|x| - 3 = 0$;
4) $|x - 5| = 4$;
5) $|9 + x| = 0$;
6) $|x - 4| = -2$;
7) $|3x + 4| = 2$;
8) $|2x + 1| + 13 = 14$;
9) $||x| - 3| = 5$.

52.° Решите уравнение:

1) $|x| - 8 = -5$;
2) $|x| + 5 = 2$;
3) $|x + 12| = 3$;
4) $|8 - 0,2x| = 12$;
5) $|10x - 7| - 32 = -16$;
6) $||x| - 2| = 2$.

53.° При каком значении a уравнение:

1) $5ax = -45$ имеет корень, равный числу 3;
2) $(a - 4)x = -5a + 4x - 7$ имеет корень, равный числу -6?

54.° При каком значении a уравнение:

1) $3ax = 12 - x$ имеет корень, равный числу -9;
2) $(5a + 2)x = 8 - 2a$ имеет корень, равный числу 2?

55.° Укажите какое-либо значение b, при котором будет целым числом корень уравнения:

1) $0{,}1x = b$; 2) $bx = 21$; 3) $\frac{1}{6}x = b$; 4) $bx = \frac{1}{6}$.

56.° Составьте уравнение, которое:

1) имеет единственный корень, равный числу -4;
2) имеет бесконечно много корней;
3) не имеет корней.

57.•• Найдите все целые значения m, при которых является целым числом корень уравнения:

1) $mx = 3$; 2) $(m + 4)x = 49$.

58.•• Найдите все целые значения n, при которых является натуральным числом корень уравнения:

1) $nx = -5$; 2) $(n - 6)x = 25$.

59.•• При каком значении b имеют общий корень уравнения:

1) $7 - 3x = 6x - 56$ и $x - 3b = -35$;
2) $2y - 9b = 7$ и $3{,}6 + 5y = 7(1{,}2 - y)$?

60.•• При каком значении c имеют общий корень уравнения:

1) $(4x + 1) - (7x + 2) = x$ и $12x - 9 = c + 5$;
2) $\frac{1}{7}cx = x + c$ и $6 - 3(2x - 4) = -8x + 4$?

61.•• При каком значении a не имеет корней уравнение:

1) $ax = 6$; 2) $(3 - a)x = 4$; 3) $(a - 2)x = a + 2$?

62.•• При каком значении a любое число является корнем уравнения:

1) $ax = a$; 3) $a(a + 5)x = a + 5$?
2) $(a - 2)x = 2 - a$;

63.•• При каких значениях a имеет единственный корень уравнение:

1) $(a - 5)x = 6$; 2) $(a + 7)x = a + 7$?

64.•• Решите уравнение:

1) $(b + 1)x = 9$; 2) $(b^2 + 1)x = -4$.

65.•• Решите уравнение $(m + 8)x = m + 8$.

66.•• Каким выражением можно заменить звездочку в равенстве $6x + 8 = 4x + *$, чтобы образовалось уравнение: 1) не имеющее корней; 2) имеющее бесконечно много корней; 3) имеющее один корень?

67.** В равенстве $2(1{,}5x - 0{,}5) = 7x + *$ замените звездочку таким выражением, чтобы образовавшееся уравнение: 1) не имело корней; 2) имело бесконечно много корней; 3) имело один корень.

68.* Решите уравнение:

1) $|x| + 3x = 12$;
2) $|x| - 4x = 9$;
3) $2(x - 5) - 6|x| = -18$.

69.* Решите уравнение:

1) $2x - |x| = -1$;
2) $7|x| - 3(x + 2) = -10$.

70.* При каких целых значениях a корень уравнения:

1) $x - 2 = a$;
2) $x + 7a = 9$;
3) $2x - a = 4$;
4) $x + 2a = 3$

является целым числом, которое делится нацело на 2?

71.* При каких целых значениях b корень уравнения:

1) $x + 3 = b$;
2) $x - 2 = b$;
3) $x - 3b = 8$

является целым числом, которое делится нацело на 3?

72.* При каких значениях b корень уравнения будет меньше, чем b:

1) $3x = b$;
2) $x = 2b$?

73.* При каких значениях d корень уравнения будет больше, чем d:

1) $4x = d$;
2) $\frac{1}{5}x = d$?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

74. Один работник может выполнить задание за 45 ч, а другому для этого надо в $1\frac{1}{2}$ раза меньше времени, чем первому. За сколько часов они выполнят это задание, работая вместе? Какую часть задания при этом выполнит каждый из них?

75. За первый день Вася прочел $\frac{8}{15}$ страниц книги, за второй — $\frac{5}{12}$ страниц книги и оставшиеся 14 страниц. Сколько страниц в этой книге?

76. Известно, что n — натуральное число. Каким числом, четным или нечетным, является значение выражения:

1) $4n$;
2) $2n - 1$;
3) $n(n + 1)$?

77. Верно ли, что при любом значении a:
1) $2a > a$; 2) $2\,|a| > |a|$?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

78. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

3. Решение задач с помощью уравнений

Вам много раз приходилось решать задачи с помощью составления уравнений (текстовые задачи). И разнообразие решенных задач является лучшим подтверждением эффективности и универсальности этого метода. В чем же заключается секрет его силы?

Дело в том, что условия непохожих друг на друга задач удается записать математическим языком. Полученное уравнение — это результат перевода условия задачи с русского (украинского, французского и т. п.) языка на математический.

Часто условие задачи представляет собой описание какой-то реальной ситуации. Составленное по этому условию уравнение называют **математической моделью** этой ситуации.

Конечно, чтобы получить ответ, уравнение надо еще решить. Для этого в алгебре разработаны различные методы и приемы. С некоторыми из них вы уже знакомы, многие другие вам еще предстоит изучить.

Найденный корень — это еще не ответ задачи. Следует выяснить, не противоречит ли полученный результат реальной ситуации, описанной в условии.

Рассмотрим, например, такие задачи:

1) За 4 ч собрали 6 кг ягод. Сколько ягод собирали за каждый час?
2) Несколько мальчиков собрали 6 кг ягод. Каждый из них собрал по 4 кг. Сколько мальчиков собирали ягоды?

Обе задачи приводят к одному и тому же уравнению $4x = 6$, корнем которого является число 1,5. Но в первой задаче решение «полтора килограмма ягод за час» является приемлемым, а во второй — «ягоды собирали полтора мальчика» — нет.

При решении задач на составление уравнений удобно пользоваться следующей схемой:

1) по условию задачи составить уравнение (сконструировать математическую модель задачи);
2) решить уравнение, полученное на первом шаге;
3) выяснить, соответствует ли найденный корень смыслу задачи, и дать ответ.

Эту последовательность действий, состоящую из трех шагов, можно назвать **алгоритмом** решения текстовых задач.

ПРИМЕР 1

Рабочий должен был выполнить заказ за 8 дней. Однако, изготавливая ежедневно 12 деталей сверх нормы, он уже за 6 дней работы не только выполнил заказ, но и изготовил дополнительно 22 детали. Сколько деталей ежедневно изготавливал рабочий?

Решение

Пусть рабочий изготавливал ежедневно x деталей. Тогда по плану он должен был изготавливать ежедневно $(x - 12)$ деталей, а всего их должно было быть изготовлено $8(x - 12)$. На самом деле он изготовил $6x$ деталей. Так как по условию задачи значение выражения $6x$ на 22 больше значения выражения $8(x - 12)$, то

$$6x - 22 = 8(x - 12).$$

Тогда

$$6x - 22 = 8x - 96;$$
$$6x - 8x = -96 + 22;$$
$$-2x = -74;$$
$$x = 37.$$

Ответ: 37 деталей.

ПРИМЕР 2

Велосипедист проехал 65 км за 5 ч. Часть пути он проехал со скоростью 10 км/ч, а оставшийся путь — со скоростью 15 км/ч. Сколько времени он ехал со скоростью 10 км/ч и сколько — со скоростью 15 км/ч?

Решение

Пусть велосипедист ехал x ч со скоростью 10 км/ч. Тогда со скоростью 15 км/ч он ехал $(5 - x)$ ч. Первая часть пути составляет $10x$ км, а вторая — $15(5 - x)$ км. Имеем:

$$10x + 15(5 - x) = 65;$$
$$10x + 75 - 15x = 65;$$
$$-5x = -10;$$
$$x = 2.$$

Следовательно, со скоростью 10 км/ч велосипедист ехал 2 ч, а со скоростью 15 км/ч — 3 ч.

Ответ: 2 ч, 3 ч.

79.° Петя купил 24 тетради, причем тетрадей в линейку он купил на 6 больше, чем в клеточку. Сколько тетрадей каждого вида купил Петя?

80.° С двух деревьев собрали 65,4 кг вишен, причем с одного дерева собрали на 12,6 кг меньше, чем со второго. Сколько килограммов вишен собрали с каждого дерева?

81.° Периметр прямоугольника равен 7,8 см, а одна из его сторон на 1,3 см больше другой. Найдите стороны прямоугольника.

82.° Одна из сторон прямоугольника в 11 раз меньше другой. Найдите стороны прямоугольника, если его периметр равен 144 см.

83.° Три самые высокие горные вершины Украины Говерла, Бребенескул и Петрос находятся в самом высоком горном массиве Карпат Черногоры. Сумма их высот равна 6113 м, причем Говерла на 29 м выше, чем Бребенескул, и на 41 м выше, чем Петрос. Найдите высоту каждой из горных вершин.

84.° Три самые глубокие пещеры Украины Солдатская, Каскадная и Нахимовская находятся в Крыму. Сумма их глубин равна 1874 м, причем глубина Каскадной в 1,2 раза меньше глубины Солдатской и на 26 м больше глубины пещеры Нахимовской. Найдите глубину каждой из пещер.

85.° В доме 160 квартир трех видов: однокомнатные, двухкомнатные и трехкомнатные. Однокомнатных квартир в 2 раза меньше, чем двухкомнатных, и на 24 меньше, чем трехкомнатных. Сколько в доме квартир каждого вида?

86.° Трое рабочих изготовили 96 деталей. Первый из них изготовил в 3 раза больше деталей, чем второй, а третий — на 16 деталей больше, чем второй. Сколько деталей изготовил каждый рабочий?

87.° В трех цехах завода работает 101 человек. Количество рабочих первого цеха составляет $\frac{4}{9}$ количества рабочих третьего цеха, а количество рабочих второго цеха — 80 % количества рабочих третьего. Сколько человек работает в первом цехе?

88.° Велосипедисты участвовали в трехдневном велопробеге. Во второй день они проехали 120 % расстояния, которое они преодолели за первый день, а в третий день — $\frac{4}{5}$ того же расстояния. Какой путь они проехали в первый день, если длина всего маршрута составляет 270 км?

89.° В 6 больших и 8 маленьких ящиков разложили 232 кг яблок. Сколько килограммов яблок оказалось в каждом ящике, если в маленьком ящике было на 6 кг яблок меньше, чем в большом?

90.° В двух залах кинотеатра 534 места. В одном зале 12 одинаковых рядов, а в другом — 15 одинаковых рядов. В каждом ряду первого зала на 4 места больше, чем в каждом ряду второго. Сколько мест в каждом зале кинотеатра?

91.° Расстояние между двумя городами мотоциклист проехал за 0,8 ч, а велосипедист — за 4 ч. Скорость велосипедиста на 48 км/ч меньше скорости мотоциклиста. Найдите скорость каждого из них.

92.° За 2 кг конфет одного вида заплатили столько, сколько за 3,5 кг конфет другого вида. Какова цена каждого вида конфет, если 1 кг конфет первого вида на 12 грн. дороже 1 кг конфет второго вида?

93.° Килограмм огурцов на 0,8 грн. дешевле килограмма помидоров. Сколько стоит 1 кг помидоров, если за

3,2 кг помидоров заплатили столько, сколько за 3,6 кг огурцов?

94.° В одном баке было в 3 раза больше воды, чем в другом. Когда в первый бак долили 16 л воды, а во второй — 80 л, то в обоих баках воды стало поровну. Сколько литров воды было сначала в каждом баке?

95.° На одной полке было в 4 раза больше книг, чем на другой. Когда с первой полки взяли 5 книг, а на вторую поставили 16 книг, то на обеих полках книг стало поровну. Сколько книг было сначала на каждой полке?

96.° Сейчас отцу 26 лет, а его сыну — 2 года. Через сколько лет отец будет в 5 раз старше сына?

97.° Сейчас матери 40 лет, а ее дочери — 18 лет. Сколько лет тому назад дочь была в 3 раза моложе матери?

98.• Для школьной библиотеки приобрели 40 орфографических и толковых словарей русского языка, заплатив всего 690 грн. Сколько было словарей каждого вида, если орфографический словарь стоит 15 грн., а толковый — 24 грн.?

99.• Предприниматель положил в банк 3000 грн., причем по одной части вклада ему насчитывали 7 % годовых, а по другой — 8 % годовых. Через год он получил 222 грн. прибыли. Найдите, какая сумма была внесена на каждый вид вклада.

100.• В кассе было 19 купюр по две и пять гривен, всего на сумму 62 грн. Сколько купюр каждого вида было в кассе?

101.• В двух хранилищах было одинаковое количество угля. Когда из первого хранилища вывезли 680 т угля, а из второго — 200 т, то в первом осталось в 5 раз меньше угля, чем во втором. Сколько угля было в каждом хранилище сначала?

102.• У Пети и Васи было поровну денег. Когда на покупку книг Петя потратил 30 грн., а Вася — 45 грн., то у Пети осталось в 2 раза больше денег, чем у Васи. Сколько денег было у каждого мальчика сначала?

103.• В одном мешке было в 5 раз больше муки, чем в другом. Когда из первого мешка пересыпали 12 кг муки во второй мешок, то масса муки во втором мешке составила $\frac{5}{7}$ массы муки в первом. Сколько килограммов муки было в каждом мешке сначала?

104.° В одном контейнере было в 3 раза больше угля, чем в другом. Когда из первого контейнера пересыпали 300 кг угля во второй контейнер, то масса угля в первом контейнере составила 60 % массы угля во втором. Сколько килограммов угля было в каждом контейнере сначала?

105.° Одному рабочему надо было изготовить 90 деталей, а другому — 60. Первый рабочий ежедневно изготавливал 4 детали, а второй — 5 деталей. Через сколько дней первому рабочему останется изготовить в два раза больше деталей, чем второму, если они начали работать в один день?

106.° В одной цистерне было 200 л воды, а в другой — 640 л. Когда из второй цистерны использовали в два раза больше воды, чем из первой, то во второй осталось в 3,5 раза больше воды, чем в первой. Сколько литров воды использовали из каждой цистерны?

107.° Из двух городов, расстояние между которыми равно 385 км, выехали навстречу друг другу легковой и грузовой автомобили. Легковой автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, а грузовой — 50 км/ч. Сколько времени ехал до встречи каждый из них, если грузовой автомобиль выехал на 4 ч позже легкового?

108.° Из одного села в другое вышел пешеход со скоростью 4 км/ч, а через 1,5 ч после этого из другого села навстречу ему выехал велосипедист со скоростью 16 км/ч. Через сколько минут после выезда велосипедист встретился с пешеходом, если расстояние между селами равно 14 км?

109.° Расстояние между двумя городами по реке на 55 км меньше, чем по шоссе. Расстояние между городами теплоход проходит по реке за 6 ч, а автобус по шоссе — за 3 ч 30 мин. Найдите скорости автобуса и теплохода, если скорость теплохода на 30 км/ч меньше скорости автобуса.

110.° Теплоход прошел 4 ч по течению реки и 3 ч против течения. Путь, пройденный теплоходом по течению, на 48 км больше пути против течения. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если скорость течения равна 2,5 км/ч.

111.° Турист плыл 5 ч на плоту по течению реки и 1,5 ч на моторной лодке против течения. Скорость лодки в стоячей воде равна 24 км/ч. Найдите скорость течения, если против течения турист проплыл на 23 км больше, чем по течению.

112.° В двух ящиках было 55 кг печенья. Когда из первого ящика переложили во второй $\frac{1}{3}$ печенья, то в нем осталось на 5 кг больше печенья, чем стало во втором. Сколько килограммов печенья было в каждом ящике сначала?

113.° В двух корзинах было 24 кг груш. Когда из первой корзины переложили во вторую $\frac{3}{7}$ груш, которые были в первой, то во второй корзине стало в 2 раза больше груш, чем осталось в первой. Сколько килограммов груш было в каждой корзине сначала?

114.° На трех полках стояли книги. На первой полке стояло $\frac{4}{15}$ всех книг, на второй — 60 % всех книг, а на третьей — на 8 книг меньше, чем на первой. Сколько всего книг стояло на трех полках?

115.° В четыре бидона разлили молоко. В первый бидон налили 30 % всего молока, во второй — $\frac{5}{6}$ того, что в первый, в третий — на 26 л меньше, чем в первый, а в четвертый — на 10 л больше, чем во второй. Сколько литров молока было в четырех бидонах?

116.° При расселении туристов в палатки оказалось, что если в каждую палатку поселить 6 туристов, то 5 туристам места не хватит, а если расселять по 7 туристов, то 6 мест останутся свободными. Сколько было туристов?

117.° При подготовке новогодних подарков для учащихся 7 класса оказалось, что если в каждый подарок положить по 4 апельсина, то не хватит 3 апельсинов, а если положить по 3 апельсина, то останутся лишними 25 апельсинов. Сколько было апельсинов?

118.° Рабочий планировал ежедневно изготавливать по 20 деталей, чтобы вовремя выполнить производственное задание. Но он изготавливал каждый день на 8 деталей больше, чем планировал, и уже за 2 дня до окончания срока работы он изготовил 8 деталей сверх плана. Сколько дней планировал рабочий выполнять задание?

119.° Готовясь к экзамену, ученик планировал ежедневно решать 10 задач. Но он каждый день решал на 4 задачи больше, поэтому уже за 3 дня до экзамена ему осталось решить 2 задачи. Сколько всего задач планировал решить ученик?

120.° В двузначном числе количество десятков в 3 раза больше количества единиц. Если цифры числа переставить, то полученное число будет на 54 меньше данного. Найдите данное двузначное число.

121.° В двузначном числе количество десятков на 2 меньше количества единиц. Если цифры числа переставить, то полученное число будет в $1\frac{3}{4}$ раза больше данного. Найдите данное двузначное число.

122.°° Из двух городов, расстояние между которыми равно 270 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Через 2 ч после начала движения расстояние между ними составляло 30 км. Найдите скорость каждого автомобиля, если скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого.

123.°° Есть два сплава меди и цинка. Первый сплав содержит 9 %, а второй — 30 % цинка. Сколько килограммов каждого сплава надо взять, чтобы получить сплав массой 300 кг, содержащий 23 % цинка?

124.°° Есть два водно-солевых раствора. Первый раствор содержит 25 %, а второй — 40 % соли. Сколько килограммов каждого раствора надо взять, чтобы получить раствор массой 50 кг, содержащий 34 % соли?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

125. Вычислите значение выражения:

1) $-9{,}6 : 12 - 29 : (-5{,}8) + 4 : (-25)$;
2) $-3{,}4 \cdot (4 - 4{,}6) + 12{,}4 \cdot (-0{,}8 - 2{,}2)$;
3) $\left(0{,}4 - \frac{3}{20}\right) \cdot 6\frac{2}{3} - 1{,}75 : \left(-7\frac{7}{8}\right)$;
4) $\left(6{,}3 : \left(-\frac{9}{20}\right) - 2{,}6 : \left(-\frac{1}{20}\right)\right) \cdot \left(-\frac{4}{19}\right) - 0{,}6 : (-0{,}36)$.

126. Найдите значение выражения:

1) $14 - 6x$, если $x = 4; -2; 0; -0{,}3; \frac{3}{8}$;
2) $a^2 + 3$, если $a = 7; -2; 0; 0{,}4; -1\frac{1}{3}$;
3) $(2m - 1)\,n$, если $m = 0{,}2$; $n = -0{,}6$.

127. Заполните таблицу, вычислив значение выражения $-3x + 2$ для данных значений x:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$-3x + 2$									

128. Какую цифру надо приписать слева и справа к числу 37, чтобы полученное число делилось нацело на 6?

129. Имеет ли корни уравнение:

1) $x^2 = 0$; 2) $x^2 = -1$; 3) $|x| = x$; 4) $|x| = -x$?

В случае утвердительного ответа укажите их.

130. Может ли быть целым числом значение выражения:

1) $\frac{1}{x}$; 2) $\frac{x}{x+1}$?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

131. Найдите все натуральные значения n, при которых значение каждого из выражений $n - 2$, $n + 24$, $n + 26$ является простым числом.

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ № 1 «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

1. Вычислите значение выражения $5 - 4b$ при $b = -2$.
А) 3; Б) −3; В) 13; Г) −13.

2. Найдите значение выражения $\frac{1}{5}m + \frac{1}{3}n$, если $m = 35$, $n = -18$.
А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

3. Какое из данных выражений является записью разности произведения чисел a и b и числа c?
А) $a - bc$; Б) $ab - c$; В) $a(b - c)$; Г) $(a - b)c$.

4. Среди данных алгебраических выражений укажите целое.
А) $\frac{b}{b-7}$; Б) $\frac{b+5}{b-7}$; В) $\frac{b+5}{7}$; Г) $\frac{b+5}{b}$.

5. Найдите корень уравнения $7x + 2 = 3x - 6$.
А) 2; Б) 1; В) −2; Г) −1.

6. Какое из уравнений является линейным?
А) $2x + 3 = 0$; В) $|x| - 4 = 0$;
Б) $\frac{1}{x} = 0$; Г) $(x - 1)(x - 2) = 0$.

7. Решите уравнение $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 6$.
А) 12; Б) 36; В) −6; Г) −1.

8. Решите уравнение $2(x - 3) - (x + 4) = x - 10$.
А) 0; В) x — любое число;
Б) корней нет; Г) 10.

9. При каком значении a уравнение $(a + 4)x = a - 3$ не имеет корней?
А) 3; В) 0;
Б) −4; Г) такого значения не существует.

10. Известно, что 45 % числа a на 7 больше, чем $\frac{1}{3}$ этого числа. Найдите число a.
А) 36; Б) 45; В) 60; Г) 90.

11. Трое рабочих изготовили 70 деталей. Первый рабочий изготовил в 2 раза меньше деталей, чем второй, а третий — на 10 деталей больше, чем первый.

Пусть первый рабочий изготовил x деталей. Какое из данных уравнений соответствует условию задачи?

А) $x + 2x + 2x + 10 = 70$; В) $x + 2x + 2x - 10 = 70$;
Б) $x + 2x + x + 10 = 70$; Г) $x + 2x + x - 10 = 70$.

12. На первом участке было в 4 раза больше кустов малины, чем на втором. Когда с первого участка пересадили на второй 12 кустов, то на втором участке стало в 2 раза меньше кустов малины, чем на первом.
Пусть на втором участке было сначала x кустов. Какое из данных уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии задачи?

А) $2(4x - 12) = x + 12$; В) $4x + 12 = 2(x - 12)$;
Б) $2(4x + 12) = x - 12$; Г) $4x - 12 = 2(x + 12)$.

ИТОГИ

- В этом параграфе было введено понятие «линейное уравнение». Вы научились решать линейные уравнения в общем виде.
- Вы узнали, что уравнение может служить математической моделью реальной ситуации.
- Вы познакомились с алгоритмом решения текстовых задач.

§ 2. ЦЕЛЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

- В этом параграфе вы научитесь упрощать выражения, познакомитесь с формулами и приемами, помогающими облегчить работу по преобразованию выражений. Вы узнаете, что возведение числа в квадрат и куб — частные случаи нового арифметического действия. Вы научитесь классифицировать алгебраические выражения.
- Слова «определение» и «теорема» станут для вас привычными и понятными.

4. Тождественно равные выражения. Тождества

Рассмотрим две пары выражений:

1) $x^5 - x$ и $5x^3 - 5x$; 2) $2(x - 1) - 1$ и $2x - 3$.

В следующих таблицах приведены значения этих выражений при *некоторых* значениях переменной x.

x	-2	-1	0	1	2
$x^5 - x$	-30	0	0	0	30
$5x^3 - 5x$	-30	0	0	0	30

x	-2	-1	0	1	2
$2(x - 1) - 1$	-7	-5	-3	-1	1
$2x - 3$	-7	-5	-3	-1	1

Мы видим, что эти значения совпадают для каждой отдельно взятой пары выражений.

Сохранится ли подмеченная закономерность при *любых других* значениях x?

Для выражений, записанных в первой таблице, ответ на этот вопрос отрицательный: если, например, $x = 3$, то $x^5 - x = 3^5 - 3 = 240$, а $5x^3 - 5x = 5 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3 = 120$.

А вот значения выражений, записанных во второй таблице, совпадают при любых значениях x. Покажем это. $2(x-1)-1=2x-2-1=2x-3$, то есть после упрощения выражение $2(x-1)-1$ «превратилось» в выражение $2x-3$.

Определение. Выражения, соответственные значения которых равны при любых значениях переменных, называют тождественно равными.

Например, выражения $2(x-1)-1$ и $2x-3$ — тождественно равные, а выражения x^5-x и $5x^3-5x$ тождественно равными не являются.

Вот еще примеры тождественно равных выражений:

$$7(a+b) \quad \text{и} \quad 7a+7b;$$
$$3x+y \quad \text{и} \quad y+3x;$$
$$m^2np \quad \text{и} \quad nm^2p;$$
$$a-(b+c) \quad \text{и} \quad a-b-c.$$

Рассмотрим равенство $7(a+b)=7a+7b$. В силу распределительного свойства умножения оно верно при любых значениях переменных a и b.

Определение. Равенство, верное при любых значениях переменных, входящих в него, называют тождеством.

Из пары тождественно равных выражений легко конструируется тождество.

Например, все равенства

$$3x+y=y+3x;$$
$$m^2np=nm^2p;$$
$$a-(b+c)=a-b-c$$

являются тождествами.

Заметим, что с тождествами вы встречались и раньше. Так, равенства, выражающие свойства сложения и умножения чисел, являются примерами тождеств:

$$a+b=b+a,$$
$$ab=ba,$$
$$(a+b)+c=a+(b+c),$$
$$(ab)c=a(bc),$$
$$a(b+c)=ab+ac.$$

Найдем значение выражения $11a-3a+2$ при $a=\frac{1}{8}$. Конечно, можно сразу в это выражение вместо a подставить число $\frac{1}{8}$ и найти значение числового выражения $11\cdot\frac{1}{8}-3\cdot\frac{1}{8}+2$. Однако гораздо удобнее вначале привести подобные слагаемые, заменив данное выражение $11a - 3a + 2$ на тождественно равное: $8a + 2$. При $a=\frac{1}{8}$ имеем: $8\cdot\frac{1}{8}+2=3$.

Замену одного выражения другим, тождественно равным ему, называют **тождественным преобразованием** выражения.

Приведение подобных слагаемых и раскрытие скобок — примеры тождественных преобразований выражений. Упрощая выражение, мы фактически заменяем его на более простое, тождественно равное ему.

Доказать тождество — это значит доказать, что данное равенство является тождеством.

Для доказательства тождеств используют такие приемы (методы):

- тождественно преобразуют одну из частей данного равенства, получая другую часть;
- тождественно преобразуют каждую из частей данного равенства, получая одно и то же выражение;
- показывают, что разность левой и правой частей данного равенства тождественно равна нулю.

ПРИМЕР 1

Докажите тождество:

1) $2(3a + 4b) + 3(a - 7b) - 7(2a - 7b) = -5a + 36b$;
2) $0{,}6(x - 5) + 0{,}4(x + 1) = 0{,}8(x + 2) + 0{,}2(x - 21)$;
3) $a(b - c) + b(c - a) = c(b - a)$.

Решение

1) Упростим левую часть тождества, которое требуется доказать:

$$2(3a + 4b) + 3(a - 7b) - 7(2a - 7b) =$$
$$= 6a + 8b + 3a - 21b - 14a + 49b = -5a + 36b.$$

Тождество доказано.

2) Упростим левую и правую части тождества, которое требуется доказать:

$$0{,}6\,(x-5)+0{,}4\,(x+1)=0{,}6x-3+0{,}4x+0{,}4=x-2{,}6;$$
$$0{,}8\,(x+2)+0{,}2\,(x-21)=0{,}8x+1{,}6+0{,}2x-4{,}2=$$
$$=x-2{,}6.$$

Тождество доказано.

3) Рассмотрим разность левой и правой частей тождества, которое требуется доказать:

$$a\,(b-c)+b\,(c-a)-c\,(b-a)=$$
$$=ab-ac+bc-ab-bc+ac=0.$$

Тождество доказано.

ПРИМЕР 2.

Докажите, что равенство $(a+2)(a-3)=a^2-6$ не является тождеством.

Р е ш е н и е. Чтобы доказать, что равенство не является тождеством, достаточно привести *контрпример*: указать такое значение переменной (переменных), при котором данное равенство не выполняется.

Например, при $a=1$ имеем:

$$(a+2)(a-3)=(1+2)(1-3)=-6;\quad a^2-6=1-6=-5.$$

Следовательно, данное равенство не является тождеством.

?

1. Какие выражения называют тождественно равными?
2. Что называют тождеством?
3. Что называют тождественным преобразованием выражения?
4. Какие тождественные преобразования выражений вы знаете?
5. Что означает доказать тождество?

132.° Какие свойства действий дают возможность утверждать, что данные выражения являются тождественно равными:

1) $ab+cd$ и $cd+ab$;
2) $(a+1)+b$ и $a+(1+b)$;
3) $a\cdot 4b$ и $4ab$;
4) $(x+2)(x+3)$ и $(3+x)(2+x)$;
5) $7\,(a-4)$ и $7a-28$?

133.° Является ли тождеством равенство:

1) $2x-12=2\,(x-6)$;
2) $a-b=-(b-a)$;
3) $3m+9=3\,(m+9)$;
4) $(a+b)\cdot 1=a+b$;

5) $(a + b) \cdot 0 = a + b$;
6) $(a - a)(b + b) = 0$;
7) $3a - a = 3$;
8) $4x + 3x = 7x$;
9) $a - (b + c) = a - b + c$;
10) $m + (n - k) = m + n - k$;
11) $4a - (3a - 5) = a + 5$;
12) $(a - 5)(a + 3) = (5 - a)(3 + a)$?

134.° Являются ли тождественно равными выражения:
1) $8(a - b + c)$ и $8a - 8b + 8c$;
2) $-2(x - 4)$ и $-2x - 8$;
3) $(5a - 4) - (2a - 7)$ и $3a - 11$?

135.° Сравните значения выражений a^2 и $|a|$ при $a = -1$; 0; 1. Можно ли утверждать, что равенство $a^2 = |a|$ является тождеством?

136.° Какому из данных выражений тождественно равно выражение $-3a + 8b - a - 11b$:
1) $-4a + 3b$;
2) $-3a + 3b$;
3) $-4a - 3b$;
4) $-3a - 3b$?

137.° Среди выражений $-10a + 7$; $-10a - 7$; $-14a + 7$; $-14a - 7$ найдите выражение, тождественно равное выражению $-12a + (7 - 2a)$.

138.° Докажите тождество:
1) $-5x - 6(9 - 2x) = 7x - 54$;
2) $\frac{1}{3}(12 - 0{,}6y) + 0{,}3y = 0{,}1y + 4$;
3) $3(7 - a) - 7(1 - 3a) = 14 + 18a$;
4) $(6x - 8) - 5x - (4 - 9x) = 10x - 12$;
5) $3(2{,}1m - n) - 0{,}9(7m + 2n) = -4{,}8n$;
6) $\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{8}x + 6\right) - \frac{1}{6}\left(24 - 1\frac{1}{2}x\right) = 0$.

139.° Докажите тождество:
1) $-0{,}2(4b - 9) + 1{,}4b = 0{,}6b + 1{,}8$;
2) $(5a - 3b) - (4 + 5a - 3b) = -4$;
3) $5(0{,}4x - 0{,}3) + (0{,}8 - 0{,}6x) = 1{,}4x - 0{,}7$;
4) $\frac{1}{9}(3y - 27) - 2\left(\frac{1}{12}y - 1{,}5\right) = \frac{1}{6}y$.

140.° Какие из данных равенств являются тождествами:

1) $(2a-3b)^2=(3b-2a)^2$;
2) $(a-b)^3=(b-a)^3$;
3) $|a+5|=a+5$;
4) $|a-b|=|b-a|$;
5) $|a^2+4|=a^2+4$;
6) $|a+b|=|a|+|b|$;
7) $|a-1|=|a|-1$;
8) $a^2-b^2=(a-b)^2$?

141.° Запишите в виде равенства утверждение:

1) сумма противоположных чисел равна нулю;
2) произведение любого числа и числа 1 равно 1;
3) произведением данного числа и числа -1 является число, противоположное данному;
4) модули противоположных чисел равны;
5) разность противоположных чисел равна нулю.

Какие из этих равенств являются тождествами?

142.° Докажите тождество:

1) $4(2-3m)-(6-m)-2(3m+4)=-17m-6$;
2) $a+b-10ab=2a(3-b)-3b(a-2)-5(ab+a+b)$;
3) $6(5a-3)+(10-20a)-(6a-4)=5a-(3a-(2a-4))$.

143.° Докажите тождество:

1) $(3m-7)\cdot 0{,}6-0{,}8(4m-5)-(-1{,}7-1{,}4m)=1{,}5$;
2) $7a(3b+4c)-3a\left(b+\frac{1}{3}c\right)=9a(2b+3c)$.

144.° Докажите, что не является тождеством равенство:

1) $(a+3)^2=a^2+9$;
2) $(b-1)(b+1)=(b-1)b+1$;
3) $(c+1)^3=c^3+1$;
4) $|m|-|n|=|n|-|m|$.

145.° Докажите, что не являются тождественно равными выражения:

1) $4-m^2$ и $(2-m)^2$;
2) $|-m|$ и m;
3) m^3+8 и $(m+2)(m^2+4)$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

146. Пассажирский поезд проходит расстояние между двумя станциями за 12 ч. Если одновременно с этих станций выйдут навстречу друг другу пассажирский и товарный поезда, то они встретятся через 8 ч после начала движения. За какое время товарный поезд может преодолеть расстояние между станциями?

147. Фермер выращивал гречиху на двух участках общей площадью 24 га. На одном участке он собрал по 21 ц гречихи с гектара, а на другом — по 26 ц с гектара. Сколько всего центнеров гречихи собрал фермер, если со второго участка он собрал на 201 ц гречихи больше, чем с первого?

148. Известно, что $a > 0$, $a + b < 0$. Сравните:
1) b и 0; 2) $|a|$ и $|b|$.

149. Цену товара сначала увеличили на 50 %, а потом уменьшили на 50 %. Увеличилась или уменьшилась и на сколько процентов начальная цена товара?

150. Общая длина реки Днепр 2201 км, из них в пределах Украины — 981 км. Общая длина реки Десна 1130 км, из них в пределах Украины — 591 км. Какая из этих рек имеет больший процент длины в пределах Украины?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

151. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 10. За один шаг разрешается, выбрав два числа, к каждому из них прибавить 5 или из каждого вычесть 1. Можно ли с помощью этих операций добиться того, чтобы все числа, записанные на доске, оказались равными?

5. Степень с натуральным показателем

Как вы знаете, в математике придумали способ коротко записывать произведение, все множители которого равны.

Например, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Выражение $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ называют **степенью**, число $\frac{1}{2}$ — **основанием степени**, а число 3 — **показателем степени.**

Определение. **Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a.**

Степень с основанием a и показателем n обозначают a^n и читают: «a в n-й степени». Степени с показателями 2 и 3 можно прочитать иначе: запись a^2 читают «a в квадрате», запись a^3 — «a в кубе».

Обратите внимание, что в определении степени на показатель n наложено ограничение $n > 1$. И это понятно: ведь не принято рассматривать произведение, состоящее из одного множителя.

А может ли показатель степени быть равным 1? Ответ на этот вопрос дает следующее

Определение. Степенью числа a с показателем 1 называют само это число.

Замечание. Это определение позволяет любое число считать степенью с показателем 1.

Итак, из приведенных определений следует, что

$$a^n = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}, \text{ где } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

Легко подсчитать, что, например, $2^5 = 32$. В таких случаях говорят, что число 2 **возвели в пятую степень** и получили 32. Также можно сказать, что выполнили **действие возведения в пятую степень** числа 2.

Равенство $(-3)^2 = 9$ означает, что число -3 **возвели в квадрат** и получили 9, а равенство $(-3)^3 = -27$ означает, что число -3 **возвели в куб** и получили -27.

Заметим, что алгебраическое выражение может быть сконструировано не только с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления, но и действия возведения в степень.

Очевидно, что если $a > 0$, то $a^n > 0$; если $a = 0$, то $0^n = 0$.

Итак, ***при возведении неотрицательного числа в степень получаем неотрицательное число.***

При возведении отрицательного числа в степень возможны два случая.

Если показатель степени — четное число, то при возведении в степень множители можно разбить на пары.

Например, $(-2)^6 = ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2))$.

Если же показатель степени — число нечетное, то один множитель останется без пары.

Например, $(-2)^5 = ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2)) \cdot (-2)$.

Поскольку каждые два отрицательных множителя в произведении дают положительное число, то верно следующее утверждение:
при возведении отрицательного числа в степень с четным показателем получаем положительное число, а при возведении отрицательного числа в степень с нечетным показателем получаем отрицательное число.

Можно ли, например, число 5 возвести в степень 0 или в степень -2? Можно. Как это сделать, вы узнаете в следующем учебном году.

ПРИМЕР 1

Решите уравнение $(x - 10)^8 = -1$.

Решение. Так как при возведении в степень с четным показателем любого числа, кроме 0, получаем положительное число, то данное уравнение не имеет корней.
Ответ: корней нет.

ПРИМЕР 2

Докажите, что значение выражения $10^{200} + 2$ делится нацело на 3.

Решение. Запись значения выражения 10^{200} состоит из цифры 1 и двухсот цифр 0, а запись значения выражения $10^{200} + 2$ — из цифры 1, цифры 2 и ста девяноста девяти цифр 0. Следовательно, сумма цифр числа равна 3 и само число делится нацело на 3.

ПРИМЕР 3

Докажите, что значение выражения $9^n - 1$ делится нацело на 10 при любом четном значении n.

Решение. Если n — четное число, то последней цифрой выражения 9^n является единица, а последней цифрой значения выражения $9^n - 1$ — нуль. Следовательно, значение выражения $9^n - 1$ делится нацело на 10 при любом четном значении n.

?

1. Что называют степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1?
2. Как читают запись a^n? a^2? a^3?

3. Что называют степенью числа a с показателем 1?

4. Чему равно значение выражения 0^n при любом натуральном значении n?

5. Какое число, положительное или отрицательное, получают при возведении в степень положительного числа?

6. Каким числом, положительным или отрицательным, является значение степени отрицательного числа, если показатель степени является четным числом? нечетным числом?

152.° Упростите выражение, заменив произведение одинаковых множителей степенью:

1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
5) $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$;
2) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$;
6) $\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{10\text{ множителей}}$;
3) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$;
7) $\underbrace{0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot \ldots \cdot 0{,}4}_{k\text{ множителей}}$;
4) $2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m$;
8) $\underbrace{c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}_{m\text{ множителей}}$.

153.° Прочитайте выражение, назовите основание и показатель степени:

1) 9^6; 3) $0{,}3^5$; 5) $(-0{,}6)^3$; 7) 73^1;
2) $2{,}4^7$; 4) $(-8)^2$; 6) $(-a)^{11}$; 8) $(3p)^{12}$.

154.° Пользуясь определением степени, представьте в виде произведения степень:

1) 11^6; 3) $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$; 5) $(-3{,}6)^7$;
2) $0{,}1^4$; 4) $(5c)^3$; 6) $(a + b)^5$.

155.° Найдите значение выражения:

1) 2^5; 3) $1{,}5^3$; 5) 1^{12}; 7) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$;
2) $0{,}6^2$; 4) 0^6; 6) $(-1)^{12}$; 8) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$.

156.° Выполните возведение в степень:

1) 7^2; 3) $1{,}2^2$; 5) $(-0{,}8)^3$; 7) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$;
2) $0{,}5^3$; 4) $(-1)^7$; 6) $\left(\frac{1}{6}\right)^4$; 8) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

157.° Заполните таблицу:

a	2	-2	10	-10	0,1	$-0,1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
a^2								
a^3								
a^4								

158.° Заполните таблицу:

a	-6	6	$-0,4$	0,4	3	0,03	$\frac{1}{2}$	-1	0
$10a^2$									
$(10a)^2$									

159.° Площадь Крымского полуострова — наибольшего полуострова Украины — равна $2,55 \cdot 10^4$ км². Выразите эту площадь натуральным числом в квадратных километрах.

160.° Расстояние от Земли до Солнца равно $1,495 \cdot 10^{11}$ м. Выразите это расстояние натуральным числом в метрах.

161.° Площадь материков и островов Земли составляет $1,49 \cdot 10^8$ км², а площадь океанов — $3,61 \cdot 10^8$ км². Выразите эти площади натуральными числами в квадратных километрах.

162.° Вычислите:

1) $8^2 - 1^{10}$;
2) $0,3 \cdot 2^4$;
3) $(4,2 - 3,8)^4 \cdot 25^2$;
4) $(6^3 : 200 - 0,4^2) : 0,2^3$.

163.° Вычислите:

1) $4^3 + 3^5$;
2) $0,6^3 - 0,4^3$;
3) $0,12 \cdot 5^4$.

164.° Найдите значение выражения:

1) $x^2 - x^3$, если $x = 0,1$;
2) $15a^2$, если $a = 0,4$;
3) $(x - y)^5$, если $x = 0,8$; $y = 0,6$;
4) a^2b^3, если $a = 0,6$; $b = 0,5$;
5) $(x^2 - y^2) : (x - y)$, если $x = 5$; $y = 3$;
6) $(x^2 - y^2) : x - y$, если $x = 5$; $y = 3$;
7) $x^2 - y^2 : (x - y)$, если $x = 5$; $y = 3$;
8) $x^2 - y^2 : x - y$, если $x = 5$; $y = 3$.

165.° Найдите значение выражения:
1) $16 - c^3$, если $c = 2$;
2) $(16x)^6$, если $x = 0{,}125$;
3) a^3b^2, если $a = 10$; $b = 0{,}1$;
4) $4a^4 - a$, если $a = 3$.

166.° Не выполняя вычислений, сравните:
1) $(-5{,}8)^2$ и 0; 3) $(-12)^7$ и $(-6)^4$; 5) $(-17)^6$ и 17^6;
2) 0 и $(-3{,}7)^3$; 4) -8^8 и $(-8)^8$; 6) $(-34)^5$ и $(-39)^5$.

167.° Не выполняя вычислений, сравните:
1) 0 и $(-1{,}9)^{10}$; 3) $(-0{,}1)^{12}$ и $(-12)^{25}$;
2) 0 и $(-76)^{15}$; 4) $\left(-4\frac{7}{9}\right)^9$ и $\left(-5\frac{8}{11}\right)^9$.

168.° Сравните с нулем значения выражений 2^{100}, $(-2)^{100}$, -2^{100}, $-(-2)^{100}$. Есть ли среди них выражения, принимающие равные значения?

169.° Сравните с нулем значения выражений 5^{101}, -5^{101}, $(-5)^{101}$, $-(-5)^{101}$. Есть ли среди них выражения, принимающие равные значения?

170.° Верно ли равенство:
1) $3^2 + 4^2 = 7^2$; 3) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 13^2$;
2) $5^2 + 12^2 = 13^2$; 4) $(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$?

171.° Докажите, что $1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 = 11^2$.

172.˙ Расположите в порядке возрастания значения выражений:
1) $0{,}3$; $0{,}3^2$; $0{,}3^3$; 2) $-0{,}4$; $(-0{,}4)^2$; $(-0{,}4)^3$.

173.˙ Сравните с нулем значение выражения:
1) $(-4)^7\cdot(-12)^9$; 3) $(-14)^4\cdot(-25)^{14}$;
2) $(-5)^6\cdot(-17)^{11}$; 4) $(-7)^9\cdot 0^6$.

174.˙ Сравните с нулем значение выражения:
1) $(-2)^{14}\cdot(-3)^{15}\cdot(-4)^{16}$; 2) $(-5)^{17}\cdot(-6)^{18}\cdot(-7)^{19}$.

175.˙ Запишите:
1) числа 16; 64; 256 в виде степени с основанием 4;
2) числа 0,09; 0,027; 0,00243 в виде степени с основанием 0,3.

176.˙ Представьте число: 1) 10 000; 2) −32; 3) 0,125; 4) −0,00001; 5) $-\frac{8}{343}$ в виде степени с показателем, большим 1, и наименьшим по модулю основанием.

177.° Составьте числовое выражение и найдите его значение:
1) квадрат разности чисел 7 и 5;
2) разность квадратов чисел 7 и 5;
3) куб суммы чисел 4 и 3;
4) сумма кубов чисел 4 и 3.

178.° Составьте числовое выражение и найдите его значение:
1) сумма куба числа 5 и квадрата числа 8;
2) куб разности чисел 9 и 8;
3) сумма квадратов чисел 2,5 и 0,25;
4) квадрат суммы чисел 7,8 и 8,2.

179.° Сколько в 1 км содержится:
1) метров; 2) сантиметров; 3) миллиметров?
Ответ запишите в виде степени числа 10.

180.° Скорость света в вакууме равна 300 000 км/с.
1) Запишите эту величину, используя степень числа 10.
2) Выразите скорость света в метрах в секунду; запишите результат, используя степень числа 10.

181.° Сколько в 1 м^2 содержится:
1) квадратных дециметров;
2) квадратных сантиметров;
3) квадратных миллиметров?
Ответ запишите в виде степени числа 10.

182.° Какие из чисел −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 являются корнями уравнения:
1) $x^4 = 16$; 3) $x^2 + x = 2$;
2) $x^5 = -243$; 4) $x^3 + x^2 = 6x$?

183.° При каком значении x равно нулю значение выражения:
1) $(2x - 3)^2$; 2) $(x + 4)^4$; 3) $(6x - 1)^5$?

184.° Решите уравнение:
1) $x^{10} = -1$; 2) $(x - 5)^4 = -16$.

185.° При каких натуральных значениях n верно неравенство $8 < 3^n < 85$?

186.° При каких натуральных значениях m верно неравенство $0{,}07 < 0{,}4^m < 0{,}5$?

187.°° Докажите, что выражение $x^2 + (x - 1)^2$ принимает только положительные значения.

188.°° Докажите, что выражение $(x + 1)^2 + |x|$ принимает только положительные значения.

189.•• Докажите, что не имеет положительных корней уравнение:

1) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; 2) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.

190.•• Докажите, что не имеет отрицательных корней уравнение:

1) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 5 = 0$;

2) $x^8 + x^4 + 1 = x^7 + x^3 + x$.

191.•• При каких значениях x и y верно равенство:

1) $x^2 + y^2 = 0$; 2) $(x - 1)^4 + (y + 2)^6 = 0$?

192.•• При каких значениях x и y верно равенство $x^8 + (y - 3)^2 = 0$?

193.•• При каком значении переменной данное выражение принимает наименьшее значение:

1) $x^2 + 7$; 2) $(x - 1)^4 + 16$?

194.•• При каком значении переменной данное выражение принимает наибольшее значение:

1) $10 - x^2$; 2) $24 - (x + 3)^6$?

195.•• Докажите, что значение выражения:

1) $2003^{2003} + 2005^{2005}$ делится нацело на 2;

2) $16^7 + 15^8 - 11^9$ делится нацело на 10;

3) $10^{10} - 7$ делится нацело на 3;

4) $6^n - 1$ делится нацело на 5 при любом натуральном значении n.

196.•• Докажите, что значение выражения:

1) $10^{100} + 8$ делится нацело на 9;

2) $111^n - 6$ делится нацело на 5 при любом натуральном значении n.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

197. Вычислите значение выражения:

$$\left(3\frac{1}{3}\cdot 1{,}3 - 7{,}2\cdot\frac{2}{27} - 9{,}1 : 3{,}5\right) : \frac{2}{5}.$$

198. К куску сплава массой 400 кг, содержащего 15 % меди, добавили 25 кг меди. Каким стало процентное содержание меди в новом сплаве?

199. В одном мешке было 80 кг сахара, а в другом — 60 кг. Из первого мешка взяли в 3 раза больше сахара, чем из второго, после чего во втором мешке осталось сахара в 2 раза больше, чем в первом. Сколько килограммов сахара взяли из каждого мешка?

200. Решите уравнение:

1) $9(2x - 1) - 5(11 - x) = 3(x + 4)$;

2) $5x - 26 = 12x - 7(x - 4)$.

201. Известно, что одно из чисел a, b и c положительное, второе — отрицательное, а третье равно нулю, причем $|a| = b^2(b - c)$. Установите, какое из чисел является положительным, какое — отрицательным и какое равно нулю.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

202. Сравните значения выражений:

1) $2^2 \cdot 2^3$ и 2^5;

2) $4^2 \cdot 4^1$ и 4^3;

3) $(3^3)^2$ и 3^6;

4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^3$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$;

5) $5^3 \cdot 2^3$ и $(5 \cdot 2)^3$;

6) $(0{,}25 \cdot 4)^2$ и $0{,}25^2 \cdot 4^2$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

203. В некотором городе с любой станции метро можно проехать на любую другую станцию (возможно, с пересадками). Докажите, что можно закрыть одну такую станцию (без права проезда через нее), чтобы с любой из оставшихся станций можно было проехать на любую другую.

6. Свойства степени с натуральным показателем

Рассмотрим произведение двух степеней с одинаковыми основаниями, например, a^2a^5. Это выражение можно представить в виде степени с основанием a:

$$a^2a^5 = (aa)\cdot(aaaaa) = aaaaaaa = a^7.$$

Значит, $a^2a^5 = a^{2+5}$.

Аналогично легко убедиться в том, что, например, $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$, $a \cdot a^9 = a^{1+9} = a^{10}$.

Прослеживается закономерность: $a^m a^n = a^{m+n}$, где m и n — произвольные натуральные числа.

Однако никакое количество конкретных примеров не может гарантировать, что приведенное равенство верно для *любых* натуральных m и n. Истинность его можно установить только путем **доказательства**.

В математике утверждение, справедливость которого устанавливается с помощью доказательства, называют **теоремой**.

Теорема 1. ***Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n справедливо равенство***:

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Доказательство. Для $m > 1$ и $n > 1$ имеем:

$$a^m a^n = \underbrace{(aa \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ множителей}} \underbrace{(aa \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ множителей}} = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n) \text{ множителей}} = a^{m+n}.$$

Если, например, $m = 1$ и $n > 1$, то

$$a \cdot a^n = a \cdot \underbrace{(aa \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ множителей}} = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{(n+1) \text{ множителей}} = a^{n+1}.$$

Случаи, когда $m > 1$ и $n = 1$ или когда $m = n = 1$, рассмотрите самостоятельно. ▲

Тождество $a^m a^n = a^{m+n}$ выражает **основное свойство степени.**

Аналогичное свойство имеет место для произведения трех и более степеней. Например,

$$3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^7 = (3^2 \cdot 3^3) \cdot 3^7 = 3^{2+3} \cdot 3^7 = 3^{(2+3)+7} = 3^{2+3+7} = 3^{12}.$$

Итак, ***при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складывают, а основание оставляют прежним.***

Рассмотрим выражение $a^9 : a^4$, где $a \neq 0$. Оно является частным двух степеней с одинаковыми основаниями. Так как $a^4 \cdot a^5 = a^9$, то по определению частного $a^9 : a^4 = a^5$, то есть $a^9 : a^4 = a^{9-4}$. Этот пример подсказывает, что имеет место такая

Теорема 2. ***Для любого числа a, отличного от нуля, и любых натуральных чисел m и n таких, что $m > n$, справедливо равенство***:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Доказательство. Рассмотрим произведение степеней a^n и a^{m-n}. Используя основное свойство степени, имеем:

$$a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+(m-n)} = a^{n+m-n} = a^m.$$

Тогда по определению частного

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \ \blacktriangle$$

Из этой теоремы следует такое правило:
при делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя, а основание оставляют прежним.

Рассмотрим выражение $(a^3)^4$. Оно является степенью с основанием a^3 и показателем 4. Поэтому

$$(a^3)^4 = a^3a^3a^3a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3\cdot 4} = a^{12}.$$

Этот пример подсказывает, что справедлива следующая

Теорема 3. ***Для любого числа a и любых натуральных чисел m и n справедливо равенство:***

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Доказательство. Очевидно, что для $n = 1$ доказываемое равенство верно.

Для $n > 1$ имеем:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ множителей}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ слагаемых}}} = a^{mn}. \ \blacktriangle$$

Из этой теоремы следует такое правило:
при возведении степени в степень показатели перемножают, а основание оставляют прежним.

Например, $(3^7)^2 = 3^{7\cdot 2} = 3^{14}$, $(x^k)^3 = x^{k\cdot 3} = x^{3k}$.

Покажем, как можно преобразовать степень произведения, например, выражение $(ab)^3$:

$$(ab)^3 = (ab)\cdot(ab)\cdot(ab) = (aaa)\cdot(bbb) = a^3b^3.$$

В общем случае справедлива следующая

Теорема 4. ***Для любых чисел a и b и любого натурального числа n справедливо равенство:***

$$(ab)^n = a^nb^n.$$

Доказательство. Очевидно, что для $n = 1$ доказываемое равенство верно. Для $n > 1$ имеем:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n \text{ множителей}} = \underbrace{(aa\cdot\ldots\cdot a)}_{n \text{ множителей}}\underbrace{(bb\cdot\ldots\cdot b)}_{n \text{ множителей}} = a^n b^n. \ \blacktriangle$$

Аналогичное свойство имеет место и для произведения трех или более множителей. Например, $(abc)^n = ((ab)\cdot c)^n = (ab)^n\cdot c^n = a^n b^n c^n$.

Итак, ***при возведении произведения в степень каждый множитель возводят в степень и полученные результаты перемножают.***

ПРИМЕР 1

Упростите выражение: 1) $(a^5)^2\cdot(a^6)^7$; 2) $(-a^4)^9$; 3) $(-a^4)^8$.

Решение

1) Применив последовательно правило возведения степени в степень и правило умножения степеней с одинаковыми основаниями, имеем:
$$(a^5)^2\cdot(a^6)^7 = a^{10}\cdot a^{42} = a^{52}.$$
2) Так как $-a^4 = -1\cdot a^4$, то, применив правило возведения произведения в степень, получим:
$$(-a^4)^9 = (-1\cdot a^4)^9 = (-1)^9\cdot(a^4)^9 = -1\cdot a^{36} = -a^{36}.$$
3) Аналогично предыдущему примеру, учитывая, что $(-1)^8 = 1$, получаем $(-a^4)^8 = a^{32}$.

ПРИМЕР 2

Представьте в виде степени выражение $216a^3b^6$.

Решение. Имеем: $216a^3b^6 = 6^3\cdot a^3\cdot(b^2)^3 = (6ab^2)^3$.

ПРИМЕР 3

Найдите значение выражения $\left(1\frac{1}{3}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9$.

Решение

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^9 = \left(\frac{4}{3}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

ПРИМЕР 4

Сравните значения выражений:

1) $(-11)^{14}\cdot(-11)^3$ и $(-11)^{16}$;
2) $(-12)^{19}$ и $(-12)^{15}$;
3) 5^{30} и 9^{20};
4) 16^3 и 65^2.

Решение

1) Имеем: $(-11)^{14}\cdot(-11)^3 = (-11)^{17} < 0$, $(-11)^{16} > 0$.

Следовательно, $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 < (-11)^{16}$.

2) Так как $|(-12)^{19}| > |(-12)^{15}|$, а сравниваемые числа отрицательные, то $(-12)^{19} < (-12)^{15}$.

3) Так как $5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$ и $9^{20} = (9^2)^{10} = 81^{10}$, то $5^{30} > 9^{20}$.

4) Имеем: $16^3 = (4^2)^3 = (4^3)^2 = 64^2$. Следовательно, $16^3 < 65^2$.

ПРИМЕР 5

Какой цифрой оканчивается значение выражения 2^{100}?

Решение. Имеем: $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$.

Если число оканчивается цифрой 6, то любая его степень оканчивается цифрой 6.

?

1. Запишите тождество, выражающее основное свойство степени.
2. Как умножить степени с одинаковыми основаниями?
3. Как разделить степени с одинаковыми основаниями?
4. Как возвести степень в степень?
5. Как возвести в степень произведение?

204.° Представьте в виде степени произведение:

1) m^5m^4;
2) xx^7;
3) a^3a^3;
4) $6^8 \cdot 6^3$;
5) $y^3y^5y^9$;
6) c^8c^9c;
7) $(b - c)^{10}(b - c)^6$;
8) $11^2 \cdot 11^4 \cdot 11^6$;
9) $x^4xx^{11}x^2$;
10) $(ab)^5 \cdot (ab)^{15}$;
11) $(2x + 3y)^6 \cdot (2x + 3y)^{14}$;
12) $(-xy)^2 \cdot (-xy)^7 \cdot (-xy)^9$.

205.° Представьте в виде степени выражение:

1) a^5a^8;
2) a^2a^2;
3) a^9a;
4) aa^2a^3;
5) $(m + n)^{13} \cdot (m + n)$;
6) $(cd)^8 \cdot (cd)^{18} \cdot (cd)$.

206.° Замените звездочку такой степенью с основанием a, чтобы выполнялось равенство:

1) $a^6 \cdot * = a^{14}$; 2) $* \cdot a^6 = a^7$; 3) $a^{10} \cdot * \cdot a^2 = a^{18}$.

207.° Представьте выражение a^{12} в виде произведения двух степеней с основаниями a, одна из которых равна:

1) a^6; 2) a^4; 3) a^3; 4) a^5; 5) a.

208.° Представьте в виде степени частное:

1) $a^{12} : a^3$;
2) $b^6 : b$;
3) $c^7 : c^6$;
4) $(a + b)^8 : (a + b)^4$.

209.° Найдите значение выражения:

1) $7^7 : 7^5$;
2) $10^{18} : 10^{14}$;
3) $0{,}6^9 : 0{,}6^6$;
4) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^5 : \left(-1\frac{1}{8}\right)^3$.

210.° Выполните деление:

1) $m^{10} : m^2$;
2) $x^5 : x^4$;
3) $y^{18} : y^6$.

211.° Представьте в виде степени с основанием m выражение:

1) $(m^5)^3$;
2) $(m^3)^4$;
3) $((m^2)^4)^6$;
4) $(m^7)^2 \cdot (m^4)^9$.

212.° Представьте в виде степени с основанием n выражение:

1) $(n^2)^8$;
2) $(n^9)^5$;
3) $((n^3)^2)^{10}$;
4) $(n^{12})^4 \cdot (n^{21})^2$.

213.° Представьте степень в виде произведения степеней:

1) $(ab)^6$;
2) $(mnp)^5$;
3) $(3c)^7$;
4) $(-8xy)^3$;
5) $(-0{,}2cd)^4$;
6) $\left(\frac{3}{7}kt\right)^9$.

214.° Представьте степень в виде произведения степеней:

1) $(ax)^2$;
2) $(xyz)^{12}$;
3) $(7m)^8$;
4) $(-0{,}3bc)^{11}$.

215.° Упростите выражение:

1) $-x \cdot x^2$;
2) $(-x)^2 \cdot x$;
3) $-x \cdot (-x)^2$;
4) $(-x) \cdot (-x)^2 \cdot (-x)$.

216.° Упростите выражение:

1) $(-a)^2 \cdot a^3$;
2) $-a^2 \cdot a^3$;
3) $a^2 \cdot (-a)^3$;
4) $-a^2 \cdot (-a)^3$.

217.° Упростите выражение:

1) $(-a^5)^2$;
2) $(-a^3)^3$;
3) $(-a^4)^7 \cdot (-a^2)^6$.

218.° Упростите выражение:

1) $((-a^6)^5)^9$;
2) $((-a^{11})^2)^3$.

219.° Представьте в виде степени выражение:

1) a^3b^3;
2) $-m^7$;
3) $9m^2n^2$;
4) $64x^3y^3$;
5) $-\frac{27}{343}c^3d^3$;
6) $0{,}0001k^4p^4$.

220.° Представьте в виде степени выражение:

1) $x^{12}y^{12}$;
2) $-125m^3n^3$;
3) $32p^5q^5$;
4) $1\,000\,000\,000a^9b^9c^9$.

221.° Представьте выражение в виде степени и вычислите его значение (при необходимости воспользуйтесь таблицей степеней чисел 2 и 3, расположенной на форзаце учебника):

1) $2^3 \cdot 2^4$;
2) $(3^2)^3$;
3) $0{,}2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}2^3$;
4) $0{,}5^{12} \cdot 2^{12}$;

5) $2^{12} : 2^8$;
7) $\left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot 9^9$;
6) $(3^4)^5 : 3^{19}$;
8) $2{,}5^5 \cdot 40^5$.

222.° Представьте выражение в виде степени и вычислите его значение (при необходимости воспользуйтесь таблицей степеней чисел 2 и 3, расположенной на форзаце учебника):

1) $2^2 \cdot 2^3$;
3) $3^2 \cdot 3 \cdot 3^3$;
5) $7^9 \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^9$;
2) $(2^2)^3$;
4) $0{,}3^8 : 0{,}3^5$;
6) $12{,}5^3 \cdot 8^3$.

223.° Найдите в данных примерах ошибки и объясните причину их возникновения:

1) $a^4a^3 = a^{12}$;
4) $3^2 \cdot 5^2 = 15^4$;
7) $3 \cdot 4^3 = 12^3$;
2) $a \cdot a = 2a$;
5) $2^2 \cdot 7^3 = 14^5$;
8) $a^7b^7 = (ab)^{14}$;
3) $(a^3)^2 = a^9$;
6) $(2a)^4 = 8a^4$;
9) $a^3b^2 = (ab)^6$.

224.° Вместо звездочки запишите такое выражение, чтобы выполнялось равенство:

1) $(*)^4 = c^{20}$; 2) $(*)^2 = c^{14}$; 3) $(*)^n = c^{8n}$; 4) $(*)^7 = c^{7n}$.

225.˙ Представьте степень a^7 в виде произведения двух степеней с основанием a всеми возможными способами.

226.˙ Представьте в виде степени выражение:

1) a^na^5; 2) aa^n; 3) a^3a^n; 4) $(a^3)^n$; 5) $(a^n)^2 \cdot (a^5)^n$, где n — натуральное число.

227.˙ Представьте в виде степени выражение:

1) $2^4 \cdot 2^4$; 2) $2^4 + 2^4$; 3) $2^n \cdot 2^n$; 4) $2^n + 2^n$, где n — натуральное число.

228.˙ Представьте в виде степени выражение:

1) $3^5 + 3^5 + 3^5$; 2) $4^k + 4^k + 4^k + 4^k$, где k — натуральное число.

229.˙ Докажите, что если сторону квадрата увеличить в n раз, то его площадь увеличится в n^2 раз.

230.˙ Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребро увеличить в m раз?

231.˙ Запишите в виде степени с показателем 2 выражение:

1) a^2b^6;
4) $4m^{12}n^{16}$;
2) x^8y^{14};
5) $81c^{10}d^{32}p^{44}$.
3) $x^4y^{10}z^{18}$;

232.° Запишите в виде степени с показателем 3 выражение:
1) a^3b^6; 3) $8x^{12}y^{18}z^{24}$;
2) x^9y^{15}; 4) $0{,}001m^{30}n^{45}$.

233.° Представьте в виде степени с основанием 5 выражение:
1) 125^6; 2) $(25^4)^2$.

234.° Представьте в виде степени с основанием −5 выражение:
1) 625^5; 2) $((-25)^2)^3$.

235.° Представьте в виде степени с основанием 2 выражение:
1) $8^9 \cdot 4^5$; 2) $32 \cdot 16^6 \cdot 64^3$.

236.° Найдите значение выражения:
1) $(6^4)^4 : (6^5)^3$; 3) $\dfrac{7^{14} \cdot (7^2)^3}{(7^3)^6 \cdot 7^2}$; 5) $\dfrac{3^8 \cdot 7^8}{21^7}$;
2) $8^3 : 4^4$; 4) $\dfrac{25^3 \cdot 125^2}{5^{10}}$; 6) $\dfrac{5^9 \cdot 4^6}{20^6}$.

237.° Вычислите:
1) $100^5 : 1000^2$; 3) $\dfrac{4^3 \cdot 16^2}{2^{12}}$;
2) $\dfrac{3^{10} \cdot (3^3)^5}{(3^5)^4 \cdot 3}$; 4) $\dfrac{45^{10}}{5^8 \cdot 3^{19}}$.

238.° Вычислите значение выражения:
1) $\left(1\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{10}$; 2) $5^{14} \cdot 0{,}2^{12}$; 3) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8$.

239.° Найдите значение выражения:
1) $10^5 \cdot 0{,}1^7$; 2) $1{,}9^{14} \cdot \left(\frac{10}{19}\right)^{15}$.

240.° Сравните значения выражений:
1) $(-5)^{21} \cdot (-5)$ и $(-5)^{24}$; 3) $(-8)^5 \cdot (-8)^4$ и $(-8)^8$;
2) $(-7)^8 \cdot (-7)^7$ и $(-7)^{17}$; 4) $(-6)^3 \cdot (-6)^9$ и $(-6)^{13}$.

241.° Замените звездочку такой степенью, чтобы выполнялось равенство:
1) $8 \cdot * = 2^8$;
2) $a^n \cdot * = a^{3n+2}$, где n — натуральное число.

242.° Запишите выражение 3^{24} в виде степени с основанием:
1) 3^3; 2) 3^{12}; 3) 9; 4) 81.

243.° Запишите выражение 2^{48} в виде степени с основанием:
1) 2^4; 2) 2^{16}; 3) 8; 4) 64.

244.° Решите уравнение:

1) $x^7 = 6^{14}$; 2) $x^4 = 5^{12}$.

245.°° Сравните значения выражений:

1) 2^{300} и 3^{200}; 3) 27^{20} и 11^{30};

2) 4^{18} и 18^9; 4) $3^{10} \cdot 5^8$ и 15^9.

246.°° Сравните значения выражений:

1) 10^{40} и 10001^{10}; 3) 8^{12} и 59^6;

2) 124^4 и 5^{12}; 4) 6^{14} и $2^{16} \cdot 3^{12}$.

247.* Известно, что сумма $625 + 625 + \ldots + 625$ равна 5^{2005}. Сколько слагаемых в этой сумме?

248.* Какой цифрой оканчивается значение выражения (n — натуральное число):

1) 4^{100}; 2) 3^{4n}; 3) 4^n; 4) 3^n?

249.* Какой цифрой оканчивается значение выражения (n — натуральное число):

1) 9^{2n}; 2) 7^{4n}; 3) 7^{2n}?

250.* Докажите, что значение выражения:

1) $17^8 + 19$ делится нацело на 10;

2) $64^{64} - 1$ делится нацело на 5;

3) $3^{4n} + 14$, где n — натуральное число, делится нацело на 5.

251.* Докажите, что значение выражения:

1) $4^{40} - 1$; 2) $2004^{171} + 171^{2004}$

делится нацело на 5.

252.* Докажите, что $48^{25} < 344^{17}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

253. (*Задача из украинского фольклора.*) Кум Иван спросил у кума Степана: «Сколько у тебя уток?» Кум Степан ответил: «Уток у меня столько, что как высидят они мне еще столько утят, да еще куплю одну утку, да еще трижды куплю столько, сколько этих уток и утят, то всего будет их у меня 100». Сколько уток было у кума Степана?

254. Один маляр может покрасить комнату за 6 ч, а другой — за 4 ч. Сначала первый маляр работал один 2 ч, а потом к нему присоединился второй маляр. За сколько часов была покрашена комната?

255. От пристани по течению реки отправилась на лодке группа туристов, рассчитывая вернуться через 4 ч. Скорость лодки в стоячей воде составляет 10 км/ч, а скорость течения — 2 км/ч. На какое наибольшее расстояние туристы могут отплыть от пристани, если они хотят перед возвращением сделать привал на 2 ч?

256. Решите уравнение:

1) $2{,}5 - 3x = 3(x - 2{,}5) - 2$;

2) $17(2 - 3x) - 5(x + 12) = 8(1 - 7x) - 34$.

257. В шестизначном числе первая и четвертая, вторая и пятая, третья и шестая цифры одинаковы. Докажите, что это число кратно числам 7, 11 и 13.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

258. Упростите выражение:

1) $3a \cdot (-1{,}2)$; 3) $-7a \cdot 9b$; 5) $-\frac{3}{14}m \cdot \frac{7}{9}n$;

2) $-0{,}2b \cdot (-0{,}5)$; 4) $2{,}4x \cdot 2y$; 6) $-\frac{1}{4}a \cdot \frac{4}{3}b \cdot (-3c)$.

259. Упростите выражение $20m \cdot (-0{,}3n)$ и найдите его значение при $m = \frac{5}{12}$, $n = -4$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

260. Трамвайные билеты имеют номера от 000 000 до 999 999. Номер называют «счастливым», если сумма трех его первых цифр равна сумме трех последних. Докажите, что количество «счастливых» билетов четно.

7. Одночлены

Рассмотрим выражения:

$$2b; \quad \frac{1}{3}xy^2; \quad -ab; \quad m^3 \cdot 3k^5;$$

$$(3{,}14)^2pq^3 \cdot (-7)r^2t^4.$$

Каждое из них представляет собой произведение чисел, переменных и их степеней. Такие выражения называют **одночленами**.

Договорились также считать одночленами все числа, любые переменные и их степени. Например, одночленами являются:

$$-5;\ 0{,}3;\ x;\ t^2;\ 2^3.$$

Заметим, что, например, выражения

$$2a + b;\ x - 1;\ a : b;\ y^2 + y - 2$$

одночленами не являются, так как они, кроме умножения и возведения в степень, содержат и другие действия.

При взгляде на одночлен $3ab^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)abc$ возникает естественное желание его упростить. Имеем:

$$3ab^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)abc = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)aab^3bc = -2a^2b^4c.$$

Полученный одночлен содержит *только один* числовой множитель, отличный от нуля, который *стоит на первом месте*. Все остальные множители — это степени с *различными* основаниями. Такой вид одночлена называют **стандартным видом одночлена.**

Приведем еще примеры одночленов стандартного вида:

$$-\frac{1}{8}xy;\quad 2{,}8a^3;\quad 7x^2yz^3t^5.$$

Отметим, что, например, выражения $a^2 \cdot 2b^3$ и $-3x^2xy^3$ не являются одночленами стандартного вида. Действительно, хотя первое из них и имеет единственный числовой множитель, но он не стоит на первом месте. Во втором выражении степень с основанием x встречается дважды.

Однако эти одночлены легко **привести** (преобразовать) к стандартному виду:

$$a^2 \cdot 2b^3 = 2a^2b^3 \text{ и } -3x^2xy^3 = -3x^3y^3.$$

К одночленам стандартного вида также относят числа, отличные от нуля, переменные и их степени. Так, -2; 3^2; x; b^3 — одночлены стандартного вида.

Число 0, а также одночлены, тождественно равные нулю, например, $0x^2$, $0ab$ и т. д., называют **нуль-одночленами.** Их не относят к одночленам стандартного вида.

Определение. Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют коэффициентом одночлена.

Например, коэффициенты одночленов $-3a^2bc$ и $0{,}07x$ соответственно равны -3 и $0{,}07$.

Вообще, любой одночлен стандартного вида имеет коэффициент. И даже, например, у одночленов x^2y и $-mn$, при записи которых числовой множитель не используется, коэффициентами являются числа 1 и -1 соответственно. И это понятно, ведь $x^2y = 1 \cdot x^2y$, $-mn = -1 \cdot mn$.

Рассмотрим одночлены $\frac{2}{3}x^3yz$ и $-2zx^3y$. У них одинаковые буквенные части. Такие одночлены называют **подобными.** К подобным одночленам также относят и числа. Например, 7 и -5 — подобные одночлены.

Обратим внимание на то, что, например, у одночленов $\frac{2}{3}x^3y^2z$ и $-2x^3yz$ буквенные части неодинаковы, хотя и состоят из одних и тех же переменных. Поэтому они не являются подобными.

Определение. Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех переменных, входящих в него. Степень одночлена, который является числом, отличным от нуля, считают равной нулю.

Считают, что нуль-одночлен степени не имеет.

Например, степень одночлена $-3{,}8m^2xy^7$ равна 10, а степени одночленов x^3 и 9 равны соответственно 3 и 0.

Рассмотрим два одночлена $\frac{1}{5}ab^3$ и $10abx$. Одночлен $\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx$ является их произведением. Упростим его:

$$\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx = \left(\frac{1}{5} \cdot 10\right)(aa)(b^3b)x = 2a^2b^4x.$$

Итак, произведение двух одночленов — это одночлен. Его, как правило, записывают в стандартном виде.

При возведении одночлена в степень также получают одночлен. Возведем, например, в четвертую степень одночлен $-\frac{1}{2}xy^3z^2$. Имеем:

$$\left(-\frac{1}{2}xy^3z^2\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 \cdot (z^2)^4 = \frac{1}{16}x^4y^{12}z^8.$$

ПРИМЕР 1

Упростите выражение $0{,}2a^2b^4\cdot(-5a^3b)^2$.

Решение. Имеем:

$$0{,}2a^2b^4\cdot(-5a^3b)^2 = 0{,}2a^2b^4\cdot(-5)^2\cdot(a^3)^2b^2 =$$
$$= 0{,}2a^2b^4\cdot 25a^6b^2 = 0{,}2\cdot 25a^2a^6b^4b^2 = 5a^8b^6.$$

ПРИМЕР 2

Значения переменных a и b таковы, что $4a^3b^4 = 7$. Найдите значение выражения $-\frac{2}{7}a^6b^8$ при этих же значениях переменных.

Решение. Имеем:

$$-\frac{2}{7}a^6b^8 = -\frac{1}{56}\cdot 16a^6b^8 = -\frac{1}{56}\cdot(4a^3b^4)^2 = -\frac{1}{56}\cdot 7^2 =$$
$$= -\frac{1}{56}\cdot 49 = -\frac{7}{8}.$$

?

1. Какие выражения называют одночленами?
2. Объясните, какой вид одночлена называют его стандартным видом.
3. Что называют коэффициентом одночлена?
4. Какие одночлены называют подобными?
5. Что называют степенью одночлена?

261.° Является ли одночленом выражение:

1) $5xy$; 5) 0; 9) m^4m;

2) $-\frac{1}{3}a^2b^3c$; 6) $\frac{4}{7}pk^4$; 10) $3(a^2 - b^2)$;

3) $m + n$; 7) $\frac{6m^2k^3}{11a^5}$; 11) $-2\frac{4}{9}aa^2b^3b^6$;

4) 8; 8) b^9; 12) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^2 x^5x^3yz^{10}$?

262.° Укажите, какие из одночленов записаны в стандартном виде:

1) $5mnm^2$; 3) $-7t^3\cdot 4t^5$; 5) $\frac{6}{13}x^8y^9$;

2) $1{,}4ab^7c^3$; 4) $-abc$; 6) $m^6n^4\cdot 10$.

263.° Являются ли подобными одночлены:

1) $5a$ и $7a$;
2) $3a^2b^3c$ и $6a^2b^3c$;
3) $8x^2y^4$ и $8x^2y^5$;
4) $3y^2$ и $2y^3$;
5) $\frac{1}{2}m^7n^8$ и $\frac{1}{2}m^8n^7$;
6) $-0{,}1a^9b^{10}$ и $0{,}1a^9b^{10}$?

264.° Запишите одночлен, подобный данному, коэффициент которого в 4 раза больше коэффициента данного одночлена:

1) $1{,}4x^3y^7$;
2) $c^4d^{10}p^2$;
3) $1\frac{1}{4}a^5b^5c^9$.

265.° Приведите одночлен к стандартному виду, укажите его коэффициент и степень:

1) $9a^4aa^6$;
2) $3x \cdot 0{,}4y \cdot 6z$;
3) $7a \cdot (-9ac)$;
4) $-3\frac{1}{3}m^5 \cdot 9mn^9$;
5) $-5x^2 \cdot 0{,}1x^2y \cdot (-2y)$;
6) $c \cdot (-d) \cdot c^{18}$.

266.° Представьте одночлен в стандартном виде, подчеркните его коэффициент:

1) $6bb^2$;
2) $1{,}5c^3d^4 \cdot 8c^2d^5$;
3) $-0{,}8u^4 \cdot 4t^3 \cdot (-2t^7)$;
4) $4{,}5a^2bc^7 \cdot 1\frac{1}{9}a^8b^6c$.

267.° Найдите значение одночлена:

1) $5x^2$, если $x = -4$;
2) $-4{,}8a^4b^3$, если $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$;
3) $0{,}04c^3d^5$, если $c = -10$, $d = 2$;
4) $\frac{4}{9}m^3n^2p^3$, если $m = -3$, $n = 5$, $p = -1$.

268.° Найдите значение одночлена:

1) $3m^3$, если $m = -3$;
2) $\frac{7}{16}a^2b^4$, если $a = -\frac{1}{7}$, $b = 2$;
3) $0{,}8m^2n^2k$, если $m = 0{,}3$, $n = \frac{1}{2}$, $k = 2000$.

269.° Выполните умножение одночленов:

1) $0{,}6a^4b^3 \cdot 4a^2b$;
2) $-2{,}8x^2y^5 \cdot 0{,}5x^4y^6$;
3) $13c^2d \cdot (-3cd)$;
4) $0{,}7x^6y^9 \cdot 0{,}3xy$;
5) $-\frac{3}{20}p^2q^8 \cdot \frac{40}{81}p^8q^2$;
6) $-6\frac{1}{2}mn^8p^{11} \cdot 3\frac{5}{13}m^5n^5$.

270.° Упростите выражение:

1) $12a^2 \cdot 5a^3b^7$;
2) $-4m^3 \cdot 0{,}25m^6$;
3) $3ab \cdot (-17a^2b)$;
4) $56x^5y^{14} \cdot \frac{2}{7}x^2y$;
5) $-\frac{1}{3}p^2 \cdot (-27k) \cdot 5pk$;
6) $2\frac{1}{4}b^2c^5d^3 \cdot \left(-3\frac{1}{3}b^3c^4d^7\right)$.

271.° Преобразуйте в одночлен стандартного вида выражение:

1) $(3a^2b)^2$;
2) $(-0{,}2x^3y^4)^3$;
3) $(-10m^2y^8)^5$;
4) $(16x^6y^7z^8)^2$;
5) $\left(-\frac{1}{5}c^6d\right)^4$;
6) $\left(1\frac{1}{2}a^8b^9\right)^6$.

272.° Выполните возведение в степень:

1) $(-6m^3n^3)^3$;
2) $(-7x^9y^{10})^2$;
3) $(0{,}5a^{12}b^{14})^2$;
4) $(3ab^4c^5)^4$;
5) $\left(-\frac{1}{2}x^8y^9\right)^5$;
6) $\left(2\frac{1}{7}a^6b^8\right)^2$.

273.• Представьте данное выражение в виде произведения двух одночленов, один из которых равен $3a^2b^6$:

1) $3a^6b^8$; 2) $-12a^2b^{10}$; 3) $-2{,}7a^5b^7$; 4) $2\frac{2}{7}a^{20}b^{30}$.

274.• Каким одночленом надо заменить звездочку, чтобы выполнялось равенство:

1) $* \cdot 3b^4 = 12b^6$;
2) $-5a^5b^2 \cdot * = -20a^6b^8$;
3) $-7a^3b^9 \cdot * = 4{,}2a^5b^{12}$;
4) $23a^{12}b^{16} \cdot * = -23a^{29}b^{17}$?

275.• Выполните умножение одночленов, где m и n — натуральные числа:

1) $2\frac{5}{6}a^{n+2}b^{m+3} \cdot \frac{9}{17}a^{5n-4}b^{2m-1}$;

2) $-7\frac{1}{3}a^{2n-1}b^{3n-1} \cdot 1\frac{1}{11}a^{n+6}b^{3n+1}$.

276.• Представьте в виде квадрата одночлена стандартного вида выражение:

1) $4a^{10}$;
2) $36a^8b^2$;
3) $0{,}16a^{14}b^{16}$;
4) $289a^{20}b^{30}c^{40}$.

277.° Представьте в виде куба одночлена стандартного вида выражение:

1) $8x^6$;
2) $-27x^3y^9$;
3) $0{,}001x^{12}y^{18}$;
4) $-\frac{125}{216}x^{15}y^{21}z^{24}$.

278.° Представьте одночлен $64a^6b^{12}$ в виде:

1) произведения двух одночленов, один из которых равен $2a^2b^8$;
2) квадрата одночлена стандартного вида;
3) куба одночлена стандартного вида.

279.° Представьте одночлен $81m^4n^{16}$ в виде:

1) произведения двух одночленов, один из которых равен $-\frac{1}{3}mn^{14}$;
2) квадрата одночлена стандартного вида;
3) четвертой степени одночлена стандартного вида.

280.° Упростите выражение:

1) $2a^3 \cdot (-5a^4b^5)^2$;
2) $(-x^6y)^3 \cdot 11x^4y^5$;
3) $(-0{,}6a^3b^5c^6)^2 \cdot 3a^2c^8$;
4) $-1\frac{3}{11}m^4n^9 \cdot \left(-\frac{1}{7}mn^3\right)^2$;
5) $1\frac{7}{9}x^7y^2 \cdot \left(\frac{3}{4}x^2y^9\right)^4$;
6) $-(-2c^2d^5)^7 \cdot \left(-\frac{1}{2}c^4d^5\right)^4$.

281.° Упростите выражение:

1) $20a^8 \cdot (9a)^2$;
2) $(-b^5)^4 \cdot 12b^6$;
3) $(3m^6n^3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}m^9n\right)$;
4) $(0{,}2x^7y^8)^3 \cdot 6x^2y^2$;
5) $\left(-\frac{1}{2}ab^4\right)^3 \cdot (4a^6)^2$;
6) $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)^5 \cdot \left(-\frac{3}{4}xy^2\right)^2$.

282.•• Замените звездочки такими одночленами, чтобы выполнялось равенство:

1) $(*)^2 \cdot (*)^3 = 9a^2b^3c^5$;
2) $(*)^3 \cdot (*)^4 = 16a^7b^6c^8$;
3) $(*)^3 \cdot (*)^2 = -72m^8n^{11}$;
4) $(*)^2 \cdot (*)^5 = 32x^{29}y^{21}z^9$.

283.•• Значения переменных x и y таковы, что $5x^2y^4 = 6$. Найдите значение выражения

1) $1{,}5x^2y^4$;
2) $25x^4y^8$;
3) $-25x^6y^{12}$

при этих же значениях переменных.

284.˙˙ Значения переменных a и b таковы, что $3ab^3 = 4$. Найдите значение выражения

1) $-1{,}2ab^3$; 2) $27a^3b^9$; 3) $-\frac{2}{3}a^2b^6$

при этих же значениях переменных.

285.˙˙ Значения переменных a, b и c таковы, что $2a^2b = 7$, $a^3c^2 = 2$. Найдите значение выражения

1) $6a^5bc^2$; 2) $a^7b^2c^2$; 3) $2\frac{1}{7}a^8bc^4$

при этих же значениях переменных.

286.˙˙ Значения переменных m, n и p таковы, что $m^3n^2 = 3$, $\frac{1}{3}n^3p^2 = 5$. Найдите значение выражения

1) $m^3n^5p^2$; 2) $2m^3n^8p^4$; 3) $-0{,}4m^{12}n^{11}p^2$

при этих же значениях переменных.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

287. Некоторое число сначала уменьшили на 10 %, а потом результат увеличили на 20 %. После этого получили число, которое на 48 больше данного. Найдите данное число.

288. (*Задача из русского фольклора.*) Летела стая гусей, а навстречу ей летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» «Нас не сто гусей, — отвечает ему вожак стаи, — если бы нас было столько, сколько сейчас, да еще столько, да полстолько, да четверть столько, да еще ты, гусь, тогда нас было бы сто гусей». Сколько было в стае гусей?

289. Замените звездочки такими цифрами, чтобы:
1) число *5* делилось нацело на 3 и на 10;
2) число 13*2* делилось нацело на 9 и на 5;
3) число 58* делилось нацело на 2 и на 3.
Найдите все возможные решения.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

290. Упростите выражение:
1) $6x - 12x + 15x - 9x$; 2) $7a - 9b - 12a + 14b$;

3) $-0{,}8k + 0{,}9 - 1{,}7k + 0{,}5k + 1{,}4$;

4) $-\frac{1}{6}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{9}a - \frac{3}{4}b$.

Обновите в памяти содержание пункта 25 на с. 270.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

291. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

8. Многочлены

В предыдущем пункте вы узнали, что произведение одночленов является одночленом. Иначе обстоит дело с суммой и разностью одночленов. Например, выражения $2a + b^2$ и $2a - b^2$ не являются одночленами. Они представляют собой соответственно сумму и разность одночленов $2a$ и b^2. Кстати, выражение $2a - b^2$ можно представить в виде $2a + (-b^2)$ и считать суммой одночленов $2a$ и $-b^2$.

Определение. **Выражение, которое является суммой нескольких одночленов, называют многочленом.**

Приведем еще примеры многочленов: $7xy + y - 11$; $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$; $3a - a + b$; $11x - 2x$.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют **членами многочлена**. Так, членами многочлена $7xy + y - 11$ являются одночлены $7xy$; y; -11.

Многочлен, состоящий из двух членов, называют **двучленом**, а состоящий из трех членов — **трехчленом**. Договорились рассматривать одночлен как частный случай многочлена. Считают, что такой многочлен состоит из одного члена.

Рис. 3

Связи между многочленами, одночленами и их частным видом — числами иллюстрирует схема, изображенная на рисунке 3.

Если среди одночленов, составляющих многочлен, есть подобные, то их называют **подобными членами многочлена.** Например, в многочлене $\underline{7a^2b} - \underline{\underline{3a}} + \underline{\underline{\underline{4}}} - \underline{a^2b} - \underline{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{a}} + b$ подобные члены подчеркнуты одинаковым количеством черточек.

Используя правило приведения подобных слагаемых, упростим этот многочлен:

$$7a^2b - 3a + 4 - a^2b - 1 + a + b = 6a^2b - 2a + b + 3.$$

Такое упрощение называют **приведением подобных членов многочлена.** Это преобразование позволяет заменить многочлен на тождественно равный ему, но более простой — с меньшим количеством членов.

1. Что называют многочленом?
2. Какой многочлен называют двучленом? трехчленом?
3. Что называют подобными членами многочлена?

292.° Назовите одночлены, суммой которых является данный многочлен:

1) $-5a^4 + 3a^2 - a + 8$;
2) $6x^3 - 10x^2y + 7xy^2 + y^3$;
3) $t^3 + 3t^2 - 4t + 5$;
4) $1{,}8a^3b - 3{,}7a^2b^2 + 16ab^3 - b^4$.

293.° Найдите значение многочлена:

1) $2x^2 + x - 3$ при $x = 0{,}5$;
2) $x^3 + 5xy$ при $x = 3$, $y = -2$;
3) $a^2 - 2ab + b^2$ при $a = -4$, $b = 6$;
4) $y^4 + 7y^3 - 2y^2 - y + 10$ при $y = -1$.

294.° Найдите значение многочлена $2y^3 - 3y^2 + 4y - 6$ при:

1) $y = 1$;
2) $y = 0$;
3) $y = -5$.

295.° Приведите подобные члены многочлена:

1) $4b^2 + a^2 + 9ab - 18b^2 - 9ab$;
2) $8m^3 - 13mn - 9n^2 - 8m^3 - 2mn$;
3) $2a^2b - 7ab^2 - 3a^2b + 2ab^2$;
4) $0{,}9c^4 + 1{,}1c^2 + c^4 - 0{,}6c^2$;
5) $3x^2 + 6x - 5 - x^2 - 10x + 3$;
6) $b^3 - 3bc + 3b^3 + 8bc - 4b^3$.

296.° Приведите подобные члены многочлена:

1) $5x^2 - 10x + 9 - 2x^2 + 14x - 20$;
2) $-m^5 + 2m^4 - 6m^5 + 12m^3 - 18m^3$;
3) $0{,}2a^3 + 1{,}4a^2 - 2{,}2 - 0{,}9a^3 + 1{,}8a^2 + 3$;
4) $6x^2y - xy^2 - 8x^2y + 2xy^2 - xy + 7$.

297.° Приведите подобные члены и найдите значение многочлена при указанных значениях переменных:

1) $-3a^5 + 4a^3 + 7a^5 - 10a^3 + 12a$, если $a = -2$;
2) $x^3y - 3xy^2 - 4x^3y + 8xy^2$, если $x = -1$, $y = -3$;
3) $0{,}8x^2 - 0{,}3x - x^2 + 1{,}6 + 1{,}1x - 0{,}6$, если $x = 5$;
4) $\frac{1}{3}a^2c + \frac{3}{4}ac^2 + \frac{1}{6}a^2c + 1{,}25ac^2$, если $a = -4$, $c = 3$.

298.° Приведите подобные члены и найдите значение многочлена при указанных значениях переменных:

1) $2a^3 + 3ab - b^2 - 6a^3 - 7ab + 2b^2$, если $a = 2$, $b = -6$;
2) $mn - 6mn^2 - 8mn - 6mn^2$, если $m = 0{,}5$, $n = -2$;
3) $10xy^2 - 12x^2y + 9x^2y - 9xy^2$, если $x = \frac{1}{3}$, $y = 9$.

299.° Из одночленов $4a$, $-3ab$, $7a^2$, $-8a^2$, $9ab$, $5a$ выберите несколько и составьте из них:

1) многочлен, не содержащий подобных членов;
2) многочлен, содержащий подобные члены;
3) два многочлена, не содержащие подобных членов, использовав при этом все данные одночлены.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

300. Конфеты ценой 14 грн. за 1 кг смешали с конфетами ценой 19 грн. за 1 кг и получили смесь ценой 16 грн. за 1 кг. Сколько конфет каждого вида содержится в 1 кг смеси?

301. На почте продается 20 разных конвертов и 15 разных марок. Сколько существует вариантов приобретения конверта с маркой?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

302. Какому из данных выражений тождественно равно выражение $-9x + (4x - 7)$:

1) $13x - 7$; 2) $-5x + 7$; 3) $-5x - 7$; 4) $13x + 7$?

303. Какому из данных выражений тождественно равно выражение $-8y - (3y - 1)$:

1) $-11y + 1$; 2) $-5y + 1$; 3) $-11y - 1$; 4) $-5y - 1$?

304. Упростите выражение:

1) $(2a + b) - (b - 2a)$; 3) $(m + n) - (2m + n) - (m - 4n)$;

2) $(3a - 4) + (3 - 5a)$; 4) $(5c - 2) - (6c + 1) + (c - 8)$.

Обновите в памяти содержание пункта 24 на с. 270.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

305. Вокруг звезды вращается несколько планет, расстояния между которыми не изменяются и являются попарно разными. На каждой планете находится один астроном, который изучает ближайшую планету. Докажите, что существует две планеты, на которых астрономы изучают друг друга.

9. Сложение и вычитание многочленов

Пусть надо сложить два многочлена $3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11$ и $-2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2$. Для этого возьмем их в скобки и поставим между ними знак «плюс». Затем раскроем скобки и приведем подобные слагаемые (если таковые имеются).

Имеем:

$$(3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11) + (-2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2) =$$
$$= 3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11 - 2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2 =$$
$$= xy^2 + 6x^2y^2 - 5xy + x + y + 9.$$

Полученный многочлен является суммой двух данных многочленов.

Пусть теперь требуется из первого данного многочлена вычесть второй. Для этого каждый из многочленов возьмем в скобки и поставим перед вычитаемым знак «минус». Затем раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.

Имеем:

$$(3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11) - (-2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2) =$$
$$= 3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11 + 2xy^2 - x^2y^2 - 2xy - y + 2 =$$
$$= 5xy^2 + 4x^2y^2 - 9xy + x - y + 13.$$

Полученный многочлен является разностью двух данных многочленов.

Вообще, при сложении и вычитании многочленов всегда получается многочлен.

ПРИМЕР 1

Докажите, что разность двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится нацело на 9.

Решение. Пусть данное число содержит a десятков и b единиц. Тогда оно равно $10a + b$.

Число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, равно $10b + a$.

Рассмотрим разность $(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9(a - b)$.

Очевидно, что число $9(a - b)$ делится нацело на 9.

Отметим, что запись $\overline{ab}$ является обозначением двузначного числа, содержащего a десятков и b единиц, то есть $\overline{ab} = 10a + b$.

ПРИМЕР 2

Докажите, что разность $\left(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}\right) - \left(\overline{ba} + \overline{ca} + \overline{cb}\right)$ делится нацело на 18.

Решение. Имеем:

$$\left(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}\right) - \left(\overline{ba} + \overline{ca} + \overline{cb}\right) = (10a + b + 10a + c + 10b + c) -$$
$$- (10b + a + 10c + a + 10c + b) = (20a + 11b + 2c) -$$
$$- (20c + 11b + 2a) = 20a + 11b + 2c - 20c - 11b - 2a =$$
$$= 18a - 18c = 18(a - c).$$

Очевидно, что число $18(a - c)$ делится нацело на 18.

ПРИМЕР 3

Докажите, что сумма четырех последовательных четных натуральных чисел не делится нацело на 8.

Решение. Пусть первое из этих чисел равно $2n$, где n — произвольное натуральное число. Тогда следующими тремя числами являются $2n + 2$, $2n + 4$, $2n + 6$ соответственно.

Рассматриваемая сумма имеет вид $2n + (2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) = 8n + 12$.

Первое слагаемое $8n$ суммы $8n + 12$ делится нацело на 8, а второе слагаемое 12 — не делится. Следовательно, сумма $8n + 12$ не делится нацело на 8.

306.° Найдите сумму многочленов:
1) $-5x^2 - 4$ и $8x^2 - 6$;
2) $2x + 16$ и $-x^2 - 6x - 20$.

307.° Найдите разность многочленов:
1) $x^2 + 8x$ и $4 - 3x$;
2) $2x^2 + 5x$ и $4x^2 - 2x$;
3) $4x^2 - 7x + 3$ и $x^2 - 8x + 11$;
4) $9m^2 - 5m + 4$ и $-10m + m^3 + 5$.

308.° Упростите выражение:
1) $(5a^4 + 3a^2b - b^3) - (3a^4 - 4a^2b - b^2)$;
2) $(12xy - 10x^2 + 9y^2) - (-14x^2 + 9xy - 14y^2)$;
3) $(7ab^2 - 8ab + 4a^2b) + (10ab - 7a^2b)$;
4) $(2c^2 + 3c) + (-c^2 + c) - (c^2 + 4c - 1)$.

309.° Упростите выражение:
1) $(3x^2 - 2x) + (-x^2 + 3x)$;
2) $(4c^2 - 2cd) - (10c^2 + 8cd)$;
3) $(12m^2 - 7n - 3mn) - (6mn - 10n + 14m^2)$;
4) $(3n^3 - 2mn + 4m^3) - (2mn + 3n^3)$.

310.° Какой двучлен надо прибавить к данному двучлену, чтобы их сумма была тождественно равна 0:
1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) $-a - b$?

311.° Решите уравнение:
1) $3x^2 - (2x^2 - 8x) - (x^2 - 3) = x$;
2) $12 - (6 - 9x - x^2) = x^2 + 5x - 14$;
3) $4y^3 - (4y^3 - 8y) - (6y + 3) = 7$;
4) $(y^2 - 4y - 17) - (6y^2 - 3y - 8) = 1 - y - 5y^2$.

312.° Решите уравнение:
1) $(5x^2 - 3) - (2x + 5) = 5x^2$;
2) $x^2 - (x + 1) - (x^2 - 7x + 32) = 3$;
3) $(y^3 + 3y - 8) - (5y - y^3 + 7) = 2y^3 - 2y - 15$.

313.• Докажите тождество:
1) $(a^2 + b^2 - c^2) - (b^2 + c^2 - a^2) + (c^2 - a^2) = a^2 - c^2$;
2) $(4 - 3a^2) - a^2 + (7 + 2a^2) - (-2a^2 + 11) = 0$;
3) $(x^3 + 4x^2) - (x + 6) + (1 + x - x^3) = 4x^2 - 5$.

314.° Докажите тождество:

1) $4a^2 - (6a^2 - 2ab) + (3ab + 2a^2) = 5ab$;

2) $(9x^6 - 4x^3) - (x^3 - 9) - (8x^6 - 5x^3) = x^6 + 9$.

315.° Найдите значение выражения:

1) $(5a^3 - 20a^2) - (4a^3 - 18a^2)$, если $a = -3$;

2) $4b^2 - (7b^2 - 3bc) + (3b^2 - 7bc)$, если $b = -1{,}5$, $c = 4$.

316.° Вычислите значение выражения:

1) $(5{,}7a^2 - 2{,}1ab + b^2) - (3{,}9ab - 0{,}3a^2 + 2b^2)$, если $a = -1$, $b = 5$;

2) $(5m^2n - m^3) + 7m^3 - (6m^3 - 3m^2n)$, если $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{3}{16}$.

317.° Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной, входящей в него:

1) $1{,}6 - 7a^2 - (0{,}8 - 4a^2) + (3a^2 - 0{,}7)$;

2) $3x^2 - 9x - (8 - 5x^2 - (9x - 8x^2))$.

318.° Докажите, что значение выражения $(2c^2 - 3c) + 1{,}8 - c^2 - (c^2 - 3c - 2{,}2)$ не зависит от значения переменной, входящей в него.

319.° Какой многочлен надо прибавить к трехчлену $2a^2 - 5a + 7$, чтобы сумма была равна:

1) 5; 2) 0; 3) a^2; 4) $-2a$?

320.° Какой многочлен надо вычесть из двучлена $4a^3 - 8$, чтобы разность была равна:

1) -4; 2) 9; 3) $-2a^3$; 4) $3a$?

321.° Вместо звездочки запишите такой многочлен, чтобы образовалось тождество:

1) $* - (3x^2 - 4xy + 2y^2) = 9x^2 + y^2$;

2) $a^3 - 6a^2 + 2a - (*) = a^5 + 2a^2 - 7$.

322.° Вместо звездочки запишите такой многочлен, чтобы образовалось тождество:

1) $(2x^2 - 14x + 9) + (*) = 20 - 10x$;

2) $(19a^4 - 17a^2b + b^3) - (*) = 20a^4 + 5a^2b$.

323.° Вместо звездочки запишите такой многочлен, чтобы после приведения подобных членов полученный многочлен не содержал переменной a:

1) $4a^2 - 3ab + b + 8 + *$;

2) $9a^3 - 9a + 7ab^2 + bc + bm + *$.

324.° Вместо звездочки запишите такой многочлен, чтобы после приведения подобных членов многочлен $3x^2 + + 5x^2y + 7x - 8y + 15 + *$ не содержал:
1) членов с x^2;
2) членов с переменной x;
3) членов с переменной y.

325.° Представьте в виде многочлена число, состоящее из:
1) 4 сотен, x десятков и y единиц;
2) a тысяч, b сотен, 5 десятков и c единиц.

326.° Представьте в виде многочлена выражение:
1) $\overline{cba}$; 2) $\overline{abc} - \overline{ab}$; 3) $\overline{a0c} + \overline{ac}$.

327.° Представьте в виде многочлена выражение:
1) $\overline{cab} + \overline{ca}$; 2) $\overline{abc} + \overline{bca}$; 3) $\overline{ab9} + \overline{7a}$.

328.° Докажите, что значение выражения $(9 - 18n) - (6n - 7)$ кратно 8 при любом натуральном значении n.

329.° Докажите, что значение выражения $(6m + 8) - (3m - 4)$ кратно 3 при любом натуральном значении m.

330.° Докажите, что при делении на 7 значения выражения $(5n + 9) - (5 - 2n)$ остаток будет составлять 4 при любом натуральном значении n.

331.° Чему равен остаток при делении на 9 значения выражения $(16n + 8) - (7n + 3)$, где n — произвольное натуральное число?

332.° Представьте многочлен $3a^2b + 8a^3 - 6a + 12b - 9$ в виде суммы двух многочленов так, чтобы один из них не содержал переменной b.

333.° Представьте многочлен $4mn^2 + 11m^4 - 7m^5 + 14mn - - 9n + 3$ в виде разности двух многочленов с положительными коэффициентами.

334.° Представьте многочлен $6x^2 - 3xy + 5x - 8y + 2$ в виде разности двух многочленов так, чтобы один из них не содержал переменной y.

335.° Докажите, что значение разности двучленов $13m + + 20n$ и $7m + 2n$, где m и n — произвольные натуральные числа, делится нацело на 6.

336.° Докажите, что значение суммы двучленов $16a - 6b$ и $27b - 2a$, где a и b — произвольные натуральные числа, делится нацело на 7.

337.° Представьте многочлен $x^2 - 6x + 14$ в виде разности:
1) двух двучленов; 2) трехчлена и двучлена.

338.° Представьте многочлен $3x^2 + 10x - 5$ в виде разности двучлена и трехчлена.

339.•• Докажите, что выражение $(2x^4 + 4x - 1) - (x^2 + 8 + 9x) + (5x + x^2 - 3x^4)$ принимает отрицательное значение при любом значении x. Какое наибольшее значение принимает это выражение и при каком значении x?

340.•• Докажите, что выражение $(7y^2 - 9y + 8) - (3y^2 - 6y + 4) + 3y$ принимает положительное значение при любом значении y. Какое наименьшее значение принимает это выражение и при каком значении y?

341.•• Докажите, что:
1) сумма пяти последовательных натуральных чисел делится нацело на 5;
2) сумма трех последовательных четных натуральных чисел делится нацело на 6;
3) сумма четырех последовательных нечетных натуральных чисел делится нацело на 8;
4) сумма четырех последовательных натуральных чисел не делится нацело на 4;
5) остаток от деления на 6 суммы шести последовательных натуральных чисел равен 3.

342.•• Докажите, что:
1) сумма трех последовательных натуральных чисел кратна 3;
2) сумма семи последовательных натуральных чисел делится нацело на 7;
3) сумма четырех последовательных четных натуральных чисел делится нацело на 4;
4) сумма пяти последовательных четных натуральных чисел делится нацело на 10.

343.•• Докажите, что:
1) сумма чисел $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ и $\overline{ca}$ делится нацело на 11;
2) разность чисел $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$ делится нацело на 99.

344.•• Докажите, что:
1) сумма чисел $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ кратна 111;

2) разность числа $\overline{abc}$ и суммы его цифр делится нацело на 9.

345.•• Докажите, что не существует таких значений x и y, при которых многочлены $5x^2 - 6xy - 7y^2$ и $-3x^2 + 6xy + 8y^2$ одновременно принимают отрицательные значения.

346.•• Расставьте скобки так, чтобы равенство стало тождеством:
1) $x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = 2$;
2) $x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = -2$;
3) $x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

347. Некоторое число сначала увеличили на 20 %, а потом уменьшили результат на 20 %. Установите, больше или меньше исходного полученное число и на сколько процентов.

348. Через первую трубу бассейн можно наполнить водой за 3 ч, а через вторую — за 6 ч. Сначала 2 ч была открыта первая труба, потом ее закрыли, но открыли вторую. За сколько часов был наполнен бассейн?

349. Известно, что в парке $\frac{7}{24}$ деревьев составляют каштаны, а $\frac{5}{18}$ — березы. Сколько всего деревьев в парке, если их больше, чем 100, но меньше, чем 200?

350. Из села в направлении станции вышел пешеход со скоростью 4 км/ч. Через час из села со скоростью 10 км/ч выехал велосипедист, который прибыл на станцию на 0,5 ч раньше пешехода. Какое расстояние от села до станции?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

351. Найдите значение выражения, используя распределительное свойство умножения:

1) $12\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$; 2) $36\cdot\left(\frac{17}{18}-\frac{5}{12}+\frac{4}{9}\right)$; 3) $\left(\frac{5}{7}+\frac{5}{14}\right)\cdot\frac{28}{25}$.

352. Раскройте скобки:
1) $4(2a - 3b)$;
2) $0,3(9x - 5y + 7)$;
3) $(-2,6m + 3,5n - 7,2)\cdot(-10)$;
4) $-m(-n + 8k - 12)$.

353. Упростите выражение:

1) $3m^2n \cdot 0{,}4mn^3$;
3) $-5x^4y^2z^8 \cdot (-0{,}8x^6y^8z^2)$;
2) $7\frac{1}{3}b^3c^2 \cdot \frac{9}{11}a^4b^5$;
4) $-5\frac{3}{7}abc \cdot 3{,}5a^{12}b^{10}c$.

Обновите в памяти содержание пункта 11 на с. 265.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

354. Саша и Вася записывают 30-значное число, используя только цифры 1, 2, 3, 4, 5. Первую цифру пишет Саша, вторую — Вася и т. д. Вася хочет получить число, кратное 9. Сможет ли Саша ему помешать?

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ № 2 «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

1. Какое из данных равенств не является тождеством?
А) $-3(a-b) = -3a + 3b$;
Б) $9a - 8a + a = 2a$;
В) $8a - (4a + 1) = 4a - 1$;
Г) $-(x + 3y) + (2x - y) = 3x + 2y$.
2. Найдите значение выражения $(-2{,}4 + 0{,}4)^4$.
А) -8; Б) 8; В) 16; Г) -16.
3. Упростите выражение $(-a^6)^3 \cdot (-a^7)^4$.
А) a^{20}; Б) $-a^{20}$; В) a^{46}; Г) $-a^{46}$.
4. Выполните возведение в степень: $(0{,}3a^4)^2$.
А) $0{,}9a^6$; Б) $0{,}9a^8$; В) $0{,}09a^6$; Г) $0{,}09a^8$.
5. Какое из данных выражений является одночленом?
А) $0{,}4x + y$; В) $0{,}4xy$;
Б) $0{,}4x - y$; Г) нет ни одного.
6. Какому из одночленов равно выражение $0{,}7a^3b^2 \cdot \frac{1}{7}a^2b^4$?
А) $7a^5b^6$; Б) $7a^6b^8$; В) $0{,}1a^5b^6$; Г) $0{,}1a^6b^8$.
7. Квадратом какого из данных одночленов является выражение $\frac{1}{4}b^{64}c^{100}$?
А) $-\frac{1}{2}b^8c^{10}$; Б) $\frac{1}{2}b^{32}c^{50}$; В) $\frac{1}{2}b^8c^{10}$; Г) $-\frac{1}{2}b^{32}c^{10}$.

8. Известно, что $m < 0$ и $n < 0$. Сравните с нулем значение выражения m^5n^6.

А) $m^5n^6 = 0$; В) $m^5n^6 < 0$;
Б) $m^5n^6 > 0$; Г) невозможно определить.

9. Приведите подобные члены многочлена $2x^2 + 6xy - 5x^2 - 9xy + 3y^2$.

А) $-3xy$; В) $3x^2y^2$;
Б) $-3x^2 - 3xy + 3y^2$; Г) $3x^2 + 3xy + 3y^2$.

10. Найдите разность многочленов $x^2 - 3x - 4$ и $x - 3x^2 - 2$.

А) $4x^2 - 4x - 2$; В) $-2x^2 - 2x - 6$;
Б) $-2x^2 - 4x - 2$; Г) $4x^2 - 4x - 6$.

11. Какое из данных выражений принимает только отрицательные значения?

А) $x^6 + 4$; Б) $x^6 - 4$; В) $-x^6 + 4$; Г) $-x^6 - 4$.

12. Какое наименьшее значение может принимать выражение $(x - 7)^2 + 2$?

А) 2; Б) 7; В) 5; Г) 9.

10. Умножение одночлена на многочлен

Умножим одночлен $2x$ на многочлен $3x + 2y - 5$. Для этого запишем произведение $2x(3x + 2y - 5)$. Раскроем скобки, применив распределительное свойство умножения. Имеем:

$$2x(3x + 2y - 5) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 2y - 2x \cdot 5 = 6x^2 + 4xy - 10x.$$

Полученный многочлен $6x^2 + 4xy - 10x$ является произведением одночлена $2x$ и многочлена $3x + 2y - 5$.

Вообще, произведение одночлена и многочлена всегда можно представить в виде многочлена.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Для произведения одночлена и многочлена справедливо переместительное свойство умножения. Поэтому приведенное правило позволяет умножать многочлен на одночлен.

ПРИМЕР 1

Упростите выражение $6x(x-1)-3(2x^2-3x+4)$.

Решение. Имеем:

$$6x(x-1)-3(2x^2-3x+4)=\underline{6x^2}-\underline{\underline{6x}}-\underline{6x^2}+\underline{\underline{9x}}-12=3x-12.$$

ПРИМЕР 2

Решите уравнение $0{,}5x(3+4x)=2x(x-2)-11$.

Решение. Имеем:

$$1{,}5x+2x^2=2x^2-4x-11;$$
$$1{,}5x+2x^2-2x^2+4x=-11;$$
$$5{,}5x=-11;$$
$$x=-2.$$

Ответ: -2.

ПРИМЕР 3

Решите уравнение $\frac{5x+4}{12}-\frac{x+3}{8}=2$.

Решение. Умножив обе части данного уравнения на число 24, являющееся наименьшим общим знаменателем дробей, содержащихся в этом уравнении, получаем:

$$\left(\frac{5x+4}{12}-\frac{x+3}{8}\right)\cdot 24=2\cdot 24;$$

$$24\cdot\frac{5x+4}{12}-24\cdot\frac{x+3}{8}=48;$$

$$2(5x+4)-3(x+3)=48;$$
$$10x+8-3x-9=48;$$
$$7x-1=48;$$
$$x=7.$$

Ответ: 7.

ПРИМЕР 4

Докажите, что при любом значении переменной a значение выражения $3a(a^2-4)-2a^2(1{,}5a+4a^4)+6(2a-1)$ является отрицательным числом.

Решение. $3a(a^2-4)-2a^2(1{,}5a+4a^4)+6(2a-1)=$
$$=3a^3-12a-3a^3-8a^6+12a-6=-8a^6-6.$$

Выражение $-8a^6$ при любом значении a принимает неположительное значение. Следовательно, значение выражения $-8a^6 - 6$ является отрицательным числом при любом значении a.

ПРИМЕР 5

Остаток при делении натурального числа m на 6 равен 5, а остаток при делении натурального числа n на 4 равен 2. Докажите, что значение выражения $2m + 3n$ делится нацело на 4 и не делится нацело на 12.

Решение. Пусть неполное частное от деления m на 6 равно a, а от деления n на 4 равно b. Тогда $m = 6a + 5$, $n = 4b + 2$.

Следовательно,

$$2m + 3n = 2(6a + 5) + 3(4b + 2) =$$
$$= 12a + 10 + 12b + 6 = 12a + 12b + 16.$$

Каждое слагаемое полученной суммы делится нацело на 4, поэтому и сумма делится нацело на 4.

Первые два слагаемых делятся нацело на 12, а третье — не делится. Поэтому и сумма не делится нацело на 12.

? Как умножить одночлен на многочлен?

355.° Преобразуйте в многочлен произведение:

1) $3x(2x + 5)$;
2) $4x(x^2 - 8x - 2)$;
3) $-2a(a^2 + a - 3)$;
4) $5b^2(3b^2 - 7b + 10)$;
5) $mn(m^2n - n^3)$;
6) $2ab(a^3 - 3a^2b + b^2)$;
7) $(4y^3 - 6y + 7) \cdot (-1{,}2y^3)$;
8) $0{,}4x^2y(3xy^2 - 5xy + 13x^2y^3)$;
9) $(2{,}3a^3b - 1{,}7b^4 - 3{,}5b) \cdot (-10a^2b)$;
10) $-4pk^3(3p^2k - p + 4k - 2)$;
11) $\frac{2}{3}mn^2(6m - 1{,}8n + 9)$;
12) $1\frac{1}{7}cd\left(\frac{7}{8}c^5 - \frac{7}{24}c^2d^7 - \frac{1}{4}d^{10}\right)$.

356.° Выполните умножение:

1) $3x(4x^2 - x)$;
2) $-5a^2(a^2 - 6a - 3)$;
3) $(8b^2 - 10b + 2) \cdot 0{,}5b$;
4) $x^3(x^5 - x^2 + 7x - 1)$;
5) $-2c^2d^4(4c^2 - c^3d + 5d^4)$;
6) $(5m^3n - 8mn^2 - 2n^6) \cdot (-4m^2n^8)$.

357.° Упростите выражение:

1) $8x - 2x(3x + 4)$;
2) $7a^2 + 3a(9 - 5a)$;
3) $6x(4x - 7) - 12(2x^2 + 1)$;
4) $2m(m - 3n) + m(5m + 11n)$;
5) $c(c^2 - 1) + c^2(c - 1)$;
6) $8x(x^2 + y^2) - 9x(x^2 - y^2)$;
7) $5b^3(2b - 3) - 2{,}5b^3(4b - 6)$;
8) $x(5x^2 + 6x + 8) - 4x(2 + 2x + x^2)$.

358.° Упростите выражение:

1) $7x(x - 4) - x(6 - x)$;
2) $5ab(4a + 3b) - 10a^2(2b - 4)$;
3) $xy(2x - 11y) - x(xy + 14y^2)$;
4) $5c^3(4c - 3) - 2c^2(8c^2 - 12)$.

359.° Упростите выражение и найдите его значение:

1) $3x(2x - 5) - 8x(4x - 3)$, если $x = -1$;
2) $2x(14x^2 - x + 5) + 4x(2{,}5 + 3x - 7x^2)$, если $x = 7$;
3) $8ab(a^2 - 2b^2) - 7a(a^2b - 3b^3)$, если $a = -3$, $b = 2$.

360.° Упростите выражение и найдите его значение:

1) $6x(6x - 4) + 9x(3 - 4x)$, если $x = -\frac{1}{9}$;
2) $2m(m - n) - n(3m - n) - n(n + 6)$, если $m = -4$, $n = 0{,}5$.

361.• Решите уравнение:

1) $5x(3x - 2) - 15x(4 + x) = 140$;
2) $1{,}2x(4 + 5x) = 3x(2x + 1) - 9$;
3) $6x(7x - 8) - 2x(21x - 6) = 3 - 30x$;
4) $12x - 3x(6x - 9) = 9x(4 - 2x) + 3x$;
5) $7x^2 - x(7x - 5) - 2(2{,}5x + 1) - 3 = 0$;
6) $8(x^2 - 4) - 4x(3{,}5x - 7) = 20x - 6x^2$.

362.• Найдите корень уравнения:

1) $0{,}4x(5x - 6) + 7{,}2 = 2x(x + 0{,}6)$;
2) $x(3x + 2) - 9(x^2 - 7x) = 6x(10 - x)$;
3) $12(x^3 - 2) - 7x(x^2 - 1) = 5x^3 + 2x + 6$.

363.° Докажите тождество:

1) $ab(b-c)+ac(c-b)-a(b^2-3bc+c^2)=abc$;
2) $4a(a+b)-a(3a-4b)-8ab=a^2$;
3) $a(a+2b)+b(a+b)=b(2a+b)+a(a+b)$;
4) $a(b+c-bc)-b(a+c-ac)=(a-b)c$.

364.° Докажите тождество:

1) $a(a+b)-b(a-b)=a^2+b^2$;
2) $b(a-b)+b(b+c)=b(a+b)-b(b-c)$.

365.° Докажите, что если:

1) $a+b+c=0$, то
$a(bc-1)+b(ac-1)+c(ab-1)=3abc$;
2) $a^2+b^2=c^2$, то
$c(ab-c)-b(ac-b)-a(bc-a)+abc=0$.

366.° Докажите, что значение выражения
$$x(12x+11)-x^2(x^2+8)-x(11+4x-x^3)$$
не зависит от значения переменной.

367.° Докажите, что значение выражения
$$6x(x-3)-9\left(\frac{2}{3}x^2-2x+7\right)$$
не зависит от значения переменной.

368.° Докажите, что при любых значениях x значение выражения $4(x^2-2x+4)-0{,}5x(6x-16)$ является положительным числом.

369.° Докажите, что выражение $3x^2(3-4x)-6x(1{,}5x-2x^2+x^3)$ принимает неположительные значения при всех значениях x.

370.° Докажите, что выражение $7a^4(a+3)-a^3(21a+7a^2-3a^5)$ принимает неотрицательные значения при всех значениях a.

371.° Замените звездочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:

1) $*\cdot(a-b+c)=-abc+b^2c-bc^2$;
2) $*\cdot(ab-b^2)=a^3b-a^2b^2$;
3) $-3a^2(*-*)=6a^3+15a^4$.

372.° Замените звездочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:

1) $(x-y)\cdot *=x^2y^2-x^3y$;
2) $(-9x^2+*)\cdot y=*+y^4$;

3) $(1{,}4x - *)\cdot 3x = * - 0{,}6x^3$;

4) $*\,(* - x^2y^5 + 5y^6) = 8x^3y^3 + 5x^3y^8 - *$.

373. Упростите выражение:

1) $15a\cdot\frac{a+4}{3} + 12a^2\cdot\frac{5-2a}{6}$;

2) $24c^3\cdot\frac{c^2+2c-3}{8} - 18c^2\cdot\frac{c^3-c^2+2}{9}$;

3) $34x\cdot\frac{x-y}{17} - 45y\cdot\frac{x-2y}{15} - y(6y-5x)$.

374. Упростите выражение:

1) $6b^2\cdot\frac{5b^2-4}{3} + 20b\cdot\frac{3b-2b^3}{4}$;

2) $14m\cdot\frac{m+n}{7} - \frac{m-n}{8}\cdot 16n - 2(m^2+n^2)$.

375. Решите уравнение:

1) $\frac{x-7}{4} - \frac{x}{6} = 2$;

2) $\frac{x+6}{2} - \frac{x-7}{7} = 4$;

3) $\frac{2x+3}{6} + \frac{1-4x}{8} = \frac{1}{3}$;

4) $3x - \frac{2x+3}{2} = \frac{x+6}{3}$;

5) $\frac{6x-7}{5} - \frac{3x+1}{6} = \frac{11-x}{15}$;

6) $\frac{5x-3}{9} - \frac{4x+3}{6} = x-1$;

7) $\frac{8x-5}{3} - \frac{4x+3}{4} + \frac{2-9x}{2} = -3$;

8) $\frac{8x^2-3x}{16} - \frac{6x^2+1}{12} = -1$.

376. Найдите корень уравнения:

1) $x - \frac{7x+1}{8} = \frac{4x+3}{4}$;

2) $\frac{2x+1}{6} - \frac{3x+1}{7} = 2$;

3) $\frac{2x+3}{3} - \frac{5x+13}{6} + \frac{5-2x}{2} = 6$;

4) $\frac{4x^2+5x}{14} + \frac{10-2x^2}{7} = 5$.

377. При каком значении переменной значение выражения $8y(y-7)$ на 15 больше значения выражения $2y(4y - 10{,}5)$?

378. Длина прямоугольника в 3 раза больше его ширины. Если ширину прямоугольника уменьшить на 6 см, то его площадь уменьшится на 144 см^2. Найдите исходную ширину прямоугольника.

379. Ширина прямоугольника на 8 см меньше его длины. Если длину прямоугольника увеличить на 6 см, то его площадь увеличится на 72 см². Найдите периметр данного прямоугольника.

380.° За 3 дня турист прошел 108 км. За второй день он прошел на 6 км больше, чем за первый, а за третий — $\frac{5}{13}$ расстояния, пройденного за первых два дня. Сколько километров турист прошел за каждый из этих дней?

381.° Три бригады рабочих изготовили за смену 80 деталей. Первая бригада изготовила на 12 деталей меньше, чем вторая, а третья — $\frac{3}{7}$ количества деталей, изготовленных первой и второй бригадами вместе. Сколько деталей изготовила каждая бригада?

382.•• Упростите выражение:

1) $x^{n+1}(x^{n+6} - 1) - x^{n+2}(x^{n+5} - x^3)$;

2) $x^{n+2}(x^2 - 3) - x^n(x^{n+2} - 3x^2 - 1)$,

где n — натуральное число.

383.•• Упростите выражение:

1) $x^n(x^{n+4} + 2x) + x(3x^n - x^{2n+3})$;

2) $x(4x^{n+1} + 2x^{n+4} - 7) - x^{n+2}(4 + 2x^3 - x^n)$,

где n — натуральное число.

384.•• Остаток при делении натурального числа a на 3 равен 1, а остаток при делении натурального числа b на 9 равен 7. Докажите, что значение выражения $4a + 2b$ делится нацело на 3.

385.•• Остаток при делении натурального числа m на 5 равен 3, а остаток при делении натурального числа n на 3 равен 2. Докажите, что значение выражения $3m + 5n$ не делится нацело на 15.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

386. Три наибольших лимана Украины — Днепровско-Бугский, Днестровский и Сасык (Кундук) находятся на побережье Черного моря. Их общая площадь составляет 1364,8 км². Площадь Днестровского лимана в $2\frac{2}{9}$ раза меньше площади Днепровско-Бугского, а площадь Сасыка составляет 25,6 % площади Днепровско-Бугского. Найдите площадь каждого лимана.

387. За первый день Вася прочел $\frac{2}{7}$ страниц книги, за второй — 64 % оставшихся, а за третий — остальные 54 страницы. Сколько всего страниц в книге?

388. Какова вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет:
1) нечетное число;
2) число, которое делится нацело на 3;
3) число, которое не делится нацело на 3?

389. Велосипедист проехал первую половину пути за 3 ч, а вторую — за 2,5 ч, так как увеличил скорость на 3 км/ч. Какое расстояние проехал велосипедист?

390. На одном складе было 184 т минеральных удобрений, а на втором — 240 т. Первый склад отпускает ежедневно по 15 т удобрений, а второй — по 18 т. Через сколько дней количество удобрений, оставшихся на первом складе, будет составлять $\frac{2}{3}$ количества удобрений, оставшихся на втором складе?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

391. В волейбольном турнире, проходившем в один круг (то есть каждая команда сыграла с каждой из остальных один раз), 20 % всех команд не завоевали ни одной победы. Сколько команд участвовало в этом турнире? (*Примечание.* В волейболе «ничьих» не бывает, обязательно одна команда выигрывает, а другая проигрывает.)

11. Умножение многочлена на многочлен

Научимся умножать два многочлена на примере произведения $(a + b)(x - y - z)$. Обозначим второй множитель буквой c. Тогда

$$(a + b)(x - y - z) = (a + b)c = ac + bc.$$

Теперь в выражение $ac + bc$ подставим вместо c многочлен $x - y - z$. Запишем:

$$ac + bc = a(x - y - z) + b(x - y - z) =$$
$$= ax - ay - az + bx - by - bz.$$

Полученный многочлен и является искомым произведением.

Этот же результат можно получить, если произведение находить по схеме:

$$(a + b)(x - y - z),$$

которая разъясняет следующее правило:
чтобы умножить многочлен на многочлен, можно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.

Таким образом, при умножении многочлена на многочлен всегда получаем многочлен.

ПРИМЕР 1

Упростите выражение $(3x - 4)(2x + 3) - (x - 2)(x + 5)$.

Решение. Имеем:

$$(3x - 4)(2x + 3) - (x - 2)(x + 5) = 6x^2 + 9x - 8x - 12 -$$
$$-(x^2 + 5x - 2x - 10) = 6x^2 + 9x - 8x - 12 - x^2 - 5x + 2x + 10 =$$
$$= 5x^2 - 2x - 2.$$

ПРИМЕР 2

Представьте в виде многочлена выражение:

$$(a + 2)(a - 5)(a + 3).$$

Решение. $(a + 2)(a - 5)(a + 3) =$

$$= (a^2 - 5a + 2a - 10)(a + 3) = (a^2 - 3a - 10)(a + 3) =$$
$$= a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 9a - 10a - 30 = a^3 - 19a - 30.$$

ПРИМЕР 3

Найдите четыре последовательных натуральных числа таких, что произведение третьего и четвертого из них на 38 больше произведения второго и первого.

Решение. Пусть меньшее из этих чисел равно x, тогда три следующие за ним числа будут равны $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$. Так как по условию произведение $(x + 3)(x + 2)$ на 38 больше, чем произведение $x(x + 1)$, то:

$$(x+3)(x+2)-x(x+1)=38;$$
$$x^2+2x+3x+6-x^2-x=38;$$
$$4x=38-6;$$
$$x=8.$$

Следовательно, искомыми числами являются 8, 9, 10 и 11.
Ответ: 8, 9, 10, 11.

ПРИМЕР 4

Докажите, что значение выражения
$$(n+39)(n-4)-(n+31)(n-3)$$
кратно 7 при всех натуральных значениях n.

Решение. Выполним преобразование:
$$(n+39)(n-4)-(n+31)(n-3)=$$
$$=n^2-4n+39n-156-(n^2-3n+31n-93)=$$
$$=n^2-4n+39n-156-n^2+3n-31n+93=$$
$$=7n-63=7(n-9).$$

Следовательно, данное выражение можно представить в виде произведения двух множителей, один из которых равен 7, а второй принимает только целые значения. Этот факт доказывает утверждение задачи.

? Как умножить многочлен на многочлен?

392.° Выполните умножение:

1) $(a-2)(b+5)$;
2) $(m+n)(p-k)$;
3) $(x-8)(x+4)$;
4) $(x-10)(x-9)$;
5) $(c+5)(c+8)$;
6) $(3y+1)(4y-6)$;
7) $(-2m-3)(5-m)$;
8) $(5x^2-x)(6x^2+4x)$;
9) $(-c-4)(c^3+3)$;
10) $(x-5)(x^2+4x-3)$;
11) $(2a+3)(4a^2-4a+3)$;
12) $a(5a-4)(3a-2)$.

393.° Преобразуйте в многочлен выражение:

1) $(a+b)(c-d)$;
2) $(x-6)(x-4)$;
3) $(a-3)(a+7)$;
4) $(11-c)(c+8)$;
5) $(d+13)(2d-1)$;
6) $(3y-5)(2y-12)$;
7) $(2x^2-3)(x^2+4)$;
8) $(x-6)(x^2-2x+9)$;
9) $(5x-y)(2x^2+xy-3y^2)$;
10) $b(6b+7)(3b-4)$.

394.° Упростите выражение:

1) $(x+2)(x+11)-2x(3-4x)$;
2) $(a+5)(a-2)+(a-4)(a+6)$;

3) $(y - 9)(3y - 1) - (2y + 1)(5y - 7)$;
4) $(4x - 1)(4x - 3) - (2x - 10)(8x + 1)$.

395.° Упростите выражение:
1) $(a - 2)(a - 1) - a(a + 1)$;
2) $(b - 5)(b + 10) + (b + 6)(b - 8)$;
3) $(2c + 3)(3c + 2) - (2c + 7)(2c - 7)$;
4) $(3d + 5)(5d - 1) - (6d - 3)(2 - 8d)$.

396.° Упростите выражение и найдите его значение:
1) $(x + 2)(x - 5) - (x - 3)(x + 4)$, если $x = -5{,}5$;
2) $(y + 9)(y - 2) + (3 - y)(6 + 5y)$, если $y = -1\frac{1}{2}$.

397.° Упростите выражение и найдите его значение:
1) $(a + 3)(a - 10) - (a + 7)(a - 4)$, если $a = -0{,}01$;
2) $(8c + 12)(3c - 1) + (3c + 2)(-5c - 6)$, если $c = 1\frac{1}{3}$.

398.• Решите уравнение:
1) $(2x - 3)(4x + 3) - 8x^2 = 33$;
2) $(2x - 6)(8x + 5) + (3 - 4x)(3 + 4x) = 55$;
3) $21x^2 - (3x - 7)(7x - 3) = 37$;
4) $(x + 1)(x + 2) - (x - 3)(x + 4) = 12$;
5) $(-4x + 1)(x - 1) - x = (5 - 2x)(2x + 3) - 17$.

399.• Решите уравнение:
1) $(2x - 1)(15 + 9x) - 6x(3x - 5) = 87$;
2) $(14x - 1)(2 + x) = (2x - 8)(7x + 1)$;
3) $(x + 10)(x - 5) - (x - 6)(x + 3) = 16$;
4) $(3x + 7)(8x + 1) = (6x - 7)(4x - 1) + 93x$.

400.• Выполните умножение:
1) $(x + 2)(x - 1)(x - 4)$;
2) $(2x + 1)(x + 5)(x - 6)$;
3) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$;
4) $(a + 2b - c)(a - 3b + 2c)$;
5) $(a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$;
6) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

401.• Преобразуйте в многочлен выражение:
1) $(a + 1)(a - 2)(a - 3)$;
2) $(3a - 2)(a + 3)(a - 7)$;
3) $(a^2 - 2a + 1)(a^2 + 3a - 2)$;
4) $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$.

402.° Замените степень произведением, а затем произведение преобразуйте в многочлен:
1) $(a+5)^2$; 2) $(4-3b)^2$; 3) $(a+b+c)^2$; 4) $(a-b)^3$.

403.° Докажите, что при любом значении переменной значение выражения $(x+3)(x^2-4x+7)-(x^2-5)(x-1)$ равно 16.

404.° Докажите, что при любом значении переменной значение выражения $(x-3)(x^2+7)-(x-2)(x^2-x+5)$ равно -11.

405.° Задумали четыре натуральных числа. Второе число на 1 больше первого, третье — на 5 больше второго, а четвертое — на 2 больше третьего. Найдите эти числа, если отношение первого числа к третьему равно отношению второго числа к четвертому.

406.° Задумали три натуральных числа. Второе число на 4 больше первого, а третье — на 6 больше второго. Найдите эти числа, если отношение первого числа ко второму равно отношению второго числа к третьему.

407.° Найдите четыре последовательных натуральных числа таких, что произведение четвертого и второго из этих чисел на 17 больше произведения третьего и первого.

408.° Найдите 3 последовательных натуральных числа таких, что произведение второго и третьего из этих чисел на 50 больше квадрата первого.

409.° Сторона квадрата на 3 см меньше одной из сторон прямоугольника и на 5 см больше его другой стороны. Найдите сторону квадрата, если его площадь на 45 см^2 больше площади данного прямоугольника.

410.° Периметр прямоугольника равен 60 см. Если одну его сторону уменьшить на 5 см, а другую увеличить на 3 см, то его площадь уменьшится на 21 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

411.° Длина прямоугольника на 2 см больше его ширины. Если длину увеличить на 2 см, а ширину уменьшить на 4 см, то площадь прямоугольника уменьшится на 40 см^2. Найдите исходные длину и ширину прямоугольника.

412.° Докажите тождество:
1) $x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7)$;
2) $y^2(y - 7)(y + 2) = y^4 - 5y^3 - 14y^2$;
3) $a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$;
4) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) = a^4 - 1$;
5) $(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1) = a^8 + a^4 + 1$.

413.° Докажите тождество:
1) $3a^2 + 10a + 3 = 3(a + 3)\left(a + \frac{1}{3}\right)$;
2) $(a + 1)(a^2 + 5a + 6) = (a^2 + 3a + 2)(a + 3)$;
3) $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) = a^5 + 1$.

414.° При всех ли натуральных значениях n значение выражения $(n + 9)(n + 11) - (n + 3)(n + 5)$ кратно 12?

415.° При всех ли натуральных значениях n значение выражения $(n + 29)(n + 3) - (n + 7)(n + 1)$ кратно 8?

416.° Замените звездочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:
1) $(a - 2)(* + 6) = a^2 + * - *$;
2) $(2a + 7)(a - *) = * + * - 14$.

417.° Замените звездочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:
1) $(x + 3)(* + 5) = 3x^2 + * + *$;
2) $(x - 4)(x + *) = * + * + 24$.

418." Выбрали некоторые четыре последовательных натуральных числа. Зависит ли разность произведения второго и третьего из этих чисел и произведения первого и четвертого от выбора чисел?

419." Выбрали некоторые три последовательных натуральных числа. Зависит ли разность квадрата второго из этих чисел и произведения первого и третьего от выбора чисел?

420." Докажите, что значение выражения $\overline{ab} \cdot \overline{ba} - ab$ делится нацело на 10 независимо от значений a и b.

421." Остаток при делении натурального числа x на 6 равен 3, а остаток при делении натурального числа y на 6 равен 2. Докажите, что произведение чисел x и y делится нацело на 6.

422." Остаток при делении натурального числа a на 8 равен 3, а остаток при делении натурального числа b

на 8 равен 7. Докажите, что остаток при делении произведения чисел a и b на 8 равен 5.

423.•• Остаток при делении натурального числа m на 11 равен 9, а остаток при делении натурального числа n на 11 равен 5. Докажите, что остаток при делении произведения чисел m и n на 11 равен 1.

424.•• Докажите, что если $ab + bc + ac = 0$, то:
$(a - b)(a - c) + (b - c)(b - a) + (c - a)(c - b) = a^2 + b^2 + c^2$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

425. Двое рабочих изготовили вместе 108 деталей. Первый рабочий работал 5 ч, а второй — 3 ч. Сколько деталей изготавливал ежечасно каждый рабочий, если вместе за 1 ч они изготавливают 26 деталей?

426. Смешали 72 г пятипроцентного раствора соли и 48 г пятнадцатипроцентного раствора соли. Найдите процентное содержание соли в полученном растворе.

427. Решите уравнение:
1) $\overline{1x} + \overline{2x} = \overline{x6}$; 2) $\overline{x4} + \overline{x8} = \overline{1x2}$.

428. Докажите тождество:
1) $18^{16n} = 12^{8n} \cdot 9^{12n}$; 2) $75^{8n} = 225^{4n} \cdot 625^{2n}$,
где n — натуральное число.

429. (*Старинная греческая задача.*) Демохар четвертую часть жизни прожил мальчиком, пятую часть — юношей, третью часть — зрелым мужчиной и 13 лет — в годах. Сколько лет прожил Демохар?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

430. Вычислите, используя распределительное свойство умножения:
1) $4{,}8 \cdot 2{,}9 + 4{,}8 \cdot 7{,}1$; 3) $3\frac{9}{14} \cdot 0{,}3 - 0{,}3 \cdot 1\frac{10}{21} + 0{,}3 \cdot 1\frac{1}{6}$.
2) $3\frac{9}{14} \cdot \frac{7}{9} - 2\frac{5}{14} \cdot \frac{7}{9}$;

431. Решите уравнение:
1) $x(x + 4) = 0$;

2) $(x - 6)(x + 9) = 0$;
3) $(3x + 5)(10 - 0{,}4x) = 0$.

Обновите в памяти содержание пунктов 11, 13 на с. 265, 266.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

432. В каждой клетке доски размером 5×5 клеток сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Обязательно ли при этом останется пустая клетка?

12. Разложение многочленов на множители. Вынесение общего множителя за скобки

Умножим два многочлена $2x - 1$ и $x + 1$. Имеем:

$$(2x - 1)(x + 1) = 2x^2 + 2x - x - 1 = 2x^2 + x - 1.$$

Получили тождество $(2x - 1)(x + 1) = 2x^2 + x - 1$, которое можно записать и так: $2x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x + 1)$.

О такой записи говорят, что многочлен $2x^2 + x - 1$ **разложили на множители** $2x - 1$ и $x + 1$.

Вообще, представление многочлена в виде произведения нескольких многочленов называют **разложением многочлена на множители.**

Разложение многочлена на множители является ключом к решению многих задач. Например, каждое из уравнений $2x - 1 = 0$ и $x + 1 = 0$ решить очень легко, а вот уравнение $2x^2 + x - 1 = 0$ вы пока решать не умеете. Однако, если воспользоваться разложением многочлена $2x^2 + x - 1$ на множители, то можно записать:

$$(2x - 1)(x + 1) = 0.$$

Отсюда $2x - 1 = 0$ или $x + 1 = 0$. Искомыми корнями являются числа 0,5 и -1.

Таким образом, разложение многочлена на множители позволило свести решение сложного уравнения к решению двух более простых.

Существует немало приемов разложения многочлена на множители. Самый простой из них — **вынесение общего множителя за скобки.**

Это преобразование вам уже знакомо. Например, значение выражения $1{,}62 \cdot 1{,}08 - 0{,}08 \cdot 1{,}62$ находили так:

$$1{,}62 \cdot 1{,}08 - 0{,}08 \cdot 1{,}62 = 1{,}62\,(1{,}08 - 0{,}08) = 1{,}62.$$

Здесь использовано распределительное свойство умножения $c\,(a + b) = ac + bc$, прочитанное справа налево: $ac + bc = c\,(a + b)$.

Воспользуемся этой идеей в следующих примерах.

ПРИМЕР 1

Разложите на множители:

1) $a^2b^2 + ab^3$; 2) $8a^2b^2 - 12ab^3$; 3) $10a^8 - 5a^5$.

Решение

1) Одночлены a^2b^2 и ab^3 содержат такие общие множители: a, b, ab, b^2 и ab^2. Любой из этих множителей можно вынести за скобки. Но обычно выбирают такой общий множитель, чтобы члены многочлена, остающегося в скобках, не имели общего буквенного множителя. Такие соображения подсказывают, что надо вынести за скобки общий множитель ab^2:

$$a^2b^2 + ab^3 = ab^2\,(a + b).$$

Чтобы проверить, правильно ли разложили многочлен на множители, надо эти множители перемножить.

2) Если коэффициенты многочлена — целые числа, то за скобки обычно выносят наибольший общий делитель модулей этих коэффициентов (в нашем примере это число 4):

$$8a^2b^2 - 12ab^3 = 4ab^2\,(2a - 3b).$$

3) Имеем: $10a^8 - 5a^5 = 5a^5\,(2a^3 - 1)$.

ПРИМЕР 2

Представьте в виде произведения многочленов выражение:

1) $a\,(m - 3) + b\,(m - 3)$; 3) $6x\,(x - 7) - (x - 7)^2$.

2) $x\,(c - d) + y\,(d - c)$;

Решение

1) В данном случае общим множителем является многочлен $m - 3$:

$$a\,(m - 3) + b\,(m - 3) = (m - 3)\,(a + b).$$

2) Имеем:

$$x(c-d)+y(d-c)=x(c-d)+y\cdot(-1)\cdot(c-d)=$$
$$=x(c-d)-y(c-d)=(c-d)(x-y).$$

3) Имеем:

$$6x(x-7)-(x-7)^2=(x-7)(6x-(x-7))=$$
$$=(x-7)(6x-x+7)=(x-7)(5x+7).$$

ПРИМЕР 3

Вынесите за скобки общий множитель в выражении

$$(12x-18y)^2.$$

Решение. Имеем:

$$(12x-18y)^2=(6(2x-3y))^2=6^2(2x-3y)^2=36(2x-3y)^2.$$

ПРИМЕР 4

Решите уравнение:

1) $4x^2-12x=0$; 2) $(3x-7)(x+4)+(x-1)(x+4)=0$.

Решение

1) Разложив левую часть уравнения на множители и применив условие, согласно которому произведение равно нулю, имеем:

$$4x(x-3)=0;$$
$$x=0 \text{ или } x-3=0;$$
$$x=0 \text{ или } x=3.$$

Ответ: 0; 3.

2)
$$(3x-7)(x+4)+(x-1)(x+4)=0;$$
$$(x+4)(3x-7+x-1)=0;$$
$$x+4=0 \text{ или } 4x-8=0;$$
$$x=-4 \text{ или } x=2.$$

Ответ: −4; 2.

ПРИМЕР 5

Докажите, что значение выражения: 1) 8^7-4^9 делится нацело на 14; 2) 20^3-4^4 делится нацело на 121.

Решение

1) Представим выражения 8^7 и 4^9 в виде степеней с основанием 2 и вынесем за скобки общий множитель. Получим:

$$8^7-4^9=(2^3)^7-(2^2)^9=2^{21}-2^{18}=2^{18}(2^3-1)=$$
$$=2^{18}\cdot(8-1)=2^{18}\cdot 7=2^{17}\cdot 2\cdot 7=2^{17}\cdot 14.$$

Данное выражение равно произведению двух натуральных чисел, одним из которых является 14. Отсюда следует, что значение выражения $8^7 - 4^9$ делится нацело на 14.

2) Имеем: $20^3 - 4^4 = (5 \cdot 4)^3 - 4^4 = 5^3 \cdot 4^3 - 4^4 = 4^3(5^3 - 4) =$

$$= 4^3(125 - 4) = 4^3 \cdot 121.$$

Следовательно, значение данного выражения делится нацело на 121.

ПРИМЕР 6

При каком значении a уравнение $(x + 2)(x + a) - x(x + 1) = 3a + 1$ имеет бесконечно много корней?

Решение. Имеем:

$$x^2 + ax + 2x + 2a - x^2 - x = 3a + 1;$$
$$ax + x + 2a = 3a + 1;$$
$$ax + x = a + 1;$$
$$(a + 1)x = a + 1.$$

Только при $a = -1$ последнее уравнение принимает вид $0x = 0$ и имеет бесконечно много корней.

Ответ: при $a = -1$.

1. Поясните, что называют разложением многочлена на множители.
2. Какое свойство умножения используют при вынесении общего множителя за скобки?

433.° Вынесите за скобки общий множитель:

1) $am + an$;
2) $6x - 6y$;
3) $4b + 16c$;
4) $12x - 15y$;
5) $-cx - cy$;
6) $4bk + 4bt$;
7) $-8a - 18b$;
8) $ax + a$;
9) $7c - 7$;
10) $24x + 30y$;
11) $10mx - 15my$;
12) $x^2 + xy$;
13) $3d^2 - 3cd$;
14) $4a^2 + 16ab$;
15) $a^6 - a^3$;
16) $b^2 + b^8$;
17) $7p^3 - 5p$;
18) $15c^2d - 3cd$;
19) $14x^2y + 21xy^2$;
20) $-2x^9 + 16x^6$;
21) $8a^4b^2 - 36a^3b^7$.

434.° Разложите на множители:

1) $3a + 6b$;
2) $12m - 16n$;
3) $10ck - 15cp$;
4) $8ax + 8a$;
5) $5b - 25bc$;
6) $14x^2 + 7x$;
7) $n^{10} - n^5$;
8) $m^6 + m^7$;
9) $9x - 27x^4$;
10) $18y^5 + 12y^4$;
11) $56a^{10}b^6 - 32a^4b^8$;
12) $36mn^5 + 63m^2n^6$.

435.° Вычислите, используя вынесение общего множителя за скобки:

1) $173^2 + 173 \cdot 27$;
2) $214 \cdot 314 - 214^2$;
3) $0{,}4^3 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}6$.

436.° Найдите значение выражения:

1) $516^2 - 516 \cdot 513$;
2) $0{,}7^3 + 0{,}7 \cdot 0{,}51$;
3) $0{,}2^4 - 0{,}2^3 \cdot 1{,}2$.

437.° Вычислите значение выражения, предварительно разложив его на множители:

1) $6{,}32x - x^2$, если $x = 4{,}32$;
2) $a^3 + a^2b$, если $a = 1{,}5$, $b = -2{,}5$;
3) $m^3p - m^2n^2$, если $m = 3$, $p = \frac{1}{3}$, $n = -3$.

438.° Найдите значение выражения:

1) $0{,}74x^2 + 26x$, если $x = 100$;
2) $x^2y^3 - x^3y^2$, если $x = 4$, $y = 5$.

439.° Решите уравнение:

1) $y^2 - 6y = 0$;
2) $x^2 + x = 0$;
3) $4m^2 - 20m = 0$;
4) $13x^2 + x = 0$;
5) $9x^2 - 6x = 0$;
6) $12x - 0{,}3x^2 = 0$.

440.° Решите уравнение:

1) $x^2 - x = 0$;
2) $p^2 + 15p = 0$;
3) $5x^2 - 30x = 0$;
4) $14x^2 + 18x = 0$.

441.° Разложите на множители:

1) $2x(a + b) + y(a + b)$;
2) $(a - 4) - b(a - 4)$;
3) $5a(m - n) + 7b(m - n)$;
4) $6x(4x + 1) - 11(4x + 1)$;
5) $a(c - d) + b(d - c)$;
6) $x(x - 6) - 10(6 - x)$;
7) $b(b - 20) + (20 - b)$;
8) $6a(a - 3b) - 13b(3b - a)$;
9) $(m - 9)^2 - 3(m - 9)$;
10) $a(a + 5)^2 + (a + 5)$;
11) $(m^2 - 3) - n(m^2 - 3)^2$;
12) $8c(p - 12) + 7d(p - 12)^2$.

442.° Представьте выражение в виде произведения многочленов:

1) $c(x - 3) - d(x - 3)$;
2) $m(p - k) - (p - k)$;
3) $m(x - y) - n(y - x)$;
4) $x(2 - x) + 4(x - 2)$;
5) $4x(2x - y) - 5y(y - 2x)$;
6) $(y + 1)^2 - 4y(y + 1)$;
7) $10(a^2 - 5) + (a^2 - 5)^2$;
8) $(a - 2)^2 - 6(a - 2)$.

443.• Разложите на множители:

1) $2a^5b^2 - 4a^3b + 6a^2b^3$;
2) $mn^3 + 5m^2n^2 - 7m^2n$;
3) $xy^2 + x^2y - xy$;
4) $9x^3 + 4x^2 - x$;
5) $-6m^4 - 8m^5 - 2m^6$;
6) $42a^4b - 28a^3b^2 - 70a^5b^3$.

444.° Вынесите за скобки общий множитель:
1) $m^2n + mn + n$;
2) $3x^6 + 6x^5 - 15x^4$;
3) $7a^4b^3 - 14a^3b^4 + 21a^2b^5$;
4) $20b^6c^5 - 45b^5c^6 - 30b^5c^5$.

445.° Есть ли в данных равенствах ошибки:
1) $4a + 4 = 4(a + 4)$;
2) $6ab - 3b = b(6a - 2b)$;
3) $-5x - 10y = -5(x - 2y)$;
4) $x^6 - x^4 + x^2 = x^2(x^3 - x^2 + x)$?

446.° Докажите, что сумма любого натурального числа и его квадрата является четным числом.

447.° Разложите на множители:
1) $a(2a + b)(a + b) - 4a(a + b)^2$;
2) $3m^2(m - 8) + 6m(m - 8)^2$;
3) $(2a + 3)(a + 5) + (a - 1)(a + 5)$;
4) $(3x + 7)(4y - 1) - (4y - 1)(2x + 10)$;
5) $(5m - n)^3(m + 8n)^2 - (5m - n)^2(m + 8n)^3$.

448.° Представьте в виде произведения многочленов выражение:
1) $(x - 6)(2x - 4) + (x - 6)(8 - x)$;
2) $(x^2 - 2)(3y + 5) - (x^2 - 2)(y + 12)$;
3) $(4a - 3b)(5a + 8b) + (3b - 4a)(2a + b)$;
4) $(p - 9)^4(2p + 1)^3 + (p - 9)^3(2p + 1)^4$.

449.° Решите уравнение, используя разложение на множители:
1) $(x - 3)(x + 7) - (x + 7)(x - 8) = 0$;
2) $(4x - 9)(x - 2) + (1 - x)(x - 2) = 0$;
3) $0,2x(x - 5) + 8(x - 5) = 0$;
4) $7(x - 7) - (x - 7)^2 = 0$.

450.° Решите уравнение, используя разложение на множители:
1) $(2x - 9)(x + 6) - x(x + 6) = 0$;
2) $(3x + 4)(x - 10) + (10 - x)(x - 8) = 0$;
3) $3(3x + 1)^2 - 4(3x + 1) = 0$;
4) $(9x - 12) - x(9x - 12) = 0$.

451.° Вынесите за скобки общий множитель:
1) $(2x - 6)^2$;
2) $(5y + 5)^2$;
3) $(36x + 30y)^2$;
4) $(2x + 4)^4$;
5) $(6x - 9y)^3$;
6) $(a^2 + ab)^2$;
7) $(-7a - 14ab)^2$;
8) $(3c^4 - 6c^3)^4$.

452.° Вынесите за скобки общий множитель:

1) $(4x - 4y)^2$;
2) $(18a + 27b)^2$;
3) $(8m - 10n)^3$;
4) $(a^2 - 9a)^2$;
5) $(16x^2y + 40xy^2)^2$;
6) $(22x^4 - 28x^2y^3)^5$.

453.° Докажите, что значение выражения:

1) $19^5 + 19^4$ кратно 20;
2) $8^{10} - 8^9 - 8^8$ кратно 11;
3) $8^7 + 2^{15}$ кратно 5;
4) $2 \cdot 3^{2006} + 5 \cdot 3^{2005} + 7 \cdot 3^{2004}$ кратно 10;
5) $27^4 - 9^5$ кратно 24;
6) $12^4 - 4^6$ кратно 130.

454.° Докажите, что значение выражения:

1) $25^{25} - 25^{24}$ делится нацело на 12;
2) $16^4 + 8^5 - 4^7$ делится нацело на 10;
3) $36^5 + 6^9$ делится нацело на 42;
4) $10^5 - 5^7$ делится нацело на 7.

455.•• Докажите, что если:

1) $a + b = 2$, то $a^2b + ab^2 - 2ab = 0$;
2) $3a + 4b = -2$, то $12a^3b + 16a^2b^2 + 32a^2b = 24a^2b$.

456.•• Докажите, что если:

1) $a + b + c = 0$, то $a^3b^3c^2 + a^2b^4c^2 + a^2b^3c^3 = 0$;
2) $a^2 - b^2 = 2ab + 1$, то $a^6b^4 - 2a^5b^5 - a^4b^6 = a^4b^4$.

457.•• Решите уравнение:

1) $8x^2 - 3(x - 4) = 12$;
2) $5x^3 - x(2x - 3) = 3x$;
3) $4x - 0{,}2x(x + 20) = x^3$;
4) $9x(x - 3) + (x - 4)(x - 5) = 20$.

458.•• Найдите корни уравнения:

1) $(3x - 2)(3x + 2) - (2x - 5)(8x - 3) = 4x - 19$;
2) $\frac{1}{3}(12 + x^3) = \frac{1}{9}x^2 + 4$.

459.•• Упростите выражение, используя вынесение общего множителя за скобки:

1) $(a - 1)(a + 2) - (a - 2)(a + 2) + (a - 3)(a + 2) - (a - 4)(a + 2)$;
2) $(3a - 2)(5b^2 - 4b + 10) + (2 - 3a)(5b^2 - 6b + 10)$;
3) $(4a - 7b)(2a^2 - 4ab + b^2) - (4a - 7b)(2a^2 - 4ab - b^2)$.

460." Упростите выражение, используя вынесение общего множителя за скобки:
1) $ab(a^2 + ab + b^2) - ab(a^2 - ab + b^2)$;
2) $(a + b)(a + 1) - (a + b)(1 - b) + (b + a)(b - a)$.

461." Решите уравнение $4x^2 - 1{,}2x = a$, если один из его корней равен 0,3.

462." Решите уравнение $5x^2 + 8x = a$, если один из его корней равен $-1{,}6$.

463." Вынесите за скобки общий множитель (n — натуральное число):
1) $a^{n+1} + a^n$;
2) $b^n - b^{n-3}$, $n > 3$;
3) $c^{n+2} + c^{n-4}$, $n > 4$;
4) $d^{2n} - d^n$;
5) $2^{n+3} + 3 \cdot 2^{n+2} - 5 \cdot 2^{n+1}$;
6) $9^{n+1} + 3^{n+2}$.

464." Разложите на множители (n — натуральное число):
1) $a^{n+2} - a^n$;
2) $3b^{n+2} - 2b^{n+1} + b^n$;
3) $32^n + 16^{2n+1}$.

465." Известно, что при некотором значении y значение выражения $y^2 - 4y + 2$ равно 6. Найдите при этом значении y значение выражения:
1) $5y^2 - 20y + 10$;
2) $y^2(y^2 - 4y + 2) - 4y(y^2 - 4y + 2)$;
3) $3y^2 - 12y + 8$.

466." Известно, что при некотором значении a значение выражения $a^2 + 2a - 5$ равно -4. Найдите при этом значении a значение выражения:
1) $-2a^2 - 4a + 10$;
2) $a^2(a^2 + 2a - 5) + 2a(a^2 + 2a - 5)$;
3) $4a^2 + 8a - 16$.

467." При каком значении a не имеет корней уравнение:
1) $(x + 1)(x - 3) - x(x - 3) = ax$;
2) $x(5x - 1) - (x - a)(5x - 1) = 4x - 2a$;
3) $(2x - 5)(x + a) - (2x + 3)(x + 1) = 4$?

468." При каком значении a имеет бесконечно много корней уравнение:
1) $(x - 4)(x + a) - (x + 2)(x - a) = -6$;
2) $x(3x - 2) - (x + 2a)(3x + 2) = 5a + 6$?

469.* Найдите все двузначные числа, равные произведению своих цифр, увеличенных на 1.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

470. Упростите выражение:

1) $0{,}42ac^3 \cdot 1\frac{3}{7}a^4c^2$;
3) $-2\frac{1}{3}m^2np^3 \cdot \left(\frac{3}{7}np^4\right)^2$;
2) $1{,}2xyz \cdot 2\frac{1}{6}x^5y^6$;
4) $\left(1\frac{1}{2}x^2y^3\right)^5 \cdot \frac{16}{27}x^8y^2$.

471. Содержание соли в морской воде составляет 5 %. Сколько килограммов пресной воды надо добавить к 30 кг морской воды, чтобы содержание соли в полученном растворе составило 3 %?

472. Для ремонта школы купили краску. В первый день израсходовали на 2 банки краски больше, чем половина всей краски, а во второй — $\frac{5}{8}$ количества банок краски, израсходованной в первый день. После этого осталось 2 банки. Сколько банок краски купили?

473. В коробке лежат 2 красных, 4 зеленых и 10 синих карандашей. Какова вероятность того, что наугад вынутый карандаш будет:

1) красным; 2) зеленым; 3) не зеленым?

Какое наименьшее количество карандашей надо вынуть, чтобы среди них обязательно был синий карандаш?

474. Существует ли двузначное число, в котором цифра десятков на 4 больше цифры единиц, а разность между данным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 27?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

475. Из листа картона вырезали несколько равносторонних треугольников. В вершинах каждого написали цифры 1, 2, 3. Потом эти треугольники сложили в стопку. Может ли получиться так, что сумма чисел вдоль каждого ребра стопки равна 55?

13. Разложение многочленов на множители. Метод группировки

Многочлен $ax + bx + ay + by$ не удастся разложить на множители методом вынесения за скобки общего множителя, так как множителя, общего для всех слагаемых, нет. Однако члены этого многочлена можно объединить в группы так, что слагаемые каждой группы будут иметь общий множитель:

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by) = x(a + b) + y(a + b).$$

Мы получили выражение, в котором оба слагаемых имеют множитель $(a + b)$. Вынесем его за скобки:

$$x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y).$$

Исходный многочлен удалось разложить на множители благодаря тому, что мы выгодным способом объединили в группы его члены. Поэтому описанный прием называют **методом группировки.**

ПРИМЕР 1

Разложите на множители многочлен:

1) $2ac + 2bc + 5am + 5bm$;

2) $x^4 - 2x^3 - 3x + 6$;

3) $xy - 12 + 4x - 3y$.

Решение

1) Сгруппировав члены данного многочлена так, чтобы слагаемые в каждой группе имели общий множитель, получим:

$$2ac + 2bc + 5am + 5bm = (2ac + 2bc) + (5am + 5bm) =$$
$$= 2c(a + b) + 5m(a + b) = (a + b)(2c + 5m).$$

Этот же результат можно получить, если слагаемые сгруппировать другим способом:

$$(2ac + 5am) + (2bc + 5bm) = a(2c + 5m) + b(2c + 5m) =$$
$$= (2c + 5m)(a + b).$$

2) Имеем:

$$x^4 - 2x^3 - 3x + 6 = (x^4 - 2x^3) - (3x - 6) =$$
$$= x^3(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x^3 - 3).$$

3) $$xy - 12 + 4x - 3y = (xy + 4x) + (-12 - 3y) =$$
$$= x(y + 4) - 3(4 + y) = (y + 4)(x - 3).$$

ПРИМЕР 2

Разложите на множители трехчлен $x^2 + 6x + 8$.

Решение. Представив слагаемое $6x$ в виде суммы $2x + 4x$, применим метод группировки:

$$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 4x + 8 = (x^2 + 2x) + (4x + 8) =$$
$$= x(x+2) + 4(x+2) = (x+2)(x+4).$$

476.° Разложите на множители многочлен:
1) $ma + mb + 4a + 4b$;
2) $3x + cy + cx + 3y$;
3) $5a - 5b + ap - bp$;
4) $7m + mn + 7 + n$;
5) $a - 1 + ab - b$;
6) $xy + 8y - 2x - 16y$;
7) $ab + ac - b - c$;
8) $3p - 3k - 4ap + 4ak$.

477.° Представьте в виде произведения многочленов выражение:
1) $ay - 3y - 4a + 12$;
2) $9a + 9 - na - n$;
3) $6x + ay + 6y + ax$;
4) $8x - 8y + xz - yz$;
5) $mn + m - n - 1$;
6) $ab - ac - 2b + 2c$.

478.° Разложите на множители многочлен:
1) $a^3 + a^2 + a + 1$;
2) $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 12$;
3) $c^6 - 10c^4 - 5c^2 + 50$;
4) $y^3 - 18 + 6y^2 - 3y$;
5) $a^2 - ab + ac - bc$;
6) $20a^3bc - 28ac^2 + 15a^2b^2 - 21bc$;
7) $x^2y^2 + xy + axy + a$;
8) $24x^6 - 44x^4y - 18x^2y^3 + 33y^4$.

479.° Разложите на множители многочлен:
1) $8c^3 - 2c^2 + 4c - 1$;
2) $x^2y + x + xy^2 + y$;
3) $9a^2b - 3a^2 + 3b^2 - b$;
4) $8a^2 - 2ab - 4ac + bc$;
5) $2b^3 - 7b^2c - 4b + 14c$;
6) $6x^5 + 4x^2y^2 - 9x^3y - 6y^3$.

480.• Найдите значение выражения, разложив его предварительно на множители:
1) $2a^3 - 3a^2 - 2ab + 3b$, если $a = 0{,}5$, $b = 2{,}25$;
2) $xy + y^2 - 12x - 12y$, если $x = 10{,}8$, $y = -8{,}8$;
3) $27x^3 - 36x^2 + 6x - 8$, если $x = -1\frac{1}{3}$.

481.• Найдите значение выражения:
1) $2a + b + 2a^2 + ab$, если $a = -3$, $b = 4$;
2) $3x^3 - x^2 - 6x + 2$, если $x = \frac{2}{3}$.

482.• Вычислите, не пользуясь микрокалькулятором:
1) $3{,}74^2 + 3{,}74 \cdot 2{,}26 - 3{,}74 \cdot 1{,}24 - 2{,}26 \cdot 1{,}24$;
2) $58{,}7 \cdot 1{,}2 + 36 \cdot 3{,}52 - 34{,}7 \cdot 1{,}2 - 2{,}32 \cdot 36$;

3) $2\frac{4}{9}\cdot 3\frac{2}{7}+1\frac{5}{7}\cdot 2,8+2\frac{5}{9}\cdot 3\frac{2}{7}+1\frac{5}{7}\cdot 2,2$.

483.° Найдите значение выражения:
1) $34,4\cdot 13,7 - 34,4\cdot 8,7 - 15,6\cdot 8,7 + 13,7\cdot 15,6$;
2) $0,6^3 - 2\cdot 0,6^2\cdot 0,8 + 0,6\cdot 0,8^2 - 2\cdot 0,8^3$.

484.° Разложите на множители многочлен:
1) $ax^2 + ay - bx^2 - by + cx^2 + cy$;
2) $a^2b + a + ab^2 + b + 3ab + 3$;
3) $x^3 - x^2 + x^2y + x - xy + y$;
4) $m^2n + mn - 5 - 5m + n - 5m^2$;
5) $x^6 - 2x^5 + 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$;
6) $a^3b + ab^2 - abc^3 - a^2c - bc + c^4$.

485.° Представьте выражение в виде произведения многочленов:
1) $ab + ac + ad + bx + cx + dx$;
2) $7p - 7k - px + kx + k - p$;
3) $x^3y^3 - x^2y^2 + xy - 6 + 6xy - 6x^2y^2$;
4) $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$.

486.°° Разложите на множители выражение (n — натуральное число):
1) $a^{n+1} + a^n + a + 1$;
2) $b^{n+2} - b - 1 + b^{n+1}$;
3) $3y^{n+3} - 3y^2 - 5 + 5y^{n+1}$.

487.°° Разложите на множители трехчлен, представив предварительно один из его членов в виде суммы подобных слагаемых:
1) $x^2 + 8x + 12$;
2) $x^2 - 5x + 4$;
3) $x^2 + 7x - 8$;
4) $x^2 - 4x - 5$.

488.°° Разложите на множители трехчлен:
1) $x^2 + 4x + 3$;
2) $x^2 - 10x + 16$;
3) $x^2 + 3x - 18$;
4) $x^2 - 4x - 32$.

489.* Докажите, что при всех натуральных значениях n значение выражения $n^3 + 3n^2 + 2n$ делится нацело на 6.

490.* Разложите на множители многочлен:
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$.

491.* Докажите, что при любом натуральном значении $n > 1$ значение выражения $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ делится нацело на 10.

492.* Известно, что при некоторых значениях x и y выполняется равенство $x^2 + y^2 = 1$. Найдите при этих же значениях x и y значение выражения $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

493. (*Задача из украинского фольклора.*) Подпасок пригнал на поляну овец. На поляне были колышки. Если к каждому колышку он привяжет по овце, то для одной колышка не хватит. Если же к каждому колышку он привяжет по две овцы, то один колышек останется свободным. Сколько овец пригнал подпасок?

494. Петр и Дмитрий могут прополоть огород, работая вместе, за 2,4 ч. Петр может сделать это самостоятельно за 4 ч. Сколько времени потребуется Дмитрию, чтобы самостоятельно прополоть огород?

495. В одном бидоне было в 4 раза больше молока, чем в другом. Когда из первого бидона перелили 10 л молока во второй, то объем молока во втором бидоне составил $\frac{2}{3}$ объема молока, оставшегося в первом бидоне. Сколько литров молока было в каждом бидоне сначала?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

496. Возведите в квадрат одночлен:

1) $2a$; 3) $3b^3$; 5) $0{,}3x$; 7) $\frac{1}{6}a^2b^3c^4$;

2) a^2; 4) $7x^4$; 6) $0{,}4y^5z^2$; 8) $1\frac{1}{3}m^6n$.

497. Запишите в виде выражения:

1) сумму чисел a и c;
2) разность чисел m и n;
3) произведение суммы чисел x и y и их разности;
4) квадрат разности чисел x и y;
5) разность квадратов чисел x и y.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

498. В турнире, организованном по олимпийской системе (проигравший выбывает), участвовали n теннисистов. Какое количество матчей надо провести, чтобы определить победителя турнира?

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ № 3 «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

1. Представьте в виде многочлена выражение $3y^2(y^3 + 1)$.
А) $3y^6 + 1$; Б) $3y^6 + 3y^2$; В) $3y^5 + 1$; Г) $3y^5 + 3y^2$.
2. Упростите выражение $-9y(y - 3) + 4{,}5y(2y - 4)$.
А) $45y$; Б) $-45y$; В) $-9y$; Г) $9y$.
3. Какому многочлену равно выражение $(x - 3)(x + 7)$?
А) $x^2 + 4x - 21$; В) $x^2 + 10x - 21$;
Б) $x^2 - 4x - 21$; Г) $x^2 - 10x - 21$.
4. Упростите выражение $(3x + 2)(2x - 1) - (5x - 2)(x - 4)$.
А) $x^2 - 23x - 10$; В) $x^2 - 21x + 6$;
Б) $x^2 + 23x - 10$; Г) $x^2 + 21x + 6$.
5. Вынесите общий множитель за скобки: $3mn - 4mk$.
А) $n(3m - 4k)$; В) $n(4m - 3k)$;
Б) $m(3n - 4k)$; Г) $m(4n - 3k)$.
6. Разложите на множители выражение $m^2n + mn^2$.
А) $m(m + n)$; В) $mn(m + n)$;
Б) $n(m + n)$; Г) $m^2n^2(m + n)$.
7. Разложите выражение $mn - mn^2$ на множители.
А) $mn(1 - n)$; В) $m(1 - n)(1 - n)$;
Б) $mn(1 + n)$; Г) $n(1 - m)(1 - m)$.
8. Представьте многочлен $2x^2 - 4x^6$ в виде произведения одночлена и многочлена.
А) $2x^2(1 - 2x^3)$; В) $2x^2(2 - x^3)$;
Б) $2x^2(1 - 2x^4)$; Г) $2x^2(2 - x^4)$.
9. Решите уравнение $x^2 - 2x = 0$.
А) 0; Б) 0; −2; В) 0; 2; Г) 2.
10. Представьте в виде произведения многочлен $ax - ay + 5x - 5y$.
А) $(x - y)(a + 5)$; В) $(x + y)(a - 5)$;
Б) $(x - y)(a - 5)$; Г) $(x + y)(a + 5)$.

11. Решите уравнение $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 1$.

А) 11; Б) 1; В) 7; Г) 5.

12. При некотором значении a значение выражения $a^2 - 7a + 3$ равно 2. Найдите при этом же значении a значение выражения $2a^2 - 14a + 10$.

А) 4; Б) 12; В) 8; Г) 14.

14. Произведение разности и суммы двух выражений

Нередко в математике помимо знания общего закона (теоремы) удобно пользоваться правилами, применимыми в частных (особых) случаях.

Например, если надо умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т. д., то нет необходимости использовать общий алгоритм умножения в столбик, а гораздо выгоднее применить правило переноса запятой.

Особые ситуации встречаются и при умножении многочленов.

Рассмотрим частный случай, когда в произведении двух многочленов один из них представляет собой разность двух выражений, а другой — их сумму.

Имеем:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Получили тождество

$$\boxed{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2}$$

Теперь при умножении разности выражений на их сумму можно сократить работу, сразу записав результат — разность квадратов этих выражений. Поэтому это тождество называют **формулой сокращенного умножения**: ***произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.***

ПРИМЕР 1

Выполните умножение многочленов:

1) $(2a - 5b)(2a + 5b)$;
2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2)$;
3) $(-4mn - p)(4mn - p)$.

Решение

1) $(2a - 5b)(2a + 5b) = (2a)^2 - (5b)^2 = 4a^2 - 25b^2$.

2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2) = (3x^4 + y^2)(3x^4 - y^2) = (3x^4)^2 - (y^2)^2 = 9x^8 - y^4$.

3) $(-4mn - p)(4mn - p) = (-p - 4mn)(-p + 4mn) = (-p)^2 - (4mn)^2 = p^2 - 16m^2n^2$.

ПРИМЕР 2

Упростите выражение:

1) $(b - 3)(b + 3) - (2b + 1)(2b - 1)$;

2) $-2x(x + 5)(5 - x)$;

3) $(a^3 - 2)(a^3 + 2)(a^6 + 4)$.

Решение

1) $(b - 3)(b + 3) - (2b + 1)(2b - 1) = b^2 - 9 - (4b^2 - 1) = b^2 - 9 - 4b^2 + 1 = -3b^2 - 8$.

2) $-2x(x + 5)(5 - x) = -2x(25 - x^2) = -50x + 2x^3$.

3) Применив дважды формулу произведения суммы и разности двух выражений, получим:

$(a^3 - 2)(a^3 + 2)(a^6 + 4) = (a^6 - 4)(a^6 + 4) = a^{12} - 16$.

?

1. Чему равно произведение разности двух выражений и их суммы?
2. Запишите формулу произведения разности и суммы двух выражений.

499.° Какому из данных многочленов тождественно равно произведение $(7a - 2b)(7a + 2b)$:

1) $7a^2 - 2b^2$;
2) $7a^2 + 2b^2$;
3) $49a^2 - 4b^2$;
4) $49a^2 + 4b^2$?

500.° Выполните умножение многочленов:

1) $(m - n)(m + n)$;
2) $(x - 1)(x + 1)$;
3) $(9 - y)(9 + y)$;
4) $(3b - 1)(3b + 1)$;
5) $(10m - 7)(10m + 7)$;
6) $(4a - b)(b + 4a)$;
7) $(5b + 1)(1 - 5b)$;
8) $(3x - 5y)(3x + 5y)$;
9) $(13c - 10d)(13c + 10d)$;
10) $(8m + 11n)(11n - 8m)$.

501.° Представьте в виде многочлена выражение:

1) $(c - 2)(c + 2)$;
2) $(12 - x)(12 + x)$;
3) $(3x + y)(3x - y)$;
4) $(6x - 9)(6x + 9)$;

5) $(x+7)(7-x)$;
6) $(5a-8b)(5a+8b)$;
7) $(8m+2)(2-8m)$;
8) $(13c-14d)(14d+13c)$.

502.° Выполните умножение:

1) $(a^2-3)(a^2+3)$;
2) $(5+b^2)(b^2-5)$;
3) $(3x-2y^2)(3x+2y^2)$;
4) $(10p^3-7k)(10p^3+7k)$;
5) $(4x^2-8y^3)(4x^2+8y^3)$;
6) $(11a^3+5b^2)(5b^2-11a^3)$;
7) $(7-xy)(7+xy)$;
8) $\left(8a^3b-\frac{1}{3}ab^2\right)\left(8a^3b+\frac{1}{3}ab^2\right)$;
9) $(0{,}3m^5+0{,}1n^3)(0{,}3m^5-0{,}1n^3)$;
10) $\left(\frac{7}{9}a^2c-1{,}4b^4\right)\left(1{,}4b^4+\frac{7}{9}a^2c\right)$.

503.° Выполните умножение:

1) $(x^3+4)(x^3-4)$;
2) $(ab-c)(ab+c)$;
3) $(x-y^2)(y^2+x)$;
4) $(3m^2-2c)(3m^2+2c)$;
5) $(6a^3-8b)(6a^3+8b)$;
6) $(5n^4-m^4)(5n^4+m^4)$;
7) $(0{,}2m^8-0{,}8n^6)(0{,}2m^8+0{,}8n^6)$;
8) $\left(\frac{2}{7}p^7+\frac{4}{11}k^9\right)\left(\frac{4}{11}k^9-\frac{2}{7}p^7\right)$.

504.° Упростите выражение:

1) $(2a-b)(2a+b)+b^2$;
2) $10x^2+(y-5x)(y+5x)$;
3) $64m^2-(8m+9)(8m-9)$;
4) $(4x-7y)(4x+7y)+(7x-4y)(7x+4y)$;
5) $(a-2)(a+3)+(6-a)(a+6)$;
6) $3a(a-b)-(3a+2b)(3a-2b)$.

505.° Упростите выражение:

1) $(9a-2)(9a+2)-18a^2$;
2) $25m^2-(5m-7)(5m+7)$;
3) $(b+7)(b-4)+(2b-6)(2b+6)$;
4) $4x(3x-10y)-(4x+y)(4x-y)$.

506.° На какое выражение надо умножить двучлен $0{,}3x^3 - xy^2$, чтобы произведение было равно двучлену $0{,}09x^6 - x^2y^4$?

507.° На какое выражение надо умножить многочлен $7t^4 + 9p^5$, чтобы произведение было равно многочлену $49t^8 - 81p^{10}$?

508.• Какие одночлены надо подставить вместо звездочек, чтобы выполнялось тождество:

1) $(* - 12a)(* + *) = 9b^2 - *$;
2) $(* - 5c)(* + 5c) = 16d^2 - *$;
3) $(0{,}7p + *)(* - 0{,}7p) = \frac{1}{9}m^8 - 0{,}49p^2$;
4) $(3m^2 + *)(* - *) = 9m^4 - n^6$?

509.• Подставьте вместо звездочек такие одночлены, чтобы выполнялось тождество:

1) $(8a^2b - *)(8a^2b + *) = * - 25c^6$;
2) $\left(* - \frac{1}{12}x^4y^5\right)\left(\frac{1}{15}a^2 + *\right) = \frac{1}{225}a^4 - \frac{1}{144}x^8y^{10}$.

510.• Представьте в виде многочлена выражение:

1) $a(a - 2)(a + 2)$;
2) $-3(x + 3)(x - 3)$;
3) $7b^2(b + 4)(4 - b)$;
4) $(c - d)(c + d)(c^2 + d^2)$;
5) $(2a - 1)(2a + 1)(4a^2 + 1)$;
6) $(c^3 - 5)(c^3 + 5)(c^6 + 25)$.

511.• Выполните умножение:

1) $5b(b - 1)(b + 1)$;
2) $(c + 2)(c - 2) \cdot 8c^2$;
3) $(m - 10)(m^2 + 100)(m + 10)$;
4) $(a^2 + 1)(a^2 - 1)(a^4 + 1)$.

512.• Выполните умножение двучленов (n — натуральное число):

1) $(a^n - 4)(a^n + 4)$;
2) $(b^{2n} + c^{3n})(b^{2n} - c^{3n})$;
3) $(x^{4n} + y^{n+2})(y^{n+2} - x^{4n})$;
4) $(a^{n+1} - b^{n-1})(a^{n+1} + b^{n-1})$, $n > 1$.

513.• Упростите выражение:

1) $(8a - 3)(8a + 3) - (7a + 4)(8a - 4)$;
2) $0{,}6m(2m - 1)(2m + 1) + 0{,}3(6 + 5m)(6 - 5m)$;
3) $(7 - 2x)(7 + 2x) - (x - 8)(x + 8) - (4 - 3x)(5 + 3x)$;
4) $-b^2c(4b - c^2)(4b + c^2) + 16b^4c$.

514.• Упростите выражение:

1) $(x + 1)(x - 1) - (x + 5)(x - 5) + (x + 1)(x - 5)$;
2) $81a^8 - (3a^2 - b^3)(9a^4 + b^6)(3a^2 + b^3)$.

515.° Решите уравнение:
1) $8x(3 + 2x) - (4x + 3)(4x - 3) = 9x - 6$;
2) $7x - 4x(x - 5) = (8 - 2x)(8 + 2x) + 27x$;
3) $(6x + 7)(6x - 7) + 12x = 12x(3x + 1) - 49$;
4) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x^4 + 16) = x^8 + 10x$.

516.° Решите уравнение:
1) $(x - 17)(x + 17) = x^2 + 6x - 49$;
2) $(1{,}2x - 4)(1{,}2x + 4) - (1{,}3x - 2)(1{,}3x + 2) = 0{,}5x(8 - 0{,}5x)$.

517.° Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:
1) $(x - 9)(x + 9) - (x + 19)(x - 19)$;
2) $(2a - b)(2a + b) + (b - c)(b + c) + (c - 2a)(c + 2a)$.

518.° Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(7n + 8)(7n - 8) - (5n + 10)(5n - 10)$ делится нацело на 12.

519.° Докажите, что не существует такое натуральное число n, при котором значение выражения $(4n + 3)(9n - 4) - (6n - 5)(6n + 5) - 3(n - 2)$ делится нацело на 8.

520.° Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(9n - 4)(9n + 4) - (8n - 2)(4n + 3) + 5(6n + 9)$ делится нацело на 7.

521.°° Найдите значение выражения:
1) $3^{20} \cdot 6^{20} - (18^{10} - 2)(18^{10} + 2)$;
2) $(5 + 28^{17})(5 - 28^{17}) + 14^{34} \cdot 2^{34}$;
3) $7^{36} \cdot 8^{12} - (14^{18} + 3)(14^{18} - 3)$;
4) $(3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1)(3^{32} + 1) - 3^{64}$;
5) $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) - 2^{32}$.

522.°° Чему равно значение выражения:
1) $81^{15} \cdot 8^{20} - (6^{30} + 1)(6^{30} - 1)$;
2) $5^{24} - (5^3 - 2)(5^3 + 2)(5^6 + 4)(5^{12} + 16)$?

523.* Сравните значения выражений, не вычисляя их:
1) $415 \cdot 425$ и $426 \cdot 414$;
2) $1\,234\,567 \cdot 1\,234\,569$ и $1\,234\,568^2$.

524.* Сравните значения выражений, не вычисляя их:
1) $253 \cdot 259$ и $252 \cdot 260$;
2) $987\,654^2$ и $987\,646 \cdot 987\,662$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

525. От села до станции Вася может доехать на велосипеде за 3 ч, а дойти пешком — за 7 ч. Скорость передвижения пешком на 8 км/ч меньше, чем скорость движения на велосипеде. С какой скоростью ездит Вася на велосипеде? На каком расстоянии находится село от станции?

526. В одном мешке было 60 кг сахара, а в другом — 100 кг. Когда из второго мешка взяли в 4 раза больше сахара, чем из первого, то в первом осталось в 2 раза больше сахара, чем во втором. Сколько килограммов сахара взяли из каждого мешка?

527. Один автомобиль может перевезти собранный с поля урожай за 10 ч, другой — за 12 ч, а третий — за 15 ч. За сколько часов они смогут перевезти урожай, работая вместе?

528. (*Старинная египетская задача.*) У каждого из 7 человек есть по 7 кошек. Каждая кошка съедает по 7 мышей, каждая мышь за одно лето может уничтожить 7 ячменных колосков, а из зерен одного колоска может вырасти 7 горстей ячменного зерна. Масса одной горсти равна приблизительно 80 г. Сколько горстей зерна ежегодно спасают благодаря кошкам? Сколько это составляет тонн зерна? Ответ округлите до сотых.

529. Решите уравнение:

1) $\frac{4x-1}{12} - \frac{3x+1}{8} = x + 1$; 2) $\frac{3x-2}{9} - \frac{2x+1}{6} = \frac{5-x}{3}$.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

530. Представьте данные выражения в виде квадрата одночлена:

1) x^6; 3) $4x^2$; 5) a^8b^{10}; 7) $1{,}21m^{10}n^{20}$;

2) y^4; 4) $\frac{1}{9}x^4$; 6) $0{,}36x^2y^{12}$; 8) $1\frac{9}{16}a^{14}b^{16}$.

531. Можно ли представить в виде разности квадратов двух одночленов выражение:

1) $a^2 - 16b^2$; 3) $100b^4 - 25c^6$; 5) $-a^{12} - 49c^8$;

2) $25c^2 + 9b^2$; 4) $-64 + a^{10}$; 6) $-0{,}01a^4 + 0{,}04b^4$?

В случае утвердительного ответа запишите эту разность квадратов.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

532. Для перевозки груза выделили 4-, 7- и 8-тонные грузовики. Каждый автомобиль должен сделать только одну ходку. Сколько требуется грузовиков каждого вида для перевозки 44 т груза?

15. Разность квадратов двух выражений

Вы уже знаете два способа разложения многочленов на множители: вынесение общего множителя за скобки и метод группировки. Рассмотрим еще один способ.

Формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ запишем так:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$$

Это тождество называют **формулой разности квадратов**.

Разность квадратов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их суммы.

Приведем примеры применения этой формулы для разложения многочленов на множители.

ПРИМЕР 1

Разложите на множители:

1) $a^2 - 4$; 2) $36m^2 - 2\frac{7}{9}n^8$; 3) $-a^2b^6 + 1$.

Решение

1) Имеем:

$$a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a - 2)(a + 2).$$

2) $36m^2 - 2\frac{7}{9}n^8 = 36m^2 - \frac{25}{9}n^8 = (6m)^2 - \left(\frac{5}{3}n^4\right)^2 =$

$= \left(6m - \frac{5}{3}n^4\right)\left(6m + \frac{5}{3}n^4\right).$

3) $-a^2b^6 + 1 = 1 - a^2b^6 = (1 - ab^3)(1 + ab^3).$

ПРИМЕР 2

Разложите на множители, используя формулу разности квадратов:

1) $100 - (a + 5)^2$;   2) $(2a + 3b)^2 - (3a - b)^2$.

Решение

1) $100 - (a + 5)^2 = 10^2 - (a + 5)^2 = (10 - (a + 5))(10 + (a + 5)) = (10 - a - 5)(10 + a + 5) = (5 - a)(15 + a)$.

2) $(2a + 3b)^2 - (3a - b)^2 = ((2a + 3b) - (3a - b))((2a + 3b) + (3a - b)) = (2a + 3b - 3a + b)(2a + 3b + 3a - b) = (4b - a)(5a + 2b)$.

ПРИМЕР 3

Решите уравнение:

1) $x^2 - 36 = 0$;   2) $(2x - 7)^2 - 81 = 0$.

Решение

1) Применив формулу разности квадратов и условие равенства произведения нулю, получим:

$$(x - 6)(x + 6) = 0;$$
$$x - 6 = 0 \text{ или } x + 6 = 0;$$
$$x = 6 \text{ или } x = -6.$$

Ответ: 6; −6.

2) Имеем:

$$(2x - 7 - 9)(2x - 7 + 9) = 0;$$
$$(2x - 16)(2x + 2) = 0;$$
$$2x - 16 = 0 \text{ или } 2x + 2 = 0;$$
$$x = 8 \text{ или } x = -1.$$

Ответ: 8; −1.

ПРИМЕР 4

Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(6n + 7)^2 - (2n - 1)^2$ делится нацело на 8.

Решение. Имеем:

$$(6n + 7)^2 - (2n - 1)^2 = (6n + 7 - 2n + 1)(6n + 7 + 2n - 1) = (4n + 8)(8n + 6) = 4(n + 2) \cdot 2(4n + 3) = 8(n + 2)(4n + 3).$$

Следовательно, независимо от значения n данное выражение можно представить в виде произведения трех множителей, один из которых равен 8, а два других — натуральные числа. Отсюда следует, что значение данного выражения делится нацело на 8 при любом натуральном n.

?

1. Чему равна разность квадратов двух выражений?
2. Запишите формулу разности квадратов двух выражений.

533.° Каким из данных произведений многочленов тождественно равен многочлен $a^2 - 144$:
1) $(a - 12)^2$;
2) $(a - 12)(a + 12)$;
3) $(12 - a)(12 + a)$;
4) $(12 - a)(-12 - a)$?

534.° Какое из данных равенств является тождеством:
1) $-49 + b^2 = (7 - b)(7 + b)$;
2) $-49 + b^2 = (b - 7)(b + 7)$;
3) $-49 + b^2 = (7 - b)^2$;
4) $-49 + b^2 = (b - 49)(b + 49)$?

535.° Можно ли, применяя формулу разности квадратов, разложить на множители выражение:
1) $a^2 - 9$;
2) $b^2 + 1$;
3) $4 - c^2$;
4) $25 + x^2$;
5) $1 - y^2$;
6) $16a^2 - b^2$;
7) $81 + 100p^2$;
8) $81 - 100p^2$;
9) $m^2n^2 - 25$;
10) $-m^2n^2 - 25$?

Если можно, то выполните разложение на множители.

536.° Разложите на множители:
1) $b^2 - d^2$;
2) $x^2 - 1$;
3) $-x^2 + 1$;
4) $36 - c^2$;
5) $4 - 25a^2$;
6) $49a^2 - 100$;
7) $900 - 81k^2$;
8) $16x^2 - 121y^2$;
9) $b^2c^2 - 1$;
10) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$;
11) $-4a^2b^2 + 25$;
12) $144x^2y^2 - 400$;
13) $a^2b^2c^2 - 1$;
14) $100a^2 - 0{,}01b^2$;
15) $a^4 - b^2$;
16) $p^2t^2 - 0{,}36k^2d^2$;
17) $y^{10} - 9$;
18) $4x^{12} - 1\frac{11}{25}y^{16}$.

537.° Разложите на множители:
1) $16 - b^2$;
2) $c^2 - 49$;
3) $0{,}04 - a^2$;
4) $x^2 - \frac{4}{9}$;
5) $4x^2 - 25$;
6) $81c^2 - 64d^2$;
7) $0{,}09x^2 - 0{,}25y^2$;
8) $a^2b^4 - c^6d^8$;
9) $4a^2c^2 - 9x^2y^2$;
10) $x^{24} - y^{22}$;
11) $-1600 + a^{12}$;
12) $a^{18} - \frac{49}{64}$.

538.° Решите уравнение:
1) $x^2 - 49 = 0$;
2) $\frac{1}{4} - z^2 = 0$;
3) $x^2 + 36 = 0$;
4) $x^2 - 0{,}01 = 0$;
5) $9x^2 - 4 = 0$;
6) $0{,}04x^2 - 1 = 0$.

539.° Решите уравнение:
1) $c^2 - 0{,}25 = 0$;
2) $81x^2 - 121 = 0$;
3) $-0{,}09 + 4x^2 = 0$.

540.• Разложите на множители, пользуясь формулой разности квадратов:
1) $(x + 2)^2 - 49$;
2) $(x - 10)^2 - 25y^2$;
3) $25 - (y - 3)^2$;
4) $(a - 4)^2 - (a + 2)^2$;
5) $(m - 10)^2 - (n - 6)^2$;
6) $(8y + 4)^2 - (4y - 3)^2$;
7) $(5a + 3b)^2 - (2a - 4b)^2$;
8) $4(a - b)^2 - (a + b)^2$;
9) $(x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - x + 2)^2$;
10) $(-3x^3 + y)^2 - 16x^6$.

541.• Представьте в виде произведения выражение:
1) $(x - 2)^2 - 4$;
2) $(b + 7)^2 - 100c^2$;
3) $121 - (b + 7)^2$;
4) $a^4 - (7b - a^2)^2$;
5) $(4x - 9)^2 - (2x + 19)^2$;
6) $(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2$.

542.• Найдите значение выражения:
1) $(9x - 4)^2 - (7x + 5)^2$, если $x = 1{,}5$;
2) $(5x + 3y)^2 - (3x + 5y)^2$, если $x = 2{,}1$; $y = 1{,}9$.

543.• Найдите значение выражения $(2{,}5a - 1{,}5b)^2 - (1{,}5a - 2{,}5b)^2$, если $a = -1{,}5$; $b = -3{,}5$.

544.• Чему равна площадь заштрихованной фигуры, изображенной на рисунке 4? Вычислите значение полученного выражения при $a = 7{,}4$ см, $b = 2{,}6$ см.

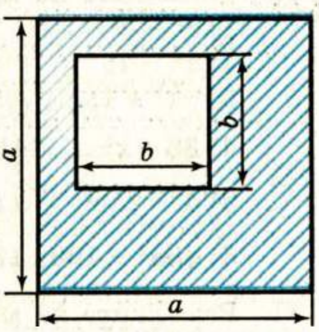


Рис. 4

545.• Две окружности, радиусы которых R и r ($R > r$), имеют общий центр. Выразите через π, R и r площадь фигуры, ограниченной этими окружностями. Вычислите значение полученного выражения при $R = 5{,}1$ см, $r = 4{,}9$ см.

546.• Представьте в виде произведения трех множителей выражение:
1) $m^4 - 625$;
2) $x^{16} - 81$;
3) $2^{4n} - 16$, где n — натуральное число.

547.° Разложите на множители:

1) $a^8 - b^8$; 2) $a^{16} - 256$.

548.° Решите уравнение:

1) $(3x - 5)^2 - 49 = 0$;
2) $(4x + 7)^2 - 9x^2 = 0$;
3) $(a - 1)^2 - (2a + 9)^2 = 0$;
4) $25(3b + 1)^2 - 16(2b - 1)^2 = 0$.

549.° Решите уравнение:

1) $16 - (6 - 11x)^2 = 0$; 2) $(7m - 13)^2 - (9m + 19)^2 = 0$.

550.° Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

1) $(7n + 4)^2 - 9$ делится нацело на 7;
2) $(8n + 1)^2 - (3n - 1)^2$ делится нацело на 11;
3) $(3n + 7)^2 - (3n - 5)^2$ делится нацело на 24;
4) $(7n + 6)^2 - (2n - 9)^2$ делится нацело на 15.

551.° Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

1) $(5n + 4)^2 - (5n - 4)^2$ делится нацело на 80;
2) $(9n + 10)^2 - (9n + 8)^2$ делится нацело на 36;
3) $(10n + 2)^2 - (4n - 10)^2$ делится нацело на 12.

552.•• Докажите, что:

1) разность квадратов двух последовательных натуральных чисел равна сумме этих чисел;
2) разность квадратов двух последовательных четных чисел делится нацело на 4.

553.•• Докажите, что:

1) разность квадратов двух последовательных четных чисел равна удвоенной сумме этих чисел;
2) разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится нацело на 8.

554.•• Докажите тождество:

$(m^3 - n^3)^2(m^3 + n^3)^2 - (m^6 + n^6)^2 = -4m^6n^6$.

555.•• Разность квадратов двух натуральных двузначных чисел, записанных одними и теми же цифрами, равна 693. Найдите эти числа.

556.•• Остаток от деления на 7 одного натурального числа равен 4, а другого — 3. Докажите, что разность квадратов этих чисел кратна 7.

557.•• При каком значении b уравнение $(b^2 - 4)\,x = b - 2$:
1) имеет бесконечно много корней;
2) не имеет корней;
3) имеет один корень?

558.•• При каком значении a уравнение $(a^2 - 25)\,x = a + 5$:
1) имеет бесконечно много корней;
2) не имеет корней;
3) имеет один корень?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

559. Лодка двигалась 2,4 ч по течению реки и 3,6 ч против течения. Расстояние, пройденное лодкой по течению, на 5,4 км больше расстояния, пройденного против течения. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения составляет 2,5 км/ч.

560. За 3 дня продали 130 кг апельсинов. Во второй день продали $\frac{4}{9}$ того, что продали в первый день, а в третий — столько, сколько в первые два дня вместе. Сколько килограммов апельсинов продали в первый день?

561. В последовательности ..., a, b, c, d, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... каждое последующее число равно сумме двух предыдущих. Чему равно число a?

562. Решите уравнение:
1) $\frac{2x-1}{8} - \frac{x+2}{4} = x$; 2) $3\,(2x + 3) - 2\,(3x + 5) = -1$.

563. Для каждой пары выражений найдите все значения a, при которых значение второго выражения в 3 раза больше значения первого:
1) a и $3a$; 2) a^2 и $3a^2$; 3) $a^2 + 1$ и $3a^2 + 3$.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

564. Запишите в виде выражения:
1) квадрат суммы чисел a и b;
2) сумму квадратов чисел a и b;
3) удвоенное произведение чисел a и b;
4) квадрат разности одночленов $3m$ и $4n$.

565. Найдите удвоенное произведение одночленов:

1) a^2 и $3b$; 2) $5x$ и $6y$; 3) $0{,}5m$ и $4n$; 4) $\frac{1}{3}m^2$ и $6m$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

566. Меню состоит из 101 блюда. Докажите, что количество способов выбора обеда из нечетного числа блюд равно количеству способов выбора обеда из четного числа блюд при условии, что заказать все блюда из меню нельзя.

16. Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений

Преобразуем в многочлен выражение $(a + b)^2$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Итак,

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Это тождество называют **формулой квадрата суммы** и формулируют:

квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

Преобразуем в многочлен выражение $(a - b)^2$:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Мы получили **формулу квадрата разности:**

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

Заметим, что формулу квадрата разности можно получить с помощью формулы квадрата суммы:

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

С помощью полученных формул можно проще возводить в квадрат сумму либо разность любых двух выражений, не используя правило умножения двух многочленов. Поэтому их относят к формулам сокращенного умножения.

ПРИМЕР 1

Представьте в виде многочлена выражение:

1) $(3b - 4c)^2$; 2) $(a^3 + 5a)^2$.

Решение

1) По формуле квадрата разности получаем:
$(3b - 4c)^2 = (3b)^2 - 2 \cdot 3b \cdot 4c + (4c)^2 = 9b^2 - 24bc + 16c^2$.

2) По формуле квадрата суммы получаем:
$(a^3 + 5a)^2 = (a^3)^2 + 2 \cdot a^3 \cdot 5a + (5a)^2 = a^6 + 10a^4 + 25a^2$.

ПРИМЕР 2

Преобразуйте в многочлен выражение:

1) $(-a - b)^2$; 2) $(-x^2 - 6)^2$.

Решение

1) Имеем: $(-a - b)^2 = (-a)^2 - 2(-a) \cdot b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Этот пример можно решить иначе.
Так как $(-a - b)^2 = (-1 \cdot (a + b))^2 = (-1)^2 \cdot (a + b)^2 = (a + b)^2$, то есть выражения $(-a - b)^2$ і $(a + b)^2$ тождественно равны, то:
$(-a - b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2) $(-x^2 - 6)^2 = (x^2 + 6)^2 = x^4 + 12x^2 + 36$.

ПРИМЕР 3

Решите уравнение $(x - 10)^2 = (x + 7)^2 - 17$.

Решение. Имеем:

$$x^2 - 20x + 100 = x^2 + 14x + 49 - 17;$$
$$x^2 - 20x - x^2 - 14x = 49 - 17 - 100;$$
$$-34x = -68;$$
$$x = 2.$$

Ответ: 2.

ПРИМЕР 4

Докажите, что остаток при делении квадрата натурального числа на число 3 равен 0 или 1.

Доказательство. Пусть n — некоторое натуральное число. Рассмотрим три случая.

1) Число n кратно 3. Тогда $n = 3k$, где k — натуральное число.

Имеем: $n^2 = (3k)^2 = 9k^2$. Значение выражения $9k^2$ кратно 3, то есть остаток при делении n^2 на 3 равен 0.

2) Остаток при делении на 3 числа n равен 1. Тогда n можно представить в виде $n = 3k + 1$, где k — натуральное число.
Имеем:
$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3p + 1$, где $p = 3k^2 + 2k$ — неполное частное от деления n^2 на 3, а остаток при этом равен 1.

3) Остаток при делении на 3 числа n равен 2. Тогда $n = 3k + 2$, где k — натуральное число; $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = (9k^2 + 12k + 3) + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Очевидно, что и в этом случае остаток при делении n^2 на 3 равен 1.

?

1. Какое тождество называют формулой квадрата суммы двух выражений?
2. Сформулируйте правило возведения суммы двух выражений в квадрат.
3. Какое тождество называют формулой квадрата разности двух выражений?
4. Сформулируйте правило возведения разности двух выражений в квадрат.

567.° Какому из данных многочленов тождественно равно выражение $(5a + 3)^2$:
1) $25a^2 + 15a + 9$;
2) $25a^2 + 30a + 9$;
3) $25a^2 + 9$;
4) $5a^2 + 3$?

568.° Какое из данных равенств является тождеством:
1) $(12a - b)^2 = 144a^2 - b^2$;
2) $(12a - b)^2 = 144a^2 + 24ab + b^2$;
3) $(12a - b)^2 = 144a^2 - 24ab + b^2$;
4) $(12a - b)^2 = 12a^2 - 24ab + b^2$?

569.° Представьте в виде многочлена выражение:
1) $(a + x)^2$;
2) $(x + 2)^2$;
3) $(y - 1)^2$;
4) $(5 - p)^2$;
5) $(4 + k)^2$;
6) $(3a - 2)^2$;
7) $(7b + 6)^2$;
8) $(8x + 4y)^2$;
9) $(0{,}4m - 0{,}5n)^2$;
10) $\left(3a + \frac{1}{3}b\right)^2$;
11) $(y - 13)^2$;
12) $(13 - y)^2$;

13) $(b^2 - 11)^2$; 15) $(x^2 + y^3)^2$; 17) $(a^2 + a)^2$;
14) $(a^2 + 4b)^2$; 16) $(a^3 - 4b)^2$; 18) $(3b^2 - 2b^5)^2$.

570.° Выполните возведение в квадрат:
1) $(a + 8)^2$; 6) $(4x - 3)^2$; 11) $(c^2 - 6)^2$;
2) $(b - 2)^2$; 7) $(5m - 4n)^2$; 12) $(15 + k^2)^2$;
3) $(7 + c)^2$; 8) $(10c + 7d)^2$; 13) $(m^2 - 3n)^2$;
4) $(6 - d)^2$; 9) $\left(4x - \frac{1}{8}y\right)^2$; 14) $(m^4 - n^3)^2$;
5) $(2m + 1)^2$; 10) $(0,3a + 0,9b)^2$; 15) $(5a^4 - 2a^7)^2$.

571.° Упростите выражение:
1) $a^2 + (3a - b)^2$; 6) $3m(m - 4) - (m + 2)^2$;
2) $(4x + 5)^2 - 40x$; 7) $(y - 9)^2 + (4 - y)(y + 6)$;
3) $50a^2 - (7a - 1)^2$; 8) $(x - 4)(x + 4) - (x - 1)^2$;
4) $c^2 + 36 - (c - 6)^2$; 9) $(2a - 3b)^2 + (3a + 2b)^2$;
5) $(x - 2)^2 + x(x + 10)$; 10) $(x - 5)^2 - (x - 7)(x + 7)$.

572.° Упростите выражение:
1) $(x - 12)^2 + 24x$; 4) $(y + 7)^2 + (y + 2)(y - 7)$;
2) $(x + 8)^2 - x(x + 5)$; 5) $(a + 1)(a - 1) - (a + 4)^2$;
3) $2x(x + 2) - (x - 2)^2$; 6) $(x - 10)(9 - x) + (x + 10)^2$.

573.° Решите уравнение:
1) $(x - 8)^2 - x(x + 6) = -2$;
2) $(x + 7)^2 = (x - 3)(x + 3)$;
3) $(2x + 1)^2 - (2x - 1)(2x + 3) = 0$;
4) $x(x - 2) - (x + 5)^2 = 35$.

574.° Решите уравнение:
1) $(x + 9)^2 - x(x + 8) = 1$;
2) $(x - 11)^2 = (x - 7)(x - 9)$;
3) $(x - 4)(x + 4) - (x + 6)^2 = -16$;
4) $(1 - 3x)^2 - x(9x - 2) = 5$.

575.• Замените звездочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:
1) $(* + b)^2 = * + 4ab + b^2$;
2) $(4x - *)^2 = 16x^2 - * + 100y^2$;
3) $(* - 5c)^2 = * - 20b^2c + 25c^2$;
4) $(7a^2 + *)^2 = * + * + 9b^6$.

576.• Замените звездочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:

1) $(* + 6b)^2 = * + 24ab + *$;
2) $(* - *)^2 = 9m^4 - 42m^2n^8 + *$.

577.° Докажите тождество $(a - b)^2 = (b - a)^2$.

578.° Преобразуйте в многочлен выражение:
1) $(-x + 1)^2$;
2) $(-m - 9)^2$;
3) $(-5a + 3b)^2$;
4) $(-4x - 8y)^2$;
5) $(-0{,}7c - 10d)^2$;
6) $\left(-4a^2 + \frac{1}{8}ab\right)^2$.

579.° Выполните возведение в квадрат:
1) $(-3m + 7n)^2$;
2) $(-0{,}4x - 1{,}5y)^2$;
3) $(-x^2 - y)^2$;
4) $(-a^2b^2 + c^{10})^2$.

580.° Выполните возведение в квадрат:
1) $(10a^2 - 7ab^2)^2$;
2) $(0{,}8b^3 + 0{,}2b^2c^4)^2$;
3) $(30m^3n + 0{,}04n^2)^2$;
4) $(0{,}5x^4y^5 - 20y^6)^2$;
5) $\left(1\frac{1}{3}a^2b + 2\frac{1}{4}ab^2\right)^2$;
6) $\left(2\frac{1}{3}x^3y^2 - \frac{9}{14}y^8x\right)^2$;
7) $\left(15m^9 + \frac{5}{6}m^3\right)^2$;
8) $\left(3\frac{1}{8}x^8y^{10} + \frac{16}{25}x^2y^6\right)^2$.

581.° Преобразуйте в многочлен выражение:
1) $6(1 - 2c)^2$;
2) $-12\left(x + \frac{1}{3}y\right)^2$;
3) $a(a - 6b)^2$;
4) $5b(b^2 + 7b)^2$;
5) $(a + 3)(a - 4)^2$;
6) $(2x + 4)^2(x - 8)$;
7) $(a - 5)^2(a + 5)^2$;
8) $(3x + 4y)^2(3x - 4y)^2$.

582.° Представьте в виде многочлена выражение:
1) $(0{,}02p^3k + 20p^2k^4)^2$;
2) $\left(1\frac{1}{6}mn - \frac{4}{21}m^2n^5\right)^2$;
3) $-15\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{5}b\right)^2$;
4) $7x(x^3 - 2x)^2$;
5) $(5y - 2)^2(2y + 1)$;
6) $(10p - k)^2(10p + k)^2$.

583.° Упростите выражение и найдите его значение:
1) $(a + 3)^2 - (a - 9)(a + 9)$, если $a = -2{,}5$;
2) $(5x - 8)^2 - (4x - 3)^2 + 26x$, если $x = -\frac{1}{3}$;
3) $(3y^2 + 4)^2 + (3y^2 - 4)^2 - 2(1 - 3y^2)(1 + 3y^2)$, если $y = \frac{1}{2}$.

584.° Упростите выражение и найдите его значение:
1) $2m(m-6)^2 - m^2(2m-15)$, если $m = -4$;
2) $(2x-5)^2 - 4(x+1)(x-7)$, если $x = -3{,}5$.

585.° При каком значении переменной значение квадрата двучлена $x + 12$ на 225 больше значения квадрата двучлена $x - 13$?

586.° Решите уравнение:
1) $(x-12)(x+12) = 2(x-6)^2 - x^2$;
2) $(3x-1)^2 + (4x+2)^2 = (5x-1)(5x+1)$;
3) $5(x+2)^2 + (2x-1)^2 - 9(x+3)(x-3) = 22$.

587.° Решите уравнение:
1) $(3x+2)^2 + (4x-1)(4x+1) = (5x-1)^2$;
2) $2(m+1)^2 + 3(m-1)^2 - 5(m+1)(m-1) = -4$.

588.° Найдите сторону квадрата, если при увеличении ее на 5 см получится квадрат, площадь которого на 95 см^2 больше площади данного квадрата.

589.° Если сторону квадрата уменьшить на 8 см, то получится квадрат, площадь которого на 352 см^2 меньше площади данного. Найдите сторону данного квадрата.

590.° Найдите три последовательных натуральных числа, если удвоенный квадрат большего из них на 79 больше суммы квадратов двух других чисел.

591.° Найдите четыре последовательных натуральных числа, если сумма квадратов второго и четвертого из них на 82 больше, чем сумма квадратов первого и третьего.

592.° При каких значениях a и b верно равенство:
1) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$; 2) $(a-b)^2 = (a+b)^2$?

593.° Докажите тождество:
1) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$;
2) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$;
3) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$;
4) $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$.

594.° Докажите тождество:
1) $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$;
2) $(a-b)^2 + (ab+1)^2 = (a^2+1)(b^2+1)$.

595.° Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной x:

1) $(x - 3)^2 + (x + 3)^2 - 2(x - 6)(x + 6)$;

2) $(4x^3 + 5)^2 + (2x^3 - 1)^2 - 4(5x^3 + 4)(x^3 + 1)$.

596.° Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной x:

1) $(6x - 8)^2 + (8x + 6)^2 - (10x - 1)(10x + 1)$;

2) $2(4x - y)(8x + 5y) - (8x - 5y)^2 - 4y(26x + 1)$.

597.° Каким числом, четным или нечетным, является квадрат нечетного натурального числа?

598.° Выведите формулу куба суммы:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Пользуясь этой формулой, преобразуйте в многочлен выражение: 1) $(x + 3)^3$; 2) $(2x + y)^3$.

599.° Выведите формулу куба разности:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Пользуясь этой формулой, преобразуйте в многочлен выражение: 1) $(1 - x)^3$; 2) $(x - 5y)^3$.

600.° Выведите формулу квадрата трехчлена:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$.

Пользуясь этой формулой, преобразуйте в многочлен выражение: 1) $(a + b - c)^2$; 2) $(a - b + 4)^2$.

601.° Древнегреческий ученый Евклид (III в. до н. э.) доказывал формулы квадрата суммы и квадрата разности геометрически. Пользуясь рисунками 5 и 6, восстановите его доказательство.

602.°° Чему равен остаток от деления квадрата нечетного натурального числа на 8?

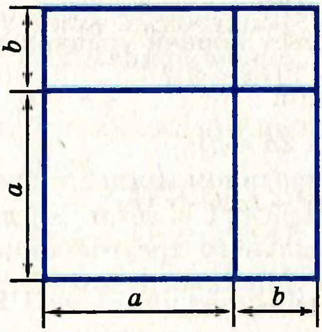


Рис. 5

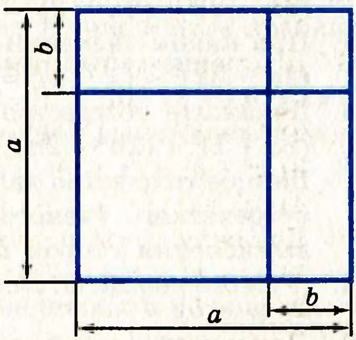


Рис. 6

603.•• Выясните, какой остаток может давать квадрат натурального числа при делении на 4.

604.•• Докажите, что разность суммы квадратов двух последовательных целых чисел и их удвоенного произведения не зависит от выбора чисел.

605.•• Докажите, что если остаток при делении натурального числа на 16 равен 4, то квадрат этого числа делится нацело на 16.

606.•• Докажите, что если остаток при делении натурального числа на 25 равен 5, то квадрат этого числа кратен 25.

607.•• Остаток при делении некоторого натурального числа на 9 равен 5. Чему равен остаток при делении на 9 квадрата этого числа?

608.•• Остаток при делении некоторого натурального числа на 11 равен 6. Чему равен остаток при делении на 11 квадрата этого числа?

609.•• Используя формулы сокращенного умножения, представьте в виде многочлена выражение:

1) $(a + b + c)(a + b - c)$;
2) $(a + b + c)(a - b - c)$;
3) $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$.

610.•• Используя формулы сокращенного умножения, представьте в виде многочлена выражение:

1) $(a - b - c)(a + b - c)$;
2) $(a - b + c + d)(a - b - c - d)$.

611.•• При каком значении a не имеет корней уравнение $(6x - a)^2 + (8x - 3)^2 = (10x - 3)^2$?

612.•• При каком значении a не имеет корней уравнение $(2a - 3x)^2 + (x - 1)^2 = 10(x - 2)(x + 2)$?

613.* Докажите тождество:

$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$.

Данное тождество является правилом великого древнегреческого ученого Пифагора (VI в. до н. э.) для вычисления сторон прямоугольного треугольника.

614.* (*Тождество Ж. Л. Лагранжа*[1].) Докажите тождество:

---

[1] Лагранж Жозеф Луи (1736–1813) — французский математик и механик.

$$(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + k^2) - (am + bn + ck)^2 =$$
$$= (an - bm)^2 + (ak - cm)^2 + (bk - cn)^2.$$

615.* Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не может являться квадратом натурального числа.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

616. В корнеплодах сахарной свеклы, выращиваемой в Украине, содержится до 25 % сахара, в то время как в стеблях сахарного тростника — только 18 %. Сколько тонн сахарного тростника надо переработать, чтобы получить столько же сахара, сколько получают из 3600 т сахарной свеклы?

617. В магазин привезли 740 кг апельсинов и бананов в 80 ящиках. В одном ящике было 10 кг апельсинов или 8 кг бананов. Сколько килограммов апельсинов привезли в магазин?

618. В первой коробке было 45 шариков, из них 15 — белых, во второй — 75 шариков, из них 25 — белых, в третьей — 24 белых и 48 красных шариков, в четвертой — поровну белых, красных и зеленых шариков. Для какой коробки больше вероятность наугад вынуть из нее белый шарик?

619. Какое наименьшее значение и при каком значении переменной может принимать выражение:
1) x^2; 2) $x^2 - 16$; 3) $(x + 4)^2 + 20$?

620. Какое наибольшее значение и при каком значении переменной может принимать выражение:
1) $-x^2$; 2) $-x^2 + 4$; 3) $12 - (x - 1)^2$?

621. При каком значении переменной выполняется равенство:
1) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = -10$;
2) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0$;
3) $(x^2 - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0$?

622. При каких значениях переменных x и y выполняется равенство:
1) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = -1$; 2) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 0$?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

623. Известно, что натуральные числа m и n таковы, что значение выражения $10m + n$ делится нацело на 11. Докажите, что значение выражения $(10m + n)(10n + m)$ делится нацело на 121.

17. Преобразование многочлена в квадрат суммы или разности двух выражений

Перепишем формулы квадрата суммы и квадрата разности, поменяв местами их левые и правые части:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

В таком виде эти формулы позволяют «свернуть» трехчлен в квадрат двучлена.

Трехчлен, который можно представить в виде квадрата двучлена, называют **полным квадратом**.

ПРИМЕР 1

Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

1) $x^2 + 10x + 25$; 2) $9a^6 - 42a^3b^2 + 49b^4$.

Решение

1) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x + 5)^2$.

2) $9a^6 - 42a^3b^2 + 49b^4 = (3a^3)^2 - 2 \cdot 3a^3 \cdot 7b^2 + (7b^2)^2 = (3a^3 - 7b^2)^2$.

ПРИМЕР 2

Найдите, пользуясь преобразованием выражения в квадрат двучлена, значение суммы $5{,}2^2 + 10{,}4 \cdot 4{,}8 + 4{,}8^2$.

Решение. Имеем:

$$5{,}2^2 + 10{,}4 \cdot 4{,}8 + 4{,}8^2 = 5{,}2^2 + 2 \cdot 5{,}2 \cdot 4{,}8 + 4{,}8^2 = (5{,}2 + 4{,}8)^2 = 10^2 = 100.$$

ПРИМЕР 3

Решите уравнение $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Решение. Представим левую часть уравнения в виде квадрата разности:

$$(2x - 3)^2 = 0.$$

Так как значение квадрата равно нулю тогда и только тогда, когда его основание равно нулю, то получаем:

$$2x - 3 = 0;$$
$$x = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

ПРИМЕР 4

Докажите, что значение выражения $(2x + 1)^2 - 2(2x + 1)(2x - 5) + (2x - 5)^2$ не зависит от значения переменной.

Решение. Имеем:

$$(2x + 1)^2 - 2(2x + 1)(2x - 5) + (2x - 5)^2 =$$
$$= ((2x + 1) - (2x - 5))^2 = (2x + 1 - 2x + 5)^2 = 6^2 = 36.$$

ПРИМЕР 5

Докажите, что выражение $x^2 - 4x + 5$ принимает положительные значения при любых значениях x. Какое наименьшее значение принимает выражение и при каком значении x?

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1.$$

Представление выражения $x^2 - 4x + 5$ в виде $(x - 2)^2 + 1$ называют **выделением полного квадрата** из трехчлена.

Так как $(x - 2)^2 \geqslant 0$ при любых значениях x, то выражение $(x - 2)^2 + 1$ принимает только положительные значения. Также понятно, что $(x - 2)^2 + 1 \geqslant 1$. Отсюда наименьшее значение, равное 1, данное выражение принимает при $x = 2$.

ПРИМЕР 6

При каких значениях x и y значение многочлена $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40$ равно нулю?

Решение. Имеем:

$$x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40 =$$
$$= x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = (x - 6)^2 + (y + 2)^2.$$

Мы представили данный многочлен в виде суммы двух слагаемых, которые могут принимать только неотрицательные значения. Их сумма, а следовательно, и данный многочлен будут принимать нулевое значение тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых будет равно нулю, то есть когда $x = 6$ и $y = -2$.

Ответ: $x = 6$, $y = -2$.

624.° Какому из данных выражений тождественно равен многочлен $a^2 - 18a + 81$:

1) $(a - 3)^2$;
2) $a - 9$;
3) $(a - 9)(a + 9)$;
4) $(a - 9)^2$?

625.° Какое из данных равенств является тождеством:

1) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 8b)^2$;
2) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 4b)^2$;
3) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (ab + 4)^2$;
4) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 2b)^2$?

626.° Представьте многочлен в виде квадрата суммы или квадрата разности двух выражений:

1) $a^2 + 2a + 1$;
2) $x^2 - 12x + 36$;
3) $y^2 - 18y + 81$;
4) $100 - 20c + c^2$;
5) $a^2 - 6ab + 9b^2$;
6) $9a^2 - 30ab + 25b^2$;
7) $b^4 - 2b^2c + c^2$;
8) $m^8 + m^4n^2 + \frac{1}{4}n^4$;
9) $36a^2b^2 - 12ab + 1$;
10) $x^4 + 2x^2 + 1$;
11) $\frac{1}{16}x^4 - 2x^2y^3 + 16y^6$;
12) $0{,}01a^8 + 25b^{14} - a^4b^7$.

627.° Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

1) $b^2 - 2b + 1$;
2) $4 + 4n + n^2$;
3) $x^2 - 14x + 49$;
4) $4a^2 + 4ab + b^2$;
5) $9x^2 - 24xy + 16y^2$;
6) $a^6 - 2a^3 + 1$;
7) $36a^6 - 84a^3b^5 + 49b^{10}$;
8) $81x^4y^8 - 36x^2y^4z^6 + 4z^{12}$.

628.° Найдите значение выражения, представив его предварительно в виде квадрата двучлена:

1) $y^2 - 8y + 16$, если $y = -4$;
2) $c^2 + 24c + 144$, если $c = -10$;
3) $25x^2 - 20xy + 4y^2$, если $x = 3$, $y = 5{,}5$;
4) $49a^2 + 84ab + 36b^2$, если $a = 1\frac{1}{7}$, $b = 2\frac{5}{6}$.

629.° Найдите значение выражения:

1) $b^2 - 30b + 225$, если $b = 6$;

2) $100a^2 + 60ab + 9b^2$, если $a = 0,8$, $b = -3$.

630.° Какой одночлен следует подставить вместо m, чтобы можно было представить в виде квадрата двучлена выражение:

1) $m - 56a + 49$;
2) $9c^2 - 12c + m$;
3) $m - 42xy + 49y^2$;
4) $0,01b^2 + m + 100c^2$;
5) $a^2b^2 - 4a^3b^5 + m$;
6) $1,44x^2y^4 - my + 0,25y^6$;
7) $64 - 80y^{20} + my^{40}$;
8) $\frac{9}{25}a^6b^2 - a^5b^5 + m$?

631.° Замените звездочки такими одночленами, чтобы выполнялось тождество:

1) $n^2 + 60n + * = (* + 30)^2$;
2) $25c^2 - * + * = (* - 8k)^2$;
3) $225a^2 - * + 64b^4 = (* - *)^2$;
4) $0,04x^2 + * + * = (* + 0,3y^3)^2$.

632.° Представьте, если это возможно, в виде квадрата двучлена или в виде выражения, противоположного квадрату двучлена, трехчлен:

1) $-8x + 16 + x^2$;
2) $a^8 + 4a^4b^3 + 4b^6$;
3) $2x - 25 - 0,04x^2$;
4) $25m^2 - 15mn + 9n^2$;
5) $81c^2 - 54b^2c + 9b^2$;
6) $b^{10} - a^2b^5 + 0,25a^4$;
7) $\frac{1}{16}x^2 - xy + 4y^2$;
8) $-\frac{9}{64}n^6 - 3mn^5 - 16m^2n^4$.

633.° Представьте, если это возможно, в виде квадрата двучлена или в виде выражения, противоположного квадрату двучлена, трехчлен:

1) $-a^4 - 0,8a^6 - 0,16a^8$;
2) $121m^2 - 44mn + 16n^2$;
3) $-a^6 + 4a^3b - 4b^2$;
4) $\frac{25}{49}a^8 - 10a^4b^6 + 49b^{12}$;
5) $80xy + 16x^2 + 25y^2$;
6) $b^{10} - \frac{1}{3}b^5c + \frac{1}{9}c^2$.

634.° Представьте в виде квадрата двучлена выражение:

1) $(4a + 3b)^2 - 8b(4a + b)$;
2) $(10x + 3y)^2 - (8x + 4y)(8x - 4y)$.

635.° Преобразуйте в квадрат двучлена выражение:

1) $(3m - 2n)^2 + 5m(4n - m)$;
2) $(9x + 2y)^2 - (8x + 3y)(4x - 4y)$.

636.° Найдите, пользуясь преобразованием выражений в квадрат суммы или разности двух чисел, значения данных выражений:

1) $1{,}02^2 - 1{,}02 \cdot 1{,}96 + 0{,}98^2$; 2) $24^2 + 96 \cdot 38 + 76^2$.

637.° Вычислите:

1) $203^2 - 406 \cdot 103 + 103^2$; 2) $1{,}58^2 + 1{,}58 \cdot 2{,}84 + 1{,}42^2$.

638.° Какое число надо прибавить к многочлену $81a^2b^2 - 36ab + 9$, чтобы полученное выражение было тождественно равно квадрату двучлена?

639.° Какое число надо прибавить к многочлену $100m^4 + 120m^2 + 40$, чтобы полученное выражение было тождественно равно квадрату двучлена?

640.° Решите уравнение:

1) $x^2 - 16x + 64 = 0$; 2) $81x^2 + 126x + 49 = 0$.

641.° Решите уравнение:

1) $x^2 + 12x + 36 = 0$; 2) $25x^2 - 30x + 9 = 0$.

642.° Является ли тождеством равенство:

$(a - 2)(a - 3)(a + 3)(a + 2) + a^2 = (a^2 - 6)^2$?

643.° Докажите тождество:

1) $(a - 1)^2 + 2(a - 1) + 1 = a^2$;

2) $(a + b)^2 - 2(a + b)(a - b) + (a - b)^2 = 4b^2$;

3) $(a - 8)^2 + 2(a - 8)(3 - a) + (a - 3)^2 = 25$;

4) $(x^n - 2)^2 - 2(x^n - 2)(x^n + 2) + (x^n + 2)^2 = 16$, где n — произвольное натуральное число.

644.° Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

1) $(3x + 8)^2 - 2(3x + 8)(3x - 8) + (3x - 8)^2$;

2) $(4x - 7)^2 + (4x - 11)^2 + 2(4x - 7)(11 - 4x)$.

645.°° Докажите, что уравнение не имеет корней:

1) $x^2 - 14x + 52 = 0$; 2) $4x^2 - 2x + 1 = 0$.

646.°° Докажите, что данное выражение принимает положительные значения при всех значениях x; укажите, какое наименьшее значение принимает это выражение и при каком значении x:

1) $x^2 - 6x + 10$; 2) $16x^2 + 24x + 25$; 3) $x^2 + x + 1$.

647.°° Может ли принимать отрицательные значения выражение:

1) $x^2 - 24x + 144$; 2) $4x^2 + 20x + 28$?

648.$^{\cdot\cdot}$ Докажите, что данное выражение принимает отрицательные значения при всех значениях x; укажите, какое наибольшее значение принимает это выражение и при каком значении x:
1) $-x^2 + 4x - 12$;
2) $22x - 121x^2 - 2$;
3) $-56 - 36x^2 - 84x$.

649.$^{\cdot\cdot}$ Может ли принимать положительные значения выражение:
1) $-x^2 + 20x - 100$;
2) $-x^2 - 10 - 4x$?

650.$^{\cdot\cdot}$ Какое наибольшее значение и при каком значении переменной принимает выражение:
1) $-x^2 - 16x + 36$;
2) $2 - 16x^2 + 24x$?

651.$^{\cdot\cdot}$ Какое наименьшее значение и при каком значении переменной принимает выражение:
1) $x^2 - 28x + 200$;
2) $9x^2 + 30x - 25$?

652.$^{\cdot\cdot}$ Представьте многочлен $\frac{81}{16}x^4 + y^8 - \frac{9}{2}x^2y^4$ в виде произведения квадратов двух двучленов.

653.$^{\cdot\cdot}$ Докажите, что выражение $(a - 3b)(a - 3b - 4) + 4$ принимает неотрицательные значения при любых значениях переменных.

654.$^{\cdot\cdot}$ Представьте в виде суммы квадратов двух выражений многочлен:
1) $2a^2 - 2a + 1$;
2) $a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2$;
3) $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10$;
4) $10x^2 - 6xy + y^2$;
5) $x^2 + 5y^2 + 4xy - 4y + 4$;
6) $2a^2 + 2b^2$.

655.$^{\cdot\cdot}$ Представьте в виде разности квадратов двух выражений многочлен:
1) $a^4 + a^2 + 1$;
2) $x^2 - y^2 + 4x - 4y$;
3) $a^2b^2 + 2ab - c^2 - 8c - 15$;
4) $8a^2 - 12a + 2ab - b^2 + 4$.

Полученную разность квадратов разложите на множители.

656.$^{\cdot\cdot}$ Представьте многочлен в виде суммы или разности квадратов двух выражений:
1) $a^4 + 17a^2 + 16$;
2) $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 74$;
3) $2x^2 - 6xy + 9y^2 - 6x + 9$;
4) $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3$.

657.$^{\cdot\cdot}$ При каких значениях x и y равно нулю значение многочлена:
1) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 41$;
2) $x^2 + 37y^2 + 12xy - 2y + 1$?

658.$^{\cdot\cdot}$ Существуют ли такие значения x и y, при которых равно нулю значение многочлена:
1) $x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 2$;
2) $9x^2 + y^2 - 12x + 8y + 21$?

659.$^{\cdot\cdot}$ Известно, что при некоторых значениях a и b $a + b = 7$, $ab = 2$. Найдите значение выражения $a^2 + b^2$ при этих же значениях a и b.

660.$^{\cdot\cdot}$ Известно, что при некоторых положительных значениях a и b $a^2 + b^2 = 34$, $ab = 15$. Найдите значение выражения $a + b$ при этих же значениях a и b.

661.$^{\cdot\cdot}$ Известно, что при некоторых отрицательных значениях a и b $a^2 + b^2 = 68$, $ab = 16$. Найдите значение выражения $a + b$ при этих же значениях a и b.

662.* Представьте число 24 в виде суммы таких двух чисел, чтобы их произведение было наибольшим.

663.* Найдите стороны прямоугольника, имеющего наибольшую площадь из всех прямоугольников, периметр каждого из которых равен 20 см.

664.* Числа a и b таковы, что $b^2 + \frac{a^2}{4} = 1$, $ab = 3$, $a > 0$, $b > 0$. Найдите значение выражения $a + 2b$.

665.* Числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$. Чему равно значение выражения $a + b - 2c$?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

666. В первый день турист проехал 0,4 всего пути, во второй — $\frac{2}{3}$ оставшегося, а в третий — остальные 20 км. Найдите длину пути.

667. Общая площадь двух участков, засеянных кукурузой, равна 100 га. На первом участке собрали по 90 т зеленой массы кукурузы с 1 га, а на втором — по 80 т. Найдите площадь каждого участка, если с первого участка собрали на 2200 т больше, чем со второго.

668. Разложите на множители:
1) $2ab - 3ab^2$;
2) $8x^4 + 2x^3$;
3) $12a^2b^2 + 6a^2b^3 + 12ab^3$;
4) $2a - 2b + ac - bc$;
5) $m^2 - mn - 4m + 4n$;
6) $ax - ay + cy - cx - x + y$.

669. При некотором значении x значение выражения $3x^2 - x + 7$ равно 10. Какое значение принимает выражение $6x^2 - 2x + 7$ при этом же значении x?

670. (*Старинная болгарская задача.*) Семь рыбаков ловили на озере рыбу. Первый ловил рыбу ежедневно, второй — через день, третий — через 2 дня и т. д., седьмой — через 6 дней. Сегодня все рыбаки пришли на озеро. Через какое наименьшее количество дней все семь рыбаков соберутся вместе на озере?

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

671. Запишите в виде выражения:
1) куб суммы чисел a и b;
2) сумму кубов чисел a и b;
3) разность кубов чисел c и d;
4) куб разности чисел c и d.

672. Возведите в куб одночлен:
1) y^2;
2) $2x^3$;
3) $3a^2b^4$;
4) $0{,}1mn^5$;
5) $\frac{1}{6}b^6c^7$;
6) $\frac{2}{7}p^{10}k^{15}$.

673. Представьте в виде куба одночлена выражение:
1) a^3b^6;
2) $8x^3y^9$;
3) $\frac{1}{64}c^9$;
4) $125m^{12}n^{21}$;
5) $0{,}216k^{15}p^{24}$;
6) $0{,}008a^9b^{18}c^{27}$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

674. Можно ли натуральные числа от 1 до 32 разбить на такие три группы, чтобы произведения чисел каждой группы были равны?

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ № 4 «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

1. Выполните умножение: $(3n + 1)(3n - 1)$.
А) $9n^2 - 6n + 1$; В) $9n^2 - 1$;
Б) $9n^2 + 6n + 1$; Г) $9n^2 + 1$.

2. Какому многочлену равно выражение $(4x - 1)^2$?
А) $16x^2 + 8x + 1$; В) $16x^2 + 1$;
Б) $16x^2 - 8x + 1$; Г) $16x^2 - 1$.

3. Разложите на множители выражение $4a^2 - 25$.
А) $(2a - 5)^2$; В) $(2a - 5)(2a + 5)$;
Б) $(2a + 5)^2$; Г) $2a(2a - 25)$.

4. Представьте в виде произведения выражение
$$-0{,}09x^4 + 81y^{16}.$$
А) $(0{,}03x^2 - 9y^4)(0{,}03x^2 + 9y^4)$;
Б) $(9y^8 - 0{,}03x^2)(9y^8 + 0{,}03x^2)$;
В) $(9y^8 - 0{,}3x^2)(9y^8 + 0{,}3x^2)$;
Г) $(9y^4 - 0{,}3x^2)(9y^4 + 0{,}3x^2)$.

5. Какой из данных двучленов можно разложить на множители, применяя формулу разности квадратов?
А) $-a^2 - 4b^2$; Б) $4a^2 + b^2$; В) $a^2 - 4b^2$; Г) $4b^2 + a^2$.

6. Представьте в виде квадрата двучлена выражение
$$a^2 - 8a + 16.$$
А) $(a + 4)^2$; Б) $(a - 4)^2$; В) $(4a + 1)^2$; Г) $(a - 1)^2$.

7. Известно, что $\left(\frac{1}{2}x - 3y^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + axy^2 + 9y^4$. Чему равно значение a?
А) 3; Б) -3; В) 6; Г) -6.

8. Упростите выражение $(x + 8)(x - 8) - x(x - 6)$.
А) $6x - 16$; Б) $6x + 16$; В) $-6x - 64$; Г) $6x - 64$.

9. Какому многочлену равно выражение
$$(7m - 2)^2 - (7m - 1)(7m + 1)?$$
А) $-14m + 5$; В) $-28m + 5$;
Б) $-14m + 3$; Г) $-28m + 3$.

10. Упростите выражение $(c - 4)^2 - (3 - c)^2$.
А) $2c - 7$; Б) $7 - 2c$; В) $7 + 2c$; Г) $-2c - 7$.

11. Найдите значение выражения
$(x - 4)^2 + 2(4 + x)(4 - x) + (x + 4)^2$ при $x = -1{,}2$.
А) 64; Б) 32; В) 48; Г) 72.

12. Представьте в виде многочлена выражение

$$(4 + a^2)(a - 2)(a + 2).$$

А) $a^2 - 16$; Б) $16 - a^2$; В) $16 - a^4$; Г) $a^4 - 16$.

18. Сумма и разность кубов двух выражений

Умножим двучлен $a + b$ на трехчлен $a^2 - ab + b^2$. Получим:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - \underline{a^2b} + \underline{\underline{ab^2}} + \underline{a^2b} - \underline{\underline{ab^2}} + b^3 = a^3 + b^3.$$

Таким образом, мы доказали тождество

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

Это тождество называют **формулой суммы кубов.**

Многочлен $a^2 - ab + b^2$, стоящий в правой части формулы, называют **неполным квадратом разности.** Такое название объясняется его внешним сходством с многочленом $a^2 - 2ab + b^2$, который равен квадрату разности a и b.

Теперь можно сказать, что

сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

Разложим на множители выражение $a^3 - b^3$. Имеем:

$$a^3 - b^3 = a^3 + (-b)^3 = (a + (-b))(a^2 - a(-b) + (-b)^2) =$$
$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Мы доказали тождество

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Это тождество называют **формулой разности кубов.**

Многочлен $a^2 + ab + b^2$ называют **неполным квадратом суммы.**

Итак,

разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

Заметим, что эту формулу также можно доказать, перемножив многочлены, стоящие в правой части.

ПРИМЕР 1

Разложите на множители:

1) $8a^3 + 27b^3$; 2) $x^6 - y^9$.

Решение

1) Представив данный многочлен в виде суммы кубов двух выражений, получим:

$8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3 = (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$.

2) Представив данный многочлен в виде разности кубов двух выражений, получим:

$$x^6 - y^9 = (x^2)^3 - (y^3)^3 = (x^2 - y^3)(x^4 + x^2y^3 + y^6).$$

ПРИМЕР 2

Упростите выражение $(4y - 1)(16y^2 + 4y + 1)$ и найдите его значение при $y = \frac{1}{2}$.

Решение. Имеем:

$$(4y - 1)(16y^2 + 4y + 1) = (4y)^3 - 1 = 64y^3 - 1.$$

При $y = \frac{1}{2}$:

$$64y^3 - 1 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = 64 \cdot \frac{1}{8} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

ПРИМЕР 3

Представьте в виде произведения выражение

$$(m - 4)^3 + 216.$$

Решение. Применив формулу суммы кубов, получим:

$$(m - 4)^3 + 216 =$$
$$= (m - 4)^3 + 6^3 = (m - 4 + 6)((m - 4)^2 - 6(m - 4) + 36) =$$
$$= (m + 2)(m^2 - 8m + 16 - 6m + 24 + 36) =$$
$$= (m + 2)(m^2 - 14m + 76).$$

ПРИМЕР 4

Докажите, что значение выражения $25^3 - 1$ делится нацело на 24.

Решение. Применив формулу разности кубов, получим:

$$25^3 - 1 = (25 - 1)(25^2 + 25 + 1) = 24(25^2 + 26).$$

Данное выражение можно представить в виде произведения, один из множителей которого равен 24, а другой — натуральное число. Следовательно, значение этого выражения делится нацело на 24.

?

1. Какое тождество называют формулой суммы кубов?
2. Какой многочлен называют неполным квадратом разности?
3. Сформулируйте правило разложения на множители суммы кубов двух выражений.
4. Какое тождество называют формулой разности кубов?
5. Какой многочлен называют неполным квадратом суммы?
6. Сформулируйте правило разложения на множители разности кубов двух выражений.

675.° Какому из данных выражений тождественно равен многочлен $a^3 - 27$:

1) $(a - 3)(a^2 + 6a + 9)$;　3) $(a - 3)(a^2 - 3a + 9)$;
2) $(a - 3)(a^2 - 9)$;　4) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$?

676.° Какое из данных равенств является тождеством:

1) $m^3 + 8n^6 = (m + 2n^2)(m^2 + 2mn^2 + 4n^4)$;
2) $m^3 + 8n^6 = (m - 2n^2)(m^2 + 2mn^2 + 4n^4)$;
3) $m^3 + 8n^6 = (m + 2n^2)(m^2 - 2mn^2 + 4n^4)$;
4) $m^3 + 8n^6 = (m - 2n^2)(m^2 - 2mn^2 + 4n^4)$?

677.° Разложите на множители:

1) $a^3 + 8$;
2) $c^3 - 64$;
3) $125 - b^3$;
4) $1 + x^3$;
5) $a^3 + 1000$;
6) $27a^3 - 1$;
7) $1000c^3 - 216$;
8) $a^3b^3 - 1$;
9) $m^3n^3 + 0{,}001$;
10) $\frac{64}{343}m^3 - \frac{125}{216}n^3$;
11) $8m^6 + 27n^9$;
12) $m^6n^3 - p^{12}$;
13) $0{,}027x^{21} + 0{,}125y^{24}$;
14) $0{,}216 - 8c^{27}$;
15) $1000a^{12}b^3 + 0{,}001c^6d^{15}$.

678.° Разложите на множители:

1) $x^3 - 1$;
2) $27 + a^3$;
3) $216 - y^3$;
4) $\frac{1}{8}a^3 + b^3$;
5) $a^6 - 8$;
6) $a^3b^3 - c^3$;
7) $a^3 - b^{15}c^{18}$;
8) $125c^3d^3 + 0{,}008b^3$;
9) $\frac{64}{729}x^3 - \frac{27}{1000}y^6$.

679.° Представьте в виде многочлена выражение:

1) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$;
2) $(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$;

3) $(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$;
4) $(0,5xy + 2)(0,25x^2y^2 - xy + 4)$.

680.° Выполните умножение:
1) $(b - 4)(b^2 + 4b + 16)$;
2) $(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$;
3) $(x^3 + 6y^2)(x^6 - 6x^3y^2 + 36y^4)$;
4) $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{5}b\right)\left(\frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{20}ab + \frac{1}{25}b^2\right)$.

681.° Упростите выражение и найдите его значение:
1) $(9a^2 + 3a + 1)(3a - 1)$, если $a = \frac{1}{3}$;
2) $(5y - 2)(25y^2 + 10y + 4) + 8$, если $y = -\frac{1}{5}$.

682.° Найдите значение выражения:
1) $(1 - b^2)(1 + b^2 + b^4)$, если $b = -2$;
2) $2x^3 + 7 - (x + 1)(x^2 - x + 1)$, если $x = -1$.

683.• Разложите на множители:
1) $(a + 6)^3 - 27$;
2) $(2x - 1)^3 + 64$;
3) $8a^6 - (4a - 3)^3$;
4) $1000 + (y - 10)^3$;
5) $(x + y)^3 - (x - y)^3$;
6) $(a - 2)^3 + (a + 2)^3$.

684.• Представьте в виде произведения выражение:
1) $(b - 5)^3 + 125$;
2) $(4 - 3x)^3 - 8x^3$;
3) $(a - b)^3 + (a + b)^3$;
4) $(c + 3)^3 - (c - 3)^3$.

685.• Упростите выражение:
1) $(x + 1)(x^2 - x + 1) + (2 - x)(4 + 2x + x^2)$;
2) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) - x(x - 5)(x + 5)$;
3) $a(a - 3)^2 - (a + 3)(a^2 - 3a + 9)$;
4) $(a - 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)(a^6 + 1)(a^{12} + 1)$.

686.• Упростите выражение:
1) $(a - 5)(a^2 + 5a + 25) - (a - 1)(a^2 + a + 1)$;
2) $(y - 3)(y^2 + 3y + 9) - y(y - 3)(y + 3) - (y + 3)^2$;
3) $(a - b)(a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$.

687.• Поставьте вместо звездочек такие одночлены, чтобы выполнялось тождество:
1) $(7k - p)(* + * + *) = 343k^3 - p^3$;
2) $(* + *)(25a^4 - * + 36b^2) = 125a^6 + 216b^3$;
3) $(mn + *)(* - * + k^6) = m^3n^3 + k^9$.

688.• Решите уравнение:
1) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) - 9x(3x^2 - 4) = 17$;

2) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - x(x - 7)(x + 7) = 15$;

3) $(x + 6)(x^2 - 6x + 36) - x(x - 9)^2 = 4x(4{,}5x - 13{,}5)$.

689.° Решите уравнение:

1) $(7 - 2x)(49 + 14x + 4x^2) + 2x(2x - 5)(2x + 5) = 43$;

2) $100(0{,}2x + 1)(0{,}04x^2 - 0{,}2x + 1) = 5x(0{,}16x^2 - 4)$.

690.° Докажите, что значение выражения:

1) $456^3 - 156^3$ делится нацело на 300;

2) $254^3 + 238^3$ делится нацело на 123;

3) $17^6 - 1$ делится нацело на 36.

691.° Докажите, что значение выражения:

1) $341^3 + 109^3$ делится нацело на 90;

2) $2^{15} + 3^3$ делится нацело на 35.

692.°° Укажите наименьшее натуральное значение n такое, чтобы выражение $x^{2n} - y^{3n}$ можно было разложить на множители как по формуле разности квадратов, так и по формуле разности кубов. Разложите полученный многочлен на множители по этим формулам.

693.°° Придумайте многочлен, который можно разложить на множители как по формуле разности квадратов, так и по формуле разности кубов. Разложите придуманный многочлен на множители по этим формулам.

694.°° Можно ли утверждать, что если сумма двух натуральных чисел делится нацело на некоторое натуральное число, то на это число делится нацело:

1) разность их квадратов;

2) сумма их квадратов;

3) сумма их кубов?

695.°° Докажите, что сумма кубов двух последовательных нечетных натуральных чисел делится нацело на 4.

696.°° Докажите, что сумма кубов двух последовательных натуральных чисел, ни одно из которых не кратно 3, делится нацело на 9.

697.°° Известно, что числа x и y таковы, что $x^2 + y^2 = 1$. Найдите значение выражения $x^6 + 3x^2y^2 + y^6$.

698.°° Известно, что числа x и y таковы, что $x^3 - y^2 = 2$. Найдите значение выражения $x^9 - 6x^3y^2 - y^6$.

699.°° Докажите, что если $2a - b = 1$, то $8a^3 - b^3 = 6ab + 1$.

700.°° Докажите, что если $a + 3b = 2$, то $a^3 + 27b^3 = 8 - 18ab$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

701. В одном ящике было на 12 кг яблок больше, чем в другом. Когда из первого ящика переложили во второй 4 кг яблок, то оказалось, что количество яблок во втором ящике составило $\frac{5}{7}$ количества яблок в первом. Сколько килограммов яблок было в каждом ящике сначала?

702. Какая последняя цифра значения выражения $3^{16} + 7^{16}$?

703. Найдите значение каждого из следующих выражений при $a = 1$ и $a = -1$:

1) $a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^{99} + a^{100}$;
2) $a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^{98} + a^{99}$;
3) $aa^2a^3a^4 \cdot \ldots \cdot a^{99}a^{100}$;
4) $aa^2a^3a^4 \cdot \ldots \cdot a^{98}a^{99}$.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

704. Разложите на множители:

1) $3x^2 + 12xy$;
2) $10m^5 - 5m$;
3) $ab - ac + 7b - 7c$;
4) $6x - xy - 6y + y^2$;
5) $49b^2 - c^2$;
6) $p^2 + 12pk + 36k^2$;
7) $100a^4 - \frac{1}{9}b^2$;
8) $25a^2 - (a - 3)^2$.

705. Решите уравнение:

1) $(x - 4)(x + 3) = 0$;
2) $x^2 - 81 = 0$;
3) $7x^2 + 21x = 0$;
4) $9x^2 - 6x + 1 = 0$;
5) $x(x + 7)(3x - 2) = 0$;
6) $12x^3 - 2x^2 = 0$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

706. Есть 100 кучек по 100 монет. Одна из кучек состоит из фальшивых монет, каждая из которых на 1 г легче настоящей. Вес настоящей монеты составляет 10 г. Какое наименьшее количество взвешиваний на пружинных весах со стрелкой надо сделать, чтобы найти кучку из фальшивых монет?

19. Применение различных способов разложения многочлена на множители

В предыдущих пунктах мы рассмотрели такие способы разложения многочлена на множители:

- вынесение общего множителя за скобки;
- метод группировки;
- применение формул сокращенного умножения.

Однако в математике при решении многих задач часто приходится использовать несколько приемов, применяя их в некоторой последовательности. В частности, есть много многочленов, для разложения которых на множители надо применить несколько способов.

Возникает естественный вопрос: какие способы и в какой последовательности надо применять при разложении многочлена на множители? Универсальных рекомендаций не существует, все зависит от конкретного многочлена. И все же дадим несколько общих советов:

1) если это возможно, то разложение надо начинать с вынесения общего множителя за скобки;
2) проверить, можно ли применить формулы сокращенного умножения;
3) если не удается применить формулы сокращенного умножения, то надо попробовать воспользоваться методом группировки.

ПРИМЕР 1

Разложите на множители многочлен:

1) $3a^2b - 12b$;
2) $-5x^2 + 30xy - 45y^2$;
3) $24m^4 + 3m$;
4) $3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab$.

Решение

1) Применив последовательно вынесение общего множителя за скобки и формулу разности квадратов, получим:
$$3a^2b - 12b = 3b(a^2 - 4) = 3b(a - 2)(a + 2).$$
2) Применив последовательно вынесение общего множителя за скобки и формулу квадрата разности, получим:
$$-5x^2 + 30xy - 45y^2 = -5(x^2 - 6xy + 9y^2) = -5(x - 3y)^2.$$

3) Вынесем общий множитель за скобки и применим формулу суммы кубов:
$24m^4 + 3m = 3m(8m^3 + 1) = 3m(2m + 1)(4m^2 - 2m + 1).$
4) Комбинируя метод вынесения общего множителя за скобки и метод группировки, получим:
$3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab = 3a(a^2 + 7a - 2ab - 14b) =$
$= 3a((a^2 + 7a) + (-2ab - 14b)) = 3a(a(a + 7) - 2b(a + 7)) =$
$= 3a(a + 7)(a - 2b).$

ПРИМЕР 2

Представьте в виде произведения многочленов:
1) $x^{16} - 1$;   2) $a^{12} - b^{12}$.

Решение

1) $x^{16} - 1 = (x^8 - 1)(x^8 + 1) = (x^4 - 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) =$
$= (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) =$
$= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1).$
2) $a^{12} - b^{12} = (a^6 - b^6)(a^6 + b^6) = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)(a^6 + b^6).$

Мы получили три множителя, один из которых является разностью кубов, а два других — суммой кубов. Используя соответствующие формулы, окончательно получим:

$$a^{12} - b^{12} = (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4).$$

ПРИМЕР 3

Разложите на множители:
1) $m^2 - 16n^2 + 2m - 8n$;   2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16$.

Решение

1) $m^2 - 16n^2 + 2m - 8n = (m^2 - 16n^2) + (2m - 8n) =$
$= (m - 4n)(m + 4n) + 2(m - 4n) = (m - 4n)(m + 4n + 2).$
2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16 = (x^2 + 4xy + 4y^2) - 16 =$
$= (x + 2y)^2 - 16 = (x + 2y - 4)(x + 2y + 4).$

ПРИМЕР 4

Решите уравнение $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$.

Решение. Имеем:

$$x^2(x + 1) - 4(x + 1) = 0;$$
$$(x + 1)(x^2 - 4) = 0;$$
$$(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0;$$

$$x + 1 = 0, \text{ или } x - 2 = 0, \text{ или } x + 2 = 0;$$
$$x = -1, \text{ или } x = 2, \text{ или } x = -2.$$

Ответ: -1; 2; -2.

ПРИМЕР 5

Разложите на множители трехчлен $x^2 + 8x - 9$, выделив предварительно квадрат двучлена.

Решение. Если к сумме $x^2 + 8x$ прибавить число 16, то полученное выражение $x^2 + 8x + 16$ можно «свернуть» по формуле квадрата суммы. Поэтому, прибавив к данному трехчлену число 16 и вычтя из него 16, получим:

$$x^2 + 8x - 9 = x^2 + 8x + 16 - 16 - 9 = (x + 4)^2 - 25 =$$
$$= (x + 4 - 5)(x + 4 + 5) = (x - 1)(x + 9).$$

ПРИМЕР 6

Разложите на множители многочлен $x^4 + 4y^4$.

Решение. Так как $x^4 = (x^2)^2$, $4y^4 = (2y^2)^2$, то, прибавляя к данному многочлену $4x^2y^2$ (удвоенное произведение одночленов x^2 и $2y^2$) и вычитая из него такой же одночлен, получим:

$$x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 =$$
$$= (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy).$$

707.° Разложите на множители многочлен:

1) $2a^2 - 2b^2$; 4) $3ab^2 - 27a$; 7) $x^4 - x^2$;
2) $cx^2 - cy^2$; 5) $x^3 - 4x$; 8) $0{,}09t^4 - t^6$;
3) $3x^2 - 3$; 6) $2y^3 - 18y$; 9) $\frac{16}{49}a^2b^4c^5 - b^2c^3$.

708.° Представьте в виде произведения многочлен:

1) $12b^2 - 12c^2$; 4) $3mn^2 - 48m$;
2) $2a^2c - 2b^2c$; 5) $7y^3 - 7y$;
3) $5a^2 - 20$; 6) $a^3 - a^5$.

709.° Разложите на множители:

1) $3a^2 + 6ab + 3b^2$; 4) $-7b^2 - 14bc - 7c^2$;
2) $5m^2 + 5n^2 - 10mn$; 5) $x^2y + 14xy^2 + 49y^3$;
3) $-3x^2 + 12x - 12$; 6) $-8a^3b + 56a^2b^2 - 98ab^3$.

710.° Разложите на множители:

1) $8x^2 + 16xy + 8y^2$; 3) $-12b^3 - 12b^2 - 3b$;
2) $-2a^2 + 24ab - 72b^2$; 4) $48m^3n - 72m^2n + 27mn$.

711.° Представьте в виде произведения многочлен:

1) $a^4 - b^4$; 2) $c^4 - 81$.

712.° Разложите на множители:

1) $x^4 - 16$; 2) $y^8 - 1$.

713.° Разложите на множители:

1) $4a^3 - 4b^3$; 3) $7 + 7b^3$; 5) $2a^4 - 250a$;
2) $2m^3 - 16$; 4) $-x^4 + 27x$; 6) $9a^5 - 9a^2$.

714.° Представьте в виде произведения многочлен:

1) $3x^3 + 3y^3$; 2) $5m^4 - 320mn^3$; 3) $6c^5 - 6c^8$.

715.° Разложите на множители:

1) $a^7 + ab^6$; 2) $x^8 - y^8$; 3) $c^6 - 1$.

716.° Разложите на множители:

1) $c^6 + c^9$; 2) $m^9 - n^9$; 3) $a^8 - b^4$.

717.° Представьте в виде произведения многочлен:

1) $3ab + 15b - 3a - 15$; 5) $a^3 + a^2 - a - 1$;
2) $84 - 42y - 7xy + 14x$; 6) $2x^3 - 2xy^2 - 8x^2 + 8y^2$;
3) $abc + 6ac + 8ab + 48a$; 7) $5a^2 - 5b^2 - 15a^3b + 15ab^3$;
4) $m^3 - m^2n + m^2 - mn$; 8) $a^2b^2 - 1 - b^2 + a^2$.

718.° Разложите на множители:

1) $15cx + 2cy - cxy - 30c$;
2) $35a^2 - 42ab + 10a^2b - 12ab^2$;
3) $x^3 + x^2y + x^2 + xy$;
4) $mn^4 - n^4 + mn^3 - n^3$.

719.• Разложите на множители:

1) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2$; 5) $9a^2 + c^2 + 6ac - 9$;
2) $81 - (x^2 + 6x)^2$; 6) $a^2 - b^2 - 10b - 25$;
3) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$; 7) $49 - y^2 + x^2 - 14x$;
4) $c^2 + 4c + 4 - k^2$; 8) $mn^2 - m^3 - 12m^2 - 36m$.

720.• Представьте в виде произведения выражение:

1) $(m^2 - 2m)^2 - 1$; 4) $64x^2 + 48xy + 9y^2 - 144$;
2) $16 - (m^2 + 4m)^2$; 5) $c^2 - a^2 + 22a - 121$;
3) $x^2 - 18xy + 81y^2 - z^2$; 6) $100 - 25y^2 - 60x^2y - 36x^4$.

721.• Разложите на множители:

1) $a^2 - b^2 - a - b$; 6) $a^2 - 10a + 25 - ab + 5b$;
2) $x - y - x^2 + y^2$; 7) $8mp + 8np - m^2 - 2mn - n^2$;
3) $4m^2 - 9n^2 + 2m + 3n$; 8) $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2$;
4) $c^2 - d^2 + 4c - 4d$; 9) $m^3 - 8n^3 - m^2 + 4mn - 4n^2$;
5) $5x^2y - 5xy^2 - x^2 + y^2$; 10) $a^3 - 4a^2 + 4a - 1$.

722.° Разложите на множители:
1) $m^2 - n^2 - m + n$;
2) $c + d - c^2 + d^2$;
3) $16x^2 - 25y^2 - 4x - 5y$;
4) $12a^2b^3 + 3a^3b^2 + 16b^2 - a^2$;
5) $49c^2 - 14c + 1 - 21ac + 3a$;
6) $ax^2 + ay^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$;
7) $27c^3 - d^3 + 9c^2 + 3cd + d^2$;
8) $b^3 - 2b^2 - 2b + 1$.

723.° Разложите на множители:
1) $x^2(x - 2) - 18x(x - 2) + 81(x - 2)$;
2) $4x(y^2 - 9) + 4x^2(y^2 - 9) - 9 + y^2$;
3) $b^2(a + 1) - a^2(b + 1)$;
4) $(a - b)(b^2 - c^2) - (b - c)(a^2 - b^2)$.

724.° Представьте в виде произведения выражение:
1) $x^2(x + 4) - 20x(x + 4) + 100(x + 4)$;
2) $a^2 - 36 - 2a(36 - a^2) - a^2(36 - a^2)$;
3) $a^2(b - 1) - b^2(a - 1)$;
4) $(m - n)(n^3 - p^3) - (n - p)(m^3 - n^3)$.

725.° Решите уравнение:
1) $x^3 - 4x = 0$;
2) $x^4 - x^2 = 0$;
3) $x^5 - 36x^3 = 0$;
4) $9x^3 - x = 0$;
5) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$;
6) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$;
7) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$;
8) $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$.

726.° Решите уравнение:
1) $x^3 - x = 0$;
2) $x^4 + x^2 = 0$;
3) $x^4 - 8x^3 = 0$;
4) $49x^3 + 14x^2 + x = 0$;
5) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$;
6) $x^3 - 4x^2 - 25x + 100 = 0$.

727.° Является ли тождеством равенство:
1) $(a - 1)^3 - 9(a - 1) = (a - 1)(a - 4)(a + 2)$;
2) $(x^2 + 1)^2 - 4x^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2$?

728.° Докажите тождество:
1) $(a + 2)^3 - 25(a + 2) = (a + 2)(a + 7)(a - 3)$;
2) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2 =$
$= (a + b + c - d)(a + b - c + d)$.

729.° Разложите выражение на множители двумя способами:
а) примените формулу разности квадратов;
б) раскройте скобки и примените метод группировки:

1) $(ab + 1)^2 - (a + b)^2$; 2) $(a + 2b)^2 - (ab + 2)^2$.

730.** Представьте в виде куба двучлена выражение:

1) $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$; 2) $b^3 - 6b^2 + 12b - 8$.

731.** Докажите тождество:

1) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(a + c)$;

2) $(a - b)^3 + (b - c)^3 - (a - c)^3 = -3(a - b)(b - c)(a - c)$.

732.** Разложите на множители выражение:

1) $(x - y)(x + y) + 2(x + 3y) - 8$;

2) $(2a - 3b)(2a + 3b) - 4(a + 3b) - 3$.

733.** Представьте в виде произведения выражение:

1) $(5x - y^2)(5x + y^2) - 2(15x - 7y^2) - 40$;

2) $(3m - 2n)(12m + 5n) + 3m(3n + 4) - 2(3n^2 - 20n + 12)$.

734.** Разложите на множители трехчлен, выделив предварительно квадрат двучлена:

1) $x^2 - 10x + 24$; 4) $4a^2 - 12a + 5$;

2) $a^2 + 4a - 32$; 5) $9x^2 - 24xy + 7y^2$;

3) $b^2 - 3b - 4$; 6) $36m^2 - 60mn + 21n^2$.

735.** Разложите на множители многочлен:

1) $x^2 - 4x + 3$; 4) $x^2 + x - 6$;

2) $a^2 + 2a - 24$; 5) $c^2 + 8cd + 15d^2$;

3) $y^2 + 12y + 35$; 6) $9x^2 - 30xy + 16y^2$.

736.** При некоторых значениях x_1 и x_2 выполняются равенства $x_1 - x_2 = 8$, $x_1x_2 = 5$. Найдите при этих же значениях x_1 и x_2 значение выражения:

1) $x_1x_2^2 - x_1^2x_2$; 3) $(x_1 + x_2)^2$;

2) $x_1^2 + x_2^2$; 4) $x_1^3 - x_2^3$.

737.** При некоторых значениях x и y выполняются равенства $x + y = 6$, $xy = -3$. Найдите при этих же значениях x и y значение выражения:

1) $x^3y^2 + x^2y^3$; 2) $(x - y)^2$; 3) $x^4 + y^4$.

738.* Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $(2n - 1)^3 - 4n^2 + 2n + 1$ делится нацело на 16.

739.* Разложите на множители:

1) $x^4 - 5x^2 + 4$; 3) $4x^4 - 12x^2 + 1$; 5) $x^4 + 4$;

2) $x^4 + x^2 + 1$; 4) $x^5 + x + 1$; 6) $x^8 + x^4 - 2$.

740.* Представьте в виде произведения выражение:

1) $x^4 + 5x^2 + 9$; 2) $x^4 - 8x^2 + 4$.

741.* Докажите, что при любом натуральном значении n, отличном от 1, значение выражения $n^4 + n^2 + 1$ является составным числом.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

742. Дано три числа, из которых каждое следующее на 4 больше предыдущего. Найдите эти числа, если произведение меньшего и большего из них на 88 меньше произведения большего и среднего.

743. Петя сначала поднялся на гору со скоростью 2,5 км/ч, а потом спустился по другой дороге со скоростью 4 км/ч. Найдите общий путь, пройденный Петей, если дорога на гору на 3 км короче дороги с горы, а время, потраченное на весь путь, составляет 4 ч.

744. Решите уравнение:

1) $|7x - 3| = 4$;
2) $||x| - 10| = 8$;
3) $4(x - 2) + 5|x| = 10$;
4) $|x| = 3x - 8$.

745. Докажите, что сумма трехзначного числа и удвоенной суммы его цифр делится нацело на 3.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

746. Вычислите значение y по формуле $y = 0{,}2x - 3$, если:

1) $x = 4$;
2) $x = -3$.

747. Найдите координаты точек A, B, C, D, E, F, K, M, N, изображенных на рисунке 7.

748. На координатной плоскости отметьте точки: $A\,(2;\ 3)$; $B\,(4;\ -5)$; $C\,(-3;\ 7)$; $D\,(-2;\ 2)$; $K\,(-2;\ -2)$; $M\,(0;\ 2)$; $N\,(-3;\ 0)$; $P\,(1;\ -6)$; $F\,(-4;\ -2)$.

749. Постройте отрезки AB и CD и найдите коор-

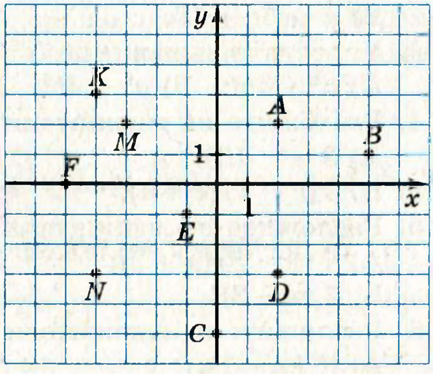


Рис. 7

динаты точки пересечения этих отрезков, если $A(-5; -2)$; $B(1; 4)$; $C(-3; 2)$; $D(2; -3)$.

750. Как расположена на координатной плоскости относительно оси x точка A, если:
1) $A(2; 6)$; 2) $A(-3; 1)$; 3) $A(-4; -5)$; 4) $A(-3; 0)$?

751. Найдите координаты вершины квадрата со стороной 4, если две его стороны лежат на осях координат, а произведение координат одной из вершин — положительное число. Сколько решений имеет задача?

Обновите в памяти содержание пунктов 26, 34 с. 270, 273.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

752. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ — некоторый набор натуральных чисел, а набор $y_1, y_2, \ldots, y_{25}$ получен из него в результате перестановки некоторых чисел. Докажите, что значение выражения $(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \ldots (x_{25} - y_{25})$ является четным числом.

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ № 5 «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

1. Представьте в виде многочлена выражение
$$(x - 6)(x^2 + 6x + 36).$$
А) $x^3 - 36$; В) $x^3 - 216$;
Б) $x^3 + 36$; Г) $x^3 + 216$.

2. Найдите многочлен M, если $y^3 - 64 = (y - 4) \cdot M$.
А) $y^2 - 8y + 16$; В) $y^2 - 4y + 16$;
Б) $y^2 + 8y + 16$; Г) $y^2 + 4y + 16$.

3. Упростите выражение $(a^2 + 2b^3)(a^4 - 2a^2b^3 + 4b^6)$.
А) $a^6 + 4b^9$; Б) $a^6 - 4b^9$; В) $a^6 - 8b^9$; Г) $a^6 + 8b^9$.

4. Разложите на множители многочлен $3c^2 - 48$.
А) $3(c - 16)$; В) $3(c - 4)^2$;
Б) $3(c - 4)(c + 4)$; Г) $3c(c - 16)$.

5. Разложите на множители выражение $7a^2 - 42a + 63$.
А) $7(a - 3)(a + 3)$; В) $7(a + 3)^2$;
Б) $7(a - 3)^2$; Г) $7(a - 9)^2$.

6. Разложите на множители многочлен $a^8 - a^6$.
А) $a^6(a - 1)$; В) $a^6(a + 1)^2$;
Б) $a^6(a - 1)(a + 1)$; Г) $a^6(a - 1)^2$.

7. Разложите на множители выражение $m^2 - n^2 + m + n$.

А) $(m + n)(m - n + 1)$; В) $(m - n)(m + n + 1)$;
Б) $(m - n)(m - n + 1)$; Г) $(m + n)(m + n + 1)$.

8. Представьте в виде произведения выражение $x^2 - y^2 + 14y - 49$.

А) $(x - y + 7)(x + y + 7)$;
Б) $(x - y - 7)(x + y + 7)$;
В) $(x - y + 7)(x + y - 7)$;
Г) $(x - y - 7)(x + y - 7)$.

9. Разложите на множители многочлен $81a^4 - 1$.

А) $(3a - 1)(3a + 1)(9a^2 + 1)$;
Б) $(3a^2 - 1)(3a^2 + 1)(9a^2 + 1)$;
В) $(3a - 1)^2(3a + 1)^2$;
Г) $(3a - 1)^4$.

10. Решите уравнение $49x - x^2 = 0$.

А) 0; 7; Б) −7; 0; 7; В) 0; 49; Г) −7; 7.

11. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$.

А) −1; 1; Б) −1; 3; В) 1; 3; Г) −3; −1; 1.

12. Представьте в виде произведения выражение

$$(x^2 - 2)^2 - 4(x^2 - 2) + 4.$$

А) $(x - 4)^2$; В) x^4;
Б) $(x - 2)^2(x + 2)^2$; Г) $(x^2 - 6)^2$.

Язык, понятный всем

Здесь на трех восточных языках — арабском, китайском и иврите — записано хорошо известное вам переместительное свойство сложения: от перемены мест слагаемых сумма не меняется.

في الجمع تبديل أماكن الأعداد لا يغير النتيجة

加数的次序不影响加和的结果

כאשר מחברים שני מספרים, אין חשיבות לשאלה מי הראשון ומי השני.

Но человек, не владеющий этими языками, это простое предложение не поймет.

Тогда на помощь приходит интернациональный математический язык. На нем перевод выглядит так:

$$a + b = b + a.$$

Как и любой другой язык, он имеет свой алфавит — математические символы. Это цифры, буквы, знаки математических действий и т. д. Из них составляют «слова» математического языка, например, выражения.

Казалось бы, чего проще — использовать математическую фразу «$2x = 4$» для записи линейного уравнения. Однако даже великий аль-Хорезми[1] записывал это предложение громоздко: «Два корня равны 4 дирхемам[2]». Это связано с тем, что аль-Хорезми вообще не использовал в своих работах математическую символику.

Сказанное совершенно не означает, что до IX века ученые не предпринимали попыток создать математический язык.

Еще в I веке греческий математик Герон Александрийский начал обозначать неизвестную величину буквой ς (сигма). Следующий шаг в создании символики сделал в III веке Диофант Александрийский. В своем знаменитом труде «Арифметика» он ввел обозначение не только для неизвестной величины, но и для некоторых ее степеней:

первая степень — σ;
вторая степень — Δ^v (от Δυναμις — «дюнаміс», что означает сила, степень);
третья степень — K^v (от Κυβος — «кубос», т. е. куб).

Для равенства Диофант применял знак ισ — первые две буквы слова ισος — «исос», то есть равный.

Вряд ли символику Диофанта можно считать удобной и наглядной. Например, он не ввел никаких специальных символов для обозначения действий сложения и умножения. Обозначение всех неизвестных величин одной буквой ς также сильно затрудняло запись решения задач, в которых фигурировали несколько переменных.

---

[1] Мы рассказывали о нем на с. 12.

[2] Дирхем — старинная арабская серебряная монета.

С закатом эпохи античности алгебраическая символика Диофанта практически была забыта.

Возрождение процесса создания алгебраической символики связано с трудами талантливого немецкого ученого XIII века Иордана Неморария, который внес в европейскую математику идею буквенной символики.

В XV веке широкое распространение получили символы, применявшиеся выдающимся итальянским математиком Лукой Паччоли (ок. 1445 — ок. 1515).

Немало сделали для совершенствования математического языка немецкие математики XVI века Ян Видман и Адам Ризе.

Франсуа Виет

Создателем буквенной символики по праву считается крупнейший французский математик XVI века Франсуа Виет (1540—1603). Он первый обозначил буквами не только неизвестные, но и данные величины. Виет предложил: «Искомые величины будем обозначать буквой A или другой гласной, E, I, O, U, а данные — буквами B, D, G и другими согласными». Такие обозначения позволили Виету не только решать отдельные уравнения, но и исследовать процесс решения сразу целого класса уравнений. Например, благодаря символике Виета все линейные уравнения можно записать в виде $ax = b$, а следовательно, построить процесс решения уравнения в общем виде так, как мы это сделали в п. 2.

В. И. Левицкий

Языки многих народов продолжают развиваться. Не составляет исключения и математический язык. Новые открытия приносят в математику новые символы и термины.

Большой вклад в развитие и систематизацию украинской математической терминологии внес профессор физико-математического факультета Львовского университета Владимир Иосифович Левицкий (1872—1956). Его научно-методические

М. О. Зарицкий

труды в значительной мере способствовали становлению и развитию украинской математической школы.

Основателем украинской математической культуры по праву считается ученый с европейским именем, доктор философии, профессор Мирон Онуфриевич Зарицкий (1889—1961). Его научные труды и педагогические разработки хорошо известны во многих странах мира.

ИТОГИ

В этом параграфе:

- были введены такие понятия:
  - тождественно равные выражения;
  - тождество;
  - тождественные преобразования;
  - степень с натуральным показателем;
  - одночлен и многочлен;
  - степень одночлена;
  - подобные одночлены;
  - коэффициент одночлена;
  - приведение подобных членов многочлена;
- вы изучили:
  - методы доказательства тождеств;
  - свойства степени с натуральным показателем;
  - действия над одночленами и многочленами;
  - формулы сокращенного умножения;
  - методы и приемы разложения многочленов на множители.

§3. ФУНКЦИИ

- В этом параграфе вы узнаете, что многие величины связаны между собой. Эти связи задаются определенными правилами.
- Вы познакомитесь со способами задания этих правил.

20. Связи между величинами. Функция

Учитель пишет на доске. При этом меняются длина мелового следа, масса, объем и даже температура кусочка мела.

Работает школьная столовая. В течение дня меняются количество посетивших ее учеников, расходы электроэнергии и воды, денежная выручка и т. п.

Вообще, в происходящих вокруг нас процессах многие величины меняют свои значения. Понятно, что некоторые из этих величин связаны между собой, т. е. изменение одной величины влечет за собой изменение другой.

Многие науки, такие как физика, химия, биология и другие, исследуют зависимости между величинами. Изучает эти связи и математика, конструируя **математические модели** реальных процессов. С понятием математической модели вы уже встречались в п. 3.

Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 1

Изменяется сторона квадрата. Понятно, что при этом будет меняться и его периметр. Если длину стороны квадрата обозначить a, а периметр — P, то зависимость переменной P от переменной a задается формулой

$$P = 4a.$$

Эта формула является математической моделью связи между такими величинами, как длина стороны квадрата и его периметр.

С помощью этой формулы можно, выбрав произвольную длину стороны, найти соответствующее значение периметра квадрата. Поэтому в этой модели переменную a называют **независимой переменной**, а переменную P — **зависимой переменной.**

Подчеркнем, что эта формула задает правило, с помощью которого по значению независимой переменной можно *однозначно* найти значение зависимой переменной.

ПРИМЕР 2

Семья положила в банк 10 000 грн. под 10 % годовых. Тогда через год величина M — сумма денег на счету — станет равной

$$M = 10\ 000 + \frac{10\ 000 \cdot 10}{100} = 11\ 000 \text{ (грн.)}.$$

Через 2 года эта сумма составит

$$M = 11\ 000 + \frac{11\ 000 \cdot 10}{100} = 12\ 100 \text{ (грн.)}.$$

Аналогично можно установить, что через 3 года $M = 13\,310$ грн., через 4 года $M = 14\,661$ грн., через 5 лет $M = 16\,105{,}1$ грн.

В таблице показано, как зависит сумма денег, находящихся на счету, от количества прошедших лет:

Количество лет, n	1	2	3	4	5
Сумма денег на счету M, грн.	11 000	12 100	13 310	14 461	16 105,1

Эта таблица является математической моделью зависимости величины M от величины n. Здесь n выступает в роли независимой переменной, а M — зависимой.

Подчеркнем, что эта таблица задает правило, с помощью которого по значению независимой переменной можно *однозначно* найти значение зависимой переменной.

В старших классах вы докажете, что по количеству лет, которое 10 000 грн. пребывают на счету под 10 % годовых, соответствующее значение суммы можно найти с помощью формулы

$$M = 10\,000 \cdot 1{,}1^n.$$

ПРИМЕР 3

На рисунке 8 изображен график зависимости температуры воздуха от времени суток.

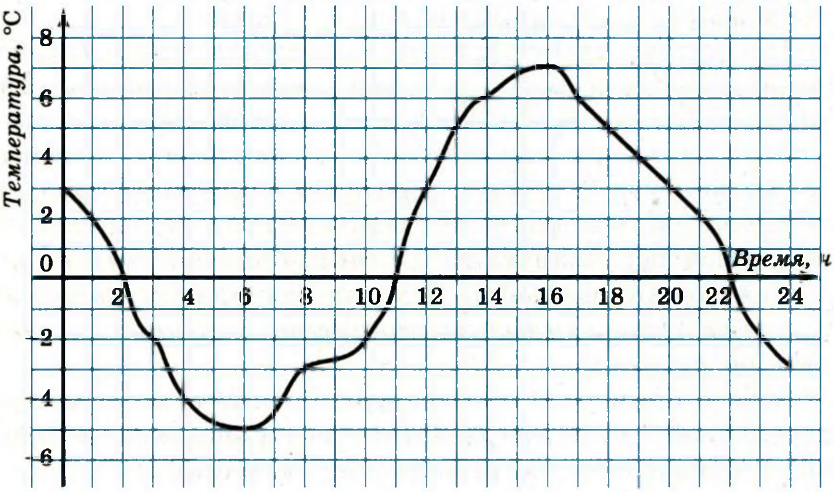


Рис. 8

Используя этот график, можно, выбрав произвольный момент времени t, найти соответствующую температуру воздуха T (в градусах Цельсия). Таким образом, величина t является независимой переменной, а величина T — зависимой.

Этот график можно рассматривать как математическую модель зависимости величины T (температуры) от величины t (времени).

Подчеркнем, что этот график задает правило, с помощью которого по значению независимой переменной можно *однозначно* найти значение зависимой переменной.

Несмотря на существенные различия приведенных трех примеров, им всем присуще следующее: *указано правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной.* Такое правило называют **функцией**, а соответствующую зависимость одной переменной от другой — **функциональной**.

Не всякая зависимость между переменными величинами является функциональной. Например, пусть длина автобусного маршрута равна 15 км. Стоимость проезда определяется следующей таблицей:

Стоимость проезда, грн.	1	2	3
Длина пути, который проезжает пассажир, км	до 5	от 5 до 10	от 10 до 15

Ясно, что переменные величины «стоимость проезда» и «длина пути, который проезжает пассажир» связаны между собой. Однако если считать стоимость проезда независимой переменной, то описанная зависимость не является функциональной. Действительно, если пассажир заплатил 1 грн., то нельзя однозначно установить, какой путь он проехал.

Если в примере 3 температуру T считать независимой переменной, то не всегда возможно по значению величины T однозначно найти значение величины t. Поэтому приведенная зависимость времени от температуры не является функциональной.

Обычно независимую переменную обозначают буквой x, зависимую — буквой y, функцию (правило) — буквой f. Если переменная y функционально зависит от переменной x, то этот факт обозначают так: $y = f(x)$ (читают: «игрек равен эф от икс»).

Независимую переменную еще называют **аргументом функции.**

Все значения, которые принимает аргумент, образуют **область определения функции**. Так, в первом примере областью определения функции являются все положительные числа; во втором — натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5; в третьем — все неотрицательные числа, не превосходящие 24.

Для функции f каждому значению аргумента x соответствует некоторое значение зависимой переменной y. Значение зависимой переменной еще называют **значением функции** и обозначают $f(x)$. Например, $f(7)$ — это значение функции при $x = 7$.

Так, в первом примере $f(2) = 8$, во втором $f(2) = 12\,100$, в третьем $f(2) = 0$. Вообще, запись $f(a) = b$ означает, что аргументу a соответствует значение функции b.

Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют **область значений функции.**

В примере 1 область значений функции — это все положительные числа, в примере 2 — числа, записанные во второй строке таблицы, в примере 3 — все числа, не меньшие -5 и не большие 7.

?

1. Как называют правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной?
2. Какую зависимость одной переменной от другой называют функциональной?
3. Как читают запись $y = f(x)$?
4. Что называют аргументом функции?
5. Что такое область определения функции?
6. Что называют значением функции?
7. Как читают запись $f(3) = 6$ и что она означает?
8. Что такое область значений функции?

753.° Связаны ли между собой периметр равностороннего треугольника и его сторона? Если сторона треугольника равна a, а периметр — P, то какой формулой задается зависимость переменной P от переменной a? Является ли эта зависимость функциональной?

754.° Связаны ли между собой площадь квадрата и его сторона? Если сторона квадрата равна a, а площадь — S, то какой формулой задается зависимость переменной S от переменной a? Является ли эта зависимость функциональной?

755.° Автомобиль движется со скоростью 60 км/ч. Как зависит длина пройденного им пути s от времени движения t? Задайте эту зависимость формулой. Является ли эта зависимость функциональной? В случае утвердительного ответа назовите аргумент соответствующей функции.

756.° В цистерне было 300 л воды. Через открытый кран каждую минуту из цистерны выливается 2 л воды. Задайте формулой зависимость объема V воды в цистерне от времени t, в течение которого из нее выливается вода. Является ли правило, с помощью которого по значению переменной t находят значение переменной V, функцией? В случае утвердительного ответа укажите область определения и область значений этой функции.

757.° Пусть a — длина ребра куба, V — его объем. Задайте формулой зависимость переменной V от переменной a. Является ли эта зависимость функциональной?

758.° Автомобиль проехал 120 км со скоростью v. Какой формулой задается зависимость времени движения t от скорости v автомобиля? Является ли эта зависимость функциональной? В случае утвердительного ответа укажите, что является аргументом соответствующей функции.

759.° Пусть градусные меры двух смежных углов равны α и β. Задайте формулой зависимость β от α. Является ли эта зависимость функциональной? В случае утвердительного ответа укажите, что является аргументом соответствующей функции, ее область определения и область значений.

760.° В вашем классе была проведена контрольная работа по математике.

1) Каждому ученику поставили в соответствие оценку, которую он получил.
2) Каждой оценке поставили в соответствие ученика, который ее получил.

Какое из этих правил является функцией?

761.° Рассмотрим правило, согласно которому каждому натуральному числу соответствует противоположное ему число. Является ли такое правило функцией?

762.° Каждому неотрицательному числу поставили в соответствие само это число, а каждому отрицательному числу — число, ему противоположное. Является ли такое правило функцией?

763.° Каждому рациональному числу, отличному от нуля, соответствует обратное ему число. Является ли такое правило функцией?

764.° Пользуясь графиком зависимости температуры воздуха от времени в течение суток (рис. 8), определите:

1) какой была температура воздуха в 4 ч? в 6 ч? в 10 ч? в 18 ч? в 22 ч?
2) в котором часу температура воздуха была 5 °C? −2 °C?
3) в котором часу температура воздуха была равной нулю?
4) какой была самая низкая температура и в котором часу?
5) какой была самая высокая температура и в котором часу?
6) в течение какого промежутка времени температура воздуха была ниже 0 °C? выше 0 °C?
7) в течение какого промежутка времени температура воздуха повышалась? снижалась?

Составьте по графику таблицу изменения температуры воздуха в течение суток через каждые 2 ч.

765.° На рисунке 9 изображен график изменения температуры раствора во время химического опыта.

1) Какова была начальная температура раствора?
2) Какой была температура раствора через 30 мин после начала опыта? через полтора часа?

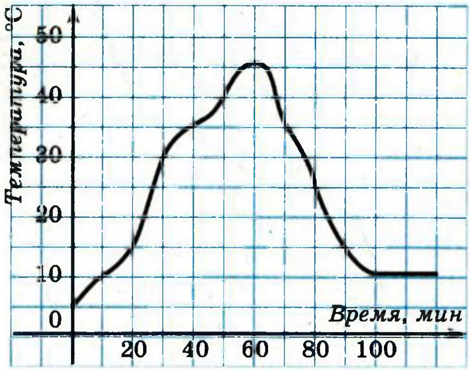


Рис. 9

3) Какой была самая высокая температура раствора и через сколько минут после начала опыта?

4) Через сколько минут после начала опыта температура раствора была 35° С?

Составьте по графику таблицу изменения температуры раствора через каждые 10 мин в течение первых двух часов после начала опыта.

766.° На рисунке 10 изображен график изменения температуры воздуха в течение суток. Пользуясь этим графиком, определите:

1) какой была температура воздуха в 2 ч? в 8 ч? в 12 ч? в 16 ч? в 22 ч?

2) в котором часу температура воздуха была −3° С? − 4° С? 0° С?

3) какой была самая низкая температура и в котором часу?

4) какой была самая высокая температура и в котором часу?

5) в течение какого промежутка времени температура воздуха была ниже 0° С? выше 0° С?

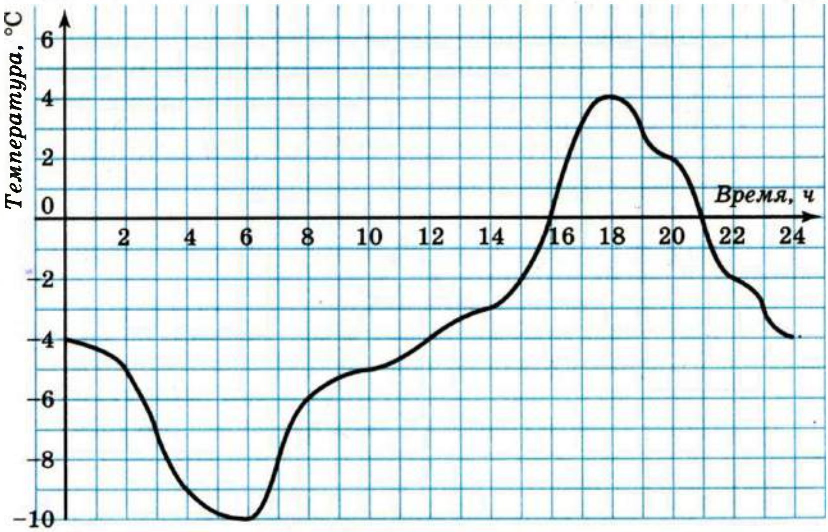


Рис. 10

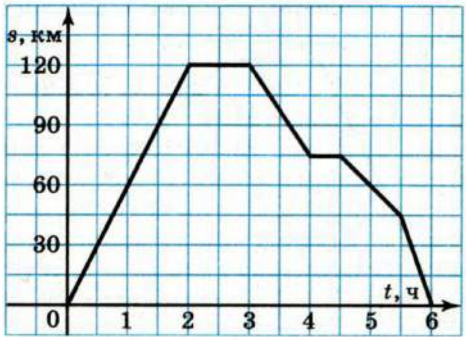


Рис. 11

6) в течение какого промежутка времени температура воздуха повышалась? снижалась?

Составьте по графику таблицу изменения температуры воздуха в течение суток через каждые 2 ч.

767.° Мотоциклист отъехал от дома и через некоторое время вернулся. На рисунке 11 изображен график изменения расстояния от мотоциклиста до дома в зависимости от времени (*график движения мотоциклиста*). Пользуясь графиком, определите:

1) какое расстояние проехал мотоциклист за первый час движения?
2) на каком расстоянии от дома мотоциклист остановился отдохнуть в первый раз? во второй раз?
3) сколько времени продолжалась первая остановка? вторая остановка?
4) на каком расстоянии от дома был мотоциклист через 5 ч после начала движения?
5) с какой скоростью двигался мотоциклист последние полчаса?

768.° На рисунке 12 изображен график движения туриста.

1) На каком расстоянии от дома был турист через 10 ч после начала движения?
2) Сколько времени он потратил на остановку?
3) Через сколько часов после выхода турист был на расстоянии 8 км от дома?
4) С какой скоростью шел турист до остановки?

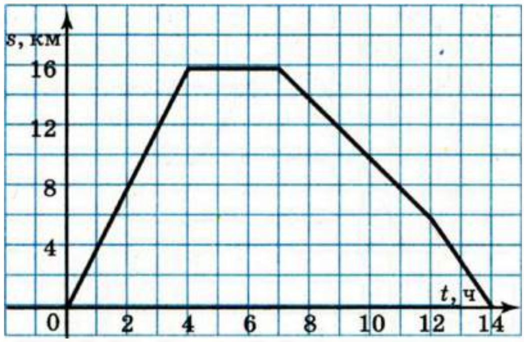


Рис. 12

5) С какой скоростью шел турист последние два часа?

769.° Каждому числу поставили в соответствие расстояние от точки, изображающей это число на координатной прямой, до начала отсчета. Поясните, почему описанное правило является функцией. Найдите ее область определения и область значений. Обозначив эту функцию буквой f, найдите $f(2)$, $f(-5)$, $f(0)$.

770.° Рассмотрим правило, по которому каждому однозначному натуральному числу поставили в соответствие последнюю цифру его квадрата. Является ли это правило функцией? В случае утвердительного ответа обозначьте эту функцию буквой g и найдите: 1) область определения и область значений функции; 2) $g(7)$, $g(3)$, $g(1)$, $g(9)$, $g(4)$.

771.° Рассмотрим правило, по которому числу 0 ставятся в соответствие все четные числа, а числу 1 — все нечетные числа. Является ли это правило функцией?

772.° Придумайте функцию f, областью определения которой являются все натуральные числа, а областью значений — три числа: 0, 1, 2. Найдите $f(7)$, $f(15)$, $f(101)$.

773.° Рассмотрим правило, по которому каждому натуральному числу поставили в соответствие остаток от деления его на 7. Является ли это правило функцией? В случае утвердительного ответа найдите область определения и область значений этой функции.

774.˙ В таблице приведены измерения температуры воздуха в течение суток через каждый час[1]. Постройте по этим данным график изменения температуры.

Время суток, ч	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Температура, °С	2	3	1	0	−2	−3	−5	−4	−2	0	1	4	7
Время суток, ч	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
Температура, °С	8	9	7	5	4	3	2	1	0	−2	−3	−6	

Пользуясь графиком, найдите, в течение какого времени температура повышалась и в течение какого времени снижалась.

775.˙ Велосипедист выехал из дома на прогулку. Сначала он ехал 2 ч со скоростью 12 км/ч, потом отдохнул час и вернулся домой со скоростью 8 км/ч. Постройте график движения велосипедиста.

776.˙ В таблице приведено изменение уровня воды в реке по сравнению с ординаром (средним уровнем воды) с 1 по 15 мая:

Дата	Изменение уровня воды, см	Дата	Изменение уровня воды, см	Дата	Изменение уровня воды, см
1	8	6	20	11	4
2	10	7	18	12	0
3	12	8	14	13	−3
4	15	9	10	14	−5
5	16	10	8	15	−6

Постройте график изменения уровня воды в реке за указанный период.

[1] В приведенной таблице значение аргумента в каждом следующем столбце на 1 больше значения аргумента в предыдущем столбце. В таком случае говорят, что таблица составлена *с шагом* 1.

777.˙ В начале нагревания температура воды была 6 °С. Во время нагревания температура воды повышалась каждую минуту на 2 °С.

1) Запишите формулу зависимости температуры T воды от времени t ее нагревания.
2) Составьте таблицу значений функции $T(t)$ за время нагревания с 0 мин до 10 мин с шагом 1 мин.
3) Постройте график изменения температуры воды в зависимости от изменения времени нагревания в течение первых 10 мин.

778.˙ Прямолинейная дорога проходит мимо туристического лагеря. Турист, находясь на расстоянии 5 км от лагеря, начал двигаться по этой дороге со скоростью 4 км/ч, удаляясь от лагеря.

1) Найдите расстояние s от лагеря, на котором будет находиться турист через t ч после начала движения.
2) Заполните таблицу значений s:

t, ч	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
s, км									

3) Пользуясь заполненной таблицей, постройте график зависимости расстояния до лагеря от времени движения туриста.

779.˙ В экономических исследованиях часто используют кривую спроса. *Кривая спроса* — это график, показывающий, как зависит спрос на товар от его цены. В таблице приведена зависимость спроса на картофель (в тысячах тонн) от цены 1 кг картофеля.

Цена 1 кг картофеля, грн.	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Спрос, тыс. т	15	12	10	6	4	1

Представьте данные, приведенные в таблице, графически. Соединив полученные точки отрезками, постройте кривую спроса на картофель.

780.˙ В городском совете Солнечного города представлены две партии: партия Знайки и партия Незнайки. Всего в городском совете 20 мест. В таблице приведено количество депутатских мест, полученных партией Знайки в течение 8 последних выборов.

Выборы	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество депутатов от партии Знайки	14	12	10	16	18	15	14	10

1) Составьте аналогичную таблицу для партии Незнайки.
2) В одной системе координат представьте данные каждой таблицы графически. Соединив полученные точки отрезками, постройте «кривые популярности» каждой партии.

781.˙ В баке было 8 л топлива. Каждую минуту в бак вливается 4 л.

1) Запишите зависимость количества y литров топлива в баке от времени x, в течение которого топливо заливалось в бак.
2) Начертите график изменения y, принимая значения x от 0 до 10.
3) Пользуясь графиком, определите:
   а) сколько литров топлива будет в баке через 12 мин, через 15 мин;
   б) через сколько минут в баке будет 60 л топлива.
4) Через сколько минут бак будет наполнен, если его емкость — 80 л топлива?

782.˙ На складе было 100 т угля. Ежедневно на склад привозили по 20 т угля.

1) Выразите формулой зависимость количества m угля на складе от времени t.
2) Начертите график этой зависимости.

783.¨ Какой из данных графиков (рис.13) иллюстрирует зависимость переменной y от переменной x, приведенную ниже:

1) стоимость проезда в автобусе возрастает на 1 грн. через каждые 10 км пути (x км — длина пути, y грн. — стоимость проезда);
2) металлическую пружину растянули и отпустили (x с — время, y см — длина пружины);

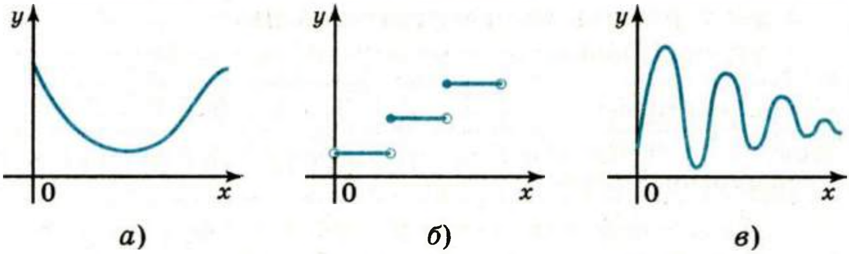


Рис. 13

3) цена клубники на рынке в течение мая—июня (x дней — время, y грн. — цена)?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

784. Решите уравнение:

1) $-1{,}2x + 7{,}2 = 0$;
2) $-\frac{1}{3}x - 6 = 0$;
3) $3x + 1{,}5 = -2{,}5$;
4) $6 - 0{,}5x = 16$.

785. Разложите на множители выражение:

1) $a^{12}b^{14} - 1\frac{9}{16}a^2b^6$;
2) $20z^2 + 3xy - 15xz - 4yz$;
3) $0{,}027a^{12} + b^9$.

786. Найдите такое наименьшее натуральное значение a, при котором выражение $x^2 - 4x + 2a$ принимает положительные значения при любом значении x.

787. (*Задача из «Теоретического и практического курса чистой математики» Е. Войтяховского*[1].) Капитан на вопрос, сколько у него в команде людей, ответил, что $\frac{2}{5}$ его команды в карауле, $\frac{2}{7}$ — на работе, $\frac{1}{4}$ — в лазарете и 27 человек в наличии. Вопрос: сколько человек было в его команде?

[1] Войтяховский Ефим (ум. около 1812) — российский математик-педагог. Его «Теоретический и практический курс чистой математики» выдержал много изданий и в течение 40 лет был одним из самых распространенных пособий для школ того времени.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

788. Натуральные числа x и y таковы, что $34x = 43y$. Докажите, что число $x + y$ составное.

21. Способы задания функции

Примеры, рассмотренные в предыдущем пункте, показывают, что функцию можно задавать различными способами.

Функция считается заданной, если указаны ее область определения и правило, с помощью которого можно по каждому значению независимой переменной найти значение зависимой переменной.

Вам не раз приходилось формулировать различные правила. Поскольку функция — это правило, то ее можно задать словами. Такой способ задания функции называют **описательным**.

Приведем несколько примеров.

ПРИМЕР 1

Пусть независимая переменная принимает любые значения. Значения зависимой переменной находим по правилу: каждое значение независимой переменной умножим на два и из полученного произведения вычтем единицу. Очевидно, что таким способом значение зависимой переменной находится однозначно. Следовательно, мы задали некоторую функцию f, областью определения которой являются все числа. Например, $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0$, $f(-13{,}4) = (-13{,}4) \cdot 2 - 1 = -27{,}8$ и т. п.

ПРИМЕР 2

Пусть независимая переменная принимает любые значения, кроме 0. Соответствующие значения зависимой и независимой переменных — взаимно обратные числа. Здесь задана функция f, область определения которой —

все числа, кроме 0. Например, $f(1) = 1$; $f(3) = \frac{1}{3}$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$ и т. п.

Рассмотрим самый распространенный способ задания функции: задание функции **с помощью формулы**.

Если в примере 1 независимую переменную обозначить буквой x, а зависимую — буквой y, то формула $y = 2x - 1$, где x — любое число, задает вышеописанную функцию.

Понятно, что функцию из второго примера задает формула $y = \frac{1}{x}$, где x — любое число, кроме 0.

Замечание. Если функция задана формулой, правая часть которой — целое выражение, и при этом не указана область определения, то будем считать, что областью определения такой функции являются все числа. Например, записи $y = x^2$, $y = \frac{x-3}{5}$, $y = x^2 - x + 2$ означают, что заданы функции, областью определения каждой из которых являются все числа.

Если, например, функция задана формулой $y = x^3$, то просто говорят, что задана функция $y = x^3$.

Если хотят подчеркнуть, что формула, например $y = 5 - \frac{x}{3}$, задает некоторую функцию f, то пишут $f(x) = 5 - \frac{x}{3}$.

Если хотят подчеркнуть, что, например, формула $s = 10t + 2$ задает функцию с аргументом t и зависимой переменной s, то пишут $s(t) = 10t + 2$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x - 2x^2$, областью определения которой являются числа -1; 0; $\frac{1}{2}$; 1; 3. Имеем:

$$f(-1) = -3;\ f(0) = 0;\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 0;\ f(1) = -1;\ f(3) = -15.$$

Полученные результаты занесем в таблицу:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
$f(x)$	-3	0	0	-1	-15

Все числа, записанные в первой строке этой таблицы, составляют область определения данной функции f. Таблица позволяет по указанному значению аргумента найти соответствующее значение функции. Следовательно, эта таблица — еще один способ задания функции f. Его называют **табличным**.

Этот способ удобно использовать в тех случаях, когда область определения функции состоит из нескольких чисел.

ПРИМЕР 3

Функция задана формулой $y = 5x + 2$. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно 12.

Решение. Подставив в формулу $y = 5x + 2$ вместо y число 12, получаем уравнение $5x + 2 = 12$, откуда $x = 2$.
Ответ: 2.

ПРИМЕР 4

Функция f задана таким образом: $f(x) = x + 7$, если $x \leqslant -1$, и $f(x) = 2$, если $x > -1$. Найдите значения функции f, соответствующие аргументам: 1) -2; 2) -1; 3) 1.

Решение

1) Так как $-2 \leqslant -1$, то значение функции вычисляется по формуле $f(x) = x + 7$. Следовательно, $f(-2) = -2 + 7 = 5$.
2) Так как $-1 \leqslant -1$, то $f(-1) = -1 + 7 = 6$.
3) Так как $1 > -1$, то $f(1) = 2$.

Заметим, что для задания данной функции используют форму записи с помощью фигурной скобки:

$$f(x) = \begin{cases} x + 7, & \text{если } x \leqslant -1, \\ 2, & \text{если } x > -1. \end{cases}$$

ПРИМЕР 5

Функции заданы формулами $y = 4x + 1$ и $y = 2x - 7$. При каком значении аргумента эти функции принимают равные значения?

Решение. Чтобы найти искомое значение аргумента, решим уравнение $4x + 1 = 2x - 7$.

Имеем:

$$4x - 2x = -7 - 1;$$
$$x = -4.$$

Ответ: при $x = -4$.

?

1. Что надо указать, чтобы функция считалась заданной?
2. Какие способы задания функции вы знаете?

789.° Прочитайте следующую запись, укажите аргумент функции и зависимую переменную:

1) $s(t) = 70t$;
2) $y(x) = -2x + 4$;
3) $V(a) = a^3$;
4) $f(x) = x^2 - 4$.

790.° Функция задана формулой $y = 10x + 1$. Найдите значение y, если:

1) $x = -1$; 2) $x = 3$; 3) $x = -\frac{1}{5}$; 4) $x = 7$.

791.° Функция задана формулой $y = x^2 - 3$. Найдите значение y, если:

1) $x = 5$; 2) $x = -4$; 3) $x = 0,1$; 4) $x = 0$.

792.° Функция задана формулой $y = -\frac{1}{6}x + 2$. Найдите:

1) значения функции для значений аргумента, равных 12, 6, −6, 0, 1, 2, −4, −3;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно:

а) 4; б) 3; в) 0; г) −1.

793.° Функция задана формулой $f(x) = 3 - 4x$. Верно ли равенство:

1) $f(-2) = -5$;
2) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$;
3) $f(0) = -1$;
4) $f(-1) = 7$?

794.° Функция задана формулой $f(x) = 2x - 1$.

1) Найдите $f(3)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(-0,5)$, $f(3,2)$.
2) Найдите значение x, при котором $f(x) = 7$, $f(x) = -9$, $f(x) = 0$, $f(x) = -2,4$.
3) Верно ли равенство: $f(5) = 9$, $f(0,3) = 0,4$, $f(-3) = -7$?

795.° Функция задана формулой $y = x(x + 8)$. Заполните таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

796.° Функция задана формулой $y = -\frac{2}{3}x$. Заполните таблицу:

x	-9	-6	-3	-2	-1	0	1	2	3	6
y										

797.° Каждому натуральному числу, которое больше, чем 10, но меньше, чем 20, поставили в соответствие остаток от деления этого числа на 6.
1) Каким способом задана эта функция?
2) Какова область значений этой функции?
3) Задайте эту функцию таблично.

798.° Область определения некоторой функции — однозначные натуральные числа, а значения функции в 2 раза больше соответственных значений аргумента.
1) Каким способом задана эта функция?
2) Задайте эту функцию формулой и таблично.

799.• Задайте формулой функцию, если значения функции:
1) противоположны соответственным значениям аргумента;
2) равны утроенным соответственным значениям аргумента;
3) на 4 больше квадратов соответственных значений аргумента.

800.• Задайте формулой функцию, если значения функции:
1) на 3 меньше соответственных значений аргумента;
2) на 5 больше удвоенного значения соответственного аргумента.

801.• Составьте таблицу значений функции, заданной формулой $y = x^2 + 2x$, где $-1 \leqslant x \leqslant 3$, с шагом 0,5.

802.• Составьте таблицу значений функции, заданной формулой $y = x^3 - 1$, где $-3 \leqslant x \leqslant 2$, с шагом 1.

803. Функция задана формулой $y = 0{,}2x - 5$. Заполните таблицу соответственных значений x и y:

x	4		−1,5		−3
y		2		−1,4	

804. Дана функция $y = 8 - \frac{1}{7}x$. Заполните таблицу:

x	14		−1,4	
y		0		9

805. Даны функции $g(x) = \frac{20}{x} - 3$ и $h(x) = 8 - 3x$. Сравните:
1) $g(1)$ и $h(1)$; 2) $g(5)$ и $h(2)$; 3) $g(-2)$ и $h(6)$.

806. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{если } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{если } -2 < x < 3, \\ 6, & \text{если } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Найдите: 1) $f(-3)$; 2) $f(-2)$; 3) $f(2)$; 4) $f(3)$; 5) $f(2{,}9)$; 6) $f(8{,}1)$.

807. Найдите значения функции $y = \begin{cases} -2x + 4, & \text{если } x > 0, \\ 0{,}1x - 5, & \text{если } x \leqslant 0, \end{cases}$
соответствующие аргументам:
1) 3; 2) 0,001; 3) 0; 4) −8.

808. Функция задана таблично:

x	2	4	6	8
y	5	7	9	11

1) Какие числа составляют область определения этой функции?
2) Задайте эту функцию описательно и формулой.

809. Функция задана таблично:

x	1	3	5	7	9
y	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5

1) Какие числа составляют область определения этой функции?

2) Задайте эту функцию описательно и формулой.

810.° Функции заданы формулами $y = x^2 - 8x$ и $y = 4 - 8x$. При каких значениях аргумента эти функции принимают равные значения?

811.° Функция задана формулой $f(x) = 3x + 5$. При каком значении x значение функции равно значению аргумента?

812.° Функция задана формулой $y = x^2 + 2x - 1$. При каких значениях x значение функции равно удвоенному значению аргумента?

813.* Функция f задана описательно: значение функции равно наибольшему целому числу, которое не превышает соответственного значения аргумента[1]. Найдите $f(3{,}7)$, $f(0{,}64)$, $f(2)$, $f(0)$, $f(-0{,}35)$, $f(-2{,}8)$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

814. Какое из следующих уравнений имеет: а) один корень; б) два корня; в) бесконечно много корней; г) не имеет ни одного корня:

1) $3{,}4(1 + 3x) - 1{,}2 = 2(1{,}1 + 5{,}1x)$;

2) $|2x - 1| = 17{,}3$;

3) $3(|x - 1| - 6) + 21 = 0$;

4) $0{,}2(7 - 2x) = 2{,}3 - 0{,}3(x - 6)$?

815. Даны три числа, из которых каждое следующее на 10 больше предыдущего. Найдите эти числа, если произведение наибольшего и среднего из них на 320 больше произведения наибольшего и наименьшего из этих чисел.

816. Докажите, что если $a + c = 2b$, то $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

817. Известно, что $x + y = \frac{a^2}{4}$, $y + z = -a$, $x + z = 1$. Докажите, что выражение $x + y + z$ принимает только неотрицательные значения.

---

[1] Для данной функции существует специальное обозначение $y = [x]$ (читают: «y равен целой части числа x»).

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

818. Постройте прямую, проходящую через точки $A(-2;\ 3)$ и $B(4;\ 3)$. Чему равны ординаты точек этой прямой?

819. Постройте прямую, проходящую через точки $C(3;\ 0)$ и $D(3;\ -4)$. Чему равны абсциссы точек этой прямой?

Обновите в памяти содержание пункта 34 на с. 273.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

820. Докажите, что в любом 60-значном числе, десятичная запись которого не содержит нулей, можно зачеркнуть несколько цифр так, что полученное в результате этого число будет делиться нацело на 1001.

22. График функции

Рассмотрим функцию $y = x^2 - 4x$, где $-1 \leqslant x \leqslant 4$. Составим таблицу значений этой функции с шагом 1:

x	-1	0	1	2	3	4
y	5	0	-3	-4	-3	0

Рассмотрим пары чисел, записанные в каждом столбце этой таблицы, как координаты $(x;\ y)$ точек координатной плоскости. При этом значение аргумента является абсциссой точки, а соответственное значение функции — ее ординатой.

Эти точки изображены на рисунке 14.

Очевидно, что, придавая аргументу другие значения из области определения и находя соответственные значения функции, можно отметить все больше и больше точек на координатной плоскости (рис. 15, 16).

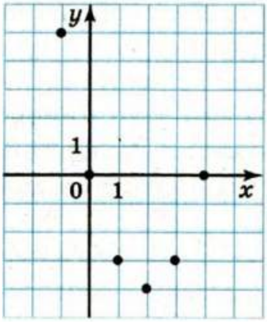


Рис. 14

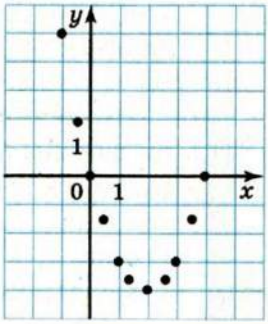


Рис. 15

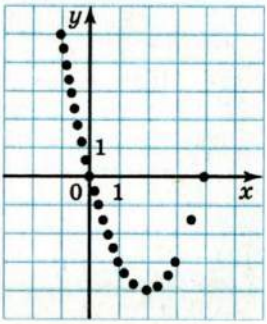


Рис. 16

Все точки координатной плоскости, которые можно отметить, действуя таким образом, образуют **график функции.**

Определение. Графиком функции *f* называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответственным значениям функции *f*.

Очевидно, что описанный метод построения графика функции $y = x^2 - 4x$ на практике реализовать невозможно. Ведь точек, которые следовало бы отметить, бесконечно много. Однако, если отметить достаточно много точек, а затем соединить их плавной линией, то полученная кривая (рис. 17) будет тем меньше отличаться от искомого графика, чем больше точек мы отметим.

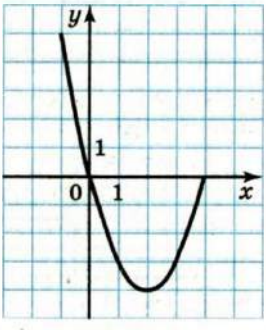


Рис. 17

Поскольку описанный метод построения графика функции требует значительной технической работы, то существенную ее часть может взять на себя компьютер. Сегодня существует много программ, предназначенных для построения графиков. Так, на экране

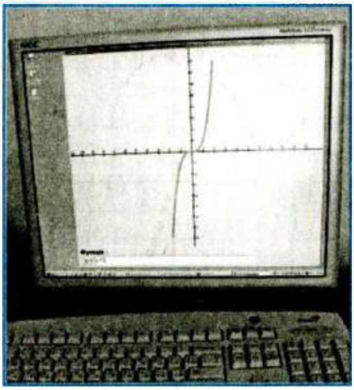


Рис. 18

монитора (рис. 18) изображен график функции $y = x^3$, где $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Подчеркнем, что если какая-то фигура является графиком функции f, то выполняются два условия:

1) если x_0 — некоторое значение аргумента, а $f(x_0)$ — соответственное значение функции, то точка с координатами $(x_0; f(x_0))$ обязательно принадлежит графику;
2) если $(x_0; y_0)$ — координаты произвольно выбранной точки графика, то x_0 и y_0 — соответственные значения независимой и зависимой переменных функции f, т. е. $y_0 = f(x_0)$.

Неверно считать, что график функции — это непременно какая-то линия. На рисунке 19 изображен график функции, заданной таблицей:

x	1	−2
y	3	0

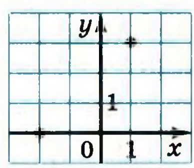


Рис. 19

Он состоит всего лишь из двух точек.

Рассмотрим пример построения графика функции, заданной описательно.

Область определения данной функции — все числа. Для каждого положительного аргумента значение функции равно 1; для каждого отрицательного аргумента значение функции равно −1; если аргумент равен нулю, то значение функции равно нулю. График этой функции изображен на рисунке 20. Он состоит из трех

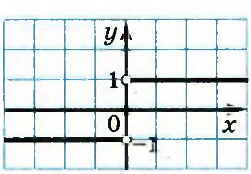


Рис. 20

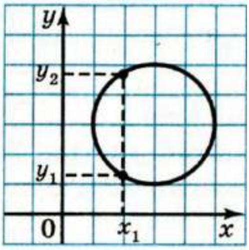


Рис. 21

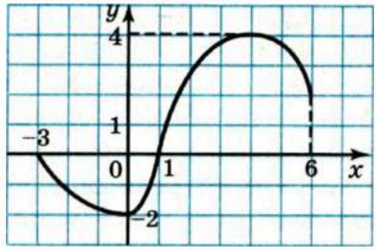


Рис. 22

частей: точки $O(0;\ 0)$ и двух лучей, у каждого из которых «выколото» начало.

Далеко не всякая фигура, изображенная на координатной плоскости, может служить графиком некоторой функции. Например, окружность не может являться графиком функции (рис. 21). Здесь по заданному значению аргумента x не всегда однозначно находится значение переменной y.

Фигура может являться графиком некоторой функции, если любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, имеет с этой фигурой не более одной общей точки.

Рисунок, схема, фотография какого-то объекта или процесса дают о нем наглядное представление. Ту же роль играет для функции ее график. Так, изучая график, изображенный на рисунке 22, можно, например, найти:

1) область определения функции: все x такие, что $-3 \leqslant x \leqslant 6$;
2) область значений функции: все y такие, что $-2 \leqslant y \leqslant 4$;
3) значения аргумента, при которых значение функции равно нулю: $x = -3$ или $x = 1$;
4) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения: $1 < x \leqslant 6$;
5) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения: $-3 < x < 1$, и т. д.

После изучения материала этого пункта становится понятно, почему в технике, медицине, экономике и многих других сферах человеческой деятельности так широко используются компьютерные программы, которые позволяют строить графики различных функциональных зависимостей.

ПРИМЕР 1

Принадлежит ли графику функции, заданной формулой $y = x - 6$, точка: 1) $A\,(8;\ 2)$; 2) $B\,(2;\ 4)$?

Решение. Чтобы установить, принадлежит ли точка графику функции, найдем значение функции при значении аргумента, равном абсциссе данной точки. Если значение функции будет равно ординате данной точки, то точка принадлежит графику, если не равно — не принадлежит.

1) При $x = 8$ имеем $y = 8 - 6 = 2$. Следовательно, точка A принадлежит графику данной функции.
2) При $x = 2$ имеем $y = 2 - 6 = -4 \neq 4$. Значит, точка B не принадлежит графику функции $y = x - 6$.

ПРИМЕР 2

Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^2 - 4$ с осями координат.

Решение. Точка принадлежит оси абсцисс тогда и только тогда, когда ее ордината равна нулю. Поэтому для нахождения координат точки пересечения графика данной функции с осью абсцисс надо решить уравнение $x^2 - 4 = 0$. Имеем $x = 2$ или $x = -2$. Следовательно, график данной функции имеет с осью абсцисс две точки пересечения: $A\,(2;\ 0)$ и $B\,(-2;\ 0)$.

Точка принадлежит оси ординат тогда и только тогда, когда ее абсцисса равна нулю. Поэтому для нахождения координат точки пересечения графика функции с осью ординат надо найти значение данной функции при $x = 0$. Имеем $y = -4$. Следовательно, график функции пересекает ось ординат в точке $C\,(0;\ -4)$.

?

1. Что называют графиком функции?
2. Какие два условия должны выполняться, чтобы фигура была графиком функции f ?
3. Сколько общих точек может иметь с графиком функции любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс?
4. Может ли график функции состоять из одной точки?

5. Всякая ли фигура может служить графиком функции?

6. Приведите пример фигуры, которая не может являться графиком функции.

821.° Пользуясь графиком функции $y = f(x)$, изображенным на рисунке 23, заполните таблицу:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

822.° На рисунке 24 изображен график некоторой функции. Пользуясь графиком, найдите:

1) значения y, если $x = -3{,}5$; $-1{,}5$; 2; 4;
2) значения x, которым соответствуют значения $y = -3$; $-1{,}5$; 2;
3) значения аргумента, при которых значение функции равно нулю;

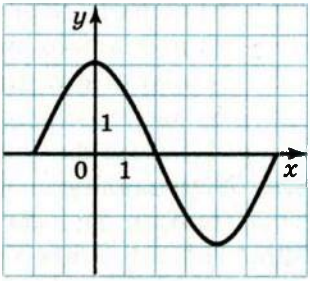


Рис. 23

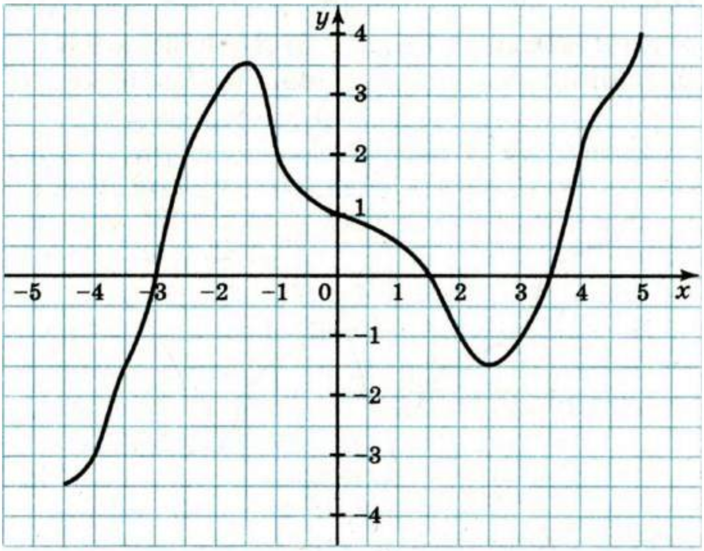


Рис. 24

4) область определения и область значений функции;
5) несколько значений аргумента, при которых значения функции положительные;
6) несколько значений аргумента, при которых значения функции отрицательные.

823.° На рисунке 25 изображен график функции $y = f(x)$. Пользуясь графиком, найдите:
1) $f(-4)$, $f(-2{,}5)$, $f(0{,}5)$, $f(2)$;
2) значения x, при которых $f(x) = 2{,}5$; $f(x) = 1$; $f(x) = 0$;
3) область определения и область значений функции;
4) несколько значений аргумента, при которых значения функции положительные;
5) несколько значений аргумента, при которых значения функции отрицательные.

824.° Принадлежит ли графику функции $y = x^2 + 2$ точка:
1) $A(0;\ 2)$; 2) $B(-1;\ 1)$; 3) $C(-2;\ 6)$; 4) $D(-3;\ -7)$?

825.° Назовите координаты нескольких точек, принадлежащих графику функции:
1) $y = 7x - 4$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = 4 - |x|$.

826.° Принадлежит ли графику функции $y = -\frac{x}{3}$ точка:
1) $A(9;\ -3)$; 3) $C(-1;\ 3)$;
2) $B(6;\ 2)$; 4) $D(-12;\ 4)$?

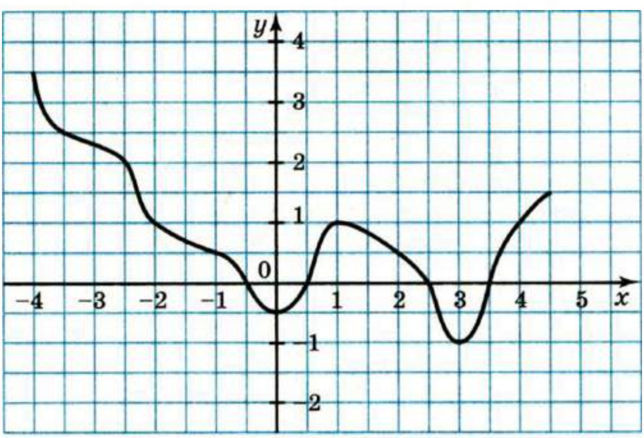


Рис. 25

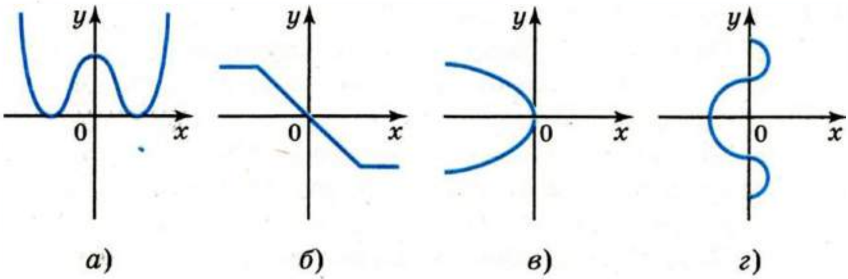


Рис. 26

827.° Какие из фигур, изображенных на рисунке 26, могут быть графиком функции?

828.° Какая из фигур, изображенных на рисунке 27, может быть графиком функции?

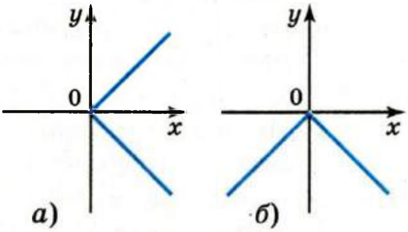


Рис. 27

829.• Графиком некоторой функции является ломаная $ABCD$ с вершинами в точках $A(-3;\ 6)$; $B(-1;\ 2)$; $C(3;\ -2)$; $D(9;\ 0)$.

1) Постройте график данной функции.
2) Найдите значение функции, если значение аргумента равно: -2; 0; 2; 6.
3) Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно: 1; -1; 0.

830.• Может ли ломаная ABC быть графиком некоторой функции, если:

1) $A(-4;\ -1)$, $B(1;\ 2)$, $C(2;\ 4)$;
2) $A(-4;\ -1)$, $B(1;\ 2)$, $C(1;\ 3)$?

831.• Графиком некоторой функции является ломаная MKE, где $M(-4;\ 1)$, $K(2;\ 4)$, $E(5;\ -2)$.

1) Постройте график данной функции.
2) Найдите значение функции, если значение аргумента равно: -2; 0; 3.
3) Найдите значение x, при котором $y = -2$; 0; 2.

832. Функция задана формулой $y = x^2 - 1$, где $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

1) Составьте таблицу значений функции с шагом 1.
2) Постройте график функции, пользуясь составленной таблицей.
3) Пользуясь графиком, найдите, при каких значениях аргумента значения функции меньше нуля и при каких — больше нуля.
4) Пользуясь графиком функции, укажите область значений функции.

833. Функция задана формулой $y = 4 - x^2$, где $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

1) Составьте таблицу значений функции с шагом 1.
2) Постройте график функции, пользуясь составленной таблицей.
3) Пользуясь графиком, найдите, при каких значениях аргумента значения функции меньше нуля и при каких — больше нуля.
4) Пользуясь графиком функции, укажите область значений функции.

834. Значение функции $y = f(x)$ равно 0 при значениях аргумента, равных -5 и 4. Какое из следующих утверждений верно:

1) график функции имеет с осью ординат две общие точки $(0; -5)$ и $(0; 4)$;
2) график функции имеет с осью абсцисс две общие точки $(-5; 0)$ и $(4; 0)$?

835. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

1) $y = x^2 - 16x$;
2) $y = |x| - 2$;
3) $y = x^3 - 9x$;
4) $y = 0{,}8x$.

836. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

1) $y = 36 - 9x$; 2) $y = x^2 + x$; 3) $y = 49 - x^2$.

837. Задана функция $y = 1 - x$, областью определения которой являются все однозначные натуральные числа. Постройте график этой функции.

838. Постройте график функции $f(x) = 1{,}5x + 1$, областью определения которой являются целые числа, удовлетворяющие неравенству $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

839.* Постройте график функции, областью определения которой являются все натуральные числа и которая принимает значение 1 при четных значениях аргумента и значение −1 при нечетных значениях аргумента.

840.* Функция f задана описательно: значение функции равно наибольшему целому числу, которое не превышает соответствующее значение аргумента. Постройте график этой функции.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

841. Упростите выражение:
1) $(c + 2)(c - 3) - (c + 1)(c + 3)$;
2) $(p + 4)(p - 11) + (p + 6)^2$;
3) $3(x - 5)^2 - (8x^2 - 10x)$;
4) $7(2y - 5)^2 - 2(7y - 1)^2$.

842. Докажите тождество:
1) $(4a^2 + 3)^2 + (7 - 4a^2)^2 - 2(4a^2 + 3)(4a^2 - 7) = 100$;
2) $(a^2 - 6ab + 9b^2)(a^2 + 6ab + 9b^2) - (a^2 - 9b^2)^2 = 0$.

843. Докажите, что при любом нечетном значении n значение выражения $(4n + 1)^2 - (n + 4)^2$ кратно 120.

844. Найдите каких-нибудь три натуральных значения переменной x таких, чтобы выражение $a^2 - 2x$ можно было разложить на множители по формуле разности квадратов. Полученные выражения разложите на множители.

845. (*Задача Бхаскары*[1].) Есть кадамба-цветок; на один лепесток пчелок пятая часть села. Рядом росла вся в цвету симендга, и на ней третья часть разместилась. Разность их ты найди, затем трижды ее сложи, на кумай этих пчел посади. Только пчелка одна не нашла себе места нигде, все летала туда и сюда, запахом цветов наслаждалась. И скажи мне теперь, сколько пчелок всего здесь собралось?

[1] Бхаскара II (1114–1185) — индийский математик и астроном, автор трактата «Венец системы» (около 1150 г.), в котором содержится изложение методов решения ряда алгебраических задач.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

846. В таблице приведены соответственные значения величин x и y. Установите, являются ли эти величины прямо пропорциональными.

1)

x	2	5	7	9
y	6	15	21	27

2)

x	0,4	1,8	2,3	3,1
y	0,8	3,8	4,6	6,2

847. Заполните таблицу, если величина y прямо пропорциональна величине x:

x	0,3	8	3,2		
y			9,6	2,7	42

Обновите в памяти содержание пункта 33 на с. 272.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

848. Из квадратного листа бумаги в клеточку, содержащего целое количество клеточек, вырезали по линиям квадрат, содержащий целое количество клеточек, так, что осталась 71 клеточка. Сколько клеточек содержал исходный лист бумаги?

23. Линейная функция, ее график и свойства

Рассмотрим два примера.

ПРИМЕР 1

В бассейне было 200 л воды. В течение t мин в бассейн каждую минуту наливали 80 л воды. Тогда объем V воды в бассейне вычисляется по формуле

$$V = 80t + 200, \text{ где } t \geqslant 0.$$

Эта формула задает функциональную зависимость переменной V от переменной t.

ПРИМЕР 2

Первая бригада собрала 25 ящиков яблок; каждый рабочий второй бригады собрал по 2 ящика. Пусть во второй бригаде было x рабочих. Обозначим количество всех ящиков, собранных двумя бригадами, буквой y. Тогда зависимость переменной y от переменной x выражается формулой

$y = 2x + 25$, где x — натуральное число.

В этих примерах мы построили функции, описывающие различные реальные ситуации. Однако они похожи тем, что формулы, их задающие, имеют вид $y = kx + b$.

Определение. **Функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, x — независимая переменная, называют линейной.**

Вот примеры линейных функций:

$$y = -2x + 1;\ y = 1 - x;\ y = 5x;\ y = 2.$$

Построим график функции $y = -2x + 1$.

Составим таблицу значений этой функции для некоторых значений аргумента:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	5	3	1	-1	-3	-5

Точки $A(-3;\ 7)$; $B(-2;\ 5)$; $C(-1;\ 3)$; $D(0;\ 1)$; $E(1;\ -1)$; $F(2;\ -3)$; $G(3;\ -5)$ принадлежат искомому графику (рис. 28). Все эти точки лежат на одной прямой, которая и является графиком функции $y = -2x + 1$ (рис. 29).

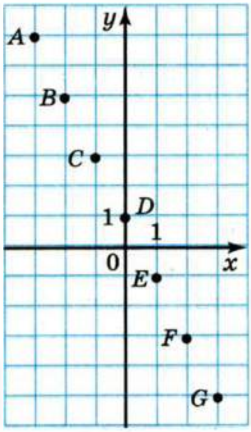


Рис. 28

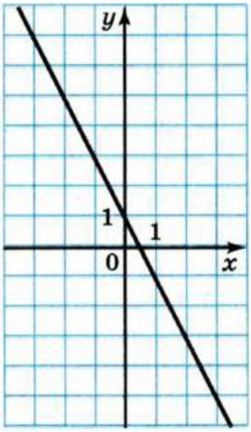


Рис. 29

В старших классах вы докажете, что ***графиком линейной функции, область определения которой — все числа, является прямая.***

Поскольку прямая однозначно задается любыми двумя своими точками, то для построения графика линейной функции достаточно выбрать два произвольных значения аргумента и составить таблицу, имеющую лишь два числовых столбца.

ПРИМЕР 3

Постройте график функции $y = -3x + 2$.

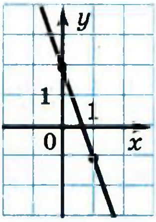


Рис. 30

Составим таблицу значений данной функции для двух произвольных значений аргумента:

x	0	1
y	2	-1

Отметим на координатной плоскости точки (0; 2) и (1; −1) и проведем через них прямую (рис. 30). Эта прямая и является графиком линейной функции $y = -3x + 2$.

В формуле $y = kx + b$, задающей линейную функцию, не исключены случаи, когда $k = 0$ или $b = 0$.

Рассмотрим случай, когда $b = 0$ и $k \neq 0$. Тогда формула приобретает вид $y = kx$. Отсюда для всех не равных нулю значений аргумента можно записать, что $\frac{y}{x} = k$. Эта формула показывает, что для функции $y = kx$ при $x \neq 0$ отношение соответственных значений зависимой и независимой переменных остается постоянным и равно k.

Напомним, что в 6-м классе, изучая прямую пропорциональность, вы уже познакомились с подобными зависимостями между величинами. Поэтому линейную функцию, которую задают формулой $y = kx$, где $k \neq 0$, называют **прямой пропорциональностью.**

Функции $y = 2x$, $y = x$, $y = -x$, $y = -\frac{1}{3}x$ — примеры прямых пропорциональностей.

Поскольку прямая пропорциональность — частный случай линейной функции (это выражает схема, изображенная на рисунке 31), то ее график — прямая. Особенностью является то, что эта прямая при любом k проходит через точку $O\,(0;\ 0)$. Действительно, если в формуле $y = kx$ положить $x = 0$, то получим $y = 0$. Поэтому для построения графика прямой пропорциональности достаточно указать какую-нибудь точку графика, отличную от начала координат, и провести прямую через эту точку и точку $O\,(0;\ 0)$.

Рис. 31

На рисунке 32 изображены графики прямых пропорциональностей, которые приводились выше в качестве примеров.

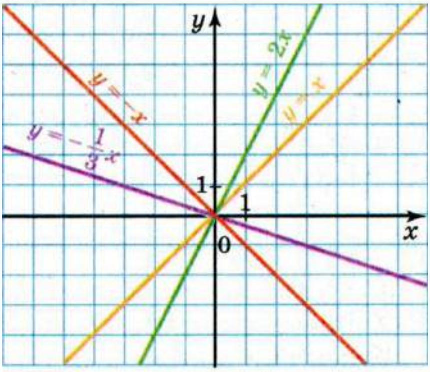


Рис. 32

Рассмотрим еще один частный случай линейной функции.

В формуле $y = kx + b$ положим $k = 0$. Получим $y = b$. Ясно, что в этом случае значения функции будут оставаться неизменными при любых изменениях значений аргумента.

ПРИМЕР 4

Постройте график функции $y = 2$.

Как и для построения графика любой линейной функции, нужно знать две принадлежащие ему точки. Эти точки будут иметь одинаковые ординаты, равные 2. Их абсциссы выберем произвольно, например, равные -2 и 0. Остается провести прямую через точки $A\,(-2;\ 2)$ и $B\,(0;\ 2)$ (рис. 33). Эта прямая параллельна оси абсцисс.

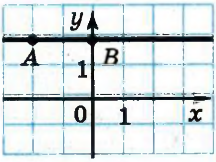


Рис. 33

Заметим, что графиком функции $y = 0$ является ось абсцисс. Графиком функции $y = b$, где $b \neq 0$, является прямая, параллельная оси абсцисс.

ПРИМЕР 5

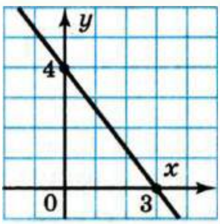


Рис. 34

Задайте формулой линейную функцию, график которой изображен на рисунке 34.

График данной функции пересекает ось ординат в точке (0; 4). Подставив координаты этой точки в формулу $y = kx + b$, получаем $4 = k \cdot 0 + b$, откуда $b = 4$.

Так как данный график пересекает ось абсцисс в точке (3; 0), то, подставив ее координаты в формулу $y = kx + 4$, получим: $3k + 4 = 0$; $k = -\frac{4}{3}$.

Ответ: $y = -\frac{4}{3}x + 4$.

?

1. Какую функцию называют линейной?
2. Что является графиком линейной функции?
3. Какую функцию называют прямой пропорциональностью?
4. Что является графиком прямой пропорциональности?
5. Что является графиком функции $y = b$?
6. Графиком какой функции является ось абсцисс?
7. Существует ли функция, графиком которой является ось ординат?

849.° Является ли линейной функция, заданная формулой:

1) $y = 3x - 2$; 4) $y = \frac{3}{x} + 2$; 7) $y = \frac{x}{5}$;

2) $y = 8 - 7x$; 5) $y = 2x^2 + 4$; 8) $y = -4$;

3) $y = \frac{x}{3} + 2$; 6) $y = \frac{12x - 8}{4}$; 9) $y = 0$?

В случае утвердительного ответа укажите значения коэффициентов k и b.

850.° Является ли прямой пропорциональностью функция, заданная формулой:

1) $y = 4x$; 3) $y = \frac{x}{4}$; 5) $y = -4x$;

2) $y = \frac{4}{x}$; 4) $y = 0$; 6) $y = -\frac{x}{4}$?

В случае утвердительного ответа укажите значение коэффициента k.

851.° Линейная функция задана формулой $y = 6x - 5$. Заполните таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

852.° Функция задана формулой $y = -2x + 5$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: -4; $3{,}5$; 0;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 9; -5; 0.

853.° Функция задана формулой $y = 0{,}3x - 2$. Найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 5; -2; 0;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 1; -11; $0{,}8$.

854.° Постройте график функции:

1) $y = x - 5$; 3) $y = -\frac{1}{6}x - 2$;

2) $y = 3x + 1$; 4) $y = 0{,}4x + 3$.

855.° Постройте график функции:

1) $y = 4 - x$; 2) $y = -4x + 5$; 3) $y = 0{,}2x - 3$.

856.° Функция задана формулой $y = \frac{1}{3}x$. Найдите:

1) значение y, если $x = 6$; -3; $-3{,}2$;

2) значение x, при котором $y = -2$; $\frac{1}{3}$; 12.

857.° Функция задана формулой $y = 1{,}2x$. Найдите:

1) значение y, если $x = 10$; $0{,}6$; -5; -4;

2) значение x, при котором $y = 3{,}6$; $-2{,}4$; 6.

858.° Постройте график прямой пропорциональности:

1) $y = 3x$; 2) $y = -2x$; 3) $y = -0{,}6x$; 4) $y = \frac{1}{7}x$.

859.° Постройте график функции:

1) $y = 5x$; 2) $y = 0{,}8x$; 3) $y = -\frac{1}{6}x$.

860.° Функциональная зависимость переменной y от переменной x является прямой пропорциональностью.

1) Заполните таблицу:

x	8	6	2	1	$\frac{1}{2}$	0	−1	−2	−3	−4
y	4									

2) Задайте данную функцию формулой.

3) Постройте график этой функции.

861.° Постройте в одной системе координат графики линейных функций: $y = 3$; $y = -5$; $y = 0$.

862.° Постройте график функции $y = 2x - 3$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 4; −1; 0,5;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 1; −1; 0;

3) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.

863.° Постройте график функции $y = 2 - 3x$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 1; 0; −2;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: −4; −1; 5;

3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

864.° Постройте график функции $y = 0{,}5x$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 4; −6; 3;

2) значение аргумента, при котором значение функции равно: 2,5; −2; 1;

3) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

865.° Постройте график функции $y = -4x$. Пользуясь графиком, найдите:

1) значение функции, если значение аргумента равно: 2; −1; 0,5;
2) значение аргумента, при котором значение функции равно: −4; 2;
3) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.

866.° Не выполняя построения графика функции $y = 1{,}8x - 3$, определите, через какие из данных точек проходит этот график: $A(-2;\ -6{,}6)$; $B(1;\ 1{,}2)$; $C(0;\ -3)$; $D(5;\ 7)$.

867.° Не выполняя построения, определите, принадлежит ли графику функции $y = 8x - 14$ точка:

1) $A(-1;\ -6)$; 2) $B(2;\ 2)$.

868.• Постройте в одной системе координат графики функций $y = x - 1$ и $y = \frac{1}{4}x + 2$ и найдите координаты точки их пересечения.

869.• Постройте в одной системе координат графики функций $y = 5x - 6$ и $y = -2x + 1$ и найдите координаты точки их пересечения.

870.• Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

1) $y = 2{,}5x + 10$; 2) $y = 6x - 4$.

871.• Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

1) $y = \frac{2}{3}x - 4$; 2) $y = 7 - 3x$.

872.• Не выполняя построения графика функции $y = 2x - 9$, найдите точку этого графика, у которой:

1) абсцисса равна ординате;
2) ордината на 6 больше абсциссы.

873.• Не выполняя построения графика функции $y = -7x + 8$, найдите точку этого графика, у которой абсцисса и ордината — противоположные числа.

874.• Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y = 3{,}7x + 10$ и $y = 1{,}4x - 13$;
2) $y = 4 - \frac{2}{7}x$ и $y = \frac{9}{7}x + 26$.

875.° Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графиков функций $y = 4x - 7$ и $y = -2x + 11$.

876.° При каком значении переменной x функции $f(x) = 4x - 3$ и $g(x) = 3x - 2$ принимают равные значения? Постройте на одной координатной плоскости графики функций f и g. Определите, при каких значениях x:

1) $f(x) > g(x)$; 2) $f(x) < g(x)$.

877.° При каком значении независимой переменной функции $f(x) = 5 - 2x$ и $g(x) = 2x - 3$ принимают равные значения? Построив на одной координатной плоскости графики данных функций, установите, при каких значениях x:

1) $f(x) < g(x)$; 2) $f(x) > g(x)$.

878.° Задайте формулой функцию, являющуюся прямой пропорциональностью, если ее график проходит через точку $M(2; -5)$.

879.° Найдите значение b, при котором график функции $y = -\frac{1}{9}x + b$ проходит через точку $A(-27; 4)$.

880.° При каком значении k график функции $y = kx - 15$ проходит через точку $B(3; -6)$?

881.° График функции $y = kx + b$ пересекает оси координат в точках $C(0; 4)$ и $D(-8; 0)$. Найдите значения k и b.

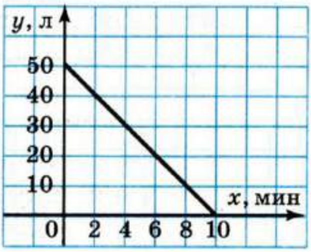
882.° График функции $y = kx + b$ пересекает оси координат в точках $M(3; 0)$ и $K(0; -1)$. Найдите значения k и b.

883.° Все точки графика функции $y = kx + b$ имеют одинаковую ординату, равную -6. Найдите значения k и b.

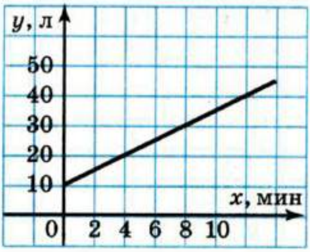
884.° График функции $y = kx + b$ параллелен оси абсцисс и проходит через точку $A(-2; 3)$. Найдите значения k и b.

885.° Один из графиков, изображенных на рисунке 35, отображает процесс наполнения одного бака водой, а другой — вытекание воды из второго бака.

1) Каким процессам соответствуют графики на рисунке 35?



а)



б)

Рис. 35

2) Сколько воды было сначала в каждом баке?

3) Сколько воды было в каждом баке через 2 мин после открытия кранов? через 6 мин?

4) Через сколько минут после открытия кранов в каждом баке было по 30 л воды?

5) Сколько литров воды каждую минуту наливается в один бак и сколько выливается из другого?

6) Задайте формулой зависимость количества воды в каждом баке от времени.

886.˙ Какая из прямых, изображенных на рисунке 36, является графиком функции:

1) $y = x$; 2) $y = 4x$; 3) $y = \frac{1}{4}x$; 4) $y = -\frac{1}{4}x$?

887.˙ Какая из прямых, изображенных на рисунке 37, является графиком функции:

1) $y = -x$; 2) $y = 3x$; 3) $y = -\frac{1}{2}x$; 4) $y = -2x$?

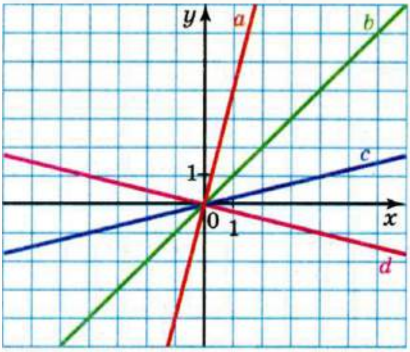


Рис. 36

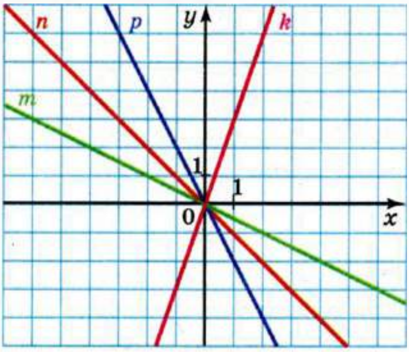


Рис. 37

888.⋅⋅ Задайте формулой какие-нибудь две линейные функции, графики которых проходят через точку:
1) $A\,(0;\ 4)$; 2) $B\,(1;\ 3)$.

889.⋅⋅ Графики функций $y = 0{,}5x - 3$, $y = -4x + 6$ и $y = kx$ пересекаются в одной точке. Найдите значение k. Постройте в одной системе координат графики этих функций.

890.⋅⋅ При каком значении b графики функций $y = 1{,}5x - 3$, $y = 2{,}5x + 1$ и $y = 5x + b$ пересекаются в одной точке?

891.⋅⋅ Точка C принадлежит отрезку AB, длина которого равна 8. Длина отрезка AC равна x, длина отрезка BC — y. Постройте график зависимости y от x, $0 < x < 8$. Отметьте на этом графике точку, соответствующую случаю, когда C — середина отрезка AB.

892.⋅⋅ Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 12, $AB = x$, $AD = y$, $0 < x < 6$. Постройте график зависимости y от x. Отметьте на этом графике точку, соответствующую случаю, когда прямоугольник $ABCD$ является квадратом.

893.⋅⋅ Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} x - 4, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -2x - 4, & \text{если } x < 0; \end{cases}$ 3) $y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \neq 2, \\ 3, & \text{если } x = 2; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 3x - 2, & \text{если } x \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } x > 1; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} 2x, & \text{если } x < -1, \\ 1, & \text{если } x = -1, \\ x + 3, & \text{если } x > -1. \end{cases}$

894.⋅⋅ Постройте график функции:

1) $y = \begin{cases} -3x, & \text{если } x \leqslant -1, \\ 3, & \text{если } -1 < x < 1, \\ 2x + 1, & \text{если } x \geqslant 1; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 5 - x, & \text{если } x \leqslant 3, \\ x + 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$

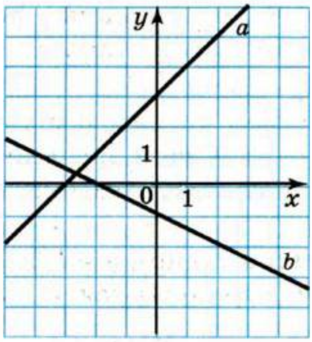


Рис. 38

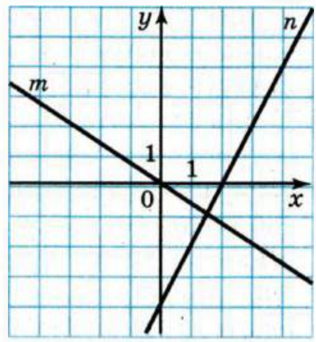


Рис. 39

895.•• Постройте график функции:
1) $y = |x|$; 2) $y = |x| + x$; 3) $y = 4x - |x| + 2$.

896.•• Постройте график функции:
1) $y = -|x|$; 2) $y = x - |x|$; 3) $y = 3x + 2|x|$.

897.•• Задайте формулой линейную функцию, графиком которой является изображенная на рисунке 38:
1) прямая a; 2) прямая b.

898.•• Задайте формулой линейную функцию, графиком которой является изображенная на рисунке 39:
1) прямая m; 2) прямая n.

899.* Функция задана описательно: значение функции равно разности между значением аргумента и целой частью аргумента[1]. Постройте график этой функции.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

900. Найдите значение выражения:
1) $(2 + 3a)(5 - a) - (2 - 3a)(5 + a)$ при $a = -1{,}5$;
2) $(3a + b)^2 - (3a - b)^2$ при $a = -3\frac{1}{3}$, $b = 0{,}3$.

---

[1] Данную функцию называют «дробная часть числа», и для нее существует специальное обозначение $y = \{x\}$. По определению $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ — целая часть x. Например, $\{3{,}2\} = 0{,}2$; $\{-3{,}2\} = 0{,}8$; $\{-0{,}16\} = 0{,}84$; $\{2\} = 0$.

901. Решите уравнение:

1) $(5x + 1)(2x - 3) = (10x - 9)(x + 2)$;

2) $(7x - 1)(x + 5) = (3 + 7x)(x + 3)$.

902. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится нацело на 3.

903. В двух кадках было поровну воды. Объем воды в первой кадке сначала увеличили на 10 %, а потом уменьшили на 10 %. Объем воды во второй кадке, наоборот, сначала уменьшили на 10 %, а потом увеличили на 10 %. В какой кадке воды стало больше?

904. Известно, что $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$. Чему равно значение выражения $x^4 + x^2y^2 + y^4$?

905. Докажите, что при любом значении x значение выражения $|x| - x$ больше соответствующего значения выражения $2x - x^2 - 2$.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

906. Найдите значение выражения:

1) $0{,}1x + 5y$, если $x = -4$, $y = 0{,}6$;

2) $x^2 - 3y + 7$, если $x = 6$, $y = -2$;

3) $|x| + |y - 6|$, если $x = -10$, $y = 2$;

4) $(2y - 3)^2 - (x + 4)^2$, если $x = -4$, $y = 1{,}5$.

907. Изобразите на координатной плоскости все точки $(x;\ y)$ такие, что:

1) $x = -3$, y — произвольное число;

2) $y = 2$, x — произвольное число;

3) $x = 0$, y — произвольное число.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

908. Есть два печатных автомата. Первый по карточке с числами $(a;\ b;\ c)$ выдает карточку с числами $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b+c}{2}; \frac{a+c}{2}\right)$, а второй по карточке с числами $(a;\ b;\ c)$ — карточку с числами $(2a - b,\ 2b - c,\ 2c - a)$. Можно ли с помощью этих автоматов из карточки $(2{,}8;\ -1{,}7;\ 16)$ получить карточку $(1{,}73;\ 2;\ 0{,}4)$?

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ № 6 «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

1. При каком значении аргумента значение функции $y = -1{,}5x + 4$ равно -2?

А) 4; Б) −4; В) 2; Г) −2.

2. Среди данных функций укажите прямую пропорциональность:

А) $y = 12 + x$; В) $y = \frac{12}{x}$;

Б) $y = 12$; Г) $y = 12x$.

3. Какая из данных функций не является линейной?

А) $y = -2x + 9$; В) $y = -\frac{x}{2} + 9$;

Б) $y = -\frac{2}{x} + 9$; Г) $y = 9 - 0{,}2x$.

4. Через какую из данных точек проходит график функции $y = x^2 - 3$?

А) $A(-3;\ 0)$; В) $C(-3;\ 3)$;

Б) $B(-3;\ 6)$; Г) $D(-3;\ -12)$.

5. Утром ученик пошел в школу, а после уроков вернулся домой. На рисунке 40 изображен график зависимости расстояния между учеником и его домом от времени движения. Сколько часов ученик находился в школе?

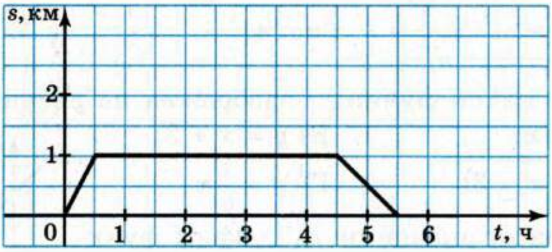


Рис. 40

А) 5 ч; Б) 4,5 ч; В) 4 ч; Г) 3,5 ч.

6. Графиком какой из данных функций является прямая, проходящая через начало координат?

А) $y = 20 + x$; В) $y = 20 - x$;

Б) $y = 20x$; Г) $y = x - 20$.

7. Графиком какой из данных функций является горизонтальная прямая?

А) $y = \frac{1}{9}$; В) $y = \frac{1}{9}x + 1$;

Б) $y = \frac{1}{9} - x$; Г) $y = \frac{1}{9}x$.

8. В какой точке график функции $y = x - 2$ пересекает ось ординат?

А) $A(0; -2)$; В) $C(2; 0)$;

Б) $B(0; 2)$; Г) $D(-2; 0)$.

9. Определите абсциссу точки пересечения графиков функций $y = 8 - 4x$ и $y = x + 14$.

А) −2; Б) 2; В) −1,2; Г) 1,2.

10. На каком из рисунков изображен график функции $y = 0,2x$ (рис. 41)?

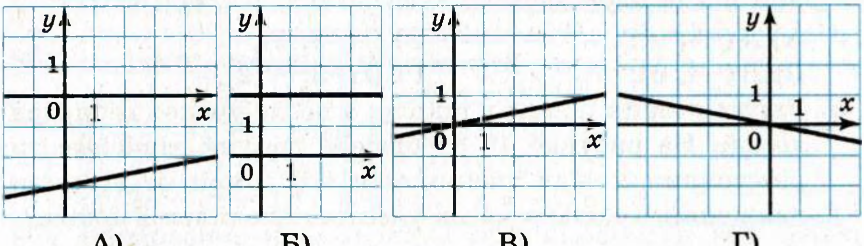


Рис. 41

11. График какой функции изображен на рисунке 42?

А) $y = 3x$; В) $y = x + 3$;

Б) $y = -x + 3$; Г) $y = \frac{1}{3}x$.

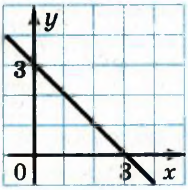


Рис. 42

12. При каком значении m график функции $y = mx + 2m - 5$ пересекает ось x в точке с абсциссой −1?

А) 5; Б) −5; В) −3; Г) 3.

ИТОГИ

В этом параграфе:

- были введены такие понятия:
  - функциональная зависимость;
  - функция;
  - аргумент функции;
  - область определения и область значений функции;
  - график функции;
  - линейная функция;
  - прямая пропорциональность;
- вы изучили:
  - способы задания функции;
  - свойства линейной функции;
  - метод построения графика линейной функции;
- вы узнали, в чем состоит отличие функции от других правил, задающих связи между величинами.

§ 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

- В этом параграфе вы познакомитесь с уравнениями с двумя переменными и их системами. Изучите некоторые методы их решения.
- Вы узнаете, что уравнение с двумя переменными может служить математической моделью реальной ситуации.
- Овладеете новым эффективным методом решения текстовых задач.

24. Уравнения с двумя переменными

Рассмотрим несколько примеров реальных ситуаций.

ПРИМЕР 1

Расстояние между Киевом и Харьковом равно 450 км. Из Киева в Харьков со скоростью x км/ч выехал автомобиль. Через 1 ч навстречу ему из Харькова со скоростью y км/ч выехал второй автомобиль. Они встретились через 2 ч после выезда второго автомобиля.

Построим математическую модель этой ситуации.

Путь, пройденный вторым автомобилем до встречи, равен $2y$ км. Поскольку первый автомобиль находился в пути на 1 ч дольше второго, то он до встречи проехал $3x$ км.

Имеем: $3x + 2y = 450$.

Это равенство с двумя переменными является математической моделью вышеописанной реальной ситуации.

Рассмотрим еще несколько примеров ситуаций, математическими моделями которых служат равенства с двумя переменными.

ПРИМЕР 2

Площадь квадрата со стороной 10 см равна сумме площадей двух других квадратов.

Если длины сторон этих квадратов обозначить x см и y см, то получим равенство

$$x^2 + y^2 = 100.$$

ПРИМЕР 3

Дан прямоугольный треугольник.

Если градусные меры его острых углов обозначить $x°$ и $y°$, то можно записать

$$x + y = 90.$$

ПРИМЕР 4

Дан прямоугольник, площадь которого равна 12 см². Обозначим длины его сторон x см и y см. Тогда

$$xy = 12.$$

ПРИМЕР 5

Купили 5 ручек и 7 тетрадей. За всю покупку заплатили 19 грн.

Если одна ручка стоит x грн., а одна тетрадь — y грн., то

$$5x + 7y = 19.$$

Как видим, все полученные в примерах 1–5 равенства

$$3x + 2y = 450,$$
$$x^2 + y^2 = 100,$$
$$x + y = 90,$$
$$xy = 12,$$
$$5x + 7y = 19$$

содержат по две переменные x и y. Такие равенства называют **уравнениями с двумя переменными**.

Если, например, в уравнение $xy = 12$ вместо x и y подставить числа 2 и 6, то получим верное равенство $2 \cdot 6 = 12$. В этом случае говорят, что пара значений переменных $x = 2$, $y = 6$ **удовлетворяет** данному уравнению или что эта пара является **решением** этого уравнения.

Определение. **Пару значений переменных, обращающую уравнение в верное равенство, называют решением уравнения с двумя переменными.**

Так, для уравнения $x^2 + y^2 = 100$ каждая из пар чисел

$$x = 8,\ y = 6;$$

$$x = -6,\ y = 8;$$
$$x = 10,\ y = 0$$

является его решением, а, например, пара $x = 5$, $y = 9$ его решением не является.

Обратим внимание на то, что данное определение похоже на определение корня уравнения с одной переменной. В связи с этим распространена ошибка: называть каждое число пары или саму пару, являющуюся решением, корнем уравнения с двумя переменными.

Тот факт, что пара $x = a$, $y = b$ является решением уравнения, принято записывать так: $(a; b)$ является решением уравнения. В скобках на первом месте пишут значение переменной x, а на втором — значение переменной y[1].

Используя такое обозначение, можно, например, записать, что каждая из пар чисел (5; 85), (40; 50), (50; 40) является решением уравнения $x + y = 90$.

Три указанные пары далеко не исчерпывают все решения этого уравнения. Если вместо переменной y подставлять в уравнение $x + y = 90$ любые ее значения, то будем получать линейные уравнения с одной переменной, корнями которых будут соответственные значения переменной x. Понятно, что так можно получить бесконечно много пар чисел, являющихся решениями уравнения $x + y = 90$.

Уравнение с двумя переменными не обязательно имеет бесконечно много решений. Например, уравнение $|x| + |y| = 0$ имеет только одно решение — пару чисел (0; 0), поскольку $|x| \geqslant 0$ и $|y| \geqslant 0$, а уравнение $x^2 + y^2 = -2$ вообще решений не имеет.

Заметим, что мы решили каждое из уравнений $|x| + |y| = 0$ и $x^2 + y^2 = -2$, но при этом уравнение $x + y = 90$ нами не решено.

Решить уравнение с двумя переменными — это значит найти все его решения или показать, что оно не имеет решений.

---

[1] Если переменные в уравнении обозначены буквами, отличными от x и y, то, записывая решение в виде пары, надо договориться, значение какой переменной ставится на первое место в паре, а какой — на второе. Как правило, принимается во внимание порядок букв латинского алфавита.

Свойства уравнений с двумя переменными запомнить легко: они аналогичны свойствам уравнений с одной переменной, которые вы изучали в 6 классе.

- Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, имеющее те же решения, что и данное.
- Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, имеющее те же решения, что и данное.
- Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, имеющее те же решения, что и данное.

Рассмотрим уравнение $x^2 + y^2 + 2 = 2x - 2y$. Преобразуем его, используя свойства уравнений. Имеем:

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2 = 0;$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 0;$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0.$$

Поскольку $(x - 1)^2 \geqslant 0$ и $(y + 1)^2 \geqslant 0$, то левая часть уравнения обращается в нуль только при *одновременном* выполнении условий: $x - 1 = 0$ и $y + 1 = 0$. Отсюда пара чисел $(1; -1)$ — единственное решение данного уравнения.

Изучая какой-то объект, мы стремимся не только описать его свойства, но и составить о нем наглядное представление. График функции — характерный тому пример. Поскольку решением уравнения с двумя переменными является пара чисел, например $(a; b)$, то совершенно естественно изобразить это решение в виде точки $M\ (a; b)$ на координатной плоскости. Если изобразить все решения уравнения, то получим **график уравнения.**

Определение. **Графиком уравнения с двумя переменными называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, координаты которых (пары чисел) являются решениями данного уравнения.**

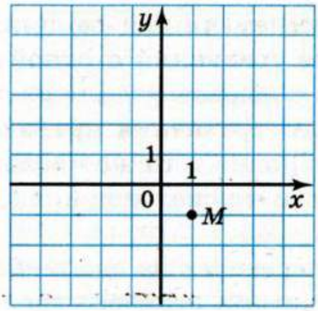


Рис. 43

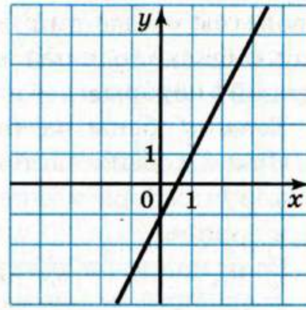


Рис. 44

Например, графиком уравнения $x^2 + y^2 + 2 = 2x - 2y$ является единственная точка M (1; −1) (рис. 43).

На рисунке 44 изображен график функции $y = 2x - 1$. Поскольку формула, задающая линейную функцию, является уравнением с двумя переменными, то также можно сказать, что на рисунке 44 изображен график уравнения $y = 2x - 1$.

Подчеркнем, что если какая-то фигура является графиком уравнения, то выполняются два условия:

1) все решения уравнения являются координатами точек, принадлежащих графику;
2) координаты любой точки, принадлежащей графику, — это пара чисел, которая является решением данного уравнения.

Семейства графиков уравнений очень разнообразны. Изучая курс алгебры, вы будете знакомиться с их представителями. Например, в 8 классе вы узнаете, что гра-

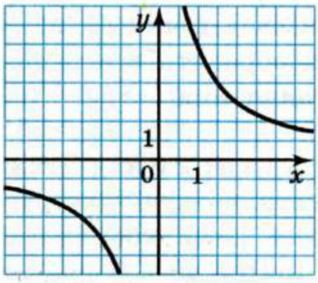


Рис. 45

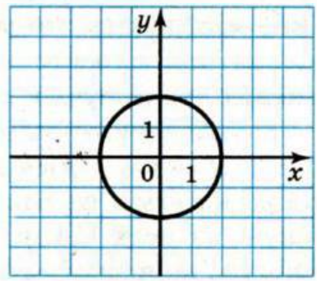


Рис. 46

фиком рассмотренного в начале пункта уравнения $xy = 12$ является фигура, изображенная на рисунке 45. Она называется **гиперболой**. А в 9 классе вы сможете доказать, что графиком уравнения $x^2 + y^2 = 4$ является окружность (рис. 46).

ПРИМЕР 6

Постройте график уравнения $xy + 3y = 0$.

Запишем данное уравнение в виде $y(x + 3) = 0$.

Следовательно, решениями данного уравнение являются все пары чисел вида $(x; 0)$, где x — произвольное число, и все пары чисел вида $(-3; y)$, где y — произвольное число.

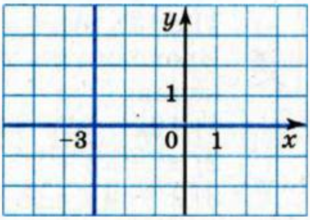


Рис. 47

Все точки, координаты которых имеют вид $(x; 0)$, где x — произвольное число, образуют ось абсцисс.

Все точки, координаты которых имеют вид $(-3; y)$, где y — произвольное число, образуют прямую, проходящую через точку $(-3; 0)$ параллельно оси ординат.

Следовательно, графиком данного уравнения является пара прямых, изображенных на рисунке 47.

1. Что называют решением уравнения с двумя переменными?
2. Что называют графиком уравнения с двумя переменными?
3. Сформулируйте свойства уравнений с двумя переменными.
4. Может ли график уравнения с двумя переменными состоять только из одной точки?
5. Какая фигура является графиком уравнения $y = kx + b$?

909.° Какие из данных уравнений являются уравнениями с двумя переменными:

1) $2x + y = 8$; 4) $a^2 - 3b = 8c$; 7) $x^3 - 8x = 100$;
2) $x + y + z = 0$; 5) $xy + 1 = 2$; 8) $x^3 - 8y = 100$;
3) $a^2 - 3b = 8$; 6) $5m - 3n = 6$; 9) $x^3 - 8xy = 100$?

910.° Является ли пара чисел $(-2; 3)$ решением уравнения:

1) $4x + 3y = 1$; 2) $x^2 + 5 = y^2$; 3) $xy = 6$?

911.° Какие из пар чисел (0; 1), (5; –4), (0; 1,2), (–1; 1), (1; –1) являются решениями уравнения:
1) $x^2 + 5y - 6 = 0$; 2) $xy + x = 0$?

912.° Принадлежит ли графику уравнения $2x^2 - y + 1 = 0$ точка:
1) $A(-3; -17)$; 3) $C(-2; 9)$;
2) $B(2; 9)$; 4) $D(-1; 4)$?

913.° Докажите, что график уравнения $xy - 12 = 0$ не проходит через точку:
1) $A(3; -4)$; 2) $B(-2; 6)$; 3) $C(7; 2)$.

914.° Проходит ли через начало координат график уравнения:
1) $12x + 17y = 0$;
2) $x^2 - xy + 2 = 0$;
3) $x^3 - 4y = y^2 + 3x$?

915.° Укажите какие-нибудь три решения уравнения:
1) $x - y = 10$; 2) $x = 4y$; 3) $2x^2 + y = 20$.

916.° Укажите какие-нибудь три решения уравнения:
1) $x + y = 1$; 2) $5x - y = 2$.

917.• График уравнения $4x + 3y = 30$ проходит через точку $A(6; b)$. Чему равно значение b?

918.• График уравнения $7x - 5y = 47$ проходит через точку $B(a; -1)$. Чему равно значение a?

919.• Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика уравнения:
1) $x + y = 2$; 3) $x^2 + y^2 = 9$;
2) $x^3 - y = 1$; 4) $|x| - y = 5$.

920.• Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика уравнения:
1) $2x - 3y = 6$; 2) $x^2 + y = 4$; 3) $|x| + |y| = 7$.

921.• Составьте какое-нибудь уравнение с двумя переменными, решением которого является пара чисел:
1) $x = 1$, $y = 2$; 2) $x = -3$, $y = 5$; 3) $x = 10$, $y = 0$.

922.• Составьте какое-нибудь уравнение с двумя переменными, график которого проходит через точку:
1) $A(-2; 2)$; 2) $B(4; -1)$; 3) $C(0; 0)$.

923.° Придумайте три уравнения, графики которых проходят через точку $M(6; -3)$.

924.° Придумайте три уравнения, графики которых проходят через точку $K(0; 4)$.

925.° Принадлежат ли графику уравнения $x^4 - y = -2$ точки, имеющие отрицательную ординату?

926.° Проходит ли график уравнения $x + y^2 = -4$ через точки, имеющие положительную абсциссу?

927.° Имеет ли решения уравнение:

1) $y^2 = x^2$; 4) $x^2 + y^2 = 25$; 7) $|x| + |y| = 1$;
2) $y^2 = -x^2$; 5) $x^2 + y^2 = -25$; 8) $|x| + |y| = 0$;
3) $xy = 0$; 6) $x^2 - y^2 = -9$; 9) $|x| + |y| = -1$?

В случае утвердительного ответа укажите примеры решений.

928.° Решите уравнение:

1) $x^2 + y^2 = 0$;
2) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$;
3) $x^4 + y^6 = -4$.

929.° Сколько решений имеет уравнение:

1) $x^2 + (y - 2)^2 = 0$;
2) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 0$;
3) $9x^2 + 16y^2 = 0$;
4) $(x^2 + y^2)y = 0$;
5) $xy = 2$;
6) $|x + 1| + |y| = 0$;
7) $x^2 + |y| = -100$;
8) $x + y = 2$?

930.° Приведите пример уравнения с переменными x и y:

1) имеющего одно решение;
2) не имеющего решений;
3) имеющего бесконечно много решений;
4) решением которого является любая пара чисел.

931.•• Что представляет собой график уравнения:

1) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 0$;
2) $|x + 9| + |y - 8| = 0$;
3) $4x + y = y + 4x$;
4) $(x - 1)(y + 5) = 0$?

932.•• Постройте график уравнения:

1) $(x + 2)^2 + y^2 = 0$;
2) $|x| + (y - 3)^2 = 0$;
3) $xy = 0$;
4) $(x + 1)(y - 1) = 0$;
5) $xy - 2y = 0$.

933.•• Постройте график уравнения:

1) $|x - 4| + |y - 4| = 0$;
2) $(x - 4)(y - 4) = 0$;
3) $xy + x = 0$.

934.•• Найдите все пары (x; y) натуральных чисел, являющиеся решениями уравнения:

1) $2x + 3y = 5$; 2) $x + 5y = 16$.

935.•• Найдите все пары (x; y) целых чисел, являющиеся решениями уравнения $|x| + |y| = 2$.

936.•• Найдите все пары (x; y) целых чисел, являющиеся решениями уравнения $x^2 + y^2 = 5$.

937.•• Кате надо заплатить за математическую энциклопедию 29 грн., у нее есть купюры по 2 грн. и по 5 грн. Сколькими способами Катя может рассчитаться за покупку, не получая сдачи?

938.•• Ученикам 7 класса на математическом конкурсе предложили решить задачи по алгебре и по геометрии. За каждую правильно решенную задачу по алгебре насчитывалось 2 балла, а за задачу по геометрии — 3 балла. Максимальное количество набранных баллов могло составить 24. Сколько было предложено задач отдельно по алгебре и по геометрии, если по каждому из этих предметов была хотя бы одна задача? Найдите все возможные ответы.

939.•• Решите уравнение:

1) $x^2 + y^2 + 4 = 4y$;
2) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + x + y + 0{,}5 = 0$;
4) $9x^2 + y^2 + 2 = 6x$.

940.•• Решите уравнение:

1) $x^2 + 10y + 30 = 10x - y^2 - 20$;
2) $4x^2 + y^2 + 4x = 2y - 3$.

941.•• Графиком уравнения $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$ является кривая, которую называют *кардиоидой* (рис. 48).

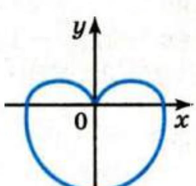


Рис. 48

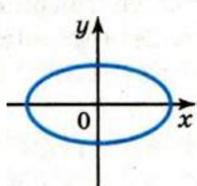


Рис. 49

Найдите координаты ее точек пересечения с осями координат.

942." Графиком уравнения $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ является кривая, которую называют *эллипсом* (рис. 49). Найдите координаты ее точек пересечения с осями координат.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

943. В емкость, содержащую 150 мл 8 %-ного раствора кислоты, добавили 90 мл воды. Чему равна концентрация кислоты в полученном растворе?

944. В мешке 7 красных, 10 зеленых и 12 желтых яблок. Какое наименьшее количество яблок надо вынуть, не заглядывая в мешок, чтобы с вероятностью, равной 1, среди вынутых яблок хотя бы одно было зеленым?

945. Найдите корень уравнения:

1) $\frac{4x+1}{5}-\frac{2x-3}{3}=x-4$; 2) $\frac{3x-5}{4}-\frac{5x-2}{3}=x+9$.

946. Из города A в город B одновременно выехали легковой и грузовой автомобили. Легковой автомобиль прибыл в город B через 3,5 ч после выезда, а грузовому осталось еще проехать 77 км. Найдите расстояние между городами, если скорость грузового автомобиля в 1,4 раза меньше скорости легкового.

947. Можно ли утверждать, что при любом натуральном четном значении n значение выражения $(5n + 10)^2 - (2n + 4)^2$ делится нацело на 84?

948. Известно, что при некоторых значениях m, n и k значение выражения $3m^2n$ равно 2, а значение выражения n^2k^4 равно 3. Найдите при тех же самых значениях m, n и k значение выражения:

1) $(3m^2n^2k^2)^2$; 2) $(-2m^2nk^2)^3\cdot(0,5n^2k)^2$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

949. Сравните значения выражений $(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot999\cdot1000)^2$ и 1000^{1000}.

25. Линейное уравнение с двумя переменными и его график

Определение. **Линейным уравнением с двумя переменными называют уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b, c — некоторые числа.**

Уравнения $3x + 2y = 450$, $x + y = 90$, знакомые вам по предыдущему пункту, являются линейными. Вот еще примеры линейных уравнений: $x + y = 3$; $0x + 5y = -1$; $-3x + 0y = 5$; $0x + 0y = 0$; $0x + 0y = 2$.

Выясним, какая фигура является графиком линейного уравнения. Для этого рассмотрим три случая.

СЛУЧАЙ 1

Рассмотрим линейное уравнение $ax + by = c$, где $b \neq 0$. Это уравнение можно преобразовать так:

$$by = -ax + c.$$

Поскольку $b \neq 0$, то запишем

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Введем обозначения: $-\frac{a}{b} = k$; $\frac{c}{b} = p$. Теперь можно записать

$$y = kx + p.$$

Мы получили формулу, задающую линейную функцию.

Следовательно, графиком уравнения $ax + by = c$, где $b \neq 0$, является прямая.

ПРИМЕР 1

Постройте график уравнения $x - 3y = -2$.

Решение. Мы уже знаем, что графиком этого уравнения является прямая. Поэтому достаточно определить координаты двух любых ее точек. Имеем: если $x = 1$, то $y = 1$; если $x = -2$, то $y = 0$. Теперь через точки $M(1; 1)$ и $N(-2; 0)$ проведем прямую (рис. 50). Эта прямая и является искомым графиком.

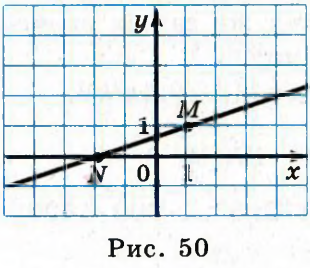


Рис. 50

СЛУЧАЙ 2

Пусть есть линейное уравнение $ax + by = c$, в котором $a \neq 0$, $b = 0$. Получаем $ax + 0y = c$. Построение графика уравнения такого вида рассмотрим на примере.

ПРИМЕР 2

Постройте график уравнения $3x + 0y = 6$.

Решение. Легко найти несколько решений этого уравнения. Вот, например, четыре его решения: $(2; -1)$, $(2; 0)$, $\left(2; \frac{1}{3}\right)$, $(2; -100)$. Ясно, что любая пара чисел вида $(2; t)$, где t — произвольное число, является решением. Следовательно, искомый график содержит все точки, у которых абсцисса равна 2, а ордината — любое число. Все эти точки принадлежат прямой, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через точку (2; 0) (рис. 51). При этом координаты любой точки этой прямой — пара чисел, являющаяся решением данного уравнения. А значит, указанная прямая и является искомым графиком.

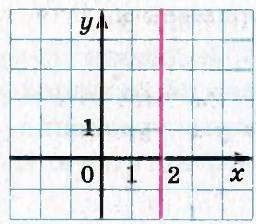


Рис. 51

Рассуждая аналогично, можно показать, что графиком уравнения $ax + 0y = c$, где $a \neq 0$, является прямая, перпендикулярная оси абсцисс.

Теперь можно сделать такой вывод: ***в каждом из двух случаев*: 1) $b \neq 0$; 2) $b = 0$ *и* $a \neq 0$ — *графиком уравнения* $ax + by = c$ *является прямая.***

Часто, например, вместо предложения «дано уравнение $y = 2x$» говорят «дана прямая $y = 2x$».

СЛУЧАЙ 3

Пусть $a = b = 0$ в линейном уравнении $ax + by = c$. Имеем $0x + 0y = c$.

Если $c \neq 0$, то это уравнение не имеет решений, а следовательно, на координатной плоскости не существует точек, которые могли бы служить графиком уравнения.

Если $c = 0$, то уравнение принимает вид:

$$0x + 0y = 0.$$

Любая пара чисел является его решением. Значит, в этом случае график уравнения — вся координатная плоскость.

Следующая таблица подытоживает материал, рассмотренный в этом пункте.

Уравнение	Значения a, b, c	График
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a и c — любые	невертикальная прямая
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c — любое	вертикальная прямая
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	вся координатная плоскость
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

ПРИМЕР 3

Выразите из уравнения $3x - 2y = 6$ переменную x через переменную y и найдите каких-нибудь два решения этого уравнения.

Решение. Имеем: $3x = 2y + 6;$

$$x = \frac{2y+6}{3};$$

$$x = \frac{2}{3}y + 2.$$

Придавая переменной y произвольные значения и вычисляя по полученной формуле $x = \frac{2}{3}y + 2$ соответственное значение x, можем найти сколько угодно решений данного уравнения $3x - 2y = 6$.

Например,

если $y = 6$, то $x = \frac{2}{3} \cdot 6 + 2 = 6,$

если $y = -2$, то $x = \frac{2}{3} \cdot (-2) + 2 = \frac{2}{3}.$

ПРИМЕР 4

Постройте график уравнения $4x = -8$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $4x + 0y = -8$. Отсюда получаем уравнение $x + 0y = -2$. Его решения — пары чисел вида $(-2; t)$, где t — произвольное число. Графиком этого уравнения является прямая, проходящая через точку (−2; 0) и перпендикулярная оси абсцисс (рис. 52).

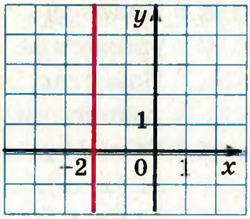


Рис. 52

ПРИМЕР 5

Составьте линейное уравнение с двумя переменными, графиком которого является прямая, проходящая через начало координат и точку $A(3; -12)$.

Решение. Так как график искомого уравнения проходит через точки $O(0; 0)$ и $A(3; -12)$, имеющие разные абсциссы, то он является невертикальной прямой. Тогда уравнение этой прямой можно записать в виде $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа.

Из того, что график проходит через начало координат, следует, что $b = 0$. Так как график проходит через точку $A(3; -12)$, то $-12 = 3k$, откуда $k = -4$.

Значит, искомое уравнение имеет вид $y = -4x$ или $4x + y = 0$.

Ответ: $4x + y = 0$.

1. Какое уравнение называют линейным уравнением с двумя переменными?
2. Что является графиком уравнения $ax + by = c$, если $b \neq 0$ или если $b = 0$ и $a \neq 0$?
3. Что является графиком уравнения $ax + by = c$ при $a = b = c = 0$?
4. При каких значениях a, b и c уравнение $ax + by = c$ не имеет решений?

950.° Является ли линейным уравнение с двумя переменными:

1) $7x + 11y = 36$;
2) $x^2 + 4y = 6$;
3) $12x - 17y = 0$;
4) $-3x + xy = 10$?

951.° Какие из пар чисел (7; 1), (0; −2), (8; 2), (−7; −5), (10; 3) являются решениями уравнения $3x - 7y = 14$?

952.° Решением какого из уравнений является пара чисел (3; −2):

1) $4x + 5y = 2$; 2) $3x - 2y = 5$; 3) $0{,}2x - 0{,}5y = 1{,}6$?

953.° Известно, что пара чисел $(-5; y)$ является решением уравнения $2x + 9y = 17$. Найдите значение y.

954.° Известно, что пара чисел $(x; 6)$ является решением уравнения $8x - 3y = 22$. Найдите значение x.

955.° Графику какого из уравнений принадлежит точка $M(1; 4)$:

1) $4y - 2x = -4$; 2) $6x + 11y = 50$?

956.° Проходит ли график уравнения $3x + y = -1$ через точку:

1) $M(-3; 10)$; 2) $N(4; -13)$; 3) $K(0; -1)$?

957.° Выразите из данного уравнения переменную x через переменную y и найдите каких-нибудь три решения этого уравнения:

1) $x + y = 12$; 3) $2x + 8y = 16$;
2) $x - 7y = 5$; 4) $-6x + 5y = 18$.

958.° Выразите из данного уравнения переменную y через переменную x и найдите каких-нибудь два решения этого уравнения:

1) $4x - y = 7$; 2) $-2x + y = 11$; 3) $5x - 3y = 15$.

959.° Найдите какие-нибудь три решения уравнения:

1) $x - y = 10$; 2) $2y - 5x = 11$.

960.° Найдите какие-нибудь три решения уравнения:

1) $6x + y = 7$; 2) $2x - 3y = -4$.

961.° Постройте график уравнения:

1) $x - y = 4$; 3) $x - 5y = 5$;
2) $4x + y = 3$; 4) $3x + 2y = 6$.

962.° Постройте график уравнения:

1) $x + y = -3$; 2) $6x + y = 0$; 3) $2x - 3y = 9$.

963.° Какие пары чисел являются решениями уравнения:

1) $0x + 4y = 20$; 2) $-3x + 0y = 27$?

964.° Постройте график уравнения:

1) $4y = -8$; 2) $1{,}2x = 3{,}6$.

965.° Постройте график уравнения:

1) $-0{,}2x = 1$; 2) $0{,}5y = 2$.

966.° В какой точке прямая $7y - 3x = 21$ пересекает:

1) ось x; 2) ось y?

967.° Найдите координаты точек пересечения прямой $0{,}3x + 0{,}2y = 6$ с осями координат.

968.° Составьте какое-нибудь линейное уравнение с двумя переменными, решением которого является пара чисел $(-2; 1)$.

969.° Составьте какое-нибудь линейное уравнение с двумя переменными, решением которого является пара чисел $(3; 5)$.

970.˙ Найдите решение уравнения $7x + 8y = 30$, состоящее из двух равных чисел.

971.˙ Найдите решение уравнения $-12x + 17y = -87$, состоящее из двух противоположных чисел.

972.˙ При каком значении a пара чисел $(a; 2a)$ является решением уравнения $2x + 7y = 16$?

973.˙ При каком значении a пара чисел $(-4; 2)$ является решением уравнения:

1) $3x + 5y = a$; 2) $ax + 5y = 18$?

974.˙ При каком значении a график уравнения $11x - 13y = a + 4$ проходит через начало координат?

975.˙ При каком значении a через точку $A(5; -3)$ проходит график уравнения:

1) $4x - 9y = a$; 2) $6x - ay = 15$?

976.˙ При каком значении a график уравнения $ax + 4y = 0$ проходит через точку:

1) $A(12; -4)$; 2) $B(0; 2)$; 3) $O(0; 0)$?

977.˙ При каком значении b график уравнения $5x + by = 0$ проходит через точку:

1) $M(-4; -10)$; 2) $N(0; 1)$; 3) $K(-2; 0)$?

978.˙ Графиком каких уравнений является та же прямая, что и график уравнения $2x - 5y = 3$:

1) $4x - 10y = 6$; 4) $5y - 2x = -3$;
2) $4x - 10y = 3$; 5) $x - 2{,}5y = 1{,}5$;
3) $2x - 5y = 6$; 6) $-0{,}4x - y = 0{,}6$?

979.˙ Составьте уравнение с двумя переменными по такому условию:

1) длина прямоугольника равна x м, ширина — y м, периметр — 18 м;
2) автобус ехал 4 ч со скоростью x км/ч, а 3 ч — со скоростью y км/ч, проехав всего 250 км;
3) тетрадь стоит x грн., а ручка — y грн., 2 ручки дороже 5 тетрадей на 1,2 грн.;

4) кусок сплава массой x кг, содержащего 12 % меди, и кусок сплава массой y кг, содержащего 20 % меди, сплавили вместе и получили новый сплав, содержащий 9 кг меди;
5) в одном ящике было x кг конфет, а в другом — y кг; после того как из первого ящика переложили во второй 8 кг конфет, в обоих ящиках конфет стало поровну.

980.° Составьте уравнение с двумя переменными по такому условию:
1) боковая сторона равнобедренного треугольника равна a см, основание — b см, периметр — 32 см;
2) один автомобиль проехал со скоростью x км/ч за 6 ч на 32 км меньше, чем другой автомобиль со скоростью y км/ч проехал за 7 ч;
3) в одном магазине было x ц яблок, а в другом — y ц; за день в первом магазине продали 14 % яблок, а во втором — 18 % яблок, причем во втором магазине продали на 1,2 ц яблок меньше, чем в первом.

981.° Докажите, что прямые $5y - x = 6$ и $3x - 7y = 6$ пересекаются в точке $A(9; 3)$.

982.° Докажите, что прямые $4x - 3y = 12$ и $3x + 4y = -66$ пересекаются в точке $B(-6; -12)$.

983.° Составьте линейное уравнение с двумя переменными, графиком которого является прямая, проходящая через начало координат и точку:
1) $A(2; 8)$; 2) $B(-6; 15)$.

984.° Составьте линейное уравнение с двумя переменными, графиком которого является прямая, проходящая через начало координат и точку $C(8; -12)$.

985.° Докажите, что не существует такого значения a, при котором прямая $ax - 3y = 12$ проходит через начало координат.

986.° При каком значении a точка пересечения прямых $2x - 3y = -6$ и $4x + y = a$ принадлежит оси абсцисс?

987.° При каком значении b точка пересечения прямых $9x + 7y = 35$ и $x + by = -20$ принадлежит оси ординат?

988.˙ При каких значениях a и b прямая $ax + by = 24$ пересекает оси координат в точках $A\,(-6;\ 0)$ и $B\,(0;\ 12)$?

989.˙ На каком из рисунков 53, *а–г* изображен график уравнения $x + y = 3$?

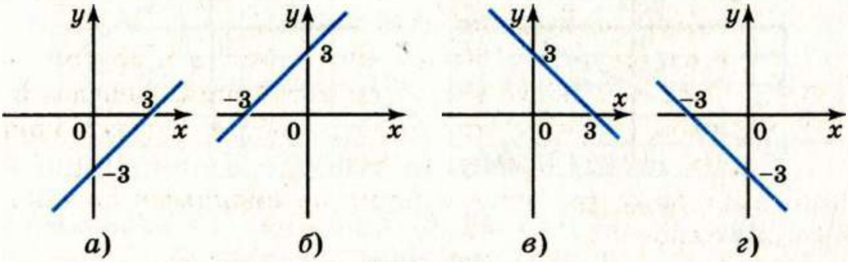


Рис. 53

990.˙ На каком из рисунков 54, *а–г* изображен график уравнения $x - y = -5$?

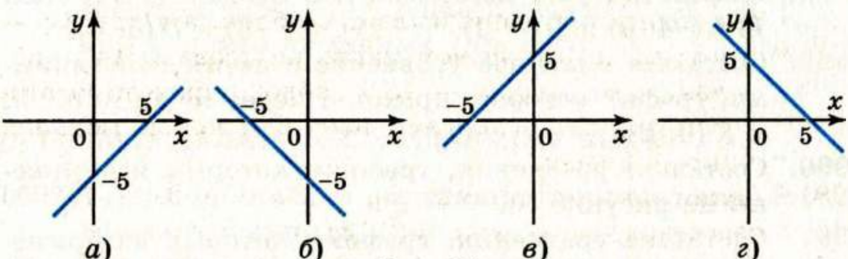


Рис. 54

991.˙ Какая из прямых, изображенных на рисунке 55, является графиком уравнения:

1) $0x + y = -3$;

2) $2x - y = 1$;

3) $3x + 0y = 6$;

4) $x + 2y = 0$?

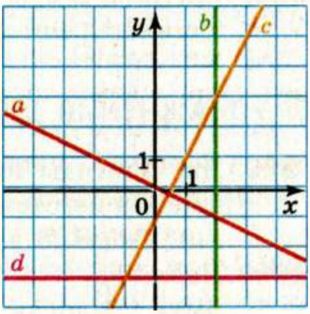


Рис. 55

992.˙ Принадлежит ли графику уравнения $13x + 17y = -40$ хотя бы одна точка, у которой обе координаты — положительные числа?

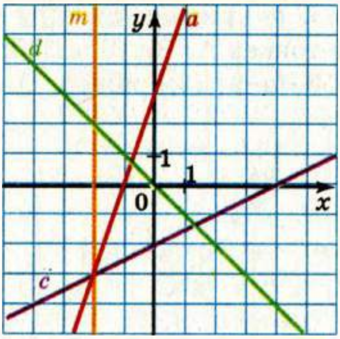


Рис. 56

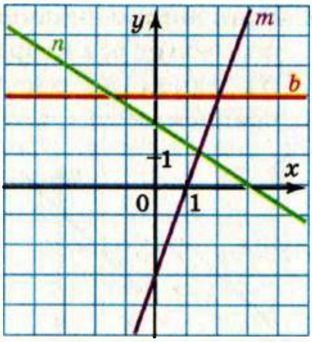


Рис. 57

993.˙ Принадлежит ли графику уравнения $4x - 8y = 7$ хотя бы одна точка, у которой обе координаты — целые числа?

994.˙˙ Составьте линейное уравнение с двумя переменными, график которого пересекает оси координат в точках: 1) $A(-4; 0)$ и $B(0; 2)$; 2) $C(0; -3)$ и $D(5; 0)$.

995.˙˙ Составьте линейное уравнение с двумя переменными, график которого проходит через точки $M(6; 0)$ и $K(0; 6)$.

996.˙˙ Составьте уравнения, графики которых изображены на рисунке 56.

997.˙˙ Составьте уравнения, графики которых изображены на рисунке 57.

998.˙ Сколько существует пар простых чисел $(x; y)$, являющихся решениями уравнения $5x - 6y = 3$?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

999. Две бригады изготовили 840 деталей, причем одна бригада изготовила на 80 % больше деталей, чем другая. Сколько деталей изготовила каждая бригада?

1000. Известно, что 4 одинаковых экскаватора могут вырыть котлован за 12 ч. За какое время 6 таких же экскаваторов выроют 3 таких котлована?

1001. Докажите, что значение выражения $2^{36} + 4^{100} - 2^{32} - 4^{98}$ кратно числу: 1) 15; 2) 240.

1002. Решите уравнение:

1) $(x - 8)^2 - (x - 4)(x + 4) = 0;$

2) $(4x - 5)(4x + 5) - (4x - 1)^2 = 9 - 2x.$

1003. Разложите на множители:

1) $6x^3 - 8x^2 + 3xy - 4y;$ 3) $\frac{125x^3}{27} - \frac{m^6n^9}{64};$

2) $x^4 - 6x^2y + 9y^2 - 16;$ 4) $c^2 - 2c - b^2 - 4b - 3.$

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

1004. Какая из пар чисел (3; 3), (−3; 3), (−3; −3) является решением каждого из уравнений $x^2 + y^2 = 18$ и $x + y = 0$?

1005. На рисунке 58 изображены графики уравнений $y = x^2$ и $x - y + 2 = 0$. Пользуясь этим рисунком, найдите все пары чисел, являющиеся решениями каждого из данных уравнений.

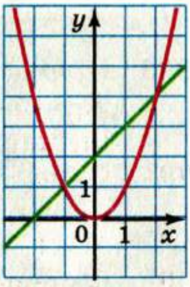


Рис. 58

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

1006. Сумма 100 разных натуральных чисел равна 5051. Найдите эти числа.

Как строили мост между геометрией и алгеброй

Идея координат зародилась очень давно. Ведь уже в древности люди изучали Землю, наблюдали звезды, а по результатам своих исследований составляли карты, схемы.

Во II в. до н. э. древнегреческий ученый Гиппарх впервые использовал идею координат для определения местоположения объектов на поверхности Земли.

Лишь в XIV в. французский ученый Никола Орем (около 1323—1392) впервые применил в математике идею Гиппарха: он разбил плоскость на клетки (как разбит ваш тетрадный листок) и стал задавать положение точек широтой и долготой.

П. Ферма

Р. Декарт

Однако огромные возможности применения этой идеи были раскрыты только в XVII в. в работах выдающихся французских математиков Пьера Ферма (1601—1665) и Рене Декарта (1596—1650). В своих трудах эти ученые показали, как благодаря системе координат можно переходить от точек к числам, от линий к уравнениям, от геометрии к алгебре.

Несмотря на то, что П. Ферма опубликовал свое сочинение годом раньше, чем Р. Декарт, ту систему координат, которой мы сегодня пользуемся, называют **декартовой**. Это связано с тем, что Р. Декарт в своей работе «Рассуждения о методе» изобрел новую удобную буквенную символику, которой с небольшими изменениями мы пользуемся и сегодня. Вслед за ним мы обозначаем переменные последними буквами латинского алфавита x, y, z, а коэффициенты — первыми: a, b, c, ... Привычные нам обозначения степеней x^2, x^3, y^5 и т. п. также ввел Р. Декарт.

26. Системы уравнений с двумя переменными. Графический метод решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными

Легко проверить, что пара чисел (−2; 0) является решением как уравнения $x^2 + y^2 = 4$, так и уравнения $y = x^2 - 4$. В таких случаях говорят, что пара чисел (−2; 0) — **общее решение** указанных уравнений.

На рисунке 59 изображены графики уравнений $-6x + 5y = 9$ и $4x + 3y = 13$. Они пересекаются в точке M (1; 3). Эта точка принадлежит каждому из графиков. Следовательно, пара чисел (1; 3) является общим решением данных уравнений.

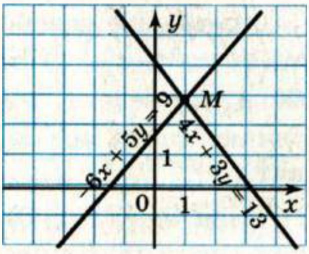


Рис. 59

Если поставлена задача найти стороны прямоугольника, площадь которого равна 12 см^2, а периметр 14 см, то понятно, что надо найти общее решение уравнений $xy = 12$ и $2x + 2y = 14$, где x см и y см — длины соседних сторон.

Если требуется найти все общие решения нескольких уравнений, то говорят, что нужно решить **систему уравнений.**

Систему уравнений записывают с помощью фигурной скобки.

Так, запись

$$\begin{cases} xy = 12, \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$$

является математической моделью задачи о поиске сторон прямоугольника, площадь которого равна 12 см^2, а периметр 14 см.

Система $\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$

— это математическая модель задачи о поиске координат общих точек двух прямых (рис. 59).

Оба уравнения этой системы являются линейными. Поэтому эту систему называют **системой двух линейных уравнений с двумя переменными.**

Определение. **Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающую каждое уравнение в верное равенство.**

Из примера, приведенного в начале пункта, следует, что пара чисел (−2; 0) является решением системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$$

Однако это совершенно не означает, что данная система решена.

Определение. Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Пара чисел (−2; 0) не исчерпывает всех решений последней системы. Например, пара чисел (2; 0) — тоже решение. Эту систему, как и систему, полученную в задаче о прямоугольнике, вы научитесь решать в 9 классе.

А вот систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -4, \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

мы можем решить уже сейчас. Очевидно, что первое уравнение этой системы решений не имеет, а значит, не существует и общего решения уравнений, входящих в систему. Отсюда следует вывод: система решений не имеет.

Также можно считать решенной систему

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13. \end{cases}$$

Действительно, графики уравнений системы пересекаются в точке M (1; 3) (рис. 59). Ее координаты являются решением каждого уравнения системы, а значит, и самой системы. Других общих точек графики уравнений не имеют, а следовательно, не имеет других решений и сама система. Вывод: пара чисел (1; 3) — единственное решение системы.

Описанный метод решения системы уравнений называют **графическим**. Его суть состоит в следующем:

- построить на одной координатной плоскости графики уравнений, входящих в систему;
- найти координаты всех точек пересечения построенных графиков;
- полученные пары чисел и будут искомыми решениями.

Не всякую систему уравнений выгодно решать графически. Например, если пара чисел $\left(\frac{1}{17}; -\frac{36}{85}\right)$ является решением какой-то системы, то понятно, что установить этот факт графически крайне сложно. А потому графический метод обычно применяют в тех случаях, когда решение достаточно найти приближенно. А то, что пара чисел (1; 3) является решением системы $\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13, \end{cases}$ подтверждает непосредственная подстановка этой пары в каждое из уравнений системы, то есть проверка.

Графический метод эффективен в тех случаях, когда требуется определить количество решений системы. Например, на рисунке 60 изображены графики некоторых функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Эти графики имеют три общие точки. Это позволяет нам утверждать, что система $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x) \end{cases}$ имеет три решения.

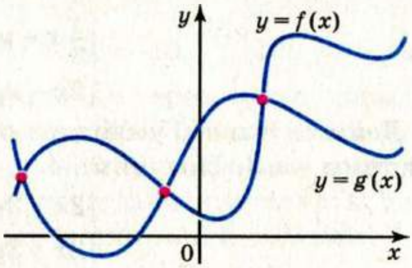


Рис. 60

Если графиками уравнений, входящих в систему линейных уравнений, являются прямые, то количество решений этой системы зависит от взаимного расположения двух прямых на плоскости:

- если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение;
- если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений;
- если прямые параллельны, то система решений не имеет.

Случай, когда система имеет единственное решение, мы уже рассмотрели. Теперь обратимся к примерам, которые иллюстрируют две другие возможности.

Так, если в системе

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - y = 1, \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

обе части первого уравнения умножить на 2, то решения этого уравнения, а значит, и всей системы не изменятся.

Имеем:

$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ x - 2y = 2. \end{cases}$$

Очевидно, что решения этой системы совпадают с решениями уравнения $x - 2y = 2$. Но это уравнение имеет бесконечно много решений, а следовательно, и рассматриваемая система имеет бесконечно много решений.

Приведем пример системы, которая не имеет решений:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 2, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Действительно, умножим обе части первого уравнения системы на 3. Получим:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Понятно, что не существует такой пары значений x и y, при которых выражение $2x + 3y$ одновременно принимает значения и 6, и 7.

Подчеркнем, что именно графический метод нам подсказал, что не существует системы линейных уравнений, имеющей, например, ровно 2, или ровно 3, или ровно 100 и т. п. решений.

?

1. В каком случае говорят, что надо решить систему уравнений?
2. Что является решением системы уравнений с двумя переменными?
3. Что означает решить систему уравнений?
4. В чем суть графического метода решения систем уравнений с двумя переменными?
5. Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными?
6. Каково взаимное расположение прямых, являющихся графиками двух линейных уравнений с двумя переменными, составляющих систему уравнений, если:
   1) система имеет единственное решение;
   2) система не имеет решений;
   3) система имеет бесконечно много решений?

1007.° Какая из пар чисел $(-2; 1)$, $(2; -1)$, $(6; 4)$, $(8; -4)$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 3x - 8y = -14, \\ 4x + y = 28\text{?} \end{cases}$$

1008.° Решением каких систем является пара чисел $(-5; 2)$:

1) $\begin{cases} 7x + 2y = 31, \\ 4x - 5y = -30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y - 2x = 16, \\ 6x + 7y = -16; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = -9, \\ 10y - x = 15\text{?} \end{cases}$

1009.° Определите координаты точки пересечения прямых, изображенных на рисунке 61. Запишите соответствующую систему уравнений, проверьте найденное решение системы, подставив координаты точки пересечения прямых в уравнения системы.

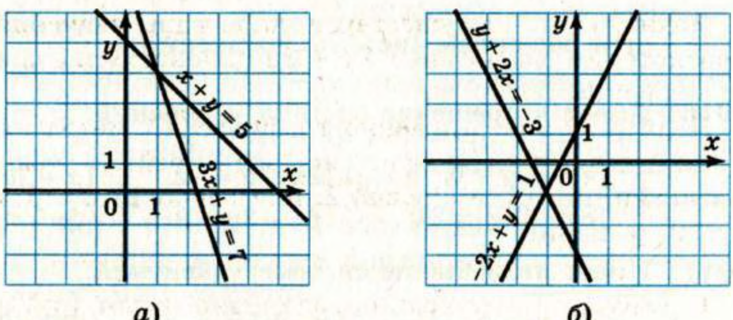


Рис. 61

1010.° Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = -5, \\ 4x - y = -5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x - y = 9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x - 3y = -26, \\ y - 2x = 8. \end{cases}$

1011.° Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 5x + y = -18; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - x = -2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 5y = 10, \\ 4x - y = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = -1. \end{cases}$

1012.° Составьте какую-нибудь систему двух линейных уравнений с двумя переменными, решением которой является пара значений переменных:
1) $x = 3$, $y = 2$; 2) $x = -4$, $y = 1$; 3) $x = 5$, $y = 0$.

1013.° Составьте какую-нибудь систему двух линейных уравнений с двумя переменными, решением которой является пара чисел $(2; -2)$.

1014.° Пара чисел $(6; 4)$ является решением системы уравнений:

1) $\begin{cases} ax + 2y = 26, \\ 4x + by = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + by = 6, \\ ax + by = 0. \end{cases}$

Найдите значения a и b.

1015.° При каких значениях a и b пара чисел $(-2; 3)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} ax - 3y = -13, \\ 7x + by = 1? \end{cases}$

1016.° Имеет ли решение система уравнений:

1) $\begin{cases} 2x - 7y = 6, \\ 8x - 28y = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = -2, \\ 6x + 3y = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 2y = 0{,}5, \\ 2x + 4y = 2? \end{cases}$

1017.° Имеет ли решение система уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = 4, \\ 3x - 3y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 1{,}5y = -4, \\ 3y - 2x = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 9x + 9y = 18, \\ x + y = 2? \end{cases}$

1018.°° К уравнению $2x - 3y = 6$ подберите второе линейное уравнение так, чтобы получилась система уравнений, которая:
1) имеет единственное решение;
2) имеет бесконечно много решений;
3) не имеет решений.

1019.°° К уравнению $x - y = 2$ подберите второе линейное уравнение так, чтобы получилась система уравнений, которая:
1) имеет единственное решение;
2) имеет бесконечно много решений;
3) не имеет решений.

1020.[••] При каких значениях a не имеет решений система уравнений $\begin{cases} 8x + 9y = 7, \\ 8x + 9y = a? \end{cases}$

1021.[••] При каком значении a имеет бесконечно много решений система уравнений:

1) $\begin{cases} x + 5y = 4, \\ 4x + 20y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + ay = 12, \\ 9x - 15y = 36? \end{cases}$

1022.[••] При каких значениях a система уравнений:

1) $\begin{cases} 7x - 12y = 14, \\ 7x - 12y = a \end{cases}$ не имеет решений;

2) $\begin{cases} 6x + ay = 4, \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

1023.[••] Подберите такие значения a и b, при которых система уравнений $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ ax + 4y = b: \end{cases}$

1) имеет бесконечно много решений;
2) имеет единственное решение;
3) не имеет решений.

1024.[••] Подберите такие значения m и n, при которых система уравнений $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - my = n: \end{cases}$

1) имеет бесконечно много решений;
2) имеет единственное решение;
3) не имеет решений.

1025.[*] Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ x - y = -4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y + |x| = 0, \\ x + y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ x + 3y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - |y| = 0, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

1026.* Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} |y - 2x| = 3, \\ x - 2y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ |x + y| = 2. \end{cases}$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1027. Кусок сплава меди и олова массой 5,5 кг содержит меди на 20 % больше, чем олова. Найдите массу меди в этом сплаве.

1028. Из Киева в Лубны, расстояние между которыми равно 200 км, выехал автобус. Через 32 мин после выезда автобуса навстречу ему из Лубен выехал автомобиль со скоростью на 20 км/ч большей, чем скорость автобуса. С какой скоростью двигался автобус, если они встретились через 1,2 ч после выезда автомобиля?

1029. Найдите четыре последовательных нечетных натуральных числа, сумма квадратов которых равна 164.

1030. Докажите, что если $x + y = a - 1$, то

$$ax + x + ay + y + 1 = a^2.$$

1031. Остаток от деления числа a на 5 равен 4, а остаток от деления на 5 числа b равен 3. Докажите, что значение выражения $a^2 + b^2$ кратно 5.

ГОТОВИМСЯ К ИЗУЧЕНИЮ НОВОЙ ТЕМЫ

1032. Выразите y через x и x через y из уравнения:

1) $x + y = 10$;
2) $2x + y = 7$;
3) $y - x = -4$;
4) $x - 6y = 1$;
5) $5y - 4x = 0$;
6) $4x + 3y = -12$.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

1033. Выражение $(2x - 3)^{171}$ представили в виде многочлена. Найдите сумму коэффициентов этого многочлена.

27. Решение систем линейных уравнений методом подстановки

Если математикам встречается новая задача, то, как правило, они пытаются ее решение свести к уже известной задаче.

Покажем, как решение системы линейных уравнений с двумя переменными можно свести к решению линейного уравнения с одной переменной. А последняя задача вам хорошо знакома.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим переменную y через переменную x. Имеем:

$$y = 2x - 8.$$

Подставим во второе уравнение системы вместо переменной y выражение $2x - 8$. Получим систему

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2(2x - 8) = 5. \end{cases}$$

Эта и исходная системы имеют одни и те же решения. Примем здесь этот факт без обоснований. Вы можете рассмотреть доказательство этого факта на занятиях математического кружка.

Второе уравнение последней системы является уравнением с одной переменной. Решим его:

$$3x + 2(2x - 8) = 5;$$
$$3x + 4x - 16 = 5;$$
$$7x = 21;$$
$$x = 3.$$

Подставим найденное значение переменной x в уравнение $y = 2x - 8$. Получим:

$$y = 2 \cdot 3 - 8;$$
$$y = -2.$$

Пара чисел $(3; -2)$ — искомое решение.

Описанный здесь способ решения системы называют **методом подстановки.**

Итак, чтобы решить систему линейных уравнений методом подстановки, нужно:

1) **выразить из любого уравнения системы одну переменную через другую;**
2) **подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной выражение, полученное на первом шаге;**
3) **решить уравнение с одной переменной, полученное на втором шаге;**
4) **подставить найденное значение переменной в выражение, полученное на первом шаге;**
5) **вычислить значение другой переменной;**
6) **записать ответ.**

Эту последовательность действий, состоящую из шести шагов, можно назвать **алгоритмом** решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными методом подстановки.

1034.° Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2y - 8, \\ x - 4y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 6y, \\ x + 5y = 88; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5y - x = 8, \\ 5x - 4y = 23; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 5y = 46; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 15 - x = 2y, \\ 4x - 3y = 27; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x - y = 6{,}2, \\ 0{,}8x + 3y = 13. \end{cases}$

1035.° Найдите решение системы уравнений:

1) $\begin{cases} 4x + y = 12, \\ 7x + 2y = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4y - x = 11, \\ 5x - 2y = 17; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x - y = -1, \\ 2x - 3y = -11; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 9y - 2x = -25; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x - 3y = 0, \\ 15x + 2y = 55. \end{cases}$

1036. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 4x - 3y = 15, \\ 3x - 4y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 5x + 2y = 24; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5y - 6x = 4, \\ 7x - 4y = -1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x + 5y = 1, \\ 8x - 2y = 38; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5a - 4b = 3, \\ 2a - 3b = 11; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 8m - 2n = 11, \\ 9m + 4n = 8. \end{cases}$

1037. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 5x + 2y = 15, \\ 8x + 3y = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x + 4y = 5, \\ 3x + 2y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8p - 5q = -11, \\ 5p - 4q = -6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6u - 5v = -38, \\ 2u + 7v = 22. \end{cases}$

1038. Найдите решение системы уравнений:

1) $\begin{cases} 6 - 5(x - y) = 7x + 4y, \\ 3(x + 1) - (6x + 8y) = 69 + 3y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 2, \\ 5x - y = 34; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6y - 5x = 1, \\ \dfrac{x - 1}{2} + \dfrac{3y - x}{4} = -4\dfrac{3}{4}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1{,}5x - 3}{3} + \dfrac{7 - 3y}{8} = 3, \\ \dfrac{2{,}5x - 2}{3} - \dfrac{2y + 1}{6} = x - 0{,}5. \end{cases}$

1039. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 6x + 3 = 5x - 4(5y + 4), \\ 3(2x - 3y) - 6x = 8 - y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x + 3}{2} - \dfrac{y - 4}{7} = 1, \\ 6y - x = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{8} + \dfrac{x - y}{6} = 4, \\ \dfrac{3x + y}{4} - \dfrac{2x - 5y}{3} = 5. \end{cases}$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1040. Найдите значение выражения:

1) $m(m-3)(m+3)-(m-2)(m^2+2m+4)$ при $m=-\frac{2}{3}$;

2) $(6m-n)(6m+n)-(12m-5n)(3m+n)$ при $m=-\frac{8}{9}$, $n=\frac{3}{4}$.

1041. (*Задача из болгарского фольклора.*) Трое мужчин пришли к брадобрею. Тот побрил первого и сказал: «Посмотри, сколько денег в ящике стола, положи еще столько же и возьми 8 левов[1] сдачи». То же брадобрей сказал и второму, и третьему. После того как все трое ушли, оказалось, что в кассе нет денег. Сколько денег было в кассе перед тем, как заплатил первый мужчина?

1042. Функция задана формулой $y=6-kx$. При каком значении k график функции проходит через точку $A(4;\ -2)$?

1043. Докажите, что значение выражения $2^{4n}-1$ делится нацело на 5 при любом натуральном значении n.

1044. Найдите три последние цифры значения выражения 2376^3+1624^3.

1045. Остаток при делении на 6 числа a равен 2, а числа b — 3. Докажите, что значение произведения ab кратно 6.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

1046. Найдите все целые числа x и y, при которых выполняется равенство $x+y=xy$.

---

[1] Лев — денежная единица Болгарии.

28. Решение систем линейных уравнений методом сложения

Рассмотрим еще один способ, позволяющий свести решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными к решению линейного уравнения с одной переменной.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 4x + 5y = 5. \end{cases}$$

Поскольку в этой системе коэффициенты при переменной y — противоположные числа, то уравнение с одной переменной можно получить, сложив почленно левые и правые части уравнений системы. Запишем:

$$2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5;$$
$$6x = 12;$$
$$x = 2.$$

Подставим найденное значение переменной x в любое из уравнений системы, например, в первое. Получим:

$$2 \cdot 2 - 5y = 7;$$
$$-5y = 3;$$
$$y = -0{,}6.$$

Итак, решением системы является пара чисел $(2; -0{,}6)$.

Описанный способ решения системы называют **методом сложения**.

Этот метод, как и любой другой математический метод, нуждается в обосновании его законности. Примем без доказательства, что метод сложения дает верные результаты. Вы можете рассмотреть доказательство этого факта на занятии математического кружка.

Решим еще одну систему:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11, \\ 6x + 5y = 19. \end{cases}$$

Если мы сложим почленно левые и правые части уравнений системы, то вновь получим уравнение с двумя переменными. Данная система еще «не готова» к применению метода сложения.

Умножим обе части первого уравнения на -3. Получим систему, решения которой совпадают с решениями исходной системы:

$$\begin{cases} -6x + 9y = -33, \\ 6x + 5y = 19. \end{cases}$$

Для такой системы метод сложения уже является эффективным:

$$-6x + 9y + 6x + 5y = -33 + 19;$$
$$14y = -14;$$
$$y = -1.$$

Подставим найденное значение y в первое уравнение исходной системы. Имеем:

$$2x - 3 \cdot (-1) = 11;$$
$$2x = 8;$$
$$x = 4.$$

Пара чисел $(4; -1)$ — искомое решение.

Рассмотрим систему, в которой сразу два уравнения нужно подготовить к применению метода сложения:

$$\begin{cases} 7x + 8y = 9, \\ 3x + 5y = 7. \end{cases}$$

Чтобы исключить переменную y, умножим обе части первого уравнения на число 5, а второго — на число -8 и применим метод сложения:

$$\begin{cases} 35x + 40y = 45, \\ -24x - 40y = -56; \end{cases}$$

$$35x + 40y - 24x - 40y = 45 - 56;$$
$$11x = -11;$$
$$x = -1.$$

Подставив найденное значение x в первое уравнение данной системы, получим:

$$-7 + 8y = 9;$$
$$y = 2.$$

Следовательно, пара чисел $(-1; 2)$ — решение данной системы.

Алгоритм решения системы уравнений методом сложения можно записать так:

1) **подобрав «выгодные» множители, преобразовать одно или оба уравнения системы так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами;**
2) **сложить почленно левые и правые части уравнений, полученных на первом шаге;**
3) **решить уравнение с одной переменной, полученное на втором шаге;**
4) **подставить найденное на третьем шаге значение переменной в любое из уравнений исходной системы;**
5) **вычислить значение другой переменной;**
6) **записать ответ.**

1047.° Решите систему уравнений методом сложения:

1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y = 14, \\ 5x - y = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 9y = 11, \\ 7x + 9y = 25; \end{cases}$

4) $\begin{cases} -6x + y = 16, \\ 6x + 4y = 34; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 8x + y = 8, \\ 12x + y = 4; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 7x - 5y = 29, \\ 7x + 8y = -10. \end{cases}$

1048.° Решите систему уравнений методом сложения:

1) $\begin{cases} 4x - y = 20, \\ 4x + y = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9x + 17y = 52, \\ 26x - 17y = 18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -5x + 7y = 2, \\ 8x + 7y = 15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 9x - 6y = 24, \\ 9x + 8y = 10. \end{cases}$

1049.˙ Решите систему уравнений методом сложения:

1) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 4x + 9y = 41; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 10x + 2y = 12, \\ -5x + 4y = -6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 12x + 7y = -26; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x + 8y = 13, \\ 2x - 3y = 17; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x - 4y = 16, \\ 5x + 6y = 14; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 5u - 7v = 24, \\ 7u + 6v = 2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x + 5y = 8; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 0,2x + 1,5y = 10, \\ 0,4x - 0,3y = 0,2. \end{cases}$

1050. Решите систему уравнений методом сложения:

1) $\begin{cases} 5x + y = 7, \\ 7x - 4y = -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - 4y = 10, \\ 2x - 3y = -3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6x - 5y = 23, \\ 2x - 7y = 13; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4a + 6b = 9, \\ 3a - 5b = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 2y = 16, \\ 8x + 3y = 38; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 9m - 13n = 22, \\ 2m + 3n = -1. \end{cases}$

1051. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2(4x - 5) - 3(3 + 4y) = 5, \\ 7(6y - 1) - (4 + 3x) = 21y - 86; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2(2x + 1) + 2,5 = 3(y + 2) - 8x, \\ 8 - 5(4 - x) = 6y - (5 - x); \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 3, \\ \dfrac{3x}{4} + \dfrac{5y}{6} = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{6} - \dfrac{y-3}{15} = 1, \\ \dfrac{x+2,5}{9} - \dfrac{y+3}{6} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

1052. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 0,2x - 0,3(2y + 1) = 1,5, \\ 3(x + 1) + 3y = 2y - 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{15x - 3y}{4} + \dfrac{3x + 2y}{6} = 3, \\ \dfrac{3x + y}{3} - \dfrac{x - 3y}{2} = 6. \end{cases}$

1053. Найдите решение системы уравнений:

1) $\begin{cases} (x - 3)^2 - 4y = (x + 2)(x + 1) - 6, \\ (x - 4)(y + 6) = (x + 3)(y - 7) + 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-y)(x+y) - x(x+10) = y(5-y) + 15, \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x+4)^2 + (y+2)^2 - 18. \end{cases}$

1054.• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} (2x+1)^2 - (2x-y)(2x+y) = (y+8)(y-10), \\ 4x(x-5) - (2x-3)(2x-9) = 6y - 104; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-2)(x^2+2x+4) - x(x-4)(x+4) = 20 - 20y, \\ (3x-2)(4y+5) = 2y(6x-1) - 58. \end{cases}$

1055.• Найдите, не выполняя построения, координаты точки пересечения прямых:

1) $y = 2 - 3x$ и $2x + 3y = 7$;

2) $5x + 6y = -20$ и $2x + 9y = 25$.

1056.• Найдите, не выполняя построения, координаты точки пересечения прямых:

1) $2x - 3y = 8$ и $7x - 5y = -5$;

2) $9x + y = 3$ и $8x + 3y = -10$.

1057.• При каких значениях a и b график уравнения $ax + by = 8$ проходит через точки $A(1;\ 3)$ и $B(2;\ -4)$?

1058.• При каких значениях m и n график уравнения $mx - ny = 6$ проходит через точки $C(2;\ -1)$ и $D(-6;\ 5)$?

1059.• Запишите уравнение прямой $y = kx + b$, проходящей через точки:

1) $M(2;\ 1)$ и $K(-3;\ 2)$; 2) $P(-4;\ 5)$ и $Q(4;\ -3)$.

1060.• Запишите уравнение прямой $y = kx + b$, проходящей через точки:

1) $A(3;\ 2)$ и $B(-1;\ 4)$; 2) $C(-2;\ -3)$ и $D(1;\ 6)$.

1061.• Имеет ли решение система уравнений:

1) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 3x - 4y = 24, \\ x - 2y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 3x + 5y = 1, \\ 5x + 9y = 5? \end{cases}$

1062.• Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 6x + 5y = 10, \\ 8x - 5y = 32, \\ 3x + 10y = -7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ 2x + y = 7, \\ 4x + y = 14. \end{cases}$

1063.˙ Запишите систему линейных уравнений с двумя переменными, графики которых изображены на рисунке 62.

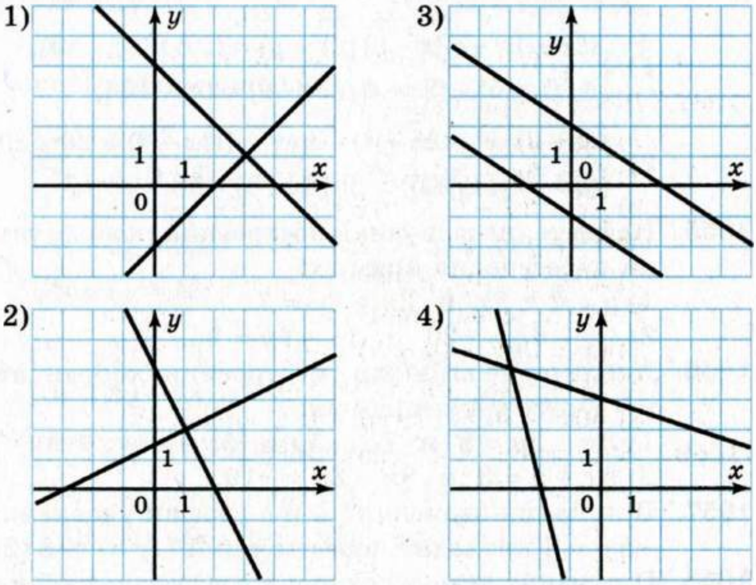


Рис. 62

1064.˙ Запишите систему линейных уравнений с двумя переменными, графики которых изображены на рисунке 63.

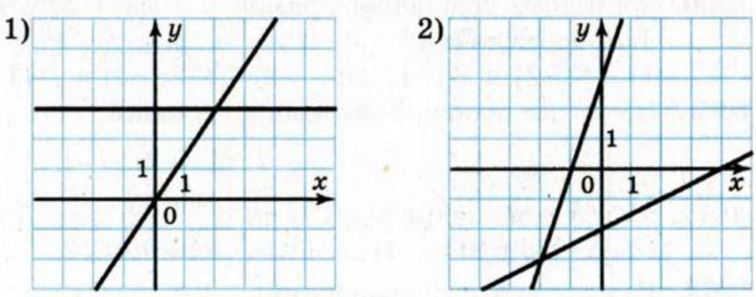


Рис. 63

1065.˙˙ При каком значении k прямая $y = kx + 2$ проходит через точку пересечения прямых $3x + 5y = 5$ и $7x - 4y = 43$?

1066.'' При каком значении a имеет решение система уравнений:

$$\begin{cases} 8x - 7y = 21, \\ 5x - 3y = 20, \\ ax + 2y = 24? \end{cases}$$

1067.'' Решите уравнение:

1) $(x + y)^2 + (x - 3)^2 = 0$;
2) $(x + 2y - 3)^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
3) $|x - 3y - 6| + (9x + 6y - 32)^2 = 0$;
4) $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 61 = 0$;
5) $25x^2 + 10y^2 - 30xy + 8y + 16 = 0$.

1068.'' Решите уравнение:

1) $(x - 2y)^2 + (y - 5)^2 = 0$;
2) $(4x + 2y - 5)^2 + |4x - 6y + 7| = 0$;
3) $50x^2 + 4y^2 - 28xy + 16x + 64 = 0$.

1069.* Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{y} = 15, \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{8}{y} = 23; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{5}{2x - 3y} + \dfrac{10}{3x - 2y} = 3, \\ \dfrac{20}{3x - 2y} - \dfrac{15}{2x - 3y} = 1. \end{cases}$

1070.* Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{7}{y} = 6, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 46; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{9}{x + 4y} - \dfrac{6}{5x - y} = -2, \\ \dfrac{3}{x + 4y} + \dfrac{18}{5x - y} = 1. \end{cases}$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1071. Найдите значение выражения:

1) $(a^2 + 1)^2 + (a - 1)(a^2 + 1) - a^2$, если $a = -2$;

2) $(a - 1)(a^2 + 1)(a + 1) - (a^2 + 1)^2$, если $a = \frac{1}{2}$.

1072. На математической олимпиаде участникам было предложено решить 12 задач. За каждую правильно решенную задачу начисляли 5 баллов, а за нерешенную — снимали 3 балла. Сколько задач решил правильно ученик, получивший всего 36 баллов?

1073. (*Задача из немецкого фольклора.*) За какое время лев, волк и собака могут съесть 3 овцы, если лев один может съесть овцу за 1 ч, волк — за 3 ч, а собака — за 6 ч?

1074. Докажите, что разность квадратов двух произвольных натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 3, кратна 3.

1075. В саду больше, чем 90, но меньше, чем 100 деревьев. Треть всех деревьев — яблони, а четверть всех деревьев — сливы. Сколько деревьев в саду?

1076. Какое из выражений принимает только отрицательные значения при любом значении x:
1) $-x^2 - 4x + 6$; 2) $-x^2 + 16x - 64$; 3) $-x^2 + 8x - 18$?

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

1077. Клетки таблицы размером 101×101 клетку заполнены числами так, что произведение чисел в каждом столбце является отрицательным. Может ли оказаться, что количество строк, произведение чисел в которых положительно, равно 51?

29. Решение задач с помощью систем линейных уравнений

Рассмотрим задачи, в которых системы двух линейных уравнений с двумя переменными используют как математические модели реальных ситуаций.

ПРИМЕР 1

На пошив одного платья и 4 юбок пошло 9 м ткани, а на пошив 3 таких же платьев и 8 таких же юбок — 21 м ткани. Сколько ткани требуется для пошива одного платья и одной юбки отдельно?

Решение. Пусть на одно платье идет x м ткани, а на одну юбку — y м. Тогда на одно платье и 4 юбки идет $(x + 4y)$ м ткани, что по условию составляет 9 м. Следовательно, $x + 4y = 9$.

На 3 платья и 8 юбок требуется $(3x + 8y)$ м ткани, или 21 м. Значит, $3x + 8y = 21$.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 4y = 9, \\ 3x + 8y = 21. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем: $x = 3$, $y = 1{,}5$. Следовательно, на пошив одного платья пойдет 3 м ткани, а одной юбки — 1,5 м.

Ответ: 3 м, 1,5 м.

ПРИМЕР 2

Из города A в город B, расстояние между которыми 264 км, выехал мотоциклист. Через 2 ч после этого навстречу ему из города B выехал велосипедист, который встретился с мотоциклистом через 1 ч после своего выезда. Найдите скорость каждого из них, если за 2 ч мотоциклист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист за 5 ч.

Решение. Пусть скорость мотоциклиста равна x км/ч, а велосипедиста — y км/ч. До встречи мотоциклист двигался 3 ч и проехал $3x$ км, а велосипедист — соответственно 1 ч и y км. Всего они проехали 264 км. Тогда $3x + y = 264$.

Велосипедист за 5 ч проезжает $5y$ км, а мотоциклист за 2 ч — $2x$ км, что на 40 км больше, чем $5y$ км. Тогда $2x - 5y = 40$.

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + y = 264, \\ 2x - 5y = 40, \end{cases}$$

решением которой является пара чисел $x = 80$, $y = 24$.

Следовательно, скорость мотоциклиста равна 80 км/ч, а велосипедиста — 24 км/ч.

Ответ: 80 км/ч, 24 км/ч.

ПРИМЕР 3

Стол и стул стоили вместе 680 грн. После того как стол подешевел на 20 %, а стул подорожал на 10 %, они стали стоить вместе 580 грн. Найдите первоначальную цену стола и первоначальную цену стула.

Решение. Пусть первоначальная цена стола составляла x грн., а стула — y грн. Тогда по условию $x + y = 680$.

Новая цена стола составляет 80 % первоначальной и равна $0,8x$ грн. Новая цена стула составляет 110 % первоначальной и равна $1,1y$ грн. Тогда $0,8x + 1,1y = 580$.

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 680, \\ 0,8x + 1,1y = 580. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара $x = 560$, $y = 120$.

Следовательно, первоначальная цена стола была 560 грн., а стула — 120 грн.

Ответ: 560 грн., 120 грн.

ПРИМЕР 4

Сколько граммов 3 %-ного и сколько граммов 8 %-ного растворов соли надо взять, чтобы получить 500 г 4 %-ного раствора?

Решение. Пусть первого раствора надо взять x г, а второго — y г. Тогда по условию $x + y = 500$.

В 3 %-ном растворе содержится $0,03x$ г соли, а в 8 %-ном — $0,08\ y$ г соли. В 500 г 4 %-ного раствора содержится $500 \cdot 0,04 = 20$ (г) соли. Следовательно, $0,03x + 0,08y = 20$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 500, \\ 0,03x + 0,08y = 20, \end{cases}$$

решив которую, получим $\begin{cases} x = 400, \\ y = 100. \end{cases}$

Значит, надо взять 400 г 3 %-ного раствора и 100 г 8 %-ного раствора.

Ответ: 400 г, 100 г.

ПРИМЕР 5

У Петра были купюры по 5 грн. и по 20 грн. Он говорит, что купил велосипед за 255 грн., отдав за него 20 купюр, а Василий говорит, что такого быть не может. Кто прав?

Решение. Пусть было x купюр по 5 грн. и y купюр по 20 грн. Тогда

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ 5x + 20y = 255. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара $(x; y)$, в которой $y = 10\frac{1}{3}$, что не соответствует смыслу задачи, так как количество купюр может быть только натуральным числом.

Ответ: прав Василий.

1078.° Найдите два числа, если их сумма равна 63, а разность — 19.

1079.° Найдите два числа, если их разность равна 23, а сумма удвоенного большего из этих чисел и второго числа равна 22.

1080.° (*Задача из рассказа «Репетитор» А. П. Чехова*[1].) Купец купил 138 аршин[2] черного и синего сукна за 540 рублей. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 рублей за аршин, а черное — 3 рубля?

1081.° Группа из 46 туристов отправилась в поход на 10 лодках, часть из которых была четырехместными, а остальные — шестиместными. Сколько было лодок каждого вида?

1082.° Чтобы накормить 4 лошадей и 12 коров, надо 120 кг сена в день, а чтобы накормить 3 лошадей и 20 коров — 167 кг сена. Найдите дневную норму сена для лошади и для коровы.

1083.° В первый день 2 гусеничных трактора и один колесный вспахали 22 га, а во второй день 3 гусеничных и 8 колесных — 72 га. Найдите, сколько гектаров земли обрабатывал ежедневно один гусеничный трактор и сколько один колесный.

1084.° Двое рабочих изготовили 135 деталей. Первый рабочий работал 7 дней, а второй — 12 дней. Сколько

---

[1] А. П. Чехов (1860–1904) — великий русский писатель.

[2] Аршин — старинная мера длины, равная 71,12 см.

деталей изготавливал ежедневно каждый рабочий, если первый за 3 дня сделал на 3 детали больше, чем второй — за 4 дня?

1085.° Две бригады работали на сборе яблок. В первый день одна бригада работала 5 ч, а другая — 4 ч, причем вместе они собрали 40 ц яблок. На следующий день бригады работали с той же производительностью труда, причем первая бригада собрала за 3 ч на 2 ц больше, чем вторая — за 2 ч. Сколько центнеров яблок собирала каждая бригада за 1 ч?

1086.° За 6 кг конфет и 5 кг печенья заплатили 144 грн. Сколько стоит 1 кг конфет и сколько 1 кг печенья, если 3 кг конфет дороже 1 кг печенья на 30 грн.?

1087.° За 11 тетрадей и 8 ручек заплатили 49 грн. Сколько стоит одна тетрадь и сколько стоит одна ручка, если 5 тетрадей дороже, чем 4 ручки, на 7 грн.?

1088.° Из Киева и Винницы, расстояние между которыми 256 км, выехали одновременно навстречу друг другу автобус и автомобиль и встретились через 2 ч после начала движения. Найдите скорость каждого из них, если автобус за 2 ч проезжает на 46 км больше, чем автомобиль за 1 ч.

1089.° С двух станций, расстояние между которыми 300 км, одновременно навстречу друг другу отправились пассажирский и товарный поезда, которые встретились через 3 ч после начала движения. Если бы пассажирский поезд вышел на 1 ч раньше, чем товарный, то они встретились бы через 2,4 ч после выхода товарного поезда. Найдите скорость каждого поезда.

1090.˙ Из села на станцию вышел пешеход. Через 30 мин из этого села на станцию выехал велосипедист и догнал пешехода через 10 мин после выезда. Найдите скорость каждого из них, если за 3 ч пешеход проходит на 4 км больше, чем велосипедист проезжает за полчаса.

1091.˙ Из Житомира в Одессу, расстояние между которыми 536 км, выехал автомобиль. Через 2,5 ч после начала движения первого автомобиля навстречу ему из Одессы выехал второй автомобиль, который встретился с первым через 2 ч после своего выезда. Найдите скорость каждого автомобиля, если первый за 2 ч проезжает на 69 км меньше, чем второй за 3 ч.

1092.° В двух бидонах было молоко. Если из первого бидона перелить во второй 10 л молока, то в обоих бидонах молока станет поровну. Если из второго бидона перелить в первый 20 л молока, то в первом бидоне станет в 2,5 раза больше молока, чем во втором. Сколько литров молока было в каждом бидоне?

1093.° Когда в первый вагон электрички вошли 4 пассажира, а из второго вагона вышли 4 пассажира, то в обоих вагонах пассажиров стало поровну. Если бы в первый вагон вошли 2 пассажира, а во второй — 24 пассажира, то в первом вагоне стало бы в 2 раза меньше пассажиров, чем во втором. Сколько пассажиров было сначала в каждом вагоне?

1094.° Моторная лодка за 3 ч движения против течения реки и 2,5 ч по течению проходит 98 км. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения, если за 5 ч движения по течению она проходит на 36 км больше, чем за 4 ч против течения реки.

1095.° Катер за 5 ч движения по течению реки проходит на 70 км больше, чем за 3 ч движения против течения. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если за 9 ч движения по озеру он проходит столько, сколько за 10 ч движения против течения реки.

1096.° (*Задача из греческого фольклора.*) Осел и мул идут рядом с грузом на спине. Осел жалуется на непосильную ношу, а мул отвечает: «Чего ты жалуешься? Ведь если я возьму один твой мешок, то моя ноша станет в два раза тяжелее твоей. А если ты возьмешь один мой мешок, то твоя поклажа сравнится с моей». Скажите же, мудрые математики, сколько мешков нес осел и сколько нес мул?

1097.° (*Задача из индийского фольклора.*) Один говорит другому: «Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя». Другой отвечает: «А если ты дашь мне 10 рупий, то я стану в 6 раз богаче тебя». Сколько денег было у каждого?

1098.° Сын 6 лет тому назад был в 4 раза младше отца, а через 12 лет он будет младше отца в 2 раза. Сколько лет отцу и сколько сыну?

1099.° Бабушка 6 лет тому назад была в 9 раз старше внучки, а 4 года тому назад — в 7 раз старше. Сколько лет бабушке и сколько внучке?

1100.° Две мастерские должны были сшить 75 костюмов. Когда первая мастерская выполнила 60 % заказа, а вторая — 50 %, то оказалось, что первая мастерская сшила на 12 костюмов больше, чем вторая. Сколько костюмов должна была сшить каждая мастерская?

1101.° У Миши и Гали было вместе 60 грн. Когда Миша истратил $\frac{1}{3}$ своих денег на приобретение математического справочника, а Галя — $\frac{1}{6}$ своих денег на приобретение справочника по украинскому языку, то оказалось, что Миша истратил на 1 грн. меньше, чем Галя. Сколько денег было у каждого из них сначала?

1102.° Известно, что 4 кг огурцов и 3 кг помидоров стоили 24 грн. После того как огурцы подорожали на 50 %, а помидоры подешевели на 20 %, за 2 кг огурцов и 5 кг помидоров заплатили 25 грн. Найдите первоначальную цену 1 кг огурцов и 1 кг помидоров.

1103.° Известно, что 2 банки краски и 3 банки олифы стоили 64 грн. После того как краска подешевела на 50 %, а олифа подорожала на 40 %, за 6 банок краски и 5 банок олифы заплатили 116 грн. Найдите первоначальную цену одной банки краски и одной банки олифы.

1104.° Вкладчик положил в банк 1400 грн. на два разных счета. По первому из них банк выплачивает 4 % годовых, а по второму — 6 % годовых. Через год вкладчик получил по процентам 68 грн. Сколько гривен он положил на каждый счет?

1105.° Вкладчик положил в банк 1200 грн. на два разных счета. По одному из них банк выплачивает 5 % годовых, а по другому — 7 % годовых. Через год вкладчик получил по 5 %-ному вкладу на 24 грн. процентных денег больше, чем по второму вкладу. Сколько гривен он положил на каждый счет?

1106.° Известно, что 60 % числа a на 2 больше, чем 70 % числа b, а 50 % числа b на 10 больше, чем $\frac{1}{3}$ числа a. Найдите числа a и b.

1107.° Известно, что 25 % одного числа равно 20 % другого числа, а $\frac{1}{6}$ первого числа на 4 меньше 40 % второго. Найдите данные числа.

1108.° Имеем два сплава меди и цинка. Один сплав содержит 9 %, а другой — 30 % цинка. Сколько килограммов каждого сплава надо взять, чтобы получить кусок сплава массой 300 кг, содержащего 23 % цинка?

1109.° Имеется два водно-солевых раствора. Первый раствор содержит 25 %, а второй — 40 % соли. Сколько килограммов каждого раствора надо взять, чтобы получить 50 кг раствора, содержащего 34 % соли?

1110.° Сумма цифр двузначного числа равна 15. Если поменять его цифры местами, то получим число, которое меньше данного на 9. Найдите данное число.

1111.° Периметр прямоугольника равен 28 см. Если две противоположные стороны увеличить на 6 см, а две другие уменьшить на 2 см, то его площадь увеличится на 24 см^2. Найдите стороны данного прямоугольника.

1112.° Если каждую сторону прямоугольника увеличить на 3 см, то его площадь увеличится на 45 см^2. Если две противоположные стороны увеличить на 4 см, а две другие уменьшить на 5 см, то его площадь уменьшится на 17 см^2. Найдите стороны данного прямоугольника.

1113.˙ Из двух сел, расстояние между которыми равно 45 км, одновременно навстречу друг другу отправились велосипедист и пешеход и встретились через 3 ч после начала движения. Если бы велосипедист выехал на 1 ч 15 мин раньше, чем вышел пешеход, то они бы встретились через 2 ч после выхода пешехода. С какой скоростью двигался каждый из них?

1114.˙ Из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 24 км, одновременно навстречу друг другу вышли два туриста. Через 2 ч после начала движения они еще не встретились, а расстояние между ними составляло 6 км. Еще через 2 ч одному из них оставалось пройти до пункта B на 4 км меньше, чем другому до пункта A. Найдите скорость каждого туриста.

1115.¨ Велосипедист проехал из пункта A в пункт B за запланированное время, двигаясь с некоторой скоростью. Если бы он увеличил скорость на 3 км/ч, то прибыл бы в пункт B на 1 ч раньше, а если бы он проезжал за час на 2 км меньше, то прибыл бы на 1 ч позже. Найдите скорость велосипедиста.

1116.¨ Груз перевезли на некотором количестве машин с одинаковой грузоподъемностью. Если бы на каждой машине груза было на 1 т больше, то машин понадобилось бы на 3 меньше, а если бы на 2 т больше, то машин понадобилось бы на 5 меньше. Найдите массу перевезенного груза.

1117.¨ Расстояние между двумя станциями пассажирский поезд проходит на 3 ч быстрее, чем товарный, а поезд-экспресс — на 1 ч быстрее, чем пассажирский. Скорость товарного поезда на 25 км/ч меньше скорости пассажирского, а скорость экспресса на 15 км/ч больше скорости пассажирского. Найдите скорость каждого поезда и расстояние между станциями.

1118.¨ Автобус и маршрутное такси выезжают ежедневно навстречу друг другу по расписанию в 8 ч из городов Вишневое и Яблоневое, расстояние между которыми 18 км, и встречаются в 8 ч 10 мин. Однажды автобус выехал по расписанию, а такси — с опозданием в 8 ч 9 мин. Поэтому в тот день они встретились в 8 ч 15 мин. Найдите скорости автобуса и маршрутного такси.

1119.•• Из города Солнечный в село Веселое в 9 ч 5 мин и в 9 ч 45 мин выехали с одинаковой скоростью два автобуса. Из Веселого в Солнечный в 9 ч 30 мин выехал велосипедист, который встретился с первым автобусом в 9 ч 45 мин, а со вторым — в 10 ч 15 мин. Найдите скорости автобусов и велосипедиста, если расстояние между Солнечным и Веселым равно 36 км.

1120.•• Масса смеси, состоящей из двух веществ, составляла 800 г. После того как из нее выделили $\frac{5}{8}$ первого вещества и 60 % второго, в смеси осталось первого вещества на 72 г меньше, чем второго. Сколько граммов каждого вещества было в смеси сначала?

1121.•• В куске сплава меди и цинка последнего было на 48 кг меньше, чем меди. После того как из сплава выделили $\frac{8}{9}$ содержавшейся в нем меди и 80 % цинка, масса сплава стала равной 10 кг. Сколько килограммов каждого вещества было в сплаве первоначально?

1122.•• Сумма цифр двузначного числа равна 9, причем цифра в разряде десятков больше цифры в разряде единиц. При делении данного числа на разность его цифр получили неполное частное 14 и остаток 2. Найдите данное число.

1123.•• Разность цифр двузначного числа равна 6, причем цифра в разряде десятков меньше цифры в разряде единиц. Если же разделить данное число на сумму его цифр, то получим неполное частное 3 и остаток 3. Найдите данное число.

1124.• В одном баке было 12 л воды, а в другом — 32 л. Если первый бак долить доверху водой из второго бака, то второй бак останется наполненным на половину своего объема. Если второй бак долить доверху водой из первого, то первый бак останется наполненным на шестую часть своего объема. Найдите объем каждого бака.

1125.* В двух бочках емкостью 40 л и 60 л было некоторое количество воды. Если в меньшую бочку долить доверху воды из большей, то в большей останется $\frac{5}{7}$ количества воды, которое было в ней сначала. Если в большую бочку долить доверху воды из меньшей, то в меньшей останется $\frac{5}{14}$ количества воды, которое было в ней сначала. Сколько литров воды было в каждой бочке сначала?

1126.* Цифра в разряде десятков некоторого двузначного числа на 2 больше цифры в разряде его единиц. Найдите это число, если разность между ним и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна: 1) 20; 2) 18.

1127.* (*Задача Л. Н. Толстого*[1].) Вышла в поле артель косарей. Она должна выкосить два луга, из которых один в два раза больше другого. Полдня вся артель косила больший луг, а на вторую половину дня артель разделилась пополам, и одна половина осталась докашивать больший луг, а вторая начала косить меньший. До вечера большой луг был скошен, а от меньшего остался участок, который скосил на следующий день один косарь, работавший целый день. Сколько косарей было в артели?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1128. В равенстве $4(0,5x - 3) = 3x + *$ замените звездочку таким выражением, чтобы образовалось уравнение:
1) не имеющее корней;
2) имеющее бесконечно много корней;
3) имеющее один корень.

[1] Л. Н. Толстой (1828–1910) — великий русский писатель.

1129. Постройте график функции:
1) $y = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 8x^3$;
2) $y = (x + 1)(x + 4) - (x + 3)^2$;
3) $y = (0{,}5x + 2)^2 - (0{,}5x - 1)(0{,}5x + 1)$.

1130. Представьте выражение $12ab$ в виде разности квадратов двух многочленов. Сколько решений имеет задача?

1131. Докажите, что при любом целом значении a значение выражения $(a - 3)(a^2 - a + 2) - a(a - 2)^2 + 2a$ делится нацело на 3.

1132. Докажите тождество $(a - bc)^2 - 2(b^2c^2 - a^2) + (bc + a)^2 = 4a^2$.

1133. Разложите на множители выражение:
1) $4kn + 6ak + 6an + 9a^2$;
2) $b^6 - 4b^4 + 12b^2 - 9$;
3) $y^4(x^2 + 8x + 16) - a^8$;
4) $9x^2 - 6x - 35$.

1134. Известно, что $x + y = a$, $xy = b$, $x^2 + y^2 = c$. Найдите зависимость между a, b и c.

1135. Точки $A(2; 3)$ и $B(5; a)$ принадлежат прямой $y = kx$. Найдите значение a.

1136. Найдите такие значения x, при которых выражение $(a - 1)^2 + 4(a - 1) - x$ можно было бы разложить на множители по формуле квадрата суммы.

1137. Графики функций $y = ax + 12$ и $y = (3 - a)x + a$ пересекаются в точке с абсциссой 2. Найдите ординату точки их пересечения.

УЧИМСЯ ДЕЛАТЬ НЕСТАНДАРТНЫЕ ШАГИ

1138. Докажите, что квадрат натурального числа имеет нечетное количество делителей.

ЗАДАНИЕ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ № 7 «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

1. Какая из приведенных пар чисел является решением уравнения $5x + 3y = 4$?
А) (2; 1); Б) (1; 0); В) (2; −2); Г) (−1; 2).

2. Каковы координаты точки пересечения графика уравнения $2x - 5y = 10$ с осью абсцисс?
А) (0; −2); Б) (−2; 0); В) (0; 5); Г) (5; 0).

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x - 4y = 11, \\ 2x + 4y = 10. \end{cases}$

А) (3; 1); Б) (1; 3); В) (1; 2); Г) (2; 1).

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 15x + 2y = 7, \\ 2x - y = 6. \end{cases}$

А) (3; −19); В) (−5; 41);
Б) (1; −4); Г) (−1; 11).

5. Пусть пара чисел (a; b) является решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x - y = 7. \end{cases}$ Найдите значение выражения $a^2 - b^2$.

А) 5; Б) −5; В) 3; Г) −3.

6. При каком значении a система уравнений $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ x - ay = -6 \end{cases}$ не имеет решений?

А) 3; Б) −3; В) $\frac{1}{3}$; Г) $-\frac{1}{3}$.

7. При каком значении b система уравнений $\begin{cases} 4x + by = 10, \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

А) − 6; В) 3;
Б) 6; Г) такого значения не существует.

8. График линейной функции проходит через точки $A(1;\ 4)$ и $B(-2;\ 13)$. Задайте эту функцию формулой.

А) $y = 3x + 1$; В) $y = -3x + 1$;
Б) $y = -3x + 7$; Г) $y = 3x + 7$.

9. Мать и дочь слепили вместе 104 вареника, причем дочь работала 2 ч, а мать — 3 ч. За 1 ч мать делает на 8 вареников больше, чем дочь.

Пусть дочь за 1 ч делает x вареников, а мать — y вареников. Какая из следующих систем уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии?

А) $\begin{cases} 2x + 3y = 104, \\ x - y = 8; \end{cases}$ В) $\begin{cases} 2x + 3y = 104, \\ y - x = 8; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 3x + 2y = 104, \\ x - y = 8; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} 3x + 2y = 104, \\ y - x = 8. \end{cases}$

10. Из двух городов, расстояние между которыми 60 км, выехали одновременно грузовая и легковая машины. Если они поедут навстречу друг другу, то встретятся через 30 мин. Если они поедут в одном направлении, то легковая машина догонит грузовую через 3 ч после начала движения.
Пусть скорость грузовой машины равна x км/ч, а легковой — y км/ч. Какая из следующих систем уравнений соответствует условию задачи?

А) $\begin{cases} 0,5x + 0,5y = 60, \\ 3y - 3x = 60; \end{cases}$ В) $\begin{cases} 30x + 30y = 60, \\ 3x - 3y = 60; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 30x + 30y = 60, \\ 3y - 3x = 60; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} 0,5x + 0,5y = 60, \\ 3x - 3y = 60. \end{cases}$

11. Телевизор и видеомагнитофон стоили вместе 2000 грн. После того как телевизор подорожал на 10 %, а видеомагнитофон подешевел на 10 %, они стали стоить вместе 2020 грн.
Пусть телевизор стоил сначала x грн., а видеомагнитофон — y грн. Какая из следующих систем уравнений является математической моделью ситуации, описанной в условии задачи?

А) $\begin{cases} x + y = 2000, \\ 110x + 90y = 2020; \end{cases}$ В) $\begin{cases} x + y = 2000, \\ 0,1x + 0,1y = 2020; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} x + y = 2000, \\ 1,1x + 0,9y = 2020; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} x + y = 2000, \\ 0,9x + 1,1y = 2020. \end{cases}$

12. Решите уравнение $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 37 = 0$.
А) (6; 1); В) (−6; −1);
Б) (−6; 1); Г) уравнение не имеет решений.

ИТОГИ

В этом параграфе:

- были введены такие понятия:
  - уравнение с двумя переменными;
  - решение уравнения с двумя переменными;
  - график уравнения с двумя переменными;
  - линейное уравнение с двумя переменными;
  - система уравнений с двумя переменными;
  - решение системы уравнений с двумя переменными;
- вы изучили:
  - график линейного уравнения с двумя переменными;
  - графический метод решения системы линейных уравнений с двумя переменными;
  - метод подстановки для решения системы линейных уравнений с двумя переменными;
  - метод сложения для решения системы линейных уравнений с двумя переменными;
- вы узнали, что уравнения с двумя переменными и их системы могут служить математическими моделями реальных ситуаций.

Упражнения для повторения курса 7 класса

1139. Заполните таблицу:

a	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2
$a^3 - a^2$							
$a^4 + a^2$							

1140. Представьте в виде степени выражение:

1) $(a^8)^4$; 4) $(a^5)^5$; 7) $a^6a^6a^6$; 10) $(a^4)^5 : a^7$;
2) a^8a^4; 5) $a^2a^3a^4$; 8) $(a^6a^6)^6$; 11) $(a^2)^9 : (a^6)^3$;
3) a^5a^5; 6) $(a^2)^3\,a^4$; 9) $(a^6)^6\,a^6$; 12) $(a^8a^7) : a^{14}$.

1141. При каком значении x верно равенство:

1) $5^x \cdot 5^6 = 5^{24}$; 3) $2^x \cdot 2^m = 2^{6m}$;
2) $(3^m)^x = 3^{5m}$; 4) $(4^x)^{3m} = 4^{6m^2}$,

где m — натуральное число?

1142. Являются ли тождественно равными выражения:

1) $-a^2$ и $(-a)^2$; 4) $9a \cdot a^2$ и $(3a)^2 \cdot a$;
2) $-a^3$ и $(-a)^3$; 5) $(a^4)^3$ и $(a^2)^6$;
3) $(a^3)^2$ и a^5; 6) $(2a)^3 \cdot (0{,}5a)^2$ и $2a^4a$?

1143. Представьте в виде степени выражение и вычислите его значение:

1) $81 \cdot 3^2$; 2) $4^3 \cdot 8^2$; 3) $100^2 \cdot 1000^3$.

1144. Сравните значения выражений:

1) $15^5 \cdot 2^6$ и $2^5 \cdot 15^6$; 2) $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4$ и $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3$.

1145. Сравните значения выражений:

1) 10^{20} и 101^{10}; 2) 10^{15} и 9990^5.

1146. Упростите выражение:

1) $4a \cdot (-3ab)$; 5) $-14b^2c^8d^9 \cdot 1\frac{2}{7}b^6d^3$;
2) $-2m^2 \cdot 0{,}1m^4n \cdot (-5n^3)$; 6) $\frac{4}{9}a^4c \cdot (-12a^2c^3) \cdot 1{,}8a^4b^5$;
3) $0{,}3a^2b^4 \cdot 1{,}2a^4b$; 7) $3x^6 \cdot (-4x^2y)^2$;
4) $-6x^3y^6 \cdot 1{,}5xy$; 8) $(-xy)^3 \cdot (-2x^2y^2)^4$.

1147. Представьте данный одночлен A в виде B^n, где B — некоторый одночлен, если:

1) $A = a^6b^9$, $n = 3$; 3) $A = 81a^2b^4c^8$, $n = 2$;
2) $A = 32a^{10}$, $n = 5$; 4) $A = -8a^{12}b^{18}$, $n = 3$.

1148. Упростите выражение:

1) $4a^3ab - 6a^2b^3b^3 - 5ab \cdot 3a + 7a^3b \cdot 0{,}2b^4$;

2) $11m^2 \cdot 2mn - 9mn \cdot 6mn^3 + 10mnm$;

3) $8xx^4x \cdot \left(-\frac{1}{4}xy\right) + 18xy \cdot \frac{7}{9}yx^5$;

4) $9x^3xy^2 - 8xy^2y^8 + 12x^2y \cdot 4y - 0{,}4xy^3 \cdot 6x^3y^2$.

1149. Найдите сумму и разность многочленов:

1) $2{,}8b - 0{,}75b^2$ и $\frac{1}{4}b^2 - 1\frac{4}{5}b$;

2) $1\frac{2}{7}x^2 + 2\frac{4}{9}y$ и $2\frac{3}{14}x^2 - 1\frac{1}{6}y$.

1150. Докажите, что значение выражения $3x^2 - 9x - (8 - 5x^2 - (9x - 8x^2))$ не зависит от значения переменной.

1151. Какой многочлен надо прибавить к многочлену $a^4 - b^4 + a^3 - b^3 - 3ab$, чтобы их сумма была тождественно равна многочлену $b^4 + 2ab$?

1152. Какой многочлен надо вычесть из многочлена $3c^5 - 2c^4 + 14c^3 - 4c^2 + c$, чтобы их разность была тождественно равна многочлену $5c^3 + c^2 - 7c$?

1153. Какой многочлен надо прибавить к многочлену $m^3 - m^2n + mn^2 - n^4$, чтобы их сумма была тождественно равна 5?

1154. Существуют ли такие значения x и y, при которых многочлены $-4x^2 - 12xy + 7y^2$ и $6x^2 + 12xy - 5y^2$ одновременно принимают отрицательные значения?

1155. Найдите значение выражения:

1) $2a(3a - 5) - 4a(4a - 5)$, если $a = -0{,}2$;

2) $7ab(2a - 3b) + 2a(3ab + 10b^2)$, если $a = -3$, $b = 5$;

3) $2a^4(3a^2 + a - 8) - 6a^6$, если $a = -1$.

1156. Решите уравнение:

1) $\frac{3x-1}{6} - \frac{x}{3} = \frac{5-2x}{9}$;

2) $\frac{3x+1}{2} - \frac{5x}{4} = \frac{3-2x}{3}$;

3) $\frac{x+5}{8} - \frac{1+x}{2} = \frac{2x+1}{3}$;

4) $\frac{2x}{3} - \frac{2x+1}{6} = \frac{3x-9}{4}$;

5) $\frac{9x-7}{4} - \frac{9x+13}{8} = \frac{3-x}{2}$;

6) $\frac{6x+7}{6} + \frac{5x-8}{9} = 3$.

1157. Решите уравнение:

1) $3x(4x - 1) - 6x(1{,}5 + 2x) = 4{,}8$;

2) $0{,}2x(5x-8)+3{,}6=x(x-0{,}7)$;
3) $x(9x-4)-3x(3x-1)=8-x$;
4) $18x^2-6x(3x+2)=-12x$.

1158. Докажите тождество:
1) $-0{,}2x^3(2{,}5x-4)(6-x^2)=0{,}5x^6-0{,}8x^5-3x^4+4{,}8x^3$;
2) $(a-2)(a^2+3a-18)=(a-3)(a^2+4a-12)$.

1159. Какое число можно подставить вместо a, чтобы равенство $(5x+a)(x-2)=5x^2-7x-2a$ было тождеством?

1160. Какое число можно подставить вместо b, чтобы равенство $(3x+b)(x+3)=3x^2+5x+3b$ было тождеством?

1161. Разложите на множители:
1) $\frac{1}{2}a^6-\frac{1}{4}a^2b$;
2) $5m^2n^3k^4+35m^4n^3k^2$;
3) $x^3y^2z^5-2xy^5z^3+3x^2y^3z$;
4) $a^{2n}b^{3n}-a^nb^{4n}$, где n — натуральное число.

1162. Вычислите, используя вынесение общего множителя за скобки, значение многочлена:
1) $a^2+4{,}72a-32{,}8$, если $a=5{,}28$;
2) $12{,}3x-12{,}3y+4{,}7$, если $x=8{,}14$, $y=8{,}04$.

1163. Вычислите, используя вынесение общего множителя за скобки:
1) $2{,}49\cdot1{,}35-1{,}35\cdot1{,}84+1{,}35^2$;
2) $0{,}25^2\cdot1{,}6+0{,}25\cdot1{,}6^2-0{,}25\cdot1{,}6\cdot0{,}85$;
3) $3{,}24\cdot18{,}7-3{,}24\cdot16{,}4+2{,}3\cdot6{,}76$;
4) $5{,}12\cdot9{,}76+5{,}12\cdot5{,}36-5{,}12^2$.

1164. Докажите, что значение выражения:
1) 17^3+17^2-17 кратно 61;
2) 25^4-125^2 кратно 40;
3) 6^5-18^3 кратно 42;
4) $5\cdot2^{962}-3\cdot2^{961}+2^{960}$ кратно 60.

1165. Докажите, что число:
1) $\overline{abba}$ делится нацело на 11;
2) $\overline{aaabbb}$ делится нацело на 37;
3) $\overline{ababab}$ делится нацело на 7;
4) $\overline{abab}-\overline{baba}$ делится нацело на 9 и на 101.

1166. При каком значении a уравнение $(x + 2)(x - 4) - (x - 2)(x + 4) = ax$ имеет бесконечно много корней?

1167. При каком значении a уравнение $(3x - 1)(x + a) = (3x - 2)(x + 1)$ не имеет корней?

1168. Разложите на множители:

1) $xm - xn + ym - yn$;
2) $3a - 3b + ac - bc$;
3) $9a - ab - 9 + b$;
4) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$;
5) $6ab^2 - 3b^2 + 2a^2b - ab$;
6) $2c^3 - 5c^2d - 4c + 10d$;
7) $x^3y^2 - x + x^2y^3 - y$;
8) $ax^2 - ay - cy + bx^2 + cx^2 - by$.

1169. Вычислите значение выражения:

1) $1{,}66^2 + 1{,}66 \cdot 4{,}68 + 2{,}34^2$;
2) $1{,}04^2 - 1{,}04 \cdot 1{,}28 + 0{,}64^2$.

1170.* При каких значениях a, b, c и d выполняется равенство $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{ad} \cdot \overline{cb}$?

1171. Упростите выражение:

1) $6x^2 + (2y - 3x)(2y + 3x)$;
2) $(a + 2)(a - 3) - (4 - a)(a + 4)$;
3) $(5 - 2x)(5 + 2x) - (3 - 2x)(4 - 2x)$;
4) $(2ab + 1)(2ab - 1)(16a^4b^4 + 1)(4a^2b^2 + 1)$.

1172. Вычислите значение произведения, используя формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

1) $19 \cdot 21$; 2) $98 \cdot 102$; 3) $2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{3}$; 4) $7{,}9 \cdot 8{,}1$.

1173. Решите уравнение:

1) $4x(7 + 9x) - (6x + 5)(6x - 5) = 39$;
2) $(x - 8)(x + 10) - (x + 7)(x - 7) = 5x - 31$.

1174. Докажите, что значение выражения $(a + b - c)(a - b) + (b + c - a)(b - c) + (c + a - b)(c - a)$ тождественно равно нулю.

1175. Найдите значение выражения:

1) $43^2 - 23^2$; 2) $256^2 - 244^2$; 3) $7{,}2^2 - 2{,}8^2$.

1176. Вычислите:

1) $\dfrac{39^2 - 33^2}{24^2 - 12^2}$; 2) $\dfrac{5{,}3^2 - 1{,}7^2}{2{,}65^2 - 0{,}85^2}$.

1177. Решите уравнение:

1) $36x^2 - (3x - 27)^2 = 0$; 2) $(4x - 7)^2 - (2x + 17)^2 = 0$.

1178. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения:

1) $(4n + 19)^2 - (3n - 5)^2$ делится нацело на 7;
2) $(2n + 5)^2 - (2n - 3)^2$ делится нацело на 16.

1179. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $(n^2 - 3n + 1)^2 - n^4 + 3n + 5$ кратно 6.

1180. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $16n^4 - (4n^2 - 2n - 1)^2 + 8n + 1$ кратно 4.

1181. При каком значении a уравнение $(a - 3)(a + 5)\,x = a^2 - 9$:
1) имеет бесконечно много корней;
2) не имеет корней;
3) имеет один корень?

1182. Используя формулу квадрата суммы или формулу квадрата разности, вычислите:

1) 69^2;	3) 52^2;	5) 299^2;
2) 91^2;	4) 97^2;	6) $10{,}2^2$.

1183. На сколько значение выражения $(3a^2 - 2)^2 - (3a^2 - 1) \times (3a^2 + 1) + 12a^2$ больше числа 2?

1184. Докажите, что не существует натурального значения n, при котором значение выражения $(8n + 5)(2n + 1) - (4n + 1)^2$ делилось бы нацело на 5.

1185. Существует ли такое натуральное значение n, при котором значение выражения $(2n - 3)(2n + 3) - (n + 3)^2$ не делилось бы нацело на 3?

1186. Решите уравнение:
1) $3(x - 7)^2 - 2(x + 7)(x - 2) = (x + 11)(x - 4) + 101$;
2) $2x(x + 3)^2 - 3x(x - 1)(x + 8) = x^2(-x - 9) + 21$;
3) $y(2y - 5)(2y + 5) - 4y(y + 6)^2 = 13 - 48y^2$.

1187. Представьте в виде квадрата двучлена выражение:
1) $(a + 4)^2 - 2(a + 4) + 1$;
2) $(3b + 2)^2 + 4(3b + 2) + 4$;
3) $(3y + 8)^2 + (4y + 6)^2 + 4y$;
4) $(x - 5y)^2 + (x + 12y)^2 - x(x - 12y)$.

1188. Сумму какого одночлена и трехчлена $4a^2 - 6ab + 9b^2$ можно разложить на множители по формуле квадрата двучлена? Найдите еще три таких одночлена.

1189. Докажите, что не имеет корней уравнение:
1) $x^2 - 8x + 18 = 0$; 2) $x^2 + x + 1 = 0$.

1190. Разложите на множители:

1) $\frac{1}{64}a^8 - b^6$; 3) $x^{21}y^{24} - m^{12}n^{15}$;

2) $a^3b^6c^9 + 8$; 4) $a^6b^6 + 1$.

1191. На сколько значение выражения $27a^3 + 4 - (9a^2 - 3a + 1)(3a + 1)$ меньше числа 10?

1192. Решите уравнение:

1) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 24x$;

2) $(3 - 2x)(9 + 6x + 9x^2) - 2x(5 - 2x)(5 + 2x) = 7$.

1193. Делится ли значение выражения $37^3 + 23^3$ нацело на 60?

1194. Делится ли значение выражения $654^3 - 554^3$ нацело на 200?

1195. Разложите на множители:

1) $(a - b)(a + b) - c(c - 2b)$;

2) $(b - c)(b + c) - a(a + 2c)$.

1196. Из следующих четырех выражений только три можно разложить на множители. Найдите эти выражения и разложите их на множители:

1) $9mx - 6nx + 6my - 4ny$; 3) $x^2 - 4x + y^2 + 2x + 5$;

2) $36x^2 - 24x + 4 - y^2$; 4) $4a + 3 + a^2 + 2b - b^2$.

1197. Представьте в виде произведения четырех множителей выражение:

1) $a^5 - a^4 - 16a + 16$;

2) $a^{2n}b^{2n} - b^{2n} - a^{2n} + 1$, где n — натуральное число.

1198. Найдите значение выражения:

1) $1{,}87^2 - 1{,}13^2 + 6 \cdot 1{,}13$;

2) $1{,}628^3 - 1{,}2 \cdot 1{,}628 \cdot 1{,}228 - 1{,}228^3$;

3) $0{,}79^3 + 3 \cdot 0{,}79 \cdot 0{,}21 + 0{,}21^3$.

1199. Докажите, что значение выражения $17^{10} - 3 \cdot 7^{24} + 3 \cdot 7^{25} + 17^9$ делится нацело: 1) на 18; 2) на 36.

1200. Докажите, что разность куба натурального числа и самого этого числа делится нацело на 6.

1201. Докажите, что сумма произведения трех последовательных натуральных чисел и среднего из этих чисел равна кубу среднего числа.

1202. Пусть $x + y = a$, $xy = b$. Докажите, что:

1) $x^2 + y^2 = a^2 - 2b$; 3) $x^4 + y^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$.

2) $x^3 + y^3 = a^3 - 3ab$;

1203.* Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ равно квадрату некоторого натурального числа.

1204.* Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $n(n+2)(n+4)(n+6)+16$ равно квадрату некоторого натурального числа.

1205.* Докажите, что разность между квадратом натурального числа, не кратного 3, и числом 1 кратна 3.

1206.* Докажите, что при любом натуральном значении n, не кратном 5, значение выражения n^4-1 делится нацело на 5.

1207.* Можно ли утверждать, что значение выражения n^3+2n делится нацело на 3 при любом натуральном значении n?

1208.* Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения n^7-n кратно 42.

1209. Даны функции $f(x)=x^2-2x$ и $g(x)=\frac{x-2}{x}$. Сравните:

1) $f(2)$ и $g(-1)$; 2) $f(0)$ и $g(2)$; 3) $f(1)$ и $g(1)$.

1210. Функция задана таблично:

x	5	3	1	−1	−3
y	3	1	−1	−3	−5

Задайте эту функцию описательно и формулой.

1211. При всех положительных значениях аргумента значение функции f равно −1, при всех отрицательных — равно 1, а $f(0)=0$. Постройте график функции f.

1212. Найдите координаты точки графика функции $y=6x-5$:

1) абсцисса и ордината которой равны между собой;
2) сумма координат которой равна 30.

1213. При каком значении a через точку $M(3;-2)$ проходит график функции:

1) $y=ax-8$; 2) $y=\frac{1}{3}x-a$?

1214. Является ли линейной функция:

1) $f(x)=(x-1)(x+1)-x(x-3)$;

2) $f(x) = (2x - 3)^2 - (x + 4)(x - 2)$;

3) $f(x) = (x + 3)^2 - x(x + 6)$?

В случае утвердительного ответа постройте ее график.

1215. Графики функций $y = (5 - a)x + a$ и $y = ax + 2$ пересекаются в точке, абсцисса которой равна -3. Найдите ординату этой точки.

1216. Постройте график функции $y = 2x + 3$. Пользуясь графиком, найдите значения аргумента, при которых значение функции:

1) равно 5;
2) больше 5;
3) меньше 5;
4) больше -3, но меньше 7.

1217. Не выполняя построения графика функции $y = 12x - 6$, найдите координаты:

1) точек пересечения графика с осями координат;
2) точки пересечения графика данной функции с графиком функции $y = 6x + 24$.

1218. Постройте график функции:

1) $y = |x| - 3$;
2) $y = |x - 3|$.

1219. При каком значении a пара $(a; -a)$ является решением уравнения:

1) $6x + 5y = 7$;
2) $8x - 2y = 4$;
3) $x^2 - 3y = 0$;
4) $x + |y| = -2$.

1220. Постройте график уравнения $y + 1{,}5x = c$, если он проходит через точку $A(-2; 1)$.

1221. Составьте систему двух линейных уравнений с двумя переменными, решением которой является пара чисел:

1) $(1; 1)$;
2) $(-3; 5)$.

1222. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 3x + 7y = 1, \\ 6y - 5x = 16; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 5y = 19, \\ 2x + 3y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3(2a - 1) + 6(7 - b) = 51, \\ 2(b + 6) - 7(1 + 6b) = -39; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{3x - 2y}{4} - \dfrac{4x + 5}{3} = -5, \\ \dfrac{6x - 5y}{2} + \dfrac{2x + y}{5} = 9. \end{cases}$

1223.* При каком значении a сумма $x + y$ принимает наименьшее значение, если:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2a^2 - 12a + 8, \\ 3x - 2y = 3a^2 + 8a + 12? \end{cases}$$

1224.* При каком значении a разность $x - y$ принимает наименьшее значение, если:

$$\begin{cases} x - 5y = a^2 + 10a + 1, \\ 4x + y = 4a^2 - 2a + 4? \end{cases}$$

1225. Ученики 7 класса собрались на экскурсию. Если каждый ученик сдаст на экскурсию 12 грн. 50 коп., то для ее оплаты не хватит 100 грн., если каждый внесет 16 грн., то образуется излишек в 12 грн. Сколько учащихся в этом классе?

1226. По окружности, длина которой равна 100 м, движутся два тела. Они встречаются каждые 20 с, двигаясь в одном направлении. Если бы они двигались в противоположных направлениях, то встречались бы каждые 4 с. С какой скоростью они двигаются?

1227. Сплавили два слитка. Масса одного из них была 105 г, и он содержал 40 % меди. Масса другого слитка составляла 75 г. Найдите процентное содержание меди во втором слитке, если полученный сплав содержал 50 % меди.

1228. Сколько надо взять 4 %-ного и сколько 10 %-ного растворов соли, чтобы получить 180 г 6 %-ного раствора?

1229. В одном бидоне было молоко жирностью 3 %, а в другом — сливки жирностью 18 %. Сколько надо взять молока и сколько сливок, чтобы получить 10 л молока жирностью 6 %?

1230. С одного поля собрали по 40 ц ячменя с гектара, а с другого — по 35 ц с гектара. Всего собрали 2600 ц. На следующий год урожайность первого поля увеличилась на 10 %, второго — на 20 %, а в результате вместе собрали на 400 ц больше. Найдите площадь каждого поля.

1231. С одного поля собрали по 45 ц пшеницы с гектара, а с другого — по 40 ц с гектара. Всего собрали 1900 ц.

На следующий год в связи с засухой урожайность первого поля уменьшилась на 20 %, второго — на 15 %, а в результате всего с двух полей собрали меньше на 330 ц. Найдите площадь каждого поля.

1232. Половину конфет расфасовали в мешочки по 500 г в каждый, а вторую половину — в меньшие мешочки по 300 г в каждый. Всего получилось 32 мешочка. Сколько было конфет?

1233. Сумма цифр двузначного числа равна 11. Если к этому числу прибавить 63, то получим число, записанное теми же самыми цифрами в обратном порядке. Найдите данное число.

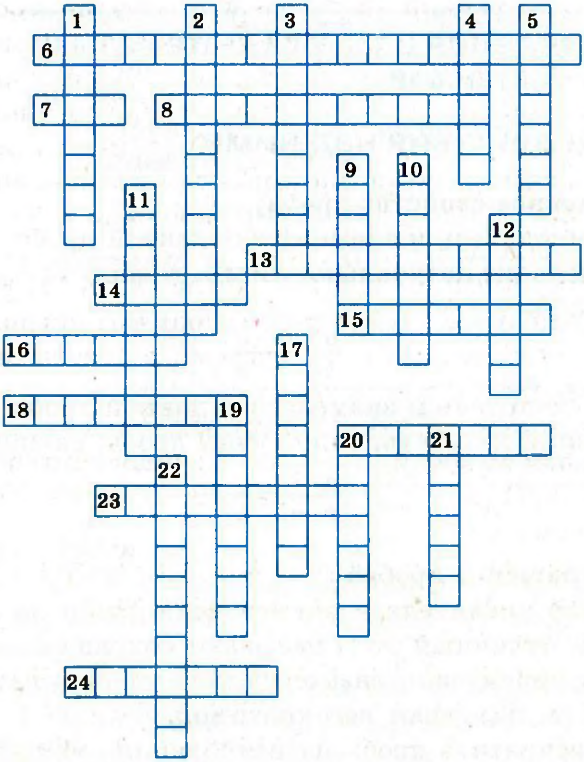
1234. К некоторому двузначному числу слева и справа дописали цифру 1. В результате получили число, которое в 21 раз больше данного. Найдите данное двузначное число.

1235. Сумма двух чисел равна 28, а разность их квадратов составляет 112. Найдите эти числа.

1236. Разгадайте кроссворд:

По горизонтали: **6.** Функция прямая ... . **7.** Третья степень числа. **8.** Предложение, раскрывающее суть нового термина. **13.** Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде. **14.** Геометрическая фигура, являющаяся графиком уравнения $x^2 + (y - 1)^2 = 0$. **15.** Вторая степень числа. **16.** График линейной функции. **18.** Одна из координат точки на плоскости. **20.** Выражение отношения между величинами, записанное с помощью математических знаков. **23.** Выражение, являющееся суммой нескольких одночленов. **24.** Мухаммед ибн Муса аль-... .

По вертикали: **1.** Независимая переменная. **2.** Разложение многочлена на множители методом ... . **3.** Равенство, правильное при любых значениях переменных. **4.** Решение уравнения. **5.** Произведение равных множителей. **9.** Геометрическая фигура, состоящая из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента функции, а ординаты — соответствующим значениям функции.



10. Ось ... . **11.** В выражении 7^4 число 7 — ... степени. **12.** Французский математик, в честь которого названа современная система координат. **17.** Выражение, являющееся произведением чисел, переменных и их степеней. **19.** Термин, которым обозначают процесс, позволяющий за конечное количество шагов получить решение задачи. **20.** Правило, с помощью которого для каждого значения независимой переменной можно найти единственное значение зависимой переменной. **21.** Расстояние от точки координатной прямой до начала отсчета. **22.** В выражении a^n n — ... степени.

Сведения из курса математики 5–6 классов

Числа и действия над ними

1. Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель данной дроби умножить на одно и то же натуральное число, то получим дробь, равную данной:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}.$$

Если числитель и знаменатель данной дроби разделить на их общий делитель, то получим дробь, равную данной:

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}.$$

2. Сокращение дробей

Деление числителя и знаменателя дроби на их общий делитель, отличный от 1, называют сокращением дроби.

Дробь, числитель и знаменатель которой — взаимно простые числа, называют несократимой.

Если сократить дробь на наибольший общий делитель числителя и знаменателя, то получим несократимую дробь.

3. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю

Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, надо:

1) найти наименьший общий знаменатель данных дробей;
2) найти дополнительные множители для каждой из дробей, разделив общий знаменатель на знаменатели данных дробей;
3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на ее дополнительный множитель.

4. Целые числа. Рациональные числа

Все натуральные числа, противоположные им числа и число 0 называют целыми числами.

Натуральные числа называют целыми положительными числами. Числа -1; -2; -3; ... называют целыми отрицательными числами.

Объединив натуральные числа с целыми отрицательными и нулем, получим целые числа:

Целые числа		
Целые отрицательные числа	0	Натуральные числа

Объединив целые числа с дробными, получим рациональные числа:

Рациональные числа	
Целые числа	Дробные числа

5. Модуль числа

Модулем числа a называют расстояние от начала отсчета до точки, изображающей это число на координатной прямой.

Модуль числа a обозначают так: $|a|$ (читают: «модуль a»).

Модуль положительного числа равен этому числу, модуль отрицательного числа равен числу, противоположному данному.

$$|0| = 0.$$

С помощью фигурной скобки свойство модуля числа a можно записать так:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Модуль числа принимает только неотрицательные значения.

Модули противоположных чисел равны: $|a| = |-a|$.

6. Сложение. Свойства сложения

Числа, которые складывают, называют слагаемыми, а результат сложения — суммой.

От перестановки слагаемых сумма не изменяется:

$a + b = b + a$ — переместительное свойство.

Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего чисел:

$(a + b) + c = a + (b + c)$ — сочетательное свойство.

7. Вычитание. Свойства вычитания

Из числа a вычесть число b — значит найти такое число, которое в сумме с числом b дает число a.

Равенство $a - b = c$ верно, если верно равенство $b + c = a$.

В равенстве $a - b = c$ число a называют уменьшаемым, b — вычитаемым, c — разностью.

Разность $a - b$ показывает, на сколько число a больше числа b или на сколько число b меньше числа a.

Для любого числа a верны равенства:

$a - 0 = a$, поскольку $0 + a = a$;

$a - a = 0$, поскольку $a + 0 = a$.

8. Сложение и вычитание дробей

Чтобы сложить две дроби с равными знаменателями надо сложить их числители, а знаменатель оставить тот же.

При вычитании дробей с равными знаменателями надо из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого, а знаменатель оставить тот же.

Чтобы сложить (вычесть) две дроби с разными знаменателями, надо привести их к общему знаменателю, а потом применить правило сложения (вычитания) дробей с равными знаменателями.

9. Сложение рациональных чисел

Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо:

1) найти модули слагаемых;
2) из большего модуля вычесть меньший модуль;
3) перед полученным числом поставить знак слагаемого с большим модулем.

Чтобы сложить два отрицательных числа, надо:

1) найти модули слагаемых;
2) сложить модули слагаемых;
3) перед полученным числом поставить знак «−».

Сумма двух противоположных чисел равна нулю.

Для любого рационального числа a:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

10. Вычитание рациональных чисел

Чтобы найти разность двух чисел, можно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

11. Умножение. Свойства умножения

Произведением числа a на натуральное число b, не равное 1, называют сумму, состоящую из b слагаемых, каждое из которых равно a:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ слагаемых}}.$$

Если один из двух множителей равен 1, то произведение равно второму множителю:

$$m \cdot 1 = 1 \cdot m = m.$$

Если один из множителей равен нулю, то произведение равно нулю:

$$m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0.$$

Если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю.

От перестановки множителей произведение не изменяется:

$ab = ba$ — переместительное свойство.

Чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего чисел:

$(ab)\,c = a\,(bc)$ — сочетательное свойство.

Чтобы число умножить на сумму двух чисел, можно это число умножить на каждое слагаемое и полученные произведения сложить:

$a\,(b + c) = ab + ac$ — распределительное свойство.

12. Умножение обыкновенных дробей

Чтобы умножить дробь на натуральное число, надо его числитель умножить на это число, а знаменатель оставить без изменения:

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}.$$

Считают, что $\frac{a}{b}\cdot 0 = 0$; $0\cdot\frac{a}{b} = 0$.

Произведением двух дробей является дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Чтобы умножить смешанные числа, надо сначала записать их в виде неправильных дробей, а потом воспользоваться правилом умножения дробей.

13. Умножение рациональных чисел

Чтобы умножить два числа с разными знаками, надо умножить их модули и перед полученным произведением поставить знак «−».

Чтобы умножить два отрицательных числа, надо умножить их модули.

Для любого рационального числа a:

$$a\cdot(-1) = -a,$$
$$(-1)\cdot a = -a.$$

Если произведение ab — положительное, то числа a и b имеют одинаковые знаки;

если произведение ab — отрицательное, то числа a и b имеют разные знаки.

14. Деление. Свойства деления

Разделить число a на число b — значит найти такое число, произведение которого с числом b равно a.

Следовательно, равенство $a : b = c$ верно, если верно равенство $b\cdot c = a$.

В равенстве $a : b = c$ число a называют делимым, b — делителем, c — частным.

Частное $a : b$ показывает, во сколько раз число a больше числа b.

При любых значениях a верно равенство:

$$a : 1 = a.$$

Если a не равно 0, то справедливы такие равенства:

$$0 : a = 0,$$
$$a : a = 1.$$

На нуль делить нельзя!

15. Делимость натуральных чисел

Если натуральное число a делится нацело на натуральное число b, то число a называют кратным числа b, число b — делителем числа a.

Для любого натурального числа a каждое из чисел $a \cdot 1$, $a \cdot 2$, $a \cdot 3$, $a \cdot 4$, ... является кратным числа a.

Наименьшим делителем любого натурального числа a является число 1, а наибольшим — само число a.

Среди чисел, кратных a, наибольшего нет, а наименьшее есть — это само число a.

Если каждое из чисел a и b делится нацело на число k, то и сумма $a + b$ также делится нацело на число k.

Если число a делится нацело на число k, а число b не делится нацело на число k, то сумма $a + b$ также не делится нацело на число k.

Натуральное число называют простым, если оно имеет только два разных делителя: единицу и само это число.

Натуральное число, имеющее более двух делителей, называют составным.

Любое составное число можно представить в виде произведения простых чисел, то есть разложить на простые множители.

Если наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен 1, то их называют взаимно простыми.

16. Признаки делимости натуральных чисел

Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0, то оно делится нацело на 10.

Если запись натурального числа оканчивается любой цифрой, отличной от 0, то оно не делится нацело на 10.

Если натуральное число разделить на 10, то остаток равен числу, записанному последней цифрой этого числа.

Цифры 0, 2, 4, 6, 8 называют четными, а цифры 1, 3, 5, 7, 9 — нечетными.

Если запись натурального числа оканчивается четной цифрой, то оно делится нацело на 2.

Если запись натурального числа оканчивается нечетной цифрой, то оно не делится нацело на 2.

Если запись натурального числа оканчивается одной из цифр 0 или 5, то оно делится нацело на 5.

Если запись натурального числа оканчивается любой цифрой, отличной от 0 или 5, то оно не делится нацело на 5.

Если сумма цифр числа делится нацело на 9, то и само число делится нацело на 9.

Если сумма цифр числа не делится нацело на 9, то и само число не делится нацело на 9.

Если сумма цифр числа делится нацело на 3, то и само число делится нацело на 3.

Если сумма цифр числа не делится нацело на 3, то и само число не делится нацело на 3.

17. Деление с остатком

Не всегда одно натуральное число делится нацело на другое. В таком случае можно выполнить деление с остатком. Например, при делении числа 43 на 8 получим неполное частное 5 и остаток 3.

Остаток всегда меньше делителя.

Чтобы найти делимое, надо делитель умножить на неполное частное и прибавить остаток.

В буквенном виде это записывают так:

$$a = bq + r,$$

где a — делимое, b — делитель, q — неполное частное, r — остаток, $r < b$.

18. Деление обыкновенных дробей

Чтобы разделить одну дробь на другую, надо делимое умножить на число, обратное делителю:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

19. Деление рациональных чисел

Чтобы разделить два числа с разными знаками, надо модуль делимого разделить на модуль делителя и перед полученным числом поставить знак «−».

Чтобы разделить два отрицательных числа, надо модуль делимого разделить на модуль делителя.

20. Нахождение дроби от числа

Чтобы найти дробь от числа, можно число умножить на эту дробь.

Чтобы найти проценты от числа, можно представить проценты в виде дроби и умножить число на эту дробь.

21. Нахождение числа по его дроби

Чтобы найти число по значению его дроби, можно это значение разделить на эту дробь.

Чтобы найти число по его процентам, можно представить проценты в виде дроби и разделить значение процентов на эту дробь.

22. Степень числа

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}.$$

Число a при этом называют основанием степени.

Степенью числа a с показателем 1 называют само число a:

$$a^1 = a.$$

Вторую степень также называют квадратом числа. Например, запись a^2 читают: «a в квадрате». Третью степень называют кубом числа, а запись a^3 читают: «a в кубе».

Если в числовое выражение входит степень, то сначала выполняют возведение в степень, а потом другие действия.

Выражения. Формулы. Уравнения

23. Числовые и буквенные выражения

Запись, составленную из чисел, знаков арифметических действий и скобок, называют числовым выражением.

Поскольку $(19 - 7) : 3 = 4$, то число 4 называют значением выражения $(19 - 7) : 3$.

Запись, составленную из чисел, букв, знаков арифметических действий и скобок, называют буквенным выражением.

Подставив вместо x в выражение $5 + 3x$ число 2, получим: $5 + 3 \cdot 2 = 11$. Число 11 называют значением буквенного выражения $5 + 3x$ при $x = 2$.

24. Раскрытие скобок

Если перед скобками стоит знак «−», то при раскрытии скобок надо опустить этот знак, а все знаки, стоящие перед слагаемыми в скобках, изменить на противоположные.

Если перед скобками стоит знак «+», то при раскрытии скобок надо опустить этот знак, а все знаки, стоящие перед слагаемыми в скобках, оставить без изменений.

25. Приведение подобных слагаемых

Рассмотрим выражение $7a - 9a + 5a$. Оно состоит из трех слагаемых $7a$, $-9a$, $5a$, имеющих одинаковую буквенную часть. Такие слагаемые называют подобными.

Чтобы привести подобные слагаемые, надо сложить их коэффициенты и полученный результат умножить на общую буквенную часть.

26. Формулы

Равенства вида $y = 3x$, $P = 2(a + b)$, $S = a^2$ называют формулами.

Равенство $s = vt$, где s — пройденный путь, v — скорость движения, а t — время, за которое пройден путь s, называют формулой пути.

27. Уравнения

Корнем уравнения называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Уравнение не обязательно имеет один корень. Например, уравнение $x - x = 0$ имеет бесконечно много корней, а уравнение $x - x = 1$ вообще не имеет корней.

Решить уравнение — значит найти все его корни или убедиться, что их вообще нет. Поэтому корень часто называют решением уравнения.

Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы вычесть известное слагаемое.

Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, надо к разности прибавить вычитаемое.

Чтобы найти неизвестное вычитаемое, надо из уменьшаемого вычесть разность.

Чтобы найти неизвестный множитель, надо произведение разделить на известный множитель.

Чтобы найти неизвестное делимое, надо делитель умножить на частное.

Чтобы найти неизвестный делитель, надо делимое разделить на частное.

28. Свойства уравнений

Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Если данное уравнение не имеет корней, то, прибавив к обеим частям одно и то же число, получим уравнение, также не имеющее корней.

Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, имеющее те же самые корни, что и данное.

Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, имеющее те же корни, что и данное.

Отношения и пропорции

29. Отношения

Частное двух чисел a и b, не равных нулю, еще называют отношением чисел a и b или отношением числа a к числу b.

Числа a и b называют членами отношения, число a — предыдущим членом отношения, а число b — последующим.

Отношение положительных чисел a и b показывает, во сколько раз число a больше числа b или какую часть число a составляет от числа b.

Отношение не изменится, если его члены умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

30. Пропорции

Равенство двух отношений называют пропорцией.

В буквенном виде пропорцию можно записать так:

$$a : b = c : d \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Числа a и d называют крайними членами пропорции, а числа b и c — средними членами пропорции.

31. Основное свойство пропорции

Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов:

$$\text{если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } ad = bc.$$

Если a, b, c и d — числа, не равные нулю, и $ad = bc$, то отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны и могут образовать пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

32. Процентное отношение двух чисел

Процентное отношение двух чисел — это их отношение, выраженное в процентах. Оно показывает, сколько процентов одно число составляет от другого.

Чтобы найти процентное отношение двух чисел, надо их отношение умножить на 100 и к результату дописать знак процента.

33. Прямая пропорциональная зависимость

Две величины называют прямо пропорциональными, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая величина увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Если две величины прямо пропорциональны, то отношение соответственных значений этих величин равно одному и тому же для этих величин числу.

Если величины y и x прямо пропорциональны, то их соответствуенные значения удовлетворяют равенству $\frac{y}{x} = k$, где k — число, постоянное для данных величин.

Координатная плоскость

34. Прямоугольная система координат

Проведем на плоскости две перпендикулярные координатные прямые так, чтобы их начала отсчета совпадали (рис. 64). Эти прямые называют осями координат, точку O их пересечения — началом координат. Горизонтальную ось называют осью абсцисс и обозначают буквой x, вертикальную ось называют осью ординат и обозначают буквой y.

Рис. 64

Ось абсцисс называют также осью x, а ось ординат — осью y, они вместе образуют прямоугольную систему координат. Плоскость, на которой задана прямоугольная система координат, называют координатной плоскостью.

Координатные оси разбивают плоскость на четыре части, которые называют координатными четвертями и нумеруют так, как показано на рисунке 65.

На координатной плоскости отметим точку M (рис. 66).

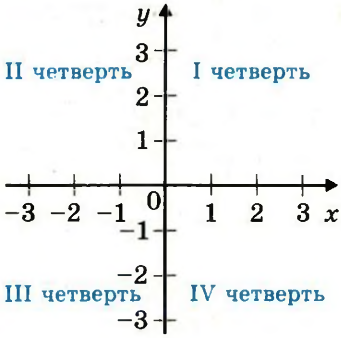


Рис. 65

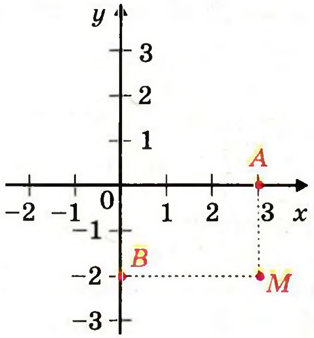


Рис. 66

Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно оси абсцисс, пересекает ее в точке A, а прямая, перпендикулярная оси ординат, пересекает эту ось в точке B. Точка A на оси x имеет координату 3, а точка B на оси y — координату -2.

Число 3 называют абсциссой точки M, число -2 — ординатой точки M. Числа 3 и -2 однозначно определяют место точки M на координатной плоскости. Поэтому их называют координатами точки M и записывают: $M(3; -2)$.

Записывая координаты точки, абсциссу всегда ставят на первое место, а ординату — на второе.

Если точка лежит на оси абсцисс, то ее ордината равна нулю, а если точка лежит на оси ординат, то нулю равна ее абсцисса.

Ответы и указания

4. 1) $14\frac{4}{27}$; 2) $1\frac{1}{4}$; 3) $-0{,}3$; 4) $-1\frac{1}{3}$; 5) 1. **5.** 1) $13\frac{3}{5}$; 2) $1\frac{1}{4}$; 3) 4,4; 4) $-\frac{7}{10}$. **23.** 110 пудов. **37.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$; 3) корней нет; 4) корнем уравнения является любое число. **38.** 1) 5; 2) 0,8; 3) корнем уравнения является любое число; 4) корней нет. **39.** 1) 0,6; 2) $\frac{3}{14}$; 3) -10; 4) $-0{,}9$. **40.** 1) 44; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $-5{,}2$. **41.** 1) $-\frac{9}{25}$; 2) корнем уравнения является любое число. **42.** 1) $-\frac{4}{11}$; 2) корней нет. **43.** 1) 0,4; -8; 2) 0; 25; 3) $\frac{2}{3}$; -12; 4) $-0{,}6$; -1; 0,3. **44.** 1) 6; $-4{,}5$; 2) $-0{,}8$; 3. **45.** 1) 10; 2) -3. **46.** 1) 1; 2) $-1{,}4$. **47.** 1) 12; 2) $4\frac{2}{3}$; 3) 2. **48.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2; 3) 4,8. **49.** 1) -10; 2) 3; 3) 1; 4) 0,5. **50.** 1) -2; 2) -12; 3) $-0{,}2$; 4) 2. **51.** 7) $-\frac{2}{3}$; -2; 8) 0; -1; 9) -8; 8. **52.** 4) -20; 100; 5) 2,3; $-0{,}9$; 6) 0; 4; -4. **53.** 2) 55. **54.** 2) $\frac{1}{3}$. **57.** 2) -3; -5; 3; -11; 45; -53. **58.** 2) 7; 11; 31. **59.** 1) 14; 2) $-\frac{31}{45}$. **60.** 1) -17; 2) 3,5. **61.** 2) 3; 3) 2. **62.** 2) 2; 3) -5. **63.** 1) $a \neq 5$; 2) $a \neq -7$. **64.** 1) Если $b \neq -1$, то $x = \frac{9}{b+1}$; если $b = -1$, то корней нет; 2) $x = -\frac{4}{b^2+1}$. **65.** Если $m \neq -8$, то $x = 1$; если $m = -8$, то x — любое число. **68.** 1) 3; 2) $-1{,}8$; 3) -1; 2. **69.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) корней нет. **70.** 1) a — четное число; 2) a — нечетное число; 3) число a кратно 4; 4) таких значений не существует. **71.** 1) Число b кратно 3; 2) число b таково, что остаток при делении числа b на 3 равен 1; 3) таких значений не существует. **72.** 1) При $b > 0$; 2) при $b < 0$. **73.** 1) При $d < 0$; 2) при $d > 0$. **74.** 1) 18 ч; первый выполнит $\frac{2}{5}$ задания, а второй — $\frac{3}{5}$ задания. **75.** 280 страниц. **76.** 1) Четным; 2) нечетным; 3) четным. **77.** 1) Нет, $2a < a$ при $a < 0$ и $2a = a$ при $a = 0$; 2) нет, $2|a| = |a|$ при $a = 0$. **83.** 2061 м, 2032 м, 2020 м. **84.** 500 м, 400 м, 374 м. **87.** 20 человек. **88.** 90 км. **89.** 20 кг, 14 кг. **90.** 264 места, 270 мест. **91.** 12 км/ч, 60 км/ч. **92.** 28 грн., 16 грн. **93.** 7,2 грн. **96.** 4 года. **97.** 7 лет. **98.** 30 словарей, 10 словарей. **99.** 1800 грн., 1200 грн. **100.** 11 купюр, 8 купюр. **101.** 800 т. **102.** 60 грн. **103.** 40 кг, 8 кг. **104.** 600 кг, 200 кг. **105.** 5 дней. **106.** 40 л; 80 л. **107.** 4,5 ч; 0,5 ч. **108.** 24 мин. **109.** 50 км/ч, 20 км/ч. **110.** 30,5 км/ч. **111.** 2 км/ч. **112.** 45 кг; 10 кг. **113.** 14 кг; 10 кг. **114.** 60 книг. **115.** 160 л. **116.** 71 турист. **117.** 109 апельсинов. **118.** 8 дней. **119.** 100 задач. **120.** 93. **121.** 24. **122.** 55 км/ч, 65 км/ч или 70 км/ч, 80 км/ч. **123.** 100 кг, 200 кг. **124.** 20 кг, 30 кг. **125.** 1) 4,04; 2) −35,16; 3) $1\frac{8}{9}$; 4) $-6\frac{1}{3}$. **128.** 4. **129.** 3) x — любое неотрицательное число; 4) x — любое неположительное число. **146.** 24 ч. **147.** 579 ц. **148.** 1) $b < 0$; 2) $|a| < |b|$. **149.** Уменьшилась на 25 %. **162.** 3) 16; 4) 115. **163.** 3) 75. **185.** 2; 3; 4. **186.** 1; 2. **191.** 2) $x = 1$ и $y = -2$. **193.** 1) $x = 0$; 2) $x = 1$. **194.** 1) $x = 0$; 2) $x = -3$. **195.** 2) *Указание.* Докажите, что последняя цифра значения выражения равна 0; 3) *Указание.* Значение выражения — это число, последняя цифра которого равна 3, а остальные — 9. **196.** 1) *Указание.* Докажите, что сумма цифр значения выражения равна 9; 2) *Указание.* Докажите, что последняя цифра значения выражения равна 5. **197.** 3. **198.** 20 %. **199.** 60 кг, 20 кг. **200.** 1) 3,8; 2) корней нет. **201.** a — отрицательное число, b — положительное число, $c = 0$. **227.** 2) 2^5; 3) 2^{2n}; 4) 2^{n+1}. **244.** 1) 36; 2) 125; −125. **247.** 5^{2001}. **248.** 1) 6; 2) 1; 3) 4 или 6; 4) 1, или 3, или 7, или 9. **249.** 1) 1; 2) 1; 3) 1 или 9. **250.** 1) *Указание.* Последней цифрой степени 17^8

является 1; 2) *Указание*. Последней цифрой степени 64^{64} является 6; 3) *Указание*. Последней цифрой степени $3^{4n} = 81^n$ является 1. **251.** 1) *Указание*. Последней цифрой степени 4^{40} является 6; 2) *Указание*. Последней цифрой степени 2004^{171} является 4, а степени 171^{2004} — 1. **252.** $48^{25} < 49^{25} = 7^{50} < 7^{51} = (7^3)^{17} = 343^{17} < 344^{17}$. **253.** 12 уток. **254.** 3,6 ч. **255.** 9,6 км. **256.** 1) 2; 2) корнем уравнения является любое число. **257.** *Указание*. Данное число можно представить в виде $1000a + a = 1001a$. **283.** 3) $-43{,}2$. **284.** 3) $-\frac{32}{27}$. **285.** 2) 24,5; 3) 30. **286.** 2) 1350; 3) 486. **287.** 600. **288.** 36 гусей. **300.** 600 г, 400 г. **301.** 300 вариантов. **311.** 3) 5; 4) корней нет. **312.** 2) 6; 3) корнем уравнения является любое число. **315.** 1) -45; 2) 24. **316.** 1) 11; 2) $\frac{2}{3}$. **331.** 5. **339.** -9 при $x = 0$. **340.** 4 при $y = 0$. **344.** 1) $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b = 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c)$. **345.** *Указание*. Рассмотрите сумму данных многочленов. **347.** Меньше на 4 %. **348.** 4 ч. **349.** 144 дерева. **350.** 10 км. **361.** 1) -2; 2) -5; 3) $-0{,}5$; 4) корнем уравнения является любое число; 5) корней нет; 6) 4. **362.** 1) 2; 2) 0; 3) 6. **374.** 1) $7b^2$; 2) 0. **375.** 1) 45; 2) 0; 3) $\frac{7}{4}$; 4) 2,1; 5) 3; 6) $\frac{3}{20}$; 7) $\frac{7}{34}$; 8) $\frac{44}{9}$. **376.** 1) -1; 2) $-\frac{83}{4}$; 3) -4; 4) 10. **377.** $-\frac{3}{7}$. **378.** 8 см. **379.** 64 см. **380.** 36 км, 42 км, 30 км. **381.** 22 детали, 34 детали, 24 детали. **382.** 1) $x^{n+5} - x^{n+1}$; 2) $x^{n+4} - x^{2n+2} + x^n$. **383.** 1) $5x^{n+1}$; 2) $x^{2n+2} - 7x$. **384.** *Указание*. Из условия следует, что $a = 3n + 1$, $b = 9m + 7$, где m и n — натуральные числа. **386.** 800 км², 360 км², 204,8 км². **387.** 210 страниц. **389.** 90 км. **390.** 8 дней. **398.** 1) -7; 2) -2; 3) 1; 4) -1; 5) корней нет. **399.** 1) 2; 2) $-\frac{2}{27}$; 3) 6; 4) корнем уравнения является любое число. **405.** 6; 7; 12; 14. **406.** 8; 12; 18. **407.** 7; 8; 9; 10. **408.** 16; 17; 18. **409.** 15 см. **410.** 18 см, 12 см. **411.** 14 см, 12 см. **425.** 15 деталей, 11 деталей.

426. 9 %. **427.** 1) 3; 2) 9. **429.** 60 лет. **447.** 1) $-a(a + b)(2a + 3b)$; 2) $3m(m - 8)(3m - 16)$; 3) $(a + 5)(3a + 2)$; 4) $(4y - 1)(x - 3)$; 5) $(5m - n)^2(m + 8n)^2(4m - 9)$. **448.** 1) $(x - 6)(x + 4)$; 2) $(x^2 - 2)(2y - 7)$; 3) $(4a - 3b)(3a + 7b)$; 4) $(p - 9)^3(2p + 1)^3(3p - 8)$. **449.** 1) -7; 2) 2; $2\frac{2}{3}$; 3) 5; -40; 4) 7; 14. **450.** 1) -6; 9; 2) 10; -6; 3) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; 4) $1\frac{1}{3}$; 1. **451.** 7) $49a^2(1 + 2b)^2$; 8) $81c^{12}(c - 2)^4$. **452.** 5) $64x^2y^2(2x + 5y)^2$; 6) $32x^{10}(11x^2 - 14y^3)^5$. **457.** 1) 0; $\frac{3}{8}$; 2) 0; 0,4; 3) 0; $-0{,}2$; 4) 0; 3,6. **458.** 1) 0; 6; 2) 0; $\frac{1}{3}$. **459.** 1) $2a + 4$; 2) $6ab - 4b$; 3) $8ab^2 - 14b^3$. **460.** 1) $2a^2b^2$; 2) $2ab + 2b^2$. **463.** 1) $a^n(a + 1)$; 2) $b^{n-3}(b^3 - 1)$; 3) $c^{n-4}(c^6 + 1)$; 4) $d^n(d^n - 1)$; 5) $2^{n+1} \cdot 5$; 6) $3^{n+2}(3^n + 1)$. **464.** 1) $a^n(a^2 - 1)$; 2) $b^n(3b^2 - 2b + 1)$; 3) $2^{5n}(1 + 2^{3n+4})$. **465.** 2) 24; 3) 20. **466.** 2) -4; 3) -12. **467.** 1) 1; 2) 0,8; 3) 5. **468.** 1) $a = 3$; 2) $a = -\frac{2}{3}$. **469.** 18. *Указание.* Пусть данное число $\overline{ab}$. Тогда $\overline{ab} = 10a + b = (a + 1)(b + 1)$, отсюда $9a = ab + 1$, $a(9 - b) = 1$. Отсюда $a = 1$, $b = 8$. **471.** 20 кг. **472.** 28 банок. **474.** Нет. **482.** 1) 15; 2) 72; 3) 25. **483.** 1) 250; 2) -1. **486.** 1) $(a^n + 1)(a + 1)$; 2) $(b + 1)(b^{n+1} - 1)$; 3) $(y^{n+1} - 1) \times (3y^2 + 5)$. **487.** 1) $(x + 6)(x + 2)$; 2) $(x - 4)(x - 1)$; 3) $(x - 1)(x + 8)$; 4) $(x + 1)(x - 5)$. **488.** 1) $(x + 1)(x + 3)$; 2) $(x - 2)(x - 8)$; 3) $(x + 6)(x - 3)$; 4) $(x - 8)(x + 4)$. **489.** *Указание.* $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n^2 + n + 2n + 2) = n(n(n + 1) + 2(n + 1)) = n(n + 1)(n + 2)$. **490.** $(a + b + c)^2$. *Указание.* Представьте каждый из членов $2ab$, $2bc$ и $2ac$ данного многочлена в виде суммы $ab + ab$, $bc + bc$, $ac + ac$ соответственно и примените метод группировки. **491.** *Указание.* $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = 10(3^n - 2^{n-1})$. **492.** 2. *Указание.* $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2 = 2x^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 + y^4 + y^2 = 2x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2) + y^2$. **493.** 4 овцы. **494.** 6 ч. **495.** 40 л, 10 л.

510. 5) $16a^4 - 1$; 6) $c^{12} - 625$. **511.** 4) $a^8 - 1$. **512.** 3) $y^{2n+4} - x^{8n}$; 4) $a^{2n+2} - b^{2n-2}$. **513.** 3) $4x^2 - 3x + 93$; 4) b^2c^5. **514.** 1) $x^2 - 4x + 19$; 2) b^{12}. **515.** 1) -1; 2) корней нет; 3) корнем уравнения является любое число; 4) $-25{,}6$. **516.** 1) -40; 2) -3. **521.** 1) 4; 2) 25; 3) 9; 4) -1; 5) -1. **522.** 1) 1; 2) 256. **524.** *Указание.* $253 \cdot 259 = (256 - 3)(256 + 3)$, $252 \cdot 260 = (256 - 4)(256 + 4)$. **525.** 14 км/ч, 42 км. **526.** 20 кг, 80 кг. **527.** 4 ч. **528.** $7^5 = 16\,807$ горстей, 1,35 т. **529.** 1) $-1\frac{4}{25}$; 2) $6\frac{1}{6}$. **542.** 1) -150; 2) 12,8. **543.** -40. **547.** 1) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$; 2) $(a^2 - 2)(a^2 + 2)(a^4 + 4)(a^8 + 16)$. **548.** 1) 4; $-\frac{2}{3}$; 2) -1; -7; 3) -10; $-2\frac{2}{3}$; 4) $-1\frac{2}{7}$; $-\frac{1}{23}$. **549.** 1) $\frac{2}{11}$; $\frac{10}{11}$; 2) -16; $-\frac{3}{8}$. **553.** 1) $(2n + 2)^2 - (2n)^2 - (2n + 2 - 2n)(2n + 2 + 2n) = 2(4n + 2)$. **555.** 43 и 34. **557.** 1) $b = 2$; 2) $b = -2$; 3) $b \neq 2$ и $b \neq -2$. **559.** 8 км/ч. **560.** 45 кг. **561.** $a = -3$. **562.** 1) $-\frac{5}{8}$; 2) корнем уравнения является любое число. **563.** 1) $a > 0$; 2) $a \neq 0$; 3) a — любое число. **585.** 5. **586.** 1) 9; 2) $-0{,}6$; 3) -5. **587.** 1) $-\frac{1}{11}$; 2) 7. **588.** 7 см. **589.** 26 см. **590.** 12; 13; 14. **591.** 19; 20; 21; 22. **602.** 1. **603.** 0 или 1. **607.** 7. **608.** 3. **611.** $a = 1$. **612.** $a = -\frac{1}{6}$. **615.** Пусть n — третье из данных чисел, тогда данные числа равны соответственно $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$, где $n > 2$. Докажите, что сумма квадратов этих чисел равна $5(n^2 + 2)$. Чтобы полученный результат мог быть квадратом некоторого натурального числа, значение выражения $n^2 + 2$ должно быть кратным 5, то есть его последней цифрой должна быть цифра 0 или цифра 5. Так как последней цифрой значения выражения n^2 может быть одна из цифр 0, 1, 4, 5, 6, 9, то значение выражения $n^2 + 2$ не может оканчиваться цифрой 0 или цифрой 5. **616.** 5000 т. **617.** 500 кг. **618.** Одинаковая. **621.** 2) Таких значений не существует; 3) $x = -1$. **634.** 1) $(4a - b)^2$; 2) $(6x + 5y)^2$. **635.** 1) $(2m + 2n)^2$; 2) $(7x + 4y)^2$. **636.** 1) 0,0016; 2) 10 000.

637. 1) 10 000; 2) 9. **640.** 2) $-\frac{7}{9}$. **641.** 2) $\frac{3}{5}$. **645.** *Указание.* $x^2 - 14x + 52 = x^2 - 14x + 49 + 3 = (x - 7)^2 + 3$. **646.** 1) 1 при $x = 3$; 2) 16 при $x = -\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$ при $x = -\frac{1}{2}$. **648.** 1) -8 при $x = 2$; 2) -1 при $x = \frac{1}{11}$; 3) -7 при $x = -\frac{7}{6}$. **650.** 1) 100 при $x = -8$; 2) 11 при $x = \frac{3}{4}$. **651.** 1) 4 при $x = 14$; 2) -50 при $x = -\frac{5}{3}$. **653.** $(a - 3b)(a - 3b - 4) + 4 = (a - 3b)^2 - 4(a - 3b) + 4 = (a - 3b + 2)^2$. **654.** 6) *Указание.* $2a^2 + 2b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$. **655.** 1) $(a^2 + 1 - a)(a^2 + 1 + a)$; 2) $(x - y)(x + y + 4)$; 3) $(ab - c - 3)(ab + c + 5)$; 4) $(2a + b - 2)(4a - b - 2)$. **656.** 1) $(a^2 + 4)^2 + 9a^2$; 2) $(x - 5)^2 + (y + 7)^2$; 3) $(x - 3y)^2 + (x - 3)^2$; 4) $(x - 2)^2 - (y + 1)^2$. **657.** 1) $x = -4$, $y = 5$; 2) $x = -6$, $y = 1$. **658.** 1) $x = -1$, $y = 0,5$; 2) таких значений не существует. **659.** 45. **660.** 8. **661.** -10. **662.** $24 = 12 + 12$. *Указание.* Пусть одно из слагаемых равно x, тогда второе равно $24 - x$, а их произведение: $x(24 - x) = 24x - x^2 = 12^2 - 12^2 + 2 \cdot 12x - x^2 = 144 - (12 - x)^2$. **663.** 5 см, 5 см. **664.** 4. *Указание.* $b^2 + \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} + ab - ab = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 - ab$. **665.** 0. *Указание.* Данное в условии равенство представьте в виде $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = 0$. **666.** 100 км. **667.** 60 га, 40 га. **669.** 13. **670.** 420 дней. *Указание.* Чтобы узнать, через сколько дней рыбаки снова соберутся на озере вместе, надо найти НОК (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). **685.** 1) 9; 2) $25x - 64$; 3) $-6a^2 + 9a - 27$; 4) $a^{24} - 1$. **686.** 1) -124; 2) $-y^2 + 3y - 36$; 3) $a^6 - b^2$. **688.** 1) 0,5; 2) -1; 3) 8. **689.** 1) 6; 2) -5. **695.** *Указание.* Пусть данные числа равны $2n - 1$ и $2n + 1$. **696.** *Указание.* Эти числа можно представить в виде $3n + 1$ и $3n + 2$, где n — произвольное натуральное число. **697.** 1. *Указание.* $x^6 + 3x^2y^2 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) + 3x^2y^2$. **698.** 8. **701.** 18 кг; 6 кг. **702.** 2. **705.** 4) $\frac{1}{3}$; 6) 0; $\frac{1}{6}$. **725.** 6) -2; -3; 3; 7) 5; 8) -1; 1. **726.** 5) -1; 1; 6) -5; 5;

4. **732.** 1) $(x - y + 4)(x + y - 2)$; 2) $(2a - 3b - 3)(2a + 3b + 1)$. **733.** 1) $(5x - y^2 + 4)(5x + y^2 - 10)$; 2) $4(3m - 2n + 3)(3m + 2n - 2)$. **734.** 4) $(2a - 5)(2a - 1)$; 5) $(3x - 7y)(3x - y)$; 6) $3(2m - n)(6m - 7n)$. **735.** 4) $(x + 3)(x - 2)$; 5) $(c + 3d)(c + 5d)$; 6) $(3x - 8y)(3x - 2y)$. **736.** 1) -40; 2) 74; 3) 84; 4) 632. **737.** 1) 54; 2) 48; 3) 1746. **739.** 1) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$; 2) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; 3) $(2x^2 - 4x + 1)(2x^2 + 4x + 1)$. *Указание.* $4x^4 - 12x^2 + 1 = (4x^4 + 4x^2 + 1) - 16x^2$; 4) $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$. *Указание.* $x^5 + x + 1 = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$; 5) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$; 6) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 2)$. **740.** 1) $(x^2 - x + 3)(x^2 + x + 3)$; 2) $(x^2 - 2x - 2)(x^2 + 2x - 2)$. **742.** 14, 18, 22. **743.** 13 км. **744.** 2) -2; 2; -18; 18; 3) -18; 2; 4) 4. **786.** $a = 3$. **787.** 420 человек. **815.** 12, 22, 32. **817.** *Указание.* Сложите левые и правые части данных равенств. **839.** Рис. 67. **840.** Рис. 68. **845.** 15 пчел. **873.** $A\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

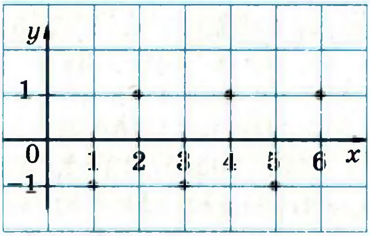


Рис. 67

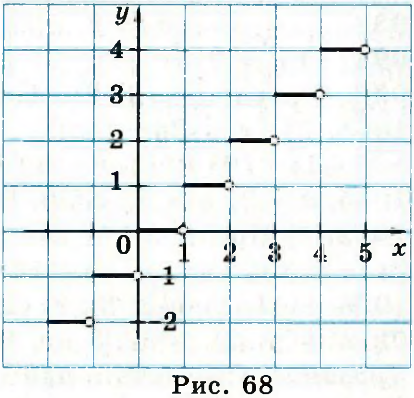


Рис. 68

874. 1) $(-10; -27)$; 2) $(-14; 8)$. **875.** $(3; 5)$. **879.** 1. **880.** 3. **881.** $k = 0{,}5$, $b = 4$. **882.** $k = \frac{1}{3}$, $b = -1$. **887.** 1) n; 2) k; 3) m; 4) p. **889.** $k = -1$. **890.** $b = 11$. **897.** 1) $y = x + 3$; 2) $y = -0{,}5x - 1$. **898.** 1) $y = -\frac{2}{3}x$; 2) $y = 2x - 4$. **899.** Рис. 69. **900.** 1) -39; 2) -12. **901.** 1) $\frac{5}{8}$; 2) 1,4. **902.** *Ука-*

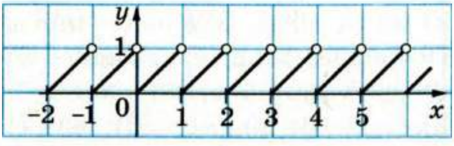


Рис. 69

зание. Пусть второе из этих чисел равно n, тогда первое число будет равно $n - 1$, а третье — $n + 1$. Разложите на множители сумму кубов первого и третьего чисел. **904.** $a^2 - b^2$. *Указание*. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$. **905.** Из определения модуля следует, что $|x| \geqslant x$, поэтому $|x| - x \geqslant 0$. Вместе с тем $2x - x^2 - 2 = -x^2 + 2x - 1 - 1 = -(x - 1)^2 - 1 < 0$. **917.** 2. **918.** 6. **919.** 3) $(-3; 0)$; $(3; 0)$; $(0; -3)$; $(0; 3)$; 4) $(5; 0)$; $(-5; 0)$; $(0; -5)$. **934.** 1) $(1; 1)$; 2) $(1; 3)$; $(6; 2)$; $(11; 1)$. **937.** 3 способа. **938.** 9 задач по алгебре и 2 задачи по геометрии, или 6 задач по алгебре и 4 задачи по геометрии, или 3 задачи по алгебре и 6 задач по геометрии. **939.** 1) $(0; 2)$; 2) $(-1; 3)$; 3) $(-0,5; -0,5)$; 4) решений нет. **940.** 1) $(5; -5)$; 2) решений нет. **941.** $(0; 0)$; $(-1; 0)$; $(1; 0)$; $(0; -2)$. **942.** $(0; 4)$; $(0; -4)$; $(5; 0)$; $(-5; 0)$. **943.** 5 %. **944.** 20 яблок. **945.** 1) 6; 2) -5. **946.** 269,5 км. **948.** 1) 12; 2) $-\frac{16}{3}$. **986.** -12. **987.** -4. **988.** $a = -4$, $b = 2$. **991.** 1) d; 2) c; 3) b; 4) a. **994.** 1) $y = 0,5x + 2$; 2) $y = 0,6x - 3$. **995.** $x + y = 6$. **998.** Одна пара $(3; 2)$. **1000.** 24 ч. **1002.** 1) 5; 2) 3,5. **1003.** 2) $(x - 3y - 4)(x - 3y + 4)$; 4) $(c - b - 3)(c + b + 1)$. **1014.** 1) $a = 3$; $b = -2,5$; 2) $a = 4$; $b = -6$. **1015.** $a = 2$; $b = 5$. **1020.** При $a \neq 7$. **1021.** 1) 16; 2) -5. **1022.** 1) При $a \neq 14$; 2) при $a = -10$. **1025.** 1) $(-2; 2)$; 2) $(-2; 2)$; $(1; 1)$; 3) решений нет; 4) $(1; -1)$; $(3; 3)$. **1026.** 1) $(1; 1)$; $(-3; 3)$; 2) $(2; 1)$; $(-2; -1)$; 3) $(2; 0)$; $(-2; 0)$; $(0; 2)$; $(0; -2)$. **1027.** 3 кг. **1028.** 60 км/ч. **1029.** 3, 5, 7, 9. *Указание*. Обозначьте наименьшее из этих чисел $2k - 3$, где k — произвольное натуральное число, большее, чем 1. **1036.** 1) $(6; 3)$; 2) $(4; 2)$; 3) $(1; 2)$; 4) $(4; -3)$; 5) $(-5; -7)$; 6) $(1,2; -0,7)$. **1037.** 1) $(-5; 20)$; 2) $(-1; 3)$; 3) $(-2; -1)$; 4) $(-3; 4)$. **1038.** 1) $(0; -6)$; 2) $(8; 6)$; 3) $(-5; -4)$; 4) $(4; -3)$. **1039.** 1) $(1; -1)$; 2) $(-2; 0,5)$; 3) $(14; 2)$. **1040.** 1) 14; 2) 0,25. **1041.** 7 левов. **1043.** $2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1 = 16^n - 1$. Последней цифрой степени 16^n является 6. Тогда последней цифрой данного выражения является 5. **1049.** 1) $(8; 1)$; 2) $(1,2; 0)$; 3) $(-1; -2)$; 4) $(7; -1)$; 5) $(4; -1)$; 6) $(6; -2)$; 7) $(2; -2)$; 8) $(5; 6)$. **1050.** 1) $(1; 2)$; 2) $(3; -1)$; 3) $(4; 2)$;

4) (6; 5); 5) (1,5; 0,5); 6) (1; −1). **1051.** 1) (−3; −4); 2) (1; −0,5); 3) $\left(5\frac{3}{4}; -\frac{3}{8}\right)$; 4) (2; −2). **1052.** 1) (−0,6; −3,2); 2) (1; 3). **1053.** 1) (1; 1); 2) (−3; 3). **1054.** 1) (−20; −0,5); 2) (−2; 3). **1055.** 1) $\left(-\frac{1}{7}; 2\frac{3}{7}\right)$; 2) (−10; 5). **1056.** 1) (−5; −6); 2) (1; −6). **1057.** $a = 5{,}6$, $b = 0{,}8$. **1058.** $m = 1{,}5$, $n = 3$. **1059.** 1) $y = -0{,}2x + 1{,}4$; 2) $y = -x + 1$. **1060.** 1) $y = -0{,}5x + 3{,}5$; 2) $y = 3x + 3$. **1062.** 1) (3; −1,6); 2) решений нет. **1065.** −0,8. **1066.** 2. **1067.** 1) (3; −3); 2) (1,5; 0,75); 3) $\left(4; -\frac{2}{3}\right)$; 4) (−5; 6); 5) (−2,4; −4). **1068.** 1) (10; 5); 2) (0,5; 1,5); 3) (−8; −28). **1069.** 1) (0,4; 5); 2) (1; −1). **1070.** 1) $\left(\frac{1}{20}; \frac{1}{2}\right)$; 2) (2; −2). **1071.** 1) 6; 2) −2,5. **1072.** 9 задач. **1073.** 2 ч. **1075.** 96 деревьев. **1080.** 63 аршина синего сукна и 75 аршин черного. **1081.** 7 четырехместных лодок и 3 шестиместных. **1082.** 9 кг, 7 кг. **1083.** 8 га, 6 га. **1084.** 9 деталей, 6 деталей. **1085.** 4 ц, 5 ц. **1086.** 14 грн., 12 грн. **1087.** 3 грн., 2 грн. **1088.** 58 км/ч, 70 км/ч. **1089.** 60 км/ч, 40 км/ч. **1090.** 4 км/ч, 16 км/ч. **1091.** 84 км/ч, 79 км/ч. **1092.** 80 л, 60 л. **1093.** 28 пассажиров, 36 пассажиров. **1094.** 18 км/ч, 2 км/ч. **1095.** 25 км/ч, 2,5 км/ч. **1096.** 5 мешков, 7 мешков. **1097.** 40 рупий, 170 рупий. **1098.** 42 года, 15 лет. **1099.** 60 лет, 12 лет. **1100.** 45 костюмов, 30 костюмов. **1101.** 18 грн., 42 грн. **1102.** 3 грн., 4 грн. **1103.** 20 грн., 8 грн. **1104.** 800 грн., 600 грн. **1105.** 900 грн., 300 грн. **1106.** $a = 120$, $b = 100$. **1107.** 12; 15. **1108.** 100 кг, 200 кг. **1109.** 20 кг, 30 кг. **1110.** 87. **1111.** 6 см, 8 см. **1112.** 5 см, 7 см. **1113.** 3 км/ч, 12 км/ч. **1114.** 5 км/ч, 4 км/ч. **1115.** 12 км/ч. **1116.** 60 т. **1117.** 50 км/ч, 75 км/ч, 90 км/ч, 450 км. **1118.** 48 км/ч, 60 км/ч. **1119.** 48 км/ч, 16 км/ч. **1120.** 320 г, 480 г. **1121.** 63 кг, 15 кг. **1122.** 72. **1123.** 39. **1124.** 24 л, 40 л. **1125.** 28 л, 42 л. **1126.** 1) Такого числа не существует; 2) любое двузначное число, у которого цифра десятков на 2 больше цифры единиц, на 18 больше числа, записанного

теми же цифрами, но в обратном порядке. **1127.** 8 косарей. **1133.** 2) $(b^3 - 2b^2 + 3)(b^3 + 2b^2 - 3)$; 4) $(3x - 7)(3x + 5)$. **1134.** $a^2 = c + 2b$. **1135.** 7,5. **1137.** 8. **1154.** Не существуют. *Указание.* Найдите сумму данных многочленов. **1156.** 1) $1\frac{6}{7}$; 2) $\frac{6}{11}$; 3) −0,2; 4) 5; 5) 3; 6) $\frac{7}{4}$. **1157.** 1) −0,4; 2) 40; 3) решений нет; 4) корнем уравнения является любое число. **1159.** 3. **1160.** −4. **1162.** 1) 20; 2) 17. **1163.** 1) 2,7; 2) 0,4; 3) 23; 4) 51,2. **1166.** −4. **1167.** $\frac{2}{3}$. **1169.** 1) 16. *Указание.* Представьте второе слагаемое в виде суммы двух слагаемых: $1{,}66 \cdot 4{,}68 = 1{,}66 \cdot 2{,}34 \cdot 2 = 1{,}66 \cdot 2{,}34 + 1{,}66 \cdot 2{,}34$; 2) 0,16. **1170.** При $a = c$ или $b = d$. **1173.** 1) 0,5; 2) 0. **1176.** 1) 1; 2) 4. **1186.** 1) 2; 2) 0,5; 3) $-\frac{1}{13}$. **1192.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{5}$. **1198.** 1) 9; 2) 0,064; 3) 1. **1204.** *Указание.* $n(n + 2)(n + 4)(n + 6) + 16 = (n^2 + 6n)(n^2 + 6n + 8) + 16 = (n^2 + 6n + 4 - 4)(n^2 + 6n + 4 + 4) + 16 = (n^2 + 6n + 4)^2 - 4^2 + 16 = (n^2 + 6n + 4)^2$. **1205.** *Указание.* Пусть n — данное натуральное число. Надо рассмотреть два случая: $n = 3k + 1$ или $n = 3k + 2$, где k — произвольное натуральное число. **1206.** *Указание.* Рассмотрите 4 возможных случая: 1) $n = 5k + 1$; 2) $n = 5k + 2$; 3) $n = 5k + 3$; 4) $n = 5k + 4$, где k — произвольное натуральное число. **1207.** Можно. *Указание.* Рассмотрите случаи, когда $n = 3k$, $n = 3k + 1$ и $n = 3k + 2$, где k — произвольное натуральное число. **1215.** −4. **1222.** 1) (−2; 1); 2) (3; −2); 3) (1; −1); 4) (4; 2). **1223.** 2. **1224.** −1. **1225.** 32 ученика. **1226.** 15 м/с, 10 м/с. **1227.** 64 %. **1228.** 120 г, 60 г. **1229.** 8 л, 2 л. **1230.** 30 га, 40 га. **1231.** 20 га, 25 га. **1232.** 12 кг. **1233.** 29. **1234.** 91. *Указание.* Если данное число равно x, то полученное число равно $10x + 1000 + 1 = 10x + 1001$ или $21x$. **1235.** 16; 12.

Ответы к заданиям в тестовой форме «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

Номер задания	Номер задачи											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	В	А	Б	В	В	Г	Б	В	Б	В	Б	Г
2	Г	В	Г	Г	В	В	Б	В	Б	А	Г	А
3	Г	Г	А	Б	Б	В	А	Б	В	А	А	В
4	В	Б	В	Б	В	Б	Б	Г	В	Б	А	Г
5	В	Г	Г	Б	Б	Б	А	В	А	В	Г	Б
6	А	Г	Б	Б	В	Б	А	А	В	В	Б	А
7	В	Г	А	Б	В	Г	А	А	В	А	Б	Б

Предметный указатель

Оглавление