А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонський
М.С. Якір

7

АЛГЕБРА

ГІМНАЗІЯ

УДК 373:512
ББК 22.141я721
М52

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ISBN 978-966-8319-70-9

Від авторів

ЛЮБІ СЕМИКЛАСНИКИ!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **алгебру.**

Алгебра — це стародавня й мудра наука. На вас чекає знайомство з її азами. Знати алгебру надзвичайно важливо. Мабуть, немає сьогодні такої галузі знань, де б не застосовувалися досягнення цієї науки. Фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують «алгебраїчний інструмент».

Алгебра — не тільки корисний, а й дуже цікавий предмет, який розвиває кмітливість і логічне мислення. І ми сподіваємося, що ви в цьому скоро переконаєтеся, чому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом*.** Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено «зірочкою» (*)).

Кожний пункт завершує особлива рубрика, яку ми назвали «Учимося робити нестандартні кроки». У ній зібрано задачі, для розв'язання яких потрібні не спеціальні алгебраїчні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни. Вони допоможуть вам навчитися приймати несподівані й нестандартні рішення не лише в математиці, а й у житті.

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати оповідання з історії алгебри. Назви цих оповідань надруковано синім кольором.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

УЧИТЕЛЯМ

Шановні колеги!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

Бажаємо творчої наснаги й терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ:

- n° завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;
- $n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
- $n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
- n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;
- ▲ закінчення доведення теореми.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

1. Вступ

Алгебра — це новий шкільний предмет. Проте вам уже знайомі деякі елементи цієї науки. Наприклад, коли ви записували формули і складали рівняння, вам доводилося позначати числа буквами, конструюючи **буквені вирази**.

Так, записи a^2, $(x + y)^2$,

$2(a + b)$, $\dfrac{x - y + z}{2}$,

abc, $\dfrac{m}{n}$

є буквеними виразами.

При цьому слід зазначити, що не будь-який запис, складений з чисел, букв, знаків арифметичних дій і дужок, є буквеним виразом. Наприклад, запис $2x$ +) – (є беззмістовним набором символів.

Разом з тим вираз, складений з однієї букви, вважають буквеним виразом.

Розглянемо буквений вираз $2(a + b)$. Ви знаєте, що за його допомогою можна знайти периметр прямокутника зі сторонами a і b. Якщо, наприклад, букви a і b замінити відповідно числами 3 і 4, то дістанемо **числовий вираз** $2(3 + 4)$. У цьому випадку периметр прямокутника дорівнює 14 одиницям довжини. Число 14 називають **значенням числового виразу** $2(3 + 4)$.

Зрозуміло, що замість букв a і b можна підставляти й інші числа, отримуючи щоразу новий числовий вираз.

Оскільки букви можна заміняти довільними числами, то ці букви називають **змінними**, а сам буквений вираз — **виразом зі змінними** (або зі змінною, якщо вона одна).

Розглянемо вираз $2x + 3$. Якщо змінну x замінити, наприклад, числом $\frac{1}{2}$, то дістанемо числовий вираз $2 \cdot \frac{1}{2} + 3$. При цьому говорять, що $\frac{1}{2}$ — **значення змінної** x, а число 4 — **значення виразу** $2x + 3$ при $x = \frac{1}{2}$.

Числові вирази і вирази зі змінними називають **алгебраїчними виразами**:

Алгебраїчні вирази

Числові вирази | **Вирази зі змінними (буквені вирази)**

Розглянемо дві групи виразів:

I група	II група
$x - y^3$	$\frac{1}{x}$
$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{(a+b)^2}$
$\frac{1}{3}b^2 + 5a$	$\frac{m}{n+3}$
$\frac{mn}{7}$	$5 - \frac{x}{y^2}$

Вирази кожної групи містять такі дії: додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня, ділення. Однак вирази першої групи не містять ділення на вирази зі змінними. Їх називають **цілими виразами**. Вирази другої групи не є цілими.

У 7 класі ми вивчатимемо цілі вирази.

ПРИКЛАД

Значення змінних a і b такі, що $a - b = 4$, $m = -5$. Чому дорівнює значення виразу $7bm - 7am$ при тих самих значеннях змінних?

Використовуючи розподільну і сполучну властивості множення, отримуємо:

$7bm - 7am = 7m(b - a) = 7 \cdot (-5) \cdot (-4) = 7 \cdot 20 = 140.$

Відповідь: 140.

1. Як інакше називають буквені вирази?
2. Які вирази називають алгебраїчними?
3. Які алгебраїчні вирази називають цілими?

1.° Знайдіть значення числового виразу:

1) $0,72 + 3,018$; 3) $1,8 \cdot 0,3$; 5) $72 : 0,09$;
2) $4 - 2,8$; 4) $5,4 : 6$; 6) $9 : 4$.

2.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$; 5) $\frac{46}{75} : \frac{23}{45}$; 9) $6 - 1\frac{3}{5}$;
2) $\frac{3}{7} - \frac{2}{9}$; 6) $\frac{2}{3} : 4$; 10) $4\frac{2}{7} - 1\frac{4}{9}$;
3) $\frac{7}{16} \cdot \frac{8}{35}$; 7) $10 : \frac{5}{11}$; 11) $8\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{14}$;
4) $\frac{4}{9} \cdot 18$; 8) $2\frac{3}{8} + 4\frac{1}{6}$; 12) $1\frac{3}{5} : 5\frac{1}{3}$?

3.° Обчисліть значення виразу:

1) $3,8 + (-2,5)$; 6) $0 - 7,8$; 11) $-48 \cdot 0$;
2) $-4,8 + 4,8$; 7) $0 - (-2,4)$; 12) $-3,3 : (-11)$;
3) $-1 + 0,39$; 8) $-4,5 - 2,5$; 13) $3,2 : (-4)$;
4) $9,4 - (-7,8)$; 9) $8 \cdot (-0,4)$; 14) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$;
5) $4,2 - 5,7$; -15 10) $-1,2 \cdot (-0,5)$; 15) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2$.

4.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $18\frac{5}{12} - \frac{7}{12} \cdot 1\frac{19}{21} - \frac{17}{72} \cdot \frac{2}{3}$;
2) $\left(6\frac{3}{4} - 5\frac{1}{8} : 1\frac{9}{32}\right) \cdot \frac{5}{11}$;
3) $(-1,42 - (-3,22)) : (-0,4) + (-6) \cdot (-0,7)$;
4) $\left(-\frac{7}{18} + \frac{11}{12}\right) : \left(-\frac{19}{48}\right)$;
5) $\left(-3\frac{1}{12} - 2\frac{1}{15}\right) : \left(-5\frac{3}{20}\right)$?

5.° Обчисліть значення числового виразу:

1) $14\frac{7}{15} - 3\frac{3}{23} \cdot \frac{23}{27} - 1\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$;
2) $\left(5\frac{8}{9} : 1\frac{17}{36} + 1\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{5}{21}$;
3) $(-3,25 - 2,75) : (-0,6) + 0,8 \cdot (-7)$;
4) $\left(-1\frac{3}{8} - 2\frac{5}{12}\right) : 5\frac{5}{12}$.

6.° Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:
1) добуток суми чисел -12 і 8 та числа 0,5;
2) сума добутку чисел -12 і 8 та числа 0,5;
3) частка суми і різниці чисел $-1,6$ і $-1,2$;
4) квадрат суми чисел -10 і 6;
5) сума квадратів чисел -10 і 6.

7.° Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:
1) частка суми чисел $\frac{4}{9}$ і $-\frac{5}{6}$ та числа $-\frac{14}{27}$;
2) різниця добутку чисел $-1,5$ і 4 та числа 2:
3) добуток суми і різниці чисел $-1,9$ і 0,9;
4) куб різниці чисел 6 і 8.

8.° Знайдіть значення виразу:
1) $2x - 3$ при $x = 4, 0, -3$;
2) $\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b$ при $a = -6$, $b = 16$;
3) $3m - 5n + 3k$ при $m = -7$, $n = 1,4$, $k = -0,1$.

9.° Обчисліть значення виразу:
1) $0,4y + 1$ при $y = -0,5; 8; -10$;
2) $\frac{2}{7}c-0,2d$ при $c = -28$, $d = 15$.

10.° Які з даних виразів є цілими:
1) $7a + 0,3$;
2) $5x\left(y-\frac{1}{3}\right)$;
3) $\frac{a+b}{c}$;
4) $\frac{a+b}{4}$;
5) $\frac{3m}{5}+\frac{5}{3m}$;
6) $9x-5y+\frac{1}{z}$?

11.° Користуючись термінами «сума», «різниця», «добуток», «частка», прочитайте алгебраїчні вирази та вкажіть, які з них є цілими:
1) $a - (b + c)$;
2) $a + bc$;
3) $x-\frac{y}{z}$;
4) $2m - 10$;
5) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$;
6) $(a + b)c$;
7) $ac + bc$;
8) $\frac{a}{b+4}$;
9) $(a - b)(c + d)$.

12.° Запишіть у вигляді виразу:
1) число, протилежне числу a;
2) число, обернене до числа a;
3) суму чисел x і y;
4) число, обернене до суми чисел x і y;

5) суму чисел, обернених до чисел x і y;
6) суму числа a і його квадрата;
7) частку числа a і числа, протилежного числу b;
8) добуток суми чисел a і b та числа, оберненого до числа c;
9) різницю добутку чисел m і n та частки чисел p і q.

13.° Олівець коштує x грн., а зошит — y грн.
1) Скільки коштують 5 олівців і 7 зошитів?
2) На скільки більше треба заплатити за a зошитів, ніж за b олівців?

14.° Робітнику видали заробітну плату однією купюрою номіналом 100 грн., a купюрами номіналом 50 грн. і b купюрами по 20 грн. Скільки грошей отримав робітник?

15.° З двох міст, відстань між якими дорівнює 300 км, вирушили одночасно назустріч один одному два автомобілі зі швидкостями m км/год і n км/год. Через скільки годин після початку руху вони зустрінуться?

16.° З двох селищ, відстань між якими дорівнює s км, одночасно в одному напрямі вирушили пішохід і велосипедист. Через скільки годин після початку руху велосипедист наздожене пішохода, якщо той ішов попереду зі швидкістю a км/год, а велосипедист їхав зі швидкістю b км/год? Обчисліть значення отриманого виразу при $a = 4$, $b = 12$, $s = 12$.

17.• Запишіть у вигляді виразу:
1) потроєний добуток різниці чисел a і b на їх суму;
2) суму трьох послідовних натуральних чисел, менше з яких дорівнює n;
3) добуток трьох послідовних парних натуральних чисел, більше з яких дорівнює $2k$;
4) число, у якому a тисяч, b сотень і c одиниць;
5) кількість сантиметрів у x метрах і y сантиметрах;
6) кількість секунд у m годинах, n хвилинах і p секундах.

18.• Запишіть у вигляді виразу:
1) добуток чотирьох послідовних натуральних чисел, більше з яких дорівнює x;

2) різницю добутку двох послідовних непарних чисел і меншого з них, якщо більше число дорівнює $2k + 1$;

3) кількість кілограмів у a тоннах і b центнерах.

19." Складіть вирази для обчислення довжини синьої лінії та площі фігури, яку вона обмежує (рис. 1).

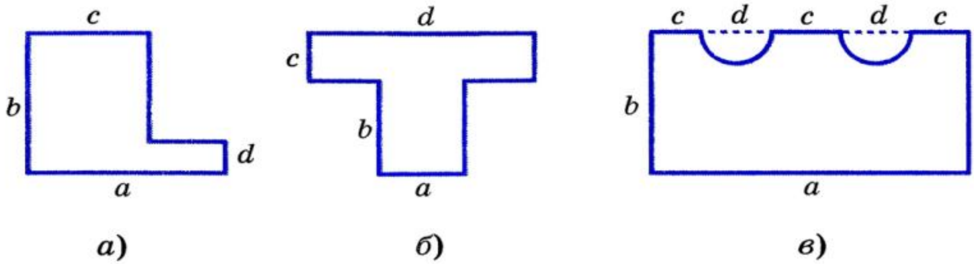


Рис. 1

20." Складіть вирази для обчислення довжини синьої лінії та площі фігури, яку вона обмежує (рис. 2).

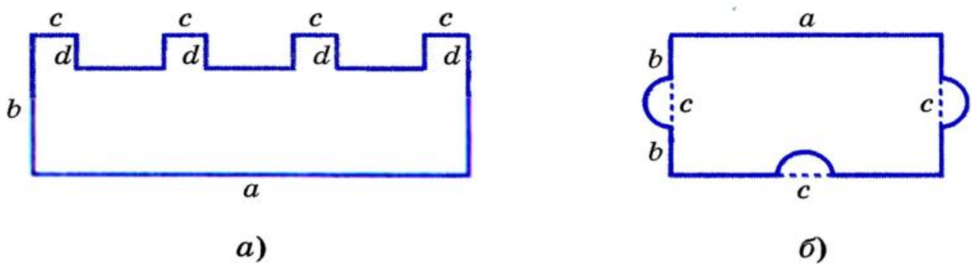


Рис. 2

21." Значення змінних a і b такі, що $a + b = -8$, $c = 4$. Чому дорівнює значення виразу:

1) $a + b - c$; 2) $0{,}5\,(a + b) + c$; 3) $3ac + 3bc$

при тих самих значеннях змінних?

22." Значення змінних m і n такі, що $m - n = 5$, $k = -2$. Чому дорівнює значення виразу:

1) $(n - m)\,k$; 2) $2m - 2n + 3k$

при тих самих значеннях змінних?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

23. (*Задача з українського фольклору.*) Мірошник бере за роботу $\frac{1}{10}$ змеленого борошна. Скільки борошна намололи селянину, якщо додому він повіз 99 пудів борошна?

24. До їдальні завезли капусту, моркву та картоплю. Капусти було 64 кг, маса моркви становила $\frac{5}{8}$ маси капусти, а маса картоплі — 180 % маси моркви. Скільки всього кілограмів овочів завезли до їдальні?

25. Відомо, що a і b — натуральні числа, а число $\frac{a}{b}$ — правильний дріб. Чи можна стверджувати, що:

1) $a - b > 0$; 2) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; 3) $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

26. Доведіть, що:

1) число 5 є коренем рівняння $3x + 1 = 21 - x$;

2) число -2 не є коренем рівняння $x(x + 4) = 4$.

27. Розв'яжіть рівняння:

1) $0,3x = 9$; 2) $-2x = 3$; 3) $15x = 0$.

28. Розкрийте дужки:

1) $2(x - 3y + 4z)$; 2) $-0,4(-5 + 1,5y)$.

29. Зведіть подібні доданки:

1) $4a + 9a - 18a + a$; 2) $1,2a - a + b - 2,1b$.

30. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $(x + 3,2) - (x + 4,5)$; 2) $1,4(a - 2) - (6 - 2a)$.

31. Знайдіть корінь рівняння:

1) $2x - 7 = x + 4$; 2) $-0,7(5 - x) = -4,9$.

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 27, 28 на с. 266, 267.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

32. Дано 12 натуральних чисел. Доведіть, що з них завжди можна обрати два, різниця яких ділиться націло на 11.

Книга про відновлення і протиставлення

З метою підготовки до нової теми ви повторили основні властивості рівнянь (п. 27, 28). Знаменно, що з однією з цих властивостей пов'язано походження слова «алгебра».

У IX ст. видатний арабський учений Мухаммед ібн Муса аль-Хорезмі (що означає Мухаммед, син Муси, з Хорезма) написав трактат про способи розв'язання рівнянь. У ті часи від'ємні числа вважалися хибними, брехливими, абсурдними. Тому, якщо при розв'язуванні рівнянь отримували «хибне число», то його перетворювали на «справжнє», переносячи в другу частину рівняння. Таке перетворення Мухаммед аль-Хорезмі назвав *відновленням* (арабською мовою — аль-джабр). Знищення однакових членів в обох частинах рівняння він назвав *протиставленням* (арабською мовою — аль-мукабала).


Мухаммед аль-Хорезмі

Сам трактат має назву «Коротка книга про обчислення відновлення і протиставлення» (арабською мовою — «Кітаб аль-мухтасар фі хісаб аль-джабр ва-аль-мукабала»).

Слово «аль-джабр» з часом перетворилося на добре відоме всім слово «алгебра».

У XII ст. роботи аль-Хорезмі було перекладено латиною. У середньовічній Європі ім'я аль-Хорезмі записували як *Algorizmi*, і багато правил з його робіт починалися словами *Dixit Algorizmi* («Алгоризмі сказав»). Поступово стали звикати, що з цих слів починається багато правил, а слово *Algorizmi* перестали пов'язувати з ім'ям автора. Так виник термін «алгоритм», яким позначають процес, котрий дозволяє за скінченну кількість кроків розв'язати задачу.

З такими процесами ви докладно ознайомитеся на уроках інформатики.

§ 1. ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

- У цьому параграфі ви повторите властивості рівнянь, зможете удосконалити навички розв'язування рівнянь і задач на складання рівнянь.
- Ви дізнаєтесь, що багато відомих вам рівнянь можна об'єднати в один клас.

2. Лінійне рівняння з однією змінною

Розглянемо три рівняння:

$$2x = -3,$$
$$0x = 0,$$
$$0x = 2.$$

Очевидно, що число $-1,5$ є єдиним коренем першого рівняння.

Оскільки добуток будь-якого числа на нуль дорівнює нулю, то коренем другого рівняння є будь-яке число.

Зрозуміло, що третє рівняння коренів не має.

Незважаючи на істотні відмінності отриманих відповідей, наведені рівняння зовні схожі: усі вони мають вид $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа.

Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають *лінійним рівнянням з однією змінною*.

Ось ще приклади лінійних рівнянь: $\frac{1}{2}x = 7$; $-0,4x = 2,8$; $-x = 0$.

Текст, виділений **жирним шрифтом**, роз'яснює зміст терміна **«лінійне рівняння»**. У математиці речення, яке розкриває сутність нового терміна (слова, поняття, об'єкта), називають **означенням**.

Отже, ми сформулювали (або говорять: «дали») означення лінійного рівняння.

Зауважимо, що, наприклад, рівняння $x^2 = 0$, $(x - 2)(x - 3) = 0$, $|x| = 5$ не є лінійними.

Якщо $a \neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння $ax = b$ на a, отримаємо $x = \frac{b}{a}$. Отже, *якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ має єдиний корінь, що дорівнює $\frac{b}{a}$.*

Якщо $a = 0$, то лінійне рівняння набуває такого вигляду: $0x = b$. Тут можливі два випадки: $b = 0$ або $b \neq 0$.

У першому випадку отримуємо рівняння $0x = 0$. Звідси, *якщо $a = 0$ і $b = 0$, то рівняння $ax = b$ має безліч коренів: будь-яке число є його коренем.*

У другому випадку, коли $b \neq 0$, то при будь-якому значенні x маємо хибну рівність $0x = b$. Звідси, *якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння $ax = b$ коренів не має.*

Наступна таблиця підсумовує наведені міркування.

Рівняння $ax = b$	$a \neq 0$	$a = 0$, $b = 0$	$a = 0$, $b \neq 0$
	$x = \frac{b}{a}$	x — будь-яке число	немає коренів

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x + 2{,}1)(8 - 2x) = 0$; 2) $|5x - 6| = 4$.

1) Оскільки добуток кількох множників дорівнює нулю, коли принаймні один з множників дорівнює нулю, отримуємо: $3x + 2{,}1 = 0$ або $8 - 2x = 0$;
$x = -0{,}7$ або $x = 4$.

Відповідь: $-0{,}7$; 4.

2) Ураховуючи, що модуль лише чисел 4 і -4 дорівнює числу 4, маємо: $5x - 6 = 4$ або $5x - 6 = -4$;
$x = 2$ або $x = 0{,}4$.

Відповідь: 2; 0,4.

Звернемо вашу увагу на те, що наведені рівняння не є лінійними, проте розв'язування кожного з них зводиться до розв'язування лінійних рівнянь.

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть рівняння:

1) $(a - 1)x = 2$; 2) $(a + 9)x = a + 9$.

1) При $a = 1$ рівняння набуває вигляду $0x = 2$. У цьому випадку коренів немає. При $a \neq 1$ маємо $x = \frac{2}{a-1}$.

Відповідь: якщо $a = 1$, то рівняння не має коренів, якщо $a \neq 1$, то $x = \frac{2}{a-1}$.

2) При $a = -9$ рівняння набуває вигляду $0x = 0$. У цьому випадку коренем рівняння є будь-яке число. При $a \neq -9$ маємо $x = 1$.

Відповідь: якщо $a = -9$, то x — будь-яке число, якщо $a \neq -9$, то $x = 1$.

?

1. Яке рівняння називають лінійним рівнянням з однією змінною?
2. Скільки коренів має лінійне рівняння $ax = b$, якщо:
   1) $a \neq 0$; 2) $a = 0$, $b \neq 0$; 3) $a = b = 0$?

33.° Які з наведених рівнянь є лінійними:

1) $3x = 6$; 3) $x^2 = 4$; 5) $\frac{4}{x} = 2$; 7) $x = 0$;

2) $x = 4$; 4) $|x| = 2$; 6) $\frac{1}{4}x = 2$; 8) $0x = 8$?

34.° Розв'яжіть рівняння:

1) $18 - 16x = -30x - 10$; 4) $6x - 19 = -2x - 15$;

2) $-7x + 2 = 3x - 1$; 5) $0{,}2x + 3{,}4 = 0{,}6x - 2{,}6$;

3) $10 - 2x = 12 + x$; 6) $\frac{5}{6}x + 12 = \frac{1}{4}x - 2$.

35.° Знайдіть корінь рівняння:

1) $10x + 7 = 8x - 9$; 3) $2{,}7 + 1{,}9x = 2x + 1{,}5$;

2) $20 - 3x = 2x - 45$; 4) $\frac{13}{18}x + 13 = \frac{7}{12}x + 8$.

36.° Доведіть, що:

1) коренем рівняння $4(x - 5) = 4x - 20$ є будь-яке число;

2) рівняння $2y - 8 = 4 + 2y$ не має коренів.

37.° Розв'яжіть рівняння:

1) $-3(x - 4) = 5x - 12$; 3) $26 - 4x = 3x - 7(x - 3)$;

2) $(16x - 5) - (3 - 5x) = 6$; 4) $-2(3 - 4x) + 5(2 - 1{,}6x) = 4$.

38.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4(13 - 3x) - 17 = -5x$;
2) $(18 - 3x) - (4 + 2x) = 10$;
3) $14 - x = 0,5(4 - 2x) + 12$;
4) $4x - 3(20 - x) = 10x - 3(11 + x)$.

39.• Розв'яжіть рівняння:

1) $0,8 - (1,5x - 2) = -0,8 + 4,5x$;
2) $0,6x - 5(0,3x + 0,2) = 0,5(x - 1) - 0,8$;
3) $\frac{1}{7}\left(\frac{7}{8}y+7\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{9}y+1\frac{7}{9}\right)=\frac{1}{12}$;
4) $\frac{5}{27}(5,4-8,1y)=0,03+\frac{4}{17}(6,8-3,4y)$.

40.• Знайдіть корінь рівняння:

1) $0,9x - 0,6(x - 3) = 2(0,2x - 1,3)$;
2) $-0,4(3x - 1) + 8(0,8x - 0,3) = 5 - (3,8x + 4)$;
3) $\frac{4}{7}(0,56-4,2y)+0,4=\frac{5}{13}(0,52-6,5y)$.

41.• Розв'яжіть рівняння:

1) $8(7x - 3) = -48(3x + 2)$;
2) $4,5(8x + 20) = 6(6x + 15)$.

42.• Чому дорівнює корінь рівняння:

1) $-36(6x + 1) = 9(4 - 2x)$;
2) $3,2(3x - 2) = -4,8(6 - 2x)$?

43.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(4x - 1,6)(8 + x) = 0$;
2) $x(5 - 0,2x) = 0$;
3) $(3x-2)\left(4+\frac{1}{3}x\right)=0$;
4) $(2x + 1,2)(x + 1)(0,7x - 0,21) = 0$.

44.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(1,8 - 0,3y)(2y + 9) = 0$; 2) $(5y + 4)(1,1y - 3,3) = 0$.

45.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5x-4}{2}=\frac{16x+1}{7}$; 2) $\frac{4y+33}{3}=\frac{17+y}{2}$.

46.• Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{3m+5}{4}=\frac{5m+1}{3}$; 2) $\frac{5x+3}{5}=\frac{x-5}{8}$.

47.• Чому дорівнює корінь рівняння:

1) $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{4}=23$; 2) $\frac{x}{6}-\frac{x}{8}=\frac{7}{36}$; 3) $\frac{3x}{10}-\frac{4}{15}=\frac{x}{6}$?

48.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{7x}{6}-\frac{5x}{18}=\frac{4}{27}$; 2) $\frac{2x}{7}+\frac{x}{4}=\frac{15}{14}$; 3) $-\frac{x}{8}+1=\frac{x}{12}$.

49.$^{\bullet}$ При якому значенні змінної:

1) значення виразу $4x - 0,2(8x - 7)$ дорівнює $-22,6$;
2) вирази $0,2(3 - 2y)$ і $0,3(7 - 6y) + 2,7$ набувають рівних значень;
3) значення виразу $0,6y$ на $1,5$ більше за значення виразу $0,3(y - 4)$;
4) значення виразу $5x - 1$ у 5 разів менше від значення виразу $6,5 + 2x$?

50.$^{\bullet}$ При якому значенні змінної:

1) вирази $6 - (2x - 9)$ і $(18 + 2x) - 3(x - 3)$ набувають рівних значень;
2) значення виразу $-4(2y - 0,9)$ на $2,4$ менше від значення виразу $5,6 - 10y$?

51.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| + 6 = 13$;
2) $|x| - 7 = -12$;
3) $7|x| - 3 = 0$;
4) $|x - 5| = 4$;
5) $|9 + x| = 0$;
6) $|x - 4| = -2$;
7) $|3x + 4| = 2$;
8) $|2x + 1| + 13 = 14$;
9) $||x| - 3| = 5$.

52.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| - 8 = -5$;
2) $|x| + 5 = 2$;
3) $|x + 12| = 3$;
4) $|8 - 0,2x| = 12$;
5) $|10x - 7| - 32 = -16$;
6) $||x| - 2| = 2$.

53.$^{\bullet}$ При якому значенні a рівняння:

1) $5ax = -45$ має корінь, що дорівнює числу 3;
2) $(a - 4)x = -5a + 4x - 7$ має корінь, що дорівнює числу -6?

54.$^{\bullet}$ При якому значенні a рівняння:

1) $3ax = 12 - x$ має корінь, що дорівнює числу -9;
2) $(5a + 2)x = 8 - 2a$ має корінь, що дорівнює числу 2?

55.$^{\bullet}$ Укажіть яке-небудь значення b, при якому буде цілим числом корінь рівняння:

1) $0,1x = b$; 2) $bx = 21$; 3) $\frac{1}{6}x = b$; 4) $bx = \frac{1}{6}$.

56.˙ Складіть рівняння, яке:
1) має єдиний корінь, що дорівнює числу -4;
2) має безліч коренів;
3) не має коренів.

57.˙˙ Знайдіть усі цілі значення m, при яких є цілим числом корінь рівняння:
1) $mx = 3$; 2) $(m + 4)x = 49$.

58.˙˙ Знайдіть усі цілі значення n, при яких є натуральним числом корінь рівняння:
1) $nx = -5$; 2) $(n - 6)x = 25$.

59.˙˙ При якому значенні b мають спільний корінь рівняння:
1) $7 - 3x = 6x - 56$ і $x - 3b = -35$;
2) $2y - 9b = 7$ і $3,6 + 5y = 7(1,2 - y)$?

60.˙˙ При якому значенні c мають спільний корінь рівняння:
1) $(4x + 1) - (7x + 2) = x$ і $12x - 9 = c + 5$;
2) $\frac{1}{7}cx = x + c$ і $6 - 3(2x - 4) = -8x + 4$?

61.˙˙ При якому значенні a не має коренів рівняння:
1) $ax = 6$; 2) $(3 - a)x = 4$; 3) $(a - 2)x = a + 2$?

62.˙˙ При якому значенні a будь-яке число є коренем рівняння:
1) $ax = a$; 3) $a(a + 5)x = a + 5$?
2) $(a - 2)x = 2 - a$;

63.˙˙ При яких значеннях a має єдиний корінь рівняння:
1) $(a - 5)x = 6$; 2) $(a + 7)x = a + 7$?

64.˙˙ Розв'яжіть рівняння:
1) $(b + 1)x = 9$; 2) $(b^2 + 1)x = -4$.

65.˙˙ Розв'яжіть рівняння $(m + 8)x = m + 8$.

66.˙˙ Яким виразом можна замінити зірочку в рівності $6x + 8 = 4x + *$, щоб утворилося рівняння, яке:
1) не має коренів;
2) має безліч коренів;
3) має один корінь?

67.˙˙ У рівності $2(1,5x - 0,5) = 7x + *$ замініть зірочку таким виразом, щоб утворилося рівняння, яке:
1) не має коренів;
2) має безліч коренів;
3) має один корінь.

68.* Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| + 3x = 12$;
2) $|x| - 4x = 9$;
3) $2(x - 5) - 6|x| = -18$.

69.* Розв'яжіть рівняння:

1) $2x - |x| = -1$;
2) $7|x| - 3(x + 2) = -10$.

70.* При яких цілих значеннях a корінь рівняння:

1) $x - 2 = a$;
2) $x + 7a = 9$;
3) $2x - a = 4$;
4) $x + 2a = 3$

є цілим числом, яке ділиться націло на 2?

71.* При яких цілих значеннях b корінь рівняння:

1) $x + 3 = b$;
2) $x - 2 = b$;
3) $x - 3b = 8$

є цілим числом, яке ділиться націло на 3?

72.* При яких значеннях b корінь рівняння буде меншим від b:

1) $3x = b$;
2) $x = 2b$?

73.* При яких значеннях d корінь рівняння буде більшим за d:

1) $4x = d$;
2) $\frac{1}{5}x = d$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

74. Один робітник може виконати завдання за 45 год, а другому для цього потрібно в $1\frac{1}{2}$ раза менше часу, ніж першому. За скільки годин вони виконають це завдання, працюючи разом? Яку частину завдання при цьому виконає кожен з них?

75. За перший день Василь прочитав $\frac{8}{15}$ сторінок книжки, за другий — $\frac{5}{12}$ сторінок книжки і решту 14 сторінок. Скільки сторінок у цій книжці?

76. Відомо, що n — натуральне число. Яким числом, парним чи непарним, є значення виразу:

1) $4n$;
2) $2n - 1$;
3) $n(n + 1)$?

77. Чи є правильним твердження, що при будь-якому значенні a:

1) $2a > a$;
2) $2|a| > |a|$?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

78. Скільки існує шестицифрових чисел, у запису яких є хоча б одна парна цифра?

3. Розв'язування задач за допомогою рівнянь

Вам неодноразово доводилося розв'язувати задачі за допомогою складання рівнянь (текстові задачі). І різноманітність цих задач є найкращим підтвердженням ефективності та універсальності цього методу. У чому ж полягає секрет його сили?

Справа в тому, що умови несхожих між собою задач удається записати математичною мовою. Отримане рівняння — це результат перекладу умови задачі з української (російської, французької тощо) мови на математичну.

Часто умова задачі є описом якоїсь реальної ситуації. Складене за цією умовою рівняння називають **математичною моделлю** даної ситуації.

Зрозуміло, щоб дістати відповідь, треба рівняння розв'язати. Для цього в алгебрі розроблено різні методи та прийоми. З деякими з них ви вже знайомі, вивчення багатьох інших на вас ще чекає.

Знайдений корінь — це ще не відповідь задачі. Слід з'ясувати, чи не суперечить отриманий результат реальній ситуації, яка описана в умові задачі.

Розглянемо, наприклад, такі задачі:

1) За 4 год зібрали 6 кг ягід. Скільки ягід збирали щогодини?
2) Кілька хлопчиків зібрали 6 кг ягід. Кожен з них зібрав по 4 кг. Скільки хлопчиків збирали ягоди?

Обидві задачі приводять до одного й того ж рівняння $4x = 6$, коренем якого є число 1,5. Проте в першій задачі розв'язок «щогодини збирали 1,5 кг ягід» є прийнятним, а в другій «ягоди збирали півтора хлопчика» — ні.

При розв'язуванні задач на складання рівнянь зручно використовувати таку схему:

1) **за умовою задачі скласти рівняння (сконструювати математичну модель задачі);**
2) **розв'язати рівняння, отримане на першому кроці;**
3) **з'ясувати, чи відповідає знайдений корінь змісту задачі, і дати відповідь.**

Цю послідовність дій, яка складається з трьох кроків, можна назвати алгоритмом розв'язування текстових задач.

ПРИКЛАД 1

Робітник мав виконати замовлення за 8 днів. Проте, виготовляючи щодня 12 деталей понад норму, він уже за 6 днів роботи не тільки виконав замовлення, а й виготовив додатково 22 деталі. Скільки деталей щодня виготовляв робітник?

Нехай робітник виготовляв щодня x деталей. Тоді за нормою він мав виготовляти щодня $(x - 12)$ деталей, а всього їх мало бути $8(x - 12)$. Насправді він виготовив $6x$ деталей. Оскільки за умовою значення виразу $6x$ на 22 більше за значення виразу $8(x - 12)$, то

$$6x - 22 = 8(x - 12).$$

Тоді

$$6x - 22 = 8x - 96;$$
$$6x - 8x = -96 + 22;$$
$$-2x = -74;$$
$$x = 37.$$

В і д п о в і д ь: 37 деталей.

ПРИКЛАД 2

Велосипедист проїхав 65 км за 5 год. Частину шляху він їхав зі швидкістю 10 км/год, а решту — зі швидкістю 15 км/год. Скільки часу він їхав зі швидкістю 10 км/год і скільки — зі швидкістю 15 км/год?

Нехай велосипедист їхав x год зі швидкістю 10 км/год. Тоді зі швидкістю 15 км/год він їхав $(5 - x)$ год. Перша частина шляху становить $10x$ км, а друга — $15(5 - x)$ км. Маємо:

$$10x + 15(5 - x) = 65;$$
$$10x + 75 - 15x = 65;$$
$$-5x = -10;$$
$$x = 2.$$

Отже, зі швидкістю 10 км/год він їхав 2 год, а зі швидкістю 15 км/год — 3 год.

Відповідь: 2 год, 3 год.

79.° Петро купив 24 зошити, причому зошитів у лінійку він купив на 6 більше, ніж у клітинку. Скільки зошитів кожного виду купив Петро?

80.° З двох дерев зібрали 65,4 кг вишень, причому з одного дерева зібрали на 12,6 кг менше, ніж з другого. Скільки кілограмів вишень зібрали з кожного дерева?

81.° Периметр прямокутника дорівнює 7,8 см, а одна з його сторін на 1,3 см більша за другу. Знайдіть сторони прямокутника.

82.° Одна із сторін прямокутника в 11 разів менша від другої. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 144 см.

83.° Три найбільші гірські вершини України Говерла, Бребенескул і Петрос знаходяться у найвищому гірському масиві Чорногори в Карпатах. Сума їх висот дорівнює 6113 м, причому Говерла на 29 м вища за Бребенескул і на 41 м вища за Петрос. Знайдіть висоту кожної з вершин.

84.° Три найглибші печери України Солдатська, Каскадна і Нахімовська знаходяться в Криму. Сума їх глибин дорівнює 1874 м, причому глибина Каскадної в 1,2 раза менша від глибини Солдатської і на 26 м більша за глибину Нахімовської. Знайдіть глибину кожної з печер.

85.° У будинку 160 квартир трьох видів: однокімнатні, двокімнатні і трикімнатні. Однокімнатних квартир у 2 рази менше, ніж двокімнатних, і на 24 менше, ніж трикімнатних. Скільки у будинку квартир кожного виду?

86.° Троє робітників виготовили 96 деталей. Один з них виготовив у 3 рази більше деталей, ніж другий, а третій — на 16 деталей більше, ніж другий. Скільки деталей виготовив кожний робітник?

87.° У трьох цехах заводу працює 101 робітник. Кількість робітників першого цеху становить $\frac{4}{9}$ кількості робітників третього цеху, а кількість робітників другого цеху — 80 % кількості робітників третього. Скільки робітників працює у першому цеху?

88.° Велосипедисти взяли участь у триденному поході. За другий день вони проїхали 120 % відстані, яку подолали за перший день, а за третій день — $\frac{4}{5}$ тієї самої відстані. Який шлях велосипедисти проїхали за перший день, якщо довжина всього маршруту становить 270 км?

89.° У 6 великих і 8 маленьких ящиків розклали 232 кг яблук. Скільки кілограмів яблук було в кожному ящику, якщо в маленькому ящику було на 6 кг яблук менше, ніж у великому?

90.° У двох залах кінотеатру 534 місця. В одному залі 12 однакових рядів, а в другому — 15 однакових рядів. У кожному ряді першого залу на 4 місця більше, ніж у кожному ряді другого. Скільки місць у кожному залі кінотеатру?

91.° Відстань між двома містами мотоцикліст проїхав за 0,8 год, а велосипедист — за 4 год. Швидкість велосипедиста на 48 км/год менша від швидкості мотоцикліста. Знайдіть швидкість кожного з них.

92.° За 2 кг цукерок одного виду заплатили стільки, скільки за 3,5 кг цукерок іншого виду. Яка ціна кожного виду цукерок, якщо 1 кг цукерок першого виду на 12 грн. дорожчий за 1 кг цукерок другого виду?

93.° Кілограм огірків на 0,8 грн. дешевший від кілограма помідорів. Скільки коштує 1 кг помідорів, якщо за 3,2 кг помідорів заплатили стільки, скільки за 3,6 кг огірків?

94.° В одному баці було у 3 рази більше води, ніж у другому. Коли в перший бак долили 16 л води, а в другий — 80 л, то в обох баках води стало порівну. Скільки літрів води було спочатку в кожному баці?

95.° На одній полиці було в 4 рази більше книжок, ніж на другій. Коли з першої полиці взяли 5 книжок, а на другу поставили 16 книжок, то на обох полицях книжок стало порівну. Скільки книжок було спочатку на кожній полиці?

96.° Зараз батькові 26 років, а його синові — 2 роки. Через скільки років батько буде у 5 разів старший за сина?

97.° Зараз матері 40 років, а її доньці — 18 років. Скільки років тому донька була у 3 рази молодша від матері?

98.• Для шкільної бібліотеки придбали 40 орфографічних і тлумачних словників української мови, заплативши разом 690 грн. Скільки було словників кожного виду, якщо орфографічний словник коштує 15 грн., а тлумачний — 24 грн.?

99.• Підприємець поклав у банк 3000 грн., причому по одній частині вкладу йому нараховували 7 % річних, а по другій — 8 % річних. Через рік він одержав 222 грн. прибутку. Знайдіть, яку суму було внесено на кожний вид вкладу.

100.• У касі було 19 купюр по дві і п'ять гривень, усього на суму 62 грн. Скільки купюр кожного виду було в касі?

101.• У двох сховищах була однакова кількість вугілля. Коли з першого сховища використали 680 т вугілля, а з другого — 200 т, то в першому залишилось у 5 разів менше вугілля, ніж у другому. Скільки вугілля було в кожному сховищі спочатку?

102.• У Петра і Василя було порівну грошей. Коли на купівлю книжок Петро витратив 30 грн., а Василь — 45 грн., то в Петра залишилось у 2 рази більше грошей, ніж у Василя. Скільки грошей було в кожного хлопця спочатку?

103.• В одному мішку було у 5 разів більше борошна, ніж у другому. Коли з першого мішка пересипали 12 кг борошна в другий мішок, то маса борошна в другому мішку склала $\frac{5}{7}$ маси борошна в першому. Скільки кілограмів борошна було в кожному мішку спочатку?

104.˙ В одному контейнері було у 3 рази більше вугілля, ніж у другому. Коли з першого контейнера пересипали 300 кг вугілля в другий контейнер, то маса вугілля в першому контейнері склала 60 % маси вугілля в другому. Скільки кілограмів вугілля було в кожному контейнері спочатку?

105.˙ Одному робітникові треба було виготовити 90 деталей, а другому — 60. Перший робітник щодня виготовляв 4 деталі, а другий — 5 деталей. Через скільки днів першому робітникові залишиться виготовити вдвоє більше деталей, ніж другому, якщо вони почали працювати в один день?

106.˙ В одній цистерні було 200 л води, а в другій — 640 л. Коли з другої цистерни використали вдвоє більше води, ніж з першої, то в другій залишилось у 3,5 раза більше води, ніж у першій. Скільки літрів води використали з кожної цистерни?

107.˙ З двох міст, відстань між якими дорівнює 385 км, виїхали назустріч один одному легковий і вантажний автомобілі. Легковий автомобіль їхав зі швидкістю 80 км/год, а вантажний — 50 км/год. Скільки часу їхав до зустрічі кожен з них, якщо вантажний автомобіль виїхав на 4 год пізніше за легковий?

108.˙ З одного села до другого вирушив пішохід зі швидкістю 4 км/год, а через 1,5 год після цього з другого села назустріч йому виїхав велосипедист зі швидкістю 16 км/год. Через скільки хвилин після виїзду велосипедист зустрівся з пішоходом, якщо відстань між селами дорівнює 14 км?

109.˙ Відстань між двома містами по річці на 55 км менша, ніж по шосе. Теплохід проходить цю відстань за 6 год, а автобус — за 3 год 30 хв. Знайдіть швидкості автобуса і теплохода, якщо швидкість теплохода на 30 км/год менша від швидкості автобуса.

110.˙ Теплохід пройшов 4 год за течією річки і 3 год проти течії. Шлях, який пройшов теплохід за течією, на 48 км більший за шлях проти течії. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 2,5 км/год.

111.° Турист плив 5 год на плоту за течією річки і 1,5 год на моторному човні проти течії. Швидкість човна в стоячій воді дорівнює 24 км/год. Знайдіть швидкість течії, якщо проти течії турист проплив на 23 км більше, ніж за течією.

112.° У двох ящиках було 55 кг печива. Коли з першого ящика переклали в другий $\frac{1}{3}$ печива, то в ньому залишилося на 5 кг більше печива, ніж стало в другому. Скільки кілограмів печива було в кожному ящику спочатку?

113.° У двох кошиках було 24 кг груш. Коли з одного кошика переклали в другий $\frac{3}{7}$ груш, які були в першому, то в другому стало у 2 рази більше груш, ніж залишилось у першому. Скільки кілограмів груш було в кожному кошику спочатку?

114.° На трьох полицях стояли книжки. На першій полиці стояло $\frac{4}{15}$ усіх книжок, на другій — 60 % усіх книжок, а на третій — на 8 книжок менше, ніж на першій. Скільки всього книжок стояло на трьох полицях?

115.° У чотири бідони розлили молоко. У перший бідон налили 30 % усього молока, у другий — $\frac{5}{6}$ того, що в перший, у третій — на 26 л менше, ніж у перший, а в четвертий — на 10 л більше, ніж у другий. Скільки літрів молока було в чотирьох бідонах?

116.° При розселенні туристів у намети виявилося, що коли в кожний намет поселити 6 туристів, то 5 туристам місця не вистачить, а якщо розселяти по 7 туристів, то 6 місць залишаться вільними. Скільки було туристів?

117.° При підготовці новорічних подарунків для учнів 7 класу виявилося, що коли в кожний подарунок по-класти 4 апельсини, то не вистачить 3 апельсинів, а коли класти по 3 апельсини, то залишаться зайвими 25 апельсинів. Скільки було апельсинів?

118. Робітник планував щодня виготовляти по 20 деталей, щоб вчасно виконати виробниче завдання. Проте щодня він виготовляв на 8 деталей більше, ніж планував, і вже за 2 дні до кінця терміну роботи він виготовив 8 деталей понад план. Скільки днів планував працювати робітник над завданням?

119. Готуючись до екзамену, учень планував щодня розв'язувати 10 задач. Оскільки він щодня розв'язував на 4 задачі більше, то вже за 3 дні до екзамену йому залишилося розв'язати 2 задачі. Скільки всього задач планував розв'язати учень?

120. У двоцифровому числі кількість десятків у 3 рази більша за кількість одиниць. Якщо цифри числа переставити, то отримане число буде на 54 меншим від даного. Знайдіть дане двоцифрове число.

121. У двоцифровому числі кількість десятків на 2 менша від кількості одиниць. Якщо цифри числа переставити, то отримане число буде в $1\frac{3}{4}$ раза більше за дане. Знайдіть дане двоцифрове число.

122. З двох міст, відстань між якими дорівнює 270 км, виїхали одночасно назустріч один одному два автомобілі. Через 2 год після початку руху відстань між ними становила 30 км. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо швидкість одного з них на 10 км/год більша за швидкість другого.

123. Маємо два сплави міді й цинку. Перший сплав містить 9 %, а другий — 30 % цинку. Скільки треба взяти кілограмів кожного сплаву, щоб отримати сплав масою 300 кг, що містить 23 % цинку?

124. Маємо два водно-сольових розчини. Перший розчин містить 25 %, а другий — 40 % солі. Скільки треба взяти кілограмів кожного розчину, щоб отримати розчин масою 50 кг, що містить 34 % солі?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

125. Обчисліть значення виразу:

1) $-9,6 : 12 - 29 : (-5,8) + 4 : (-25)$;

2) $-3,4 \cdot (4 - 4,6) + 12,4 \cdot (-0,8 - 2,2)$;

3) $\left(0,4 - \frac{3}{20}\right) \cdot 6\frac{2}{3} - 1,75 : \left(-7\frac{7}{8}\right)$;

4) $\left(6,3 : \left(-\frac{9}{20}\right) - 2,6 : \left(-\frac{1}{20}\right)\right) \cdot \left(-\frac{4}{19}\right) - 0,6 : (-0,36)$.

126. Знайдіть значення виразу:

1) $14 - 6x$, якщо $x = 4; -2; 0; -0,3; \frac{3}{8}$;

2) $a^2 + 3$, якщо $a = 7; -2; 0; 0,4; -1\frac{1}{3}$;

3) $(2m - 1)\,n$, якщо $m = 0,2$; $n = -0,6$.

127. Заповніть таблицю, обчислюючи значення виразу $-3x + 2$ для наведених значень x:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$-3x + 2$									

128. Яку цифру треба приписати ліворуч і праворуч до числа 37, щоб отримане число ділилося націло на 6?

129. Чи має корені рівняння:

1) $x^2 = 0$; 2) $x^2 = -1$; 3) $|x| = x$; 4) $|x| = -x$?

У разі позитивної відповіді вкажіть їх.

130. Чи може бути цілим числом значення виразу:

1) $\frac{1}{x}$; 2) $\frac{x}{x+1}$?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

131. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення кожного з виразів $n - 2$, $n + 24$, $n + 26$ є простим числом.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ № 1 «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

1. Обчисліть значення виразу $5 - 4b$ при $b = -2$.

А) 3; Б) −3; В) 13; Г) −13.

2. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{5}m + \frac{1}{3}n$, якщо $m = 35$, $n = -18$.

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

3. Який з наведених виразів є записом різниці добутку чисел a і b та числа c?

А) $a - bc$; Б) $ab - c$; В) $a(b - c)$; Г) $(a - b)c$.

4. Серед наведених алгебраїчних виразів укажіть цілий.

А) $\frac{b}{b-7}$; Б) $\frac{b+5}{b-7}$; В) $\frac{b+5}{7}$; Г) $\frac{b+5}{b}$.

5. Знайдіть корінь рівняння $7x + 2 = 3x - 6$.

А) 2; Б) 1; В) −2; Г) −1.

6. Яке з рівнянь є лінійним?

А) $2x + 3 = 0$; В) $|x| - 4 = 0$;

Б) $\frac{1}{x} = 0$; Г) $(x - 1)(x - 2) = 0$.

7. Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 6$.

А) 12; Б) 36; В) −6; Г) −1.

8. Розв'яжіть рівняння $2(x - 3) - (x + 4) = x - 10$.

А) 0; В) x — будь-яке число;

Б) коренів немає; Г) 10.

9. При якому значенні a рівняння $(a + 4)x = a - 3$ не має коренів?

А) 3; В) 0;

Б) −4; Г) такого значення не існує.

10. Відомо, що 45 % числа a на 7 більше, ніж $\frac{1}{3}$ цього числа. Знайдіть число a.

А) 36; Б) 45; В) 60; Г) 90.

11. Три робітники виготовили 70 деталей. Перший робітник виготовив у 2 рази менше деталей, ніж другий, а третій — на 10 деталей більше, ніж перший.

Нехай перший робітник виготовив x деталей. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А) $x + 2x + 2x + 10 = 70$; В) $x + 2x + 2x - 10 = 70$;
Б) $x + 2x + x + 10 = 70$; Г) $x + 2x + x - 10 = 70$.

12. На першій ділянці було в 4 рази більше кущів малини, ніж на другій. Коли з першої ділянки пересадили на другу 12 кущів, то на другій стало у 2 рази менше кущів малини, ніж на першій.
Нехай на другій ділянці було спочатку x кущів. Яке з наступних рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові?

А) $2(4x - 12) = x + 12$; В) $4x + 12 = 2(x - 12)$;
Б) $2(4x + 12) = x - 12$; Г) $4x - 12 = 2(x + 12)$.

ПІДСУМКИ

- У цьому параграфі було введено поняття «лінійне рівняння». Ви навчилися розв'язувати лінійні рівняння в загальному вигляді.
- Ви дізналися, що рівняння може слугувати математичною моделлю реальної ситуації.
- Ви ознайомилися з алгоритмом розв'язування текстових задач.

§ 2. ЦІЛІ ВИРАЗИ

- У цьому параграфі ви навчитеся спрощувати вирази, ознайомитеся з формулами і прийомами, які допомагають полегшити роботу з перетворення виразів. Ви дізнаєтеся, що піднесення числа до квадрата і куба — окремі випадки нової арифметичної дії. Ви навчитеся класифікувати алгебраїчні вирази.
- Слова «означення» і «теорема» стануть для вас звичними і зрозумілими.

4. Тотожно рівні вирази. Тотожності

Розглянемо дві пари виразів:

1) $x^5 - x$ і $5x^3 - 5x$;

2) $2(x - 1) - 1$ і $2x - 3$.

У таблицях наведено значення цих виразів при *деяких* значеннях змінної x.

x	-2	-1	0	1	2
$x^5 - x$	-30	0	0	0	30
$5x^3 - 5x$	-30	0	0	0	30

x	-2	-1	0	1	2
$2(x - 1) - 1$	-7	-5	-3	-1	1
$2x - 3$	-7	-5	-3	-1	1

Як бачимо, ці значення збігаються для кожної окремо взятої пари виразів.

Чи збережеться підмічена закономірність при *будь-яких інших* значеннях x?

Для виразів, записаних у першій таблиці, відповідь на це запитання негативна: якщо, наприклад, $x = 3$, то $x^5 - x = 3^5 - 3 = 240$, а $5x^3 - 5x = 5 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3 = 120$.

Проте значення виразів, записаних у другій таблиці, збігаються при будь-яких значеннях x. Справді,
$2(x - 1) - 1 = 2x - 2 - 1 = 2x - 3$, тобто після спрощення вираз $2(x - 1) - 1$ «перетворився» на вираз $2x - 3$.

Означення. **Вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких значеннях змінних, називають *тотожно рівними*.**

Наприклад, вирази $2(x - 1) - 1$ і $2x - 3$ — тотожно рівні, а вирази $x^5 - x$ і $5x^3 - 5x$ не є тотожно рівними.

Ось ще приклади тотожно рівних виразів:

$$7(a + b) \quad \text{і} \quad 7a + 7b;$$
$$3x + y \quad \text{і} \quad y + 3x;$$
$$m^2np \quad \text{і} \quad nm^2p;$$
$$a - (b + c) \quad \text{і} \quad a - b - c.$$

Розглянемо рівність $7(a + b) = 7a + 7b$. Згідно з розподільною властивістю множення вона є правильною при будь-яких значеннях змінних a і b.

Означення. **Рівність, правильну при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї, називають *тотожністю*.**

З пари тотожно рівних виразів легко конструюється тотожність.

Наприклад, усі рівності

$$3x + y = y + 3x;$$
$$m^2np = nm^2p;$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$

є тотожностями.

Зазначимо, що з тотожностями ви зустрічалися й раніше. Так, рівності, що виражають властивості додавання і множення чисел, є прикладами тотожностей:

$$a + b = b + a,$$
$$ab = ba,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c),$$
$$(ab)c = a(bc),$$
$$a(b + c) = ab + ac.$$

Знайдемо значення виразу $11a - 3a + 2$ при $a = \frac{1}{8}$. Звичайно, можна відразу замість a підставити число $\frac{1}{8}$ і знайти значення числового виразу $11 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} + 2$. Однак набагато зручніше спочатку звести подібні доданки, замінивши даний вираз $11a - 3a + 2$ на тотожно рівний: $8a + 2$. При $a = \frac{1}{8}$ маємо: $8 \cdot \frac{1}{8} + 2 = 3$.

Заміну одного виразу іншим, тотожно рівним йому, називають **тотожним перетворенням**.

Зведення подібних доданків і розкриття дужок — приклади тотожних перетворень виразів. Спрощуючи вираз, ми фактично заміняємо його більш простим, тотожно рівним йому.

Довести тотожність — це означає довести, що дана рівність є тотожністю.

Для доведення тотожностей використовують такі прийоми (методи):

- тотожно перетворюють одну з частин даної рівності, отримуючи іншу частину;
- тотожно перетворюють кожну з частин даної рівності, отримуючи один і той самий вираз;
- показують, що різниця лівої і правої частин даної рівності тотожно дорівнює нулю.

ПРИКЛАД 1

Доведіть тотожність:

1) $2(3a + 4b) + 3(a - 7b) - 7(2a - 7b) = -5a + 36b$;
2) $0,6(x - 5) + 0,4(x + 1) = 0,8(x + 2) + 0,2(x - 21)$;
3) $a(b - c) + b(c - a) = c(b - a)$.

1) Спростимо ліву частину тотожності, яку треба довести:

$$2(3a + 4b) + 3(a - 7b) - 7(2a - 7b) =$$
$$= 6a + 8b + 3a - 21b - 14a + 49b = -5a + 36b.$$

Тотожність доведено.

2) Спростимо ліву і праву частини тотожності, яку треба довести:

$$0,6(x - 5) + 0,4(x + 1) = 0,6x - 3 + 0,4x + 0,4 = x - 2,6;$$

$$0{,}8(x+2)+0{,}2(x-21)=0{,}8x+1{,}6+0{,}2x-4{,}2=$$
$$=x-2{,}6.$$

Тотожність доведено.

3) Розглянемо різницю лівої і правої частин тотожності, яку треба довести:

$$a(b-c)+b(c-a)-c(b-a)=$$
$$=ab-ac+bc-ab-bc+ac=0.$$

Тотожність доведено.

ПРИКЛАД 2

Доведіть, що рівність $(a+2)(a-3)=a^2-6$ не є тотожністю.

Щоб довести, що рівність не є тотожністю, досить навести *контрприклад*: указати таке значення змінної (змінних), при якому дана рівність не справджується.

Наприклад, при $a=1$ маємо:

$$(a+2)(a-3)=(1+2)(1-3)=-6;\quad a^2-6=1-6=-5.$$

Отже, дана рівність не є тотожністю.

1. Які вирази називають тотожно рівними?
2. Що називають тотожністю?
3. Що називають тотожним перетворенням виразу?
4. Які тотожні перетворення виразів ви знаєте?
5. Що означає довести тотожність?

132.° Які властивості дій дають можливість стверджувати, що є тотожно рівними вирази:

1) $ab+cd$ і $cd+ab$;
2) $(a+1)+b$ і $a+(1+b)$;
3) $a\cdot 4b$ і $4ab$;
4) $(x+2)(x+3)$ і $(3+x)(2+x)$;
5) $7(a-4)$ і $7a-28$?

133.° Чи є тотожністю рівність:

1) $2x-12=2(x-6)$;
2) $a-b=-(b-a)$;
3) $3m+9=3(m+9)$;
4) $(a+b)\cdot 1=a+b$;
5) $(a+b)\cdot 0=a+b$;
6) $(a-a)(b+b)=0$;
7) $3a-a=3$;
8) $4x+3x=7x$;

9) $a - (b + c) = a - b + c$;
10) $m + (n - k) = m + n - k$;
11) $4a - (3a - 5) = a + 5$;
12) $(a - 5)(a + 3) = (5 - a)(3 + a)$?

134.° Чи є тотожно рівними вирази:
1) $8(a - b + c)$ і $8a - 8b + 8c$;
2) $-2(x - 4)$ і $-2x - 8$;
3) $(5a - 4) - (2a - 7)$ і $3a - 11$?

135.° Порівняйте значення виразів a^2 і $|a|$ при $a = -1; 0; 1$. Чи можна стверджувати, що рівність $a^2 = |a|$ є тотожністю?

136.° Якому з наведених виразів тотожно дорівнює вираз $-3a + 8b - a - 11b$:
1) $-4a + 3b$;
2) $-3a + 3b$;
3) $-4a - 3b$;
4) $-3a - 3b$?

137.° Серед виразів $-10a + 7$; $-10a - 7$; $-14a + 7$; $-14a - 7$ знайдіть вираз, який тотожно дорівнює виразу $-12a + (7 - 2a)$.

138.° Доведіть тотожність:
1) $-5x - 6(9 - 2x) = 7x - 54$;
2) $\frac{1}{3}(12 - 0{,}6y) + 0{,}3y = 0{,}1y + 4$;
3) $3(7 - a) - 7(1 - 3a) = 14 + 18a$;
4) $(6x - 8) - 5x - (4 - 9x) = 10x - 12$;
5) $3(2{,}1m - n) - 0{,}9(7m + 2n) = -4{,}8n$;
6) $\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{8}x + 6\right) - \frac{1}{6}\left(24 - 1\frac{1}{2}x\right) = 0$.

139.° Доведіть тотожність:
1) $-0{,}2(4b - 9) + 1{,}4b = 0{,}6b + 1{,}8$;
2) $(5a - 3b) - (4 + 5a - 3b) = -4$;
3) $5(0{,}4x - 0{,}3) + (0{,}8 - 0{,}6x) = 1{,}4x - 0{,}7$;
4) $\frac{1}{9}(3y - 27) - 2\left(\frac{1}{12}y - 1{,}5\right) = \frac{1}{6}y$.

140.• Які з наведених рівностей є тотожностями:
1) $(2a - 3b)^2 = (3b - 2a)^2$;
2) $(a - b)^3 = (b - a)^3$;
3) $|a + 5| = a + 5$;
4) $|a - b| = |b - a|$;
5) $|a^2 + 4| = a^2 + 4$;
6) $|a + b| = |a| + |b|$;
7) $|a - 1| = |a| - 1$;
8) $a^2 - b^2 = (a - b)^2$?

141.˙ Запишіть у вигляді рівності твердження:

1) сума протилежних чисел дорівнює нулю;
2) добуток будь-якого числа і числа 1 дорівнює 1;
3) добуток даного числа і числа -1 є число, протилежне даному;
4) модулі протилежних чисел рівні;
5) різниця протилежних чисел дорівнює нулю.

Які з цих рівностей є тотожностями?

142.˙ Доведіть тотожність:

1) $4(2-3m)-(6-m)-2(3m+4)=-17m-6$;
2) $a+b-10ab=2a(3-b)-3b(a-2)-5(ab+a+b)$;
3) $6(5a-3)+(10-20a)-(6a-4)=5a-(3a-(2a-4))$.

143.˙ Доведіть тотожність:

1) $(3m-7)\cdot 0{,}6-0{,}8(4m-5)-(-1{,}7-1{,}4m)=1{,}5$;
2) $7a(3b+4c)-3a\left(b+\frac{1}{3}c\right)=9a(2b+3c)$.

144.˙ Доведіть, що не є тотожністю рівність:

1) $(a+3)^2=a^2+9$;
2) $(b-1)(b+1)=(b-1)b+1$;
3) $(c+1)^3=c^3+1$;
4) $|m|-|n|=|n|-|m|$.

145.˙ Доведіть, що не є тотожно рівними вирази:

1) $4-m^2$ і $(2-m)^2$;
2) $|-m|$ і m;
3) m^3+8 і $(m+2)(m^2+4)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

146. Пасажирський поїзд проходить відстань між двома станціями за 12 год. Якщо одночасно від цих станцій вирушать назустріч один одному пасажирський і товарний поїзди, то вони зустрінуться через 8 год після початку руху. За який час товарний поїзд може подолати відстань між містами?

147. Фермер вирощував гречку на двох ділянках загальною площею 24 га. На одній ділянці він зібрав по 21 ц гречки з гектара, а на другій — по 26 ц з гектара. Скільки всього центнерів гречки зібрав фермер, якщо з другої ділянки він зібрав на 201 ц гречки більше, ніж з першої?

148. Відомо, що $a > 0$, $a + b < 0$. Порівняйте:
1) b і 0; 2) $|a|$ і $|b|$.

149. Ціну товару спочатку збільшили на 50 %, а потім зменшили на 50 %. Збільшилась чи зменшилась і на скільки відсотків початкова ціна товару?

150. Загальна довжина річки Дніпро 2201 км, з них у межах України — 981 км. Загальна довжина річки Десна 1130 км, з них у межах України — 591 км. Яка з цих річок має більший відсоток довжини в межах України?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

151. На дошці написано числа 1, 2, 3, ..., 10. За один крок дозволяється, вибравши два числа, до кожного з них додати 5 або від кожного відняти 1. Чи можна за допомогою цих операцій домогтися того, щоб усі числа, записані на дошці, виявилися рівними?

5. Степінь з натуральним показником

Як ви знаєте, у математиці придумали спосіб коротко записувати добуток, усі множники якого рівні.

Наприклад, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Вираз $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ називають **степенем**, число $\frac{1}{2}$ — **основою степеня**, а число 3 — **показником степеня.**

Означення. **Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.**

Степінь з основою a і показником n позначають a^n і читають: «a в n-му степені». Степені з показниками 2 і 3 можна прочитати інакше: запис a^2 читають «a в квадраті», запис a^3 — «a в кубі».

Звернемо увагу, що в означенні степеня на показник n накладено обмеження $n > 1$. І це зрозуміло: адже не прийнято розглядати добуток, що складається з одного множника.

А чи може показник степеня дорівнювати 1? Відповідь на це питання дає таке

Означення. Степенем числа a з показником 1 називають саме це число.

Зауваження. Це означення дає змогу будь-яке число вважати степенем з показником 1.

Отже, з наведених означень випливає, що

$$a^n = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}, \text{ де } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

Легко знайти, що, наприклад, $2^5 = 32$. У таких випадках говорять, що число 2 **піднесли до п'ятого степеня** і отримали 32. Також можна сказати, що виконано **дію піднесення до п'ятого степеня** числа 2.

Рівність $(-3)^2 = 9$ означає, що число -3 **піднесли до квадрата** і отримали 9, а рівність $(-3)^3 = -27$ означає, що число -3 **піднесли до куба** і отримали -27.

Зауважимо, що алгебраїчний вираз може бути сконструйований не тільки за допомогою додавання, віднімання, множення і ділення, а й дії піднесення до степеня.

Зрозуміло, що якщо $a > 0$, то $a^n > 0$; якщо $a = 0$, то $0^n = 0$.

Отже, ***при піднесенні невід'ємного числа до степеня отримуємо невід'ємне число***.

При піднесенні від'ємного числа до степеня можливі два випадки.

Якщо показник степеня — парне число, то при піднесенні до степеня множники можна розбити на пари.

Наприклад, $(-2)^6 = ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2))$.

Якщо показник степеня — непарне число, то один множник залишиться без пари.

Наприклад, $(-2)^5 = ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2)) \cdot (-2)$.

Оскільки добуток двох від'ємних множників є додатне число, то справедливе таке твердження:

при піднесенні від'ємного числа до степеня з парним показником отримуємо додатне число, а при піднесенні від'ємного числа до степеня з непарним показником отримуємо від'ємне число.

Чи можна, наприклад, число 5 піднести до степеня 0 або до степеня -2? Можна. Як це зробити, ви дізнаєтесь у наступному навчальному році.

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть рівняння $(x - 10)^8 = -1$.

Оскільки при піднесенні до степеня з парним показником будь-якого числа, крім 0, отримуємо додатне число, то дане рівняння не має коренів.

Відповідь: коренів немає.

ПРИКЛАД 2

Доведіть, що значення виразу $10^{200} + 2$ ділиться націло на 3.

Запис значення виразу 10^{200} складається з цифри 1 і двохсот цифр 0, а запис значення виразу $10^{200} + 2$ — з цифри 1, цифри 2 і ста дев'яносто дев'яти цифр 0. Отже, сума цифр числа дорівнює 3 і саме число ділиться націло на 3.

ПРИКЛАД 3

Доведіть, що значення виразу $9^n - 1$ ділиться націло на 10 при будь-якому парному значенні n.

Якщо n — парне число, то останньою цифрою значення виразу 9^n є одиниця, а останньою цифрою значення виразу $9^n - 1$ — нуль. Отже, значення виразу $9^n - 1$ ділиться націло на 10 при будь-якому парному значенні n.

?

1. Що називають степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1?
2. Як читають запис a^n? a^2? a^3?
3. Що називають степенем числа a з показником 1?
4. Чому дорівнює значення виразу 0^n при будь-якому натуральному значенні n?

5. Яке число, додатне чи від'ємне, отримують при піднесенні до степеня додатного числа?

6. Яким числом, додатним чи від'ємним, є значення степеня від'ємного числа, якщо показник степеня є парним числом? непарним числом?

152.° **Спростіть вираз, замінивши добуток однакових множників степенем:**

1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
2) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$;
3) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$;
4) $2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m$;
5) $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$;
6) $\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{10 \text{ множників}}$;
7) $\underbrace{0,4 \cdot 0,4 \cdot \ldots \cdot 0,4}_{k \text{ множників}}$;
8) $\underbrace{c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}_{m \text{ множників}}$.

153.° **Прочитайте вираз, назвіть основу і показник степеня:**

1) 9^6; 2) $2,4^7$; 3) $0,3^5$; 4) $(-8)^2$; 5) $(-0,6)^3$; 6) $(-a)^{11}$; 7) 73^1; 8) $(3p)^{12}$.

154.° **Користуючись означенням степеня, подайте у вигляді добутку степінь:**

1) 11^6; 2) $0,1^4$; 3) $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$; 4) $(5c)^3$; 5) $(-3,6)^7$; 6) $(a + b)^5$.

155.° **Знайдіть значення виразу:**

1) 2^5; 2) $0,6^2$; 3) $1,5^3$; 4) 0^6; 5) 1^{12}; 6) $(-1)^{12}$; 7) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$; 8) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$.

156.° **Виконайте піднесення до степеня:**

1) 7^2; 2) $0,5^3$; 3) $1,2^2$; 4) $(-1)^7$; 5) $(-0,8)^3$; 6) $\left(\frac{1}{6}\right)^4$; 7) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$; 8) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

157.° **Заповніть таблицю:**

a	2	-2	10	-10	0,1	$-0,1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
a^2								
a^3								
a^4								

158.° Заповніть таблицю:

a	-6	6	$-0{,}4$	$0{,}4$	3	$0{,}03$	$\frac{1}{2}$	-1	0
$10a^2$									
$(10a)^2$									

159.° Площа Кримського півострова — найбільшого півострова України — дорівнює $2{,}55 \cdot 10^4$ км². Виразіть цю площу натуральним числом у квадратних кілометрах.

160.° Відстань від Землі до Сонця дорівнює $1{,}495 \cdot 10^{11}$ м. Виразіть цю відстань натуральним числом у метрах.

161.° Площа материків і островів Землі становить $1{,}49 \times 10^8$ км², а площа океанів — $3{,}61 \cdot 10^8$ км². Виразіть ці площі натуральними числами у квадратних кілометрах.

162.° Обчисліть:

1) $8^2 - 1^{10}$;
2) $0{,}3 \cdot 2^4$;
3) $(4{,}2 - 3{,}8)^4 \cdot 25^2$;
4) $(6^3 : 200 - 0{,}4^2) : 0{,}2^3$.

163.° Обчисліть:

1) $4^3 + 3^5$;
2) $0{,}6^3 - 0{,}4^3$;
3) $0{,}12 \cdot 5^4$.

164.° Знайдіть значення виразу:

1) $x^2 - x^3$, якщо $x = 0{,}1$;
2) $15a^2$, якщо $a = 0{,}4$;
3) $(x - y)^5$, якщо $x = 0{,}8$; $y = 0{,}6$;
4) a^2b^3, якщо $a = 0{,}6$; $b = 0{,}5$;
5) $(x^2 - y^2) : (x - y)$, якщо $x = 5$; $y = 3$;
6) $(x^2 - y^2) : x - y$, якщо $x = 5$; $y = 3$;
7) $x^2 - y^2 : (x - y)$, якщо $x = 5$; $y = 3$;
8) $x^2 - y^2 : x - y$, якщо $x = 5$; $y = 3$.

165.° Знайдіть значення виразу:

1) $16 - c^3$, якщо $c = 2$;
2) $(16x)^6$, якщо $x = 0{,}125$;
3) a^3b^2, якщо $a = 10$; $b = 0{,}1$;
4) $4a^4 - a$, якщо $a = 3$.

166.° Не виконуючи обчислення, порівняйте:

1) $(-5{,}8)^2$ і 0;
2) 0 і $(-3{,}7)^3$;
3) $(-12)^7$ і $(-6)^4$;
4) -8^8 і $(-8)^8$;
5) $(-17)^6$ і 17^6;
6) $(-34)^5$ і $(-39)^5$.

167.° Не виконуючи обчислення, порівняйте:
1) 0 і $(-1{,}9)^{10}$;
2) 0 і $(-76)^{15}$;
3) $(-0{,}1)^{12}$ і $(-12)^{25}$;
4) $\left(-4\frac{7}{9}\right)^9$ і $\left(-5\frac{8}{11}\right)^9$.

168.° Порівняйте з нулем значення виразів 2^{100}, $(-2)^{100}$, -2^{100}, $-(-2)^{100}$. Чи є серед цих виразів такі, що набувають рівних значень?

169.° Порівняйте з нулем значення виразів 5^{101}, -5^{101}, $(-5)^{101}$, $-(-5)^{101}$. Чи є серед цих виразів такі, що набувають рівних значень?

170.° Чи є правильною рівність:
1) $3^2 + 4^2 = 7^2$;
2) $5^2 + 12^2 = 13^2$;
3) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 13^2$;
4) $(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$?

171.° Доведіть, що $1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 = 11^2$.

172.• Розташуйте у порядку зростання значення виразів:
1) $0{,}3$; $0{,}3^2$; $0{,}3^3$;
2) $-0{,}4$; $(-0{,}4)^2$; $(-0{,}4)^3$.

173.• Порівняйте з нулем значення виразу:
1) $(-4)^7 \cdot (-12)^9$;
2) $(-5)^6 \cdot (-17)^{11}$;
3) $(-14)^4 \cdot (-25)^{14}$;
4) $(-7)^9 \cdot 0^6$.

174.• Порівняйте з нулем значення виразу:
1) $(-2)^{14} \cdot (-3)^{15} \cdot (-4)^{16}$;
2) $(-5)^{17} \cdot (-6)^{18} \cdot (-7)^{19}$.

175.• Запишіть:
1) числа 16; 64; 256 у вигляді степеня з основою 4;
2) числа 0,09; 0,027; 0,00243 у вигляді степеня з основою 0,3.

176.• Подайте число: 1) 10 000; 2) -32; 3) 0,125; 4) $-0{,}00001$; 5) $-\frac{8}{343}$ у вигляді степеня з показником, більшим за 1, і найменшою за модулем основою.

177.• Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:
1) квадрат різниці чисел 7 і 5;
2) різниця квадратів чисел 7 і 5;
3) куб суми чисел 4 і 3;
4) сума кубів чисел 4 і 3.

178.• Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:
1) сума куба числа 5 і квадрата числа 8;
2) куб різниці чисел 9 і 8;
3) сума квадратів чисел 2,5 і 0,25;

4) квадрат суми чисел 7,8 і 8,2.

179.˙ Скільки в 1 км міститься:

1) метрів; 2) сантиметрів; 3) міліметрів?

Відповідь запишіть у вигляді степеня числа 10.

180.˙ Швидкість світла дорівнює 300 000 км/с.

1) Запишіть цю величину, використовуючи степінь числа 10.

2) Виразіть швидкість світла в метрах у секунду; запишіть результат, використовуючи степінь числа 10.

181.˙ Скільки в 1 м² міститься:

1) квадратних дециметрів;

2) квадратних сантиметрів;

3) квадратних міліметрів?

Відповідь запишіть у вигляді степеня числа 10.

182.˙ Які з чисел −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 є коренями рівняння:

1) $x^4 = 16$; 2 −2 3) $x^2 + x = 2$;

2) $x^5 = -243$; −3 4) $x^3 + x^2 = 6x$?

183.˙ При якому значенні x дорівнює нулю значення виразу:

1) $(2x - 3)^2$; 2) $(x + 4)^4$; 3) $(6x - 1)^5$?

184.˙ Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{10} = -1$; 2) $(x - 5)^4 = -16$.

185.˙ При яких натуральних значеннях n є правильною нерівність $8 < 3^n < 85$?

186.˙ При яких натуральних значеннях m є правильною нерівність $0{,}07 < 0{,}4^m < 0{,}5$?

187.˙˙ Доведіть, що вираз $x^2 + (x - 1)^2$ набуває лише додатних значень.

188.˙˙ Доведіть, що вираз $(x + 1)^2 + |x|$ набуває лише додатних значень.

189.˙˙ Доведіть, що не має додатних коренів рівняння:

1) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; 2) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.

190.˙˙ Доведіть, що не має від'ємних коренів рівняння:

1) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 5 = 0$;

2) $x^8 + x^4 + 1 = x^7 + x^3 + x$.

191.˙˙ При яких значеннях x і y є правильною рівність:

1) $x^2 + y^2 = 0$; 2) $(x - 1)^4 + (y + 2)^6 = 0$?

192.˙˙ При яких значеннях x і y є правильною рівність $x^8 + (y - 3)^2 = 0$?

193.•• При якому значенні змінної даний вираз набуде найменшого значення:

1) $x^2 + 7$; 2) $(x - 1)^4 + 16$?

194.•• При якому значенні змінної даний вираз набуде найбільшого значення:

1) $10 - x^2$; 2) $24 - (x + 3)^6$?

195.•• Доведіть, що значення виразу:

1) $2003^{2003} + 2005^{2005}$ ділиться націло на 2;
2) $16^7 + 15^8 - 11^9$ ділиться націло на 10;
3) $10^{10} - 7$ ділиться націло на 3;
4) $6^n - 1$ ділиться націло на 5 при будь-якому натуральному значенні n.

196.•• Доведіть, що значення виразу:

1) $10^{100} + 8$ ділиться націло на 9;
2) $111^n - 6$ ділиться націло на 5 при будь-якому натуральному значенні n.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

197. Обчисліть значення виразу:

$$\left(3\frac{1}{3}\cdot 1{,}3 - 7{,}2\cdot\frac{2}{27} - 9{,}1 : 3{,}5\right) : \frac{2}{5}.$$

198. До сплаву масою 400 кг, що містить 15 % міді, додали 25 кг міді. Яким став відсотковий вміст міді в новому сплаві?

199. В одному мішку було 80 кг цукру, а в другому — 60 кг. З першого мішка взяли в 3 рази більше цукру, ніж з другого, після чого в другому мішку залишилося цукру в 2 рази більше, ніж у першому. Скільки кілограмів цукру взяли з кожного мішка?

200. Розв'яжіть рівняння:

1) $9(2x - 1) - 5(11 - x) = 3(x + 4)$;
2) $5x - 26 = 12x - 7(x - 4)$.

201. Відомо, що одне з чисел a, b і c додатне, друге — від'ємне, а третє дорівнює нулю, причому $|a| = b^2(b - c)$. Установіть, яке з чисел є додатним, яке від'ємним і яке дорівнює нулю.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

202. Порівняйте значення виразів:

1) $2^2 \cdot 2^3$ і 2^5;
2) $4^2 \cdot 4^1$ і 4^3;
3) $(3^3)^2$ і 3^6;
4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^3$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$;
5) $5^3 \cdot 2^3$ і $(5 \cdot 2)^3$;
6) $(0{,}25 \cdot 4)^2$ і $0{,}25^2 \cdot 4^2$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

203. У деякому місті з будь-якої станції метро можна проїхати до будь-якої іншої станції (можливо, з пересадками). Доведіть, що можна закрити одну станцію (без права проїзду через неї) так, щоб з будь-якої станції з тих, що залишилися, можна було проїхати до будь-якої іншої.

6. Властивості степеня з натуральним показником

Розглянемо добуток двох степенів з однаковими основами, наприклад, a^2a^5. Цей вираз можна подати у вигляді степеня з основою a:

$$a^2a^5 = (aa) \cdot (aaaaa) = aaaaaaa = a^7.$$

Отже, $a^2a^5 = a^{2+5}$.

Аналогічно легко переконатися в тому, що, наприклад, $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$, $a \cdot a^9 = a^{1+9} = a^{10}$.

Простежується закономірність: $a^m a^n = a^{m+n}$, де m і n — довільні натуральні числа.

Проте жодна кількість конкретних прикладів не може гарантувати, що наведена рівність є правильною для *будь-яких* натуральних m і n. Істинність її можна встановити тільки шляхом **доведення**.

У математиці твердження, справедливість якого встановлюється за допомогою доведення, називають **теоремою**.

Теорема 1. ***Для будь-якого числа a і будь-яких натуральних чисел m і n справедлива рівність:***

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Доведення. Для $m > 1$ і $n > 1$ маємо:

$$a^m a^n = \underbrace{(aa \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ множників}} \underbrace{(aa \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ множників}} = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n) \text{ множників}} = a^{m+n}.$$

Якщо, наприклад, $m = 1$ і $n > 1$, то

$$a \cdot a^n = a \cdot \underbrace{(aa \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ множників}} = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{(n+1) \text{ множників}} = a^{n+1}.$$

Випадки, коли $m > 1$ і $n = 1$ або коли $m = n = 1$, розгляньте самостійно. ▲

Тотожність $a^m a^n = a^{m+n}$ виражає **основну властивість степеня.**

Аналогічна властивість має місце і для добутку трьох або більше степенів. Наприклад,

$$3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^7 = (3^2 \cdot 3^3) \cdot 3^7 = 3^{2+3} \cdot 3^7 = 3^{(2+3)+7} = 3^{2+3+7} = 3^{12}.$$

Отже, ***при множенні степенів з однаковими основами показники додають, а основу залишають тією самою.***

Розглянемо вираз $a^9 : a^4$, де $a \neq 0$. Він є часткою двох степенів з однаковими основами. Оскільки $a^4 \cdot a^5 = a^9$, то за означенням частки $a^9 : a^4 = a^5$, тобто $a^9 : a^4 = a^{9-4}$. Цей приклад підказує, що має місце така

Теорема 2. ***Для будь-якого числа a, відмінного від нуля, і будь-яких натуральних чисел m і n таких, що m > n, справедлива рівність:***

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Доведення. Розглянемо добуток степенів a^n і a^{m-n}. Використовуючи основну властивість степеня, маємо:

$$a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+(m-n)} = a^{n+m-n} = a^m.$$

Тоді за означенням частки

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \ ▲$$

З цієї теореми випливає таке правило:

при діленні степенів з однаковими основами від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника, а основу залишають тією самою.

Розглянемо вираз $(a^3)^4$. Це степінь з основою a^3 і показником 4. Тому

$$(a^3)^4 = a^3a^3a^3a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3\cdot 4} = a^{12}.$$

Цей приклад підказує, що має місце така

Теорема 3. ***Для будь-якого числа a і будь-яких натуральних чисел m і n справедлива рівність:***

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Доведення. Очевидно, що для $n = 1$ рівність, яка доводиться, справджується.

Для $n > 1$ маємо:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ множників}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ доданків}}} = a^{mn}. \blacktriangle$$

З цієї теореми випливає таке правило:
при піднесенні степеня до степеня показники перемножують, а основу залишають тією самою.

Наприклад, $(3^7)^2 = 3^{7\cdot 2} = 3^{14}$, $(x^k)^3 = x^{k\cdot 3} = x^{3k}$.

Покажемо, як можна перетворити степінь добутку, наприклад, вираз $(ab)^3$:

$$(ab)^3 = (ab)\cdot(ab)\cdot(ab) = (aaa)\cdot(bbb) = a^3b^3.$$

У загальному випадку має місце така

Теорема 4. ***Для будь-яких чисел a і b і будь-якого натурального числа n справедлива рівність:***

$$(ab)^n = a^nb^n.$$

Доведення. Очевидно, що для $n = 1$ рівність, яка доводиться, є правильною. Для $n > 1$ маємо:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n \text{ множників}} = \underbrace{(aa\cdot\ldots\cdot a)}_{n \text{ множників}}\underbrace{(bb\cdot\ldots\cdot b)}_{n \text{ множників}} = a^nb^n. \blacktriangle$$

Аналогічна властивість має місце і для добутку трьох або більше множників. Наприклад, $(abc)^n = ((ab)\cdot c)^n = (ab)^n\cdot c^n = a^nb^nc^n$.

Отже, ***при піднесенні добутку до степеня кожний множник підносять до цього степеня і отримані результати перемножують.***

ПРИКЛАД 1

Спростіть вираз: 1) $(a^5)^2 \cdot (a^6)^7$; 2) $(-a^4)^9$; 3) $(-a^4)^8$.

1) Застосувавши послідовно правило піднесення степеня до степеня і правило множення степенів з однаковою основою, маємо:
$$(a^5)^2 \cdot (a^6)^7 = a^{10} \cdot a^{42} = a^{52}.$$
2) Оскільки $-a^4 = -1 \cdot a^4$, то, застосувавши правило піднесення добутку до степеня, отримуємо:
$$(-a^4)^9 = (-1 \cdot a^4)^9 = (-1)^9 \cdot (a^4)^9 = -1 \cdot a^{36} = -a^{36}.$$
3) Аналогічно до попереднього прикладу, враховуючи, що $(-1)^8 = 1$, отримуємо $(-a^4)^8 = a^{32}$.

ПРИКЛАД 2

Подайте у вигляді степеня вираз $216a^3b^6$.

Маємо:

$216a^3b^6 = 6^3 \cdot a^3 \cdot (b^2)^3 = (6ab^2)^3$.

ПРИКЛАД 3

Знайдіть значення виразу $\left(1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$.

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = \left(\frac{4}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

ПРИКЛАД 4

Порівняйте значення виразів:

1) $(-11)^{14} \cdot (-11)^3$ і $(-11)^{16}$; 3) 5^{30} і 9^{20};

2) $(-12)^{19}$ і $(-12)^{15}$; 4) 16^3 і 65^2.

1) Маємо: $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 = (-11)^{17} < 0$, $(-11)^{16} > 0$. Отже, $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 < (-11)^{16}$.
2) Оскільки $|(-12)^{19}| > |(-12)^{15}|$, а числа, що порівнюються, від'ємні, то $(-12)^{19} < (-12)^{15}$.
3) Оскільки $5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$ і $9^{20} = (9^2)^{10} = 81^{10}$, то $5^{30} > 9^{20}$.
4) Маємо: $16^3 = (4^2)^3 = (4^3)^2 = 64^2$. Отже, $16^3 < 65^2$.

ПРИКЛАД 5

Якою цифрою закінчується значення виразу 2^{100}?

Маємо: $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$.

Якщо число закінчується цифрою 6, то будь-який його степінь закінчується цифрою 6.

1. Запишіть тотожність, яка виражає основну властивість степеня.

2. Як помножити степені з однаковими основами?

3. Як поділити степені з однаковими основами?

4. Як піднести степінь до степеня?

5. Як піднести до степеня добуток?

204.° Подайте у вигляді степеня добуток:

1) m^5m^4;
2) xx^7;
3) a^3a^3;
4) $6^8 \cdot 6^3$;
5) $y^3y^5y^9$;
6) c^8c^9c;
7) $(b - c)^{10}(b - c)^6$;
8) $11^2 \cdot 11^4 \cdot 11^6$;
9) $x^4xx^{11}x^2$;
10) $(ab)^5 \cdot (ab)^{15}$;
11) $(2x + 3y)^6 \cdot (2x + 3y)^{14}$;
12) $(-xy)^2 \cdot (-xy)^7 \cdot (-xy)^9$.

205.° Подайте у вигляді степеня вираз:

1) a^5a^8;
2) a^2a^2;
3) a^9a;
4) aa^2a^3;
5) $(m + n)^{13} \cdot (m + n)$;
6) $(cd)^8 \cdot (cd)^{18} \cdot (cd)$.

206.° Замініть зірочку таким степенем з основою a, щоб виконувалася рівність:

1) $a^6 \cdot * = a^{14}$;
2) $* \cdot a^6 = a^7$;
3) $a^{10} \cdot * \cdot a^2 = a^{18}$.

207.° Подайте вираз a^{12} у вигляді добутку двох степенів з основами a, один з яких дорівнює:

1) a^6;
2) a^4;
3) a^3;
4) a^5;
5) a.

208.° Подайте у вигляді степеня частку:

1) $a^{12} : a^3$;
2) $b^6 : b$;
3) $c^7 : c^6$;
4) $(a + b)^8 : (a + b)^4$.

209.° Знайдіть значення виразу:

1) $7^7 : 7^5$;
2) $10^{18} : 10^{14}$;
3) $0{,}6^9 : 0{,}6^6$;
4) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^5 : \left(-1\frac{1}{8}\right)^3$.

210.° Виконайте ділення:

1) $m^{10} : m^2$;
2) $x^5 : x^4$;
3) $y^{18} : y^6$.

211.° Подайте у вигляді степеня з основою m вираз:

1) $(m^5)^3$;
2) $(m^3)^4$;
3) $((m^2)^4)^6$;
4) $(m^7)^2 \cdot (m^4)^9$.

212.° Подайте у вигляді степеня з основою n вираз:

1) $(n^2)^8$; 2) $(n^9)^5$; 3) $((n^3)^2)^{10}$; 4) $(n^{12})^4 \cdot (n^{21})^2$.

213.° Подайте степінь у вигляді добутку степенів:

1) $(ab)^6$; 3) $(3c)^7$; 5) $(-0{,}2cd)^4$;

2) $(mnp)^5$; 4) $(-8xy)^3$; 6) $\left(\frac{3}{7}kt\right)^9$.

214.° Подайте степінь у вигляді добутку степенів:

1) $(ax)^2$; 2) $(xyz)^{12}$; 3) $(7m)^8$; 4) $(-0{,}3bc)^{11}$.

215.° Спростіть вираз:

1) $-x \cdot x^2$; 3) $-x \cdot (-x)^2$;

2) $(-x)^2 \cdot x$; 4) $(-x) \cdot (-x)^2 \cdot (-x)$.

216.° Спростіть вираз:

1) $(-a)^2 \cdot a^3$; 2) $-a^2 \cdot a^3$; 3) $a^2 \cdot (-a)^3$; 4) $-a^2 \cdot (-a)^3$.

217.° Спростіть вираз:

1) $(-a^5)^2$; 2) $(-a^3)^3$; 3) $(-a^4)^7 \cdot (-a^2)^6$.

218.° Спростіть вираз:

1) $((-a^6)^5)^9$; 2) $((-a^{11})^2)^3$.

219.° Подайте у вигляді степеня вираз:

1) a^3b^3; 3) $9m^2n^2$; 5) $-\frac{27}{343}c^3d^3$;

2) $-m^7$; 4) $64x^3y^3$; 6) $0{,}0001k^4p^4$.

220.° Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $x^{12}y^{12}$; 3) $32p^5q^5$;

2) $-125m^3n^3$; 4) $1\,000\,000\,000a^9b^9c^9$.

221.° Подайте вираз у вигляді степеня і обчисліть його значення (у разі потреби скористайтеся таблицею степенів чисел 2 і 3, розташованою на форзаці підручника):

1) $2^3 \cdot 2^4$; 5) $2^{12} : 2^8$;

2) $(3^2)^3$; 6) $(3^4)^5 : 3^{19}$;

3) $0{,}2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}2^3$; 7) $\left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot 9^9$;

4) $0{,}5^{12} \cdot 2^{12}$; 8) $2{,}5^5 \cdot 40^5$.

222.° Подайте вираз у вигляді степеня і обчисліть його значення (у разі потреби скористайтеся таблицею степенів чисел 2 і 3, розташованою на форзаці підручника):

1) $2^2 \cdot 2^3$; 3) $3^2 \cdot 3 \cdot 3^3$; 5) $7^9 \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^9$;

2) $(2^2)^3$; 4) $0{,}3^8 : 0{,}3^5$; 6) $12{,}5^3 \cdot 8^3$.

223.° Знайдіть у наведених прикладах помилки і поясніть причину їх виникнення:

1) $a^4a^3 = a^{12}$; 4) $3^2 \cdot 5^2 = 15^4$; 7) $3 \cdot 4^3 = 12^3$;

2) $a \cdot a = 2a$; 5) $2^2 \cdot 7^3 = 14^5$; 8) $a^7b^7 = (ab)^{14}$;

3) $(a^3)^2 = a^9$; 6) $(2a)^4 = 8a^4$; 9) $a^3b^2 = (ab)^6$.

224.° Замість зірочки запишіть такий вираз, щоб виконувалася рівність:

1) $(*)^4 = c^{20}$; 2) $(*)^2 = c^{14}$; 3) $(*)^n = c^{8n}$; 4) $(*)^7 = c^{7n}$.

225.• Подайте степінь a^7 у вигляді добутку двох степенів з основою a усіма можливими способами.

226.• Подайте у вигляді степеня вираз:

1) a^na^5; 2) aa^n; 3) a^3a^n; 4) $(a^3)^n$; 5) $(a^n)^2 \cdot (a^5)^n$,

де n — натуральне число.

227.• Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $2^4 \cdot 2^4$; 2) $2^4 + 2^4$; 3) $2^n \cdot 2^n$; 4) $2^n + 2^n$,

де n — натуральне число.

228.• Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $3^5 + 3^5 + 3^5$; 2) $4^k + 4^k + 4^k + 4^k$,

де k — натуральне число.

229.• Доведіть, що коли сторону квадрата збільшити в n разів, то його площа збільшиться в n^2 разів.

230.• У скільки разів збільшиться об'єм куба, якщо його ребро збільшити в m разів?

231.• Запишіть у вигляді степеня з показником 2 вираз:

1) a^2b^6; 4) $4m^{12}n^{16}$;

2) x^8y^{14}; 5) $81c^{10}d^{32}p^{44}$.

3) $x^4y^{10}z^{18}$;

232.• Запишіть у вигляді степеня з показником 3 вираз:

1) a^3b^6; 3) $8x^{12}y^{18}z^{24}$;

2) x^9y^{15}; 4) $0{,}001m^{30}n^{45}$.

233.• Подайте у вигляді степеня з основою 5 вираз:

1) 125^6; 2) $(25^4)^2$.

234.• Подайте у вигляді степеня з основою -5 вираз:

1) 625^5; 2) $((-25)^2)^3$.

235.° Подайте у вигляді степеня з основою 2 вираз:

1) $8^9 \cdot 4^5$; 2) $32 \cdot 16^6 \cdot 64^3$.

236.° Знайдіть значення виразу:

1) $(6^4)^4 : (6^5)^3$; 3) $\frac{7^{14} \cdot (7^2)^3}{(7^3)^6 \cdot 7^2}$; 5) $\frac{3^8 \cdot 7^8}{21^7}$;

2) $8^3 : 4^4$; 4) $\frac{25^3 \cdot 125^2}{5^{10}}$; 6) $\frac{5^9 \cdot 4^6}{20^6}$.

237.° Обчисліть:

1) $100^5 : 1000^2$; 3) $\frac{4^3 \cdot 16^2}{2^{12}}$;

2) $\frac{3^{10} \cdot (3^3)^5}{(3^5)^4 \cdot 3}$; 4) $\frac{45^{10}}{5^8 \cdot 3^{19}}$.

238.° Обчисліть значення виразу:

1) $\left(1\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{10}$; 2) $5^{14} \cdot 0,2^{12}$; 3) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8$.

239.° Знайдіть значення виразу:

1) $10^5 \cdot 0,1^7$; 2) $1,9^{14} \cdot \left(\frac{10}{19}\right)^{15}$.

240.° Порівняйте значення виразів:

1) $(-5)^{21} \cdot (-5)$ і $(-5)^{24}$; 3) $(-8)^5 \cdot (-8)^4$ і $(-8)^8$;

2) $(-7)^8 \cdot (-7)^7$ і $(-7)^{17}$; 4) $(-6)^3 \cdot (-6)^9$ і $(-6)^{13}$.

241.° Замініть зірочку таким степенем, щоб виконувалас рівність:

1) $8 \cdot * = 2^8$;

2) $a^n \cdot * = a^{3n+2}$, де n — натуральне число.

242.° Запишіть вираз 3^{24} у вигляді степеня з основою:

1) 3^3; 2) 3^{12}; 3) 9; 4) 81.

243.° Запишіть вираз 2^{48} у вигляді степеня з основою:

1) 2^4; 2) 2^{16}; 3) 8; 4) 64.

244.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^7 = 6^{14}$; 2) $x^4 = 5^{12}$.

245.°° Порівняйте значення виразів:

1) 2^{300} і 3^{200}; 3) 27^{20} і 11^{30};

2) 4^{18} і 18^9; 4) $3^{10} \cdot 5^8$ і 15^9.

246.°° Порівняйте значення виразів:

1) 10^{40} і 10001^{10}; 3) 8^{12} і 59^6;

2) 124^4 і 5^{12}; 4) 6^{14} і $2^{16} \cdot 3^{12}$.

247.* Відомо, що сума $625 + 625 + \ldots + 625$ дорівнює 5^{2005}. Скільки доданків у цій сумі?

248.* Якою цифрою закінчується значення виразу (n — натуральне число):
1) 4^{100}; 2) 3^{4n}; 3) 4^n; 4) 3^n?

249.* Якою цифрою закінчується значення виразу (n — натуральне число):
1) 9^{2n}; 2) 7^{4n}; 3) 7^{2n}?

250.* Доведіть, що значення виразу:
1) $17^8 + 19$ ділиться націло на 10;
2) $64^{64} - 1$ ділиться націло на 5;
3) $3^{4n} + 14$, де n — натуральне число, ділиться націло на 5.

251.* Доведіть, що значення виразу:
1) $4^{40} - 1$; 2) $2004^{171} + 171^{2004}$
ділиться націло на 5.

252.* Доведіть, що $48^{25} < 344^{17}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

253. (*Задача з українського фольклору.*) Кум Іван спитав у кума Степана: «Скільки у тебе качок?» Кум Степан відповів: «Качок у мене стільки, що як висидять вони мені ще стільки каченят, та ще придбаю одну качку, та ще тричі куплю стільки, скільки цих качок та каченят, то всього буде їх у мене 100». Скільки качок було в кума Степана?

254. Один маляр може пофарбувати кімнату за 6 год, а другий — за 4 год. Перший маляр працював один 2 год, а потім до нього приєднався другий маляр. За скільки годин було пофарбовано кімнату?

255. Від пристані за течією річки відправилася на човні група туристів, розраховуючи повернутися через 4 год. Швидкість човна в стоячій воді становить 10 км/год, а швидкість течії — 2 км/год. На яку найбільшу відстань туристи можуть відплисти від пристані, якщо вони хочуть перед тим, як повертатися, зробити зупинку на 2 год?

256. Розв'яжіть рівняння:

1) $2{,}5 - 3x = 3(x - 2{,}5) - 2$;

2) $17(2 - 3x) - 5(x + 12) = 8(1 - 7x) - 34$.

257. У шестицифровому числі перша і четверта, друга і п'ята, третя і шоста цифри однакові. Доведіть, що це число кратне числам 7, 11 і 13.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

258. Спростіть вираз:

1) $3a \cdot (-1{,}2)$; 3) $-7a \cdot 9b$; 5) $-\frac{3}{14}m \cdot \frac{7}{9}n$;

2) $-0{,}2b \cdot (-0{,}5)$; 4) $2{,}4x \cdot 2y$; 6) $-\frac{1}{4}a \cdot \frac{4}{3}b \cdot (-3c)$.

259. Спростіть вираз $20m \cdot (-0{,}3n)$ і знайдіть його значення при $m = \frac{5}{12}$, $n = -4$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

260. Трамвайні квитки мають номери від 000 000 до 999 999. Номер називають «щасливим», якщо сума трьох його перших цифр дорівнює сумі трьох останніх. Доведіть, що кількість «щасливих» квитків парна.

7. Одночлени

Розглянемо вирази:

$$2b; \quad \frac{1}{3}xy^2; \quad -ab; \quad m^3 \cdot 3k^5;$$

$$(3{,}14)^2pq^3 \cdot (-7)r^2t^4.$$

Усі вони є добутками чисел, змінних та їх степенів. Такі вирази називають **одночленами**.

Домовилися також вважати одночленами всі числа, будь-які змінні та їх степені. Наприклад, одночленами є:

$$-5; \; 0{,}3; \; x; \; t^2; \; 2^3.$$

Зауважимо, що, наприклад, вирази

$$2a + b;\ x - 1;\ a : b;\ y^2 + y - 2$$

не є одночленами, оскільки вони, крім множення і піднесення до степеня, містять ще інші дії.

При розгляді одночлена $3ab^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)abc$ виникає природне бажання спростити його. Маємо:

$$3ab^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)abc = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)aab^3bc = -2a^2b^4c.$$

Отриманий одночлен містить *тільки один* числовий множник, відмінний від нуля, який *стоїть на першому місці*. Усі інші множники — це степені з *різними* основами. Такий вигляд одночлена називають **стандартним виглядом одночлена**.

Наведемо ще приклади одночленів стандартного вигляду:

$$-\frac{1}{8}xy;\ \ 2{,}8a^3;\ \ 7x^2yz^3t^5.$$

Зауважимо, що, наприклад, вирази $a^2 \cdot 2b^3$ і $-3x^2xy^3$ не є одночленами стандартного вигляду. Справді, хоча перший з них і має єдиний числовий множник, але він не стоїть на першому місці. У другому — степінь з основою x зустрічається двічі.

Проте ці одночлени легко **привести** (перетворити) до стандартного вигляду:

$$a^2 \cdot 2b^3 = 2a^2b^3 \ \text{ і } \ -3x^2xy^3 = -3x^3y^3.$$

До одночленів стандартного вигляду також відносять числа, відмінні від нуля, змінні та їх степені. Так, -2; 3^2; x; b^3 — одночлени стандартного вигляду.

Число 0, а також одночлени, які тотожно дорівнюють нулю, наприклад $0x^2$, $0ab$ тощо, називають **нуль-одночленами**. Їх не відносять до одночленів стандартного вигляду.

Означення. Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають коефіцієнтом одночлена.

Наприклад, коефіцієнти одночленів $-3a^2bc$ і $0{,}07x$ відповідно дорівнюють -3 і $0{,}07$.

Узагалі, будь-який одночлен стандартного вигляду має коефіцієнт. І навіть, наприклад, у одночленів x^2y і $-mn$, при запису яких числовий множник не використовується, коефіцієнтами є числа 1 і -1 відповідно. І це зрозуміло, адже $x^2y = 1 \cdot x^2y$, $-mn = -1 \cdot mn$.

Розглянемо одночлени $\frac{2}{3}x^3yz$ і $-2zx^3y$. У них однакові буквені частини. Такі одночлени називають **подібними.** До подібних одночленів також відносять і числа. Наприклад, 7 і -5 — подібні одночлени.

Звернемо увагу на те, що, наприклад, у одночленів $\frac{2}{3}x^3y^2z$ і $-2x^3yz$ буквені частини не однакові, хоча й складаються з одних і тих самих змінних. Тому вони не є подібними.

Означення. Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, що входять до нього. Степінь одночлена, який є числом, відмінним від нуля, вважають таким, що дорівнює нулю.

Вважають, що нуль-одночлен степеня не має.

Наприклад, степінь одночлена $-3{,}8m^2xy^7$ дорівнює 10, а степені одночленів x^3 і 9 дорівнюють відповідно 3 і 0.

Розглянемо два одночлени $\frac{1}{5}ab^3$ і $10abx$. Одночлен $\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx$ є їх добутком. Спростимо його:

$$\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx = \left(\frac{1}{5} \cdot 10\right)(aa)(b^3b)\,x = 2a^2b^4x.$$

Отже, добутком двох одночленів є одночлен, який, зазвичай, записують у стандартному вигляді.

При піднесенні одночлена до степеня також отримують одночлен. Піднесемо, наприклад, до четвертого степеня одночлен $-\frac{1}{2}xy^3z^2$. Маємо:

$$\left(-\frac{1}{2}xy^3z^2\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 \cdot (z^2)^4 = \frac{1}{16}x^4y^{12}z^8.$$

ПРИКЛАД 1

Спростіть вираз $0{,}2a^2b^4\cdot(-5a^3b)^2$.

Маємо:

$$0{,}2a^2b^4\cdot(-5a^3b)^2 = 0{,}2a^2b^4\cdot(-5)^2\cdot(a^3)^2b^2 =$$
$$= 0{,}2a^2b^4\cdot 25a^6b^2 = 0{,}2\cdot 25a^2a^6b^4b^2 = 5a^8b^6.$$

ПРИКЛАД 2

Значення змінних a і b такі, що $4a^3b^4 = 7$. Знайдіть значення виразу $-\frac{2}{7}a^6b^8$ при тих самих значеннях змінних.

Маємо:

$$-\frac{2}{7}a^6b^8 = -\frac{1}{56}\cdot 16a^6b^8 = -\frac{1}{56}\cdot(4a^3b^4)^2 = -\frac{1}{56}\cdot 7^2 =$$
$$= -\frac{1}{56}\cdot 49 = -\frac{7}{8}.$$

?

1. Які вирази називають одночленами?
2. Поясніть, який вигляд одночлена називають його стандартним виглядом.
3. Що називають коефіцієнтом одночлена?
4. Які одночлени називають подібними?
5. Що називають степенем одночлена?

261.° **Чи є одночленом вираз:**

1) $5xy$;	5) 0;	9) m^4m;
2) $-\frac{1}{3}a^2b^3c$;	6) $\frac{4}{7}pk^4$;	10) $3(a^2-b^2)$;
3) $m+n$;	7) $\frac{6m^2k^3}{11a^5}$;	11) $-2\frac{4}{9}aa^2b^3b^6$;
4) 8;	8) b^9;	12) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^2 x^5x^3yz^{10}$?

262.° **Укажіть, які з одночленів записано в стандартному вигляді:**

1) $5mnm^2$;	3) $-7t^3\cdot 4t^5$;	5) $\frac{6}{13}x^8y^9$;
2) $1{,}4ab^7c^3$;	4) $-abc$;	6) $m^6n^4\cdot 10$.

263.° Чи є подібними одночлени:

1) $5a$ і $7a$;
2) $3a^2b^3c$ і $6a^2b^3c$;
3) $8x^2y^4$ і $8x^2y^5$;
4) $3y^2$ і $2y^3$;
5) $\frac{1}{2}m^7n^8$ і $\frac{1}{2}m^8n^7$;
6) $-0{,}1a^9b^{10}$ і $0{,}1a^9b^{10}$?

264.° Запишіть одночлен, подібний даному і коефіцієнт якого в 4 рази більший за коефіцієнт даного:

1) $1{,}4x^3y^7$;
2) $c^4d^{10}p^2$;
3) $1\frac{1}{4}a^5b^5c^9$.

265.° Зведіть одночлен до стандартного вигляду, укажіть його коефіцієнт і степінь:

1) $9a^4aa^6$;
2) $3x \cdot 0{,}4y \cdot 6z$;
3) $7a \cdot (-9ac)$;
4) $-3\frac{1}{3}m^5 \cdot 9mn^9$;
5) $-5x^2 \cdot 0{,}1x^2y \cdot (-2y)$;
6) $c \cdot (-d) \cdot c^{18}$.

266.° Подайте одночлен у стандартному вигляді, підкресліть його коефіцієнт:

1) $6bb^2$;
2) $1{,}5c^3d^4 \cdot 8c^2d^5$;
3) $-0{,}8u^4 \cdot 4t^3 \cdot (-2t^7)$;
4) $4{,}5a^2bc^7 \cdot 1\frac{1}{9}a^8b^6c$.

267.° Знайдіть значення одночлена:

1) $5x^2$, якщо $x = -4$;
2) $-4{,}8a^4b^3$, якщо $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$;
3) $0{,}04c^3d^5$, якщо $c = -10$, $d = 2$;
4) $\frac{4}{9}m^3n^2p^3$, якщо $m = -3$, $n = 5$, $p = -1$.

268.° Знайдіть значення одночлена:

1) $3m^3$, якщо $m = -3$;
2) $\frac{7}{16}a^2b^4$, якщо $a = -\frac{1}{7}$, $b = 2$;
3) $0{,}8m^2n^2k$, якщо $m = 0{,}3$, $n = \frac{1}{2}$, $k = 2000$.

269.° Виконайте множення одночленів:

1) $0{,}6a^4b^3 \cdot 4a^2b$;
2) $-2{,}8x^2y^5 \cdot 0{,}5x^4y^6$;
3) $13c^2d \cdot (-3cd)$;
4) $0{,}7x^6y^9 \cdot 0{,}3xy$;
5) $-\frac{3}{20}p^2q^8 \cdot \frac{40}{81}p^8q^2$;
6) $-6\frac{1}{2}mn^8p^{11} \cdot 3\frac{5}{13}m^5n^5$.

270.° Спростіть вираз:

1) $12a^2 \cdot 5a^3b^7$;
2) $-4m^3 \cdot 0{,}25m^6$;
3) $3ab \cdot (-17a^2b)$;
4) $56x^5y^{14} \cdot \frac{2}{7}x^2y$;
5) $-\frac{1}{3}p^2 \cdot (-27k) \cdot 5pk$;
6) $2\frac{1}{4}b^2c^5d^3 \cdot \left(-3\frac{1}{3}b^3c^4d^7\right)$.

271.° Перетворіть в одночлен стандартного вигляду вираз:

1) $(3a^2b)^2$;
2) $(-0{,}2x^3y^4)^3$;
3) $(-10m^2y^8)^5$;
4) $(16x^6y^7z^8)^2$;
5) $\left(-\frac{1}{5}c^6d\right)^4$;
6) $\left(1\frac{1}{2}a^8b^9\right)^6$.

272.° Виконайте піднесення до степеня:

1) $(-6m^3n^3)^3$;
2) $(-7x^9y^{10})^2$;
3) $(0{,}5a^{12}b^{14})^2$;
4) $(3ab^4c^5)^4$;
5) $\left(-\frac{1}{2}x^8y^9\right)^5$;
6) $\left(2\frac{1}{7}a^6b^8\right)^2$.

273.• Подайте даний вираз у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $3a^2b^6$:

1) $3a^6b^8$; 2) $-12a^2b^{10}$; 3) $-2{,}7a^5b^7$; 4) $2\frac{2}{7}a^{20}b^{30}$.

274.• Яким одночленом треба замінити зірочку, щоб виконувалася рівність:

1) $* \cdot 3b^4 = 12b^6$;
2) $-5a^5b^2 \cdot * = -20a^6b^8$;
3) $-7a^3b^9 \cdot * = 4{,}2a^5b^{12}$;
4) $23a^{12}b^{16} \cdot * = -23a^{29}b^{17}$?

275.•• Виконайте множення одночленів, де m і n — натуральні числа:

1) $2\frac{5}{6}a^{n+2}b^{m+3} \cdot \frac{9}{17}a^{5n-4}b^{2m-1}$;

2) $-7\frac{1}{3}a^{2n-1}b^{3n-1} \cdot 1\frac{1}{11}a^{n+6}b^{3n+1}$.

276.• Подайте у вигляді квадрата одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $4a^{10}$;
2) $36a^8b^2$;
3) $0{,}16a^{14}b^{16}$;
4) $289a^{20}b^{30}c^{40}$.

277.$^{\bullet}$ Подайте у вигляді куба одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $8x^6$;
2) $-27x^3y^9$;
3) $0{,}001x^{12}y^{18}$;
4) $-\frac{125}{216}x^{15}y^{21}z^{24}$.

278.$^{\bullet}$ Подайте одночлен $64a^6b^{12}$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $2a^2b^8$;
2) квадрата одночлена стандартного вигляду;
3) куба одночлена стандартного вигляду.

279.$^{\bullet}$ Подайте одночлен $81m^4n^{16}$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $-\frac{1}{3}mn^{14}$;
2) квадрата одночлена стандартного вигляду;
3) четвертого степеня одночлена стандартного вигляду.

280.$^{\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $2a^3 \cdot (-5a^4b^5)^2$;
2) $(-x^6y)^3 \cdot 11x^4y^5$;
3) $(-0{,}6a^3b^5c^6)^2 \cdot 3a^2c^8$;
4) $-1\frac{3}{11}m^4n^9 \cdot \left(-\frac{1}{7}mn^3\right)^2$;
5) $1\frac{7}{9}x^7y^2 \cdot \left(\frac{3}{4}x^2y^9\right)^4$;
6) $-(-2c^2d^5)^7 \cdot \left(-\frac{1}{2}c^4d^5\right)^4$.

281.$^{\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $20a^8 \cdot (9a)^2$;
2) $(-b^5)^4 \cdot 12b^6$;
3) $(3m^6n^3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}m^9n\right)$;
4) $(0{,}2x^7y^8)^3 \cdot 6x^2y^2$;
5) $\left(-\frac{1}{2}ab^4\right)^3 \cdot (4a^6)^2$;
6) $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)^5 \cdot \left(-\frac{3}{4}xy^2\right)^2$.

282.$^{\bullet\bullet}$ Замініть зірочки такими одночленами, щоб виконувалася рівність:

1) $(*)^2 \cdot (*)^3 = 9a^2b^3c^5$;
2) $(*)^3 \cdot (*)^4 = 16a^7b^6c^8$;
3) $(*)^3 \cdot (*)^2 = -72m^8n^{11}$;
4) $(*)^2 \cdot (*)^5 = 320x^{29}y^{21}z^9$.

283.$^{\bullet\bullet}$ Значення змінних x і y такі, що $5x^2y^4 = 6$. Знайдіть значення виразу:

1) $1{,}5x^2y^4$; 2) $25x^4y^8$; 3) $-25x^6y^{12}$

при тих самих значеннях змінних.

284.** Значення змінних a і b такі, що $3ab^3 = 4$. Знайдіть значення виразу:

1) $-1,2ab^3$; 2) $27a^3b^9$; 3) $-\frac{2}{3}a^2b^6$

при тих самих значеннях змінних.

285.** Значення змінних a, b і c такі, що $2a^2b = 7$, $a^3c^2 = 2$. Знайдіть значення виразу:

1) $6a^5bc^2$; 2) $a^7b^2c^2$; 3) $2\frac{1}{7}a^8bc^4$

при тих самих значеннях змінних.

286.** Значення змінних m, n і p такі, що $m^3n^2 = 3$, $\frac{1}{3}n^3p^2 = 5$. Знайдіть значення виразу:

1) $m^3n^5p^2$; 2) $2m^3n^8p^4$; 3) $-0,4m^{12}n^{11}p^2$

при тих самих значеннях змінних.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

287. Деяке число спочатку зменшили на 10 %, а потім результат збільшили на 20 %. Після цього отримали число, яке на 48 більше за дане. Знайдіть дане число.

288. (*Задача з російського фольклору.*) Летіла зграя гусей, а назустріч їм летить одна гуска і каже: «Здрастуйте, сто гусей!» «Нас не сто гусей, — відповідає їй вожак зграї, — якби нас було стільки, скільки зараз, та ще стільки, та півстільки, та чверть стільки, та ще ти, гуска, то тоді нас було б сто гусей». Скільки було в зграї гусей?

289. Зірочки замініть такими цифрами, щоб:

1) число *5* ділилося націло на 3 і на 10;
2) число 13*2* ділилося націло на 9 і на 5;
3) число 58* ділилося націло на 2 і на 3.

Знайдіть усі можливі розв'язки.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

290. Спростіть вираз:

1) $6x - 12x + 15x - 9x$;
2) $7a - 9b - 12a + 14b$;

3) $-0{,}8k + 0{,}9 - 1{,}7k + 0{,}5k + 1{,}4$;

4) $-\frac{1}{6}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{9}a - \frac{3}{4}b$.

Поновіть у пам'яті зміст пункту 25 на с. 266.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

291. Скількома способами можна поставити на шахову дошку білу й чорну тури так, щоб вони не били одна одну?

8. Многочлени

У попередньому пункті ви дізналися, що добуток одночленів є одночленом. Інша справа із сумою та різницею одночленів. Наприклад, вирази $2a + b^2$ і $2a - b^2$ не є одночленами. Це відповідно сума і різниця одночленів $2a$ і b^2. До речі, вираз $2a - b^2$ можна подати у вигляді $2a + (-b^2)$ і вважати сумою одночленів $2a$ і $-b^2$.

Означення. **Вираз, який є сумою кількох одночленів, називають многочленом.**

Ось ще приклади многочленів: $7xy + y - 11$; $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$; $3a - a + b$; $11x - 2x$.

Одночлени, з яких складено многочлен, називають **членами многочлена**. Так, членами многочлена $7xy + y - 11$ є одночлени $7xy$; y; -11.

Многочлен, який складається з двох членів, називають **двочленом**, а з трьох членів — **тричленом**. Домовилися розглядати одночлен як окремий випадок многочлена. Вважають, що такий многочлен складається з одного члена.

Зв'язки між многочленами, одночленами та їх окремим видом — числами ілюструє схема, зображена на рисунку 3.

Рис. 3

Якщо серед одночленів, з яких складається многочлен, є подібні, то їх називають **подібними членами многочлена**. Наприклад, у многочлені $\underline{7a^2b} - \underline{\underline{3a}} + \underline{\underline{\underline{4}}} - \underline{a^2b} - \underline{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{a}} + b$ подібні члени підкреслено однаковою кількістю рисочок.

Використовуючи правило зведення подібних доданків, спростимо цей многочлен:

$$7a^2b - 3a + 4 - a^2b - 1 + a + b = 6a^2b - 2a + b + 3.$$

Таке спрощення називають **зведенням подібних членів многочлена**. Це перетворення дає змогу замінити многочлен на такий, що тотожно дорівнює йому, але більш простий — з меншою кількістю членів.

?

1. Що називають многочленом?
2. Який многочлен називають двочленом? тричленом?
3. Що називають подібними членами многочлена?

292.° Назвіть одночлени, сумою яких є даний многочлен:

1) $-5a^4 + 3a^2 - a + 8$;
2) $6x^3 - 10x^2y + 7xy^2 + y^3$;
3) $t^3 + 3t^2 - 4t + 5$;
4) $1{,}8a^3b - 3{,}7a^2b^2 + 16ab^3 - b^4$.

293.° Знайдіть значення многочлена:

1) $2x^2 + x - 3$ при $x = 0{,}5$;
2) $x^3 + 5xy$ при $x = 3$, $y = -2$;
3) $a^2 - 2ab + b^2$ при $a = -4$, $b = 6$;
4) $y^4 + 7y^3 - 2y^2 - y + 10$ при $y = -1$.

294.° Знайдіть значення многочлена $2y^3 - 3y^2 + 4y - 6$ при:

1) $y = 1$; 2) $y = 0$; 3) $y = -5$.

295.° Зведіть подібні члени многочлена:

1) $4b^2 + a^2 + 9ab - 18b^2 - 9ab$;
2) $8m^3 - 13mn - 9n^2 - 8m^3 - 2mn$;
3) $2a^2b - 7ab^2 - 3a^2b + 2ab^2$;
4) $0{,}9c^4 + 1{,}1c^2 + c^4 - 0{,}6c^2$;
5) $3x^2 + 6x - 5 - x^2 - 10x + 3$;
6) $b^3 - 3bc + 3b^3 + 8bc - 4b^3$.

296.° Зведіть подібні члени многочлена:

1) $5x^2 - 10x + 9 - 2x^2 + 14x - 20$;

2) $-m^5 + 2m^4 - 6m^5 + 12m^3 - 18m^3$;
3) $0{,}2a^3 + 1{,}4a^2 - 2{,}2 - 0{,}9a^3 + 1{,}8a^2 + 3$;
4) $6x^2y - xy^2 - 8x^2y + 2xy^2 - xy + 7$.

297.˙ Зведіть подібні члени і знайдіть значення многочлена при вказаних значеннях змінних:
1) $-3a^5 + 4a^3 + 7a^5 - 10a^3 + 12a$, якщо $a = -2$;
2) $x^3y - 3xy^2 - 4x^3y + 8xy^2$, якщо $x = -1$, $y = -3$;
3) $0{,}8x^2 - 0{,}3x - x^2 + 1{,}6 + 1{,}1x - 0{,}6$, якщо $x = 5$;
4) $\frac{1}{3}a^2c + \frac{3}{4}ac^2 + \frac{1}{6}a^2c + 1{,}25ac^2$, якщо $a = -4$, $c = 3$.

298.˙ Зведіть подібні члени і знайдіть значення многочлена при вказаних значеннях змінних:
1) $2a^3 + 3ab - b^2 - 6a^3 - 7ab + 2b^2$, якщо $a = 2$, $b = -6$;
2) $mn - 6mn^2 - 8mn - 6mn^2$, якщо $m = 0{,}5$, $n = -2$;
3) $10xy^2 - 12x^2y + 9x^2y - 9xy^2$, якщо $x = \frac{1}{3}$, $y = 9$.

299.˙ З одночленів $4a$, $-3ab$, $7a^2$, $-8a^2$, $9ab$, $5a$ виберіть декілька і складіть з них:
1) многочлен, який не містить подібних членів;
2) многочлен, який містить подібні члени;
3) два многочлени, які не містять подібних членів, використавши при цьому всі дані одночлени.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

300. Цукерки за ціною 14 грн. за 1 кг змішали з цукерками за ціною 19 грн. за 1 кг і отримали суміш за ціною 16 грн. за 1 кг. Скільки цукерок кожного виду міститься в 1 кг суміші?

301. На пошті продається 20 різних конвертів і 15 різних марок. Скільки існує варіантів придбання конверта з маркою?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

302. Якому з наведених виразів тотожно дорівнює вираз $-9x + (4x - 7)$:
1) $13x - 7$; 2) $-5x + 7$; 3) $-5x - 7$; 4) $13x + 7$?

303. Якому з наведених виразів тотожно дорівнює вираз $-8y - (3y - 1)$:

1) $-11y + 1$; 2) $-5y + 1$; 3) $-11y - 1$; 4) $-5y - 1$?

304. Спростіть вираз:

1) $(2a + b) - (b - 2a)$; 3) $(m + n) - (2m + n) - (m - 4n)$;
2) $(3a - 4) + (3 - 5a)$; 4) $(5c - 2) - (6c + 1) + (c - 8)$.

Поновіть у пам'яті зміст пункту 24 на с. 266.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

305. Навколо зірки обертається кілька планет, відстані між якими не змінюються і є попарно різними. На кожній планеті знаходиться один астроном, який спостерігає найближчу планету. Доведіть, що існує дві планети, на яких астрономи спостерігають один одного.

9. Додавання і віднімання многочленів

Нехай треба додати два многочлени $3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11$ і $-2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2$. Для цього візьмемо їх у дужки і поставимо між ними знак «плюс». Потім розкриємо дужки і зведемо подібні доданки (якщо такі є).

Маємо:

$$(3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11) + (-2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2) =$$
$$= 3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11 - 2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2 =$$
$$= xy^2 + 6x^2y^2 - 5xy + x + y + 9.$$

Отриманий многочлен є сумою двох даних многочленів.

Нехай тепер треба від першого з даних многочленів відняти другий. Для цього кожен многочлен візьмемо в дужки і поставимо перед від'ємником знак «мінус». Потім розкриємо дужки і зведемо подібні доданки.

Маємо:

$$(3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11) - (-2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2) =$$
$$= 3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11 + 2xy^2 - x^2y^2 - 2xy - y + 2 =$$
$$= 5xy^2 + 4x^2y^2 - 9xy + x - y + 13.$$

Отриманий многочлен є різницею двох даних многочленів.

Узагалі, при додаванні і відніманні многочленів завжди отримуємо многочлен.

ПРИКЛАД 1

Доведіть, що різниця двоцифрового числа і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться націло на 9.

Нехай дане число має a десятків і b одиниць. Тоді воно дорівнює $10a + b$.

Число, записане тими самими цифрами у зворотному порядку, дорівнює $10b + a$.

Розглянемо різницю $(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9(a - b)$.

Очевидно, що число $9(a - b)$ ділиться націло на 9.

Зазначимо, що запис $\overline{ab}$ є позначенням двоцифрового числа, яке має a десятків і b одиниць, тобто $\overline{ab} = 10a + b$.

ПРИКЛАД 2

Доведіть, що різниця $(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}) - (\overline{ba} + \overline{ca} + \overline{cb})$ ділиться націло на 18.

Маємо:

$$(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}) - (\overline{ba} + \overline{ca} + \overline{cb}) = (10a + b + 10a + c + 10b + c) -$$
$$- (10b + a + 10c + a + 10c + b) = (20a + 11b + 2c) -$$
$$- (20c + 11b + 2a) = 20a + 11b + 2c - 20c - 11b - 2a =$$
$$= 18a - 18c = 18(a - c).$$

Очевидно, що число $18(a - c)$ ділиться націло на 18.

ПРИКЛАД 3

Доведіть, що сума чотирьох послідовних парних натуральних чисел не ділиться націло на 8.

Нехай перше з цих чисел дорівнює $2n$, де n — довільне натуральне число. Тоді наступними трьома числами є $2n + 2$, $2n + 4$, $2n + 6$ відповідно.

Сума, що розглядається, має вигляд $2n + (2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) = 8n + 12$.

Перший доданок $8n$ суми $8n + 12$ ділиться націло на 8, а другий доданок 12 не ділиться. Отже, сума $8n + 12$ не ділиться націло на 8.

306.° Знайдіть суму многочленів:
1) $-5x^2 - 4$ і $8x^2 - 6$;
2) $2x + 16$ і $-x^2 - 6x - 20$.

307.° Знайдіть різницю многочленів:
1) $x^2 + 8x$ і $4 - 3x$;
2) $2x^2 + 5x$ і $4x^2 - 2x$;
3) $4x^2 - 7x + 3$ і $x^2 - 8x + 11$;
4) $9m^2 - 5m + 4$ і $-10m + m^3 + 5$.

308.° Спростіть вираз:
1) $(5a^4 + 3a^2b - b^3) - (3a^4 - 4a^2b - b^2)$;
2) $(12xy - 10x^2 + 9y^2) - (-14x^2 + 9xy - 14y^2)$;
3) $(7ab^2 - 8ab + 4a^2b) + (10ab - 7a^2b)$;
4) $(2c^2 + 3c) + (-c^2 + c) - (c^2 + 4c - 1)$.

309.° Спростіть вираз:
1) $(3x^2 - 2x) + (-x^2 + 3x)$;
2) $(4c^2 - 2cd) - (10c^2 + 8cd)$;
3) $(12m^2 - 7n - 3mn) - (6mn - 10n + 14m^2)$;
4) $(3n^3 - 2mn + 4m^3) - (2mn + 3n^3)$.

310.° Який двочлен треба додати до даного двочлена, щоб їх сума тотожно дорівнювала 0:
1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) $-a - b$?

311.° Розв'яжіть рівняння:
1) $3x^2 - (2x^2 - 8x) - (x^2 - 3) = x$;
2) $12 - (6 - 9x - x^2) = x^2 + 5x - 14$;
3) $4y^3 - (4y^3 - 8y) - (6y + 3) = 7$;
4) $(y^2 - 4y - 17) - (6y^2 - 3y - 8) = 1 - y - 5y^2$.

312.° Розв'яжіть рівняння:
1) $(5x^2 - 3) - (2x + 5) = 5x^2$;
2) $x^2 - (x + 1) - (x^2 - 7x + 32) = 3$;
3) $(y^3 + 3y - 8) - (5y - y^3 + 7) = 2y^3 - 2y - 15$.

313.˙ Доведіть тотожність:
1) $(a^2 + b^2 - c^2) - (b^2 + c^2 - a^2) + (c^2 - a^2) = a^2 - c^2$;
2) $(4 - 3a^2) - a^2 + (7 + 2a^2) - (-2a^2 + 11) = 0$;
3) $(x^3 + 4x^2) - (x + 6) + (1 + x - x^3) = 4x^2 - 5$.

314.° Доведіть тотожність:

1) $4a^2 - (6a^2 - 2ab) + (3ab + 2a^2) = 5ab$;

2) $(9x^6 - 4x^3) - (x^3 - 9) - (8x^6 - 5x^3) = x^6 + 9$.

315.° Знайдіть значення виразу:

1) $(5a^3 - 20a^2) - (4a^3 - 18a^2)$, якщо $a = -3$;

2) $4b^2 - (7b^2 - 3bc) + (3b^2 - 7bc)$, якщо $b = -1{,}5$, $c = 4$.

316.° Обчисліть значення виразу:

1) $(5{,}7a^2 - 2{,}1ab + b^2) - (3{,}9ab - 0{,}3a^2 + 2b^2)$, якщо $a = -1$, $b = 5$;

2) $(5m^2n - m^3) + 7m^3 - (6m^3 - 3m^2n)$, якщо $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{3}{16}$.

317.° Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної, що входить до нього:

1) $1{,}6 - 7a^2 - (0{,}8 - 4a^2) + (3a^2 - 0{,}7)$;

2) $3x^2 - 9x - (8 - 5x^2 - (9x - 8x^2))$.

318.° Доведіть, що значення виразу $(2c^2 - 3c) + 1{,}8 - c^2 - (c^2 - 3c - 2{,}2)$ не залежить від значення змінної, що входить до нього.

319.° Який многочлен треба додати до тричлена $2a^2 - 5a + 7$, щоб сума дорівнювала:

1) 5; 2) 0; 3) a^2; 4) $-2a$?

320.° Який многочлен треба відняти від двочлена $4a^3 - 8$, щоб різниця дорівнювала:

1) -4; 2) 9; 3) $-2a^3$; 4) $3a$?

321.° Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоб утворилася тотожність:

1) $* - (3x^2 - 4xy + 2y^2) = 9x^2 + y^2$;

2) $a^3 - 6a^2 + 2a - (*) = a^5 + 2a^2 - 7$.

322.° Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоб утворилася тотожність:

1) $(2x^2 - 14x + 9) + (*) = 20 - 10x$;

2) $(19a^4 - 17a^2b + b^3) - (*) = 20a^4 + 5a^2b$.

323.° Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоб після зведення подібних членів отриманий многочлен не містив змінної a:

1) $4a^2 - 3ab + b + 8 + *$;

2) $9a^3 - 9a + 7ab^2 + bc + bm + *$.

324. Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоб після зведення подібних членів многочлен $3x^2 + 5x^2y + 7x - 8y + 15 + *$ не містив:

1) членів з x^2;
2) членів зі змінною x;
3) членів зі змінною y.

325. Подайте у вигляді многочлена число, яке складається з:

1) 4 сотень, x десятків і y одиниць;
2) a тисяч, b сотень, 5 десятків і c одиниць.

326. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $\overline{cba}$; 2) $\overline{abc} - \overline{ab}$; 3) $\overline{a0c} + \overline{ac}$.

327. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $\overline{cab} + \overline{ca}$; 2) $\overline{abc} + \overline{bca}$; 3) $\overline{ab9} + \overline{7a}$.

328. Доведіть, що значення виразу $(9 - 18n) - (6n - 7)$ кратне 8 при будь-якому натуральному значенні n.

329. Доведіть, що значення виразу $(6m + 8) - (3m - 4)$ кратне 3 при будь-якому натуральному значенні m.

330. Доведіть, що при діленні на 7 значення виразу $(5n + 9) - (5 - 2n)$ остача становитиме 4 при будь-якому натуральному значенні n.

331. Чому дорівнює остача при діленні на 9 значення виразу $(16n + 8) - (7n + 3)$, де n — довільне натуральне число?

332. Подайте многочлен $3a^2b + 8a^3 - 6a + 12b - 9$ у вигляді суми двох многочленів так, щоб один з них не містив змінної b.

333. Подайте многочлен $4mn^2 + 11m^4 - 7m^5 + 14mn - 9n + 3$ у вигляді різниці двох многочленів з додатними коефіцієнтами.

334. Подайте многочлен $6x^2 - 3xy + 5x - 8y + 2$ у вигляді різниці двох многочленів так, щоб один з них не містив змінної y.

335. Доведіть, що значення різниці двочленів $13m + 20n$ і $7m + 2n$, де m і n — довільні натуральні числа, ділиться націло на 6.

336. Доведіть, що значення суми двочленів $16a - 6b$ і $27b - 2a$, де a і b — довільні натуральні числа, ділиться націло на 7.

337.° Подайте многочлен $x^2 - 6x + 14$ у вигляді різниці:
1) двох двочленів; 2) тричлена і двочлена.

338.° Подайте многочлен $3x^2 + 10x - 5$ у вигляді різниці двочлена і тричлена.

339.•• Доведіть, що вираз $(2x^4 + 4x - 1) - (x^2 + 8 + 9x) + (5x + x^2 - 3x^4)$ набуває від'ємного значення при будь-якому значенні x. Якого найбільшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x?

340.•• Доведіть, що вираз $(7y^2 - 9y + 8) - (3y^2 - 6y + 4) + 3y$ набуває додатного значення при будь-якому значенні y. Якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні y?

341.•• Доведіть, що:
1) сума п'яти послідовних натуральних чисел ділиться націло на 5;
2) сума трьох послідовних парних натуральних чисел ділиться націло на 6;
3) сума чотирьох послідовних непарних натуральних чисел ділиться націло на 8;
4) сума чотирьох послідовних натуральних чисел не ділиться націло на 4;
5) остача від ділення на 6 суми шести послідовних натуральних чисел дорівнює 3.

342.•• Доведіть, що:
1) сума трьох послідовних натуральних чисел кратна 3;
2) сума семи послідовних натуральних чисел ділиться націло на 7;
3) сума чотирьох послідовних парних натуральних чисел ділиться націло на 4;
4) сума п'яти послідовних парних натуральних чисел ділиться націло на 10.

343.•• Доведіть, що:
1) сума чисел $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ і $\overline{ca}$ ділиться націло на 11;
2) різниця чисел $\overline{abc}$ і $\overline{cba}$ ділиться націло на 99.

344.•• Доведіть, що:
1) сума чисел $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ і $\overline{cab}$ кратна 111;

2) різниця числа $\overline{abc}$ і суми його цифр ділиться націло на 9.

345.•• Доведіть, що не існує таких значень x і y, при яких многочлени $5x^2 - 6xy - 7y^2$ і $-3x^2 + 6xy + 8y^2$ одночасно набували б від'ємних значень.

346.•• Розставте дужки так, щоб була тотожністю рівність:

1) $x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = 2$;

2) $x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = -2$;

3) $x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

347. Деяке число спочатку збільшили на 20 %, а потім зменшили результат на 20 %. Установіть, отримане число більше чи менше від початкового і на скільки відсотків.

348. Через першу трубу басейн можна наповнити водою за 3 год, а через другу — за 6 год. Спочатку 2 год була відкрита перша труба, потім її закрили, але відкрили другу. За скільки годин було наповнено басейн?

349. Відомо, що в парку $\frac{7}{24}$ дерев становлять каштани, а $\frac{5}{18}$ — берези. Скільки всього дерев у парку, якщо їх більше за 100, але менше від 200?

350. Із села до станції вийшов пішохід зі швидкістю 4 км/год. Через годину із села зі швидкістю 10 км/год виїхав велосипедист, який прибув на станцію на 0,5 год раніше за пішохода. Яка відстань від села до станції?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

351. Знайдіть значення виразу, використовуючи розподільну властивість множення:

1) $12 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)$; 2) $36 \cdot \left(\frac{17}{18} - \frac{5}{12} + \frac{4}{9}\right)$; 3) $\left(\frac{5}{7} + \frac{5}{14}\right) \cdot \frac{28}{25}$.

352. Розкрийте дужки:

1) $4(2a - 3b)$;

2) $0{,}3(9x - 5y + 7)$;

3) $(-2{,}6m + 3{,}5n - 7{,}2) \cdot (-10)$;

4) $-m(-n + 8k - 12)$.

353. Спростіть вираз:

1) $3m^2n \cdot 0{,}4mn^3$;
3) $-5x^4y^2z^8 \cdot (-0{,}8x^6y^8z^2)$;
2) $7\frac{1}{3}b^3c^2 \cdot \frac{9}{11}a^4b^5$;
4) $-5\frac{3}{7}abc \cdot 3{,}5a^{12}b^{10}c$.

Поновіть у пам'яті зміст пункту 11 на с. 261.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

354. Сашко і Василько записують 30-цифрове число, використовуючи тільки цифри 1, 2, 3, 4, 5. Першу цифру пише Сашко, другу — Василько і т. д. Василько хоче отримати число, кратне 9. Чи зможе Сашко йому завадити?

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ № 2 «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

1. Яка з наведених рівностей не є тотожністю?

А) $-3(a - b) = -3a + 3b$;
Б) $9a - 8a + a = 2a$;
В) $8a - (4a + 1) = 4a - 1$;
Г) $-(x + 3y) + (2x - y) = 3x + 2y$.

2. Знайдіть значення виразу $(-2{,}4 + 0{,}4)^4$.

А) -8; Б) 8; В) 16; Г) -16.

3. Спростіть вираз $(-a^6)^3 \cdot (-a^7)^4$.

А) a^{20}; Б) $-a^{20}$; В) a^{46}; Г) $-a^{46}$.

4. Виконайте піднесення до степеня: $(0{,}3a^4)^2$.

А) $0{,}9a^6$; Б) $0{,}9a^8$; В) $0{,}09a^6$; Г) $0{,}09a^8$.

5. Який з наведених виразів є одночленом?

А) $0{,}4x + y$;
В) $0{,}4xy$;
Б) $0{,}4x - y$;
Г) немає жодного.

6. Якому з одночленів дорівнює вираз $0{,}7a^3b^2 \cdot \frac{1}{7}a^2b^4$?

А) $7a^5b^6$; Б) $7a^6b^8$; В) $0{,}1a^5b^6$; Г) $0{,}1a^6b^8$.

7. Квадратом якого з наведених одночленів є вираз $\frac{1}{4}b^{64}c^{100}$?

А) $-\frac{1}{2}b^8c^{10}$; Б) $\frac{1}{2}b^{32}c^{50}$; В) $\frac{1}{2}b^8c^{10}$; Г) $-\frac{1}{2}b^{32}c^{10}$.

8. Відомо, що $m < 0$ і $n < 0$. Порівняйте з нулем значення виразу m^5n^6.

А) $m^5n^6 = 0$; В) $m^5n^6 < 0$;
Б) $m^5n^6 > 0$; Г) неможливо з'ясувати.

9. Зведіть подібні члени многочлена $2x^2 + 6xy - 5x^2 - 9xy + 3y^2$.

А) $-3xy$; В) $3x^2y^2$;
Б) $-3x^2 - 3xy + 3y^2$; Г) $3x^2 + 3xy + 3y^2$.

10. Знайдіть різницю многочленів $x^2 - 3x - 4$ і $x - 3x^2 - 2$.

А) $4x^2 - 4x - 2$; В) $-2x^2 - 2x - 6$;
Б) $-2x^2 - 4x - 2$; Г) $4x^2 - 4x - 6$.

11. Який з наведених виразів набуває тільки від'ємних значень?

А) $x^6 + 4$; Б) $x^6 - 4$; В) $-x^6 + 4$; Г) $-x^6 - 4$.

12. Якого найменшого значення може набувати вираз $(x - 7)^2 + 2$?

А) 2; Б) 7; В) 5; Г) 9.

10. Множення одночлена на многочлен

Помножимо одночлен $2x$ на многочлен $3x + 2y - 5$. Для цього запишемо добуток $2x\,(3x + 2y - 5)$. Розкриємо дужки, застосувавши розподільну властивість множення. Маємо:

$$2x\,(3x + 2y - 5) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 2y - 2x \cdot 5 = 6x^2 + 4xy - 10x.$$

Отриманий многочлен $6x^2 + 4xy - 10x$ є добутком одночлена $2x$ і многочлена $3x + 2y - 5$.

Узагалі, добуток одночлена і многочлена завжди можна подати у вигляді многочлена.

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно помножити цей одночлен на кожний член многочлена і отримані добутки додати.

При множенні одночлена і многочлена виконується переставна властивість множення. Тому наведене правило дає змогу множити многочлен на одночлен.

ПРИКЛАД 1

Спростіть вираз $6x(x-1)-3(2x^2-3x+4)$.

Маємо:

$$6x(x-1)-3(2x^2-3x+4)=\underline{6x^2}-\underline{\underline{6x}}-\underline{6x^2}+\underline{\underline{9x}}-12=3x-12.$$

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть рівняння $0{,}5x(3+4x)=2x(x-2)-11$.

Маємо:

$$1{,}5x+2x^2=2x^2-4x-11;$$
$$1{,}5x+2x^2-2x^2+4x=-11;$$
$$5{,}5x=-11;$$
$$x=-2.$$

Відповідь: -2.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння $\frac{5x+4}{12}-\frac{x+3}{8}=2$.

Помноживши обидві частини даного рівняння на число 24, яке є найменшим спільним знаменником дробів, що містить це рівняння, отримуємо:

$$\left(\frac{5x+4}{12}-\frac{x+3}{8}\right)\cdot 24=2\cdot 24;$$
$$24\cdot\frac{5x+4}{12}-24\cdot\frac{x+3}{8}=48;$$
$$2(5x+4)-3(x+3)=48;$$
$$10x+8-3x-9=48;$$
$$7x-1=48;$$
$$x=7.$$

Відповідь: 7.

ПРИКЛАД 4

Доведіть, що при будь-якому значенні змінної a значення виразу $3a(a^2-4)-2a^2(1{,}5a+4a^4)+6(2a-1)$ є від'ємним числом.

$$3a(a^2-4)-2a^2(1{,}5a+4a^4)+6(2a-1)=$$
$$=3a^3-12a-3a^3-8a^6+12a-6=-8a^6-6.$$

Вираз $-8a^6$ при будь-якому значенні a набуває недодатного значення. Отже, значення виразу $-8a^6 - 6$ є від'ємним числом при будь-якому значенні a.

ПРИКЛАД 5

Остача при діленні натурального числа m на 6 дорівнює 5, а остача при діленні натурального числа n на 4 дорівнює 2. Доведіть, що значення виразу $2m + 3n$ ділиться націло на 4 і не ділиться націло на 12.

Нехай неповна частка при діленні m на 6 дорівнює a, а при діленні n на 4 дорівнює b. Тоді $m = 6a + 5$, $n = 4b + 2$.

Отже,

$$2m + 3n = 2(6a + 5) + 3(4b + 2) =$$
$$= 12a + 10 + 12b + 6 = 12a + 12b + 16.$$

Кожний доданок отриманої суми ділиться націло на 4, тому й сума ділиться націло на 4.

Перших два доданки діляться націло на 12, а третій — не ділиться. Тому й сума не ділиться націло на 12.

? Як помножити одночлен на многочлен?

355.° Перетворіть у многочлен добуток:

1) $3x(2x + 5)$;
2) $4x(x^2 - 8x - 2)$;
3) $-2a(a^2 + a - 3)$;
4) $5b^2(3b^2 - 7b + 10)$;
5) $mn(m^2n - n^3)$;
6) $2ab(a^3 - 3a^2b + b^2)$;
7) $(4y^3 - 6y + 7) \cdot (-1{,}2y^3)$;
8) $0{,}4x^2y(3xy^2 - 5xy + 13x^2y^3)$;
9) $(2{,}3a^3b - 1{,}7b^4 - 3{,}5b) \cdot (-10a^2b)$;
10) $-4pk^3(3p^2k - p + 4k - 2)$;
11) $\frac{2}{3}mn^2(6m - 1{,}8n + 9)$;
12) $1\frac{1}{7}cd\left(\frac{7}{8}c^5 - \frac{7}{24}c^2d^7 - \frac{1}{4}d^{10}\right)$.

356.° Виконайте множення:

1) $3x(4x^2 - x)$;
2) $-5a^2(a^2 - 6a - 3)$;
3) $(8b^2 - 10b + 2)\cdot 0{,}5b$;
4) $x^3(x^5 - x^2 + 7x - 1)$;
5) $-2c^2d^4(4c^2 - c^3d + 5d^4)$;
6) $(5m^3n - 8mn^2 - 2n^6)\cdot(-4m^2n^8)$.

357.° Спростіть вираз:

1) $8x - 2x(3x + 4)$;
2) $7a^2 + 3a(9 - 5a)$;
3) $6x(4x - 7) - 12(2x^2 + 1)$;
4) $2m(m - 3n) + m(5m + 11n)$;
5) $c(c^2 - 1) + c^2(c - 1)$;
6) $8x(x^2 + y^2) - 9x(x^2 - y^2)$;
7) $5b^3(2b - 3) - 2{,}5b^3(4b - 6)$;
8) $x(5x^2 + 6x + 8) - 4x(2 + 2x + x^2)$.

358.° Спростіть вираз:

1) $7x(x - 4) - x(6 - x)$;
2) $5ab(4a + 3b) - 10a^2(2b - 4)$;
3) $xy(2x - 11y) - x(xy + 14y^2)$;
4) $5c^3(4c - 3) - 2c^2(8c^2 - 12)$.

359.° Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $3x(2x - 5) - 8x(4x - 3)$, якщо $x = -1$;
2) $2x(14x^2 - x + 5) + 4x(2{,}5 + 3x - 7x^2)$, якщо $x = 7$;
3) $8ab(a^2 - 2b^2) - 7a(a^2b - 3b^3)$, якщо $a = -3$, $b = 2$.

360.° Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $6x(6x - 4) + 9x(3 - 4x)$, якщо $x = -\frac{1}{9}$;
2) $2m(m - n) - n(3m - n) - n(n + 6)$, якщо $m = -4$, $n = 0{,}5$.

361.• Розв'яжіть рівняння:

1) $5x(3x - 2) - 15x(4 + x) = 140$;
2) $1{,}2x(4 + 5x) = 3x(2x + 1) - 9$;
3) $6x(7x - 8) - 2x(21x - 6) = 3 - 30x$;
4) $12x - 3x(6x - 9) = 9x(4 - 2x) + 3x$;
5) $7x^2 - x(7x - 5) - 2(2{,}5x + 1) - 3 = 0$;
6) $8(x^2 - 4) - 4x(3{,}5x - 7) = 20x - 6x^2$.

362.• Знайдіть корінь рівняння:

1) $0{,}4x(5x - 6) + 7{,}2 = 2x(x + 0{,}6)$;
2) $x(3x + 2) - 9(x^2 - 7x) = 6x(10 - x)$;
3) $12(x^3 - 2) - 7x(x^2 - 1) = 5x^3 + 2x + 6$.

363. Доведіть тотожність:

1) $ab(b - c) + ac(c - b) - a(b^2 - 3bc + c^2) = abc$;
2) $4a(a + b) - a(3a - 4b) - 8ab = a^2$;
3) $a(a + 2b) + b(a + b) = b(2a + b) + a(a + b)$;
4) $a(b + c - bc) - b(a + c - ac) = (a - b)c$.

364. Доведіть тотожність:

1) $a(a + b) - b(a - b) = a^2 + b^2$;
2) $b(a - b) + b(b + c) = b(a + b) - b(b - c)$.

365. Доведіть, що коли:

1) $a + b + c = 0$, то
$a(bc - 1) + b(ac - 1) + c(ab - 1) = 3abc$;
2) $a^2 + b^2 = c^2$, то
$c(ab - c) - b(ac - b) - a(bc - a) + abc = 0$.

366. Доведіть, що значення виразу

$$x(12x + 11) - x^2(x^2 + 8) - x(11 + 4x - x^3)$$

не залежить від значення змінної.

367. Доведіть, що значення виразу

$$6x(x - 3) - 9\left(\frac{2}{3}x^2 - 2x + 7\right)$$

не залежить від значення змінної.

368. Доведіть, що при будь-яких значеннях x значення виразу $4(x^2 - 2x + 4) - 0{,}5x(6x - 16)$ є додатним числом.

369. Доведіть, що вираз $3x^2(3 - 4x) - 6x(1{,}5x - 2x^2 + x^3)$ набуває недодатних значень при всіх значеннях x.

370. Доведіть, що вираз $7a^4(a + 3) - a^3(21a + 7a^2 - 3a^5)$ набуває невід'ємних значень при всіх значеннях a.

371. Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $* \cdot (a - b + c) = -abc + b^2c - bc^2$;
2) $* \cdot (ab - b^2) = a^3b - a^2b^2$;
3) $-3a^2(* - *) = 6a^3 + 15a^4$.

372. Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $(x - y) \cdot * = x^2y^2 - x^3y$;
2) $(-9x^2 + *) \cdot y = * + y^4$;
3) $(1{,}4x - *) \cdot 3x = * - 0{,}6x^3$;
4) $*(* - x^2y^5 + 5y^6) = 8x^3y^3 + 5x^3y^8 - *$.

373. Спростіть вираз:

1) $15a \cdot \frac{a+4}{3} + 12a^2 \cdot \frac{5-2a}{6}$;

2) $24c^3 \cdot \frac{c^2+2c-3}{8} - 18c^2 \cdot \frac{c^3-c^2+2}{9}$;

3) $34x \cdot \frac{x-y}{17} - 45y \cdot \frac{x-2y}{15} - y(6y-5x)$.

374. Спростіть вираз:

1) $6b^2 \cdot \frac{5b^2-4}{3} + 20b \cdot \frac{3b-2b^3}{4}$;

2) $14m \cdot \frac{m+n}{7} - \frac{m-n}{8} \cdot 16n - 2(m^2+n^2)$.

375. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-7}{4} - \frac{x}{6} = 2$;

2) $\frac{x+6}{2} - \frac{x-7}{7} = 4$;

3) $\frac{2x+3}{6} + \frac{1-4x}{8} = \frac{1}{3}$;

4) $3x - \frac{2x+3}{2} = \frac{x+6}{3}$;

5) $\frac{6x-7}{5} - \frac{3x+1}{6} = \frac{11-x}{15}$;

6) $\frac{5x-3}{9} - \frac{4x+3}{6} = x-1$;

7) $\frac{8x-5}{3} - \frac{4x+3}{4} + \frac{2-9x}{2} = -3$;

8) $\frac{8x^2-3x}{16} - \frac{6x^2+1}{12} = -1$.

376. Знайдіть корінь рівняння:

1) $x - \frac{7x+1}{8} = \frac{4x+3}{4}$;

2) $\frac{2x+1}{6} - \frac{3x+1}{7} = 2$;

3) $\frac{2x+3}{3} - \frac{5x+13}{6} + \frac{5-2x}{2} = 6$;

4) $\frac{4x^2+5x}{14} + \frac{10-2x^2}{7} = 5$.

377. При якому значенні змінної значення виразу $8y(y-7)$ на 15 більше за значення виразу $2y(4y-10,5)$?

378. Довжина прямокутника в 3 рази більша за його ширину. Якщо ширину прямокутника зменшити на 6 см, то його площа зменшиться на 144 см². Знайдіть початкову ширину прямокутника.

379. Ширина прямокутника на 8 см менша від його довжини. Якщо довжину прямокутника збільшити на 6 см, то його площа збільшиться на 72 см². Знайдіть периметр даного прямокутника.

380. За 3 дні турист пройшов 108 км. За другий день він пройшов на 6 км більше, ніж за перший, а за третій — $\frac{5}{13}$ відстані, пройденої за два перших дні. Скільки кілометрів турист проходив щодня?

381. Три бригади робітників виготовили за зміну 80 деталей. Перша бригада виготовила на 12 деталей менше, ніж друга, а третя — $\frac{3}{7}$ кількості деталей, виготовлених першою і другою бригадами разом. Скільки деталей виготовила кожна бригада?

382. Спростіть вираз:
1) $x^{n+1}(x^{n+6}-1)-x^{n+2}(x^{n+5}-x^3)$;
2) $x^{n+2}(x^2-3)-x^n(x^{n+2}-3x^2-1)$,
де n — натуральне число.

383. Спростіть вираз:
1) $x^n(x^{n+4}+2x)+x(3x^n-x^{2n+3})$;
2) $x(4x^{n+1}+2x^{n+4}-7)-x^{n+2}(4+2x^3-x^n)$,
де n — натуральне число.

384. Остача при діленні натурального числа a на 3 дорівнює 1, а остача при діленні натурального числа b на 9 дорівнює 7. Доведіть, що значення виразу $4a+2b$ ділиться націло на 3.

385. Остача при діленні натурального числа m на 5 дорівнює 3, а остача при діленні натурального числа n на 3 дорівнює 2. Доведіть, що значення виразу $3m+5n$ не ділиться націло на 15.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

386. Три найбільших лимани України — Дніпровсько-Бузький, Дністровський і Сасик (Кундук) знаходяться на узбережжі Чорного моря. Їх загальна площа 1364,8 км². Площа Дністровського лиману у $2\frac{2}{9}$ раза менша від площі Дніпровсько-Бузького, а площа Сасика становить 25,6 % площі Дніпровсько-Бузького. Знайдіть площу кожного лиману.

387. За перший день Василь прочитав $\frac{2}{7}$ сторінок книжки, за другий — 64 % остачі, а за третій — решту 54 сторінки. Скільки сторінок у книжці?

388. Яка ймовірність того, що при киданні грального кубика випаде:
1) непарне число;
2) число, яке ділиться націло на 3;
3) число, яке не ділиться націло на 3?

389. Велосипедист проїхав першу половину шляху за 3 год, а другу — за 2,5 год, оскільки збільшив швидкість на 3 км/год. Яку відстань проїхав велосипедист?

390. На одному складі було 184 т мінерального добрива, а на другому — 240 т. Перший склад відпускав щодня по 15 т добрива, а другий — по 18 т. Через скільки днів кількість добрива, що залишиться на першому складі, становитиме $\frac{2}{3}$ кількості добрива, що залишиться на другому складі?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

391. У волейбольному турнірі, який проходив в одне коло (тобто кожна команда грала з кожною один раз) 20 % усіх команд не здобули жодної перемоги. Скільки команд взяло участь у цьому турнірі? (*Примітка.* У волейболі «нічиїх» не буває, обов'язково одна команда виграє, а друга програє).

11. Множення многочлена на многочлен

Навчимося множити два многочлени на прикладі добутку $(a + b)(x - y - z)$. Позначимо другий множник буквою c. Тоді

$$(a + b)(x - y - z) = (a + b)c = ac + bc.$$

Тепер у вираз $ac + bc$ підставимо замість c многочлен $x - y - z$. Запишемо:

$$ac + bc = a(x - y - z) + b(x - y - z) =$$
$$= ax - ay - az + bx - by - bz.$$

Отриманий многочлен і є шуканим добутком.

Цей самий результат можна отримати, якщо добуток знаходити за схемою:

$$(a + b)(x - y - z),$$

яка роз'яснює таке правило:

щоб помножити многочлен на многочлен, можна кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого і отримані добутки додати.

Таким чином, при множенні многочлена на многочлен завжди отримуємо многочлен.

ПРИКЛАД 1

Спростіть вираз $(3x - 4)(2x + 3) - (x - 2)(x + 5)$.

Маємо:

$$(3x - 4)(2x + 3) - (x - 2)(x + 5) = 6x^2 + 9x - 8x - 12 -$$
$$-(x^2 + 5x - 2x - 10) = 6x^2 + 9x - 8x - 12 - x^2 - 5x + 2x + 10 =$$
$$= 5x^2 - 2x - 2.$$

ПРИКЛАД 2

Подайте у вигляді многочлена вираз:

$$(a + 2)(a - 5)(a + 3).$$

$$(a + 2)(a - 5)(a + 3) = (a^2 - 5a + 2a - 10)(a + 3) =$$
$$= (a^2 - 3a - 10)(a + 3) = a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 9a - 10a - 30 =$$
$$= a^3 - 19a - 30.$$

ПРИКЛАД 3

Знайдіть чотири послідовних натуральних числа таких, що добуток третього і четвертого з них на 38 більший за добуток другого і першого.

Нехай менше з цих чисел дорівнює x, тоді три наступні за ним числа дорівнюватимуть $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$. Оскільки за умовою добуток $(x + 3)(x + 2)$ на 38 більший за добуток $x(x + 1)$, то:

$$(x + 3)(x + 2) - x(x + 1) = 38;$$
$$x^2 + 2x + 3x + 6 - x^2 - x = 38;$$
$$4x = 38 - 6;$$
$$x = 8.$$

Отже, шуканими числами є 8, 9, 10 і 11.

Відповідь: 8, 9, 10, 11.

ПРИКЛАД 4

Доведіть, що значення виразу

$$(n + 39)(n - 4) - (n + 31)(n - 3)$$

кратне 7 при всіх натуральних значеннях n.

Виконаємо перетворення:

$$(n + 39)(n - 4) - (n + 31)(n - 3) =$$
$$= n^2 - 4n + 39n - 156 - (n^2 - 3n + 31n - 93) =$$
$$= n^2 - 4n + 39n - 156 - n^2 + 3n - 31n + 93 =$$
$$= 7n - 63 = 7(n - 9).$$

Отже, даний вираз можна подати у вигляді добутку двох множників, один з яких дорівнює 7, а другий набуває тільки цілих значень. Цей факт доводить твердження задачі.

?

Як помножити многочлен на многочлен?

392.° Виконайте множення:

1) $(a - 2)(b + 5)$;
2) $(m + n)(p - k)$;
3) $(x - 8)(x + 4)$;
4) $(x - 10)(x - 9)$;
5) $(c + 5)(c + 8)$;
6) $(3y + 1)(4y - 6)$;
7) $(-2m - 3)(5 - m)$;
8) $(5x^2 - x)(6x^2 + 4x)$;
9) $(-c - 4)(c^3 + 3)$;
10) $(x - 5)(x^2 + 4x - 3)$;
11) $(2a + 3)(4a^2 - 4a + 3)$;
12) $a(5a - 4)(3a - 2)$.

393.° Перетворіть у многочлен вираз:

1) $(a + b)(c - d)$;
2) $(x - 6)(x - 4)$;
3) $(a - 3)(a + 7)$;
4) $(11 - c)(c + 8)$;
5) $(d + 13)(2d - 1)$;
6) $(3y - 5)(2y - 12)$;
7) $(2x^2 - 3)(x^2 + 4)$;
8) $(x - 6)(x^2 - 2x + 9)$;
9) $(5x - y)(2x^2 + xy - 3y^2)$;
10) $b(6b + 7)(3b - 4)$.

394.° Спростіть вираз:

1) $(x + 2)(x + 11) - 2x(3 - 4x)$;
2) $(a + 5)(a - 2) + (a - 4)(a + 6)$;

3) $(y - 9)(3y - 1) - (2y + 1)(5y - 7)$;
4) $(4x - 1)(4x - 3) - (2x - 10)(8x + 1)$.

395.° Спростіть вираз:
1) $(a - 2)(a - 1) - a(a + 1)$;
2) $(b - 5)(b + 10) + (b + 6)(b - 8)$;
3) $(2c + 3)(3c + 2) - (2c + 7)(2c - 7)$;
4) $(3d + 5)(5d - 1) - (6d - 3)(2 - 8d)$.

396.° Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $(x + 2)(x - 5) - (x - 3)(x + 4)$, якщо $x = -5{,}5$;
2) $(y + 9)(y - 2) + (3 - y)(6 + 5y)$, якщо $y = -1\frac{1}{2}$.

397.° Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $(a + 3)(a - 10) - (a + 7)(a - 4)$, якщо $a = -0{,}01$;
2) $(8c + 12)(3c - 1) + (3c + 2)(-5c - 6)$, якщо $c = 1\frac{1}{3}$.

398.˙ Розв'яжіть рівняння:
1) $(2x - 3)(4x + 3) - 8x^2 = 33$;
2) $(2x - 6)(8x + 5) + (3 - 4x)(3 + 4x) = 55$;
3) $21x^2 - (3x - 7)(7x - 3) = 37$;
4) $(x + 1)(x + 2) - (x - 3)(x + 4) = 12$;
5) $(-4x + 1)(x - 1) - x = (5 - 2x)(2x + 3) - 17$.

399.˙ Розв'яжіть рівняння:
1) $(2x - 1)(15 + 9x) - 6x(3x - 5) = 87$;
2) $(14x - 1)(2 + x) = (2x - 8)(7x + 1)$;
3) $(x + 10)(x - 5) - (x - 6)(x + 3) = 16$;
4) $(3x + 7)(8x + 1) = (6x - 7)(4x - 1) + 93x$.

400.˙ Виконайте множення:
1) $(x + 2)(x - 1)(x - 4)$;
2) $(2x + 1)(x + 5)(x - 6)$;
3) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x - 3)$;
4) $(a + 2b - c)(a - 3b + 2c)$;
5) $(a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$;
6) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

401.˙ Перетворіть у многочлен вираз:
1) $(a + 1)(a - 2)(a - 3)$;
2) $(3a - 2)(a + 3)(a - 7)$;
3) $(a^2 - 2a + 1)(a^2 + 3a - 2)$;
4) $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$.

402.˙ Замініть степінь добутком, а потім добуток перетворіть у многочлен:
1) $(a + 5)^2$; 2) $(4 - 3b)^2$; 3) $(a + b + c)^2$; 4) $(a - b)^3$.

403.˙ Доведіть, що при будь-якому значенні змінної значення виразу $(x + 3)(x^2 - 4x + 7) - (x^2 - 5)(x - 1)$ дорівнює 16.

404.˙ Доведіть, що при будь-якому значенні змінної значення виразу $(x - 3)(x^2 + 7) - (x - 2)(x^2 - x + 5)$ дорівнює -11.

405.˙ Задумали чотири натуральних числа. Друге число на 1 більше за перше, третє — на 5 більше за друге, а четверте — на 2 більше за третє. Знайдіть ці числа, якщо відношення першого числа до третього дорівнює відношенню другого числа до четвертого.

406.˙ Задумали три натуральних числа. Друге число на 4 більше за перше, а третє — на 6 більше за друге. Знайдіть ці числа, якщо відношення першого числа до другого дорівнює відношенню другого числа до третього.

407.˙ Знайдіть чотири послідовних натуральних числа таких, що добуток четвертого і другого з цих чисел на 17 більший за добуток третього і першого.

408.˙ Знайдіть 3 послідовних натуральних числа таких, що добуток другого і третього з цих чисел на 50 більший за квадрат першого.

409.˙ Сторона квадрата на 3 см менша від однієї із сторін прямокутника і на 5 см більша за його другу сторону. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа на 45 см^2 більша за площу даного прямокутника.

410.˙ Периметр прямокутника дорівнює 60 см. Якщо одну його сторону зменшити на 5 см, а другу збільшити на 3 см, то його площа зменшиться на 21 см^2. Знайдіть сторони даного прямокутника.

411.˙ Довжина прямокутника на 2 см більша за його ширину. Якщо довжину збільшити на 2 см, а ширину зменшити на 4 см, то площа прямокутника зменшиться на 40 см^2. Знайдіть початкові довжину і ширину прямокутника.

412.˙ Доведіть тотожність:

1) $x^2 - 8x + 7 = (x - 1)(x - 7)$;
2) $y^2(y - 7)(y + 2) = y^4 - 5y^3 - 14y^2$;
3) $a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$;
4) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) = a^4 - 1$;
5) $(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1) = a^8 + a^4 + 1$.

413.˙ Доведіть тотожність:

1) $3a^2 + 10a + 3 = 3(a + 3)\left(a + \frac{1}{3}\right)$;
2) $(a + 1)(a^2 + 5a + 6) = (a^2 + 3a + 2)(a + 3)$;
3) $(a + 1)(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) = a^5 + 1$.

414.˙ Чи при всіх натуральних значеннях n значення виразу $(n + 9)(n + 11) - (n + 3)(n + 5)$ кратне 12?

415.˙ Чи при всіх натуральних значеннях n значення виразу $(n + 29)(n + 3) - (n + 7)(n + 1)$ кратне 8?

416.˙ Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $(a - 2)(* + 6) = a^2 + * - *$;
2) $(2a + 7)(a - *) = * + * - 14$.

417.˙ Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $(x + 3)(* + 5) = 3x^2 + * + *$;
2) $(x - 4)(x + *) = * + * + 24$.

418.˙˙ Вибрали деякі чотири послідовних натуральних числа. Чи залежить різниця добутку другого і третього з цих чисел та добутку першого і четвертого від вибору чисел?

419.˙˙ Вибрали деякі три послідовних натуральних числа. Чи залежить різниця квадрата другого з цих чисел та добутку першого і третього від вибору чисел?

420.˙˙ Доведіть, що значення виразу $\overline{ab} \cdot \overline{ba} - ab$ ділиться націло на 10 незалежно від значень a і b.

421.˙˙ Остача при діленні натурального числа x на 6 дорівнює 3, а остача при діленні натурального числа y на 6 дорівнює 2. Доведіть, що добуток чисел x і y ділиться націло на 6.

422.˙˙ Остача при діленні натурального числа a на 8 дорівнює 3, а остача при діленні натурального числа b на 8 дорівнює 7. Доведіть, що остача при діленні добутку чисел a і b на 8 дорівнює 5.

423.•• Остача при діленні натурального числа m на 11 дорівнює 9, а остача при діленні натурального числа n на 11 дорівнює 5. Доведіть, що остача при діленні добутку чисел m і n на 11 дорівнює 1.

424.•• Доведіть, що коли $ab + bc + ac = 0$, то:
$(a - b)(a - c) + (b - c)(b - a) + (c - a)(c - b) = a^2 + b^2 + c^2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

425. Двоє робітників виготовили разом 108 деталей. Один робітник працював 5 год, а другий — 3 год. Скільки деталей виготовляв щогодини кожний робітник, якщо разом за 1 год вони виготовляють 26 деталей?

426. Змішали 72 г п'ятивідсоткового розчину солі і 48 г п'ятнадцятивідсоткового розчину солі. Знайдіть відсотковий вміст солі в утвореному розчині.

427. Розв'яжіть рівняння:

1) $\overline{1x} + \overline{2x} = \overline{x6}$;   2) $\overline{x4} + \overline{x8} = \overline{1x2}$.

428. Доведіть тотожність:

1) $18^{16n} = 12^{8n} \cdot 9^{12n}$;   2) $75^{8n} = 225^{4n} \cdot 625^{2n}$,

де n — натуральне число.

429. (*Старовинна грецька задача.*) Демохар четверту частину життя прожив хлопчиком, п'яту частину — юнаком, третю частину — зрілою людиною і 13 років — у літах. Скільки років прожив Демохар?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

430. Обчисліть, використовуючи розподільну властивість множення:

1) $4{,}8 \cdot 2{,}9 + 4{,}8 \cdot 7{,}1$;   3) $3\frac{9}{14} \cdot 0{,}3 - 0{,}3 \cdot 1\frac{10}{21} + 0{,}3 \cdot 1\frac{1}{6}$.

2) $3\frac{9}{14} \cdot \frac{7}{9} - 2\frac{5}{14} \cdot \frac{7}{9}$;

431. Розв'яжіть рівняння:

1) $x(x + 4) = 0$;

2) $(x - 6)(x + 9) = 0$;

3) $(3x + 5)(10 - 0{,}4x) = 0$.

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 11, 13 на с. 261, 262.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

432. У кожній клітинці дошки розміром 5×5 клітинок сидить жук. У деякий момент усі жуки переповзають на сусідні (по горизонталі чи вертикалі) клітинки. Чи обов'язково при цьому залишиться порожня клітинка?

12. Розкладання многочленів на множники. Винесення спільного множника за дужки

Помножимо два многочлени $2x - 1$ і $x + 1$. Маємо:

$$(2x - 1)(x + 1) = 2x^2 + 2x - x - 1 = 2x^2 + x - 1.$$

Отримали тотожність $(2x - 1)(x + 1) = 2x^2 + x - 1$, яку можна записати й так: $2x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x + 1)$.

Про такий запис говорять, що многочлен $2x^2 + x - 1$ **розклали на множники** $2x - 1$ і $x + 1$.

Узагалі, подання многочлена у вигляді добутку кількох многочленів називають **розкладанням многочлена на множники**.

Розкладання многочлена на множники є ключем до розв'язування багатьох задач. Наприклад, кожне з рівнянь $2x - 1 = 0$ і $x + 1 = 0$ розв'язати дуже легко, а ось рівняння $2x^2 + x - 1 = 0$ ви поки що розв'язувати не вмієте. Проте, якщо скористатися розкладанням многочлена $2x^2 + x - 1$ на множники, то можна записати:

$$(2x - 1)(x + 1) = 0.$$

Звідси $2x - 1 = 0$ або $x + 1 = 0$. Шуканими коренями є числа $0{,}5$ і -1.

Таким чином, розкладання многочлена на множники дозволило звести розв'язування складного рівняння до розв'язування двох більш простих.

Є чимало способів розкладання многочлена на множники. Найпростіший з них — **винесення спільного множника за дужки**.

Це перетворення вам уже знайоме. Наприклад, значення виразу $1{,}62 \cdot 1{,}08 - 0{,}08 \cdot 1{,}62$ знаходили так:

$$1{,}62 \cdot 1{,}08 - 0{,}08 \cdot 1{,}62 = 1{,}62\,(1{,}08 - 0{,}08) = 1{,}62.$$

Тут використано розподільну властивість множення $c\,(a + b) = ac + bc$, прочитану справа наліво: $ac + bc = c\,(a + b)$.

Скористуємося цією ідеєю в наступних прикладах.

ПРИКЛАД 1

Розкладіть на множники:

1) $a^2b^2 + ab^3$; 2) $8a^2b^2 - 12ab^3$; 3) $10a^8 - 5a^5$.

1) Одночлени a^2b^2 і ab^3 містять такі спільні множники: a, b, ab, b^2 і ab^2. Будь-який з цих множників можна винести за дужки. Але зазвичай спільний множник обирають так, щоб члени многочлена, який залишається в дужках, не мали спільного буквеного множника. Такі міркування підказують винести за дужки спільний множник ab^2:

$$a^2b^2 + ab^3 = ab^2\,(a + b).$$

Щоб перевірити, чи правильно розкладено многочлен на множники, треба ці множники помножити.

2) Якщо коефіцієнти многочлена — цілі числа, то за дужки зазвичай виносять найбільший спільний дільник модулів цих коефіцієнтів (у нашому прикладі це число 4):

$$8a^2b^2 - 12ab^3 = 4ab^2\,(2a - 3b).$$

3) Маємо: $10a^8 - 5a^5 = 5a^5\,(2a^3 - 1)$.

ПРИКЛАД 2

Подайте у вигляді добутку многочленів вираз:

1) $a\,(m - 3) + b\,(m - 3)$; 3) $6x\,(x - 7) - (x - 7)^2$.

2) $x\,(c - d) + y\,(d - c)$;

1) У даному випадку спільним множником є многочлен $m - 3$:

$$a\,(m - 3) + b\,(m - 3) = (m - 3)\,(a + b).$$

2) Маємо:

$$x\,(c - d) + y\,(d - c) = x\,(c - d) + y \cdot (-1) \cdot (c - d) =$$
$$= x\,(c - d) - y\,(c - d) = (c - d)\,(x - y).$$

3) Маємо:

$$6x(x-7)-(x-7)^2=(x-7)(6x-(x-7))=$$
$$=(x-7)(6x-x+7)=(x-7)(5x+7).$$

ПРИКЛАД 3

Винесіть за дужки спільний множник у виразі

$$(12x-18y)^2.$$

Маємо:

$$(12x-18y)^2=(6(2x-3y))^2=6^2(2x-3y)^2=36(2x-3y)^2.$$

ПРИКЛАД 4

Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^2-12x=0$; 2) $(3x-7)(x+4)+(x-1)(x+4)=0$.

1) Розклавши ліву частину рівняння на множники і застосувавши умову, за якою добуток дорівнює нулю, маємо:

$$4x(x-3)=0;$$
$$x=0 \text{ або } x-3=0;$$
$$x=0 \text{ або } x=3.$$

Відповідь: 0; 3.

2) $$(3x-7)(x+4)+(x-1)(x+4)=0;$$
$$(x+4)(3x-7+x-1)=0;$$
$$x+4=0 \text{ або } 4x-8=0;$$
$$x=-4 \text{ або } x=2.$$

Відповідь: −4; 2.

ПРИКЛАД 5

Доведіть, що значення виразу: 1) 8^7-4^9 ділиться націло на 14; 2) 20^3-4^4 ділиться націло на 121.

1) Подамо вирази 8^7 і 4^9 у вигляді степенів з основою 2 і винесемо за дужки спільний множник. Отримуємо:

$$8^7-4^9=(2^3)^7-(2^2)^9=2^{21}-2^{18}=2^{18}(2^3-1)=$$
$$=2^{18}\cdot(8-1)=2^{18}\cdot7=2^{17}\cdot2\cdot7=2^{17}\cdot14.$$

Отже, даний вираз дорівнює добутку двох натуральних чисел, одне з яких є 14. Звідси випливає, що значення виразу 8^7-4^9 ділиться націло на 14.

2) Маємо: $20^3-4^4=(5\cdot4)^3-4^4=5^3\cdot4^3-4^4=4^3(5^3-4)=$
$$=4^3(125-4)=4^3\cdot121.$$

Отже, значення даного виразу ділиться націло на 121.

ПРИКЛАД 6

При якому значенні a має безліч коренів рівняння $(x + 2)(x + a) - x(x + 1) = 3a + 1$?

Маємо:

$$x^2 + ax + 2x + 2a - x^2 - x = 3a + 1;$$
$$ax + x + 2a = 3a + 1;$$
$$ax + x = a + 1;$$
$$(a + 1)x = a + 1.$$

Тільки при $a = -1$ останнє рівняння набуває вигляду $0x = 0$ і має безліч коренів.

Відповідь: при $a = -1$.

1. Поясніть, що називають розкладанням многочлена на множники.
2. Яка властивість множення використовується при винесенні спільного множника за дужки?

433.° Винесіть за дужки спільний множник:

1) $am + an$;
2) $6x - 6y$;
3) $4b + 16c$;
4) $12x - 15y$;
5) $-cx - cy$;
6) $4bk + 4bt$;
7) $-8a - 18b$;
8) $ax + a$;
9) $7c - 7$;
10) $24x + 30y$;
11) $10mx - 15my$;
12) $x^2 + xy$;
13) $3d^2 - 3cd$;
14) $4a^2 + 16ab$;
15) $a^6 - a^3$;
16) $b^2 + b^8$;
17) $7p^3 - 5p$;
18) $15c^2d - 3cd$;
19) $14x^2y + 21xy^2$;
20) $-2x^9 + 16x^6$;
21) $8a^4b^2 - 36a^3b^7$.

434.° Розкладіть на множники:

1) $3a + 6b$;
2) $12m - 16n$;
3) $10ck - 15cp$;
4) $8ax + 8a$;
5) $5b - 25bc$;
6) $14x^2 + 7x$;
7) $n^{10} - n^5$;
8) $m^6 + m^7$;
9) $9x - 27x^4$;
10) $18y^5 + 12y^4$;
11) $56a^{10}b^6 - 32a^4b^8$;
12) $36mn^5 + 63m^2n^6$.

435.° Обчисліть, використовуючи винесення спільного множника за дужки:

1) $173^2 + 173 \cdot 27$;
2) $214 \cdot 314 - 214^2$;
3) $0{,}4^3 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}6$.

436.° Знайдіть значення виразу:

1) $516^2 - 516 \cdot 513$;
2) $0{,}7^3 + 0{,}7 \cdot 0{,}51$;
3) $0{,}2^4 - 0{,}2^3 \cdot 1{,}2$.

437.° Обчисліть значення виразу, попередньо розклавши його на множники:

1) $6{,}32x - x^2$, якщо $x = 4{,}32$;
2) $a^3 + a^2b$, якщо $a = 1{,}5$, $b = -2{,}5$;
3) $m^3p - m^2n^2$, якщо $m = 3$, $p = \frac{1}{3}$, $n = -3$.

V **438.°** Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}74x^2 + 26x$, якщо $x = 100$;
2) $x^2y^3 - x^3y^2$, якщо $x = 4$, $y = 5$.

439.° Розв'яжіть рівняння:

1) $y^2 - 6y = 0$; 3) $4m^2 - 20m = 0$; 5) $9x^2 - 6x = 0$;
2) $x^2 + x = 0$; 4) $13x^2 + x = 0$; 6) $12x - 0{,}3x^2 = 0$.

440.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - x = 0$; 3) $5x^2 - 30x = 0$;
2) $p^2 + 15p = 0$; 4) $14x^2 + 18x = 0$.

441.° Розкладіть на множники:

1) $2x(a + b) + y(a + b)$; 7) $b(b - 20) + (20 - b)$;
2) $(a - 4) - b(a - 4)$; 8) $6a(a - 3b) - 13b(3b - a)$;
3) $5a(m - n) + 7b(m - n)$; 9) $(m - 9)^2 - 3(m - 9)$;
4) $6x(4x + 1) - 11(4x + 1)$; 10) $a(a + 5)^2 + (a + 5)$;
5) $a(c - d) + b(d - c)$; 11) $(m^2 - 3) - n(m^2 - 3)^2$;
6) $x(x - 6) - 10(6 - x)$; 12) $8c(p - 12) + 7d(p - 12)^2$.

442.° Подайте вираз у вигляді добутку многочленів:

1) $c(x - 3) - d(x - 3)$; 5) $4x(2x - y) - 5y(y - 2x)$;
2) $m(p - k) - (p - k)$; 6) $(y + 1)^2 - 4y(y + 1)$;
3) $m(x - y) - n(y - x)$; 7) $10(a^2 - 5) + (a^2 - 5)^2$;
4) $x(2 - x) + 4(x - 2)$; 8) $(a - 2)^2 - 6(a - 2)$.

443.• Розкладіть на множники:

1) $2a^5b^2 - 4a^3b + 6a^2b^3$; 4) $9x^3 + 4x^2 - x$;
2) $mn^3 + 5m^2n^2 - 7m^2n$; 5) $-6m^4 - 8m^5 - 2m^6$;
3) $xy^2 + x^2y - xy$; 6) $42a^4b - 28a^3b^2 - 70a^5b^3$.

444.• Винесіть за дужки спільний множник:

1) $m^2n + mn + n$; 3) $7a^4b^3 - 14a^3b^4 + 21a^2b^5$;
2) $3x^6 + 6x^5 - 15x^4$; 4) $20b^6c^5 - 45b^5c^6 - 30b^5c^5$.

445.• Чи є в наведених рівностях помилки:

1) $4a + 4 = 4(a + 4)$;
2) $6ab - 3b = b(6a - 2b)$;
3) $-5x - 10y = -5(x - 2y)$;
4) $x^6 - x^4 + x^2 = x^2(x^3 - x^2 + x)$?

446.˙ Доведіть, що сума будь-якого натурального числа і його квадрата є парним числом.

447.˙ Розкладіть на множники:

1) $a(2a+b)(a+b)-4a(a+b)^2$;
2) $3m^2(m-8)+6m(m-8)^2$;
3) $(2a+3)(a+5)+(a-1)(a+5)$;
4) $(3x+7)(4y-1)-(4y-1)(2x+10)$;
5) $(5m-n)^3(m+8n)^2-(5m-n)^2(m+8n)^3$.

448.˙ Подайте у вигляді добутку многочленів вираз:

1) $(x-6)(2x-4)+(x-6)(8-x)$;
2) $(x^2-2)(3y+5)-(x^2-2)(y+12)$;
3) $(4a-3b)(5a+8b)+(3b-4a)(2a+b)$;
4) $(p-9)^4(2p+1)^3+(p-9)^3(2p+1)^4$.

449.˙ Розв'яжіть рівняння, використовуючи розкладання на множники:

1) $(x-3)(x+7)-(x+7)(x-8)=0$;
2) $(4x-9)(x-2)+(1-x)(x-2)=0$;
3) $0{,}2x(x-5)+8(x-5)=0$;
4) $7(x-7)-(x-7)^2=0$.

450.˙ Розв'яжіть рівняння, використовуючи розкладання на множники:

1) $(2x-9)(x+6)-x(x+6)=0$;
2) $(3x+4)(x-10)+(10-x)(x-8)=0$;
3) $3(3x+1)^2-4(3x+1)=0$;
4) $(9x-12)-x(9x-12)=0$.

451.˙ Винесіть за дужки спільний множник:

1) $(2x-6)^2$;
2) $(5y+5)^2$;
3) $(36x+30y)^2$;
4) $(2x+4)^4$;
5) $(6x-9y)^3$;
6) $(a^2+ab)^2$;
7) $(-7a-14ab)^2$;
8) $(3c^4-6c^3)^4$.

452.˙ Винесіть за дужки спільний множник:

1) $(4x-4y)^2$;
2) $(18a+27b)^2$;
3) $(8m-10n)^3$;
4) $(a^2-9a)^2$;
5) $(16x^2y+40xy^2)^2$;
6) $(22x^4-28x^2y^3)^5$.

453.˙ Доведіть, що значення виразу:

1) 19^5+19^4 кратне 20;
2) $8^{10}-8^9-8^8$ кратне 11;
3) 8^7+2^{15} кратне 5;

4) $2 \cdot 3^{2006} + 5 \cdot 3^{2005} + 7 \cdot 3^{2004}$ кратне 10;
5) $27^4 - 9^5$ кратне 24;
6) $12^4 - 4^6$ кратне 130.

454.• Доведіть, що значення виразу:
1) $25^{25} - 25^{24}$ ділиться націло на 12;
2) $16^4 + 8^5 - 4^7$ ділиться націло на 10;
3) $36^5 + 6^9$ ділиться націло на 42;
4) $10^5 - 5^7$ ділиться націло на 7.

455.•• Доведіть, що коли:
1) $a + b = 2$, то $a^2b + ab^2 - 2ab = 0$;
2) $3a + 4b = -2$, то $12a^3b + 16a^2b^2 + 32a^2b = 24a^2b$.

456.•• Доведіть, що коли:
1) $a + b + c = 0$, то $a^3b^4c^2 + a^2b^3c^2 + a^2b^3c^3 = 0$;
2) $a^2 - b^2 = 2ab + 1$, то $a^6b^4 - 2a^5b^5 - a^4b^6 = a^4b^4$.

457.•• Розв'яжіть рівняння:
1) $8x^2 - 3(x - 4) = 12$;
2) $5x^3 - x(2x - 3) = 3x$;
3) $4x - 0{,}2x(x + 20) = x^3$;
4) $9x(x - 3) + (x - 4)(x - 5) = 20$.

458.•• Знайдіть корені рівняння:
1) $(3x - 2)(3x + 2) - (2x - 5)(8x - 3) = 4x - 19$;
2) $\frac{1}{3}(12 + x^3) = \frac{1}{9}x^2 + 4$.

459.•• Спростіть вираз, використовуючи винесення спільного множника за дужки:
1) $(a - 1)(a + 2) - (a - 2)(a + 2) + (a - 3)(a + 2) - (a - 4)(a + 2)$;
2) $(3a - 2)(5b^2 - 4b + 10) + (2 - 3a)(5b^2 - 6b + 10)$;
3) $(4a - 7b)(2a^2 - 4ab + b^2) - (4a - 7b)(2a^2 - 4ab - b^2)$.

460.•• Спростіть вираз, використовуючи винесення спільного множника за дужки:
1) $ab(a^2 + ab + b^2) - ab(a^2 - ab + b^2)$;
2) $(a + b)(a + 1) - (a + b)(1 - b) + (b + a)(b - a)$.

461.•• Розв'яжіть рівняння $4x^2 - 1{,}2x = a$, якщо один з його коренів дорівнює 0,3.

462.•• Розв'яжіть рівняння $5x^2 + 8x = a$, якщо один з його коренів дорівнює $-1{,}6$.

463.•• Винесіть за дужки спільний множник (n — натуральне число):

1) $a^{n+1} + a^n$;
2) $b^n - b^{n-3}$, $n > 3$;
3) $c^{n+2} + c^{n-4}$, $n > 4$;
4) $d^{2n} - d^n$;
5) $2^{n+3} + 3 \cdot 2^{n+2} - 5 \cdot 2^{n+1}$;
6) $9^{n+1} + 3^{n+2}$.

464.•• Розкладіть на множники (n — натуральне число):

1) $a^{n+2} - a^n$;
2) $3b^{n+2} - 2b^{n+1} + b^n$;
3) $32^n + 16^{2n+1}$.

465.•• Відомо, що при деякому значенні y значення виразу $y^2 - 4y + 2$ дорівнює 6. Знайдіть при цьому значенні y значення виразу:

1) $5y^2 - 20y + 10$;
2) $y^2(y^2 - 4y + 2) - 4y(y^2 - 4y + 2)$;
3) $3y^2 - 12y + 8$.

466.•• Відомо, що при деякому значенні a значення виразу $a^2 + 2a - 5$ дорівнює -4. Знайдіть при цьому значенні a значення виразу:

1) $-2a^2 - 4a + 10$;
2) $a^2(a^2 + 2a - 5) + 2a(a^2 + 2a - 5)$;
3) $4a^2 + 8a - 16$.

467.•• При якому значенні a не має коренів рівняння:

1) $(x + 1)(x - 3) - x(x - 3) = ax$;
2) $x(5x - 1) - (x - a)(5x - 1) = 4x - 2a$;
3) $(2x - 5)(x + a) - (2x + 3)(x + 1) = 4$?

468.•• При якому значенні a має безліч коренів рівняння:

1) $(x - 4)(x + a) - (x + 2)(x - a) = -6$;
2) $x(3x - 2) - (x + 2a)(3x + 2) = 5a + 6$?

469.* Знайдіть усі двоцифрові числа, які дорівнюють добутку їх цифр, збільшених на 1.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

470. Спростіть вираз:

1) $0,42ac^3 \cdot 1\frac{3}{7}a^4c^2$;
2) $1,2xyz \cdot 2\frac{1}{6}x^5y^6$;
3) $-2\frac{1}{3}m^2np^3 \cdot \left(\frac{3}{7}np^4\right)^2$;
4) $\left(1\frac{1}{2}x^2y^3\right)^5 \cdot \frac{16}{27}x^8y^2$.

471. Вміст солі в морській воді становить 5 %. Скільки кілограмів прісної води треба додати до 30 кг морської води, щоб вміст солі в утвореному розчині становив 3 %?

472. Для ремонту школи придбали фарбу. За перший день витратили на 2 банки фарби більше за половину всієї фарби, а за другий — $\frac{5}{8}$ кількості банок фарби, витраченої у перший день. Після цього залишилося 2 банки. Скільки банок фарби було придбано?

473. У коробці лежать 2 червоних, 4 зелених і 10 синіх олівців. Яка ймовірність того, що навмання вийнятий олівець буде:

1) червоним; 2) зеленим; 3) не зеленим?

Яку найменшу кількість олівців треба вийняти, щоб серед них обов'язково був синій олівець?

474. Чи існує двоцифрове число, у якому цифра десятків на 4 більша за цифру одиниць, а різниця між даним числом і числом, записаним тими самими цифрами, але у зворотному порядку, дорівнює 27?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

475. З аркуша картону вирізали кілька рівносторонніх трикутників. У вершинах кожного написали цифри 1, 2, 3. Потім ці трикутники склали в стіс. Чи могло статися так, що сума чисел уздовж кожного ребра стосу дорівнює 55?

13. Розкладання многочлена на множники. Метод групування

Многочлен $ax + bx + ay + by$ не вдасться розкласти на множники методом винесення за дужки спільного множника, оскільки множника, спільного для всіх доданків, немає. Проте члени цього многочлена можна об'єднати в групи так, що доданки кожної групи матимуть спільний множник:

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by) = x(a + b) + y(a + b).$$

Ми отримали вираз, у якому обидва доданки мають множник $(a + b)$. Винесемо його за дужки:

$$x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y).$$

Заданий многочлен удалося розкласти на множники завдяки тому, що ми у вигідний спосіб об'єднали в групи його члени. Тому описаний прийом називають **методом групування.**

ПРИКЛАД 1

Розкладіть на множники многочлен:

1) $2ac + 2bc + 5am + 5bm$;
2) $x^4 - 2x^3 - 3x + 6$;
3) $xy - 12 + 4x - 3y$.

1) Згрупувавши члени даного многочлена так, щоб доданки в кожній групі мали спільний множник, отримуємо:

$$2ac + 2bc + 5am + 5bm = (2ac + 2bc) + (5am + 5bm) =$$
$$= 2c\,(a + b) + 5m\,(a + b) = (a + b)\,(2c + 5m).$$

Той самий результат можна отримати, якщо доданки згрупувати в інший спосіб:

$$(2ac + 5am) + (2bc + 5bm) = a\,(2c + 5m) + b\,(2c + 5m) =$$
$$= (2c + 5m)\,(a + b).$$

2) Маємо:

$$x^4 - 2x^3 - 3x + 6 = (x^4 - 2x^3) - (3x - 6) =$$
$$= x^3\,(x - 2) - 3\,(x - 2) = (x - 2)\,(x^3 - 3).$$

3) $$xy - 12 + 4x - 3y = (xy + 4x) + (-12 - 3y) =$$
$$= x\,(y + 4) - 3\,(4 + y) = (y + 4)\,(x - 3).$$

ПРИКЛАД 2

Розкладіть на множники тричлен $x^2 + 6x + 8$.

Подавши доданок $6x$ у вигляді суми $2x + 4x$, застосуємо метод групування:

$$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 4x + 8 = (x^2 + 2x) + (4x + 8) =$$
$$= x\,(x + 2) + 4\,(x + 2) = (x + 2)\,(x + 4).$$

476.° Розкладіть на множники многочлен:

1) $ma + mb + 4a + 4b$;
2) $3x + cy + cx + 3y$;
3) $5a - 5b + ap - bp$;
4) $7m + mn + 7 + n$;
5) $a - 1 + ab - b$;
6) $xy + 8y - 2x - 16y$;
7) $ab + ac - b - c$;
8) $3p - 3k - 4ap + 4ak$.

477.° Подайте у вигляді добутку многочленів вираз:

1) $ay - 3y - 4a + 12$;
2) $9a + 9 - na - n$;

3) $6x + ay + 6y + ax$;
4) $8x - 8y + xz - yz$;
5) $mn + m - n - 1$;
6) $ab - ac - 2b + 2c$.

478.° Розкладіть на множники многочлен:
1) $a^3 + a^2 + a + 1$;
2) $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 12$;
3) $c^6 - 10c^4 - 5c^2 + 50$;
4) $y^3 - 18 + 6y^2 - 3y$;
5) $a^2 - ab + ac - bc$;
6) $20a^3bc - 28ac^2 + 15a^2b^2 - 21bc$;
7) $x^2y^2 + xy + axy + a$;
8) $24x^6 - 44x^4y - 18x^2y^3 + 33y^4$.

479.° Розкладіть на множники многочлен:
1) $8c^3 - 2c^2 + 4c - 1$;
2) $x^2y + x + xy^2 + y$;
3) $9a^2b - 3a^2 + 3b^2 - b$;
4) $8a^2 - 2ab - 4ac + bc$;
5) $2b^3 - 7b^2c - 4b + 14c$;
6) $6x^5 + 4x^2y^2 - 9x^3y - 6y^3$.

480.• Знайдіть значення виразу, розклавши його попередньо на множники:
1) $2a^3 - 3a^2 - 2ab + 3b$, якщо $a = 0{,}5$, $b = 2{,}25$;
2) $xy + y^2 - 12x - 12y$, якщо $x = 10{,}8$, $y = -8{,}8$;
3) $27x^3 - 36x^2 + 6x - 8$, якщо $x = -1\frac{1}{3}$.

481.• Знайдіть значення виразу:
1) $2a + b + 2a^2 + ab$, якщо $a = -3$, $b = 4$;
2) $3x^3 - x^2 - 6x + 2$, якщо $x = \frac{2}{3}$.

482.• Обчисліть, не використовуючи калькулятора:
1) $3{,}74^2 + 3{,}74 \cdot 2{,}26 - 3{,}74 \cdot 1{,}24 - 2{,}26 \cdot 1{,}24$;
2) $58{,}7 \cdot 1{,}2 + 36 \cdot 3{,}52 - 34{,}7 \cdot 1{,}2 - 2{,}32 \cdot 36$;
3) $2\frac{4}{9} \cdot 3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{7} \cdot 2{,}8 + 2\frac{5}{9} \cdot 3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{7} \cdot 2{,}2$.

483.• Знайдіть значення виразу:
1) $34{,}4 \cdot 13{,}7 - 34{,}4 \cdot 8{,}7 - 15{,}6 \cdot 8{,}7 + 13{,}7 \cdot 15{,}6$;
2) $0{,}6^3 - 2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}8^2 - 2 \cdot 0{,}8^3$.

484.• Розкладіть на множники многочлен:
1) $ax^2 + ay - bx^2 - by + cx^2 + cy$;
2) $a^2b + a + ab^2 + b + 3ab + 3$;
3) $x^3 - x^2 + x^2y + x - xy + y$;
4) $m^2n + mn - 5 - 5m + n - 5m^2$;
5) $x^6 - 2x^5 + 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$;
6) $a^3b + ab^2 - abc^3 - a^2c - bc + c^4$.

485.• Подайте вираз у вигляді добутку многочленів:
1) $ab + ac + ad + bx + cx + dx$;
2) $7p - 7k - px + kx + k - p$;

3) $x^3y^3 - x^2y^2 + xy - 6 + 6xy - 6x^2y^2$;
4) $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$.

486.•• Розкладіть на множники вираз (n — натуральне число):
1) $a^{n+1} + a^n + a + 1$;
2) $b^{n+2} - b - 1 + b^{n+1}$;
3) $3y^{n+3} - 3y^2 - 5 + 5y^{n+1}$.

487.•• Розкладіть на множники тричлен, подавши попередньо один з його членів у вигляді суми подібних доданків:
1) $x^2 + 8x + 12$;
2) $x^2 - 5x + 4$;
3) $x^2 + 7x - 8$;
4) $x^2 - 4x - 5$.

488.•• Розкладіть на множники тричлен:
1) $x^2 + 4x + 3$;
2) $x^2 - 10x + 16$;
3) $x^2 + 3x - 18$;
4) $x^2 - 4x - 32$.

489.* Доведіть, що при всіх натуральних значеннях n значення виразу $n^3 + 3n^2 + 2n$ ділиться націло на 6.

490.* Розкладіть на множники многочлен:
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$.

491.* Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні $n > 1$ значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ ділиться націло на 10.

492.* Відомо, що при деяких значеннях x і y виконується рівність $x^2 + y^2 = 1$. Знайдіть при цих самих значеннях x і y значення виразу $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

493. (*Задача з українського фольклору.*) Підпасок привів на полонину овець. На полонині були кілки. Якщо до кожного кілка він прив'яже по вівці, то для однієї кілка не вистачить. Якщо ж до кожного кілка він прив'яже по дві вівці, то один кілок залишиться вільним. Скільки овець привів підпасок?

494. Петро і Дмитро можуть прополоти город, працюючи разом, за 2,4 год. Петро може зробити це самостійно за 4 год. Скільки часу потрібно Дмитру, щоб самостійно прополоти город?

495. В одному бідоні було в 4 рази більше молока, ніж у другому. Коли з першого бідона перелили 10 л молока в другий, то об'єм молока в другому бідоні склав $\frac{2}{3}$ об'єму молока, що залишилось у першому бідоні. Скільки літрів молока було в кожному бідоні спочатку?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

496. Піднесіть до квадрата одночлен:

1) $2a$; 3) $3b^3$; 5) $0{,}3x$; 7) $\frac{1}{6}a^2b^3c^4$;

2) a^2; 4) $7x^4$; 6) $0{,}4y^5z^2$; 8) $1\frac{1}{3}m^6n$.

497. Запишіть у вигляді виразу:
1) суму чисел a і c;
2) різницю чисел m і n;
3) добуток суми чисел x і y та їх різниці;
4) квадрат різниці чисел x і y;
5) різницю квадратів чисел x і y.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

498. У турнірі, організованому за олімпійською системою (той, хто програв,— вибуває), взяло участь n тенісистів. Яку кількість матчів треба провести, щоб виявити переможця турніру?

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ № 3 «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

1. Подайте у вигляді многочлена вираз $3y^2(y^3 + 1)$.
А) $3y^6 + 1$; Б) $3y^6 + 3y^2$; В) $3y^5 + 1$; Г) $3y^5 + 3y^2$.

2. Спростіть вираз $-9y(y - 3) + 4{,}5y(2y - 4)$.
А) $45y$; Б) $-45y$; В) $-9y$; Г) $9y$.

3. Якому многочлену дорівнює вираз $(x - 3)(x + 7)$?
А) $x^2 + 4x - 21$; В) $x^2 + 10x - 21$;
Б) $x^2 - 4x - 21$; Г) $x^2 - 10x - 21$.

4. Спростіть вираз $(3x + 2)(2x - 1) - (5x - 2)(x - 4)$.
А) $x^2 - 23x - 10$; В) $x^2 - 21x + 6$;
Б) $x^2 + 23x - 10$; Г) $x^2 + 21x + 6$.

5. Винесіть спільний множник за дужки: $3mn - 4mk$.

А) $n(3m - 4k)$; В) $n(4m - 3k)$;

Б) $m(3n - 4k)$; Г) $m(4n - 3k)$.

6. Розкладіть на множники вираз $m^2n + mn^2$.

А) $m(m + n)$; В) $mn(m + n)$;

Б) $n(m + n)$; Г) $m^2n^2(m + n)$.

7. Розкладіть вираз $mn - mn^2$ на множники.

А) $mn(1 - n)$; В) $m(1 - n)(1 - n)$;

Б) $mn(1 + n)$; Г) $n(1 - m)(1 - m)$.

8. Подайте многочлен $2x^2 - 4x^6$ у вигляді добутку одночлена і многочлена.

А) $2x^2(1 - 2x^3)$; В) $2x^2(2 - x^3)$;

Б) $2x^2(1 - 2x^4)$; Г) $2x^2(2 - x^4)$.

9. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 2x = 0$.

А) 0; Б) 0; –2; В) 0; 2; Г) 2.

10. Подайте у вигляді добутку многочлен $ax - ay + 5x - 5y$.

А) $(x - y)(a + 5)$; В) $(x + y)(a - 5)$;

Б) $(x - y)(a - 5)$; Г) $(x + y)(a + 5)$.

11. Розв'яжіть рівняння $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 1$.

А) 11; Б) 1; В) 7; Г) 5.

12. При деякому значенні a значення виразу $a^2 - 7a + 3$ дорівнює 2. Знайдіть при цьому значенні a значення виразу $2a^2 - 14a + 10$.

А) 4; Б) 12; В) 8; Г) 14.

14. Добуток різниці і суми двох виразів

Нерідко в математиці крім знання загального закону (теореми) зручно користуватися правилами, що застосовуються в окремих (особливих) випадках.

Наприклад, коли множать десятковий дріб на 10, 100, 1000 і т. д., то немає потреби використовувати загальний алгоритм множення у стовпчик, а набагато зручніше застосувати правило перенесення коми.

Особливі ситуації зустрічаються і при множенні многочленів.

Розглянемо окремий випадок, коли у добутку двох многочленів один з них є різницею двох виразів, а другий — їх сумою.

Маємо:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Отримали тотожність

$$\boxed{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2}$$

Тепер при множенні різниці виразів на їх суму можна скоротити роботу, одразу записавши результат — різницю квадратів цих виразів. Тому цю тотожність називають **формулою скороченого множення:**
добуток різниці двох виразів та їх суми дорівнює різниці квадратів цих виразів.

ПРИКЛАД 1

Виконайте множення многочленів:

1) $(2a - 5b)(2a + 5b)$;
2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2)$;
3) $(-4mn - p)(4mn - p)$.

Розв'язування.

1) $(2a - 5b)(2a + 5b) = (2a)^2 - (5b)^2 = 4a^2 - 25b^2$.
2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2) = (3x^4 + y^2)(3x^4 - y^2) = (3x^4)^2 - (y^2)^2 =$
$= 9x^8 - y^4$.
3) $(-4mn - p)(4mn - p) = (-p - 4mn)(-p + 4mn) =$
$= (-p)^2 - (4mn)^2 = p^2 - 16m^2n^2$.

ПРИКЛАД 2

Спростіть вираз:

1) $(b - 3)(b + 3) - (2b + 1)(2b - 1)$;
2) $-2x(x + 5)(5 - x)$;
3) $(a^3 - 2)(a^3 + 2)(a^6 + 4)$.

Розв'язування.

1) $(b - 3)(b + 3) - (2b + 1)(2b - 1) = b^2 - 9 - (4b^2 - 1) =$
$= b^2 - 9 - 4b^2 + 1 = -3b^2 - 8$.
2) $-2x(x + 5)(5 - x) = -2x(25 - x^2) = -50x + 2x^3$.

3) Застосувавши двічі формулу добутку суми і різниці двох виразів, отримуємо:
$(a^3 - 2)(a^3 + 2)(a^6 + 4) = (a^6 - 4)(a^6 + 4) = a^{12} - 16.$

?

1. Чому дорівнює добуток різниці двох виразів та їх суми?
2. Запишіть формулу добутку різниці та суми двох виразів.

499.° Якому з наведених многочленів тотожно дорівнює добуток $(7a - 2b)(7a + 2b)$:

1) $7a^2 - 2b^2$;
2) $7a^2 + 2b^2$;
3) $49a^2 - 4b^2$;
4) $49a^2 + 4b^2$?

500.° Виконайте множення многочленів:

1) $(m - n)(m + n)$;
2) $(x - 1)(x + 1)$;
3) $(9 - y)(9 + y)$;
4) $(3b - 1)(3b + 1)$;
5) $(10m - 7)(10m + 7)$;
6) $(4a - b)(b + 4a)$;
7) $(5b + 1)(1 - 5b)$;
8) $(3x - 5y)(3x + 5y)$;
9) $(13c - 10d)(13c + 10d)$;
10) $(8m + 11n)(11n - 8m)$.

501.° Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(c - 2)(c + 2)$;
2) $(12 - x)(12 + x)$;
3) $(3x + y)(3x - y)$;
4) $(6x - 9)(6x + 9)$;
5) $(x + 7)(7 - x)$;
6) $(5a - 8b)(5a + 8b)$;
7) $(8m + 2)(2 - 8m)$;
8) $(13c - 14d)(14d + 13c)$.

502.° Виконайте множення:

1) $(a^2 - 3)(a^2 + 3)$;
2) $(5 + b^2)(b^2 - 5)$;
3) $(3x - 2y^2)(3x + 2y^2)$;
4) $(10p^3 - 7k)(10p^3 + 7k)$;
5) $(4x^2 - 8y^3)(4x^2 + 8y^3)$;
6) $(11a^3 + 5b^2)(5b^2 - 11a^3)$;
7) $(7 - xy)(7 + xy)$;
8) $\left(8a^3b - \frac{1}{3}ab^2\right)\left(8a^3b + \frac{1}{3}ab^2\right)$;
9) $(0{,}3m^5 + 0{,}1n^3)(0{,}3m^5 - 0{,}1n^3)$;
10) $\left(\frac{7}{9}a^2c - 1{,}4b^4\right)\left(1{,}4b^4 + \frac{7}{9}a^2c\right)$.

503.° Виконайте множення:

1) $(x^3 + 4)(x^3 - 4)$;
2) $(ab - c)(ab + c)$;

3) $(x - y^2)(y^2 + x)$;
4) $(3m^2 - 2c)(3m^2 + 2c)$;
5) $(6a^3 - 8b)(6a^3 + 8b)$;
6) $(5n^4 - m^4)(5n^4 + m^4)$;
7) $(0{,}2m^8 - 0{,}8n^6)(0{,}2m^8 + 0{,}8n^6)$;
8) $\left(\frac{2}{7}p^7 + \frac{4}{11}k^9\right)\left(\frac{4}{11}k^9 - \frac{2}{7}p^7\right)$.

504.° Спростіть вираз:
1) $(2a - b)(2a + b) + b^2$;
2) $10x^2 + (y - 5x)(y + 5x)$;
3) $64m^2 - (8m + 9)(8m - 9)$;
4) $(4x - 7y)(4x + 7y) + (7x - 4y)(7x + 4y)$;
5) $(a - 2)(a + 3) + (6 - a)(a + 6)$;
6) $3a(a - b) - (3a + 2b)(3a - 2b)$.

505.° Спростіть вираз:
1) $(9a - 2)(9a + 2) - 18a^2$;
2) $25m^2 - (5m - 7)(5m + 7)$;
3) $(b + 7)(b - 4) + (2b - 6)(2b + 6)$;
4) $4x(3x - 10y) - (4x + y)(4x - y)$.

506.° На який вираз треба помножити двочлен $0{,}3x^3 - xy^2$, щоб добуток дорівнював двочлену $0{,}09x^6 - x^2y^4$?

507.° На який вираз треба помножити многочлен $7t^4 + 9p^5$, щоб добуток дорівнював многочлену $49t^8 - 81p^{10}$?

508.• Які одночлени треба поставити замість зірочок, щоб виконувалася тотожність:
1) $(* - 12a)(* + *) = 9b^2 - *$;
2) $(* - 5c)(* + 5c) = 16d^2 - *$;
3) $(0{,}7p + *)(* - 0{,}7p) = \frac{1}{9}m^8 - 0{,}49p^2$;
4) $(3m^2 + *)(* - *) = 9m^4 - n^6$?

509.• Поставте замість зірочок такі одночлени, щоб виконувалася тотожність:
1) $(8a^2b - *)(8a^2b + *) = * - 25c^6$;
2) $\left(* - \frac{1}{12}x^4y^5\right)\left(\frac{1}{15}a^2 + *\right) = \frac{1}{225}a^4 - \frac{1}{144}x^8y^{10}$.

510.• Подайте у вигляді многочлена вираз:
1) $a(a - 2)(a + 2)$; 2) $-3(x + 3)(x - 3)$;

3) $7b^2(b+4)(4-b)$; 5) $(2a-1)(2a+1)(4a^2+1)$;

4) $(c-d)(c+d)(c^2+d^2)$; 6) $(c^3-5)(c^3+5)(c^6+25)$.

511.° Виконайте множення:

1) $5b(b-1)(b+1)$; 3) $(m-10)(m^2+100)(m+10)$;

2) $(c+2)(c-2)\cdot 8c^2$; 4) $(a^2+1)(a^2-1)(a^4+1)$.

512.° Виконайте множення двочленів (n — натуральне число):

1) $(a^n-4)(a^n+4)$;

2) $(b^{2n}+c^{3n})(b^{2n}-c^{3n})$;

3) $(x^{4n}+y^{n+2})(y^{n+2}-x^{4n})$;

4) $(a^{n+1}-b^{n-1})(a^{n+1}+b^{n-1})$, $n>1$.

513.° Спростіть вираз:

1) $(8a-3)(8a+3)-(7a+4)(8a-4)$;

2) $0{,}6m(2m-1)(2m+1)+0{,}3(6+5m)(6-5m)$;

3) $(7-2x)(7+2x)-(x-8)(x+8)-(4-3x)(5+3x)$;

4) $-b^2c(4b-c^2)(4b+c^2)+16b^4c$.

514.° Спростіть вираз:

1) $(x+1)(x-1)-(x+5)(x-5)+(x+1)(x-5)$;

2) $81a^8-(3a^2-b^3)(9a^4+b^6)(3a^2+b^3)$.

515.° Розв'яжіть рівняння:

1) $8x(3+2x)-(4x+3)(4x-3)=9x-6$;

2) $7x-4x(x-5)=(8-2x)(8+2x)+27x$;

3) $(6x+7)(6x-7)+12x=12x(3x+1)-49$;

4) $(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)=x^8+10x$.

516.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-17)(x+17)=x^2+6x-49$;

2) $(1{,}2x-4)(1{,}2x+4)-(1{,}3x-2)(1{,}3x+2)=$
$=0{,}5x(8-0{,}5x)$.

517.° Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $(x-9)(x+9)-(x+19)(x-19)$;

2) $(2a-b)(2a+b)+(b-c)(b+c)+(c-2a)(c+2a)$.

518.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(7n+8)(7n-8)-(5n+10)(5n-10)$ ділиться націло на 12.

519.° Доведіть, що не існує такого натурального числа n, при якому значення виразу
$(4n+3)(9n-4)-(6n-5)(6n+5)-3(n-2)$ ділиться націло на 8.

520.· Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(9n-4)(9n+4)-(8n-2)(4n+3)+5(6n+9)$ ділиться націло на 7.

521.·· Знайдіть значення виразу:

1) $3^{20}\cdot 6^{20}-(18^{10}-2)(18^{10}+2)$;
2) $(5+28^{17})(5-28^{17})+14^{34}\cdot 2^{34}$;
3) $7^{36}\cdot 8^{12}-(14^{18}+3)(14^{18}-3)$;
4) $(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)-3^{64}$;
5) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)-2^{32}$.

522.·· Чому дорівнює значення виразу:

1) $81^{15}\cdot 8^{20}-(6^{30}+1)(6^{30}-1)$;
2) $5^{24}-(5^3-2)(5^3+2)(5^6+4)(5^{12}+16)$?

523.* Порівняйте значення виразів, не обчислюючи їх:

1) $415\cdot 425$ і $426\cdot 414$;
2) $1\,234\,567\cdot 1\,234\,569$ і $1\,234\,568^2$.

524.* Порівняйте значення виразів, не обчислюючи їх:

1) $253\cdot 259$ і $252\cdot 260$;
2) $987\,654^2$ і $987\,646\cdot 987\,662$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

525. Від села до станції Василько може доїхати на велосипеді за 3 год, а дійти пішки — за 7 год. Швидкість руху пішки на 8 км/год менша від швидкості руху на велосипеді. З якою швидкістю їздить Василько на велосипеді? Яка відстань від села до станції?

526. В одному мішку було 60 кг цукру, а в другому — 100 кг. Коли з другого мішка взяли в 4 рази більше цукру, ніж з першого, то в першому залишилось у 2 рази більше цукру, ніж у другому. Скільки кілограмів цукру взяли з кожного мішка?

527. Один автомобіль може перевезти зібраний урожай з поля за 10 год, другий — за 12 год, а третій — за 15 год. За скільки годин вони зможуть перевезти врожай, працюючи разом?

528. (*Старовинна єгипетська задача.*) Кожний із 7 чоловіків має 7 кішок. Кожна кішка з'їдає по 7 мишей, кожна миша за одне літо може знищити 7 ячмінних колосків, а із зерен одного колоска може вирости 7 жмень ячмінного зерна. Маса однієї жмені становить приблизно 80 г. Скільки жмень зерна щорічно рятують завдяки кішкам? Скільки це становить тонн зерна? Відповідь округліть до сотих.

529. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x-1}{12}-\frac{3x+1}{8}=x+1$; 2) $\frac{3x-2}{9}-\frac{2x+1}{6}=\frac{5-x}{3}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

530. Подайте дані вирази у вигляді квадрата одночлена:

1) x^6; 3) $4x^2$; 5) a^8b^{10}; 7) $1{,}21m^{10}n^{20}$;

2) y^4; 4) $\frac{1}{9}x^4$; 6) $0{,}36x^2y^{12}$; 8) $1\frac{9}{16}a^{14}b^{16}$.

531. Чи можна подати у вигляді різниці квадратів двох одночленів вираз:

1) a^2-16b^2; 3) $100b^4-25c^6$; 5) $-a^{12}-49c^8$;

2) $25c^2+9b^2$; 4) $-64+a^{10}$; 6) $-0{,}01a^4+0{,}04b^4$?

У разі позитивної відповіді запишіть цю різницю квадратів.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

532. Для перевезення вантажу виділено 4-, 7- і 8-тонні вантажівки. Кожна машина має зробити тільки одну ходку. Скільки треба вантажівок кожного виду для перевезення 44 т вантажу?

15. Різниця квадратів двох виразів

Ви вже знаєте два способи розкладання многочленів на множники: винесення спільного множника за дужки та метод групування. Розглянемо ще один спосіб.

Формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ перепишемо так:

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$$

Цю тотожність називають **формулою різниці квадратів**.

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів та їх суми.

Наведемо приклади застосування цієї формули для розкладання многочленів на множники.

ПРИКЛАД 1

Розкладіть на множники:

1) $a^2 - 4$; 2) $36m^2 - 2\frac{7}{9}n^8$; 3) $-a^2b^6 + 1$.

Розв'язування.

1) Маємо:

$$a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a - 2)(a + 2).$$

2) $36m^2 - 2\frac{7}{9}n^8 = 36m^2 - \frac{25}{9}n^8 = (6m)^2 - \left(\frac{5}{3}n^4\right)^2 =$
$= \left(6m - \frac{5}{3}n^4\right)\left(6m + \frac{5}{3}n^4\right)$.

3) $-a^2b^6 + 1 = 1 - a^2b^6 = (1 - ab^3)(1 + ab^3)$.

ПРИКЛАД 2

Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів:

1) $100 - (a + 5)^2$; 2) $(2a + 3b)^2 - (3a - b)^2$.

Розв'язування.

1) $100 - (a + 5)^2 = 10^2 - (a + 5)^2 = (10 - (a + 5))(10 + (a + 5)) =$
$= (10 - a - 5)(10 + a + 5) = (5 - a)(15 + a)$.

2) $(2a + 3b)^2 - (3a - b)^2 = ((2a + 3b) - (3a - b))((2a + 3b) +$
$+ (3a - b)) = (2a + 3b - 3a + b)(2a + 3b + 3a - b) =$
$= (4b - a)(5a + 2b)$.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $(2x - 7)^2 - 81 = 0$.

Розв'язування.

1) Застосувавши формулу різниці квадратів і умову рівності добутку нулю, отримуємо:

$$(x - 6)(x + 6) = 0;$$

$$x - 6 = 0 \text{ або } x + 6 = 0;$$

$$x = 6 \text{ або } x = -6.$$

Відповідь: 6; –6.

2) Маємо:

$$(2x - 7 - 9)(2x - 7 + 9) = 0;$$
$$(2x - 16)(2x + 2) = 0;$$
$$2x - 16 = 0 \text{ або } 2x + 2 = 0;$$
$$x = 8 \text{ або } x = -1.$$

Відповідь: 8; –1.

ПРИКЛАД 4

Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(6n + 7)^2 - (2n - 1)^2$ ділиться націло на 8.

Маємо:

$$(6n + 7)^2 - (2n - 1)^2 = (6n + 7 - 2n + 1)(6n + 7 + 2n - 1) =$$
$$= (4n + 8)(8n + 6) = 4(n + 2) \cdot 2(4n + 3) = 8(n + 2)(4n + 3).$$

Отже, незалежно від значення n даний вираз можна подати у вигляді добутку трьох множників, один з яких дорівнює 8, а два інших — натуральні числа. Звідси випливає, що значення даного виразу ділиться націло на 8 при будь-якому натуральному n.

1. Чому дорівнює різниця квадратів двох виразів?
2. Запишіть формулу різниці квадратів двох виразів.

533.° Яким з наведених добутків многочленів тотожно дорівнює многочлен $a^2 - 144$:

1) $(a - 12)^2$;
2) $(a - 12)(a + 12)$;
3) $(12 - a)(12 + a)$;
4) $(12 - a)(-12 - a)$?

534.° Яка з наступних рівностей є тотожністю:

1) $-49 + b^2 = (7 - b)(7 + b)$;
2) $-49 + b^2 = (b - 7)(b + 7)$;
3) $-49 + b^2 = (7 - b)^2$;
4) $-49 + b^2 = (b - 49)(b + 49)$?

535.° Чи можна, застосовуючи формулу різниці квадратів, розкласти на множники вираз:

1) $a^2 - 9$;
2) $b^2 + 1$;
3) $4 - c^2$;
4) $25 + x^2$;
5) $1 - y^2$;
6) $16a^2 - b^2$;
7) $81 + 100p^2$;
8) $81 - 100p^2$;

9) $m^2n^2 - 25$; 10) $-m^2n^2 - 25$?

Якщо можна, то виконайте розкладання на множники.

536.° Розкладіть на множники:

1) $b^2 - d^2$; 7) $900 - 81k^2$; 13) $a^2b^2c^2 - 1$;
2) $x^2 - 1$; 8) $16x^2 - 121y^2$; 14) $100a^2 - 0,01b^2$;
3) $-x^2 + 1$; 9) $b^2c^2 - 1$; 15) $a^4 - b^2$;
4) $36 - c^2$; 10) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$; 16) $p^2t^2 - 0,36k^2d^2$;
5) $4 - 25a^2$; 11) $-4a^2b^2 + 25$; 17) $y^{10} - 9$;
6) $49a^2 - 100$; 12) $144x^2y^2 - 400$; 18) $4x^{12} - 1\frac{11}{25}y^{16}$.

537.° Розкладіть на множники:

1) $16 - b^2$; 5) $4x^2 - 25$; 9) $4a^2c^2 - 9x^2y^2$;
2) $c^2 - 49$; 6) $81c^2 - 64d^2$; 10) $x^{24} - y^{22}$;
3) $0,04 - a^2$; 7) $0,09x^2 - 0,25y^2$; 11) $-1600 + a^{12}$;
4) $x^2 - \frac{4}{9}$; 8) $a^2b^4 - c^6d^8$; 12) $a^{18} - \frac{49}{64}$.

538.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 49 = 0$; 3) $x^2 + 36 = 0$; 5) $9x^2 - 4 = 0$;
2) $\frac{1}{4} - z^2 = 0$; 4) $x^2 - 0,01 = 0$; 6) $0,04x^2 - 1 = 0$.

539.° Розв'яжіть рівняння:

1) $c^2 - 0,25 = 0$; 3) $-0,09 + 4x^2 = 0$.
2) $81x^2 - 121 = 0$;

540.• Розкладіть на множники, користуючись формулою різниці квадратів:

1) $(x + 2)^2 - 49$; 6) $(8y + 4)^2 - (4y - 3)^2$;
2) $(x - 10)^2 - 25y^2$; 7) $(5a + 3b)^2 - (2a - 4b)^2$;
3) $25 - (y - 3)^2$; 8) $4(a - b)^2 - (a + b)^2$;
4) $(a - 4)^2 - (a + 2)^2$; 9) $(x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - x + 2)^2$;
5) $(m - 10)^2 - (n - 6)^2$; 10) $(-3x^3 + y)^2 - 16x^6$.

541.• Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(x - 2)^2 - 4$; 4) $a^4 - (7b - a^2)^2$;
2) $(b + 7)^2 - 100c^2$; 5) $(4x - 9)^2 - (2x + 19)^2$;
3) $121 - (b + 7)^2$; 6) $(a + b + c)^2 - (a - b - c)^2$.

542.• Знайдіть значення виразу:

1) $(9x - 4)^2 - (7x + 5)^2$, якщо $x = 1,5$;
2) $(5x + 3y)^2 - (3x + 5y)^2$, якщо $x = 2,1$; $y = 1,9$.

543.° Знайдіть значення виразу $(2{,}5a - 1{,}5b)^2 - (1{,}5a - 2{,}5b)^2$, якщо $a = -1{,}5$; $b = -3{,}5$.

544.° Чому дорівнює площа заштрихованої фігури, зображеної на рисунку 4? Обчисліть значення отриманого виразу при $a = 7{,}4$ см, $b = 2{,}6$ см.

545.° Два кола, радіуси яких R і r ($R > r$), мають спільний центр. Виразіть через π, R і r площу фігури, обмеженої цими колами. Обчисліть значення отриманого виразу при $R = 5{,}1$ см, $r = 4{,}9$ см.

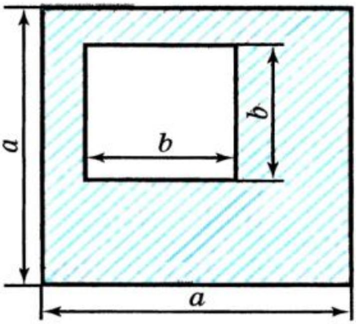


Рис. 4

546.° Подайте у вигляді добутку трьох множників вираз:
1) $m^4 - 625$; 2) $x^{16} - 81$; 3) $2^{4n} - 16$,
де n — натуральне число.

547.° Розкладіть на множники:
1) $a^8 - b^8$; 2) $a^{16} - 256$.

548.° Розв'яжіть рівняння:
1) $(3x - 5)^2 - 49 = 0$;
2) $(4x + 7)^2 - 9x^2 = 0$;
3) $(a - 1)^2 - (2a + 9)^2 = 0$;
4) $25(3b + 1)^2 - 16(2b - 1)^2 = 0$.

549.° Розв'яжіть рівняння:
1) $16 - (6 - 11x)^2 = 0$;
2) $(7m - 13)^2 - (9m + 19)^2 = 0$.

550.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:
1) $(7n + 4)^2 - 9$ ділиться націло на 7;
2) $(8n + 1)^2 - (3n - 1)^2$ ділиться націло на 11;
3) $(3n + 7)^2 - (3n - 5)^2$ ділиться націло на 24;
4) $(7n + 6)^2 - (2n - 9)^2$ ділиться націло на 15.

551.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:
1) $(5n + 4)^2 - (5n - 4)^2$ ділиться націло на 80;
2) $(9n + 10)^2 - (9n + 8)^2$ ділиться націло на 36;
3) $(10n + 2)^2 - (4n - 10)^2$ ділиться націло на 12.

552.•• Доведіть, що:
1) різниця квадратів двох послідовних натуральних чисел дорівнює сумі цих чисел;
2) різниця квадратів двох послідовних парних чисел ділиться націло на 4.

553.•• Доведіть, що:
1) різниця квадратів двох послідовних парних чисел дорівнює подвоєній сумі цих чисел;
2) різниця квадратів двох послідовних непарних чисел ділиться націло на 8.

554.•• Доведіть тотожність:
$(m^3 - n^3)^2 (m^3 + n^3)^2 - (m^6 + n^6)^2 = -4m^6n^6$.

555.•• Різниця квадратів двох натуральних двоцифрових чисел, записаних одними й тими ж цифрами, дорівнює 693. Знайдіть ці числа.

556.•• Остача від ділення на 7 одного натурального числа дорівнює 4, а другого — 3. Доведіть, що різниця квадратів цих чисел кратна 7.

557.•• При якому значенні b рівняння $(b^2 - 4)x = b - 2$:
1) має безліч коренів;
2) не має коренів;
3) має один корінь?

558.•• При якому значенні a рівняння $(a^2 - 25)x = a + 5$:
1) має безліч коренів;
2) не має коренів;
3) має один корінь?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

559. Човен рухався 2,4 год за течією річки і 3,6 год проти течії. Відстань, яку пройшов човен за течією, на 5,4 км більша за відстань, пройдену проти течії. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії становить 2,5 км/год.

560. За 3 дні продали 130 кг апельсинів. За другий день продали $\frac{4}{9}$ того, що продали за перший день, а за третій — стільки, скільки за перші два дні разом. Скільки кілограмів апельсинів продали за перший день?

561. У послідовності ..., a, b, c, d, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... кожне число дорівнює сумі двох попередніх. Чому дорівнює число a?

562. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-1}{8} - \frac{x+2}{4} = x$; 2) $3(2x+3) - 2(3x+5) = -1$.

563. Для кожної пари виразів знайдіть усі значення a, при яких значення другого виразу в 3 рази більше за значення першого:

1) a і $3a$; 2) a^2 і $3a^2$; 3) $a^2 + 1$ і $3a^2 + 3$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

564. Запишіть у вигляді виразу:

1) квадрат суми чисел a і b;
2) суму квадратів чисел a і b;
3) подвоєний добуток чисел a і b;
4) квадрат різниці одночленів $3m$ і $4n$.

565. Знайдіть подвоєний добуток одночленів:

1) a^2 і $3b$; 2) $5x$ і $6y$; 3) $0{,}5m$ і $4n$; 4) $\frac{1}{3}m^2$ і $6m$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

566. Меню складається зі 101 страви. Доведіть, що кількість способів вибору обіду з непарної кількості страв дорівнює кількості способів вибору обіду з парної кількості страв за умови, що більше за 100 страв вибрати не можна.

16. Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів

Перетворимо у многочлен вираз $(a + b)^2$:

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Отже,

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Цю тотожність називають **формулою квадрата суми** і формулюють:

квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого і другого виразів плюс квадрат другого виразу.

Перетворимо у многочлен вираз $(a - b)^2$:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Ми отримали **формулу квадрата різниці:**

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого і другого виразів плюс квадрат другого виразу.

Зауважимо, що формулу квадрата різниці можна отримати за допомогою формули квадрата суми:

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

За допомогою отриманих формул можна простіше підносити до квадрата суму або різницю будь-яких двох виразів, не використовуючи правило множення двох многочленів. Тому їх відносять до формул скороченого множення.

ПРИКЛАД 1

Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(3b - 4c)^2$; 2) $(a^3 + 5a)^2$.

Розв'язування.

1) За формулою квадрата різниці отримуємо:
$(3b - 4c)^2 = (3b)^2 - 2 \cdot 3b \cdot 4c + (4c)^2 = 9b^2 - 24bc + 16c^2$.
2) За формулою квадрата суми отримуємо:
$(a^3 + 5a)^2 = (a^3)^2 + 2 \cdot a^3 \cdot 5a + (5a)^2 = a^6 + 10a^4 + 25a^2$.

ПРИКЛАД 2

Перетворіть у многочлен вираз:

1) $(-a - b)^2$; 2) $(-x^2 - 6)^2$.

Розв'язування.

1) Маємо: $(-a - b)^2 = (-a)^2 - 2(-a) \cdot b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Цей приклад можна виконати інакше.
Оскільки $(-a - b)^2 = (-1 \cdot (a + b))^2 = (-1)^2 \cdot (a + b)^2 = (a + b)^2$, тобто вирази $(-a - b)^2$ і $(a + b)^2$ тотожно рівні, то:

$(-a - b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2) $(-x^2 - 6)^2 = (x^2 + 6)^2 = x^4 + 12x^2 + 36$.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння $(x - 10)^2 = (x + 7)^2 - 17$.

Маємо:

$$x^2 - 20x + 100 = x^2 + 14x + 49 - 17;$$
$$x^2 - 20x - x^2 - 14x = 49 - 17 - 100;$$
$$-34x = -68;$$
$$x = 2.$$

Відповідь: 2.

ПРИКЛАД 4

Доведіть, що остача при діленні квадрата натурального числа на число 3 дорівнює 0 або 1.

Нехай n — деяке натуральне число. Розглянемо три випадки.

1) Число n кратне 3. Тоді $n = 3k$, де k — натуральне число. Маємо: $n^2 = (3k)^2 = 9k^2$. Значення виразу $9k^2$ кратне 3, тобто остача при діленні n^2 на 3 дорівнює 0.
2) Остача при діленні на 3 числа n дорівнює 1. Тоді n можна подати у вигляді $n = 3k + 1$, де k — натуральне число. Маємо:
$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3p + 1$, де $p = 3k^2 + 2k$ — неповна частка при діленні n^2 на 3, а остача при цьому дорівнює 1.
3) Остача при діленні на 3 числа n дорівнює 2. Тоді $n = 3k + 2$, де k — натуральне число; $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = (9k^2 + 12k + 3) + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Очевидно, що й у цьому випадку остача при діленні n^2 на 3 дорівнює 1.

?

1. Яку тотожність називають формулою квадрата суми двох виразів?
2. Сформулюйте правило піднесення до квадрата суми двох виразів.
3. Яку тотожність називають формулою квадрата різниці двох виразів?
4. Сформулюйте правило піднесення до квадрата різниці двох виразів.

567.° Якому з наведених многочленів тотожно дорівнює вираз $(5a + 3)^2$:

1) $25a^2 + 15a + 9$;
2) $25a^2 + 30a + 9$;
3) $25a^2 + 9$;
4) $5a^2 + 3$?

568.° Яка з наступних рівностей є тотожністю:

1) $(12a - b)^2 = 144a^2 - b^2$;
2) $(12a - b)^2 = 144a^2 + 24ab + b^2$;
3) $(12a - b)^2 = 144a^2 - 24ab + b^2$;
4) $(12a - b)^2 = 12a^2 - 24ab + b^2$?

569.° Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(a + x)^2$;
2) $(x + 2)^2$;
3) $(y - 1)^2$;
4) $(5 - p)^2$;
5) $(4 + k)^2$;
6) $(3a - 2)^2$;
7) $(7b + 6)^2$;
8) $(8x + 4y)^2$;
9) $(0{,}4m - 0{,}5n)^2$;
10) $\left(3a + \frac{1}{3}b\right)^2$;
11) $(y - 13)^2$;
12) $(13 - y)^2$;
13) $(b^2 - 11)^2$;
14) $(a^2 + 4b)^2$;
15) $(x^2 + y^3)^2$;
16) $(a^3 - 4b)^2$;
17) $(a^2 + a)^2$;
18) $(3b^2 - 2b^5)^2$.

570.° Виконайте піднесення до квадрата:

1) $(a + 8)^2$;
2) $(b - 2)^2$;
3) $(7 + c)^2$;
4) $(6 - d)^2$;
5) $(2m + 1)^2$;
6) $(4x - 3)^2$;
7) $(5m - 4n)^2$;
8) $(10c + 7d)^2$;
9) $\left(4x - \frac{1}{8}y\right)^2$;
10) $(0{,}3a + 0{,}9b)^2$;
11) $(c^2 - 6)^2$;
12) $(15 + k^2)^2$;
13) $(m^2 - 3n)^2$;
14) $(m^4 - n^3)^2$;
15) $(5a^4 - 2a^7)^2$.

571.° Спростіть вираз:

1) $a^2 + (3a - b)^2$;
2) $(4x + 5)^2 - 40x$;
3) $50a^2 - (7a - 1)^2$;
4) $c^2 + 36 - (c - 6)^2$;
5) $(x - 2)^2 + x(x + 10)$;
6) $3m(m - 4) - (m + 2)^2$;
7) $(y - 9)^2 + (4 - y)(y + 6)$;
8) $(x - 4)(x + 4) - (x - 1)^2$;
9) $(2a - 3b)^2 + (3a + 2b)^2$;
10) $(x - 5)^2 - (x - 7)(x + 7)$.

572.° Спростіть вираз:

1) $(x - 12)^2 + 24x$;
2) $(x + 8)^2 - x(x + 5)$;
3) $2x(x + 2) - (x - 2)^2$;
4) $(y + 7)^2 + (y + 2)(y - 7)$;
5) $(a + 1)(a - 1) - (a + 4)^2$;
6) $(x - 10)(9 - x) + (x + 10)^2$.

573.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 8)^2 - x(x + 6) = -2$;
2) $(x + 7)^2 = (x - 3)(x + 3)$;

3) $(2x + 1)^2 - (2x - 1)(2x + 3) = 0$;

4) $x(x - 2) - (x + 5)^2 = 35$.

574.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 9)^2 - x(x + 8) = 1$;

2) $(x - 11)^2 = (x - 7)(x - 9)$;

3) $(x - 4)(x + 4) - (x + 6)^2 = -16$;

4) $(1 - 3x)^2 - x(9x - 2) = 5$.

575.• Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $(* + b)^2 = * + 4ab + b^2$;

2) $(4x - *)^2 = 16x^2 - * + 100y^2$;

3) $(* - 5c)^2 = * - 20b^2c + 25c^2$;

4) $(7a^2 + *)^2 = * + * + 9b^6$.

576.• Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $(* + 6b)^2 = * + 24ab + *$;

2) $(* - *)^2 = 9m^4 - 42m^2n^8 + *$.

577.• Доведіть тотожність $(a - b)^2 = (b - a)^2$.

578.• Перетворіть у многочлен вираз:

1) $(-x + 1)^2$;

2) $(-m - 9)^2$;

3) $(-5a + 3b)^2$;

4) $(-4x - 8y)^2$;

5) $(-0{,}7c - 10d)^2$;

6) $\left(-4a^2 + \frac{1}{8}ab\right)^2$.

579.• Виконайте піднесення до квадрата:

1) $(-3m + 7n)^2$;

2) $(-0{,}4x - 1{,}5y)^2$;

3) $(-x^2 - y)^2$;

4) $(-a^2b^2 + c^{10})^2$.

580.• Виконайте піднесення до квадрата:

1) $(10a^2 - 7ab^2)^2$;

2) $(0{,}8b^3 + 0{,}2b^2c^4)^2$;

3) $(30m^3n + 0{,}04n^2)^2$;

4) $(0{,}5x^4y^5 - 20y^6)^2$;

5) $\left(1\frac{1}{3}a^2b + 2\frac{1}{4}ab^2\right)^2$;

6) $\left(2\frac{1}{3}x^3y^2 - \frac{9}{14}y^8x\right)^2$;

7) $\left(15m^9 + \frac{5}{6}m^3\right)^2$;

8) $\left(3\frac{1}{8}x^8y^{10} + \frac{16}{25}x^2y^6\right)^2$.

581.• Перетворіть у многочлен вираз:

1) $6(1 - 2c)^2$;

2) $-12\left(x + \frac{1}{3}y\right)^2$;

3) $a(a-6b)^2$;
4) $5b(b^2+7b)^2$;
5) $(a+3)(a-4)^2$;
6) $(2x+4)^2(x-8)$;
7) $(a-5)^2(a+5)^2$;
8) $(3x+4y)^2(3x-4y)^2$.

582.˙ Подайте у вигляді многочлена вираз:
1) $(0{,}02p^3k+20p^2k^4)^2$;
2) $\left(1\frac{1}{6}mn-\frac{4}{21}m^2n^5\right)^2$;
3) $-15\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{5}b\right)^2$;
4) $7x(x^3-2x)^2$;
5) $(5y-2)^2(2y+1)$;
6) $(10p-k)^2(10p+k)^2$.

583.˙ Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $(a+3)^2-(a-9)(a+9)$, якщо $a=-2{,}5$;
2) $(5x-8)^2-(4x-3)^2+26x$, якщо $x=-\frac{1}{3}$;
3) $(3y^2+4)^2+(3y^2-4)^2-2(1-3y^2)(1+3y^2)$, якщо $y=\frac{1}{2}$.

584.˙ Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $2m(m-6)^2-m^2(2m-15)$, якщо $m=-4$;
2) $(2x-5)^2-4(x+1)(x-7)$, якщо $x=-3{,}5$.

585.˙ При якому значенні змінної значення квадрата двочлена $x+12$ на 225 більше за відповідне значення квадрата двочлена $x-13$?

586.˙ Розв'яжіть рівняння:
1) $(x-12)(x+12)=2(x-6)^2-x^2$;
2) $(3x-1)^2+(4x+2)^2=(5x-1)(5x+1)$;
3) $5(x+2)^2+(2x-1)^2-9(x+3)(x-3)=22$.

587.˙ Розв'яжіть рівняння:
1) $(3x+2)^2+(4x-1)(4x+1)=(5x-1)^2$;
2) $2(m+1)^2+3(m-1)^2-5(m+1)(m-1)=-4$.

588.˙ Знайдіть сторону квадрата, якщо при збільшенні її на 5 см отримують квадрат, площа якого на 95 см² більша за площу даного.

589.˙ Якщо сторону квадрата зменшити на 8 см, то отримаємо квадрат, площа якого на 352 см² менша від площі даного. Знайдіть сторону даного квадрата.

590.˙ Знайдіть три послідовних натуральних числа, якщо подвоєний квадрат більшого з них на 79 більший за суму квадратів двох інших чисел.

591.˙ Знайдіть чотири послідовних натуральних числа, якщо сума квадратів другого і четвертого з них на 82 більша за суму квадратів першого і третього.

592.˙ При яких значеннях a і b є правильною рівність:
1) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$; 2) $(a - b)^2 = (a + b)^2$?

593.˙ Доведіть тотожність:
1) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;
2) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;
3) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$;
4) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.

594.˙ Доведіть тотожність:
1) $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$;
2) $(a - b)^2 + (ab + 1)^2 = (a^2 + 1)(b^2 + 1)$.

595.˙ Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної x:
1) $(x - 3)^2 + (x + 3)^2 - 2(x - 6)(x + 6)$;
2) $(4x^3 + 5)^2 + (2x^3 - 1)^2 - 4(5x^3 + 4)(x^3 + 1)$.

596.˙ Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної x:
1) $(6x - 8)^2 + (8x + 6)^2 - (10x - 1)(10x + 1)$;
2) $2(4x - y)(8x + 5y) - (8x - 5y)^2 - 4y(26x + 1)$.

597.˙ Яким числом, парним чи непарним, є квадрат непарного натурального числа?

598.˙ Виведіть формулу куба суми:
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
Користуючись цією формулою, перетворіть у многочлен вираз:
1) $(x + 3)^3$; 2) $(2x + y)^3$.

599.˙ Виведіть формулу куба різниці:
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
Користуючись цією формулою, перетворіть у многочлен вираз:
1) $(1 - x)^3$; 2) $(x - 5y)^3$.

600.˙ Виведіть формулу квадрата тричлена:
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$.
Користуючись цією формулою, перетворіть у многочлен вираз:
1) $(a + b - c)^2$; 2) $(a - b + 4)^2$.

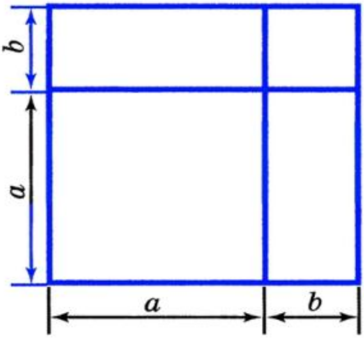


Рис. 5

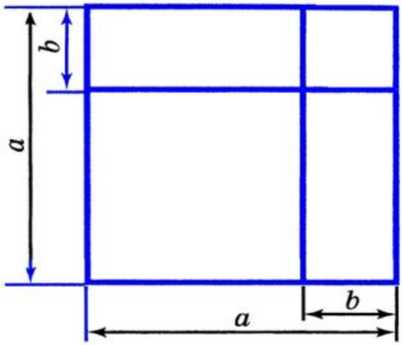


Рис. 6

601.˙ Давньогрецький учений Евклід (III ст. до н. е.) доводив формули квадрата суми і квадрата різниці геометрично. Користуючись рисунками 5 і 6, відновіть його доведення.

602.¨ Чому дорівнює остача від ділення квадрата непарного натурального числа на 8?

603.¨ З'ясуйте, яку остачу може давати квадрат натурального числа при діленні на 4.

604.¨ Доведіть, що різниця між сумою квадратів двох послідовних цілих чисел та їх подвоєним добутком не залежить від вибору чисел.

605.¨ Доведіть, що коли остача при діленні натурального числа на 16 дорівнює 4, то квадрат цього числа ділиться націло на 16.

606.¨ Доведіть, що коли остача при діленні натурального числа на 25 дорівнює 5, то квадрат цього числа кратний 25.

607.¨ Остача при діленні деякого натурального числа на 9 дорівнює 5. Чому дорівнює остача при діленні на 9 квадрата цього числа?

608.¨ Остача при діленні деякого натурального числа на 11 дорівнює 6. Чому дорівнює остача при діленні на 11 квадрата цього числа?

609.¨ Використовуючи формули скороченого множення, подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(a + b + c)(a + b - c)$;

2) $(a + b + c)(a - b - c)$;
3) $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$.

610.•• Використовуючи формули скороченого множення, подайте у вигляді многочлена вираз:
1) $(a - b - c)(a + b - c)$;
2) $(a - b + c + d)(a - b - c - d)$.

611.•• При якому значенні a не має коренів рівняння
$(6x - a)^2 + (8x - 3)^2 = (10x - 3)^2$?

612.•• При якому значенні a не має коренів рівняння
$(2a - 3x)^2 + (x - 1)^2 = 10(x - 2)(x + 2)$?

613.* Доведіть тотожність:
$(2n + 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2$.
Наведена тотожність є правилом великого давньогрецького вченого Піфагора (VI ст. до н. е.) для обчислення сторін прямокутного трикутника.

614.* (*Тотожність Ж. Л. Лагранжа*[1].) Доведіть тотожність:
$$(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + k^2) - (am + bn + ck)^2 =$$
$$= (an - bm)^2 + (ak - cm)^2 + (bk - cn)^2.$$

615.* Доведіть, що сума квадратів п'яти послідовних натуральних чисел не може дорівнювати квадрату натурального числа.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

616. Цукровий буряк, який є найсолодшою коренеплідною рослиною в Україні, накопичує до 25 % цукру, тоді як цукрова тростина — лише 18 %. Скільки тонн цукрової тростини треба переробити, щоб отримати стільки цукру, скільки з 3600 т цукрового буряку?

617. До магазину завезли 740 кг апельсинів і бананів у 80 ящиках. В одному ящику було 10 кг апельсинів або 8 кг бананів. Скільки кілограмів апельсинів завезли до магазину?

618. В одній коробці було 45 кульок, з них 15 — білі, у другій — 75 кульок, з них 25 — білі, у третій — 24 білих

[1] Лагранж Жозеф Луї (1736–1813) — французький математик і механік.

і 48 червоних кульок, у четвертій — порівну білих, червоних і зелених кульок. Для якої коробки більша ймовірність навмання витягнути з неї білу кульку?

619. Якого найменшого значення і при якому значенні змінної може набувати вираз:

1) x^2; 2) $x^2 - 16$; 3) $(x + 4)^2 + 20$?

620. Якого найбільшого значення і при якому значенні змінної може набувати вираз:

1) $-x^2$; 2) $-x^2 + 4$; 3) $12 - (x - 1)^2$?

621. При якому значенні змінної виконується рівність:

1) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = -10$;

2) $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0$;

3) $(x^2 - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0$?

622. При яких значеннях змінних x і y виконується рівність:

1) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = -1$;

2) $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 0$?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

623. Відомо, що натуральні числа m і n такі, що значення виразу $10m + n$ ділиться націло на 11. Доведіть, що значення виразу $(10m + n)(10n + m)$ ділиться націло на 121.

17. Перетворення многочлена у квадрат суми або різниці двох виразів

Запишемо формули квадрата суми і квадрата різниці, помінявши місцями їх ліві і праві частини:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

У такому вигляді ці формули дозволяють «згорнути» тричлен у квадрат двочлена.

Тричлен, який можна подати у вигляді квадрата двочлена, називають **повним квадратом**.

ПРИКЛАД 1

Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $x^2 + 10x + 25$; 2) $9a^6 - 42a^3b^2 + 49b^4$.

Розв'язування.

1) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x + 5)^2$.

2) $9a^6 - 42a^3b^2 + 49b^4 = (3a^3)^2 - 2 \cdot 3a^3 \cdot 7b^2 + (7b^2)^2 =$
$= (3a^3 - 7b^2)^2$.

ПРИКЛАД 2

Знайдіть, користуючись перетворенням виразу в квадрат двочлена, значення суми $5,2^2 + 10,4 \cdot 4,8 + 4,8^2$.

Маємо:

$$5,2^2 + 10,4 \cdot 4,8 + 4,8^2 = 5,2^2 + 2 \cdot 5,2 \cdot 4,8 + 4,8^2 =$$
$$= (5,2 + 4,8)^2 = 10^2 = 100.$$

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Подамо ліву частину рівняння у вигляді квадрата різниці:

$$(2x - 3)^2 = 0.$$

Оскільки значення квадрата дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його основа дорівнює нулю, то отримуємо:

$$2x - 3 = 0;$$
$$x = 1,5.$$

Відповідь: 1,5.

ПРИКЛАД 4

Доведіть, що значення виразу $(2x + 1)^2 - 2(2x + 1)(2x - 5) + (2x - 5)^2$ не залежить від значення змінної.

Маємо:

$(2x + 1)^2 - 2(2x + 1)(2x - 5) + (2x - 5)^2 =$
$= ((2x + 1) - (2x - 5))^2 = (2x + 1 - 2x + 5)^2 = 6^2 = 36.$

ПРИКЛАД 5

Доведіть, що вираз $x^2 - 4x + 5$ набуває додатних значень при будь-яких значеннях x. Якого найменшого значення набуває вираз і при якому значенні x?

Перетворимо даний вираз:

$$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1.$$

Подання виразу $x^2 - 4x + 5$ у вигляді $(x - 2)^2 + 1$ називають **виділенням повного квадрата** з тричлена.

Оскільки $(x - 2)^2 \geqslant 0$ при будь-яких значеннях x, то вираз $(x - 2)^2 + 1$ набуває лише додатних значень. Також зрозуміло, що $(x - 2)^2 + 1 \geqslant 1$. Звідси найменшого значення, яке дорівнює 1, даний вираз набуває при $x = 2$.

ПРИКЛАД 6

При яких значеннях x і y значення многочлена $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40$ дорівнює нулю?

Маємо: $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40 =$

$= x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = (x - 6)^2 + (y + 2)^2.$

Даний многочлен ми подали у вигляді суми двох доданків, які можуть набувати лише невід'ємних значень. Їх сума, а отже, і даний многочлен набуватимуть нульового значення тоді і тільки тоді, коли кожен з доданків дорівнюватиме нулю, тобто коли $x = 6$ і $y = -2$.

Відповідь: $x = 6$, $y = -2$.

624.° Якому з наведених виразів тотожно дорівнює многочлен $a^2 - 18a + 81$:

1) $(a - 3)^2$;
2) $a - 9$;
3) $(a - 9)(a + 9)$;
4) $(a - 9)^2$?

625.° Яка з наступних рівностей є тотожністю:

1) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 8b)^2$;
2) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 4b)^2$;
3) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (ab + 4)^2$;
4) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 2b)^2$?

626.° Подайте многочлен у вигляді квадрата суми або квадрата різниці двох виразів:

1) $a^2 + 2a + 1$;
2) $x^2 - 12x + 36$;
3) $y^2 - 18y + 81$;
4) $100 - 20c + c^2$;
5) $a^2 - 6ab + 9b^2$;
6) $9a^2 - 30ab + 25b^2$;
7) $b^4 - 2b^2c + c^2$;
8) $m^8 + m^4n^2 + \frac{1}{4}n^4$;
9) $36a^2b^2 - 12ab + 1$;
10) $x^4 + 2x^2 + 1$;
11) $\frac{1}{16}x^4 - 2x^2y^3 + 16y^6$;
12) $0{,}01a^8 + 25b^{14} - a^4b^7$.

627.° Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $b^2 - 2b + 1$;
2) $4 + 4n + n^2$;
3) $x^2 - 14x + 49$;
4) $4a^2 + 4ab + b^2$;
5) $9x^2 - 24xy + 16y^2$;
6) $a^6 - 2a^3 + 1$;
7) $36a^6 - 84a^3b^5 + 49b^{10}$;
8) $81x^4y^8 - 36x^2y^4z^6 + 4z^{12}$.

628.° Знайдіть значення виразу, подавши його попередньо у вигляді квадрата двочлена:

1) $y^2 - 8y + 16$, якщо $y = -4$;
2) $c^2 + 24c + 144$, якщо $c = -10$;
3) $25x^2 - 20xy + 4y^2$, якщо $x = 3$, $y = 5{,}5$;
4) $49a^2 + 84ab + 36b^2$, якщо $a = 1\frac{1}{7}$, $b = 2\frac{5}{6}$.

629.° Знайдіть значення виразу:

1) $b^2 - 30b + 225$, якщо $b = 6$;
2) $100a^2 + 60ab + 9b^2$, якщо $a = 0{,}8$, $b = -3$.

630.• Який одночлен можна підставити замість m, щоб можна було подати у вигляді квадрата двочлена вираз:

1) $m - 56a + 49$;
2) $9c^2 - 12c + m$;
3) $m - 42xy + 49y^2$;
4) $0{,}01b^2 + m + 100c^2$;
5) $a^2b^2 - 4a^3b^5 + m$;
6) $1{,}44x^2y^4 - my + 0{,}25y^6$;
7) $64 - 80y^{20} + my^{40}$;
8) $\frac{9}{25}a^6b^2 - a^5b^5 + m$?

631.• Замініть зірочки такими одночленами, щоб виконувалася тотожність:

1) $n^2 + 60n + * = (* + 30)^2$;
2) $25c^2 - * + * = (* - 8k)^2$;
3) $225a^2 - * + 64b^4 = (* - *)^2$;
4) $0{,}04x^2 + * + * = (* + 0{,}3y^3)^2$.

632.• Подайте, якщо це можливо, у вигляді квадрата двочлена або у вигляді виразу, протилежного квадрату двочлена, тричлен:

1) $-8x + 16 + x^2$;
2) $a^8 + 4a^4b^3 + 4b^6$;
3) $2x - 25 - 0{,}04x^2$;
4) $25m^2 - 15mn + 9n^2$;
5) $81c^2 - 54b^2c + 9b^2$;
6) $b^{10} - a^2b^5 + 0{,}25a^4$;
7) $\frac{1}{16}x^2 - xy + 4y^2$;
8) $-\frac{9}{64}n^6 - 3mn^5 - 16m^2n^4$.

633.° Подайте, якщо це можливо, у вигляді квадрата двочлена або у вигляді виразу, протилежного квадрату двочлена, тричлен:

1) $-a^4 - 0{,}8a^6 - 0{,}16a^8$;
2) $121m^2 - 44mn + 16n^2$;
3) $-a^6 + 4a^3b - 4b^2$;
4) $\frac{25}{49}a^8 - 10a^4b^6 + 49b^{12}$;
5) $80xy + 16x^2 + 25y^2$;
6) $b^{10} - \frac{1}{3}b^5c + \frac{1}{9}c^2$.

634.° Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз:
1) $(4a + 3b)^2 - 8b(4a + b)$;
2) $(10x + 3y)^2 - (8x + 4y)(8x - 4y)$.

635.° Перетворіть у квадрат двочлена вираз:
1) $(3m - 2n)^2 + 5m(4n - m)$;
2) $(9x + 2y)^2 - (8x + 3y)(4x - 4y)$.

636.° Знайдіть, користуючись перетворенням виразів у квадрат суми чи різниці двох чисел, значення даних виразів:
1) $1{,}02^2 - 1{,}02 \cdot 1{,}96 + 0{,}98^2$;
2) $24^2 + 96 \cdot 38 + 76^2$.

637.° Обчисліть:
1) $203^2 - 406 \cdot 103 + 103^2$;
2) $1{,}58^2 + 1{,}58 \cdot 2{,}84 + 1{,}42^2$.

638.° Яке число треба додати до многочлена $81a^2b^2 - 36ab + 9$, щоб отриманий вираз тотожно дорівнював квадрату двочлена?

639.° Яке число треба додати до многочлена $100m^4 + 120m^2 + 40$, щоб отриманий вираз тотожно дорівнював квадрату двочлена?

640.° Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - 16x + 64 = 0$;
2) $81x^2 + 126x + 49 = 0$.

641.° Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 + 12x + 36 = 0$;
2) $25x^2 - 30x + 9 = 0$.

642.° Чи є тотожністю рівність:
$(a - 2)(a - 3)(a + 3)(a + 2) + a^2 = (a^2 - 6)^2$?

643.° Доведіть тотожність:
1) $(a - 1)^2 + 2(a - 1) + 1 = a^2$;
2) $(a + b)^2 - 2(a + b)(a - b) + (a - b)^2 = 4b^2$;
3) $(a - 8)^2 + 2(a - 8)(3 - a) + (a - 3)^2 = 25$;
4) $(x^n - 2)^2 - 2(x^n - 2)(x^n + 2) + (x^n + 2)^2 = 16$,
де n — довільне натуральне число.

644.° Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $(3x + 8)^2 - 2(3x + 8)(3x - 8) + (3x - 8)^2$;

2) $(4x - 7)^2 + (4x - 11)^2 + 2(4x - 7)(11 - 4x)$.

645.•• Доведіть, що рівняння не має коренів:

1) $x^2 - 14x + 52 = 0$; 2) $4x^2 - 2x + 1 = 0$.

646.•• Доведіть, що даний вираз набуває додатних значень при всіх значеннях x; укажіть, якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x:

1) $x^2 - 6x + 10$; 2) $16x^2 + 24x + 25$; 3) $x^2 + x + 1$.

647.•• Чи може набувати від'ємних значень вираз:

1) $x^2 - 24x + 144$; 2) $4x^2 + 20x + 28$?

648.•• Доведіть, що даний вираз набуває від'ємних значень при всіх значеннях x; укажіть, якого найбільшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x:

1) $-x^2 + 4x - 12$;

2) $22x - 121x^2 - 2$;

3) $-56 - 36x^2 - 84x$.

649.•• Чи може набувати додатних значень вираз:

1) $-x^2 + 20x - 100$; 2) $-x^2 - 10 - 4x$?

650.•• Якого найбільшого значення і при якому значенні змінної набуває вираз:

1) $-x^2 - 16x + 36$; 2) $2 - 16x^2 + 24x$?

651.•• Якого найменшого значення і при якому значенні змінної набуває вираз:

1) $x^2 - 28x + 200$; 2) $9x^2 + 30x - 25$?

652.•• Подайте многочлен $\frac{81}{16}x^4 + y^8 - \frac{9}{2}x^2y^4$ у вигляді добутку квадратів двох двочленів.

653.•• Доведіть, що вираз $(a - 3b)(a - 3b - 4) + 4$ набуває невід'ємних значень при будь-яких значеннях змінних.

654.•• Подайте у вигляді суми квадратів двох виразів многочлен:

1) $2a^2 - 2a + 1$; 4) $10x^2 - 6xy + y^2$;

2) $a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2$; 5) $x^2 + 5y^2 + 4xy - 4y + 4$;

3) $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10$; 6) $2a^2 + 2b^2$.

655.•• Подайте у вигляді різниці квадратів двох виразів многочлен:

1) $a^4 + a^2 + 1$;
2) $x^2 - y^2 + 4x - 4y$;
3) $a^2b^2 + 2ab - c^2 - 8c - 15$;
4) $8a^2 - 12a + 2ab - b^2 + 4$.

Отриману різницю квадратів розкладіть на множники.

656.•• Подайте многочлен у вигляді суми або різниці квадратів двох виразів:

1) $a^4 + 17a^2 + 16$;
2) $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 74$;
3) $2x^2 - 6xy + 9y^2 - 6x + 9$;
4) $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3$.

657.•• При яких значеннях x і y дорівнює нулю значення многочлена:

1) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 41$;
2) $x^2 + 37y^2 + 12xy - 2y + 1$?

658.•• Чи існують такі значення x і y, при яких дорівнює нулю значення многочлена:

1) $x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 2$;
2) $9x^2 + y^2 - 12x + 8y + 21$?

659.•• Відомо, що при деяких значеннях a і b $a + b = 7$, $ab = 2$. Знайдіть значення виразу $a^2 + b^2$ при тих самих значеннях a і b.

660.•• Відомо, що при деяких додатних значеннях a і b $a^2 + b^2 = 34$, $ab = 15$. Знайдіть значення виразу $a + b$ при тих самих значеннях a і b.

661.•• Відомо, що при деяких від'ємних значеннях a і b $a^2 + b^2 = 68$, $ab = 16$. Знайдіть значення виразу $a + b$ при тих самих значеннях a і b.

662.* Подайте число 24 у вигляді суми таких двох чисел, щоб їх добуток був найбільшим.

663.* Знайдіть сторони прямокутника, який має найбільшу площу з усіх прямокутників, периметр яких дорівнює 20 см.

664.* Числа a і b такі, що $b^2 + \frac{a^2}{4} = 1$, $ab = 3$, $a > 0$, $b > 0$. Знайдіть значення виразу $a + 2b$.

665.* Числа a, b і c такі, що $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$. Чому дорівнює значення виразу $a + b - 2c$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

666. За перший день турист проїхав 0,4 усього шляху, за другий — $\frac{2}{3}$ остачі, а за третій — решту 20 км. Знайдіть довжину шляху.

667. Загальна площа двох ділянок, засіяних кукурудзою, дорівнює 100 га. На першій ділянці зібрали по 90 т зеленої маси кукурудзи з 1 га, а на другій — по 80 т. Знайдіть площу кожної ділянки, якщо з першої ділянки зібрали на 2200 т більше, ніж з другої.

668. Розкладіть на множники:

1) $2ab - 3ab^2$;
2) $8x^4 + 2x^3$;
3) $12a^2b^2 + 6a^2b^3 + 12ab^3$;
4) $2a - 2b + ac - bc$;
5) $m^2 - mn - 4m + 4n$;
6) $ax - ay + cy - cx - x + y$.

669. При деякому значенні x значення виразу $3x^2 - x + 7$ дорівнює 10. Якого значення при цьому набуває вираз $6x^2 - 2x + 7$?

670. (*Старовинна болгарська задача.*) Сім рибалок ловили на озері рибу. Перший ловив рибу щодня, другий — через день, третій — через 2 дні і т. д., сьомий — через 6 днів. Сьогодні всі рибалки прийшли на озеро. Через яку найменшу кількість днів усі сім рибалок зберуться разом на озері?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

671. Запишіть у вигляді виразу:

1) куб суми чисел a і b;
2) суму кубів чисел a і b;
3) різницю кубів чисел c і d;
4) куб різниці чисел c і d.

672. Піднесіть до куба одночлен:

1) y^2;
2) $2x^3$;
3) $3a^2b^4$;
4) $0{,}1mn^5$;
5) $\frac{1}{6}b^6c^7$;
6) $\frac{2}{7}p^{10}k^{15}$.

673. Подайте у вигляді куба одночлена вираз:

1) a^3b^6;
2) $8x^3y^9$;
3) $\frac{1}{64}c^9$;
4) $125m^{12}n^{21}$;
5) $0{,}216k^{15}p^{24}$;
6) $0{,}008a^9b^{18}c^{27}$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

674. Чи можна натуральні числа від 1 до 32 розбити на три групи так, щоб добутки чисел кожної групи дорівнювали один одному?

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ № 4 «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

1. Виконайте множення: $(3n + 1)(3n - 1)$.

А) $9n^2 - 6n + 1$; В) $9n^2 - 1$;
Б) $9n^2 + 6n + 1$; Г) $9n^2 + 1$.

2. Якому многочлену дорівнює вираз $(4x - 1)^2$?

А) $16x^2 + 8x + 1$; В) $16x^2 + 1$;
Б) $16x^2 - 8x + 1$; Г) $16x^2 - 1$.

3. Розкладіть на множники вираз $4a^2 - 25$.

А) $(2a - 5)^2$; В) $(2a - 5)(2a + 5)$;
Б) $(2a + 5)^2$; Г) $2a(2a - 25)$.

4. Подайте у вигляді добутку вираз $-0{,}09x^4 + 81y^{16}$.

А) $(0{,}03x^2 - 9y^4)(0{,}03x^2 + 9y^4)$;
Б) $(9y^8 - 0{,}03x^2)(9y^8 + 0{,}03x^2)$;
В) $(9y^8 - 0{,}3x^2)(9y^8 + 0{,}3x^2)$;
Г) $(9y^4 - 0{,}3x^2)(9y^4 + 0{,}3x^2)$.

5. Який з наведених двочленів можна розкласти на множники, застосовуючи формулу різниці квадратів?

А) $-a^2 - 4b^2$; Б) $4a^2 + b^2$; В) $a^2 - 4b^2$; Г) $4b^2 + a^2$.

6. Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз $a^2 - 8a + 16$.

А) $(a + 4)^2$; Б) $(a - 4)^2$; В) $(4a + 1)^2$; Г) $(a - 1)^2$.

7. Відомо, що $\left(\frac{1}{2}x - 3y^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + axy^2 + 9y^4$. Чому дорівнює значення a?

А) 3; Б) -3; В) 6; Г) -6.

8. Спростіть вираз $(x + 8)(x - 8) - x(x - 6)$.

А) $6x - 16$; Б) $6x + 16$; В) $-6x - 64$; Г) $6x - 64$.

9. Якому многочлену дорівнює вираз
$(7m - 2)^2 - (7m - 1)(7m + 1)$?

А) $-14m + 5$; Б) $-14m + 3$; В) $-28m + 5$; Г) $-28m + 3$.

10. Спростіть вираз $(c - 4)^2 - (3 - c)^2$.

А) $2c - 7$; Б) $7 - 2c$; В) $7 + 2c$; Г) $-2c - 7$.

11. Знайдіть значення виразу
$(x-4)^2+2(4+x)(4-x)+(x+4)^2$ при $x=-1,2$.
А) 64; Б) 32; В) 48; Г) 72.

12. Подайте у вигляді многочлена вираз $(4+a^2)(a-2)(a+2)$.
А) a^2-16; Б) $16-a^2$; В) $16-a^4$; Г) a^4-16.

18. Сума і різниця кубів двох виразів

Помножимо двочлен $a+b$ на тричлен a^2-ab+b^2. Отримаємо:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-\underline{a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}+\underline{a^2b}-\underline{\underline{ab^2}}+b^3=a^3+b^3.$$

Тим самим ми довели тотожність

$$\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

Цю тотожність називають **формулою суми кубів.**

Многочлен a^2-ab+b^2, який стоїть у правій частині, називають **неповним квадратом різниці.** Така назва пояснюється його зовнішньою схожістю з многочленом $a^2-2ab+b^2$, який дорівнює квадрату різниці a і b.

Тепер можна сказати, що

сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці.

Розкладемо на множники вираз a^3-b^3. Маємо:

$$a^3-b^3=a^3+(-b)^3=(a+(-b))(a^2-a(-b)+(-b)^2)=$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Ми довели тотожність

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

Цю тотожність називають **формулою різниці кубів.**

Многочлен a^2+ab+b^2 називають **неповним квадратом суми.**

Отже,

різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми.

Зауважимо, що цю формулу також можна довести, перемноживши многочлени, які стоять у правій частині.

ПРИКЛАД 1

Розкладіть на множники:

1) $8a^3 + 27b^3$; 2) $x^6 - y^9$.

Розв'язування.

1) Подавши даний многочлен у вигляді суми кубів двох виразів, отримуємо:

$8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3 = (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$.

2) Подавши даний многочлен у вигляді різниці кубів двох виразів, отримуємо:

$$x^6 - y^9 = (x^2)^3 - (y^3)^3 = (x^2 - y^3)(x^4 + x^2y^3 + y^6).$$

ПРИКЛАД 2

Спростіть вираз $(4y - 1)(16y^2 + 4y + 1)$ і знайдіть його значення при $y = \frac{1}{2}$.

Маємо:

$$(4y - 1)(16y^2 + 4y + 1) = (4y)^3 - 1 = 64y^3 - 1.$$

При $y = \frac{1}{2}$:

$$64y^3 - 1 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = 64 \cdot \frac{1}{8} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

ПРИКЛАД 3

Подайте у вигляді добутку вираз $(m - 4)^3 + 216$.

Застосувавши формулу суми кубів, отримуємо:

$$(m - 4)^3 + 216 =$$
$$= (m - 4)^3 + 6^3 = (m - 4 + 6)((m - 4)^2 - 6(m - 4) + 36) =$$
$$= (m + 2)(m^2 - 8m + 16 - 6m + 24 + 36) =$$
$$= (m + 2)(m^2 - 14m + 76).$$

ПРИКЛАД 4

Доведіть, що значення виразу $25^3 - 1$ ділиться націло на 24.

Застосувавши формулу різниці кубів, матимемо:

$$25^3 - 1 = (25 - 1)(25^2 + 25 + 1) = 24(25^2 + 26).$$

Даний вираз можна подати у вигляді добутку, один з множників якого дорівнює 24, а другий — натуральне число. Отже, значення цього виразу ділиться націло на 24.

1. Яку тотожність називають формулою суми кубів?
2. Який многочлен називають неповним квадратом різниці?
3. Сформулюйте правило розкладання на множники суми кубів двох виразів.
4. Яку тотожність називають формулою різниці кубів?
5. Який многочлен називають неповним квадратом суми?
6. Сформулюйте правило розкладання на множники різниці кубів двох виразів.

675.° Якому з наведених виразів тотожно дорівнює многочлен $a^3 - 27$:
1) $(a - 3)(a^2 + 6a + 9)$;
2) $(a - 3)(a^2 - 9)$;
3) $(a - 3)(a^2 - 3a + 9)$;
4) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$?

676.° Яка з наступних рівностей є тотожністю:
1) $m^3 + 8n^6 = (m + 2n^2)(m^2 + 2mn^2 + 4n^4)$;
2) $m^3 + 8n^6 = (m - 2n^2)(m^2 + 2mn^2 + 4n^4)$;
3) $m^3 + 8n^6 = (m + 2n^2)(m^2 - 2mn^2 + 4n^4)$;
4) $m^3 + 8n^6 = (m - 2n^2)(m^2 - 2mn^2 + 4n^4)$?

677.° Розкладіть на множники:
1) $a^3 + 8$;
2) $c^3 - 64$;
3) $125 - b^3$;
4) $1 + x^3$;
5) $a^3 + 1000$;
6) $27a^3 - 1$;
7) $1000c^3 - 216$;
8) $a^3b^3 - 1$;
9) $m^3n^3 + 0{,}001$;
10) $\frac{64}{343}m^3 - \frac{125}{216}n^3$;
11) $8m^6 + 27n^9$;
12) $m^6n^3 - p^{12}$;
13) $0{,}027x^{21} + 0{,}125y^{24}$;
14) $0{,}216 - 8c^{27}$;
15) $1000a^{12}b^3 + 0{,}001c^6d^{15}$.

678.° Розкладіть на множники:
1) $x^3 - 1$;
2) $27 + a^3$;
3) $216 - y^3$;
4) $\frac{1}{8}a^3 + b^3$;
5) $a^6 - 8$;
6) $a^3b^3 - c^3$;
7) $a^3 - b^{15}c^{18}$;
8) $125c^3d^3 + 0{,}008b^3$;
9) $\frac{64}{729}x^3 - \frac{27}{1000}y^6$.

679.° Подайте у вигляді многочлена вираз:
1) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$;
2) $(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$;

3) $(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$;

4) $(0{,}5xy + 2)(0{,}25x^2y^2 - xy + 4)$.

680.° Виконайте множення:

1) $(b - 4)(b^2 + 4b + 16)$;

2) $(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$;

3) $(x^3 + 6y^2)(x^6 - 6x^3y^2 + 36y^4)$;

4) $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{5}b\right)\left(\frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{20}ab + \frac{1}{25}b^2\right)$.

681.° Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(9a^2 + 3a + 1)(3a - 1)$, якщо $a = \frac{1}{3}$;

2) $(5y - 2)(25y^2 + 10y + 4) + 8$, якщо $y = -\frac{1}{5}$.

682.° Знайдіть значення виразу:

1) $(1 - b^2)(1 + b^2 + b^4)$, якщо $b = -2$;

2) $2x^3 + 7 - (x + 1)(x^2 - x + 1)$, якщо $x = -1$.

683.• Розкладіть на множники:

1) $(a + 6)^3 - 27$;

2) $(2x - 1)^3 + 64$;

3) $8a^6 - (4a - 3)^3$;

4) $1000 + (y - 10)^3$;

5) $(x + y)^3 - (x - y)^3$;

6) $(a - 2)^3 + (a + 2)^3$.

684.• Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(b - 5)^3 + 125$;

2) $(4 - 3x)^3 - 8x^3$;

3) $(a - b)^3 + (a + b)^3$;

4) $(c + 3)^3 - (c - 3)^3$.

685.• Спростіть вираз:

1) $(x + 1)(x^2 - x + 1) + (2 - x)(4 + 2x + x^2)$;

2) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) - x(x - 5)(x + 5)$;

3) $a(a - 3)^2 - (a + 3)(a^2 - 3a + 9)$;

4) $(a - 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)(a^6 + 1)(a^{12} + 1)$.

686.• Спростіть вираз:

1) $(a - 5)(a^2 + 5a + 25) - (a - 1)(a^2 + a + 1)$;

2) $(y - 3)(y^2 + 3y + 9) - y(y - 3)(y + 3) - (y + 3)^2$;

3) $(a - b)(a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$.

687.• Поставте замість зірочок такі одночлени, щоб справджувалася тотожність:

1) $(7k - p)(* + * + *) = 343k^3 - p^3$;

2) $(* + *)(25a^4 - * + 36b^2) = 125a^6 + 216b^3$;

3) $(mn + *)(* - * + k^6) = m^3n^3 + k^9$.

688.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) - 9x(3x^2 - 4) = 17$;

2) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - x(x - 7)(x + 7) = 15$;
3) $(x + 6)(x^2 - 6x + 36) - x(x - 9)^2 = 4x(4{,}5x - 13{,}5)$.

689. Розв'яжіть рівняння:
1) $(7 - 2x)(49 + 14x + 4x^2) + 2x(2x - 5)(2x + 5) = 43$;
2) $100(0{,}2x + 1)(0{,}04x^2 - 0{,}2x + 1) = 5x(0{,}16x^2 - 4)$.

690. Доведіть, що значення виразу:
1) $456^3 - 156^3$ ділиться націло на 300;
2) $254^3 + 238^3$ ділиться націло на 123;
3) $17^6 - 1$ ділиться націло на 36.

691. Доведіть, що значення виразу:
1) $341^3 + 109^3$ ділиться націло на 90;
2) $2^{15} + 3^3$ ділиться націло на 35.

692. Укажіть найменше натуральне значення n таке, щоб вираз $x^{2n} - y^{3n}$ можна було розкласти на множники як за формулою різниці квадратів, так і за формулою різниці кубів. Розкладіть отриманий многочлен на множники за цими формулами.

693. Придумайте многочлен, який можна розкласти на множники як за формулою різниці квадратів, так і за формулою різниці кубів. Розкладіть придуманий многочлен на множники за цими формулами.

694. Чи можна стверджувати, що коли сума двох натуральних чисел ділиться націло на деяке натуральне число, то на це число ділиться націло:
1) різниця їх квадратів;
2) сума їх квадратів;
3) сума їх кубів?

695. Доведіть, що сума кубів двох послідовних непарних натуральних чисел ділиться націло на 4.

696. Доведіть, що сума кубів двох послідовних натуральних чисел, жодне з яких не кратне 3, ділиться націло на 9.

697. Відомо, що числа x і y такі, що $x^2 + y^2 = 1$. Знайдіть значення виразу $x^6 + 3x^2y^2 + y^6$.

698. Відомо, що числа x і y такі, що $x^3 - y^2 = 2$. Знайдіть значення виразу $x^9 - 6x^3y^2 - y^6$.

699. Доведіть, що коли $2a - b = 1$, то $8a^3 - b^3 = 6ab + 1$.

700. Доведіть, що коли $a + 3b = 2$, то $a^3 + 27b^3 = 8 - 18ab$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

701. В одному ящику було на 12 кг яблук більше, ніж у другому. Коли з першого ящика переклали в другий 4 кг яблук, то виявилось, що кількість яблук у другому ящику становить $\frac{5}{7}$ кількості яблук у першому. Скільки кілограмів яблук було в кожному ящику спочатку?

702. Якою є остання цифра значення виразу $3^{16} + 7^{16}$?

703. Знайдіть значення кожного з наступних виразів при $a = 1$ і $a = -1$:

1) $a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^{99} + a^{100}$;
2) $a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^{98} + a^{99}$;
3) $aa^2a^3a^4 \cdot \ldots \cdot a^{99}a^{100}$;
4) $aa^2a^3a^4 \cdot \ldots \cdot a^{98}a^{99}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

704. Розкладіть на множники:

1) $3x^2 + 12xy$;
2) $10m^5 - 5m$;
3) $ab - ac + 7b - 7c$;
4) $6x - xy - 6y + y^2$;
5) $49b^2 - c^2$;
6) $p^2 + 12pk + 36k^2$;
7) $100a^4 - \frac{1}{9}b^2$;
8) $25a^2 - (a - 3)^2$.

705. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 4)(x + 3) = 0$;
2) $x^2 - 81 = 0$;
3) $7x^2 + 21x = 0$;
4) $9x^2 - 6x + 1 = 0$;
5) $x(x + 7)(3x - 2) = 0$;
6) $12x^3 - 2x^2 = 0$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

706. Є 100 купок по 100 монет. Одна з купок складається з фальшивих монет, кожна з яких на 1 г легша від справжньої. Вага справжньої монети становить 10 г. Яку найменшу кількість зважувань на пружинних терезах зі стрілкою треба зробити, щоб знайти купку з фальшивих монет?

19. Застосування різних способів розкладання многочлена на множники

У попередніх пунктах ми розглянули такі способи розкладання многочлена на множники:

- винесення спільного множника за дужки;
- метод групування;
- застосування формул скороченого множення.

Проте в математиці при розв'язуванні багатьох задач часто доводиться використовувати кілька прийомів, застосовуючи їх у певній послідовності. Зокрема, є багато многочленів, для розкладання яких на множники треба застосувати кілька способів.

Виникає природне питання: «Які способи і в якій послідовності треба застосовувати при розкладанні многочлена на множники?» Універсальних рекомендацій не існує, усе залежить від конкретного многочлена. І все ж дамо кілька загальних порад:

1) якщо це можливо, то розкладання треба починати з винесення спільного множника за дужки;
2) перевірити, чи можна застосувати формули скороченого множення;
3) якщо не вдається застосувати формули, то спробуйте скористатися методом групування.

ПРИКЛАД 1

Розкладіть на множники многочлен:

1) $3a^2b - 12b$;
2) $-5x^2 + 30xy - 45y^2$;
3) $24m^4 + 3m$;
4) $3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab$.

Розв'язування.

1) Застосувавши послідовно винесення спільного множника за дужки і формулу різниці квадратів, отримуємо:
$$3a^2b - 12b = 3b(a^2 - 4) = 3b(a - 2)(a + 2).$$
2) Застосувавши послідовно винесення спільного множника за дужки і формулу квадрата різниці, отримуємо:
$$-5x^2 + 30xy - 45y^2 = -5(x^2 - 6xy + 9y^2) = -5(x - 3y)^2.$$

3) Винесемо спільний множник за дужки і застосуємо формулу суми кубів:
$24m^4 + 3m = 3m(8m^3 + 1) = 3m(2m + 1)(4m^2 - 2m + 1)$.

4) Комбінуючи метод винесення спільного множника за дужки і метод групування, матимемо:
$3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab = 3a(a^2 + 7a - 2ab - 14b) =$
$= 3a((a^2 + 7a) + (-2ab - 14b)) = 3a(a(a + 7) - 2b(a + 7)) =$
$= 3a(a + 7)(a - 2b)$.

ПРИКЛАД 2

Подайте у вигляді добутку многочленів:

1) $x^{16} - 1$; 2) $a^{12} - b^{12}$.

Розв'язування.

1) $x^{16} - 1 = (x^8 - 1)(x^8 + 1) = (x^4 - 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) =$
$= (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1) =$
$= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)(x^8 + 1)$.

2) $a^{12} - b^{12} = (a^6 - b^6)(a^6 + b^6) = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)(a^6 + b^6)$.

Ми отримали три множники, один з яких є різницею кубів, а два інших — сумою кубів. Використовуючи відповідні формули, остаточно отримуємо:

$$a^{12} - b^{12} = (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4).$$

ПРИКЛАД 3

Розкладіть на множники:

1) $m^2 - 16n^2 + 2m - 8n$; 2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16$.

Розв'язування.

1) $m^2 - 16n^2 + 2m - 8n = (m^2 - 16n^2) + (2m - 8n) =$
$= (m - 4n)(m + 4n) + 2(m - 4n) = (m - 4n)(m + 4n + 2)$.

2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16 = (x^2 + 4xy + 4y^2) - 16 =$
$= (x + 2y)^2 - 16 = (x + 2y - 4)(x + 2y + 4)$.

ПРИКЛАД 4

Розв'яжіть рівняння $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$.

Маємо:

$$x^2(x + 1) - 4(x + 1) = 0;$$
$$(x + 1)(x^2 - 4) = 0;$$
$$(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0;$$

$$x + 1 = 0, \text{ або } x - 2 = 0, \text{ або } x + 2 = 0;$$
$$x = -1, \text{ або } x = 2, \text{ або } x = -2.$$

Відповідь: -1; 2; -2.

ПРИКЛАД 5

Розкладіть на множники тричлен $x^2 + 8x - 9$, виділивши попередньо квадрат двочлена.

Якщо до суми $x^2 + 8x$ додати число 16, то отриманий вираз $x^2 + 8x + 16$ можна «згорнути» за формулою квадрата суми. Тому, додавши до даного тричлена число 16 і віднявши від нього 16, отримуємо:

$$x^2 + 8x - 9 = x^2 + 8x + 16 - 16 - 9 = (x + 4)^2 - 25 =$$
$$= (x + 4 - 5)(x + 4 + 5) = (x - 1)(x + 9).$$

ПРИКЛАД 6

Розкладіть на множники многочлен $x^4 + 4y^4$.

Оскільки $x^4 = (x^2)^2$, $4y^4 = (2y^2)^2$, то, додавши до даного многочлена $4x^2y^2$ (подвоєний добуток одночленів x^2 і $2y^2$) і віднявши такий самий одночлен, отримуємо:

$$x^4 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 =$$
$$= (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy).$$

707.° Розкладіть на множники многочлен:

1) $2a^2 - 2b^2$;
2) $cx^2 - cy^2$;
3) $3x^2 - 3$;
4) $3ab^2 - 27a$;
5) $x^3 - 4x$;
6) $2y^3 - 18y$;
7) $x^4 - x^2$;
8) $0{,}09t^4 - t^6$;
9) $\frac{16}{49}a^2b^4c^5 - b^2c^3$.

708.° Подайте у вигляді добутку многочлен:

1) $12b^2 - 12c^2$;
2) $2a^2c - 2b^2c$;
3) $5a^2 - 20$;
4) $3mn^2 - 48m$;
5) $7y^3 - 7y$;
6) $a^3 - a^5$.

709.° Розкладіть на множники:

1) $3a^2 + 6ab + 3b^2$;
2) $5m^2 + 5n^2 - 10mn$;
3) $-3x^2 + 12x - 12$;
4) $-7b^2 - 14bc - 7c^2$;
5) $x^2y + 14xy^2 + 49y^3$;
6) $-8a^3b + 56a^2b^2 - 98ab^3$.

710.° Розкладіть на множники:

1) $8x^2 + 16xy + 8y^2$;
2) $-2a^2 + 24ab - 72b^2$;
3) $-12b^3 - 12b^2 - 3b$;
4) $48m^3n - 72m^2n + 27mn$.

711.° Подайте у вигляді добутку многочлен:
1) $a^4 - b^4$; 2) $c^4 - 81$.

712.° Розкладіть на множники:
1) $x^4 - 16$; 2) $y^8 - 1$.

713.° Розкладіть на множники:
1) $4a^3 - 4b^3$; 3) $7 + 7b^3$; 5) $2a^4 - 250a$;
2) $2m^3 - 16$; 4) $-x^4 + 27x$; 6) $9a^5 - 9a^2$.

714.° Подайте у вигляді добутку многочлен:
1) $3x^3 + 3y^3$; 2) $5m^4 - 320mn^3$; 3) $6c^5 - 6c^8$.

715.° Розкладіть на множники:
1) $a^7 + ab^6$; 2) $x^8 - y^8$; 3) $c^6 - 1$.

716.° Розкладіть на множники:
1) $c^6 + c^9$; 2) $m^9 - n^9$; 3) $a^8 - b^4$.

717.° Подайте у вигляді добутку многочлен:
1) $3ab + 15b - 3a - 15$; 5) $a^3 + a^2 - a - 1$;
2) $84 - 42y - 7xy + 14x$; 6) $2x^3 - 2xy^2 - 8x^2 + 8y^2$;
3) $abc + 6ac + 8ab + 48a$; 7) $5a^2 - 5b^2 - 15a^3b + 15ab^3$;
4) $m^3 - m^2n + m^2 - mn$; 8) $a^2b^2 - 1 - b^2 + a^2$.

718.° Розкладіть на множники:
1) $15cx + 2cy - cxy - 30c$;
2) $35a^2 - 42ab + 10a^2b - 12ab^2$;
3) $x^3 + x^2y + x^2 + xy$;
4) $mn^4 - n^4 + mn^3 - n^3$.

719.• Розкладіть на множники:
1) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2$; 5) $9a^2 + c^2 + 6ac - 9$;
2) $81 - (x^2 + 6x)^2$; 6) $a^2 - b^2 - 10b - 25$;
3) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$; 7) $49 - y^2 + x^2 - 14x$;
4) $c^2 + 4c + 4 - k^2$; 8) $mn^2 - m^3 - 12m^2 - 36m$.

720.• Подайте у вигляді добутку вираз:
1) $(m^2 - 2m)^2 - 1$; 4) $64x^2 + 48xy + 9y^2 - 144$;
2) $16 - (m^2 + 4m)^2$; 5) $c^2 - a^2 + 22a - 121$;
3) $x^2 - 18xy + 81y^2 - z^2$; 6) $100 - 25y^2 - 60x^2y - 36x^4$.

721.• Розкладіть на множники:
1) $a^2 - b^2 - a - b$; 6) $a^2 - 10a + 25 - ab + 5b$;
2) $x - y - x^2 + y^2$; 7) $8mp + 8np - m^2 - 2mn - n^2$;
3) $4m^2 - 9n^2 + 2m + 3n$; 8) $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2$;
4) $c^2 - d^2 + 4c - 4d$; 9) $m^3 - 8n^3 - m^2 + 4mn - 4n^2$;
5) $5x^2y - 5xy^2 - x^2 + y^2$; 10) $a^3 - 4a^2 + 4a - 1$.

722.• Розкладіть на множники:

1) $m^2 - n^2 - m + n$;
2) $c + d - c^2 + d^2$;
3) $16x^2 - 25y^2 - 4x - 5y$;
4) $12a^2b^3 + 3a^3b^2 + 16b^2 - a^2$;
5) $49c^2 - 14c + 1 - 21ac + 3a$;
6) $ax^2 + ay^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$;
7) $27c^3 - d^3 + 9c^2 + 3cd + d^2$;
8) $b^3 - 2b^2 - 2b + 1$.

723.• Розкладіть на множники:

1) $x^2(x - 2) - 18x(x - 2) + 81(x - 2)$;
2) $4x(y^2 - 9) + 4x^2(y^2 - 9) - 9 + y^2$;
3) $b^2(a + 1) - a^2(b + 1)$;
4) $(a - b)(b^2 - c^2) - (b - c)(a^2 - b^2)$.

724.• Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $x^2(x + 4) - 20x(x + 4) + 100(x + 4)$;
2) $a^2 - 36 - 2a(36 - a^2) - a^2(36 - a^2)$;
3) $a^2(b - 1) - b^2(a - 1)$;
4) $(m - n)(n^3 - p^3) - (n - p)(m^3 - n^3)$.

725.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - 4x = 0$;
2) $x^4 - x^2 = 0$;
3) $x^5 - 36x^3 = 0$;
4) $9x^3 - x = 0$;
5) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$;
6) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$;
7) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$;
8) $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$.

726.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - x = 0$;
2) $x^4 + x^2 = 0$;
3) $x^4 - 8x^3 = 0$;
4) $49x^3 + 14x^2 + x = 0$;
5) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$;
6) $x^3 - 4x^2 - 25x + 100 = 0$.

727.• Чи є тотожністю рівність:

1) $(a - 1)^3 - 9(a - 1) = (a - 1)(a - 4)(a + 2)$;
2) $(x^2 + 1)^2 - 4x^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2$?

728.• Доведіть тотожність:

1) $(a + 2)^3 - 25(a + 2) = (a + 2)(a + 7)(a - 3)$;
2) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2 =$
$= (a + b + c - d)(a + b - c + d)$.

729.• Розкладіть вираз на множники двома способами:
а) застосуйте формулу різниці квадратів;
б) розкрийте дужки і застосуйте метод групування:

1) $(ab + 1)^2 - (a + b)^2$; 2) $(a + 2b)^2 - (ab + 2)^2$.

730.** Подайте у вигляді куба двочлена вираз:

1) $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$; 2) $b^3 - 6b^2 + 12b - 8$.

731.** Доведіть тотожність:

1) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(a + c)$;

2) $(a - b)^3 + (b - c)^3 - (a - c)^3 = -3(a - b)(b - c)(a - c)$.

732.** Розкладіть на множники вираз:

1) $(x - y)(x + y) + 2(x + 3y) - 8$;

2) $(2a - 3b)(2a + 3b) - 4(a + 3b) - 3$.

733.** Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(5x - y^2)(5x + y^2) - 2(15x - 7y^2) - 40$;

2) $(3m - 2n)(12m + 5n) + 3m(3n + 4) - 2(3n^2 - 20n + 12)$.

734.** Розкладіть на множники тричлен, виділивши попередньо квадрат двочлена:

1) $x^2 - 10x + 24$; 4) $4a^2 - 12a + 5$;

2) $a^2 + 4a - 32$; 5) $9x^2 - 24xy + 7y^2$;

3) $b^2 - 3b - 4$; 6) $36m^2 - 60mn + 21n^2$.

735.** Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^2 - 4x + 3$; 4) $x^2 + x - 6$;

2) $a^2 + 2a - 24$; 5) $c^2 + 8cd + 15d^2$;

3) $y^2 + 12y + 35$; 6) $9x^2 - 30xy + 16y^2$.

736.** При деяких значеннях x_1 і x_2 виконуються рівності $x_1 - x_2 = 8$, $x_1x_2 = 5$. Знайдіть при тих самих значеннях x_1 і x_2 значення виразу:

1) $x_1x_2^2 - x_1^2x_2$; 3) $(x_1 + x_2)^2$;

2) $x_1^2 + x_2^2$; 4) $x_1^3 - x_2^3$.

737.** При деяких значеннях x і y виконуються рівності $x + y = 6$, $xy = -3$. Знайдіть при тих самих значеннях x і y значення виразу:

1) $x^3y^2 + x^2y^3$; 2) $(x - y)^2$; 3) $x^4 + y^4$.

738.* Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(2n - 1)^3 - 4n^2 + 2n + 1$ ділиться націло на 16.

739.* Розкладіть на множники:

1) $x^4 - 5x^2 + 4$; 3) $4x^4 - 12x^2 + 1$; 5) $x^4 + 4$;

2) $x^4 + x^2 + 1$; 4) $x^5 + x + 1$; 6) $x^8 + x^4 - 2$.

740.* Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $x^4 + 5x^2 + 9$; 2) $x^4 - 8x^2 + 4$.

741.* Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n, відмінному від 1, значення виразу $n^4 + n^2 + 1$ є складеним числом.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

742. Дано три числа, з яких кожне наступне на 4 більше за попереднє. Знайдіть ці числа, якщо добуток меншого і більшого з них на 88 менше від добутку більшого і середнього.

743. Петро спочатку піднявся на гору зі швидкістю 2,5 км/год, а потім спустився по іншій дорозі зі швидкістю 4 км/год. Знайдіть загальний шлях, пройдений Петром, якщо дорога на гору на 3 км коротша за дорогу з гори, а час, витрачений на весь шлях, становить 4 год.

744. Розв'яжіть рівняння:

1) $|7x - 3| = 4$;
2) $||x| - 10| = 8$;
3) $4(x - 2) + 5|x| = 10$;
4) $|x| = 3x - 8$.

745. Доведіть, що сума трицифрового числа і подвоєної суми його цифр ділиться націло на 3.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

746. Обчисліть значення y за формулою $y = 0,2x - 3$, якщо:

1) $x = 4$;
2) $x = -3$.

747. Знайдіть координати точок A, B, C, D, E, F, K, M, N, зображених на рисунку 7.

748. На координатній площині позначте точки: $A\,(2;\ 3)$; $B\,(4;\ -5)$; $C\,(-3;\ 7)$; $D\,(-2;\ 2)$; $K\,(-2;\ -2)$; $M\,(0;\ 2)$; $N\,(-3;\ 0)$; $P\,(1;\ -6)$; $F\,(-4;\ -2)$.

749. Побудуйте відрізки AB і CD і знайдіть коор-

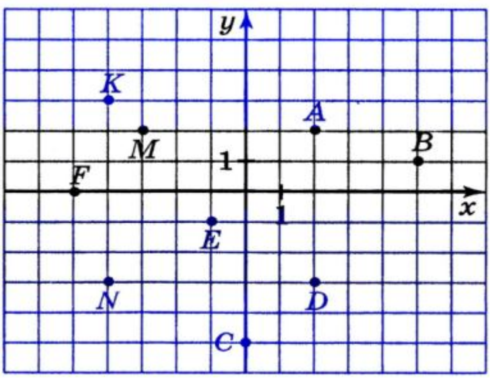


Рис. 7

динати точки перетину цих відрізків, якщо $A(-5; -2)$; $B(1; 4)$; $C(-3; 2)$; $D(2; -3)$.

750. Як розміщена на координатній площині відносно осі x точка A, якщо:
1) $A(2; 6)$; 2) $A(-3; 1)$; 3) $A(-4; -5)$; 4) $A(-3; 0)$?

751. Знайдіть координати вершини квадрата зі стороною 4, якщо дві його сторони лежать на осях координат, а добуток координат однієї з вершин — додатне число. Скільки розв'язків має задача?

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 26, 34 на с. 266, 269.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

752. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ — деякий набір натуральних чисел, а набір $y_1, y_2, \ldots, y_{25}$ отримано з нього в результаті перестановки деяких чисел. Доведіть, що значення виразу $(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \ldots (x_{25} - y_{25})$ є парним числом.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ № 5 «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

1. Подайте у вигляді многочлена вираз $(x - 6)(x^2 + 6x + 36)$.
А) $x^3 - 36$; В) $x^3 - 216$;
Б) $x^3 + 36$; Г) $x^3 + 216$.

2. Знайдіть многочлен M, якщо $y^3 - 64 = (y - 4) \cdot M$.
А) $y^2 - 8y + 16$; В) $y^2 - 4y + 16$;
Б) $y^2 + 8y + 16$; Г) $y^2 + 4y + 16$.

3. Спростіть вираз $(a^2 + 2b^3)(a^4 - 2a^2b^3 + 4b^6)$.
А) $a^6 + 4b^9$; Б) $a^6 - 4b^9$; В) $a^6 - 8b^9$; Г) $a^6 + 8b^9$.

4. Розкладіть на множники многочлен $3c^2 - 48$.
А) $3(c - 16)$; В) $3(c - 4)^2$;
Б) $3(c - 4)(c + 4)$; Г) $3c(c - 16)$.

5. Розкладіть на множники вираз $7a^2 - 42a + 63$.
А) $7(a - 3)(a + 3)$; В) $7(a + 3)^2$;
Б) $7(a - 3)^2$; Г) $7(a - 9)^2$.

6. Розкладіть на множники многочлен $a^8 - a^6$.
А) $a^6(a - 1)$; В) $a^6(a + 1)^2$;
Б) $a^6(a - 1)(a + 1)$; Г) $a^6(a - 1)^2$.

7. Розкладіть на множники вираз $m^2 - n^2 + m + n$.

А) $(m + n)(m - n + 1)$; В) $(m - n)(m + n + 1)$;
Б) $(m - n)(m - n + 1)$; Г) $(m + n)(m + n + 1)$.

8. Подайте у вигляді добутку вираз $x^2 - y^2 + 14y - 49$.

А) $(x - y + 7)(x + y + 7)$;
Б) $(x - y - 7)(x + y + 7)$;
В) $(x - y + 7)(x + y - 7)$;
Г) $(x - y - 7)(x + y - 7)$.

9. Розкладіть на множники многочлен $81a^4 - 1$.

А) $(3a - 1)(3a + 1)(9a^2 + 1)$;
Б) $(3a^2 - 1)(3a^2 + 1)(9a^2 + 1)$;
В) $(3a - 1)^2(3a + 1)^2$;
Г) $(3a - 1)^4$.

10. Розв'яжіть рівняння $49x - x^2 = 0$.

А) 0; 7; Б) −7; 0; 7; В) 0; 49; Г) −7; 7.

11. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$.

А) −1; 1; Б) −1; 3; В) 1; 3; Г) −3; −1; 1.

12. Подайте у вигляді добутку вираз $(x^2 - 2)^2 - 4(x^2 - 2) + 4$.

А) $(x - 4)^2$; В) x^4;
Б) $(x - 2)^2(x + 2)^2$; Г) $(x^2 - 6)^2$.

Мова, зрозуміла всім

Тут трьома східними мовами — арабською, китайською та івритом — записано добре відому вам властивість: від перестановки місць доданків сума не змінюється.

في الجمع تبديل أماكن الأعداد لا يغير النتيجة

加数的次序不影响加和的结果

כאשר מחברים שני מספרים, אין חשיבות לשאלה מי הראשון ומי השני.

Проте людині, яка не володіє цими мовами, це просте речення буде не зрозумілим.

Тоді на допомогу приходить інтернаціональна математична мова. Переклад нею має такий вигляд:

$$a + b = b + a.$$

Як і будь-яка інша мова, вона має свій алфавіт — математичні символи. Це цифри, букви, знаки математичних дій тощо. З них складають «слова» математичної мови, наприклад, вирази.

Здавалося б, що може бути простішим — використовувати математичну фразу «$2x = 4$» для запису лінійного рівняння. Однак навіть великий аль-Хорезмі[1] записував це речення громіздко: «Два корені дорівнюють 4 дирхемам[2]». Це пов'язано з тим, що аль-Хорезмі взагалі не використовував у своїх роботах математичну символіку.

Сказане зовсім не означає, що до IX ст. вчені не робили спроб створити математичну мову.

Ще у I ст. грецький математик Герон Александрійський почав позначати невідому величину буквою ς (сигма). Наступний крок у створенні символіки зробив у III ст. Діофант Александрійський. У своїй знаменитій роботі «Арифметика» він запровадив позначення не лише для невідомої величини, але й для деяких її степенів:

перший степінь — σ;
другий степінь — Δ^{v} (від Δυναμις — «дюнаміс», що означає сила, степінь);
третій степінь — K^{v} (від Κυβος — «кубос», тобто куб).

Для рівності Діофант застосовував знак ισ — перші дві букви слова ισος — «ісос», тобто рівний.

Навряд чи символіку Діофанта можна вважати зручною і наочною. Наприклад, він не запровадив ніяких спеціальних символів для позначення додавання і множення. Позначення усіх невідомих величин однією буквою ς також сильно ускладнювало запис розв'язання задач, у яких фігурувало кілька змінних.

Із занепадом епохи античності алгебраїчну символіку Діофанта практично було забуто.

Відродження процесу створення алгебраїчної символіки пов'язано з роботами талановитого німецького вченого

[1] Ми розповідали про нього на с. 12.
[2] Дирхем — старовинна арабська срібна монета.

XIII ст. Йордана Неморарія, який вніс до європейської математики ідею буквеної символіки.

Франсуа Вієт

У XV ст. широкого розповсюдження набули символи, які застосовувалися видатним італійським математиком Лукою Паччолі (біля 1445 — біля 1515).

Чимало зробили для вдосконалення математичної мови німецькі математики XVI ст. Ян Відман і Адам Різе.

Творцем буквеної символіки за правом вважають найвидатнішого французького математика XVI ст. Франсуа Вієта (1540–1603). Він перший позначив буквами не тільки невідомі, але й дані величини. Вієт запропонував: «Шукані величини будемо позначати буквою A або іншою голосною, E, I, O, U, а дані — буквами B, D, G та іншими приголосними». Такі позначення дали змогу Вієту не тільки розв'язувати окремі рівняння, але й досліджувати процес розв'язання одразу цілого класу рівнянь. Наприклад, завдяки символіці Вієта всі лінійні рівняння можна записати у вигляді $ax = b$, а отже, побудувати процес розв'язання рівняння в загальному вигляді так, як ми це зробили в п. 2.

В. Й. Левицький

Мови багатьох народів продовжують розвиватися. Не є винятком і математична мова. Нові відкриття приносять у математику нові символи й терміни.

Великий внесок у розвиток і систематизацію української математичної термінології зробив професор фізико-математичного факультету Львівського університету Володимир Йосипович Левицький (1872–1956). Його науково-методичні праці значною мірою сприяли становленню й розвитку української математичної школи.

М. О. Зарицький

Фундатором української математичної культури по праву вважається вчений

з європейським іменем, доктор філософії, професор Мирон Онуфрійович Зарицький (1889–1961). Його наукові роботи і педагогічні здобутки добре відомі в багатьох країнах світу.

ПІДСУМКИ

У цьому параграфі:

- було введено такі поняття:
  - тотожно рівні вирази;
  - тотожність;
  - тотожні перетворення;
  - степінь з натуральним показником;
  - одночлен і многочлен;
  - степінь одночлена;
  - подібні одночлени;
  - коефіцієнт одночлена;
  - зведення подібних членів многочлена;
- ви вивчили:
  - методи доведення тотожностей;
  - властивості степеня з натуральним показником;
  - дії над одночленами і многочленами;
  - формули скороченого множення;
  - методи і прийоми розкладання многочленів на множники.

§3. ФУНКЦІЇ

- У цьому параграфі ви дізнаєтеся, що багато величин зв'язані між собою. Ці зв'язки задаються певними правилами.
- Ви ознайомитеся зі способами задання цих правил.

20. Зв'язки між величинами. Функція

Учитель пише на дошці. При цьому змінюється довжина сліду крейди, маса, об'єм і навіть температура шматочку крейди.

Працює шкільна їдальня. Протягом дня змінюються кількість учнів, що її відвідали, витрати електроенергії та води, грошова виручка тощо.

Узагалі, у процесах, які протікають навколо нас, багато величин змінюють свої значення. Зрозуміло, що деякі з цих величин пов'язані між собою, тобто зміна однієї величини спричиняє зміну другої.

Багато наук, такі як фізика, хімія, біологія та інші, досліджують залежності між величинами. Вивчає ці зв'язки й математика, конструюючи **математичні моделі** реальних процесів. З поняттям математичної моделі ви вже зустрічалися в п. 3.

Розглянемо кілька прикладів.

ПРИКЛАД 1

Змінюється сторона квадрата. Зрозуміло, що при цьому змінюватиметься і його периметр. Якщо довжину сторони квадрата позначити a, а периметр — P, то залежність змінної P від змінної a задається формулою

$$P = 4a.$$

Ця формула є математичною моделлю зв'язку між такими величинами, як довжина сторони квадрата і його периметр.

За допомогою цієї формули можна, обравши довільну довжину сторони, знайти відповідне значення периметра квадрата. Тому в цій моделі змінну a називають **незалежною змінною**, а змінну P — **залежною змінною.**

Наголосимо, що ця формула задає правило, за допомогою якого за значенням незалежної змінної можна *однозначно* знайти значення залежної змінної.

ПРИКЛАД 2

Сім'я поклала до банку 10 000 грн. під 10 % річних. Тоді через рік величина M — сума грошей на рахунку — становитиме

$$M = 10\ 000 + \frac{10\ 000 \cdot 10}{100} = 11\ 000 \text{ (грн.)}.$$

Через 2 роки ця сума складатиме

$$M = 11\ 000 + \frac{11\ 000 \cdot 10}{100} = 12\ 100 \text{ (грн.)}.$$

Аналогічно можна встановити, що через 3 роки $M = 13\ 310$ грн., через 4 роки $M = 14\ 661$ грн., через 5 років $M = 16\ 105{,}1$ грн.

Залежність суми грошей від кількості років, протягом яких вони перебували на рахунку, виражає така таблиця:

n, кількість років	1	2	3	4	5
M, сума грошей на рахунку	11 000	12 100	13 310	14 461	16 105,1

Ця таблиця є математичною моделлю залежності величини M від величини n. Тут n виступає в ролі незалежної змінної, а M — залежної.

Отже, ця таблиця задає правило, за допомогою якого за значенням незалежної змінної можна *однозначно* знайти значення залежної змінної.

У старших класах ви доведете, що за кількістю років, протягом яких гроші перебувають на рахунку, відповідне значення суми грошей можна знайти за допомогою формули $M = 10\ 000 \cdot 1{,}1^n$.

ПРИКЛАД 3

На рисунку 8 зображено графік залежності температури повітря від часу доби.

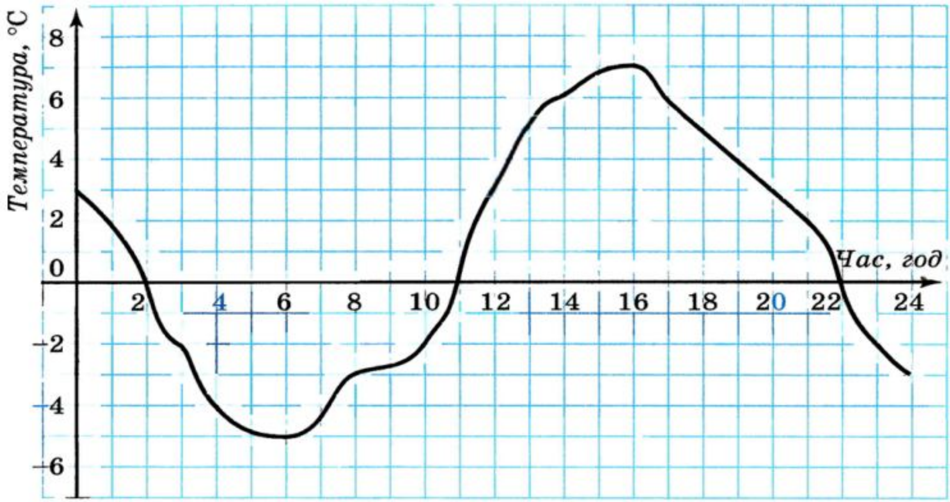


Рис. 8

Використовуючи цей графік, можна, обравши довільний момент часу t, знайти відповідну температуру повітря T (у градусах Цельсія). Таким чином, величина t є незалежною змінною, а величина T — залежною.

Цей графік можна розглядати як математичну модель залежності величини T (температури) від величини t (часу).

Зазначимо, що цей графік задає правило, за допомогою якого за значенням незалежної змінної можна *однозначно* знайти значення залежної змінної.

Незважаючи на істотні відмінності наведених трьох прикладів, їм усім притаманне таке: *указано правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної*. Таке правило називають **функцією**, а відповідну залежність однієї змінної від другої — **функціональною**.

Не кожна залежність між змінними величинами є функціональною. Наприклад, нехай довжина маршруту автобуса дорівнює 15 км. Вартість проїзду визначається таблицею:

Вартість проїзду, грн.	1	2	3
Довжина шляху, який проїжджає пасажир, км	до 5	від 5 до 10	від 10 до 15

Зрозуміло, що змінні величини «вартість проїзду» і «довжина шляху, який проїжджає пасажир» пов'язані між собою. Однак, якщо вважати вартість незалежною змінною, то описана залежність не є функціональною. Справді, якщо пасажир заплатив 1 грн., то не можна однозначно встановити, який шлях він проїхав.

Якщо у прикладі 3 температуру T вважати незалежною змінною, то не завжди можна за значенням величини T однозначно знайти значення величини t. Тому наведена залежність часу від температури не є функціональною.

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Якщо змінна y функціонально залежить від змінної x, то цей факт позначають так: $y = f(x)$ (читають: «ігрек дорівнює еф від ікс»).

Незалежну змінну ще називають **аргументом функції**.

Усі значення, яких набуває аргумент, утворюють **область визначення функції**. Так, у першому прикладі областю визначення функції є всі додатні числа; у другому — натуральні числа 1, 2, 3, 4, 5; у третьому — усі невід'ємні числа, що не перевищують 24.

Для функції f кожному значенню аргумента x відповідає деяке значення залежної змінної y. Значення залежної змінної ще називають **значенням функції** та позначають $f(x)$. Наприклад, $f(7)$ — це значення функції при $x = 7$.

Так, у першому прикладі $f(2) = 8$, у другому $f(2) = 12\,100$, у третьому $f(2) = 0$. Узагалі, запис $f(a) = b$ означає, що аргументу a відповідає значення функції b.

Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють **область значень функції**.

У прикладі 1 область значень функції — це всі додатні числа, у прикладі 2 — числа, записані в другому рядку таблиці, у прикладі 3 — усі числа, не менші від −5 и не більші за 7.

1. Як називають правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної?
2. Яку залежність однієї змінної від другої називають функціональною?
3. Як читають запис $y = f(x)$?
4. Що називають аргументом функції?
5. Що таке область визначення функції?
6. Що називають значенням функції?
7. Як читають запис $f(3) = 6$ і що він означає?
8. Що таке область значень функції?

753.° Чи пов'язані між собою периметр рівностороннього трикутника і його сторона? Якщо сторона трикутника дорівнює a, а периметр — P, то якою формулою задається залежність змінної P від змінної a? Чи є ця залежність функціональною?

754.° Чи пов'язані між собою площа квадрата і його сторона? Якщо сторона квадрата дорівнює a, а площа — S, то якою формулою задається залежність змінної S від змінної a? Чи є ця залежність функціональною?

755.° Автомобіль рухається зі швидкістю 60 км/год. Як залежить довжина пройденого ним шляху s від часу t? Задайте цю залежність формулою. Чи є ця залежність функціональною? У разі позитивної відповіді назвіть аргумент відповідної функції.

756.° У цистерні було 300 л води. Через відкритий кран щохвилини з цистерни виливається 2 л води. Задайте формулою залежність об'єму V води в цистерні від часу t, протягом якого з неї виливається вода. Чи є правило, за допомогою якого за значенням змінної t знаходиться значення змінної V, функцією? У разі позитивної відповіді вкажіть область визначення і область значень цієї функції.

757.° Нехай a — довжина ребра куба, V — його об'єм. Задайте формулою залежність змінної V від змінної a. Чи є ця залежність функціональною?

758.° Автомобіль проїхав 120 км зі швидкістю v. Якою формулою задається залежність часу руху t від швидкості v автомобіля? Чи є ця залежність функціональною? У разі позитивної відповіді вкажіть, що є аргументом відповідної функції.

759.° Нехай градусні міри двох суміжних кутів дорівнюють α і β. Задайте формулою залежність β від α. Чи є ця залежність функціональною? У разі позитивної відповіді вкажіть, що є аргументом відповідної функції, її область визначення та область значень.

760.° У вашому класі була проведена контрольна робота з математики.

1) Кожному учню поставили у відповідність оцінку, яку він отримав.
2) Кожній оцінці поставили у відповідність учня, який її отримав.

Яке з цих двох правил є функцією?

761.° Розглянемо правило, згідно з яким кожному натуральному числу відповідає протилежне йому число. Чи є таке правило функцією?

762.° Кожному невід'ємному числу поставили у відповідність саме це число, а кожному від'ємному числу — число, йому протилежне. Чи є таке правило функцією?

763.° Кожному раціональному числу, відмінному від нуля, відповідає обернене до нього число. Чи є таке правило функцією?

764.° Користуючись графіком залежності температури повітря від часу протягом доби (рис. 8), визначте:

1) якою була температура повітря о 4 год? о 6 год? о 10 год? о 18 год? о 22 год?
2) о котрій годині температура повітря була 5° C? -2° C?
3) о котрій годині температура повітря була нульовою?
4) якою була найнижча температура і о котрій годині?
5) якою була найвища температура і о котрій годині?
6) протягом якого проміжку часу температура повітря була нижчою від 0° C? вищою за 0° C?

7) протягом якого проміжку часу температура повітря підвищувалась? знижувалась?

Складіть за графіком таблицю зміни температури повітря протягом доби через кожні 2 год.

765.° На рисунку 9 зображено графік зміни температури розчину під час хімічного досліду.

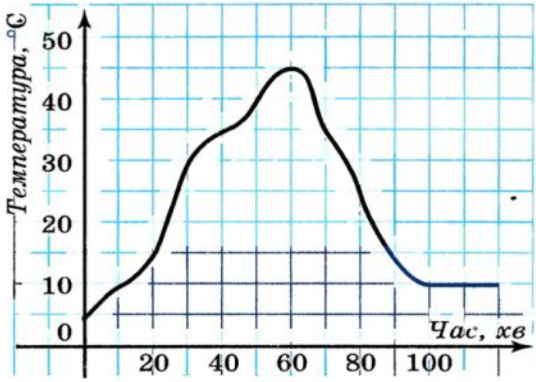


Рис. 9

1) Якою була початкова температура розчину?
2) Якою була температура розчину через 30 хв після початку досліду? через півтори години?
3) Якою була найвища температура розчину і через скільки хвилин після початку досліду?
4) Через скільки хвилин після початку досліду температура розчину була 35° С?

Складіть за графіком таблицю зміни температури розчину через кожні 10 хв протягом перших двох годин після початку досліду.

766.° На рисунку 10 зображено графік зміни температури повітря протягом доби. Користуючись цим графіком, визначте:

1) якою була температура повітря о 2 год? о 8 год? о 12 год? о 16 год? о 22 год?
2) о котрій годині температура повітря була −3° С? −4° С? 0° С?
3) якою була найнижча температура і о котрій годині?
4) якою була найвища температура і о котрій годині?

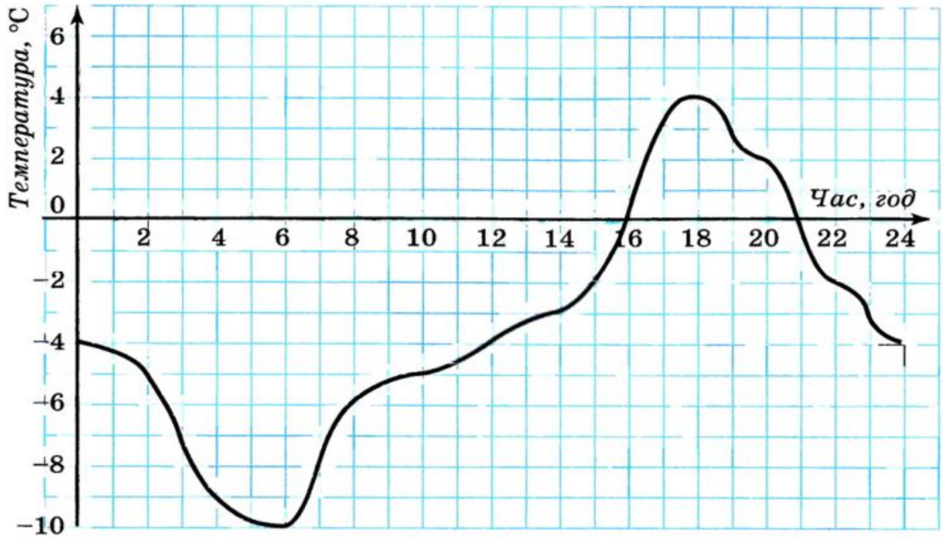


Рис. 10

5) протягом якого проміжку часу температура повітря була нижчою від 0° С? вищою за 0° С?
6) протягом якого проміжку часу температура повітря підвищувалась? знижувалась?

Складіть за графіком таблицю зміни температури повітря протягом доби через кожні 2 год.

767.° Мотоцикліст виїхав з дому і через деякий час повернувся. На рисунку **11** зображено графік зміни відстані від мотоцикліста до дому залежно від часу (*графік руху мотоцикліста*). Користуючись графіком, визначте:

Рис. 11

1) яку відстань проїхав мотоцикліст за першу годину руху?
2) на якій відстані від місця початку руху мотоцикліст зупинився на перший відпочинок? на другий відпочинок?
3) скільки часу тривав перший відпочинок? другий відпочинок?
4) на якій відстані від місця початку руху був мотоцикліст через 5 год після початку руху?
5) з якою швидкістю рухався мотоцикліст останні півгодини?

768.° На рисунку 12 зображено графік руху туриста.
1) На якій відстані від дому був турист через 10 год після початку руху?
2) Скільки часу він витратив на зупинку?
3) Через скільки годин після виходу турист був на відстані 8 км від домівки?
4) З якою швидкістю йшов турист до зупинки?
5) З якою швидкістю йшов турист останні дві години?

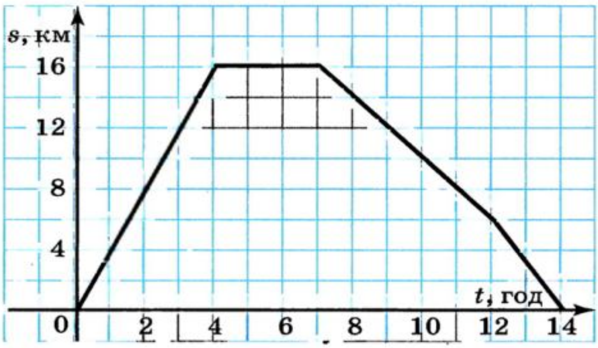


Рис. 12

769.° Кожному числу поставили у відповідність відстань від точки, що зображає це число на координатній прямій, до початку відліку. Поясніть, чому описане правило є функцією. Знайдіть її область визначення і область значень. Позначивши цю функцію буквою f, знайдіть $f(2)$, $f(-5)$, $f(0)$.

770.˙ Розглянемо правило, за яким кожному одноцифровому натуральному числу поставили у відповідність останню цифру його квадрата. Чи є це правило функцією? У разі позитивної відповіді позначте цю функцію буквою g і знайдіть: 1) область визначення і область значень функції; 2) $g(7)$, $g(3)$, $g(1)$, $g(9)$, $g(4)$.

771.˙ Розглянемо правило, за яким числу 0 ставляться у відповідність усі парні числа, а числу 1 — усі непарні числа. Чи є це правило функцією?

772.˙ Придумайте функцію f, областю визначення якої є всі натуральні числа, а областю значень — три числа: 0, 1, 2. Знайдіть $f(7)$, $f(15)$, $f(101)$.

773.˙ Розглянемо правило, за яким кожному натуральному числу поставили у відповідність остачу від ділення його на 7. Чи є це правило функцією? У разі позитивної відповіді знайдіть область визначення і область значень цієї функції.

774.˙ У таблиці наведено виміри температури повітря протягом доби через кожну годину. Побудуйте за цими даними графік зміни температури.

Час доби, год	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Температура, °C	2	3	1	0	−2	−3	−5	−4	−2	0	1	4	7
Час доби, год	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
Температура, °C	8	9	7	5	4	3	2	1	0	−2	−3	−6	

Користуючись графіком, знайдіть, протягом якого часу температура підвищувалась і протягом якого часу знижувалась.

775.˙ Велосипедист виїхав з дому на прогулянку. Спочатку він їхав 2 год зі швидкістю 12 км/год, потім відпочив годину і повернувся додому зі швидкістю 8 км/год. Побудуйте графік руху велосипедиста.

776.˙ У таблиці наведено зміну рівня води в річці порівняно з ординаром (середнім рівнем води) з 1 по 15 травня:

Дата	Зміна рівня води, см	Дата	Зміна рівня води, см	Дата	Зміна рівня води, см
1	8	6	20	11	4
2	10	7	18	12	0
3	12	8	14	13	−3
4	15	9	10	14	−5
5	16	10	8	15	−6

Побудуйте графік зміни рівня води в річці за вказаний час.

777.˙ На початку нагрівання температура води була 6°. Під час нагрівання температура води підвищувалась щохвилини на 2°.

1) Запишіть формулу залежності температури T води від часу t її нагрівання.
2) Складіть таблицю значень функції $T(t)$ за час нагрівання з 0 хв до 10 хв через кожну хвилину.
3) Побудуйте графік зміни температури води залежно від зміни часу нагрівання протягом перших 10 хв.

778.˙ Прямолінійна дорога проходить уздовж туристичного табору. Турист, перебуваючи на відстані 5 км від табору, почав рухатися по цій дорозі зі швидкістю 4 км/год, віддаляючись від табору.

1) Знайдіть відстань s від табору, на якій перебуватиме турист через t год після початку руху.
2) Заповніть таблицю значень s:

t, год	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
s, км									

3) Користуючись заповненою таблицею, побудуйте графік залежності відстані до табору від часу руху.

779.˙ В економічних дослідженнях часто використовують криву попиту. *Крива попиту* — це графік, який показує, як залежить попит на товар від його ціни. У таблиці подано залежність попиту на картоплю (у тисячах тонн) від ціни 1 кг картоплі.

Ціна 1 кг картоплі, грн.	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Попит, тис. т	15	12	10	6	4	1

Подайте дані таблиці графічно. Сполучивши отримані точки відрізками, побудуйте криву попиту на картоплю.

780.˙ У міській раді Сонячного міста представлено дві партії: партія Знайка і партія Незнайка. Усього у міській раді 20 місць. У таблиці наведено кількість депутатських місць, які отримала партія Знайка протягом 8 останніх виборів.

Вибори	1	2	3	4	5	6	7	8
Кількість депутатів від партії Знайка	14	12	10	16	18	15	14	10

1) Складіть аналогічну таблицю для партії Незнайка.
2) В одній системі координат подайте дані кожної таблиці графічно. Сполучивши отримані точки відрізками, побудуйте «криві популярності» кожної партії.

781.˙ У баці було 8 л гасу. Щохвилини до баку вливається 4 л.

1) Запишіть залежність кількості y літрів гасу в баці від часу x, протягом якого гас вливався у бак.
2) Накресліть графік зміни y, надаючи x значень від 0 до 10.
3) Користуючись графіком, визначте:
   а) скільки літрів гасу буде в баці через 12 хв, через 15 хв;
   б) через скільки хвилин у баці буде 60 л гасу.
4) Через скільки хвилин бак буде наповнено, якщо він уміщує 80 л гасу?

782.˙ На складі було 100 т вугілля. Щодня на склад привозили по 20 т вугілля.

1) Виразіть формулою залежність кількості m вугілля на складі від часу t.

2) Накресліть графік цієї залежності.

783.•• Який з наведених графіків (рис. 13) ілюструє залежність змінної y від змінної x, подану нижче:

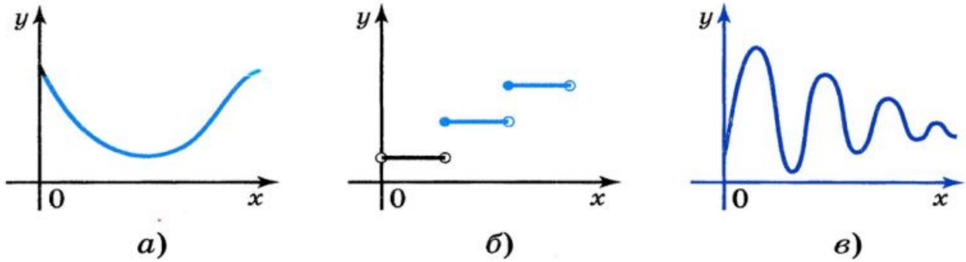


Рис. 13

1) вартість проїзду в автобусі зростає на 1 грн. через кожні 10 км шляху (x км — довжина шляху, y грн. — вартість проїзду);

2) металеву пружину розтягнули й відпустили (x с — час, y см — довжина пружини);

3) вартість полуниці на ринку протягом травня—червня (x днів — час, y грн. — вартість)?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

784. Розв'яжіть рівняння:

1) $-1,2x + 7,2 = 0$;

2) $-\frac{1}{3}x - 6 = 0$;

3) $3x + 1,5 = -2,5$;

4) $6 - 0,5x = 16$.

785. Розкладіть на множники вираз:

1) $a^{12}b^{14} - 1\frac{9}{16}a^2b^6$;

2) $20z^2 + 3xy - 15xz - 4yz$;

3) $0,027a^{12} + b^9$.

786. Знайдіть таке найменше натуральне значення a, при якому вираз $x^2 - 4x + 2a$ набуває додатного значення при будь-якому значенні x.

787. (*Задача з «Теоретичного і практичного курсу чистої математики» Ю. Войтяховського*[1].) Капітан на запитання, скільки має у своїй команді людей, відповів, що $\frac{2}{5}$ його команди в караулі, $\frac{2}{7}$ — на роботі, $\frac{1}{4}$ — у лазареті і 27 чоловік у наявності. Запитання: скільки чоловік було в його команді?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

788. Натуральні числа x і y такі, що $34x = 43y$. Доведіть, що число $x + y$ складене.

21. Способи задання функції

Приклади, розглянуті в попередньому пункті, показують, що функцію можна задавати різними способами.

Функція вважається заданою, якщо вказано її область визначення і правило, за допомогою якого можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної.

Вам не раз доводилося формулювати різні правила. Оскільки функція — це правило, то його можна виразити словами. Такий спосіб задання функції називають **заданням функції описом**.

Наведемо кілька прикладів.

ПРИКЛАД 1

Нехай незалежна змінна набуває будь-яких значень. Значення залежної змінної знаходимо за правилом: кожне значення незалежної змінної множимо на два і від отриманого добутку віднімаємо одиницю. Очевидно, що у такий

---

[1] Войтяховський Юхим (пом. близько 1812) — російський математик-педагог. Його «Теоретичний і практичний курс чистої математики» витримав багато видань і протягом 40 років був одним з найпоширеніших посібників для шкіл того часу.

спосіб значення залежної змінної знаходиться однозначно. Отже, нами задано деяку функцію f, областю визначення якої є всі числа. Наприклад, $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0$, $f(-13{,}4) = (-13{,}4) \cdot 2 - 1 = -27{,}8$ і т. п.

ПРИКЛАД 2

Нехай незалежна змінна набуває будь-яких значень, крім 0. Відповідні значення залежної і незалежної змінної — взаємно обернені числа. Тут задано функцію f, область визначення якої — усі числа, крім 0. Наприклад, $f(1) = 1$; $f(3) = \frac{1}{3}$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$ і т. п.

Розглянемо найпоширеніший спосіб задання функції: задання функції **за допомогою формули**.

Якщо у прикладі 1 незалежну змінну позначити буквою x, а залежну — буквою y, то формула $y = 2x - 1$, де x — будь-яке число, задає вищеописану функцію.

Зрозуміло, що функцію з другого приклада задає формула $y = \frac{1}{x}$, де x — будь-яке число, крім 0.

Зауваження. Якщо функцію задано формулою, права частина якої — цілий вираз, і при цьому не вказано область визначення, то вважатимемо, що областю визначення такої функції є всі числа. Наприклад, записи $y = x^2$, $y = \frac{x-3}{5}$, $y = x^2 - x + 2$ означають, що задано функції, областю визначення кожної з яких є всі числа.

Якщо, наприклад, функцію задано формулою $y = x^3$, то просто говорять, що задано функцію $y = x^3$.

Якщо хочуть підкреслити, що формула, наприклад $y = 5 - \frac{x}{3}$, задає деяку функцію f, то пишуть $f(x) = 5 - \frac{x}{3}$.

Якщо хочуть підкреслити, що, наприклад, формула $s = 10t + 2$ задає функцію з аргументом t і залежною змінною s, то пишуть $s(t) = 10t + 2$.

Розглянемо функцію $f(x) = x - 2x^2$, областю визначення якої є числа -1; 0; $\frac{1}{2}$; 1; 3. Маємо:

$$f(-1) = -3;\ \ f(0) = 0;\ \ f\left(\frac{1}{2}\right) = 0;\ f(1) = -1;\ f(3) = -15.$$

Отримані результати занесемо до таблиці:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
$f(x)$	-3	0	0	-1	-15

Усі числа, записані в першому рядку цієї таблиці, складають область визначення даної функції f. Таблиця дає змогу за вказаним значенням аргументу знайти відповідне значення функції. Отже, ця таблиця — ще один спосіб задання функції f. Його називають **табличним**.

Цей спосіб зручно використовувати у тих випадках, коли область визначення функції складається з кількох чисел.

ПРИКЛАД 3

Функцію задано формулою $y = 5x + 2$. Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 12.

Підставивши у формулу $y = 5x + 2$ замість y число 12, отримуємо рівняння $5x + 2 = 12$, звідки $x = 2$.

Відповідь: 2.

ПРИКЛАД 4

Функцію f задано таким чином: $f(x) = x + 7$, якщо $x \leqslant -1$, і $f(x) = 2$, якщо $x > -1$. Знайдіть значення функції f, які відповідають аргументам: 1) -2; 2) -1; 3) 1.

1) Оскільки $-2 \leqslant -1$, то значення функції обчислюється за формулою $f(x) = x + 7$. Отже, $f(-2) = -2 + 7 = 5$.
2) Оскільки $-1 \leqslant -1$, то $f(-1) = -1 + 7 = 6$.
3) Оскільки $1 > -1$, то $f(1) = 2$.

Зауважимо, що для задання даної функції використовують форму запису за допомогою фігурної дужки:

$$f(x) = \begin{cases} x + 7, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ 2, & \text{якщо } x > -1. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 5

Функції задано формулами $y = 4x + 1$ і $y = 2x - 7$. При якому значенні аргументу ці функції набувають рівних значень?

Щоб знайти шукане значення аргументу, розв'яжемо рівняння $4x + 1 = 2x - 7$.

Маємо:

$$4x - 2x = -7 - 1;$$

$$x = -4.$$

Відповідь: при $x = -4$.

1. Що треба вказати, щоб функція вважалася заданою?
2. Які способи задання функції ви знаєте?

789.° Прочитайте наступний запис, укажіть аргумент функції і залежну змінну:

1) $s(t) = 70t$;
2) $y(x) = -2x + 4$;
3) $V(a) = a^3$;
4) $f(x) = x^2 - 4$.

790.° Функцію задано формулою $y = 10x + 1$. Знайдіть значення y, якщо:

1) $x = -1$; 2) $x = 3$; 3) $x = -\frac{1}{5}$; 4) $x = 7$.

791.° Функцію задано формулою $y = x^2 - 3$. Знайдіть значення y, якщо:

1) $x = 5$; 2) $x = -4$; 3) $x = 0,1$; 4) $x = 0$.

792.° Функцію задано формулою $y = -\frac{1}{6}x + 2$. Знайдіть:

1) значення функції для значень аргументу, що дорівнюють 12, 6, –6, 0, 1, 2, –4, –3;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює:

а) 4; б) 3; в) 0; г) –1.

793.° Функцію задано формулою $f(x) = 3 - 4x$. Чи є правильною рівність:

1) $f(-2) = -5$;
2) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$;
3) $f(0) = -1$;
4) $f(-1) = 7$?

v **794.°** Функцію задано формулою $f(x) = 2x - 1$.

1) Знайдіть $f(3)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(-0,5)$, $f(3,2)$.
2) Знайдіть значення x, при якому $f(x) = 7$, $f(x) = -9$, $f(x) = 0$, $f(x) = -2,4$.
3) Чи є правильною рівність: $f(5) = 9$, $f(0,3) = 0,4$, $f(-3) = -7$?

795.° Функцію задано формулою $y = x(x + 8)$. Заповніть таблицю[1], обчисливши відповідні значення функції:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

v **796.°** Функцію задано формулою $y = -\frac{2}{3}x$. Заповніть таблицю, обчисливши відповідні значення функції:

x	-9	-6	-3	-2	-1	0	1	2	3	6
y										

797.° Кожному натуральному числу, більшому за 10, але меншому від 20, поставили у відповідність остачу від ділення цього числа на 6.

1) Яким способом задано цю функцію?
2) Яка область значень цієї функції?
3) Задайте цю функцію таблично.

798.° Область визначення деякої функції — одноцифрові натуральні числа, а значення функції у 2 рази більші за відповідні значення аргументу.

1) Яким способом задано цю функцію?
2) Задайте цю функцію формулою і таблично.

799.• Задайте формулою функцію, якщо значення функції:

1) протилежні відповідним значенням аргументу;
2) дорівнюють потроєним відповідним значенням аргументу;
3) на 4 більші за квадрати відповідних значень аргументу.

---

[1] У наведеній таблиці значення аргументу в кожному наступному стовпці на 1 більше за значення аргументу в попередньому стовпці. У такому випадку говорять, що таблицю складено *з кроком* 1.

800.˙ Задайте формулою функцію, якщо значення функції:
1) на 3 менші від відповідних значень аргументу;
2) на 5 більші за подвоєне значення відповідного аргументу.

801.˙ Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = x^2 + 2x$, де $-1 \leqslant x \leqslant 3$, з кроком 0,5.

802.˙ Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = x^3 - 1$, де $-3 \leqslant x \leqslant 2$, з кроком 1.

803.˙ Функцію задано формулою $y = 0{,}2x - 5$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y:

x	4		−1,5		−3
y		2		−1,4	

804.˙ Дано функцію $y = 8 - \frac{1}{7}x$. Заповніть таблицю:

x	14		−1,4	
y		0		9

805.˙ Дано функції $g(x) = \frac{20}{x} - 3$ і $h(x) = 8 - 3x$. Порівняйте:
1) $g(1)$ і $h(1)$; 2) $g(5)$ і $h(2)$; 3) $g(-2)$ і $h(6)$.

806.˙ Дано функцію

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 3, \\ 6, & \text{якщо } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Знайдіть: 1) $f(-3)$; 2) $f(-2)$; 3) $f(2)$; 4) $f(3)$; 5) $f(2{,}9)$; 6) $f(8{,}1)$.

807.˙ Знайдіть значення функції $y = \begin{cases} -2x + 4, & \text{якщо } x > 0, \\ 0{,}1x - 5, & \text{якщо } x \leqslant 0, \end{cases}$

які відповідають аргументам:
1) 3; 2) 0,001; 3) 0; 4) −8.

808.˙ Функцію задано таблично:

x	2	4	6	8
y	5	7	9	11

1) Які числа складають область визначення цієї функції?
2) Задайте цю функцію описом і формулою.

809.˙ Функцію задано таблично:

x	1	3	5	7	9
y	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5

1) Які числа складають область визначення цієї функції?
2) Задайте цю функцію описом і формулою.

810.˙ Функції задано формулами $y = x^2 - 8x$ і $y = 4 - 8x$. При яких значеннях аргументу ці функції набувають рівних значень?

811.˙ Функцію задано формулою $f(x) = 3x + 5$. При якому значенні x значення функції дорівнює значенню аргументу?

ν **812.**˙ Функцію задано формулою $y = x^2 + 2x - 1$. При яких значеннях x значення функції дорівнює подвоєному значенню аргументу?

813.* Функцію f задано описом: значення функції дорівнює найбільшому цілому числу, яке не більше за відповідне значення аргументу[1]. Знайдіть $f(3{,}7)$, $f(0{,}64)$, $f(2)$, $f(0)$, $f(-0{,}35)$, $f(-2{,}8)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

814. Яке з наступних рівнянь має: один корінь; два корені; безліч коренів; не має жодного кореня:
1) $3{,}4(1 + 3x) - 1{,}2 = 2(1{,}1 + 5{,}1x)$;
2) $|2x - 1| = 17{,}3$;
3) $3(|x - 1| - 6) + 21 = 0$;
4) $0{,}2(7 - 2x) = 2{,}3 - 0{,}3(x - 6)$?

815. Дано три числа, з яких кожне наступне на 10 більше за попереднє. Знайдіть ці числа, якщо добуток най-

[1] Для даної функції існує спеціальне позначення $y = [x]$ (читають: «y дорівнює цілій частині числа x»).

більшого і середнього з них на 320 більший за добуток найбільшого і найменшого з цих чисел.

816. Доведіть, що коли $a + c = 2b$, то $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

817. Відомо, що $x + y = \frac{a^2}{4}$, $y + z = -a$, $x + z = 1$. Доведіть, що вираз $x + y + z$ набуває тільки невід'ємних значень.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

818. Побудуйте пряму, яка проходить через точки $A\,(-2;\ 3)$ і $B\,(4;\ 3)$. Чому дорівнюють ординати точок цієї прямої?

819. Побудуйте пряму, яка проходить через точки $C\,(3;\ 0)$ і $D\,(3;\ -4)$. Чому дорівнюють абсциси точок цієї прямої?

Поновіть у пам'яті зміст пункту 34 на с. 269.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

820. Доведіть, що в будь-якому 60-цифровому числі, десятковий запис якого не містить нулів, можна закреслити кілька цифр так, що отримане в результаті цього число буде ділитися націло на 1001.

22. Графік функції

Розглянемо функцію $y = x^2 - 4x$, де $-1 \leqslant x \leqslant 4$. Складемо таблицю значень цієї функції з кроком 1:

x	-1	0	1	2	3	4
y	5	0	-3	-4	-3	0

Розглянемо пари чисел, записані в кожному стовпчику цієї таблиці, як координати $(x;\ y)$ точок координатної площини. При цьому значення аргументу є абсцисою точки, а відповідне значення функції — її ординатою.

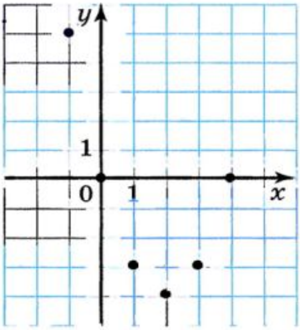


Рис. 14

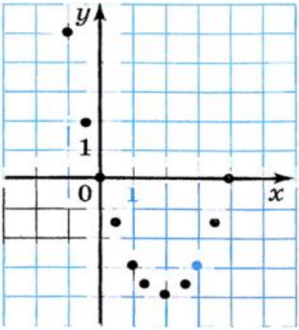


Рис. 15

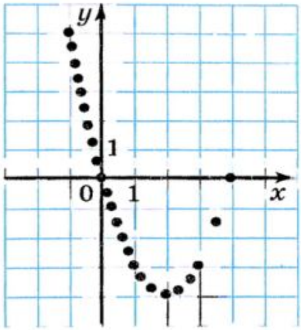


Рис. 16

Ці точки зображено на рисунку 14.

Очевидно, що, надаючи аргументу інші значення з області визначення і знаходячи відповідні значення функції, можна позначити все більше й більше точок на координатній площині (рис. 15, 16).

Усі точки координатної площини, які можна позначити, діючи в такий спосіб, утворюють **графік функції.**

Означення. **Графіком функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.**

Очевидно, що описаний метод побудови графіка функції $y = x^2 - 4x$ на практиці реалізувати неможливо. Адже точок, які треба було б позначити, безліч. Проте, якщо позначити досить багато точок, а потім сполучити їх плавною лінією, то отримана крива (рис. 17) буде тим менше відрізнятися від шуканого графіка, чим більше точок ми позначимо.

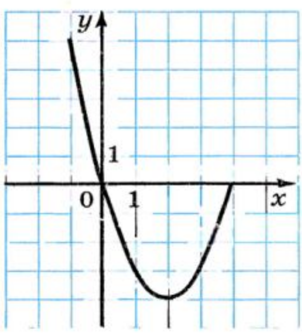


Рис. 17

Оскільки описаний метод побудови графіка функції передбачає значну технічну роботу, то істотну її частину може взяти на себе комп'ютер. Сьо-

Рис. 18

годні існує багато програм, призначених для побудови графіків. Так, на екрані монітора (рис. 18) зображено графік функції $y = x^3$, де $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Наголосимо, що коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови:

1) якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ обов'язково належить графіку;
2) якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.

Неправильно вважати, що графік функції — це неодмінно якась лінія. На рисунку 19 зображено графік функції, заданої таблицею:

x	1	-2
y	3	0

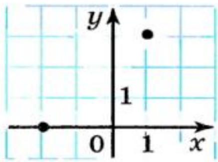


Рис. 19

Він складається лише з двох точок.

Розглянемо приклад побудови графіка функції, заданої описом.

Область визначення даної функції — усі числа. Для кожного додатного аргументу значення функції дорівнює 1; для кожного від'ємного аргументу значення функції дорівнює -1; якщо аргумент дорівнює нулю, то значення функції дорівнює нулю. Графік цієї функції зображено на рисунку 20. Він складається з трьох частин: точки $O\,(0; 0)$ і двох променів, у кожного з яких «виколото» початок.

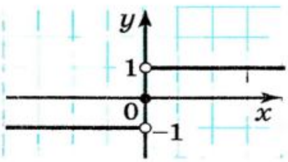


Рис. 20

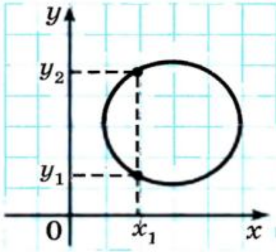


Рис. 21

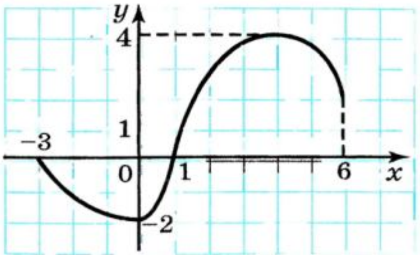


Рис. 22

Далеко не будь-яка фігура, зображена на координатній площині, може слугувати графіком деякої функції. Наприклад, коло не може бути графіком функції (рис. 21). Тут за заданим значенням аргументу x не завжди однозначно знаходиться значення змінної y.

Фігура може бути графіком деякої функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має з цією фігурою не більше за одну спільну точку.

Рисунок, схема, фотографія якогось об'єкта або процесу дають про нього наочне уявлення. Ту саму роль відіграє для функції її графік. Так, вивчаючи графік, зображений на рисунку 22, можна, наприклад, знайти:

1) область визначення функції: усі x такі, що $-3 \leqslant x \leqslant 6$;
2) область значень функції: усі y такі, що $-2 \leqslant y \leqslant 4$;
3) значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю: $x = -3$ або $x = 1$;
4) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень: $1 < x \leqslant 6$;
5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень: $-3 < x < 1$, і т.д.

Після вивчення викладеного матеріалу стає зрозумілим, чому в техніці, медицині, економіці та багатьох інших сферах людської діяльності так широко використовуються комп'ютерні програми, які дозволяють будувати графіки різноманітних функціональних залежностей.

ПРИКЛАД 1

Чи належить графіку функції, заданої формулою $y = x - 6$, точка: 1) $A(8;\ 2)$; 2) $B(2;\ 4)$?

Щоб встановити, чи належить точка графіку функції, знайдемо значення даної функції, якщо значення аргументу дорівнює абсцисі даної точки. Якщо значення функції дорівнюватиме ординаті даної точки, то точка належить графіку, у противному випадку — не належить.

1) **При $x = 8$ маємо $y = 8 - 6 = 2$. Отже, точка A належить графіку даної функції.**
2) **При $x = 2$ маємо $y = 2 - 6 = -4 \neq 4$. Отже, точка B не належить графіку функції $y = x - 6$.**

ПРИКЛАД 2

Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = x^2 - 4$ з осями координат.

Оскільки точка належить осі абсцис тоді і тільки тоді, коли її ордината дорівнює нулю, то для знаходження координат точки перетину графіка даної функції з віссю абсцис треба розв'язати рівняння $x^2 - 4 = 0$. Маємо $x = 2$ або $x = -2$. Отже, графік даної функції має з віссю абсцис дві точки перетину: $A (2; 0)$ і $B (-2; 0)$.

Оскільки точка належить осі ординат тоді і тільки тоді, коли її абсциса дорівнює нулю, то для знаходження координат точки перетину графіка функції з віссю ординат треба знайти значення даної функції при $x = 0$. Маємо $y = -4$. Отже, графік функції перетинає вісь ординат у точці $C (0; -4)$.

1. Що називають графіком функції?
2. Які дві умови мають виконуватися, щоб фігура була графіком функції f?
3. Скільки спільних точок може мати з графіком функції будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис?
4. Чи може графік функції складатися з однієї точки?
5. Чи будь-яка фігура може бути графіком функції?
6. Наведіть приклад фігури, яка не може бути графіком функції.

821.° **Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 23, заповніть таблицю:**

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

2.° На рисунку 24 зображено графік деякої функції. Користуючись графіком, знайдіть: $-1,5$
1) значення y, якщо $x = -3,5$; (3,5) $-1,5$; 2; 4; (2)
2) значення x, яким відповідає $y = -3$; $-1,5$; 2; -4 (−2,5; −1; 4)
3) значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю; -3, $1,5$
4) область визначення і область значень функції; [−3,5; 4] (−4,5;
5) кілька значень аргументу, при яких значення функції додатне;
6) кілька значень аргументу, при яких значення функції від'ємне.

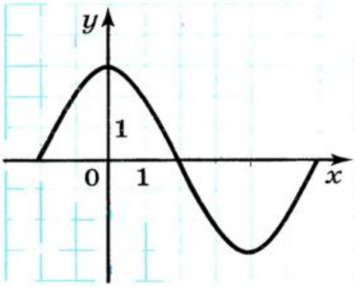


Рис. 23

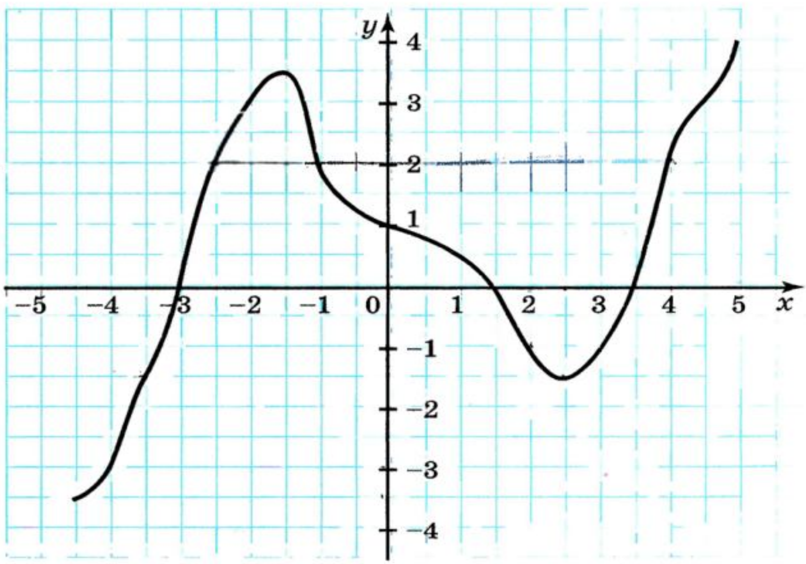


Рис. 24

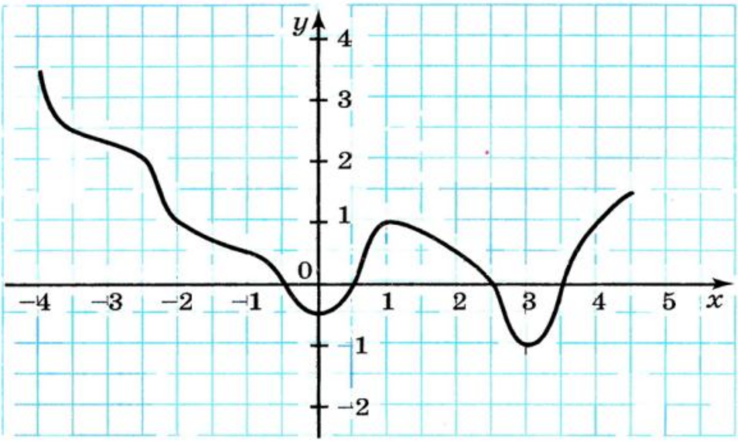


Рис. 25

823.° На рисунку 25 зображено графік функції $y = f(x)$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) $f(-4)$, $f(-2{,}5)$, $f(0{,}5)$, $f(2)$;
2) значення x, при яких $f(x) = 2{,}5$; $f(x) = 1$; $f(x) = 0$;
3) область визначення і область значень функції;
4) кілька значень аргументу, при яких значення функції додатне;
5) кілька значень аргументу, при яких значення функції від'ємне.

824.° Чи належить графіку функції $y = x^2 + 2$ точка:
1) $A(0;\ 2)$; 2) $B(-1;\ 1)$; 3) $C(-2;\ 6)$; 4) $D(-3;\ -7)$?

825.° Назвіть координати кількох точок, які належать графіку функції:
1) $y = 7x - 4$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = 4 - |x|$.

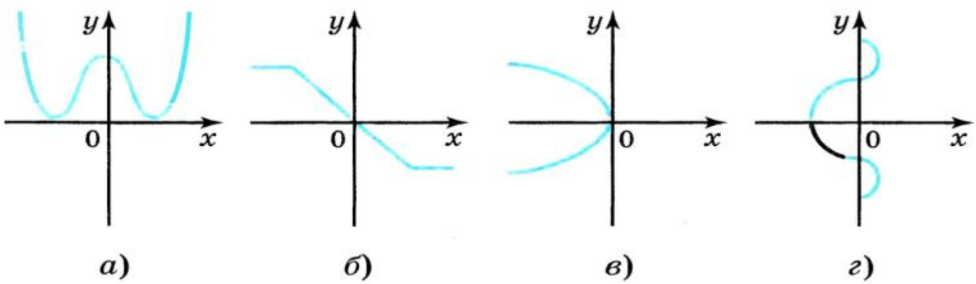


Рис. 26

826.° Чи належить графіку функції $y = -\frac{x}{3}$ точка:
1) $A\ (9;\ -3)$;
2) $B\ (6;\ 2)$;
3) $C\ (-1;\ 3)$;
4) $D\ (-12;\ 4)$?

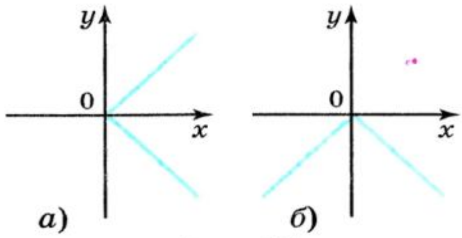


Рис. 27

827.° Які з фігур, зображених на рисунку 26, можуть бути графіком функції?

828.° Яка з фігур, зображених на рисунку 27, може бути графіком функції?

829.• Графіком деякої функції є ламана $ABCD$ з вершинами в точках $A\ (-3;\ 6)$; $B\ (-1;\ 2)$; $C\ (3;\ -2)$; $D\ (9;\ 0)$.
1) Побудуйте графік даної функції.
2) Знайдіть значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -2; 0; 2; 6.
3) Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 1; -1; 0.

830.• Чи може ламана ABC бути графіком деякої функції, якщо:
1) $A\ (-4;\ -1)$, $B\ (1;\ 2)$, $C\ (2;\ 4)$;
2) $A\ (-4;\ -1)$, $B\ (1;\ 2)$, $C\ (1;\ 3)$?

831.• Графіком деякої функції є ламана MKE, де $M\ (-4;\ 1)$, $K\ (2;\ 4)$, $E\ (5;\ -2)$.
1) Побудуйте графік даної функції.
2) Знайдіть значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -2; 0; 3.
3) Знайдіть значення x, при якому $y = -2$; 0; 2.

832.• Функцію задано формулою $y = x^2 - 1$, де $-2 \leqslant x \leqslant 3$.
1) Складіть таблицю значень функції з кроком 1.
2) Побудуйте графік функції, користуючись складеною таблицею.
3) Користуючись графіком, знайдіть, при яких значеннях аргументу значення функції менші від нуля і при яких більші за нуль.
4) Користуючись графіком функції, укажіть область значень функції.

833.° Функцію задано формулою $y = 4 - x^2$, де $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

1) Складіть таблицю значень функції з кроком 1.
2) Побудуйте графік функції, користуючись складеною таблицею.
3) Користуючись графіком, знайдіть, при яких значеннях аргументу значення функції менші від нуля і при яких більші за нуль.
4) Користуючись графіком функції, укажіть область значень функції.

834.° Значення функції $y = f(x)$ дорівнює 0 при значеннях аргументу, що дорівнюють -5 і 4. Яке з наступних тверджень є правильним:

1) графік функції має з віссю ординат дві спільні точки $(0; -5)$ і $(0; 4)$;
2) графік функції має з віссю абсцис дві спільні точки $(-5; 0)$ і $(4; 0)$?

835.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = x^2 - 16x$;
2) $y = |x| - 2$;
3) $y = x^3 - 9x$;
4) $y = 0{,}8x$.

836.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = 36 - 9x$;
2) $y = x^2 + x$;
3) $y = 49 - x^2$.

837.° Задано функцію $y = 1 - x$, областю визначення якої є всі одноцифрові натуральні числа. Побудуйте графік цієї функції.

838.° Побудуйте графік функції $f(x) = 1{,}5x + 1$, областю визначення якої є цілі числа, при яких виконується нерівність $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

839.* Побудуйте графік функції, областю визначення якої є всі натуральні числа і яка набуває значення 1 при парних значеннях аргументу і значення -1 при непарних значеннях аргументу.

840.* Функцію f задано описом: значення функції дорівнює найбільшому цілому числу, яке не більше за відповідне значення аргументу. Побудуйте графік цієї функції.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

841. Спростіть вираз:

1) $(c + 2)(c - 3) - (c + 1)(c + 3)$;
2) $(p + 4)(p - 11) + (p + 6)^2$;
3) $3(x - 5)^2 - (8x^2 - 10x)$;
4) $7(2y - 5)^2 - 2(7y - 1)^2$.

842. Доведіть тотожність:

1) $(4a^2 + 3)^2 + (7 - 4a^2)^2 - 2(4a^2 + 3)(4a^2 - 7) = 100$;
2) $(a^2 - 6ab + 9b^2)(a^2 + 6ab + 9b^2) - (a^2 - 9b^2)^2 = 0$.

843. Доведіть, що при будь-якому непарному значенні n значення виразу $(4n + 1)^2 - (n + 4)^2$ кратне 120.

844. Знайдіть які-небудь три натуральних значення змінної x таких, щоб вираз $a^2 - 2x$ можна було розкласти на множники за формулою різниці квадратів. Отримані вирази розкладіть на множники.

845. (*Задача Бхаскари*[1].) Є кадамба квітка; на одну пелюстку бджілок п'ята частина сіла. Поряд росла вся в цвіту симендга, і на ній третя частина розмістилася. Різницю їх ти знайди, тричі її ти додай, на кумай цих бджіл посади. Лише бджілка одна не знайшла собі місця ніде, все літала туди й сюди, і скрізь пахощами квітів тішилася. Тепер скажи мені, скільки бджілок всього тут зібралося?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

846. У таблиці наведено відповідні значення величин x і y. Установіть, чи є ці величини прямо пропорційними.

1)

x	2	5	7	9
y	6	15	21	27

2)

x	0,4	1,8	2,3	3,1
y	0,8	3,8	4,6	6,2

[1] Бхаскара II (1114 – 1185) — індійський математик і астроном, автор праці «Вінець системи» (близько 1150 р.), у якій міститься виклад методів розв'язування ряду алгебраїчних задач.

847. Заповніть таблицю, якщо величина y прямо пропорційна величині x:

x	0,3	8	3,2		
y			9,6	2,7	42

Поновіть у пам'яті зміст пункту 33 на с. 268.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

848. З квадратного аркуша паперу в клітинку, який містить цілу кількість клітинок, вирізали по лініях квадрат, що містить цілу кількість клітинок, так, що залишилася 71 клітинка. Скільки клітинок містив початковий аркуш паперу?

23. Лінійна функція, її графік і властивості

Розглянемо два приклади.

ПРИКЛАД 1

У басейні було 200 л води. Протягом t хв у басейн наливали щохвилини 80 л води. Тоді об'єм V води в басейні до його заповнення обчислюється за формулою

$$V = 80t + 200, \text{ де } t \geqslant 0.$$

Ця формула задає функціональну залежність змінної V від змінної t.

ПРИКЛАД 2

Перша бригада зібрала 25 ящиків яблук; кожний робітник другої бригади зібрав по 2 ящика. Нехай у другій бригаді було x робітників. Позначимо кількість усіх ящиків, зібраних двома бригадами, буквою y. Тоді залежність змінної y від змінної x виражається формулою

$$y = 2x + 25, \text{ де } x \text{ — натуральне число.}$$

У цих прикладах ми побудували функції, що описують різні реальні ситуації. Проте вони схожі в тому, що формули, які їх задають, мають вигляд $y = kx + b$.

Означення. **Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, x — незалежна змінна, називають лінійною.**

Ось приклади лінійних функцій:

$$y = -2x + 1;\ y = 1 - x;\ y = 5x;\ y = 2.$$

Побудуємо графік функції $y = -2x + 1$.

Складемо таблицю значень цієї функції для деяких значень аргументу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	5	3	1	-1	-3	-5

Точки $A(-3;\ 7)$; $B(-2;\ 5)$; $C(-1;\ 3)$; $D(0;\ 1)$; $E(1;\ -1)$; $F(2;\ -3)$; $G(3;\ -5)$ належать шуканому графіку (рис. 28). Усі ці точки лежать на одній прямій, яка і є графіком функції $y = -2x + 1$ (рис. 29).

У старших класах ви доведете, що ***графіком лінійної функції, область визначення якої — всі числа, є пряма.***

Оскільки пряма однозначно задається будь-якими двома своїми точками, то для побудови графіка лінійної функції

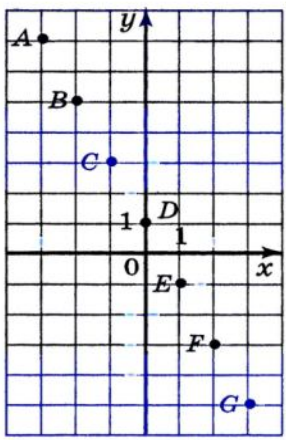


Рис. 28

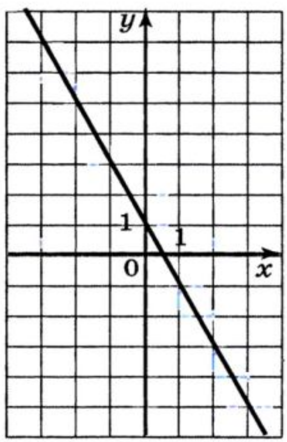


Рис. 29

достатньо обрати два довільних значення аргументу і скласти таблицю, яка має лише два числових стовпці.

ПРИКЛАД 3

Побудуйте графік функції $y = -3x + 2$.

Складемо таблицю значень даної функції для двох довільних значень аргументу:

x	0	1
y	2	-1

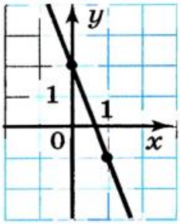


Рис. 30

Позначимо на координатній площині точки (0; 2) і (1; -1) та проведемо через них пряму (рис. 30). Ця пряма і є графіком лінійної функції $y = -3x + 2$.

У формулі $y = kx + b$, яка задає лінійну функцію, не є винятком випадок, коли $k = 0$ або $b = 0$.

Розглянемо випадок, коли $b = 0$ і $k \neq 0$. Тоді формула набуває вигляду $y = kx$. Звідси для всіх значень аргументу, відмінних від нуля, можна записати, що $\frac{y}{x} = k$. Ця формула показує, що для функції $y = kx$ при $x \neq 0$ відношення відповідних значень залежної та незалежної змінних залишається сталим і дорівнює k.

Нагадаємо, що в 6 класі, вивчаючи пряму пропорційність, ви вже ознайомилися з подібними залежностями між величинами. Тому лінійну функцію, яку задають формулою $y = kx$, де $k \neq 0$, називають **прямою пропорційністю**.

Функції $y = 2x$, $y = x$, $y = -x$, $y = -\frac{1}{3}x$ — приклади прямих пропорційностей.

Рис. 31

Оскільки пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції (це виражає схема, зображена на рисунку 31), то її графік — пряма. Особливість її в тому, що ця пряма при будь-якому k проходить через точку O (0; 0). Справді, якщо у формулі $y = kx$ взяти $x = 0$, то отримаємо $y = 0$. Тому для побудови графіка прямої пропорційності достатньо вказати яку-небудь точку графіка, відмінну від початку координат, і провести пряму через цю точку і точку O (0; 0).

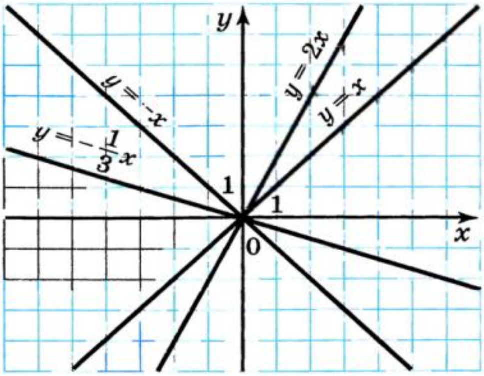


Рис. 32

На рисунку 32 зображено графіки прямих пропорційностей, які наводилися вище як приклади.

Розглянемо ще один окремий випадок лінійної функції.

У формулі $y = kx + b$ покладемо $k = 0$. Отримаємо $y = b$. Зрозуміло, що в цьому разі значення функції залишатимуться незмінними при будь-яких змінах значень аргументу.

ПРИКЛАД 4

Побудуйте графік функції $y = 2$.

Як і для побудови графіка будь-якої лінійної функції, треба знати дві точки, які належать йому. Ці точки матимуть однакові ординати, які дорівнюють 2. Їх абсциси оберемо довільно, наприклад, −2 і 0. Залишається провести пряму через точки A (−2; 2) і B (0; 2) (рис.33). Ця пряма паралельна осі абсцис.

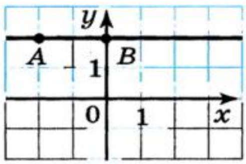


Рис. 33

Зауважимо, що графіком функції $y = 0$ є вісь абсцис. Графіком функції $y = b$, де $b \neq 0$, є пряма, яка паралельна осі абсцис.

ПРИКЛАД 5

Задайте формулою лінійну функцію, графік якої зображено на рисунку 34.

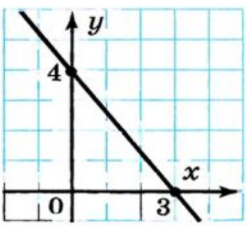


Рис. 34

Графік даної функції перетинає вісь ординат у точці (0; 4). Підставивши координати цієї точки у формулу $y = kx + b$, отримуємо $4 = k \cdot 0 + b$, звідки $b = 4$.

Оскільки даний графік перетинає вісь абсцис у точці (3; 0), то, підставивши її координати у формулу $y = kx + 4$, матимемо: $3k + 4 = 0$; $k = -\frac{4}{3}$.

Відповідь: $y = -\frac{4}{3}x + 4$.

?

1. Яку функцію називають лінійною?
2. Що є графіком лінійної функції?
3. Яку функцію називають прямою пропорційністю?
4. Що є графіком прямої пропорційності?
5. Що є графіком функції $y = b$?
6. Графіком якої функції є вісь абсцис?
7. Чи існує функція, графіком якої є вісь ординат?

849.° Чи є лінійною функція, задана формулою:

1) $y = 3x - 2$; 4) $y = \frac{3}{x} + 2$; 7) $y = \frac{x}{5}$;

2) $y = 8 - 7x$; 5) $y = 2x^2 + 4$; 8) $y = -4$;

3) $y = \frac{x}{3} + 2$; 6) $y = \frac{12x - 8}{4}$; 9) $y = 0$?

У разі позитивної відповіді вкажіть значення коефіцієнтів k і b.

850.° Чи є прямою пропорційністю функція, задана формулою:

1) $y = 4x$; 3) $y = \frac{x}{4}$; 5) $y = -4x$;

2) $y = \frac{4}{x}$; 4) $y = 0$; 6) $y = -\frac{x}{4}$?

У разі позитивної відповіді вкажіть значення коефіцієнта k.

851.° Лінійну функцію задано формулою $y = 6x - 5$. Заповніть таблицю:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

852.° Функцію задано формулою $y = -2x + 5$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -4; $3{,}5$; 0;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 9; -5; 0.

853.° Функцію задано формулою $y = 0{,}3x - 2$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 5; -2; 0;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 1; -11; $0{,}8$.

854.° Побудуйте графік функції:

1) $y = x - 5$;
2) $y = 3x + 1$;
3) $y = -\frac{1}{6}x - 2$;
4) $y = 0{,}4x + 3$.

855.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 4 - x$;
2) $y = -4x + 5$;
3) $y = 0{,}2x - 3$.

856.° Функцію задано формулою $y = \frac{1}{3}x$. Знайдіть:

1) значення y, якщо $x = 6$; -3; $-3{,}2$;
2) значення x, при якому $y = -2$; $\frac{1}{3}$; 12.

857.° Функцію задано формулою $y = 1{,}2x$. Знайдіть:

1) значення y, якщо $x = 10$; $0{,}6$; -5; -4;
2) значення x, при якому $y = 3{,}6$; $-2{,}4$; 6.

858.° Побудуйте графік прямої пропорційності:

1) $y = 3x$;
2) $y = -2x$;
3) $y = -0{,}6x$;
4) $y = \frac{1}{7}x$.

859.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 5x$;
2) $y = 0{,}8x$;
3) $y = -\frac{1}{6}x$.

860.° Функціональна залежність змінної y від змінної x є прямою пропорційністю.

1) Заповніть таблицю:

x	8	6	2	1	$\frac{1}{2}$	0	-1	-2	-3	-4
y	4									

2) Задайте дану функцію формулою.
3) Побудуйте графік цієї функції.

861.° Побудуйте в одній системі координат графіки лінійних функцій: $y = 3$; $y = -5$; $y = 0$.

862.° Побудуйте графік функції $y = 2x - 3$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 4; −1; 0,5;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 1; −1; 0;
3) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

863.° Побудуйте графік функції $y = 2 - 3x$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 1; 0; −2;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює −4; −1; 5;
3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

864.° Побудуйте графік функції $y = 0{,}5x$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 4; −6; 3;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 2,5; −2; 1;
3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

865.° Побудуйте графік функції $y = -4x$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 2; −1; 0,5;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює −4; 2;
3) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

866.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = 1{,}8x - 3$, визначте, через які з даних точок проходить цей графік: $A(-2; -6{,}6)$; $B(1; 1{,}2)$; $C(0; -3)$; $D(5; 7)$.

867.° Не виконуючи побудови, визначте, чи належить графіку функції $y = 8x - 14$ точка:

1) $A(-1; -6)$; 2) $B(2; 2)$.

868.• Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x - 1$ і $y = \frac{1}{4}x + 2$ та знайдіть координати точки їх перетину.

869.• Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 5x - 6$ і $y = -2x + 1$ та знайдіть координати точки їх перетину.

870.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = 2{,}5x + 10$; 2) $y = 6x - 4$.

871.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = \frac{2}{3}x - 4$; 2) $y = 7 - 3x$.

872.• Не виконуючи побудови графіка функції $y = 2x - 9$, знайдіть точку цього графіка, у якої:

1) абсциса дорівнює ординаті;
2) ордината на 6 більша за абсцису.

873.• Не виконуючи побудови графіка функції $y = -7x + 8$, знайдіть точку цього графіка, у якої абсциса і ордината — протилежні числа.

874.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y = 3{,}7x + 10$ і $y = 1{,}4x - 13$;

2) $y = 4 - \frac{2}{7}x$ і $y = \frac{9}{7}x + 26$.

875.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = 4x - 7$ і $y = -2x + 11$.

876.• При якому значенні змінної x функції $f(x) = 4x - 3$ і $g(x) = 3x - 2$ набувають рівних значень? Побудуйте на одній координатній площині графіки функцій f і g. Визначте, при яких значеннях x:

1) $f(x) > g(x)$; 2) $f(x) < g(x)$.

877.• При якому значенні незалежної змінної функції $f(x) = 5 - 2x$ і $g(x) = 2x - 3$ набувають рівних значень?

Побудувавши на одній координатній площині графіки даних функцій, установіть, при яких значеннях x:
1) $f(x) < g(x)$; 2) $f(x) > g(x)$.

878. Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку $M(2; -5)$.

879. Знайдіть значення b, при якому графік функції $y = -\frac{1}{9}x + b$ проходить через точку $A(-27; 4)$.

880. При якому значенні k графік функції $y = kx - 15$ проходить через точку $B(3; -6)$?

881. Графік функції $y = kx + b$ перетинає осі координат у точках $C(0; 4)$ і $D(-8; 0)$. Знайдіть значення k і b.

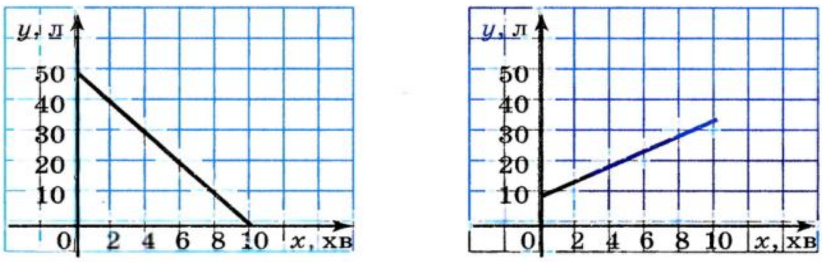
882. Графік функції $y = kx + b$ перетинає осі координат у точках $M(3; 0)$ і $K(0; -1)$. Знайдіть значення k і b.

883. Усі точки графіка функції $y = kx + b$ мають однакову ординату, яка дорівнює -6. Знайдіть значення k і b.

884. Графік функції $y = kx + b$ паралельний осі абсцис і проходить через точку $A(-2; 3)$. Знайдіть значення k і b.

885. Один з графіків, зображених на рисунку 35, відображає процес наповнення одного бака водою, а другий — витікання води з другого бака.

1) Яким процесам відповідають графіки на рисунку 35?



а) *б)*

Рис. 35

2) Скільки води було спочатку в кожному баці?
3) Скільки води було в кожному баці через 2 хв після відкриття кранів? через 6 хв?

4) Через скільки хвилин після відкриття кранів у кожному баці було по 30 л води?

5) Скільки літрів води щохвилини наливається в один бак і скільки виливається з другого?

6) Задайте формулою залежність кількості води у кожному баці від часу.

886.˙ Яка з прямих, зображених на рисунку 36, є графіком функції:

1) $y = x$; 2) $y = 4x$; 3) $y = \frac{1}{4}x$; 4) $y = -\frac{1}{4}x$?

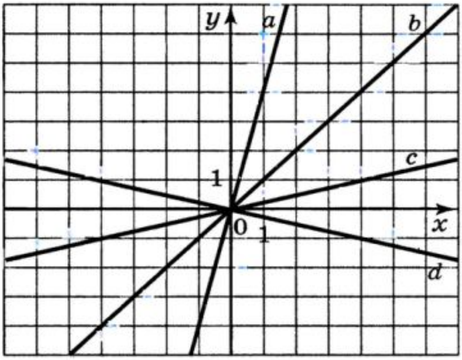


Рис. 36

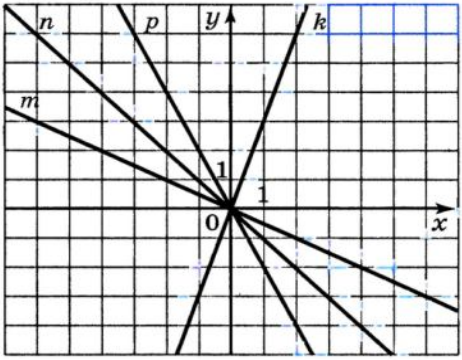


Рис. 37

887.˙ Яка з прямих, зображених на рисунку 37, є графіком функції:

1) $y = -x$; 2) $y = 3x$; 3) $y = -\frac{1}{2}x$; 4) $y = -2x$?

888.˙˙ Задайте формулою які-небудь дві лінійні функції, графіки яких проходять через точку:

1) $A\,(0;\ 4)$; 2) $B\,(1;\ 3)$.

889.˙˙ Графіки функцій $y = 0{,}5x - 3$, $y = -4x + 6$ і $y = kx$ перетинаються в одній точці. Знайдіть значення k. Побудуйте в одній системі координат графіки цих функцій.

890.˙˙ При якому значенні b графіки функцій $y = 1{,}5x - 3$, $y = 2{,}5x + 1$ і $y = 5x + b$ перетинаються в одній точці?

891.˙˙ Точка C належить відрізку AB, довжина якого дорівнює 8. Довжина відрізка AC дорівнює x, довжина відрізка BC — y. Побудуйте графік залежності y від x, $0 < x < 8$. Позначте на цьому графіку точку, яка відповідає випадку, коли C — середина відрізка AB.

892.•• Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 12, $AB = x$, $AD = y$, $0 < x < 6$. Побудуйте графік залежності y від x. Позначте на цьому графіку точку, яка відповідає випадку, коли прямокутник $ABCD$ є квадратом.

893.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} x - 4, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ -2x - 4, & \text{якщо } x < 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 3x - 2, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 2, & \text{якщо } x \neq 2, \\ 3, & \text{якщо } x = 2; \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x < -1, \\ 1, & \text{якщо } x = -1, \\ x + 3, & \text{якщо } x > -1. \end{cases}$

894.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} -3x, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ 3, & \text{якщо } -1 < x < 1, \\ 2x + 1, & \text{якщо } x \geqslant 1; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 5 - x, & \text{якщо } x \leqslant 3, \\ x + 1, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$

895.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|$; 2) $y = |x| + x$; 3) $y = 4x - |x| + 2$.

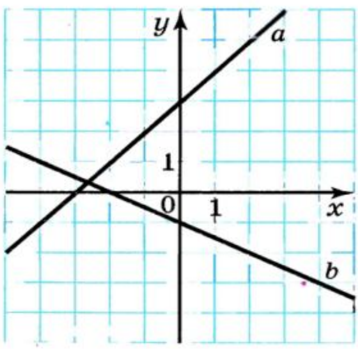


Рис. 38

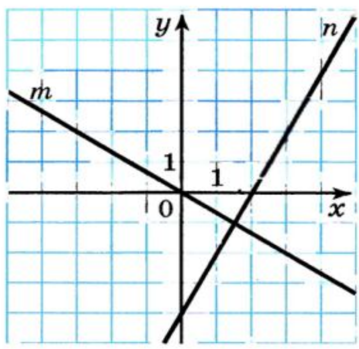


Рис. 39

896.** Побудуйте графік функції:

1) $y = -|x|$;
2) $y = x - |x|$;
3) $y = 3x + 2|x|$.

897.** Задайте формулою лінійну функцію, графіком якої є зображена на рисунку 38: 1) пряма a; 2) пряма b.

898.** Задайте формулою лінійну функцію, графіком якої є зображена на рисунку 39: 1) пряма m; 2) пряма n.

899.* Функцію задано описом: значення функції дорівнює різниці між значенням аргументу і цілою частиною аргументу[1]. Побудуйте графік цієї функції.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

900. Знайдіть значення виразу:

1) $(2 + 3a)(5 - a) - (2 - 3a)(5 + a)$ при $a = -1{,}5$;
2) $(3a + b)^2 - (3a - b)^2$ при $a = -3\frac{1}{3}$, $b = 0{,}3$.

901. Розв'яжіть рівняння:

1) $(5x + 1)(2x - 3) = (10x - 9)(x + 2)$;
2) $(7x - 1)(x + 5) = (3 + 7x)(x + 3)$.

902. Доведіть, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться націло на 3.

903. У двох діжках було порівну води. Об'єм води в першій діжці спочатку збільшили на 10 %, а потім зменшили на 10 %. Об'єм води в другій діжці, навпаки, спочатку зменшили на 10 %, а потім збільшили на 10 %. У якій діжці води стало більше?

904. Відомо, що $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$. Чому дорівнює значення виразу $x^4 + x^2y^2 + y^4$?

905. Доведіть, що при будь-якому значенні x значення виразу $|x| - x$ більше за відповідне значення виразу $2x - x^2 - 2$.

---

[1] Дану функцію називають «дробова частина числа» і для неї існує спеціальне позначення $y = \{x\}$. За означенням $\{x\} = x - [x]$, де $[x]$ — ціла частина x. Наприклад, $\{3{,}2\} = 0{,}2$; $\{-3{,}2\} = 0{,}8$; $\{-0{,}16\} = 0{,}84$; $\{2\} = 0$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

906. Знайдіть значення виразу:

1) $0,1x + 5y$, якщо $x = -4$, $y = 0,6$;
2) $x^2 - 3y + 7$, якщо $x = 6$, $y = -2$;
3) $|x| + |y - 6|$, якщо $x = -10$, $y = 2$;
4) $(2y - 3)^2 - (x + 4)^2$, якщо $x = -4$, $y = 1,5$.

907. Зобразіть на координатній площині всі точки $(x;\ y)$ такі, що:

1) $x = -3$, y — довільне число;
2) $y = 2$, x — довільне число;
3) $x = 0$, y — довільне число.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

908. Є два друкарських автомати. Перший за карткою з числами $(a;\ b;\ c)$ видає картку з числами $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b+c}{2}; \frac{a+c}{2}\right)$, а другий за карткою з числами $(a;\ b;\ c)$ — картку з числами $(2a - b,\ 2b - c,\ 2c - a)$. Чи можна за допомогою цих автоматів з картки $(2,8;\ -1,7;\ 16)$ отримати картку $(1,73;\ 2;\ 0,4)$?

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ № 6 «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

1. При якому значенні аргументу значення функції $y = -1,5x + 4$ дорівнює -2?

А) 4; Б) -4; В) 2; Г) -2.

2. Серед наведених функцій укажіть пряму пропорційність:

А) $y = 12 + x$; В) $y = \frac{12}{x}$;
Б) $y = 12$; Г) $y = 12x$.

3. Яка з даних функцій не є лінійною?

А) $y = -2x + 9$; В) $y = -\frac{x}{2} + 9$;
Б) $y = -\frac{2}{x} + 9$; Г) $y = 9 - 0,2x$.

4. Через яку з даних точок проходить графік функції $y = x^2 - 3$?

А) $A(-3; 0)$; В) $C(-3; 3)$;

Б) $B(-3; 6)$; Г) $D(-3; -12)$.

5. Уранці учень пішов до школи, а після уроків повернувся додому. На рисунку 40 зображено графік залежності відстані між учнем та його домом від часу. Скільки годин учень перебував у школі?

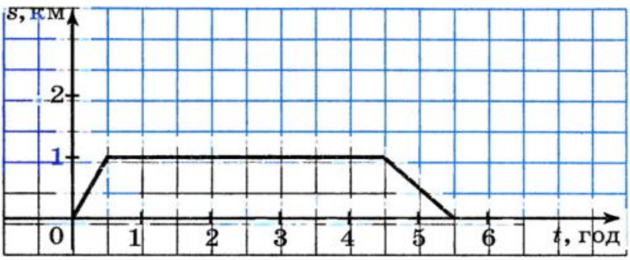


Рис. 40

А) 5 год; Б) 4,5 год; В) 4 год; Г) 3,5 год.

6. Графіком якої з наведених функцій є пряма, що проходить через початок координат?

А) $y = 20 + x$; В) $y = 20 - x$;

Б) $y = 20x$; Г) $y = x - 20$.

7. Графіком якої з наведених функцій є горизонтальна пряма?

А) $y = \frac{1}{9}$; В) $y = \frac{1}{9}x + 1$;

Б) $y = \frac{1}{9} - x$; Г) $y = \frac{1}{9}x$.

8. У якій точці графік функції $y = x - 2$ перетинає вісь ординат?

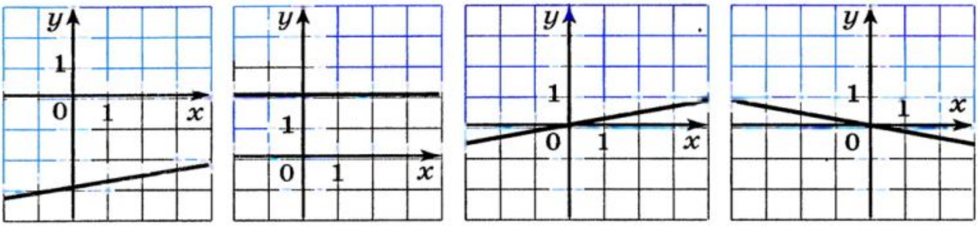
А) $A(0; -2)$; В) $C(2; 0)$;

Б) $B(0; 2)$; Г) $D(-2; 0)$.

9. Визначте абсцису точки перетину графіків функцій $y = 8 - 4x$ і $y = x + 14$.

А) -2; Б) 2; В) $-1{,}2$; Г) $1{,}2$.

10. На якому з рисунків зображено графік функції $y = 0{,}2x$ (рис. 41)?



А) Б) В) Г)

Рис. 41

11. Графік якої функції зображено на рисунку 42?

А) $y = 3x$; В) $y = x + 3$;

Б) $y = -x + 3$; Г) $y = \frac{1}{3}x$.

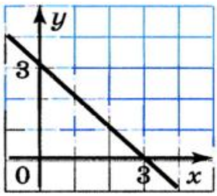


Рис. 42

12. При якому значенні m графік функції $y = mx + 2m - 5$ перетинає вісь x у точці з абсцисою -1?

А) 5; Б) -5; В) -3; Г) 3.

ПІДСУМКИ

У цьому параграфі:

- було введено такі поняття:
  - функціональна залежність;
  - функція;
  - аргумент функції;
  - область визначення і область значень функції;
  - графік функції;
  - лінійна функція;
  - пряма пропорційність;
- ви вивчили:
  - способи задання функції;
  - властивості лінійної функції;
  - метод побудови графіка лінійної функції;
- ви дізналися, у чому полягає відмінність функції від інших правил, які задають зв'язки між величинами.

§ 4. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

- У цьому параграфі ви познайомитеся з рівняннями з двома змінними та їх системами.
- Вивчите деякі методи їх розв'язування.
- Ви дізнаєтеся, що рівняння з двома змінними може служити математичною моделлю реальної ситуації.
- Оволодієте новим ефективним методом розв'язування текстових задач.

24. Рівняння з двома змінними

Наведемо кілька прикладів реальних ситуацій.

ПРИКЛАД 1

Відстань між Києвом і Харковом дорівнює 450 км. З Києва до Харкова зі швидкістю x км/год виїхав автомобіль. Через 1 год назустріч йому з Харкова зі швидкістю y км/год виїхав другий автомобіль. Вони зустрілися через 2 год після виїзду другого автомобіля.

Побудуємо математичну модель цієї ситуації.

Шлях, пройдений другим автомобілем до зустрічі, дорівнює $2y$ км. Оскільки перший автомобіль перебував у дорозі на 1 год більше за другий, то він до зустрічі проїхав $3x$ км.

Маємо: $3x + 2y = 450$.

Ця рівність з двома змінними є математичною моделлю описаної вище реальної ситуації.

Розглянемо ще кілька прикладів ситуацій, математичними моделями яких є рівності з двома змінними.

ПРИКЛАД 2

Площа квадрата, сторона якого 10 см, дорівнює сумі площ двох інших квадратів.

Якщо довжини сторін цих квадратів позначити x см і y см, то отримаємо рівність

$$x^2 + y^2 = 100.$$

ПРИКЛАД 3

Дано прямокутний трикутник.

Якщо градусні міри його гострих кутів позначити x° і y°, то можна записати

$$x + y = 90.$$

ПРИКЛАД 4

Дано прямокутник, площа якого дорівнює 12 см². Позначимо довжини його сторін x см і y см. Тоді

$$xy = 12.$$

ПРИКЛАД 5

Купили 5 ручок и 7 зошитів. За всю покупку заплатили 19 грн.

Якщо одна ручка коштує x грн., а один зошит — y грн., то

$$5x + 7y = 19.$$

Як бачимо, усі отримані в прикладах 1–5 рівності

$$3x + 2y = 450,$$
$$x^2 + y^2 = 100,$$
$$x + y = 90,$$
$$xy = 12,$$
$$5x + 7y = 19$$

містять по дві змінні x і y. Такі рівності називають **рівняннями з двома змінними.**

Якщо, наприклад, у рівняння $xy = 12$ замість x і y підставити числа 2 і 6, то отримаємо правильну рівність $2 \cdot 6 = 12$. У цьому випадку говорять, що пара значень змінних $x = 2$, $y = 6$ **задовольняє** дане рівняння або що ця пара є **розв'язком** цього рівняння.

Означення. **Пару значень змінних, яка перетворює рівняння в правильну рівність, називають розв'язком рівняння з двома змінними.**

Так, для рівняння $x^2 + y^2 = 100$ кожна з пар чисел

$$x = 8,\ y = 6;$$

$$x = -6,\ y = 8;$$
$$x = 10,\ y = 0$$

є його розв'язком, а, наприклад, пара $x = 5$, $y = 9$ не є його розв'язком.

Звернемо увагу на те, що дане означення схоже на означення кореня рівняння з однією змінною. У зв'язку з цим виникає поширена помилка: кожне число пари або саму пару, що є розв'язком, називають коренем рівняння з двома змінними.

Той факт, що пара $x = a$, $y = b$ є розв'язком рівняння, прийнято записувати так: $(a;\ b)$ є розв'язком рівняння. У дужках на першому місці пишуть значення змінної x, а на другому — значення змінної y[1].

Використовуючи таке позначення, можна, наприклад, записати, що кожна з пар чисел (5; 85), (40; 50), (50; 40) є розв'язком рівняння $x + y = 90$.

Три вказані пари ще зовсім не вичерпують усі розв'язки цього рівняння. Якщо замість змінної y підставляти у рівняння $x + y = 90$ будь-які її значення, то матимемо лінійні рівняння з однією змінною, коренями яких будуть відповідні значення змінної x. Зрозуміло, що таким чином можна дістати безліч пар чисел, які є розв'язками рівняння $x + y = 90$.

Рівняння з двома змінними не обов'язково має безліч розв'язків. Рівняння $|x| + |y| = 0$ має тільки один розв'язок — пару (0; 0), оскільки $|x| \geqslant 0$ і $|y| \geqslant 0$, а рівняння $x^2 + y^2 = -2$ взагалі не має розв'язків.

Зауважимо, що ми розв'язали кожне з рівнянь $|x| + |y| = 0$ і $x^2 + y^2 = -2$, але водночас ми не розв'язали рівняння $x + y = 90$.

Розв'язати рівняння з двома змінними — це означає знайти усі його розв'язки або показати, що воно не має розв'язків.

---

[1] Якщо змінні в рівнянні позначено буквами, відмінними від x і y, то, записуючи розв'язок у вигляді пари, потрібно домовитися, значення якої змінної ставиться на перше місце в парі, а якої — на друге. Зазвичай береться до уваги порядок букв латинського алфавіту.

Властивості рівнянь з двома змінними запам'ятати легко: вони аналогічні властивостям рівнянь з однією змінною, які ви вивчали у 6 класі.

- **Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі розв'язки, що й дане.**
- **Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, яке має ті самі розв'язки, що й дане.**
- **Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі розв'язки, що й дане.**

Розглянемо рівняння $x^2 + y^2 + 2 = 2x - 2y$. Перетворимо його, використовуючи властивості рівнянь. Маємо:

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2 = 0;$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 0;$$
$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0.$$

Оскільки $(x - 1)^2 \geqslant 0$ і $(y + 1)^2 \geqslant 0$, то ліва частина рівняння перетворюється в нуль тільки при *одночасному* виконанні умов: $x - 1 = 0$ і $y + 1 = 0$. Звідси пара $(1; -1)$ — єдиний розв'язок даного рівняння.

Вивчаючи якийсь об'єкт, ми прагнемо не тільки описати його властивості, а й скласти про нього наочне уявлення. Графік функції — характерний тому приклад. Оскільки розв'язком рівняння з двома змінними є пара чисел, наприклад $(a; b)$, то цілком природно зобразити цей розв'язок у вигляді точки $M\ (a; b)$ на координатній площині. Якщо зобразити всі розв'язки рівняння, то матимемо **графік рівняння.**

Означення. **Графіком рівняння з двома змінними називають геометричну фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких (пари чисел) є розв'язками даного рівняння.**

Наприклад, графіком рівняння $x^2 + y^2 + 2 = 2x - 2y$ є єдина точка $M\ (1; -1)$ (рис. 43).

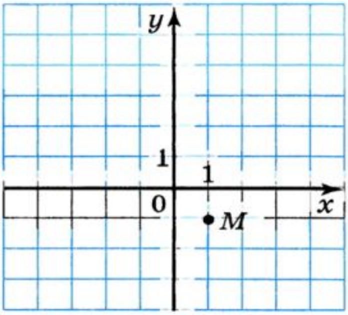


Рис. 43

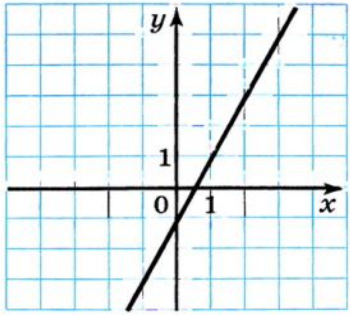


Рис. 44

На рисунку 44 зображено графік функції $y = 2x - 1$. Оскільки формула, яка задає лінійну функцію, є рівнянням з двома змінними, то також можна сказати, що на рисунку 44 зображено графік рівняння $y = 2x - 1$.

Наголосимо, що коли якась фігура є графіком рівняння, то виконуються дві умови:

1) усі розв'язки рівняння є координатами точок, які належать графіку;
2) координати будь-якої точки, що належить графіку, — це пара чисел, яка є розв'язком даного рівняння.

Сім'я графіків рівнянь дуже різноманітна. Вивчаючи в подальшому курс алгебри, ви ознайомлюватиметеся з її представниками. Наприклад, у 8 класі ви дізнаєтеся, що графіком розглянутого на початку пункту рівняння $xy = 12$ є фігура, зображена на рисунку 45. Вона має назву **гіпербола**. А в 9 класі ви зможете довести, що графіком рівняння $x^2 + y^2 = 4$ є коло (рис. 46).

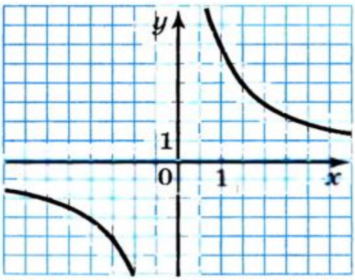


Рис. 45

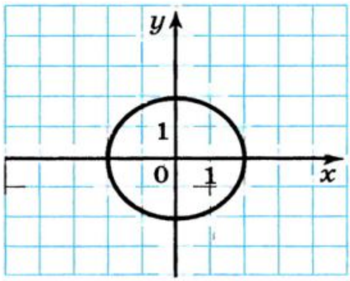


Рис. 46

ПРИКЛАД 6

Побудуйте графік рівняння $xy + 3y = 0$.

Запишемо дане рівняння у вигляді $y(x + 3) = 0$.

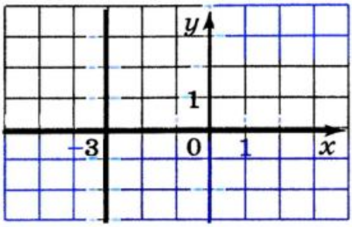


Рис. 47

Отже, розв'язками даного рівняння є всі пари чисел виду $(x; 0)$, де x — довільне число, і всі пари чисел виду $(-3; y)$, де y — довільне число.

Усі точки, координати яких мають вигляд $(x; 0)$, де x — довільне число, утворюють вісь абсцис.

Усі точки, координати яких мають вигляд $(-3; y)$, де y — довільне число, утворюють пряму, яка проходить через точку $(-3; 0)$ паралельно осі ординат.

Отже, графіком даного рівняння є пара прямих, зображених на рисунку 47.

?

1. Що називають розв'язком рівняння з двома змінними?
2. Що називають графіком рівняння з двома змінними?
3. Сформулюйте властивості рівнянь з двома змінними.
4. Чи може графік рівняння з двома змінними складатися тільки з однієї точки?
5. Яка фігура є графіком рівняння $y = kx + b$?

909.° Які з наведених рівнянь є рівняннями з двома змінними:

1) $2x + y = 8$; 4) $a^2 - 3b = 8c$; 7) $x^3 - 8x = 100$;
2) $x + y + z = 0$; 5) $xy + 1 = 2$; 8) $x^3 - 8y = 100$;
3) $a^2 - 3b = 8$; 6) $5m - 3n = 6$; 9) $x^3 - 8xy = 100$?

910.° Чи є пара чисел $(-2; 3)$ розв'язком рівняння:

1) $4x + 3y = 1$; 2) $x^2 + 5 = y^2$; 3) $xy = 6$?

911.° Які з пар чисел $(0; 1)$, $(5; -4)$, $(0; 1{,}2)$, $(-1; 1)$, $(1; -1)$ є розв'язками рівняння:

1) $x^2 + 5y - 6 = 0$; 2) $xy + x = 0$?

912.° Чи належить графіку рівняння $2x^2 - y + 1 = 0$ точка:

1) $A(-3; -17)$; 3) $C(-2; 9)$;
2) $B(2; 9)$; 4) $D(-1; 4)$?

913.° Доведіть, що графік рівняння $xy - 12 = 0$ не проходить через точку:

1) $A(3; -4)$; 2) $B(-2; 6)$; 3) $C(7; 2)$.

914.° Чи проходить через початок координат графік рівняння:

1) $12x + 17y = 0$; 3) $x^3 - 4y = y^2 + 3x$?
2) $x^2 - xy + 2 = 0$;

915.° Укажіть які-небудь 3 розв'язки рівняння:

1) $x - y = 10$; 2) $x = 4y$; 3) $2x^2 + y = 20$.

916.° Укажіть які-небудь 3 розв'язки рівняння:

1) $x + y = 1$; 2) $5x - y = 2$.

917.• Графік рівняння $4x + 3y = 30$ проходить через точку $A(6; b)$. Чому дорівнює значення b?

918.• Графік рівняння $7x - 5y = 47$ проходить через точку $B(a; -1)$. Чому дорівнює значення a?

919.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:

1) $x + y = 2$; 3) $x^2 + y^2 = 9$;
2) $x^3 - y = 1$; 4) $|x| - y = 5$.

920.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:

1) $2x - 3y = 6$; 2) $x^2 + y = 4$; 3) $|x| + |y| = 7$.

921.• Складіть яке-небудь рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел:

1) $x = 1, y = 2$; 2) $x = -3, y = 5$; 3) $x = 10, y = 0$.

922.• Складіть яке-небудь рівняння з двома змінними, графік якого проходить через точку:

1) $A(-2; 2)$; 2) $B(4; -1)$; 3) $C(0; 0)$.

923.• Придумайте 3 рівняння, графіки яких проходять через точку $M(6; -3)$.

924.• Придумайте 3 рівняння, графіки яких проходять через точку $K(0; 4)$.

925.• Чи належать графіку рівняння $x^4 - y = -2$ точки, що мають від'ємну ординату?

926.• Чи проходить графік рівняння $x + y^2 = -4$ через точки, що мають додатну абсцису?

927.• Чи має розв'язки рівняння:

1) $y^2 = x^2$; 2) $y^2 = -x^2$; 3) $xy = 0$;

4) $x^2 + y^2 = 25$; 6) $x^2 - y^2 = -9$; 8) $|x| + |y| = 0$;
5) $x^2 + y^2 = -25$; 7) $|x| + |y| = 1$; 9) $|x| + |y| = -1$?
У разі позитивної відповіді вкажіть приклади розв'язків.

928.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 + y^2 = 0$;
2) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$;
3) $x^4 + y^6 = -4$.

929.$^{\bullet}$ Скільки розв'язків має рівняння:
1) $x^2 + (y - 2)^2 = 0$;
2) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 0$;
3) $9x^2 + 16y^2 = 0$;
4) $(x^2 + y^2)\, y = 0$;
5) $xy = 2$;
6) $|x + 1| + |y| = 0$;
7) $x^2 + |y| = -100$;
8) $x + y = 2$?

930.$^{\bullet}$ Наведіть приклад рівняння зі змінними x і y:
1) яке має один розв'язок;
2) яке не має розв'язків;
3) яке має безліч розв'язків;
4) розв'язком якого є будь-яка пара чисел.

931.$^{\bullet\bullet}$ Що являє собою графік рівняння:
1) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 0$;
2) $|x + 9| + |y - 8| = 0$;
3) $4x + y = y + 4x$;
4) $(x - 1)(y + 5) = 0$?

932.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік рівняння:
1) $(x + 2)^2 + y^2 = 0$;
2) $|x| + (y - 3)^2 = 0$;
3) $xy = 0$;
4) $(x + 1)(y - 1) = 0$;
5) $xy - 2y = 0$.

933.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік рівняння:
1) $|x - 4| + |y - 4| = 0$;
2) $(x - 4)(y - 4) = 0$;
3) $xy + x = 0$.

934.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі пари $(x;\ y)$ натуральних чисел, які є розв'язками рівняння:
1) $2x + 3y = 5$;
2) $x + 5y = 16$.

935.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі пари $(x;\ y)$ цілих чисел, які є розв'язками рівняння $|x| + |y| = 2$.

936.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі пари $(x;\ y)$ цілих чисел, які є розв'язками рівняння $x^2 + y^2 = 5$.

937.$^{\bullet\bullet}$ Катерині треба заплатити за математичну енциклопедію 29 грн., маючи купюри по 2 грн. і по 5 грн. Скількома способами вона може розрахуватися за покупку, не одержуючи здачу?

938.•• Учням 7 класу на конкурсі з математики було запропоновано задачі з алгебри і з геометрії. За кожну правильно розв'язану задачу з алгебри нараховувалося 2 бали, а з геометрії — 3 бали. Максимальна кількість набраних балів могла скласти 24. Скільки було запропоновано задач окремо з алгебри і з геометрії, якщо з кожного з цих предметів була хоча б одна задача? Знайдіть усі можливі відповіді.

939.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + y^2 + 4 = 4y$;
2) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + x + y + 0,5 = 0$;
4) $9x^2 + y^2 + 2 = 6x$.

940.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 10y + 30 = 10x - y^2 - 20$;
2) $4x^2 + y^2 + 4x = 2y - 3$.

941.•• Графіком рівняння $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$ є крива, яку називають *кардіоїдою* (рис. 48). Знайдіть координати точок перетину її з осями координат.

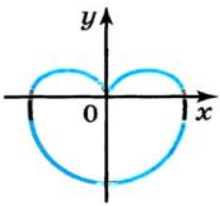


Рис. 48

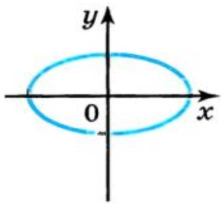


Рис. 49

942.•• Графіком рівняння $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ є крива, яку називають *еліпсом* (рис. 49). Знайдіть координати точок перетину її з осями координат.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

943. У посудину, яка містить 150 мл восьмивідсоткового розчину кислоти, додали 90 мл води. Чому дорівнює концентрація кислоти в одержаному розчині?

944. У мішку 7 червоних, 10 зелених і 12 жовтих яблук. Яку найменшу кількість яблук треба вийняти, не заглядаючи в мішок, щоб з імовірністю, яка дорівнює 1, серед вийнятих яблук хоча б одне було зеленим?

945. Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{4x+1}{5} - \frac{2x-3}{3} = x - 4;$ 2) $\frac{3x-5}{4} - \frac{5x-2}{3} = x + 9.$

946. З міста A до міста B одночасно виїхали легковий і вантажний автомобілі. Легковий автомобіль прибув у місто B через 3,5 год після виїзду, а вантажному залишилося ще проїхати 77 км. Знайдіть відстань між містами, якщо швидкість вантажного автомобіля в 1,4 раза менша від швидкості легкового.

947. Чи можна стверджувати, що при будь-якому натуральному парному значенні n значення виразу $(5n + 10)^2 - (2n + 4)^2$ ділиться націло на 84?

948. Відомо, що при деяких значеннях m, n і k значення виразу $3m^2n$ дорівнює 2, а значення виразу n^2k^4 дорівнює 3. Знайдіть при тих самих значеннях m, n і k значення виразу:

1) $(3m^2n^2k^2)^2;$ 2) $(-2m^2nk^2)^3 \cdot (0{,}5n^2k)^2.$

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

949. Порівняйте значення виразів $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 999 \cdot 1000)^2$ і 1000^{1000}.

25. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік

Означення. **Лінійним рівнянням з двома змінними називають рівняння виду $ax + by = c$, де x і y — змінні, a, b, c — деякі числа.**

Рівняння $3x + 2y = 450$, $x + y = 90$, які розглядалися в попередньому пункті, є лінійними. Наведемо ще приклади лінійних рівнянь: $x + y = 3$; $0x + 5y = -1$; $-3x + 0y = 5$; $0x + 0y = 0$; $0x + 0y = 2$.

З'ясуємо, яка фігура є графіком лінійного рівняння. Для цього розглянемо три випадки.

ВИПАДОК 1

Візьмемо лінійне рівняння $ax + by = c$, де $b \neq 0$. Це рівняння можна перетворити так:

$$by = -ax + c.$$

Оскільки $b \neq 0$, то

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Введемо позначення: $-\frac{a}{b} = k$; $\frac{c}{b} = p$. Тепер можна записати

$$y = kx + p.$$

Ми отримали формулу, яка задає лінійну функцію.

Отже, графіком рівняння $ax + by = c$, де $b \neq 0$, є пряма.

ПРИКЛАД 1

Побудуйте графік рівняння $x - 3y = -2$.

Ми вже знаємо, що графіком цього рівняння є пряма. Тому достатньо визначити координати двох будь-яких її точок. Маємо: якщо $x = 1$, то $y = 1$; якщо $x = -2$, то $y = 0$. Тепер через точки M (1; 1) і N (−2; 0) проведемо пряму (рис. 50). Ця пряма і є шуканим графіком.

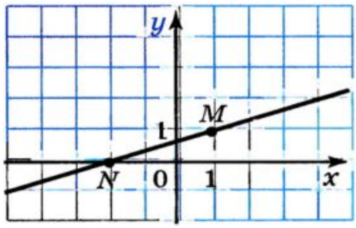


Рис. 50

ВИПАДОК 2

Нехай маємо лінійне рівняння $ax + by = c$, де $a \neq 0$, $b = 0$. Отримуємо $ax + 0y = c$. Побудову графіка рівняння такого виду розглянемо на прикладі.

ПРИКЛАД 2

Побудуйте графік рівняння $3x + 0y = 6$.

Легко знайти кілька розв'язків цього рівняння. Ось, наприклад, чотири його розв'язки: $(2; -1)$, $(2; 0)$, $\left(2; \frac{1}{3}\right)$, $(2; -100)$. Зрозуміло, що будь-яка пара виду $(2; t)$, де t — довільне число, є розв'язком. Отже, шуканий графік буде

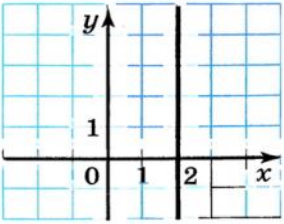


Рис. 51

містити всі точки, у яких абсциса дорівнює 2, а ордината — будь-яке число. Усі ці точки належать прямій, яка перпендикулярна до осі абсцис і проходить через точку (2; 0) (рис. 51). При цьому координати будь-якої точки цієї прямої — пара чисел, що є розв'язком даного рівняння. Таким чином, зазначена пряма і є шуканим графіком.

Міркуючи аналогічно, можна показати, що графіком рівняння $ax + 0y = c$, де $a \neq 0$, є пряма, перпендикулярна до осі абсцис.

Тепер можна зробити такий висновок: ***у кожному з випадків, коли $b \neq 0$ або $b = 0$ і $a \neq 0$, графіком рівняння $ax + by = c$ є пряма.***

Часто, наприклад, замість речення «дано рівняння $y = 2x$» кажуть «дано пряму $y = 2x$».

ВИПАДОК 3

Нехай $a = b = 0$ у лінійному рівнянні $ax + by = c$. Маємо $0x + 0y = c$.

Якщо $c \neq 0$, то це рівняння не має розв'язків, а отже, на координатній площині не існує точок, які могли б слугувати графіком рівняння.

Якщо $c = 0$, то рівняння набуває вигляду:

$$0x + 0y = 0.$$

Будь-яка пара чисел є його розв'язком. Отже, у цьому випадку графіком рівняння є вся координатна площина.

Наведена таблиця підсумовує матеріал, розглянутий у цьому пункті.

Рівняння	Значення a, b, c	Графік
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a і c — будь-які	невертикальна пряма
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c — будь-яке	вертикальна пряма
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	уся координатна площина
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

ПРИКЛАД 3

Виразіть з рівняння $3x - 2y = 6$ змінну x через змінну y і знайдіть яких-небудь 2 розв'язки цього рівняння.

Маємо: $3x = 2y + 6$;

$$x = \frac{2y+6}{3};$$

$$x = \frac{2}{3}y + 2.$$

Надаючи змінній y довільного значення і обчисливши за отриманою формулою $x = \frac{2}{3}y + 2$ відповідне значення x, можемо знайти скільки завгодно розв'язків даного рівняння $3x - 2y = 6$.

Наприклад,

якщо $y = 6$, то $x = \frac{2}{3} \cdot 6 + 2 = 6$,

якщо $y = -2$, то $x = \frac{2}{3} \cdot (-2) + 2 = \frac{2}{3}$.

ПРИКЛАД 4

Побудуйте графік рівняння $4x = -8$.

Запишемо дане рівняння у вигляді $4x + 0y = -8$. Звідси отримуємо рівняння $x + 0y = -2$. Його розв'язки — пари чисел виду $(-2; t)$, де t — довільне число. Графіком цього рівняння є пряма, яка проходить через точку $(-2; 0)$ і перпендикулярна до осі абсцис (рис. 52).

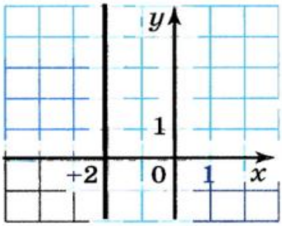


Рис. 52

ПРИКЛАД 5

Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графіком якого є пряма, що проходить через початок координат і точку $A(3; -12)$.

Оскільки графік шуканого рівняння проходить через точки $O(0; 0)$ і $A(3; -12)$, що мають різні абсциси, то він є невертикальною прямою. Тоді рівняння цієї прямої можна записати у вигляді $y = kx + b$, де k і b — деякі числа.

З того, що графік проходить через початок координат, випливає, що $b = 0$. Оскільки графік проходить через точку $A(3; -12)$, то $-12 = 3k$, звідки $k = -4$.

Отже, шукане рівняння має вигляд $y = -4x$ або $4x + y = 0$.

Відповідь: $4x + y = 0$.

1. Яке рівняння називають лінійним рівнянням з двома змінними?
2. Що є графіком рівняння $ax + by = c$, коли $b \neq 0$ або коли $b = 0$ і $a \neq 0$?
3. Що є графіком рівняння $ax + by = c$ при $a = b = c = 0$?
4. При яких значеннях a, b і c рівняння $ax + by = c$ не має розв'язків?

950.° Чи є лінійним рівняння з двома змінними:
1) $7x + 11y = 36$;
2) $x^2 + 4y = 6$;
3) $12x - 17y = 0$;
4) $-3x + xy = 10$?

951.° Які з пар чисел $(7; 1)$, $(0; -2)$, $(8; 2)$, $(-7; -5)$, $(10; 3)$ є розв'язками рівняння $3x - 7y = 14$?

952.° Розв'язком якого з рівнянь є пара чисел $(3; -2)$:
1) $4x + 5y = 2$; 2) $3x - 2y = 5$; 3) $0{,}2x - 0{,}5y = 1{,}6$?

953.° Відомо, що пара $(-5; y)$ є розв'язком рівняння $2x + 9y = 17$. Знайдіть значення y.

954.° Відомо, що пара $(x; 6)$ є розв'язком рівняння $8x - 3y = 22$. Знайдіть значення x.

955.° Графіку якого з рівнянь належить точка $M(1; 4)$:
1) $4y - 2x = -4$;
2) $6x + 11y = 50$?

956.° Чи проходить графік рівняння $3x + y = -1$ через точку:
1) $M(-3; 10)$; 2) $N(4; -13)$; 3) $K(0; -1)$?

957.° Виразіть з даного рівняння змінну x через змінну y і знайдіть які-небудь 3 розв'язки цього рівняння:
1) $x + y = 12$;
2) $x - 7y = 5$;
3) $2x + 8y = 16$;
4) $-6x + 5y = 18$.

958.° Виразіть з даного рівняння змінну y через змінну x і знайдіть які-небудь 2 розв'язки цього рівняння:
1) $4x - y = 7$; 2) $-2x + y = 11$; 3) $5x - 3y = 15$.

959.° Знайдіть які-небудь 3 розв'язки рівняння:
1) $x - y = 10$;
2) $2y - 5x = 11$.

960.° Знайдіть які-небудь 3 розв'язки рівняння:
1) $6x + y = 7$; 2) $2x - 3y = -4$.

961.° Побудуйте графік рівняння:
1) $x - y = 4$; 3) $x - 5y = 5$;
2) $4x + y = 3$; 4) $3x + 2y = 6$.

962.° Побудуйте графік рівняння:
1) $x + y = -3$; 2) $6x + y = 0$; 3) $2x - 3y = 9$.

963.° Які пари чисел є розв'язками рівняння:
1) $0x + 4y = 20$; 2) $-3x + 0y = 27$?

964.° Побудуйте графік рівняння:
1) $4y = -8$; 2) $1{,}2x = 3{,}6$.

965.° Побудуйте графік рівняння:
1) $-0{,}2x = 1$; 2) $0{,}5y = 2$.

966.° У якій точці пряма $7y - 3x = 21$ перетинає:
1) вісь x; 2) вісь y?

967.° Знайдіть координати точок перетину прямої $0{,}3x + 0{,}2y = 6$ з осями координат.

968.° Складіть яке-небудь лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $(-2; 1)$.

969.° Складіть яке-небудь лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $(3; 5)$.

970.• Знайдіть розв'язок рівняння $7x + 8y = 30$, який складається з двох рівних чисел.

971.• Знайдіть розв'язок рівняння $-12x + 17y = -87$, який складається з двох протилежних чисел.

972.• При якому значенні a пара чисел $(a; 2a)$ є розв'язком рівняння $2x + 7y = 16$?

973.• При якому значенні a пара чисел $(-4; 2)$ є розв'язком рівняння:
1) $3x + 5y = a$; 2) $ax + 5y = 18$?

974.• При якому значенні a графік рівняння $11x - 13y = a + 4$ проходить через початок координат?

975.• При якому значенні a через точку $A(5; -3)$ проходить графік рівняння:
1) $4x - 9y = a$; 2) $6x - ay = 15$?

976.• При якому значенні a графік рівняння $ax + 4y = 0$ проходить через точку:
1) $A(12; -4)$; 2) $B(0; 2)$; 3) $O(0; 0)$?

977.° При якому значенні b графік рівняння $5x + by = 0$ проходить через точку:

1) $M(-4; -10)$; 2) $N(0; 1)$; 3) $K(-2; 0)$?

978.° Графіком яких рівнянь є та сама пряма, що й графік рівняння $2x - 5y = 3$:

1) $4x - 10y = 6$;
2) $4x - 10y = 3$;
3) $2x - 5y = 6$;
4) $5y - 2x = -3$;
5) $x - 2{,}5y = 1{,}5$;
6) $-0{,}4x - y = 0{,}6$?

979.° Складіть рівняння з двома змінними за такою умовою:

1) довжина прямокутника дорівнює x м, ширина — y м, периметр — 18 м;
2) автобус їхав 4 год зі швидкістю x км/год, а 3 год — зі швидкістю y км/год, проїхавши всього 250 км;
3) зошит коштує x грн., а ручка — y грн., 2 ручки дорожчі за 5 зошитів на 1,2 грн.;
4) сплав, маса якого x кг і який містить 12 % міді, і сплав, маса якого y кг і який містить 20 % міді, сплавили разом і отримали новий сплав, що містить 9 кг міді;
5) в одному ящику було x кг цукерок, а в другому — y кг; після того як з першого ящика переклали в другий 8 кг цукерок, в обох ящиках цукерок стало порівну.

980.° Складіть рівняння з двома змінними за такою умовою:

1) бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює a см, основа — b см, периметр — 32 см;
2) один автомобіль проїхав за 6 год зі швидкістю x км/год на 32 км менше, ніж другий автомобіль за 7 год зі швидкістю y км/год;
3) в одному магазині було x ц яблук, а в другому — y ц; за день у першому магазині продали 14 % яблук, а у другому — 18 % яблук, причому в другому магазині продали на 1,2 ц яблук менше, ніж у першому.

981.° Доведіть, що прямі $5y - x = 6$ і $3x - 7y = 6$ перетинаються в точці $A(9; 3)$.

982.° Доведіть, що прямі $4x - 3y = 12$ і $3x + 4y = -66$ перетинаються в точці $B(-6; -12)$.

983.$^\bullet$ Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графіком якого є пряма, що проходить через початок координат і точку:

1) $A\ (2;\ 8)$; 2) $B\ (-6;\ 15)$.

984.$^\bullet$ Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графіком якого є пряма, що проходить через початок координат і точку $C\ (8;\ -12)$.

985.$^\bullet$ Доведіть, що не існує такого значення a, при якому пряма $ax - 3y = 12$ проходить через початок координат.

986.$^\bullet$ При якому значенні a точка перетину прямих $2x - 3y = -6$ і $4x + y = a$ належить осі абсцис?

987.$^\bullet$ При якому значенні b точка перетину прямих $9x + 7y = 35$ і $x + by = -20$ належить осі ординат?

988.$^\bullet$ При яких значеннях a і b пряма $ax + by = 24$ перетинає осі координат у точках $A\ (-6;\ 0)$ і $B\ (0;\ 12)$ відповідно?

989.$^\bullet$ На якому з рисунків 53 (*а–г*) зображено графік рівняння $x + y = 3$?

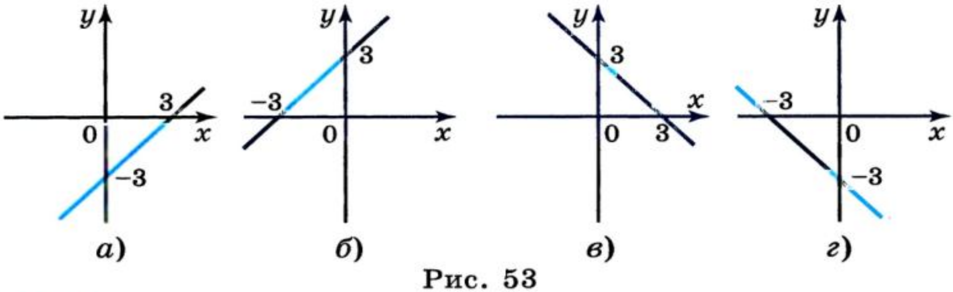


Рис. 53

990.$^\bullet$ На якому з рисунків 54 (*а–г*) зображено графік рівняння $x - y = -5$?

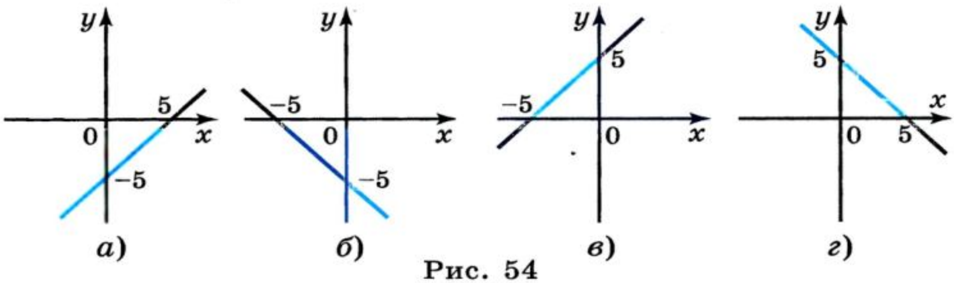


Рис. 54

991.˙ Яка з прямих, зображених на рисунку 55, є графіком рівняння:

1) $0x + y = -3$;
2) $2x - y = 1$;
3) $3x + 0y = 6$;
4) $x + 2y = 0$?

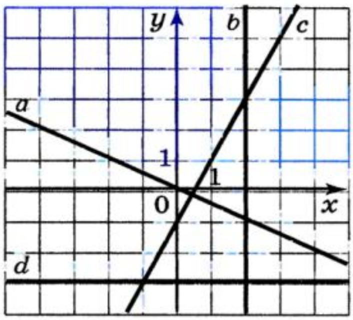


Рис. 55

992.˙ Чи належить графіку рівняння $13x + 17y = -40$ хоча б одна точка, у якої обидві координати — додатні числа?

993.˙ Чи належить графіку рівняння $4x - 8y = 7$ хоча б одна точка, у якої обидві координати — цілі числа?

994.˙˙ Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графік якого перетинає осі координат у точках:

1) $A(-4; 0)$ і $B(0; 2)$;
2) $C(0; -3)$ і $D(5; 0)$.

995.˙˙ Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графік якого проходить через точки $M(6; 0)$ і $K(0; 6)$.

996.˙˙ Складіть рівняння, графіки яких зображено на рисунку 56.

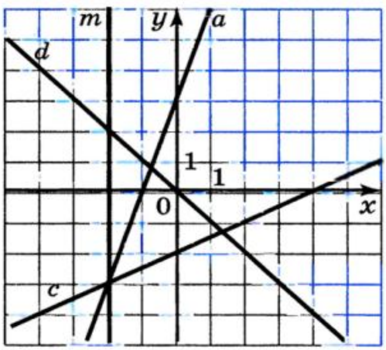


Рис. 56

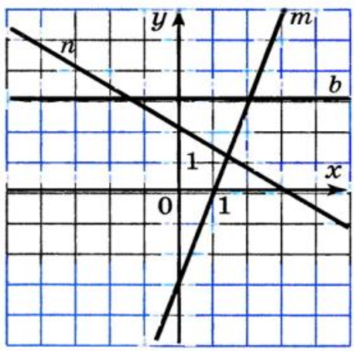


Рис. 57

997.˙˙ Складіть рівняння, графіки яких зображено на рисунку 57.

998.* Скільки існує пар простих чисел $(x; y)$, які є розв'язком рівняння $5x - 6y = 3$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

999. Дві бригади виготовили 840 деталей, причому одна бригада виготовила на 80 % більше деталей, ніж друга. Скільки деталей виготовила кожна бригада?

1000. Відомо, що 4 однакових екскаватори виривають котлован за 12 год. За який час 6 таких самих екскаваторів вириють 3 таких котловани?

1001. Доведіть, що значення виразу $2^{36} + 4^{100} - 2^{32} - 4^{98}$ кратне числу: 1) 15; 2) 240.

1002. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 8)^2 - (x - 4)(x + 4) = 0$;

2) $(4x - 5)(4x + 5) - (4x - 1)^2 = 9 - 2x$.

1003. Розкладіть на множники:

1) $6x^3 - 8x^2 + 3xy - 4y$;

2) $x^4 - 6x^2y + 9y^2 - 16$;

3) $\frac{125x^3}{27} - \frac{m^6n^9}{64}$;

4) $c^2 - 2c - b^2 - 4b - 3$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

1004. Яка з пар чисел (3; 3), (−3; 3), (−3; −3) є розв'язком кожного з рівнянь $x^2 + y^2 = 18$ і $x + y = 0$?

1005. На рисунку 58 зображено графіки рівнянь $y = x^2$ і $x - y + 2 = 0$. Користуючись цим рисунком, знайдіть усі пари чисел, які є розв'язками кожного з даних рівнянь.

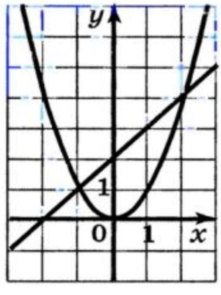


Рис. 58

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

1006. Сума 100 різних натуральних чисел дорівнює 5051. Знайдіть ці числа.

Як будували міст між геометрією та алгеброю

Ідея координат зародилася дуже давно. Адже ще в давнину люди вивчали Землю, спостерігали зірки, а за результатами своїх досліджень складали карти, схеми.

У II ст. до н. е. давньогрецький учений Гіппарх уперше використав ідею координат для визначення місця розташування об'єктів на поверхні Землі.

П. Ферма

Лише в XIV ст. французький учений Ніколя Орем (біля 1323–1392) уперше застосував у математиці ідею Гіппарха: він розбив площину на клітинки (як розбито аркуш вашого зошита) і став задавати положення точок широтою і довготою.

Однак величезні можливості застосування цієї ідеї були розкриті лише у XVII ст. у роботах видатних французьких математиків П'єра Ферма (1601–1665) і Рене Декарта (1596–1650). У своїх роботах ці вчені показали, як, завдяки системі координат, можна переходити від точок до чисел, від ліній до рівнянь, від геометрії до алгебри.

Незважаючи на те, що П. Ферма опублікував свою роботу на рік раніше, ніж Р. Декарт, ту систему координат, якою ми сьогодні користуємося, називають **декартовою**. Це пов'язано з тим, що Р. Декарт у своїй роботі «Міркування про метод» винайшов нову зручну буквену символіку, якою з невеликими змінами ми користуємося й сьогодні. Слідом за ним ми позначаємо змінні останніми буквами латинського алфавіту x, y, z, а коефіцієнти — першими: a, b, c, ... Звичні нам позначення степенів x^2, x^3, y^5 і т. д. також увів Р. Декарт.

Р. Декарт

26. Системи рівнянь з двома змінними. Графічний метод розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними

Легко перевірити, що пара чисел $(-2; 0)$ є розв'язком як рівняння $x^2 + y^2 = 4$, так і рівняння $y = x^2 - 4$. У таких випадках говорять, що пара $(-2; 0)$ — **спільний розв'язок** зазначених рівнянь.

На рисунку 59 зображено графіки рівнянь $-6x + 5y = 9$ і $4x + 3y = 13$. Вони перетинаються в точці $M(1; 3)$. Ця точка належить кожному з графіків. Отже, пара $(1; 3)$ є спільним розв'язком даних рівнянь.

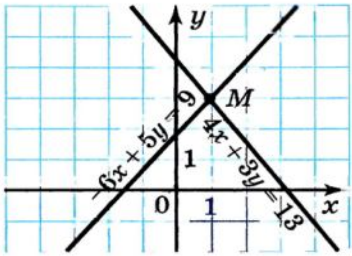


Рис. 59

Якщо поставлено задачу знайти сторони прямокутника, площа якого дорівнює 12 см², а периметр 14 см, то зрозуміло, що треба знайти спільний розв'язок рівнянь $xy = 12$ і $2x + 2y = 14$, де x см и y см — довжини сусідніх сторін.

Якщо треба знайти усі спільні розв'язки кількох рівнянь, то говорять, що треба розв'язати **систему рівнянь**.

Систему рівнянь записують за допомогою фігурної дужки. Так, запис

$$\begin{cases} xy = 12, \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$$

є математичною моделлю задачі про знаходження сторін прямокутника, площа якого дорівнює 12 см², а периметр 14 см.

А ось система

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$$

є математичною моделлю задачі про знаходження координат спільних точок двох прямих (рис. 59).

Обидва рівняння цієї системи є лінійними. Тому цю систему називають **системою двох лінійних рівнянь з двома змінними.**

Означення. Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару значень змінних, які перетворюють кожне рівняння на правильну рівність.

З прикладу, наведеного на початку пункту, випливає, що пара $(-2; 0)$ є розв'язком системи

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$$

Проте це зовсім не означає, що дану систему розв'язано.

Означення. Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Пара $(-2; 0)$ не вичерпує всіх розв'язків останньої системи. Наприклад, пара $(2; 0)$ — також розв'язок. Цю систему, як і систему, отриману в задачі про прямокутник, ви навчитеся розв'язувати в 9 класі.

А ось систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -4, \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

ми можемо розв'язати вже зараз. Очевидно, що перше рівняння цієї системи розв'язків не має, а отже, не існує й спільних розв'язків рівнянь, що входять до системи. Висновок: система розв'язків не має.

Так само можна вважати розв'язаною систему

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13. \end{cases}$$

Справді, графіки рівнянь системи перетинаються в точці $M(1; 3)$ (рис. 59). Її координати є розв'язком кожного рівняння системи, а значить, і самої системи. Інших спільних точок графіки рівнянь не мають, а отже, не має інших розв'язків і сама система. Висновок: пара $(1; 3)$ — єдиний розв'язок системи.

Описаний метод розв'язування останньої системи називають **графічним**. Його суть полягає в наступному:

- побудувати на одній координатній площині графіки рівнянь, що входять до системи;
- знайти координати всіх точок перетину побудованих графіків;
- отримані пари чисел і будуть шуканими розв'язками.

Не будь-яку систему рівнянь доцільно розв'язувати графічно. Наприклад, якщо пара $\left(\frac{1}{17}; -\frac{36}{85}\right)$ є розв'язком якоїсь системи, то зрозуміло, що графічно встановити цей факт вкрай складно. А тому графічний метод зазвичай застосовують тоді, коли розв'язок достатньо знайти наближено. Те, що пара (1; 3) є розв'язком системи $\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13, \end{cases}$ підтверджує безпосередня підстановка цієї пари в кожне з рівнянь системи, тобто перевірка.

Графічний метод є ефективним тоді, коли треба визначити кількість розв'язків системи. Наприклад, на рисунку 60 зображено графіки деяких функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Ці графіки мають три спільні точки. Це дозволяє нам стверджувати, що система $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x) \end{cases}$ має 3 розв'язки.

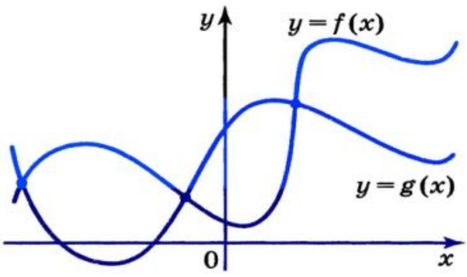


Рис. 60

Якщо графіками рівнянь, що входять до системи лінійних рівнянь, є прямі, то кількість розв'язків цієї системи залежить від взаємного розміщення двох прямих на площині:

- якщо прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок;
- якщо прямі збігаються, то система має нескінченно багато розв'язків;
- якщо прямі паралельні, то система розв'язків не має.

Випадок, коли така система має єдиний розв'язок, ми вже розглянули. Тепер звернемося до прикладів, які ілюструють дві інші можливості.

Так, якщо в системі

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - y = 1, \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

обидві частини першого рівняння помножити на 2, то розв'язки цього рівняння, а отже, і всієї системи не зміняться.

Маємо:

$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ x - 2y = 2. \end{cases}$$

Очевидно, що розв'язки цієї системи збігаються з розв'язками рівняння $x - 2y = 2$. Проте таке рівняння має безліч розв'язків, а значить, і розглядувана система також має безліч розв'язків.

Ось приклад системи, яка не має розв'язків:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 2, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Справді, помножимо обидві частини першого рівняння системи на 3. Отримаємо:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Зрозуміло, що не існує такої пари значень x і y, при яких вираз $2x + 3y$ одночасно набуває значення і 6, і 7.

Зазначимо, що саме графічний метод нам підказав, що не існує системи лінійних рівнянь, яка мала б, наприклад, рівно 2, або рівно 3, або рівно 100 і т. п. розв'язків.

1. У якому випадку кажуть, що треба розв'язати систему рівнянь?
2. Що є розв'язком системи рівнянь з двома змінними?
3. Що означає розв'язати систему рівнянь?
4. У чому суть графічного методу розв'язування систем рівнянь з двома змінними?

5. Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь з двома змінними?

6. Яким є взаємне розміщення прямих, що є графіками двох лінійних рівнянь з двома змінними, які складають систему рівнянь, якщо:
1) система має єдиний розв'язок;
2) система не має розв'язків;
3) система має безліч розв'язків?

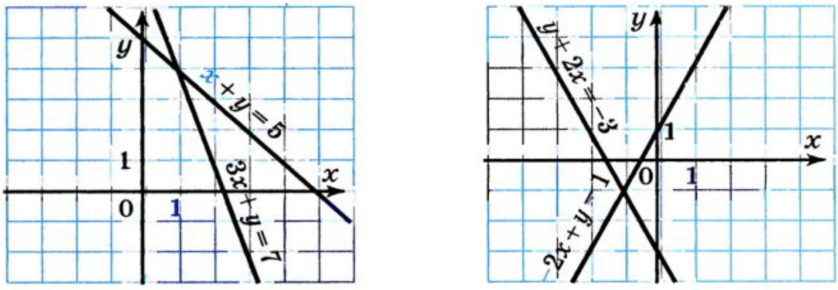
1007.° Яка з пар чисел (−2; 1), (2; −1), (6; 4), (8; −4) є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 8y = -14, \\ 4x + y = 28\,? \end{cases}$$

1008.° Розв'язком яких систем є пара чисел (−5; 2):

1) $\begin{cases} 7x + 2y = 31, \\ 4x - 5y = -30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y - 2x = 16, \\ 6x + 7y = -16; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = -9, \\ 10y - x = 15\,? \end{cases}$

1009.° Визначте координати точки перетину прямих, зображених на рисунку 61. Запишіть відповідну систему рівнянь, перевірте знайдений розв'язок системи, підставивши координати точки перетину прямих у рівняння системи.



а) *б)*

Рис. 61

1010.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = -5, \\ 4x - y = -5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x - y = 9; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 2x - y = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x - 3y = -26, \\ y - 2x = 8. \end{cases}$

1011.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 5x + y = -18; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - x = -2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 5y = 10, \\ 4x - y = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = -1. \end{cases}$

1012.• Складіть яку-небудь систему двох лінійних рівнянь з двома змінними, розв'язком якої є пара значень змінних:

1) $x = 3$, $y = 2$; 2) $x = -4$, $y = 1$; 3) $x = 5$, $y = 0$.

1013.• Складіть яку-небудь систему двох лінійних рівнянь з двома змінними, розв'язком якої є пара чисел $(2; -2)$.

1014.• Пара чисел $(6; 4)$ є розв'язком системи рівнянь:

1) $\begin{cases} ax + 2y = 26, \\ 4x + by = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + by = 6, \\ ax + by = 0. \end{cases}$

Знайдіть значення a і b.

1015.• При яких значеннях a і b пара чисел $(-2; 3)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} ax - 3y = -13, \\ 7x + by = 1? \end{cases}$

1016.• Чи має розв'язок система рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x - 7y = 6, \\ 8x - 28y = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = -2, \\ 6x + 3y = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 2y = 0{,}5, \\ 2x + 4y = 2? \end{cases}$

1017.• Чи має розв'язок система рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = 4, \\ 3x - 3y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 1{,}5y = -4, \\ 3y - 2x = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 9x + 9y = 18, \\ x + y = 2? \end{cases}$

1018.•• До рівняння $2x - 3y = 6$ підберіть друге лінійне рівняння так, щоб отримати систему рівнянь, яка:

1) має єдиний розв'язок;

2) має безліч розв'язків;

3) не має розв'язків.

1019.•• До рівняння $x - y = 2$ підберіть друге лінійне рівняння так, щоб отримати систему рівнянь, яка:
1) має єдиний розв'язок;
2) має безліч розв'язків;
3) не має розв'язків.

1020.•• При яких значеннях a не має розв'язків система рівнянь $\begin{cases} 8x + 9y = 7, \\ 8x + 9y = a? \end{cases}$

1021.•• При якому значенні a має безліч розв'язків система рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 5y = 4, \\ 4x + 20y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + ay = 12, \\ 9x - 15y = 36? \end{cases}$

1022.•• При яких значеннях a система рівнянь:

1) $\begin{cases} 7x - 12y = 14, \\ 7x - 12y = a \end{cases}$ не має розв'язків;

2) $\begin{cases} 6x + ay = 4, \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

1023.•• Підберіть такі значення a і b, при яких система рівнянь $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ ax + 4y = b: \end{cases}$
1) має безліч розв'язків;
2) має один розв'язок;
3) не має розв'язків.

1024.•• Підберіть такі значення m і n, при яких система рівнянь $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - my = n: \end{cases}$
1) має безліч розв'язків;
2) має один розв'язок;
3) не має розв'язків.

1025.* Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ x - y = -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ x + 3y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y + |x| = 0, \\ x + y = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - |y| = 0, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

1026.* Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ |x + y| = 2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} |y - 2x| = 3, \\ x - 2y = 0; \end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1027. Сплав міді й олова масою 5,5 кг містить міді на 20 % більше, ніж олова. Знайдіть масу міді у цьому сплаві.

1028. З Києва до Лубен, відстань між якими дорівнює 200 км, виїхав автобус. Через 32 хв після виїзду автобуса назустріч йому з Лубен виїхав автомобіль зі швидкістю на 20 км/год більшою за швидкість автобуса. З якою швидкістю рухався автобус, якщо вони зустрілися через 1,2 год після виїзду автомобіля?

1029. Знайдіть чотири послідовних непарних натуральних числа, сума квадратів яких дорівнює 164.

1030. Доведіть, що коли $x + y = a - 1$, то

$$ax + x + ay + y + 1 = a^2.$$

1031. Остача від ділення числа a на 5 дорівнює 4, а остача від ділення на 5 числа b дорівнює 3. Доведіть, що значення виразу $a^2 + b^2$ кратне 5.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

1032. Виразіть y через x і x через y з рівняння:

1) $x + y = 10$;
2) $2x + y = 7$;
3) $y - x = -4$;
4) $x - 6y = 1$;
5) $5y - 4x = 0$;
6) $4x + 3y = -12$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

1033. Вираз $(2x - 3)^{171}$ подано у вигляді многочлена. Знайдіть суму коефіцієнтів цього многочлена.

27. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки

Якщо математикам зустрічається нова задача, то зазвичай вони намагаються її розв'язування звести до вже знайомої задачі.

Покажемо, як розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними звести до розв'язування лінійного рівняння з однією змінною, а остання задача вам добре знайома.

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$$

З першого рівняння виразимо змінну y через змінну x. Маємо:

$$y = 2x - 8.$$

Підставимо в друге рівняння системи замість змінної y вираз $2x - 8$. Отримаємо систему

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2(2x - 8) = 5. \end{cases}$$

Ця і вихідна системи мають одні й ті самі розв'язки. Приймемо тут цей факт без обґрунтувань. Ви можете розглянути доведення цього факту на заняттях математичного гуртка.

Друге рівняння останньої системи є рівнянням з однією змінною. Розв'яжемо його:

$$3x + 2(2x - 8) = 5;$$
$$3x + 4x - 16 = 5;$$
$$7x = 21;$$
$$x = 3.$$

Підставимо знайдене значення змінної x у рівняння $y = 2x - 8$. Матимемо:

$$y = 2 \cdot 3 - 8;$$
$$y = -2.$$

Пара $(3; -2)$ — шуканий розв'язок.

Описаний тут спосіб розв'язування системи рівнянь називають **методом підстановки**.

Отже, щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом підстановки, треба:

1) виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через другу;

2) підставити в друге рівняння системи замість цієї змінної вираз, отриманий на першому кроці;

3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;

4) підставити знайдене значення змінної у вираз, отриманий на першому кроці;

5) обчислити значення другої змінної;

6) записати відповідь.

Цю послідовність дій, яка складається з шести кроків, можна назвати **алгоритмом** розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними методом підстановки.

1034.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2y - 8, \\ x - 4y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 6y, \\ x + 5y = 88; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5y - x = 8, \\ 5x - 4y = 23; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 5y = 46; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 15 - x = 2y, \\ 4x - 3y = 27; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x - y = 6{,}2, \\ 0{,}8x + 3y = 13. \end{cases}$

1035.° Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 4x + y = 12, \\ 7x + 2y = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 8y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4y - x = 11, \\ 5x - 2y = 17; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x - y = -1, \\ 2x - 3y = -11; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 9y - 2x = -25; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x - 3y = 0, \\ 15x + 2y = 55. \end{cases}$

1036.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}4x-3y=15,\\3x-4y=6;\end{cases}$

2) $\begin{cases}2x-3y=2,\\5x+2y=24;\end{cases}$

3) $\begin{cases}5y-6x=4,\\7x-4y=-1;\end{cases}$

4) $\begin{cases}4x+5y=1,\\8x-2y=38;\end{cases}$

5) $\begin{cases}5a-4b=3,\\2a-3b=11;\end{cases}$

6) $\begin{cases}8m-2n=11,\\9m+4n=8.\end{cases}$

1037.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}5x+2y=15,\\8x+3y=20;\end{cases}$

2) $\begin{cases}7x+4y=5,\\3x+2y=3;\end{cases}$

3) $\begin{cases}8p-5q=-11,\\5p-4q=-6;\end{cases}$

4) $\begin{cases}6u-5v=-38,\\2u+7v=22.\end{cases}$

1038.° Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases}6-5(x-y)=7x+4y,\\3(x+1)-(6x+8y)=69+3y;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=2,\\5x-y=34;\end{cases}$

3) $\begin{cases}6y-5x=1,\\\frac{x-1}{2}+\frac{3y-x}{4}=-4\frac{3}{4};\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{1,5x-3}{3}+\frac{7-3y}{8}=3,\\\frac{2,5x-2}{3}-\frac{2y+1}{6}=x-0,5.\end{cases}$

1039.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}6x+3=5x-4(5y+4),\\3(2x-3y)-6x=8-y;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{x+3}{2}-\frac{y-4}{7}=1,\\6y-x=5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{x+y}{8}+\frac{x-y}{6}=4,\\\frac{3x+y}{4}-\frac{2x-5y}{3}=5.\end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

С **1040.** Знайдіть значення виразу:

1) $m(m-3)(m+3)-(m-2)(m^2+2m+4)$ при $m=-\frac{2}{3}$;

2) $(6m-n)(6m+n)-(12m-5n)(3m+n)$ при $m=-\frac{8}{9}$, $n=\frac{3}{4}$.

1041. (*Задача з болгарського фольклору.*) Троє чоловіків прийшли до перукаря. Той поголив першого і сказав: «Подивись, скільки грошей у шухляді стола, поклади ще стільки і візьми 8 левів[1] решти». Те саме перукар сказав і другому, і третьому. Після того як усі троє пішли, виявилося, що в касі немає грошей. Скільки грошей було в касі перед тим, як заплатив перший чоловік?

1042. Функцію задано формулою $y = 6 - kx$. При якому значенні k графік функції проходить через точку $A(4; -2)$?

1043. Доведіть, що значення виразу $2^{4n} - 1$ ділиться націло на 5 при будь-якому натуральному значенні n.

1044. Знайдіть три останні цифри значення виразу $2376^3 + 1624^3$.

1045. Остача при діленні на 6 числа a дорівнює 2, а числа b — 3. Доведіть, що значення добутку ab кратне 6.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

1046. Знайдіть усі цілі числа x і y, при яких виконується рівність $x + y = xy$.

[1] Лев — грошова одиниця Болгарії.

28. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання

Розглянемо ще один спосіб, який дає змогу звести розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними до розв'язування лінійного рівняння з однією змінною.

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 4x + 5y = 5. \end{cases}$$

Оскільки в цій системі коефіцієнти при змінній y є протилежними числами, то рівняння з однією змінною можна отримати, додавши почленно ліві й праві частини рівнянь системи. Запишемо:

$$2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5;$$
$$6x = 12;$$
$$x = 2.$$

Підставимо знайдене значення змінної x у будь-яке з рівнянь системи, наприклад, у перше. Отримаємо:

$$2 \cdot 2 - 5y = 7;$$
$$-5y = 3;$$
$$y = -0,6.$$

Отже, розв'язком системи є пара $(2; -0,6)$.

Описаний спосіб розв'язування системи називають **методом додавання.**

Цей метод, як і будь-який інший математичний метод, потребує обґрунтування його законності. Приймемо без доведення, що метод додавання дає правильні результати. Ви можете розглянути доведення цього факту на заняттях математичного гуртка.

Розв'яжемо ще одну систему:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11, \\ 6x + 5y = 19. \end{cases}$$

Якщо додати почленно ліві й праві частини рівнянь системи, то знову отримаємо рівняння з двома змінними. Дана система ще «не готова» до застосування методу додавання.

Помножимо обидві частини першого рівняння на -3. Отримаємо систему, розв'язки якої збігаються з розв'язками вихідної системи:

$$\begin{cases} -6x + 9y = -33, \\ 6x + 5y = 19. \end{cases}$$

Уже для такої системи метод додавання є ефективним:

$$-6x + 9y + 6x + 5y = -33 + 19;$$
$$14y = -14;$$
$$y = -1.$$

Підставимо знайдене значення y в перше рівняння вихідної системи. Маємо:

$$2x - 3 \cdot (-1) = 11;$$
$$2x = 8;$$
$$x = 4.$$

Пара $(4; -1)$ — шуканий розв'язок.

Розглянемо систему, в якій обидва рівняння треба підготувати до застосування методу додавання:

$$\begin{cases} 7x + 8y = 9, \\ 3x + 5y = 7. \end{cases}$$

Щоб виключити змінну y, помножимо обидві частини першого рівняння на число 5, а другого — на число -8 і застосуємо метод додавання:

$$\begin{cases} 35x + 40y = 45, \\ -24x - 40y = -56; \end{cases}$$

$$35x + 40y - 24x - 40y = 45 - 56;$$
$$11x = -11;$$
$$x = -1.$$

Підставивши знайдене значення x у перше рівняння даної системи, отримуємо:

$$-7 + 8y = 9;$$
$$y = 2.$$

Отже, пара $(-1; 2)$ — розв'язок даної системи.

Алгоритм розв'язування системи рівнянь методом додавання можна записати так:

1) дібравши «вигідні» множники, перетворити одне чи обидва рівняння системи так, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами;
2) додати почленно ліві й праві частини рівнянь, отриманих на першому кроці;
3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
4) підставити знайдене на третьому кроці значення змінної у будь-яке з рівнянь вихідної системи;
5) обчислити значення другої змінної;
6) записати відповідь.

1047.° Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 8; \end{cases}$
4) $\begin{cases} -6x + y = 16, \\ 6x + 4y = 34; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y = 14, \\ 5x - y = 10; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 8x + y = 8, \\ 12x + y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 9y = 11, \\ 7x + 9y = 25; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 7x - 5y = 29, \\ 7x + 8y = -10. \end{cases}$

1048.° Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

1) $\begin{cases} 4x - y = 20, \\ 4x + y = 12; \end{cases}$
3) $\begin{cases} -5x + 7y = 2, \\ 8x + 7y = 15; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9x + 17y = 52, \\ 26x - 17y = 18; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 9x - 6y = 24, \\ 9x + 8y = 10. \end{cases}$

1049.• Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

1) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 4x + 9y = 41; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 3x + 8y = 13, \\ 2x - 3y = 17; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 10x + 2y = 12, \\ -5x + 4y = -6; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 3x - 4y = 16, \\ 5x + 6y = 14; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 12x + 7y = -26; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x + 5y = 8; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5u - 7v = 24, \\ 7u + 6v = 2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 0,2x + 1,5y = 10, \\ 0,4x - 0,3y = 0,2. \end{cases}$

1050. Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

1) $\begin{cases} 5x + y = 7, \\ 7x - 4y = -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - 4y = 10, \\ 2x - 3y = -3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6x - 5y = 23, \\ 2x - 7y = 13; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4a + 6b = 9, \\ 3a - 5b = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 2y = 16, \\ 8x + 3y = 38; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 9m - 13n = 22, \\ 2m + 3n = -1. \end{cases}$

1051. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2(4x - 5) - 3(3 + 4y) = 5, \\ 7(6y - 1) - (4 + 3x) = 21y - 86; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2(2x + 1) + 2,5 = 3(y + 2) - 8x, \\ 8 - 5(4 - x) = 6y - (5 - x); \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 3, \\ \dfrac{3x}{4} + \dfrac{5y}{6} = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x + 2}{6} - \dfrac{y - 3}{15} = 1, \\ \dfrac{x + 2,5}{9} - \dfrac{y + 3}{6} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

1052. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 0,2x - 0,3(2y + 1) = 1,5, \\ 3(x + 1) + 3y = 2y - 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{15x - 3y}{4} + \dfrac{3x + 2y}{6} = 3, \\ \dfrac{3x + y}{3} - \dfrac{x - 3y}{2} = 6. \end{cases}$

1053. Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} (x - 3)^2 - 4y = (x + 2)(x + 1) - 6, \\ (x - 4)(y + 6) = (x + 3)(y - 7) + 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x - y)(x + y) - x(x + 10) = y(5 - y) + 15, \\ (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = (x + 4)^2 + (y + 2)^2 - 18. \end{cases}$

1054.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}(2x+1)^2-(2x-y)(2x+y)=(y+8)(y-10),\\4x(x-5)-(2x-3)(2x-9)=6y-104;\end{cases}$

2) $\begin{cases}(x-2)(x^2+2x+4)-x(x-4)(x+4)=20-20y,\\(3x-2)(4y+5)=2y(6x-1)-58.\end{cases}$

1055.° Знайдіть, не виконуючи побудови, координати точки перетину прямих:

1) $y=2-3x$ і $2x+3y=7$;

2) $5x+6y=-20$ і $2x+9y=25$.

1056.° Знайдіть, не виконуючи побудови, координати точки перетину прямих:

1) $2x-3y=8$ і $7x-5y=-5$;

2) $9x+y=3$ і $8x+3y=-10$.

1057.° При яких значеннях a і b графік рівняння $ax+by=8$ проходить через точки $A(1;\ 3)$ і $B(2;\ -4)$?

1058.° При яких значеннях m і n графік рівняння $mx-ny=6$ проходить через точки $C(2;\ -1)$ і $D(-6;\ 5)$?

1059.° Запишіть рівняння прямої $y=kx+b$, яка проходить через точки:

1) $M(2;\ 1)$ і $K(-3;\ 2)$;

2) $P(-4;\ 5)$ і $Q(4;\ -3)$.

1060.° Запишіть рівняння прямої $y=kx+b$, яка проходить через точки:

1) $A(3;\ 2)$ і $B(-1;\ 4)$;

2) $C(-2;\ -3)$ і $D(1;\ 6)$.

1061.° Чи має розв'язок система рівнянь:

1) $\begin{cases}2x+y=5,\\3x-4y=24,\\x-2y=9;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+3y=-1,\\3x+5y=1,\\5x+9y=5?\end{cases}$

v **1062.**° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}6x+5y=10,\\8x-5y=32,\\3x+10y=-7;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-2y=1,\\2x+y=7,\\4x+y=14.\end{cases}$

1063.˙ Запишіть систему лінійних рівнянь з двома змінними, графіки яких зображено на рисунку 62.

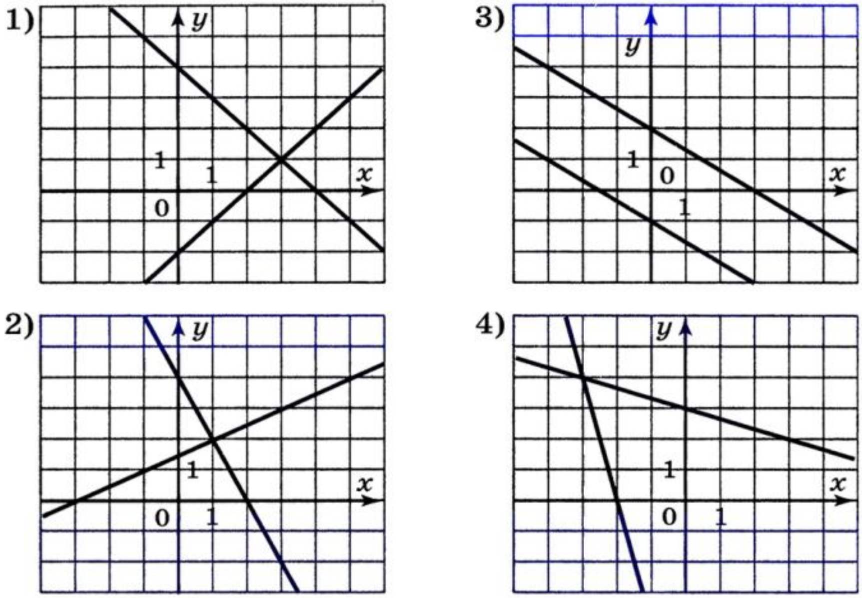


Рис. 62

1064.˙ Запишіть систему лінійних рівнянь з двома змінними, графіки яких зображено на рисунку 63.

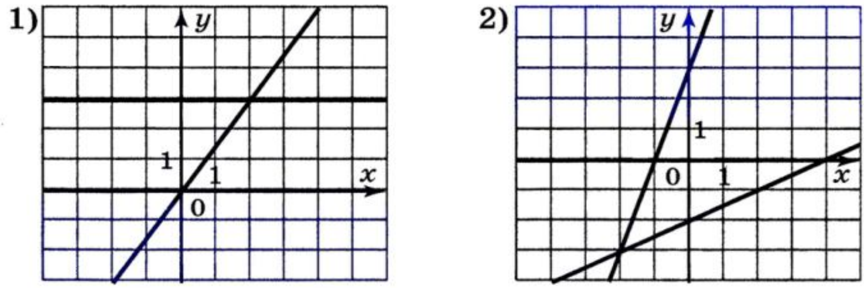


Рис. 63

1065.˙˙ При якому значенні k пряма $y = kx + 2$ проходить через точку перетину прямих $3x + 5y = 5$ і $7x - 4y = 43$?

1066.•• При якому значенні a має розв'язок система рівнянь:

$$\begin{cases} 8x - 7y = 21, \\ 5x - 3y = 20, \\ ax + 2y = 24? \end{cases}$$

1067.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + y)^2 + (x - 3)^2 = 0$;
2) $(x + 2y - 3)^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
3) $|x - 3y - 6| + (9x + 6y - 32)^2 = 0$;
4) $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 61 = 0$;
5) $25x^2 + 10y^2 - 30xy + 8y + 16 = 0$.

✓**1068.**•• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2y)^2 + (y - 5)^2 = 0$;
2) $(4x + 2y - 5)^2 + |4x - 6y + 7| = 0$;
3) $50x^2 + 4y^2 - 28xy + 16x + 64 = 0$.

1069.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{y} = 15, \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{8}{y} = 23; \end{cases}$
2) $\begin{cases} \dfrac{5}{2x - 3y} + \dfrac{10}{3x - 2y} = 3, \\ \dfrac{20}{3x - 2y} - \dfrac{15}{2x - 3y} = 1. \end{cases}$

1070.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{7}{y} = 6, \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 46; \end{cases}$
2) $\begin{cases} \dfrac{9}{x + 4y} - \dfrac{6}{5x - y} = -2, \\ \dfrac{3}{x + 4y} + \dfrac{18}{5x - y} = 1. \end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1071. Знайдіть значення виразу:

1) $(a^2 + 1)^2 + (a - 1)(a^2 + 1) - a^2$, якщо $a = -2$;
2) $(a - 1)(a^2 + 1)(a + 1) - (a^2 + 1)^2$, якщо $a = \dfrac{1}{2}$.

✓**1072.** На математичній олімпіаді було запропоновано розв'язати 12 задач. За кожну правильно розв'язану задачу нараховували 5 балів, а за нерозв'язану — знімали 3 бали. Скільки задач розв'язав правильно учень, який отримав у підсумку 36 балів?

∨1073. (*Задача з німецького фольклору.*) За який час лев, вовк і собака можуть з'їсти 3 вівці, якщо лев один може з'їсти вівцю за 1 год, вовк — за 3 год, а собака — за 6 год?

1074. Доведіть, що різниця квадратів двох довільних натуральних чисел, кожне з яких не ділиться націло на 3, є кратною 3.

1075. У саду більше за 90, але менше від 100 дерев. Третина всіх дерев — яблуні, а чверть усіх дерев — сливи. Скільки дерев у саду?

1076. Який з виразів набуває тільки від'ємних значень при будь-якому значенні x:
1) $-x^2 - 4x + 6$; 2) $-x^2 + 16x - 64$; 3) $-x^2 + 8x - 18$?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

1077. Клітинки таблиці розміром 101×101 клітинку заповнено числами так, що добуток чисел у кожному стовпці є від'ємним. Чи може виявитися, що кількість рядків, добуток чисел у яких додатний, дорівнює 51?

29. Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь

Розглянемо задачі, у яких системи двох лінійних рівнянь з двома змінними використовують як математичні моделі реальних ситуацій.

ПРИКЛАД 1

На пошиття одного плаття і 4 спідниць пішло 9 м тканини, а на 3 таких самих плаття і 8 таких самих спідниць — 21 м тканини. Скільки тканини треба для пошиття одного плаття і однієї спідниці окремо?

Нехай на одне плаття йде x м тканини, а на одну спідницю — y м. Тоді на одне плаття і 4 спідниці йде $(x + 4y)$ м тканини, що за умовою становить 9 м. Отже, $x + 4y = 9$.

На 3 плаття і 8 спідниць треба $(3x + 8y)$ м тканини, або 21 м. Значить, $3x + 8y = 21$.

Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + 4y = 9, \\ 3x + 8y = 21. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, маємо: $x = 3$, $y = 1{,}5$. Отже, на пошиття одного плаття піде 3 м тканини, а однієї спідниці — 1,5 м.

Відповідь: 3 м, 1,5 м.

ПРИКЛАД 2

З міста A до міста B, відстань між якими 264 км, виїхав мотоцикліст. Через 2 год після цього назустріч йому з міста B виїхав велосипедист, який зустрівся з мотоциклістом через 1 год після свого виїзду. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо за 2 год мотоцикліст проїжджає на 40 км більше, ніж велосипедист за 5 год.

Нехай швидкість мотоцикліста дорівнює x км/год, а велосипедиста — y км/год. До зустрічі мотоцикліст рухався 3 год і проїхав $3x$ км, а велосипедист відповідно — 1 год і y км. Разом вони проїхали 264 км. Тоді $3x + y = 264$.

Велосипедист за 5 год проїжджає $5y$ км, а мотоцикліст за 2 год — $2x$ км, що на 40 км більше за $5y$ км. Тоді $2x - 5y = 40$.

Отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + y = 264, \\ 2x - 5y = 40, \end{cases}$$

розв'язком якої є пара чисел $x = 80$, $y = 24$.

Отже, швидкість мотоцикліста дорівнює 80 км/год, а велосипедиста — 24 км/год.

Відповідь: 80 км/год, 24 км/год.

ПРИКЛАД 3

Стіл і стілець коштували разом 680 грн. Після того як стіл подешевшав на 20 %, а стілець подорожчав на 10 %, вони стали коштувати разом 580 грн. Знайдіть початкову ціну стола і початкову ціну стільця.

Нехай початкова ціна стола становила x грн., а стільця — y грн. Тоді за умовою $x + y = 680$.

Нова ціна стола становить 80 % початкової і дорівнює $0{,}8x$ грн. Нова ціна стільця становить 110% початкової і дорівнює $1{,}1y$ грн. Тоді $0{,}8x + 1{,}1y = 580$.

Отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 680, \\ 0{,}8x + 1{,}1y = 580. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є пара $x = 560$, $y = 120$.

Отже, початкова ціна стола була 560 грн., а стільця — 120 грн.

Відповідь: 560 грн., 120 грн.

ПРИКЛАД 4

Скільки грамів 3-відсоткового і скільки грамів 8-відсоткового розчинів солі треба взяти, щоб отримати 500 г 4-відсоткового розчину?

Нехай першого розчину треба взяти x г, а другого — y г. Тоді за умовою $x + y = 500$.

У 3-відсотковому розчині міститься $0{,}03x$ г солі, а у 8-відсотковому — $0{,}08y$ г солі. У 500 г 4-відсоткового розчину міститься $500 \cdot 0{,}04 = 20$ (г) солі. Отже, $0{,}03x + 0{,}08y = 20$.

Склали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 500, \\ 0{,}03x + 0{,}08y = 20, \end{cases}$$

розв'язавши яку, матимемо $\begin{cases} x = 400, \\ y = 100. \end{cases}$

Отже, треба взяти 400 г 3-відсоткового розчину і 100 г 8-відсоткового розчину.

Відповідь: 400 г, 100 г.

ПРИКЛАД 5

У Петра були купюри по 5 грн. і по 20 грн. Він каже, що купив велосипед за 255 грн., віддавши за нього 20 купюр, а Василь каже, що такого бути не може. Хто правий?

Нехай було x купюр по 5 грн. і y купюр по 20 грн. Тоді

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ 5x + 20y = 255. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є пара $(x;\ y)$, у якій $y = 10\frac{1}{3}$, що не відповідає змісту задачі, оскільки кількість купюр може бути тільки натуральним числом.

Відповідь: правий Василь.

1078.° Знайдіть два числа, якщо їх сума дорівнює 63, а різниця — 19.

1079.° Знайдіть два числа, якщо їх різниця дорівнює 23, а сума подвоєного більшого з цих чисел і другого числа — 22.

1080.° (*Задача з оповідання «Репетитор» А. П. Чехова*[1].) Купець купив 138 аршинів[2] чорного і синього сукна за 540 рублів. Питається, скільки аршинів він купив того й іншого, якщо синє коштувало 5 рублів за аршин, а чорне — 3 рублі?

1081.° Група із 46 туристів вирушила в похід на 10 човнах, частина з яких була чотиримісними, а решта — шестимісними. Скільки було човнів кожного виду?

1082.° Щоб нагодувати 4 коней і 12 корів, потрібно 120 кг сіна на день, а щоб нагодувати 3 коней і 20 корів — 167 кг сіна. Знайдіть денну норму сіна для коня і для корови.

1083.° За перший день 2 гусеничних і один колісний трактори зорали 22 га, а за другий день 3 гусеничних і 8 колісних — 72 га. Знайдіть, скільки гектарів землі зорює щодня один гусеничний трактор і скільки — один колісний.

1084.° Двоє робітників виготовили 135 деталей. Перший робітник працював 7 днів, а другий — 12 днів. Скільки деталей виготовляв щодня кожний робіт-

---

[1] А. П. Чехов (1860–1904) — великий російський письменник.

[2] Аршин — старовинна міра довжини, що дорівнює 71,12 см.

ник, якщо перший за 3 дні зробив на 3 деталі більше, ніж другий — за 4 дні?

1085.° Дві бригади працювали на збиранні яблук. Першого дня одна бригада працювала 5 год, а друга — 4 год, причому разом вони зібрали 40 ц яблук. Наступного дня бригади працювали з тією самою продуктивністю праці, причому перша бригада зібрала за 3 год на 2 ц більше, ніж друга — за 2 год. Скільки центнерів яблук збирала кожна бригада за 1 год?

1086.° За 6 кг цукерок і 5 кг печива заплатили 144 грн. Скільки коштує 1 кг цукерок і скільки 1 кг печива, якщо 3 кг цукерок дорожчі за 1 кг печива на 30 грн.?

1087.° За 11 зошитів і 8 ручок заплатили 49 грн. Скільки коштує 1 зошит і скільки 1 ручка, якщо 5 зошитів дорожчі за 4 ручки на 7 грн.?

1088.° З Києва і Вінниці, відстань між якими 256 км, виїхали одночасно назустріч один одному автобус і автомобіль, які зустрілися через 2 год після початку руху. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо автобус за 2 год проїжджає на 46 км більше, ніж автомобіль за 1 год.

1089.° З двох станцій, відстань між якими 300 км, одночасно назустріч один одному вирушили пасажирський і товарний поїзди, які зустрілися через 3 год після початку руху. Якби пасажирський поїзд вирушив на 1 год раніше від товарного, то вони зустрілися б через 2,4 год після виходу товарного поїзда. Знайдіть швидкість кожного поїзда.

1090.˙ Із села до станції вийшов пішохід. Через 30 хв з цього села до станції виїхав велосипедист, який наздогнав пішохода через 10 хв після виїзду. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо за 3 год пішохід проходить на 4 км більше, ніж велосипедист проїжджає за півгодини.

1091.˙ З Житомира до Одеси, відстань між якими 536 км, виїхав автомобіль. Через 2,5 год після початку руху першого автомобіля назустріч йому з Одеси виїхав другий автомобіль, який зустрівся з першим через 2 год після свого виїзду. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо перший за 2 год проїжджає на 69 км менше, ніж другий за 3 год.

1092.• У двох бідонах було молоко. Якщо з першого бідона перелити в другий 10 л молока, то в обох бідонах молока стане порівну. Якщо з другого бідона перелити в перший 20 л молока, то в першому стане у 2,5 раза більше молока, ніж у другому. Скільки літрів молока було в кожному бідоні?

1093.• Коли до першого вагона електропотяга ввійшли 4 пасажири, а з другого вагона вийшли 4 пасажири, то в обох вагонах пасажирів стало порівну. Якби до першого вагона ввійшли 2 пасажири, а до другого — 24 пасажири, то в першому вагоні стало у 2 рази менше пасажирів, ніж у другому. Скільки пасажирів було спочатку в кожному вагоні?

1094.• Човен за 3 год руху проти течії річки і 2,5 год за течією проходить 98 км. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії, якщо за 5 год руху за течією він проходить на 36 км більше, ніж за 4 год проти течії річки.

1095.• Катер за 5 год руху за течією річки проходить на 70 км більше, ніж за 3 год руху проти течії. Знайдіть швидкість катера в стоячій воді і швидкість течії, якщо за 9 год руху по озеру він проходить стільки, скільки за 10 год руху проти течії річки.

1096.• (*Задача з грецького фольклору.*) Віслюк і мул ідуть поруч з вантажем на спині. Віслюк скаржиться на непосильну ношу, а мул відповідає: «Чого ти скаржишся? Адже якщо я візьму один твій мішок, то моя ноша стане вдвоє важча за твою. А якщо ти візьмеш один мій мішок, то твоя поклажа зрівняється з моєю». Скажіть же, мудрі математики, скільки мішків ніс віслюк і скільки ніс мул?

1097.• (*Задача з індійського фольклору.*) Один говорить другому: «Дай мені 100 рупій, і я буду вдвоє багатший за тебе». Другий відповідає: «А якщо ти даси мені

10 рупій, то я стану в 6 разів багатший за тебе». Скільки грошей було в кожного?

1098.° Син 6 років тому був у 4 рази молодший від батька, а через 12 років він буде молодшим від батька у 2 рази. Скільки років батькові і скільки — синові?

1099.° Бабуся 6 років тому була в 9 разів старша за онуку, а 4 роки тому — у 7 разів старша. Скільки років бабусі і скільки — онуці?

• **1100.**° Дві майстерні мали пошити 75 костюмів. Коли перша майстерня виконала 60 % замовлення, а друга — 50 %, то виявилося, що перша майстерня пошила на 12 костюмів більше, ніж друга. Скільки костюмів мала пошити кожна майстерня?

1101.° Михайло і Галина мали разом 60 грн. Коли Михайло витратив $\frac{1}{3}$ своїх грошей на придбання довідника з математики, а Галина — $\frac{1}{6}$ своїх грошей на придбання довідника з української мови, то виявилося, що Михайло витратив на 1 грн. менше, ніж Галина. Скільки грошей було в кожного з них спочатку?

• **1102.**° Відомо, що 4 кг огірків і 3 кг помідорів коштували 24 грн. Після того як огірки подорожчали на 50 %, а помідори подешевшали на 20 %, за 2 кг огірків і 5 кг помідорів заплатили 25 грн. Знайдіть початкову вартість 1 кг огірків і 1 кг помідорів.

1103.° Відомо, що 2 банки фарби і 3 банки оліфи коштували 64 грн. Після того як фарба подешевшала на 50 %, а оліфа подорожчала на 40 %, за 6 банок фарби і 5 банок оліфи заплатили 116 грн. Знайдіть початкову вартість 1 банки фарби і 1 банки оліфи.

1104.° Вкладник поклав до банку 1400 грн. на два різні рахунки. По першому з них банк виплачує 4 % річних, а по другому — 6 % річних. Через рік вкладник одержав 68 грн. відсоткових грошей. Скільки гривень він поклав на кожний рахунок?

1105.° Вкладник поклав до банку 1200 грн. на два різні рахунки. По першому з них банк виплачує 5 %

річних, а по другому — 7 % річних. Через рік вкладник отримав по 5-відсотковому вкладу на 24 грн. відсоткових грошей більше, ніж по другому. Скільки гривень він поклав на кожен рахунок?

1106.• Відомо, що 60 % числа a на 2 більші за 70 % числа b, а 50 % числа b на 10 більші за $\frac{1}{3}$ числа a. Знайдіть числа a і b.

1107.• Відомо, що 25 % одного числа дорівнюють 20 % другого числа, а $\frac{1}{6}$ першого числа на 4 менша від 40 % другого. Знайдіть дані числа.

1108.• Маємо два сплави міді й цинку. Перший сплав містить 9 %, а другий — 30 % цинку. Скільки кілограмів кожного сплаву треба взяти, щоб одержати сплав масою 300 кг, який містить 23 % цинку?

1109.• Маємо два водно-сольових розчини. Перший розчин містить 25 %, а другий — 40 % солі. Скільки кілограмів кожного розчину треба взяти, щоб одержати розчин масою 50 кг, який містить 34 % солі?

1110.• Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 15. Якщо поміняти його цифри місцями, то отримаємо число, яке менше від даного на 9. Знайдіть дане число.

1111.• Периметр прямокутника дорівнює 28 см. Якщо дві протилежні його сторони збільшити на 6 см, а дві інші зменшити на 2 см, то його площа збільшиться на 24 см^2. Знайдіть сторони даного прямокутника.

1112.• Якщо кожну сторону прямокутника збільшити на 3 см, то його площа збільшиться на 45 см^2. Якщо дві протилежні сторони збільшити на 4 см, а дві інші зменшити на 5 см, то його площа зменшиться на 17 см^2. Знайдіть сторони даного прямокутника.

1113.• З двох селищ, відстань між якими дорівнює 45 км, одночасно назустріч один одному вирушили велосипедист і пішохід, які зустрілися через 3 год після початку руху. Якби велосипедист виїхав на 1 год 15 хв раніше, ніж вийшов пішохід, то вони б зустрілися через 2 год після виходу пішохода. З якою швидкістю рухався кожен з них?

1114.$^{\bullet}$ З пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 24 км, одночасно назустріч один одному вирушили два туристи. Через 2 год після початку руху вони ще не зустрілися, а відстань між ними становила 6 км. Ще через 2 год одному з них залишилося пройти до пункту B на 4 км менше, ніж другому до пункту A. Знайдіть швидкість кожного пішохода.

1115.$^{\bullet\bullet}$ Велосипедист прибув з пункту A до пункту B за запланований час, рухаючись з певною швидкістю. Якби він збільшив швидкість на 3 км/год, то прибув би до пункту B на 1 год раніше, а якби він проїжджав за годину на 2 км менше, то прибув би на 1 год пізніше. Знайдіть швидкість велосипедиста.

1116.$^{\bullet\bullet}$ Вантаж було перевезено певною кількістю машин з однаковою вантажопідйомністю. Якби на кожній машині вантажу було на 1 т більше, то вантажівок треба було б на 3 менше, а якби вантажу було на 2 т більше, то вантажівок треба було б на 5 менше. Знайдіть масу вантажу, який перевезли.

1117.$^{\bullet\bullet}$ Відстань між двома станціями пасажирський поїзд проходить на 3 год швидше за товарний, а поїзд-експрес — на 1 год швидше за пасажирський. Швидкість товарного поїзда на 25 км/год менша від швидкості пасажирського, а швидкість експреса на 15 км/год більша за швидкість пасажирського. Знайдіть швидкість кожного поїзда і відстань між станціями.

1118.$^{\bullet\bullet}$ Автобус і маршрутне таксі виїжджають щодня назустріч один одному за розкладом о 8 год з міст Вишневе і Яблуневе, відстань між якими 18 км, і зустрічаються о 8 год 10 хв. Одного дня автобус виїхав за розкладом, а таксі — із запізненням о 8 год 9 хв. Тому зустрілися вони того дня о 8 год 15 хв. Знайдіть швидкості автобуса і маршрутного таксі.

1119.$^{\bullet\bullet}$ З міста Сонячне до села Веселе о 9 год 5 хв і о 9 год 45 хв виїхали з однаковою швидкістю два автобуси. З Веселого до Сонячного о 9 год 30 хв виїхав велосипедист, який зустрівся з першим автобусом о 9 год

45 хв, а з другим — о 10 год 15 хв. Знайдіть швидкості автобусів і велосипедиста, якщо відстань між Сонячним і Веселим становить 36 км.

1120.•• Маса суміші, яка складається з двох речовин, становила 800 г. Після того, як з неї виділили $\frac{5}{8}$ першої речовини і 60 % другої, у ній першої речовини залишилося на 72 г менше, ніж другої. Скільки грамів кожної речовини було в суміші спочатку?

1121.•• У сплаві міді і цинку останнього було на 48 кг менше, ніж міді. Після того, як зі сплаву виділили $\frac{8}{9}$ міді, що містилася у ньому, і 80 % цинку, маса сплаву стала дорівнювати 10 кг. Скільки кілограмів кожної речовини було у сплаві спочатку?

1122.•• Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 9, причому цифра в розряді десятків більша за цифру в розряді одиниць. При діленні даного числа на різницю його цифр отримують неповну частку 14 і остачу 2. Знайдіть дане число.

1123.•• Різниця цифр двоцифрового числа дорівнює 6, причому цифра в розряді десятків менша від цифри в розряді одиниць. Якщо ж поділити дане число на суму його цифр, то отримаємо неповну частку 3 і остачу 3. Знайдіть дане число.

1124.* В одному баці було 12 л води, а в другому — 32 л. Якщо перший бак долити доверху водою з другого бака, то другий бак залишиться наповненим на половину свого об'єму. Якщо другий бак долити доверху водою з першого, то перший бак залишиться наповненим на шосту частину свого об'єму. Знайдіть об'єм кожного бака.

1125.* У двох посудинах місткістю 40 л і 60 л була деяка кількість води. Якщо в меншу посудину долити доверху води з більшої, то в більшій залишиться $\frac{5}{7}$ кількості води, що була спочатку. Якщо в більшу посудину долити доверху води з меншої, то в меншій залишиться $\frac{5}{14}$ кількості води, що була спочатку. Скільки літрів води було в кожній посудині спочатку?

1126.* Цифра в розряді десятків деякого двоцифрового числа на 2 більша за цифру в розряді його одиниць. Знайдіть це число, якщо різниця між ним і числом, записаним тими самими цифрами, але у зворотному порядку, дорівнює: 1) 20; 2) 18.

1127.* (*Задача Л. М. Толстого*[1].) Вийшла в поле артіль косарів. Вона має викосити дві сіножаті, з яких одна вдвоє більша за другу. Півдня вся артіль косила більшу сіножать, а на другу половину дня артіль розділилася навпіл, і одна половина залишилася докошувати більшу сіножать, а друга почала косити меншу. До вечора більша сіножать була викошена, а від малої залишилася ділянка, яку викосив другого дня один косар, що працював цілий день. Скільки косарів було в артілі?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1128. У рівності $4(0,5x - 3) = 3x + *$ замініть зірочку таким виразом, щоб утворилося рівняння, яке:
1) не має коренів;
2) має безліч коренів;
3) має один корінь.

1129. Побудуйте графік функції:
1) $y = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 8x^3$;
2) $y = (x + 1)(x + 4) - (x + 3)^2$;
3) $y = (0,5x + 2)^2 - (0,5x - 1)(0,5x + 1)$.

1130. Подайте вираз $12ab$ у вигляді різниці квадратів двох многочленів. Скільки розв'язків має задача?

1131. Доведіть, що при будь-якому цілому значенні a значення виразу $(a - 3)(a^2 - a + 2) - a(a - 2)^2 + 2a$ ділиться націло на 3.

1132. Доведіть тотожність $(a - bc)^2 - 2(b^2c^2 - a^2) + (bc + a)^2 = 4a^2$.

---

[1] Л. М. Толстой (1828–1910) — великий російський письменник.

1133. Розкладіть на множники вираз:

1) $4kn + 6ak + 6an + 9a^2$;
2) $b^6 - 4b^4 + 12b^2 - 9$;
3) $y^4(x^2 + 8x + 16) - a^8$;
4) $9x^2 - 6x - 35$.

1134. Відомо, що $x + y = a$, $xy = b$, $x^2 + y^2 = c$. Знайдіть залежність між a, b і c.

1135. Точки $A(2; 3)$ і $B(5; a)$ належать прямій $y = kx$. Знайдіть значення a.

1136. Знайдіть такі значення x, при яких вираз $(a - 1)^2 + 4(a - 1) - x$ можна було б розкласти на множники за формулою квадрата суми.

1137. Графіки функцій $y = ax + 12$ і $y = (3 - a)x + a$ перетинаються в точці з абсцисою 2. Знайдіть ординату точки їх перетину.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

1138. Доведіть, що квадрат натурального числа має непарну кількість дільників.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ № 7 «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

1. Яка з наведених пар чисел є розв'язком рівняння $5x + 3y = 4$?

А) (2; 1); Б) (1; 0); В) (2; −2); Г) (−1; 2).

2. Які координати точки перетину графіка рівняння $2x - 5y = 10$ з віссю абсцис?

А) (0; −2); Б) (−2; 0); В) (0; 5); Г) (5; 0).

3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 5x - 4y = 11, \\ 2x + 4y = 10. \end{cases}$

А) (3; 1); Б) (1; 3); В) (1; 2); Г) (2; 1).

4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 15x + 2y = 7, \\ 2x - y = 6. \end{cases}$

А) (3; −19);
Б) (1; −4);
В) (−5; 41);
Г) (−1; 11).

5. Нехай пара чисел $(a;\ b)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x - y = 7. \end{cases}$ Знайдіть значення виразу $a^2 - b^2$.

А) 5; Б) −5; В) 3; Г) −3.

6. При якому значенні a система рівнянь $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ x - ay = -6 \end{cases}$ не має розв'язку?

А) 3; Б) −3; В) $\frac{1}{3}$; Г) $-\frac{1}{3}$.

7. При якому значенні b система рівнянь $\begin{cases} 4x + by = 10, \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

А) − 6; В) 3;
Б) 6; Г) такого значення не існує.

8. Графік лінійної функції проходить через точки $A\ (1;\ 4)$ і $B\ (-2;\ 13)$. Задайте цю функцію формулою.

А) $y = 3x + 1$; В) $y = -3x + 1$;
Б) $y = -3x + 7$; Г) $y = 3x + 7$.

9. Мати і донька зліпили разом 104 вареники, причому донька працювала 2 год, а мати — 3 год. За 1 год мати робить на 8 вареників більше за доньку.
Нехай донька за 1 год робить x вареників, а мати — y вареників. Яка з наступних систем є математичною моделлю ситуації, описаної в умові?

А) $\begin{cases} 2x + 3y = 104, \\ x - y = 8; \end{cases}$ В) $\begin{cases} 2x + 3y = 104, \\ y - x = 8; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 3x + 2y = 104, \\ x - y = 8; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} 3x + 2y = 104, \\ y - x = 8. \end{cases}$

10. З двох міст, відстань між якими 60 км, виїхали одночасно вантажна і легкова машини. Якщо вони рухатимуться назустріч одна одній, то зустрінуться через 30 хв. Якщо вони рухатимуться в одному напрямі, то легкова машина наздожене вантажну через 3 год після початку руху.

Нехай швидкість вантажної машини дорівнює x км/год, а легкової — y км/год. Яка з наведених систем рівнянь відповідає умові задачі?

А) $\begin{cases} 0,5x + 0,5y = 60, \\ 3y - 3x = 60; \end{cases}$ В) $\begin{cases} 30x + 30y = 60, \\ 3x - 3y = 60; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 30x + 30y = 60, \\ 3y - 3x = 60; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} 0,5x + 0,5y = 60, \\ 3x - 3y = 60. \end{cases}$

11. Телевізор і відеомагнітофон коштували разом 2000 грн. Після того як телевізор подорожчав на 10 %, а відеомагнітофон подешевшав на 10 %, вони стали коштувати разом 2020 грн.
Нехай телевізор коштував спочатку x грн., а відеомагнітофон — y грн. Яка з наведених систем рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $\begin{cases} x + y = 2000, \\ 110x + 90y = 2020; \end{cases}$ В) $\begin{cases} x + y = 2000, \\ 0{,}1x + 0{,}1y = 2020; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} x + y = 2000, \\ 1{,}1x + 0{,}9y = 2020; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} x + y = 2000, \\ 0{,}9x + 1{,}1y = 2020. \end{cases}$

12. Розв'яжіть рівняння $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 37 = 0$.
А) (6; 1); В) (−6; −1);
Б) (−6; 1); Г) рівняння не має розв'язків.

ПІДСУМКИ

У цьому параграфі:

- було введено такі поняття:
  - рівняння з двома змінними;
  - розв'язок рівняння з двома змінними;
  - графік рівняння з двома змінними;
  - лінійне рівняння з двома змінними;
  - система рівнянь з двома змінними;
  - розв'язок системи рівнянь з двома змінними;
- ви вивчили:
  - графік лінійного рівняння з двома змінними;
  - графічний метод розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними;
  - метод підстановки для розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними;
  - метод додавання для розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними;
- ви дізналися, що рівняння з двома змінними та їх системи можуть слугувати математичними моделями реальних ситуацій.

Вправи для повторення курсу 7 класу

1139. Заповніть таблицю:

a	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2
$a^3 - a^2$							
$a^4 + a^2$							

1140. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $(a^8)^4$; 4) $(a^5)^5$; 7) $a^6a^6a^6$; 10) $(a^4)^5 : a^7$;
2) a^8a^4; 5) $a^2a^3a^4$; 8) $(a^6a^6)^6$; 11) $(a^2)^9 : (a^6)^3$;
3) a^5a^5; 6) $(a^2)^3\, a^4$; 9) $(a^6)^6\, a^6$; 12) $(a^8a^7) : a^{14}$.

1141. При якому значенні x є правильною рівність:

1) $5^x \cdot 5^6 = 5^{24}$; 3) $2^x \cdot 2^m = 2^{6m}$;
2) $(3^m)^x = 3^{5m}$; 4) $(4^x)^{3m} = 4^{6m^2}$,

де m — натуральне число?

1142. Чи є тотожно рівними вирази:

1) $-a^2$ і $(-a)^2$; 4) $9a \cdot a^2$ і $(3a)^2 \cdot a$;
2) $-a^3$ і $(-a)^3$; 5) $(a^4)^3$ і $(a^2)^6$;
3) $(a^3)^2$ і a^5; 6) $(2a)^3 \cdot (0,5a)^2$ і $2a^4a$?

1143. Подайте у вигляді степеня вираз і обчисліть його значення:

1) $81 \cdot 3^2$; 2) $4^3 \cdot 8^2$; 3) $100^2 \cdot 1000^3$.

1144. Порівняйте значення виразів:

1) $15^5 \cdot 2^6$ і $2^5 \cdot 15^6$; 2) $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4$ і $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3$.

1145. Порівняйте значення виразів:

1) 10^{20} і 101^{10}; 2) 10^{15} і 9990^5.

1146. Спростіть вираз:

1) $4a \cdot (-3ab)$; 5) $-14b^2c^8d^9 \cdot 1\frac{2}{7}b^6d^3$;
2) $-2m^2 \cdot 0,1m^4n \cdot (-5n^3)$; 6) $\frac{4}{9}a^4c \cdot (-12a^2c^3) \cdot 1,8a^4b^5$;
3) $0,3a^2b^4 \cdot 1,2a^4b$; 7) $3x^6 \cdot (-4x^2y)^2$;
4) $-6x^3y^6 \cdot 1,5xy$; 8) $(-xy)^3 \cdot (-2x^2y^2)^4$.

1147. Подайте даний одночлен A у вигляді B^n, де B — деякий одночлен, якщо:

1) $A = a^6b^9$, $n = 3$; 3) $A = 81a^2b^4c^8$, $n = 2$;
2) $A = 32a^{10}$, $n = 5$; 4) $A = -8a^{12}b^{18}$, $n = 3$.

1148. Спростіть вираз:

1) $4a^3ab - 6a^2b^3b^3 - 5ab \cdot 3a + 7a^3b \cdot 0{,}2b^4$;

2) $11m^2 \cdot 2mn - 9mn \cdot 6mn^3 + 10mnm$;

3) $8xx^4x \cdot \left(-\frac{1}{4}xy\right) + 18xy \cdot \frac{7}{9}yx^5$;

4) $9x^3xy^2 - 8xy^2y^8 + 12x^2y \cdot 4y - 0{,}4xy^3 \cdot 6x^3y^2$.

1149. Знайдіть суму і різницю многочленів:

1) $2{,}8b - 0{,}75b^2$ і $\frac{1}{4}b^2 - 1\frac{4}{5}b$;

2) $1\frac{2}{7}x^2 + 2\frac{4}{9}y$ і $2\frac{3}{14}x^2 - 1\frac{1}{6}y$.

1150. Доведіть, що значення виразу $3x^2 - 9x - (8 - 5x^2 - (9x - 8x^2))$ не залежить від значення змінної.

1151. Який многочлен треба додати до многочлена $a^4 - b^4 + a^3 - b^3 - 3ab$, щоб їх сума тотожно дорівнювала многочлену $b^4 + 2ab$?

1152. Який многочлен треба відняти від многочлена $3c^5 - 2c^4 + 14c^3 - 4c^2 + c$, щоб їх різниця тотожно дорівнювала многочлену $5c^3 + c^2 - 7c$?

1153. Який многочлен треба додати до многочлена $m^3 - m^2n + mn^2 - n^4$, щоб їх сума тотожно дорівнювала 5?

1154. Чи існують такі значення x і y, при яких многочлени $-4x^2 - 12xy + 7y^2$ і $6x^2 + 12xy - 5y^2$ одночасно набувають від'ємних значень?

1155. Знайдіть значення виразу:

1) $2a(3a - 5) - 4a(4a - 5)$, якщо $a = -0{,}2$;

2) $7ab(2a - 3b) + 2a(3ab + 10b^2)$, якщо $a = -3$, $b = 5$;

3) $2a^4(3a^2 + a - 8) - 6a^6$, якщо $a = -1$.

1156. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x-1}{6} - \frac{x}{3} = \frac{5-2x}{9}$;

2) $\frac{3x+1}{2} - \frac{5x}{4} = \frac{3-2x}{3}$;

3) $\frac{x+5}{8} - \frac{1+x}{2} = \frac{2x+1}{3}$;

4) $\frac{2x}{3} - \frac{2x+1}{6} = \frac{3x-9}{4}$;

5) $\frac{9x-7}{4} - \frac{9x+13}{8} = \frac{3-x}{2}$;

6) $\frac{6x+7}{6} + \frac{5x-8}{9} = 3$.

1157. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x(4x - 1) - 6x(1{,}5 + 2x) = 4{,}8$;

2) $0{,}2x(5x - 8) + 3{,}6 = x(x - 0{,}7)$;

3) $x(9x-4)-3x(3x-1)=8-x$;

4) $18x^2-6x(3x+2)=-12x$.

1158. Доведіть тотожність:

1) $-0{,}2x^3(2{,}5x-4)(6-x^2)=0{,}5x^6-0{,}8x^5-3x^4+4{,}8x^3$;

2) $(a-2)(a^2+3a-18)=(a-3)(a^2+4a-12)$.

1159. Яке число можна підставити замість a, щоб рівність $(5x+a)(x-2)=5x^2-7x-2a$ була тотожністю?

1160. Яке число можна підставити замість b, щоб рівність $(3x+b)(x+3)=3x^2+5x+3b$ була тотожністю?

1161. Розкладіть на множники:

1) $\frac{1}{2}a^6-\frac{1}{4}a^2b$;

2) $5m^2n^3k^4+35m^4n^3k^2$;

3) $x^3y^2z^5-2xy^5z^3+3x^2y^3z$;

4) $a^{2n}b^{3n}-a^nb^{4n}$, де n — натуральне число.

1162. Обчисліть, використовуючи винесення спільного множника за дужки, значення многочлена:

1) $a^2+4{,}72a-32{,}8$, якщо $a=5{,}28$;

2) $12{,}3x-12{,}3y+4{,}7$, якщо $x=8{,}14$, $y=8{,}04$.

1163. Обчисліть, використовуючи винесення спільного множника за дужки:

1) $2{,}49\cdot1{,}35-1{,}35\cdot1{,}84+1{,}35^2$;

2) $0{,}25^2\cdot1{,}6+0{,}25\cdot1{,}6^2-0{,}25\cdot1{,}6\cdot0{,}85$;

3) $3{,}24\cdot18{,}7-3{,}24\cdot16{,}4+2{,}3\cdot6{,}76$;

4) $5{,}12\cdot9{,}76+5{,}12\cdot5{,}36-5{,}12^2$.

1164. Доведіть, що значення виразу:

1) 17^3+17^2-17 кратне 61;

2) 25^4-125^2 кратне 40;

3) 6^5-18^3 кратне 42;

4) $5\cdot2^{962}-3\cdot2^{961}+2^{960}$ кратне 60.

1165. Доведіть, що число:

1) $\overline{abba}$ ділиться націло на 11;

2) $\overline{aaabbb}$ ділиться націло на 37;

3) $\overline{ababab}$ ділиться націло на 7;

4) $\overline{abab}-\overline{baba}$ ділиться націло на 9 і на 101.

1166. При якому значенні a рівняння $(x+2)(x-4)-(x-2)(x+4)=ax$ має безліч коренів?

1167. При якому значенні a рівняння $(3x - 1)(x + a) = (3x - 2)(x + 1)$ не має коренів?

1168. Розкладіть на множники:

1) $xm - xn + ym - yn$;
2) $3a - 3b + ac - bc$;
3) $9a - ab - 9 + b$;
4) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$;
5) $6ab^2 - 3b^2 + 2a^2b - ab$;
6) $2c^3 - 5c^2d - 4c + 10d$;
7) $x^3y^2 - x + x^2y^3 - y$;
8) $ax^2 - ay - cy + bx^2 + cx^2 - by$.

1169. Обчисліть значення виразу:

1) $1,66^2 + 1,66 \cdot 4,68 + 2,34^2$;
2) $1,04^2 - 1,04 \cdot 1,28 + 0,64^2$.

1170.* При яких значеннях a, b, c і d виконується рівність $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{ad} \cdot \overline{cb}$?

1171. Спростіть вираз:

1) $6x^2 + (2y - 3x)(2y + 3x)$;
2) $(a + 2)(a - 3) - (4 - a)(a + 4)$;
3) $(5 - 2x)(5 + 2x) - (3 - 2x)(4 - 2x)$;
4) $(2ab + 1)(2ab - 1)(16a^4b^4 + 1)(4a^2b^2 + 1)$.

1172. Обчисліть значення добутку, використовуючи формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

1) $19 \cdot 21$; 2) $98 \cdot 102$; 3) $2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{3}$; 4) $7,9 \cdot 8,1$.

1173. Розв'яжіть рівняння:

1) $4x(7 + 9x) - (6x + 5)(6x - 5) = 39$;
2) $(x - 8)(x + 10) - (x + 7)(x - 7) = 5x - 31$.

1174. Доведіть, що значення виразу $(a + b - c)(a - b) + (b + c - a)(b - c) + (c + a - b)(c - a)$ тотожно дорівнює нулю.

1175. Знайдіть значення виразу:

1) $43^2 - 23^2$; 2) $256^2 - 244^2$; 3) $7,2^2 - 2,8^2$.

1176. Обчисліть:

1) $\frac{39^2 - 33^2}{24^2 - 12^2}$; 2) $\frac{5,3^2 - 1,7^2}{2,65^2 - 0,85^2}$.

1177. Розв'яжіть рівняння:

1) $36x^2 - (3x - 27)^2 = 0$; 2) $(4x - 7)^2 - (2x + 17)^2 = 0$.

1178. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу:

1) $(4n + 19)^2 - (3n - 5)^2$ ділиться націло на 7;
2) $(2n + 5)^2 - (2n - 3)^2$ ділиться націло на 16.

1179. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу $(n^2 - 3n + 1)^2 - n^4 + 3n + 5$ кратне 6.

1180. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу $16n^4 - (4n^2 - 2n - 1)^2 + 8n + 1$ кратне 4.

1181. При якому значенні a рівняння $(a - 3)(a + 5)x = a^2 - 9$:

1) має безліч коренів;
2) не має коренів;
3) має один корінь?

1182. Використовуючи формулу квадрата суми або формулу квадрата різниці, обчисліть:

1) 69^2;
2) 91^2;
3) 52^2;
4) 97^2;
5) 299^2;
6) $10{,}2^2$.

1183. На скільки значення виразу $(3a^2 - 2)^2 - (3a^2 - 1) \times (3a^2 + 1) + 12a^2$ більше за число 2?

1184. Доведіть, що не існує натурального значення n, при якому значення виразу $(8n + 5)(2n + 1) - (4n + 1)^2$ ділилося б націло на 5.

1185. Чи існує таке натуральне значення n, при якому значення виразу $(2n - 3)(2n + 3) - (n + 3)^2$ не ділилося б націло на 3?

1186. Розв'яжіть рівняння:

1) $3(x - 7)^2 - 2(x + 7)(x - 2) = (x + 11)(x - 4) + 101$;
2) $2x(x + 3)^2 - 3x(x - 1)(x + 8) = x^2(-x - 9) + 21$;
3) $y(2y - 5)(2y + 5) - 4y(y + 6)^2 = 13 - 48y^2$.

1187. Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз:

1) $(a + 4)^2 - 2(a + 4) + 1$;
2) $(3b + 2)^2 + 4(3b + 2) + 4$;
3) $(3y + 8)^2 + (4y + 6)^2 + 4y$;
4) $(x - 5y)^2 + (x + 12y)^2 - x(x - 12y)$.

1188. Суму якого одночлена і тричлена $4a^2 - 6ab + 9b^2$ можна розкласти на множники за формулою квадрата двочлена? Знайдіть ще 3 таких одночлени.

1189. Доведіть, що не має коренів рівняння:

1) $x^2 - 8x + 18 = 0$;
2) $x^2 + x + 1 = 0$.

1190. Розкладіть на множники:

1) $\frac{1}{64}a^8 - b^6$;
2) $a^3b^6c^9 + 8$;
3) $x^{21}y^{24} - m^{12}n^{15}$;
4) $a^6b^6 + 1$.

1191. На скільки значення виразу $27a^3 + 4 - (9a^2 - 3a + 1) \times$ $\times (3a + 1)$ менше від числа 10?

1192. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 24x$;

2) $(3 - 2x)(9 + 6x + 9x^2) - 2x(5 - 2x)(5 + 2x) = 7$.

1193. Чи ділиться націло значення виразу $37^3 + 23^3$ на 60?

1194. Чи ділиться націло значення виразу $654^3 - 554^3$ на 200?

1195. Розкладіть на множники:

1) $(a - b)(a + b) - c(c - 2b)$;

2) $(b - c)(b + c) - a(a + 2c)$.

1196. З наступних чотирьох виразів лише три можна розкласти на множники. Знайдіть ці вирази і розкладіть їх на множники:

1) $9mx - 6nx + 6my - 4ny$; 3) $x^2 - 4x + y^2 + 2x + 5$;

2) $36x^2 - 24x + 4 - y^2$; 4) $4a + 3 + a^2 + 2b - b^2$.

1197. Подайте у вигляді добутку чотирьох множників вираз:

1) $a^5 - a^4 - 16a + 16$;

2) $a^{2n}b^{2n} - b^{2n} - a^{2n} + 1$, де n — натуральне число.

1198. Знайдіть значення виразу:

1) $1{,}87^2 - 1{,}13^2 + 6 \cdot 1{,}13$;

2) $1{,}628^3 - 1{,}2 \cdot 1{,}628 \cdot 1{,}228 - 1{,}228^3$;

3) $0{,}79^3 + 3 \cdot 0{,}79 \cdot 0{,}21 + 0{,}21^3$.

1199. Доведіть, що значення виразу $17^{10} - 3 \cdot 7^{24} + 3 \cdot 7^{25} + 17^9$ ділиться націло: 1) на 18; 2) на 36.

1200. Доведіть, що різниця куба натурального числа і самого цього числа ділиться націло на 6.

1201. Доведіть, що сума добутку трьох послідовних натуральних чисел і середнього з цих чисел дорівнює кубу середнього числа.

1202. Нехай $x + y = a$, $xy = b$. Доведіть, що:

1) $x^2 + y^2 = a^2 - 2b$;

2) $x^3 + y^3 = a^3 - 3ab$;

3) $x^4 + y^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$.

1203.* Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ дорівнює квадрату деякого натурального числа.

1204.* Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу $n(n+2)(n+4)(n+6)+16$ дорівнює квадрату деякого натурального числа.

1205.* Доведіть, що різниця між квадратом натурального числа, яке не кратне 3, і числом 1 кратна 3.

1206.* Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n, яке не кратне 5, значення виразу n^4-1 ділиться націло на 5.

1207.* Чи можна стверджувати, що значення виразу n^3+2n ділиться націло на 3 при будь-якому натуральному значенні n?

1208.* Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу n^7-n кратне 42.

1209. Дано функції $f(x)=x^2-2x$ і $g(x)=\frac{x-2}{x}$. Порівняйте:

1) $f(2)$ і $g(-1)$; 2) $f(0)$ і $g(2)$; 3) $f(1)$ і $g(1)$.

1210. Функцію задано таблично:

x	5	3	1	−1	−3
y	3	1	−1	−3	−5

Задайте цю функцію описом і формулою.

1211. При всіх додатних значеннях аргументу значення функції f дорівнює −1, при всіх від'ємних — дорівнює 1, а $f(0)=0$. Побудуйте графік функції f.

1212. Знайдіть координати точки графіка функції $y=6x-5$:

1) абсциса і ордината якої рівні між собою;
2) сума координат якої дорівнює 30.

1213. При якому значенні a через точку $M(3;-2)$ проходить графік функції:

1) $y=ax-8$; 2) $y=\frac{1}{3}x-a$?

1214. Чи є лінійною функція:

1) $f(x)=(x-1)(x+1)-x(x-3)$;
2) $f(x)=(2x-3)^2-(x+4)(x-2)$;
3) $f(x)=(x+3)^2-x(x+6)$?

У разі позитивної відповіді побудуйте її графік.

1215. Графіки функцій $y = (5 - a)x + a$ і $y = ax + 2$ перетинаються в точці, абсциса якої дорівнює -3. Знайдіть ординату цієї точки.

1216. Побудуйте графік функції $y = 2x + 3$. Користуючись графіком, знайдіть значення аргументу, при якому значення функції:

1) дорівнює 5; 3) менше від 5;
2) більше за 5; 4) більше за -3, але менше від 7.

1217. Не виконуючи побудови графіка функції $y = 12x - 6$, знайдіть координати:

1) точок перетину графіка з осями координат;
2) точки перетину графіка даної функції з графіком функції $y = 6x + 24$.

1218. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x| - 3$; 2) $y = |x - 3|$.

1219. При якому значенні a пара $(a; -a)$ є розв'язком рівняння:

1) $6x + 5y = 7$; 3) $x^2 - 3y = 0$;
2) $8x - 2y = 4$; 4) $x + |y| = -2$.

1220. Побудуйте графік рівняння $y + 1{,}5x = c$, якщо він проходить через точку $A(-2; 1)$.

1221. Складіть систему двох лінійних рівнянь з двома змінними, розв'язком якої є пара чисел:

1) $(1; 1)$; 2) $(-3; 5)$.

1222. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x + 7y = 1, \\ 6y - 5x = 16; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3(2a - 1) + 6(7 - b) = 51, \\ 2(b + 6) - 7(1 + 6b) = -39; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 5y = 19, \\ 2x + 3y = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{3x - 2y}{4} - \dfrac{4x + 5}{3} = -5, \\ \dfrac{6x - 5y}{2} + \dfrac{2x + y}{5} = 9. \end{cases}$

1223.* При якому значенні a сума $x + y$ набуває найменшого значення, якщо:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2a^2 - 12a + 8, \\ 3x - 2y = 3a^2 + 8a + 12? \end{cases}$$

1224.* При якому значенні a різниця $x - y$ набуває найменшого значення, якщо:

$$\begin{cases} x - 5y = a^2 + 10a + 1, \\ 4x + y = 4a^2 - 2a + 4? \end{cases}$$

1225. Учні 7 класу зібралися на екскурсію. Якщо кожен учень здасть на екскурсію 12 грн. 50 коп., то для її оплати не вистачить 100 грн., якщо кожний внесе 16 грн., то утвориться надлишок у 12 грн. Скільки учнів у цьому класі?

1226. По колу, довжина якого дорівнює 100 м, рухаються два тіла. Вони зустрічаються кожні 20 с, рухаючись в одному напрямі. Якби вони рухалися в протилежних напрямах, то зустрічалися б кожні 4 с. З якою швидкістю вони рухаються?

1227. Сплавили два злитки. Маса одного з них становила 105 г, і він містив 40 % міді. Маса другого злитка становила 75 г. Знайдіть відсотковий вміст міді в другому злитку, якщо отриманий сплав містив 50 % міді.

1228. Скільки треба взяти 4-відсоткового і скільки 10-відсоткового розчинів солі, щоб одержати 180 г 6-відсоткового розчину?

1229. У першому бідоні було молоко, масова частка жиру якого становила 3 %, а в другому — вершки жирністю 18 %. Скільки треба взяти молока і скільки вершків, щоб одержати 10 л молока з масовою часткою жиру 6 %?

1230. З одного поля зібрали по 40 ц ячменю з гектара, а з другого — по 35 ц з гектара. Усього було зібрано 2600 ц. Наступного року врожайність першого поля збільшилася на 10 %, другого — на 20 %, а в результаті разом було зібрано на 400 ц більше. Знайдіть площу кожного поля.

1231. З одного поля зібрали по 45 ц пшениці з гектара, а з другого — по 40 ц з гектара. Усього було зібрано 1900 ц. Наступного року у зв'язку з посухою врожайність першого поля зменшилася на 20 %, другого — на 15%, а в результаті разом було зібрано менше на 330 ц. Знайдіть площу кожного поля.

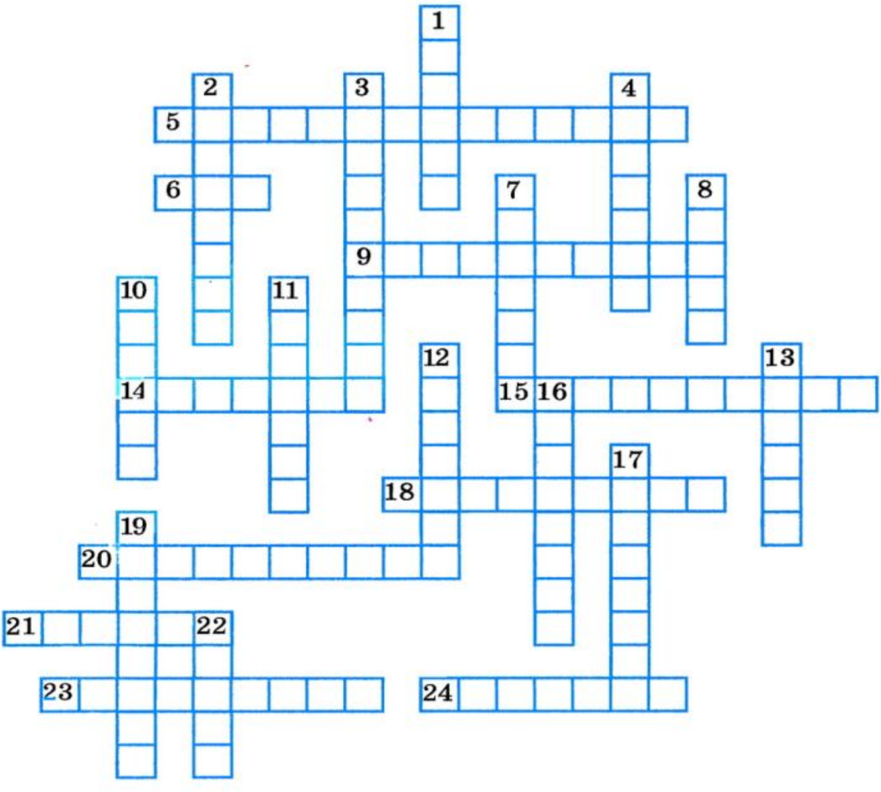
1232. Половину цукерок розфасували в мішечки по 500 г у кожний, а другу половину — у менші мішечки по 300 г у кожний. Усього вийшло 32 мішечки. Скільки було цукерок?

1233. Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 11. Якщо до цього числа додати 63, то отримаємо число, записане тими самими цифрами у зворотному порядку. Знайдіть дане число.

1234. До деякого двоцифрового числа ліворуч і праворуч дописали цифру 1. У результаті отримали число, яке в 21 раз більше за дане. Знайдіть дане двоцифрове число.

1235. Сума двох чисел дорівнює 28, а різниця їх квадратів становить 112. Знайдіть ці числа.

1236. Розгадайте кросворд:



По горизонталі: **5.** Функція пряма ... . **6.** Третій степінь числа. **9.** Усі значення, яких набуває аргумент функції, утворюють область ... . **14.** Правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної. **15.** Рівність, правильна при будь-яких значеннях змінних. **18.** Вираз, який є сумою кількох одночленів. **20.** Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді. **21.** Французький математик, на честь якого названо сучасну систему координат. **23.** Речення, яке розкриває сутність нового терміна. **24.** Мухаммед ібн Муса аль-... .

По вертикалі: **1.** Розв'язок рівняння. **2.** Незалежна змінна. **3.** Розкладання многочлена на множники методом ... . **4.** Добуток рівних множників. **7.** Другий степінь числа. **8.** Графік лінійної функції. **10.** Геометрична фігура, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу функції, а ординати — відповідним значенням функції. **11.** Одна з координат точки на площині. **12.** Вісь ... . **13.** У виразі 7^4 число 7 — ... степеня. **16.** Вираз, який є добутком чисел, змінних та їх степенів. **17.** Термін, яким позначають процес, що дозволяє за скінченну кількість кроків отримати розв'язок задачі. **19.** У виразі a^n змінна n — ... степеня. **22.** Геометрична фігура, яка є графіком рівняння $x^2 + (y - 1)^2 = 0$.

Відомості з курсу математики 5–6 класів

Числа та дії над ними

1. Основна властивість дробу

Якщо чисельник і знаменник даного дробу помножити на одне й те саме натуральне число, то отримаємо дріб, що дорівнює даному:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}.$$

Якщо чисельник і знаменник даного дробу поділити на їх спільний дільник, то отримаємо дріб, що дорівнює даному:

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}.$$

2. Скорочення дробів

Ділення чисельника і знаменника дробу на їх спільний дільник, відмінний від 1, називають скороченням дробу.

Дріб, чисельник і знаменник якого — взаємно прості числа, називають нескоротним.

Якщо скоротити дріб на найбільший спільний дільник чисельника і знаменника, то отримаємо нескоротний дріб.

3. Зведення дробів до найменшого спільного знаменника

Щоб звести дроби до найменшого спільного знаменника, треба:

1) знайти найменший спільний знаменник даних дробів;
2) знайти додаткові множники для кожного з дробів, поділивши спільний знаменник на знаменники даних дробів;
3) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на його додатковий множник.

4. Цілі числа. Раціональні числа

Усі натуральні числа, протилежні їм числа і число 0 називають цілими числами.

Натуральні числа називають цілими додатними числами. Числа -1; -2; -3; ... називають цілими від'ємними числами.

Об'єднавши натуральні числа з цілими від'ємними і нулем, отримаємо цілі числа:

Цілі числа		
Цілі від'ємні числа	0	Натуральні числа

Об'єднавши цілі числа з дробовими, отримаємо раціональні числа:

Раціональні числа	
Цілі числа	Дробові числа

5. Модуль числа

Модулем числа a називають відстань від початку відліку до точки, яка зображує це число на координатній прямій.

Модуль числа a позначають так: $|a|$ (читають: «модуль a»).

Модуль додатного числа дорівнює цьому числу, модуль від'ємного числа дорівнює числу, яке протилежне даному.

$$|0| = 0.$$

За допомогою фігурної дужки властивість модуля числа a можна записати так:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Модуль числа набуває тільки невід'ємних значень.

Модулі протилежних чисел рівні: $|a| = |-a|$.

6. Додавання. Властивості додавання

Числа, які додаються, називають доданками, а результат додавання — сумою.

Від перестановки доданків сума не змінюється:

$$a + b = b + a \text{ — переставна властивість.}$$

Щоб до суми двох чисел додати третє число, можна до першого числа додати суму другого і третього чисел:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ — сполучна властивість.}$$

7. Віднімання. Властивості віднімання

Від числа a відняти число b означає знайти таке число, яке в сумі з числом b дає число a.

Рівність $a - b = c$ правильна, якщо правильна рівність $b + c = a$.

У рівності $a - b = c$ число a називають зменшуваним, b — від'ємником, c — різницею.

Різниця $a - b$ показує, на скільки число a більше за число b або на скільки число b менше від числа a.

Для будь-якого числа a правильні рівності:

$$a - 0 = a, \text{ оскільки } 0 + a = a;$$
$$a - a = 0, \text{ оскільки } a + 0 = a.$$

8. Додавання і віднімання дробів

Щоб додати два дроби з рівними знаменниками, треба додати їхні чисельники, а знаменник залишити той самий.

При відніманні дробів з рівними знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий.

Щоб додати (відняти) два дроби з різними знаменниками, треба звести їх до спільного знаменника, а потім застосувати правило додавання (віднімання) дробів з рівними знаменниками.

9. Додавання раціональних чисел

Щоб додати два числа з різними знаками, треба:
1) знайти модулі доданків;
2) від більшого модуля відняти менший модуль;
3) перед отриманим числом поставити знак доданка з більшим модулем.

Щоб додати два від'ємних числа, треба:
1) знайти модулі доданків;
2) додати модулі доданків;
3) перед отриманим числом поставити знак «–».

Сума двох протилежних чисел дорівнює нулю.

Для будь-якого раціонального числа a:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

10. Віднімання раціональних чисел

Щоб знайти різницю двох чисел, можна до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику.

11. Множення. Властивості множення

Добутком числа a на натуральне число b, яке не дорівнює 1, називають суму, що складається з b доданків, кожний з яких дорівнює a:

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{b \text{ доданків}}.$$

Якщо один з двох множників дорівнює 1, то добуток дорівнює другому множнику:

$$m \cdot 1 = 1 \cdot m = m.$$

Якщо один з множників дорівнює нулю, то добуток дорівнює нулю:

$$m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0.$$

Якщо добуток дорівнює нулю, то хоча б один з множників дорівнює нулю.

Від перестановки множників добуток не змінюється:

$ab = ba$ — переставна властивість.

Щоб добуток двох чисел помножити на третє число, можна перше число помножити на добуток другого і третього чисел:

$(ab)\,c = a\,(bc)$ — сполучна властивість.

Щоб число помножити на суму двох чисел, можна це число помножити на кожний доданок і отримані добутки додати:

$a\,(b + c) = ab + ac$ — розподільна властивість.

12. Множення звичайних дробів

Щоб помножити дріб на натуральне число, треба його чисельник помножити на це число, а знаменник залишити без зміни:

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}.$$

Вважають, що $\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$; $0 \cdot \frac{a}{b} = 0$.

Добутком двох дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник — добутку знаменників:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Щоб помножити мішані числа, треба спочатку записати їх у вигляді неправильних дробів, а потім скористатися правилом множення дробів.

13. Множення раціональних чисел

Щоб помножити два числа з різними знаками, треба помножити їх модулі і перед отриманим добутком поставити знак «−».

Щоб помножити два від'ємних числа, треба помножити їх модулі.

Для будь-якого раціонального числа a:

$$a \cdot (-1) = -a,$$
$$(-1) \cdot a = -a.$$

Якщо добуток ab — додатний, то числа a і b мають однакові знаки;

якщо добуток ab — від'ємний, то числа a і b мають різні знаки.

14. Ділення. Властивості ділення

Поділити число a на число b означає знайти таке число, добуток якого з числом b дорівнює a.

Отже, рівність $a : b = c$ правильна, якщо правильна рівність $b \cdot c = a$.

У рівності $a : b = c$ число a називають діленим, b — дільником, c — часткою.

Частка $a : b$ показує, у скільки разів число a більше за число b.

При будь-яких значеннях a правильна рівність:

$$a : 1 = a.$$

Якщо a не дорівнює 0, то справедливі такі рівності:

$$0 : a = 0,$$
$$a : a = 1.$$

На нуль ділити не можна!

15. Подільність натуральних чисел

Якщо натуральне число a ділиться націло на натуральне число b, то число a називають кратним числа b, число b — дільником числа a.

Для будь-якого натурального числа a кожне з чисел $a \cdot 1$, $a \cdot 2$, $a \cdot 3$, $a \cdot 4$, ... є кратним числа a.

Найменшим дільником будь-якого натурального числа a є число 1, а найбільшим — саме число a.

Серед чисел, кратних a, найбільшого немає, а найменше є — це саме число a.

Якщо кожне з чисел a і b ділиться націло на число k, то і сума $a + b$ також ділиться націло на число k.

Якщо число a ділиться націло на число k, а число b не ділиться націло на число k, то сума $a + b$ також не ділиться націло на число k.

Натуральне число називають простим, якщо воно має тільки два різних дільники: одиницю і саме це число.

Натуральне число, яке має більше ніж два дільники, називають складеним.

Будь-яке складене число можна подати у вигляді добутку простих чисел, тобто розкласти на прості множники.

Якщо найбільший спільний дільник двох натуральних чисел дорівнює 1, то їх називають взаємно простими.

16. Ознаки подільності натуральних чисел

Якщо запис натурального числа закінчується цифрою 0, то воно ділиться націло на 10.

Якщо запис натурального числа закінчується будь-якою цифрою, яка відмінна від 0, то воно не ділиться націло на 10.

Якщо натуральне число поділити на 10, то остача дорівнюватиме числу, яке записано останньою цифрою цього числа.

Цифри 0, 2, 4, 6, 8 називають парними, а цифри 1, 3, 5, 7, 9 — непарними.

Якщо запис натурального числа закінчується парною цифрою, то воно ділиться націло на 2.

Якщо запис натурального числа закінчується непарною цифрою, то воно не ділиться націло на 2.

Якщо запис натурального числа закінчується однією з цифр 0 або 5, то воно ділиться націло на 5.

Якщо запис натурального числа закінчується будь-якою цифрою, відмінною від 0 чи 5, то воно не ділиться націло на 5.

Якщо сума цифр числа ділиться націло на 9, то й саме число ділиться націло на 9.

Якщо сума цифр числа не ділиться націло на 9, то й саме число не ділиться націло на 9.

Якщо сума цифр числа ділиться націло на 3, то й саме число ділиться націло на 3.

Якщо сума цифр числа не ділиться націло на 3, то й саме число не ділиться націло на 3.

17. Ділення з остачею

Не завжди одне натуральне число ділиться націло на інше. У такому випадку можна виконати ділення з остачею. Наприклад, при діленні числа 43 на 8 дістанемо неповну частку 5 і остачу 3.

Остача завжди менша від дільника.

Щоб знайти ділене, треба дільник помножити на неповну частку і додати остачу.

У буквеному вигляді це записують так:

$$a = bq + r,$$

де a — ділене, b — дільник, q — неповна частка, r — остача, $r < b$.

18. Ділення звичайних дробів

Щоб поділити один дріб на другий, треба ділене помножити на число, обернене до дільника:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

19. Ділення раціональних чисел

Щоб поділити два числа з різними знаками, треба модуль діленого поділити на модуль дільника і перед отриманим числом поставити знак «–».

Щоб поділити два від'ємних числа, треба модуль діленого поділити на модуль дільника.

20. Знаходження дробу від числа

Щоб знайти дріб від числа, можна число помножити на цей дріб.

Щоб знайти відсотки від числа, можна подати відсотки у вигляді дробу і помножити число на цей дріб.

21. Знаходження числа за його дробом

Щоб знайти число за значенням його дробу, можна це значення поділити на цей дріб.

Щоб знайти число за його відсотками, можна подати відсотки у вигляді дробу і поділити значення відсотків на цей дріб.

22. Степінь числа

Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}.$$

Число a при цьому називають основою степеня.

Степенем числа a з показником 1 називають саме число a:

$$a^1 = a.$$

Другий степінь також називають квадратом числа. Наприклад, запис a^2 читають: «a в квадраті». Третій степінь називають кубом числа, а запис a^3 читають: «a в кубі».

Якщо в числовий вираз входить степінь, то спочатку виконують піднесення до степеня, а потім інші дії.

Вирази. Формули. Рівняння

23. Числові й буквені вирази

Запис, складений з чисел, знаків арифметичних дій і дужок, називають числовим виразом.

Оскільки $(19 - 7) : 3 = 4$, то число 4 називають значенням виразу $(19 - 7) : 3$.

Запис, складений з чисел, букв, знаків арифметичних дій і дужок, називають буквеним виразом.

Підставивши замість x у вираз $5 + 3x$ число 2, отримаємо: $5 + 3 \cdot 2 = 11$. Число 11 називають значенням буквеного виразу $5 + 3x$ при $x = 2$.

24. Розкриття дужок

Якщо перед дужками стоїть знак «−», то при розкритті дужок треба опустити цей знак, а всі знаки, які стоять перед доданками, змінити на протилежні.

Якщо перед дужками стоїть знак «+», то при розкритті дужок треба опустити цей знак, а всі знаки, які стоять перед доданками, залишити без змін.

25. Зведення подібних доданків

Розглянемо вираз $7a - 9a + 5a$. Він складається з трьох доданків $7a$, $-9a$, $5a$, які мають однакову буквену частину. Такі доданки називають подібними.

Щоб звести подібні доданки, треба додати їх коефіцієнти і отриманий результат помножити на спільну буквену частину.

26. Формули

Рівності виду $y = 3x$, $P = 2(a + b)$, $S = a^2$ називають формулами.

Рівність $s = vt$, де s — пройдений шлях, v — швидкість руху, а t — час, за який пройдено шлях s, називають формулою шляху.

27. Рівняння

Коренем рівняння називають значення змінної, при якому рівняння стає правильною числовою рівністю.

Рівняння не обов'язково має один корінь. Наприклад, рівняння $x - x = 0$ має нескінченну кількість коренів, а рівняння $x - x = 1$ взагалі не має коренів.

Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або переконатися, що їх взагалі немає. Тому корінь часто називають розв'язком рівняння.

Щоб знайти невідомий доданок, треба від суми відняти відомий доданок.

Щоб знайти невідоме зменшуване, треба до різниці додати від'ємник.

Щоб знайти невідомий від'ємник, треба від зменшуваного відняти різницю.

Щоб знайти невідомий множник, треба добуток поділити на відомий множник.

Щоб знайти невідоме ділене, треба дільник помножити на частку.

Щоб знайти невідомий дільник, треба ділене поділити на частку.

28. Властивості рівнянь

Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі корені, що й дане.

Якщо дане рівняння не має коренів, то, додавши до обох його частин одне й те саме число, отримаємо рівняння, яке теж не має коренів.

Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, яке має ті самі корені, що й дане.

Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме, відмінне від нуля, число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі корені, що й дане.

Відношення і пропорції

29. Відношення

Частку двох чисел a і b, які не дорівнюють нулю, ще називають відношенням чисел a і b або відношенням числа a до числа b.

Числа a і b називають членами відношення, число a — попереднім членом відношення, а число b — наступним.

Відношення додатних чисел a і b показує, у скільки разів число a більше за число b, або яку частину число a становить від числа b.

Відношення не зміниться, якщо його члени помножити або поділити на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю.

30. Пропорції

Рівність двох відношень називають пропорцією.

У буквеному вигляді пропорцію можна записати так:

$$a : b = c : d \text{ або } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Числа a і d називають крайніми членами пропорції, а числа b і c — середніми членами пропорції.

31. Основна властивість пропорції

Добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку її середніх членів:

$$\text{якщо } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } ad = bc.$$

Якщо a, b, c і d — числа, які не дорівнюють нулю, і $ad = bc$, то відношення $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ рівні й можуть утворити пропорцію $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

32. Відсоткове відношення двох чисел

Відсоткове відношення двох чисел — це їх відношення, виражене у відсотках. Воно показує, скільки відсотків одне число становить від другого.

Щоб знайти відсоткове відношення двох чисел, треба їх відношення помножити на 100 і до результату дописати знак відсотка.

33. Пряма пропорційна залежність

Дві величини називають прямо пропорційними, якщо при збільшенні (зменшенні) однієї з них у кілька разів інша збільшується (зменшується) у стільки ж разів.

Якщо дві величини прямо пропорційні, то відношення відповідних значень цих величин дорівнює одному й тому самому для цих величин числу.

Якщо величини y і x прямо пропорційні, то їх відповідні значення задовольняють рівність $\frac{y}{x} = k$, де k — число, стале для даних величин.

Координатна площина

34. Прямокутна система координат

Проведемо на площині дві перпендикулярні координатні прямі так, щоб їх початки відліку збігалися (рис. 64). Ці прямі називають осями координат, точку O їх перетину — початком координат. Горизонтальну вісь називають віссю абсцис і позначають буквою x, вертикальну вісь називають віссю ординат і позначають буквою y.

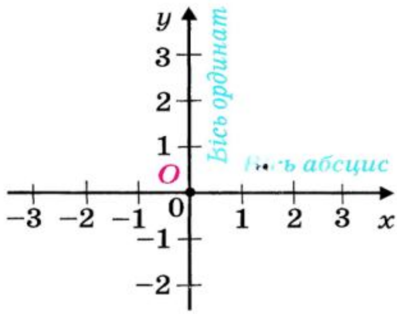


Рис. 64

Вісь абсцис називають також віссю x, а вісь ординат — віссю y, вони разом утворюють прямокутну систему координат. Площину, на якій задано прямокутну систему координат, називають координатною площиною.

Координатні осі розбивають площину на чотири частини, які називають координатними чвертями і нумерують так, як показано на рисунку 65.

На координатній площині позначимо точку M (рис. 66).

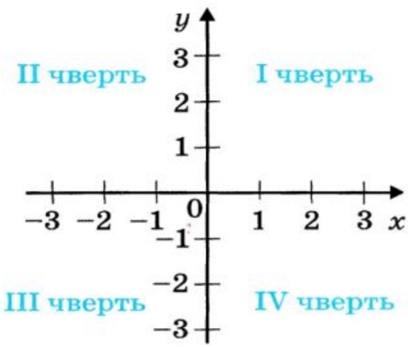


Рис. 65

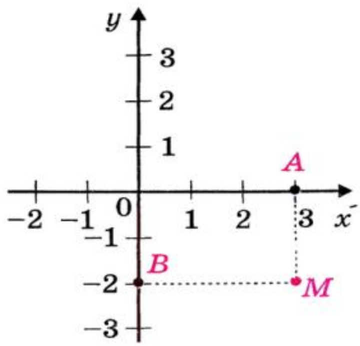


Рис. 66

Пряма, що проходить через точку M перпендикулярно до осі абсцис, перетинає її в точці A, а пряма, яка перпендикулярна до осі ординат, перетинає цю вісь у точці B. Точка A на осі x має координату 3, а точка B на осі y — координату -2.

Число 3 називають абсцисою точки M, число -2 — ординатою точки M. Числа 3 і -2 однозначно визначають місце точки M на координатній площині. Тому їх називають координатами точки M і записують: $M(3; -2)$.

Записуючи координати точки, абсцису завжди ставлять на перше місце, а ординату — на друге.

Якщо точка лежить на осі абсцис, то її ордината дорівнює нулю, а якщо точка лежить на осі ординат, то нулю дорівнює її абсциса.

Відповіді та вказівки

4. 1) $14\frac{4}{27}$; 2) $1\frac{1}{4}$; 3) $-0,3$; 4) $-1\frac{1}{3}$; 5) 1. **5.** 1) $13\frac{3}{5}$; 2) $1\frac{1}{4}$; 3) 4,4; 4) $-\frac{7}{10}$. **23.** 110 пудів. **37.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$; 3) коренів немає; 4) коренем рівняння є будь-яке число. **38.** 1) 5; 2) 0,8; 3) коренем рівняння є будь-яке число; 4) коренів немає. **39.** 1) 0,6; 2) $\frac{3}{14}$; 3) -10; 4) $-0,9$. **40.** 1) 44; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $-5,2$. **41.** 1) $-\frac{9}{25}$; 2) коренем рівняння є будь-яке число. **42.** 1) $-\frac{4}{11}$; 2) коренів немає. **43.** 1) 0,4; -8; 2) 0; 25; 3) $\frac{2}{3}$; -12; 4) $-0,6$; -1; 0,3. **44.** 1) 6; $-4,5$; 2) $-0,8$; 3. **45.** 1) 10; 2) -3. **46.** 1) 1; 2) $-1,4$. **47.** 1) 12; 2) $4\frac{2}{3}$; 3) 2. **48.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2; 3) 4,8. **49.** 1) -10; 2) 3; 3) 1; 4) 0,5. **50.** 1) -2; 2) -12; 3) $-0,2$; 4) 2. **51.** 7) $-\frac{2}{3}$; -2; 8) 0; -1; 9) -8; 8. **52.** 4) -20; 100; 5) 2,3; $-0,9$; 6) 0; 4; -4. **53.** 2) 55. **54.** 2) $\frac{1}{3}$. **57.** 2) -3; -5; 3; -11; 45; -53. **58.** 2) 7; 11; 31. **59.** 1) 14; 2) $-\frac{31}{45}$. **60.** 1) -17; 2) 3,5. **61.** 2) 3; 3) 2. **62.** 2) 2; 3) -5. **63.** 1) $a \neq 5$; 2) $a \neq -7$. **64.** 1) Якщо $b \neq -1$, то $x = \frac{9}{b+1}$; якщо $b = -1$, то коренів немає; 2) $x = -\frac{4}{b^2+1}$. **65.** Якщо $m \neq -8$, то $x = 1$; якщо $m = -8$, то x — будь-яке число. **68.** 1) 3; 2) $-1,8$; 3) -1; 2. **69.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) коренів немає. **70.** 1) a — парне число; 2) a — непарне число; 3) число a кратне 4; 4) таких значень не існує. **71.** 1) Число b кратне 3; 2) число b таке, що остача при діленні числа b на 3 дорівнює 1; 3) таких значень не існує. **72.** 1) При $b > 0$;

2) при $b < 0$. **73.** 1) При $d < 0$; 2) при $d > 0$. **74.** 1) 18 год; перший виконає $\frac{2}{5}$ завдання, а другий — $\frac{3}{5}$ завдання. **75.** 280 сторінок. **76.** 1) Парним; 2) непарним; 3) парним. **77.** 1) Ні, $2a < a$ при $a < 0$ і $2a = a$ при $a = 0$; 2) ні, $2|a| = |a|$ при $a = 0$. **83.** 2061 м, 2032 м, 2020 м. **84.** 500 м, 400 м, 374 м. **87.** 20 робітників. **88.** 90 км. **89.** 20 кг, 14 кг. **90.** 264 місця, 270 місць. **91.** 12 км/год, 60 км/год. **92.** 28 грн., 16 грн. **93.** 7,2 грн. **96.** 4 роки. **97.** 7 років. **98.** 30 словників, 10 словників. **99.** 1800 грн., 1200 грн. **100.** 11 купюр, 8 купюр. **101.** 800 т. **102.** 60 грн. **103.** 40 кг, 8 кг. **104.** 600 кг, 200 кг. **105.** 5 днів. **106.** 40 л; 80 л. **107.** 4,5 год; 0,5 год. **108.** 24 хв. **109.** 50 км/год, 20 км/год. **110.** 30,5 км/год. **111.** 2 км/год. **112.** 45 кг; 10 кг. **113.** 14 кг; 10 кг. **114.** 60 книжок. **115.** 160 л. **116.** 71 турист. **117.** 109 апельсинів. **118.** 8 днів. **119.** 100 задач. **120.** 93. **121.** 24. **122.** 55 км/год, 65 км/год або 70 км/год, 80 км/год. **123.** 100 кг, 200 кг. **124.** 20 кг, 30 кг. **125.** 1) 4,04; 2) −35,16; 3) $1\frac{8}{9}$; 4) $-6\frac{1}{3}$. **128.** 4. **146.** 24 год. **147.** 579 ц. **149.** Зменшилася на 25 %. **162.** 3) 16; 4) 115. **163.** 3) 75. **185.** 2; 3; 4. **186.** 1; 2. **197.** 3. **198.** 20 %. **199.** 60 кг, 20 кг. **200.** 1) 3,8; 2) коренів немає. **201.** a — від'ємне число, b — додатне число, $c = 0$. **227.** 2) 2^5; 3) 2^{2n}; 4) 2^{n+1}. **244.** 1) 36; 2) 125; −125. **247.** 5^{2001}. **248.** 1) 6; 2) 1; 3) 4 або 6; 4) 1, або 3, або 7, або 9. **249.** 1) 1; 2) 1; 3) 1 або 9. **250.** 1) *Вказівка*. Останньою цифрою степеня 17^8 є 1. 2) *Вказівка*. Останньою цифрою степеня 64^{64} є 6. 3) *Вказівка*. Останньою цифрою степеня $3^{4n} = 81^n$ є 1. **253.** 12 качок. **254.** 3,6 год. **255.** 9,6 км. **256.** 1) 2; 2) коренем рівняння є будь-яке число. **257.** *Вказівка*. Дане число можна подати у вигляді $1000a + a = 1001a$. **283.** 3) −43,2. **284.** 3) $-\frac{32}{27}$. **285.** 2) 24,5; 3) 30. **286.** 2) 1350; 3) 486. **287.** 600. **288.** 36 гусей. **300.** 600 г, 400 г. **301.** 300 варіантів. **311.** 3) 5; 4) коренів немає. **312.** 2) 6; 3) коренем рівняння є будь-яке число. **315.** 1) −45; 2) 24. **316.** 1) 11;

2) $\frac{2}{3}$. **331.** 5. **339.** -9 при $x = 0$. **340.** 4 при $y = 0$. **345.** *Вказівка*. Розгляньте суму даних многочленів. **347.** Менше на 4 %. **348.** 4 год. **349.** 144 дерева. **350.** 10 км. **361.** 1) -2; 2) -5; 3) $-0,5$; 4) коренем рівняння є будь-яке число; 5) коренів немає; 6) 4. **362.** 1) 2; 2) 0; 3) 6. **374.** 1) $7b^2$; 2) 0. **375.** 1) 45; 2) 0; 3) $\frac{7}{4}$; 4) 2,1; 5) 3; 6) $\frac{3}{20}$; 7) $\frac{7}{34}$; 8) $\frac{44}{9}$. **376.** 1) -1; 2) $-\frac{83}{4}$; 3) -4; 4) 10. **377.** $-\frac{3}{7}$. **378.** 8 см. **379.** 64 см. **380.** 36 км, 42 км, 30 км. **381.** 22 деталі, 34 деталі, 24 деталі. **382.** 1) $x^{n+5} - x^{n+1}$; 2) $x^{n+4} - x^{2n+2} + x^n$. **383.** 1) $5x^{n+1}$; 2) $x^{2n+2} - 7x$. **386.** 800 км^2, 360 км^2, 204,8 км^2. **387.** 210 сторінок. **389.** 90 км. **390.** 8 днів. **398.** 1) -7; 2) -2; 3) 1; 4) -1; 5) коренів немає. **399.** 1) 2; 2) $-\frac{2}{27}$; 3) 6; 4) коренем рівняння є будь-яке число. **405.** 6; 7; 12; 14. **406.** 8; 12; 18. **407.** 7; 8; 9; 10. **408.** 16; 17; 18. **409.** 15 см. **410.** 18 см, 12 см. **411.** 14 см, 12 см. **425.** 15 деталей, 11 деталей. **426.** 9 %. **427.** 1) 3; 2) 9. **429.** 60 років. **447.** 1) $-a(a + b)(2a + 3b)$; 2) $3m(m - 8)(3m - 16)$; 3) $(a + 5)(3a + 2)$; 4) $(4y - 1)(x - 3)$; 5) $(5m - n)^2(m + 8n)^2(4m - 9)$. **448.** 1) $(x - 6)(x + 4)$; 2) $(x^2 - 2)(2y - 7)$; 3) $(4a - 3b)(3a + 7b)$; 4) $(p - 9)^3(2p + 1)^3(3p - 8)$. **449.** 1) -7; 2) 2; $2\frac{2}{3}$; 3) 5; -40; 4) 7; 14. **450.** 1) -6; 9; 2) 10; -6; 3) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; 4) $1\frac{1}{3}$; 1. **451.** 7) $49a^2(1 + 2b)^2$; 8) $81c^{12}(c - 2)^4$. **452.** 5) $64x^2y^2(2x + 5y)^2$; 6) $32x^{10}(11x^2 - 14y^3)^5$. **457.** 1) 0; $\frac{3}{8}$; 2) 0; 0,4; 3) 0; $-0,2$; 4) 0; 3,6. **458.** 1) 0; 6; 2) 0; $\frac{1}{3}$. **459.** 1) $2a + 4$; 2) $6ab - 4b$; 3) $8ab^2 - 14b^3$. **460.** 1) $2a^2b^2$; 2) $2ab + 2b^2$. **463.** 1) $a^n(a + 1)$; 2) $b^{n-3}(b^3 - 1)$; 3) $c^{n-4}(c^6 + 1)$; 4) $d^n(d^n - 1)$; 5) $2^{n+1} \cdot 5$; 6) $3^{n+2}(3^n + 1)$. **464.** 1) $a^n(a^2 - 1)$; 2) $b^n(3b^2 - 2b + 1)$; 3) $2^{5n}(1 + 2^{3n+4})$. **465.** 2) 24; 3) 20. **466.** 2) -4; 3) -12.

467. 1) 1; 2) 0,8; 3) 5. **468.** 1) $a = 3$; 2) $a = -\frac{2}{3}$. **469.** 18. *Вказівка*. Нехай дане число $\overline{ab}$. Тоді $\overline{ab} = 10a + b = (a+1)\times$ $\times(b+1)$, звідси $9a = ab + 1$, $a(9 - b) = 1$. Звідси $a = 1$, $b = 8$. **471.** 20 кг. **472.** 28 банок. **474.** Ні. **482.** 1) 15; 2) 72; 3) 25. **483.** 1) 250; 2) −1. **486.** 1) $(a^n + 1)(a + 1)$; 2) $(b + 1)(b^{n+1} - 1)$; 3) $(y^{n+1} - 1)(3y^2 + 5)$. **487.** 1) $(x + 6)\times$ $\times(x + 2)$; 2) $(x - 4)(x - 1)$; 3) $(x - 1)(x + 8)$; 4) $(x + 1)\times$ $\times(x - 5)$. **488.** 1) $(x + 1)(x + 3)$; 2) $(x - 2)(x - 8)$; 3) $(x + 6)(x - 3)$; 4) $(x - 8)(x + 4)$. **489.** *Вказівка*. $n^3 +$ $+ 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n^2 + n + 2n + 2) = n(n(n +$ $+ 1) + 2(n + 1)) = n(n + 1)(n + 2)$. **490.** $(a + b + c)^2$. *Вказівка*. Подайте кожний з членів $2ab$, $2bc$ і $2ac$ даного многочлена у вигляді суми $ab + ab$, $bc + bc$, $ac + ac$ відповідно та застосуйте метод групування. **491.** *Вказівка*. $3^{n+2} -$ $- 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 =$ $= 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = 10(3^n - 2^{n-1})$. **492.** 2. *Вказівка*. $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2 = 2x^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 + y^4 + y^2 =$ $= 2x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2) + y^2$. **493.** 4 вівці. **494.** 6 год. **495.** 40 л, 10 л. **510.** 5) $16a^4 - 1$; 6) $c^{12} - 625$. **511.** 4) $a^8 - 1$. **512.** 3) $y^{2n+4} - x^{8n}$; 4) $a^{2n+2} - b^{2n-2}$. **513.** 3) $4x^2 - 3x + 93$; 4) b^2c^5. **514.** 1) $x^2 - 4x + 19$; 2) b^{12}. **515.** 1) −1; 2) коренів немає; 3) коренем рівняння є будь-яке число; 4) −25,6. **516.** 1) −40; 2) −3. **521.** 1) 4; 2) 25; 3) 9; 4) −1; 5) −1. **522.** 1) 1; 2) 256. **525.** 14 км/год, 42 км. **526.** 20 кг, 80 кг. **527.** 4 год. **528.** $7^5 = 16\,807$ жмень, 1,35 т. **529.** 1) $-1\frac{4}{25}$; 2) $6\frac{1}{6}$. **542.** 1) −150; 2) 12,8. **543.** −40. **547.** 1) $(a - b)(a +$ $+ b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$; 2) $(a^2 - 2)(a^2 + 2)(a^4 + 4)(a^8 + 16)$. **548.** 1) 4; $-\frac{2}{3}$; 2) −1; −7; 3) −10; $-2\frac{2}{3}$; 4) $-1\frac{2}{7}$; $-\frac{1}{23}$. **549.** 1) $\frac{2}{11}$; $\frac{10}{11}$; 2) −16; $-\frac{3}{8}$. **555.** 43 і 34. **557.** 1) $b = 2$; 2) $b = -2$; 3) $b \neq 2$ і $b \neq -2$. **559.** 8 км/год. **560.** 45 кг. **561.** $a = -3$. **562.** 1) $-\frac{5}{8}$; 2) коренем рівняння є будь-яке число. **563.** 1) $a > 0$; 2) $a \neq 0$; 3) a — будь-яке число. **585.** 5. **586.** 1) 9; 2) −0,6; 3) −5. **587.** 1) $-\frac{1}{11}$; 2) 7. **588.** 7 см. **589.** 26 см. **590.** 12; 13; 14. **591.** 19; 20; 21; 22. **602.** 1. **603.** 0 або 1. **607.** 7. **608.** 3. **611.** $a = 1$. **612.** $a = -\frac{1}{6}$. **615.** Нехай n — третє з даних чисел, тоді дані числа дорівнюють відповідно $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$, де $n > 2$. Доведіть, що сума квадратів цих чисел дорівнює $5(n^2 + 2)$. Щоб здобутий результат міг бути квадратом деякого натурального числа, значення виразу $n^2 + 2$ має бути кратним 5, тобто його останньою цифрою має бути цифра 0 або цифра 5. Оскільки останньою цифрою значення виразу n^2 може бути одна з цифр 0, 1, 4, 5, 6, 9, то значення виразу $n^2 + 2$ не може закінчуватися цифрою 0 або цифрою 5. **616.** 5000 т. **617.** 500 кг. **618.** Однакова. **621.** 2) Таких значень немає; 3) $x = -1$. **634.** 1) $(4a - b)^2$; 2) $(6x + 5y)^2$. **635.** 1) $(2m + 2n)^2$; 2) $(7x + 4y)^2$. **636.** 1) 0,0016; 2) 10 000. **637.** 1) 10 000; 2) 9. **640.** 2) $-\frac{7}{9}$. **641.** 2) $\frac{3}{5}$. **646.** 1) 1 при $x = 3$; 2) 16 при $x = -\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$ при $x = -\frac{1}{2}$. **648.** 1) −8 при $x = 2$; 2) −1 при $x = \frac{1}{11}$; 3) −7 при $x = -\frac{7}{6}$. **650.** 1) 100 при $x = -8$; 2) 11 при $x = \frac{3}{4}$. **651.** 1) 4 при $x = 14$; 2) −50 при $x = -\frac{5}{3}$. **654.** 6) *Вказівка.* $2a^2 + 2b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)$. **655.** 1) $(a^2 + 1 - a)(a^2 + 1 + a)$; 2) $(x - y)(x + y + 4)$; 3) $(ab - c - 3)(ab + c + 5)$; 4) $(2a + b - 2)(4a - b - 2)$. **656.** 1) $(a^2 + 4)^2 + 9a^2$; 2) $(x - 5)^2 + (y + 7)^2$; 3) $(x - 3y)^2 + (x - 3)^2$; 4) $(x - 2)^2 - (y + 1)^2$. **657.** 1) $x = -4$, $y = 5$; 2) $x = -6$, $y = 1$. **658.** 1) $x = -1$, $y = 0{,}5$; 2) таких значень не існує. **659.** 45. **660.** 8. **661.** −10. **662.** $24 = 12 + 12$. *Вказівка.* Нехай один з доданків дорівнює x, тоді другий дорівнює $24 - x$, а їх добуток: $x(24 - x) = 24x - x^2 = 12^2 - 12^2 + 2 \cdot 12x - x^2 = 144 - (12 - x)^2$. **663.** 5 см, 5 см. **664.** 4. **665.** 0. *Вказівка.* Дану в умові рівність подайте у вигляді $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = 0$. **666.** 100 км. **667.** 60 га, 40 га. **669.** 13. **670.** 420 днів. *Вказівка.* Щоб дізнатись, через скільки днів рибалки знову зберуться на озері разом, треба знайти НСК (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). **685.** 1) 9; 2) $25x - 64$; 3) $-6a^2 + 9a - 27$; 4) $a^{24} - 1$. **686.** 1) -124; 2) $-y^2 + 3y - 36$; 3) $a^6 - b^2$. **688.** 1) 0,5; 2) -1; 3) 8. **689.** 1) 6; 2) -5. **695.** *Вказівка.* Позначте дані числа $2n - 1$ і $2n + 1$. **696.** *Вказівка.* Ці числа можна подати у вигляді $3n + 1$ і $3n + 2$, де n — довільне натуральне число. **697.** 1. **698.** 8. **701.** 18 кг; 6 кг. **702.** 2. **705.** 4) $\frac{1}{3}$; 6) 0; $\frac{1}{6}$. **725.** 6) -2; -3; 3; 7) 5; 8) -1; 1. **726.** 5) -1; 1; 6) -5; 5; 4. **732.** 1) $(x - y + 4)(x + y - 2)$; 2) $(2a - 3b - 3)(2a + 3b + 1)$. **733.** 1) $(5x - y^2 + 4)(5x + y^2 - 10)$; 2) $4(3m - 2n + 3)(3m + 2n - 2)$. **734.** 4) $(2a - 5)(2a - 1)$; 5) $(3x - 7y)(3x - y)$; 6) $3(2m - n)(6m - 7n)$. **735.** 4) $(x + 3)(x - 2)$; 5) $(c + 3d)(c + 5d)$; 6) $(3x - 8y)(3x - 2y)$. **736.** 1) -40; 2) 74; 3) 84; 4) 632. **737.** 1) 54; 2) 48; 3) 1746. **739.** 1) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$; 2) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; 3) $(2x^2 - 4x + 1)(2x^2 + 4x + 1)$. *Вказівка.* $4x^4 - 12x^2 + 1 = (4x^4 + 4x^2 + 1) - 16x^2$; 4) $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$. *Вказівка.* $x^5 + x + 1 = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$; 5) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$; 6) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 2)$. **740.** 1) $(x^2 - x + 3)(x^2 + x + 3)$; 2) $(x^2 - 2x - 2)(x^2 + 2x - 2)$. **742.** 14, 18, 22. **743.** 13 км. **744.** 2) -2; 2; -18; 18; 3) -18; 2; 4) 4. **787.** 420 чоловік. **815.** 12, 22, 32. **817.** *Вказівка.* Додайте ліві і праві частини даних рівностей. **845.** 15 бджілок. **873.** $A\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. **874.** 1) $(-10; -27)$; 2) $(-14; 8)$. **875.** (3; 5). **879.** 1. **880.** 3. **881.** $k = 0,5$, $b = 4$. **882.** $k = \frac{1}{3}$, $b = -1$. **887.** 1) n; 2) k; 3) m; 4) p. **889.** $k = -1$. **890.** $b = 11$. **897.** 1) $y = x + 3$; 2) $y = -0,5x - 1$. **898.** 1) $y = -\frac{2}{3}x$; 2) $y = 2x - 4$. **900.** 1) -39; 2) -12. **901.** 1) $\frac{5}{8}$; 2) 1,4. **902.** *Вказівка.* Позначимо друге з цих чисел буквою n, тоді перше число дорівнюватиме $n - 1$, а третє — $n + 1$. Розкладіть на множники суму кубів першого і третього чисел. **904.** $a^2 - b^2$.

917. 2. **918.** 6. **919.** 3) (−3; 0); (3; 0); (0; −3); (0; 3); 4) (5; 0); (−5; 0); (0; −5). **934.** 1) (1; 1); 2) (1; 3); (6; 2); (11; 1). **937.** 3 способи. **938.** 9 задач з алгебри і 2 з геометрії, або 6 задач з алгебри і 4 з геометрії, або 3 задачі з алгебри і 6 з геометрії. **939.** 1) (0; 2); 2) (−1; 3); 3) (−0,5; −0,5); 4) розв'язків немає. **940.** 1) (5; −5); 2) розв'язків немає. **941.** (0; 0); (−1; 0); (1; 0); (0; −2). **942.** (0; 4); (0; −4); (5; 0); (−5; 0). **943.** 5 %. **944.** 20 яблук. **945.** 1) 6; 2) −5. **946.** 269,5 км. **948.** 1) 12; 2) $-\frac{16}{3}$. **986.** −12. **987.** −4. **988.** $a = -4$, $b = 2$. **991.** 1) d; 2) c; 3) b; 4) a. **994.** 1) $y = 0{,}5x + 2$; 2) $y = 0{,}6x - 3$. **995.** $x + y = 6$. **998.** 1 пара (3; 2). **1000.** 24 год. **1002.** 1) 5; 2) 3,5. **1003.** 2) $(x - 3y - 4)(x - 3y + 4)$; 4) $(c - b - 3)(c + b + 1)$. **1014.** 1) $a = 3$; $b = -2{,}5$; 2) $a = 4$; $b = -6$. **1015.** $a = 2$; $b = 5$. **1020.** При $a \neq 7$. **1021.** 1) 16; 2) −5. **1022.** 1) При $a \neq 14$; 2) при $a = -10$. **1025.** 1) (−2; 2); 2) (−2; 2); (1; 1); 3) немає розв'язків; 4) (1; −1); (3; 3). **1026.** 1) (1; 1); (−3; 3); 2) (2; 1); (−2; −1); 3) (2; 0); (−2; 0); (0; 2); (0; −2). **1027.** 3 кг. **1028.** 60 км/год. **1029.** 3, 5, 7, 9. *Вказівка.* Позначте найменше з цих чисел $2k - 3$, де k — довільне натуральне число, більше за 1. **1036.** 1) (6; 3); 2) (4; 2); 3) (1; 2); 4) (4; −3); 5) (−5; −7); 6) (1,2; −0,7). **1037.** 1) (−5; 20); 2) (−1; 3); 3) (−2; −1); 4) (−3; 4). **1038.** 1) (0; −6); 2) (8; 6); 3) (−5; −4); 4) (4; −3). **1039.** 1) (1; −1); 2) (−2; 0,5); 3) (14; 2). **1040.** 1) 14; 2) 0,25. **1041.** 7 левів. **1049.** 1) (8; 1); 2) (1,2; 0); 3) (−1; −2); 4) (7; −1); 5) (4; −1); 6) (6; −2); 7) (2; −2); 8) (5; 6). **1050.** 1) (1; 2); 2) (3; −1); 3) (4; 2); 4) (6; 5); 5) (1,5; 0,5); 6) (1; −1). **1051.** 1) (−3; −4); 2) (1; −0,5); 3) $\left(5\frac{3}{4}; -\frac{3}{8}\right)$; 4) (2; −2). **1052.** 1) (−0,6; −3,2); 2) (1; 3). **1053.** 1) (1; 1); 2) (−3; 3). **1054.** 1) (−20; −0,5); 2) (−2; 3). **1055.** 1) $\left(-\frac{1}{7}; 2\frac{3}{7}\right)$; 2) (−10; 5). **1056.** 1) (−5; −6); 2) (1; −6). **1057.** $a = 5{,}6$, $b = 0{,}8$. **1058.** $m = 1{,}5$, $n = 3$. **1059.** 1) $y = -0{,}2x + 1{,}4$; 2) $y = -x + 1$. **1060.** 1) $y = -0{,}5x + 3{,}5$; 2) $y = 3x + 3$. **1062.** 1) (3; −1,6); 2) розв'язків немає.

1065. $-0{,}8$. **1066.** 2. **1067.** 1) $(3; -3)$; 2) $(1{,}5; 0{,}75)$; 3) $\left(4; -\frac{2}{3}\right)$; 4) $(-5; 6)$; 5) $(-2{,}4; -4)$. **1068.** 1) $(10; 5)$; 2) $(0{,}5; 1{,}5)$; 3) $(-8; -28)$. **1069.** 1) $(0{,}4; 5)$; 2) $(1; -1)$. **1070.** 1) $\left(\frac{1}{20}; \frac{1}{2}\right)$; 2) $(2; -2)$. **1071.** 1) 6; 2) $-2{,}5$. **1072.** 9 задач. **1073.** 2 год. **1075.** 96 дерев. **1080.** 63 аршина синього сукна і 75 аршинів чорного. **1081.** 7 чотиримісних і 3 шестимісних човни. **1082.** 9 кг, 7 кг. **1083.** 8 га, 6 га. **1084.** 9 деталей, 6 деталей. **1085.** 4 ц, 5 ц. **1086.** 14 грн., 12 грн. **1087.** 3 грн., 2 грн. **1088.** 58 км/год, 70 км/год. **1089.** 60 км/год, 40 км/год. **1090.** 4 км/год, 16 км/год. **1091.** 84 км/год, 79 км/год. **1092.** 80 л, 60 л. **1093.** 28 пасажирів, 36 пасажирів. **1094.** 18 км/год, 2 км/год. **1095.** 25 км/год, 2,5 км/год. **1096.** 5 мішків, 7 мішків. **1097.** 40 рупій, 170 рупій. **1098.** 42 роки, 15 років. **1099.** 60 років, 12 років. **1100.** 45 костюмів, 30 костюмів. **1101.** 18 грн., 42 грн. **1102.** 3 грн., 4 грн. **1103.** 20 грн., 8 грн. **1104.** 800 грн., 600 грн. **1105.** 900 грн., 300 грн. **1106.** $a = 120$, $b = 100$. **1107.** 12; 15. **1108.** 100 кг, 200 кг. **1109.** 20 кг, 30 кг. **1110.** 87. **1111.** 6 см, 8 см. **1112.** 5 см, 7 см. **1113.** 3 км/год, 12 км/год. **1114.** 5 км/год, 4 км/год. **1115.** 12 км/год. **1116.** 60 т. **1117.** 50 км/год, 75 км/год, 90 км/год, 450 км. **1118.** 48 км/год, 60 км/год. **1119.** 48 км/год, 16 км/год. **1120.** 320 г, 480 г. **1121.** 63 кг, 15 кг. **1122.** 72. **1123.** 39. **1124.** 24 л, 40 л. **1125.** 28 л, 42 л. **1126.** 1) Такого числа не існує; 2) будь-яке двоцифрове число, у якого цифра десятків на 2 більша за цифру одиниць, на 18 більше за число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. **1127.** 8 косарів. **1133.** 2) $(b^3 - 2b^2 + 3)(b^3 + 2b^2 - 3)$; 4) $(3x - 7)(3x + 5)$. **1134.** $a^2 = c + 2b$. **1135.** 7,5. **1137.** 8. **1154.** Не існують. *Вказівка*. Знайдіть суму даних многочленів. **1156.** 1) $1\frac{6}{7}$; 2) $\frac{6}{11}$; 3) $-0{,}2$; 4) 5; 5) 3; 6) $\frac{7}{4}$. **1157.** 1) $-0{,}4$; 2) 40; 3) розв'язків немає; 4) коренем рівняння є будь-яке число. **1159.** 3. **1160.** -4. **1162.** 1) 20; 2) 17. **1163.** 1) 2,7; 2) 0,4;

3) 23; 4) 51,2. **1166.** -4. **1167.** $\frac{2}{3}$. **1169.** 1) 16. *Вказівка.* Подайте другий доданок у вигляді суми двох доданків: $1{,}66 \cdot 4{,}68 = 1{,}66 \cdot 2{,}34 \cdot 2 = 1{,}66 \cdot 2{,}34 + 1{,}66 \cdot 2{,}34$; 2) 0,16. **1170.** При $a = c$ або $b = d$. **1173.** 1) 0,5; 2) 0. **1176.** 1) 1; 2) 4. **1186.** 1) 2; 2) 0,5; 3) $-\frac{1}{13}$. **1192.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{5}$. **1198.** 1) 9; 2) 0,064; 3) 1. **1204.** *Вказівка.* $n(n+2)(n+4)(n+6)+16=(n^2+6n)(n^2+6n+8)+16=(n^2+6n+4-4)(n^2+6n+4+4)+16=(n^2+6n+4)^2-4^2+16=(n^2+6n+4)^2$. **1205.** *Вказівка.* Нехай n — дане натуральне число. Треба розглянути два випадки: $n = 3k + 1$ або $n = 3k + 2$, де k — довільне натуральне число. **1206.** *Вказівка.* Розгляньте 4 можливі випадки: 1) $n = 5k + 1$; 2) $n = 5k + 2$; 3) $n = 5k + 3$; 4) $n = 5k + 4$, де k — довільне натуральне число. **1207.** Можна. *Вказівка.* Розгляньте випадки, коли $n = 3k$, $n = 3k + 1$ і $n = 3k + 2$, де k — довільне натуральне число. **1215.** -4. **1222.** 1) $(-2; 1)$; 2) $(3; -2)$; 3) $(1; -1)$; 4) $(4; 2)$. **1223.** 2. **1224.** -1. **1225.** 32 учні. **1226.** 15 м/с, 10 м/с. **1227.** 64 %. **1228.** 120 г, 60 г. **1229.** 8 л, 2 л. **1230.** 30 га, 40 га. **1231.** 20 га, 25 га. **1232.** 12 кг. **1233.** 29. **1234.** 91. *Вказівка.* Якщо дане число дорівнює x, то отримане число дорівнює $10x + 1000 + 1 = 10x + 1001$ або $21x$. **1235.** 16; 12.

Відповіді до завдань у тестовій формі «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

Номер завдання	Номер задачі											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	В	А	Б	В	В	Г	Б	В	Б	В	Б	Г
2	Г	В	Г	Г	В	В	Б	В	Б	А	Г	А
3	Г	Г	А	Б	Б	В	А	Б	В	А	А	В
4	В	Б	В	Б	В	Б	Б	Г	В	Б	А	Г
5	В	Г	Г	Б	Б	Б	А	В	А	В	Г	Б
6	А	Г	Б	Б	В	Б	А	А	В	В	Б	А
7	В	Г	А	Б	В	Г	А	А	В	А	Б	Б

Предметний покажчик

Орієнтовне тематичне поурочне планування

№ з/п	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин
1	2	3
1	Вступ. (Вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Числове значення виразу)	2
І. Лінійне рівняння з однією змінною (9 год)		
2	Лінійне рівняння з однією змінною	4
3	Розв'язування задач за допомогою рівнянь	4
4	Тематичне оцінювання № 1	1
ІІ. Цілі вирази (45 год)		
5	Тотожно рівні вирази. Тотожності	2
6	Степінь з натуральним показником	2
7	Властивості степеня з натуральним показником	3
8	Одночлени	2
9	Многочлени	1
10	Додавання і віднімання многочленів	3
11	Тематичне оцінювання № 2	1
12	Множення одночлена на многочлен	3
13	Множення многочлена на многочлен	3
14	Розкладання многочлена на множники. Винесення спільного множника за дужки	3
15	Метод групування	2
16	Тематичне оцінювання № 3	1
17	Добуток різниці і суми двох виразів	2
18	Різниця квадратів двох виразів	2
19	Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів	3
20	Перетворення многочлена у квадрат суми або різниці двох виразів	3
21	Тематичне оцінювання № 4	1
22	Сума і різниця кубів двох виразів	2

Продовж. табл.

1	2	3
23	Застосування різних способів розкладання многочлена на множники	5
24	Тематичне оцінювання № 5	1
	III. Функції (10 год)	
25	Зв'язки між величинами. Функція	2
26	Способи задання функції	2
27	Графік функції	2
28	Лінійна функція, її графік і властивості	3
29	Тематичне оцінювання № 6	1
	IV. Системи лінійних рівнянь з двома змінними (14 год)	
30	Рівняння з двома змінними	2
31	Лінійне рівняння з двома змінними та його графік	2
32	Системи рівнянь з двома змінними. Графічний метод розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними	2
33	Розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки	2
34	Розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання	2
35	Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь	3
36	Тематичне оцінювання № 7	1
	V. Повторення і систематизація навчального матеріалу (6 год)	

Зміст

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу
Для середнього шкільного віку

Відповідальний за випуск *В. Л. Маркіанов*
Редактор *М. В. Москаленко*
Художники *П. М. Репринцев, О. С. Юхтман*
Художній редактор *С. Е. Кулинич*
Комп'ютерна верстка *І. Л. Маркіанової*
Коректор *І. Л. Безсонова*

Підписано до друку 03.06.2007. Формат 60×90/16. Гарнітура шкіл
Папір офсетний. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 18,0.

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001

ТОВ ТО «Гімназія»
Україна, 61103, м. Харків, вул. Дерев'янка, 16а
Тел. (057) 758-83-93, 719-46-80

Віддруковано з готових позитивів
у друкарні ПП «Модем», м. Харків, вул. Дерев'янка, 16а
Тел. (057) 758-15-80, 758-15-90