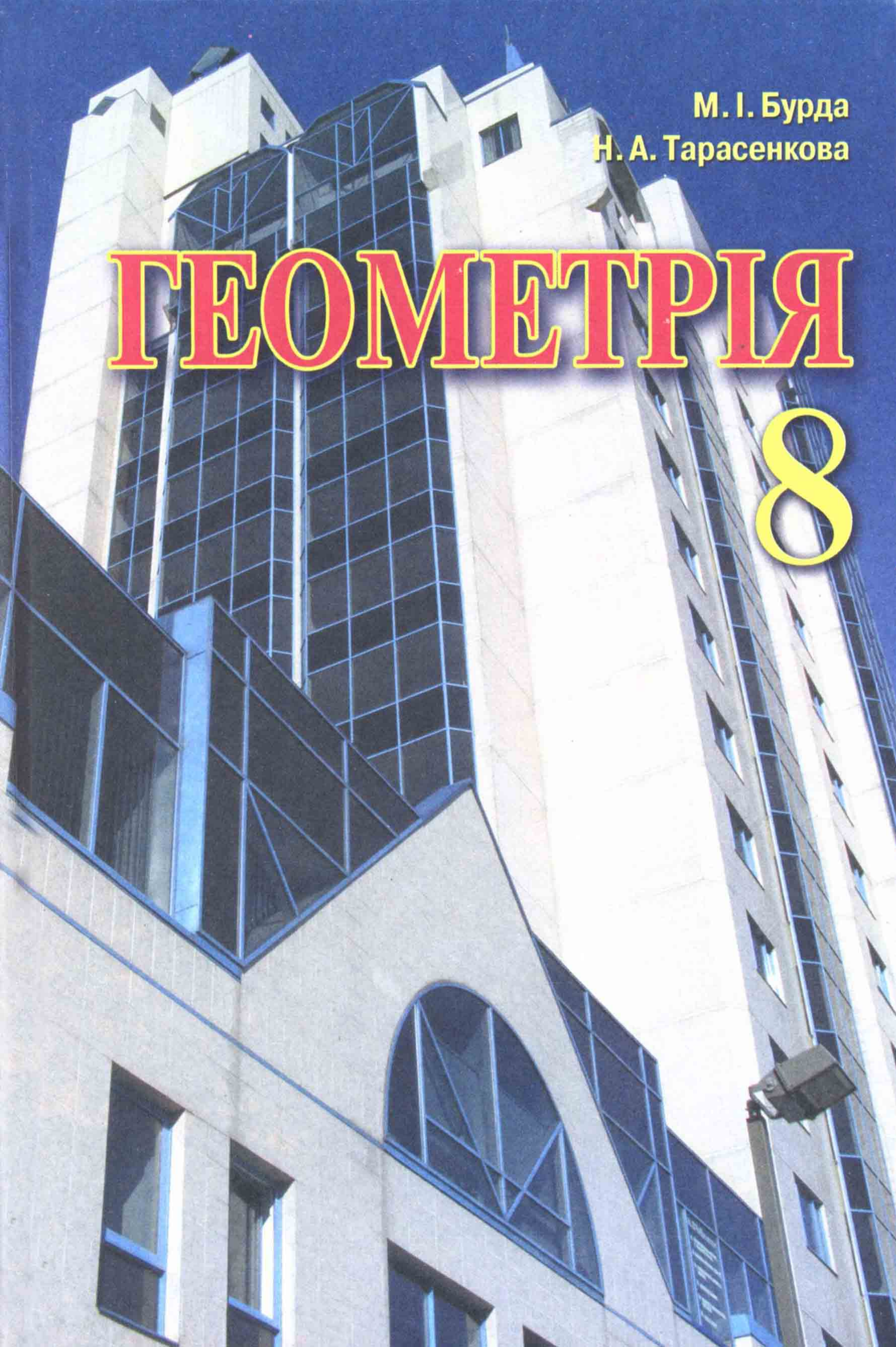
М. І. Бурда
Н. А. Тарасенкова

ГЕОМЕТРІЯ

8



ББК 22.151я721
Б91

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ від 17 березня 2008 р., № 179)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Відповідальні від Міністерства освіти і науки України за підготовку до видання підручника: **Прокопенко Н. С.** — головний спеціаліст; **Потапова Ж. В.** — методист вищої категорії.

ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ПІДРУЧНИКА

Юрій КУЗНЕЦОВ – керівник проекту,
розробник концепцій: дизайну, художнього оформлення;

Михайло БУРДА, Ніна ТАРАСЕНКОВА – автори тексту і методичного апарату;

Олег КОСТЕНКО – координатор проекту;

Олена ПОПОВИЧ – редактор-організатор;

Андрій ВІКСЕНКО – макет, художнє оформлення;

Валентина МАКСИМОВСЬКА – організатор виробничого процесу;

Галина КУЗНЄЦОВА – економічний супровід проекту;

Роман КОСТЕНКО – маркетингові дослідження підручника;

Андрій КУЗНЕЦОВ – моніторинг апробації підручника

ISBN 978-966-7090-59-3

ЗМІСТ

Дорогі учні!

У 7 класі ви ознайомилися з властивостями суміжних і вертикальних кутів, паралельних та перпендикулярних прямих, трикутників, з властивостями елементів кола; навчилися застосовувати ознаки рівності трикутників до розв'язування задач та розв'язувати задачі на побудову.

Тепер ви розширите і поглибите свої знання з геометрії. Дізнаєтесь про властивості й ознаки чотирикутників та подібних трикутників, навчитесь знаходити площі трикутників і чотирикутників, спираючись на властивості площі. Ознайомитесь з новими способами обчислення сторін і кутів прямокутних трикутників та виробите вміння застосовувати ці способи на практиці.

Як успішно вивчати геометрію за цим підручником? Весь матеріал поділено на чотири розділи, а розділи – на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, обведений рамкою. Це найважливіші означення і властивості геометричних фігур. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати і вміти застосовувати під час розв'язування задач. Інші важливі відомості надруковано **жирним** шрифтом. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Згадайте головне», які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання і тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Ознайомтеся з порадами до розв'язування задач, із розв'язаною типовою задачею.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати геометрію далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння і наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Розв'язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити свої знання.

У підручнику використовуються спеціальні позначки (піктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

Прочитайте	Як записати
Поміркуйте	Як діяти
Запам'ятайте	Типова задача

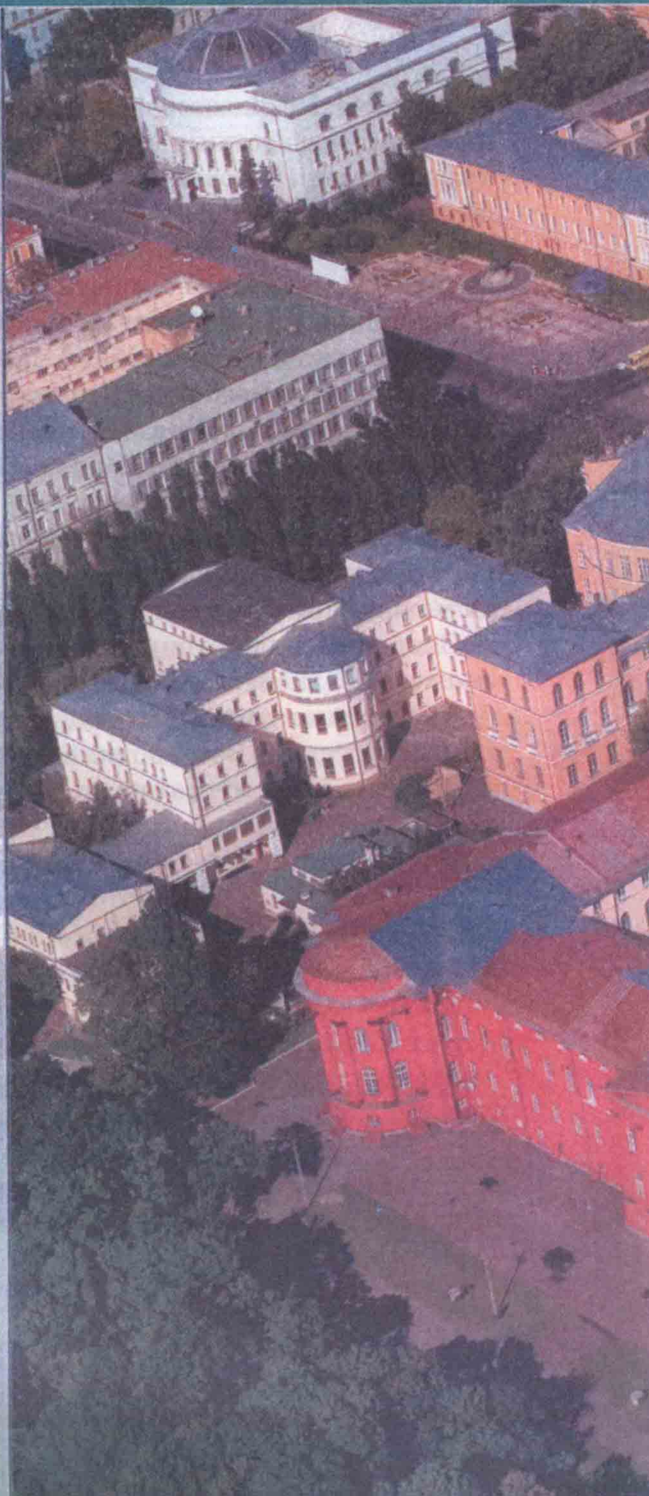
Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового і задоволення від навчання!

РОЗДІЛ 1

ЧОТИРИКУТНИКИ

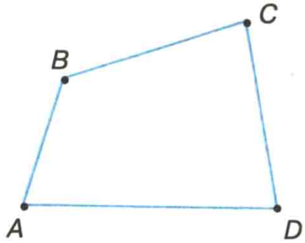
У розділі дізнаєтесь:

- про чотирикутник, його елементи та класифікацію чотирикутників;
- які властивості сторін і кутів окремих видів чотирикутників: паралелограма, прямокутника, ромба, квадрата, трапеції;
- як розпізнавати ці фігури та будувати їх креслярськими інструментами;
- що таке центральні та вписані кути у колі, яка їх градусна міра;
- які властивості й ознаки чотирикутників, вписаних у коло та описаних навколо кола;
- як застосовувати властивості та ознаки чотирикутників на практиці та під час розв'язування задач



§1. ЧОТИРИКУТНИК ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

Позначимо чотири точки, наприклад A, B, C, D, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Послідовно сполучимо їх відрізками AB, BC, CD, DA, що не перетинаються. Дістали *чотирикутник* $ABCD$ (мал. 1).



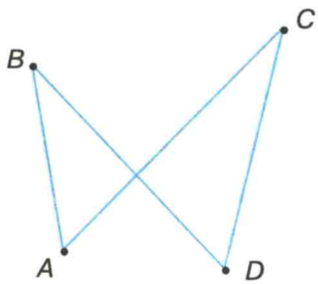
Мал. 1

Точки A, B, C, D – *вершини* чотирикутника, відрізки AB, BC, CD, DA – його *сторони*. Кути DAB, ABC, BCD, CDA – це *кути* чотирикутника. Їх позначають і однією буквою $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$.

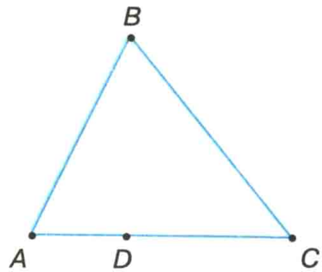
Вершини, сторони і кути чотирикутника називають його *елементами*.

? Чому фігури, зображені на малюнках 2, 3, не є чотирикутниками?

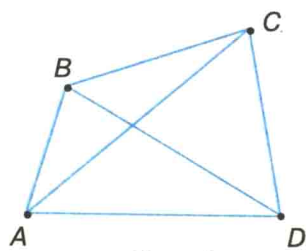
У фігури на малюнку 2 відрізки AC і BD перетинаються, а у фігури на малюнку 3 точки A, D, C лежать на одній прямій.



Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4

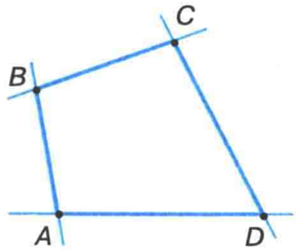
Чотирикутник позначають, послідовно записуючи його вершини, починаючи з будь-якої. Наприклад, чотирикутник на малюнку 4 можна позначити так: $ABCD$, або $BCDA$, або $CDAB$ і т. д. Але для цього чотирикутника запис, наприклад, $ADBC$ чи $CDBA$ – неправильний.

Дві вершини, два кути або дві сторони чотирикутника можуть бути або *сусідніми*, або *протилежними*. Наприклад, у чотирикутника $ABCD$ (мал. 4) вершини A і D, $\angle A$ і $\angle D$, сторони AD і AB – сусідні, а вершини A і C, $\angle A$ і $\angle C$, сторони AD і BC – протилежні.

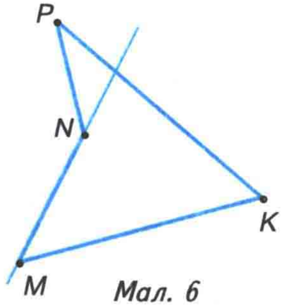
Відрізки, що сполучають протилежні вершини чотирикутника, називаються його *діагоналями*. На малюнку 4 відрізки AC і BD – діагоналі чотирикутника $ABCD$.

Чотирикутники бувають *опуклі* і *неопуклі*.

Якщо чотирикутник лежить з одного боку від кожної прямої, яка проходить через дві його сусідні вершини, то він опуклий. На малюнку 5 чотирикутник опуклий, а на малюнку 6 – неопуклий, бо він не лежить з одного боку від прямої, що проходить через вершини M і N.



Мал. 5



Мал. 6

Ми вивчатимемо лише опуклі чотирикутники.

Суму довжин усіх сторін чотирикутника називають його *периметром*. Периметр позначають буквою P.

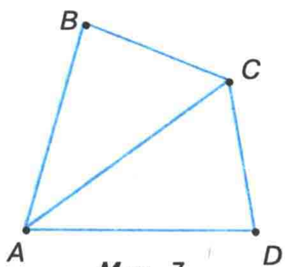
Те, що периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює 40 см, можна записати так: $P_{ABCD} = 40$ см.

Задача. Доведіть, що кожна сторона чотирикутника менша від суми трьох інших його сторін.

Розв'язання. Діагональ AC чотирикутника $ABCD$ розбиває його на два трикутники ABC і ADC (мал. 7). У ΔABC $AC < AB + BC$, у ΔADC $AD < AC + CD$ (за нерівністю трикутників).

Тоді $AD < AC + CD < AB + BC + CD$.

Так само $AB < BC + CD + AD$, $BC < CD + AD + AB$, $CD < AD + AB + BC$.



Мал. 7

Чи може чотирикутник мати такі сторони: 1 см, 2 см, 3 см, 6 см? Не може, бо найбільша сторона дорівнює сумі трьох інших.

Щоб установити, чи можна з чотирьох відрізків a, b, c, d утворити чотирикутник, перевірте, чи є найдовший з чотирьох відрізків меншим від суми трьох інших.

Накресліть довільний чотирикутник і виміряйте транспортиром його кути. Чому дорівнює їх сума?

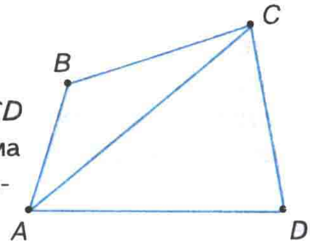
Теорема (про суму кутів чотирикутника).
Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.

Дано: чотирикутник $ABCD$ (мал. 8).

Довести: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$.

Доведення. Діагональ AC чотирикутника $ABCD$ розбиває його на два трикутники ABC і ACD. Сума кутів чотирикутника дорівнює сумі усіх кутів цих трикутників, тобто

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$.

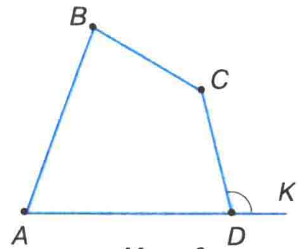


Мал. 8

? Чи може чотирикутник мати всі кути гострі? Не може, бо тоді сума цих кутів була б меншою від 360°.

Кут, суміжний з кутом чотирикутника, називають *зовнішнім кутом* чотирикутника.

На малюнку 9 $\angle CDK$ – зовнішній кут чотирикутника при вершині D.



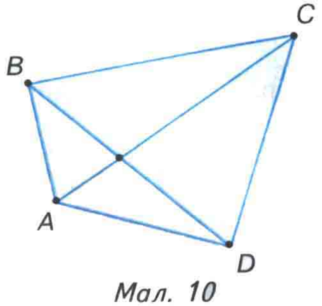
Мал. 9

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

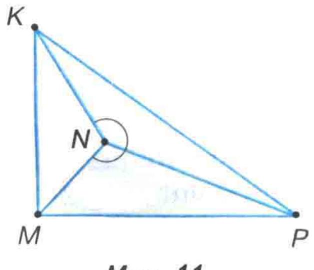
1. У вас може виникнути запитання: *Які відмінні властивості мають опуклі і неопуклі чотирикутники?*
Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ (мал. 10) перетинаються і кожна з них розбиває його на два трикутники. А діагоналі неопуклого чотирикутника $MNKP$ (мал. 11) не перетинаються і лише одна з них розбиває його на два трикутники. Кожний кут опуклого чотирикутника менший від 180°. Якщо чотирикутник неопуклий, то один з його кутів більший за 180°.
Поняття «зовнішній кут» стосується лише опуклих чотирикутників. Подивіться на малюнок 11. У неопуклому чотирикутнику $MNKP$ кут N більший за 180°. А поняття зовнішнього кута на кути, більші за 180°, не поширюється, бо за означенням – це кут, суміжний з кутом чотирикутника.

2. На відміну від трикутника, чотирикутник – фігура нежорстка. Якщо взяти чотири планки і з'єднати їх за допомогою шарнірів, то форму одержаного чотирикутника можна змінювати (мал. 12).

3. Термін «діагональ» походить від грецького слова *diagonios*, що означає «той, що йде від кута до кута». Цей термін став загальноприйнятим лише у XVIII ст.



Мал. 10



Мал. 11

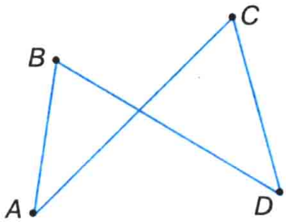

Мал. 12

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

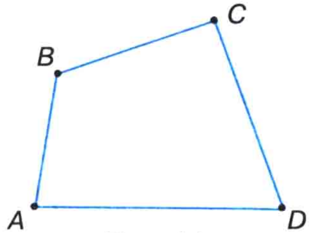
1. Що таке чотирикутник?
2. Які вершини чотирикутника називають сусідніми? Протилежними?
3. Які сторони чотирикутника називають сусідніми? Протилежними?
4. Що таке діагональ чотирикутника?
5. Як позначають чотирикутник?
6. Що таке периметр чотирикутника?
7. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів чотирикутника.
8. Що таке зовнішній кут чотирикутника?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

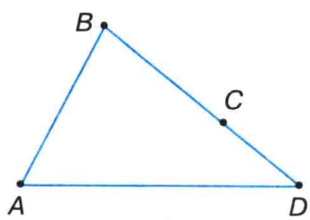
1'. Яка з фігур, зображених на малюнках 13 — 15, є чотирикутником *ABCD*?



Мал. 13



Мал. 14



Мал. 15

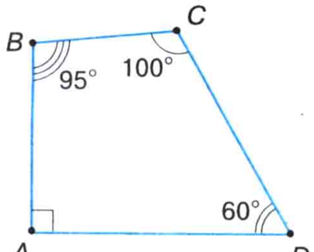
2'. Накресліть довільний чотирикутник *MNKP* та проведіть його діагоналі. Назвіть:

1) протилежні сторони, вершини і кути;
2) сусідні сторони, вершини і кути;
3) діагоналі.

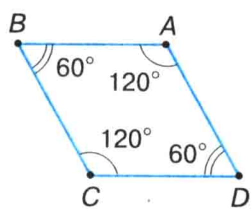
3'. Знайдіть периметр чотирикутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 1 см, 3 см, 4 см, 6 см; 2) 5 см, 7 см, 9 см, 10 см;
3) 12 мм, 10 мм, 8 мм, 4 мм.

4'. Чи правильно вказано малюнках 16, 17 градусну міру кутів чотирикутника *ABCD*? Відповідь поясніть.

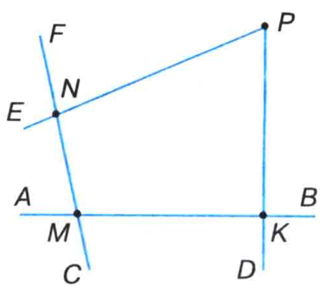
5'. Назвіть зображені на малюнку 18 зовнішні кути чотирикутника *MNPK* при вершині: 1) *N*; 2) *M*; 3) *K*.



Мал. 16



Мал. 17



Мал. 18

6°. a, b, c, d — сторони чотирикутника, P — його периметр. Заповніть таблицю 1.

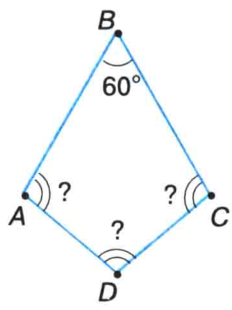
Таблиця 1

a	8 см	10 см	5 см	23 см	
b	12 см	25 см	13 см		16 см
c	16 см	30 см		30 см	20 см
d	18 см		17 см	35 см	24 см
P		90 см	60 см	115 см	74 см

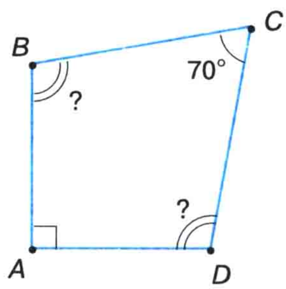
7°. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 140 см, а одна з його сторін в n разів менша від кожної з інших, причому:
1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 9$.

8°. Чи може чотирикутник мати такі сторони:
1) 1 см, 2 см, 3 см, 4 см; 2) 2 см, 3 см, 5 см, 10 см;
3) 18 см, 6 см, 5 см, 6 см?

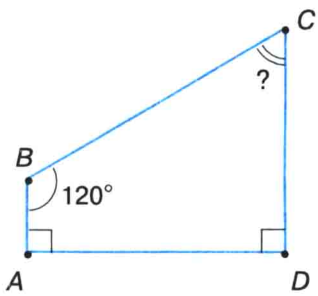
9°. За даними, наведеними на малюнках 19 — 21, визначте невідомі кути чотирикутника $ABCD$.



Мал. 19



Мал. 20



Мал. 21

10°. Знайдіть невідомий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють:
1) 60°, 100°, 50°; 2) 120°, 80°, 100°; 3) 70°, 130°, 90°.

11°. Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати:
1) 55°, 75°, 100°, 80°; 2) 160°, 95°, 45°, 60°; 3) 145°, 85°, 70°, 65°?

12°. За даними таблиці 2 знайдіть кути чотирикутника $ABCD$.

Таблиця 2

$\angle A$	$n°$	$n° - 30°$	$n° + 10°$	$n°$
$\angle B$	$2n°$	$n° - 20°$	$n° + 20°$	$2n°$
$\angle C$	$3n°$	$n° - 10°$	$n° + 30°$	$n°$
$\angle D$	$4n°$	$n°$	$n°$	$5n°$

13°. Чи можуть усі кути чотирикутника бути тупими? Поясніть відповідь.

14°. Усі кути чотирикутника рівні. Знайдіть їх.

15°. Якщо чотирикутник має два прямих кути, то чому дорівнює сума решти кутів?

16°. **Три кути чотирикутника прямі. Доведіть, що і четвертий його кут прямий.**

17°. Знайдіть зовнішній кут при вершині C чотирикутника $ABCD$, якщо:
1) $\angle C = 75°$;
2) $\angle A = \angle B = \angle D = 90°$;
3) $\angle B = \angle D = 110°$, $\angle A = 60°$.

18. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 66 см, одна сторона більша за другу на 8 см і на стільки ж менша за третю, а четверта сторона — в три рази більша за другу.

19. Одна зі сторін чотирикутника дорівнює 9 см, друга сторона у три рази більша за першу, а третя — на 8 см менша від другої і на 10 см більша за четверту. Знайдіть периметр чотирикутника.

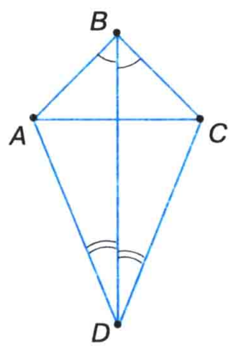
20. Три сторони чотирикутника дорівнюють 10 см, 15 см, 20 см. Чи може периметр чотирикутника дорівнювати:
1) 90 см; 2) 72 см; 3) 115 см?

21. Доведіть, що кожна діагональ чотирикутника менша від його півпериметра.

22. Доведіть, що сума діагоналей чотирикутника менша від його периметра.

23. У чотирикутнику $ABCD$ діагональ BD ділить кути B і D навпіл (мал. 22). Доведіть, що $AB = BC$ і $CD = AD$.

24. Якщо в чотирикутника $ABCD$ сторони $AB = BC$ і $CD = DA$, то діагоналі AC і BD перпендикулярні (мал. 22). Доведіть.



Мал. 22

25. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам:
1) 1, 2, 3, 4; 2) 1, 2, 4, 5; 3) 4, 6, 12, 14.

26. Якою в чотирикутника може бути найбільша кількість кутів:
1) тупих; 2) прямих; 3) гострих?

27. Чи можна накреслити чотирикутник, у якого:
1) три кути прямі, а четвертий — тупий;
2) один з кутів дорівнює сумі трьох інших?

28. Сума двох кутів чотирикутника, прилеглих до однієї з його сторін, дорівнює 180°. Знайдіть кут між бісектрисами цих кутів.

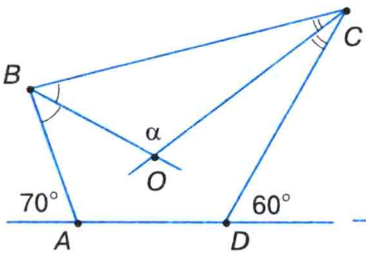
29. Знайдіть зовнішні кути чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють:
1) 38°, 158°, 44°; 2) 50°, 150°, 65°; 3) 49°, 145°, 91°.

30. **Доведіть, що сума зовнішніх кутів чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.**

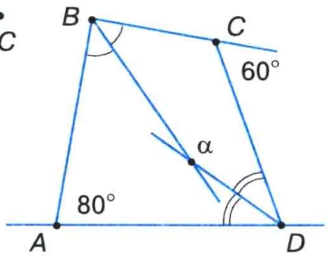
31. Чи існує чотирикутник, зовнішні кути якого дорівнюють:
1) 120°, 80°, 59°, 101°; 2) 49°, 98°, 68°, 125°;
3) 100°, 55°, 160°, 45°?

32. **Знайдіть залежність між сумою кутів чотирикутника і сумою його зовнішніх кутів.**

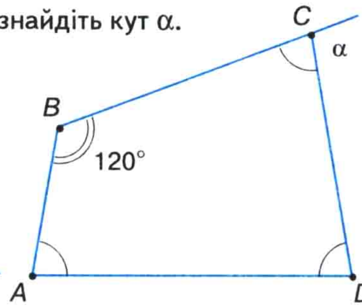
33. За даними, наведеними на малюнках 23 — 25, знайдіть кут α.



Мал. 23



Мал. 24



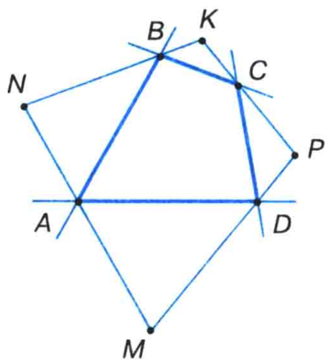
Мал. 25

34*. Чотирикутник розбито діагоналлю на два трикутники, периметри яких 30 см і 40 см. Знайдіть довжину діагоналі, якщо периметр чотирикутника дорівнює 50 см.

35*. Доведіть, що сума двох протилежних сторін чотирикутника менша від суми його діагоналей.

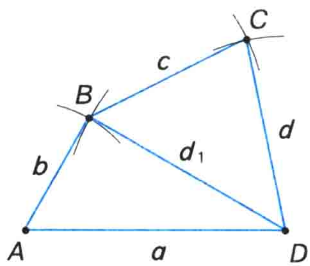
36*. У чотирикутнику *ABCD* бісектриси кутів *A* і *B* перетинаються в точці *M*, а бісектриси кутів *C* і *D* — в точці *N*. Доведіть, що сума кутів *AMB* і *CND* дорівнює 180°.

37*. Бісектриси зовнішніх кутів чотирикутника *ABCD*, перетинаючись, утворюють чотирикутник *MNKP* (мал. 26). Доведіть, що сума протилежних кутів чотирикутника *MNKP* дорівнює 180°.



Мал. 26

38*. На малюнку 27 побудовано чотирикутник *ABCD* за чотирма його сторонами *a*, *b*, *c*, *d* і діагоналлю d_1. Складіть план побудови.



Мал. 27

Щоб побудувати чотирикутник, побудуйте два допоміжних трикутники, з яких складається чотирикутник.

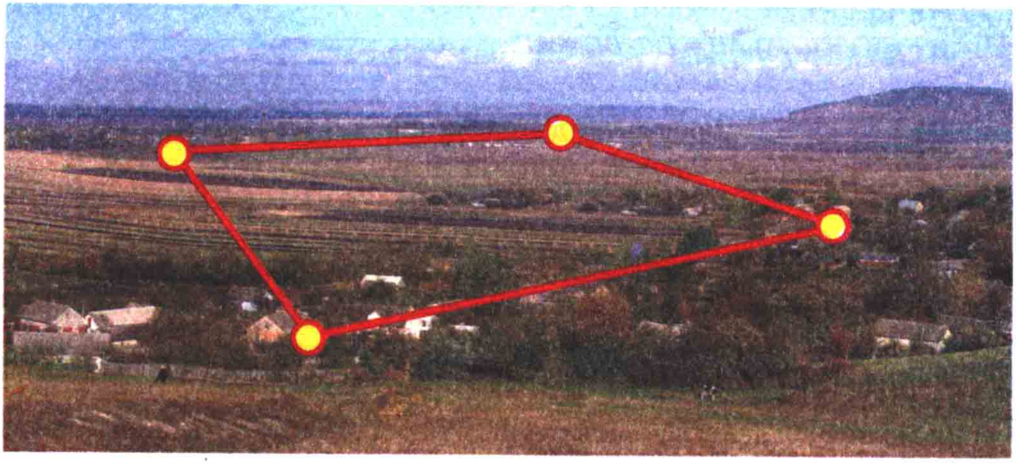
Наприклад (мал. 27), спочатку побудуйте ΔABD, потім — ΔBCD. Для побудови ΔABD треба знати три його елементи, а для побудови ΔBCD — лише два, бо сторона *BD* уже побудована.

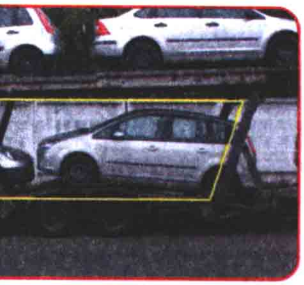
39*. Побудуйте чотирикутник за чотирма його сторонами *a*, *b*, *c*, *d* і кутом α.

40*. Побудуйте чотирикутник за його сторонами *a*, *b*, *c* і діагоналями d_1 і d_2.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

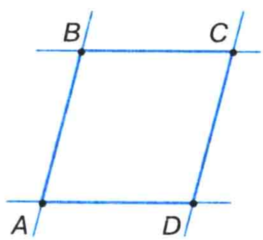
41*. Чотири населених пункти розташовані у вершинах чотирикутника. У якому місці потрібно побудувати завод, щоб сума відстаней від нього до всіх чотирьох даних пунктів була найменшою?





§2. ПАРАЛЕЛОГРАМ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Якщо пару паралельних прямих перетнемо другою парою паралельних прямих, то дістанемо чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 28) $AD \parallel BC$ і $AB \parallel DC$.

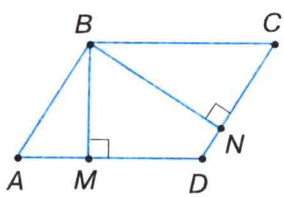


Мал. 28

Чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні, називається ***паралелограмом***.

Висотою паралелограма називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї сторони до паралельної їй сторони (або до її продовження).

На малюнку 29 відрізки BM і BN – висоти паралелограма $ABCD$.

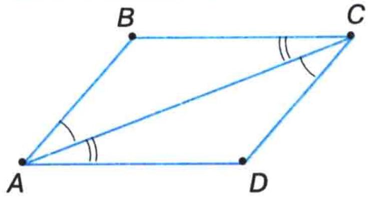


Мал. 29

Теорема (властивість сторін і кутів паралелограма).
У паралелограма: 1) протилежні сторони рівні;
2) протилежні кути рівні.

Дано: $ABCD$ — паралелограм (мал. 30).

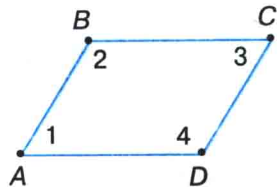
Довести: 1) $AB = DC$, $BC = AD$;
2) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.


Мал. 30

Доведення. Проведемо діагональ AC. $\Delta ABC = \Delta CDA$ за стороною і прилеглими до неї кутами. У них AC — спільна сторона, $\angle BCA = \angle DAC$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AD та січній AC, $\angle BAC = \angle DCA$ також як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і DC та січній AC. З рівності трикутників ABC і CDA випливає: 1) $AB = DC$, $BC = AD$; 2) $\angle B = \angle D$.
Кути A і C паралелограма рівні як суми рівних кутів.

? Чи може паралелограм мати лише один гострий кут? Не може, бо за доведеною теоремою таких кутів два.

Задача. Сума кутів, прилеглих до однієї сторони паралелограма, дорівнює 180°. Доведіть.


Мал. 31

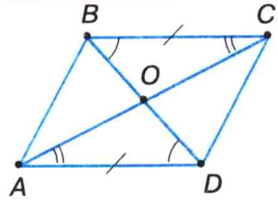
Розв'язання. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (мал. 31) за властивістю внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих BC і AD та січній AB.

Так само $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ ($AB \parallel CD$, BC — січна),
$\angle 3 + \angle 4 = 180°$ ($BC \parallel AD$, CD — січна),
$\angle 1 + \angle 4 = 180°$ ($AB \parallel CD$, AD — січна).

Теорема (властивість діагоналей паралелограма).
Діагоналі паралелограма діляться точкою їх перетину навпіл.

Дано: $ABCD$ — паралелограм (мал. 32),
AC і BD — діагоналі,
O — точка перетину діагоналей.

Довести: $AO = OC$, $BO = OD$.

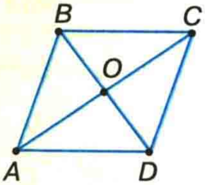

Мал. 32

Доведення. $\Delta AOD = \Delta COB$ за стороною і прилеглими до неї кутами. У них $BC = AD$ як протилежні сторони паралелограма, $\angle CBO = \angle ADO$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AD та січній BD, $\angle BCO = \angle DAO$ ($BC \parallel AD$, AC — січна). З рівності трикутників AOD і COB випливає: $AO = OC$, $BO = OD$.

Щоб довести рівність відрізків (кутів) у паралелограмі, доведіть рівність трикутників, відповідними елементами яких є ці відрізки (кути).

Властивості паралелограма подано у таблиці 3.

Таблиця 3

***ABCD* – паралелограм**	**Властивість**
	**1.** $AB = DC$, $AD = BC$
	2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
	3. $AO = OC$, $BO = OD$
	4. $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Виникає запитання: *Скільки даних потрібно мати для побудови паралелограма?* Три даних, серед яких повинно бути не більше одного з його кутів (один кут паралелограма визначає решту його кутів).

2. Назва «паралелограм» (*parallelogrammon*) походить від поєднання грецьких слів: «паралелос» — той, що йде поряд, і «грамма» — лінія.

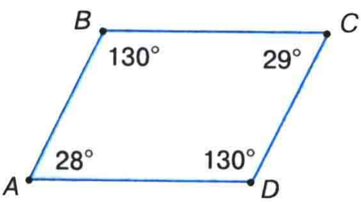
Цей термін вперше зустрічається у «Началах» Евкліда (III ст. до н. е.). Хоча замість терміна «паралелограм» давньогрецький учений спочатку вживав словосполучення «утворена паралельними лініями площа» (мається на увазі частина площини, обмежена двома парами паралельних прямих).

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

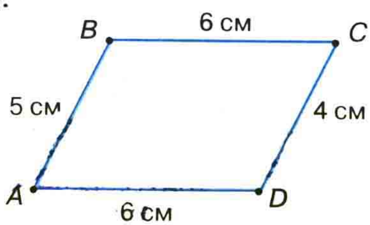
1. Який чотирикутник називається паралелограмом?
2. Що таке висота паралелограма?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про властивість сторін і кутів паралелограма.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про властивість діагоналей паралелограма.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

42'. Чи правильно вказано на малюнках 33, 34 градусні міри кутів і довжини сторін паралелограма? Поясніть відповідь.



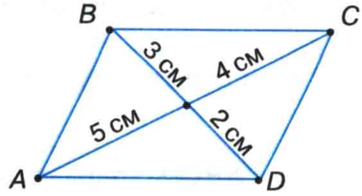
Мал. 33



Мал. 34

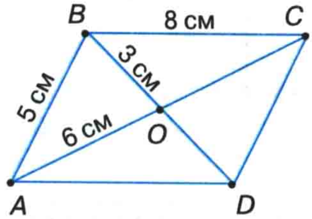
43. У паралелограма $MNPK$ $MN = a$, $NP = b$. Чому дорівнюють сторони PK і MK, якщо: 1) $a = 5$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 1{,}2$ дм, $b = 0{,}4$ дм? Поясніть відповідь.

44. У паралелограма $ABCD$ $\angle ABC = \alpha$, $\angle BCD = \beta$. Чому дорівнюють кути ADC і BAD, якщо:
1) $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$; 2) $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$;
3) $\alpha = \beta = 90°$?
Поясніть відповідь.



Мал. 35

45. Чи правильно вказано на малюнку 35 довжини відрізків діагоналей паралелограма? Поясніть відповідь.



Мал. 36

46. $ABCD$ — паралелограм (мал. 36). За даними на малюнку знайдіть:
1) відрізки OC і OD; 2) діагоналі AC і BD;
3) сторони AD і DC.

47. A, B, C, D — кути паралелограма $ABCD$. Накресліть у зошиті таблицю 4 і заповніть її.

Таблиця 4

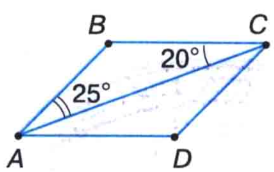
$\angle A$	35°			
$\angle B$		140°		
$\angle C$			75°	
$\angle D$				64°

48. Чи може паралелограм мати кути:
1) 30° і 60°; 2) 55° і 125°; 3) 116° і 123° ?

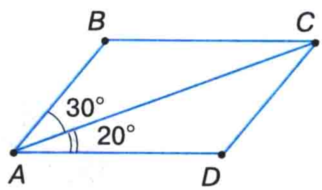
49. Чи може паралелограм мати:
1) усі кути гострі; 2) лише три рівних кути; 3) лише один кут тупий?
Поясніть відповідь.

50. За даними на малюнках 37 — 39 знайдіть кути паралелограма $ABCD$.

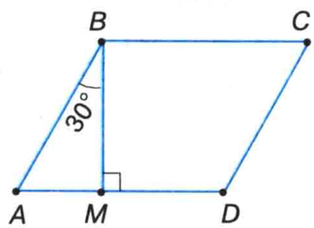
51. Знайдіть кути паралелограма, якщо:
1) один з кутів у 3 рази більший за другий;
2) один з кутів на 50° менший від другого;
3) сума двох кутів дорівнює 120°;
4) зовнішній кут паралелограма дорівнює 140°.



Мал. 37



Мал. 38



Мал. 39

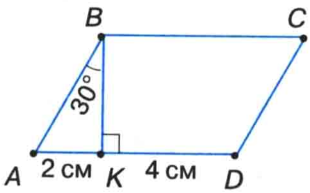
52°. Бісектриса кута паралелограма перетинає його сторону під кутом α. Знайдіть кути паралелограма, якщо: 1) $\alpha = 29°$; 2) $\alpha = 34°$; 3) $\alpha = 45°$.

53°. Чи може паралелограм мати лише три рівні сторони? Поясніть відповідь.

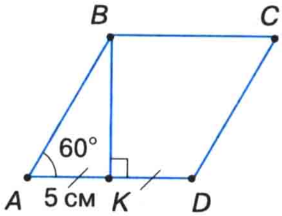
54°. Периметр паралелограма дорівнює 48 см. Складіть формулу та знайдіть сторони паралелограма, якщо:

1) одна зі сторін на 3 см більша за другу;
2) одна зі сторін у 7 разів менша від другої;
3) різниця двох сторін дорівнює 7 см.

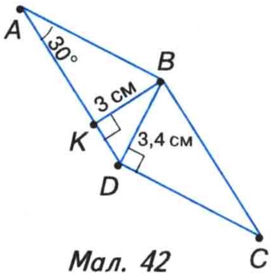
55°. За даними на малюнках 40 — 42 знайдіть сторони паралелограма $ABCD$.



Мал. 40



Мал. 41



Мал. 42

56°. Доведіть, що діагональ паралелограма ділить його на два рівних трикутники.

57°. Сторони паралелограма дорівнюють 3 см і 5 см. Чи може його діагональ дорівнювати: 1) 10 см; 2) 8 см; 3) 4 см?

58°. Чи існує паралелограм, дві діагоналі й сторона якого дорівнюють відповідно: 1) 4 см, 10 см, 6 см; 2) 8 см, 10 см, 9 см; 3) 8 см, 10 см , 10 см?

59°. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої внутрішньої точки паралелограма до всіх його сторін є величиною сталою. Чому дорівнює ця сума?

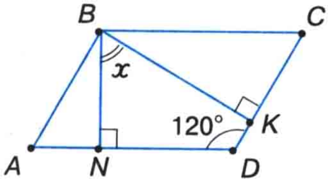
60°. Позначте три точки, що не лежать на одній прямій. Скільки можна побудувати паралелограмів з вершинами у цих точках? Побудуйте їх.

61. Знайдіть кути паралелограма, якщо два його кути відносяться, як: 1) 2 : 3; 2) 4 : 5; 3) 3 : 7.

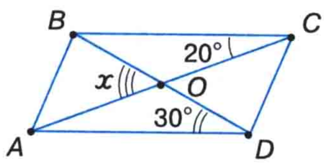
62. Знайдіть кути паралелограма, якщо:

1) один із них дорівнює сумі двох інших;
2) один із них у 4 рази більший за суму двох інших;
3) половина одного кута дорівнює третині другого.

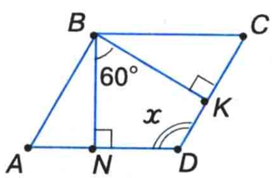
63. На малюнках 43 — 45 зображено паралелограми. Знайдіть кут x.



Мал. 43



Мал. 44



Мал. 45

64. Із вершини тупого кута паралелограма проведено дві висоти. Кут між ними дорівнює α. Знайдіть кути паралелограма, якщо:
1) $\alpha = 35°$; 2) $\alpha = 45°$; 3) $\alpha = 89°$.

65. **Доведіть, що кут між висотами паралелограма дорівнює його гострому куту.**

66. У паралелограмі $ABCD$ діагональ BD утворює зі стороною CD кут 68°, $\angle ABC = 84°$. Знайдіть кути ADB і BCD.

67. Знайдіть кути паралелограма, якщо одна з його діагоналей дорівнює стороні паралелограма і перпендикулярна до неї.

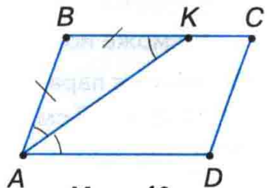
68. Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці K. Якого виду трикутник ABK?

69. **Доведіть:**
1) бісектриси кутів, прилеглих до однієї сторони паралелограма, взаємно перпендикулярні;
2) бісектриси двох протилежних кутів паралелограма паралельні.

70. Знайдіть кути паралелограма, якщо бісектриса його кута перетинає сторону під кутом, який дорівнює одному з кутів паралелограма.

Якщо в задачі дано бісектрису кута паралелограма, то утворений трикутник рівнобедрений (ΔABK на мал. 46). **Скористайтеся його властивостями.**

71. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці K (мал. 46). $BK = a$, $KC = b$.
Знайдіть периметр паралелограма, якщо:
1) $a = 14$ см, $b = 7$ см; 2) $a = 2$ см, $b = 3$ см.



Мал. 46

72. У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть:
1) BK і KC, якщо $AB = 6$ см, $AD = 9$ см; 2) AD, якщо $AB = 4$ см, $KC = 11$ см;
3) периметр паралелограма, якщо $AD = 14$ см, $BK : KC = 3 : 4$.

73. У паралелограмі $ABCD$ через точку O перетину діагоналей проведено пряму, яка перетинає сторони BC і AD у точках E і F.
1) Доведіть, що: а) $OE = OF$; б) $BE = DF$; в) $CE = AF$.
2) Знайдіть сторони BC і AD паралелограма, якщо $BE = 5$ см, $AF = 4$ см.

74. Точки M і N — середини сторін BC і AD паралелограма $ABCD$. Доведіть, що діагональ AC ділиться відрізками BN і MD на три рівні частини.

75. Знайдіть довжину діагоналі AC паралелограма $ABCD$, якщо його периметр 7 см, а периметр трикутника ABC — 6 см.

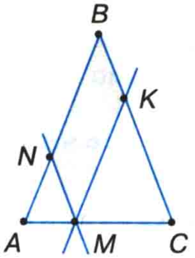
76. Із точки, взятої на основі AC рівнобедреного трикутника ABC, проведено прямі, паралельні бічним сторонам (мал. 47).
1) Доведіть, що периметр утвореного паралелограма $MNBK$ не залежить від положення точки M.
2) Знайдіть периметр паралелограма $MNBK$, якщо $AB = 15$ см.

77. Складіть план побудови паралелограма:

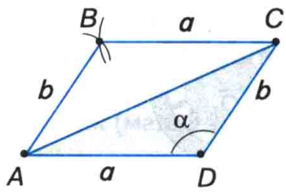
1) за сторонами *a*, *b* і кутом α (мал. 48);

2) за стороною *a* та діагоналями d_1 і d_2 (мал. 49).

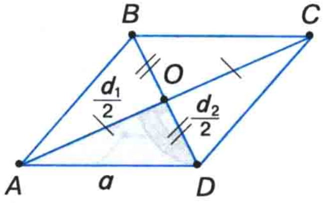
Щоб побудувати паралелограм, спочатку побудуйте допоміжний трикутник (ΔADC на мал. 48 або ΔAOD на мал. 49). **Потім добудуйте цей трикутник до паралелограма, спираючись на властивості паралелограма.**



Мал. 47



Мал. 48



Мал. 49

78. Побудуйте паралелограм:

1) за стронами *a* і *b* та діагоналлю *d*;

2) за діагоналями d_1 і d_2 та кутом α між ними;

3) за строною *a*, діагоналлю *d* і кутом α, який лежить проти діагоналі;

4) за строною *a*, діагоналлю *d* і кутом α між ними.

79*. Два кути паралелограма відносяться, як 1 : 3. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини: 1) тупого кута; 2) гострого кута.

80*. У паралелограмі гострий кут дорівнює 60°. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону навпіл. Знайдіть меншу діагональ паралелограма, якщо його периметр дорівнює 24 см.

81*. Один із кутів паралелограма в три рази більший за другий. Висота, проведена з вершини тупого кута, ділить протилежну сторону на два відрізки, які дорівнюють 2 см і 4 см. Знайдіть висоту паралелограма.

82*. Паралелограм, периметр якого дорівнює 50 см, розбивається діагоналями на чотири трикутники. Знайдіть сторони паралелограма, якщо різниця периметрів двох із цих трикутників дорівнює 5 см.

83*. У якому паралелограмі бісектриси двох кутів, що прилягають до однієї сторони, ділять протилежну сторону на три рівні частини?

84*. Периметр паралелограма *ABCD* дорівнює 48 см. Бісектриси кутів *A* і *D* ділять сторону *BC* на три рівні частини. Знайдіть сторони паралелограма.

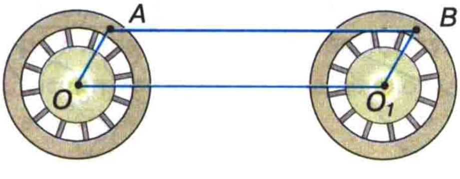
85*. За якої умови точка перетину бісектрис двох кутів паралелограма, що прилягають до однієї сторони, лежить на протилежній стороні?

86*. Периметр паралелограма дорівнює 42 см. Бісектриси кутів, прилеглих до однієї сторони, перетинаються на іншій стороні. Знайдіть сторони паралелограма.

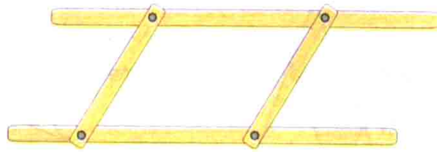
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

87. На малюнку зображено два однакових колеса (мал. 50). Стрижень AB, довжина якого дорівнює відстані OO_1 між центрами коліс, передає рух від одного колеса до другого. Яким може бути взаємне розміщення стрижня AB і лінії центрів OO_1?

88. Для проведення паралельних прямих використовують паралельні лінійки (мал. 51). Поясніть, як ними користуватися.



Мал. 50



Мал. 51

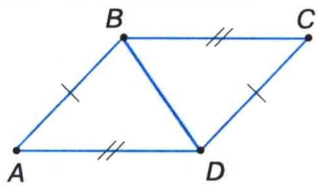
§3. ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛОГРАМА

Під час розв'язування задач буває необхідно встановити, що даний чотирикутник – паралелограм. Допоможуть це зробити ознаки паралелограма.

Теорема (ознака паралелограма).
Якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то такий чотирикутник – паралелограм.

Дано: $ABCD$ – чотирикутник (мал. 52), $AB = DC$, $BC = AD$.

Довести: $ABCD$ – паралелограм.

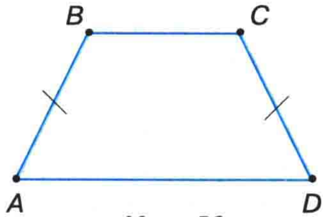


Мал. 52

Доведення. Проведемо діагональ BD (мал. 52). $\Delta BCD = \Delta DAB$ за трьома сторонами. У них BD – спільна сторона, $AB = DC$ і $BC = AD$ за умовою. З рівності трикутників випливає: $\angle CBD = \angle ADB$ і $\angle ABD = \angle CDB$. Кути CBD і ADB – внутрішні різносторонні при прямих BC і AD та січній BD. Тому $BC \parallel AD$. Так само кути ABD і CDB – внутрішні різносторонні при прямих AB і DC та січній BD. Тому $AB \parallel DC$.
Оскільки у чотирикутнику $ABCD$ $BC \parallel AD$ і $AB \parallel DC$, то, за означенням, цей чотирикутник – паралелограм.

? Чи можна вважати чотирикутник паралелограмом, якщо в нього дві протилежні сторони рівні, а дві інші – паралельні?

Не можна. На малюнку 53 $AB = CD$, $BC \parallel AD$, але чотирикутник $ABCD$ – не паралелограм.

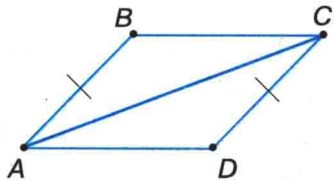


Мал. 53

Теорема (ознака паралелограма).
Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні і паралельні, то такий чотирикутник – паралелограм.

Дано: $ABCD$ – чотирикутник (мал. 54), $AB = DC$, $AB \parallel DC$.

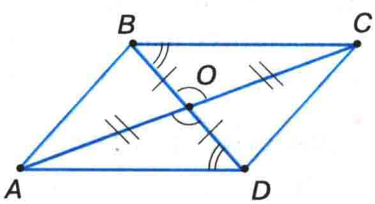
Довести: $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 54

Доведення. Проведемо діагональ AC (мал. 54). $\Delta ABC = \Delta CDA$ за двома сторонами і кутом між ними. У них AC – спільна сторона, $AB = DC$ за умовою, $\angle BAC = \angle DCA$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і DC та січній AC. З рівності трикутників випливає: $\angle DAC = \angle BCA$. Але кути DAC і BCA – внутрішні різносторонні при прямих BC і AD та січній AC. Тому $BC \parallel AD$.
Оскільки у чотирикутнику $ABCD$ $AD \parallel BC$ (за доведеним) і $AB \parallel DC$ (за умовою), то, за означенням, цей чотирикутник – паралелограм.

Задача (ознака паралелограма). **Якщо діагоналі чотирикутника діляться точкою їх перетину навпіл, то такий чотирикутник – паралелограм.**
Доведіть.



Мал. 55

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, O – точка перетину його діагоналей і $BO = OD$, $AO = OC$ (мал. 55).
Доведемо, що $ABCD$ – паралелограм.
$\Delta BOC = \Delta DOA$ за двома сторонами і кутом між ними.
У них $BO = OD$, $AO = OC$ за умовою, $\angle BOC = \angle DOA$ як вертикальні.
З рівності трикутників випливає: $BC = AD$ і $\angle OBC = \angle ODA$.
Але кути OBC і ODA – внутрішні різносторонні при прямих BC і AD та січній BD.
Тому $BC \parallel AD$.
Оскільки у чотирикутнику $ABCD$ $BC = AD$ і $BC \parallel AD$, то, за доведеною ознакою, цей чотирикутник – паралелограм.

Щоб встановити, що чотирикутник – паралелограм, доведіть, що у ньому:
або протилежні сторони попарно паралельні (означення паралелограма),
або протилежні сторони попарно рівні (ознака),
або дві протилежні сторони рівні і паралельні (ознака),
або діагоналі діляться точкою їх перетину навпіл (ознака).

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Вам доводилося зустрічати поняття «необхідно», «достатньо», «необхідно і достатньо». За таблицею 5 розгляньте пари тверджень *A* і *B* та з'ясуйте зміст цих понять.

Таблиця 5

Твердження *A*	Твердження *B*	Зв'язок між твердженнями	Вид умови
Чотирикутник є паралелограмом	Дві протилежні сторони чотирикутника рівні	З *A* випливає *B* ($A \Rightarrow B$)	*A – достатня умова для B* *B – необхідна умова для A*
Чотирикутник є паралелограмом	Протилежні сторони чотирикутника попарно рівні	З *A* випливає *B* і з *B* випливає *A* ($A \Leftrightarrow B$)	*A – необхідна і достатня умова для B* і навпаки

Зверніть увагу, що твердження: «*A* достатнє для *B*» і «*A* необхідне для *B*» – є взаємооберненими. Їх можна об'єднати і сформулювати так:

Для того щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб протилежні його сторони були попарно рівними.

Замість того щоб говорити «необхідна і достатня умова», іноді кажуть «необхідна і достатня ознака», або, частіше, просто «ознака». Тому теореми цього параграфа називаємо «ознаками паралелограма».

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Доведіть, що коли протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то він є паралелограмом.
2. Доведіть, що коли в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні і паралельні, то він є паралелограмом.
3. Доведіть, що коли діагоналі чотирикутника діляться точкою їх перетину навпіл, то такий чотирикутник – паралелограм.
4. Поясніть, як переконатися, що даний чотирикутник є паралелограмом.

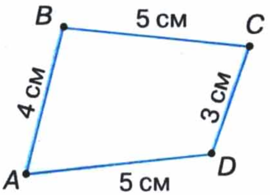
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

89'. Чи є паралелограмом чотирикутник, у якого лише дві протилежні сторони рівні? Поясніть відповідь.

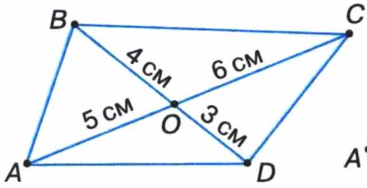
90'. Чому чотирикутник на малюнку 56 не є паралелограмом?

91'. Чи є чотирикутник паралелограмом, якщо дві протилежні його сторони:
1) паралельні; 2) паралельні й рівні.

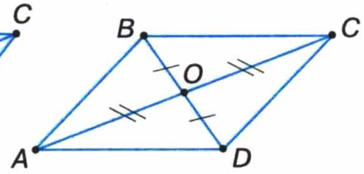
92'. Накресліть два рівні і паралельні відрізки довжиною 4 см.
Кінці їх сполучіть відрізками так, щоб вони не перетиналися. Чому утворений чотирикутник — паралелограм?



Мал. 56

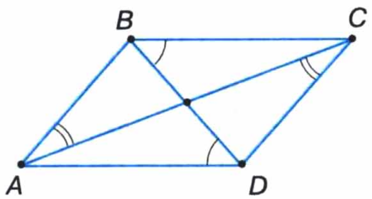


Мал. 57

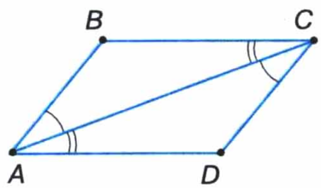


Мал. 58

93'. Який з чотирикутників, зображених на малюнках 57, 58, є паралелограмом? Поясніть відповідь.



Мал. 59



Мал. 60

94°. За даними на малюнках 59, 60 доведіть, що чотирикутник *ABCD* — паралелограм.

95°. Побудуйте довільний трикутник *ABC* і на стороні *AB* позначте точку *M*. Через цю точку паралельно сторонам *BC* і *AC* трикутника проведіть прямі, що їх перетинають у точках *N* і *K* відповідно. Поясніть, чому чотирикутник *MNCK* — паралелограм.

96°. З довільної точки внутрішньої області кута проведено прямі, паралельні сторонам кута. Чи є утворений чотирикутник паралелограмом? Поясніть відповідь.

97°. Чи є паралелограмом чотирикутник *KLMN*, у якого:
1) $KL = MN$; 2) $KL = MN$ і $KN = LM$; 3) $KL = LM$?

98°. У чотирикутнику *ABCD* $AB = CD$, $BC = AD$.
Доведіть: 1) $\angle B = \angle D$, $\angle A = \angle C$; 2) $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Щоб довести рівність (або паралельність) двох відрізків:
1) виділіть на малюнку чотирикутник, протилежними сторонами якого є ці відрізки;
2) доведіть, що чотирикутник — паралелограм;
3) зробіть висновок: відрізки рівні (або паралельні) як протилежні сторони паралелограма.
Так само можна довести рівність двох кутів.

99°. У чотирикутнику *MNKP* протилежні сторони попарно рівні. Знайдіть:
1) кут M, якщо $\angle K = 35°$; 2) MN, якщо $KP = 5$ см.

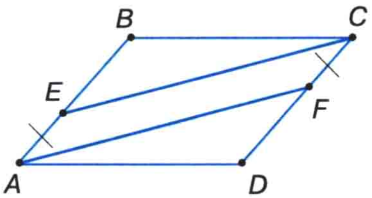
100°. Доведіть, що чотирикутник *ABCD* — паралелограм, якщо:
1) $AB \parallel CD$, $AB = 3$ см, $CD = 30$ мм;
2) $AD = BC$, $\angle ABC = 60°$, $\angle BAD = 120°$.

101°. Доведіть, що чотирикутник, у якого сума кутів, які прилягають до кожної з двох суміжних сторін, дорівнює 180°, є паралелограмом.

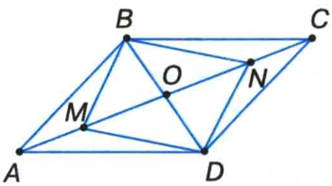
102°. У чотирикутнику *ABCD* $\angle A + \angle B = 180°$ і $\angle B + \angle C = 180°$. Доведіть, що протилежні сторони чотирикутника рівні.

103°. У чотирикутнику *ABCD* $\angle A + \angle B = 180°$ і $AD = BC$. Доведіть, що *ABCD* — паралелограм.

104°. У паралелограмі *ABCD* точка *M* — середина сторони *AD*, а *N* — середина сторони *BC*. Доведіть, що *BNDM* — паралелограм.



Мал. 61



Мал. 62

105°. *ABCD* — паралелограм (мал. 61), $AE = CF$. Доведіть, що відрізки *CE* і *AF* рівні і паралельні.

106°. У чотирикутнику *ABCD* діагоналі перетинаються в точці *O*. Доповніть дані у таблиці 6 так, щоб наведений висновок був правильним.

Таблиця 6

AO	3 см			0,6 дм
OC		2 дм	35 мм	
BO		4,8 дм		6 см
OD	5 см		2,1 см	
Висновок	*ABCD* — паралелограм	*ACBD* — паралелограм	*ABDC* — паралелограм	*DCBA* — паралелограм

107°. *ABCD* — паралелограм (мал. 62), $OM = ON$. Доведіть, що *MBND* — паралелограм.

108°. *MBND* — паралелограм (мал. 62), $OA = OC$. Доведіть, що *ABCD* — паралелограм.

109°. Медіану *BD* трикутника *ABC* продовжено на відрізок $DE = BD$. Точку *E* сполучено з вершинами *A* і *C* трикутника. Доведіть, що чотирикутник *ABCE* — паралелограм.

110°. Медіану LO трикутника KLM продовжено на відрізок ON і добудувано чотирикутник $KLMN$. Заповніть таблицю 7 та зробіть висновок про вид чотирикутника $KLMN$.

Таблиця 7

LO	4 см	0,05 дм	60 мм	2 см
ON	40 мм	0,5 дм	6 см	2 дм
KO	0,3 дм		0,6 дм	
OM		12 мм		2,2 дм

111. **Якщо протилежні кути чотирикутника рівні, то такий чотирикутник — паралелограм.** Доведіть.

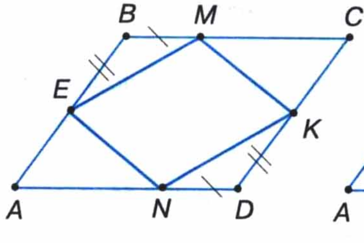
112. Чи є чотирикутник паралелограмом, якщо три його кути дорівнюють:
1) 20°, 60°, 110°; 2) 60°, 60°, 120°; 3) 35°, 145°, 35°?

113. Чи можна вважати чотирикутник паралелограмом, якщо бісектриси двох протилежних його кутів перпендикулярні до бісектриси третього кута?

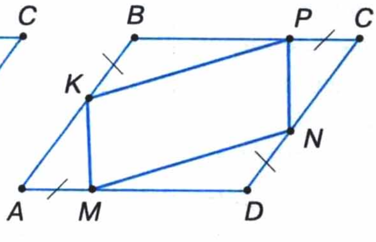
114. На протилежних сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ відкладено рівні відрізки $AB_1 = CD_1$ і проведено прямі B_1C, B_1D, AD_1 і BD_1. Доведіть, що чотирикутник, утворений від перетину цих прямих, — паралелограм.

115. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M, а бісектриса кута C перетинає сторону AD у точці N. Доведіть, що $AMCN$ — паралелограм.

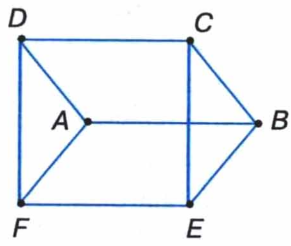
116. На сторонах AB, BC, CD і AD паралелограма $ABCD$ позначено точки E, M, K, N відповідно так, що $BM = DN$, $BE = DK$ (мал. 63). Доведіть, що $EMKN$ — паралелограм.



Мал. 63



Мал. 64



Мал. 65

117. На сторонах паралелограма $ABCD$ відкладено, як показано на малюнку 64, рівні відрізки AM, DN, CP, BK. Доведіть, що $MNPK$ — паралелограм.

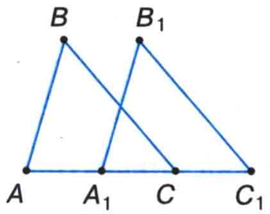
118. Поза паралелограмом $ABCD$ з гострим кутом A побудувано рівносторонні трикутники ABE і CDF. Доведіть, що $AECF$ — паралелограм.

119. $ABCD$ і $ABEF$ — паралелограми (мал. 65). Доведіть, що $DF = CE$ і $DF \parallel CE$.

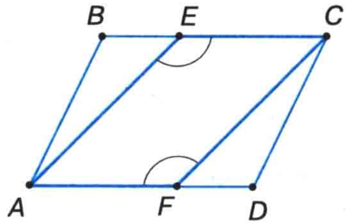
120. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (мал. 66). Знайдіть відстань між точками B і B_1, якщо:
1) $AA_1 = 3$ см; 2) $AC = 10$ см, $A_1C = 6$ см; 3) $AC_1 = 20$ см, $A_1C = 12$ см.

121. На сторонах BC і AD паралелограма $ABCD$ позначено точки E і F так, що $\angle AEC = \angle AFC$ (мал. 67). Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

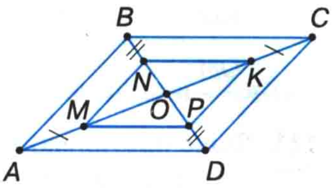
122. Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні, а одна з діагоналей ділить другу навпіл, то такий чотирикутник — паралелограм. Доведіть.



Мал. 66



Мал. 67



Мал. 68

123. Доведіть, що коли через точку перетину діагоналей паралелограма провести дві прямі, то точки перетину цих прямих із його сторонами є вершинами паралелограма.

124. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Доведіть, що чотирикутник $MNPK$, вершинами якого є середини відрізків OA, OB, OC і OD — паралелограм.

125. $ABCD$ — паралелограм (мал. 68), $AM = KC$, $BN = PD$.
Доведіть, що $MP = NK$ і $MP \parallel NK$.

126. Медіану AO трикутника ABC продовжено на відрізок $OD = AO$. Точку D сполучено з вершинами B і C трикутника.
1) Доведіть, що $CD = AB$ і $CD \parallel AB$.
2) Знайдіть кут CDB, якщо $\angle CAB = 36°$.

127*. Якщо кожна діагональ чотирикутника ділить його периметр навпіл, то такий чотирикутник — паралелограм. Доведіть.

128*. На продовженнях сторін AB, BC, CD і DA паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки K, P, M, E так, що $AK = BP = CM = DE$. Доведіть, що чотирикутник $KPME$ — паралелограм.

129*. На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначено точки K і M так, що $\angle AKB = \angle CMD$. Доведіть, що $KBMD$ — паралелограм.

130*. Через точку K внутрішньої області кута ABC проведіть пряму так, щоб відрізок її між сторонами кута ділився цією точкою навпіл.

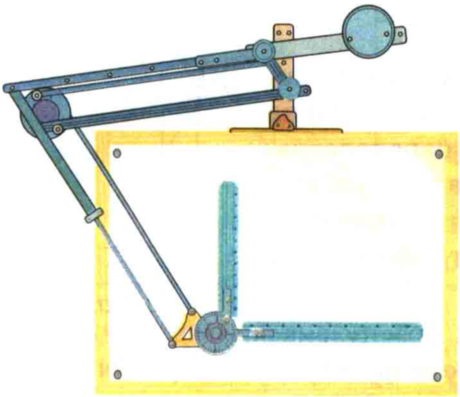
131*. З вершин тупих кутів паралелограма проведено висоти. Чи є кінці цих чотирьох висот вершинами паралелограма?

132*. До сторін паралелограма проведено серединні перпендикуляри, які перетинають протилежні сторони або їх продовження в точках K, L, M, N. Доведіть, що чотирикутник $KLMN$ — паралелограм.

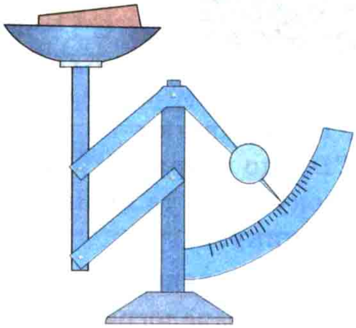
133*. Якщо вершини протилежних кутів чотирикутника однаково віддалені від відповідних діагоналей, то такий чотирикутник — паралелограм. Доведіть.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

134. Поясніть принцип дії механічної рейсшини (мал. 69), терезів (мал. 70).

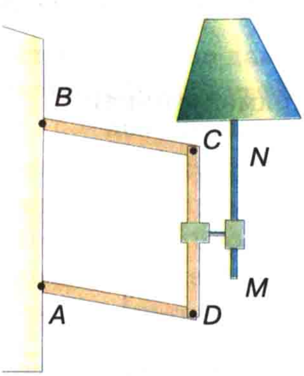


Мал. 69

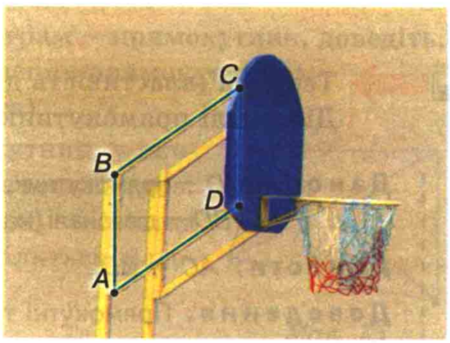


Мал. 70

135. На малюнках 71 і 72 зображено шарнірні пристрої для регулювання висоти. Одну зі сторін паралелограма $ABCD$ (сторону AB) нерухомо закріплено, а до сторони CD жорстко прикріплено лампу (мал. 71), кільце для гри в баскетбол (мал. 72). Поясніть, чому при всіх можливих положеннях сторони CD вісь MN лампи завжди вертикальна, а площина кільця — горизонтальна.



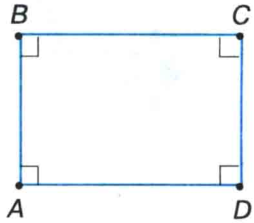
Мал. 71



Мал. 72

§4. ПРЯМОКУТНИК

Паралелограми, як і трикутники, можна поділити на види. Прямокутник – один із видів паралелограма. На малюнку 73 ви бачите паралелограм *ABCD*, що є прямокутником. Дайте означення прямокутнику та порівняйте його з наведеним у підручнику.



Мал. 73

Паралелограм, у якого всі кути прямі, називається ***прямокутником***.

Оскільки прямокутник – окремий вид паралелограма, то він має всі властивості паралелограма:

1) протилежні сторони рівні;
2) протилежні кути рівні;
3) діагоналі діляться точкою їх перетину навпіл.

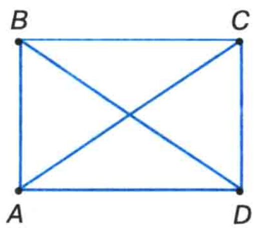
Крім цих властивостей прямокутник має ще особливу властивість.

Теорема (властивість діагоналей прямокутника). Діагоналі прямокутника рівні.

Дано: $ABCD$ – прямокутник, AC і BD – діагоналі (мал. 74).

Довести: $AC = BD$.

Доведення. Прямокутні трикутники ACD і DBA рівні за двома катетами. У них AD – спільний катет, а катети AB і DC рівні як протилежні сторони паралелограма.
З рівностей трикутників випливає: $AC = BD$.

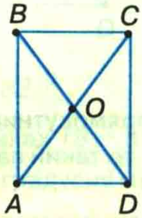


Мал. 74

? Властивості прямокутника подано у таблиці 8.

Чи можна стверджувати, що паралелограм, у якого діагоналі рівні, є прямокутником? Так. Але цей висновок потребує доведення.

Таблиця 8

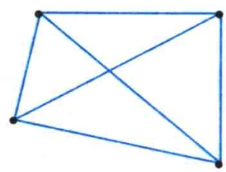
ABCD — прямокутник	Властивість
	**паралелограма**
	1. $AB = DC, AD = BC$
	2. $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$
	3. $AO = OC, BO = OD$
	4. $\angle A + \angle B = 180°, \angle A + \angle D = 180°$
	особлива
	5. $AC = DB$

Задача (ознака прямокутника). **Якщо діагоналі паралелограма рівні, то такий паралелограм — прямокутник.** Доведіть.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — паралелограм, у якого $AC = BD$ (мал. у табл. 8). Доведемо, що $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.
$\Delta ABD = \Delta DCA$ за трьома сторонами. У них AD — спільна сторона, $AC = BD$ за умовою, $AB = DC$ як протилежні сторони паралелограма. Звідси випливає, що $\angle A = \angle D$. Враховуючи, що у паралелограма протилежні кути рівні, дістанемо: $\angle A = \angle C = \angle D = \angle B$. За властивістю кутів чотирикутника, $\angle A + \angle C + \angle D + \angle B = 360°$. Отже, $\angle A = \angle C = \angle D = \angle B = 360° : 4 = 90°$, тобто паралелограм $ABCD$ — прямокутник.

Щоб встановити, що даний паралелограм — прямокутник, доведіть, що у ньому: або всі кути прямі (означення прямокутника),
або діагоналі рівні (ознака).

? Чи можна стверджувати, що чотирикутник, у якого діагоналі рівні, є прямокутником? Не можна (див. мал. 75). Потрібно ще перевірити, чи виконується одна з ознак паралелограма. Наприклад, чи діляться діагоналі точкою їх перетину навпіл.



Мал. 75

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Виникає запитання: *Чи можна дати інші означення прямокутника?*
Поміркуємо. У молодших класах прямокутник визначали як чотирикутник, усі кути якого прямі. Тепер ми визначили прямокутник як окремий вид паралелограма. Можна дати і такі означення прямокутника:
паралелограм, у якого всі кути рівні (справді, сума кутів паралелограма становить 360°, тоді кожний з них дорівнює 90°);
паралелограм, який має прямий кут (справді, у паралелограма сусідні кути в

сумі становлять 180°, а протилежні кути рівні. Тому, якщо один із кутів паралелограма прямий, то і три інші його кути — прямі).

Наведені означення прямокутника є *еквівалентними*.

Отже, **можна дати різні означення одного й того самого поняття.**

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

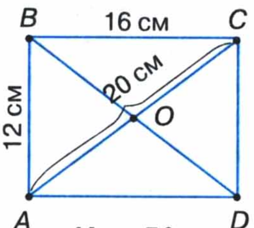
1. Що таке прямокутник?
2. Сформулюйте і доведіть властивість діагоналей прямокутника.
3. Доведіть, що коли діагоналі паралелограма рівні, то такий паралелограм — прямокутник.
4. Поясніть, як встановити, що даний паралелограм є прямокутником.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

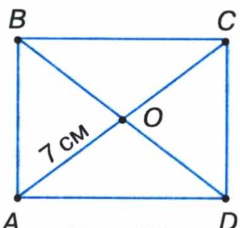
136'. *ABCD* — прямокутник (мал. 76). За даними на малюнку знайдіть:
1) *AD, DC*; 2) *BD*; 3) *AO, OC, BO, OD*.

137'. За даними, наведеними на малюнку 77, знайдіть:
1) діагоналі прямокутника; 2) суму діагоналей прямокутника.

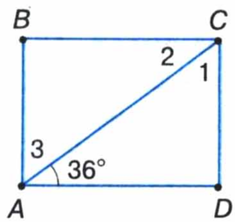
138'. *ABCD* — прямокутник (мал. 78). За даними на малюнку знайдіть кути 1, 2, 3.



Мал. 76



Мал. 77



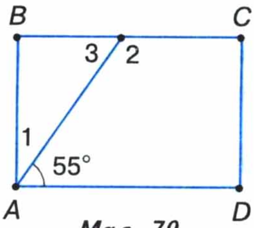
Мал. 78

139'. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 2 см і 3 см; 2) 0,4 дм і 0,5 дм; 3) 10 мм і 12 мм.

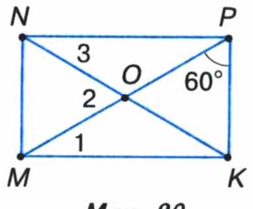
140'. Назвіть властивість, яку має прямокутник, але якої не має паралелограм, що не є прямокутником.

141°. Знайдіть діагоналі прямокутника, якщо їх сума дорівнює:
1) 12 см; 2) 6 см; 3) 18 мм.

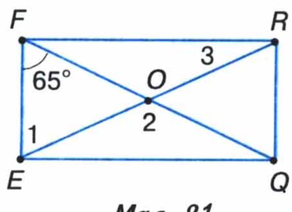
142°. *O* — точка перетину діагоналей прямокутника *ABCD*. Доведіть:
1) трикутники *AOD, BOC, AOB* і *DOC* — рівнобедрені;
2) $\Delta AOB = \Delta COD$, $\Delta BOC = \Delta DOA$.



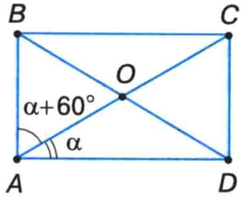
Мал. 79



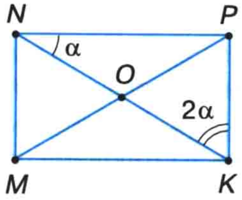
Мал. 80



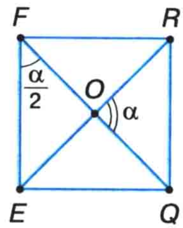
Мал. 81



Мал. 82



Мал. 83



Мал. 84

143°. На малюнках 79 – 81 зображено прямокутники. Знайдіть кути 1, 2, 3.

144°. Знайдіть градусну міру кута між діагоналями прямокутника (мал. 82 – 84).

145°. У паралелограмі жоден з кутів не є гострим. Доведіть, що цей паралелограм – прямокутник.

146°. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює зі стороною кут 30°. Знайдіть меншу сторону прямокутника, якщо: 1) $d = 4$ см; 2) $d = 14$ мм; 3) $d = 0{,}44$ дм.

147°. Менша сторона прямокутника дорівнює a. Знайдіть діагоналі прямокутника, якщо вони перетинаються під кутом 60° та:
1) $a = 10$ см; 2) $a = 0{,}25$ дм; 3) $a = 7$ мм.

148°. a і b – сторони прямокутника, P – його периметр. Заповніть таблицю 9.

Таблиця 9

a	6 см	4 см		10 см	9 см
b	12 см		5 см		7 см
P		32 см	30 см	44 см	

149°. Знайдіть периметр прямокутника, якщо:
1) одна сторона його дорівнює 4 см , а друга – втричі більша;
2) одна сторона дорівнює 10 см, а друга – вдвічі менша;
3) одна сторона дорівнює 12 см, а друга – на 4 см більша.

150°. Доведіть, що коли у паралелограма хоча б один кут прямий, то він є прямокутником.

151°. Якщо у паралелограма хоча б один кут прямий, то його діагоналі рівні. Доведіть.

152. **Чотирикутник, три кути якого прямі, – прямокутник.** Доведіть.

153. **Якщо всі кути чотирикутника рівні, то він – прямокутник.** Доведіть.

154. **Якщо у паралелограма сума двох протилежних кутів дорівнює 180°, то він – прямокутник.** Доведіть.

155. Доведіть, що коли у паралелограма кути, прилеглі до однієї сторони, рівні, то він є прямокутником.

156. Діагоналі паралелограма утворюють рівні кути з його стороною. Доведіть, що цей паралелограм є прямокутником.

157. Тупий кут між діагоналями прямокутника дорівнює 120°. Доведіть, що діагональ його в два рази більша за меншу сторону.

158. Доведіть, що коли в прямокутнику сторона дорівнює половині діагоналі, то кут між ними дорівнює 60°.

159. Перпендикуляр, проведений з вершини кута прямокутника до діагоналі, ділить цей кут у відношенні 2 : 3. Знайдіть:
1) кути, утворені діагоналями зі сторонами прямокутника;
2) кут між проведеним перпендикуляром і другою діагоналлю.

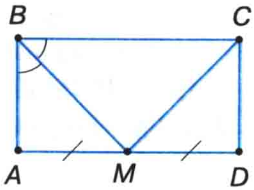
160. У чотирикутнику діагоналі діляться точкою їх перетину навпіл, а один кут — прямий. Доведіть, що цей чотирикутник є прямокутником.

161. Периметр прямокутника дорівнює 48 см. Знайдіть сторони прямокутника, якщо:
1) дві сторони відносяться, як 2 : 3;
2) відстань між серединами двох протилежних сторін дорівнює 10 см;
3) точка перетину діагоналей віддалена від сторони на 4 см.

162. Периметр прямокутника дорівнює P. Знайдіть суму відстаней від довільної внутрішньої точки прямокутника до його сторін, якщо:
1) $P = 12$ см; 2) $P = 8{,}6$ см.

163. Знайдіть периметр прямокутника $ABCD$, якщо бісектриса кута A ділить сторону BC на відрізки m і n, причому:
1) $m = 3$ см, $n = 5$ см; 2) $m = 0{,}2$ дм, $n = 3$ см.

164. Бісектриса BM прямокутника $ABCD$ (мал. 85) ділить сторону AD навпіл. Доведіть, що CM — бісектриса кута C.



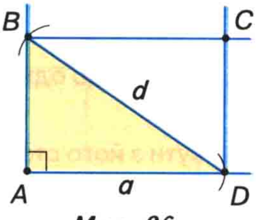
Мал. 85

165. Доведіть, що коли бісектриса прямокутника ділить навпіл сторону, яку вона перетинає, то одна зі сторін прямокутника вдвічі більша за другу.

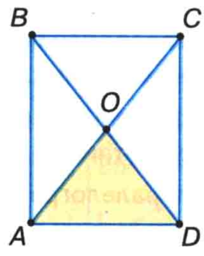
166. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить сторону, яку вона перетинає, на рівні відрізки. Знайдіть периметр прямокутника, якщо менша сторона дорівнює: 1) 15 см; 2) 3,8 дм.

167. За малюнком 86 складіть план побудови прямокутника за стороною a і діагоналлю d.

Щоб побудувати прямокутник, як і паралелограм, спочатку побудуйте допоміжний трикутник, а потім добудуйте його до прямокутника. Допоміжним може бути:
або прямокутний трикутник (мал. 86),
або рівнобедрений трикутник (мал. 87).



Мал. 86



Мал. 87

168. Побудуйте прямокутник:

1) за діагоналлю *d* і кутом α між діагоналлю і стороною;

2) за діагоналлю *d* і кутом α між діагоналями.

169*. Діагоналі прямокутника *ABCD* перетинаються в точці *O*. Периметр трикутника *ABD* більший за периметр трикутника *AOB* на 12 см, а периметр прямокутника дорівнює 50,2 см. Знайдіть сторони прямокутника.

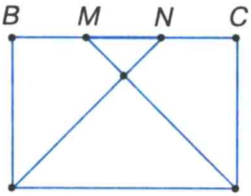
170*. Доведіть, що коли в чотирикутнику діагоналі рівні і в точці перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник є прямокутником.

Щоб довести, що чотирикутник є прямокутником, покажіть, що: або цей чотирикутник є паралелограмом, а паралелограм — прямокутником, або три кути чотирикутника — прямі.

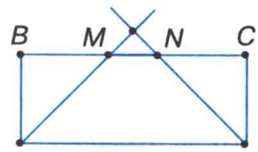
171*. Чотирикутник, у якого протилежні сторони рівні і діагоналі рівні, є прямокутником. Доведіть.

172*. Доведіть, що коли в чотирикутнику діагоналі рівні і дві протилежні сторони рівні і паралельні, то такий чотирикутник — прямокутник.

173*. У прямокутнику *ABCD* зі сторонами *a* і *b* проведено бісектриси кутів *A* і *D*, які перетинають сторону *BC* у точках *M* і *N* (мал. 88, 89). Знайдіть довжину відрізка *MN*.



Мал. 88



Мал. 89

174*. Доведіть, що в прямокутному трикутнику медіана, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи.

Щоб довести рівність двох відізків, покажіть, що вони є:
або протилежними сторонами прямокутника (чи паралелограма),
або діагоналями прямокутника,
або частинами діагоналі прямокутника (чи паралелограма), на які вона ділиться точкою перетину з іншою діагоналлю.

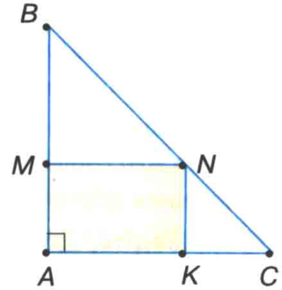
175*. Через середину гіпотенузи прямокутного трикутника, яка дорівнює 6 см, проведено дві прямі, паралельні його катетам. Знайдіть діагоналі утвореного прямокутника.

176*. Доведіть, що сума відстаней від точки, яка лежить на основі рівнобедреного трикутника, до його бічних сторін, дорівнює висоті, проведеній з вершини основи.

177*. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник так, що кут у них спільний (мал. 90).

1) Доведіть, що периметр прямокутника не залежить від положення його вершини на гіпотенузі.

2) Знайдіть периметр прямокутника, якщо катет трикутника дорівнює 5 см.



Мал. 90

178*. Побудуйте прямокутник:

1) за діагоналлю d і сумою s двох нерівних сторін;

2) за діагоналлю d і різницею m двох сторін.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

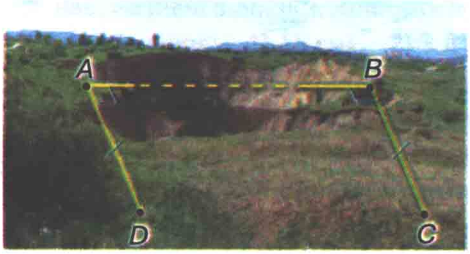
179. Щоб виміряти на місцевості відстань між пунктами A і B, між якими не можна пройти (мал. 91), побудували прямі кути BAD і ABC. Потім на сторонах кутів відклали рівні відрізки AD і BC. Тоді шукана відстань AB дорівнюватиме DC. Чому?

180. Якими способами можна перевірити, що даний чотирикутний предмет має форму прямокутника? Поясніть відповідь.

181. Учень виготовив з чотирьох попарно рівних планок рамку прямокутної форми. Щоб перевірити правильність виготовлення рамки, він перевірив рівність її діагоналей. Чи достатньо такої перевірки?

182. На малюнку 92 зображено прилад для вимірювання діаметра колод. Чому відлік на горизонтальній лінійці відповідає діаметру колоди?

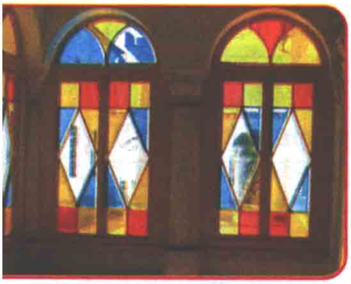
183. Провішана на місцевості пряма упирається в будівлю (мал. 93). Як продовжити пряму за будівлю?



Мал. 91


Мал. 92

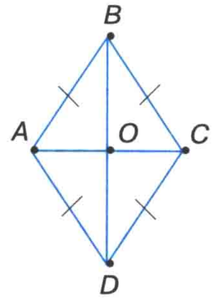

Мал. 93



§5. РОМБ. КВАДРАТ

? Чи можуть у паралелограма бути усі сторони рівними? Можуть. На малюнку 94 у паралелограма $ABCD$ $AB = BC = CD = AD$. Це ще один вид паралелограма – ромб.

Паралелограм, у якого всі сторони рівні, називається ***ромбом.***

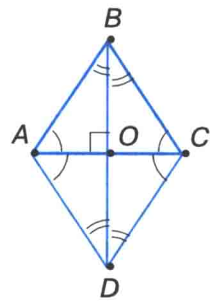


Мал. 94

? Чи можна стверджувати, що паралелограм є ромбом, якщо у нього дві сусідні сторони рівні? Так. Тому що рівність усіх сторін такого паралелограма випливає з властивості: протилежні сторони паралелограма рівні.

Оскільки ромб є окремим видом паралелограма, то він має всі його властивості (назвіть їх). Крім того, ромб має ще особливі властивості.

Теорема (властивості діагоналей ромба). Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні. Діагоналі ромба ділять його кути навпіл.



Мал. 95

Дано: $ABCD$ — ромб (мал. 95), O — точка перетину діагоналей AC і BD.

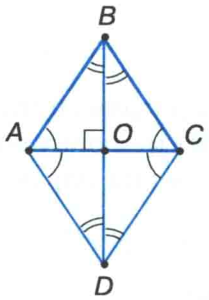
Довести: $AC \perp BD$;
$\angle ABD = \angle CBD = \angle ADB = \angle CDB$;
$\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA$.

Доведення. За означенням ромба, $AB = BC$, тому трикутник ABC — рівнобедрений. Оскільки ромб $ABCD$ — паралелограм, то $AO = OC$. Звідси BO — медіана рівнобедреного трикутника ABC, а отже — висота і бісектриса цього трикутника. Тому $AC \perp BD$ і $\angle ABD = \angle CBD$.

Так само доводимо, що діагональ BD ділить навпіл кут D, а діагональ AC — кути A і C ромба $ABCD$.

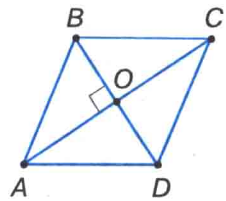
Властивості ромба наведено у таблиці 10.

Таблиця 10

ABCD **– ромб**	**Властивість**
	**паралелограма**
	1. $AB = DC$, $AD = BC$
	2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
	3. $AO = OC$, $BO = OD$
	4. $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle A + \angle D = 180°$
	особлива
	5. $AC \perp BD$
	6. $\angle ABD = \angle CBD = \angle ADB = \angle CDB$, $\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA$

Задача (ознака ромба). **Доведіть, що паралелограм, діагоналі якого взаємно перпендикулярні, є ромбом.**

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — даний паралелограм, у якого $AC \perp BD$ (мал. 96). Доведемо, що $ABCD$ — ромб.

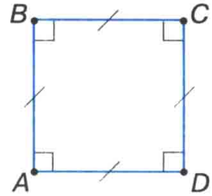


Мал. 96

$\Delta AOB = \Delta AOD$ за двома сторонами і кутом між ними. У них сторона AO — спільна, $OB = OD$ за властивістю діагоналей паралелограма, $\angle AOB = \angle AOD = 90°$ за умовою. З рівності трикутників випливає: $AB = AD$. Тоді $AB = CD$ і $AD = BC$ за властивістю протилежних сторін паралелограма. Отже, всі сторони паралелограма рівні, тому він є ромбом.

Щоб установити, що даний паралелограм – ромб, доведіть, що у ньому:
або всі сторони рівні (означення ромба),
або діагоналі взаємно перпендикулярні (ознака).

Прямокутник, у якого всі сторони рівні, називається ***квадратом.***



Мал. 97

На малюнку 97 ви бачите квадрат $ABCD$.

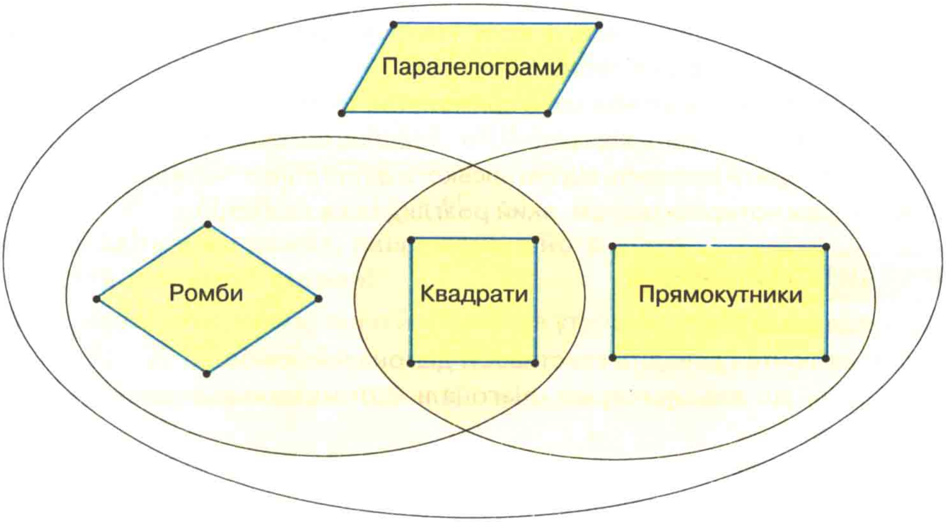
Можна дати й інші означення квадрата: ромб, у якого всі кути прямі, називається квадратом; прямокутник, у якого всі сторони рівні, називається квадратом; паралелограм, у якого всі сторони рівні і всі кути прямі, називається квадратом. Отже, квадрат має всі властивості паралелограма, прямокутника і ромба. Перелічимо властивості квадрата.

1) Протилежні сторони і протилежні кути квадрата рівні. Діагоналі квадрата в точці перетину діляться навпіл (властивості паралелограма).

2) Діагоналі квадрата рівні (властивість прямокутника).

3) Діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні і ділять його кути навпіл (властивості ромба).

Квадрат є окремим видом і ромба, і прямокутника, і паралелограма. Ромб і прямокутник – окремі види паралелограма. Співвідношення між видами паралелограмів зображено на малюнку 98.



Мал. 98

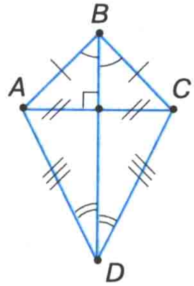
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Розгляньте таблицю класифікації паралелограмів за сусідніми сторонами і кутами. Запропонуйте власну класифікацію вивчених видів паралелограма.

Таблиця 11

За кутами	За сторонами	
	Сусідні сторони рівні	**Сусідні сторони нерівні**
Кути прямі	Квадрат	Прямокутник
Кути непрямі	Ромб	Паралелограм

2. Крім паралелограмів, є ще один вид чотирикутників — *дельтоїд*. Цю фігуру отримаємо, якщо два рівнобедрених трикутники ABC і ADC з рівними основами AC прикладемо один до одного так, як показано на малюнку 99.



Мал. 99

Властивості дельтоїда випливають із властивостей рівнобедреного трикутника. Наприклад, діагоналі взаємно перпендикулярні, одна з них ділить кути навпіл і ділить другу діагональ навпіл. Сформулюйте за малюнком інші властивості дельтоїда.

Якщо рівнобедрені трикутники, з яких утворено дельтоїд, рівні, то такий дельтоїд є ромбом.

Якщо рівнобедрені трикутники ще й прямокутні, то дельтоїд є квадратом.

3. Слово «ромб» походить від грецького *rhombos*, що означає — дзиґа, кружіння. Слово «квадрат» походить від латинського *quadratum* — чотирикутник. Квадрат був першим чотирикутником, який розглядали в геометрії.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке ромб?
2. Сформулюйте і доведіть властивості діагоналей ромба.
3. Доведіть, що паралелограм, діагоналі якого взаємно перпендикулярні, є ромбом.
4. Що таке квадрат?
5. Назвіть властивості квадрата.

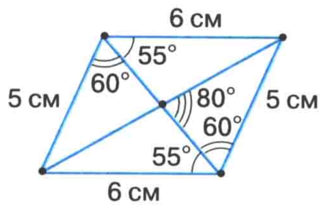
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

184'. Чи правильно вказано на малюнку 100 довжини сторін і градусні міри кутів ромба? Поясніть відповідь.

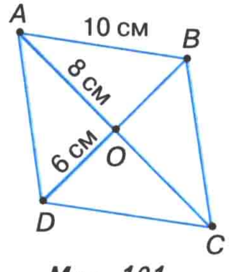
185'. $ABCD$ — ромб (мал. 101). За даними на малюнку знайдіть:
1) BC, AD, DC; 2) AC, BD.

186'. $ABCD$ — ромб (мал. 102). За даним на малюнку знайдіть кути 1, 2, 3.

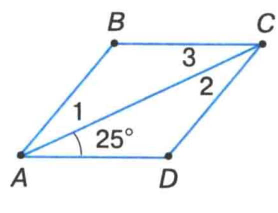
187'. Назвіть властивості, які має ромб, але яких не має паралелограм, що не є ромбом.



Мал. 100

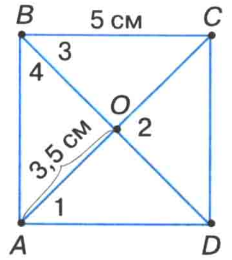


Мал. 101



Мал. 102

188'. За даними на малюнку 103 знайдіть:
1) сторони квадрата; 2) діагоналі квадрата;
3) кути 1, 2, 3, 4.



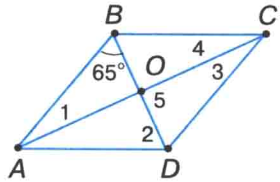
Мал. 103

189°. Знайдіть сторону ромба, якщо його периметр дорівнює: 1) 12 см; 2) 2,4 дм; 3) 280 мм.

190°. Доведіть, що діагоналі ромба ділять його на чотири рівних прямокутних трикутники.

191°. Доведіть, що діагональ ромба ділить його на два рівних трикутники.

192°. *ABCD* — ромб (мал. 104). За даними на малюнку знайдіть кути 1, 2, 3, 4, 5.



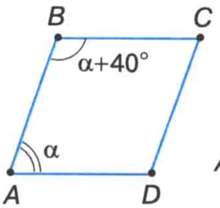
Мал. 104

193°. Кут ромба дорівнює α. Знайдіть кути, утворені діагоналями ромба з його сторонами, якщо:
1) $\alpha = 36°$; 2) $\alpha = 54°$; 3) $\alpha = 60°$.

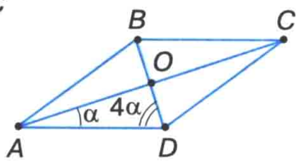
194°. Знайдіть кути ромба, якщо одна з його діагоналей дорівнює стороні.

195°. Знайдіть кути ромба, якщо його висота утворює зі стороною кут:
1) 30°; 2) 15°; 3) 65°.

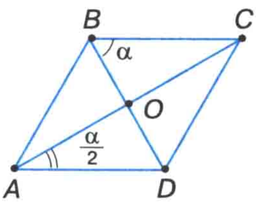
196°. За даними на малюнках 105 — 107 знайдіть кути ромба.



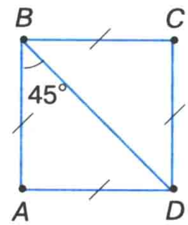
Мал. 105



Мал. 106



Мал. 107



Мал. 108

197°. Кут ромба дорівнює 60°, а менша діагональ — d. Знайдіть периметр ромба, якщо: 1) $d = 10$ см; 2) $d = 3{,}2$ дм; 3) $d = 45$ мм.

198°. Знайдіть периметр квадрата, якщо точка перетину його діагоналей віддалена від сторони на n, де: 1) $n = 8$ см; 2) $n = 0{,}3$ дм; 3) $P = 21$ мм.

199°. Діагональ квадрата d. Його сторона є діагоналлю другого квадрата. Знайдіть сторону другого квадрата, якщо: 1) $d = 6$ см; 2) $d = 29$ мм; 3) $d = 1{,}5$ дм.

200°. Доведіть, що чотирикутник *ABCD* на малюнку 108 — квадрат.

201°. Накресліть у зошиті таблицю 12. У таблиці поставте знак "+", якщо геометрична фігура має вказану властивість.

202. **Ромб, у якого один кут прямий, — квадрат.** Доведіть.

203. **Доведіть, що чотирикутник, усі сторони якого рівні, є ромбом.**

204. **Паралелограм, діагоналі якого ділять кути навпіл, — ромб.** Доведіть.

205. Знайдіть кути ромба, якщо його периметр дорівнює 36 см, а висота — 4,5 см.

Таблиця 12

	Властивість	Фігура			
		Паралелограм	Прямокутник	Ромб	Квадрат
1	Протилежні сторони попарно паралельні				
2	Протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні				
3	Усі сторони рівні				
4	Усі кути прямі				
5	Діагоналі діляться точкою їх перетину навпіл				
6	Діагоналі рівні				
7	Діагоналі взаємно перпендикулярні				
8	Діагоналі ділять кути навпіл				

206. Доведіть, що висоти ромба рівні.

207. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону навпіл. Знайдіть:

1) кути ромба;

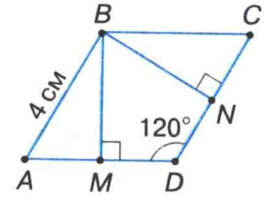
2) периметр ромба, якщо менша його діагональ дорівнює 20 см.

208. Знайдіть кути ромба, якщо кут між його висотою і діагоналлю, проведеними з однієї вершини, дорівнює: 1) 35°; 2) 20°; 3) 40°.

209. Сторона ромба *ABCD* дорівнює 4 см, $\angle D = 120°$ (мал. 109).

1) Знайдіть довжини відрізків *AM*, *MD*, *BM*.

2) Доведіть, що ΔMBN – рівносторонній.



Мал. 109

210. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, які відносяться, як:

1) 2 : 3; 2) 2 : 7; 3) 1 : 2.

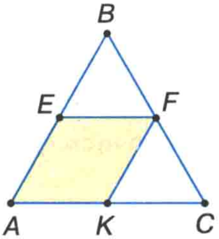
211. Висота ромба у 8 раз менша від його периметра. Знайдіть кути ромба.

212. У рівносторонній трикутник вписано ромб, який має з ним спільний кут (мал. 110).

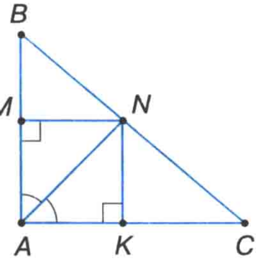
1) Знайдіть периметр ромба, якщо периметр трикутника дорівнює 24 см.

2) Доведіть, що сторона ромба дорівнює половині сторони трикутника.

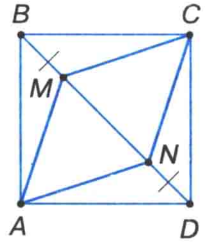
3) Знайдіть довжини відрізків, на які вершини ромба ділять сторони трикутника.



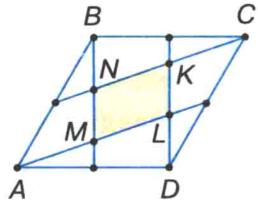
Мал. 110



Мал. 111



Мал. 112



Мал. 113

213. Побудуйте ромб:

1) за діагоналями d_1 і d_2;
2) за стороною a і діагоналлю d;
3) за стороною a і кутом α.

214. AN — бісектриса прямого кута A трикутника ABC (мал. 111); NM і NK — перпендикуляри до катетів. Доведіть, що $AMNK$ — квадрат.

215. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат, який має з ним спільний кут. Знайдіть периметр квадрата, якщо катет трикутника дорівнює: 1) 8 см; 2) 29 мм; 3) 0,41 дм.

216. Доведіть, що ромб, діагоналі якого рівні, — квадрат.

217. На діагоналі BD квадрата $ABCD$ відкладено рівні відрізки $BM = DN$ (мал. 112). Доведіть, що $AMCN$ — ромб.

218. Чи правильні твердження:

1) чотирикутник, діагоналі якого взаємно перпендикулярні й рівні, — квадрат;
2) чотирикутник, усі сторони якого рівні й один із кутів прямий, — квадрат;
3) чотирикутник, діагоналі якого взаємно перпендикулярні й точкою їх перетину діляться навпіл, — квадрат?

219. Побудуйте квадрат: 1) за стороною a; 2) за діагоналлю d.

220*. Доведіть, що діагональ ромба ділить навпіл кут між висотами, проведеними з однієї вершини.

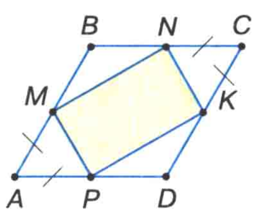
221*. Висоти, проведені з вершини ромба, утворюють кут 30°. Знайдіть кути ромба.

222*. Вершини протилежних кутів ромба сполучено з серединами його сторін так, як показано на малюнку 113. Доведіть, що утворений чотирикутник $MNKL$ — паралелограм.

223*. Із точки перетину діагоналей ромба проведено перпендикуляри до його сторін. Доведіть, що основи цих перпендикулярів є вершинами прямокутника.

224*. Доведіть, що чотирикутник, вершини якого є серединами сторін прямокутника, — ромб.

225*. Від двох протилежних вершин ромба на його сторонах відкладено рівні відрізки (мал. 114). Доведіть, що кінці цих відрізків є вершинами прямокутника.



Мал. 114

226*. Чотирикутник, діагоналі якого рівні і є бісектрисами його кутів, — квадрат. Доведіть.

227*. Сума периметрів чотирьох трикутників, на які квадрат розбивається діагоналями, більша за периметр квадрата на 20 см. Знайдіть діагональ квадрата.

228*. Доведіть, що бісектриси кутів прямокутника, перетинаючись, утворюють квадрат.

229*. Побудуйте квадрат:

1) за сумою *s* діагоналі і сторони;

2) за різницею *m* діагоналі і сторони.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

230. Швачка викроїла з тканини чотирикутник, який має бути ромбом. Як перевірити правильність виготовлення викрійки, не користуючись інструментами?

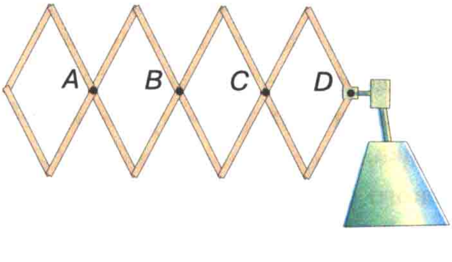
231. Столяр, щоб перевірити, чи має стільниця форму квадрата, виміряв її сторони і побачив, що вони рівні. Чи правильна така перевірка? Чи достатньо виміряти діагоналі стільниці і переконатися, що вони рівні?

232. Земельна ділянка, яка має форму квадрата, була обнесена парканом. З часом від паркану залишилося два стовпці у протилежних вершинах квадрата. Як відновити межу ділянки?

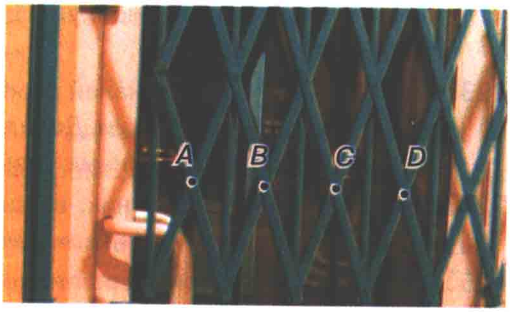
233. Вам потрібно від прямокутної деталі відрізати кусок під кутом 45° від краю. Як ви це зробите?

234. Учень вирішив перевірити, чи має серветка форму квадрата. Він перегнув її за діагоналлю і переконався, що краї обох половинок серветки сумістилися. Але йому зауважили, що така перевірка недостатня. Потрібно перегнути серветку за кожною діагоналлю. Якщо в обох випадках краї серветки сумістяться, то вона має форму квадрата. Чи правильно діяв учень? Чи правильно йому порадили?

235*. За схемами розсувного кронштейна (мал. 115) і розсувної решітки (мал. 116) поясніть, чому точки *A*, *B*, *C*, *D*... завжди лежать на одній прямій.



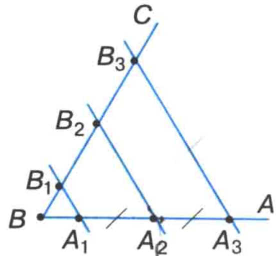
Мал. 115



Мал. 116

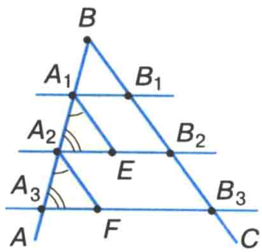
§6. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА

Накресліть кут ABC (мал. 117). Довільним розхилом циркуля відкладіть на стороні AB кута рівні відрізки A_1A_2 і A_2A_3. Проведіть за допомогою косинця і лінійки через точки A_1, A_2, A_3 паралельні прямі, що перетнуть сторону BC цього кута в точках B_1, B_2, B_3. За допомогою циркуля порівняйте довжини відрізків B_1B_2 і B_2B_3. Зробіть висновок.



Мал. 117

Теорема Фалéса. Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій його стороні.



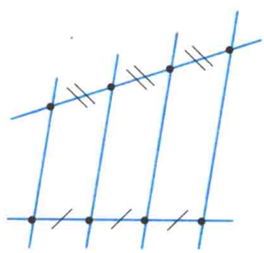
Мал. 118

Дано: $\angle ABC$ (мал. 118),
$A_1A_2 = A_2A_3$,
$A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.

Довести: $B_1B_2 = B_2B_3$.

Доведення. Проведемо через точки A_1 і A_2 прямі A_1E і A_2F, паралельні BC. $\Delta A_1A_2E = \Delta A_2A_3F$ за стороною і прилеглими до неї кутами. У них $A_1A_2 = A_2A_3$ за умовою, $\angle A_1A_2E = \angle A_2A_3F$ і $\angle A_2A_1E = \angle A_3A_2F$ як відповідні кути при паралельних прямих. З рівності цих трикутників випливає, що $A_1E = A_2F$. Але $A_1E = B_1B_2$ і $A_2F = B_2B_3$ як протилежні сторони паралелограмів $A_1B_1B_2E$ і $A_2B_2B_3F$. Отже, $B_1B_2 = B_2B_3$.

? Чи справедлива теорема Фалеса, якщо замість сторін кута взяти довільні дві прямі? Так. Паралельні прямі, які перетинають дві дані прямі і відтинають на одній прямій рівні відрізки, відтинають рівні відрізки і на другій прямій (мал. 119).


Мал. 119

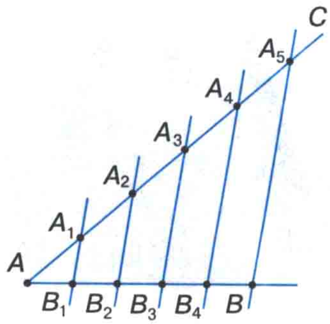
Задача. Поділіть даний відрізок AB на 5 рівних частин.

Розв'язання. Проведемо з точки A промінь AC, що не лежить на прямій AB (мал. 120).

Відкладемо на промені AC п'ять рівних відрізків: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5.

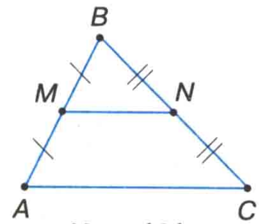
Проведемо пряму A_5B.

Проведемо через точки A_1, A_2, A_3, A_4 прямі, паралельні прямій A_5B. За теоремою Фалеса, ці прямі ділять відрізок AB на п'ять рівних частин.



Мал. 120

Середньою лінією трикутника називається відрізок, який сполучає середини двох його сторін.



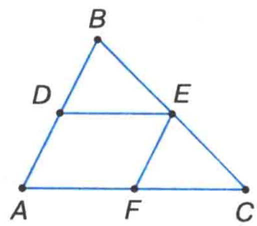
Мал. 121

На малюнку 121 відрізок MN – середня лінія ΔABC, бо точки M і N – середини сторін AB і BC.

Теорема (властивості середньої лінії трикутника). Середня лінія трикутника паралельна третій його стороні й дорівнює її половині.

Дано: ΔABC (мал. 122), $AD = BD$, $CE = BE$.

Довести: 1) $DE \parallel AC$; 2) $DE = \frac{1}{2}AC$.



Мал. 122

Доведення. 1) Нехай DE – середня лінія ΔABC. Проведемо через точку D пряму, паралельну AC. За теоремою Фалеса, вона перетинає відрізок BC в його середині E, тобто містить середню лінію DE. Отже, $DE \parallel AC$.
2) Проведемо пряму $EF \parallel AB$. За теоремою Фалеса, пряма EF ділить відрізок AC навпіл: $AF = FC = \frac{1}{2}AC$. За побудовою, чотирикутник $ADEF$ – паралелограм, тому $DE = AF$. Отже, $DE = \frac{1}{2}AC$.

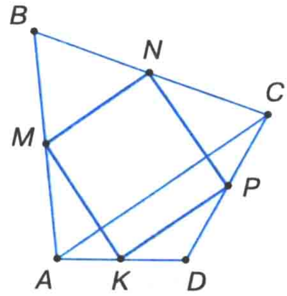
Задача. Доведіть, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник і M, N, P, K – середини його сторін (мал. 123). Доведемо, що $MNPK$ – паралелограм.
Проведемо діагональ AC. MN – середня лінія ΔABC. Тому $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$. KP – середня лінія трикутника ADC. Тому $KP \parallel AC$ і $KP = \frac{1}{2}AC$.

Дістали: $MN \parallel AC$ і $KP \parallel AC$, звідси $MN \parallel KP$;

$MN = \frac{1}{2}AC$ і $KP = \frac{1}{2}AC$, звідси $MN = KP$.

Отже, протилежні сторони MN і KP чотирикутника $MNPK$ рівні і паралельні, тому він — паралелограм.



Мал. 123

Якщо в умові задачі дано середини деяких відрізків, то спробуйте скористатися властивостями середньої лінії трикутника.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Давньогрецького вченого Фале́са з Мілета (625 — 548 рр. до н. е.) вважають одним із семи мудреців світу. Геній Фалеса знайшов втілення у різних галузях людської діяльності. Він займався інженерною справою, був державним діячем, математиком, астрономом. Особливою заслугою Фалеса вважається те, що він увів у математику ідею доведення. Учений довів, що кути при основі рівнобедреного трикутника рівні, що діаметр ділить круг на дві рівні частини, що прямий кут можна вписати у півколо та ін. Як вважають історики, саме Фалес почав застосовувати основні геометричні інструменти — циркуль і лінійку. Вчений виміряв висоту єгипетських пірамід за довжиною їх тіней, вперше передбачив сонячне затемнення, яке відбулося 585 р. до н. е.


Фалес Мілетський

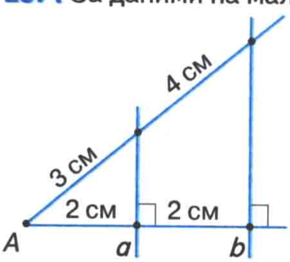
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Сформулюйте і доведіть теорему Фалеса.
2. Як поділити даний відрізок на n рівних частин?
3. Що таке середня лінія трикутника?
4. Сформулюйте і доведіть теорему про властивості середньої лінії трикутника.

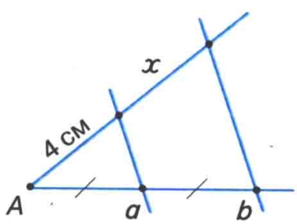
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

236'. Чи правильно вказано на малюнку 124 довжини відрізків? Поясніть відповідь.

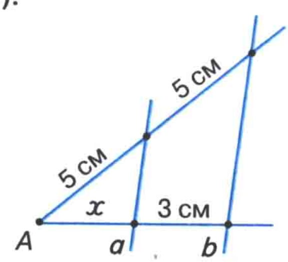
237'. За даними на малюнках 125, 126 знайдіть x ($a \parallel b$).



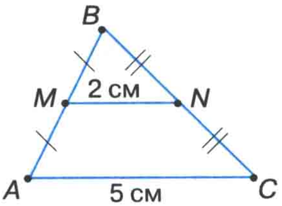
Мал. 124



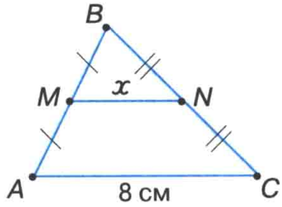
Мал. 125



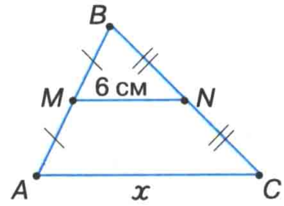
Мал. 126



Мал. 127



Мал. 128



Мал. 129

238'. Чи правильно вказано на малюнку 127 довжини відрізків? Поясніть відповідь.

239'. За даними на малюнках 128, 129 знайдіть x.

240'. DE і EF — середні лінії ΔABC, які відповідно паралельні сторонам BC і AB. Знайдіть:

1) відрізок FC, якщо $DE = 4$ см;

2) відрізок BD, якщо $EF = 7$ см.

241°. На малюнку 130 $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$. Знайдіть:

1) AB_1, якщо $B_2B_3 = 6$ см; 2) AB_3, якщо $B_1B_2 = 5$ см;

3) B_2B_3, якщо $AB_3 = 12$ см.

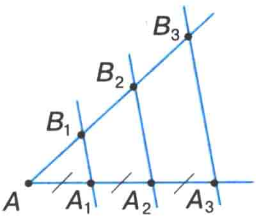
242°. Поділіть даний відрізок на таку кількість рівних частин: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

243°. У ΔABC (мал. 131) $AB = 12$ см, $BC = 18$ см. Сторону AC поділено на три рівні частини і через точки поділу проведено прямі, паралельні AB і BC. Знайдіть:

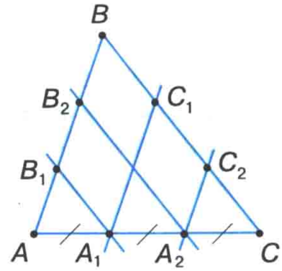
1) довжини відрізків, утворених на сторонах AB і BC;

2) довжини відрізків паралельних прямих, які містяться між сторонами трикутника.

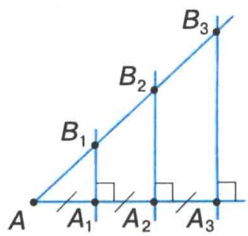
244°. За даними на малюнку 132 доведіть, що $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$.



Мал. 130



Мал. 131



Мал. 132

245°. Знайдіть середні лінії трикутника, якщо його сторони дорівнюють:

1) 8 см, 5 см, 7 см; 2) 30 мм, 40 мм, 50 мм; 3) 9 см, 10 см, 14 см.

246°. Сторони трикутника дорівнюють a, b і c. Знайдіть сторони іншого трикутника, вершини якого є серединами сторін даного трикутника, якщо:

1) $a = 8$ см, $b = 10$ см, $c = 12$ см; 2) $a = 0,5$ дм, $b = 12$ см, $c = 1,3$ дм.

247°. **Доведіть, що в рівносторонньому трикутнику всі середні лінії рівні.** А в рівнобедреному?

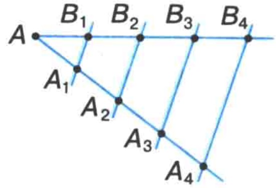
248°. Знайдіть середні лінії рівностороннього трикутника, якщо його периметр дорівнює: 1) 12 см; 2) 24 дм; 3) 48 мм.

249°. Знайдіть периметр рівностороннього трикутника, якщо його середня лінія дорівнює: 1) 4 см; 2) 0,8 дм; 3) 100 мм.

250°. Знайдіть периметр трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють: 1) 3 см, 5 см, 6 см; 2) 7 см, 9 см, 12 см; 3) 8 см, 10 см, 12 см.

251°. Складіть формулу та обчисліть периметр трикутника ABC, якщо периметр другого трикутника, утвореного середніми лініями ΔABC, дорівнює: 1) 18 см; 2) 2,4 дм; 3) 300 мм.

252°. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо два відрізки, які сполучають середини сусідніх сторін, дорівнюють: 1) 5 см і 11 см; 2) 0,6 дм і 0,9 дм; 3) 100 мм і 14 см.



Мал. 133

253°. Визначте вид трикутника, якщо:
1) середні лінії його рівні;
2) дві його середні лінії рівні.

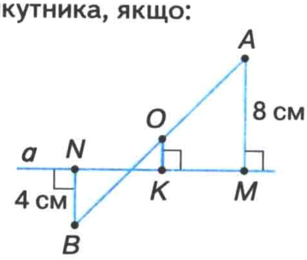
254. Поділіть даний відрізок на дві частини так, щоб вони відносились, як: 1) 2 : 3; 2) 3 : 4; 3) 2 : 5.

255. На малюнку 133 $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$. Знайдіть:
1) AB_3, якщо різниця довжин відрізків AB_4 і B_2B_3 дорівнює 9 см;
2) B_1B_4, якщо різниця довжин відрізків AB_4 і B_1B_3 дорівнює 8 см;
3) AB_4, якщо різниця довжин відрізків B_1B_4 і B_1B_2 дорівнює 10 см.

256. Точки M і N — середини сторін AD і BC паралелограма $ABCD$. Доведіть, що прямі AN і CM ділять діагональ BD на три рівні частини.

257. Середня лінія рівнобедреного трикутника, що паралельна основі, дорівнює m, а його периметр — P. Знайдіть сторони трикутника, якщо: 1) $m = 5$ см, $P = 40$ см; 2) $m = 2{,}5$ см, $P = 2{,}5$ дм.

258. Точки A і B лежать з різних боків від прямої a на відстані 8 см і 4 см від неї (мал. 134). Знайдіть відстань від середини O відрізка AB до прямої a.



Мал. 134

259. Сторони трикутника відносяться, як 3 : 4 : 5, периметр його дорівнює P. Знайдіть сторони трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника, якщо: 1) $P = 60$ см; 2) $P = 4{,}8$ дм.

260. Сторони трикутника відносяться, як 7 : 8 : 9. Периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін даного, дорівнює P. Знайдіть сторони даного трикутника, якщо: 1) $P = 48$ см; 2) $P = 2{,}4$ дм.

261. Доведіть, що периметр даного трикутника вдвічі більший за периметр трикутника, сторони якого є середніми лініями даного трикутника.

262. Діагоналі чотирикутника дорівнюють m і n. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника, якщо: 1) $m = 4$ см, $n = 6$ см; 2) $m = 24$ см, $n = 25$ см.

263. Сума діагоналей чотирикутника дорівнює s. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника, якщо: 1) $s = 25$ см; 2) $s = 3{,}5$ дм.

264. Діагональ квадрата дорівнює d. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін квадрата, якщо: 1) $d = 8$ см; 2) $d = 1{,}3$ дм.

265. Доведіть: 1) середини сторін прямокутника є вершинами ромба;
2) середини сторін ромба є вершинами прямокутника;
3) середини сторін квадрата є вершинами квадрата.

266. Побудуйте трикутник за даними серединами його сторін.

267. Усередині кута ABC дано точку M. Проведіть через точку M пряму так, щоб відрізок її, який відтинають сторони кута, ділився в точці M навпіл.
Побудова (мал. 135). Проводимо $MN \parallel AB$; відкладаємо на стороні BC кута відрізок $NK = BN$; проводимо через точки K і M шукану пряму. Доведіть, що наведена побудова правильна.

268*. Точка K — середина медіани AM трикутника ABC. Пряма BK перетинає сторону AC у точці D. Доведіть, що $AC = 3AD$.

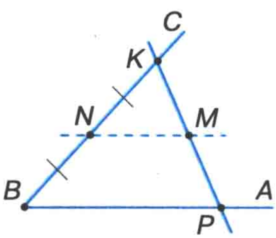
269*. Доведіть, що точка перетину медіан трикутника ділить кожну медіану у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.

270*. Прямі, проведені через вершини A, B і C трикутника ABC паралельно протилежним сторонам, утворюють трикутник $A_1B_1C_1$ (мал. 136).
1) Доведіть, що сторони трикутника $A_1B_1C_1$ діляться точками A, B і C навпіл.
2) Знайдіть сторони трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $AB = 6$ см, $BC = 12$ см, $AC = 15$ см.
3) Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 48 см.

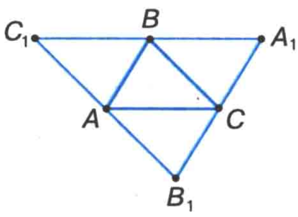
271*. Доведіть, що три висоти трикутника перетинаються в одній точці.

272*. Доведіть, що середні лінії трикутника ділять його на чотири рівні трикутники.

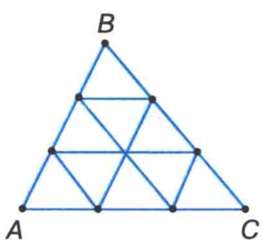
273*. Кожну зі сторін трикутника ABC поділено на три рівні частини і точки поділу сполучено відрізками (мал. 137).
1) Знайдіть суму довжин усіх відрізків, які сполучають точки поділу, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 36 см.
2) Розв'яжіть задачу за умови, що кожну сторону трикутника поділено на чотири рівні частини.



Мал. 135



Мал. 136



Мал. 137

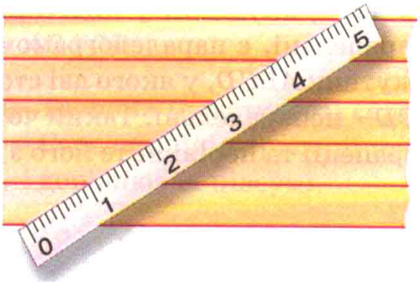
274*. Доведіть, що вершини трикутника лежать на однаковій відстані від прямої, яка проходить через середини двох його сторін.

275*. Через точку M всередині кута ABC проведіть пряму так, щоб відрізок її, який відтинають сторони кута, ділився в точці M у відношенні 1 : 2.

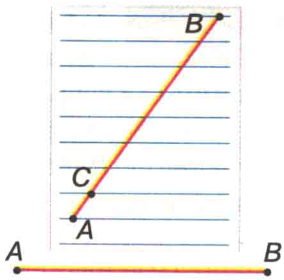
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

276. Потрібно поділити прямокутну смугу (дошку, кусок жерсті, картону) на п'ять смужок однакової ширини. Для цього лінійку розмістили так, як показано на малюнку 138, і позначили точки, що відповідають поділкам однакової довжини. Потім через позначені точки провели прямі, паралельні краю смуги. Чому смуга поділилася цими прямими на п'ять рівних частин?

277. У вас є аркуш зошита з паралельними горизонтальними лініями і циркуль. Потрібно поділити даний відрізок AB на рівні частини, наприклад, на 8 рівних частин (мал. 139). Поясніть за малюнком, як це можна зробити. Чому $AC = \frac{1}{8}AB$? Поясніть, як поділити, наприклад, олівець на 5 рівних частин за допомогою цього ж аркуша зошита.



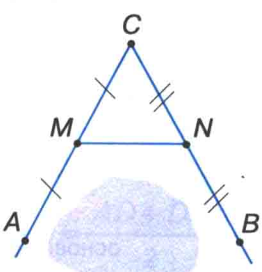
Мал. 138



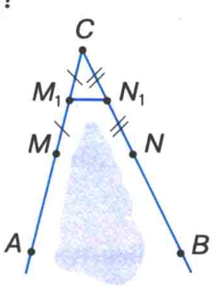
Мал. 139

278. На малюнку 140 показано, як виміряли на місцевості відстань між пунктами A і B, розділеними перешкодою. Позначили довільну точку C і провісили прямі CA і CB. Знайшли точки M і N — середини відрізків AC і BC та виміряли відстань між точками M і N. Поясніть, чому шукана відстань $AB = 2MN$.

279. Може трапитися так, що провісити пряму між точками M і N, як у задачі 278, неможливо (мал. 141). Поясніть за малюнком, як виміряти відстань AB у цьому випадку. Чому шукана відстань $AB = 4M_1N_1$?



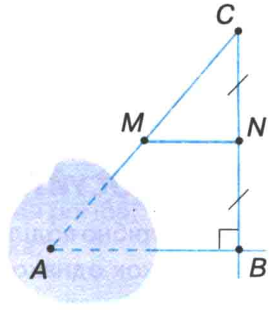
Мал. 140



Мал. 141

280. На малюнку 142 показано, як виміряти відстань між пунктами *A* і *B*, якщо до пункту *A* підійти не можна. Поясніть вимірювання. Чи обов'язково кут *B* повинен бути прямим?

281*. Три населених пункти *A*, *B* і *C* розташовані на рівнині й не лежать на одній прямій. Потрібно прокласти дорогу, щоб вона пройшла на однаковій відстані від цих пунктів. Як це зробити? Покажіть на малюнку. Скільки таких доріг можна прокласти?



Мал. 142

§7. ТРАПЕЦІЯ

Ви знаєте, що чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні, є паралелограмом.

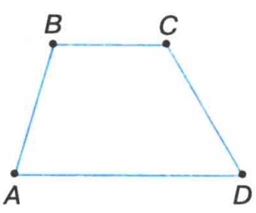
На малюнку 143 зображено чотирикутник *ABCD*, у якого дві сторони *AD* і *BC* паралельні, а дві інші – *AB* і *CD* – непаралельні. Такий чотирикутник – трапеція. Дайте означення трапеції та порівняйте його з наведеним у підручнику.

Трапецією називається чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші – непаралельні.

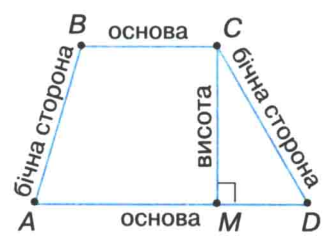
Паралельні сторони трапеції називаються її *основами*, а непаралельні – *бічними сторонами*. На малюнку 144 *AD* і *BC* – основи трапеції, *AB* і *CD* – бічні сторони.

? Чи можуть основи трапеції бути рівними? Не можуть, бо тоді отримаємо паралелограм.

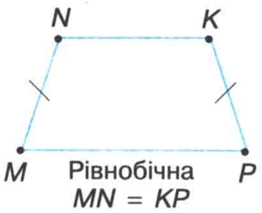
Висотою трапеції називається перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї основи до іншої основи або її продовження (мал. 144).



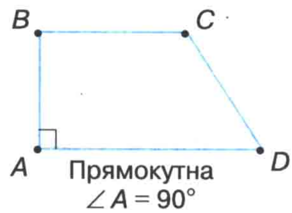
Мал. 143



Мал. 144



Мал. 145

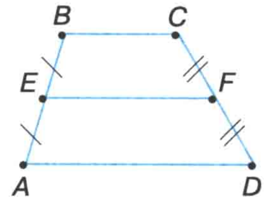


Мал. 146

Трапеція, у якої бічні сторони рівні, називається *рівнобічною*. На малюнку 145 трапеція $MNKP$ – рівнобічна, бо $MN = KP$.

Трапецію, один із кутів якої прямий, називають *прямокутною*. Трапеція $ABCD$ (мал. 146) – прямокутна, бо $\angle A = 90^\circ$.

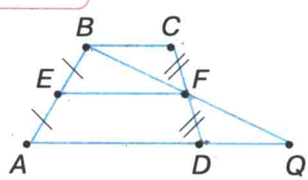
Середньою лінією трапеції називається відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.



Мал. 147

На малюнку 147 відрізок EF – середня лінія трапеції $ABCD$, бо точки E і F – середини бічних сторін AB і CD.

Теорема (властивості середньої лінії трапеції). Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.



Мал. 148

Дано: $ABCD$ – трапеція з основами AD і BC (мал. 148), EF – середня лінія.

Довести: 1) $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$,

2) $EF = \dfrac{AD+BC}{2}$.

Доведення. Оскільки EF – середня лінія трапеції $ABCD$, то $AE = BE$, $DF = CF$. Через точки B і F проведемо пряму, яка перетинає продовження основи AD у точці Q. $\Delta BCF = \Delta QDF$ за стороною і прилеглими до неї кутами. У них $CF = FD$ за умовою, $\angle BFC = \angle QFD$ як вертикальні, $\angle BCF = \angle QDF$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AQ та січній CD. З рівності трикутників випливає: $BF = FQ$, тобто середня лінія EF трапеції є середньою лінією трикутника ABQ.

1) За властивістю середньої лінії трикутника $EF \parallel AQ$, тому $EF \parallel AD$. Оскільки $AD \parallel BC$, то $EF \parallel BC$.

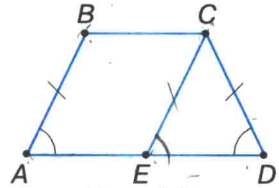
2) $EF = \frac{1}{2}AQ = \dfrac{AD+DQ}{2}$, але $DQ = BC$ (з рівності трикутників BCF і QDF).

Тоді дістанемо $EF = \dfrac{AD+BC}{2}$.

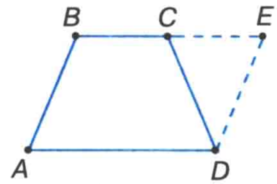
Задача (властивість рівнобічної трапеції).
У рівнобічній трапеції кути при основі рівні.
Доведіть.

Розв'язання. Нехай у трапеції $ABCD$ (мал. 149) $AB = CD$. Доведемо, що кути при основі AD рівні.

Проведемо $CE \parallel AB$. Утворений чотирикутник $ABCE$ — паралелограм, бо протилежні його сторони попарно паралельні. За властивістю паралелограма, $AB = CE$, а за умовою, $AB = CD$. Отже, $CE = CD$ і ΔCDE — рівнобедрений. Тому $\angle CDE = \angle CED$. Але $\angle CED = \angle BAD$ як відповідні кути при паралельних прямих CE і AB та січній AE. Звідси $\angle CDE = \angle BAE$.



Мал. 149

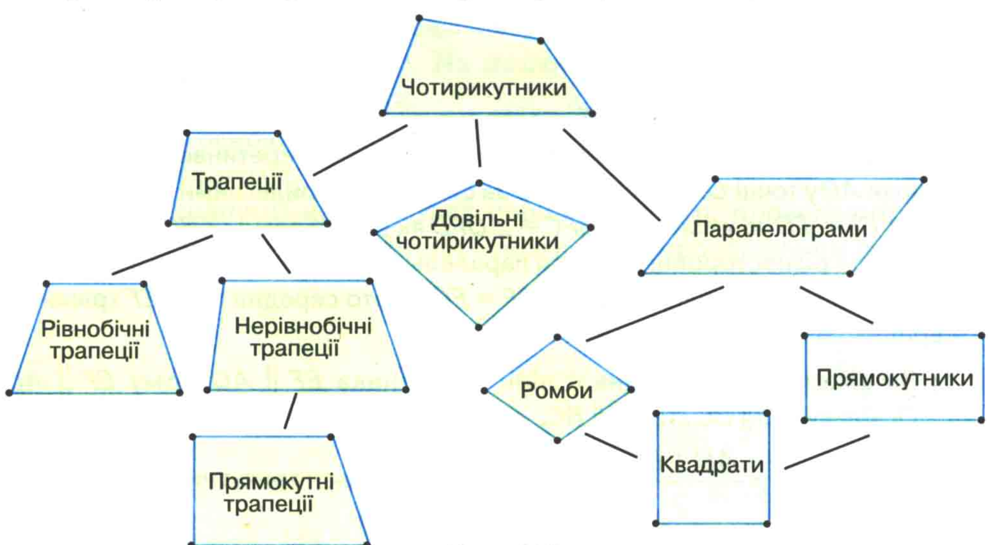


Мал. 150

Якщо в умові задачі дано трапецію, то корисна така допоміжна побудова: проведіть через вершину трапеції пряму, паралельну бічній стороні (мал. 149 або 150), і використайте властивості утворених паралелограма і трикутника.

Розв'яжіть попередню задачу, скориставшись малюнком 150.

Подивіться на малюнок 151, де зображено вивчені вами чотирикутники. Ви бачите, що серед чотирикутників можна виділити паралелограми (протилежні сторони попарно паралельні) і трапеції (тільки дві протилежні сторони паралельні). Серед трапецій, в свою чергу, – рівнобічні і прямокутні. Якщо у паралелограма всі сторони рівні або всі кути прямі, то дістанемо ромби або прямокутники. Нарешті, квадрат є окремим видом або ромба (усі кути прямі), або прямокутника (усі сторони рівні), або паралелограма (усі кути прямі і всі сторони рівні).

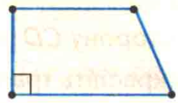
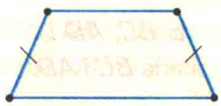
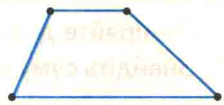


Мал. 151

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Розгляньте таблицю 13 класифікації трапецій за бічними сторонами і кутами.

Таблиця 13

За кутами	За сторонами	
	Рівнобічні	**Нерівнобічні**
Прямокутні	—	
Непрямокутні		

За бічними сторонами трапеції поділяються на рівнобічні і нерівнобічні, а за кутами — на прямокутні і непрямокутні. Рівнобічні трапеції бувають одного виду — непрямокутні; нерівнобічні — як прямокутні, так і непрямокутні.

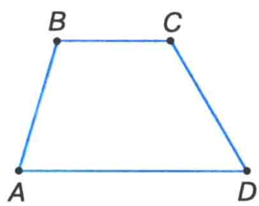
2. Слово «трапеція» походить від грецького слова *trapezion*, що означає — столик. Цей термін як назва виду чотирикутника почав застосовуватися у XVIII ст. Про те, що середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ, було відомо ще стародавнім єгиптянам і вавилонським землемірам.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке трапеція?
2. Які сторони трапеції називаються основами? Бічними сторонами?
3. Яка трапеція називається рівнобічною? Прямокутною?
4. Що таке середня лінія трапеції?
5. Сформулюйте і доведіть властивості середньої лінії трапеції.

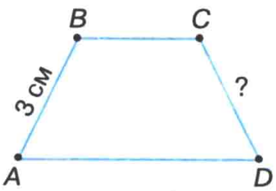
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

282'. На малюнку 152 забражено трапецію *ABCD*, у якої $AD \parallel BC$. Назвіть:
1) основи трапеції;
2) бічні сторони трапеції;
3) кути, прилеглі до основи;
4) кути, прилеглі до бічної сторони.

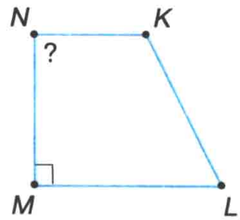


Мал. 152

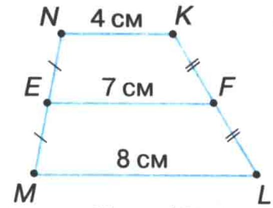
283'. Накресліть гострий кут з вершиною *O*. Проведіть дві паралельні прямі, що перетинають сторони кута. Позначте точки перетину прямих і сторін кута буквами *A*, *B*, *C*, *D*. Якого виду чотирикутник *ABCD*?



Мал. 153



Мал. 154



Мал. 155

284'. За малюнками 153, 154 знайдіть:

1) сторону *CD* рівнобічної трапеції (мал. 153); 2) кут *N* трапеції (мал. 154).

285'. Накресліть трапецію *ABCD* з основами *AD* і *BC*.

1) Проведіть середню лінію *MN*.

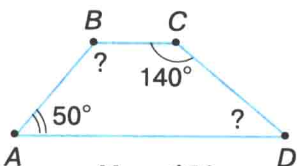
2) Виміряйте довжини відрізків *BC*, *AD* і *MN*.

3) Знайдіть суму довжин відрізків *BC* і *AD*. У скільки разів сума цих відрізків більша за середню лінію?

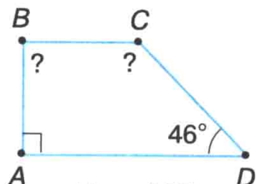
286'. Чи правильно вказано на малюнку 155 довжину середньої лінії трапеції? Поясніть відповідь.

287°. **Доведіть, що сума градусних мір двох кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°.**

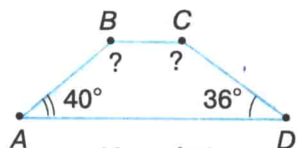
288°. За даними на малюнках 156 — 158 знайдіть невідомі кути трапеції *ABCD*.



Мал. 156



Мал. 157



Мал. 158

289°. *ABCD* — трапеція з основами *AD* і *BC*. Знайдіть:

1) $\angle A$ і $\angle C$, якщо $\angle B = 110°$, $\angle D = 30°$;

2) $\angle A$ і $\angle D$, якщо $\angle B = 125°$, $\angle C = 145°$.

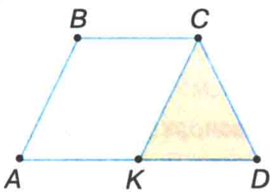
290°. У прямокутній трапеції *ABCD* бічна сторона *AB* перпендикулярна до основи *AD*. Знайдіть невідомі кути трапеції, якщо:

1) $\angle C = 120°$; 2) $\angle D = 25°$; 3) $\angle C - \angle A = 40°$.

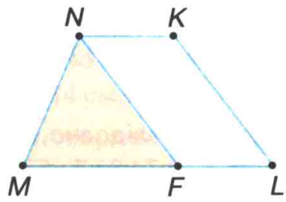
291°. *AD* і *BC* — основи трапеції *ABCD*. За даними таблиці 14 знайдіть невідомі кути трапеції.

Таблиця 14

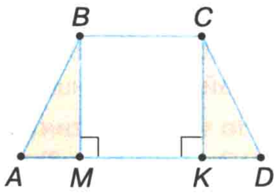
$\angle A$	70°	65°		
$\angle B$			120°	135°
$\angle C$	154°			142°
$\angle D$		36°	28°	



Мал. 159



Мал. 160



Мал. 161

292°. На малюнку 159 $ABCD$ — рівнобічна трапеція з основами AD і BC, $CK \parallel AB$. Доведіть, що:

1) чотирикутник $ABCK$ — паралелограм; 2) трикутник KCD — рівнобедрений.

293°. $MNKL$ — трапеція з основами ML і NK, $NF \parallel KL$ (мал. 160). Знайдіть:

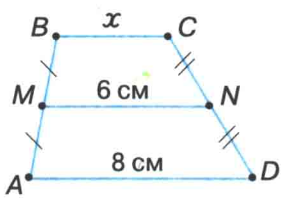
1) основу ML, якщо $MF = 5$ см, $NK = 2$ см;

2) основу NK, якщо $ML = 10$ см, $MF = 7$ см;

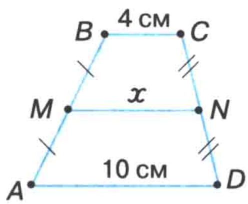
3) відрізок MF, якщо основи дорівнюють 12 см і 4 см.

294°. BM і CK — висоти рівнобічної трапеції $ABCD$ з основами AD і BC (мал. 161). Доведіть, що $\Delta ABM = \Delta DCK$.

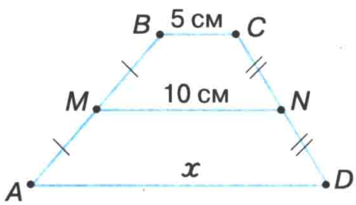
295°. За даними на малюнках 162 – 164 у трапеції $ABCD$ знайдіть відрізок x.



Мал. 162



Мал. 163



Мал. 164

296°. AD і BC — основи трапеції, MN — середня лінія. Заповніть таблицю 15.

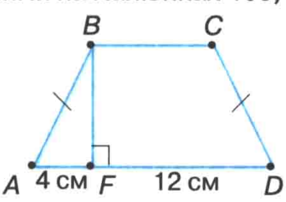
Таблиця 15

AD	10 см	7 см		11 см	9 см
BC	6 см		5 см		15 см
MN		8 см	9 см	10 см	

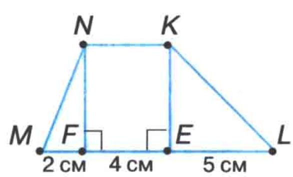
297°. Знайдіть периметр трапеції, у якої бічні сторони дорівнюють c і d, а середня лінія m, якщо:

1) $c = 8$ см, $d = 12$ см, $m = 10$ см; 2) $c = d = 17$ см, $m = 14$ см.

298°. За даними на малюнках 165, 166 знайдіть основи і середню лінію трапеції.



Мал. 165



Мал. 166

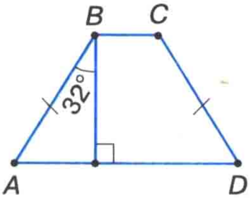
299. Два кути трапеції дорівнюють:
1) 46° і 144°; 2) 35° і 155°; 3) 52° і 124°.
Знайдіть два інші її кути.

300. Чи можуть кути трапеції, взяті послідовно, відноситися, як:
1) 3 : 8 : 5 : 6; 2) 1 : 2 : 2 : 3; 3) 7 : 3 : 4 : 5?

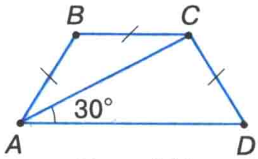
301. Гострий кут прямокутної трапеції з основами a і b дорівнює 45°. Знайдіть висоту трапеції, якщо: 1) $a = 6$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 62$ мм, $b = 10$ см.

302. Якщо кути при основі трапеції рівні, то трапеція рівнобічна. Доведіть.

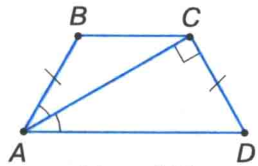
303. За даними на малюнках 167 – 169 знайдіть кути трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$).



Мал. 167



Мал. 168



Мал. 169

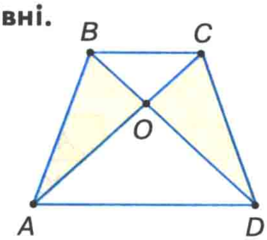
304. Доведіть, що в рівнобічній трапеції сума протилежних кутів дорівнює 180°.

305. Якщо в трапеції сума протилежних кутів дорівнює 180°, то трапеція рівнобічна. Доведіть.

306. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо:
1) різниця протилежних кутів дорівнює 40°;
2) протилежні кути відносяться, як 1 : 4.

307. Доведіть, що діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

308. $ABCD$ – рівнобічна трапеція, $AD \parallel BC$, AC і BD – діагоналі, O – точка їх перетину (мал. 170). Доведіть:
1) ΔBOC і ΔAOD – рівнобедрені;
2) $\Delta AOB = \Delta DOC$.



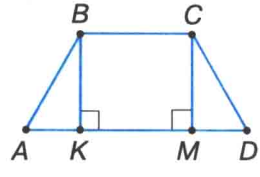
Мал. 170

309. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 10 см, бічна сторона – 4 см, а кут між ними – 60°. Знайдіть меншу основу.

310. Гострий кут рівнобічної трапеції дорівнює 60°, а основи дорівнюють 15 см і 49 см. Знайдіть бічну сторону.

311. Знайдіть основи рівнобічної трапеції, якщо її висота, проведена з вершини тупого кута, ділить основу на відрізки:
1) 4 см і 8 см; 2) 2 см і 7 см.

312. *ABCD* – рівнобічна трапеція, *AD* ∥ *BC*, *BK* і *CM* – висоти (мал. 171).
Доведіть: **1) $AK = MD = (AD - BC) : 2$;**
2) $KD = AM = (AD + BC) : 2$.



Мал. 171

313. Знайдіть довжини відрізків, на які ділить основу рівнобічної трапеції висота, проведена з вершини тупого кута, якщо основи дорівнюють:

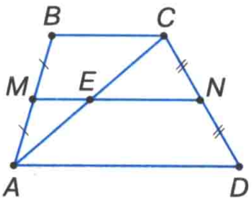
1) 12 см і 24 см; 2) 8 см і 14 см.

314. **Доведіть, що коли бічна сторона трапеції дорівнює меншій основі, то діагональ, яка сполучає їх кінці, є бісектрисою кута, прилеглого до більшої основи.**

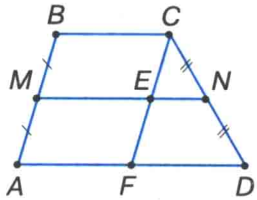
315. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута, а основи дорівнюють a і b. Знайдіть периметр трапеції, якщо:

1) $a = 6$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 62$ мм, $b = 10$ см.

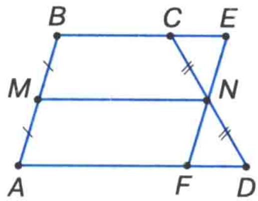
316. Доведіть теорему про властивості середньої лінії трапеції, скориставшись малюнками 172 – 174.



Мал. 172



Мал. 173



Мал. 174

317. Основи трапеції відносяться, як 7 : 3, а різниця їх довжин дорівнює 4,8 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

318. Середня лінія трапеції дорівнює 10 см. Одна з діагоналей ділить її на два відрізки, різниця довжин яких дорівнює 2 см. Знайдіть основи трапеції.

319. **Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам і дорівнює їх піврізниці.**

320. Менша основа трапеції дорівнює a, відстань між серединами діагоналей – c. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо:

1) $a = 6$ см, $c = 4$ см; 2) $a = 50$ мм, $c = 2$ см.

321. Побудуйте трапецію $ABCD$ з основами AD і BC, якщо:

1) $AD = 12$ см, $AB = 6$ см, $CD = 8$ см, $\angle D = 35°$;
2) $AD = 10$ см, $AB = 5$ см, $CD = 6$ см, $BD = 8$ см;
3) $AD = 7$ см, $AB = 3$ см, $\angle A = 60°$, $\angle D = 50°$;
4) $AD = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AC = d$.

322*. Якщо бісектриси кутів при одній основі трапеції перетинаються на другій її основі, то друга основа дорівнює сумі бічних сторін трапеції. Доведіть.

323*. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо бічна сторона дорівнює 24 см, а середня лінія ділиться діагоналлю трапеції на відрізки 8 см і 20 см.

324*. **Якщо діагоналі трапеції рівні, то трапеція рівнобічна.** Доведіть.

325*. **Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, то середня лінія трапеції дорівнює її висоті.**

326*. Якщо середня лінія рівнобічної трапеції дорівнює її висоті, то діагоналі трапеції перпендикулярні. Доведіть.

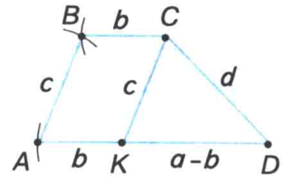
327*. Пряма ділить трапецію на ромб і рівносторонній трикутник. Знайдіть:
1) кут між діагоналями трапеції;
2) основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 18 см.

328*. Прямокутна трапеція ділиться діагоналлю на два трикутники — рівносторонній зі стороною a і прямокутний. Знайдіть середню лінію трапеції.

329*. Периметр трапеції дорівнює 60 см, кути при більшій основі — по 60°. Діагональ ділить середню лінію на частини, одна з яких на 7 см довша за другу. Знайдіть основи трапеції.

330*. За малюнком 175 складіть план побудови трапеції $ABCD$ за основами a і b ($a > b$) та бічними сторонами c і d.

Щоб побудувати трапецію, як і паралелограм, спочатку побудуйте допоміжний трикутник (наприклад, ΔKCD на мал. 175)**, а потім добудуйте його до трапеції.**



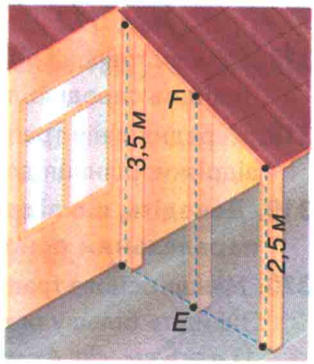
Мал. 175

331*. Побудуйте трапецію за основами a і b ($a > b$) та діагоналями d_1 і d_2.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

332. З однакових плиток, що мають форму рівнобічної трапеції, потрібно виготовити паркет. Як це зробити?

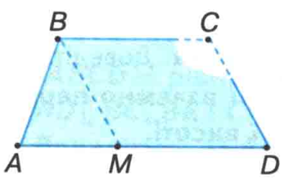
333. Над входом у дачний будинок є навіс. Згодом виникла потреба поставити підпори до середини краю навісу (точка F на мал. 176). Як, не вимірюючи, знайти довжину підпори (відрізка EF), якщо відповідні краї навісу віддалені від поверхні землі на 2,5 м і 3,5 м?



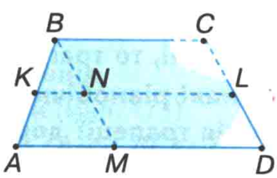
Мал. 176

334. Плитка для даху має форму трапеції (трапеція не рівнобічна). Треба визначити розміри сторін, якщо:
1) обламано один ріжок плитки (мал. 177);
2) обламано два ріжки плитки (мал. 178, 179).
Поясніть, як це зробити.

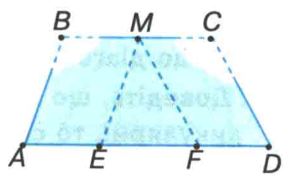
335. Знайдіть відстань від кінця транспортера до поверхні землі (яку безпосередньо виміряти не можна), якщо другий його кінець і середина віддалені від поверхні землі відповідно на 0,5 м і 2 м (мал. 180).



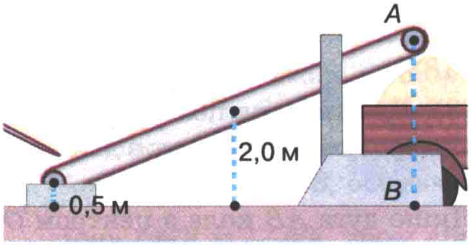
Мал. 177



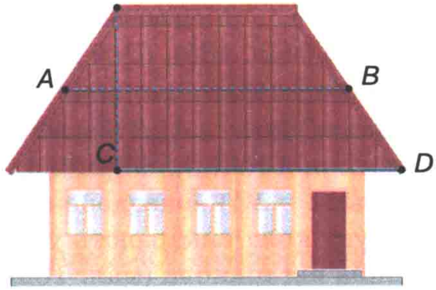
Мал. 178



Мал. 179



Мал. 180

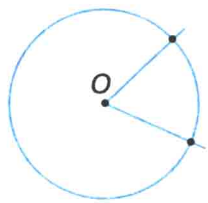


Мал. 181

336*. Подивіться на малюнок 181. Будівельникам потрібно виміряти відстань між серединами бічних сторін покрівлі (точки A і B). Їм запропонували такий спосіб: з верхньої вершини покрівлі умовно провісити пряму, перпендикулярну до нижньої основи покрівлі, орієнтуючись, наприклад, на відповідні краї покриття; позначити точку C перетину цих прямих і виміряти відстань CD. Тоді шукана відстань AB дорівнюватиме CD. Чи правильний цей спосіб? Чому?

§8. ЦЕНТРАЛЬНІ ТА ВПИСАНІ КУТИ

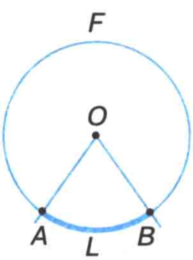
Проведемо коло з центром O і побудуємо кут з вершиною у центрі кола (мал. 182). Дістали центральний кут у колі.



Мал. 182

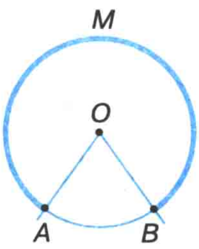
Кут з вершиною у центрі кола називається ***центральним кутом.***

Нехай сторони центрального кута перетинають коло з центром O в точках A і B. Центральному куту AOB відповідають дві дуги з кінцями A і B – дуга, менша від півкола (мал. 183) і дуга, більша за півколо (мал. 184).



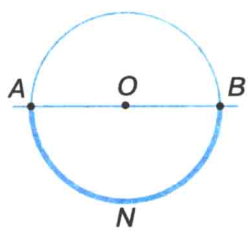
$\smile ALB = \angle AOB$

Мал. 183



$\smile AMB = 360° - \angle AOB$

Мал. 184



$\smile ANB = 180°$

Мал. 185

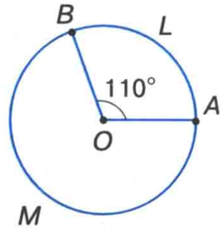
Якщо кут AOB – розгорнутий, то йому відповідають також дві дуги – два півкола (мал. 185). Щоб розрізняти ці дуги, на кожній з них позначають проміжну точку, наприклад L і F (мал. 183).

Записують: $\cup ALB$ і $\cup AFB$ (мал. 183). Дугу можна позначити і без проміжної точки, наприклад $\cup AB$, якщо зрозуміло, про яку з двох дуг йдеться.

Дугу кола вимірюють у градусах. Якщо дуга AB кола з центром O менша від півкола (мал. 183) або є півколом (мал. 185), то її градусна міра дорівнює градусній мірі центрального кута AOB. Якщо ж дуга AB більша за півколо (мал. 184), то її градусна міра дорівнює $360^\circ - \angle AOB$.

Градусна міра всього кола дорівнює 360°.

На малюнку 186 градусна міра дуги ALB дорівнює 110°.

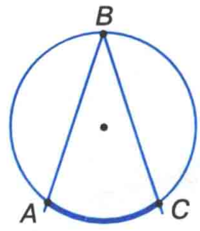


Мал. 186

Коротко говоримо: «Дуга ALB дорівнює 110°» і записуємо: $\cup ALB = 110^\circ$.
На цьому ж малюнку $\cup AMB = 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$.

? Чи залежить градусна міра дуги кола від довжини його радіуса? Не залежить, бо від довжини радіуса кола не залежить градусна міра відповідного центрального кута.

Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло, називається ***вписаним кутом***.



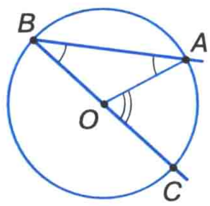
Мал. 187

На малюнку 187 $\angle ABC$ – вписаний, бо його вершина B лежить на колі, а сторони перетинають коло в точках A і C. Якщо дуга AC лежить у внутрішній області вписаного кута ABC, то кажуть, що даний ***вписаний кут спирається на дугу AC***.

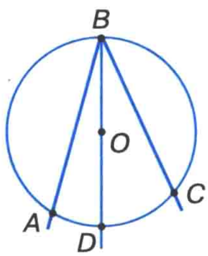
Теорема (про вписаний кут).
Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

Дано: $\angle ABC$ – вписаний у коло з центром O (мал. 188 – 190).

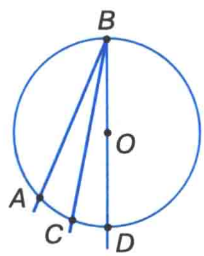
Довести: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.



Мал. 188



Мал. 189



Мал. 190

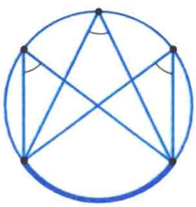
Доведення. Розглянемо три випадки розміщення центра кола відносно сторін даного вписаного кута.

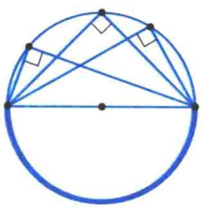
1. Центр кола лежить на стороні вписаного кута (мал. 188). Проведемо відрізок OA, тоді центральний кут AOC є зовнішнім кутом ΔAOB. За властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle AOC = \angle OBA + \angle OAB$.
Але $\angle OBA = \angle OAB$, оскільки ΔAOB – рівнобедрений ($OB = OA = R$).
Тому $\angle AOC = 2\angle ABC$, або $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$. Але $\angle AOC$ вимірюється дугою AC. Отже, вписаний кут ABC вимірюється половиною дуги AC.

2. Центр кола лежить у внутрішній області вписаного кута (мал. 189). Провівши промінь BO, подамо даний кут у вигляді суми двох кутів:
$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$.
За доведеним у першому випадку, $\angle ABD$ вимірюється половиною дуги AD, а $\angle DBC$ – половиною дуги DC. Тому $\angle ABC$ вимірюється сумою півдуг AD і DC, тобто половиною дуги AC.

3. Центр кола лежить у зовнішній області вписаного кута (мал. 190). Провівши промінь BO, дістанемо:

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2}\cup AD - \frac{1}{2}\cup CD = \frac{1}{2}\cup AC.$$


Мал. 191


Мал. 192


Мал. 193

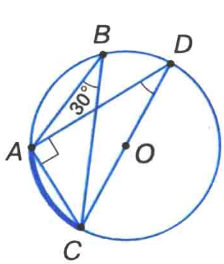
Наслідок 1.

Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні (мал. 191). Справді, кожен з них вимірюється половиною однієї й тієї самої дуги.

Наслідок 2.

Вписаний кут, що спирається на діаметр, – прямий (мал. 192). Справді, такий кут вимірюється половиною півкола, тобто $180^\circ : 2 = 90^\circ$.

? Чи рівні вписані кути, що спираються на рівні дуги (мал. 193)? Так, бо кожен із цих кутів вимірюється половиною рівних дуг, градусні міри яких рівні.



Мал. 194

Задача. Хорди кола AB і BC утворюють кут 30°. Знайдіть хорду AC, якщо діаметр кола 10 см.

Розв'язання. Проведемо діаметр CD і сполучимо точки A і D (мал. 194). $\angle ABC = \angle ADC$ як вписані, що спираються на дугу AC (наслідок 1).

Отже, $\angle ADC = \angle ABC = 30°$. $\angle CAD = 90°$, бо спирається на діаметр кола (наслідок 2). Тоді у прямокутному трикутнику ADC катет AC лежить проти кута $30°$ і дорівнює половині гіпотенузи CD. Отже, $AC = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ (см).

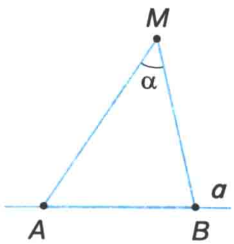
Щоб довести рівність двох кутів, покажіть, що вони є вписаними в одне коло і спираються на одну й ту саму дугу або на рівні дуги цього кола.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

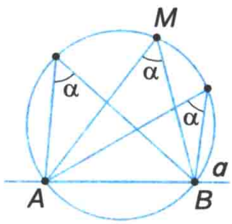
Розглянемо геометричне місце точок, яке використовується під час розв'язування складніших задач на побудову.

Нехай AB — деякий відрізок прямої a, M — довільна точка, яка не лежить на прямій a, $\angle AMB = \alpha$ (мал. 195). Тоді кажуть: *з точки M відрізок AB видно під кутом α.*

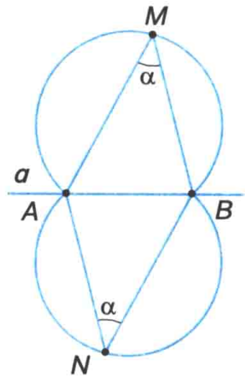
Якщо описати коло навколо ΔAMB (мал. 196), тоді з будь-якої точки дуги AMB (крім точок A і B) відрізок AB видно під кутом α (наслідок 1 з теореми про вписаний кут). Оскільки точку можна взяти і з іншого боку від прямої a, то існує ще одна дуга, наприклад ANB (мал. 197), з кожної точки якої (крім точок A і B) відрізок AB видно під кутом α. Тому **геометричним місцем точок, з яких відрізок AB видно під кутом α, є фігура, що складається з двох дуг AMB і ANB без точок A і B.**



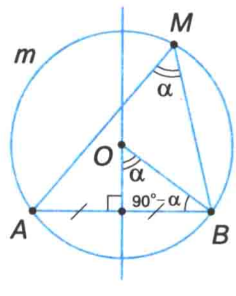
Мал. 195



Мал. 196



Мал. 197



Мал. 198

Щоб побудувати одну з двох дуг цього геометричного місця точок для гострого кута α, треба:

1) провести серединний перпендикуляр до відрізка AB (мал. 198);
2) із точки B провести промінь під кутом $90° - \alpha$ до відрізка AB. O — точка перетину променя з серединним перпендикуляром;
3) описати коло радіусом OB. Дуга AmB — шукане геометричне місце точок.

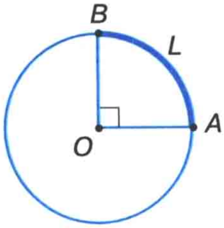
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Який кут називається центральним?
2. Що вважають градусною мірою дуги кола?
3. Що таке кут, вписаний у коло?
4. Доведіть, що вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.
5. Сформулюйте наслідки з теореми про вписаний кут.

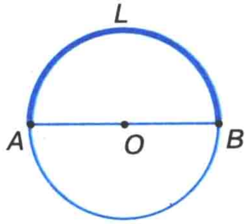
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

337'. Проведіть коло з центром *O* і позначте на ньому дві точки *A* і *B*. Сполучіть ці точки з центром кола. Назвіть центральний кут. Назвіть дві дуги, які відповідають цьому куту.

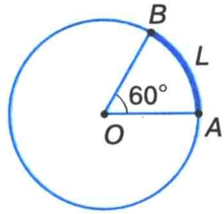
338'. За даними на малюнках 199 – 201 знайдіть градусну міру дуги *ALB*.



Мал. 199



Мал. 200

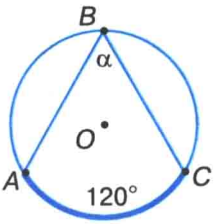


Мал. 201

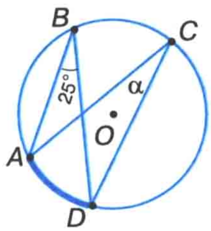
339'. Проведіть коло з центром *O*. Позначте на колі точки *A* і *B* так, щоб дуга *AB* дорівнювала: 1) 70°; 2) 120°; 3) 55°.

340'. Накресліть коло і проведіть діаметр *AB*. Побудуйте кілька вписаних кутів, що спираються на діаметр *AB*. Виміряйте ці кути і порівняйте їх градусні міри. Зробіть висновок.

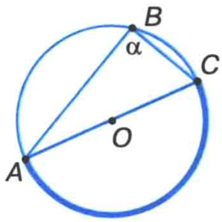
341'. За даними на малюнках 202 – 204 знайдіть градусну міру кута α.



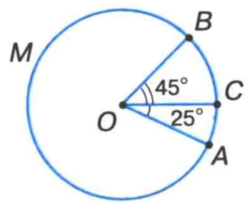
Мал. 202



Мал. 203



Мал. 204

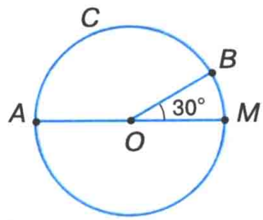


Мал. 205

342°. Скільки градусів має дуга, що дорівнює:

1) $\frac{1}{2}$ кола; 2) $\frac{1}{3}$ кола; 3) $\frac{2}{3}$ кола?

Яка градусна міра відповідного центрального кута?



Мал. 206

343°. Центральний кут *AOB* дорівнює α.
Скільки градусів мають дві дуги, що відповідають куту *AOB*, якщо:
1) $\alpha = 30°$; 2) $\alpha = 62°$; 3) $\alpha = 100°$?

344°. За даними на малюнках 205, 206 знайдіть градусну міру:
1) дуги *ACB*; 2) дуги *AMB*.

345°. Накресліть коло з центром *O* і позначте на ньому точку *A*.
Побудуйте хорду *AB* так, щоб:
1) $\angle AOB = 60°$; 2) $\angle AOB = 90°$; 3) $\angle AOB = 120°$; 4) $\angle AOB = 180°$.
Позначте *дуги кола, що стягує хорда AB*, та знайдіть їх градусні міри.

346°. На півколі з діаметром AB позначено точки C і D так, що $\cup AC = 59°$, $\cup BD = 61°$. Знайдіть хорду CD, якщо радіус кола дорівнює: 1) 12 см; 2) 0,2 дм; 3) 39 мм.

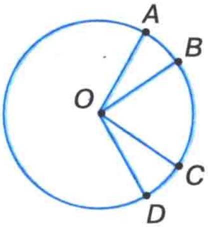
347°. У колі з центром O дуги AB і CD рівні (мал. 207). Доведіть, що $\angle AOC = \angle BOD$.

348°. Дуги ABC і BCD кола з центром O рівні (мал. 207). Доведіть, що $\angle AOB = \angle COD$.

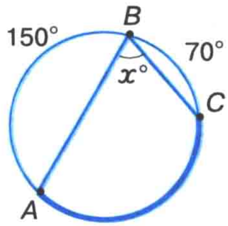
349°. Знайдіть вписаний кут, якщо дуга, на яку він спирається, дорівнює: 1) 52°; 2) 126°; 3) 200°.

350°. Знайдіть дугу, на яку спирається вписаний кут, якщо він дорівнює: 1) 16°; 2) 32°; 3) 110°.

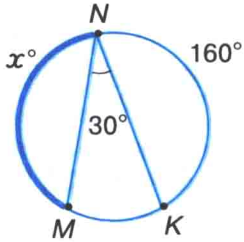
351°. За даними на малюнках 208 – 210 знайдіть $x°$.



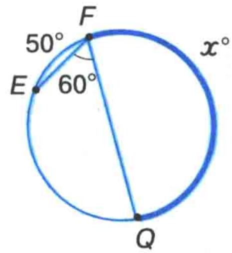
Мал. 207



Мал. 208



Мал. 209



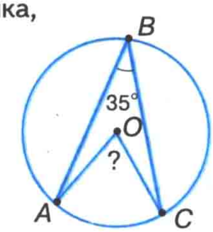
Мал. 210

352°. Точки A, B і C ділять коло на три дуги, градусні міри яких відносяться, як $m : n : k$. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо:
1) $m = n = k = 1$; 2) $m = 1$, $n = k = 2$; 3) $m = 1$, $n = 2$, $k = 3$.

353°. Навколо трикутника ABC описано коло. Знайдіть градусні міри дуг AB, BC і AC, якщо:
1) $\angle A = 65°$, $\angle C = 35°$; 2) $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$; 3) $\angle B = 110°$, $\angle C = 28°$.

354°. Знайдіть кути вписаного в коло рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого стягує дугу: 1) 64°; 2) 120°; 3) 144°.

355°. За даними на малюнках 211, 212 знайдіть кути, позначені знаком «?».



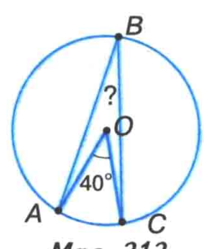
Мал. 211

356. **У колі рівні дуги стягуються рівними хордами.** Доведіть.

357. **У колі рівні хорди стягують рівні дуги.** Доведіть.

358. **Доведіть, що діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить дуги, які вона стягує, навпіл.**

359. **Доведіть, що діаметр, проведений через середину хорди, яка не проходить через центр, ділить навпіл дуги, що їх стягує хорда.**



Мал. 212

360. Дуги, що лежать між паралельними хордами, рівні. Доведіть.

361. Дуги, що лежать між дотичною і паралельною їй хордою, рівні. Доведіть.

362. Кінці хорди AB ділять коло на дві дуги ACB і ADB. Знайдіть вписані у це коло кути ACB і ADB, якщо: 1) $\cup ACB : \cup ADB = 2:3$; 2) $\cup ACB : \cup ADB = 4:5$.

363. Точки P і T ділять коло на дуги, градусні міри яких відносяться, як:
1) 3 : 5; 2) 2 : 7.
Знайдіть вписаний кут, що спирається на дугу PT.

364. Точки A і B ділять коло на дві дуги, менша з яких дорівнює 160°, а більша точкою C ділиться у відношенні 2 : 3, починаючи від точки A.
Знайдіть: 1) $\angle ABC$; 2) $\angle BAC$.

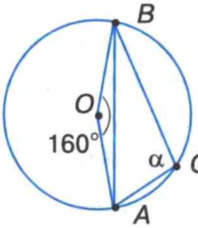
365. Доведіть, що коли хорди AB і BC утворюють кут 30°, то хорда AC дорівнює радіусу кола.

366. Знайдіть кут, який утворюють хорди AB і BC, якщо хорда AC дорівнює радіусу кола. (Розгляньте два випадки.)

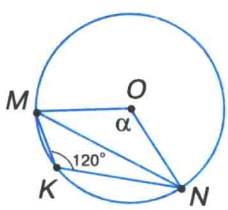
367. Хорда ділить коло на дві дуги, одна з яких в n раз більша за другу. Знайдіть вписані кути, які спираються на цю хорду, якщо:
1) $n = 3$; 2) $n = 4$.

368. Доведіть, що сума вписаних кутів, які спираються на хорду кола і вершини яких лежать з різних боків від неї, дорівнює 180°.

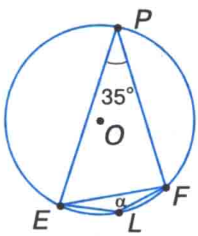
369. За даними на малюнках 213 — 215 знайдіть кут α.



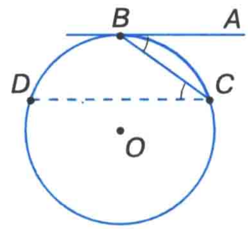
Мал. 213



Мал. 214



Мал. 215



Мал. 216

370. Центральний кут на $n°$ більший за вписаний кут, що спирається на ту саму дугу. Знайдіть градусну міру кожного з цих кутів, якщо:
1) $n = 35°$; 2) $n = 45°$.

371. Доведіть, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи.

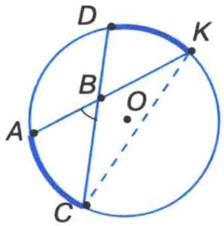
372. Доведіть, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, розбиває його на два рівнобедрених трикутники.

373. Кут між дотичною і хордою, що проходить через точку дотику, вимірюється половиною дуги, яка лежить між його сторонами (мал. 216). Доведіть.

374. Через кінець хорди, яка ділить коло у відношенні $m : n$, проведено дотичну. Знайдіть гострий кут між хордою і дотичною, якщо:
1) $m = 1, n = 3$; 2) $m = 2, n = 7$.

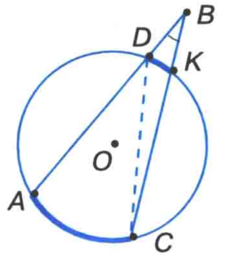
375*. **Доведіть, що кут з вершиною всередині кола вимірюється півсумою дуг, на які спирається даний кут і кут, вертикальний з ним.** (Скористайтеся малюнком 217.)

376*. **Доведіть, що кут, вершина якого лежить зовні кола, а сторони перетинають коло, вимірюється піврізницею більшої і меншої дуг, які містяться між його сторонами.** (Скористайтеся малюнком 218.)



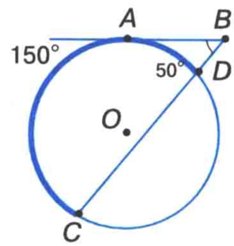
$\angle ABC = \dfrac{\smile AC + \smile DK}{2}$

Мал. 217

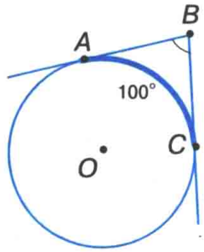


$\angle ABC = \dfrac{\smile AC - \smile DK}{2}$

Мал. 218



Мал. 219



Мал. 220

377*. За даними на малюнках 219, 220 знайдіть кут ABC.

378*. Коло поділено точками A, B і C на дуги, що відносяться, як 11 : 3 : 4. Через точки A, B і C проведено дотичні до їх взаємного перетину. Знайдіть кути утвореного трикутника.

379*. До двох кіл з центрами O і O_1, які дотикаються зовні у точці A, проведено спільну дотичну BC (B і C — точки дотику). Доведіть, що кут BAC — прямий.

380*. Два кола мають внутрішній дотик, причому менше коло проходить через центр більшого. Доведіть, що будь-яка хорда більшого кола, яка проходить через точку дотику, ділиться меншим колом навпіл.

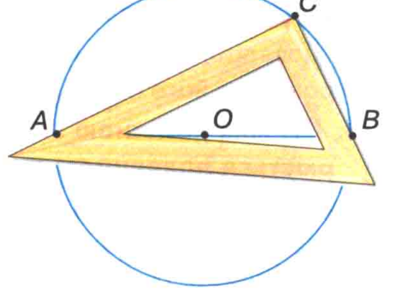
381*. Знайдіть геометричне місце вершин:

1) прямих кутів, сторони яких проходять через дві дані точки;

2) трикутників із спільною основою AB, у яких кут, що лежить проти основи, дорівнює даному куту α.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

382. Правильність виготовлення косинця перевірили так. Накреслили коло і його діаметр AB (мал. 221). Приклали косинець так, щоб його катети проходили через точки A і B. Якщо при цьому вершина прямого кута косинця лежить на колі, то косинець правильний. Поясніть, чому це так.

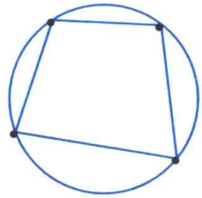


Мал. 221

383. У центрі диска, який має форму круга, потрібно просвердлити отвір. Як знайти центр диска за допомогою одного косинця?

§9. ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ

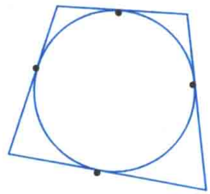
Позначимо на колі чотири точки і сполучимо їх хордами так, як показано на малюнку 222. Отримали чотирикутник, вписаний у коло.



Мал. 222

Чотирикутник, усі вершини якого лежать на колі, називається ***вписаним*** у це коло, а ***коло*** – ***описаним*** навколо цього чотирикутника.

Позначимо на колі чотири точки і проведемо через них відрізки дотичних так, як показано на малюнку 223. Отримали чотирикутник, описаний навколо кола.



Мал. 223

Чотирикутник, усі сторони якого дотикаються до кола, називається ***описаним*** навколо цього кола, а ***коло – вписаним*** у цей чотирикутник.

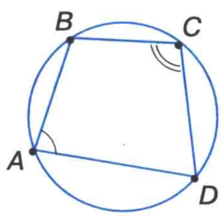
Властивість вписаного чотирикутника та його ознака пов'язані з кутами цього чотирикутника.

Теорема (властивість кутів вписаного чотирикутника). Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.

Дано: чотирикутник $ABCD$, вписаний у коло (мал. 224).

Довести: $\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$.

Доведення. Кути A, B, C і D – вписані у коло.



Мал. 224

За теоремою про вписаний кут маємо: $\angle A = \frac{1}{2} \cup DCB$, $\angle C = \frac{1}{2} \cup DAB$.

Тоді $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\cup DCB + \cup DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

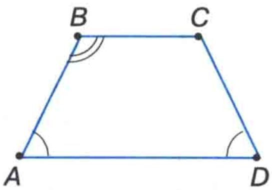
Сума всіх кутів чотирикутника дорівнює 360°, а сума кутів A і C – 180°. Тоді $\angle B + \angle D = 360° - (\angle A + \angle C) = 360° - 180° = 180°$.

? Чи навколо кожного чотирикутника можна описати коло? На відміну від трикутника, не кожний чотирикутник вписаний. Наведемо ознаку вписаного чотирикутника без доведення.

Теорема (ознака вписаного чотирикутника).
Якщо в чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо такого чотирикутника можна описати коло.

Задача. Доведіть, що навколо рівнобічної трапеції можна описати коло.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція з основами AD і BC (мал. 225).
Доведемо, що $\angle B + \angle D = 180°$.
У будь-якій трапеції сума кутів, прилеглих до однієї бічної сторони, дорівнює 180° (випливає з властивості паралельних прямих).
Отже, $\angle A + \angle B = 180°$.
За властивістю рівнобічної трапеції, $\angle A = \angle D$.



Мал. 225

Тоді $\angle B + \angle D = 180°$ і, за теоремою про ознаку вписаного чотирикутника, трапеція $ABCD$ — вписана.

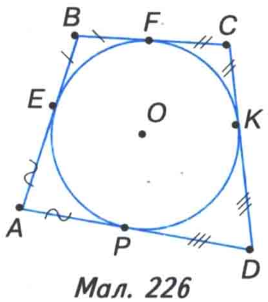
Властивість описаного чотирикутника і його ознака пов'язані зі сторонами цього чотирикутника.

Теорема (властивість сторін описаного чотирикутника).
Суми протилежних сторін описаного чотирикутника рівні.

Дано: чотирикутник $ABCD$, описаний навколо кола (мал. 226),
E, F, K і P — точки дотику.

Довести: $AB + CD = BC + AD$.

Доведення. За властивістю дотичних, проведених до кола з однієї точки, маємо:
$AE = AP$, $BE = BF$, $CK = CF$, $DK = DP$.
Додавши почленно ці рівності, отримаємо:
$AE + BE + CK + DK = AP + BF + CF + DP$,
тобто $AB + CD = BC + AD$.



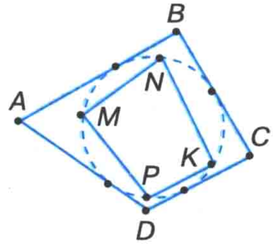
Мал. 226

? Чи в кожен чотирикутник можна вписати коло? На відміну від трикутника, не в усякий чотирикутник можна вписати коло. Наведемо ознаку описаного чотирикутника без доведення.

Теорема (ознака описаного чотирикутника).
Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в цей чотирикутник можна вписати коло.

Щоб довести, що чотирикутник $MNKP$ (мал. 227) – вписаний, покажіть, що:
або $\angle M + \angle K = 180°$,
або $\angle N + \angle P = 180°$.

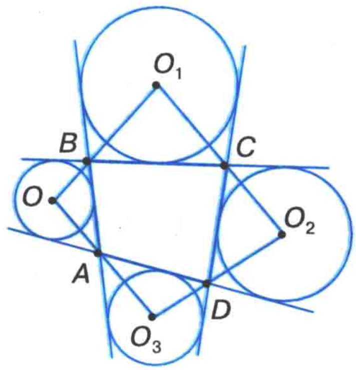
Щоб довести, що чотирикутник $ABCD$ (мал. 227) – описаний, покажіть, що:
$AB + CD = AD + BC$.



Мал. 227

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Крім кіл, вписаного в чотирикутник і описаного навколо нього, є ще *зовнівписані* кола.
Проведемо в довільному чотирикутнику $ABCD$ бісектриси зовнішніх кутів при вершинах A, B, C і D (мал. 228). Точки їх перетину O, O_1, O_2, і O_3 є центрами чотирьох зовнівписаних кіл. Кожне з них дотикається до однієї сторони чотирикутника і до продовжень двох інших його сторін.
Зовнівписані кола мають таку властивість: їх центри є вершинами чотирикутника $OO_1O_2O_3$, вписаного у коло.



Мал. 228

Справді, $\angle OO_1O_2 = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$ і $\angle OO_3O_2 = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$,

тому $\angle OO_1O_2 + \angle OO_3O_2 = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

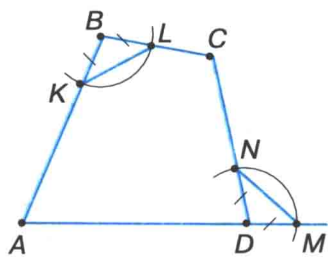
Отже, чотирикутник $OO_1O_2O_3$ є вписаним у коло.

2. Давньогрецькі вчені відкрили, крім уже відомих вам, інші цікаві властивості вписаних і описаних чотирикутників. Наведемо приклади.

Теорема Птолемея (II ст.). Добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.

Задача Архімеда (III ст. до н. е.). Якщо діагоналі вписаного чотирикутника перпендикулярні, то сума квадратів чотирьох відрізків, на які діляться діагоналі точкою перетину, дорівнює квадрату діаметра описаного кола.

Пізніше (IX – XIII ст.) арабські вчені з'ясували деякі нові відомості про вписані і описані чотирикутники та способи дослідження їх властивостей.
Так, обдарований геометр Гасан ібн-Гайтем (помер у 1038 р.) запропонував, як виявити, чи є вписаним даний чотирикутник, користуючись лише циркулем.
Нехай дано чотирикутник $ABCD$ (мал. 229). Продовжимо сторону AD за точку D. Проведемо одним і тим самим розхилом циркуля дуги кіл з центрами в



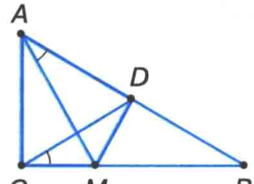
Мал. 229

точках B і D. Якщо $KL = MN$, то чотирикутник $ABCD$ — вписаний, оскільки $\angle ABC + \angle ADC = 180°$ (доведіть це). В інших випадках чотирикутник не є вписаним.

3. У процесі розв'язуваня задач інколи корисно розглядати кола, не дані в умові. На малюнку до задачі спочатку знаходимо чотирикутник, навколо якого можна описати коло або у який можна вписати коло, а потім використовуємо властивості хорд, діаметрів, вписаних кутів, кутів з вершиною всередині кола та ін.

Задача. З довільної точки M катета BC прямокутного трикутника ABC проведено перпендикуляр MD до гіпотенузи AB (мал. 230). Доведіть, що $\angle MAD = \angle MCD$.

Розв'язання. Навколо чотирикутника $ADMC$ можна описати коло, оскільки $\angle ACM + \angle ADM = 180°$. Тоді $\angle MAD = \angle MCD$ як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу MD.



Мал. 230

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

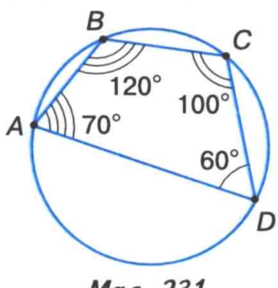
1. Який чотирикутник називається вписаним у коло? Описаним навколо кола?
2. Сформулюйте і доведіть теорему про властивість кутів вписаного чотирикутника.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про властивість сторін описаного чотирикутника.
4. Сформулюйте ознаку вписаного чотирикутника; описаного чотирикутника.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

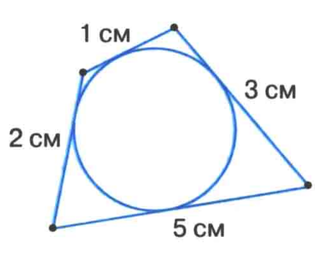
384'. Накресліть коло і позначте на ньому чотири точки A, B, C і D. Послідовно сполучіть ці точки відрізками. Виміряйте транспортиром кути утвореного вписаного чотирикутника $ABCD$. Знайдіть суми градусних мір протилежних кутів A і C та B і D. Порівняйте ці суми і зробіть висновок.

385'. Чи правильно вказано на малюнку 231 градусні міри кутів чотирикутника? Поясніть відповідь.

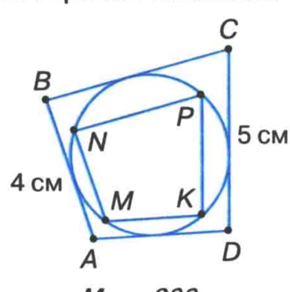
386'. Накресліть коло і проведіть чотири дотичні до кола так, щоб утворився описаний чотирикутник. Виміряйте сторони цього чотирикутника. Знайдіть суму довжин протилежних сторін. Порівняйте ці суми і зробіть висновок.



Мал. 231



Мал. 232



Мал. 233

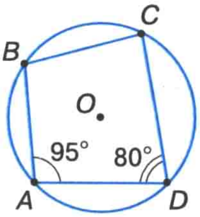
387'. Чи правильно вказано на малюнку 232 довжини сторін чотирикутника? Поясніть відповідь.

388'. За даними на малюнку 233 знайдіть:

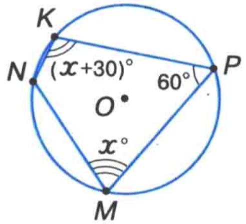
1) суму сторін AD і BC описаного чотирикутника $ABCD$;

2) суму кутів M і P вписаного чотирикутника $MNPK$.

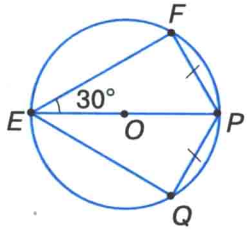
389°. За даними на малюнках 234 — 236 знайдіть кути вписаних чотирикутників.



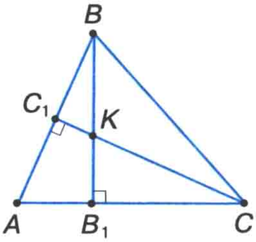
Мал. 234



Мал. 235



Мал. 236



Мал. 237

390°. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо:

1) кути A, B, C і D відповідно дорівнюють:

а) 90°, 90°, 110°, 120°; б) 70°, 130°, 110°, 50°.

2) кути A, B, C відповідно дорівнюють:

а) 85°, 130°, 95°; б) 60°, 100°, 119°.

391°. У трикутнику ABC проведено висоти BB_1 і CC_1, які перетинаються в точці K (мал. 237). Доведіть, що навколо чотирикутника AB_1KC_1 можна описати коло. Знайдіть кут B_1KC_1, якщо кут A дорівнює: 1) 55°; 2) 72°; 3) 60°.

392°. Чи можна описати коло навколо довільного:

1) прямокутника; 2) квадрата; 3) ромба? Поясніть відповідь.

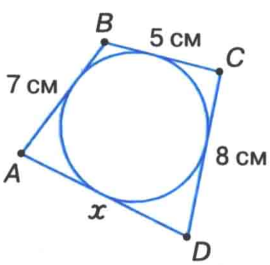
393°. Доведіть, що центр кола, описаного навколо прямокутника, є точкою перетину діагоналей.

394°. AD і BC — діаметри кола.

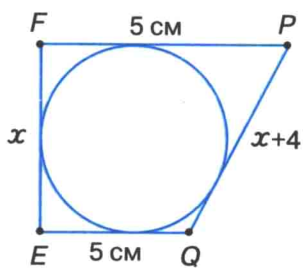
1) Доведіть, що чотирикутник $ABDC$ — прямокутник.

2) За якої умови прямокутник $ABDC$ буде квадратом?

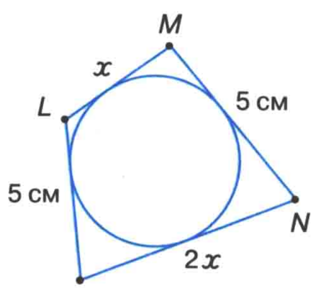
395°. За даними на малюнках 238 — 240 знайдіть невідомі сторони описаних чотирикутників.



Мал. 238



Мал. 239



Мал. 240

396°. Сума двох протилежних сторін описаного чотирикутника дорівнює s. Знайдіть периметр чотирикутника, якщо: 1) $s = 20$ см; 2) $s = 3{,}2$ дм.

397°. Знайдіть периметр описаного чотирикутника, сторони якого, взяті послідовно, дорівнюють: 1) 12 см, 16 см, 28 см; 2) 10 см, 14 см, 16 см.

398°. Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого, взяті послідовно, дорівнюють: 1) 2 см, 3 см, 5 см, 4 см; 2) 7 см, 4 см, 3 см, 5 см?

399°. Чи можна вписати коло у довільний: 1) прямокутник; 2) квадрат; 3) ромб? Поясніть відповідь.

400°. **Доведіть, що центром кола, вписаного в ромб, є точка перетину діагоналей.**

401. Кути A, B і C вписаного чотирикутника $ABCD$ відносяться, як $m : n : k$. Знайдіть кут D, якщо: 1) $m = 2$, $n = 3$, $k = 4$; 2) $m = 1$, $n = k = 2$.

402. Менша сторона прямокутника дорівнює b, а кут між діагоналями — 60°. Знайдіть радіус описаного кола, якщо: 1) $b = 10$ см; 2) $b = 2{,}3$ дм.

403. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, кути якого, взяті послідовно, відносяться, як : 1) 2 : 4 : 5 : 3; 2) 5 : 7 : 8 : 9?

404. **Доведіть:**

1) будь-яка трапеція, вписана у коло, — рівнобічна;

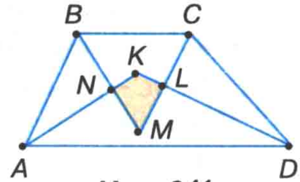
2) будь-який паралелограм, вписаний у коло, — прямокутник;

3) будь-який ромб, вписаний у коло, — квадрат.

405. Доведіть, що кут A вписаного чотирикутника $ABCD$ дорівнює зовнішньому куту при вершині C.

406. Доведіть, що бісектриси кутів трапеції $ABCD$, перетинаючись, утворюють чотирикутник $MNKL$, навколо якого можна описати коло (мал. 241).

407. Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого, взяті послідовно, пропорційні числам: 1) 2, 2, 3, 3; 2) 2, 5, 3, 4?



Мал. 241

408. Два рівнобедрених трикутники мають спільну основу, а вершини лежать з різних боків від неї. Чи можна в утворений чотирикутник вписати коло?

409. Як треба розмістити два рівних різносторонніх трикутники, щоб в утворений ними чотирикутник можна було вписати коло?

410. **Доведіть, що бічну сторону трапеції, описаної навколо кола з центром O, видно з точки O під кутом 90°.**

411. **Якщо чотирикутник описаний, то сума кутів, під якими видно з центра вписаного кола дві його протилежні сторони, дорівнює 180°.** Доведіть.

412. Три сторони описаної трапеції, взяті послідовно, відносяться, як 2 : 7 : 12. Знайдіть сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює: 1) 42 мм; 2) 56 см.

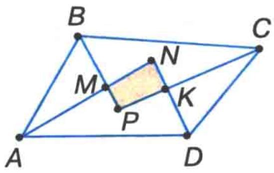
413. Складіть формулу та знайдіть середню лінію описаної трапеції, якщо її периметр дорівнює: 1) 16 см; 2) 200 мм.

414. Кут описаної рівнобічної трапеції дорівнює 150°, її середня лінія — 40 см. Знайдіть: 1) висоту трапеції; 2) радіус вписаного кола.

415. Побудуйте квадрат: 1) вписаний у коло; 2) описаний навколо кола.

416. Побудуйте прямокутник за радіусом *R* описаного навколо нього кола і: 1) стороною *a*; 2) кутом α між діагоналями.

417*. **Доведіть, що бісектриси кутів чотирикутника, перетинаючись, утворюють чотирикутник, навколо якого можна описати коло** (див. мал. 242).



Мал. 242

418*. Доведіть, що у вписаному чотирикутнику *ABCD* бісектриса кута *A* перетинається з бісектрисою зовнішнього кута при вершині *C* у точці, яка лежить на колі, описаному навколо чотирикутника.

419*. Із точки *P* перетину взаємно перпендикулярних діагоналей чотирикутника *ABCD* провели перпендикуляри *PK*, *PL*, *PM* і *PN* до сторін, причому точки *K*, *L*, *M* і *N* лежать на сторонах *AB*, *BC*, *CD*, *DA* відповідно. Доведіть, що чотирикутник *KLMN* — вписаний у коло.

420*. Пряма, паралельна бічній стороні рівнобедреного трикутника, відтинає від нього трапецію, бічна сторона якої є частиною основи даного трикутника і вдвічі довша за її меншу основу. Чи можна в таку трапецію вписати коло?

421*. Якщо навколо трапеції можна описати коло і в цю саму трапецію можна вписати коло, то кожна бічна сторона трапеції дорівнює її середній лінії. Доведіть.

422*. Побудуйте ромб за радіусом *R* вписаного в нього кола і стороною *a*.

423*. Побудуйте чотирикутник за радіусом *R* описаного навколо нього кола і сторонами *a*, *b*, *c*.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

424. Уздовж країв круглого диска потрібно висвердлити чотири отвори на однаковій відстані один від одного і один отвір — у центрі. Накресліть малюнок і поясніть, як це зробити.

425. Поясніть, як із листа жерсті прямокутної форми вирізати круг найбільшого радіуса.

426. Із аркуша картону круглої форми потрібно вирізати квадрат, діагональ якого дорівнює діаметру круга. Поясніть, як це зробити.

427. Мешканці чотирьох дачних будинків вирішили знайти таке місце для колодязя, щоб відстані від нього до будинків були однаковими. Виявилось, що будинки розташовані у вершинах рівнобічної трапеції. Зробіть малюнок і знайдіть місце для колодязя.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Доведіть теорему про суму кутів чотирикутника.
2. Який чотирикутник називається паралелограмом?
3. Сформулюйте і доведіть теореми про властивості сторін і кутів паралелограма; діагоналей паралелограма.
4. Які ознаки паралелограма?
5. Що таке прямокутник? Ромб? Квадрат? Трапеція? Рівнобічна трапеція?
6. Сформулюйте і доведіть теореми про властивості діагоналей прямокутника; ромба.
7. Які властивості квадрата?
8. Доведіть теореми про властивості середньої лінії трикутника; трапеції.
9. Який кут називається центральним? Вписаним у коло?
10. Доведіть, що вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.
11. Який чотирикутник називається вписаним у коло? Описаним навколо кола?
12. Сформулюйте і доведіть теореми про властивість сторін описаного чотирикутника; про властивість кутів вписаного чотирикутника.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

№ 1

1° Знайдіть тупий кут паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює $30°$.

А. $60°$. **Б.** $120°$. **В.** $150°$. **Г.** $180°$.

2° За якої з наведених умов чотирикутник є паралелограмом?

А. Дві протилежні сторони рівні.
Б. Одна з діагоналей ділить другу навпіл.
В. Дві протилежні сторони паралельні.
Г. Діагоналі діляться точкою їх перетину навпіл.

3° Діагональ прямокутника дорівнює 10 см і утворює зі стороною кут 30°. Знайдіть меншу сторону прямокутника.

А. 15 см. **Б.** 5 см. **В.** 20 см. **Г.** 6 см.

4 Знайдіть гострий кут ромба, якщо його периметр дорівнює 24 см, а висота — 3 см.

А. $60°$. **Б.** $90°$. **В.** $30°$. **Г.** $45°$.

5* Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $BK = 12$ см, $KC = 8$ см.

А. 20 см. **Б.** 40 см. **В.** 44 см. **Г.** 64 см.

№ 2

1° У ΔABC $BC = 18$ см. Сторону AB поділено на три рівні частини і через точки поділу проведено прямі, паралельні стороні AC. Знайдіть відрізки, які відтинають паралельні прямі на стороні BC трикутника.

А. 5 см, 5 см, 5 см. **Б.** 6 см, 6 см, 6 см.
В. 5 см, 6 см, 6 см. **Г.** 4 см, 4 см, 4 см.

2° Точки M і N — середини сторін AB і BC ΔABC.
Знайдіть сторону AC трикутника, якщо $MN = 4$ см.

А. 8 см. **Б.** 12 см. **В.** 2 см. **Г.** 6 см.

3° $ABCD$ — трапеція з основами AD і BC.
Знайдіть кути A і C трапеції, якщо $\angle B = 100°$, $\angle D = 60°$.

А. 30° і 100°. **Б.** 70° і 120°. **В.** 80° і 120°. **Г.** 45° і 150°.

4 Одна з основ трапеції дорівнює 10 см.
Знайдіть другу її основу, якщо середня лінія дорівнює 8 см.

А. 6 см. **Б.** 16 см. **В.** 18 см. **Г.** 2 см.

5* Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою гострого кута, а основи дорівнюють 5 см і 12 см.
Знайдіть периметр трапеції.

А. 17 см. **Б.** 22 см. **В.** 25 см. **Г.** 27 см.

№ 3

1° Знайдіть вписаний кут, якщо дуга, на яку він спирається, дорівнює 150°.

А. 150°. **Б.** 75°. **В.** 90°. **Г.** 85°.

2° Хорда кола довжиною 10 см стягує дугу в 60°.
Знайдіть діаметр кола.

А. 5 см. **Б.** 15 см. **В.** 20 см. **Г.** 16 см.

3° Сума двох протилежних сторін описаного чотирикутника дорівнює 10 см. Знайдіть периметр чотирикутника.

А. 10 см. **Б.** 20 см. **В.** 30 см. **Г.** 40 см.

4 Кути A, B і C вписаного чотирикутника $ABCD$ відносяться, як $1 : 2 : 3$.
Знайдіть кут D.

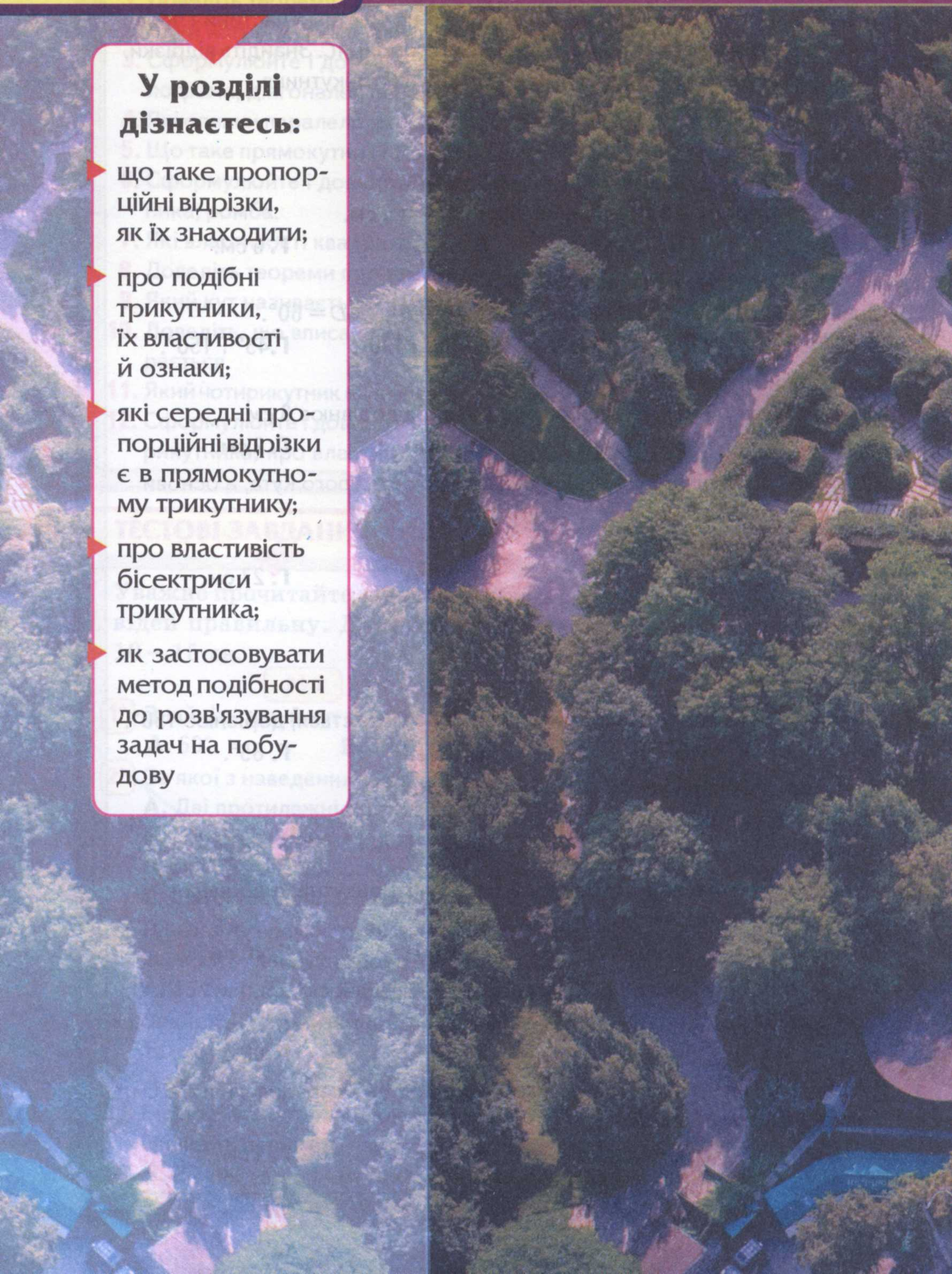
А. 30°. **Б.** 60°. **В.** 120°. **Г.** 90°.

5* Кут описаної рівнобічної трапеції дорівнює 150°, а її середня лінія — 6 см.
Знайдіть висоту трапеції.

А. 12 см. **Б.** 18 см. **В.** 3 см. **Г.** 4 см.

РОЗДІЛ 2

ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

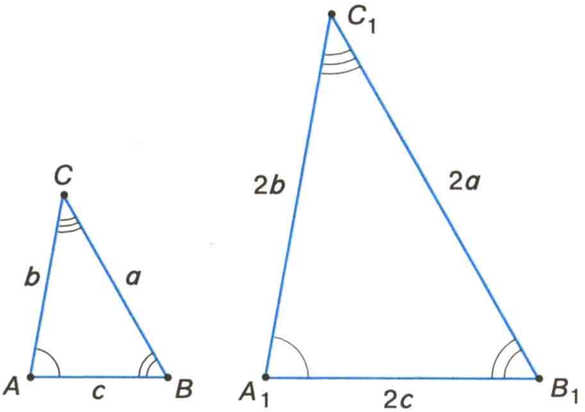


У розділі дізнаєтесь:

- що таке пропорційні відрізки, як їх знаходити;
- про подібні трикутники, їх властивості й ознаки;
- які середні пропорційні відрізки є в прямокутному трикутнику;
- про властивість бісектриси трикутника;
- як застосовувати метод подібності до розв'язування задач на побудову

§10. ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ

Ви знаєте, що у рівних трикутників рівні відповідні сторони і відповідні кути. Подивіться на малюнок 243. Кути $\Delta A_1B_1C_1$ дорівнюють відповідним кутам ΔABC: $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$. Але сторони $\Delta A_1B_1C_1$ вдвічі більші за відповідні сторони ΔABC: $A_1B_1 = 2AB$, $B_1C_1 = 2BC$, $A_1C_1 = 2AC$. Отже, трикутник $A_1B_1C_1$ не дорівнює трикутнику ABC. Трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC – *подібні*.



Мал. 243

Оскільки $A_1B_1 = 2AB$, то можна скласти *відношення* цих сторін: $\frac{A_1B_1}{AB} = 2$. Аналогічно дістанемо: $\frac{B_1C_1}{BC} = 2$ і $\frac{A_1C_1}{AC} = 2$. Кожне з відношень дорівнює числу 2. Отже, їх можна прирівняти: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$. Із цієї подвійної рівності можна утворити три пропорції:

1) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$; 2) $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$; 3) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$.

Саме тому кажуть, що відповідні сторони подібних трикутників *пропорційні*.

Два трикутники називаються ***подібними***, якщо в них відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні.

Число, якому дорівнює відношення відповідних сторін подібних трикутників, називається *коефіцієнтом подібності*. Його позначають буквою k.

Записуємо: $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$ і говоримо: «Трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC». Знак $\backsim$ заміняє слово «подібний». Якщо коефіцієнт подібності трикутників відомий, тоді записуємо:

$$\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC\ (k=2) \text{ або } \Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1\ (k=\frac{1}{2}).$$

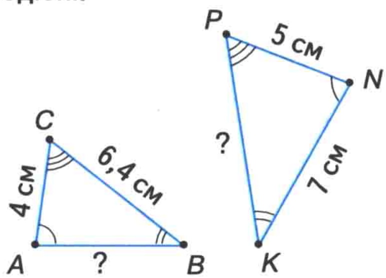
Для подібних трикутників, як і для рівних трикутників, має значення порядок запису вершин. Для трикутників на малюнку 243 запис «$\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta BAC$» – неправильний.

Задача. Два трикутники на малюнку 244 подібні. Знайдіть довжину їх невідомих сторін.

Розв'язання. У даних трикутників: $\angle A = \angle N$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle P$.

Складемо відношення відповідних сторін: $\frac{AB}{NK} = \frac{BC}{KP} = \frac{AC}{NP}$.

Підставимо відомі довжини сторін: $\frac{AB}{7} = \frac{6,4}{KP} = \frac{4}{5}$.



Мал. 244

Прирівняємо перше і третє відношення, а потім — друге і третє.

Відповідно дістанемо: $\frac{AB}{7} = \frac{4}{5}$, звідки $AB = 5{,}6$ см;

$\frac{6,4}{KP} = \frac{4}{5}$, звідки $KP = 8$ см.

Щоб скласти відношення відповідних сторін подібних трикутників:

1) визначте відповідно рівні кути трикутників;

2) з'ясуйте, які їх сторони є відповідними;

3) запишіть рівність трьох дробів, у чисельниках яких – сторони одного з трикутників, а у знаменниках – відповідні сторони іншого.

Чи може коефіцієнт подібності дорівнювати 1? Так. У такому разі подібні трикутники мають відповідно рівні сторони, а значить – є рівними.

Рівність трикутників є окремим випадком подібності трикутників з коефіцієнтом $k = 1$.

Задача. Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню їх відповідних сторін. Доведіть.

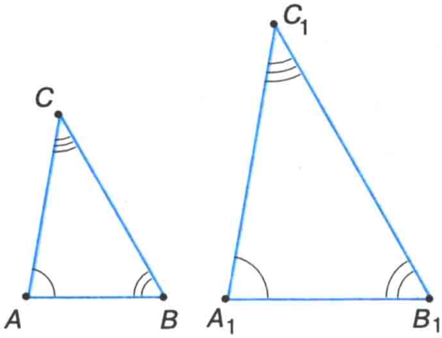
Розв'язання. Нехай трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 245) подібні з коефіцієнтом k.

Доведемо, що $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Оскільки $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$,

то $AB = k\,A_1B_1$, $BC = k\,B_1C_1$,
$AC = k\,A_1C_1$.

Запишемо периметри подібних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$:



Мал. 245

$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1 = k(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1) =$
$= kP_{\Delta A_1B_1C_1}$,
$P_{\Delta A_1B_1C_1} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1$.

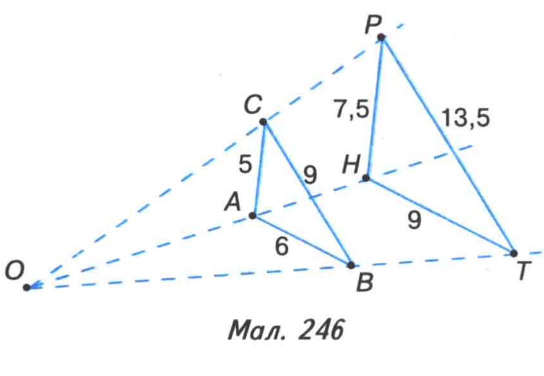
Тоді $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{k\,P_{\Delta A_1B_1C_1}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = k$, або $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Слово «подібний» означає «який має спільні риси з ким-, чим-небудь; схожий на когось, щось». Цей термін часто використовують у побуті, в науці, виробництві. Наприклад, ескіз трикутної косинки, виконаний у масштабі 1 : 10, та її викрійка, що виготовляється в натуральну величину, — це подібні трикутники. А ось викрійка і сама косинка — це рівні трикутники.

2. Давньогрецькі математики замість терміна «подібний» вживали слово «схожий». У вітчизняній математичній літературі російський термін «подобие» вживається з 1739 р. Знак $\sim$ увів у 1679 р. німецький математик Готфрід Лейбніц (1646 – 1716).

3. На малюнку 246 ви бачите подібні трикутники ABC і HTP. Вони розміщені так, що їх сторони паралельні,



Мал. 246

а прямі *AH*, *BT* і *CP*, що проходять через відповідні вершини, перетинаються в одній точці *O*. Кажуть, що такі подібні трикутники *ABC* і *HTP* мають *перспективне розміщення.*

Поняття перспективи відоме з давніх-давен, але відповідна наукова теорія почала інтенсивно розвиватися лише в епоху Відродження. За допомогою перспективи художники досягали ефекту об'ємності своїх полотен. Першим, кому це вдалося зробити, був видатний флорентійський художник Джотто ді Бондоне (1266 – 1337). У той самий період починається пошук наукових основ перспективи. Тут першість належить теж флорентійцю Філіппо Брунеллескі (1377 – 1446). Вчення про перспективу розвивали і активно використовували у своїй творчості видатні митці Леонардо да Вінчі (Італія, 1471 – 1528), Альбрехт Дюрер (Німеччина, 1471 – 1528) та ін. Згодом з геометричних паростків учення про перспективу виросла нова наука — *проективна геометрія*. Її започаткував французький геометр, архітектор та інженер Жерар Дезарг (1591 – 1661), а розвинув до рівня стрункої математичної теорії — французький математик Жан Віктор Понселе (1788 – 1867).

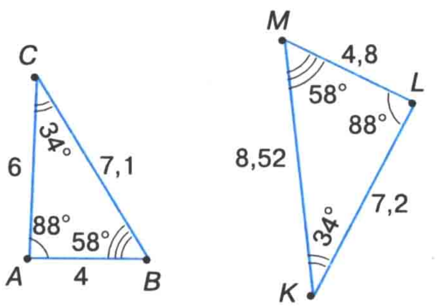

Жерар Дезарг

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

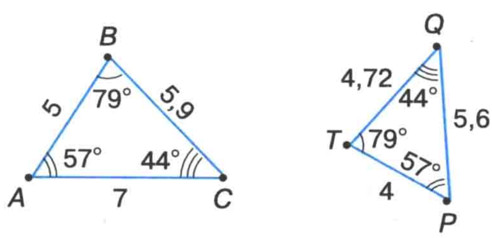
1. Які трикутники називаються подібними?
2. Як записати, що два трикутники подібні з коефіцієнтом *k*?
3. Поясніть, як скласти відношення відповідних сторін двох подібних трикутників.
4. Чому дорівнює коефіцієнт подібності рівних трикутників?
5. Який коефіцієнт подібності мають периметри подібних трикутників?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

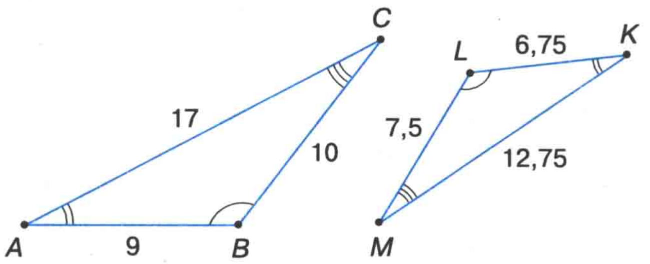
428'. На малюнках 247, 248 зображено подібні трикутники. Назвіть їх.
Запишіть: 1) їх відповідні кути; 2) їх відповідні сторони.



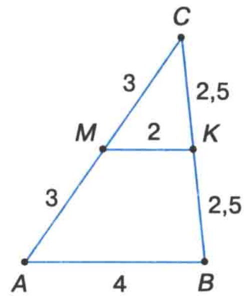
Мал. 247



Мал. 248



Мал. 249



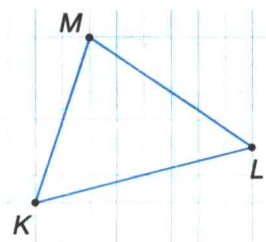
Мал. 250

429'. Задано подібні трикутники: 1) *ABC* і *KLM* (мал. 249);
2) *ABC* і *MKC* (мал. 250).

Складіть відношення їх відповідних сторін. Визначте коефіцієнт подібності. Зробіть відповідний запис.

430'. Побудуйте за клітинками спочатку трикутник *KLM* (мал. 251), а потім $\Delta KBC \sim \Delta KLM$, якщо:

1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = \frac{2}{3}$.



Мал. 251

431'. Обчисліть периметри подібних трикутників, зображених на малюнках:

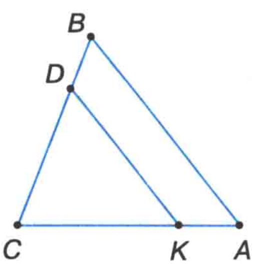
1) 247; 2) 248; 3) 249; 4) 250.

Знайдіть відношення периметрів подібних трикутників.

432°. На малюнку 252 $\Delta ABC \sim \Delta KDC$. Доберіть пари відрізків так, щоб з них можна було утворити праву частину пропорції:

1) $\frac{KD}{AB} = \dots$; 2) $\frac{AC}{KC} = \dots$; 3) $\frac{BC}{DC} = \dots$.

Скільки таких пар відрізків можна дібрати?



Мал. 252

433°. Чи можуть бути подібними трикутники:

1) гострокутний і тупокутний;
2) прямокутний і тупокутний;
3) рівнобедрений і рівносторонній?

434°. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Знайдіть невідомі кути трикутників, якщо:

1) $\angle A = 30°$, $\angle B_1 = 60°$;
2) $\angle C = \angle B_1 = 50°$;
3) $\angle B = 110°$, $\angle C_1 = 25°$.

435°. Чи можуть сторони двох подібних трикутників мати довжину:

1) 3 дм, 4 дм, 5 дм і 9 м, 12 м, 15 м;
2) 1,2 см, 1,3 см, 2,5 см і 24 мм, 26 мм, 50 мм;
3) 5 мм, 50 см, 50 см і 5 см, 50 мм, 50 мм ?

436°. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Знайдіть сторони AC і B_1C_1, якщо:
1) $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $A_1B_1 = 56$ мм, $A_1C_1 = 42$ мм;
2) $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $A_1B_1 = 3{,}9$ дм, $A_1C_1 = 4{,}5$ дм;
3) $AB = 40$ мм, $BC = 37$ мм, $A_1B_1 = 20$ см, $A_1C_1 = 6{,}5$ см.

437°. **Пряма, яка перетинає дві сторони трикутника і відтинає від нього подібний трикутник, паралельна третій стороні трикутника.** Доведіть.

438°. Пряма перетинає дві сторони трикутника ABC у точках M і N і відтинає від нього подібний трикутник. Назвіть паралельні прямі, які утворилися при цьому, якщо: 1) $M \in AB$ і $N \in BC$; 2) $M \in AC$ і $N \in BC$; 3) $M \in AC$ і $N \in AB$.

439°. a, b, c — сторони трикутника з периметром P. Він подібний з коефіцієнтом k другому трикутнику, периметр якого дорівнює P_1. Заповніть таблицю 16.

Таблиця 16

a	12 см	20 см	8 см	
b	16 см	21 см		8 см
c	18 см		17 см	14 см
P				
P_1		140 см	100 см	12,4 см
k	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{2}$

440°. Знайдіть сторони рівностороннього трикутника, якщо периметр подібного йому трикутника з коефіцієнтом 4 дорівнює:
1) 36 см; 2) 45 см; 3) 72 см.

441. Сторони трикутника відносяться, як 3 : 5 : 7. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого:
1) менша сторона дорівнює 5 см;
2) периметр дорівнює 45 см.

442. **Якщо трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC і трикутник $A_2B_2C_2$ подібний трикутнику ABC, то трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ подібні.** Доведіть.

443. $\Delta ABC \sim \Delta MOP$ ($k_1 = 3$) і $\Delta ABC \sim \Delta TEH$ ($k_2 = 2$).
Чи подібні трикутники MOP і TEH? З яким коефіцієнтом подібності?

444. $\Delta ABC \sim \Delta MOP$ ($k_1 = 4$) і $\Delta MOP \sim \Delta TEH$ ($k_2 = \frac{1}{2}$).
Чи подібні трикутники ABC і TEH? З яким коефіцієнтом подібності?

445. Кожну сторону трикутника збільшено на: 1) 2 см; 2) 5 см.
З утворених відрізків побудувано новий трикутник.
Чи може він бути подібним даному?

446. Кожну сторону трикутника збільшено на:
1) третину її довжини; 2) 25% її довжини.
Чи можна з утворених відрізків побудувати трикутник?
Чи може він бути подібним даному?

447. У рівнобедреному трикутнику дві сторони дорівнюють a і b. Яка третя сторона у подібного йому трикутника з коефіцієнтом k, якщо:
1) $a = 12$ см, $b = 5$ см, $k = 0,5$;
2) $a = 6$ см, $b = 15$ см, $k = 2,5$?

448. Визначте периметри двох подібних трикутників, якщо їх відповідні сторони відносяться, як $m : n$, а різниця їх периметрів дорівнює a, якщо:
1) $m : n = 7 : 4$, $a = 48$ см;
2) $m : n = 2 : 3$, $a = 15$ см.

449. У трапеції з основами a і b одну з бічних сторін, що дорівнює c, продовжено до перетину з продовженням другої бічної сторони. Утворилися два подібних трикутники зі спільною вершиною O. На яку відстань продовжено першу бічну сторону, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 6$ см;
2) $a = 8$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см?

450*. Сторони рівностороннього трикутника спочатку збільшено в n раз, а потім зменшено в n раз. Чи отримано трикутник, подібний даному? Який коефіцієнт подібності першого і третього трикутників?

451*. Два подібних прямокутних трикутники мають гострий кут 30°. Гіпотенуза одного з них дорівнює меншому катету другого. Визначте коефіцієнт подібності трикутників.

452*. У рівнобедреному трикутнику основа в n раз менша від бічної сторони, а периметр дорівнює P. Знайдіть сторони подібного йому трикутника з коефіцієнтом k, якщо:
1) $n = 2$, $P = 50$ см, $k = 1,5$;
2) $n = 3$, $P = 35$ см, $k = 0,75$.

453*. Найбільші сторони двох подібних трикутників дорівнюють відповідно a_1 і a_2, а різниця їх периметрів $P_2 - P_1 = m$. Доведіть, що $P_1 = \dfrac{ma_1}{a_2 - a_1}$ і $P_2 = \dfrac{ma_2}{a_2 - a_1}$.

454*. Відповідні сторони двох подібних трикутників попарно додано і з утворених трьох відрізків побудувано новий трикутник. Чи подібний цей трикутник даним трикутникам?

455*. Чи існують подібні трикутники, у яких відношення двох сторін одного трикутника дорівнює відношенню квадратів відповідних сторін другого?

456*. Доведіть, що радіус кола, яке проходить через середини сторін трикутника, дорівнює половині радіуса кола, описаного навколо цього трикутника.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

457°. Рівносторонній трикутник зі стороною 0,1 мм розглядають під мікроскопом, який дає збільшення у 40 разів. У скільки разів збільшаться кути трикутника?

458. Зробіть необхідні вимірювання та з'ясуйте, чи подібні внутрішній і зовнішній трикутники у косинця.

459. На географічній карті три населених пункти віддалені один від одного на 6 см, 5 см і 4 см. Найбільша відстань на місцевості дорівнює 15 км. Знайдіть відстані між іншими пунктами. Який масштаб цієї карти?

460. Якщо до листа сталі, який має форму трапеції з основами 15 см і 25 см та бічними сторонами 18 см і 20 см, прикладемо сталевий лист у формі трикутника з основою 15 см, дістанемо сталевий лист трикутної форми. Які розміри утвореного листа?

461. Триярусну ялинку з тасьми утворюють три подібні рівносторонні трикутники. У них відповідні сторони паралельні, а висоти до горизонтальних сторін лежать на одній прямій. Чи вистачить 2,5 м тасьми для такої ялинки, якщо її основа дорівнює 40 см, а трикутники подібні з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$? Скільки тасьми знадобиться, щоб прикрасити такими ялинками штори на вікнах вашої класної кімнати?

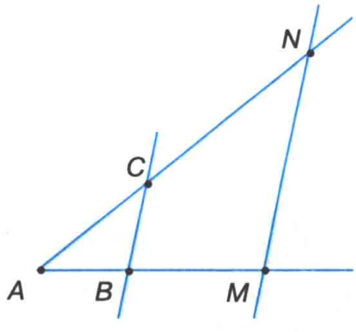
§11. УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

У теоремі Фалеса стверджується, що паралельні прямі відтинають на сторонах кута відповідно рівні відрізки. Загальнішим є випадок, коли паралельні прямі відтинають на сторонах кута пропорційні відрізки (мал. 253). Відповідна теорема носить назву узагальненої теореми Фалеса. Наведемо її без доведення.

Теорема (узагальнена теорема Фалеса). Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки.

Узагальнену теорему Фалеса інакше називають *теоремою про пропорційні відрізки*.

Наслідок. **Пряма, паралельна будь-якій стороні трикутника, відтинає від нього подібний трикутник.**



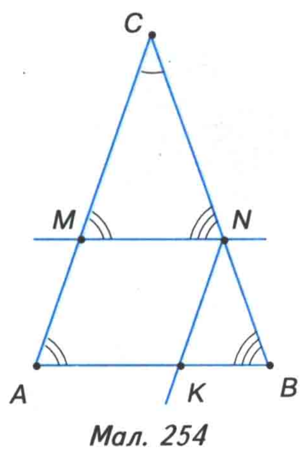
Мал. 253

Справді, у трикутників ABC і MNC (мал. 254) спільний кут C. Його перетинають паралельні прямі AB і MN. Із січною AC вони утворюють рівні відповідні кути CAB і CMN. Треті кути трикутників також рівні. Доведемо пропорційність сторін трикутників. За узагальненою теоремою Фалеса, $\frac{AM}{MC}=\frac{BN}{NC}$, тому $\frac{AM+MC}{MC}=\frac{BN+NC}{NC}$, звідки $\frac{AC}{MC}=\frac{BC}{NC}$. Провівши пряму $NK \parallel AC$, аналогічно дістанемо: $\frac{BC}{NC}=\frac{BA}{KA}$. Але $KA=MN$, тому $\frac{BC}{NC}=\frac{BA}{MN}$.

Отже, у трикутників ABC і MNC відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні:

$$\frac{AC}{MC}=\frac{BC}{NC}=\frac{BA}{MN}.$$

Дані трикутники подібні за означенням.

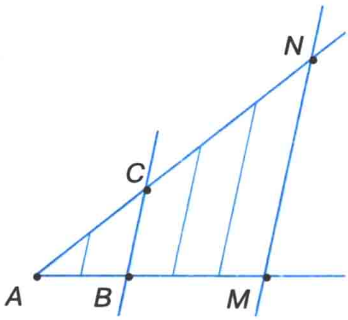


Мал. 254

Щоб довести подібність трикутників:
1) доведіть рівність відповідних кутів даних трикутників;
2) доведіть пропорційність відповідних сторін даних трикутників;
3) зробіть висновок: трикутники подібні за означенням.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Може виникнути запитання: *Як довести узагальнену теорему Фалеса?*
Розділимо відрізок AB на n рівних відрізків (мал. 255). Нехай довжина кожного з них дорівнює d. Тоді $AB = dn$. Відкладемо від точки B на промені BM відрізки довжиною d. Через усі точки поділу проведемо прямі, паралельні BC. За теоремою Фалеса, ці прямі відтинають рівні відрізки і на стороні AC даного кута.

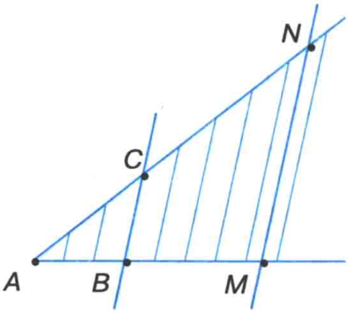


Мал. 255

Позначимо їх довжини d_1. На відрізку AC їх буде та сама кількість n, тому $AC = d_1 n$.

Нехай на відрізку BM уміщається ціла кількість m таких відрізків (мал. 255). На відрізку CN їх теж буде m. Тоді $BM = dm$, а $CN = d_1 m$.

Знайдемо відношення відрізків на двох сторонах кута: $\frac{AB}{BM} = \frac{n}{m}$, $\frac{AC}{CN} = \frac{n}{m}$.



Мал. 256

Бачимо, що два відношення дорівнюють тому самому числу $\frac{n}{m}$, отже, можемо їх прирівняти: $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}$.

Нехай на відрізку BM уміщається m відрізків довжиною d і залишається остача — відрізок меншої довжини, ніж d (мал. 256). Це означає, що відрізок з m частин довжиною d менший від відрізка BM, а відрізок з $m + 1$ частин довжиною d — більший за цей відрізок.
Дістали нерівність: $dm < BM < d(m + 1)$.

Оскільки $d = \frac{AB}{n}$, то $\left(\frac{AB}{n}\right)m < BM < \left(\frac{AB}{n}\right)(m+1)$.

Поділимо всі члени нерівності на AB: $\frac{m}{n} < \frac{BM}{AB} < \frac{m+1}{n}$, або $\frac{m}{n} < \frac{BM}{AB} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$. Якщо збільшувати кількість точок поділу, число n стане нескінченно великим, а число $\frac{1}{n}$ — близьким до нуля. Тому відношення $\frac{BM}{AB}$ відрізняється від числа $\frac{m}{n}$ на дуже мале число $\frac{1}{n}$.

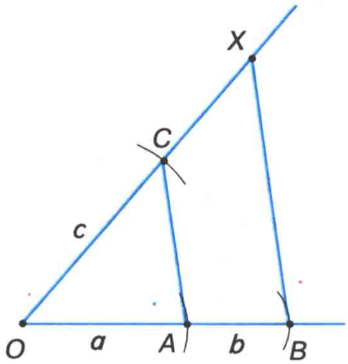
Міркуючи аналогічно, дістанемо: $d_1 m < CN < d_1(m+1)$; якщо $d_1 = \frac{AC}{n}$:

$$\left(\frac{AC}{n}\right)m < CN < \left(\frac{AC}{n}\right)(m+1) \quad \text{і} \quad \frac{m}{n} < \frac{CN}{AC} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

Отже, відношення $\frac{CN}{AC}$ відрізняється від числа $\frac{m}{n}$ на те саме дуже мале число $\frac{1}{n}$. А це може бути лише тоді, коли $\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC}$.

Звідси випливає, що $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}$.

2. Відрізок x називається *четвертим пропорційним* трьох даних відрізків a, b і c, якщо виконується рівність $a : b = c : x$. Для побудови четвертого пропорційного відрізка на стороні довільного кута від його вершини O відкладаємо відрізки $OA = a$, $AB = b$, а на другій стороні кута — відрізок $OC = c$ (мал. 257). Сполучивши точки A і C, проводимо $BX \parallel AC$. Відрізок CX — шуканий, оскільки, за узагальненою теоремою Фалеса, $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CX}$.



Мал. 257

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

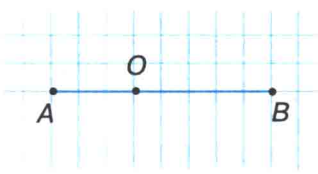
1. Як формулюється узагальнена теорема Фалеса?
2. Сформулюйте наслідок з узагальненої теореми Фалеса.
3. Поясніть, як довести подібність трикутників за означенням.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

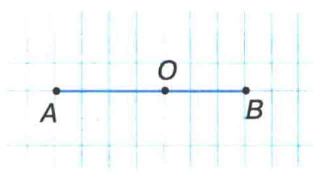
462'. За даними на малюнках 258, 259 запишіть, в якому відношенні точка O ділить відрізок AB.

463'. Точка M ділить відрізок PH у певному відношенні. Який з відрізків довший PM чи MH, якщо:

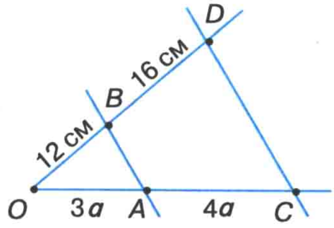
1) $PM : MH = 5 : 2$; 2) $PM : MH = 3 : 7$?



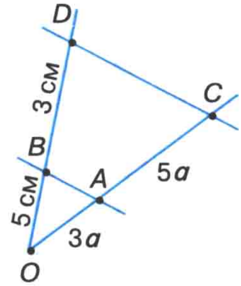
Мал. 258



Мал. 259



Мал. 260

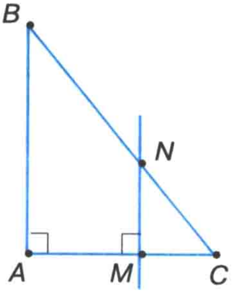


Мал. 261

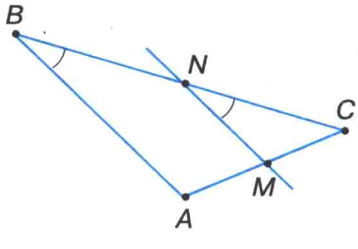
464'. На малюнках 260, 261 $AB \parallel CD$. Чи правильно вказано довжини відрізків? Поясніть відповідь.

465'. На стороні BA кута ABC відкладіть відрізки BM і MA, довжиною:
1) 2 см і 3 см; 2) 5 см і 1 см; 3) 4 см і 2 см.
Через точки A і M проведіть паралельні прямі AC і MH.
Як відносяться відрізки BH і HC?

466'. Яку кількість відрізків треба знати, щоб з'ясувати, чи пропорційні вони?



Мал. 262



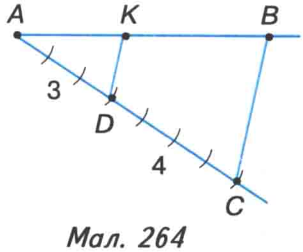
Мал. 263

467'. На малюнках 262, 263 пряма MN паралельна стороні AB трикутника ABC. Чи подібні трикутники ABC і MNC?
Поясніть відповідь.

468°. Відрізок AB довжиною d точка M ділить у відношенні $m : n$. Знайдіть довжини відрізків AM і BM, якщо:
1) $d = 10$ см, $m = 2$, $n = 3$; 2) $d = 16$ см, $m = 3$, $n = 1$;
3) $d = 14$ см, $m = 3$, $n = 4$.

469°. Накресліть відрізок AB довжиною 12 клітинок зошита.
Поділіть його за клітинками у відношенні:
1) 1 : 2; 2) 5 : 7; 3) 2 : 3.

470°. Поділіть даний відрізок AB у відношенні 3 : 4.
За малюнком 264 складіть план побудови.



Мал. 264

471°. Накресліть відрізок BC довільної довжини і поділіть його у відношенні:
1) 2 : 3; 2) 1 : 4; 3) 2 : 5.

472°. Визначте, чи пропорційні відрізки a, b, c і d, довжини яких відповідно дорівнюють:
1) 8 см, 3 см, 24 см і 9 см; 2) 5 см, 6 см, 10 см і 18,5 см;
3) 7 см, 4 см, 2,1 см і 1,1 см.

473°. До трьох даних відрізків a, b і c доберіть четвертий відрізок d так, щоб вони були пропорційними.
Дані відрізки мають довжини відповідно:
1) 1, 2, 3; 2) 6, 3, 4; 3) 3, 5, 7.
Скільки розв'язків має задача?

474°. Накресліть відрізок AB довжиною 9 клітинок зошита. Позначте на ньому точку C на відстані a клітинок від точки A. Побудуйте за клітинками відрізки, пропорційні відрізкам AC і CB, якщо:
1) $a = 2$; 2) $a = 3$; 3) $a = 4$.

475°. Відрізки AB і BC лежать на одній прямій і мають довжини:
1) 2 см і 3 см; 2) 1,5 см і 6 см; 3) 5 см і 4 см.
Побудуйте відрізки MN і NK, пропорційні двом даним відрізкам.

476°. На сторонах кута ABC розміщені чотири точки: P і Q — на стороні BA, E і F — на стороні BC. Чи паралельні прямі PE і QF, якщо:
1) $BP = PQ$ і $BE = EF$; 2) $BQ = QP$ і $BF = FE$;
3) $BP = PQ$ і $BF = FE$; 4) $BQ = QP$ і $BE = EF$?
Зробіть малюнки і поясніть відповідь.

477°. Чи подібні трикутники ABC і AMN, якщо MN — середня лінія трикутника ABC?

478°. Як найпростіше побудувати трикутник, подібний даному?

479°. Паралельно стороні $AB = a$ рівностороннього трикутника ABC проведено дві прямі, які перетинають AC в точках M і E, а BC — в точках N і F. $MN = \frac{3}{4}a$, $EF = \frac{1}{2}a$. Накресліть у зошиті таблицю 17 та заповніть її.

Таблиця 17

AB	4 см					
MN		6 см				
EF			3 см			
$P_{\Delta ABC}$				12 см		
$P_{\Delta MNC}$					9 см	
$P_{\Delta EFC}$						10 см

480. Відрізок AB довжиною a точка C ділить на відрізки AC і CB, відношення яких $m : n$. Виразіть довжини відрізків AC і CB через числа a, m і n.

481. Відрізок довжиною d дві його внутрішні точки ділять на відрізки, що відносяться, як $a : b : c$. Знайдіть довжини цих відрізків, якщо:

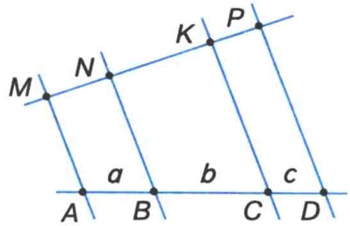
1) $d = 78$ см, $a = \frac{2}{5}$, $b = 0{,}8$, $c = \frac{3}{4}$;

2) $d = 50$ см, $a = 0{,}25$, $b = \frac{3}{5}$, $c = 0{,}4$.

Якщо члени відношення задано дробами, то зведіть ці дроби до спільного знаменника. Тоді чисельники отриманих дробів відповідатимуть цілим значенням членів відношення.

482. На продовженні відрізка AB довжиною d узято точку N так, що $AN : BN = m : n$. Знайдіть довжини відрізків AN і BN, якщо:
1) $d = 5$ см, $m = 3$, $n = 2$;
2) $d = 16$ см, $m = 5$, $n = 1$.

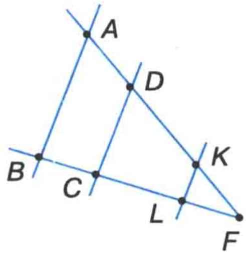
483. На малюнку 265 $AM \parallel BN \parallel CK \parallel DP$. Знайдіть довжини відрізків MN, NK, KP, якщо:
1) $a = 2{,}5$ см, $b = 4$ см, $c = 2$ см, $MP = 12{,}5$ см;
2) $a = 10$ см, $b = 16$ см, $c = 8$ см, $MP = 50$ см.



Мал. 265

484. Сторони кута A перетинають дві паралельні прямі BC і OH, причому точка B лежить між точками A і O. Знайдіть:
1) AH, якщо $AB = 8$ см, $AO = 12$ см, $AC = 10$ см;
2) AO, якщо $AC : AH = \frac{3}{11} : 0{,}6$, $BO = 12$ дм.

485. На малюнку 266 $AB \parallel DC \parallel KL$, $AD : DK : KF = 2 : 3 : 2$. Знайдіть довжини відрізків BC, CL, LF, DC і KL, якщо:
1) $AB = 70$ мм, $FC = 40$ мм;
2) $AB = 21$ см, $FC = 15$ см.



Мал. 266

486. На стороні MO трикутника MON позначено точку A на відстані a від вершини O. Знайдіть довжини відрізків, на які ділить сторону ON пряма, що проходить через точку A паралельно MN, якщо:
1) $MO = 6$ см, $ON = 9$ см, $a = 2$ см;
2) $MO = 10$ см, $ON = 14$ см, $a = 4$ см.

487. Через точку P на стороні AB трикутника ABC проведено пряму паралельно стороні AC. Вона перетинає сторону BC у точці O. Знайдіть довжину відрізка BO, якщо:
1) $AP : PB = 5 : 6$, $BC = 22$ см;
2) $AP : PB = 4 : 3$, $BC = 2{,}8$ дм.

488. Точка ділить сторону трикутника у відношенні $x : y$. Знайдіть відношення кожного з утворених відрізків до всієї сторони, якщо:

1) $x = 1$, $y = 2$; 2) $x = 2$, $y = 3$; 3) $x = 4$, $y = 5$.

489. У трикутнику ABC три точки ділять сторону BC на чотири рівні частини. Через ці точки проведено прямі, паралельні AC. Знайдіть довжини відрізків цих прямих, які мають кінці на сторонах трикутника, якщо:

1) $AC = 1{,}6$ дм; 2) $AC = 124$ мм.

490. Як провести пряму, паралельну одній зі сторін даного трикутника, щоб відношення периметрів утворених подібних трикутників дорівнювало:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$?

491. Через вершину B паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає продовження сторони AD у точці M, а сторону CD — у точці N. Знайдіть довжину відрізка DM, якщо:

1) $AD = 5$, $BN : MN = 3 : 2$; 2) $AD = 3$, $BN : MN = 0{,}2 : 0{,}3$.

492. Побудуйте два кола, що дотикаються зовні, якщо їх радіуси відносяться, як:

1) $2 : 3$; 2) $3 : 4$.

493*. На відрізку AB позначено дві точки O і H ($AO < AH$). Утворені три частини відрізка AB, починаючи від точки A, мають довжину a, b і c. Знайдіть, які частини відрізка AB становлять відрізки AO, OH, HB, AH і OB.

494*. Відрізок AB має довжину a. Точки M і T розміщені на прямій AB так, що точка M лежить на відрізку AB і $AM : MB = 2 : 3$, точка T не належить відрізку AB і $AT : TB = 4 : 3$.

Знайдіть відстань між точками M і T, якщо: 1) $a = 6$ см; 2) $a = 10$ см.

495*. За даними на малюнку 267 доведіть:

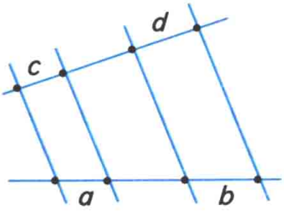
1) $a : c = b : d$; 2) $a : c = (a + b) : (c + d)$; 3) $c : a = (b - a) : (d - c)$.

496*. На малюнку 268 $AB \parallel CD$.

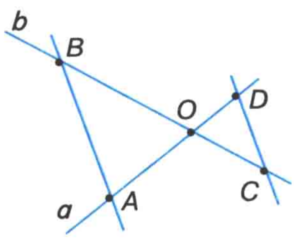
1) Доведіть, застосувавши теорему про пропорційні відрізки, що $AO : OD = OB : OC$;

2) знайдіть AO і OD, якщо $AD = 10$ см, $OB = 5$ см, $OC = 3$ см.

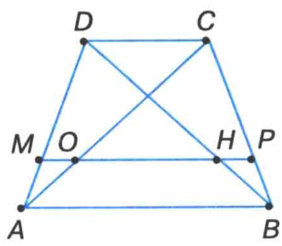
497*. Відрізок MN має кінці на сторонах AB і AC трикутника ABC і паралельний стороні BC. Доведіть, що медіана AA_1 ділить цей відрізок навпіл.



Мал. 267



Мал. 268



Мал. 269

498*. Пряма, паралельна основам трапеції *ABCD* (мал. 269), перетинає її бічні сторони в точках *M* і *P*, а діагоналі — у точках *O* і *H*.

1) Чи рівні відрізки *MO* і *HP*?

2) Чи для кожної трапеції виконується співвідношення: $\frac{MO}{DC}+\frac{OP}{AB}=1$?

499*. Основи трапеції дорівнюють *a* і *b*. Одну з бічних сторін поділено на три рівних відрізки і через точки поділу проведено прямі, паралельні основам трапеції. Знайдіть довжини відрізків цих прямих, що мають кінці на бічних сторонах трапеції, якщо:

1) $a = 7$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 10$ см, $b = 14$ см.

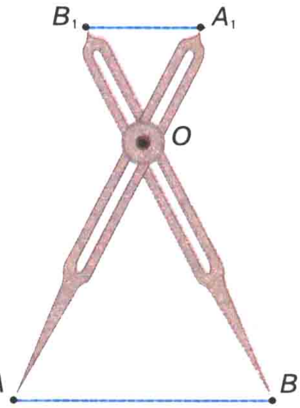
Якщо у трапеції проведено кілька прямих, паралельних основам, то проведіть пряму через її вершину, паралельну одній з бічних сторін. Тоді трапеція буде поділена на паралелограм і трикутник. Задача зведеться до відшукання довжин паралельних відрізків у трикутнику.

500*. У трапеції основи дорівнюють *a* і *b* ($a > b$). На одній з бічних сторін позначено *n* точок, які ділять її на рівні частини. Через ці точки проведено прямі, паралельні основам трапеції. Складіть формулу для обчислення довжини відрізків цих прямих, що мають кінці на бічних сторонах трапеції, якщо:

1) $n = 2$; 2) $n = 3$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

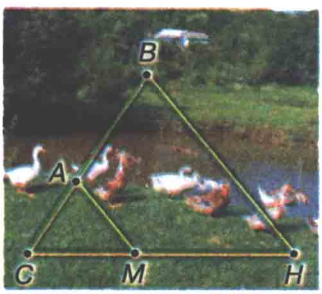
501. Для зменшення або збільшення відрізка за певним відношенням застосовують пропорційний циркуль (мал. 270). Поясніть, на чому ґрунтується спосіб його використання.



Мал. 270

502. Вулиці Садова і Квітнева беруть свій початок біля Ботанічного саду. Їх перетинають паралельні вулиці Трояндова й Вишнева. Відстань між Садовою і Квітневою за Трояндовою вулицею дорівнює 750 м, а за Вишневою — 1 км 250 м. Трамвай рухається Садовою вулицею і долає шлях від Ботанічного саду до Трояндової вулиці за 15 хв. Скільки часу йому знадобиться, щоб дістатися Вишневої вулиці, не змінюючи швидкості?

503. Знайдіть відстань між двома садибами (позначимо їх *A* і *B*), які розташовані на протилежних берегах річки (мал. 271), якщо $AM \parallel BH$ і $CA = 4$ м, $CM = 5$ м, $MH = 35$ м.



Мал. 271

504. Тінь від башти дорівнює 24 м, а вертикальний шест довжиною 1,2 м в ту саму пору дня має тінь завдовжки 80 см. Яка висота башти?

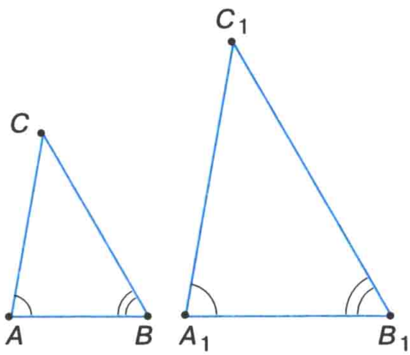
§ 12. ПЕРША ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Щоб установити подібність двох трикутників за означенням, треба переконатися, що в них відповідні кути рівні та відповідні сторони пропорційні. На практиці це незручно. Тому користуються *ознаками подібності трикутників*.

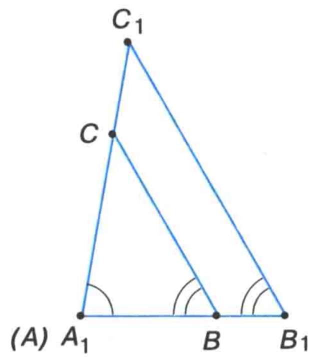
Теорема (ознака подібності трикутників за двома кутами).
Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ (мал. 272), $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Довести: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.



Мал. 272



Мал. 273

Доведення. Накладемо ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, щоб кут A сумістився з кутом A_1 (мал. 273). Це можна зробити тому, що $\angle A = \angle A_1$. Тоді сторони AB і AC лежатимуть на променях A_1B_1 і A_1C_1 відповідно.

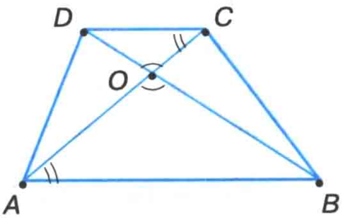
Прямі BC і B_1C_1 із січною A_1B_1 утворюють рівні відповідні кути: $\angle A_1BC = \angle A_1B_1C_1$. Отже, за ознакою паралельності прямих, $BC \parallel B_1C_1$.

За наслідком із узагальненої теореми Фалеса, пряма BC, що паралельна стороні B_1C_1, відтинає від трикутника $A_1B_1C_1$ подібний трикутник. Тому $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Наслідок. **Рівносторонні трикутники подібні.**

Справді, у рівносторонніх трикутників усі кути дорівнюють по 60°. Тому трикутники подібні за двома кутами.

Задача. У трапеції $ABCD$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O (мал. 274). Доведіть, що $\Delta AOB \backsim \Delta COD$.



Мал. 274

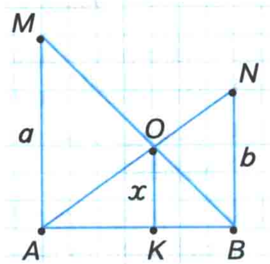
Розв'язання. Розглянемо трикутники AOB і COD. У них: $\angle AOB = \angle COD$ як вертикальні, $\angle OAB = \angle OCD$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AB і CD та січній AC. Отже, $\Delta AOB \backsim \Delta COD$ за двома кутами.

Щоб довести подібність двох трикутників:
1) виділіть їх на малюнку;
2) доведіть рівність двох пар відповідних кутів;
3) зробіть висновок: трикутники подібні за двома кутами.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. На властивостях подібних трикутників ґрунтується принцип побудови *номограми* — спеціального креслення, за допомогою якого можна, не виконуючи обчислень, отримувати розв'язки певного рівняння. Розглянемо задачу.

Задача. До даного відрізка AB у його кінцях і з одного боку від нього проведено два перпендикуляри $AM = a$ і $BN = b$, а також відрізки MB і NA, які перетинаються в точці O. Відстань від O до AB дорівнює x. Знайдіть залежність x від a і b.



Мал. 275

Розв'язання. Нехай точка K (мал. 275) є основою перпендикуляра, проведеного з точки O до прямої AB. За умовою задачі, $AM \perp AB$, $BN \perp AB$. Тоді дістанемо:

1) у прямокутному трикутнику ABN $OK \parallel BN$, звідки $\frac{x}{b} = \frac{AK}{AB}$;

2) у прямокутному трикутнику BAM $OK \parallel AM$, звідки $\frac{x}{a} = \frac{KB}{AB}$.

Додавши отримані рівності, матимемо: $\frac{x}{b} + \frac{x}{a} = \frac{AK + KB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$,

тобто $\frac{x}{b} + \frac{x}{a} = 1$. Звідси $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{x}$.

Дістали рівняння, яке виражає шукану залежність.

Для його наближеного розв'язування можна на листку в клітину або міліметровому папері побудувати (як на мал. 275) відрізки a і b заданої довжини і виміряти відстань x — це і буде шуканий корінь рівняння.

Такі номограми можуть бути використані в задачах з фізики, зокрема в розділі «Оптика».

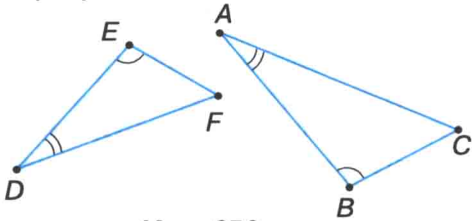
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Сформулюйте і доведіть ознаку подібності трикутників за двома кутами.
2. Чому рівносторонні трикутники подібні?
3. Поясніть, як довести подібність двох трикутників.

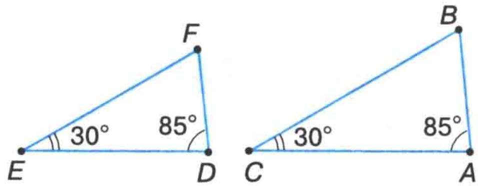
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

505'. За даними на малюнку 276 назвіть дві пари відповідно рівних кутів трикутників. Чи подібні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідні записи.

506'. На малюнку 277 задано елементи трикутників *DFE* і *ABC*. Чи подібні дані трикутники?



Мал. 276



Мал. 277

507'. Накресліть два рівнобедрених трикутники, що не є подібними.

508'. Накресліть два прямокутних трикутники, що не є подібними.

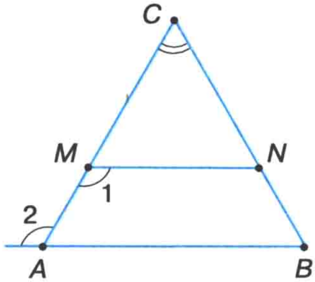
509°. Знайдіть на малюнках 278, 279 подібні трикутники. Поясніть, чому вони подібні.

510°. У трикутників *KLM* і *POH* є кути, що дорівнюють α і β. Накресліть у зошиті таблицю 18 та заповніть її за зразком, наведеним у першому стовпчику.

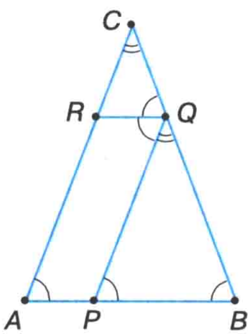
511°. Два кути ΔABC і два кути ΔMHT відповідно дорівнюють:

1) 23° і 77° та 77° і 23°;
2) 105° і 15° та 15° і 105°;
3) 30° і 90° та 30° і 60°.

Чи подібні ці трикутники?



Мал. 278



Мал. 279

Таблиця 18

α	β	α	β	α	β	α	β
$\angle K$	$\angle L$	$\angle L$	$\angle K$	$\angle M$	$\angle K$	$\angle L$	$\angle M$
$\angle P$	$\angle O$	$\angle H$	$\angle O$	$\angle P$	$\angle H$	$\angle P$	$\angle O$
$\Delta KLM \backsim \Delta POH$ за двома кутами							

512°. Відношення двох кутів одного трикутника дорівнює відношенню двох кутів другого трикутника. Чому не можна стверджувати, що такі трикутники подібні?

513°. $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. Знайдіть сторони і кути трикутників, якщо:
1) $\angle A = \angle B_1 = 60°$, $AB = 2$ см, $A_1C_1 = 6$ см;
2) $\angle B = \angle C = 60°$, $A_1B_1 = 2$ см, $AC = 4$ см;
3) $\angle B = \angle C = 60°$, $BC = 9$ см, $A_1B_1 = 3$ см.

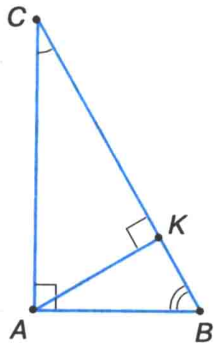
514°. У трикутників ABC і KLM: $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$, $AB = c$, $BC = c + 2$, $AC = c - 2$, $KL = nc$. Знайдіть сторони трикутників, якщо:
1) $c = 5$ см, $n = 3$; 2) $c = 6$ см, $n = \frac{3}{4}$; 3) $c = 8$ см, $n = 2$.

515°. **Рівнобедрені трикутники подібні, якщо вони мають по рівному куту: 1) при основі; 2) при вершині.** Доведіть.

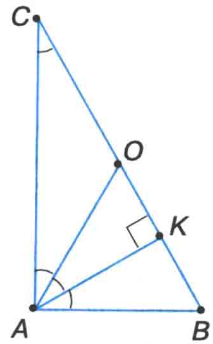
516°. Чи подібні рівнобедрені трикутники, в одного з яких кут між бічними сторонами дорівнює α, а в другого кут при основі — β, якщо:
1) $\alpha = 52°$, $\beta = 64°$; 2) $\alpha = 43°$, $\beta = 68°30'$; 3) $\alpha = 105°$, $\beta = 38°30'$?

517°. **Прямокутні трикутники з рівним гострим кутом подібні.** Доведіть.

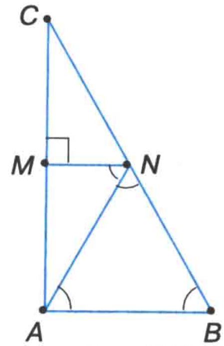
518°. Доведіть, що вказані прямокутні трикутники подібні:
1) ΔABC і ΔKBA (мал. 280);
2) ΔOKA і ΔBAC (мал. 281);
3) ΔAMN і ΔCAB (мал. 282).



Мал. 280



Мал. 281



Мал. 282

519°. Чи подібні прямокутні трикутники, в одного з яких гострий кут дорівнює α, а в другого — β, якщо:
1) $\alpha = 42°$, $\beta = 48°$; 2) $\alpha = 23°$, $\beta = 77°$; 3) $\alpha = 35°30'$, $\beta = 54°30'$?

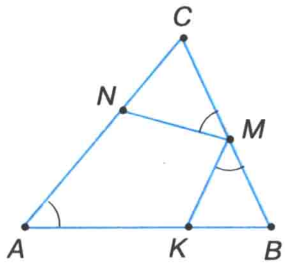
520°. **Рівнобедрені прямокутні трикутники подібні.** Доведіть.

521°. **За основами a і b трапеції визначте відношення, в якому її діагоналі ділять одна одну.**

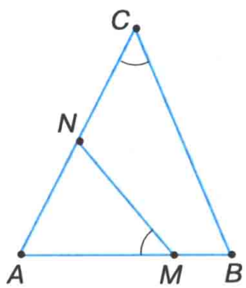
522°. У рівнобічної трапеції $ABCD$ основи BC і AD дорівнюють a і b. Діагоналі AC і BD дорівнюють c і перетинаються в точці O. Знайдіть периметри трикутників BCO і ADO, якщо:
1) $a = 32$ мм, $b = 52$ мм, $c = 48$ мм; 2) $a = 0{,}5$ дм, $b = 0{,}3$ дм, $c = 0{,}8$ дм;
3) $a = 3$ см, $b = 8$ см, $c = 7$ см.

523°. Бічні сторони AD і BC трапеції $ABCD$ продовжено до їх перетину в точці O. Доведіть, що $\dfrac{AD}{AO} = \dfrac{BC}{BO} = \dfrac{AB}{DC}$.

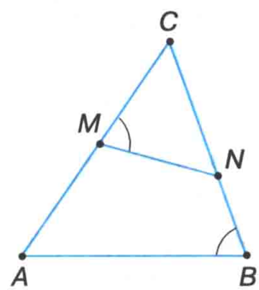
524. За даними, наведеними на малюнках 283 — 285, доведіть подібність зображених трикутників.



Мал. 283



Мал. 284



Мал. 285

525. Доведіть, що трикутники з відповідно паралельними сторонами подібні.

526. Висоти AE і CD трикутника ABC перетинаються в точці H. Знайдіть ці висоти, якщо їх сума дорівнює 18 см, $AH = 8$ см, $CH = 4$ см.

527. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює P. Через точку перетину його медіан проведено пряму, паралельну стороні. Доведіть, що довжину відрізка d цієї прямої з кінцями на сторонах трикутника можна обчислювати за формулою: $d = \dfrac{2P}{9}$.

528. У трикутнику зі сторонами a, b, c пряма перетинає кут A і відтинає від нього трапецію з периметром P. Знайдіть меншу основу трапеції, якщо:
1) $a = 30$ см, $b = 20$ см, $c = 15$ см, $P = 63$ см;
2) $a = b = c = 18$ см, $P = 50$ см.

529. Доведіть, що через вершину більшого кута різностороннього трикутника завжди можна провести пряму так, щоб вона відтинала від даного трикутника подібний йому трикутник.

530. Через точку M на стороні трикутника ABC проведено пряму, що відтинає від нього подібний трикутник. Скільки розв'язків має задача? Розгляньте випадки, коли ΔABC:

1) різносторонній; 2) рівнобедрений; 3) рівносторонній.

531. У рівнобедрений трикутник з основою a і бічною стороною b вписано коло. Знайдіть відстань між точками дотику кола до бічних сторін трикутника, якщо: 1) $a = 6$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 10$ см, $b = 13$ см.

532. Доведіть, що відстань d між точками дотику вписаного кола до бічних сторін b рівнобедреного трикутника з основою a можна обчислювати за формулою: $d = \dfrac{a(2b - a)}{2b}$.

533. У рівнобедрений трикутник з основою a і бічною стороною b вписано коло з центром O. Знайдіть відношення відрізків висоти, проведеної до основи трикутника, на які вона ділиться точкою O (починаючи від вершини), якщо: 1) $a = 12$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 10$ см, $b = 13$ см.

534. **Доведіть, що у подібних трикутників відповідні висоти відносяться, як сторони, до яких вони проведені.**

535. Два подібних трикутники мають по висоті, що дорівнюють одна одній. Чому не можна стверджувати, що дані трикутники рівні?

536. **Доведіть, що в подібних трикутників відповідні бісектриси відносяться, як сторони, до яких вони проведені.**

537. Трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC подібні ($k = 1{,}5$). Знайдіть довжини бісектрис кутів C_1 і C даних трикутників, якщо їх різниця дорівнює 4 см.

538. Діагоналі AC і BD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O. Знайдіть довжини основ трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 24 см і відомо:

1) $CO : AO = 1 : 3$; 2) $BO : DO = 3 : 5$.

539. У чотирикутнику $ABCD$ з прямими кутами B і D проведено діагональ AC, а з її довільної точки M — прямі ML і MN, які відповідно перпендикулярні до прямих BC і AD. Доведіть, що $\dfrac{ML}{AB} + \dfrac{MN}{CD} = 1$.

540. Два кола з радіусами R_1 і R_2 дотикаються зовні. Їх спільна зовнішня дотична перетинає лінію центрів у точці M. Знайдіть відстані від центрів цих кіл до точки M, якщо: 1) $R_1 = 4$ см, $R_2 = 6$ см; 2) $R_1 = 3$ см, $R_2 = 6$ см.

541*. Доведіть, що трикутники з відповідно перпендикулярними сторонами подібні.

542*. Доведіть, що відстані від точки перетину медіан трикутника до його сторін утроє менші від довжин відповідних висот трикутника.

543*. У рівнобедреному трикутнику з основою $AB = a$ через середину висоти CD проведено прямі AK і BL ($K \in BC$, $L \in AC$). Знайдіть довжину відрізка KL, якщо: 1) $a = 3$ см; 2) $a = 4$ см; 3) $a = 5$ см.

544*. **Доведіть, що висоти трикутника обернено пропорційні сторонам, до яких вони проведені.**

545*. Знайдіть відповідні висоти двох подібних трикутників з коефіцієнтом подібності k, якщо:

1) сума цих висот дорівнює 36, $k = 2$;

2) різниця цих висот дорівнює 10, $k = \frac{2}{3}$.

546*. У коло з радіусом R вписано трикутник ABC зі сторонами $BC = a$ і $AB = c$. Доведіть, що висоту h_b до третьої сторони трикутника можна обчислити за формулою: $h_b = \frac{ac}{2R}$.

547*. На колі з центром O і радіусом R, у якому проведено два взаємно перпендикулярних діаметри AB і CD, взято точку K. Хорда AK перетинає діаметр CD у точці M, а пряма BK — його продовження у точці N. Доведіть, що $OM \cdot ON = R^2$.

548*. У трикутник ABC зі сторонами $AC = b$ і $BC = a$ вписано ромб $CKLM$ так, що $K \in AC$, $L \in AB$, $M \in BC$. Доведіть, що сторону x ромба можна обчислити за формулою: $x = \frac{ab}{a+b}$.

549*. У трикутнику ABC з тупим кутом B проведено висоти BD і CM. Доведіть, що трикутники ABC і ADM подібні.

550*. Основи трапеції $ABCD$ дорівнюють a і b ($a > b$), $\angle ADC$ — тупий. Знайдіть квадрат довжини діагоналі AC, яка ділить трапецію на два подібних трикутники.

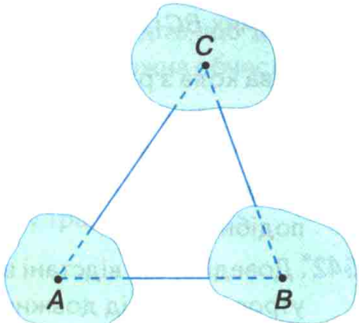
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

551. Триповерховий будинок на фотографії має висоту 8 мм. Знаючи, що його справжня висота дорівнює 13 м, а глибина камери фотоапарата — 12 см, визначте, на якій відстані від будинку був розміщений фотоапарат.

552. У трикутника ABC усі вершини недоступні (мал. 286). Як визначити довжини усіх його сторін?

553. На ділянці шляху довжиною 320 м підйом однаковий. На кінцях ділянки стоять позначки 186,5 м і 194,9 м. Яка позначка має бути на відстані 120 м від початку підйому?

554*. Із селища виходять три дороги у напрямках: 1) південно-західному; 2) південному; 3) південно-південно-східному. Якою б дорогою не йшов пішохід із селища, відношення його відстаней до двох інших доріг залишається сталим. Поясніть, чому це так.



Мал. 286

§ 13. ДРУГА І ТРЕТЯ ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

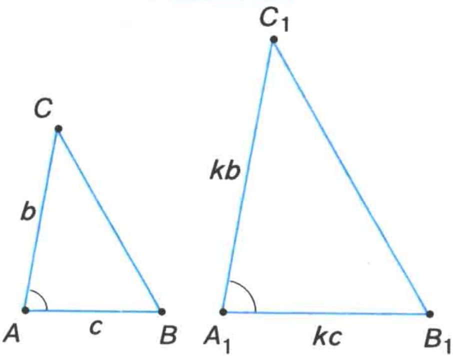
Ви знаєте, що рівність трикутників можна встановити за двома сторонами і кутом між ними або за трьома сторонами. Аналогічні ознаки існують для подібності трикутників. Але тут потрібно виявити не рівність, а пропорційність відповідних сторін двох трикутників.

Теорема (ознака подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними).
Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ (мал. 287),

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1},\ \angle A = \angle A_1.$$

Довести: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



Мал. 287

Доведення. Нехай $A_1B_1 = kAB = kc$, $A_1C_1 = kAC = kb$.

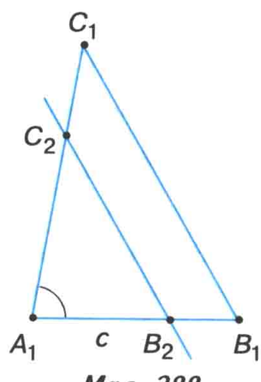
Відкладемо на стороні A_1B_1 трикутника $A_1B_1C_1$ відрізок $A_1B_2 = AB = c$ (мал. 288). Через точку B_2 проведемо пряму $B_2C_2 \parallel B_1C_1$. Утворився трикутник $A_1B_2C_2$, який, за наслідком з узагальненої теореми Фалеса, подібний трикутнику $A_1B_1C_1$.

Отже, $\frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1C_2}{A_1C_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1}$. Звідси $\frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1C_2}{A_1C_1}$.

Підставимо в цю пропорцію відомі довжини сторін і скоротимо отримані дроби.

Тоді дістанемо: $\frac{c}{kc} = \frac{A_1C_2}{kb}$, $1 = \frac{A_1C_2}{b}$. Звідси $A_1C_2 = b$.

З рівності трикутників ABC і $A_1B_2C_2$ та подібності трикутника $A_1B_2C_2$ трикутнику $A_1B_1C_1$ випливає, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



Мал. 288

Наслідок. **Прямокутні трикутники з відповідно пропорційними катетами подібні.**

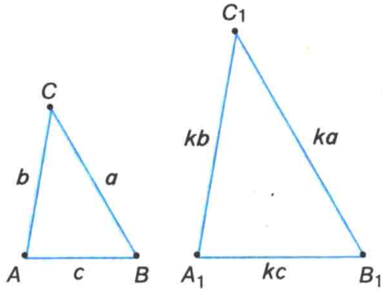
Справді, у прямокутному трикутнику між катетами лежить прямий кут, а прямі кути рівні. Тому прямокутні трикутники з відповідно пропорційними катетами подібні за двома сторонами і кутом між ними.

Теорема (ознака подібності трикутників за трьома сторонами). Якщо сторони одного трикутника пропорційні сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ (мал. 289),

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}.$$

Довести: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



Мал. 289

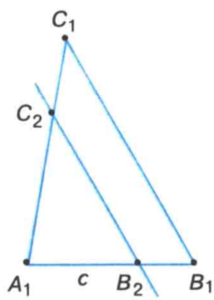
Доведення.

Нехай: $A_1B_1 = kAB = kc$, $A_1C_1 = kAC = kb$, $B_1C_1 = kBC = ka$.

Відкладемо на стороні A_1B_1 трикутника $A_1B_1C_1$ відрізок $A_1B_2 = AB = c$ (мал. 290).

Через точку B_2 проведемо пряму $B_2C_2 \parallel B_1C_1$.

Утворився трикутник $A_1B_2C_2$, який, за наслідком із узагальненої теореми Фалеса, подібний трикутнику $A_1B_1C_1$.



Мал. 290

Отже, $\dfrac{A_1B_2}{A_1B_1}=\dfrac{A_1C_2}{A_1C_1}=\dfrac{B_2C_2}{B_1C_1}$.

Далі дістанемо:

$$\frac{c}{kc}=\frac{A_1C_2}{kb}=\frac{B_2C_2}{ka}, \text{ або } 1=\frac{A_1C_2}{b}=\frac{B_2C_2}{a}.$$

Звідси $A_1C_2 = b$, $B_2C_2 = a$.

Отже, $A_1C_2 = AC$ і $B_2C_2 = BC$.

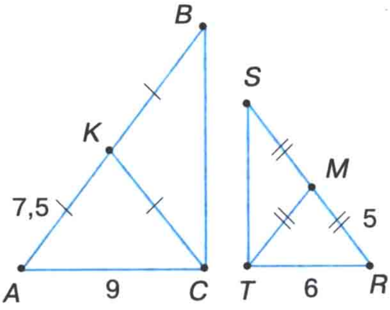
Розглянемо $\Delta A_1B_2C_2$ і ΔABC.

У них $A_1B_2 = AB = c$ за побудовою, $A_1C_1 = AC = b$ і $B_2C_2 = BC = a$ за доведеним.

Отже, $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta ABC$ за трьома сторонами.

З рівності трикутників ABC і $A_1B_2C_2$ та подібності трикутника $A_1B_2C_2$ трикутнику $A_1B_1C_1$ випливає, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Задача. У кожному з трикутників ABC і RST (мал. 291) медіана, проведена до більшої сторони, дорівнює половині цієї сторони. Чи подібні дані трикутники, якщо $AC = 9$, $AK = 7{,}5$, $TR = 6$, $MR = 5$?



Мал. 291

Розв'язання. Медіани CK і TM відтинають від даних трикутників ABC і RST відповідно ΔACK і ΔRTM. У кожному з них відомі три сторони: $AC = 9$, $AK = KC = 7{,}5$; $RT = 6$, $RM = MT = 5$.

З'ясуємо, чи пропорційні відповідні сторони цих трикутників:

$$\frac{AC}{RT} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}, \quad \frac{AK}{RM} = \frac{KC}{MT} = \frac{7{,}5}{5} = \frac{3}{2}.$$

Отже, $\Delta ACK \sim \Delta RTM$ за трьома сторонами. З подібності цих трикутників випливає, що $\angle A = \angle R$.

Розглянемо ΔABC і ΔRST. У них: $\angle A = \angle R$, $\dfrac{AC}{RT} = \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{AB}{RS} = \dfrac{2AK}{2RM} = \dfrac{AK}{RM} = \dfrac{3}{2}$.

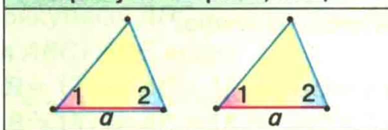
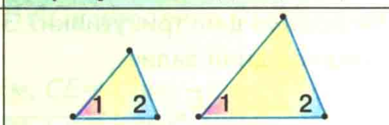
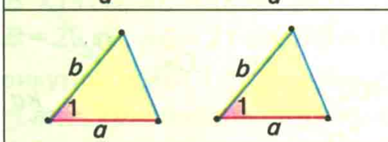
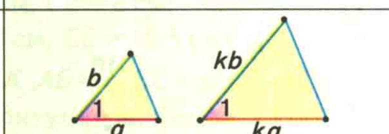
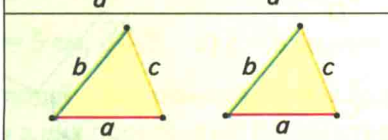
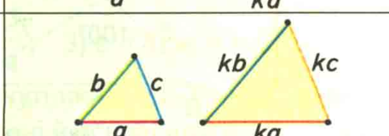
Отже, $\Delta ABC \sim \Delta RST$ за двома сторонами і кутом між ними.

Розв'язуючи задачі, пам'ятайте:
1) якщо на малюнку немає потрібної пари трикутників, то проведіть допоміжні відрізки, щоб їх утворити;
2) інколи потрібно довести подібність кількох трикутників.

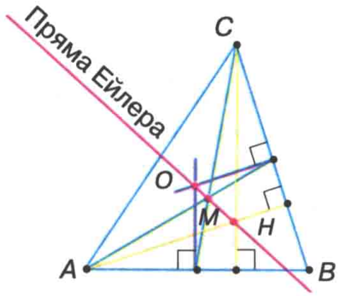
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Ви, напевне, помітили, що ознаки подібності трикутників мають багато схожого з ознаками рівності трикутників.
За таблицею 19 сформулюйте попарно ознаку рівності й ознаку подібності трикутників. У чому відмінності відповідних ознак?

Таблиця 19

Трикутники рівні, якщо:	Трикутники подібні, якщо:
	
	
	

2. Застосовуючи подібність трикутників, можна довести, що точка перетину висот трикутника H, точка перетину його медіан M і центр описаного кола O лежать на одній прямій (мал. 292). Цю пряму називають *прямою Ейлера* на честь найвидатнішого математика XVIII ст. Леонарда Ейлера (1707 — 1783). Він народився у Базелі (Швейцарія), у 1727 — 1741 рр. працював у Петербурзі, потім — у Берліні, і з 1766 р. — знову в Петербурзі. У його творчому доробку — видатні досягнення в усіх галузях математики, у механіці, фізиці, астрономії. Теорему про пряму, названу його ім'ям, Л. Ейлер сформулював, довів і опублікував у 1765 р.



Мал. 292


Леонард Ейлер

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Сформулюйте і доведіть ознаку подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними.
2. Чому прямокутні трикутники з пропорційними катетами подібні?
3. Сформулюйте і доведіть ознаку подібності трикутників за трьома сторонами.

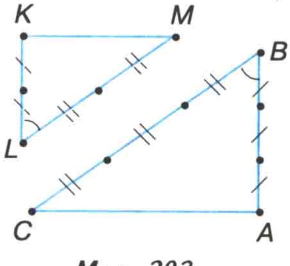
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

555'. За даними на малюнку 293 назвіть відповідно рівні кути та відповідно пропорційні сторони трикутників. Чи подібні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідні записи.

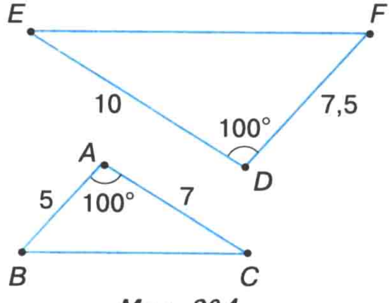
556'. На малюнку 294 задано елементи трикутників DEF і ABC. Чи подібні дані трикутники?

557'. Трикутник має сторони 5 см і 8 см. Кут між ними дорівнює 50°. Наведіть приклад подібного йому трикутника.

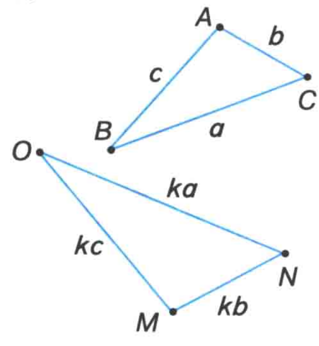
558'. За даними на малюнку 295 назвіть відповідно пропорційні сторони трикутників. Чи подібні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідний запис.



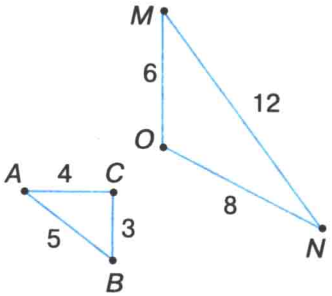
Мал. 293



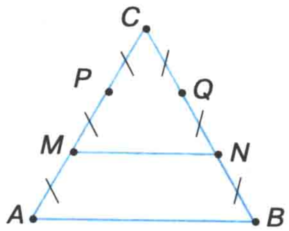
Мал. 294



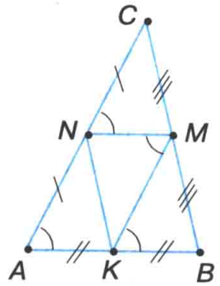
Мал. 295



Мал. 296



Мал. 297



Мал. 298

559'. На малюнку 296 задано елементи трикутників *MON* і *ABC*. Чи подібні дані трикутники?

560'. Трикутник має сторони 5 см, 6 см і 9 см. Які сторони може мати подібний йому трикутник?

561°. Знайдіть на малюнках 297, 298 подібні трикутники. Поясніть, чому вони подібні.

562°. У трикутників *KLM* і *POH* один з кутів дорівнює α. Які дві сторони у них мають бути відповідно пропорційними, щоб трикутники були подібними? Накресліть у зошиті таблицю 20 та заповніть її за зразком, наведеним у першому стовпчику.

Таблиця 20

α	2 сторони		α	2 сторони		α	2 сторони	
$\angle K$	$a = KL$	$b = KM$	$\angle L$	$a =$	$b =$	$\angle M$	$a =$	$b =$
$\angle P$	$ka = PO$	$kb = PH$	$\angle H$	$ka =$	$kb =$	$\angle P$	$ka =$	$kb =$
$\triangle KLM \backsim \triangle POH$ за двома сторонами і кутом між ними								

563°. У першому трикутнику дві сторони дорівнюють 5 см і 8 см; у другому — 6 см і 12 см; у третьому — 10 см і 16 см. Кути, утворені цими сторонами, рівні. Які з трикутників подібні? Поясніть відповідь.

564°. У трикутнику *ABC* на сторонах *AB* і *AC* узято точки *D* і *E*. Чи подібні трикутники *ABC* і *ADE*, якщо:

1) $AB = 12$ см, $AC = 15$ см, $BD = 2$ см, $CE = 7$ см;

2) $AB = 15$ см, $AC = 18$ см, $BD = 3$ см, $CE = 8$ см;

3) $AB = 20$ см, $AC = 21$ см, $BD = 10$ см, $CE = 10{,}5$ см?

565°. У трикутників *ABC* і *KLM*: $\angle A = \angle K$, $AB = c$, $BC = c + 2$, $AC = c - 2$, $KL = nc$, $KM = nc - 2n$. Знайдіть сторони трикутників, якщо:

1) $c = 5$ см, $n = 3$; 2) $c = 6$ см, $n = \frac{3}{4}$; 3) $c = 8$ см, $n = 2$.

566°. Чи подібні два рівнобедрених трикутники, якщо бічна сторона і основа одного з них пропорційні бічній стороні й основі другого?

567°. Які з трьох прямокутних трикутників подібні, якщо їх катети дорівнюють:
3 см і 4 см; 5 см і 12 см; 45 мм і 6 см?

568°. У прямокутнику $ABCD$ точки P і T ділять діагональ AC на три рівні частини. З цих точок проведено перпендикуляри до сторони AB. Знайдіть периметри усіх прямокутних трикутників, які при цьому утворилися, якщо:
1) $AB = 16$ см, $BC = 63$ см, $AC = 65$ см;
2) $AB = 8$ см, $BC = 15$ см, $AC = 17$ см;
3) $AB = 7$ см, $BC = 24$ см, $AC = 25$ см.

569°. У рівнобічній трапеції $ABCD$ діагоналі AC і BD дорівнюють c і діляться точкою O їх перетину у відношенні $m : n$. $AD - BC = 4$ см.
Знайдіть основи трапеції та периметри трикутників BCO і ADO, якщо:
1) $c = 42$ мм, $m = 8$, $n = 13$; 2) $c = 0{,}8$ дм, $m = 5$, $n = 3$;
3) $c = 7$ см, $m = 2$, $n = 5$.

570°. Які з трьох трикутників подібні, якщо їх сторони дорівнюють:
8 см, 10 см, 14 см; 12 см, 15 см, 21 см; 16 см, 20 см, 30 см?

571°. Сторони одного трикутника дорівнюють a, b і c. У подібного трикутника найменша сторона дорівнює d. Знайдіть його сторони, якщо:
1) $a = 7$ см, $b = 9$ см, $c = 12$ см, $d = 21$ см;
2) $a = 17$ см, $b = 8$ см, $c = 15$ см, $d = 56$ см;
3) $a = 6$ см, $b = 5$ см, $c = 9$ см, $d = 25$ см.

572°. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює b, а бічна сторона — a. У подібного трикутника основа дорівнює c.
Знайдіть його периметр, якщо:
1) $a = 18$ см, $b = 12$ см, $c = 6$ см; 2) $a = 5$ см, $b = 8$ см, $c = 12$ см;
3) $a = 25$ см, $b = 14$ см, $c = 28$ см.

573°. Периметри двох тупокутних трикутників відносяться, як $m : n$. У першого трикутника більша сторона дорівнює a. Знайдіть більшу сторону другого трикутника, якщо:
1) $a = 24$ мм, $m = 2$, $n = 3$; 2) $a = 1{,}5$ дм, $m = 5$, $n = 3$;
3) $a = 12$ см, $m = 3$, $n = 4$.

574. У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$; $AB \cdot A_1B_1 = AC \cdot A_1C_1$.
Доведіть, що $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

575. Доведіть, що у подібних трикутників відповідні медіани відносяться, як сторони, до яких вони проведені.

576. Два подібних трикутники мають по медіані, що дорівнюють одна одній. Чому не можна стверджувати, що дані трикутники рівні?

577. Сторони кута A одна пряма перетинає в точках K і L, а друга пряма — в точках M і N відповідно, причому $KL : MN = \frac{1}{5} : 0{,}25$. $KM = 3$ см. Якої довжини повинен бути відрізок AK, щоб дані прямі були паралельними?

578. Висота трикутника ділить основу у відношенні $m : n$. У якому відношенні серединний перпендикуляр до основи ділить бічну сторону, якщо:
1) $m = 5$, $n = 9$; 2) $m = 3$, $n = 5$?

579. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти BH і CM. Доведіть, що $\Delta ABC \sim \Delta AMH$.

580. Медіана AA_1 трикутника ABC утворює кут AA_1C, який дорівнює кутові BAC. Чому дорівнює відношення квадратів сторін BC і AC цього трикутника?

581. Точка E — середина сторони BC паралелограма $ABCD$. Відрізок AE перетинає діагональ BD у точці K.
Знайдіть відношення відрізків: 1) AK і KE; 2) BK і KD.

582. На продовженні сторони AB (за точку B) паралелограма $ABCD$ узято точку F. Пряма DF перетинає діагональ AC у точці E.
Знайдіть довжину відрізка BF, якщо $AB = 10$ см, $AE : CE = 4{,}5 : 3$.

583. Висота BM рівнобічної трапеції $ABCD$ ділить діагональ AC у відношенні $m : n$. У якому відношенні вона ділить сторону AD, якщо:
1) $m = 1$, $n = 2$; 2) $m = 1$, $n = 1$?

584. Чи будуть подібними два прямокутних трикутники, якщо у них:
1) відношення гіпотенуз дорівнює відношенню радіусів описаних кіл;
2) відношення двох катетів дорівнює відношенню радіусів описаних кіл;
3) відношення гіпотенуз дорівнює відношенню радіусів вписаних кіл?

585*. **Прямокутні трикутники з відповідно пропорційними катетом і гіпотенузою подібні.** Доведіть.

586*. За стороною a трикутника визначте відстань між точками, які ділять дві інші сторони у відношенні $1 : m$, починаючи від сторони a.

587*. У трикутник вписано прямокутник так, що його діагоналі відповідно паралельні бічним сторонам трикутника. Знайдіть відношення, в якому вершини прямокутника ділять бічні сторони, починаючи від вершин основи.

588*. З вершини тупого кута ромба проведено дві висоти. Відстань між кінцями висот дорівнює половині більшої діагоналі. Знайдіть кути ромба.

589*. За основами a і b трапеції ($a > b$) визначте:
1) відстань між точками, які ділять бічні сторони у відношенні $1 : m$, починаючи від меншої основи;
2) довжину відрізка, що проходить паралельно основам через точку перетину діагоналей;
3) довжину відрізка, що проходить паралельно основам через точку перетину продовжених бічних сторін і має кінці на продовженнях діагоналей.

590*. **Відрізок з кінцями на бічних сторонах трапеції проходить через точку перетину діагоналей і паралельний основам. Доведіть, що цей відрізок ділиться точкою перетину діагоналей навпіл.**

591*. Основи трапеції відносяться, як $m : n$. Середину O однієї з основ сполучено відрізками з кінцями другої основи. Проведені відрізки перетинають діагоналі трапеції у точках M і N. Знайдіть відстань між цими точками, якщо:

1) точка O належить меншій основі трапеції, $m = 1$, $n = 4$;
2) точка O належить більшій основі трапеції, $m = 2$, $n = 3$.

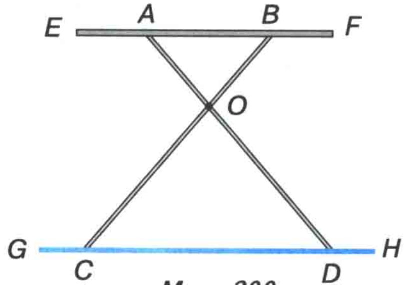
592*. Два кола перетинаються у точках A і B. Дотичні до кіл у точці A перетинають кола у точках M і N. Доведіть, що середини хорд AM і AN, а також точки A і B лежать на одному колі.

593*. Висота BH трикутника ABC ділить медіану AM у відношенні 3 : 1, починаючи від вершини A. У якому відношенні точка H ділить сторону AC?

594*. Медіана BM ділить висоту AH трикутника ABC у відношенні 3 : 1, починаючи від вершини. У якому відношенні ця висота ділить медіану BM?

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

595°. На малюнку 299 ви бачите дачний столик у поперечному розрізі. AD і BC — дві з чотирьох його ніжок. $AO = BO = 52$ см, $OC = OD = 88$ см, EF — розріз горизонтальної поверхні стола, GH — лінія підлоги. Поясніть, чому при такій будові столика прямі EF і GH паралельні.



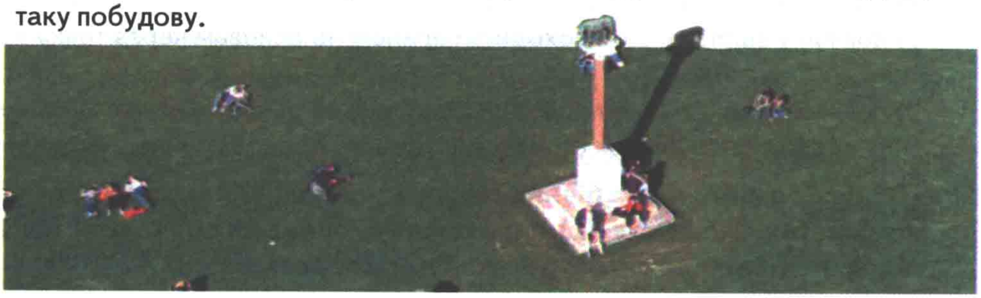
Мал. 299

596. Як знайти відстань між двома пунктами A і B, між якими не можна пройти?

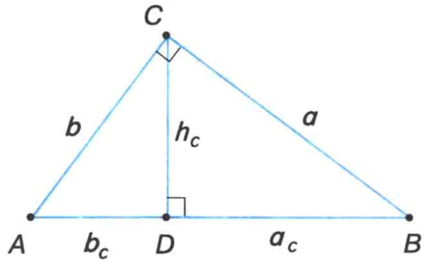
597. У певний момент часу тінь від двометрової віхи мала довжину 1,4 м, а тінь від дерева (якщо міряти від стовбура) — 9,3 м. Визначте висоту дерева, знаючи, що діаметр стовбура біля землі дорівнює 8,3 м.

598. Чому вдень за тінню можна визначити висоту дерева, а вночі за тінню від ліхтаря — ні?

599*. Щоб поділити відрізок AB на три рівні частини, діяли так. На промені AD, що не збігається з AB, відклали рівні відрізки AE і EK. Потім на промені KB побудували точку T так, щоб $KB = BT$. Пряма TE поділила відрізок AB у відношенні 2 : 1. Отже, дістали, що менший з отриманих відрізків дорівнює третині AB. Більший з отриманих відрізків поділили навпіл. Обґрунтуйте таку побудову.



§ 14. ЗАСТОСУВАННЯ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



Мал. 300

Проведемо висоту CD до гіпотенузи AB у прямокутному трикутнику ABC (мал. 300). Вона ділить гіпотенузу на відрізки AD і BD, які називаються *проекціями катетів на гіпотенузу*.

Якщо сторони трикутника позначено маленькими буквами (мал. 300), тоді проекції катетів a і b на гіпотенузу c позначають відповідно: a_c і b_c.

? Чи існують залежності між проекціями катетів на гіпотенузу і сторонами прямокутного трикутника? Так.

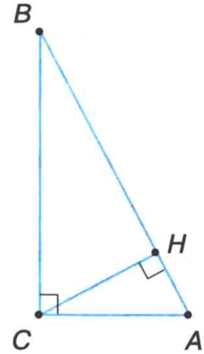
Одна із цих залежностей очевидна: $a_c + b_c = c$. Інші залежності потребують доведення.

Відрізок x називається ***середнім пропорційним*** між відрізками a і b, якщо виконується рівність $a : x = x : b$.

З означення випливає, що $x^2 = ab$. Тобто, **квадрат середнього пропорційного двох відрізків дорівнює добутку цих відрізків.**

У прямокутному трикутнику можна виділити три середніх пропорційних: висоту, проведену до гіпотенузи, та обидва катети.

Теорема (про середні пропорційні у прямокутному трикутнику).
У прямокутному трикутнику:
1) висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу;
2) катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу.



Мал. 301

Дано: ΔACB (мал. 301), $\angle C = 90°$, CH – висота.

Довести: 1) $CH^2 = AH \cdot BH$;

2) $BC^2 = BA \cdot BH$ і $AC^2 = AB \cdot AH$.

Доведення.

1) $\Delta AHC \sim \Delta CHB$ за двома кутами.

Справді, вони мають по прямому куту і $\angle ACH = \angle CBH$.

З подібності трикутиків випливає : $\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$.

Звідси $CH^2 = AH \cdot BH$.

2) Кожен з трикутників AHC і CHB подібний даному трикутнику ACB.

Це випливає з рівності їх відповідних кутів.

Тоді дістанемо:

а) $\Delta AHC \sim \Delta ACB$,

тому $\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}$.

Звідси $AC^2 = AH \cdot AB$.

б) $\Delta CHB \sim \Delta ACB$,

тому $\frac{BH}{BC} = \frac{BC}{BA}$.

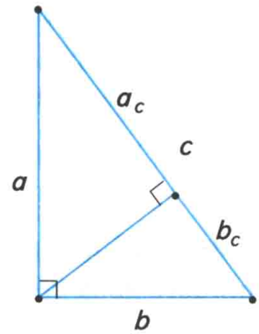
Звідси $BC^2 = BH \cdot BA$.

Наслідок. **Проекції катетів на гіпотенузу відносяться, як квадрати катетів.**

Справді, за теоремою про середні пропорційні у прямокутному трикутнику, квадрати катетів відповідно дорівнюють

$a^2 = ca_c$, $b^2 = cb_c$ (мал. 302).

Тому $\frac{a^2}{b^2} = \frac{ca_c}{cb_c} = \frac{a_c}{b_c}$, звідки $\frac{a_c}{b_c} = \frac{a^2}{b^2}$.



Мал. 302

? Ви знаєте, що бісектриса трикутника ділить його кут навпіл. Чи існує залежність між відрізками, на які бісектриса ділить протилежну сторону трикутника? Так.

Задача (властивість бісектриси трикутника).

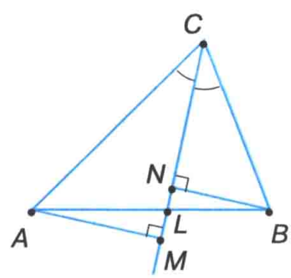
Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам. Доведіть.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC (мал. 303) проведено бісектрису CL. Треба довести, що $\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC}$.

З точок A і B проведемо перпендикуляри AM і BN до прямої CL.

$\Delta AMC \sim \Delta BNC$ за двома кутами.

У них: $\angle AMC = \angle BNC = 90°$, $\angle ACM = \angle BCN$, оскільки CL — бісектриса $\angle C$.



Мал. 303

Звідси $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AM}{BN}$. (1)

$\Delta AML \backsim \Delta BNL$ за двома кутами.

У них: $\angle AML = \angle BNL = 90°$, $\angle ALM = \angle BLN$ як вертикальні.

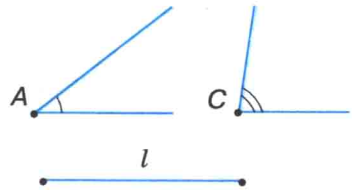
Звідси $\dfrac{AM}{BN} = \dfrac{AL}{BL}$. (2)

З рівностей (1) і (2) дістанемо: $\dfrac{AL}{BL} = \dfrac{AC}{BC}$.

Подібність трикутників застосовують не лише в задачах на доведення чи обчислення, а й у задачах на побудову.

Задача. Побудуйте трикутник за двома кутами A і C та бісектрисою l кута B.

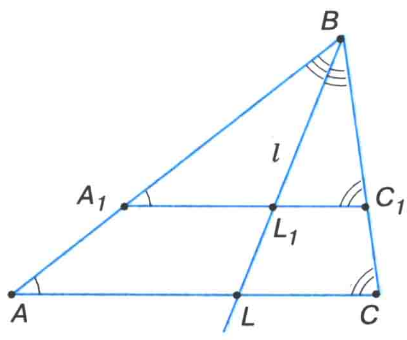
Дано:



Побудувати: ΔA_1BC_1, у якого $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$, l — бісектриса $\angle B$.

Розв'язання.

Аналіз (мал. 304). Кути A і C визначають трикутники, подібні шуканому, а бісектриса — розміри шуканого трикутника. Нехай ΔA_1BC_1 — шуканий. Відкинемо вимогу задачі, що l — бісектриса $\angle B$, тобто що $BL_1 = l$. Тоді можна побудувати допоміжний $\Delta ABC \backsim \Delta A_1BC_1$ за двома даними кутами A і C. Через точку L_1 на бісектрисі $\angle B$ $(BL_1 = l)$ проходить пряма $A_1C_1 \parallel AC$, яка відтинає від трикутника ABC подібний йому трикутник. Отже, вершини A_1 і C_1 шуканого трикутника є точками перетину прямої A_1C_1 зі сторонами BA і BC відповідно допоміжного ΔABC.



Мал. 304

Побудова.

1. Будуємо допоміжний ΔABC за двома кутами A і C.
2. Проводимо бісектрису BL кута B.
3. На промені BL відкладаємо відрізок $BL_1 = l$.
4. Через точку L_1 проводимо пряму $A_1C_1 \parallel AC$.

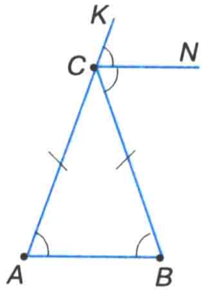
Доведення.
За побудовою, у трикутника A_1BC_1: $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$, BL_1 – бісектриса кута B і $BL_1 = l$. Отже, ΔA_1BC_1 – шуканий.

Спосіб застосування подібності трикутників у задачах на побудову називають *методом подібності*.

Щоб розв'язати задачу на побудову трикутника методом подібності:
1) **виділіть з умови задачі ті дані, які визначають форму шуканого трикутника;**
2) **побудуйте за цими даними допоміжний трикутник, подібний шуканому;**
3) **побудуйте шуканий трикутник, використавши ті дані умови, які визначають його розміри.**

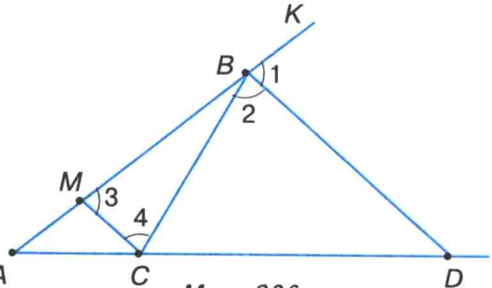
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Важливі властивості має бісектриса зовнішнього кута трикутника.



Мал. 305

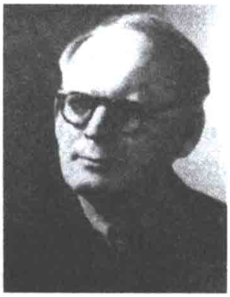
Якщо трикутник рівнобедрений, то бісектриса зовнішнього кута паралельна основі (мал. 305).
Якщо трикутник не є рівнобедреним, тоді **бісектриса його зовнішнього кута перетинає протилежну сторону в точці, відстані від якої до вершин цієї сторони пропорційні прилеглим сторонам трикутника.**
Доведемо це.



Мал. 306

Нехай ABC – даний трикутник (мал. 306), бісектриса його зовнішнього кута KBC перетинає продовження сторони AC у точці D.
Доведемо, що $DC : DA = BC : BA$.
Виконаємо допоміжну побудову: проведемо $CM \parallel BD$. Дві паралельні прямі перетинають сторони кута A, тому, за узагальненою теоремою Фалеса, $AC : CD = AM : MB$, або $AD : CD = AB : MB$.
Але $MB = CB$, оскільки ΔBCM – рівнобедрений.
Справді, у ньому $\angle 3 = \angle 4$, бо $\angle 1 = \angle 2$ (BD – бісектриса $\angle KBC$);
$\angle 1 = \angle 3$ як відповідні ($BD \parallel CM$, AB – січна);
$\angle 2 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні ($BD \parallel CM$, BC – січна).
Отже, $AD : CD = AB : CB$, тобто $DC : DA = BC : BA$.
Розгляньте самостійно випадки, коли трикутник ABC – гострокутний і $AB > BC$ ($AB > AC$).

2. Значний внесок у розвиток теорії геометричних побудов зробив відомий український математик Олександр Степанович Смогоржевський (1896 – 1969), який народився у с. Лісові Берлінці на Вінниччині. У своїх працях, адресованих учням і вчителям, учений розкриває особливості розв'язування задач на побудову різними засобами: циркулем і лінійкою; лише циркулем; лише лінійкою. І досі не втратила цінності його книжка «Дослідження задач на побудову» (1961 р.).



О. С. Смогоржевський

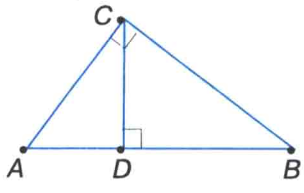
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Які відрізки називають проекціями катетів на гіпотенузу? Як їх позначають?
2. Що таке середнє пропорційне між двома відрізками? Яка його властивість?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику та наслідок з неї.
4. Яку властивість має бісектриса кута трикутника?
5. Поясніть, як застосувати метод подібності в задачах на побудову.

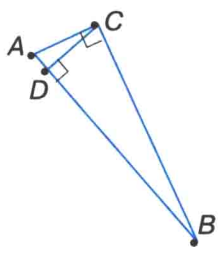
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

600'. Трикутник ABC – прямокутний (мал. 307 – 309).

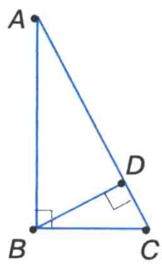
1) Назвіть проекції катетів на гіпотенузу.
2) Запишіть середні пропорційні відрізки.



Мал. 307



Мал. 308



Мал. 309

601'. Знайдіть квадрат середнього пропорційного двох чисел:

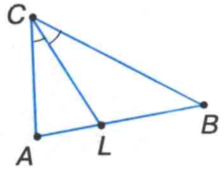
1) 3 і 12; 2) 2 і 12,5; 3) 1 і 9; 4) 2 і 8.

Чому дорівнює середнє пропорційне?

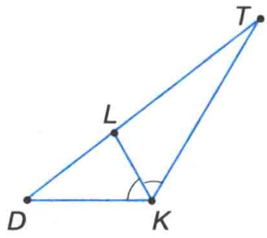
602'. За малюнками 310 – 312 назвіть:

1) бісектрису кута трикутника;
2) прилеглі сторони до кута, у якому проведено бісектрису;
3) відрізки, на які ділить бісектриса протилежну сторону трикутника.

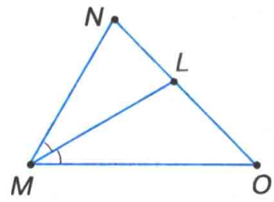
Як позначити відрізки протилежної сторони маленькими буквами?



Мал. 310



Мал. 311



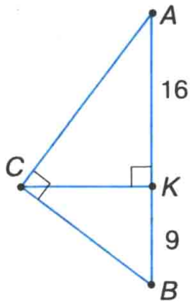
Мал. 312

603'. Запишіть, чому дорівнює відношення відрізків, на які ділить бісектриса трикутника протилежну сторону (мал. 310 — 312).

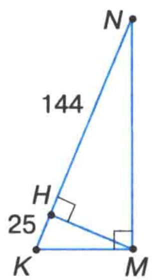
604°. За даними на малюнках 313 — 315 знайдіть:

1) гіпотенузу; 2) катети;

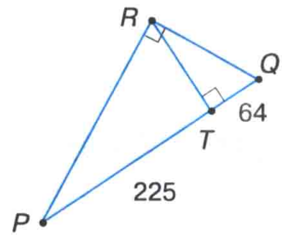
3) висоту, проведену до гіпотенузи.



Мал. 313



Мал. 314



Мал. 315

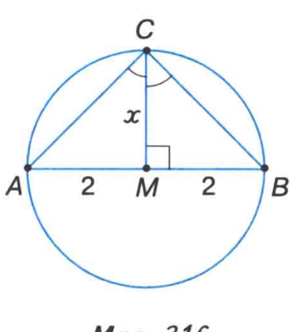
605°. Чи може відношення катета до гіпотенузи прямокутного трикутника бути:

1) меншим від одиниці; 2) дорівнювати одиниці;

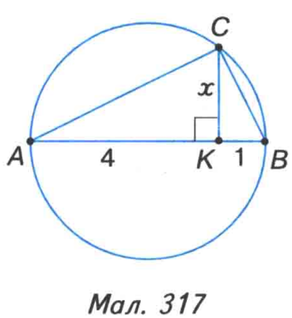
3) більшим за одиницю?

606°. Доведіть, що в рівнобедреному прямокутному трикутнику проекції катетів на гіпотенузу рівні.

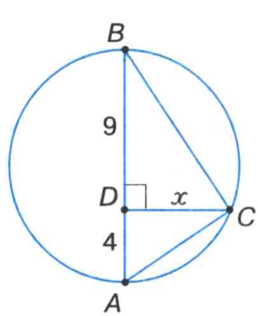
607°. За даними на малюнках 316 — 318 визначте довжину відрізка x (AB — діаметр кола).



Мал. 316



Мал. 317



Мал. 318

608°. З точки кола проведено перпендикуляр до діаметра. Знайдіть відстань від цієї точки до діаметра, якщо отримані відрізки діаметра дорівнюють:
1) 16 см і 1 см; 2) 0,5 см і 8 см; 3) 9 см і 4 см.

609°. Доведіть, що перпендикуляр, проведений з будь-якої точки кола до діаметра, є середнім пропорційним відрізків діаметра, на які його ділить основа перпендикуляра.

610°. Побудуйте відрізок, який є середнім пропорційним між двома відрізками довжиною:
1) 16 см і 1 см; 2) 0,5 см і 8 см; 3) 9 см і 4 см.

611°. Побудуйте трикутник за двома сторонами a і b та кутом C між ними. Проведіть бісектрису кута C. Виміряйте відрізки, на які бісектриса ділить третю сторону трикутника, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 5$ см, $\angle C = 120°$; 2) $a = 5$ см, $b = 8$ см, $\angle C = 60°$;
3) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $\angle C = 90°$.
Перевірте, чи виконується властивість бісектриси кута трикутника.

612°. У трикутнику ABC проведено бісектрису BD, яка ділить сторону AC на відрізки AD і DC. Накресліть у зошиті таблицю 21 та заповніть її.

Таблиця 21

AB	10 см	21 см	3 см	5 см
BC	15 см	18 см		15 см
AC	20 см		4 см	
AD		14 см		3 см
DC			2,5 см	

613°. З вершини B трикутника ABC ($AB > BC$) проведено бісектрису BL і медіану BM. Яка з точок — L чи M — розміщена ближче до вершини C? Висновок поясніть.

614°. З вершини B трикутника ABC ($BC > AB$) проведено медіану BM і висоту BH. Яка з точок — M чи H — розміщена ближче до вершини A? Висновок поясніть.

615°. Побудуйте трикутник за такими даними:
1) $\angle A = 60°$, $\angle C = 90°$, $l_b = 4$ см; 2) $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$, $l_c = 3$ см;
3) $\angle B = 40°$, $\angle C = 140°$, $l_a = 3,5$ см.

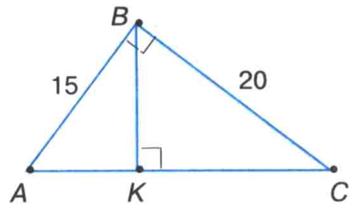
616. Доведіть, що два прямокутних трикутники подібні, якщо їх висоти, проведені до гіпотенуз, ділять гіпотенузи в однаковому відношенні.

617. З основи медіани рівностороннього трикутника проведено перпендикуляр до його другої сторони. Знайдіть відношення відрізків, утворених на цій стороні трикутника.

618. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться, як 1 : 2. Знайдіть відношення проекцій катетів на гіпотенузу.

619. Перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута трикутника, ділить гіпотенузу у відношенні 1 : 3. Знайдіть кути трикутника.

620. У прямокутному трикутнику з катетами 15 і 20 та гіпотенузою 25 знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.



Мал. 319

Розв'язання. У ΔABC (мал. 319) проведемо висоту BK до гіпотенузи AC. За теоремою про середні пропорційні в прямокутному трикутнику, $BK^2 = AK \cdot CK$. За наслідком з цієї теореми, $\frac{AK}{CK} = \frac{AB^2}{CB^2}$.

Крім того, $AK + CK = AC = 25$.

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{AK}{CK} = \frac{20^2}{15^2}, \\ AK + CK = 25. \end{cases}$

Розв'язавши її, дістанемо: що $AK = 16$, $CK = 9$. Отже, $BK^2 = 16 \cdot 9$, $BK = 12$.

Щоб знайти проекції катетів на гіпотенузу за відомими трьома сторонами даного прямокутного трикутника:

1) прирівняйте відношення шуканих проекцій катетів на гіпотенузу до відношення квадратів відповідних катетів;

2) запишіть, що сума шуканих проекцій катетів на гіпотенузу дорівнює заданій гіпотенузі;

3) з отриманих двох рівнянь утворіть систему та розв'яжіть її.

621. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює a, бічна сторона — b, а висота, проведена до основи, — c.
Знайдіть відстань від основи цієї висоти трикутника до його бічної сторони, якщо:

1) $a = 12$ см, $b = 10$ см, $c = 8$ см; 2) $a = 14$ см, $b = 25$ см, $c = 24$ см.

622. Діагоналі ромба зі стороною a дорівнюють d_1 і d_2. Визначте висоту ромба, якщо:

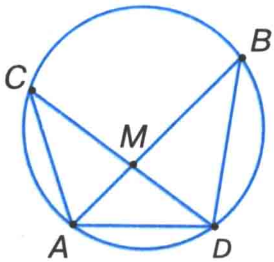
1) $a = 25$ см, $d_1 = 30$ см, $d_2 = 40$ см; 2) $a = 169$ мм, $d_1 = 130$ мм, $d_2 = 312$ мм.

623. За даними на малюнках 320 — 322 доведіть, що вказані трикутники подібні:

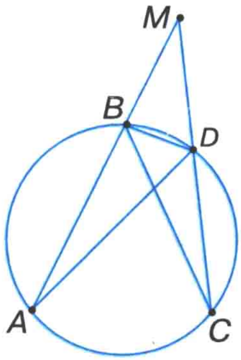
1) ΔACM і ΔDBM (мал. 320); 2) ΔADM і ΔCBM (мал. 321);
3) ΔABC і ΔACM (мал. 322).

624. Якщо хорди *AB* і *CD* кола перетинаються в точці *M*, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. Доведіть.

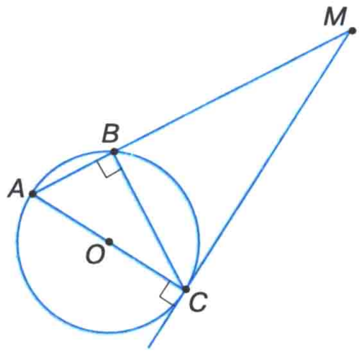
625. Якщо з точки *M* поза колом проведено дві січні, що перетинають коло відповідно в точках *A*, *B*, *C* і *D*, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. Доведіть.



Мал. 320



Мал. 321



Мал. 322

626. **Якщо з точки *M* поза колом проведено січну, що перетинає коло в точках *A* і *B*, та дотичну, що дотикається до кола у точці *C*, то $AM \cdot BM = CM^2$.** Доведіть.

627. Побудуйте трикутник за двома кутами і бісектрисою. Скільки випадків слід розглянути?

628. Побудуйте трикутник за відношенням сторін та:

1) найбільшою медіаною; 2) найменшою висотою.

629. Побудуйте рівнобедрений трикутник за:

1) кутом при вершині та сумою основи і висоти;

2) відношенням двох нерівних сторін та висотою, проведеною до бічної сторони.

630. Побудуйте трикутник за серединами відрізків, які сполучають центр вписаного кола з вершинами.

631. Побудуйте прямокутний трикутник за найменшою висотою і відношенням проекцій катетів на гіпотенузу.

632. У дане коло впишіть трикутник:

1) подібний даному трикутнику;

2) сторони якого паралельні сторонам даного трикутника.

633. Чи можна в дане коло вписати (описати навколо нього) два подібних трикутники з коефіцієнтом $k \neq 1$?

634. Через точку внутрішньої області даного кута проведіть коло, яке дотикається до його сторін.

635*. Доведіть, що квадрат добутку катетів прямокутного трикутника дорівнює квадрату добутку його гіпотенузи на висоту, проведену до гіпотенузи.

636*. Сума кутів при одній з основ трапеції дорівнює 90°. Доведіть, що висота трапеції є середнім пропорційним між проекціями її бічних сторін на основу.

637*. Доведіть, що бісектриса кута *A* трикутника *ABC* є геометричним місцем точок, які ділять у відношенні *AB* : *AC* усі відрізки з кінцями на сторонах *AB* і *AC* й паралельні стороні *BC*.

638*. Доведіть, що квадрат бісектриси трикутника дорівнює різниці добутку двох сторін кута, між якими проходить бісектриса, та добутку відрізків третьої сторони, на які вона ділиться бісектрисою.

639*. За сторонами a, b і c трикутника визначте відстані від кінців сторони a до точки перетину:

1) бісектриси кута трикутника з цією стороною;

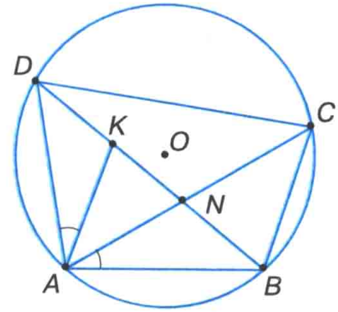
2) бісектриси зовнішнього кута трикутника з продовженням цієї сторони.

640*. Знайдіть відношення, в якому бісектриси трикутника діляться точкою їх перетину.

641*. Діагональ трапеції з основами a і $4a$ ділить її на два подібних трикутники, у кожний з яких вписано коло. Радіус кола, що дотикається до меншої основи трапеції, дорівнює $0{,}25a$. Чому дорівнює радіус другого кола?

642*. У гострий кут вписано три кола, причому середнє коло дотикається до двох інших. Доведіть, що радіус середнього кола є середнім пропорційним між радіусами крайніх кіл.

643*. Спираючись на малюнок 323, доведіть, що:
1) $\Delta ADB \sim \Delta ACB$; 2) $\Delta BAC \sim \Delta BDC$;
3) $\Delta ADK \sim \Delta ACB$; 4) $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$.



Мал. 323

644*. Побудуйте трикутник за двома кутами і найбільшою висотою.

645*. Побудуйте трикутник за двома кутами і найменшою медіаною.

646*. Побудуйте трикутник за відношенням двох сторін, кутом між ними і бісектрисою цього кута.

647*. Впишіть у трикутник ABC такий трикутник, сторони якого відповідно перпендикулярні до сторін трикутника ABC.

648*. Впишіть у трикутник ABC прямокутник, у якого основа втричі більша за висоту і лежить на основі трикутника, а дві вершини лежать на його бічних сторонах.

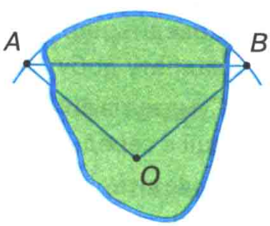
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

649. Спираючись на властивість проекцій катетів на гіпотенузу, можна будувати висоту до гіпотенузи прямокутного трикутника без використання транспортира чи косинця.

Поясніть, як це можна зробити.

650. Поясніть, як позначити дванадцять точок у вузлах сітки на папері в клітинку, щоб ці точки лежали на колі радіуса 5 клітинок.

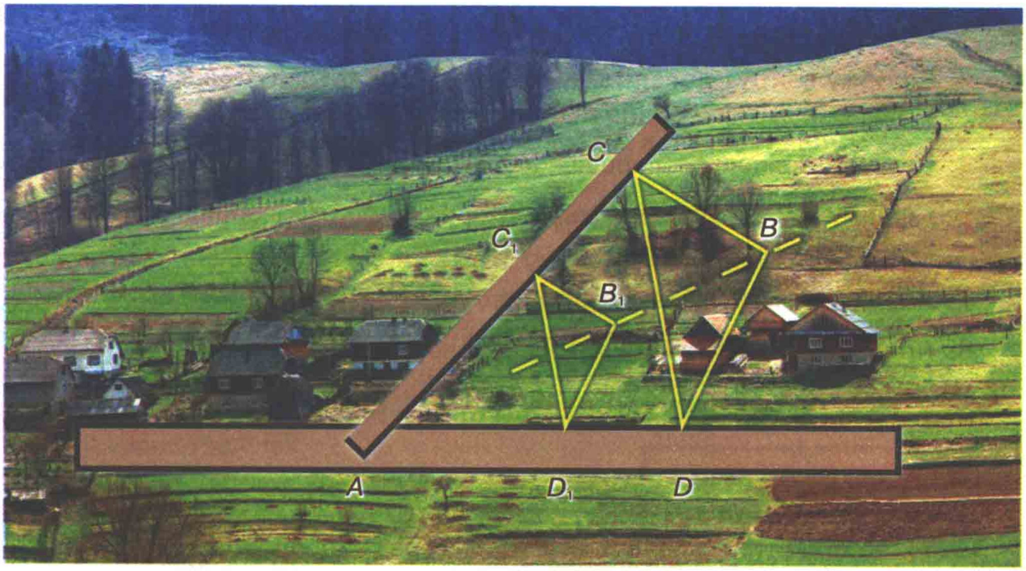
651. Поясніть, як можна побудувати бісектрису кута трикутника, не користуючись транспортиром.



Мал. 324

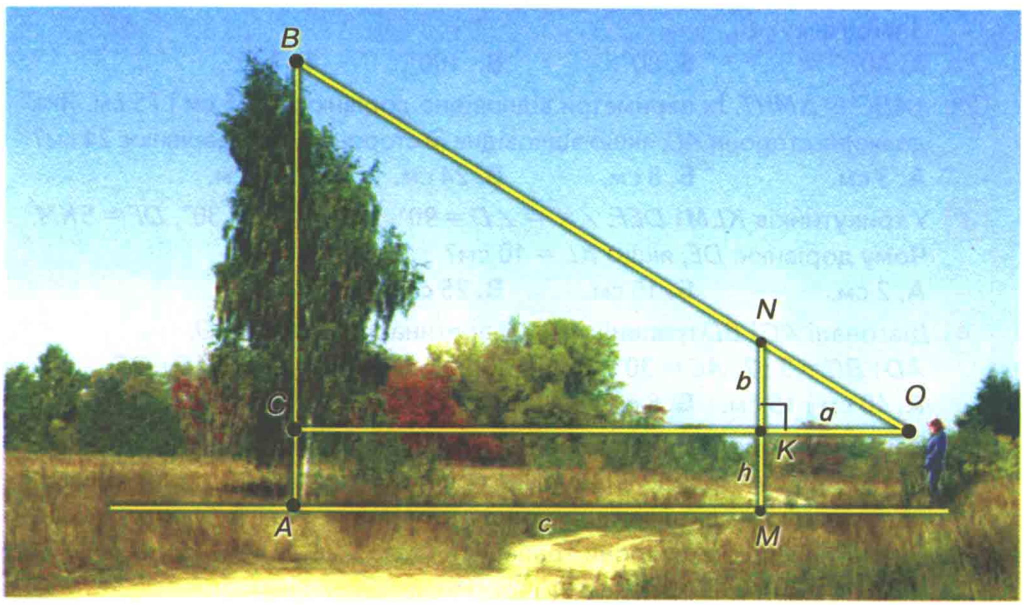
652. На уламку круга показано частину хорди *AB* (мал. 324). Визначте побудовою центральний кут, що відповідає дузі *AB*.

653. З пункту *B* до перетину доріг *AC* і *AD* потрібно прокласти трасу. Поясніть за малюнком 325, як це можна зробити, якщо пункт *A* недоступний.



Мал. 325

654*. На малюнку 326 показано, як можна виміряти висоту дерева, користуючись однією віхою. Поясніть вимірювання.



Мал. 326

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які трикутники називаються подібними? Які їх властивості?
2. Сформулюйте узагальнену теорему Фалеса.
3. Поясніть, як довести подібність трикутників за означенням.
4. Сформулюйте і доведіть ознаки подібності трикутників: за двома кутами; за двома сторонами і кутом між ними; за трьома сторонами.
5. Що таке середнє пропорційне двох відрізків? Яка його властивість?
6. Сформулюйте і доведіть теорему про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику.
7. Яку властивість має бісектриса кута трикутника?
8. Поясніть, як застосувати метод подібності у задачах на побудову.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання кожного тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

№ 1

1° $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$. Кут A дорівнює 60°, а кут B на 20° менший від $\angle A$. Знайдіть кут C_1.

А. 40°. **Б.** 80°. **В.** 100°. **Г.** 120°.

2° $\Delta ABC \sim \Delta MHT$. Їх периметри відповідно дорівнюють 25 см і 75 см. Яка довжина сторони AC, якщо відповідна їй сторона ΔMHT дорівнює 24 см?

А. 3 см. **Б.** 8 см. **В.** 24 см. **Г.** 72 см.

3° У трикутників KLM і DEF: $\angle K = \angle D = 90°$, $\angle M = \angle F = 30°$, $DF = 5KM$. Чому дорівнює DE, якщо $KL = 10$ см?

А. 2 см. **Б.** 15 см. **В.** 25 см. **Г.** 50 см.

4 Діагоналі AC і BD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O. $AD : BC = 3 : 2$, $AC = 30$ см. Знайдіть довжини відрізків AO і OC.

А. 10 см і 15 см. **Б.** 6 см і 9,5 см. **В.** 12 см і 18 см. **Г.** 18 см і 12 см.

5* Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 30 см, а його бічні сторони — по 60 см. Пряма, паралельна основі трикутника, відтинає від нього трапецію, у якої менша основа дорівнює сумі її бічних сторін. Знайдіть невідомі сторони трапеції.

А. 20 см, 20 см, 30 см. **Б.** 15 см, 15 см, 15 см.
В. 12 см, 12 см, 12 см. **Г.** 12 см, 12 см, 24 см.

№ 2

1° На сторонах кута A відкладено відрізки $AM = MB = 5$ см і $AP = PC = 8$ см. Знайдіть довжину відрізка PM, якщо відрізок BC довший за відрізок AB на 4 см.

А. 4 см. **Б.** 5 см. **В.** 7 см. **Г.** 8 см.

2° Трикутники ABC і DEF мають відповідно пропорційні сторони. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $AB = 3DE$, а різниця периметрів даних трикутників дорівнює 84 см.

А. 28 см. **Б.** 42 см. **В.** 126 см. **Г.** 168 см.

3° У трикутнику зі сторонами 7 см, 15 см і 20 см проведено бісектрису меншого кута. На які відрізки бісектриса поділила протилежну сторону?

А. 1,5 см і 2 см. **Б.** 3,5 см і 3,5 см. **В.** 2 см і 5 см. **Г.** 3 см і 4 см.

4 $ABCD$ — прямокутна трапеція з основами $AD = 9$ см і $BC = 4$ см. Знайдіть довжину діагоналі AC, якщо вона перпендикулярна до бічної сторони трапеції.

А. 5 см. **Б.** 6 см. **В.** 6,5 см. **Г.** 36 см.

5* У ΔABC висота AH довжиною 12 см проведена до сторони BC і відтинає на ній відрізок $BH = 9$ см. Знайдіть відстань від точки H до сторони AB, довжина якої 15 см.

А. 5,4 см. **Б.** 7,2 см. **В.** 9,6 см. **Г.** 12 см.

РОЗДІЛ 3

МНОГОКУТНИКИ.

У розділі дізнаєтесь:

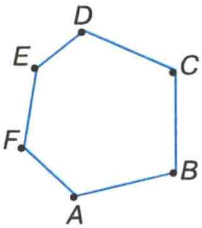
- про многокутник та його елементи;
- про суму кутів опуклого многокутника;
- які властивості многокутників, вписаних у коло та описаних навколо кола;
- що таке площа і які її властивості;
- як обчислити площу трикутника та окремих видів чотирикутників: квадрата, прямокутника, паралелограма, ромба, трапеції

ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

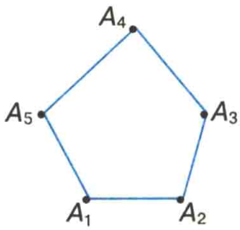
§ 15. МНОГОКУТНИК ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Ви знаєте, що таке трикутник і чотирикутник. Більш загальним є поняття *многокутника* (або *багатокутника*). На малюнку 327 ви бачите многокутник $ABCDEF$. Він складається з відрізків AB, BC, CD, DE, EF, FA, розміщених так, що суміжні відрізки не лежать на одній прямій, а несуміжні – не мають спільних точок. Відрізки, з яких складається многокутник, називаються його *сторонами*, кути, утворені суміжними сторонами, – його *кутами*, а вершини цих кутів – *вершинами* многокутника.

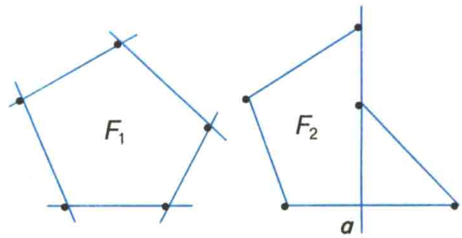
Залежно від числа вершин (кутів або сторін) многокутник називається трикутником, чотирикутником, п'ятикутником і т. д. Многокутник з n вершинами називається *n-кутником*.



Мал. 327



Мал. 328



Мал. 329

Многокутник позначають назвами його вершин, наприклад шестикутник $ABCDEF$ (мал. 327), п'ятикутник $A_1A_2A_3A_4A_5$ (мал. 328).

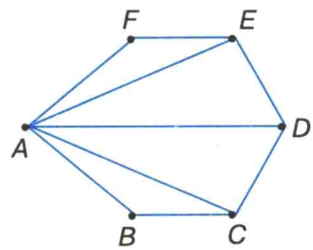
? На малюнку 329 ви бачите многокутники F_1 і F_2. У чому їх відмінність?

Жодна з прямих, які проходять через сторони многокутника F_1, не перетинає інших його сторін. Він лежить з одного боку від будь-якої з цих прямих. Такий многокутник називається *опуклим*. Многокутник F_2 не є опуклим.

Надалі ми розглядатимемо лише опуклі многокутники.

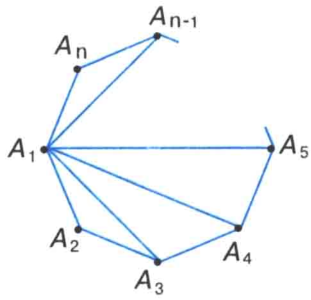
Периметром многокутника називається сума довжин усіх його сторін. Його позначають буквою P.

Подивіться на малюнок 330. У шестикутнику $ABCDEF$ відрізки AC, AD, AE сполучають вершину A з несусідніми вершинами. Це – діагоналі шестикутника.



Мал. 330

Діагоналлю n-кутника називається відрізок, що сполучає дві несусідні його вершини.



Мал. 331

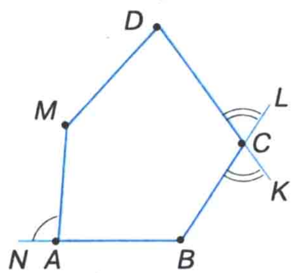
Теорема (про суму кутів n-кутника).
Сума кутів n-кутника дорівнює $180^\circ \cdot (n-2)$.

Дано: $A_1A_2A_3...A_n$ — n-кутник (мал. 331), $A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 ... A_1A_{n-1}$ — діагоналі.

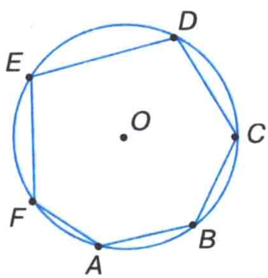
Довести:
$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + ... + \angle A_n = 180^\circ \cdot (n-2)$.

Доведення. У даному n-кутнику діагоналі $A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 ... A_1A_{n-1}$ виходять з однієї вершини A_1. Тому вони розбивають n-кутник на $n-2$ трикутників. Сума всіх кутів утворених трикутників дорівнює сумі кутів даного n-кутника. Оскільки в кожному трикутнику сума кутів дорівнює 180°, то сума кутів даного n-кутника дорівнює $180^\circ \cdot (n-2)$.

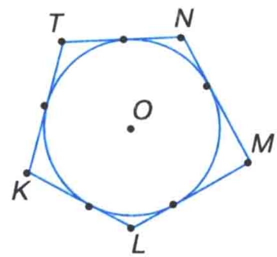
Кут, суміжний з кутом многокутника (мал. 332), називається *зовнішнім кутом многокутника*.



Мал. 332



Мал. 333

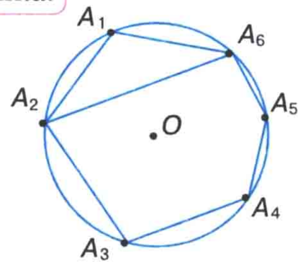


Мал. 334

Многокутники можуть бути вписаними в коло (мал. 333) або описаними навколо кола (мал. 334). Спробуйте дати відповідні означення та порівняйте їх з наведеними у підручнику.

Многокутник, усі вершини якого лежать на колі, називається ***вписаним*** у це коло, а ***коло – описаним*** навколо цього многокутника.

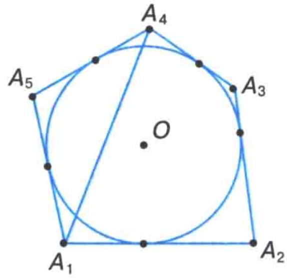
Сторони вписаного многокутника і його діагоналі є хордами кола. Кожен його кут є вписаним кутом (мал. 335).



Мал. 335

Многокутник, усі сторони якого дотикаються до кола, називається ***описаним*** навколо цього кола, а ***коло – вписаним*** у цей многокутник.

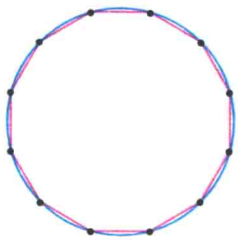
Сторони описаного многокутника є дотичними до кола, а його діагоналі – січними (мал. 336).

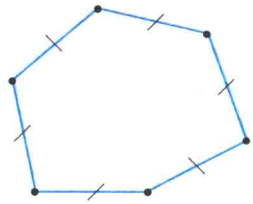


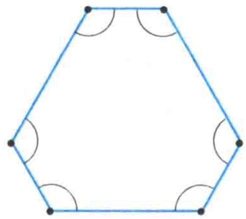
Мал. 336

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Геометрична фігура називається *простою*, якщо її можна розбити на скінченну кількість трикутників. Многокутник — це проста фігура (див. мал. 330, 331). А от коло не є простою фігурою (мал. 337). Навіть вписавши у коло многокутник з надзвичайно великою кількістю сторін, ми лише наблизимо його контур до кола. Тому довжину кола і площу круга знаходять в геометрії іншими методами, ніж периметр і площу многокутника.


Мал. 337


Мал. 338


Мал. 339

2. У вас могло виникнути запитання: *Чи завжди з рівності сторін многокутника випливає рівність його кутів і навпаки?* Ні. Цю властивість має лише трикутник. Ви знаєте приклад чотирикутника, у якого всі сторони рівні, а кути — ні. Це ромб. У прямокутника усі кути рівні, а от сторони — ні. Серед многокутників з більшою кількістю вершин також можна виділити і рівносторонні многокутники, у яких не всі кути рівні (мал. 338), і рівнокутні многокутники, у яких не всі сторони рівні (мал. 339).

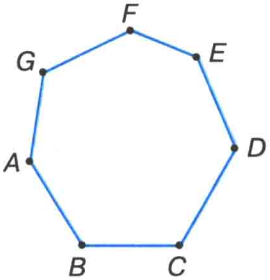
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке многокутник; *n*-кутник? Як його позначають?
2. Який відрізок називається діагоналлю многокутника?
3. Що таке периметр многокутника?
4. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів многокутника.
5. Що таке зовнішній кут многокутника?
6. Який многокутник називається вписаним у коло? Описаним навколо кола?

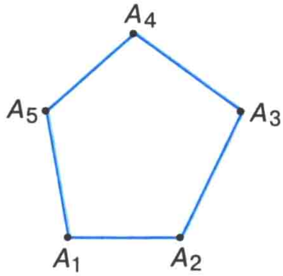
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

655'. Назвіть вершини, сторони і кути *n*-кутника, зображеного на малюнках 340, 341. Як по-іншому можна назвати цей *n*-кутник? Які діагоналі можна провести в ньому з вершини: 1) *B*; 2) *C*; 3) *F*?

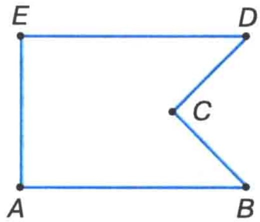
656'. Чому многокутник, зображений на малюнку 342, не є опуклим?



Мал. 340



Мал. 341



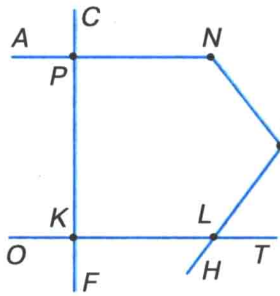
Мал. 342

657'. Знайдіть периметр n-кутника, якщо у нього всі сторони дорівнюють по 2 см і:

1) $n = 7$; 2) $n = 10$; 3) $n = 9$.

658'. Назвіть зображені на малюнку 343 зовнішні кути п'ятикутника $KLMNP$ при вершині:

1) L; 2) P; 3) K.



Мал. 343

659'. Накресліть коло і позначте на ньому:

1) сім точок — від A_1 до A_7;

2) вісім точок — від A_1 до A_8.

Послідовно сполучіть ці точки відрізками.

Який n-кутник отримали?

660'. Накресліть коло і проведіть п'ять дотичних до кола так, щоб утворився описаний п'ятикутник. Виміряйте відрізки сторін п'ятикутника від його вершин до точок дотику з колом. Позначте на малюнку рівні відрізки.

661''. Накресліть семикутник $ABCDEOT$ і проведіть його діагоналі з вершини:

1) B; 2) C; 3) D.

Скільки утворилося трикутників при даній вершині?

662''. Чому дорівнює сума кутів:

1) п'ятикутника; 2) дев'ятикутника; 3) сімнадцятикутника?

663''. Скільки вершин у n-кутника, якщо сума його кутів дорівнює:

1) 1440°; 2) 1080°; 3) 1620°?

664''. Скільки вершин у n-кутника, якщо кожен його кут дорівнює:

1) 90°; 2) 144°; 3) 156°?

665''. За даними таблиці 22 знайдіть кути п'ятикутника $ABCDM$.

Таблиця 22

$\angle A$	$n°$	$n° - 30°$	$n° - 20°$	$n°$
$\angle B$	$2n°$	$n° - 10°$	$n° - 10°$	$5n°$
$\angle C$	$4n°$	$n°$	$n°$	$7n°$
$\angle D$	$5n°$	$n°$	$n° - 30°$	$9n°$
$\angle M$	$6n°$	$n° + 30°$	$n°$	$5n°$

666°. Знайдіть зовнішній кут при вершині n-кутника, якщо кожен його кут дорівнює: 1) 90°; 2) 144°; 3) 156°.

667°. З центра кола провели радіуси так, що утворилося 7 центральних кутів. Отримані точки на колі сполучили відрізками. Який многокутник дістали?

668°. Навколо кола опишіть:

1) шестикутник; 2) п'ятикутник.

Позначте точки їх дотику до кола.

Виміряйте утворені на сторонах відрізки. Чи справджується властивість відрізків дотичних? Як можна знайти периметр многокутника?

669. **Скільки діагоналей у n-кутника?**

670. Знайдіть кількість діагоналей у:

1) десятикутнику;

2) сімнадцятикутнику.

671. Чи існує п'ятикутник, у якого кути дорівнюють:

1) 100°, 90°, 120°, 116°, 113°;

2) 110°, 100°, 118°, 112°, 101°?

672. Чи можна побудувати многокутник, крім трикутника, у якого всі кути гострі?

673. Три кути многокутника дорівнюють:

1) по 80°; 2) по 90°.

Усі інші кути дорівнюють по 150°. Яка кількість вершин у многокутника?

674. Зовнішні кути п'ятикутника відносяться, як:

1) 3 : 4 : 5 : 7 : 8; 2) 1 : 2 : 4 : 5 : 6.

Як відносяться його внутрішні кути?

Розв'яжіть задачу двома способами.

675. **Доведіть, що сума всіх внутрішніх і всіх зовнішніх кутів n-кутника пропорційна кількості його вершин.**

676. За якою формулою можна обчислити центральний кут, що спирається на сторону вписаного многокутника, у якого всі сторони рівні?

677. Скільки вершин у вписаного многокутника, якщо кожний центральний кут, що спирається на його сторону, дорівнює:

1) 60°; 2) 40°?

678*. Периметр п'ятикутника дорівнює 136,4 см. Довжини чотирьох сторін відносяться, як 6 : 7 : 8 : 11. Знайдіть довжину п'ятої сторони.

679*. Доведіть, що кожна сторона многокутника менша від його півпериметра.

680*. Доведіть, що кожний кут многокутника менший від 180°.

681*. У кожного з двох многокутників усі кути рівні. Кут першого многокутника: 1) удвічі менший від кута другого многокутника;

2) дорівнює зовнішньому куту другого многокутника.

Яку кількість вершин має кожний многокутник?

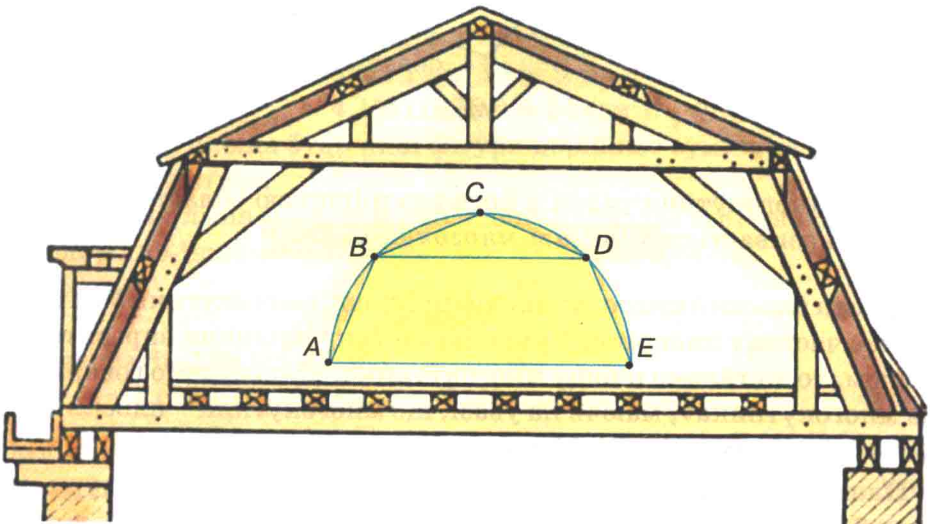
682*. Доведіть, що вписаний многокутник, у якого всі сторони рівні, має:
1) рівні кути; 2) рівні зовнішні кути.

683*. Скільки вершин у вписаного многокутника з рівними сторонами, якщо його кут:
1) дорівнює зовнішньому куту;
2) вдвічі більший за зовнішній кут;
3) відноситься до зовнішнього кута, як 5 : 2?

684*. Доведіть, що у вписаному n-кутнику з рівними сторонами при $n > 4$ кут многокутника більший за його зовнішній кут.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

685. Найпростіше мансардне покриття утворює у вертикальному розрізі половину восьмикутника, в якого всі сторони рівні і всі кути рівні (мал. 344). Знайдіть ширину перекриття *BD*, сторону восьмикутника і висоту мансардної кімнати *ABDE*, якщо *AE* = 6 м.



Мал. 344

§ 16. ПОНЯТТЯ ПЛОЩІ. ПЛОЩА ПРЯМОКУТНИКА

Многокутник розбиває площину на дві області – внутрішню (мал. 345) і зовнішню (мал. 346).

Мал. 345

Мал. 346

Мал. 347

Многокутник разом з його внутрішньою областю називається ***плоским многокутником***.

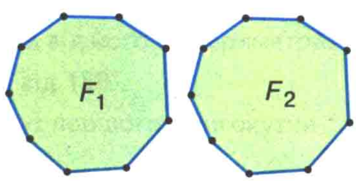
Кожен плоский многокутник (наприклад, многокутник F на мал. 347) займає частину площини. Якщо цю частину площини виразити деяким числом, то дістанемо площу многокутника. Далі будемо говорити «площа многокутника», маючи на увазі, що многокутник – плоский. Це стосується й інших плоских фігур

Площу позначають буквою S. Іноді вказують назву фігури, наприклад S_F, а для кількох фігур – індекси, наприклад S_1, S_2 і т. д.

На малюнку 348 фігури F_1 і F_2 рівні, бо суміщаються накладанням. Зрозуміло, що вони мають рівні площі.

Можемо записати: $S_{F_1} = S_{F_2}$.

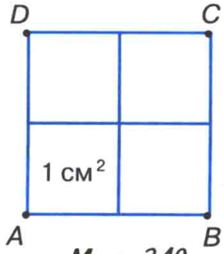
Щоб виміряти площу фігури, треба обрати одиницю вимірювання. Для цього використовують квадрат, у якого сторона дорівнює одиниці вимірювання довжини. Площа квадрата зі стороною 1 см – це одиниця вимірювання площі у *квадратних сантиметрах*, зі стороною 1 м – у *квадратних метрах* і т. д.



$F_1 = F_2$

Мал. 348

Одиниці вимірювання площі коротко записуємо так: 1 $см^2$, але говоримо: «один квадратний сантиметр». Говорити «сантиметр в квадраті» – неправильно!



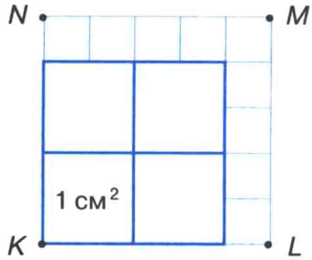
Мал. 349

Деякі одиниці вимірювання площі мають спеціальні назви: ар (квадрат зі стороною 10 м), гектар (квадрат зі стороною 100 м) та ін.

На малюнку 349 ви бачите квадрат $ABCD$ зі стороною 2 см. Він складається з 4 квадратів площею 1 $см^2$, тому його площа дорівнює 4 $см^2$.

Можемо записати: $S_{ABCD} = 4$ $см^2$.

Зрозуміло, що площа будь-якої фігури виражається додатним числом.



Мал. 350

? Чи зміниться площа квадрата $ABCD$, якщо за одиницю вимірювання візьмемо 1 $мм^2$? Ні, площа квадрата не зміниться, але буде виражена інакше: $S_{ABCD} = 400$ $мм^2$.

На малюнку 350 довжина сторони квадрата $KLMN$ дорівнює 2,5 см. Він уміщує 4 квадрати площею 1 $см^2$ і ще 9 маленьких квадратів площею 0,25 $см^2$. Тому $S_{KLMN} = 4 + 9 \cdot 0{,}25 = 6{,}25$ ($см^2$).

Зрозуміло, що площа будь-якої фігури дорівнює сумі площ частин, з яких вона складається.

З попередніх класів ви знаєте, що площу квадрата зі стороною a можна обчислити по-іншому – за *формулою площі квадрата*:

$$\boxed{S = a^2}\ .$$

Для квадратів $ABCD$ і $KLMN$ дістанемо:

$S_{ABCD} = 2^2 = 4$ ($см^2$), $S_{KLMN} = 2{,}5^2 = 6{,}25$ ($см^2$).

Оскільки 4 $см^2$ < 6,25 $см^2$, можемо записати: $S_{ABCD} < S_{KLMN}$.

Будемо вважати формулу площі квадрата основною і приймемо її без доведення. Для інших фігур формули площі треба *виводити*, спираючись на основні властивості площі. Сформулюємо їх.

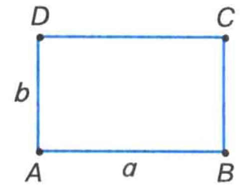
Основні властивості площі

1. Кожна фігура має площу, більшу за нуль.
2. Рівні фігури мають рівні площі.
3. Площа фігури дорівнює сумі площ фігур, з яких вона складається.
4. Одиницею вимірювання площі є площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці довжини.

Основні властивості площі підказують спосіб виведення формул площі.

Щоб вивести формулу площі многокутника, можна:
або розбити його на частини, формули площ яких відомі,
або доповнити його до такої фігури, формула площі якої відома.

Теорема (про площу прямокутника). Площа прямокутника дорівнює добутку його суміжних сторін.

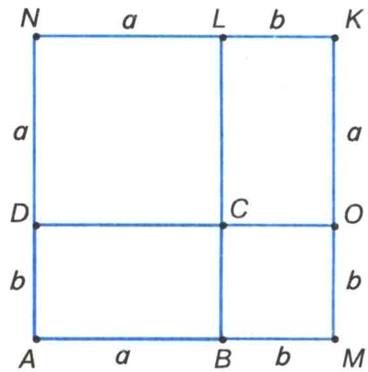


Мал. 351

Дано: $ABCD$ – прямокутник (мал. 351), $AB = a$, $AD = b$.

Довести: $S_{ABCD} = ab$.

Доведення. Добудуємо даний прямокутник $ABCD$ до квадрата $AMKN$ зі стороною $a + b$ (мал. 352).



Мал. 352

Тоді $S_{AMKN} = (a + b)^2$.

З іншого боку, квадрат $AMKN$ складається з двох прямокутників $ABCD$ і $OKLC$ та двох квадратів $BMOC$ і $DNLC$.

Тому, за третьою властивістю площі,

$S_{AMKN} = S_{ABCD} + S_{OKLC} + S_{BMOC} + S_{DNLC}$.

Прямокутники $ABCD$ і $OKLC$ рівні, бо мають рівні суміжні сторони a і b.

Тому, за другою властивістю площі, $S_{ABCD} = S_{OKLC}$.

Квадрати $BMOC$ і $DNLC$ мають сторони b і a відповідно, тому

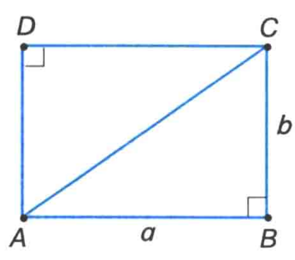
$S_{BMOC} = b^2$, $S_{DNLC} = a^2$. Отже, $S_{AMKN} = 2S_{ABCD} + a^2 + b^2$.

Далі отримаємо:

$(a + b)^2 = 2S_{ABCD} + a^2 + b^2$, або $a^2 + 2ab + b^2 = 2S_{ABCD} + a^2 + b^2$.

Звідси $S_{ABCD} = ab$.

Наслідок. **Площа прямокутного трикутника з катетами *a* і *b* дорівнює половині добутку катетів.**

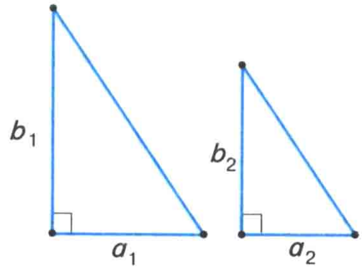


Мал. 353

Справді, діагональ AC розбиває прямокутник $ABCD$ із сторонами a і b (мал. 353) на два рівних прямокутних трикутники ABC і ADC з катетами a і b.

Тому $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab$.

Задача. Доведіть, що відношення площ подібних прямокутних трикутників дорівнює квадрату їх коефіцієнта подібності.



Мал. 354

Розв'язання. Нехай один із даних прямокутних трикутників (мал. 354) має катети a_1, b_1 і площу S_1, другий — катети a_2, b_2 і площу S_2, а коефіцієнт їх подібності дорівнює k.

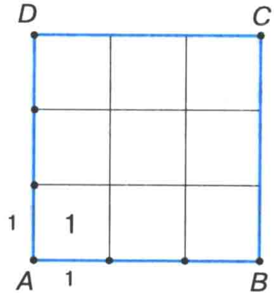
Доведемо, що $\frac{S_1}{S_2} = k^2$.

Оскільки трикутники подібні, то $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$. Знайдемо площі трикутників та їх відношення:

$$S_1 = \frac{1}{2}a_1b_1 = \frac{1}{2}ka_2 \cdot kb_2 = \frac{1}{2}k^2a_2b_2; \qquad S_2 = \frac{1}{2}a_2b_2; \qquad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}k^2a_2b_2}{\frac{1}{2}a_2b_2} = k^2.$$

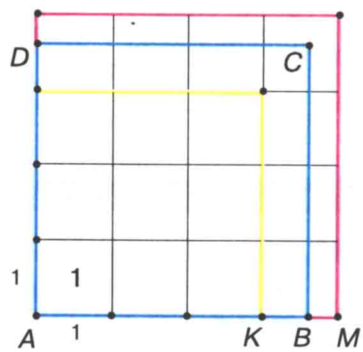
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. У вас могло виникнути запитання: *Як довести, що площа квадрата дорівнює квадрату його сторони?*
Нехай сторона квадрата $ABCD$ дорівнює a. Можливі два випадки: сторону AB можна розбити на ціле число n одиничних відрізків (мал. 355); на стороні AB можна розмістити n одиничних відрізків, але залишається остача — відрізок, коротший від одиничного відрізка (мал. 356).



Мал. 355

Розглянемо перший випадок (мал. 355). Розіб'ємо сторону AB на n одиничних відрізків (на малюнку їх 3), тоді $a = n \cdot 1 = n$. Так само розіб'ємо сторону AD. Через точки поділу проведемо прямі, перпендикулярні AB і AD. Ці прямі розбивають квадрат $ABCD$ на $n \cdot n = n^2$ рівних квадратів площею 1.
Тому $S_{ABCD} = n^2 \cdot 1 = a^2 \cdot 1 = a^2$.
Розглянемо другий випадок (мал. 356). Нехай на відрізку AB уміщається n одиничних відрізків і залишається остача — відрізок меншої довжини, ніж 1. Це означає, що відрізок AK з n одиничних відрізків є меншим від відрізка AB, а відрізок AM з $n + 1$ одиничних відрізків — більшим за цей відрізок.



Мал. 356

Дістали нерівність: $n < a < n + 1$.
Щоб точніше оцінити площу даного квадрата, поділимо одиничний відрізок на m рівних частин. Тоді довжина кожної частини дорівнюватиме $\frac{1}{m}$.

Нехай на відрізку AK їх уміститься $n + \frac{k}{m}$, а на відрізку AM — $n + \frac{k+1}{m}$.

Число a лежатиме в межах $n+\frac{k}{m}<a<n+\frac{k+1}{m}$, а квадрат цього числа — у межах $\left(n+\frac{k}{m}\right)^2<a^2<\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2$.

Площа квадрата зі стороною AK дорівнюватиме $\left(n+\frac{k}{m}\right)^2$, а квадрата зі стороною AM — $\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2$.

Тому площа квадрата $ABCD$ лежатиме в межах $\left(n+\frac{k}{m}\right)^2<S_{ABCD}<\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2$.

При збільшенні кількості точок поділу число m стане як завгодно великим. Площа квадрата $ABCD$ і квадрат числа a лежатимуть у межах, різниця між якими як завгодно мала: $\left(n+\frac{k+1}{m}\right)^2-\left(n+\frac{k}{m}\right)^2=2\left(n+\frac{k}{m}\right)\cdot\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$.

А це можливо лише тоді, коли $S_{ABCD}=a^2$.

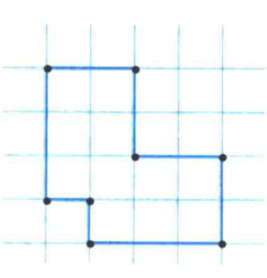
3. Символ S для позначення площі фігури походить від латинського слова *superficils*, що означає «поверхня».

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

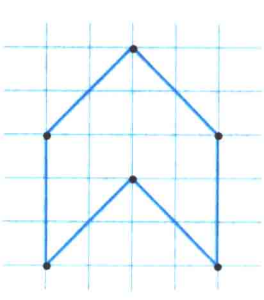
1. Поясніть, що таке площа фігури.
2. Сформулюйте основні властивості площі.
3. В яких одиницях вимірюють площу?
4. Виведіть формулу площі прямокутника.
5. Як обчислити площу прямокутного трикутника?
6. Чому дорівнює відношення площ подібних прямокутних трикутників?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

686'. Яку площу мають фігури на малюнках 357, 358, якщо за одиницю вимірювання площ взяти одну клітинку?

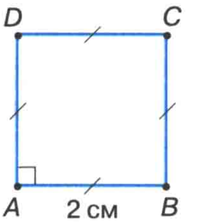


Мал. 357



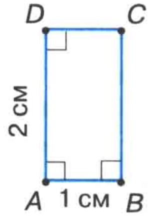
Мал. 358

687'. За даними на малюнках 359 – 361 обчисліть площу прямокутника *ABCD*.



Мал. 359

Мал. 360



Мал. 361

688'. Чому дорівнює площа прямокутного трикутника з катетами:

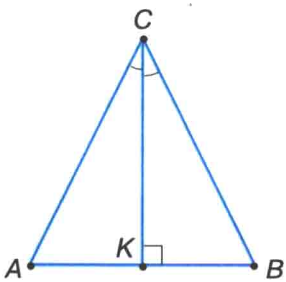
1) 3 см і 5 см; 2) 2 см і 5 см; 3) 10 см і 4,5 см?

689'. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа дорівнює:

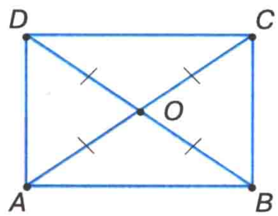
1) 16 см²; 2) 9 см²; 3) 121 см².

690°. Доведіть, що:

1) $S_{\Delta AKC} = S_{\Delta BKC}$ (мал. 362); 2) $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$ (мал. 363);
3) $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta BAC}$ (мал. 363).



Мал. 362



Мал. 363

691: Точку всередині трикутника сполучено відрізками з його вершинами. Знайдіть площу трикутника, якщо утворені частини мають площу:

1) 12 см², 39 см² і 45 см²; 2) 90 см², 25 см² і 45 см².

692: Як зміниться площа прямокутника, якщо одну з його сторін:

1) збільшити в 3 рази; 2) зменшити в 4 рази; 3) збільшити на 50%?

693: Як зміниться площа прямокутника, якщо кожну з його сторін:

1) збільшити в 3 рази; 2) зменшити в 4 рази; 3) збільшити на 50%?

694: Периметр прямокутника зі сторонами *a* і *b* дорівнює *P*, а його площа – *S*. Накресліть у зошиті таблицю 23 та заповніть її.

Таблиця 23

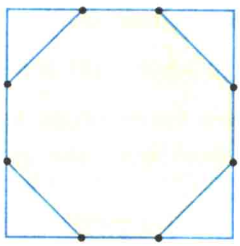
a	4 см			8 см
b		12 см	7 см	
P	11 см		21 см	
S		6 см²		4 см²

695°. Прямокутники $ABCD$ і $MTOH$ мають рівні площі. У прямокутника $ABCD$ сторони дорівнюють 10 см і 60 см.
Знайдіть сторони прямокутника $MTOH$, якщо вони відносяться, як:
1) 2 : 3; 2) 3 : 8; 3) 0,3 : 0,5.

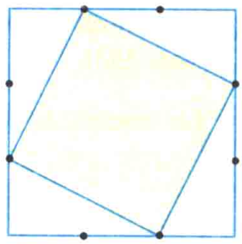
696°. Знайдіть площу прямокутного трикутника з гострим кутом 45°, якщо один з його катетів дорівнює:
1) 2 см; 2) 0,3 дм; 3) 0,05 м.

697°. Квадрат зі стороною a і прямокутник зі сторонами b і c мають рівні площі. Знайдіть периметр кожного чотирикутника, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 9$ см; 2) $a = 6$ см, $c = 2$ см; 3) $a = 10$ см, $c = 20$ см.
Який з двох чотирикутників має менший периметр?

698. Кожну сторону квадрата довжиною a поділено на 3 рівні частини і отримані точки сполучено так, як показано на малюнках 364, 365.
Знайдіть площі фігур, що містяться всередині квадратів.



Мал. 364



Мал. 365

699. Різниця периметрів двох квадратів дорівнює c, а різниця їх площ — d. Знайдіть площі квадратів, якщо:
1) $c = 16$ см, $d = 56$ см^2; 2) $c = 12$ см, $d = 105$ см^2.

700. Ширина прямокутної рамки дорівнює c, а її площа — S.
Знайдіть периметри зовнішньої та внутрішньої частин, якщо:
1) $c = 2$ см, $S = 96$ см^2; 2) $c = 3$ см, $S = 564$ см^2.

701. Площа прямокутника дорівнює S. Складіть формули для знаходження сторін прямокутника, якщо сторони відносяться, як $m : n$.

702. Периметр прямокутника дорівнює P. Складіть формули для знаходження сторін прямокутника, якщо сторони відносяться, як $m : n$.

703. Який геометричний зміст при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ мають формули:
1) $(a + b)c = ac + bc$; 2) $(a - b)c = ac - bc$;
3) $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$?

704. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Точка O розміщена на відстані d від кожного катета.
Знайдіть відстань від цієї точки до гіпотенузи, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $d = 1$ см;
2) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $d = 2$ см.

705*. Два квадрати зі стороною 10 см розміщені так, що вершина кожного квадрата міститься у точці перетину діагоналей другого квадрата.
Знайдіть площу спільної частини двох квадратів.

706*. Точка M ділить відрізок AB навпіл, а точка N – на нерівні частини. Доведіть, що площа прямокутника зі сторонами AN і NB дорівнює різниці площ квадратів зі сторонами MB і MN.

707*. У прямокутнику зі сторонами 4 см і 6 см проведено бісектриси кутів при його більшій стороні.
Знайдіть, на які частини поділено площу прямокутника.

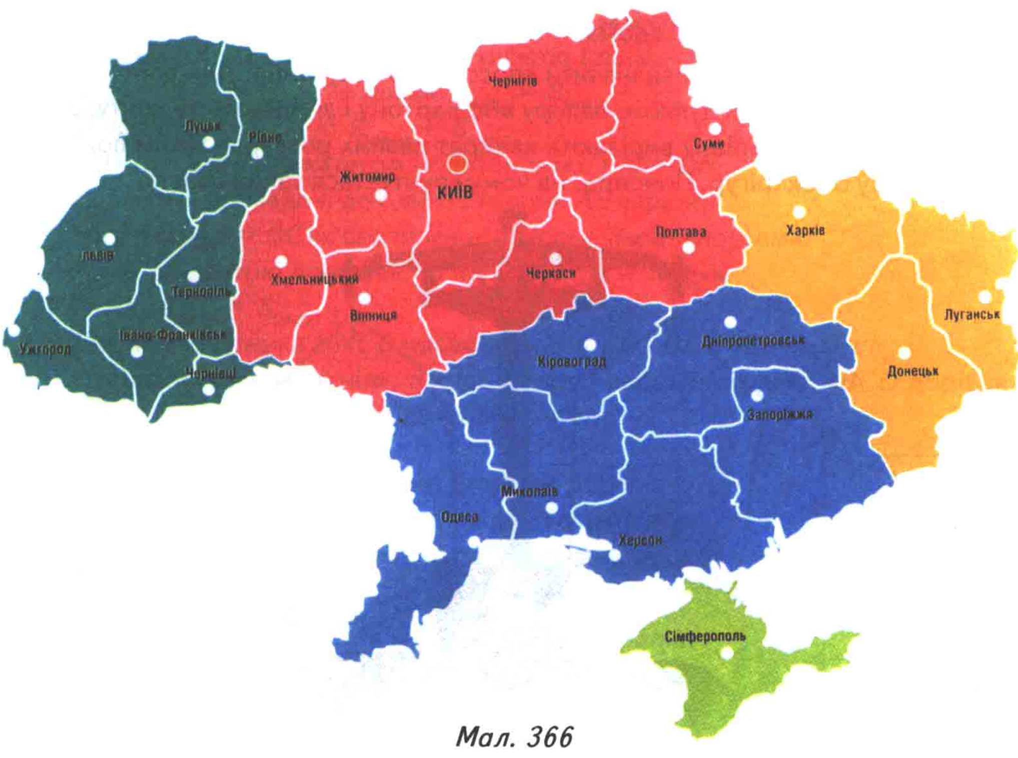
708*. Якщо точки A, B і C лежать на одній прямій, то $AB^2 + BC^2 = AC^2 - 2AB \cdot BC$. Чи правильне це твердження?

709*. **Доведіть, що площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку гіпотенузи на висоту, проведену до гіпотенузи.**

710*. Доведіть, що площі трикутників, на які розбиває прямокутний трикутник висота, проведена до гіпотенузи, відносяться, як проекції катетів на гіпотенузу.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

711°. За картою України (мал. 366) з'ясуйте, з яких частин складається площа України; яка частина має найменшу площу, найбільшу площу. Яку частину від площі України становить площа області, де ви мешкаєте?



Мал. 366

712°. Площа ділянки дорівнює 6 арів. Чому дорівнює площа цієї ділянки у квадратних метрах; у гектарах?

713°. Ділянка прямокутної форми на плані у масштабі 1 : 100 має сторони 10 см і 25 см. Яка площа цієї ділянки?

714. Прямокутний шматок лінолеуму має розмір 9 м х 4 м. Чи вистачить його для покриття підлоги у двох кімнатах розмірами 2 м х 8 м і 4 м х 5 м?

715. Якою має бути найменша площа гаража для двох автомобілів розмірами 4,5 м х 1,8 м, щоб між обома машинами та машинами і стінами залишався прохід шириною 1 м?

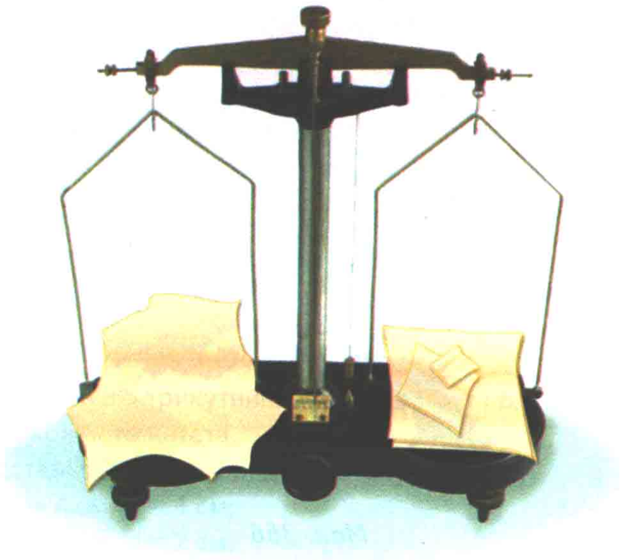
716. Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, яку кількість рулонів шпалер (без підгонки малюнка) необхідно придбати для ремонту кімнати у вас вдома, якщо рулон має довжину 10,5 м і ширину 0,6 м.

717. Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, яку кількість кахельної плитки розмірами 20 х 30 см необхідно придбати для ремонту ванної кімнати у вас вдома.

718. Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, яку кількість паркетних дощечок прямокутної форми розмірами 30 х 5 см необхідно придбати для настилання паркету в кімнаті у вас вдома.

719. Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, яку кількість ламінату прямокутної форми розмірами 138 х 19,5 см необхідно придбати для його настилання в кімнаті у вас вдома.

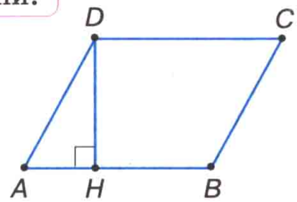
720*. Площу фігури можна визначити способом зважування. Для цього фігуру креслять на аркуші цупкого паперу або картону і вирізають за контуром. З того самого матеріалу вирізають квадрат певних розмірів. Потім порівнюють масу обох фігур. Поясніть, на чому ґрунтується такий спосіб.



§17. ПЛОЩА ПАРАЛЕЛОГРАМА

Ви вже знаєте формули площ трьох фігур – квадрата, прямокутника і прямокутного трикутника. Виведемо формулу площі паралелограма.

Теорема (про площу паралелограма).
Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.

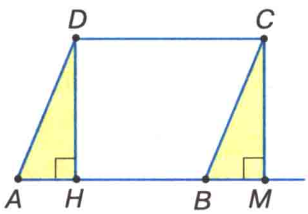


Мал. 367

Дано: $ABCD$ – паралелограм (мал. 367),
DH – висота,
$AB = a$, $DH = h_a$.

Довести: $S_{ABCD} = ah_a$.

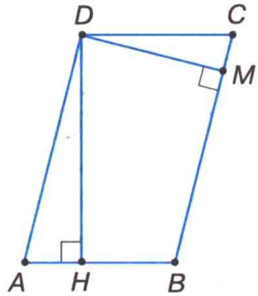
Доведення. Проведемо з вершини C висоту $CM = DH = h_a$ (мал. 368). Отримали трапецію $AMCD$. Розглянемо дві пари фігур, які її складають: даний паралелограм $ABCD$ і ΔBMC та прямокутник $HMCD$ і ΔAHD. За третьою властивістю площі, $S_{AMCD} = S_{ABCD} + S_{\Delta BMC}$, а також $S_{AMCD} = S_{HMCD} + S_{\Delta AHD}$. Тому $S_{ABCD} + S_{\Delta BMC} = S_{HMCD} + S_{\Delta AHD}$.



Мал. 368

$\Delta BMC = \Delta AHD$ за катетом і гіпотенузою: $CM = DH$ як висоти, проведені до однієї сторони AB паралелограма, $AD = BC$ як протилежні сторони паралелограма.
Тому, за другою властивістю площі, $S_{\Delta BMC} = S_{\Delta AHD}$.
Отже, $S_{ABCD} = S_{HMCD}$.
Для прямокутника $HMCD$ маємо: $S_{HMCD} = CD \cdot DH = AB \cdot h_a = ah_a$.
Оскільки, за доведеним, площа даного паралелограма $ABCD$ дорівнює площі прямокутника $HMCD$, то $S_{ABCD} = ah_a$.

Задача. У паралелограма сторони дорівнюють 8 см і 6,4 см, а висота, проведена до більшої сторони – 6 см. Знайдіть висоту паралелограма, проведену до меншої його сторони.



Мал. 369

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – даний паралелограм (мал. 369), в якого $AB = 6{,}4$ см, $BC = 8$ см, $DM = 6$ см.
Треба знайти висоту DH.

Площу паралелограма $ABCD$ можна виразити двома способами: як добуток сторони BC на висоту DM і як добуток сторони AB на висоту DH.
Звідси:

$S_{ABCD} = BC \cdot DM = 8 \cdot 6 = 48$ (см²), (1)

$S_{ABCD} = AB \cdot DH.$ (2)

Із рівностей (1) і (2) дістанемо: $DH = S_{ABCD} : AB = 48 : 6,4 = 7,5$ (см).

Щоб знайти довжину невідомої сторони або висоти паралелограма, виразіть площу двома способами: через одну із двох суміжних сторін паралелограма і висоту, проведену до неї, та через іншу суміжну сторону і відповідну їй висоту. Складіть та розв'яжіть рівняння відносно шуканої величини.

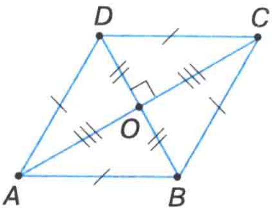
? Чи можна знайти площу ромба за стороною і висотою, проведеною до неї? Так, бо ромб – окремий вид паралелограма.

Ви знаєте, як знаходити площу прямокутного трикутника за його катетами. Скористаємось цим, щоб вивести ще одну формулу площі ромба.

Теорема (про площу ромба за його діагоналями).
Площа ромба дорівнює половині добутку його діагоналей.

Дано: $ABCD$ – ромб (мал. 370),
AC і BD – діагоналі,
$AC = d_1$, $BD = d_2$.

Довести: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2$.



Мал. 370

Доведення. У ромба $ABCD$ всі сторони рівні. Його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні і в точці перетину діляться навпіл. Тому вони розбивають ромб на чотири рівних прямокутних трикутники ABO, CBO, CDO і ADO з катетами $\frac{d_1}{2}$ і $\frac{d_2}{2}$.

$S_{\Delta ABO} = S_{\Delta CBO} = S_{\Delta CDO} = S_{\Delta ADO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}$.

Оскільки площа ромба дорівнює сумі площ цих трикутників,

то $S_{ABCD} = 4S_{\Delta ABO} = 4 \cdot \frac{d_1 d_2}{8} = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

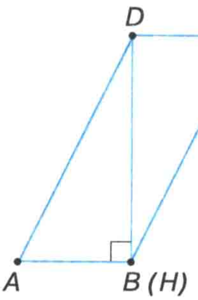
Наслідок.

Площа квадрата дорівнює половині квадрата його діагоналі.

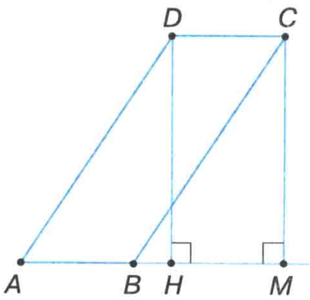
Твердження випливає з того, що квадрат є окремим видом ромба і має рівні діагоналі, нехай d. Отже, $S = \frac{1}{2} d^2$.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. У вас могло виникнути запитання: *Чи залежить формула площі паралелограма ABCD від розміщення висоти DH* (*мал. 368*)? Не залежить. У розміщенні точки *H* можливі три випадки. Один із них розглянуто у підручнику. Інші два випадки такі: точка *H* розміщується або у вершині *B* паралелограма (мал. 371), або на продовженні його сторони *AB* (мал. 372).



Мал. 371



Мал. 372

У другому випадку (мал. 371) паралелограм *ABCD* складається з двох рівних прямокутних трикутників *ABD* і *CDB*, тому $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\Delta ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DH = ah_a$. У третьому випадку (мал. 372) доведення аналогічне наведеному у підручнику. Проведіть його самостійно.

2. Для фігур, які мають рівні площі, використовують спеціальну назву — *рівновеликі*. Наприклад, паралелограм *ABCD* і прямокутник *HMCD* на малюнку 372 є рівновеликими. Зрозуміло, що два рівні многокутники завжди рівновеликі, але не будь-які два рівновеликих многокутники рівні.

Два многокутники називаються *рівноскладеними*, якщо їх можна розкласти на одне й те саме число попарно рівних многокутників, зокрема трикутників. Такими є, наприклад, паралелограм *ABCD* і прямокутник *HMCD* на малюнку 368, бо кожен з них складається зі спільної для них трапеції і рівних прямокутних трикутників *ADH* і *BCM*.


Янош Больяї

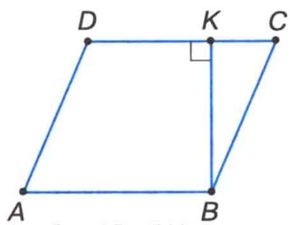
Між рівновеликими і рівноскладеними фігурами існують зв'язки: будь-які два рівноскладених многокутники є рівновеликими (випливає з означення рівноскладених многокутників); будь-які два рівновеликих многокутники є рівноскладеними. Останнє твердження має назву «теорема Больяї — Гервіна». Її довели у XIX ст. Цікавим є той факт, що Фаркаш Больяї (1775 — 1856, Угорщина), який довів теорему, був батьком Яноша Больяї — одного із творців неевклідової геометрії.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. За якою формулою можна обчислити площу паралелограма?
2. Як вивести формулу площі паралелограма за стороною і висотою, проведеною до цієї сторони?
3. Як обчислити площу ромба, квадрата за його діагоналями?

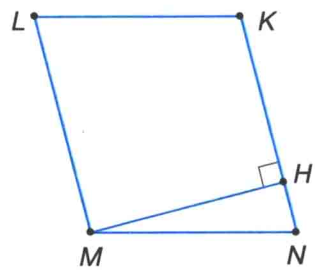
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

721'. За даними на малюнках 373 — 375 з'ясуйте, чи правильно визначатиметься площа паралелограма за наведеною рівністю.
Поясніть відповідь.



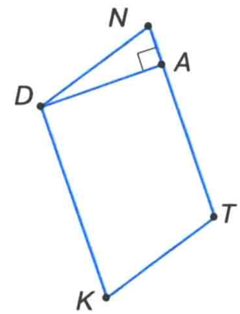
$S = AB \cdot BK$

Мал. 373



$S = MN \cdot MH$

Мал. 374

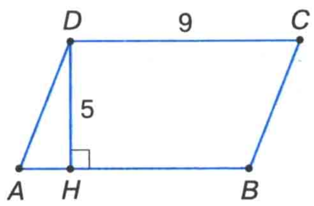


$S = DA \cdot NT$

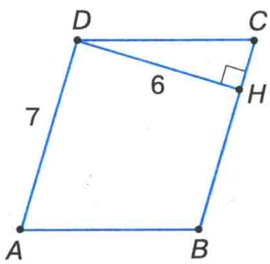
Мал. 375

722'. За даними на малюнках 376, 377 знайдіть площу паралелограма $ABCD$.

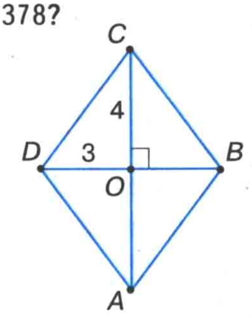
723'. Чому дорівнює площа ромба $ABCD$ на малюнку 378?



Мал. 376



Мал. 377



Мал. 378

724°. У паралелограмі $ABCD$ проведено висоту BH до сторони CD.
Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $CD = 60$ см, $BH = 50$ см; 2) $CD = 25$ см, $BH = 40$ см;
3) $CD = 25$ см, $BH = 100$ см.

725°. До сторони a паралелограма проведено висоту h_a.
Знайдіть його площу, якщо:
1) $a = 10$ см, $h_a = 0{,}8a$; 2) $a = 2$ дм, $h_a = 0{,}75a$;
3) $h_a = 5$ см, $a = 1{,}2h_a$.

726°. Площа паралелограма дорівнює S, а одна з його сторін — a. Знайдіть висоту, проведену до цієї сторони, якщо:
1) $S = 60$ см², $a = 15$ см; 2) $S = 175$ см², $a = 35$ см;
3) $S = 75$ см², $a = 25$ см.

727°. Знайдіть висоти паралелограма зі сторонами a і b та площею S. Накресліть у зошиті таблицю 24 та заповніть її.

Таблиця 24

a	5 см	8,5 см	14 см	16 см
b	10 см	17 см	21 см	10 см
S	41 см²	34 см²	63 см²	64 см²
h_a				
h_b				

728°. Площа паралелограма дорівнює S. Знайдіть відстань між його сторонами, що мають довжину d, якщо:
1) $S = 56$ см², $d = 7$ см; 2) $S = 90$ см², $d = 18$ см;
3) $S = 24$ см², $d = 6$ см.

729°. Сторони паралелограма дорівнюють a і b, а висота, проведена до сторони a, дорівнює h. Знайдіть висоту, проведену до сторони b, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 3{,}6$ см, $h = 2{,}4$ см; 2) $a = 18$ мм, $b = 9$ мм, $h = 6$ мм;
3) $a = 30$ см, $b = 50$ см, $h = 25$ см.

730°. Доведіть, що діагоналі паралелограма розбивають його на чотири трикутники з рівними площами.

731°. Через точку перетину діагоналей паралелограма проведено довільну пряму. Чи рівні площі частин, на які вона ділить паралелограм?

732°. Знайдіть площу ромба, якщо його діагоналі дорівнюють:
1) 12 см і 16 см; 2) 1,6 дм і 3 дм; 3) 40 мм і 42 мм.

733°. Доведіть, що діагоналі ромба розбивають його на чотири прямокутних трикутники з рівними площами.

734°. У ромбі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Площа прямокутного трикутника AOB дорівнює S. Знайдіть площу ромба, якщо:
1) $S = 25$ см²; 2) $S = 30$ см²; 3) $S = 18$ см².

735°. Знайдіть площу квадрата $ABCD$, якщо його діагональ AC дорівнює:
1) 4 см; 2) 0,3 дм; 3) 1,2 м.

736. Паралелограм зі сторонами a і b має гострий кут 30°. Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $a = 15$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 25$ см, $b = 20$ см.

737. У паралелограма зі сторонами a і b висота, проведена до більшої сторони, утворює з меншою стороною кут 30°. Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $a = 10$ мм, $b = 15$ мм; 2) $a = 20$ мм, $b = 25$ мм.

738. Знайдіть площу ромба з тупим кутом 150°, якщо його сторона дорівнює:
1) 1 дм; 2) 2,6 см.

739. Дві смуги шириною m і n, перетинаючись, утворюють паралелограм з площею S.
Знайдіть сторони паралелограма, якщо:
1) $m = 9$ см, $n = 24$ см, $S = 72$ см^2; 2) $m = 4$ дм, $n = 1$ дм, $S = 6$ дм^2.

740. Площа паралелограма дорівнює S. Відстані від точки перетину його діагоналей до сторін відповідно дорівнюють m і n.
Знайдіть периметр паралелограма, якщо:
1) $S = 56$ см^2, $m = 4$ см, $n = 3{,}5$ см; 2) $S = 36$ см^2, $m = 2$ см, $n = 3$ см.

741. У паралелограма з периметром P точка перетину діагоналей віддалена від його сторін на відстань m і n. Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $P = 64$ см, $m = n = 4$ см; 2) $P = 63$ см, $m = 4$ см, $n = 5$ см.

742. Через довільну точку діагоналі паралелограма проведено дві прямі, паралельні його сторонам. Доведіть, що утворені чотирикутники, які лежать по різні боки від діагоналі, мають рівні площі.

743. Площа ромба дорівнює 36 см^2. Знайдіть його діагоналі, якщо вони відносяться, як:
1) 3 : 4; 2) 2 : 3; 3) 1 : 1.

744. Два квадрати мають діагоналі відповідно 5 см і 3 см. Яка діагональ квадрата, площа якого дорівнює різниці площ даних квадратів?

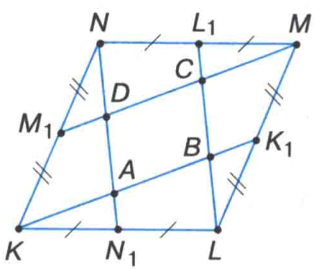
745. Площа ромба удвічі менша від площі квадрата із таким самим периметром. Знайдіть гострий кут ромба.

746. У скільки разів площа квадрата, вписаного в коло, менша від площі квадрата, описаного навколо цього кола?

747*. Висоти паралелограма відносяться, як 2 : 3, його периметр дорівнює 40 см, а гострий кут — 30°. Знайдіть площу паралелограма.

748*. Кут між висотами ромба дорівнює 60°. Доведіть, що площа ромба удвічі більша за площу трикутника, побудованого на даних висотах ромба.

749*. За даними на малюнку 379 доведіть, що площа паралелограма $ABCD$ дорівнює 0,2 площі чотирикутника $KLMN$.



Мал. 379

750*. Довільну точку M всередині паралелограма $ABCD$ сполучено відрізками з його вершинами. Доведіть, що сума площ трикутників AMD і BMC дорівнює сумі площ трикутників AMB і CMD.

751*. У паралелограмі діагональ перпендикулярна до сторони. За яких умов площа даного паралелограма дорівнюватиме квадрату цієї діагоналі?

752*. Радіус кола, вписаного у ромб, ділить його сторону на відрізки довжиною m і n. Знайдіть площу ромба, якщо:

1) $m = 1{,}8$ см, $n = 3{,}2$ см; 2) $m = 4$ см, $n = 9$ см.

753*. Знайдіть геометричне місце вершин паралелограмів зі спільною стороною, у яких площа дорівнює площі даного паралелограма.

754*. На кожній стороні паралелограма взято по точці. Площа чотирикутника з вершинами у цих точках дорівнює половині площі паралелограма. Доведіть, що хоча б одна з діагоналей чотирикутника паралельна стороні паралелограма.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

755. Поле має форму паралелограма зі стороною 250 м і висотою, проведеною до цієї сторони, 100 м. Через поле перпендикулярно до його краю проходить путівець шириною 5 м. Яку площу можна засіяти?

756. Ділянку, що має форму паралелограма, треба розділити на 3 частини однакової площі. Як провести межі?

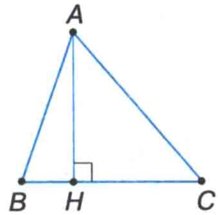
757. Прямокутну рамку стиснули так, що утворився паралелограм з тими самими сторонами, що й прямокутник. Чи рівні площі прямокутника і паралелограма?

758. Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, скільки треба придбати кахельної плитки розміром 33 x 33 см, щоб замостити підлогу коридору у вашому домі у спосіб «за діагоналлю», коли краї плитки не паралельні стінам.

§ 18. ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

Ви вже знаєте, як обчислити площу прямокутного трикутника за його катетами. Виникає запитання: як знайти площу будь-якого трикутника за його стороною і висотою, проведеною до цієї сторони?

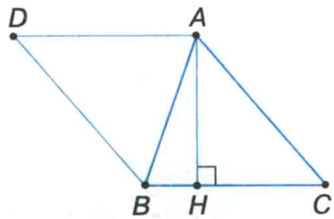
Теорема (про площу трикутника). Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.



Мал. 380

Дано: ΔABC (мал. 380), AH — висота, $BC = a$, $AH = h_a$.

Довести: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ah_a$.

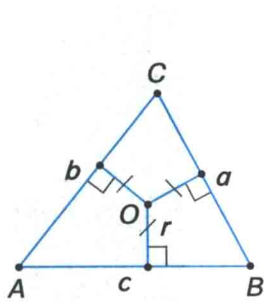


Мал. 381

Доведення. На стороні AB даного трикутника ABC побудуємо рівний йому трикутник BAD (мал. 381). Утворений чотирикутник $ADBC$ — паралелограм, оскільки, за побудовою, $AD = BC$, $BD = AC$. У нього сторона $BC = a$, висота $AH = h_a$, тому $S_{ADBC} = ah_a$. Оскільки паралелограм складений з двох рівних трикутників ABC і BAD, то площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма $ADBC$.

Звідси дістанемо: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{ADBC} = \frac{1}{2} ah_a$.

Задача. **Доведіть, що площа трикутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола.**



Мал. 382

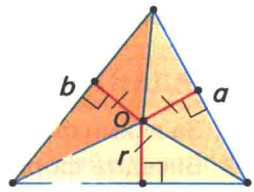
Розв'язання. Нехай ABC — даний трикутник (мал. 382), у якого $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — півпериметр, точка O — центр вписаного кола, r — радіус вписаного кола. Доведемо, що $S_{\Delta ABC} = pr$.

З'єднаємо відрізками вершини трикутника ABC з центром O вписаного у нього кола (мал. 383). Утворилися три трикутники BOC, AOC і AOB. У кожному з них радіус вписаного кола r є висотою, проведеною до сторони, що дорівнює відповідно a, b або c.

Тому $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}ar$, $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}br$, $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}cr$.

Площа ΔABC дорівнює сумі площ цих трикутників. Отже,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} + S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r = pr.$$



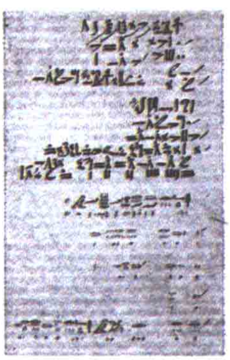
Мал. 383

Щоб знайти площу трикутника (чотирикутника), можна скористатися способом додавання площ його частин. Для застосування цього способу іноді потрібні допоміжні побудови, щоб утворилися допоміжні трикутники, площу яких можна знайти за даними задачі.

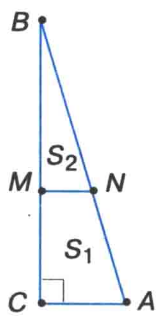
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Способи обчислення площі трикутника (а також прямокутника і трапеції) були відомі ще у Стародавньому Єгипті. Відомості про це дійшли до нас у папірусах. Найбільш відомі з них — папірус Рінда (близько 1800 р. до н. е.), який містить 84 задачі з розв'язаннями (сторінку з нього ви бачите на мал. 384), і так званий московський папірус (близько 1600 р. до н. е.), який містить 25 задач з розв'язаннями. Щоб знайти площу трикутника, стародавні єгиптяни основу трикутника ділили навпіл і множили на висоту. А от для визначення площі рівнобедреного трикутника користувалися півдобутком його бічних сторін.

2. Геометричні розрахунки за точними формулами проводились і в стародавньому Вавилоні. Відомості збереглися у клинописних табличках (приклад ви бачите на мал. 385). Тексти, які дійшли до нас, свідчать, що вавилоняни знали і використовували у практичних задачах пропорційність паралельних відрізків. Наприклад, вони вміли знаходити довжину відрізків MN, CM і BM (мал. 386) у трикутнику ABC за його


Мал. 384


Мал. 385



Мал. 386

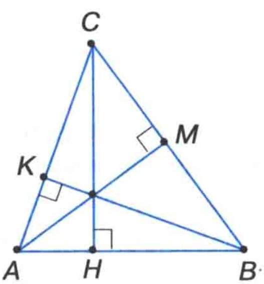
стороною $AC = 30$, різницею $S_1 - S_2 = 42$ площ трапеції і трикутника, на які розбивається даний трикутник паралельною прямою MN, та різницею $BM - CM = 20$. Зараз для розв'язування цієї задачі нам довелось би складати систему рівнянь.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

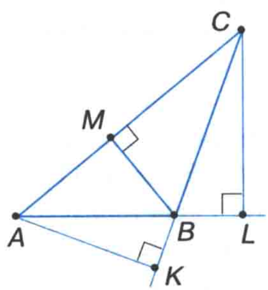
1. За якими формулами можна обчислити площу трикутника?
2. Виведіть формулу площі трикутника за стороною і висотою, проведеною до цієї сторони.
3. Поясніть, як знайти площу трикутника за площами його частин. Наведіть приклад.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

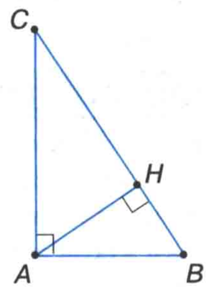
759'. За даними на малюнках 387 – 389 назвіть сторони трикутника ABC та проведені до них висоти.



Мал. 387



Мал. 388



Мал. 389

760'. Чи правильно визначатиметься площа трикутника за наведеною рівністю:

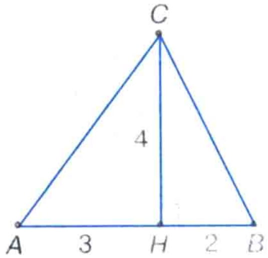
1) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AM$ (мал. 387); 2) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK$ (мал. 387);

3) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BM \cdot AK$ (мал. 388); 4) $S_{\Delta ABC} = AB \cdot CL$ (мал. 388);

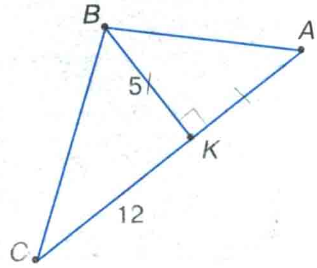
5) $S_{\Delta ABC} = AB \cdot AC$ (мал. 389); 6) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC$ (мал. 389).

Поясніть відповідь.

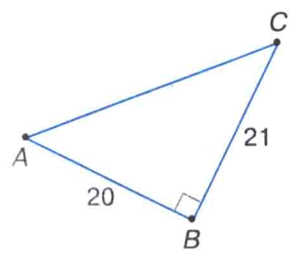
761'. За даними на малюнках 390 – 392 знайдіть площу трикутника ABC.



Мал. 390



Мал. 391



Мал. 392

762°. У трикутнику ABC проведено висоту BH. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) $AC = 6$ см, $BH = 5$ см; 2) $AC = 2,5$ дм, $BH = 4$ дм;
3) $AC = 25$ см, $BH = 100$ см.

763°. До сторони a трикутника проведено висоту h_a. Знайдіть його площу, якщо:
1) $a = 10$ см, $h_a = 0,8a$; 2) $a = 2$ дм, $h_a = 0,75a$;
3) $h_a = 12$ мм, $a = 1,5h_a$.

764°. Площа трикутника дорівнює S, а одна з його висот — h. Знайдіть сторону, до якої проведено цю висоту, якщо:
1) $S = 72$ см^2, $h = 12$ см; 2) $S = 155$ см^2, $h = 10$ см;
3) $S = 75$ см^2, $h = 7,5$ см.

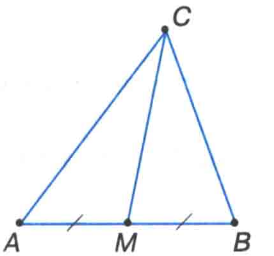
765°. Знайдіть висоти трикутника зі сторонами a, b і c та площею S. Накресліть у зошиті таблицю 25 та заповніть її.

Таблиця 25

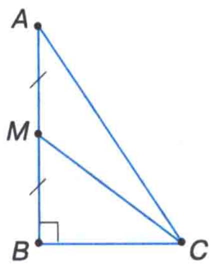
a	13 см	13 см	7 см	9 см
b	14 см	20 см	15 см	10 см
c	15 см	21 см	20 см	17 см
S	84 см^2	126 см^2	42 см^2	36 см^2
h_a				
h_b				
h_c				

766°. Як зміниться площа даного трикутника, якщо:
1) одну з його сторін збільшити у 2 рази, а висоту, проведену до цієї сторони, зменшити у 2 рази;
2) одну з його сторін зменшити у 2 рази, а висоту, проведену до цієї сторони, збільшити у 4 рази;
3) одну з його сторін збільшити у 4 рази, а висоту, проведену до цієї сторони, зменшити у 2 рази?

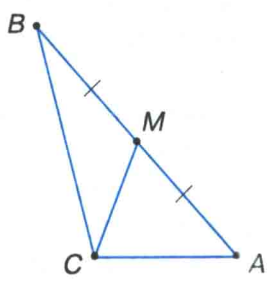
767°. За даними на малюнках 393 — 395 доведіть, що трикутники AMC і BMC мають рівні площі.



Мал. 393



Мал. 394



Мал. 395

768°. У трикутнику проведено медіану. В якому відношенні розділилась його площа? Відповідь обґрунтуйте.

769°. У трикутнику проведено середню лінію. Яку частину площі даного трикутника становить площа утвореного трикутника?

770°. Середня лінія трикутника відтинає від нього трикутник з площею S. Чому дорівнює площа даного трикутника, якщо:

1) $S = 52{,}5$ см^2; 2) $S = 21$ см^2; 3) $S = 105$ см^2?

771°. У трикутнику зі сторонами a, b і c радіус вписаного кола дорівнює r, а площа — S. Накресліть у зошиті таблицю 26 та заповніть її.

Таблиця 26

a	17 см	13 см	7 см	13 см
b	28 см	20 см	15 см	37 см
c	39 см	21 см	20 см	40 см
p				
r	5 см	$\frac{14}{3}$ см	2 см	$\frac{16}{3}$ см
S				

772. Середня лінія трикутника дорівнює q, а висота, перпендикулярна до неї, дорівнює h. Знайдіть площу трикутника, якщо:

1) $q + h = 12{,}5$ см, $q - h = 0{,}5$ см; 2) $q + h = 23$ см, $h - q = 17$ см.

773. Доведіть, що два трикутники мають рівні площі, якщо у них відповідно рівні середні лінії та висоти, які перпендикулярні до середніх ліній.

774. Площа прямокутного трикутника дорівнює S, а його катети відносяться, як $m : n$. Знайдіть катети, якщо:

1) $S = 720$ см^2, $m = 9$, $n = 40$; 2) $S = 1320$ см^2, $m = 11$, $n = 9{,}6$.

775. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо його висота ділить гіпотенузу на відрізки:

1) 4 см і 9 см; 2) 1 см і 16 см.

776. Знайдіть площу прямокутного трикутника з гострим кутом 30°, якщо його гіпотенуза дорівнює:

1) 8 см; 2) 12 см.

777. Знайдіть площу рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює:

1) 80 мм; 2) 1,2 дм.

778. Знайдіть площу прямокутного трикутника за півсумою t його катетів та радіусами r і R вписаного і описаного кіл, якщо:

1) $t = 7$ см, $r = 2$ см, $R = 5$ см;

2) $t = 17$ см, $r = 4$ см, $R = 13$ см.

779. Трикутник має сторони a, b і c, причому $a < b < c$. Складіть нерівність для висот трикутника h_a, h_b і h_c. Відповідь обґрунтуйте.

780. Відома площа одного з двох подібних трикутників. Які вимірювання та обчислення треба виконати, щоб знайти площу другого трикутника?

781. **Доведіть, що площа трикутника з вершиною у точці перетину медіан даного трикутника і спільною з ним стороною становить третину площі даного трикутника.**

782. У паралелограмі $ABCD$ вершина D знаходиться на відстані 4 см від діагоналі AC, що дорівнює 16 см. $AB = 12$ см. Знайдіть відстань:
1) від точки D до прямої AB;
2) між прямими AB і CD;
3) від середини діагоналі до сторони CD паралелограма.

783*. **Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки, що лежить всередині рівностороннього трикутника, до його сторін дорівнює висоті трикутника.**

784*. Знайдіть геометричне місце вершин трикутників зі спільною стороною, у яких площа дорівнює площі даного трикутника.

785*. Доведіть, що у трикутнику з висотами h_a, h_b і h_c та радіусом вписаного кола r має місце рівність: $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$.

786*. Сторону AB трикутника ABC продовжено за точку A на $\frac{1}{n}$ її довжини і отримано точку D. Яка площа трикутника DAC?

787*. Сторони трикутника продовжено (рухаючись за стрілкою годинника) на їх власну довжину. Отримані точки сполучено відрізками. Яка площа утвореного трикутника?

788*. У якому відношенні, рахуючи від вершини, треба поділити бічну сторону трикутника двома прямими, паралельними основі, щоб площа трикутника була поділена на три рівні частини?

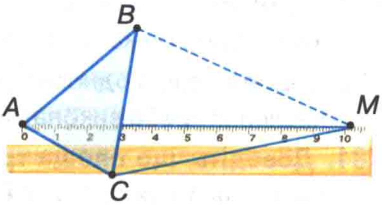
789*. Висота трикутника дорівнює 4 см. На якій відстані від вершини трикутника треба провести пряму, паралельну протилежній стороні, щоб площа трикутника поділилась у відношенні $m : n$, рахуючи від вершини?

790*. Доведіть, що коло, вписане у прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки, добуток яких дорівнює площі цього трикутника.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

791. За допомогою паперових моделей многокутників проілюструйте рівності:
$S = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \cdot h = a \cdot \frac{h}{2}$.

792. Площу трикутника можна визначити за допомогою лінійки. Для цього треба прикласти лінійку до ΔABC так, як показано на малюнку 396, і через точку B провести $BM \parallel AC$. Поясніть, як обчислити шукану площу, знаючи ширину лінійки та довжину відрізка AM.



Мал. 396

793. Як треба нанести поділки на лінійку (мал. 396), щоб точка M відразу вказувала значення площі ΔABC?

794. Виготовлено серію деталей трикутної форми, в яких найбільша сторона однакова й однакові відстані до цієї сторони від протилежної вершини. Задайте форму і розміри контейнера, в якому найзручніше транспортувати всі ці деталі одночасно.

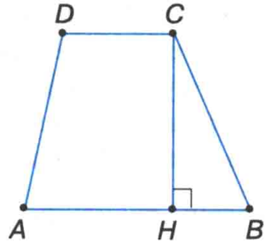
795. Повітря тисне із силою 1,03 кг на кожний квадратний сантиметр. Який тиск повітря на трикутний тент над вікном, якщо ширина тенту — 1,8 м, а відстань від його протилежної вершини до цієї сторони дорівнює 0,5 м?

796. На луці трикутної форми треба провести межу, щоб дістати дві частини з рівними площами. Як це зробити за допомогою віх і польового циркуля?

§ 19. ПЛОЩА ТРАПЕЦІЇ

Ви знаєте, щоб вивести формули площ прямокутника, паралелограма або трикутника, треба утворити з цих фігур такі, площі яких вміємо знаходити. Скористаємось цим способом для виведення формули площі трапеції.

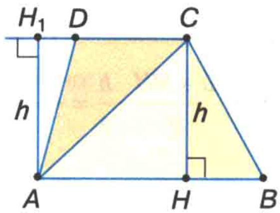
Теорема (про площу трапеції). Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.



Мал. 397

Дано: $ABCD$ — трапеція (мал. 397),
AB і CD — основи, CH — висота,
$AB = a$, $CD = b$, $CH = h$.

Довести: $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$.



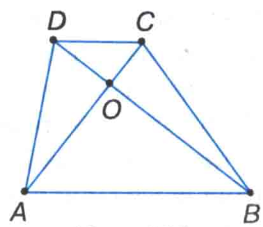
Мал. 398

Доведення. Проведемо у трапеції діагональ AC (мал. 398). Вона розбиває трапецію на два трикутники ABC і ADC. Висота h трапеції є висотою трикутника ABC, проведеною до сторони $AB = a$, і дорівнює висоті трикутника ADC, проведеній до сторони $CD = b$.

Площа трапеції дорівнює сумі площ цих трикутників, тому

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Задача. Діагоналі AC і BD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O (мал. 399). Доведіть, що трикутники AOD і BOC мають рівні площі.



Мал. 399

Розв'язання. Розглянемо трикутники ABD і ABC. У них сторона AB спільна, а висоти, проведені до цієї сторони, дорівнюють висоті трапеції.

Тому $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ABC}$. Трикутник ABD складений з трикутників AOB і AOD, а трикутник ABC — з трикутників AOB і BOC.

Звідси дістанемо:

$S_{\Delta AOD} = S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AOB}$; $S_{\Delta BOC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta AOB}$.

Отже, площі трикутників AOD і BOC рівні як різниці рівних площ.

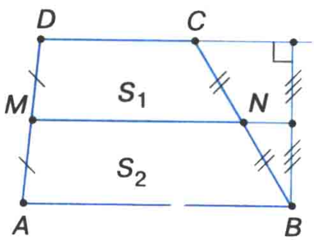
Щоб встановити, що нерівні фігури мають рівні площі, можна довести, що площі цих фігур дорівнюють або сумі рівних площ, або різниці рівних площ.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. У вас може виникнути запитання: *Чи існує трапеція, середня лінія якої ділить її площу навпіл?*

Взагалі, питання існування фігури із заданими властивостями може вирішуватись наведенням прикладу такої фігури. Однак не завжди цей шлях виявляється найпростішим. Історія свідчить про те, що інколи на пошук прикладу, який підтверджує існування деякого математичного об'єкта, вчені витрачали багато років. Щоб спростити пошук, проводять попередні аналітичні розрахунки. Це ми і зробимо, шукаючи відповідь на поставлене запитання.

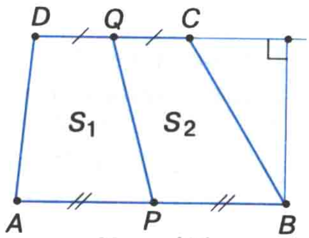
Нехай дана трапеція $ABCD$ (мал. 400) має основи a і b та висоту h. Середня лінія MN розбиває її на дві трапеції, які мають рівні висоти, що дорівнюють $\frac{h}{2}$ (доведіть це самостійно). Позначимо площі цих трапецій S_1 і S_2 та виразимо їх через основи даної трапеції і її висоту:



Мал. 400

$$S_1 = \frac{b + MN}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{b + \frac{a+b}{2}}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3b + a}{4} \cdot \frac{h}{2},$$

$$S_2 = \frac{a + MN}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3a + b}{4} \cdot \frac{h}{2}.$$



Мал. 401

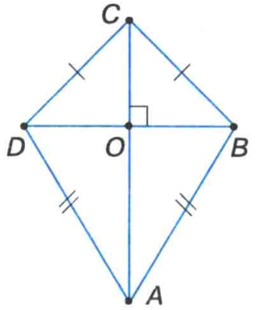
Знайдемо відношення площ S_1 і S_2.

Після скорочень дістанемо: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3b + a}{3a + b}$.

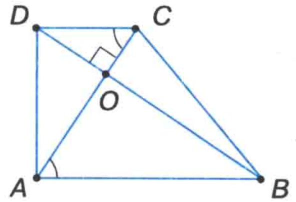
Рівність площ S_1 і S_2 можлива лише тоді, коли $3b + a = 3a + b$, тобто при $a = b$. А такої трапеції не існує.

Цікавим є той факт, що відрізок, який з'єднує середини основ трапеції (іноді його називають другою середньою лінією трапеції), ділить площу трапеції навпіл. Доведіть цей факт самостійно, спираючись на малюнок 401.

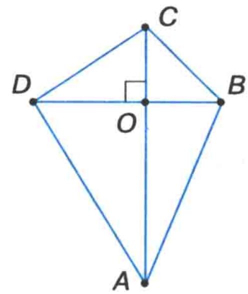
2. Вивчаючи чотирикутники, ви ознайомилися з дельтоїдом (мал. 402). Цей чотирикутник, як і ромб, має взаємно перпендикулярні діагоналі. Існують трапеції із взаємно перпендикулярними діагоналями (мал. 403), а також довільні чотирикутники із такою самою властивістю (мал. 404). І ромб, і дельтоїд, і названа трапеція є окремими видами чотирикутників із взаємно перпендикулярними діагоналями.



Мал. 402



Мал. 403



Мал. 404

Доведіть самостійно, що **площа чотирикутника із взаємно перпендикулярними діагоналями дорівнює половині добутку цих діагоналей.**
Ця формула поширюється і на ромб, і на дельтоїд, і на відповідну трапецію.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. За якою формулою обчислюють площу трапеції? Як її вивести?
2. Як знайти площу трапеції, знаючи її середню лінію і висоту?
3. Поясніть, як можна довести рівність площ двох нерівних фігур.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

797'. Чи можна визначити площу трапеції за наведеною рівністю:

1) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot DH$ (мал. 405);

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB + DC \cdot BH$ (мал. 405);

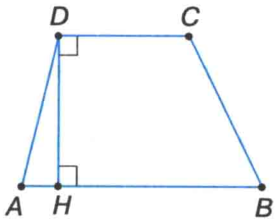
3) $S_{KLMN} = \frac{1}{2}(KL + NM) \cdot TL$ (мал. 406);

4) $S_{KLMN} = (KN + LM) \cdot \frac{MH}{2}$ (мал. 406);

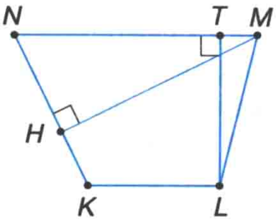
5) $S_{PQHT} = PQ \cdot PT$ (мал. 407);

6) $S_{PQHT} = \frac{HT + PQ}{2} \cdot PT$ (мал. 407)?

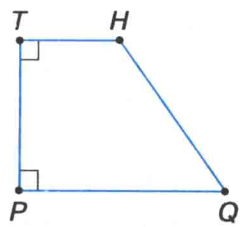
Поясніть відповідь.



Мал. 405

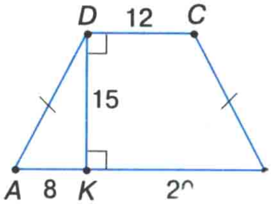


Мал. 406

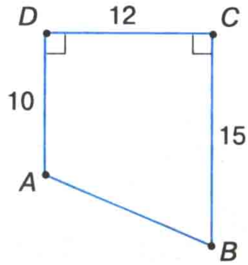


Мал. 407

798'. За даними на малюнках 408, 409 знайдіть площу трапеції $ABCD$.



Мал. 408



Мал. 409

799°. У трапеції $ABCD$ з основами AB і CD проведено висоту CH.
Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $AB = 60$ см, $CD = 36$ см, $CH = 50$ см;
2) $AB = 25$ см, $CD = 45$ см, $CH = 40$ см;
3) $AB = 25$ см, $CD = 55$ см, $CH = 100$ см.

800°. Основи трапеції дорівнюють a і b, а висота — h.
Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $a = 10$ см, $b = 0{,}8a$, $h = a$;
2) $a = 2$ дм, $b = 0{,}75a$, $h = 0{,}5a$;
3) $b = 5$ см, $a = 1{,}2b$, $h = a$.

801°. Площа трапеції дорівнює S, а її висота — h.
Знайдіть суму основ трапеції, якщо:
1) $S = 60$ см^2, $h = 12$ см; 2) $S = 150$ см^2, $h = 25$ см;
3) $S = 90$ см^2, $h = 15$ см.

802°. Площа трапеції дорівнює S, а її середня лінія — q.
Знайдіть висоту трапеції, якщо:
1) $S = 60$ см^2, $q = 15$ см; 2) $S = 175$ см^2, $q = 35$ см; 3) $S = 75$ см^2, $q = 25$ см.

803°. Основи трапеції дорівнюють a і b, середня лінія — q, висота — h, а площа — S.
Накресліть у зошиті таблицю 27 та заповніть її.

Таблиця 27

a	10 см	23 см		
b	14 см		22 см	9 см
q		25 см		16 см
h	7 см		10 см	
S		125 см^2	210 см^2	176 см^2

804°. Як зміниться площа трапеції, якщо:
1) обидві її основи збільшити у 2 рази, а висоту зменшити у 2 рази;
2) обидві її основи зменшити у 2 рази, а висоту збільшити у 2 рази;
3) середню лінію збільшити у 2 рази?

805°. Площа трапеції дорівнює S, висота дорівнює h, а її основи відносяться, як $m : n$. Знайдіть основи трапеції, якщо:
1) $S = 36$ см^2, $h = 2$ см, $m = 4$, $n = 5$; 2) $S = 150$ см^2, $h = 5$ см, $m = 2$, $n = 3$;
3) $S = 90$ см^2, $h = 6$ см, $m = 1$, $n = 2$.

806°. У трапеції з основами a і b проведено діагоналі. Чому дорівнює відношення площ трикутників, що прилягають до основ?

807. Периметр трапеції дорівнює P, її бічні сторони дорівнюють c і d, а висота — h. Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $P = 120$ см, $c = d = 17$ см, $h = 15$ см;
2) $P = 58$ см, $c = 15$ см, $d = 13$ см, $h = 12$ см.

808. У прямокутній трапеції основи дорівнюють a і b. Її більша бічна сторона утворює з основою кут 45°. Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 5$ см; 2) $a = 5$ см, $b = 3$ см.

809. У прямокутній трапеції дві найменші сторони мають довжину a. Найбільший кут трапеції дорівнює 135°. Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $a = 2$ см; 2) $a = 3$ см.

810. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і $3a$, а площа дорівнює $2a^2$. Чому дорівнює гострий кут трапеції?

811. У трапеції менша діагональ d перпендикулярна до її основ a і b. Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $a + 2b = 3{,}3$ см, $a - b = 1{,}8$ см, $d = 4$ см;
2) $3a + 2b = 44$ см, $a - 2b = 4$ см, $d = 12$ см.

812. Відрізок, проведений з вершини тупого кута трапеції паралельно її бічній стороні, ділить основу у відношенні 1 : 2. Знайдіть основи трапеції, якщо площа утвореного трикутника дорівнює 6 см^2, а висота трапеції — 3 см. Скільки випадків треба розглянути?

813. Менша основа трапеції дорівнює 4 см. Пряма a розбиває трапецію на паралелограм і трикутник з рівними площами. Знайдіть більшу основу трапеції.

814. Доведіть, що площа трапеції, описаної навколо кола, дорівнює добутку півсуми її бічних сторін на висоту.

815. Трапеція, описана навколо кола, має периметр P і площу S. Знайдіть радіус кола.

816. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Одна з діагоналей дорівнює 8 см, а площа трапеції — 40 см^2. Знайдіть другу діагональ.

817*. Доведіть, що існує безліч нерівних трапецій, які мають з трапецією *ABCD* спільну середню лінію і однакову з нею площу.

818*. В яких межах може змінюватись площа трапеції, більша основа якої дорівнює 16 см, а висота — 2 см?

819*. Відрізок, паралельний основам a і b трапеції, ділить її площу навпіл. Яка довжина цього відрізка?

820*. Діагоналі трапеції $ABCD$ з основами AB і CD перетинаються в точці O. Доведіть, що площа трикутника BOC є середнім пропорційним між площами трикутників AOB і COD.

821*. Основи трапеції відносяться, як $m : n$. Знайдіть відношення площ чотирьох частин трапеції, на які її розбивають діагоналі.

822*. Висота рівнобічної трапеції дорівнює h, а її площа — h^2. Під яким кутом перетинаються діагоналі трапеції?

823*. Знайдіть площу рівнобічної трапеції з бічною стороною c і перпендикулярною до неї діагоналлю d, якщо основи трапеції відносяться, як 3 : 5.

824*. У трапеції із взаємно перпендикулярними діагоналями відрізок, що сполучає середини основ, дорівнює середній лінії трапеції. Доведіть.

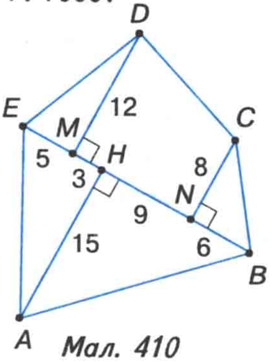
825*. Якщо у трапеції середину бічної сторони з'єднати відрізками з кінцями іншої бічної сторони, то утворений трикутник має площу, вдвічі меншу від площі трапеції. Доведіть.

826*. У трикутнику через точку перетину медіан проведно три відрізки, кожен з яких паралельний одній зі сторін трикутника. Доведіть, що три утворені трапеції, які складають трикутник, мають рівні площі.

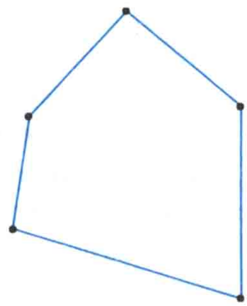
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

827°. На малюнку 410 зображено план ділянки у масштабі 1 : 1000. Яка площа цієї ділянки?

828°. Як за планом на малюнку 411 знайти площу ділянки, якщо план виконано у масштабі 1 : 1000?



Мал. 410



Мал. 411

829. Ділянка має форму прямокутної трапеції. Як провести перпендикулярну пряму до її основ, щоб розділити площу ділянки навпіл?

830. У ліхтаря скляні вставки мають форму трапеції, в якої паралельні сторони дорівнюють 20 см і 16 см, а відстань між ними — 10 см. Чи вистачить скла прямокутної форми розмірами 30 x 24 см, щоб вирізати 4 вставки для ліхтаря? Поясніть відповідь.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке многокутник; n-кутник? Як його позначають?
2. Які елементи многокутника? Що таке зовнішній кут многокутника? Діагональ? Периметр?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів многокутника.
4. Який многокутник називається вписаним у коло? Описаним навколо кола?
5. Поясніть, що таке площа фігури. Які основні властивості площі?
6. Виведіть формули площі прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції. За якою формулою знаходять площу квадрата?
7. Чому дорівнює відношення площ подібних трикутників?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання кожного тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

1° Знайдіть суму кутів шестикутника.

А. 60°. **Б.** 120°. **В.** 540°. **Г.** 720°.

2° Квадрат і прямокутник мають рівні площі. Периметр квадрата дорівнює 24 см, а одна зі сторін прямокутника – 4 см. Знайдіть другу сторону прямокутника.

А. 6 см. **Б.** 9 см. **В.** 20 см. **Г.** 36 см.

3° Площа рівнобедреного ΔABC з основою AC дорівнює 4800 см^2. Знайдіть висоти, проведені до бічних сторін трикутника, якщо $AB = 100$ см.

А. 24 см і 48 см. **Б.** 48 см і 48 см. **В.** 48 см і 96 см. **Г.** 96 см і 96 см.

4 У трапеції $ABCD$ менша основа CD і висота відповідно дорівнюють 7 см і 8 см. Знайдіть площу трапеції, якщо площа ΔABC дорівнює 60 см^2.

А. 45 см^2. **Б.** 56 см^2. **В.** 75 см^2. **Г.** 88 см^2.

5* У ромбі $ABCD$ діагоналі дорівнюють 9 см і 40 см. Більшу діагональ AC точка K ділить у відношенні 3 : 2, рахуючи від вершини A. Знайдіть площу трикутника AKB.

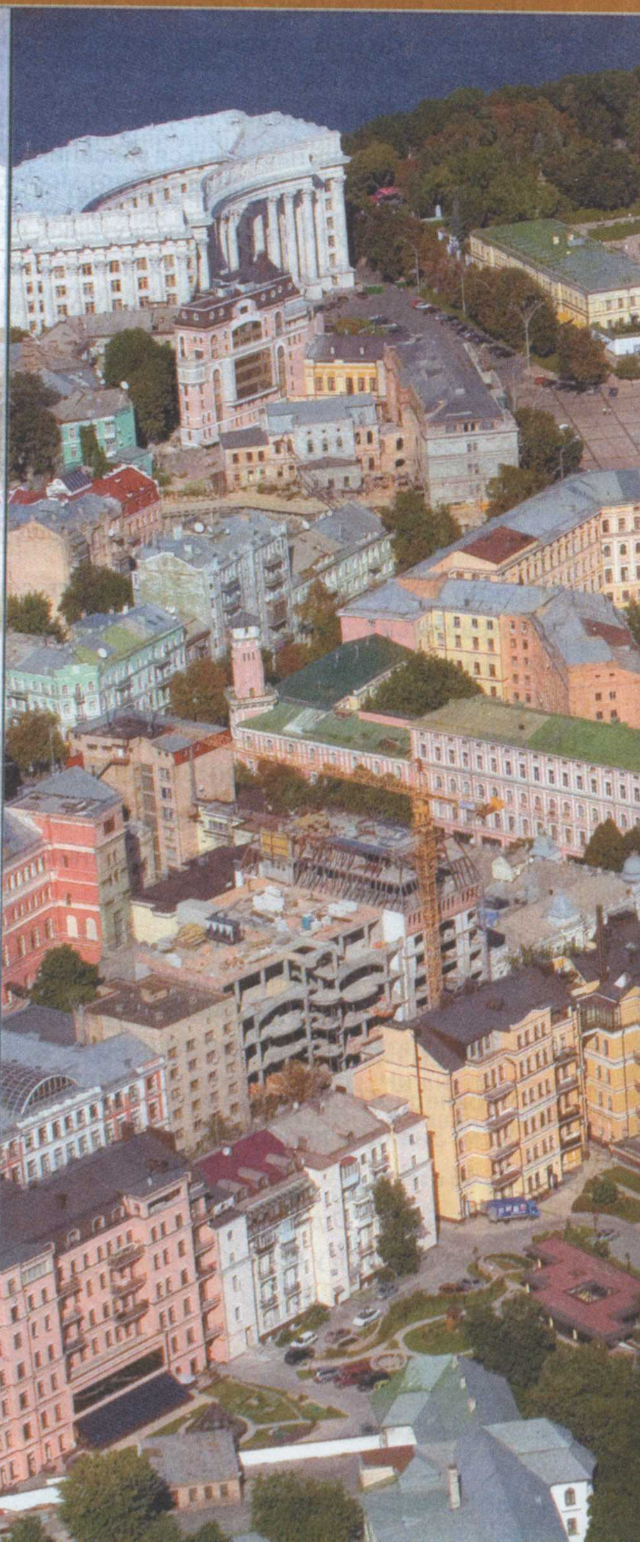
А. 90 см^2. **Б.** 135 см^2. **В.** 180 см^2. **Г.** 270 см^2.

РОЗДІЛ 4

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

У розділі дізнаєтесь:

- про визначну теорему геометрії – теорему Піфагора та наслідки з неї;
- що таке синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника та про співвідношення між його сторонами;
- про нові алгоритми знаходження за однією із сторін прямокутного трикутника і гострим кутом двох інших сторін, а за двома сторонами трикутника – гострих кутів;
- як застосовувати вивчені алгоритми до розв'язування геометричних задач та задач практичного змісту



ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

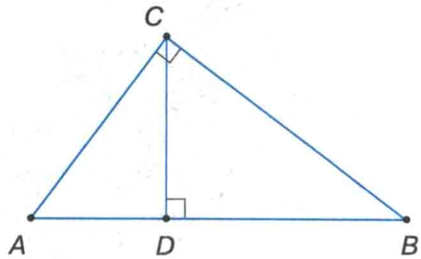
§20. ТЕОРЕМА ПІФАГОРА. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА

Доведемо теорему, відкриття якої пов'язане з ім'ям давньогрецького вченого Піфагора (VI ст. до н. е.).

Теорема Піфагора. У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$ (мал. 412).

Довести: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.



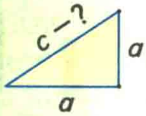
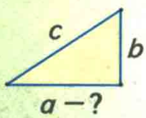
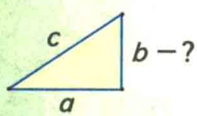
Мал. 412

Доведення. Проведемо з вершини прямого кута C висоту CD. Кожен катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу. Тому $AC^2 = AB \cdot AD$ і $BC^2 = AB \cdot BD$. Додавши рівності почленно і врахувавши, що $AD + DB = AB$, дістанемо:
$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB = AB\,(AD + DB) = AB^2$.
Отже, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Якщо a, b – катети прямокутного трикутника, c – його гіпотенуза, то з формули $c^2 = a^2 + b^2$ дістанемо такі формули: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a^2 = c^2 - b^2$, або $a = \sqrt{c^2 - b^2}$; $b^2 = c^2 - a^2$, або $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

За цими формулами за двома будь-якими сторонами прямокутного трикутника знаходимо його третю сторону (табл. 28).

Таблиця 28

		
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$a = \sqrt{c^2 - b^2}$	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Наприклад:

1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, тоді $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см);

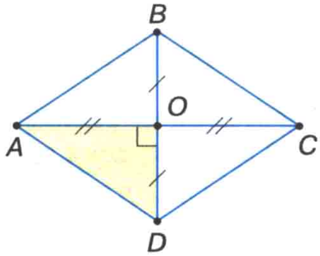
2) $c = 13$ см, $a = 5$ см, тоді $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

Правильна і теорема, обернена до теореми Піфагора: **якщо квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін, то цей трикутник – прямокутний.**

За теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см – прямокутний, оскільки $3^2 + 4^2 = 5^2$. Такий трикутник інколи називають *єгипетським*.

Задача. Сторона ромба дорівнює 10 см, а одна з його діагоналей – 16 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

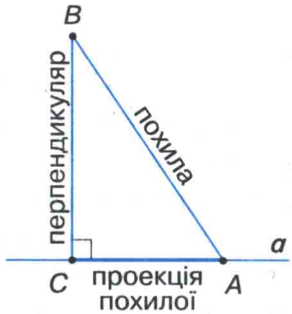
Розв'язання. Нехай $ABCD$ – ромб (мал. 413), $AC = 16$ см, $AD = 10$ см. Знайдемо діагональ BD. Як відомо, діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом і в точці перетину діляться навпіл. Тому ΔAOD – прямокутний ($\angle O = 90°$). У ньому: катет $AO = \frac{AC}{2} = \frac{16}{2} = 8$ (см), гіпотенуза $AD = 10$ см. За теоремою Піфагора, $AD^2 = AO^2 + OD^2$, звідси $OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ (см). Тоді діагональ $BD = 2 \cdot OD = 2 \cdot 6 = 12$ (см).



Мал. 413

Щоб знайти деякий елемент фігури (сторону, висоту, діагональ), виділіть на малюнку прямокутний трикутник, скориставшись властивостями фігури, і застосуйте теорему Піфагора.

Нехай BC – перпендикуляр, проведений з точки B до прямої a (мал. 414). Візьмемо довільну точку A на прямій a, відмінну від точки C, і сполучимо точки A і B. Відрізок AB називається *похилою*, проведеною з точки B до прямої a. Точка A називається *основою похилої*, а відрізок AC – *проекцією похилої*.



Мал. 414

Похилі мають такі властивості.

Якщо з даної точки до прямої проведено перпендикуляр і похилі, то:

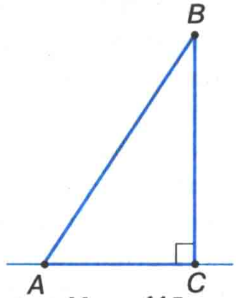
1) будь-яка похила більша за перпендикуляр;

2) рівні похилі мають рівні проекції;

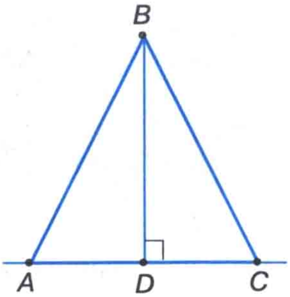
3) з двох похилих більша та, в якої проекція більша.

Покажемо, що властивості похилих випливають з теореми Піфагора.

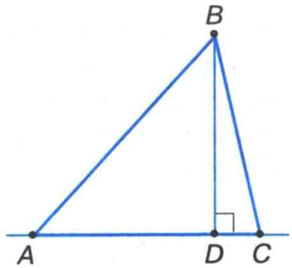
1) За теоремою Піфагора, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (мал. 415), тоді $AB^2 > BC^2$ або $AB > BC$.



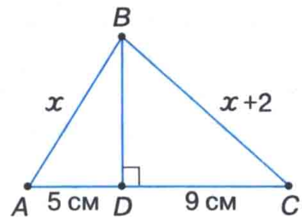
Мал. 415



Мал. 416



Мал. 417



Мал. 418

2) З прямокутних трикутників ABD і CBD (мал. 416) маємо:

$$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}\ ,\ DC=\sqrt{BC^2-BD^2}\ .$$

Оскільки в цих рівностях $AB = BC$ (за умовою), то $AD = DC$.

3) З прямокутних трикутників ABD і CBD (мал. 417) маємо:

$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}$, $BC=\sqrt{DC^2+BD^2}$. У цих рівностях $AD > DC$.

Тоді $AB > BC$.

Задача. З точки до прямої проведено дві похилі, проекції яких дорівнюють 5 см і 9 см. Знайдіть похилі, якщо одна з них на 2 см більша за другу.

Розв'язання. Нехай $AD = 5$ см, $DC = 9$ см (мал. 418). Оскільки $AD < DC$, то, за властивістю 3 похилих, $AB < BC$. Позначимо AB через x, тоді $BC = x + 2$. З прямокутних трикутників ABD і CBD знаходимо BD^2.

З ΔABD: $BD^2 = AB^2 - AD^2 = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$.

З ΔCBD: $BD^2 = BC^2 - DC^2 = (x + 2)^2 - 9^2 = x^2 + 4x - 77$.

Прирівнявши праві частини рівностей, дістанемо: $x^2 + 4x - 77 = x^2 - 25$.

Звідси $4x = 52$, $x = 13$ см. Отже, $AB = 13$ см, $BC = x + 2 = 15$ (см).

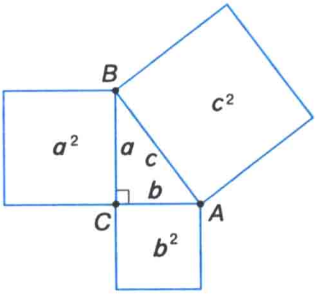
Якщо в умові задачі дано дві похилі, проведені з однієї точки до прямої, то розгляньте два прямокутних трикутники, спільним катетом яких є перпендикуляр, проведений зі спільної точки до цієї прямої.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

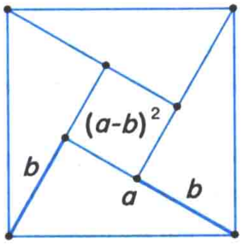
Теорема Піфагора — одна з визначних теорем математики. Протягом багатьох століть вона була поштовхом до важливих математичних досліджень. Тому пропонуємо вам кілька цікавих фактів, пов'язаних з цією теоремою та життям її автора.


Піфагор

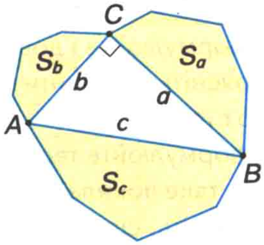
Піфагор (570 — 496 рр. до н. е.) народився на острові Самосі (на півдні Егейського моря). Довгий час вивчав математику в Єгипті та Вавилоні. У м. Кротоні, на півдні Італії, заснував наукову школу — так званий піфагорійський



Мал. 419



Мал. 420



Мал. 421

союз. Піфагор та його учні займалися математикою, філософією, астрономією і теорією музики. Через суспільні суперечки будинок школи був розгромлений, а сам Піфагор убитий.

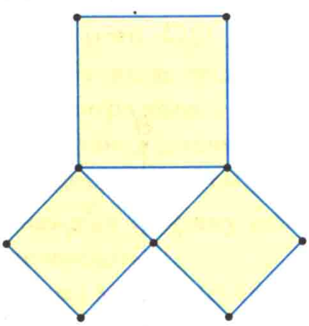
Серед досягнень піфагорійців найбільшим вважається теорема, названа Піфагоровою, та її доведення. (Нині встановлено, що цю теорему застосовували за 1500 років до Піфагора в давньому Вавилоні.)

Теорема була сформульована так: **площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах** (мал. 419).

Доведенням теореми Піфагора займалось багато математиків протягом століть. Нині є понад 150 різних доведень цієї теореми. Так, індійський математик Бхаскара (XII ст.) запропонував таку фігуру, як на малюнку 420, без жодних пояснень. Під малюнком стоїть лише одне слово — «дивись». Спробуйте пояснити справедливість теореми за цим малюнком.

Теорема Піфагора допускає цікаві узагальнення. Одне з них таке: якщо на сторонах прямокутного трикутника побудувати довільні, подібні між собою фігури, то справедлива рівність $S_c = S_a + S_b$ (мал. 421), де S_a, S_b і S_c — площі побудованих фігур.

З теоремою Піфагора пов'язані учнівські жарти: малюнок до теореми для випадку рівнобедреного прямокутного трикутника називали «піфагоровими штанами» (мал. 422), іноді цей малюнок зображали у вигляді різних смішних фігурок (мал. 423 і 424).



Мал. 422

Мал. 423

Мал. 424

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Сформулюйте і доведіть теорему Піфагора.
2. Поясніть, як знайти за двома сторонами прямокутного трикутника його третю сторону.
3. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Піфагора.
4. Що таке похила? Основа похилої? Проекція похилої?
5. Доведіть, що коли з однієї точки до прямої проведено перпендикуляр і похилі, то:
   1) будь-яка похила більша за перпендикуляр;
   2) рівні похилі мають рівні проекції;
   3) з двох похилих більша та, в якої проекція більша.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

831'. Яке з наведених тверджень правильне?
У прямокутному трикутнику:
1) квадрат гіпотенузи дорівнює різниці квадратів катетів;
2) гіпотенуза дорівнює сумі квадратів катетів;
3) квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

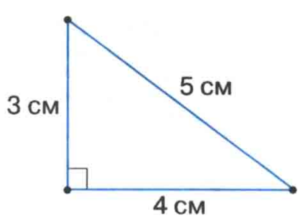
832'. Чи правильно вказано на малюнках 425, 426 довжини сторін прямокутних трикутників? Поясніть відповідь.

833'. Накресліть пряму a і позначте точку A поза прямою. Проведіть з точки A до прямої a перпендикуляр AB і похилу AC. Виміряйте довжину перпендикуляра і похилої. Порівняйте ці довжини і зробіть висновок.

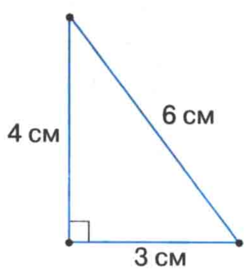
834'. На малюнку 427 AD і DC – проекції похилих AB і BC. Відомо, що $AD < DC$. Яке із співвідношень правильне?
1) $AB = BC$; 2) $AB > BC$; 3) $AB < BC$.

835°. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:
1) 12 см і 5 см; 2) 9 м і 12 м; 3) 8 см і $8\sqrt{3}$ см.

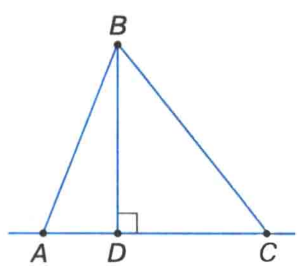
836°. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза і другий катет дорівнюють:
1) 13 см і 12 см; 2) 17 м і 15 м; 3) $15a$ і $9a$.



Мал. 425



Мал. 426



Мал. 427

837°. a, b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза. Заповніть таблицю 29.

Таблиця 29

a		12 см	$8a$
b	5 см		$6a$
c	13 см	20 см	

838°. a, b — сторони прямокутника, d — його діагональ. Заповніть таблицю 30.

Таблиця 30

a	24 см	10 см	$12a$
b	7 см		
d		26 см	$15a$

839°. **Доведіть, що квадрат діагоналі прямокутника дорівнює сумі квадратів двох його суміжних сторін.**

840°. Знайдіть діагональ квадрата, якщо його сторона дорівнює $2\sqrt{2}$ см.

841°. Знайдіть гіпотенузу рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо його катет дорівнює:

1) 1 см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) a.

842°. Знайдіть катети рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює:

1) $\sqrt{2}$ см; 2) 8 см; 3) m.

843°. Знайдіть висоту рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює: 1) $\sqrt{3}$ см; 2) 10 см; 3) a.

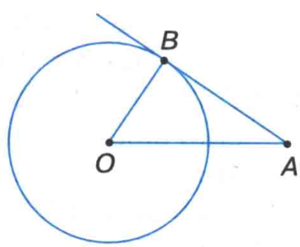
844°. Знайдіть висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, якщо бічна сторона і основа відповідно дорівнюють:

1) 26 см і 20 см; 2) 17 см і 16 см; 3) 13 см і 10 см.

845°. Через точку A до кола з центром O проведено дотичну AB, де B — точка дотику (мал. 428). Знайдіть:

1) радіус кола, якщо відрізок дотичної AB дорівнює 8 см, а відстань від точки A до центра кола — 17 см;

2) відстань від точки A до центра кола, якщо радіус кола дорівнює 12 см, а відрізок дотичної AB — 16 см.

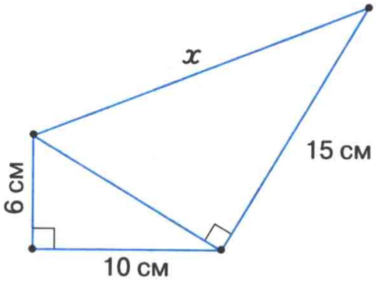


Мал. 428

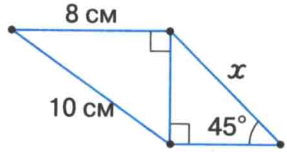
846°. Знайдіть сторону ромба, якщо його діагоналі дорівнюють:

1) 6 см і 8 см; 2) 18 см і 24 см; 3) 12 см і 16 см.

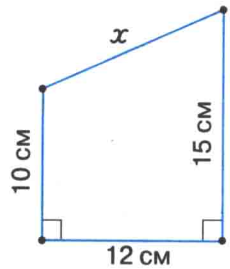
847°. Доведіть, що коли a — сторона ромба, d_1 і d_2 — його діагоналі, то $4a^2 = d_1^2 + d_2^2$.



Мал. 429



Мал. 430



Мал. 431

848°. З точки A до прямої проведено перпендикуляр AB і похилу AC. Знайдіть:

1) похилу AC, якщо її проекція BC дорівнює 24 см, а перпендикуляр AB — 10 см;
2) проекцію BC похилої, якщо перпендикуляр AB дорівнює $8\sqrt{3}$ см, а похила AC — 16 см;
3) перпендикуляр AB, якщо похила AC дорівнює 17 см, а її проекція BC — 8 см.

849. За даними на малюнках 429 — 431 знайдіть невідомий відрізок x.

850. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює b, а другий — менший від гіпотенузи на 1 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо:
1) $b = 5$ см; 2) $b = 7$ см.

851. Катети прямокутного трикутника відносяться, як 3 : 4, а гіпотенуза дорівнює c. Знайдіть катети трикутника, якщо:
1) $c = 25$ см; 2) $c = 20$ см.

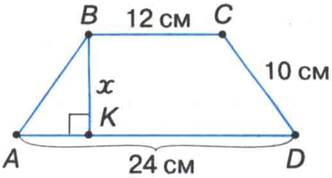
852. Периметр прямокутного трикутника дорівнює P, а катети відносяться, як $m : n$. Знайдіть сторони трикутника, якщо:
1) $P = 36$ см, $m = 3$, $n = 4$;
2) $P = 80$ см, $m = 15$, $n = 8$.

853. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи, як $m : n$, а висота, проведена до основи, дорівнює h. Знайдіть основу і бічну сторону трикутника, якщо:
1) $m = 5$, $n = 6$, $h = 12$ см;
2) $m = 17$, $n = 16$, $h = 15$ см.

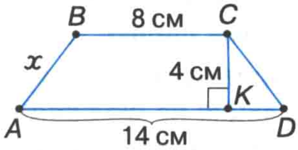
854. Сторони паралелограма дорівнюють a і b. Одна з діагоналей перпендикулярна до сторони. Знайдіть довжини діагоналей, якщо:
1) $a = 15$ см, $b = 9$ см;
2) $a = 7$ см, $b = 25$ см.

855. Основи прямокутної трапеції дорівнюють a і b, а висота — h. Знайдіть більшу бічну сторону, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 12$ см, $h = 6$ см;
2) $a = 35$ см, $b = 15$ см, $h = 21$ см.

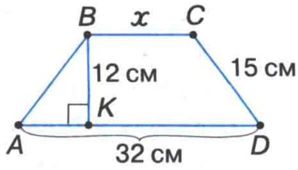
856. Доведіть, що в прямокутній трапеції різниця квадратів діагоналей дорівнює різниці квадратів основ.



Мал. 432



Мал. 433



Мал. 434

857. За даними на малюнках 432 — 434 знайдіть невідомий елемент x рівнобічної трапеції $ABCD$.

858. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b, а висота — h. Знайдіть діагональ трапеції, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 18$ см, $h = 16$ см; 2) $a = 16$ см, $b = 8$ см, $h = 5$ см.

859. У рівнобічну трапецію з основами a і b вписано коло радіуса r. Знайдіть бічну сторону трапеції, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 18$ см, $r = 3$ см; 2) $a = 32$ см, $b = 18$ см, $r = 12$ см.

860. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону на відрізки b і c, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть радіус кола, вписаного у ромб, якщо:
1) $b = 6$ см, $c = 4$ см; 2) $b = 5$ см, $c = 8$ см.

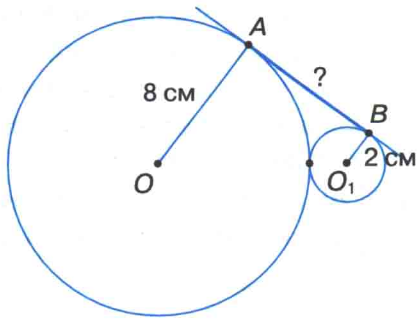
861. У колі радіуса r проведено паралельні хорди довжиною a і b. Знайдіть відстань між хордами, якщо:
1) $r = 25$ см, $a = 40$ см, $b = 48$ см; 2) $r = 65$ см, $a = 120$ см, $b = 32$ см.

862. Два кола радіусів 2 см і 8 см дотикаються зовнішньо. Знайдіть довжину відрізка їх зовнішньої спільної дотичної, що лежить між точками дотику (мал. 435).

863. Дано відрізки a і b. Побудуйте відрізок:
1) $\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\sqrt{a^2-b^2}$.

864. Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює:
1) сумі площ двох даних квадратів;
2) різниці площ двох даних квадратів.

865. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 13 см, а її проекція — 12 см. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут:
1) 30°; 2) 45°.



Мал. 435

866. З точки, що лежить на відстані 12 см від прямої, проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 13 см і 20 см. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?

867. З точки до прямої проведено дві похилі, які дорівнюють 10 см і 17 см, а їх проекції відносяться, як 2 : 5. Знайдіть:
1) проекції похилих; 2) відстань від точки до прямої.

868. **Якщо дві похилі, проведені до прямої з однієї точки, мають рівні проекції, то вони рівні між собою.** Доведіть.

869. **Якщо з однієї точки проведено до прямої дві похилі, то більша похила має й більшу проекцію на цю пряму.** Доведіть.

870*. У прямокутному трикутнику медіана і висота, проведені з вершини прямого кута, дорівнюють m і n. Знайдіть периметр трикутника, якщо:
1) $m = 25$ см, $n = 24$ см; 2) $m = 17$ см, $n = 15$ см.

871*. У прямокутному трикутнику один катет дорівнює b см, а сума гіпотенузи і другого катета на n см більша. Знайдіть гіпотенузу і другий катет, якщо:
1) $b = 60$, $n = 12$; 2) $b = 35$, $n = 14$.

872*. Висота і медіана, проведені до сторони c трикутника, дорівнюють h і m. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо:
1) $c = 60$ см, $h = 12$ см, $m = 13$ см; 2) $c = 42$ см, $h = 12$ см, $m = 13$ см.

873*. Знайдіть висоти трикутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 10 см, 10 см, 12 см; 2) 7 см, 15 см, 20 см.

874*. **Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.**

875*. **Доведіть, що коли d_1 і d_2 — діагоналі трапеції, a і b — її основи, c і d — бічні сторони, то $d_1^2 + d_2^2 = c^2 + d^2 + 2ab$.**

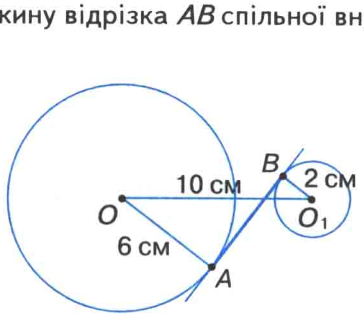
876*. Доведіть, що в прямокутній трапеції різниця квадратів діагоналей дорівнює різниці квадратів основ.

877*. Побудуйте квадрат, який за площею вдвічі менший від даного.

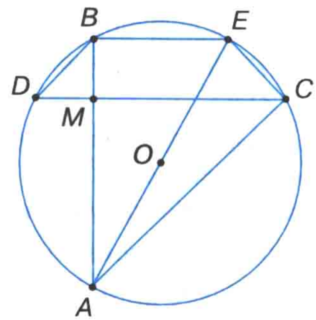
878*. Доведіть, що в колі:
1) рівні хорди рівновіддалені від центра;
2) з двох нерівних хорд більша хорда ближча до центра.

879*. Два кола дотикаються зовнішньо. Доведіть, що відрізок їх зовнішньої спільної дотичної, що лежить між точками дотику, — середнє пропорційне між діаметрами кіл.

880*. Відстань між центрами кіл радіусів 6 см і 2 см дорівнює 10 см. Знайдіть довжину відрізка AB спільної внутрішньої дотичної (мал. 436).



Мал. 436

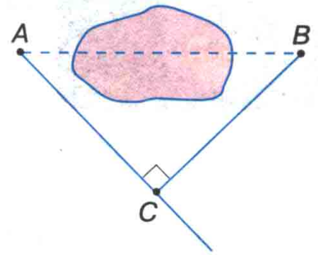


Мал. 437

881*. (Задача Архімеда) Дві хорди, що перетинаються, взаємно перпендикулярні. Доведіть, що сума квадратів відрізків цих хорд дорівнює квадрату діаметра (мал. 437).

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

882. На малюнку 438 показано, як застосували теорему Піфагора, щоб виміряти відстань між пунктами A і B, розділеними перешкодою. Поясніть вимірювання.



Мал. 438

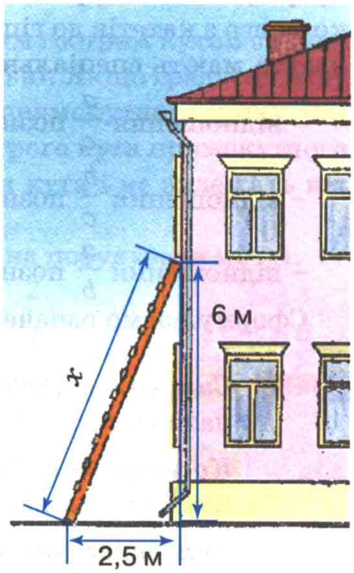
883. Між двома фабричними будівлями потрібно побудувати похилий жолоб для транспортування матеріалів. Кінці жолоба мають бути розташовані на висоті 7 м і 3 м над землею. Якою має бути довжина жолоба, якщо відстань між будівлями дорівнює 15 м?

884. Діагональ прямокутної ділянки землі дорівнює 116 м, а одна зі сторін — 84 м. Який периметр цієї ділянки?

885. Щоглу висотою 12,5 м закріплено трьома тросами, кінці кожного з яких віддалені від кінців щогли на 0,8 м і 4,4 м. Знайдіть довжину кожного троса.

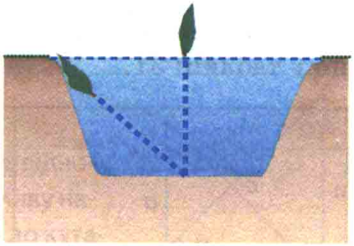
886. 1) Якої довжини має бути драбина (мал. 439), щоб її можна було приставити до вікна, розташованого на висоті 6 м, коли відстань від нижнього кінця драбини до будинку має дорівнювати 2,5 м?

2) На яку відстань треба відсунути від стіни будинку нижній кінець драбини, довжина якої 9 м, щоб верхній її кінець був на висоті 6 м?



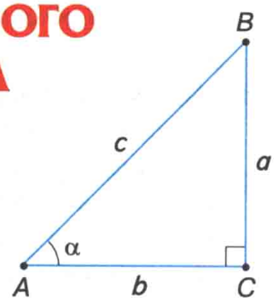
Мал. 439

887*. (Задача давньокитайського вченого Цзінь Кіу-Чау, 1250 р. до н. е.). У центрі копанки, що має форму квадрата зі стороною 10 футів, росте очеретина, висота якої над поверхнею води 1 фут (1 фут ≈ 30 см). Якщо її нахилити до берега (до середини сторони копанки), то вона дістає своєю верхівкою берега (мал. 440). Яка глибина копанки?



Мал. 440

§21. СИНУС, КОСИНУС І ТАНГЕНС ГОСТРОГО КУТА ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА



Мал. 441

Нехай ABC – прямокутний трикутник з катетами $BC = a$, $AC = b$, гіпотенузою $AB = c$ і $\angle A = \alpha$ (мал. 441). Ви знаєте, що катет a – протилежний куту α, катет b – прилеглий до кута α. Відношення кожного з катетів до гіпотенузи, а також катета до катета мають спеціальні позначення:

– відношення $\frac{a}{c}$ позначають $\sin\alpha$ і читають «синус альфа»;

– відношення $\frac{b}{c}$ позначають $\cos\alpha$ і читають «косинус альфа»;

– відношення $\frac{a}{b}$ позначають $\text{tg}\,\alpha$ і читають «тангенс альфа».

Сформулюємо означення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\text{tg}\,\alpha$.

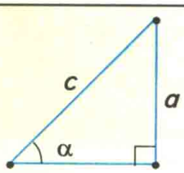
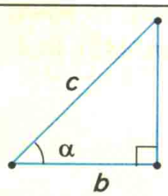
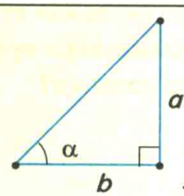
Синусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до прилеглого катета.

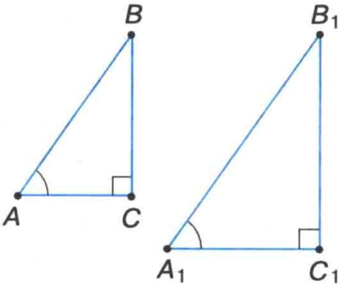
Відношення сторін прямокутного трикутника та їх позначення подано у таблиці 31.

Таблиця 31

 $\sin\alpha = \frac{a}{c}$	 $\cos\alpha = \frac{b}{c}$	 $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

? Чи залежать синус, косинус і тангенс гострого кута від розмірів трикутника?

Не залежать. Поміркуємо. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ – два прямокутних трикутники, в яких $\angle A = \angle A_1$ (мал. 442). Тоді $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ за двома кутами ($\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$). Відповідні сторони цих трикутників пропорційні: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.



Мал. 442

З цих рівностей випливає:

$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, тобто $\sin A = \sin A_1$; $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, тобто $\cos A = \cos A_1$;

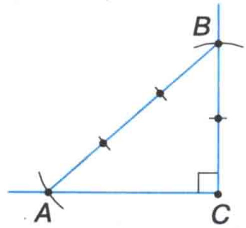
$\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, тобто $\mathrm{tg}\, A = \mathrm{tg}\, A_1$.

Отже, у прямокутних трикутниках з тим самим гострим кутом синуси цього кута рівні, косинуси – рівні і тангенси – рівні. Якщо градусну міру кута змінити, то зміняться і відношення сторін прямокутного трикутника. Це означає, що **синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника залежать тільки від градусної міри кута і не залежать від розмірів трикутника.**

За даним значенням $\sin A$, $\cos A$ або $\mathrm{tg}\, A$ можна побудувати кут A.

Задача. Побудуйте кут, синус якого дорівнює $\frac{2}{3}$.

Розв'язання. Обираємо деякий одиничний відрізок (1 мм, 1 см, 1 дм). Будуємо прямокутний трикутник, катет BC якого дорівнює 2 одиничним відрізкам, а гіпотенуза AB – 3 (мал. 443). Кут A, який лежить проти катета BC, – шуканий, оскільки $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}$.

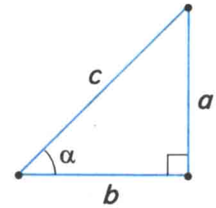


Мал. 443

У прямокутному трикутнику кожний з двох катетів менший від гіпотенузи. Тому $\sin \alpha < 1$ і $\cos \alpha < 1$ для будь-якого гострого кута α. Оскільки один катет може бути і більшим, і меншим від другого катета, і дорівнювати йому, то $\mathrm{tg}\, \alpha$ може бути і більшим за 1, і меншим від 1, і дорівнювати 1.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Крім косинуса, синуса і тангенса кута α є ще одне відношення сторін прямокутного трикутника, яке має особливу назву – *котангенс*. Це відношення катета b, прилеглого до кута α, до протилежного катета a (мал. 444). Позначається: $\mathrm{ctg}\, \alpha$. Отже, $\mathrm{ctg}\, \alpha = \frac{b}{a}$.



Мал. 444

2. Індійський математик Аріабхата (V ст.) відношення протилежного катета до гіпотенузи назвав *ardhajya* – ардхажіа (півхорда). У XII ст. європейські вчені переклали цю назву на латинську як *sinus* – синус.

Слово *cosinus* – косинус складається із двох слів: *complementi* – доповнення і *sinus* – синус, тобто доповняльний синус. Чому це так, дізнаєтеся із §23 цього розділу.

Арабські астрономи-математики ал-Баттані (858 – 929) і Абу-ль-Вефа (940 – 998) визначили поняття тангенса, вимірюючи кутову висоту Сонця за тінню від жердини. Тому відношення катета, протилежного куту α, до прилеглого катета вони називали словом «тінь». Пізніше, в XVI ст., це відношення дістало назву «тангенс».

Знаки «sin», «cos», «tg» ввів Леонард Ейлер у XVIII ст.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

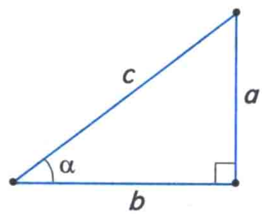
1. Дайте означення синусу, косинусу і тангенсу гострого кута прямокутного трикутника.
2. Поясніть, чому синус, косинус і тангенс гострого кута залежать від градусної міри кута і не залежать від розмірів трикутника.
3. Доведіть, що $\sin\alpha < 1$, $\cos\alpha < 1$ для будь-якого гострого кута α.
4. Поясніть, як побудувати кут за даним значенням його синуса.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

888'. 1) За даними на малюнку 445 назвіть: катет, прилеглий до кута α; катет, протилежний куту α.

2) Прочитайте відношення сторін $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ і $\frac{a}{b}$, вживаючи слова «протилежний катет», «прилеглий катет», «гіпотенуза».

3) Позначте кожне з відношень $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ і $\frac{a}{b}$ знаком «$\cos\alpha$», «$\operatorname{tg}\alpha$» або «$\sin\alpha$».



Мал. 445

889'. Назвіть правильну відповідь (мал. 446).

1) $\operatorname{tg}\beta$ дорівнює:

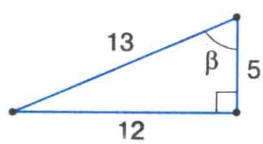
а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{12}{5}$; в) $\frac{5}{13}$;

2) $\cos\beta$ дорівнює:

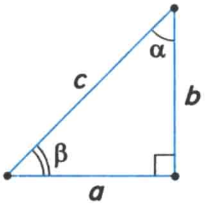
а) $\frac{12}{13}$; б) $\frac{13}{5}$; в) $\frac{5}{13}$;

3) $\sin\beta$ дорівнює:

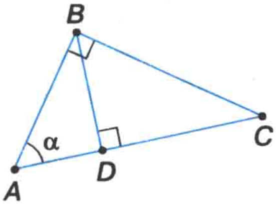
а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{13}{5}$.



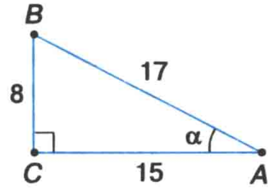
Мал. 446



Мал. 447



Мал. 448



Мал. 449

890'. За малюнком 447 назвіть правильну відповідь:

1) для кута α відношення $\frac{a}{c}$ є: а) sin α; б) cos α; в) tg α;

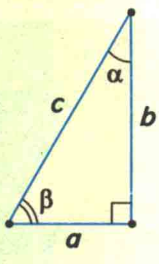
2) для кута β відношення $\frac{a}{c}$ є: а) sin β; б) cos β; в) tg β;

3) для кута β відношення $\frac{b}{a}$ є: а) sin β; б) cos β; в) tg β.

891°. На малюнку 448 $\angle ABC = \angle ADB = 90°$. Запишіть відношення, яким дорівнюють sin α, cos α і tg α, через сторони трикутників *ABC* і *BDA*.

892°. Накресліть у зошиті таблицю 32. Поставте «+» у тій клітинці, де відношення сторін трикутника відповідає його позначенню.

Таблиця 32

Відношення		Позначення					
		sin α	cos α	sin β	cos β	tg α	tg β
	$\frac{a}{b}$						
	$\frac{b}{a}$						
	$\frac{b}{c}$						
	$\frac{a}{c}$						

893°. За даними, наведеними на малюнку 449, знайдіть синус, косинус і тангенс кута α з точністю до 0,1.

894°. Накресліть довільний гострий кут *C*. На одній з його сторін позначте точки *A* і A_1 і проведіть перпендикуляри *AB* і A_1B_1 до другої сторони кута. Виміряйте в міліметрах катети *AB* і A_1B_1 і гіпотенузи *AC* і A_1C утворених прямокутних трикутників *ABC* і A_1B_1C. Знайдіть значення sin *C* для ΔABC і ΔA_1B_1C. Порівняйте ці значення і зробіть висновок.

895°. Побудуйте довільний прямокутний трикутник ABC, де $\angle C = 90°$. На катеті AC позначте довільну точку D і сполучіть точки D і B. Виміряйте катети прямокутних трикутників ABC і DBC та знайдіть тангенс $\angle ABC$ і тангенс $\angle DBC$. Порівняйте:

1) кути ABC і DBC; 2) значення тангенсів цих кутів.

Зробіть висновок.

896°. Накресліть за допомогою транспортира кути: 1) 35°; 2) 40°; 3) 75°. Знайдіть синус, косинус і тангенс цих кутів.

897°. Чи можуть синус кута, косинус кута дорівнювати:

1) 1; 2) 0,9; 3) 2?

898°. Чи може тангенс кута дорівнювати:

1) 1; 2) 4; 3) 0,8?

899. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 18$ мм, $BC = 24$ мм. Знайдіть: 1) $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$; 2) $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$.

900. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 24 см і 7 см. Знайдіть:

1) косинус гострого кута, який лежить проти меншого катета;
2) синус гострого кута, який лежить проти більшого катета;
3) тангенс гострого кута, який лежить проти більшого катета.

901. З точки A до прямої проведено похилу $AB = 15$ см і перпендикуляр $AC = 9$ см. Знайдіть синус і косинус:

1) кута A; 2) кута B.

902. Побудуйте кут, синус якого дорівнює:

1) $\frac{3}{5}$; 2) 0,5 .

903. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює:

1) $\frac{5}{6}$; 2) 0,6.

904. Побудуйте кут, тангенс якого дорівнює:

1) 2; 2) $\frac{4}{7}$.

905. Побудуйте прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$), у якого:

1) $\sin A = 0{,}4$; 2) $\cos B = \frac{2}{7}$; 3) $\operatorname{tg} A = \frac{1}{3}$.

906. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 12 см, а медіана, проведена до основи, — 8 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута:

1) при основі трикутника;
2) між медіаною і бічною стороною.

907*. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а бічна сторона — 10 см. Знайдіть синус і косинус кута:

1) при більшій основі;
2) між діагоналлю і висотою.

908*. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 6 см, а бічна сторона — 5 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута при вершині трикутника.

909*. Сторони трикутника ABC дорівнюють 13 см, 14 см, 15 см.
Знайдіть з точністю до 0,01:
1) $\sin A$; 2) $\cos B$; 3) $\mathrm{tg}\, C$.

910*. Побудуйте рівнобедрений трикутник ABC з основою AC, у якого:
1) $\sin A = 0{,}8$; 2) $\cos C = \frac{1}{3}$; 3) $\mathrm{tg}\, A = 0{,}6$.

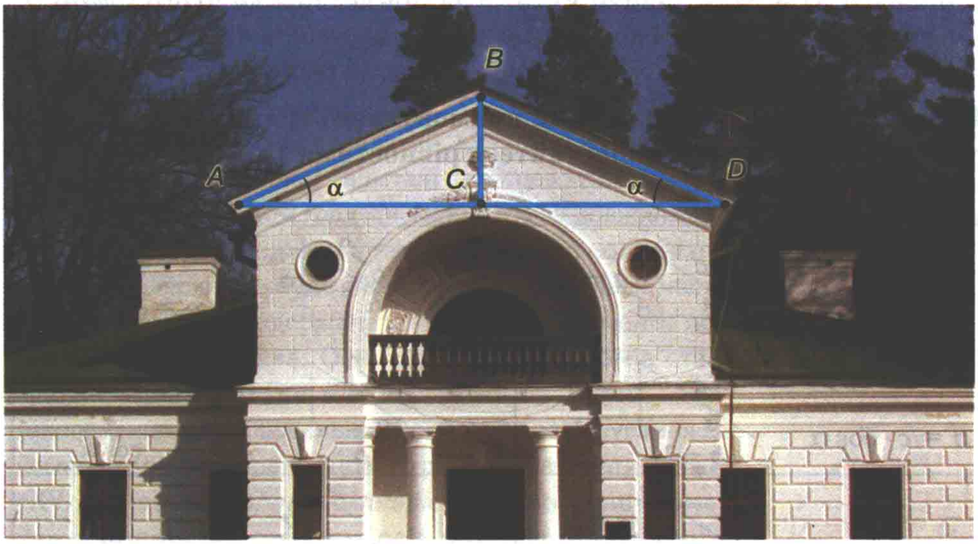
911*. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 8 см, а синус протилежного кута — 0,8. Знайдіть гіпотенузу і другий катет трикутника.

912*. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо:
1) $AC = 6$ см, $\sin B = 0{,}6$; 2) $BC = 36$ см, $\cos A = \frac{5}{13}$; 3) $AB = 20$ см, $\mathrm{tg}\, B = \frac{3}{4}$.

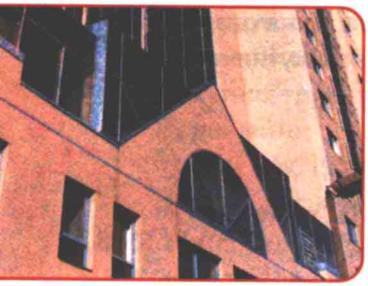
913*. Побудуйте прямокутний трикутник ABC, якщо:
1) гіпотенуза $c = 8$ см, $\sin A = 0{,}75$;
2) катет $b = 20$ мм, $\cos A = 0{,}4$;
3) катет $a = 5$ см, $\mathrm{tg}\, A = 1{,}25$.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

914. У будівництві часто замість градусної міри кута використовується його тангенс. Наприклад, під час будівництва будинку майстру замість градусної міри кута α нахилу даху (мал. 450) дається відношення довжин сторони BC і AC, тобто $\mathrm{tg}\, \alpha$.
Нехай потрібно побудувати дах, довжина крокви AD якого дорівнює 20 м, а тангенс кута нахилу даху — 0,8. Якої довжини треба взяти крокву BC?



Мал. 450



§22. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

Ви знаєте, що $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ (мал. 451).

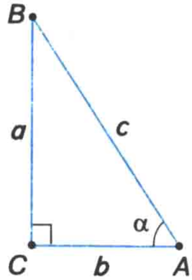
Звідси знаходимо: 1) $a=c\sin\alpha$, 2) $b=c\cos\alpha$, 3) $a=b\operatorname{tg}\alpha$.

Ці рівності формулюються так.

1. Катет, протилежний куту α, дорівнює добутку гіпотенузи на sin α.

2. Катет, прилеглий до кута α, дорівнює добутку гіпотенузи на cos α.

3. Катет, протилежний куту α, дорівнює добутку другого катета на tg α.



Мал. 451

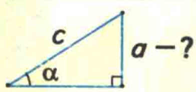
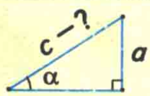
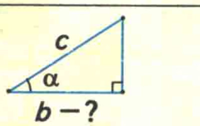
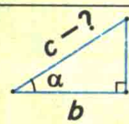
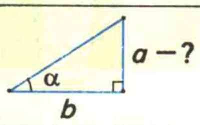
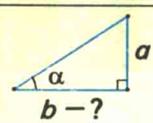
З рівностей 1) і 2) можна знайти гіпотенузу c прямокутного трикутника за катетом a або b і гострим кутом α:

4) $c = \frac{a}{\sin\alpha}$, 5) $c = \frac{b}{\cos\alpha}$.

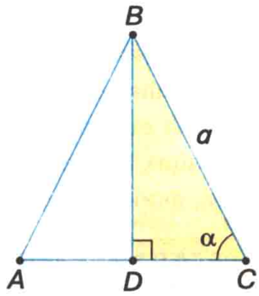
З рівності 3) можна знайти катет b за прилеглим до нього кутом α і катетом a: 6) $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Щоб знайти за однією із сторін прямокутного трикутника і гострим кутом дві інші сторони, скористайтеся рівностями 1) – 6) (табл. 33).

Таблиця 33

1	$a = c\cdot\sin\alpha$		4		$c = \frac{a}{\sin\alpha}$
2	$b = c\cdot\cos\alpha$		5		$c = \frac{b}{\cos\alpha}$
3	$a = b\cdot\operatorname{tg}\alpha$		6		$b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$

Задача. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника з бічною стороною a і кутом α при основі.



Мал. 452

Розв'язання. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з бічною стороною $BC = a$ і $\angle C = \alpha$ (мал. 452). Проведемо висоту BD. У прямокутному трикутнику DBC катет DC, прилеглий до кута α, дорівнює добутку гіпотенузи a на $\cos \alpha$: $DC = a \cos \alpha$.
Оскільки висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є медіаною, то $DC = AD$.
Тоді основа $AC = 2 \cdot DC = 2\, a \cos \alpha$.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

У цьому розділі ви ознайомились з новими прийомами обчислення довжин сторін і градусних мір кутів прямокутного трикутника. Може виникнути запитання: *Яка необхідність використання цих прийомів?*

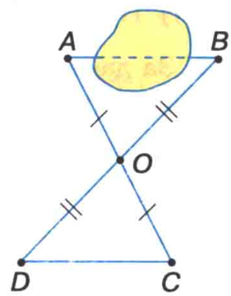
Ви знаєте, що в далеку давнину відстані і кути спочатку вимірювали *безпосередньо* інструментами. Так, транспортиром користувалися вавилоняни ще за 2000 років до н. е.

Проте на практиці безпосередньо виміряти відстані й кути не завжди можливо. Як виміряти відстань між двома пунктами, розділеними перешкодою (річкою, озером, лісом), відстань до Сонця, Місяця, як виміряти висоту дерева, гори, як знайти кут підйому дороги або кут, під яким спускаємось з гори? Тому були відкриті прийоми *опосередкованого* вимірювання відстаней і кутів. Стали використовувати рівні або подібні трикутники і геометричні побудови. Будували на місцевості допоміжний трикутник і вимірювали потрібні його елементи.

Так, ви знаєте, як виміряти відстань між пунктами A і B, розділеними перешкодою (мал. 453). Для цього будуємо $\Delta COD = \Delta AOB$ і замість шуканої відстані AB вимірюємо рівну їй відстань CD.

Проте, використовуючи ці прийоми, діставали не досить точні результати, особливо, коли вимірювали значні відстані на місцевості. Крім того, без кутомірних інструментів не можна знайти градусні міри кутів за довжинами тих чи інших відрізків.

Тому виникла необхідність у таких прийомах, коли безпосередніх вимірювань буде якомога менше, а більша частина результатів буде одержана обчисленням елементів прямокутного трикутника. Основою таких прийомів стало використання $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ і $\text{tg}\, \alpha$.



Мал. 453

Накопичення обчислювальних прийомів розв'язування задач привело до створення нового розділу математики, який у XVI ст. назвали *тригонометрією*. Слово «тригонометрія» походить від грецьких слів *trigonon* — трикутник і *metreo* — вимірюю.

Грецьких математиків Гіппарха (ІІ ст. до н. е.) і Птолемея (ІІ ст.) вважають першими, хто використав тригонометричні прийоми для розв'язування різних задач. Подальше їх удосконалення було зроблено індійським математиком Брамагуптою (VI ст.), а потім узбецькими математиками аль-Каші і Улугбеком (XII ст.). У працях академіка Леонарда Ейлера (XVIII ст.) тригонометрія дістала той вигляд, який в основному вона має й нині.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

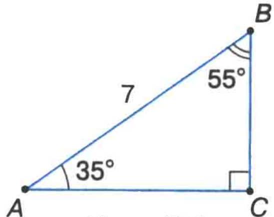
1. Сформулюйте рівності $a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$, $a = b \operatorname{tg} \alpha$, де a, b — катети прямокутного трикутника, c — гіпотенуза.
2. Поясніть, як знайти гіпотенузу прямокутного трикутника за катетом і гострим кутом.
3. Як знайти катет прямокутного трикутника за прилеглим до нього кутом і другим катетом?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

915'. Які з наведених тверджень правильні?

Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку:

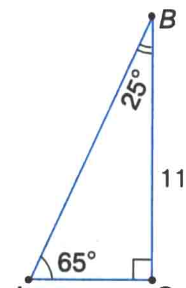
1) тангенса прилеглого до нього кута і гіпотенузи;
2) тангенса протилежного йому кута і другого катета;
3) гіпотенузи і синуса прилеглого кута;
4) гіпотенузи і косинуса прилеглого кута;
5) гіпотенузи і синуса протилежного кута.



Мал. 454

916'. Значення якого з виразів дорівнює довжині катета BC (мал. 454):

1) $7 \cdot \sin 55°$; 2) $7 \cdot \cos 55°$; 3) $7 \cdot \operatorname{tg} 35°$?



Мал. 455

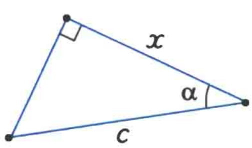
917'. Значення якого з виразів дорівнює довжині катета AC (мал. 455):

1) $11 \cdot \operatorname{tg} 65°$; 2) $11 \cdot \cos 25°$; 3) $11 \cdot \operatorname{tg} 25°$?

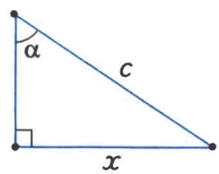
918'. Значення якого з виразів дорівнює довжині гіпотенузи AB (мал. 455):

1) $11 \cdot \cos 25°$; 2) $\dfrac{11}{\sin 65°}$; 3) $11 \cdot \operatorname{tg} 25°$?

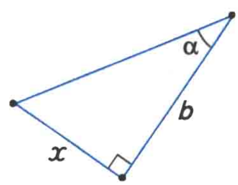
919°. За даними, наведеними на малюнках 456 — 461, знайдіть x.



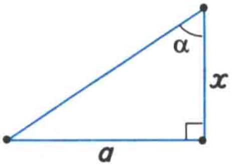
Мал. 456



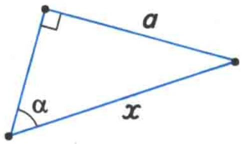
Мал. 457



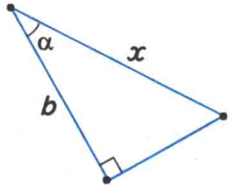
Мал. 458



Мал. 459



Мал. 460



Мал. 461

920°. Накресліть у зошиті таблицю 34. Поставте «+» у тій клітинці, де значення виразу дорівнює довжині сторони прямокутного трикутника.

Таблиця 34

Сторона		Вираз				
		$c \cdot \cos\alpha$	$c \cdot \sin\alpha$	$b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{a}{\sin\alpha}$	$\frac{b}{\cos\alpha}$
	a					
	b					
	c					

921°. Знайдіть катет a прямокутного трикутника, якщо синус кута A, протилежного йому, і гіпотенуза c дорівнюють:

1) $c = 12$ см, $\sin A = \frac{1}{4}$; 2) $c = 20$ см, $\sin A = \frac{2}{5}$; 3) $c = 18$ см, $\sin A = \frac{2}{3}$.

922°. Знайдіть катет b прямокутного трикутника, якщо косинус кута A, прилеглого до нього, і гіпотенуза c дорівнюють:

1) $c = 6$ см, $\cos A = \frac{1}{3}$; 2) $c = 14$ см, $\cos A = \frac{2}{7}$; 3) $c = 8$ см, $\cos A = \frac{3}{4}$.

923°. Знайдіть гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо:

1) $BC = 16$ см, $\cos B = \frac{1}{8}$; 2) $BC = 12$ см, $\cos B = \frac{3}{4}$;
3) $BC = 5$ см, $\cos B = 0{,}5$.

924°. Знайдіть гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо:

1) $BC = 24$ см, $\sin A = \frac{3}{8}$; 2) $BC = 10$ см, $\sin A = \frac{1}{5}$; 3) $BC = 7$ см, $\sin A = 0{,}7$.

925°. Знайдіть катет BC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо:
1) $AC = 8$ см, $\mathrm{tg}\,A = 0{,}6$; 2) $AC = 12$ см, $\mathrm{tg}\,A = 4$; 3) $AC = 11$ см, $\mathrm{tg}\,A = 1{,}5$.

926°. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо:
1) $AB = c$, $\angle B = \beta$; 2) $BC = a$, $\angle A = \alpha$; 3) $AC = b$, $\angle B = \beta$.

927. У прямокутному трикутнику катет дорівнює b, а прилеглий до нього кут — α. Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.

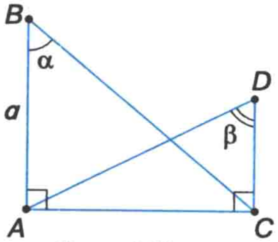
928. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α, а бісектриса цього кута — l. Знайдіть катет, прилеглий до кута α.

929. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, а кут при основі — α.
Знайдіть: 1) основу трикутника; 2) висоту, проведену до основи.

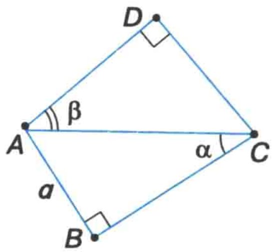
930. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює h, а кут при основі — α.
Знайдіть: 1) бічну сторону трикутника; 2) основу трикутника.

931. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, а кут між бічними сторонами — α.
Знайдіть: 1) висоту, проведену до основи; 2) бічну сторону трикутника.

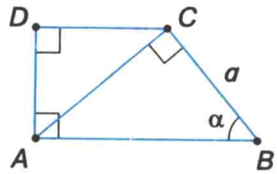
932. За даними, наведеними на малюнках 462 — 464, знайдіть відрізки AD і CD.



Мал. 462



Мал. 463



Мал. 464

933. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює m, а гострий кут трикутника — α.

934. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, якщо його катет дорівнює b, а гострий кут — α.

935. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює α, а радіус вписаного кола — r.
Знайдіть: 1) основу трикутника; 2) бічну сторону трикутника.

936. Висота рівнобедреного трикутника дорівнює h, а кут при основі — α. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

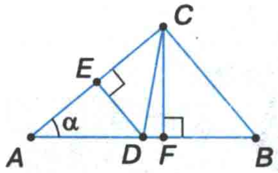
937. Сторона AD прямокутника $ABCD$ дорівнює a і утворює з діагоналлю AC кут α. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутника.

938. Гострий кут між діагоналями прямокутника дорівнює α, а сторона, яка лежить проти цього кута, — a.
Знайдіть: 1) другу сторону прямокутника; 2) діагональ прямокутника.

939. **Знайдіть сторони трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює r, а кути трикутника дорівнюють α, β, γ.**

940. З точки, що знаходиться на відстані m від прямої, проведено дві похилі, які утворюють з прямою кути α і β ($\alpha < \beta$).
Знайдіть: 1) похилі; 2) відстань між основами похилих.

941. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює a, а її проекція — b. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут β.



Мал. 465

942*. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$), CF — висота, CD — медіана, $DE \perp AC$ (мал. 465). Виразіть усі відрізки, зображені на малюнку, через катет $AC = a$ і $\angle A = \alpha$.

943*. Знайдіть радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, якщо його катет дорівнює b, а кут, прилеглий до цього катета, — α.

944*. Більша діагональ ромба дорівнює d, а його гострий кут — α.
Знайдіть: 1) сторону ромба; 2) меншу діагональ ромба.

945*. У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює b, а бічна сторона c утворює з висотою кут α. Знайдіть більшу основу трапеції.

946*. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює a, а бічна сторона c утворює з висотою кут α. Знайдіть меншу основу трапеції.

947*. У рівнобічній трапеції висота h утворює з бічною стороною кут α, а менша основа дорівнює b.
Знайдіть: 1) бічну сторону трапеції; 2) більшу основу трапеції.

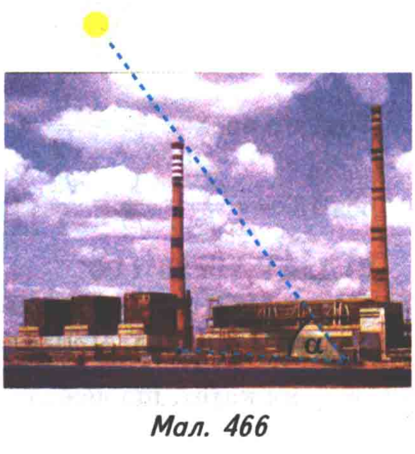
948*. У гострокутному трикутнику ABC $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$. Знайдіть проекції сторін AB і BC на сторону AC.

949*. **Доведіть, що площа прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) обчислюється за формулою: $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B$.**

950*. **Доведіть, що площа гострокутного трикутника ABC обчислюється за формулою: $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C$.**

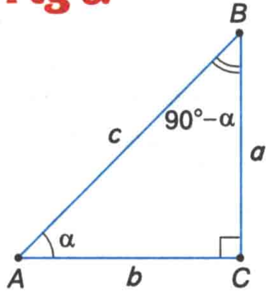
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

951*. Тінь від фабричної труби, висота якої 40 м, становить 50 м. Виразіть у градусах висоту Сонця над горизонтом (мал. 466), дотримуючись такого плану:
1) знайдіть тангенс кута α;
2) за знайденим значенням тангенса побудуйте $\angle A = \alpha$;
3) виміряйте транспортиром $\angle A$.



Мал. 466

§23. ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$



Мал. 467

Нехай у прямокутному трикутнику ABC $\angle A=\alpha$, тоді $\angle B=90^\circ-\alpha$ (мал. 467). За означенням синуса і косинуса запишемо:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c};\qquad \cos(90^\circ-\alpha)=\frac{a}{c};$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c};\qquad \sin(90^\circ-\alpha)=\frac{b}{c}.$$

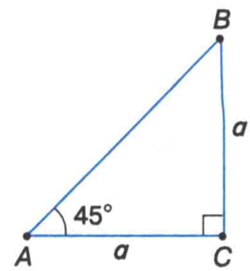
Порівнюючи ці два стовпці, знаходимо:
$\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha)$, $\cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha)$.

Як бачимо, між синусом і косинусом кутів α і $90^\circ-\alpha$, які доповнюють один одного до 90°, існує така залежність: синус одного з цих кутів дорівнює косинусу другого.

Наприклад: $\sin 30^\circ=\cos(90^\circ-30^\circ)=\cos 60^\circ$;
$\sin 60^\circ=\cos(90^\circ-60^\circ)=\cos 30^\circ$.

Знайдемо значення синуса, косинуса і тангенса для кутів 45°, 30°, 60°.

1) Для кута 45°.



Мал. 468

Нехай ABC – прямокутний трикутник з гіпотенузою C і $\angle A=45^\circ$ (мал. 468). Тоді $\angle B=45^\circ$. Отже, ΔABC – рівнобедрений. Нехай $AC=BC=a$.

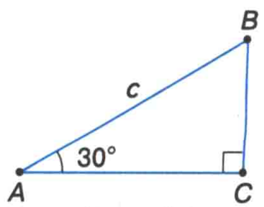
За теоремою Піфагора,

$$c=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}.$$

Тоді $\sin 45^\circ=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos 45^\circ=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg}45^\circ=\dfrac{a}{a}=1$.

2) Для кутів 30° і 60°.



Мал. 469

Нехай ABC – прямокутний трикутник з гіпотенузою c і $\angle A=30^\circ$ (мал. 469). Знайдемо катети AC і BC.

$BC=\dfrac{c}{2}$ як катет, що лежить проти кута 30°. За теоремою Піфагора, $AC=\sqrt{c^2-\left(\dfrac{c}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{3c^2}{4}}=\dfrac{c\sqrt{3}}{2}$.

Тоді $\sin 30^\circ = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\frac{c}{2}}{c} = \dfrac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\text{tg}\, 30^\circ = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\frac{c}{2}}{\frac{c\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$.

Якщо у прямокутному трикутнику ABC $\angle A = 30^\circ$ (мал. 469),

то $\angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Тоді $\text{tg}\, 60^\circ = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3}$.

Складемо таблицю 35 значень синуса, косинуса і тангенса для кутів 30°, 45°, 60°.

Таблиця 35

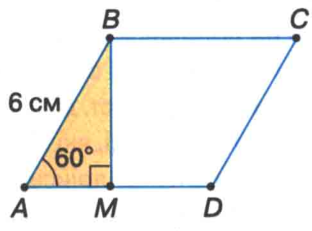
α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

З таблиці видно, що **при збільшенні кута синус і тангенс гострого кута зростають, а косинус – спадає.** При зменшенні кута синус і тангенс гострого кута спадають, а косинус – зростає.

Задача. Сторона ромба дорівнює 6 см, а один з його кутів — 60°. Знайдіть висоту ромба.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – ромб (мал. 470), у якого $AB = 6$ см, $\angle A = 60^\circ$.
Проведемо висоту BM.
З прямокутного трикутника ABM:

$$BM = AB \cdot \sin A = 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (см)}.$$



Мал. 470

? Як обчислити значення синусів, косинусів і тангенсів кутів, відмінних від 30°, 45°, 60°?

За допомогою інженерних калькуляторів (або програми «калькулятор» комп'ютера) або спеціальних таблиць можна розв'язати дві задачі:

1) для даного кута α знайти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$;

2) за даним значенням $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\,\alpha$ знайти кут α.

Якщо використовуєте калькулятор і кут дано у градусах і мінутах, то мінути переведіть у десяті частини градуса (поділіть їх на 60). Наприклад, для кута 55°42' дістанете 55,7°. Якщо, наприклад, для cos $\alpha \approx 0{,}8796$ знайшли $\alpha \approx 28{,}40585°$, то частини градуса переведіть у мінути (помножте дробову частину на 60). Округливши, дістанете: $\alpha \approx 28°24'$.

Значення sin α, cos α, tg α можна знаходити за таблицями.

Таблиця синусів і косинусів (див. додаток 1) складається з чотирьох стовпців. У першому стовпці ліворуч вміщено градуси від 0° до 45°, а у четвертому – від 90° до 45°. Над другим і третім стовпцями вказано назви «синуси» і «косинуси», а знизу цих стовпців – «косинуси» і «синуси».

Верхні назви «синуси» і «косинуси» стосуються кутів, менших від 45°, а нижні – кутів, більших за 45°. Наприклад, за таблицею знаходимо: sin 34° ≈ 0,559, cos 67° ≈ 0,391, sin 85° ≈ 0,996 і т. д.

За таблицею можна знайти кут α за даним значенням sin α, cos α. Наприклад, треба знайти кут α, якщо sin α ≈ 0,615. У стовпцях синусів знаходимо число, близьке до 0,615. Таким числом є 0,616. Отже, α ≈ 38°.

Таблиця тангенсів (див. додаток 2) складається з двох стовпців: в одному вміщено кути від 0° до 89°, а в другому – значення тангенсів цих кутів.

Наприклад, tg 19° ≈ 0,344. Якщо tg α ≈ 0,869, то α ≈ 41°.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Ви вже знаєте, що кожній градусній мірі кута α прямокутного трикутника відповідає єдине значення sin α, cos α, tg α. Тому синус, косинус і тангенс кута α є функціями цього кута. Ці функції називаються *тригонометричними функціями*, аргумент яких змінюється від 0° до 90°.

2. Уточнимо походження слова «косинус». Рівність cos α = sin (90° − α) і послужила основою утворення латинського слова *cosinus* — доповняльний синус, тобто синус кута, який доповнює даний до 90°.


Птолемей

3. Перші таблиці синусів кутів від 0° до 90° склав грецький математик Гіппарх (ІІ ст. до н. е.). Ці таблиці до нас не дійшли. Тригонометричні таблиці, які збереглися дотепер, вміщені у творі «Альмагест» александрійського вченого Клавдія Птолемея (ІІ ст.). Також збереглися таблиці синусів і косинусів індійського вченого Аріабхати (V ст.), таблиці тангенсів арабських учених ал-Баттані і Абу-ль-Вефи (Х ст.).

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Сформулюйте залежність між синусом і косинусом кутів, які доповнюють один одного до 90°.
2. Назвіть значення синуса, косинуса і тангенса кутів 30°, 45°, 60°.
3. Поясніть, як знайти sin 36°; cos 64°; tg 57°.
4. Поясніть, як знайти кут α, якщо: sin α = 0,655; cos α = 0,818; tg α = 0,467.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

952'. Знайдіть кут A прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо кут B дорівнює: 1) 30°; 2) 70°; 3) 85°.

953'. Користуючись формулами $\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$, $\sin \alpha = \cos (90° - \alpha)$, замініть:

1) косинуси даних кутів на синуси: cos 20°, cos 35°, cos 50°, cos 74°;
2) синуси даних кутів на косинуси: sin 10°, sin 65°, sin 85°, sin 25°.

954'. Знайдіть значення виразу: 1) $2 \sin 30°$; 2) $4 \cos 60°$; 3) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, 30°$.

955'. За таблицями (додатки 1, 2) знайдіть:

1) sin 20°, sin 75°, sin 33°, sin 85°, sin 53°, sin 2°;
2) cos 6°, cos 67°, cos 51°, cos 24°, cos 62°, cos 13°;
3) tg 65°, tg 1°, tg 73°, tg 19°, tg 10°, tg 16°.

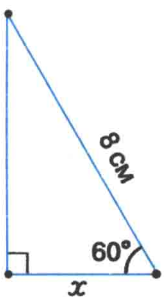
956'. За таблицями (додатки 1, 2) знайдіть кут α, якщо:

1) $\sin \alpha = 0{,}999$; $\sin \alpha = 0{,}017$; $\sin \alpha = 0{,}574$; $\sin \alpha = 0{,}588$;
2) $\cos \alpha = 0{,}766$; $\cos \alpha = 0{,}966$; $\cos \alpha = 0{,}225$; $\cos \alpha = 0{,}731$;
3) $\mathrm{tg}\, \alpha = 0{,}900$; $\mathrm{tg}\, \alpha = 0{,}344$; $\mathrm{tg}\, \alpha = 0{,}781$; $\cos \alpha = 0{,}839$.

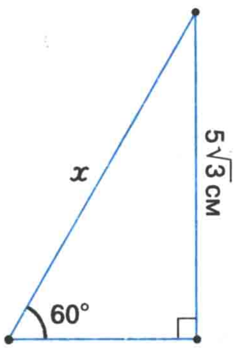
957°. Спростіть вираз: 1) $2 \cos (90° - \alpha) - \sin \alpha$; 2) $\sin \alpha + \cos (90° - \alpha)$; 3) $3 \cos \alpha - 2 \sin (90° - \alpha)$.

958°. За даними, наведеними на малюнках 471 – 476, знайдіть x.

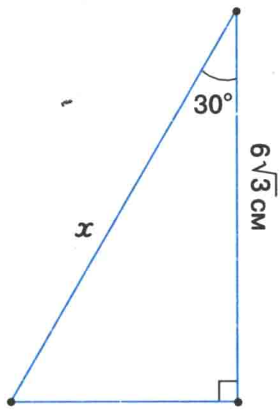
Мал. 471



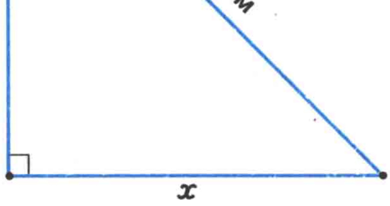
Мал. 472



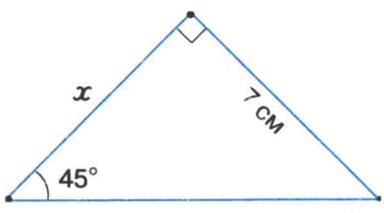
Мал. 473



Мал. 474



Мал. 475



Мал. 476

959°. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) кут A дорівнює 30°. Знайдіть:
1) BC, якщо $AB = 4$ см; 2) AC, якщо $BC = 2\sqrt{3}$ см; 3) AB, якщо $AC = 4\sqrt{3}$ см.

960°. У прямокутному трикутнику MNK ($\angle K = 90°$) кут M дорівнює 60°. Знайдіть:
1) MN, якщо $MK = 3$ см; 2) NK, якщо $MK = 2\sqrt{3}$ см; 3) MK, якщо $NK = 7\sqrt{3}$ см.

961°. Кут A прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) дорівнює 45°. Знайдіть:
1) AB, якщо $AC = \sqrt{2}$ см; 2) BC, якщо $AB = 5\sqrt{2}$ см; 3) AC, якщо $BC = 9$ см.

962°. З точки A до прямої проведено похилу $AB = 10$ см, яка утворює з прямою кут 60°. Знайдіть: 1) проекцію похилої; 2) відстань від точки A до прямої.

963°. Яка градусна міра кута α, якщо:

1) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$?

964°. Знайдіть значення виразу:
1) $\mathrm{tg}\,30° \cdot \mathrm{tg}\,60°$; 2) $8\sin 30° \cdot \cos 60°$;
3) $2\sin 30° + \sqrt{3}\cos 30°$; 4) $6\cos 60° - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,30°$.

965°. Запишіть у порядку зростання:
1) $\sin 15°$, $\sin 46°$, $\sin 75°$, $\sin 10°$, $\sin 11°$;
2) $\cos 50°$, $\cos 34°$, $\cos 20°$, $\cos 72°$, $\cos 25°$;
3) $\mathrm{tg}\,37°$, $\mathrm{tg}\,87°$, $\mathrm{tg}\,66°$, $\mathrm{tg}\,17°$, $\mathrm{tg}\,48°$.

966°. Користуючись калькулятором, знайдіть:
1) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$,
якщо α дорівнює: 43°6'; 22°25'; 35°48'; 58°20'; 64°13'; 39°21'; 54°12'; 83°18';
2) кут α, якщо:
$\sin\alpha$ дорівнює: 0,642; 0,771; 0,910; 0,640; 0,712; 0,750; 0,515; 0,892;
$\cos\alpha$ дорівнює: 0,342; 0,962; 0,087; 0,914; 0,809; 0,602; 0,915; 0,839;
$\mathrm{tg}\,\alpha$ дорівнює: 0,178; 0,269; 0,035; 0,447; 0,532; 0,934; 0,781; 0,578.

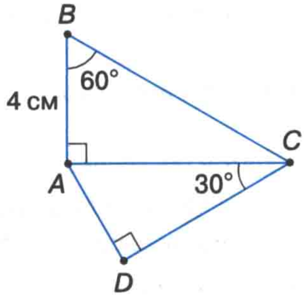
967. Спростіть вираз:
1) $1 - \cos(90° - \alpha) + \sin\alpha$;
2) $2\sin\alpha + \cos(90° - \alpha) + \sin(90° - \alpha) - \cos\alpha$;
3) $(1 - \sin(90° - \alpha))(1 + \cos\alpha)$.

968. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 8 см, а протилежний йому кут — 60°. Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.

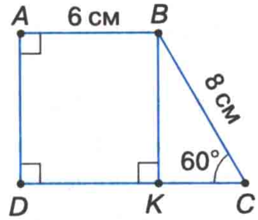
969. Катет прямокутного трикутника дорівнює $9\sqrt{3}$ см, а прилеглий до нього кут — 60°. Знайдіть бісектрису цього кута.

970. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а кут при основі — 30°. Знайдіть:
1) основу трикутника; 2) висоту, проведену до основи;
3) висоту, проведену до бічної сторони.

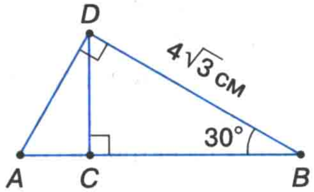
971. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 8 см, а кут трикутника: 1) 30°; 2) 45°.



Мал. 477



Мал. 478



Мал. 479

972. За даними, наведеними на малюнках 477 — 479, знайдіть відрізки AD і CD.

973. Сторона ромба дорівнює 4 см, а один з його кутів — 60°. Знайдіть діагоналі ромба.

974. Більша діагональ ромба дорівнює $12\sqrt{3}$ см, а один з його кутів — 120°. Знайдіть сторону і меншу діагональ ромба.

975. Діагональ паралелограма дорівнює 12 см і перпендикулярна до його сторони. Знайдіть сторони паралелограма, якщо один з його кутів дорівнює: 1) 30°; 2) 45°.

976. Знайдіть радіус r кола, вписаного в рівносторонній трикутник, і радіус R кола, описаного навколо цього трикутника, якщо сторона трикутника дорівнює a.

977. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб, якщо його сторона дорівнює 16 см, а гострий кут: 1) 30°; 2) 60°.

978. Знайдіть відношення діаметрів кіл, вписаного в квадрат і описаного навколо цього квадрата.

979. З точки, що розташована на відстані 5 см від прямої, проведено дві похилі, які утворюють з прямою кути 45° і 30°. Знайдіть:
1) похилі; 2) проекції похилих на пряму.

980. З точки до прямої проведено дві похилі, які утворюють з прямою кути по 45°. Знайдіть довжину похилих, якщо відстань між їх основами дорівнює 10 см.

981. Знайдіть значення виразу:
1) $2\cos 60° \cdot \mathrm{tg}\, 45° \cdot \mathrm{tg} 60°$; 2) $3\mathrm{tg}^2 60° - 4\cos^2 30°$;
3) $\cos 30° \cdot \mathrm{tg}\, 30° + \sin 60° \cdot \mathrm{tg}\, 60°$.

982. Визначте знак різниці:
1) $\mathrm{tg}\, 64° - \mathrm{tg}\, 58°$; 2) $\sin 21° - \sin 36°$; 3) $\cos 51° - \cos 41°$.

983*. Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, дорівнює 1 см. Знайдіть катети трикутника, якщо його гострий кут дорівнює: 1) 30°; 2) 45°.

984*. Сторона трикутника дорівнює 1 см, а прилеглі до неї кути — 45° і 60°. Знайдіть дві інші сторони трикутника.

985*. Навколо кола радіуса R описано рівнобедрений трикутник з кутом $120°$. Знайдіть сторони трикутника.

986*. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 10 см, а кут при основі — $60°$. Знайдіть:

1) бічну сторону трапеції; 2) висоту трапеції; 3) діагональ трапеції.

987*. У прямокутній трапеції більша бічна сторона дорівнює 16 см. Менша діагональ є бісектрисою тупого кута, який дорівнює $120°$. Знайдіть площу трапеції.

988*. Периметр трапеції — 144 см, а кути при більшій основі дорівнюють по $60°$. Діагональ трапеції ділить середню лінію на відрізки, один з яких на 16 см більший за другий. Знайдіть основи трапеції.

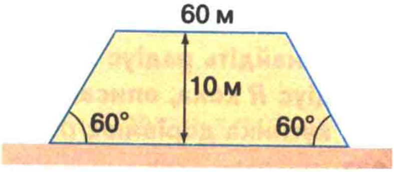
989*. Діагональ рівнобічної трапеції ділить середню лінію у відношенні $5 : 9$, а кути при меншій основі дорівнюють по $120°$. Знайдіть бічні сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює 220 см.

990*. Дві висоти паралелограма, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 12 см і 18 см, а кут між ними — $30°$. Знайдіть сторони паралелограма.

991*. Дві висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, дорівнюють 5 см і 12 см, а кут між ними дорівнює $150°$. Знайдіть сторони паралелограма.

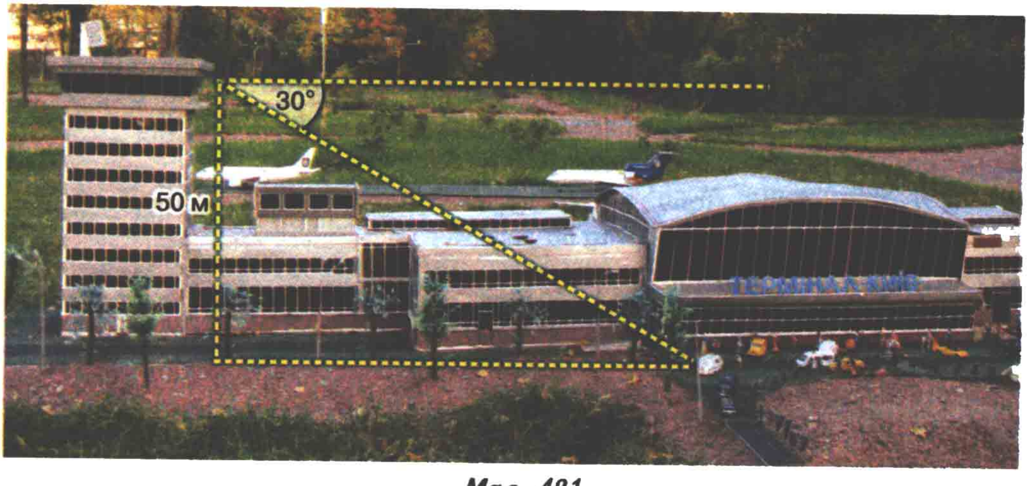
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

992. Ширина верхньої частини насипу шосейної дороги, поперечний переріз якого — рівнобічна трапеція, дорівнює 60 м (мал. 480). Яка ширина основи насипу, якщо його висота дорівнює 10 м, а кут укосу — $60°$?



Мал. 480

993. Спостерігачу, який стоїть на висоті 50 м, видно автомобіль під кутом $30°$ до горизонту (мал. 481). Яка відстань від спостерігача до автомобіля?



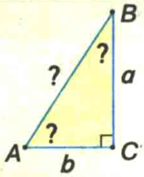
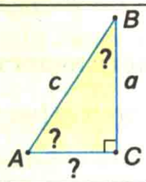
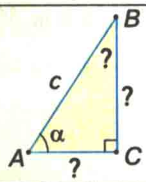
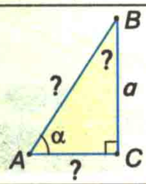
Мал. 481

§24. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

Розв'язати прямокутний трикутник означає – за даними двома сторонами або стороною і гострим кутом знайти інші його сторони і гострі кути.

Можливі такі види задач, в яких вимагається розв'язати прямокутний трикутник: 1) за катетами; 2) за гіпотенузою і катетом; 3) за гіпотенузою і гострим кутом; 4) за катетом і гострим кутом. Алгоритми розв'язування цих чотирьох видів задач наведено в таблиці 36.

Таблиця 36

Умова задачі		Алгоритм розв'язування
1 	Дано: $AC=a$, $BC=b$. Знайти: AB, $\angle A$, $\angle B$	1) $AB=\sqrt{a^2+b^2}$, 2) $\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}$, 3) $\angle B=90^\circ-\angle A$
2 	Дано: $AB=c$, $BC=a$. Знайти: AC, $\angle A$, $\angle B$	1) $AC=\sqrt{c^2-a^2}$, 2) $\sin A=\frac{a}{c}$, 3) $\angle B=90^\circ-\angle A$
3 	Дано: $AB=c$, $\angle A=\alpha$. Знайти: AC, BC, $\angle B$	1) $\angle B=90^\circ-\alpha$, 2) $AC=c\cdot\cos\alpha$, 3) $BC=c\cdot\sin\alpha$
4 	Дано: $BC=a$, $\angle A=\alpha$. Знайти: AB, AC, $\angle B$	1) $\angle B=90^\circ-\alpha$, 2) $AB=\frac{a}{\sin\alpha}$, 3) $AC=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$

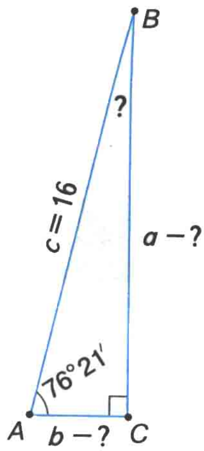
Задача. Розв'яжіть прямокутний трикутник за гіпотенузою $c = 16$ і кутом $\alpha = 76°21'$ (мал. 482).

Розв'язання. Це задача третього виду. Алгоритм її розв'язування наведено в таблиці 38.

1) $\angle B = 90° - \alpha = 90° - 76°21' = 13°39'$;

2) $AC = c \cdot \cos\alpha = 16 \cdot \cos 76°21' \approx 16 \cdot 0{,}2360 \approx 3{,}78$;

3) $BC = c \cdot \sin\alpha = 16 \cdot \sin 76°21' \approx 16 \cdot 0{,}9816 \approx 15{,}55$.

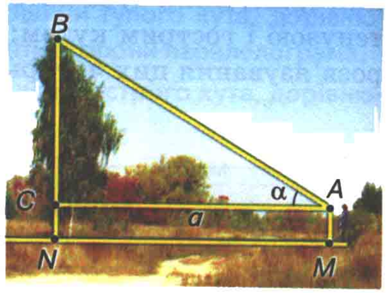


Мал. 482

Розв'язування багатьох прикладних задач ґрунтується на розв'язуванні прямокутних трикутників. Розглянемо деякі види прикладних задач.

1. Задачі на знаходження висоти предмета, основа якого доступна.

Задача. Знайдіть висоту дерева (мал. 483).



Мал. 483

Розв'язання. На деякій відстані $MN = a$ від дерева встановлюємо кутомірний прилад AM (наприклад, теодоліт) і знаходимо кут α між горизонтальним напрямком AC і напрямком на верхню точку B дерева. Тоді з прямокутного трикутника ABC дістанемо: $BC = a \cdot \text{tg}\,\alpha$. Врахувавши висоту кутомірного приладу $AM = h$, дістанемо формулу для обчислення висоти дерева: $BN = a \cdot \text{tg}\,\alpha + h$.
Нехай результати вимірювання такі: $a \approx 40$ м, $h = 1{,}5$ м і $\alpha \approx 31°$.
Тоді $BN \approx 1{,}5 + 40 \cdot \text{tg}\,31° \approx 1{,}5 + 40 \cdot 0{,}601 \approx 25{,}5$ (м).

2. Задачі на знаходження висоти предмета, основа якого недоступна.

Задача. Знайдіть висоту вежі, яка відокремлена від вас річкою (мал. 484).

Розв'язання. На горизонтальній прямій, яка проходить через основу вежі (мал. 484), позначаємо дві точки M і N та вимірюємо відрізок $MN = a$ і кути α і β.

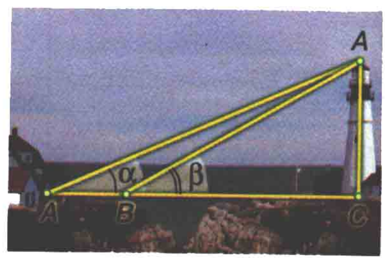
З прямокутних трикутників ADC і BDC

дістанемо: $AC = \dfrac{DC}{\text{tg}\alpha}$, $BC = \dfrac{DC}{\text{tg}\beta}$.

Почленно віднімемо знайдені рівності:

$$AC - BC = \frac{DC}{\text{tg}\alpha} - \frac{DC}{\text{tg}\beta}.$$

Звідси $AB = DC\dfrac{\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha}{\text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}$.



Мал. 484

Отже, $DC = \dfrac{a \cdot \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}{\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha}$.

Додавши до *DC* висоту приладу *AM* = *h*, яким вимірювали кути, дістанемо формулу для обчислення висоти вежі: $DK = \dfrac{a \cdot \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}{\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha} + h$.

Нехай результати вимірювання такі: $a \approx 10$ м, $h = 1{,}5$ м і $\alpha = 35°$, $\beta = 40°$.

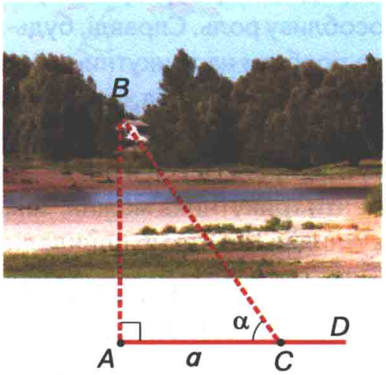
Тоді $DK = \dfrac{10 \cdot \text{tg}35° \cdot \text{tg}40°}{\text{tg}40° - \text{tg}35°} + 1{,}5 \approx \dfrac{10 \cdot 0{,}7002 \cdot 0{,}8391}{0{,}8391 - 0{,}7002} + 1{,}5 \approx 43{,}8$ (м).

3. Задачі на знаходження відстані між двома пунктами, розділеними перешкодою.

Задача. Знайдіть відстань між пунктами *A* і *B*, розділеними річкою (мал. 485).

Розв'язання. Провішуємо пряму $AD \perp AB$ і позначаємо на ній деяку точку *C*. Вимірюємо відстань $AC = a$ і кут α. З прямокутного трикутника *ABC* дістанемо формулу $AB = a \cdot \text{tg}\,\alpha$ для знаходження відстані між пунктами *A* і *B*.

Нехай результати вимірювання такі:
$a = 50$ м, $\alpha = 72°$.
Тоді $AB = 50 \cdot \text{tg}\,72° \approx 50 \cdot 3{,}0777 \approx 154$ (м).



Мал. 485

4. Задачі на знаходження кутів (кута підйому дороги, кута відкосу, кута, під яким видно деякий предмет тощо).

Задача. Знайдіть кут підйому шосейної дороги, якщо на відстані 200 м висота підйому становить 8 м.

Розв'язання. На малюнку 486 кут α — це кут підйому дороги, *AC* — горизонтальна пряма. Проведемо $BC \perp AC$, тоді *BC* — висота підйому дороги.

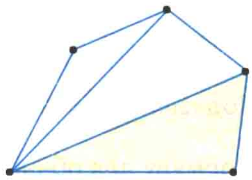
За умовою, $AB = 200$ м, $BC = 8$ м. Кут α знайдемо з прямокутного трикутника *ABC*:

$\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{8}{200} = 0{,}04$.

Тоді $\alpha \approx 2°18'$.

Мал. 486

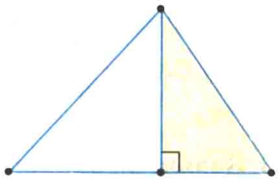
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ



Мал. 487

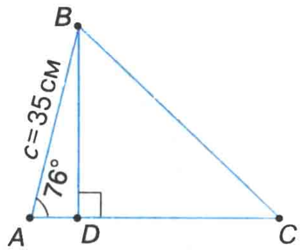
У вас може виникнути запитання: *Чому в геометрії особливу увагу приділяють прямокутному трикутнику, хоча в довкіллі не часто можна зустріти предмети такої форми?*

Давайте поміркуємо. Як у хімії вивчають у першу чергу елементи, а потім — їхні сполуки, а в біології — одноклітинні, а потім — багатоклітинні організми, так і в геометрії вивчають спочатку простіші геометричні фігури — точки, відрізки і трикутники, з яких складаються інші геометричні фігури.



Мал. 488

Серед цих фігур прямокутний трикутник відіграє особливу роль. Справді, будь-який многокутник можна розбити на трикутники (мал. 487). Вміючи знаходити кутові й лінійні елементи цих трикутників, можна знайти і всі елементи многокутника. У свою чергу, будь-який трикутник можна розбити однією з його висот на два прямокутні трикутники, елементи яких зв'язані простішою залежністю (мал. 488). Знайти елементи трикутника можна, звівши їх до розв'язування цих двох прямокутних трикутників. Наведемо приклад.



$b=50$ см

Мал. 489

Задача. У ΔABC $b=50$ см, $c=35$ см і $\angle A=76°$ (мал. 489). Знайдіть $\angle B$, $\angle C$ і сторону a.

Розв'язання. Проведемо висоту BD. Точка D лежатиме між точками A і C, оскільки $\angle A$ — гострий і $b>c$.

З прямокутного трикутника ABD:

$BD=c\cdot\sin A=35\cdot\sin 76°\approx 35\cdot 0{,}9703\approx 40$ (см).

$DC=AC-AD=b-c\cdot\cos A=50-35\cdot\cos 76°\approx$
$\approx 50-35\cdot 0{,}2419\approx 50-8{,}4665\approx 42$ (см).

З прямокутного трикутника BDC: $\operatorname{tg} C=\dfrac{BD}{DC}\approx\dfrac{40}{42}\approx 0{,}9524$.

Звідси $\angle C\approx 43{,}6°\approx 43°$.

$\angle B=180°-(\angle A+\angle C)\approx 180°-(76°+43°)\approx 180°-119°\approx 61°$.

З прямокутного трикутника BDC: $a=\dfrac{BD}{\sin C}=\dfrac{40}{\sin 43°}\approx\dfrac{40}{0{,}6820}\approx 59$ (см).

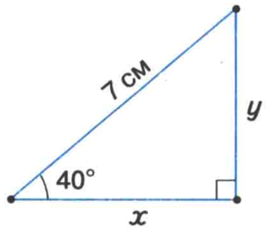
Отже, $a\approx 59$ см, $\angle B\approx 61°$, $\angle C\approx 43°$.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

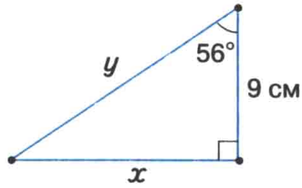
1. Що означає *розв'язати прямокутний трикутник*?
2. Які види задач стосуються розв'язування прямокутних трикутників?
3. Запишіть алгоритми розв'язування кожного з видів цих задач.
4. Назвіть види прикладних задач.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

994'. За даними, наведеними на малюнках 490, 491, знайдіть x і y.

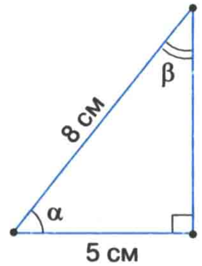


Мал. 490

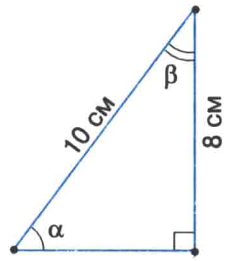


Мал. 491

995'. За даними, наведеними на малюнках 492, 493, знайдіть кути α і β.



Мал. 492



Мал. 493

996°. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть:
1) BC, якщо $AB = 5$ см, $\angle A = 55°$; 2) AB, якщо $AC = 7$ см, $\angle B = 41°$;
3) AC, якщо $BC = 6$ см, $\angle B = 38°$.

997°. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника, якщо:
1) катет дорівнює 9 см, а протилежний йому кут — 38°;
2) катет дорівнює 10 см, а прилеглий до нього кут — 54°.

998°. У прямокутному трикутнику з гіпотенузою 14 см і кутом 65° знайдіть:
1) катет, прилеглий до цього кута; 2) катет, протилежний цьому куту.

999°. Знайдіть кут A прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо:
1) $AB = 12$ см, $BC = 9$ см; 2) $AB = 10$ см, $AC = 6$ см;
3) $AC = 8$ см, $BC = 16$ см.

1000°. У прямокутному трикутнику з гіпотенузою 20 см і катетом 14 см знайдіть:
1) кут, прилеглий до цього катета; 2) кут, протилежний цьому катету.

1001°. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 0,2 гіпотенузи. Знайдіть гострі кути трикутника.

1002°. Знайдіть кут між діагоналлю і більшою стороною прямокутника, якщо його сторони дорівнюють: 1) 6 см і 8 см; 2) 18 см і 20 см; 3) 7 см і 14 см.

1003°. Через точку A до кола радіуса 45 см проведено дотичні AB і AC (B і C — точки дотику). Знайдіть кут, утворений дотичними, якщо:
1) $AB = 60$ см; 2) $AB = 50$ см; 3) $AB = 45$ см.

1004. Знайдіть невідомі сторони і гострі кути прямокутного трикутника за такими даними:

1) двома катетами:

а) $a = 20$, $b = 21$; б) $a = 9$, $b = 12$; в) $a = 24$, $b = 18$; г) $a = 23{,}5$, $b = 40{,}2$;

2) гіпотенузою і катетом:

а) $c = 17$, $a = 15$; б) $c = 20$, $a = 16$; в) $c = 65$, $a = 56$; г) $c = 2{,}93$ $b = 2{,}85$;

3) гіпотенузою і гострим кутом:

а) $c = 8$, $\angle A = 70°$; б) $c = 82$, $\angle A = 42°$; в) $c = 18{,}2$, $\angle A = 32°20'$;
г) $c = 4{,}67$, $\angle A = 65°15'$;

4) катетом і прилеглим кутом:

а) $a = 12$, $\angle A = 32°$; б) $a = 18$, $\angle A = 17°$; в) $a = 12$, $\angle A = 53°20'$;
г) $a = 3{,}71$, $\angle A = 19°30'$.

1005. Діагональ прямокутника дорівнює 25 см і утворює зі стороною кут $36°18'$. Знайдіть сторони прямокутника.

1006. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а кут при основі — $75°$. Знайдіть:

1) основу трикутника; 2) висоту, проведену до основи.

1007. У коло радіуса 5 см вписано рівнобедрений трикутник з кутом між бічними сторонами $70°$. Знайдіть:

1) висоту, проведену до основи;

2) бічну сторону трикутника.

1008. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 25 см, а висота, проведена до бічної сторони, — 21 см.

Знайдіть: 1) бічну сторону; 2) кут між бічними сторонами трикутника.

1009. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) $\angle A = 27°$, $BC = 21$ см.

Знайдіть:

1) другий катет; 2) гіпотенузу; 3) проекцію кожного катета на гіпотенузу.

1010. З точки, що розміщена на відстані 15 см від прямої, проведено дві похилі, які утворюють з прямою кути $24°$ і $61°$.

Знайдіть: 1) довжину похилих; 2) проекції похилих на пряму.

1011. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 7,5 см, а гострий кут — $22°$.

1012. Сторони паралелограма дорівнюють 5 см і 8 см, а гострий кут — $36°$. Знайдіть висоти паралелограма.

1013. Сторона ромба дорівнює 64,5 см, а гострий кут — $28°30'$. Знайдіть діагоналі ромба.

1014*. Кут між діагоналями прямокутника дорівнює $46°$, а його площа — 545 см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

1015*. У трапеції кути при більшій основі дорівнюють $16°$ і $54°$, висота трапеції — 24 см, а менша основа — 18 см. Знайдіть більшу основу трапеції.

1016*. Основи трапеції дорівнюють 15 см і 20 см, а бічна сторона, яка дорівнює 10 см, утворює з більшою основою кут 48°. Знайдіть площу трапеції.

1017*. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 8 см, кут при основі — 41°, висота трапеції — 2 см. Знайдіть меншу основу.

1018*. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі дорівнює 49°54', а основа більша від бічної сторони на 10,8 см.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

1019. Тінь від стовпа, висота якого 9 м, становить 5 м. Виразіть у градусах висоту Сонця над горизонтом.

1020. Гірська залізниця на одному з перегонів підіймається на 1 м на кожні 60 м шляху. Знайдіть кут підйому дороги на цій ділянці.

1021. На яку висоту h піднявся пішохід, який пройшов n км прямою дорогою, що підіймається під кутом α до горизонту?
Обчисліть h, якщо: 1) $n = 1{,}5$ км, $\alpha = 4°30'$; 2) $n = 3$ км, $\alpha = 8°18'$.

1022. Вертикальний промінь прожектора перетинає хмару. Яка висота нижньої межі хмари, якщо спостерігач, який стоїть на відстані 600 м від прожектора, бачить місце перетину променя прожектора і хмари під кутом 75°?

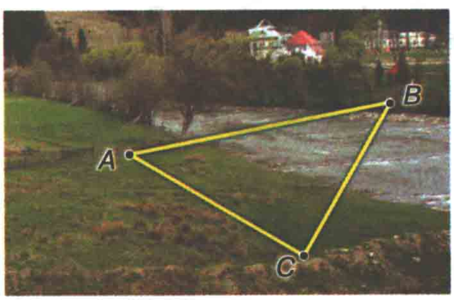
1023. Знайдіть відстань між пунктами A і B (до пункту B підійти не можна), якщо $AC = 60$ м, $\angle BAC = 41°$, $\angle ACB = 90°$ (мал. 494).

1024. Санаторій розташований на вершині гори. Пряма дорога до санаторію довжиною 1500 м має кут підйому 5°. На якій висоті від підошви гори розташований санаторій?

1025. Щогла закріплена трьома однаковими тросами, які нахилені до землі під кутом 64°. Нижні кінці тросів віддалені від щогли на 35 м. На якій висоті закріплені на щоглі верхні кінці тросів?

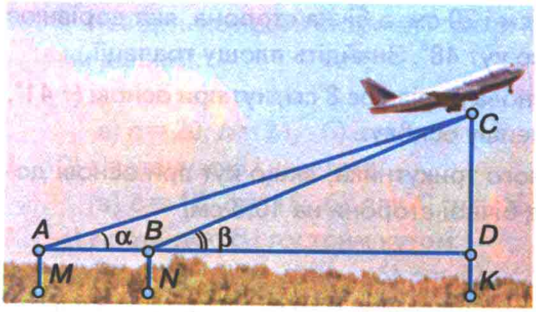
1026. За вісімсот метрів від місця підйому літака ростуть дерева висотою до 20 м. Під яким кутом має підійматися літак, щоб не зачепити дерева?

1027*. Знайдіть кут підйому вулиці, на якій розташована школа, якщо довжина фундаменту школи — 40 м, а його висота на початку і в кінці будівлі дорівнює 180 см і 90 см (мал. 495).

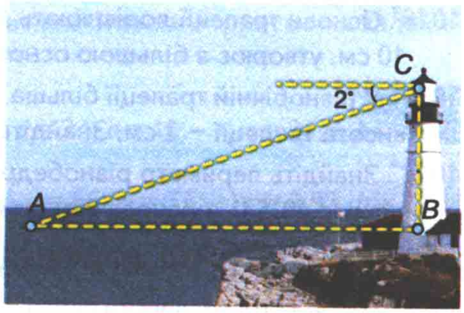


Мал. 494

Мал. 495



Мал. 496

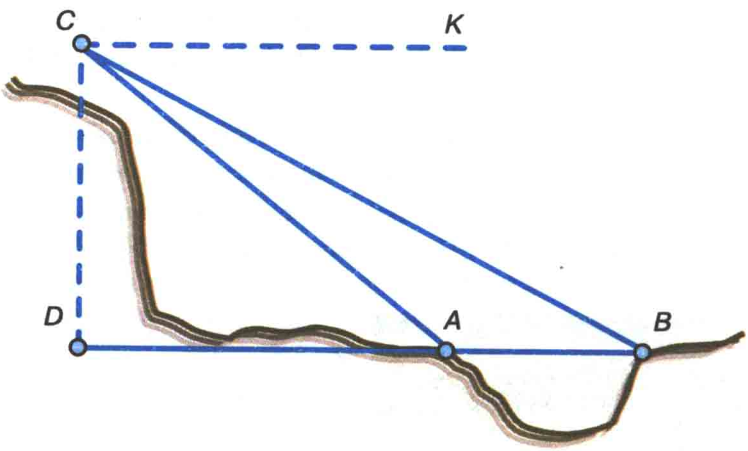


Мал. 497

1028*. Щоб знайти, на якій висоті летить літак C (мал. 496), два спостерігачі в пунктах M і N установили кутомірні прилади і виміряли відстань $MN = a$. У той момент, коли точки A, B і C лежали в одній вертикальній площині, виміряли одночасно кути α і β. Знаючи відстань a, кути α і β, висоту h приладів визначили шукану висоту CK. Поясніть спосіб знаходження висоти. Знайдіть висоту, на якій перебував літак, якщо результати вимірювання такі: $a = 80$ м, $h = 1{,}5$ м, $\alpha = 39°$, $\beta = 44°$.

1029*. З башти маяка висотою 75 м над рівнем моря видно корабель під кутом зниження 2° (мал. 497). Знайдіть відстань від маяка до корабля.

1030*. На малюнку 498 схематично зображено спосіб вимірювання недоступної відстані AB. Поясніть вимірювання. Знайдіть відстань AB, якщо $CD = 200$ м, $\angle KCB = 28°$, $\angle KCA = 39°$.



Мал. 498

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте і доведіть теорему Піфагора.
2. Назвіть властивості похилих.
3. Дайте означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута прямокутного трикутника.
4. Поясніть, як знайти за однією із сторін прямокутного трикутника і гострим кутом дві інші сторони.
5. Як знайти за двома сторонами прямокутного трикутника його гострі кути?
6. Сформулюйте види задач на розв'язування прямокутних трикутників та алгоритми розв'язування кожного з видів цих задач.

Уважно прочитайте задачу і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

№ 1

1° Знайдіть діагональ прямокутника, якщо його сторони дорівнюють 9 см і 12 см.

А. 21 см. **Б.** 3 см. **В.** 20 см. **Г.** 15 см.

2° Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його основа дорівнює 10 см, а висота — 12 см.

А. 22 см. **Б.** 14 см. **В.** 13 см. **Г.** 15 см.

3° З точки до прямої проведено похилу довжиною 8 см, яка утворює з прямою кут 60°. Знайдіть проекцію похилої на пряму.

А. 4 см. **Б.** 2 см. **В.** 6 см. **Г.** 16 см.

4 Катети прямокутного трикутника відносяться, як 3 : 4, а його гіпотенуза дорівнює 10 см. Знайдіть катети трикутника.

А. 3 см і 4 см. **Б.** 30см і 40 см. **В.** 6 см і 8 см. **Г.** 4 см і 6 см.

5* Основи прямокутної трапеції дорівнюють 5 см і 17 см, а більша бічна сторона 15 см. Знайдіть меншу діагональ трапеції.

А. 12 см. **Б.** 13 см. **В.** 22 см. **Г.** 20 см.

№ 2

1° Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо синус протилежного йому кута дорівнює 0,6, а гіпотенуза — 10 см.

А. 6 см. **Б.** 16 см. **В.** 4 см. **Г.** 60 см.

2° Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо катет дорівнює 8 см, а прилеглий до нього кут 60°.

А. 10 см. **Б.** 48 см. **В.** 14 см. **Г.** 16 см.

3° Діагональ прямокутника дорівнює 2 см і утворює із стороною кут 30°. Знайдіть сторони прямокутника.

А. 1 см і $\sqrt{3}$ см. **Б.** 2 см і 1 см. **В.** 2 см і $\sqrt{3}$ см. **Г.** 3 см і 1 см.

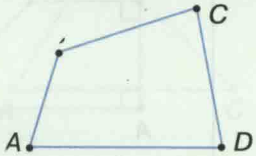
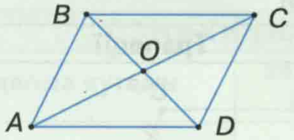
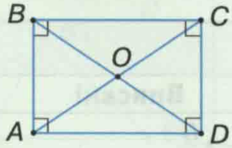
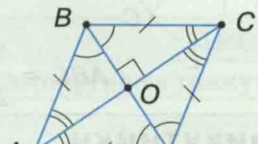
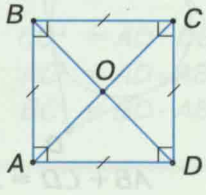
4 Знайдіть основу рівнобедреного трикутника, якщо висота, проведена до основи, дорівнює h, а кут між бічними сторонами — α.

А. $h \cdot \sin\alpha$. **Б.** $h \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$. **В.** $2h \cdot \operatorname{tg}\alpha$. **Г.** $2h \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

5* Тінь від стовпа, висота якого 12 м, становить 5 м. Виразіть у градусах висоту Сонця над горизонтом.

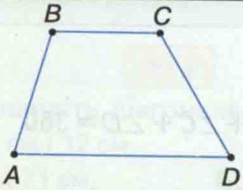
А. 35° **Б.** 67° **В.** 87° **Г.** 76°

ЧОТИРИКУТНИКИ

ЧОТИРИКУТНИК	
	$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$
Паралелограм	**Властивості**
 $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$	1. $AB = DC$, $AD = BC$ 2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ 3. $AO = OC$, $BO = OD$ 4. $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle A + \angle D = 180^\circ$
Види паралелограмів	**Властивості**
Прямокутник  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$	**паралелограма** 1. $AB = DC$, $AD = BC$ 2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ 3. $AO = OC$, $BO = OD$ 4. $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle A + \angle D = 180^\circ$ **Особлива властивість** 5. $AC = BD$
Ромб  $AB = BC = CD = DA$	**паралелограма** 1. $AB = DC$, $AD = BC$ 2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ 3. $AO = OC$, $BO = OD$ 4. $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle A + \angle D = 180^\circ$ **Особливі властивості** 5. $AC \perp BD$ 6. $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle BAC = \angle DAC$
Квадрат 	**Усі властивості паралелограма, прямокутника, ромба**

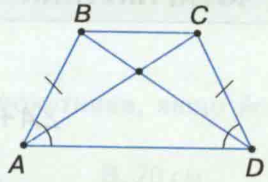
ТРАПЕЦІЇ

Нерівнобічна



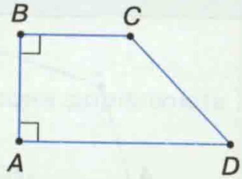
$AB \neq CD$

Рівнобічна



$AB = CD, \angle A = \angle D$

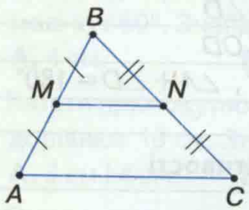
Прямокутна



$\angle A = \angle B = 90°$

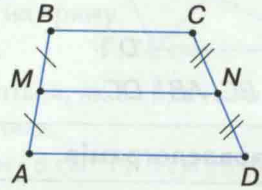
СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ

Трикутника



$MN \parallel AC, MN = \frac{AC}{2}$

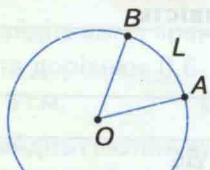
Трапеції



$MN \parallel AD, MN \parallel BC, MN = \frac{AD + BC}{2}$

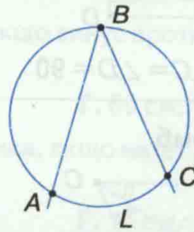
КУТИ У КОЛІ

Центральні



$\smile ALB = \angle AOB$

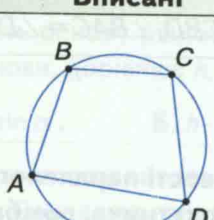
Вписані



$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile ALC$

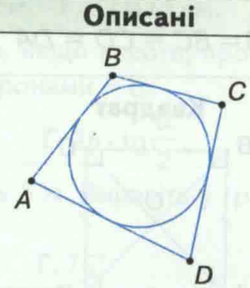
ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ

Вписані



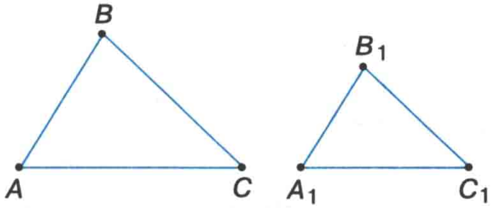
$\angle A + \angle C = 180°, \angle B + \angle D = 180°$

Описані



$AB + CD = AD + BC$

ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

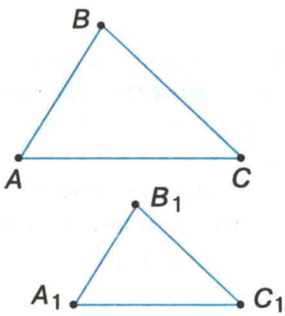


$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,
$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

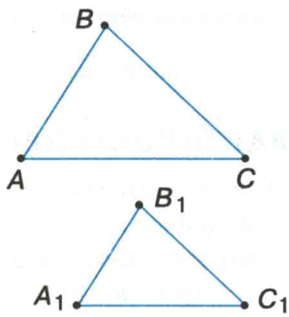
ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

за двома кутами



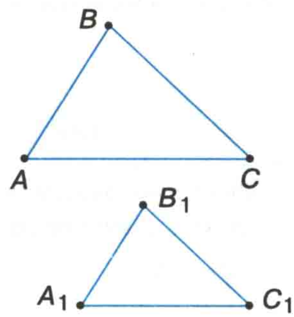
$\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$

за двома сторонами і кутом між ними



$AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$

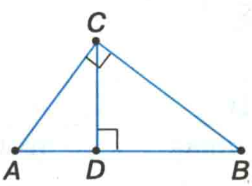
за трьома сторонами



$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 =$
$= AC : A_1C_1$

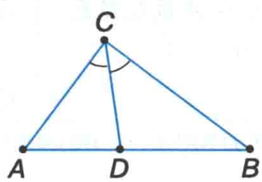
ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ

у прямокутному трикутнику



$CD^2 = AD \cdot DB$
$AC^2 = AD \cdot AB$
$BC^2 = BD \cdot AB$

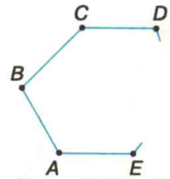
властивість бісектриси



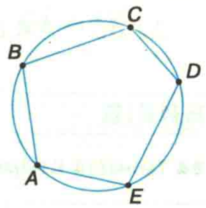
$AD : BD = AC : BC$

МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

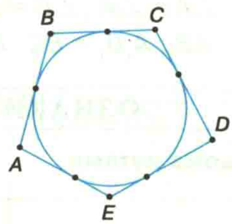
$\angle A+\angle B+\angle C+\ldots+\angle E=180^\circ(n-2)$,
де n — кількість сторін многокутника,
Периметр $P=AB+BC+CD+\ldots+EA$



Вписані многокутники



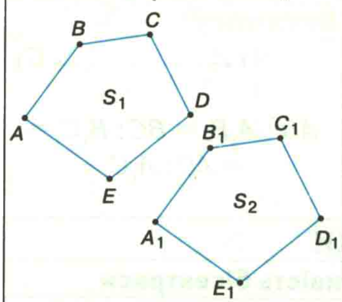
Описані многокутники



Многокутник називається $\dfrac{\text{вписаним у коло}}{\text{описаним навколо кола}}$, якщо всі його $\dfrac{\text{вершини лежать на колі}}{\text{сторони дотикаються до кола}}$

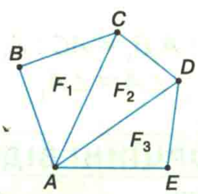
ВЛАСТИВОСТІ ПЛОЩІ

Рівні многокутники мають рівні площі



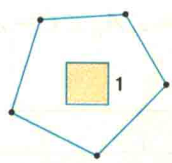
$ABCDE=A_1B_1C_1D_1E_1$
$S_1=S_2$

Площа многокутника, складеного з частин, дорівнює сумі площ цих частин



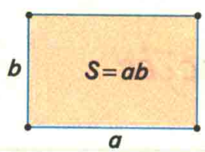
$S_{ABCDE}=S_{F_1}+S_{F_2}+S_{F_3}$

Одиницею площі є площа одиничного квадрата

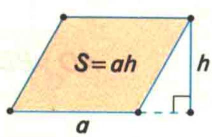


ФОРМУЛИ ПЛОЩІ

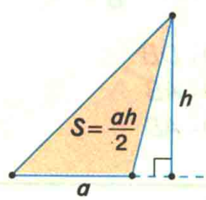
прямокутника



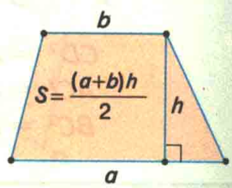
паралелограма



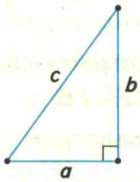
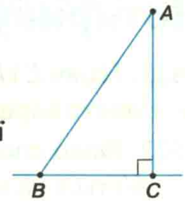
трикутника

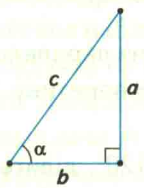


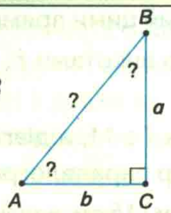
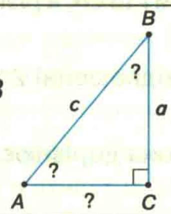
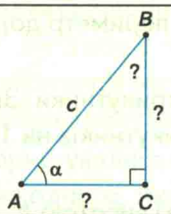
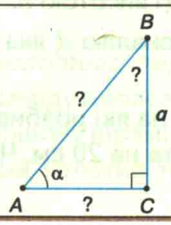
трапеції



РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

Теорема Піфагора	Наслідки
 $c^2 = a^2 + b^2$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$	AC — перпендикуляр AB — похила BC — проекція похилої $AB > AC$, $AB > BC$ 

Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника	
 $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ $\frac{b}{c} = \cos\alpha$ $\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha$	$a = c \cdot \sin\alpha$, $b = c \cdot \cos\alpha$, $a = b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$ $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\cos\alpha}$ $b = \frac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha}$

Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника	
Задача	**Алгоритм розв'язування**
Дано: a, b Знайти: c, $\angle A$, $\angle B$ 	1) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, 2) $\mathrm{tg}\,A = \frac{a}{b}$, 3) $\angle B = 90° - \angle A$
Дано: a, c Знайти: b, $\angle A$, $\angle B$ 	1) $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, 2) $\sin A = \frac{a}{c}$, 3) $\angle B = 90° - \angle A$
Дано: c, α Знайти: a, b, $\angle B$ 	1) $\angle B = 90° - \alpha$, 2) $a = c \cdot \sin\alpha$, 3) $b = c \cdot \cos\alpha$
Дано: a, α Знайти: c, b, $\angle B$ 	1) $\angle B = 90° - \alpha$, 2) $c = \frac{a}{\sin\alpha}$, 3) $b = \frac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha}$

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

Чотирикутники

1031. Точки E і F — середини протилежних сторін AB і CD паралелограма, сполучено з вершинами B і D. Доведіть, що: 1) $\Delta ADE = \Delta CBF$; 2) $DE \parallel FB$.

1032. Якщо сполучити в попередній задачі точки E і F, то паралелограм розіб'ється на чотири рівних трикутники. Доведіть.

1033. Сторони паралелограма дорівнюють 3 см і 5 см. Бісектриси кутів, прилеглих до меншої сторони, перетинають продовження протилежної їй сторони в точках M і N. Знайдіть довжину відрізка MN.

1034. Діагоналі паралелограма дорівнюють d_1 і d_2. Через вершини паралелограма проведено прямі, паралельні діагоналям, до взаємного їх перетину. Якого виду утворений чотирикутник? Знайдіть його периметр.

1035. У паралелограмі бісектриса тупого кута, який дорівнює 120°, ділить сторону на відрізки 24 см і 16 см, починаючи від вершини гострого кута. Знайдіть відрізки, на які ділить ця бісектриса більшу діагональ паралелограма.

1036. Через середини сторін паралелограма проведено перпендикулярні до них прямі. Якого виду чотирикутник, утворений цими прямими?

1037. Побудуйте паралелограм за двома його висотами h_1 і h_2, проведеними із однієї вершини, і кутом α між ними.

1038. Сторони паралелограма відносяться, як 7 : 11, а діагоналі відповідно дорівнюють 24 см і 28 см. Знайдіть периметр паралелограма.

1039. Сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 15 см, а різниця діагоналей 2 см. Знайдіть діагоналі паралелограма.

1040. У прямокутнику діагональ ділить кут у відношенні 2 : 3. Знайдіть гострий кут між діагоналями.

1041. Знайдіть висоту ромба, якщо його сторона дорівнює a, а кут — 150°.

1042. Доведіть, що висоти ромба рівні.

1043. Знайдіть гострий кут ромба, якщо його периметр дорівнює 16 см, а висота — 2 см.

1044. Діагональ ромба розбиває його на два трикутники. Знайдіть довжину цієї діагоналі, якщо сума периметрів обох трикутників на 15 см більша за периметр ромба.

1045. Побудуйте ромб за його периметром $2p$ і висотою h.

1046. Побудуйте ромб за гострим кутом α і діагоналлю d, яка виходить з вершини цього кута.

1047. Сума периметрів чотирьох трикутників, на які розбивається квадрат його діагоналями, більша за периметр квадрата на 20 см. Чому дорівнює діагональ квадрата?

1048. Доведіть, що в рівнобічній трапеції квадрат діагоналі дорівнює квадрату бічної сторони, доданому до добутку основ.

1049. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть кути трапеції.

1050. У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC кут A гострий, а кут D — тупий. Доведіть, що різниця проекцій бічних сторін трапеції на основу дорівнює різниці основ.

Подібність трикутників

1051. Поділ відрізка на два відрізки, більший з яких відноситься до меншого, як весь відрізок до більшої його частини, має назву *золотий переріз*. Це відношення наближено дорівнює 1,62. Щоб отримати такий поділ відрізка AB, побудуйте на ньому, як на катеті, прямокутний трикутник ABC ($BC < AB$). На гіпотенузі AC від вершини C відкладіть відрізок $CM = BC$, а на катеті AB від вершини A — відрізок $AO = CM$. Точка O ділить відрізок AB у відношенні *золотого перерізу*. Виконайте побудову, виміряйте отримані відрізки й перевірте, чи справджується відношення *золотого перерізу*.

1052. Відношення *золотого перерізу* у пропорціях тіла дорослої людини з прадавніх часів вважають основою краси й гармонії людської статури. У такому відношенні перебувають відстані від підошви ступнів до кінця середнього пальця опущеної руки і від нього до верхівки голови; відстань від ліктьового згину до кисті і довжина кисті; відстані від передпліччя до ліктьового згину і від ліктьового згину до кінця кисті та ін. Виміряйте на собі ці відстані та знайдіть їх відношення.

1053. Рівнобедрений трикутник з кутом при основі 72° називають *золотим* — у ньому відношення довжини бічної сторони до довжини основи відповідає *золотому перерізу* і наближено дорівнює 1,62. Накресліть такий трикутник. Виміряйте його сторони і знайдіть їх відношення.

1054. Славнозвісна піфагорійська пентаграма (символ давньогрецької школи Піфагора) — це п'ятикутна зірка, яка пов'язана із *золотим* трикутником. Якщо занумерувати вершини цієї зірки (1, 2, 3, 4, 5) і сполучити їх відрізками у порядку 1 — 3 — 5 або 2 — 4 — 1 і т. д., то отримаємо *золоті* трикутники. Скільки таких трикутників містить піфагорійська пентаграма? Яка сума кутів при вершині усіх цих трикутників?

1055. Піфагорійці користувалися пентаграмою, малюючи її на піску, щоб вітати й упізнавати один одного. Як накреслити пентаграму, не відриваючи олівця від аркуша?

1056. Властивості *золотого перерізу* використовували ще давні єгиптяни. Якщо велику піраміду Хеопса перетнути вертикальною площиною, яка проходить через вершину піраміди і середину сторони основи, отримаємо так званий подвійний золотий трикутник. Це — рівнобедрений трикутник, в якого відношення бічної сторони до половини основи дорівнює відношенню *золотого перерізу* ≈ 1,62. У піраміді Хеопса цей трикутник має розміри: бічна сторона 186,526 м, основа 230,4 м. Перевірте за цими даними, чи справджується відношення *золотого перерізу*. Побудуйте трикутник із відношенням сторін, як у трикутнику піраміди Хеопса. Чи правильно, що кут при основі такого трикутника $51°51'$?

1057. Прямокутник зі сторонами 10 і 16 називають *золотим*. Якщо від нього відрізати квадрат зі стороною 10, отримаємо також *золотий* прямокутник. Квадрат з якою довжиною сторони треба відрізати від цього другого прямокутника, щоб отримати знову *золотий* прямокутник? Сформулюйте узагальнене правило.

1058. У прямокутному трикутнику один із катетів продовжено за вершину прямого кута на деякий відрізок. З побудованої точки проведено перпендикуляр до гіпотенузи трикутника. Які з утворених при цьому трикутників подібні даному трикутнику?

1059. Через вершини трикутника зовні нього проведено прямі, перпендикулярні послідовно до кожної його сторони. Від перетину цих прямих утворився трикутник. Чи подібний він даному трикутнику? Поясніть відповідь.

1060. Бісектриси зовнішніх кутів трикутника утворюють трикутник. Чи подібний він даному трикутнику? Поясніть відповідь.

1061. $ABCK$ і $MKTP$ — рівні квадрати зі спільною вершиною K. Сторони CK і KT взаємно перпендикулярні. Знайдіть площу чотирикутника $ACTM$, якщо $AB = 6$ см.

1062. З вершин гострих кутів паралелограма проведено висоти. Чи подібні утворені при цьому трикутники? Поясніть відповідь.

1063. *Теорема Птолемея*. Доведіть, що у вписаному чотирикутнику добуток діагоналей дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.

1064. Знайдіть діагоналі рівнобічної трапеції з основами 3 см і 5 см та бічною стороною 7 см.

1065. З точки M, що лежить поза колом радіуса 6 см, проведено до нього дві дотичні. Знайдіть відстань між точками дотику, якщо відстань від точки M до центра кола дорівнює 10 см.

1066. Трикутник ABC вписаний у коло. Бісектрису його кута C продовжено до перетину з колом, а отриману точку на колі сполучено з вершиною A.
1) Знайдіть, які при цьому утворилися подібні трикутники.
2) Виразіть квадрат бісектриси трикутника через його сторони a і b та відрізки на стороні c.

1067. У трикутнику зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см знайдіть бісектрису його найбільшого кута.

1068. Як побудувати відрізок, що є середнім пропорційним двох даних відрізків a і b?

1069. Побудуйте трикутник за його периметром P і двома гострими кутами α і β.

1070. Впишіть у трикутник ABC квадрат так, щоб дві його вершини лежали на більшій стороні трикутника, а дві інші вершини — на двох інших його сторонах.

Многокутники. Площі многокутників

1071. Раніше циркуль називали „шестернею". Така назва пов'язана з тим, що коли розхил циркуля дорівнює радіусу кола, то це коло можна поділити на 6 рівних частин. Перевірте це практично.

1072. У шестикутника є три пари рівних кутів. Відомо, що один кут дорівнює 120°, а два інших відносяться, як 7 : 9. Знайдіть кути шестикутника.

1073. Сторони прямокутника відносяться, як 8 : 15, а його діагональ дорівнює 34 см. Знайдіть площу прямокутника.

1074. У паралелограма одна зі сторін дорівнює 10 см, а один з кутів — 30°. Знайдіть площу паралелограма, якщо його периметр дорівнює 56 см.

1075. Знайдіть площу ромба зі стороною 4 см, якщо радіус вписаного кола дорівнює 1,5 см.

1076. Висота трикутника дорівнює 4 см. Вона ділить сторону, до якої проведена, у відношенні 1 : 8. Знайдіть довжину відрізка з кінцями на сторонах трикутника, який паралельний висоті і ділить трикутник на частини з рівними площами.

1077. Довжини найбільшої і найменшої сторін трикутника дорівнюють 6 см і 13 см. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо потроєний квадрат його найменшої висоти дорівнює добутку двох інших висот трикутника.

1078. Висота трапеції втричі більша за одну з основ трапеції, але вдвічі менша від її другої основи. Знайдіть основи трапеції, якщо її площа дорівнює 168 см^2.

1079. У трапеції $ABCD$ через середину O діагоналі AC проведено пряму MN паралельно діагоналі BD ($M \in AB$, $N \in AD$). Чи поділить навпіл площу трапеції відрізок: 1) DM; 2) BN? Поясніть відповідь.

1080. Двоє сходів мають однакові основи m (довжина за горизонталлю) і однакові висоти h (довжина за вертикаллю від основи до верхньої площадки). Чи однакової довжини знадобляться килимові доріжки, щоб вкрити ці сходи, якщо одні сходи складаються з 9 сходинок, а другі — з 12 сходинок?

Розв'язування прямокутних трикутників

1081. Довжини катетів прямокутного трикутника 7 см і 24 см. Знайдіть значення синуса і косинуса гострого кута між гіпотенузою і проведеною до неї медіаною.

1082. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а бічна сторона — 10 см. Знайдіть синуси кутів:

1) при більшій основі; 2) між діагоналлю і середньою лінією.

1083. Знайдіть значення синуса і косинуса найменшого кута прямокутного трикутника, якщо:

1) $a - b = 17$ см, $c = 25$ см;

2) $c - a = 1$ см, $c - b = 50$ см;

3) $c + a = 49$ см, $c + b = 50$ см.

1084. Точка A лежить на відстані 2 см від кола радіуса 3 см. Знайдіть косинус кута між дотичними, проведеними з точки A до цього кола.

1085. Радіус кола R. Знайдіть довжину хорди цього кола, яка стягує дугу $n°$.

1086. a, b — катети прямокутного трикутника, c — гіпотенуза, A і B — гострі кути. Заповніть таблицю 37.

Таблиця 37

Елемент трикутника	1	2	3	4	5	6	7	8
a			47,2	10,2	17		12,7	
b						75	13,4	8
c	13,5	0,25			20			12
$\angle A$	40		67			52		
$\angle B$		32		53				

1087. Діагональ прямокутника дорівнює 32,5 см і ділить його кут у відношенні 4 : 11. Знайдіть периметр прямокутника.

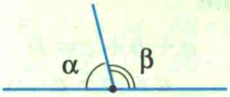
1088. Дві взаємно перпендикулярні хорди AB і AC дорівнюють 38,5 см і 21,3 см. Під якими кутами вони нахилені до діаметра AM?

1089. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо кут між бічними сторонами дорівнює 47°12', а сума основи і бічної сторони — 59,4 см.

1090. Два кола радіусів 3 см і 12 см дотикаються зовнішньо. Знайдіть кут між спільними зовнішніми дотичними цих кіл.

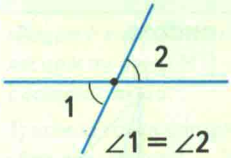
КУТИ

суміжні



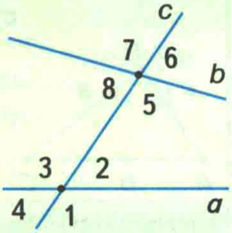
$\alpha + \beta = 180°$

вертикальні



$\angle 1 = \angle 2$

при двох прямих і січній



Внутрішні
а) односторонні
$\angle 2$ і $\angle 5$, $\angle 3$ і $\angle 8$
б) різносторонні
$\angle 2$ і $\angle 8$, $\angle 3$ і $\angle 5$

Відповідні
$\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 2$ і $\angle 6$,
$\angle 3$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 8$,

зовнішні:
а) односторонні
$\angle 1$ і $\angle 6$, $\angle 4$ і $\angle 7$;
б) різносторонні
$\angle 1$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 6$

ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

ОЗНАКИ

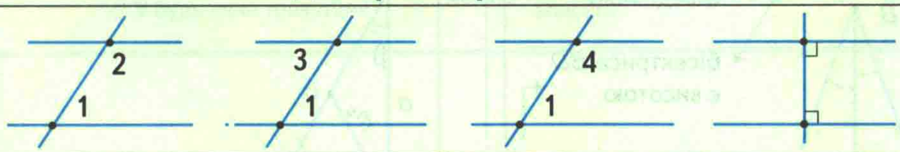
ЯКЩО

при двох прямих і січній:
- сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°
- внутрішні різносторонні кути рівні
- відповідні кути рівні

дві прямі:
- перпендикулярні до третьої прямої

ТО

дані прямі паралельні



ВЛАСТИВОСТІ

ЯКЩО

- дві прямі паралельні і їх перетинає третя пряма (січна)
- пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих

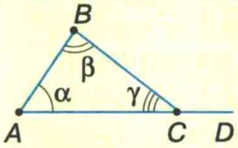
ТО

- сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°
- внутрішні різносторонні кути рівні
- відповідні кути рівні
- вона перпендикулярна і до другої прямої

ТРИКУТНИКИ

ВЛАСТИВОСТІ

кутів



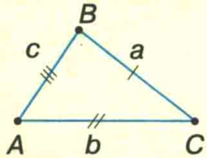
$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$

$\angle BCD=\alpha+\beta$

$\angle BCD>\alpha$

$\angle BCD>\beta$

сторін



$a+b+c=P$

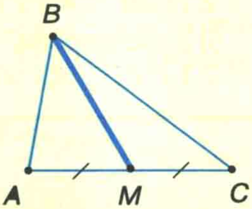
$a<b+c$

$b<a+c$

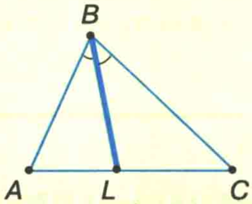
$c<a+b$

ВАЖЛИВІ ВІДРІЗКИ

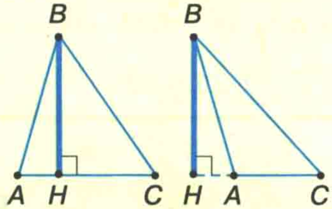
медіана



бісектриса



висота



РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

властивості

ЯКЩО

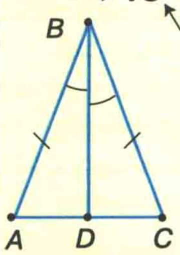
↓

ΔABC – рівнобедрений ($AB=BC$)

ТО ↔ $\angle A=\angle C$

ТО ↔ бісектриса BD є медіаною

ТО ↔ бісектриса BD є висотою



ЯКЩО

ознаки

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

властивості

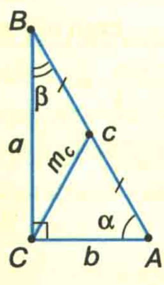
ЯКЩО

↓

ΔABC – прямокутний ($\angle C=90^\circ$)

ТО ↔ $\alpha+\beta=90^\circ$

ТО ↔ $m_c=0{,}5c$

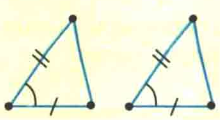


ЯКЩО

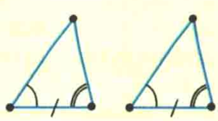
ознаки

ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

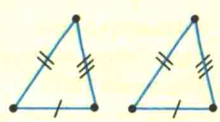
за двома сторонами і кутом між ними



за стороною і двома прилеглими кутами

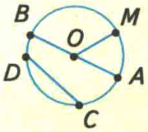


за трьома сторонами



КОЛО

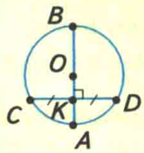
ВАЖЛИВІ ВІДРІЗКИ



AB — діаметр,
CD — хорда,
OM — радіус

$AB = 2OM$
$CD \le AB$

ВЛАСТИВОСТІ



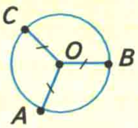
Якщо $\dfrac{AB \perp CD}{CK = KD}$, то $\dfrac{CK = KD}{AB \perp CD}$

ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ ТОЧОК

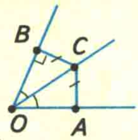
Фігура F є геометричним місцем точок (ГМТ) *площини, якщо:*

1) кожна точка фігури має ту саму властивість;

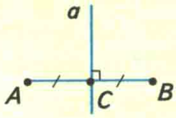
2) кожна точка площини, яка має цю властивість, належить даній фігурі



Коло є ГМТ, рівновіддалених від даної точки



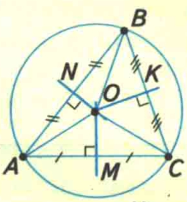
Бісектриса кута є ГМТ, рівновіддалених від сторін кута



Серединний перпендикуляр до відрізка є ГМТ, рівновіддалених від кінців відрізка

КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА

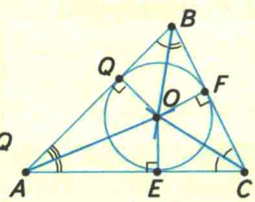
КОЛО, ВПИСАНЕ У ТРИКУТНИК



Центр O кола — точка перетину

серединних перпендикулярів
$R = OA = OB = OC$

бісектрис кутів
$r = OE = OF = OQ$



$\dfrac{\text{Навколо будь-якого трикутника}}{\text{У будь-який трикутник}}$ можна $\dfrac{\text{описати}}{\text{вписати}}$ коло і до того ж тільки одне

ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

За допомогою лінійки можна провести:
- довільну пряму;
- пряму, що проходить через дану точку;
- пряму, що проходить через дві дані точки

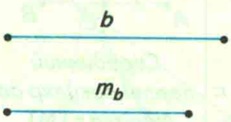
За допомогою циркуля можна:
- провести коло з даного центра даним радіусом;
- відкласти відрізок на промені від його початку

Ніяких інших операцій виконувати циркулем і лінійкою не можна

МЕТОД ДОПОМІЖНОГО ТРИКУТНИКА

Задача

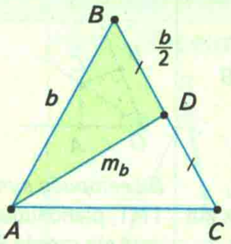
Дано:



Побудувати

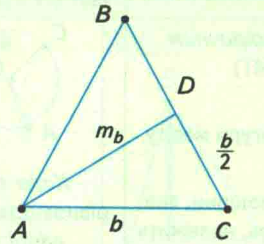
ΔABC так, щоб $AB = BC = b$, $AD = m_b$, (D — середина BC)

Аналіз



1) виконуємо малюнок-ескіз;
2) ΔABD — допоміжний ($AB = b$, $BD = \frac{b}{2}$, $AD = m_b$);
3) $BC = b$

Побудова



Будуємо:
1) ΔABD за трьома сторонами $AB = b$, $BD = \frac{b}{2}$, $AD = m_b$;
2) відрізок $BC = b$ на промені BD;
3) відрізок AC

ΔABC — шуканий

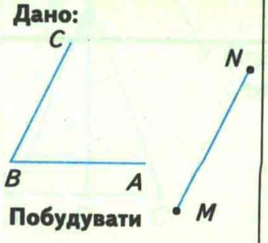
Доведення

У ΔABC
$AB = BC = b$,
$AD = m_b$,
(D — середина BC)
за побудовою

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ

Задача

Дано:



Побудувати

точку X, рівновіддалену від сторін $\angle ABC$ і точок M, N

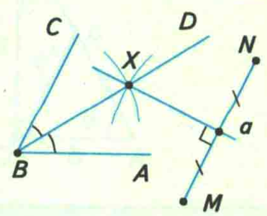
Аналіз

Точка X:
1) рівновіддалена від сторін $\angle ABC$;
2) рівновіддалена від M і N

ГМТ, що задовольняє:
- умову 1 — бісектриса $\angle ABC$;
- умову 2 — серединний перпендикуляр до відрізка MN

X — точка перетину цих ГМТ

Побудова



Будуємо:
1) бісектрису BD $\angle ABC$;
2) серединний перпендикуляр a до відрізка MN;
3) X — точку перетину BD і a

Доведення

$X \in BD$, тому X рівновіддалена від сторін $\angle ABC$

$X \in a$, тому $MX = NX$

Розділ I

§ 1

3. 1) 14 см; 2) 31 см; 3) 34 см. **4.** Ні (мал. 16); так (мал. 17). **6.** 1) 54 см; 2) 25 см; 3) 25 см; 4) 27 см; 5) 14 см. **7.** 1) 20 см, 40 см, 40 см, 40 см; 2) 14 см, 42 см, 42 см, 42 см; 3) 5 см, 45 см, 45 см, 45 см. **8.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **9.** 100°, 100°, 100° (мал. 19); 100°, 100° (мал. 20); 60° (мал. 21). **10.** 1) 150°; 2) 60°; 3) 70°. **11.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **12.** 1) 36°, 72°, 108°, 144°; 2) 75°, 85°, 95°, 105°; 3) 85°, 95°, 105°, 75°; 4) 40°, 80°, 40°, 200°. **13.** Ні. **14.** 90°, 90°, 90°, 90°. **15.** 180°. **16.** *Вказівка*: знайдіть градусну міру четвертого кута. **17.** 1) 105°; 2) 90°; 3) 100°. **18.** 15 см, 7 см, 23 см, 21 см. **19.** 64 см. **20.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **21.** *Вказівка*: скористайтеся нерівністю трикутника. **22.** *Вказівка*: скористайтеся нерівністю трикутника. **23.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою рівності трикутників за стороною і прилеглими кутами. **24.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою рівності трикутників за трьома сторонами і властивістю рівнобедреного трикутника ABC. **25.** 1) 36°, 72°, 108°, 144°; 2) 30°, 60°, 120°, 150°; 3) 40°, 60°, 120°, 140°. **26.** 1) 2; 2) 4; 3) 2. **27.** 1) Ні; 2) ні. **28.** 90°. **29.** 1) 142°, 22°, 136°, 60°; 2) 130°, 30°, 115°, 85°; 3) 131°, 35°, 89°, 105°. **30.** *Вказівка*: сума зовнішніх кутів чотирикутника дорівнює сумі кутів, суміжних з кутами цього чотирикутника. **31.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **32.** *Вказівка*: сума зовнішніх кутів чотирикутника вдвічі більша за суму його кутів. **33.** 115° (мал. 23); 160° (мал. 24); 100° (мал. 25). **34.** 10 см. **35.** *Вказівка*: нехай O — точка перетину діагоналей AC і BD чотирикутника $ABCD$. Запишіть нерівності для сторін трикутників AOB і COD та зробіть висновок. **36.** *Вказівка*: у $\triangle ABM$ $\angle M = 180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B$, у $\triangle CDN$ $\angle N = 180° - \frac{1}{2}\angle C - \frac{1}{2}\angle D$. Додайте ці рівності та зробіть висновок. **41.** *Вказівка*: місце будівництва заводу — точка перетину діагоналей чотирикутника.

§ 2

42. Ні (мал. 33); ні (мал. 34). **43.** 1) 5 см, 10 см; 2) 1,2 дм, 0,4 дм. **44.** 1) 120°, 60°; 2) 45°, 135°; 3) 90°, 90°. **45.** Ні. **5.** 1) $OC = 6$ см, $OD = 3$ см; 2) $AC = 12$ см, $BD = 6$ см; 3) $AD = 8$ см, $DC = 5$ см. **47.** 1) $\angle B = \angle D = 145°$, $\angle C = 35°$; 2) $\angle A = \angle C = 40°$, $\angle D = 140°$; 3) $\angle A = 75°$, $\angle B = \angle D = 105°$; 4) $\angle B = 64°$, $\angle A = \angle C = 116°$. **48.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **49.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні. **50.** $\angle A = \angle C = 45°$, $\angle B = \angle D = 135°$ (мал. 37); $\angle A = \angle C = 50°$, $\angle B = \angle D = 130°$ (мал. 38); $\angle A = \angle C = 60°$, $\angle B = \angle D = 120°$ (мал. 39). **51.** 1) 135°, 45°, 135°, 45°; 2) 65°, 115°, 65°, 115°; 3) 60°, 120°, 60°, 120°; 4) 40°, 140°, 40°, 140°. **52.** 1) 58°, 122°, 58°, 122°; 2) 68°, 112°, 68°, 112°; 3) 90°, 90°, 90°, 90°. **53.** Ні. **54.** 1) 13,5 см, 10,5 см, 13,5 см, 10,5 см; 2) 3 см, 21 см, 3 см, 21 см; 3) 15 см, 5 см, 8,5 см, 15,5 см, 8,5 см. **55.** $AB = CD = 4$ см, $AD = BC = 6$ см (мал. 40); $AB = CD = 10$ см, $AD = BC = 10$ см (мал. 40); $AB = CD = 6$ см, $AD = BC = 6{,}8$ см (мал. 40). **56.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою рівності трикутників за трьома сторонами. **57.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **58.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **59.** *Вказівка*: ця сума дорівнює сумі двох різних висот паралелограма. **60.** 3. **61.** 1) 72°, 108°, 72°, 108°; 2) 80°, 100°, 80°, 100°; 3) 54°, 126°, 54°, 126°. **62.** 1) 120°, 60°, 120°, 60°; 2) 160°, 20°, 160°, 20°; 3) 72°, 108°, 72°, 108°. **63.** 60° (мал. 43); 50° (мал. 44); 120° (мал. 45). **64.** 1) 35°, 145°, 35°, 145°; 2) 45°, 135°, 45°, 135°; 3) 89°, 91°, 89°, 91°. **65.** *Вказівка*: проведіть висоти з вершини тупого кута паралелограма і розгляньте утворені прямокутні трикутники. **66.** 16°, 96°. **67.** 45°, 135°, 45°, 135°. **68.** Прямокутний. **69.** 1) *Вказівка*: доведіть, що трикутник, який утворюють бісектриси зі стороною паралелограма, — прямокутний; 2) *вказівка*: скористайтеся ознакою паралельності прямих. **70.** 60°, 120°, 60°, 120°. **71.** 1) 70 см; 2) 14 см. **72.** 1) 6 см, 3 см; 2) 15 см; 3) 40 см. **73.** 1) *Вказівка*: доведіть рівність відповідних трикутників; 2) 9 см. **74.** *Вказівка:* спочатку доведіть паралельність *BN* і *MD*. **75.** 2,5 см. **76.** 1) *Вказівка*: скористайтеся ознакою рівнобедреного трикутника; 2) 30 см. **79.** 1) 45°; 2) 135°. **80.** 6 см. **81.** 2 см або 4 см. **82.** 10 см, 15 см, 10 см, 15 см. **83.** Сторони відносяться, як 2 : 3. **84.** 9,6 см, 14,4 см, 9,6 см, 14,4 см. **85.** Сторони відносяться, як 1 : 2. **86.** 7 см, 14 см, 7 см, 14 см. **87.** $AB \parallel OO_1$.

§ 3

89. Ні. **91.** 1) Ні; 2) так. **92.** За ознакою паралелограма. **93.** 1) Ні; 2) так. **95.** За означенням паралелограма. **96.** Так. **97.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **98.** 1) *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралелограма; 2) *вказівка*: скористайтеся ознакою паралелограма. **99.** 1) 35°; 2) 5 см. **100.** 1) *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралелограма; 2) *вказівка*: скористайтеся властивістю сторін і кутів паралелограма. **101.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю сторін і кутів паралелограма. **102.** *Вказівка*: доведіть, що $\angle A = \angle C$, та скористайтеся властивістю сторін і кутів паралелограма. **103.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю сторін і кутів паралелограма. **104.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралелограма. **105.** *Вказівка:* спочатку доведіть, що *AECF* — паралелограм. **106.** 1) $OC = 3$ см, $BO = 5$ см; 2) $AO = 4,8$ дм, $OD = 2$ дм; 3) $AO = 2,1$ см, $BO = 35$ мм; 4) $OC = 0,6$ дм, $OD = 6$ см. **107.** *Вказівка:* скористайтеся ознакою паралелограма. **108.** *Вказівка:* скористайтеся ознакою паралелограма. **109.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю діагоналей паралелограма. **110.** 1) Паралелограм; 2) чотирикутник; 3) паралелограм; 4) чотирикутник. **111.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралельності прямих, а потім — ознакою паралелограма. **112.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **113.** Так. **114.** *Вказівка*: спочатку доведіть, що AB_1CD_1 і B_1BD_1D — паралелограми. **115.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралелограма. **116.** *Вказівка:* спочатку доведіть рівність трикутників *EBM* і *KDN*. **117.** *Вказівка*: спочатку доведіть, що $\triangle AKM = \triangle CNP$ і $\triangle BPK = \triangle DMN$. **118.** *Вказівка*: спочатку доведіть рівність трикутників *EBC* і *FDA*. **119.** *Вказівка*: спочатку доведіть, що *DCEF* — паралелограм. **120.** 1) 3 см; 2) 4 см; 3) 4 см. **121.** *Вказівка*: спочатку доведіть рівність трикутників *ABE* і *CDF*, а потім скористайтеся ознакою паралелограма. **122.** *Вказівка*: спочатку доведіть рівність трикутників, а потім скористайтеся властивістю діагоналей паралелограма. **123.** *Вказівка*: спочатку доведіть рівність трикутників, а потім скористайтеся ознакою паралелограма.

124. *Вказівка*: скористайтеся властивістю діагоналей паралелограма. **125.** *Вказівка*: спочатку доведіть, що *MNKP* — паралелограм, а потім скористайтеся ознакою паралелограма. **126.** 1) *Вказівка*: скористайтеся властивістю діагоналей паралелограма; 2) 36°. **129.** *Вказівка*: спочатку доведіть рівність трикутників, а потім скористайтеся ознакою паралелограма. **130.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю діагоналей паралелограма. **131.** Так. **132.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралельності прямих, а потім ознакою паралелограма. **133.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю діагоналей паралелограма.

§ 4

136. 1) $AD = 16$ см, $DC = 12$ см; 2) $BD = 20$ см; 3) $AO = OC = BO = OD = 10$ см. **137.** 1) 14 см і 14 см; 2) 28 см. **138.** 54°, 36°, 54°. **139.** 1) 10 см; 2) 1,8 дм; 3) 44 мм. **140.** Діагоналі рівні. **141.** 1) по 6 см; 2) по 3 см; 3) по 9 мм. **142.** *Вказівка*: скористайтеся властивостями діагоналей прямокутника. **143.** $\angle 1 = 35°$, $\angle 2 = 125°$, $\angle 3 = 55°$ (мал. 79); $\angle 1 = \angle 3 = 30°$, $\angle 2 = 60°$ (мал. 80); $\angle 1 = 65°$, $\angle 2 = 130°$, $\angle 3 = 25°$ (мал. 81). **144.** 30° (мал. 82); 60°(мал. 83); 90° (мал. 84). **146.** 1) 2 см; 2) 7 мм; 3) 0,22 дм. **147.** 1) 20 см; 2) 0,5 дм; 3) 14 мм. **148.** 1) $P = 36$ см; 2) $b = 12$ см; 3) $a = 10$ см; 4) $b = 12$ см; 5) $P = 32$ см. **149.** 1) 32 см; 2) 30 см; 3) 56 см. **150.** *Вказівка*: доведіть, що кути даного паралелограма — прямі. **151.** *Вказівка*: доведіть, що паралелограм — прямокутник. **152.** *Вказівка*: покажіть, що в чотирикутнику протилежні сторони рівні; обчисліть четвертий кут прямокутника. **153.** *Вказівка*: обчисліть кути чотирикутника; див. задачу 152. **156.** *Вказівка*: нехай α — кут між діагоналлю та стороною паралелограма; знайдіть кути паралелограма. **157.** *Вказівка*: обчисліть кут між діагоналлю та стороною прямокутника; скористайтеся властивістю катета прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°. **158.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що кути рівностороннього трикутника дорівнюють по 60°. **159.** 1) 54°, 36°; 2) 18°. **161.** 1) 9,6 см, 14,4 см; 2) 10 см, 14 см; 3) 8 см, 16 см. **162.** 1) 6 см; 2) 4,3 см. **163.** 1) 26 см або 22 см; 2) 14 см або 16 см. **165.** *Вказівка*: покажіть, що бісектриса прямокутника відтинає від нього рівнобедрений трикутник. **166.** 1) 90 см; 2) 22,8 дм. **167.** *Вказівка*: побудуйте допоміжний прямокутний трикутник за гіпотенузою d і катетом a. **168.** 1) *Вказівка*: побудуйте допоміжний прямокутний трикутник за гіпотенузою d та кутом α; 2) *вказівка*: побудуйте допоміжний трикутник за сторонами $\frac{1}{2}d$, $\frac{1}{2}d$ та кутом α між ними. **169.** 1) 12 см, 12 см, 13,1 см, 13,1 см. **174.** *Вказівка*: добудуйте трикутник до прямокутника; скористайтеся тим, що діагоналі прямокутника діляться точкою перетину навпіл. **175.** 3 см, 3 см. **176.** *Вказівка*: через дану точку на основі проведіть пряму, паралельну бічній стороні трикутника; покажіть, що ця пряма відтинає від даного трикутника рівнобедрений трикутник та скористайтеся властивістю висот, проведених до бічних сторін рівнобедреного трикутника. **177.** 2) 10 см. **178.** 1) *Вказівка*: побудуйте допоміжний трикутник за сторонами d і s та кутом 45°, що лежить проти сторони d. **179.** *Вказівка*: доведіть, що $ABCD$ — прямокутник. **180.** *Вказівка*: можна, наприклад, перевірити, що у даного предмета протилежні сторони рівні та діагоналі рівні. **181.** Ні. **182.** *Вказівка*: у прямокутнику протилежні сторони рівні.

§ 5

184. Ні. **185.** 1) $BC = AD = DC = 10$ см; 2) $AC = 16$ см, $BD = 12$ см. **186.** $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 25°$. **187.** Діагоналі ромба перпендикулярні. Діагоналі ромба є бісектрисами кутів ромба. **188.** 1) 5 см; 2) по 7 см; 3) $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = 45°$, $\angle 2 = 90°$. **189.** 1) 3 см; 2) 0,6 дм; 3) 70 мм. **190.** *Вказівка*: скористайтесь тим, що діагоналі ромба перпендикулярні і точкою перетину діляться навпіл. **191.** *Вказівка*: скористайтеся означенням ромба і ознакою рівності трикутників за трьома сторонами. **192.** $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = 25°$, $\angle 2 = 65°$, $\angle 5 = 90°$. **193.** 1) 18°, 72°; 2) 27°, 63°; 3) 30°, 60°. **194.** *Вказівка*: діагональ даного ромба розбиває його на два рівносторонніх трикутники. **195.** 1) 60°, 120°, 60°, 120°; 2) 75°, 105°, 75°, 105°; 3) 25°, 155°, 25°, 155°. **196.** 70°, 110°, 70°, 110° (мал. 105); 36°, 144°, 36°, 144° (мал. 106); 60°, 120°, 60°, 120° (мал. 107). **197.** 1) 40 см; 2) 12,8 дм; 3) 180 мм. **198.** 1) 64 см; 2) 2,4 дм; 3) 168 мм. **199.** 1) 3 см; 2) 14,5 мм; 3) 0,75 дм. **200.** *Вказівка*: обчисліть кути чотирикутника. **202.** *Вказівка*: обчисліть кути ромба. **204.** *Вказівка*: покажіть, що сторони даного паралелограма рівні. **205.** 30°, 150°, 30°, 150°. **206.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — ромб, AM і AP — його висоти, проведені відповідно до сторін BC і CD; доведіть, що $\triangle ABM = \triangle ADP$. **207.** 1) 60°, 120°, 60°, 120°; 2) 80 см. **208.** 1) 70°, 110°, 70°, 110°; 2) 40°, 140°, 40°, 140°; 3) 80°, 100°, 80°, 100°. **209.** $BM = 2\sqrt{3}$, $MD = 2$, $AM = 2$. **210.** 1) 72°, 108°, 72°, 108°; 2) 40°, 140°, 40°, 140°; 3) 60°, 120°, 60°, 120°. **211.** 30°, 150°, 30°, 150°. **212.** 1) 16 см; 3) всі по 4 см. **213.** 1) *Вказівка*: побудуйте допоміжний прямокутний трикутник за катетами $\frac{d_1}{2}$ і $\frac{d_2}{2}$; 2) *вказівка*: побудуйте допоміжний трикутник за сторонами d, a, a; 3) *вказівка*: побудуйте допоміжний рівнобедрений трикутник за бічними сторонами a та кутом α між ними. **215.** 1) 16 см; 2) 58 мм; 3) 0,82 дм. **217.** *Вказівка*: доведіть, що $\triangle AND = \triangle CND = \triangle AMB = \triangle CMB$. **218.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **219.** 1) *Вказівка*: побудуйте допоміжний рівнобедрений прямокутний трикутник за катетом a; 2) *Вказівка*: побудуйте допоміжний рівнобедрений прямокутний трикутник за катетом $\frac{d}{2}$. **220.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — ромб, AM, AP — його висоти, проведені відповідно до сторін BC і CD; доведіть, що $\triangle ACM = \triangle ACP$; див. задачу 206. **221.** 30°, 150°, 30°, 150°. **222.** *Вказівка*: проведіть діагоналі ромба та покажіть, що кути ACN і CAL та кути BDK і DBM відповідно рівні. **223.** *Вказівка*: покажіть спочатку, що точка перетину діагоналей та основи перпендикулярів, проведених до протилежних сторін ромба, лежать на одній прямій; потім покажіть, що діагоналі чотирикутника з вершинами в основах побудованих перпендикулярів, є рівними. **224.** *Вказівка*: доведіть, що сторони чотирикутника паралельні діагоналям прямокутника і дорівнюють їх половині. **225.** *Вказівка*: обчисліть кути чотирикутника $MPKN$. **227.** 5 см. **228.** *Вказівка*: покажіть спочатку, що бісектриси двох пар сусідніх кутів прямокутника перетинаються під прямим кутом; потім доведіть, що отриманий прямокутник є квадратом. **229.** 1) *Вказівка*: побудуйте допоміжний прямокутний трикутник за катетом s та прилеглим кутом 22,5°. **230.** *Вказівка*: якщо перегнути тканину за діагоналлю, то краї тканини повинні суміститися. **231.** Ні, може бути ромб. **232.** *Вказівка*: позначте стовпці — A і B; проведіть пряму через середину O відрізка AB перпендикулярно до прямої AB; на побудованій прямій від точки O по обидві сторони відкладіть відрізки довжиною OA. **234.** Порада не є правильною. Може бути ромб. **235.** *Вказівка*: покажіть, що промені BA і BC є доповняльними.

§ 6

236. Ні, оскільки $\frac{3}{2} \neq \frac{4}{2}$. **237.** 4 (мал. 125); 3 (мал. 126). **238.** Ні. **239.** 4 (мал. 128); 12 (мал. 129). **240.** 1) 4 см; 2) 7 см. **241.** 1) 6 см; 2) 15 см; 3) 4 см. **243.** 1) по 4 см і по 6 см; 2) 6 см і 12 см; 4 см і 8 см. **245.** 1) 4 см, 2,5 см, 3,5 см; 2) 15 мм, 20 мм, 25 мм; 3) 4,5 см, 5 см, 7 см. **246.** 1) 4 см, 5 см, 6 см; 2) 0,25 дм, 6 см, 6,5 см. **247.** *Вказівка*: виразіть середні лінії трикутника через його сторони. **248.** 1) По 2 см; 2) по 4 дм; 3) по 8 мм. **249.** 1) 24 см; 2) 4,8 дм; 3) 600 мм. **250.** 1) 28 см; 2) 56 см; 3) 60 см. **251.** 1) 36 см; 2) 4,8 дм; 3) 600 мм. **252.** 1) 10 см і 22 см; 2) 1,2 дм і 1,8 дм; 3) 200 мм і 28 см. **253.** 1) Рівносторонній; 2) рівнобедрений. **255.** 1) 9 см; 2) 12 см; 3) 20 см. **256.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою Фалеса для кутів ADB і DBC та прямих MC і AN. **257.** 1) 15 см, 10 см; 2) 10 см, 5 см. **258.** 2 см. *Вказівка*: продовжте промінь AM на 4 см за точку M, дістанете точку P; продовжте відрізок OK за точку K на 4 см, дістанете точку D; розгляньте трикутник BAP. **259.** 1) 7,5 см, 10 см, 12,5 см; 2) 6 см, 8 см, 10 см. **260.** 1) 28 см, 32 см, 36 см; 2) 1,4 дм, 1,6 дм, 1,8 дм. **261.** *Вказівка*: виразіть периметри трикутників через сторони одного з них. **262.** 1) 10 см; 2) 49 см. **263.** 1) 25 см; 2) 3,5 дм. **264.** 1) 16 см; 2) 2,6 дм. **266.** *Вказівка*: проведіть прямі, що проходять через дані точки паралельно середнім лініям трикутника. **268.** *Вказівка*: через точку M проведіть пряму паралельно BD; скористайтеся теоремою Фалеса. **269.** *Вказівка*: через основу медіани трикутника проведіть пряму паралельно іншій його медіані; скористайтеся теоремою Фалеса. **270.** 2) 12 см, 24 см, 30 см; 3) 24 см. **272.** *Вказівка*: виразіть сторони кожного з чотирьох трикутників через сторони даного трикутника. **273.** 1) 36 см. **275.** *Вказівка*: через точку M проведіть пряму, паралельну BC; скористайтеся теоремою Фалеса. **277.** *Вказівка*: відкладіть відрізок AB так, щоб точка B лежала на першій лінії аркуша, а точка A — на дев'ятій лінії. **278.** *Вказівка*: MN — середня лінія трикутника ABC. **281.** Таких доріг три. Вони є середніми лініями трикутника.

§ 7

282. 1) BC і AD; 2) AB і CD; 3) $\angle A$ і $\angle D$ прилеглі до основи AD, $\angle B$ і $\angle C$ прилеглі до основи BC; 4) $\angle A$ і $\angle B$ прилеглі до бічної сторони AB, $\angle C$ і $\angle D$ прилеглі до бічної сторони CD. **283.** $ABCD$ — трапеція. **284.** 1) 3 см; 2) 90°. **286.** Ні. **287.** *Вказівка*: скористайтесь властивістю паралельних прямих. **288.** $\angle B = 130°$, $\angle D = 40°$ (мал. 156); $\angle B = 90°$, $\angle C = 134°$ (мал. 157); $\angle B = 140°$, $\angle C = 144°$ (мал. 158). **289.** 1) $\angle A = 70°$,

$\angle C = 150°$; 2) $\angle A = 55°$, $\angle D = 35°$. **290.** 1) $\angle D = 60°$; 2) $\angle C = 155°$; 3) $\angle C = 130°$, $\angle D = 50°$. **291.** 1) $\angle B = 110°$, $\angle D = 26°$; 2) $\angle B = 115°$, $\angle C = 144°$; 3) $\angle A = 60°$, $\angle C = 152°$; 4) $\angle A = 45°$, $\angle D = 38°$. **293.** 1) 7 см; 2) 3 см; 3) 8 см. **294.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і гострим кутом. **295.** 4 см (мал. 162); 7 см (мал. 163); 15 см (мал. 164). **296.** 1) $MN = 8$ см; 2) $BC = 9$ см; 3) $AD = 13$ см; 4) $BC = 9$ см; 3) $MN = 12$ см. **297.** 1) 40 см; 2) 62 см. **298.** 8 см, 16 см, 12 см (мал. 165); 4 см, 11 см, 7,5 см (мал. 166). **299.** 1) 134° і 36°; 2) 145° і 25°; 3) 128° і 56°. **300.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **301.** 1) 2 см; 2) 38 мм. **302.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — дана трапеція з основами BC і AD ($BC < AD$). Проведіть $CE \parallel AB$ і доведіть, що трикутник CED — рівнобедрений. **303.** $\angle A = \angle D = 58°$, $\angle B = \angle C = 122°$ (мал. 167); $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$ (мал. 168); $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$ (мал. 169). **304.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобічної трапеції та властивістю паралельних прямих. **305.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю паралельних прямих. **306.** 1) 70°, 110°, 110°, 70°; 2) 36°, 144°, 144°, 36°. **307.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою рівності трикутників за стороною і прилеглими кутами. **308.** *Вказівка*: доведіть рівність трикутників ABD і DCA. **309.** 6 см. **310.** 34 см. **311.** 1) 4 см і 12 см; 2) 5 см і 9 см. **312.** 1) *Вказівка*: доведіть, що $\triangle ABK = \triangle DCM$. **313.** 1) 6 см і 18 см; 2) 3 см і 11 см. **314.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника і властивістю паралельних прямих. **315.** 1) 26 см; 2) 286 мм. **317.** 6 см. **318.** 8 см і 12 см. **319.** *Вказівка*: продовжте відрізок до перетину з бічними сторонами трапеції та скористайтеся теоремою Фалеса, потім скористайтеся властивостями середньої лінії трапеції та середньої лінії трикутника. **320.** 1) 14 см; 2) 9 см. **322.** *Вказівка*: скористайтеся властивостями паралельних прямих. **323.** 120°, 60°, 120°, 60°. **324.** *Вказівка*: нехай трапеція $ABCD$ має основи AB і CD, а її діагоналі перетинаються в точці O; доведіть рівність трикутників ABC і BAD. **325.** *Вказівка*: з вершини тупого кута трапеції проведіть пряму, паралельну діагоналі, до перетину з більшою основою та скористайтеся властивістю висоти рівнобедреного трикутника. **327.** 1) 60°; 2) 12 см і 24 см. **328.** $\frac{3a}{4}$. **329.** 9 см і 23 см. **331.** *Вказівка*: спочатку побудуйте допоміжний трикутник за сторонами $a + b$, d_1 і d_2. **333.** EF — середня лінія трапеції, $EF = 3$ см. **335.** 3,5 м. **336.** Так.

§ 8

338. 90° (мал. 199); 180° (мал. 200); 60° (мал. 201). **340.** Усі кути по 90°. **341.** 60° (мал. 202); 25° (мал. 203); 90° (мал. 204). **342.** 1) 180°; 2) 120°; 3) 240°. **343.** 1) 30° і 330°; 2) 62° і 298°; 3) 100° і 260°. **344.** 1) 70°; 2) 210°. **346.** 1) 12 см; 2) 0,2 дм; 3) 39 мм. **347.** *Вказівка*: доведіть рівність дуг AC і BD. **348.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що дуга BC є спільною. **349.** 1) 26°; 2) 63°; 3) 100°. **350.** 1) 32°; 2) 64°; 3) 220°. **351.** 70° (мал. 208); 140° (мал. 209); 190° (мал. 210). **352.** 1) 60°, 60°, 60°; 2) 36°, 72°, 72°; 3) 30°, 60°, 90°. **353.** 1) 70°, 130°, 160°; 2) 120°, 60°, 180°; 3) 56°, 84°, 220°. **354.** 1) 32°, 32°, 116°; 2) 60°, 60°, 60°; 3) 72°, 72°, 36°. **355.** 70° (мал. 211); 20° (мал. 212). **356.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком 1 з теореми про вписаний кут.

357. *Вказівка*: нехай AB і CD — хорди кола і $AB = CD$; сполучіть точки A, B, C і D з центром O кола; доведіть, що $\triangle AOB = \triangle COD$. **358.** *Вказівка*: нехай хорда AC і діаметр BD кола з центром O перетинаються в точці K; доведіть рівність трикутників AKO і CKO. **359.** *Вказівка*: нехай хорда AC і діаметр BD кола з центром O перетинаються в точці K, причому $AK = KC$; доведіть рівність трикутників AKO і CKO. **362.** 1) 72° і 108°; 2) 80° і 100°. **363.** 1) 67°30'; 2) 40°. **364.** 1) 40°; 2) 60°. **365.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про вписаний кут. **366.** 30° або 150°. **367.** 1) 45° і 135°; 2) 36° і 144°. **368.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що градусна міра всього кола дорівнює 360°, і теоремою про вписаний кут. **369.** 100° (мал. 213); 120° (мал. 214); 145° (мал. 215). **370.** 1) 70° і 35°; 2) 90° і 45°. **371.** *Вказівка*: скористайтесь наслідком 2 з теореми про вписаний кут. **372.** *Вказівка*: див. задачу 371. **374.** 1) 45°; 2) 40°. **375.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про зовнішній кут трикутника і знайдіть $\angle ABC$. **376.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника і теоремою про суміжні кути; знайдіть $\angle DBC$ трикутника DBC. **377.** 50° (мал. 219); 80° (мал. 220). **378.** 40°, 60°, 80°. **381.** 1) Коло, радіус якого дорівнює половині відрізка, що сполучає дані точки; 2) дуга кола, описаного навколо трикутника зі стороною AB і протилежним гострим кутом α. **382.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком 2 з теореми про вписаний кут. **383.** *Розв'язання.* Прикладемо вершину прямого кута косинця до будь-яких двох точок кола, що є зовнішнім контуром диска, та проведемо дві хорди цього кола за гіпотенузою косинця; за наслідком 1 з теореми про вписаний кут, ці хорди є діаметрами кола; точка перетину побудованих діаметрів — шуканий центр диска.

§ 9

385. Ні. **387.** Ні. **388.** 1) 9 см; 2) 180°. **389.** $\angle B = 100°$, $\angle C = 85°$ (мал. 234); $\angle M = 75°$, $\angle N = 120°$, $\angle K = 105°$ (мал. 235); $\angle F = 90°$, $\angle E = 60°$, $\angle Q = 90°$, $\angle P = 120°$ (мал. 236). **390.** 1) а) Ні; б) так; 2) а) так, якщо $\angle D = 50°$; б) ні. **391.** 1) 125°; 2) 108°; 3) 120°. **392.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **393.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком 2 з теореми про вписаний кут. **394.** 1) *Вказівка*: скористайтеся наслідком 2 з теореми про вписаний кут; 2) за умови, що $AD \perp BC$. **395.** 10 см (мал. 238); 3 см і 7 см (мал. 239); $3\frac{1}{3}$ см і $6\frac{2}{3}$ см (мал. 240). **396.** 1) 40 см; 2) 6,4 дм. **397.** 1) 80 см; 2) 52 см. **398.** 1) Так; 2) ні. **399.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **401.** 1) 90°; 2) 60°. **402.** 1) 10 см; 2) 2,3 дм. **403.** 1) Так; 2) ні. **407.** 1) Так; 2) ні. **408.** Так. **409.** *Вказівка*: в утвореному чотирикутнику сусідні сторони мають бути рівними. **412.** 1) 3 мм, 10,5 мм, 18 мм, 10,5 мм; 2) 4 см, 14 см, 24 см, 14 см. **413.** Середня лінія трапеції дорівнює $\frac{P}{4}$, тому: 1) 4 см; 2) 50 мм. **414.** 1) 20 см; 2) 10 см. **415.** 1) *Вказівка*: побудуйте коло радіуса R та проведіть у ньому два перпендикулярні діаметри; послідовно сполучіть точки перетину діаметрів з колом. **416.** 1) *Вказівка*: побудуйте коло радіуса R, проведіть у ньому довільний діаметр, з точок перетину діаметра з колом проведіть кола радіуса a; розгляньте різні випадки. **420.** Так. *Вказівка*: скористайтеся ознакою описаного чотирикутника. **422.** *Вказівка*: врахуйте, що $h = 2r$, де h — висота ромба, r — радіус вписаного кола. **425.** *Вказівка*: діаметр круга дорівнює меншій стороні прямокутника. **426.** *Вказівка*: проведіть у даному крузі два перпендикулярних діаметри. **427.** *Вказівка*: колодязь повинен бути розміщений в центрі кола, описаного навколо трапеції.

Розділ 2

§ 10

429. 1) $1\frac{1}{3}$; 2) 2. **431.** 1) $P_1 = 17{,}1$, $P_2 = 20{,}51$, $P_2 : P_1 = 1{,}2$; 2) $P_1 = 17{,}9$, $P_2 = 14{,}32$, $P_2 : P_1 = 0{,}8$; 3) $P_1 = 36$, $P_2 = 27$, $P_2 : P_1 = 0{,}75$; 4) $P_1 = 7{,}5$, $P_2 = 15$, $P_2 : P_1 = 2$. **433.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні. **434.** 1) $\angle A_1 = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$; 2) $\angle A = \angle A_1 = 80°$, $\angle B = \angle C_1 = 50°$; 3) $\angle A = \angle A_1 = 45°$, $\angle B_1 = 110°$, $\angle C = 25°$. **435.** 1) Так; 2) трикутники з такими довжинами сторін не існують; 3) ні. **436.** 1) 6 см, 7 см; 2) 15 см, 4,2 см; 3) 13 см, 18,5 см. **437.** *Вказівка*: скористайтеся спочатку тим, що у подібних трикутників відповідні кути рівні, а потім — ознакою паралельності прямих. **438.** 1) $MN \parallel AC$; 2) $MN \parallel AB$; 3) $MN \parallel BC$. **439.** 1) 46 см, 23 см; 2) 29 см, 70 см; 3) 15 см, 40 см; 4) 31 см, 9 см. **440.** 1) 3 см; 2) 3,75 см; 3) 6 см. **441.** 1) 5 см, $8\frac{1}{3}$ см, $11\frac{2}{3}$ см; 2) 9 см, 15 см, 21 см. **442.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що у подібних трикутників відповідні кути рівні. **443.** Так, $k = \frac{2}{3}$. **444.** Так, $k = 2$. **445.** 1) Ні; 2) ні. **446.** 1) Так; 2) так. **447.** 1) 6 см; 2) 37,5 см. **448.** 1) 112 см, 64 см; 2) 30 см, 45 см. **449.** 1) 12 см; 2) 10 см. **450.** Так, $k = 1$. **451.** $k = \frac{1}{2}$. **452.** 1) 15 см, 30 см, 30 см; 2) 3,75 см, 11,25 см, 11,25 см. **453.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю периметрів подібних трикутників. **454.** Так. **455.** Так, у рівнобедрених трикутників. **456.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю периметрів подібних трикутників. **457.** *Вказівка*: під мікроскопом градусні міри кутів не змінюються. **458.** Так. **459.** Масштаб 1 : 250 000. **460.** 45 см, 50 см, 25 см. **461.** Так.

§ 11

462. 3 : 5 (мал. 258); 4 : 3 (мал. 259). **463.** 1) MH; 2) PM; 3) MH. **464.** 1) Так; 2) ні. **465.** 1) 2 : 3; 2) 5 : 1; 3) 2 : 1. **466.** 4. **467.** 1) Так; 2) так. **468.** 1) 4 см, 6 см; 2) 12 см, 4 см; 3) 6 см, 8 см; 4) 15 см, 3 см. **472.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **473.** 1) 6 або 1,5; 2) 8 або 4,5; 3) $11\frac{2}{3}$ або 4,2. **476.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. **477.** Так. **478.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком з узагальненої теореми Фалеса. **479.** 1) 3 см, 2 см, 12 см, 9 см, 6 см; 2) 8 см, 4 см, 24 см, 18 см, 12 см; 3) 6 см, 4,5 см, 18 см, 13,5 см, 9 см; 4) 4 см, 3 см, 2 см, 9 см, 6 см; 5) 4 см, 3 см, 2 см, 12 см, 6 см; 6) $6\frac{2}{3}$ см, 5 см, $3\frac{1}{3}$ см, 20 см, 15 см. **480.** $AC = \frac{am}{m+n}$. **481.** 1) 16 см, 32 см, 30 см; 2) 10 см, 24 см, 16 см. **482.** 1) 15 см, 10 см; 2) 20 см, 4 см. **483.** 1) $\frac{125}{34}$ см, $\frac{100}{17}$ см, $\frac{50}{17}$ см, 2) $\frac{250}{17}$ см, $\frac{400}{17}$ см, $\frac{200}{17}$ см. **484.** 1) 15 см; 2) 100 см. **485.** 1) $BC = 16$ мм, $CL = 24$ мм, $LF = 16$ мм, $DC = 50$ мм, $KL = 20$ мм; 2) $BC = 6$ см, $CL = 9$ см, $LF = 6$ см, $DC = 15$ см, $KL = 6$ см. **486.** 1) 3 см, 6 см; 2) 5,6 см, 8,4 см. **487.** 1) 12 см; 2) 12 см. **488.** 1) 15 см, 10 см; 2) 20 см, 4 см; 3) 21 см, 3 см. **489.** 1) 4 см, 8 см, 12 см; 2) 3,1 см, 6,2 см, 9,3 см. **490.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю периметрів подібних трикутників. **491.** 1) 7,5; 2) 4,5. **493.** $\frac{a}{a+b+c}$; $\frac{b}{a+b+c}$; $\frac{c}{a+b+c}$; $\frac{a+b}{a+b+c}$; $\frac{b+c}{a+b+c}$. **494.** 1) 21,6 см; 2) 36 см. **495.** *Вказівка:* скористайтеся узагальненою теоремою Фалеса. **496.** 1) *Вказівка:* спочатку доведіть, що $\triangle AOB \backsim \triangle DOC$; 2) 6,25 і 3,75. **497.** *Вказівка:* нехай AA_1 перетинає MN в точці O; доведіть, що $\triangle AMO \backsim \triangle ABA_1$ і $\triangle ANO \backsim \triangle ACA_1$. **498.** 1) Ні; 2) ні, лише для рівнобічної трапеції. **499.** 1) 8 см, 9 см; 2) $11\frac{1}{3}$ см, $12\frac{2}{3}$ см. **500.** 1) $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$, $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$. **501.** *Вказівка*: $\triangle AOB \backsim \triangle A_1OB_1$. **502.** 10 хв. **503.** 28 м. **504.** 36 м.

§ 12

507. Наприклад, трикутник з кутами 50°, 50°, 80° і трикутник з кутами 40°, 40°, 100°. **508.** Наприклад, трикутник з кутами 40°, 50°, 90° і трикутник з кутами 30°, 60°, 90°. **510.** 1) $\triangle LKM \backsim \triangle HOP$; 2) $\triangle MKL \backsim \triangle PHO$; 3) $\triangle LMK \backsim \triangle POH$. **511.** 1) Так; 2) так; 3) так. **512.** Тому що з рівності даних відношень не випливає рівність відповідних кутів трикутників. **513.** 1) $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, $AB = BC = AC = 2$ см, $\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = 60°$, $AB_1 = BC_1 = AC_1 = 6$ см; 2) $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, $AB = BC = AC = 4$ см, $\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = 60°$, $AB_1 = BC_1 = AC_1 = 2$ см; 3) $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, $AB = BC = AC = 9$ см, $\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = 60°$, $AB_1 = BC_1 = AC_1 = 3$ см. **514.** 1) 5 см, 7 см, 3 см і 15 см, 21 см, 9 см; 2) 6 см, 8 см, 4 см і 4,5 см, 6 см, 3 см; 3) 8 см, 10 см, 6 см і 16 см, 20 см, 12 см. **515.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою рівнобедреного трикутника і ознакою подібності трикутників за двома кутами. **516.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **517.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою подібності трикутників за двома кутами. **518.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою подібності трикутників за двома кутами. **519.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **520.** *Вказівка*: знайдіть гострі кути трикутників та скористайтеся ознакою подібності трикутників за двома кутами. **521.** $a : b$ або $b : a$. **522.** 1) $68\frac{4}{7}$ мм, $111\frac{3}{7}$ мм; 2) 1,5 дм, 0,9 дм; 3) $6\frac{9}{11}$ см, $18\frac{2}{11}$ см. **523.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою подібності трикутників за двома кутами. **524.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою подібності трикутників за двома кутами. **525.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралельності прямих та ознакою подібності трикутників за двома кутами. **526.** 10 см, 8 см. **527.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що медіани трикутника точкою їх перетину діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини, та розгляньте подібні трикутники, що утворилися. **528.** 1) 12 см; 2) 4 см. **529.** *Вказівка*: один із кутів, що утворює дана пряма з найбільшою стороною даного трикутника, має дорівнювати найбільшому його куту. **530.** 1) 4; 2) 3; 3) 2. **531.** 1) 4,2 см; 2) 6 см. **532.** *Вказівка*: див. задачу № 531. **533.** 1) ; 2) . **534.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою подібності трикутників за двома кутами. **535.** *Вказівка*: рівні висоти можуть не бути відповідними. **536.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою подібності трикутників за двома кутами. **537.** 8 см, 12 см. **538.** 1) 12 см, 36 см; 2) 18 см, 30 см. **539.** *Вказівка*: розгляньте дві пари подібних трикутників та почленно додайте отримані пропорції. **540.** 1) 20 см, 30 см; 2) 9 см, 18 см. **541.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою подібності трикутників за двома кутами. **542.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що медіани точкою їх перетину діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини, та розгляньте подібні трикутники, що утворилися. **543.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) 1; 3) $1\frac{1}{4}$. **544.** *Вказівка*: проведіть дві висоти та розгляньте два подібних трикутники, катетами яких є дані висоти. **545.** 1) 12 см, 24 см; 2) 30 см, 20 см. **546.** *Вказівка*: проведіть діаметр кола BD та скористайтеся властивістю вписаних кутів, що спираються на хорду BC. **547.** *Вказівка*: доведіть подібність спочатку трикутників AOM і NKM та BON і BKA, а потім трикутників BKA і MKN. **548.** *Вказівка*: доведіть подібність $\triangle ABC$ і, наприклад, $\triangle ALK$. **549.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що навколо чотирикутника $BDCM$ можна описати коло, а вписані кути BCD і BMD спираються на одну хорду. **550.** *Вказівка:* доведіть, що $\angle B$ не може бути тупим, та розгляньте внутрішні односторонні кути при паралельних прямих AB і CD та січній AC. **551.** 195 м. **552.** *Вказівка*: побудуйте подібний трикутник з відповідно паралельними сторонами до сторін даного трикутника. **553.** 189,65 м. **554.** *Вказівка*: на одному з трьох променів візьміть дві точки і проведіть з них перпендикуляри до двох інших променів, розгляньте дві пари подібних прямокутних трикутників, які при цьому утворилися.

§ 13

557. Наприклад, трикутник із сторонами 10 см, 16 см і кутом між ними 50°. **559.** Ні. **560.** 10 см, 12 см, 18 см. **562.** 1) $a = LM$, $b = LK$, $ka = HP$, $kb = HO$, $\triangle LMK \sim \triangle HPO$; 2) $a = MK$, $b = ML$, $ka = PO$, $kb = PH$, $\triangle MKL \sim \triangle POH$. **563.** 1 – 3. **564.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **565.** 1) $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 3$ см, $KL = 15$ см, $LM = 21$ см, $KM = 9$ см; 2) $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 4$ см, $KL = 4{,}5$ см, $LM = 6$ см, $KM = 3$ см; 3) $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 6$ см, $KL = 16$ см, $LM = 20$ см, $KM = 12$ см. **566.** Так. **567.** Перший і третій. **568.** 1) 144 см, 96 см, 48 см; 2) 40 см, $26\frac{2}{3}$ см, $13\frac{1}{3}$ см; 3) 56 см, $37\frac{1}{3}$ см, $18\frac{2}{3}$ см. **569.** 1) 6,4 мм, 10,4 мм, 38,4 мм, 62,4 мм; 2) 6 см, 10 см, 12 см, 20 см;

3) $2\frac{2}{3}$ см, $6\frac{2}{3}$ см, $6\frac{2}{3}$ м, $16\frac{2}{3}$ см. **570.** Перший і другий. **571.** 1) 21 см, 27 см, 36 см; 2) 119 см, 56 см, 105 см; 3) 30 см, 25 см, 45 см. **572.** 1) 24 см; 2) 27 см; 3) 128 см. **573.** 1) 36 мм; 2) 0,9 дм; 3) 16 см. **574.** *Вказівка*: перетворіть дану рівність добутків у пропорцію. **575.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними. **576.** Рівні медіани можуть не бути відповідними. **577.** 12. **578.** 1) 2 : 7; 2) 1 : 4. **579.** *Вказівка*: нехай O — точка перетину висот BH і CM; спочатку на стороні BC як на діаметрі побудуйте допоміжне коло та доведіть подібність трикутників BOC і MOH. **580.** 2. **581.** 1) 2 : 1; 2) 1 : 2. **582.** 5. **583.** 1) 1 : 3; 2) 1 : 2. **584.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **585.** *Вказівка*: скористайтеся способом, аналогічним способу доведення ознаки подібності трикутників за трьома сторонами. **586.** $\frac{ma}{1+m}$. **587.** 2 : 1. **588.** 60°, 120°. **589.** 1) $\frac{a+mb}{1+m}$; 2) $\frac{2ab}{a+b}$; 3) $\frac{2ab}{a-b}$. **590.** *Вказівка*: розгляньте три пари подібних трикутників. **591.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{3}{7}$. **592.** *Вказівка*: доведіть, що вказані чотири точки є вершинами чотирикутника, в якого суми протилежних кутів становлять по 180°. **593.** 3 : 2. **594.** 1 : 1. **595.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою подібності трикутників за двома кутами. **596.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою подібності трикутників за двома кутами. **597.** $\approx$ 14 м. **599.** *Вказівка*: у $\triangle AKB$ проведіть допоміжну середню лінію, паралельну AB, та розгляньте дві пари подібних трикутників, які при цьому утворилися.

§ 14

601. 1) 36; 6; 2) 25; 5; 3) 9; 3; 4) 16; 4. **604.** 1) 25, 20, 15, 12; 2) 169, 65, 156, 60; 3) 289, 136, 255, 120. **605.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **606.** *Вказівка*: проведіть висоту з вершини прямого кута та доведіть рівність трикутників, які утворилися. **607.** 1) 2; 2) 2; 3) 6. **608.** 1) 4 см; 2) 2 см; 3) 5 см; 4) 6 см. **609.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю вписаного кута, що спирається на діаметр. **610.** *Вказівка*: див. задачу 609. **612.** 1) 8 см, 12 см; 2) $5\frac{5}{13}$ см, $4\frac{8}{13}$ см; 3) 1,5 см, 2,5 см; 4) 3 см, 9 см. **613.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю бісектриси і властивістю медіани трикутника. **614.** *H*. **616.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю висоти, проведеної до гіпотенузи прямокутного трикутника. **617.** 1 : 3 або 3 : 1. **618.** 1 : 3. **619.** 30°, 60°, 90°. **621.** 1) 4,8; 2) 6,72. **622.** 1) 24 см; 2) 120 мм. **623.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними. **624.** *Вказівка*: див. задачу 624 (1). **625.** *Вказівка*: див. задачу 624 (2). **626.** *Вказівка*: див. задачу 624 (3). **627.** Два випадки. **632.** 1) *Вказівка*: скористайтеся тим, що центральні кути, які спираються на сторони трикутника, вдвічі більші за кути трикутника. **633.** Ні. **635.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про середні пропорційні у прямокутному трикутнику та наслідком з неї. **636.** *Вказівка*: через вершину тупого кута проведіть пряму, паралельну бічній стороні; розгляньте утворений прямокутний трикутник та скористайтеся властивістю висоти, проведеної до гіпотенузи. **637.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю бісектриси трикутника. **638.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю бісектриси трикутника. **639.** 1) $\frac{ab}{b+c}$, $\frac{ac}{b+c}$; 2) $\frac{ab}{b-c}$, $\frac{ac}{b-c}$, $b \neq c$. **640.** $\frac{a+b}{c}$. **641.** 0,5a. **642.** *Вказівка*: доведіть, що трикутник з вершинами у центрі середнього кола і точках дотику двох інших кіл до однієї зі сторін даного кута, є прямокутним. **643.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю вписаних кутів, що спираються на одну хорду. **649.** *Вказівка*: див. задачу 609. **650.** *Вказівка*: щоб побудувати точки, які не є кінцями двох перпендикулярних діаметрів, поділіть діаметр у відношенні 1 : 9 та скористайтеся властивістю висоти, проведеної до гіпотенузи прямокутного трикутника. **651.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю бісектриси трикутника. **654.** *Вказівка*: три точки — око, верхівка віхи і верхівка дерева мають лежати на одній прямій. Це можна зробити, якщо поставити віху і відійти від неї на таку відстань, щоб, дивлячись одночасно на верхівку віхи і верхівку дерева, вони суміщались.

Розділ 3

§ 15

657. 1) 14 см; 2) 20 см; 3) 18 см. **659.** 1) семикутник; 2) восьмикутник. **661.** 1) 5; 2) 5; 3) 5. **662.** 1) 540°; 2) 1260°; 3) 2700°. **663.** 1) 10; 2) 8; 3) 11. **664.** 1) 4; 2) 10; 3) 15. **665.** 1) 30°, 60°, 120°, 150°, 180°; 2) 80°, 100°, 110°, 110°, 140°; 3) 100°, 110°, 120°, 90°, 120°; 4) 20°, 100°, 140°, 180°, 100°. **666.** 1) 90°; 2) 36°; 3) 24°. **667.** Семикутник. **669.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **670.** 1) 35; 2) 119. **671.** 1) Ні; 2) ні. **672.** Ні. **673.** 1) 5; 2) 6. **674.** 1) 6 : 5 : 4 : 2 : 1; 2) 8 : 7 : 5 : 4 : 3. **675.** *Вказівка*: сума внутрішнього і зовнішнього кутів многокутника дорівнює 180°. **676.** $\frac{360^\circ}{n}$. **677.** 1) 6; 2) 9. **678.** 8,4 см або 40,4 см. **679.** *Вказівка*: скористайтеся нерівністю трикутника. **681.** 1) 3 і 6; 2) 6 і 3; 4 і 4. **683.** 1) 4; 2) 6; 3) 7. **684.** *Вказівка*: розгляньте трикутник, у якого сторона є стороною даного многокутника, а протилежна вершина лежить у центрі описаного кола. **685.** *Вказівка*: нехай O — центр кола; доведіть, що $\triangle BOD$ — прямокутний та скористайтеся теоремою про середні пропорційні у прямокутному трикутнику.

§ 16

686. 11 кв. од. (мал. 357); 12 кв. од. (мал. 358). **687.** 4 см^2 (мал. 359); 8 см^2 (мал. 360); 2 см^2 (мал. 361). **688.** 1) 7,5 см^2; 2) 5 см^2; 3) 22,5 см^2. **689.** 1) 4 см; 2) 3 см; 3) 11 см. **691.** 1) 96 см^2; 2) 160 см^2. **692.** 1) Збільшиться в 3 рази; 2) зменшиться в 4 рази; 3) збільшиться у 1,5 раза. **693.** 1) Збільшиться в 9 разів; 2) зменшиться в 16 разів;

3) збільшиться в 2,25 раза. **694.** 1) $b = 1{,}5$ см; $S = 6$ см^2; 2) $a = 0{,}5$ см; $P = 25$ см; 3) $a = 3{,}5$ см; $S = 24{,}5$ см^2; 4) $b = 0{,}5$ см; $P = 17$ см. **695.** 1) 20; 30; 2) 15; 40. **696.** 1) 2 см^2; 2) 4,5 см^2; 3) $\frac{25}{2}$ см^2. **697.** 1) 24 см, 26 см; 2) 24 см, 40 см; 3) 40 см, 50 см. Квадрат. **698.** $\frac{7a^2}{9}$ (мал. 364); $\frac{5a^2}{9}$ (мал. 365). **699.** 1) 81 см^2, 25 см^2; 2) 361 см^2, 256 см^2. **700.** 1) 56 см, 40 см; 2) 200 см, 176 см. **701.** $\sqrt{\frac{mS}{n}}$; $\sqrt{\frac{nS}{m}}$. **702.** $\frac{nP}{2(m+n)}$; $\frac{mP}{2(m+n)}$. **703.** 1) Площа прямокутника зі сторонами $b + a$ і c дорівнює сумі площ прямокутників зі сторонами a і c та b і c; 2) площа прямокутника зі сторонами $a - b$ і c дорівнює різниці площ прямокутників зі сторонами a і c та b і c. **704.** 1) 1 см; 2) 2 см. **705.** 25 см^2. **707.** 9 см^2, 1 см^2, 7 см^2, 7 см^2. **708.** Так. *Вказівка*: покажіть, що сума площ квадратів зі сторонами відповідно AB і BC дорівнює площі квадрата зі стороною AC без подвоєної площі прямокутника зі сторонами AB і BC. **709.** *Вказівка*: площа прямокутного трикутника дорівнює сумі площ прямокутних трикутників, на які його розбиває висота. **713.** 250 м^2. **714.** Так. **715.** 42,9 м^2.

§ 17

721. Так (мал. 373); ні (мал. 374); так (мал. 375). **722.** 45 кв. од. (мал. 376); 42 кв. од. (мал. 377). **723.** 24 кв. од. **724.** 1) 3000 см^2; 2) 1000 см^2; 3) 2500 см^2. **725.** 1) 80 см^2; 2) 300 см^2; 3) 30 см^2. **726.** 1) 4 см; 2) 5 см; 3) 3 см. **727.** 1) $h_a = 8{,}2$ см; $h_b = 4{,}1$ см; 2) $h_a = 4$ см; $h_b = 2$ см; 3) $h_a = 4{,}5$ см; $h_b = 3$ см; 4) $h_a = 4$ см; $h_b = 6{,}4$ см. **728.** 1) 8 см; 2) 5 см; 3) 4 см. **729.** 1) 4 см; 2) 12 мм; 3) 15 см. **730.** *Вказівка*: проведіть діагоналі паралелограма та прямі, що проходять через точку перетину діагоналей паралельно сторонам; покажіть, що площа кожного з восьми трикутників дорівнює $\frac{1}{8}$ площі даного паралелограма. **731.** Так. **732.** 1) 96 см^2; 2) 2,4 дм^2; 3) 840 мм^2. **733.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що діагоналі ромба перпендикулярні й точкою перетину діляться навпіл. **734.** 1) 100 см^2; 2) 120 см^2; 3) 72 см^2. **735.** 1) 8 см^2; 2) 4,5 см^2; 3) 0,72 м^2. **736.** 1) 75 см^2; 2) 250 см^2. **737.** 1) $75\sqrt{3}$ мм^2; 2) $250\sqrt{3}$ мм^2. **738.** 2) 3,38 см^2. **739.** 1) 8 см; 3 см; 2) $\frac{3}{2}$ дм; 6 дм. **740.** 1) 30 см; 2) 30 см. **741.** 1) 128 см^2; 2) 140 см^2. **742.** *Вказівка*: якщо від трикутників, що мають рівні площі, відрізати трикутники з рівними площами, то дістанемо фігури з рівними площами. **743.** 1) $3\sqrt{6}$ см; $4\sqrt{6}$ см; 2) $4\sqrt{3}$ см; $6\sqrt{3}$ см; 3) $6\sqrt{2}$ см; $6\sqrt{2}$ см. **744.** 4 см. **745.** 30°. **746.** 1 : 2. **747.** 48 см^2. **748.** *Вказівка*: спочатку покажіть, що діагональ ромба розбиває його на два рівносторонніх трикутники, а потім виразіть площу ромба і площу трикутника, утвореного висотами, через сторону і висоту ромба. **750.** *Вказівка*: трикутники AMD і CMD розбийте висотами, проведеними з вершини M, на прямокутні трикутники та покажіть, що сума їх площ дорівнює половині площі паралелограма. **751.** Діагональ дорівнює стороні, до якої ця діагональ перпендикулярна. **752.** 1) 24 см^2. **753.** Дві прямі, які паралельні даній стороні паралелограма і відстоять від неї на відстані $\frac{S}{h}$. **755.** 24 500 м^2. **757.** Площа прямокутника більша за площу паралелограма.

§ 18.

760. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) ні; 6) ні. **761.** 10 кв. од. (мал. 390); 42,5 кв. од. (мал. 391); 210 кв. од. (мал. 392). **762.** 1) 15 см^2; 2) 5 дм^2; 3) 1250 см^2. **763.** 1) 40 см^2; 2) 1,5 дм^2; 3) 108 мм^2. **764.** 1) 12 см; 2) 31 см; 3) 20 см. **765.** 1) $h_a = \frac{168}{13}$ см, $h_b = 12$ см, $h_c = \frac{168}{15}$ см; 2) $h_a = \frac{252}{13}$ см, $h_b = 12{,}6$ см, $h_c = 12$ см; 3) $h_a = 12$ см, $h_b = \frac{42}{15}$ см, $h_c = 2{,}1$ см; 4) $h_a = 8$ см, $h_b = 7{,}2$ см, $h_c = \frac{72}{17}$ см. **766.** 1) Не зміниться; 2) збільшиться в 2 рази; 3) збільшиться в 2 рази. **767.** *Вказівка*: порівняйте висоти та основи трикутників. **768.** Навпіл. **769.** 0,25. **770.** 1) 210 см^2; 2) 84 см^2; 3) 420 см^2. **771.** 1) $p = 42$ см, $S = 210$ см^2; 2) $p = 27$ см, $S = 126$ см^2; 3) $p = 21$ см, $S = 42$ см^2; 4) $p = 45$ см, $S = 240$ см^2. **772.** 1) 39 см^2; 2) 60 см^2. **773.** *Вказівка*: скористайтеся властивостями середньої лінії трикутника. **774.** 1) 18 см, 80 см; 2) 48 см, 55 см. **775.** 1) 39 см^2; 2) 34 см^2. **776.** 1) $8\sqrt{3}$ см^2; 2) $18\sqrt{3}$ см^2. **777.** 1) $16\sqrt{3}$ см^2; 2) $36\sqrt{3}$ см^2. **778.** 1) 24 см^2; 2) 120 см^2. **779.** $h_c < h_b < h_a$. **780.** *Вказівка*: виміряйте відповідні сторони трикутників. **781.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що медіани трикутника точкою їх перетину діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини. **782.** 1) $\frac{16}{3}$ см; 2) $\frac{16}{3}$ см; 3) $\frac{8}{3}$ см. **783.** *Вказівка*: спочатку з'єднайте дану точку з вершинами трикутника, потім знайдіть площу трикутника як суму площ отриманих трьох трикутників. **784.** Дві прямі, паралельні даній стороні трикутника і віддалені від неї на відстань, що дорівнює висоті, проведеної до цієї сторони. **785.** *Вказівка*: скористайтеся двома формулами площі трикутника. **786.** $\frac{S_{\Delta ABC}}{n}$. **787.** $7S$, де S — площа даного трикутника. **788.** $1 : \sqrt{2} - 1 : \sqrt{3} - \sqrt{2}$. **789.** $4 \cdot \sqrt{\frac{m}{m+n}}$. **792.** *Вказівка*: трикутники ABC і ACM мають рівні площі, тому площа трикутника ABC дорівнює половині добутку довжини відрізка AM на ширину лінійки. **795.** 0,927 кг.

§ 19.

797. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) так. **798.** 300 кв. од. (мал. 408); 150 кв. од. (мал. 409). **799.** 1) 2400 см^2; 2) 1400 см^2; 3) 4000 см^2. **800.** 1) 90 см^2. **801.** 1) 10 см; 2) 12 см; 3) 12 см. **802.** 1) 4 см; 2) 5 см; 3) 3 см. **803.** 1) $a = 12$ см, $S = 84$ см^2; 2) $b = 27$ см, $h = 5$ см; 3) $a = 20$ см, $a = 21$ см; 4) $a = 23$ см, $h = 11$ см. **804.** 1) Не зміниться; 2) не зміниться; 3) збільшиться в 2 рази. **805.** 1) 20 см, 16 см; 2) 36 см, 24 см; 3) 20 см, 10 см. **806.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **807.** 1) 645 см^2; 2) 180 см^2. **808.** 1) 10,5 см^2; 2) 8 см^2. **809.** 1) 6 см^2; 2) 13,5 см^2. **810.** 45°. **811.** 1) 5,6 см^2; 2) 96 см^2. **812.** Розгляньте два випадки. 8 см і 12 см або 2 см і 6 см. **813.** 12 см. **814.** *Вказівка*: якщо трапеція є описаною навколо кола, то сума її основ дорівнює сумі бічних сторін. **815.** $\frac{2S}{P}$. **816.** 10 см. **817.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю середньої лінії трапеції. **818.** Від 16 см до 32 см. **819.** $\frac{2ab}{a+b}$. **820.** *Вказівка*: доведіть, що площі трикутників BOC і COD та площі трикутників AOB і BOC відносяться, як $AB : CD$. **821.** $\left(\frac{m}{n}\right)^2 : 1 : \frac{m}{n} : \frac{m}{n}$. **822.** 90°. **823.** $\frac{4dc}{5}$. **824.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю медіани прямокутного трикутника, проведеної до його гіпотенузи. **825.** *Вказівка*: покажіть, що сума площ двох інших з утворених трикутників дорівнює половині площі трапеції. **826.** *Вказівка*: покажіть, що площа кожної такої трапеції дорівнює половині площі даного трикутника. **827.** 346 500 кв. од. **828.** *Вказівка*: розбийте чотирикутник на прямокутні трикутники та обчисліть їх площі. **829.** *Вказівка*: покажіть, що відстань від меншої бічної сторони трапеції до шуканої прямої дорівнює половині середньої лінії трапеції. **830.** Не вистачить.

Розділ IV

§ 20

831. 3). **832.** Так (мал. 425); ні (мал. 426). **834.** 3). **835.** 1) 13 см; 2) 15 м; 3) 16 см. **836.** 1) 5 см; 2) 8 м; 3) 12a. **837.** 1) $a = 12$ см; 2) $b = 16$ см; 3) $c = 10a$. **838.** 1) $d = 25$ см; 2) $b = 24$ см; 3) $b = 9a$. **839.** *Вказівка*: у даному прямокутнику проведіть діагональ та скористайтеся теоремою Піфагора в утвореному прямокутному трикутнику. **840.** 4 см. **841.** 1) $\sqrt{2}$ см; 2) 8 см; 3) $a\sqrt{2}$. **842.** 1) 1 см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$. **843.** 1) 1,5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **844.** 1) 24 см; 2) 15 см; 3) 12 см. **845.** 1) 15 см; 2) 20 см. **846.** 1) 5 см; 2) 15 см; 3) 10 см. **847.** *Вказівка*: застосуйте теорему Піфагора у прямокутному трикутнику з вершинами у двох сусідніх вершинах ромба і точці перетину його діагоналей. **848.** 1) 26 см; 2) 8 см; 3) 15 см. **849.** 17 см (мал. 429); $6\sqrt{2}$ см (мал. 430); 13 см (мал. 431). **850.** 1) 5 см, 12 см, 13 см; 2) 7 см, 24 см, 25 см. **851.** 1) 15 см, 20 см; 2) 12 см, 16 см. **852.** 1) 9 см, 12 см, 15 см; 2) 30 см, 16 см, 34 см. **853.** 1) 15 см, 18 см; 2) 16 см, 17 см. **854.** 1) 9 см, $3\sqrt{73} \approx 25{,}6$ см; 2) 24 см, $2\sqrt{193} \approx 27{,}8$ см. **855.** 1) 10 см; 2) $\sqrt{41} \approx 6{,}4$ см. **856.** *Вказівка*: розгляньте два прямокутних трикутники, одним із катетів яких є менша бічна сторона трапеції.

857. 8 см (мал. 432); 5 см (мал. 433); 14 см (мал. 434). **858.** 1) 20 см; 2) 13 см. **859.** 1) 10 см; 2) 25 см. **860.** 1) 4 см; 2) 6 см. **861.** 1) 8 см або 22 см; 2) 38 см або 88 см. **862.** 8 см. **865.** 1) 10 см; 2) $5\sqrt{2}$ см. **866.** 21 см або 11 см. **867.** 1) 6 см, 15 см; 2) 8 см. **868.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою рівності прямокутних трикутників за двома катетами. **869.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою Піфагора. **870.** 1) 120 см; 2) $34+8\sqrt{34}\approx 80{,}6$ см. **871.** 1) 61 см, 11 см; 2) 37 см, 12 см. **872.** 1) 37 см, $\sqrt{769}\approx 27{,}7$ см; 2) 20 см, $2\sqrt{205}\approx 28{,}6$ см. **873.** 1) 8 см, 9,6 см, 9,6 см; 2) 12 см, 5,6 см, 4,2 см. **874.** *Вказівка*: нехай $ABCD$ — даний паралелограм, O — точка перетину його діагоналей; проведіть перпендикуляри з вершин B і C до прямої AD; розгляньте прямокутні трикутники, що утворилися, та скористайтеся теоремою Піфагора. **875.** *Вказівка*: див. задачу 874. **876.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою Піфагора. **877.** *Вказівка*: у даному квадраті проведіть діагоналі; квадрати, побудовані на половинах цих діагоналей, — шукані. **878.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою Піфагора. **880.** 6 см. **881.** *Вказівка*: проведіть $BE \parallel CD$ та обґрунтуйте, що AE — діаметр і $CE = DB$. **883.** $\sqrt{241}\approx 15{,}5$ м. **884.** 328 м. **885.** 12,5 м. **886.** 1) 6,5 м; 2) 6,7 м. **887.** 12 футів.

§ 21

889. 1) б; 2) в; 3) б. **890.** 1) а; 2) б; 3) в. **893.** $\sin\alpha\approx 0{,}5$, $\cos\alpha\approx 0{,}9$, $\operatorname{tg}\alpha\approx 0{,}5$. **896.** 1) $\sin 35^\circ\approx 0{,}57$, $\cos 35^\circ\approx 0{,}82$, $\operatorname{tg} 35^\circ\approx 0{,}7$; 2) $\sin 40^\circ\approx 0{,}64$, $\cos 40^\circ\approx 0{,}77$, $\operatorname{tg} 40^\circ\approx 0{,}84$; 3) $\sin 75^\circ\approx 0{,}97$, $\cos 75^\circ\approx 0{,}26$, $\operatorname{tg} 75^\circ\approx 3{,}73$. **897.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **898.** 1) Так; 2) так; 3) так. **899.** 1) $\sin A = 0{,}8$; $\cos A = 0{,}6$; $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$; 2) $\sin B = 0{,}6$; $\cos B = 0{,}8$; $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$. **900.** 1) 0,96; 2) 0,96; 3) $\frac{24}{7}$. **901.** 1) $\sin A = 0{,}8$; $\cos A = 0{,}6$; 2) $\sin B = 0{,}6$; $\cos B = 0{,}8$. **902.** 1) *Вказівка*: нехай один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 3 см, тоді його гіпотенуза дорівнює 5 см; побудуйте прямокутний трикутник за таким катетом і гіпотенузою; кут, що лежить проти катета 3 см — шуканий. **903.** Див. задачу 902. **904.** Див. задачу 902. **906.** 1) 0,8; 0,6; $\frac{4}{3}$; 2) 0,6; 0,8; $\frac{3}{4}$. **907.** 1) 0,8; 0,6; 2) $\frac{15}{17}$, $\frac{8}{17}$. **908.** 0,96; 0,28; $\frac{24}{7}$. **909.** 1) 0,86; 2) 0,38; 3) 1,33. **911.** 10 см і 6 см. **912.** 1) 8 см і 10 см; 2) 15 см і 39 см; 3) 12 см і 16 см. **914.** 8 м.

§ 22

915. 2), 4), 5). **916.** 2). **917.** 3). **918.** 2). **919.** $c\cdot\cos\alpha$ (мал. 456); $c\cdot\sin\alpha$ (мал. 457); $b\cdot\operatorname{tg}\alpha$ (мал. 458); $\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$ (мал. 459); $\frac{a}{\sin\alpha}$ (мал. 460); $\frac{b}{\cos\alpha}$ (мал. 461). **921.** 1) 3 см; 2) 8 см; 3) 12 см. **922.** 1) 2 см; 2) 4 см; 3) 6 см. **923.** 1) 128 см; 2) 16 см; 3) 10 см. **924.** 1) 64 см; 2) 50 см; 3) 10 см. **925.** 1) 4,8 см; 2) 48 см; 3) 16,5 см.

926. 1) $BC = c \cdot \cos\beta$, $AC = c \cdot \sin\beta$; 2) $AB = \frac{a}{\sin\alpha}$, $AC = \frac{a}{\text{tg}\alpha}$; 3) $AB = \frac{b}{\sin\beta}$, $BC = \frac{b}{\text{tg}\beta}$.

927. $b \cdot \sin\alpha$. **928.** $l \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$. **929.** 1) $2b \cdot \cos\alpha$; 2) $b \cdot \sin\alpha$. **930.** 1) $\frac{h}{\sin\alpha}$; 2) $\frac{2h}{\text{tg}\,\alpha}$.

931. 1) $\frac{a}{2\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **932.** $\frac{a\text{tg}\alpha}{\sin\beta}$ і $\frac{a\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta}$ (мал. 462); $\frac{a\cos\beta}{\sin\alpha}$ і $\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ (мал. 463); $a \cdot \sin\alpha$ і $a \cdot \sin\alpha \cdot \text{tg}\,\alpha$ (мал. 464). **933.** $2m \cdot \cos\alpha$, $2m \cdot \sin\alpha$.

934. $\frac{b}{2\cos\alpha}$. **935.** 1) $\frac{2r}{tg\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{r}{\cos\alpha\, tg\frac{\alpha}{2}}$. **936.** $\frac{h\,tg\frac{\alpha}{2}}{tg\alpha}$. **937.** $\frac{a}{2\cos\alpha}$. **938.** 1) $\frac{a}{tg\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

939. $r\left(\frac{1}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\text{tg}\frac{\beta}{2}}\right)$, $r\left(\frac{1}{\text{tg}\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\text{tg}\frac{\gamma}{2}}\right)$, $r\left(\frac{1}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\text{tg}\frac{\gamma}{2}}\right)$. **940.** 1) $\frac{m}{\sin\alpha}$, $\frac{m}{\sin\beta}$; 2) $\frac{m(tg\alpha+tg\beta)}{tg\alpha\, tg\beta}$ або $\frac{m(tg\alpha-tg\beta)}{tg\alpha\, tg\beta}$. **941.** $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sin\beta}$. **943.** $\frac{btg\frac{\alpha}{2}}{1+tg\frac{\alpha}{2}}$. **944.** 1) $\frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; 2) $d\,tg\frac{\alpha}{2}$. **945.** $b + 2c \cdot \cos\alpha$.

946. $a - 2c \cdot \sin\alpha$. **947.** 1) $\frac{h}{\cos\alpha}$; 2) $b + 2h \cdot \text{tg}\,\alpha$. **948.** $\frac{b\,tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$, $\frac{b\,tg\alpha}{tg\alpha+tg\beta}$. **949.** *Вказівка:* скористайтеся формулою площі прямокутного трикутника і виразіть один із катетів за формулами 1 і 2 таблиці 33 (стор. 180). **951.** 1) $\text{tg}\,\alpha = 0{,}8$.

§ 23

952. 1) 60°; 2) 20°; 3) 5°. **954.** 1) 1; 2) 2; 3) 1. **957.** 1) $\sin\alpha$; 2) $2\sin\alpha$; 3) $\cos\alpha$. **958.** 2 см (мал. 471); 4 см (мал. 472); 10 см (мал. 473); 12 см (мал. 474); 10 см (мал. 475); 7 см (мал. 476). **959.** 1) 2 см; 2) 9 см; 3) 8 см. **960.** 1) 6 см; 2) 6 см; 3) 7 см. **961.** 1) 2 см; 2) 5 см; 3) 9 см. **962.** 1) 5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см. **963.** 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°. **964.** 1) 1; 2) 2; 3) 2,5; 4) 2. **967.** 1) 1; 2) $3\sin\alpha$; 3) $1 - \cos^2\alpha$. **968.** 4 см. **969.** 18 см. **970.** 1) $10\sqrt{3}$ см; 2) 5 см; 3) $5\sqrt{3}$ см. **971.** 1) 8 см і $8\sqrt{3}$ см; 2) $2\sqrt{2}$ см і $2\sqrt{2}$ см. **972.** $2\sqrt{3}$ см і 6 см (мал. 477); $3\sqrt{3}$ см і 9 см (мал. 478); 4 см і $2\sqrt{3}$ см (мал. 479). **973.** 4 см, $4\sqrt{3}$ см. **974.** 12 см і 12 см. **975.** 1) $12\sqrt{3}$ см і 24 см; 2) 12 см і $12\sqrt{3}$ см. **976.** $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **977.** 1) 4 см; 2) $4\sqrt{3}$ см. **978.** $\sqrt{2}$. **979.** 1) $5\sqrt{2}$ см і 10 см; 2) 5 см і $5\sqrt{3}$ см. **980.** 1) по $5\sqrt{3}$ см; 2) по 3 см. **981.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 6; 3) 2. **983.** 1) $1 + \sqrt{3}$ см і $3 + \sqrt{3}$ см; 2) $2 + \sqrt{2}$ см і $2 + \sqrt{2}$ см. **984.** $\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} \approx 0{,}9$ см, $\sqrt{3} - 1 \approx 0{,}73$ см. **985.** $2R + \frac{4R\sqrt{3}}{3}$ і $2\sqrt{3}R + 4R$. **986.** 1) 4 см; 2) $2\sqrt{3}$ см; 3) $2\sqrt{19}$ см. **987.** $96\sqrt{3}$ см². **988.** 24 см і 56 см. **989.** 40 см і 40 см. **990.** 24 см і 36 см. **991.** 10 см і 24 см. **992.** $60 + \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 71{,}5$ м. **993.** 100 м.

§ 24

995. ≈ 51°19′ і ≈ 38°41′ (мал. 492); ≈ 53°8′ і ≈ 36°52′ (мал. 493). **996.** 1) ≈ 4,1; 2) ≈ 10,67; 3) ≈ 4,69. **997.** 1) ≈ 11,52 і ≈ 14,62; 2) ≈ 13,76 і ≈ 17,01. **998.** 1) ≈ 5,92; 2) ≈ 12,69. **999.** 1) ≈ 48°35′; 2) ≈ 53°8′; 3) ≈ 63°26′. **1000.** 1) ≈ 45°34′; 2) ≈ 44°26′. **1001.** ≈ 78°28′, ≈ 11°32′. **1002.** 1) ≈ 36°52′; 2) ≈ 41°59′; 3) ≈ 26°34′. **1003.** 1) ≈ 73°44′; 2) ≈ 83°58′; 3) 90°. **1004.** 1) а) $c = 29$, $\alpha \approx 43°36'$, $\beta \approx 46°24'$; б) $c = 15$, $\alpha \approx 36°52'$, $\beta \approx 53°8'$; в) $c = 30$, $\alpha \approx 53°8'$, $\beta \approx 36°52'$; г) $c \approx 46{,}56$; $\alpha \approx 30°19'$; $\beta \approx 59°41'$; 2) а) $b = 8$, $\alpha \approx 61°56'$, $\beta \approx 28°4'$; б) $b = 12$, $\alpha \approx 53°8'$, $\beta \approx 36°52'$; в) $b = 33$, $\alpha \approx 59°29'$, $\beta \approx 30°31'$; г) $a \approx 0{,}68$; $\alpha \approx 13°25'$; $\beta \approx 76°35'$; 3) а) $a \approx 7{,}52$; $b \approx 2{,}74$; $\angle B = 20°$; б) $a \approx 54{,}87$; $b \approx 60{,}94$; $\angle B = 48°$; в) $a \approx 9{,}73$; $b \approx 15{,}38$; $\angle B = 57°40'$; г) $a \approx 4{,}24$; $b \approx 1{,}94$; $\angle B = 24°45'$; 4) а) $b \approx 7{,}5$, $c \approx 14{,}15$, $\angle B = 58°$; б) $b \approx 5{,}5$, $c \approx 18{,}82$, $\angle B = 73°$; в) $b \approx 16{,}12$, $c \approx 20{,}1$, $\angle B = 36°40'$; г) $b \approx 1{,}31$, $c \approx 3{,}94$, $\angle B = 70°30'$. **1005.** ≈ 14,8 см і ≈ 20,15 см. **1006.** 1) ≈ 6,21 см; 2) ≈ 11,59 см. **1007.** 1) ≈ 6,71 см; 2) ≈ 8,19 см. **1008.** 1) ≈ 23,04 см; 2) ≈ 65°42′. **1009.** 1) ≈ 41,21 см; 2) ≈ 46,26 см; 3) ≈ 36,72 см і ≈ 9,54 см. **1010.** 1) ≈ 17,15 см і ≈ 36,88 см; 2) ≈ 8,31 см і ≈ 33,69 см. **1011.** ≈ 21,07 см^2. **1012.** ≈ 2,94 см і ≈ 4,70 см. **1013.** ≈ 31,75 см і ≈ 125,03 см. **1014.** ≈ 15,21 см і ≈ 35,83 см. **1015.** ≈ 119,14 см. **1016.** ≈ 130,03 см^2. **1017.** ≈ 3,4 см. **1018.** ≈ 123,3 см. **1019.** ≈ 60°57′. **1020.** ≈ 0°57′. **1021.** 1) ≈ 0,118 км; 2) ≈ 0,433 км. **1022.** ≈ 2239 м. **1023.** ≈ 79,5 м. **1024.** ≈ 130 м. **1025.** ≈ 71,76 м. **1026.** ≈ 1°26′. **1027.** ≈ 1°17′. **1028.** ≈ 403 м. **1029.** ≈ 2149 м. **1030.** ≈ 129,1 м.

Повторення вивченого

1031. 1) *Вказівка*: скористайтеся ознакою рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними. **1032.** *Вказівка*: пряма *EF* ділить паралелограм на два рівних паралелограми. **1033.** 7 см. **1034.** Паралелограм; $P = 2(d_1 + d_2)$. **1035.** 3 : 5. **1036.** Паралелограм, кути якого дорівнюють кутам даного паралелограма. **1037.** *Вказівка*: побудуйте кут α і відкладіть на його сторонах відрізки h_1 і h_2; проведіть через основи висот перпендикулярні до них прямі, а через вершину кута α — прямі, паралельні проведеним прямим. **1038.** 72 см. **1039.** 17 см і 19 см. **1040.** 72°. **1041.** $\frac{a}{2}$. **1042.** *Вказівка*: якщо з вершини тупого кута ромба провести дві висоти, то утворені прямокутні трикутники є рівними за гіпотенузою і гострим кутом. **1043.** 30°. **1044.** *Вказівка*: під час обчислення суми довжин сторін обох трикутників діагональ враховується два рази, тому її довжина — 15 : 2 = 7,5 (см). **1045.** *Вказівка*: спочатку побудуйте прямокутний трикутник за катетом *h* і гіпотенузою $\frac{p}{2}$. **1046.** *Вказівка*: спочатку побудуйте рівнобедрений трикутник за основою *d* і кутом при основі, що дорівнює $\frac{\alpha}{2}$. **1047.** 5 см. **1049.** 60°, 60°, 120°, 120°. **1053.** 1 : 1 : 1,62. **1054.** 5. **1056.** Так. **1057.** *Вказівка*: сторона квадрата повинна дорівнювати меншій стороні прямокутника. **1058**. Подібних трикутників або 3, або 2, або 1. **1059**. Так. **1060**. Так, якщо даний трикутник — рівносторонній. *Вказівка*: виразіть кути побудованого трикутника через кути даного трикутника. **1061**. 72 см^2. **1062**. Так. **1063**. *Вказівка*: на діагоналі BD чотирикутника $ABCD$ візьміть точку K так, щоб $\angle BAC = \angle KAD$, та розгляньте утворені подібні трикутники. **1064**. 8 см. **1065**. 9,6 см.

1066. б) $CO^2 = a \cdot b - AO \cdot OB$, де CO — бісектриса $\triangle ABC$. **1067**. $\frac{12\sqrt{2}}{7}$ см. **1068**. *Вказівка*: скористайтеся властивістю висоти, проведеної до гіпотенузи прямокутного трикутника. **1069**. *Вказівка*: побудуйте допоміжний трикутник за двома кутами α і β; визначте периметр утвореного трикутника та коефіцієнт його подібності з даним трикутником; використайте отриманий коефіцієнт подібності для побудови шуканого трикутника. **1070**. *Вказівка*: спочатку проведіть висоту до більшої сторони трикутника, потім з подібності трикутників виразіть сторону квадрата. **1072**. 105°, 120°, 135°, 105°, 120°, 135°. **1073**. 480 см^2. **1074**. 90 см^2. **1075**. 12 см^2. **1076**. 3 см. **1077**. $\frac{169}{18}$ см. **1078**. 4 см, 24 см. **1079**. Так. **1081**. 0,53; 0,84. **1082**. 1) 0,8; 2) $\frac{8}{17}$. **1083**. 1) $\sin\alpha = 0,28$, $\cos\alpha = 0,96$, 2) $\sin\alpha = \frac{11}{61}$, $\cos\alpha = \frac{60}{61}$; 3) $\sin\alpha = \frac{20}{29}$, $\cos\alpha = \frac{21}{29}$. **1084**. 0,28. **1085**. $2R\sin\frac{n^\circ}{2}$. **1086**. 1) $a \approx 8,64$, $b \approx 10,4$, $\angle B = 50°$; 2) $a \approx 0,21$, $b \approx 0,13$, $\angle A = 58°$; 3) $b \approx 20,04$, $c \approx 45,87$, $\angle B = 23°$; 4) $b \approx 13,54$, $c \approx 16,95$, $\angle A = 37°$; 5) $b \approx 10,54$, $\angle A \approx 58°13'$, $\angle B \approx 31°47'$; 6) $a \approx 96$, $c \approx 120,96$, $\angle B = 38°$; 7) $c \approx 18,46$, $\angle A \approx 43°27'$, $\angle B \approx 46°32'$; 8) $a \approx 8,94$, $\angle A \approx 47°56'$, $\angle B = 42°4'$. **1087**. 85,82 см. **1088**. 29°, 61°. **1089**. 26,4 см і 33 см. **1090**. 73°44'.

Додаток 1

Таблиця синусів і косинусів

α	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\cos\alpha$ $\sin\beta$	β
0°	0,000	1,000	90°
1°	0,017	1,000	89°
2°	0,035	0,999	88°
3°	0,052	0,999	87°
4°	0,070	0,998	86°
5°	0,087	0,996	85°
6°	0,105	0,995	84°
7°	0,122	0,993	83°
8°	0,139	0,990	82°
9°	0,156	0,988	81°
10°	0,174	0,985	80°
11°	0,191	0,982	79°
12°	0,208	0,978	78°
13°	0,225	0,974	77°
14°	0,242	0,970	76°
15°	0,259	0,966	75°
16°	0,276	0,961	74°
17°	0,292	0,956	73°
18°	0,309	0,951	72°
19°	0,326	0,946	71°
20°	0,342	0,940	70°
21°	0,358	0,934	69°
22°	0,375	0,927	68°
23°	0,391	0,921	67°
24°	0,407	0,914	66°
25°	0,423	0,906	65°
26°	0,438	0,899	64°
27°	0,454	0,891	63°
28°	0,469	0,883	62°
29°	0,485	0,875	61°
30°	0,500	0,866	60°
31°	0,515	0,857	59°
32°	0,530	0,848	58°
33°	0,545	0,839	57°
34°	0,559	0,829	56°
35°	0,574	0,819	55°
36°	0,588	0,809	54°
37°	0,602	0,799	53°
38°	0,616	0,788	52°
39°	0,629	0,777	51°
40°	0,643	0,766	50°
41°	0,656	0,755	49°
42°	0,669	0,743	48°
43°	0,682	0,731	47°
44°	0,695	0,719	46°
45°	0,707	0,707	45°

Додаток 2

Таблиця тангенсів

α	tg α	α	tg α	α	tg α	α	tg α	α	tg α
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,062	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	57°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	52°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

Додаток 3

Таблиця квадратів натуральних чисел від 10 до 99

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Навчальне видання

БУРДА Михайло Іванович,
ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Редактори: *В. Кириченко, О. Попович*
Художній редактор *А. Віксенко*. Технічний редактор *Л. Аленіна*. Коректор *О. Степаню*
Комп'ютерне макетування, дизайн та підготовка до друку *Е. Авраменко*

Малюнки художників *Е. Авраменка, О. Дядика*

Фото: *Е. Авраменко, А. Віксенко, Е. Золотарьова, О. Гордієвич*

При оформленні обкладинки використано фотоілюстрації з видань: Образотворче мистецтво. – 2(58), 2006; Донбасс. Первый среди равных. – Донецк: ООО «Кардинал»; Донбасс. Взгляд в будущее. – Донецк, 1999; Київський альбом. – ТОВ «Видавничий дім "Перископ"»; Київ у барвах осені. – К.: Мистецтво, 1992.

Підписано до друку 13.05.2008. Формат 70×100 1/16.
Папір офсет. Гарнітура Шкільна. Друк офсет. Умов. друк. арк. 19,5 + 0,33 форзац.
Обл.-вид. арк. 19,8 + 0,4 форзац. Наклад 137 600 пр. Зам. 34/05

Видавництво «Зодіак-ЕКО»
01004, Київ-4, вул. Басейна, 1/2
Свідоцтво про державну реєстрацію серія ДК № 155 від 22.08.2000 р.

Видруковано ТОВ «Торнадо»
61045, м. Харків, вул. Отара Яроша, 18

Відомості про стан підручника

№	Прізвище та ім'я учня	Навчальний рік	Стан підручника		Оцінка
			на початку року	наприкінці року	
1					
2					
3					
4					
5					

Бурда, М.І.
Б 91 Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова. – К. : Зодіак–ЕКО, 2008. – 240 с. : іл.

ISBN 978-966-7090-59-3.

ББК 22.151я721