Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова.

ГЕОМЕТРІЯ

8 клас

ББК 22.151я72
Б 36

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ від 19 березня 2008 р. № 205)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено.

Бевз Г. П. та ін.

Б 36 **Геометрія**: Підручник для 8 кл. середніх загальноосвітніх закладів/ Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К.: Вежа, 2008. — 256 с.: іл.

ISBN 978-966-7091-72-9.

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 8 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Редактори *А. О. Литвиненко, С. А. Попадюк*
Художнє оформлення *А. О. Литвиненко, Д. Г. Чапко*
Художник обкладинки *О. В. Коваль*
Комп'ютерна верстка *А. О. Литвиненко*
Коректор *Г. В. Брезницька*

ISBN 978-966-7091-72-9

Шановні восьмикласники!

У сьомому класі ви почали вивчати систематичний курс геометрії, у восьмому класі продовжите її вивчення. І в цьому вам допоможе підручник.

У кожному параграфі підручника є теорія і задачі. Читаючи теорію, основну увагу звертайте на слова, надруковані *курсивом* і **жирним шрифтом.**

Курсивом виділено геометричні терміни, назви понять. Потрібно вміти пояснювати їх зміст, наводити відповідні приклади. **Жирним шрифтом** надруковано важливі геометричні твердження, зокрема теореми. Їх треба розуміти, вміти доводити і застосовувати для розв'язування задач. Закінчення доведення теореми позначено значком □.

У кожному параграфі підручника виокремлено рубрику «Для допитливих». Вона містить додатковий пізнавальний матеріал і допоможе вам зацікавитися геометрією.

Щоб перевірити, як ви зрозуміли і запам'ятали новий теоретичний матеріал, спробуйте відповісти на запитання і виконати завдання з рубрики «Запитання і завдання для самоконтролю», яка є в кожному параграфі.

Щоб опанувати курс геометрії, треба навчитися розв'язувати задачі. Ознайомитися з різними способами розв'язування задач допоможе рубрика «Виконаємо разом». Радимо розглянути задачі цієї рубрики, перш ніж виконувати домашнє завдання. Номери задач, рекомендовані для домашньої роботи, виділено значком .

Задачі і вправи в підручнику поділено на чотири групи: «Виконайте усно», група А, група Б і «Задачі для повторення». У деяких задачах виділено жирним шрифтом важливі твердження, їх корисно запам'ятати.

Для узагальнення і систематизації вивченого матеріалу уважно прочитайте «Головне в розділі».

Добре підготуватися до тематичного оцінювання ви можете, розв'язуючи задачі та виконуючи завдання з рубрик «Самостійна робота», «Тестові завдання» і «Типові задачі для контрольної роботи».

У розділах є задачі за готовими малюнками (як на с. 30). Умови таких задач задано малюнками і короткими записами над горизонтальними рисками. Під рисками вказано величини, значення яких треба знайти. Найпростіші з цих задач можна розв'язувати усно.

Наприкінці підручника вміщено окрему добірку «Задачі підвищеної складності». Їх пропонуємо тим кмітливим учням, які люблять математику.

Бажаємо успіхів!

Автори

Розділ 1 ЧОТИРИКУТНИКИ

Чотирикутники — найпоширеніші многокутники в нашому довкіллі. Стіни, стеля, підлога, двері, вікна, шибки, поверхня стола, обкладинки книжки і зошита, грані бруска, дошки, цеглини, як правило, мають чотирикутну форму.

У цьому розділі ви ознайомитеся з найважливішими властивостями чотирикутників, зокрема паралелограмів, прямокутників, ромбів, квадратів і трапецій, а також із властивостями чотирикутників, вписаних у коло і описаних навколо нього.

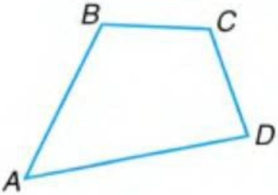
- ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧОТИРИКУТНИКІВ
- ПАРАЛЕЛОГРАМИ
- ПРЯМОКУТНИК, РОМБ І КВАДРАТ
- ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПАРАЛЕЛОГРАМА
- ТРАПЕЦІЯ
- ЦЕНТРАЛЬНІ І ВПИСАНІ КУТИ
- ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ

Серед рівних розумом — за однакових інших умов — переважає той, хто знає геометрію.

Б. Паскаль

§1 Загальні властивості чотирикутників

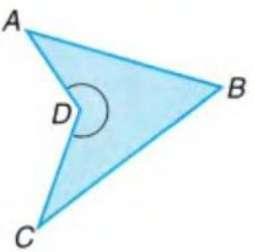
Нехай дано чотири точки A, B, C, D, з яких ніякі три не лежать на одній прямій. Якщо їх сполучити послідовно відрізками, що не перетинаються, утвориться ***чотирикутник*** (мал. 1). Він поділяє площину на дві області: внутрішню і зовнішню. Фігуру, що складається з чотирикутника і його внутрішньої області, також називають чотирикутником. Точки A, B, C, D — *вершини* чотирикутника $ABCD$; відрізки AB, BC, CD, DA — його *сторони*. *Кутами* чотирикутника $ABCD$ називають кути ABC, BCD, CDA, DAB.



Мал. 1

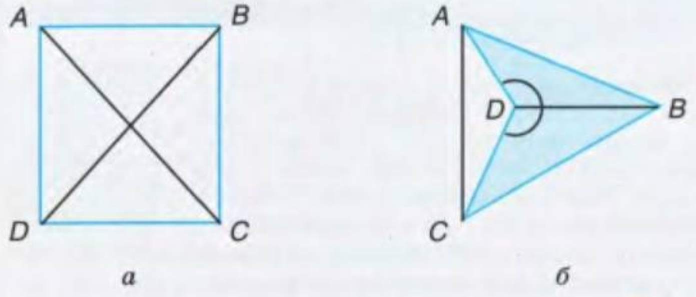
Вершини чотирикутника, що є кінцями однієї його сторони, називають *сусідніми*. Несусідні *вершини* називають *протилежними*. *Сторони* чотирикутника називають *протилежними*, якщо вони не мають спільних точок. *Кути* чотирикутника називають *протилежними*, якщо їх вершини — протилежні вершини чотирикутника. У чотирикутнику $ABCD$ протилежні вершини A і C, B і D, протилежні сторони AB і CD, BC і AD, протилежні кути ABC і ADC, BAD і BCD.

Один із кутів чотирикутника може бути більшим від розгорнутого. Наприклад, кут D чотирикутника $ABCD$ більший за $180°$ (мал. 2). Такий чотирикутник неопуклий. Якщо кожний із кутів чотирикутника менший від розгорнутого, його називають *опуклим чотирикутником* (див. мал. 1).



Мал. 2

Відрізок, що сполучає дві протилежні вершини чотирикутника, називається його *діагоналлю*. Кожний чотирикутник має дві діагоналі. Діагоналі опуклого чотирикутника перетинаються (мал. 3, *а*). (Подумайте, чи перетинаються діагоналі неопуклого чотирикутника на малюнку 3, *б*.)



Мал. 3

Мал. 4

На відміну від трикутника, чотирикутник без внутрішньої області — фігура не жорстка (мал. 4). Чотири сторони не задають однозначно чотирикутник.

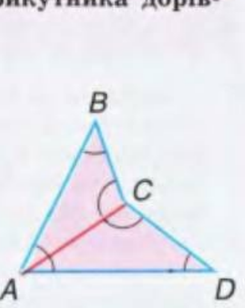
Суму довжин усіх сторін чотирикутника називають його *периметром*.

! ТЕОРЕМА 1 **Сума кутів кожного чотирикутника дорівнює 360°.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано чотирикутник $ABCD$ (мал. 5). Одна з його діагоналей розбиває його на два трикутники. Сума кутів чотирикутника дорівнює сумі всіх кутів обох трикутників. Отже,

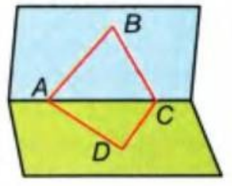
$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ. \square$$



Мал. 5

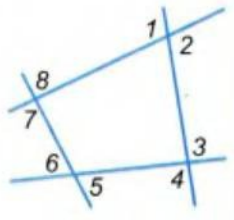
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Чотирикутники, про які йшлося досі, називають ще *плоскими чотирикутниками*. Крім них, існують також неплоскі (просторові) чотирикутники, не всі точки яких лежать в одній площині. Уявіть, що відрізки AB і BC лежать в одній площині, а CD і DA — в іншій (мал. 6). Замкнуту ламану $ABCDA$ також називають чотирикутником, але неплоским. Неплоскі чотирикутники істотно відрізняються від плоских. Наприклад, сума кутів неплоского чотирикутника не дорівнює 360°. З деякими властивостями неплоских чотирикутників ви ознайомитеся в старших класах. Далі ж, говорячи про чотирикутники, матимемо на увазі тільки плоскі чотирикутникики.



Мал. 6

Як ви вже знаєте, крім кутів (внутрішніх) трикутника, розглядають ще його зовнішні кути. Подібно до цього розглядають і зовнішні кути опуклих чотирикутників. Їх можна утворити, продовживши кожну сторону такого чотирикутника в обидва боки. На малюнку 7 цифрами позначено 8 попарно рівних зовнішніх кутів чотирикутника $ABCD$. Якщо чотирикутник не опуклий, то при вершині найбільшого його кута поняття зовнішнього кута визначити важко, тому далі розглядатимемо зовнішні кути тільки опуклих чотирикутників.



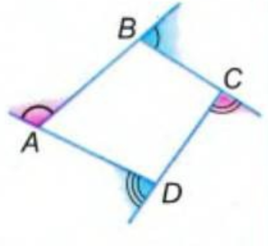
Мал. 7

! **ТЕОРЕМА 2** **Сума зовнішніх кутів опуклого чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.**

ДОВЕДЕННЯ.

Додавши до кожного зовнішнього кута чотирикутника суміжний із ним внутрішній кут, дістанемо 4 пари суміжних кутів, загальна сума яких дорівнює $4 \cdot 180°$ (мал. 8). Якщо від цієї суми відняти 360° — суму внутрішніх кутів чотирикутника, буде 360°.

Спробуйте узагальнити цю теорему для довільних опуклих n-кутників.



Мал. 8

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке чотирикутник?
2. Які вершини чотирикутника називаються сусідніми? Які — протилежними?
3. Чому дорівнює сума кутів чотирикутника?
4. Який чотирикутник називається опуклим? Який — неопуклим?
5. Що таке діагональ чотирикутника?
6. Скільки діагоналей має чотирикутник?
7. Поміркуйте, чи в кожному чотирикутнику діагоналі перетинаються.

Виконаємо разом

1 Знайдіть міри кутів чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 2, 3 і 5.

За такої умови можна вважати, що шукані міри кутів дорівнюють $2x$, $2x$, $3x$ і $5x$, де x — деяке число. Сума всіх кутів чотирикутника дорівнює 360, тому

$$2x + 2x + 3x + 5x = 360,\ 12x = 360,\ x = 30.$$

$$2 \cdot 30^\circ = 60^\circ,\ 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ,\ 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ.$$

Відповідь. 60°, 60°, 90° і 150°.

2 Чи існує чотирикутник, три сторони якого дорівнюють 2 см, 3 см, 5 см, а периметр 2 дм?

2 дм = 20 см. Якщо такий чотирикутник існує, то його четверта сторона завдовжки $20 - (2 + 3 + 5) = 10$ см. Виходить, четверта сторона чотирикутника дорівнює сумі трьох інших. Цього не може бути.

Відповідь. Не існує.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

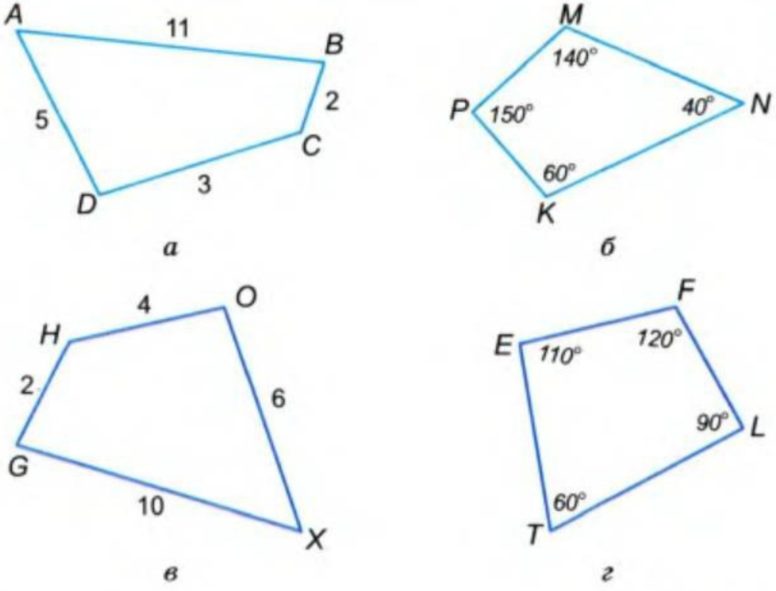
ВИКОНАЙТЕ УСНО

1. Три кути чотирикутника дорівнюють 50°, 60° і 100°. Знайдіть міру четвертого кута.

2. Сума двох протилежних кутів чотирикутника дорівнює 200°. Знайдіть суму двох інших його кутів.
3. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо кожна з них менша за його периметр на 6 см.
4. Периметр чотирикутника дорівнює 20 м. Як він зміниться, якщо кожну сторону збільшити на 1 м?
5. Периметр чотирикутника дорівнює 10 дм. Як він зміниться, якщо кожну сторону збільшити втричі?
6. Чи існує чотирикутник, який має три кути по 120°?
7. Чи існує чотирикутник, який має три тупі кути?

А

8. Накресліть чотирикутник $ABCK$. Назвіть його протилежні сторони, протилежні вершини, протилежні кути.
9. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 38 см, а сторони пропорційні числам 2, 3, 5 і 9.
10. Одна зі сторін чотирикутника удвічі більша за кожну з інших сторін. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 20 см.
11. Знайдіть довжини сторін чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 21 см, а одна зі сторін удвічі коротша від кожної з інших.
12. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам: а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 2, 13.
13. Кути чотирикутника, взяті послідовно, пропорційні числам 3, 4, 5 і 6. Чи має цей чотирикутник паралельні сторони?
14. Чи існує чотирикутник зі сторонами 3 см, 5 см, 8 см і 16 см?
15. Доведіть, що **довжина будь-якої сторони чотирикутника менша від суми довжин трьох інших його сторін**.
16. Побудуйте чотирикутник за даними сторонами 4 см, 4 см, 3 см, 2 см і кутом 60° між рівними сторонами. Скільки розв'язків має задача?
17. Чи існують чотирикутники з такими даними, як на малюнку 9? Якщо ні, то як змінити сторони і кути, щоб чотирикутник існував?
18. Знайдіть довжину діагоналі чотирикутника, якщо його периметр дорівнює c, а периметри трикутників, на які ця діагональ ділить даний чотирикутник, дорівнюють a і b.



Мал. 9

19. Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$, якщо $AB = BC = CD = DA = CA = a$.

20. Усі сторони чотирикутника рівні. Доведіть, що його протилежні кути рівні.

21. Чи можуть усі кути чотирикутника бути гострими?

22. Три кути чотирикутника прямі. Доведіть, що і четвертий його кут прямий.

Б

23. Яку найбільшу кількість гострих кутів може мати опуклий чотирикутник?

24. Зовнішні кути опуклого чотирикутника пропорційні числам 7, 8, 9 і 12. Знайдіть міри його внутрішніх кутів.

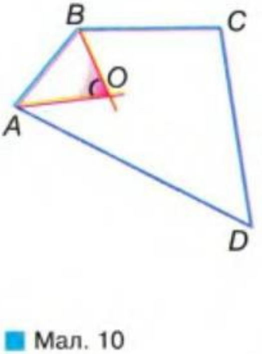
25. Скільки різних чотирикутників можна побудувати за даними сторонами: 5 см, 7 см, 9 см і 11 см? Побудуйте два з них.

26. У чотирикутнику $ABCD$ сторона BC на 1 см, а сторона AD на 6 см більші за AB. Знайдіть периметр чотирикутника, якщо довжина сторони CD є середнім арифметичним сторін AB та AD і $CD = 5$ см.

27. Одна зі сторін чотирикутника дорівнює середньому арифметичному трьох інших сторін, які пропорційні числам 2, 3 і 6. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 44 см. Доведіть, що такий чотирикутник існує.

28. У чотирикутнику $ABCD$ $BC \parallel AD$, $\angle A = 50°$, $\angle ADB = 70°$, $\angle BDC = 60°$. Доведіть, що $BC = AD$ і $AB = CD$.

29. Доведіть, що сума діагоналей опуклого чотирикутника менша за периметр цього чотирикутника.



Мал. 10

30. Доведіть, що коли бісектриси кутів A і B чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O (мал. 10), то кут AOB дорівнює півсумі кутів C і D.

Практичне завдання

31. Виріжте з паперу довільний чотирикутник, виміряйте транспортиром його кути і знайдіть їх суму. Наскільки вона відрізняється від 360°?

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

32. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = BO$, $CO = DO$. Доведіть, що $AC = BD$ і $AC \parallel BD$.

33. Знайдіть кути трикутника, якщо один з них на 20° більший за другий і вдвічі менший за третій.

34. Знайдіть міри внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих та січній, якщо вони пропорційні числам 2 і 3.

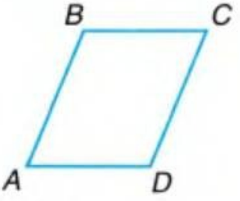
35. Трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC (точки B і D лежать по один бік від прямої AC). Доведіть, що $AD = BC$, якщо $AB = DC$ і $\angle BAC = \angle ACD$.

36. Розв'яжіть попередню задачу за умови, що точки B і D лежать по різні боки від прямої AC. Доведіть, що $AD \parallel BC$.

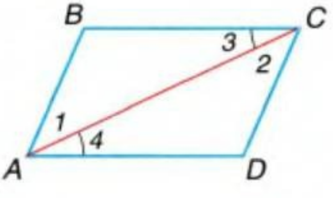
§2 Паралелограми

Чотирикутник, у якого кожна сторона паралельна протилежній стороні, називається ***паралелограмом*** (мал. 11).

ТЕОРЕМА 3 (ознаки паралелограма). **Якщо в чотирикутнику: 1) кожна сторона дорівнює протилежній стороні,** або **2) дві протилежні сторони рівні і паралельні,** або **3) діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник — паралелограм.**



Мал. 11



Мал. 12

ДОВЕДЕННЯ.

1) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $BC = AD$ (мал. 12). Діагональ AC розбиває його на два рівні трикутники ABC і CDA (за трьома сторонами). Тому $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. З рівності кутів 1 і 2 випливає, що $AB \parallel CD$, а з рівності кутів 3 і 4, що $CB \parallel AD$. Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

2) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $AB \parallel CD$ (див. мал. 12). Оскільки $AB \parallel CD$, то $\angle 2 = \angle 1$ як різносторонні внутрішні кути. Тоді $\triangle ABC = \triangle CDA$ (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $\angle 3 = \angle 4$, $AD \parallel CB$. Згідно з умовою $AB \parallel CD$. Тому чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

3) Якщо діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O і $OA = OC$, $OB = OD$ (мал. 13), то $\triangle OAB = \triangle OCD$ і $\triangle OBC = \triangle ODA$ (за двома сторонами і кутом між ними). Тому $AB = CD$ і $AD = CB$. Згідно з доведеною ознакою 1 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. □

Мал. 13

Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо виконується одна з таких умов:

1) $AB \parallel CD$ і $BC \parallel AD$ (означення);
2) $AB = CD$ і $BC = AD$ (ознака 1);
3) $AB = CD$ і $AB \parallel CD$ (ознака 2);
4) $AO = OC$ і $BO = OD$ (ознака 3).

А які властивості має паралелограм?

! У паралелограмі:

- **протилежні сторони рівні;**
- **протилежні кути рівні;**
- **діагоналі, перетинаючись, діляться навпіл;**
- **сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°.**

Доведемо перші дві властивості.

! ТЕОРЕМА 4 Протилежні сторони паралелограма рівні і протилежні кути рівні.

ДОВЕДЕННЯ.

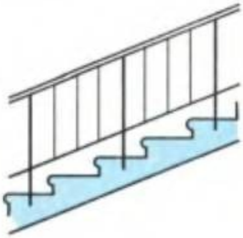
Нехай $ABCD$ — довільний паралелограм (див. мал. 12). Його діагональ AC — січна паралельних прямих AB і CD та паралельних прямих AD і CB. Тому $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих. За стороною і прилеглими кутами $\triangle ABC = \triangle CDA$. З рівності цих трикутників випливає: $AB = CD$, $AD = CB$, $\angle B = \angle D$. А оскільки $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$, то $\angle A = \angle C$. □

Оскільки кожний кут паралелограма дорівнює протилежному куту, а сума всіх його кутів дорівнює 360°, то жоден з кутів не може бути більшим за 180°. Отже,

! паралелограм — чотирикутник опуклий.

Щоб задати паралелограм, досить вказати довжини двох його сусідніх сторін і кут між ними, або довжини двох сусідніх сторін і однієї діагоналі, або довжини двох діагоналей і кут між ними.

Форму паралелограмів мають частини поручнів на сходах (мал. 14), деяких домкратів, терезів (мал. 15). На сторінці зошита в косу лінійку є багато сотень різних паралелограмів.

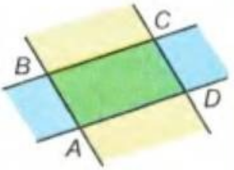


Мал. 14

Мал. 15

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

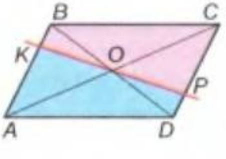
Частина площини, обмежена двома паралельними прямими, називається *смугою*. Кожний паралелограм є спільною частиною (перетином) двох смуг (мал. 16).



Мал. 16

Кожний паралелограм має дві діагоналі. Точку перетину діагоналей паралелограма називають його центром. Центр паралелограма — середина кожної з його діагоналей.

Кожна пряма, яка проходить через центр паралелограма і не проходить через його вершини, розбиває даний паралелограм на два рівні чотирикутники. Наприклад, пряма *KP*, що проходить через центр *O* паралелограма *ABCD* (мал. 17), розбиває його на чотирикутники *AKPD* і *CPKB*, які можна сумістити. Для цього досить перший з них повернути навколо точки *O* на 180°. Спробуйте зробити модель з паперу, якою можна проілюструвати останнє твердження.



Мал. 17

? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення паралелограма.
2. Які властивості мають сторони паралелограма?
3. Які властивості мають кути паралелограма?
4. Сформулюйте і доведіть ознаки паралелограма.
5. Як задати паралелограм?

● *Виконаємо разом*

1 Знайдіть кути паралелограма, якщо один із них удвічі більший від другого.

■ Якщо міра меншого з кутів дорівнює x, то міра більшого — $2x$. Їх сума $x + 2x = 180$, звідки $x = 60$, а $2x = 120$.

Відповідь. 60°, 120°, 60°, 120°.

2 Знайдіть сторони паралелограма, якщо одна з них менша від його периметра на 14 см, а друга — на 19 см.

■ Нехай довжини сторін паралелограма x і y. Тоді його периметр дорівнює $2x + 2y$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 2y - x = 14, \\ 2x + 2y - y = 19. \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$$\begin{cases} x + 2y = 14 \\ 2x + y = 19 \end{cases} \begin{vmatrix} 2, \\ -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{cases} 2x + 4y = 28, \\ -2x - y = -19 \end{cases}$$

$$3y = 9,\ y = 3.$$

Тоді $x + 2y = 14$, $x = 8$.

Відповідь. Сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 3 см.

3 Доведіть, що **діагоналі паралелограма точкою їх перетину діляться навпіл.**

■ Нехай AC і BD — діагоналі паралелограма $ABCD$, а O — точка їх перетину (див. мал. 13). $\angle BAC = \angle DCA$ — як різносторонні внутрішні, утворені січною AC з паралельними прямими AB і CD. Так само $\angle ABD = \angle CDB$. За стороною і прилеглими кутами трикутники OAB і OCD рівні. Отже, $OA = OC$ і $OB = OD$.

● ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

37. Один з кутів паралелограма дорівнює 70°. Знайдіть інші кути паралелограма.

38. Знайдіть кути паралелограма, якщо сума двох з них дорівнює 120°.

39. Знайдіть кути паралелограма, якщо сума трьох з них дорівнює 300°.

40. Сторони паралелограма завдовжки 3 см і 5 см. Знайдіть його периметр.

41. Периметр паралелограма 60 см, а одна зі сторін 10 см. Знайдіть другу сторону паралелограма.

42. Знайдіть периметр паралелограма, якщо середнє арифметичне всіх його сторін дорівнює 3 м.

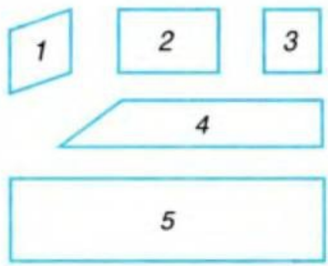
43. Знайдіть кути паралелограма, якщо усі його сторони рівні і кожна з них дорівнює одній діагоналі.

А

44. Які із фігур, зображених на малюнку 18, — паралелограми?

45. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них дорівнює: а) 50°; б) 90°.

46. На сторонах BC і AD паралелограма $ABCD$ позначено точки M і K такі, що $MK \parallel AB$. Доведіть, що чотирикутник $ABMK$ — паралелограм.



Мал. 18

47. Бісектриси кутів A і C паралелограма $ABCD$ перетинають сторони BC і AD у точках M і N відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AMCN$ — паралелограм.

48. Точки M, N, P, K — середини сторін паралелограма $ABCD$. Доведіть, що $MNPK$ — паралелограм.

49. Кути чотирикутника пропорційні числам 2, 3, 2 і 5. Чи може бути даний чотирикутник паралелограмом?

50. Сума двох кутів паралелограма дорівнює 156°. Знайдіть кути паралелограма.

51. Обчисліть кути паралелограма, якщо:
- а) один з кутів на 20° менший за другий;
- б) один з кутів у 5 разів більший за другий;
- в) два з них пропорційні числам 4 і 5;
- г) різниця двох з них дорівнює 40°.

52. Обчисліть кути паралелограма $ABCD$, якщо $\angle CAD = 32°$, $\angle ACD = 37°$.

53. Під яким кутом перетинаються бісектриси двох кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони?

54. Знайдіть кути паралелограма, якщо одна з його діагоналей дорівнює стороні паралелограма і перпендикулярна до неї.

55. Бісектриса кута паралелограма перетинає його сторону під кутом 29°. Знайдіть кути паралелограма.

56. Периметр паралелограма дорівнює 48 см, а одна зі сторін 13 см. Знайдіть довжини інших його сторін.

57. Периметр паралелограма дорівнює 32 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо дві з них відносяться як 3 : 5.

58. Периметр паралелограма дорівнює 48 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо сума двох з них дорівнює 32 см.

59. Знайдіть довжину діагоналі AC паралелограма $ABCD$, якщо його периметр дорівнює 40 дм, а периметр трикутника ABC 27 дм.

60. Побудуйте паралелограм за двома сторонами і кутом між ними.

61. Побудуйте паралелограм за двома сторонами і діагоналлю.

62. Побудуйте паралелограм за діагоналями і кутом між ними.

63. Побудуйте паралелограм за стороною і двома діагоналями.

64. Обчисліть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 42 см і:

а) одна зі сторін на 5 см більша за другу;
б) одна зі сторін у 2 рази більша за другу;
в) різниця сторін дорівнює 7 см;
г) сторони відносяться як 3 : 4.

Б

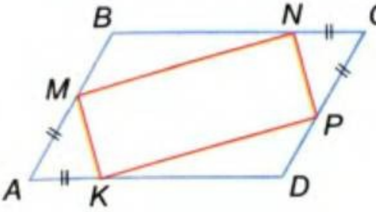
65. Бісектриса $\angle A$ ділить сторону BC паралелограма $ABCD$ навпіл. Знайдіть периметр паралелограма, якщо сторона $AB = 5$ см.

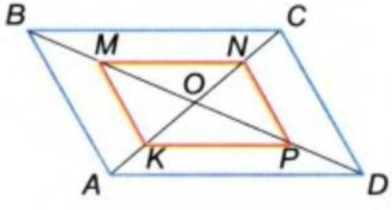
66. Бісектриса $\angle A$ ділить сторону CD паралелограма $ABCD$ у точці M так, що $CM - MD = 2$ см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 34 см.

67. Знайдіть периметр паралелограма, якщо бісектриса його кута ділить одну зі сторін на відрізки завдовжки 5 см і 3 см.

68. $ABCD$ — паралелограм, M і N — середини сторін BC і AD. Доведіть, що чотирикутник $AMCN$ — паралелограм.

69. На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначили точки M і N так, що $AM = CN$. Доведіть, що чотирикутник $MBND$ — паралелограм.





Мал. 19

Мал. 20

70. $ABCD$ — паралелограм, $AM = AK = CN = CP$ (мал. 19). Доведіть, що $MNPK$ — паралелограм.

71. Середини півдіагоналей M, N, P, K паралелограма $ABCD$ послідовно сполучили відрізками (мал. 20). Доведіть, що чотирикутник $MNPK$ — паралелограм.

72. Доведіть, що бісектриси кутів паралелограма з нерівними сторонами, перетинаючись, утворюють паралелограм.

73. Доведіть, що бісектриси зовнішніх кутів паралелограма, перетинаючись, утворюють паралелограм.

74. У паралелограма $ABCD$ $AB = 12$ дм, $\angle A = 30°$. Знайдіть відстань від точки C: 1) до прямої AD; 2) до відрізка AD.

75. Діагональ AC паралелограма $ABCD$ є бісектрисою кута A. Доведіть, що діагоналі паралелограма перпендикулярні.

76. Діагональ BD паралелограма $ABCD$ є бісектрисою кута B. Доведіть, що сторони паралелограма рівні.

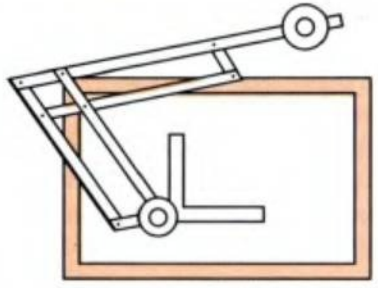
77. Діагональ паралелограма утворює з його сторонами рівні кути. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 48 см.

78. Дано три точки, що не лежать на одній прямій. Скільки можна побудувати паралелограмів з вершинами в цих точках?

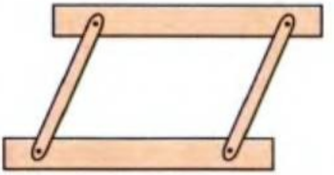
79. Скільки різних паралелограмів можна скласти, прикладаючи один до одного два рівні різносторонні трикутники?

80. З двох рівних прямокутних трикутників з кутом 30° склали паралелограм. Знайдіть кути цього паралелограма.

81. Сторони трикутника дорівнюють a, b і c. Знайдіть периметр паралелограма, складеного з двох таких трикутників. Розгляньте три випадки.



Мал. 21



Мал. 22

82. $ABCD$ — паралелограм. Зовні нього побудовано рівносторонні трикутники ABM і DCT. Доведіть, що $MD = BT$ і $MC = AT$.

83. Поясніть принцип дії механічної рейсшини (мал. 21).

Практичне завдання

84. Штурмани кораблів паралельні прямі проводять за допомогою паралельних лінійок (мал. 22). Зробіть модель паралельних лінійок і покажіть, як ними користуватись.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

85. Знайдіть периметр чотирикутника, якщо його сторони пропорційні числам 3, 5, 6 і 10, а різниця між найбільшою і найменшою сторонами дорівнює 21 см.

86. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = \angle C$, $\angle B = 3\angle A$, а $\angle D = 135°$. Чи має чотирикутник паралельні сторони?

87. Чи буде чотирикутник опуклим, якщо один з його кутів дорівнює 65°, другий на 25° більший, а третій у 5 разів менший за перший?

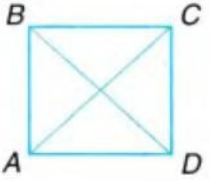
88. Один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 116°. Знайдіть міри інших кутів трикутника.

89. У колі проведено діаметри AB і CD. Доведіть, що $AC = BD$ і $AC \parallel BD$.

§3 *Прямокутник, ромб і квадрат*

Паралелограм, усі кути якого прямі, називається ***прямокутником*** (мал. 23).

Мал. 23



Мал. 24

Прямокутник — окремий вид паралелограма, тому він має всі властивості паралелограма.

У прямокутнику:

- **протилежні сторони рівні;**
- **протилежні кути рівні;**
- **діагональ ділить його на два рівні трикутники;**
- **діагоналі точкою перетину діляться навпіл;**
- **сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°.**

Ще одну важливу властивість прямокутника доведемо як теорему.

ТЕОРЕМА 5 **Діагоналі прямокутника рівні.**

ДОВЕДЕННЯ.

Якщо $ABCD$ — прямокутник (мал. 24), то $\triangle ABC = \triangle DCB$ (за двома катетами). Отже, $AC = DB$. □

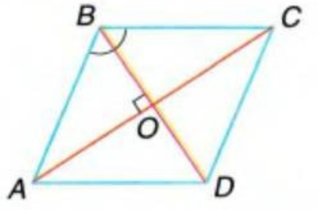
Паралелограм, у якого всі сторони рівні, називається ***ромбом*** (мал. 25). Ромб — окремий вид паралелограма, тому має всі властивості паралелограма. Має ромб ще й інші властивості.

ТЕОРЕМА 6 **Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і ділять кути ромба навпіл.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCD$ — ромб, O — точка перетину його діагоналей (мал. 26). Доведемо, що $AC \perp BD$ і що, наприклад, $\angle ABD = \angle CBD$.

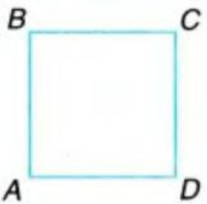
Мал. 25



Мал. 26

Оскільки O — середина діагоналі AC, $AB = BC$, то медіана BO рівнобедреного трикутника ABC є його висотою і бісектрисою. Отже, $BO \perp AC$ і $\angle ABO = \angle CBO$. Тоді й $\angle ABD = \angle CBD$. □

Ромб, усі кути якого прямі, називається ***квадратом*** (мал. 27). Можна сказати й так: квадрат — це прямокутник, усі сторони якого рівні.



Мал. 27

Оскільки квадрат є і ромбом, і прямокутником, то він має всі властивості ромба і прямокутника.

! У квадраті:

- **всі кути прямі;**
- **всі сторони рівні;**
- **діагоналі рівні;**
- **діагоналі взаємно перпендикулярні;**
- **діагоналі ділять кути навпіл.**

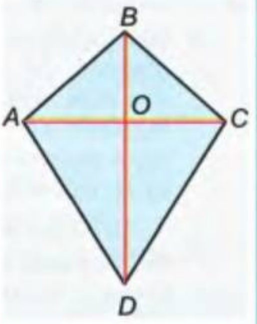
Зрозуміло, що квадрат є видом паралелограма, тому має всі властивості паралелограма (див. с. 14).

Співвідношення між розглянутими видами паралелограмів можна зобразити, як показано на малюнку 28.

Мал. 28

Для допитливих

Опуклий чотирикутник $ABCD$, у якого $AB = BC$ і $CD = DA$, називають *дельтоїдом* (мал. 29). Діагональ BD такого дельтоїда розбиває його на два рівні трикутники, а діагональ AC — на два рівнобедрені трикутники. Спробуйте довести, що діагоналі такого чотирикутника взаємно перпендикулярні і одна з них проходить через середину другої. Чи правильне обернене твердження: якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні і одна з них проходить через середину другої, то такий чотирикутник — дельтоїд?



Мал. 29

Окремий вид дельтоїда — ромб. Співвідношення між поняттями *дельтоїд, ромб, квадрат* можна проілюструвати такою діаграмою (мал. 30). Дельтоїд, відмінний від ромба, не є паралелограмом.

Мал. 30

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке прямокутник?
2. Які властивості має прямокутник? Доведіть їх.
3. Що таке ромб?
4. Які властивості має ромб? Доведіть їх.
5. Що таке квадрат?
6. Які властивості має квадрат?

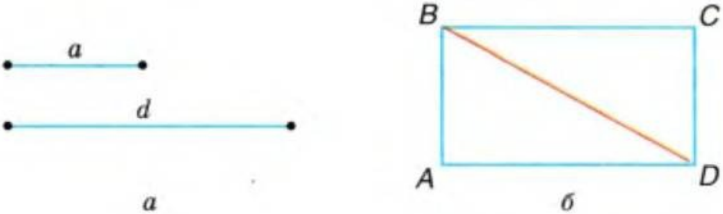
● Виконаємо разом

1 Побудуйте прямокутник за стороною і діагоналлю.

■ Щоб побудувати прямокутник $ABCD$ за даними відрізками $AB = a$ і $BD = d$ (мал. 31, *а*), будуємо спочатку прямий кут BAD. На його стороні AB відкладаємо відрізок $AB = a$, а з точки B, як із центра, описуємо дугу кола радіуса d. Якщо ця дуга перетинає промінь AD в точці D, проводимо прямі $CD \parallel AB$ і $BC \parallel AD$ (мал. 31, *б*).

Чотирикутник $ABCD$ — той, який треба було побудувати. Справді, за побудовою $CD \parallel AB$, $BC \parallel AD$ і $\angle A = 90°$. Отже, $ABCD$ — прямокутник. Його сторона AB і діагональ BD дорівнюють відповідно даним відрізкам a і d.

Побудову можна виконати тільки за умови, що $a < d$. (Чому?)



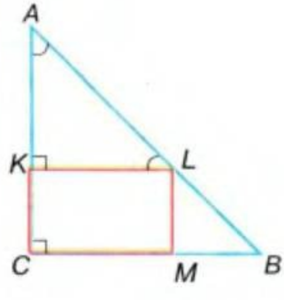
■ Мал. 31

2 У рівнобедрений прямокутний $\triangle ABC$ вписано прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут C (мал. 32). Знайдіть довжину катета, якщо периметр прямокутника дорівнює 12 см.

■ Оскільки $\triangle ABC$ — рівнобедрений прямокутний, то $\angle A = 45°$, тоді $\angle ALK = 45°$. Отже, $\triangle AKL$ — рівнобедрений, $AK = KL$. Тому

$$AC = AK + KC = KL + KC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ см}.$$

Відповідь. 6 см.



■ Мал. 32

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

90. Сторона ромба дорівнює a. Знайдіть його периметр.

91. Знайдіть сторону квадрата, периметр якого дорівнює P.

92. Знайдіть периметр ромба, якщо він на 30 дм довший за одну сторону.

93. Знайдіть кути ромба, якщо один з них має 40°.

94. Знайдіть кути ромба, якщо його діагоналі рівні.

95. Знайдіть кути ромба, якщо сума двох з них дорівнює 200°.

А

96. Доведіть, що діагональ ділить прямокутник на два рівні трикутники.

97. Доведіть, що кожна сторона прямокутника коротша від його діагоналі.

98. Знайдіть довжини діагоналей прямокутника, якщо вони перетинаються під кутом 60°, а менша сторона прямокутника дорівнює 7 см.

99. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює зі стороною кут 30°. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.

100. Діагональ прямокутника дорівнює 12 см і утворює зі сторонами кути, один з яких удвічі більший за другий. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.

101. Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 40°. Знайдіть кути, які діагональ утворює зі сторонами прямокутника.

102. Сторони прямокутника дорівнюють 7 см і 10 см. Знайдіть відстані від точки перетину діагоналей до сторін прямокутника.

103. Відстані від точки перетину діагоналей прямокутника до його сторін дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть периметр прямокутника.

104. Відстань від точки перетину діагоналей прямокутника до однієї зі сторін на 3 см більша, ніж до другої. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 28 см.

105. **Якщо діагоналі паралелограма рівні, то він — прямокутник.** Доведіть.

106. Доведіть: а) якщо всі кути чотирикутника рівні, то він — прямокутник; б) якщо один кут паралелограма прямий, то цей паралелограм — прямокутник.

107. Через точку M, що лежить на гіпотенузі прямокутного трикутника ABC, проведено прямі, паралельні катетам. Вони перетинають катети BC і AC у точках F і E. Доведіть, що $MFCE$ — прямокутник.

108. Знайдіть периметр прямокутника $ABCD$, якщо бісектриси його кутів A і B ділять сторону CD на три відрізки по 3 см.

109. Побудуйте прямокутник за даною діагоналлю і кутом між діагоналями.

110. Один з кутів ромба дорівнює 50°. Знайдіть кут між меншою його діагоналлю і стороною.

111. Знайдіть кути ромба, якщо одна з його діагоналей дорівнює стороні.

112. Кут A ромба $ABCD$ дорівнює 140°. Знайдіть кути трикутника AOB, якщо O — точка перетину діагоналей ромба.

113. Сторона ромба дорівнює a, а кут 150°. Знайдіть відстань між протилежними сторонами ромба.

114. Кути ромба пропорційні числам 1 і 2. Знайдіть меншу діагональ ромба, якщо його периметр дорівнює 40 см.

115. Один з кутів ромба на 60° менший за другий. Знайдіть периметр ромба, якщо менша його діагональ дорівнює 6 см.

116. Перпендикуляр, проведений з вершини тупого кута ромба до протилежної сторони, ділить цю сторону навпіл. Знайдіть: а) кути ромба; б) периметр ромба, якщо менша його діагональ дорівнює 5 см.

117. M, N, P, K — середини сторін квадрата $ABCD$. Доведіть, що $MNPK$ — квадрат.

118. Доведіть, що **ромб, у якого діагоналі рівні, — квадрат**.

119. Доведіть, що **прямокутник, у якого діагоналі перпендикулярні, — квадрат**.

120. Периметр квадрата дорівнює 16 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей до сторін квадрата.

Б

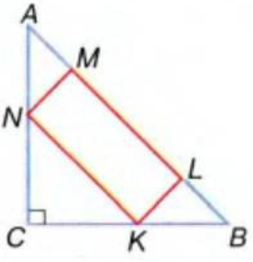
121. З вершини B прямокутника $ABCD$ опущено перпендикуляр BK на діагональ AC, $K \in AC$. Знайдіть AK і KC, якщо $AC = 12$ см і $\angle BAK = 60°$.

122. З вершини B прямокутника $ABCD$ опущено перпендикуляр BK на діагональ AC, $K \in AC$. В якому відношенні точка K ділить AC, якщо $AB = 6$ см і $\angle ABK : \angle KBC = 1 : 2$?

123. У прямокутний $\triangle ABC$ вписано прямокутник $CKLM$ так, що $\angle C$ у них спільний, а точка L — середина AB. Доведіть, що $KM = \frac{1}{2} AB$.

124. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут. Знайдіть катети трикутника, якщо сторони прямокутника дорівнюють 2 см і 7 см.

125. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник, дві вершини якого лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах (мал. 33). Знайдіть периметр прямокутника, якщо його сторони пропорційні числам 2 і 5, а довжина гіпотенузи дорівнює 18 см.



Мал. 33

126. Дано прямокутний рівнобедрений трикутник. Якщо з будь-якої точки гіпотенузи опустити перпендикуляри на катети, то утвориться прямокутник, півпериметр якого дорівнює катету. Доведіть.

127. Якщо діагоналі паралелограма ділять його кути навпіл, то цей паралелограм — ромб. Доведіть.

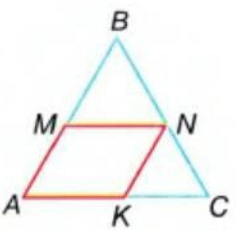
128. Доведіть, що чотирикутник, у якого всі сторони рівні, — ромб.

129. Установіть вид чотирикутника, вершини якого — середини сторін прямокутника.

130. Побудуйте ромб: 1) за стороною і діагоналлю; 2) за двома діагоналями; 3) за стороною і кутом.

131. Доведіть, що точка перетину діагоналей ромба рівновіддалена від усіх його сторін.

132. У рівносторонній $\triangle ABC$ вписано ромб (мал. 34), периметр якого дорівнює 16 см. Знайдіть периметр трикутника.



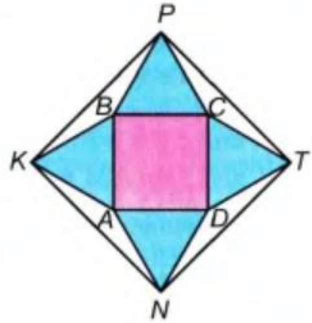
Мал. 34

133. Один з кутів ромба у 5 разів більший за інший. Знайдіть відстань від вершини гострого кута ромба до прямої, на якій лежить протилежна сторона ромба, якщо його периметр дорівнює 56 см.

134. З вершини тупого кута B ромба $ABCD$ до сторін CD і AD проведено перпендикуляри BM і BN ($M \in CD$, $N \in AD$). Доведіть, що: а) $BM = BN$; б) $\angle NBM = \angle BAD$.

135. Побудуйте квадрат, якщо дано його: 1) сторону; 2) діагональ.

136. Доведіть, що паралелограм з рівними і перпендикулярними діагоналями — квадрат.



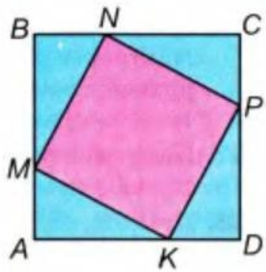
Мал. 35

137. Діагоналі чотирикутника рівні і перпендикулярні. Чи кожний такий чотирикутник є квадратом?

138. На сторонах квадрата, зовні від нього, побудовано рівносторонні трикутники, вершини яких послідовно сполучено. Доведіть, що утворений чотирикутник — квадрат (мал. 35).

139. Точки M, N, P, K — ділять сторони квадрата $ABCD$ у відношенні $1 : 2$ (мал. 36). Доведіть, що $MNPK$ — квадрат.

140. У квадрат $ABCD$ вписано прямокутник $MNPK$ (мал. 37). Доведіть, що довжина діагоналі квадрата дорівнює півпериметру прямокутника.

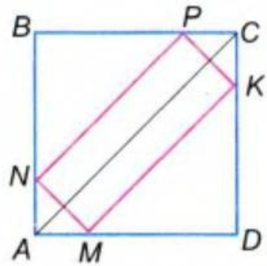


Мал. 36

141. Побудуйте прямокутник за діагоналлю і різницею двох сторін.

142. Діагональ першого квадрата є стороною другого, діагональ другого — стороною третього квадрата. Знайдіть відношення периметрів першого і третього квадратів.

143. Дано прямокутник з нерівними сторонами. Доведіть, що бісектриси його кутів перетинаються в чотирьох точках, які є вершинами квадрата.



Мал. 37

Практичне завдання

144. Виріжте із цупкого паперу паралелограм, прямокутник, ромб і квадрат такі, щоб периметр кожного дорівнював 20 см.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

145. Відрізки AB і CD перетинаються у точці O так, що $AO = BO$ і $CO = DO$. Доведіть, що $ACBD$ — паралелограм.

146. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки 7 см і 3 см, починаючи від вершини B. Знайдіть периметр паралелограма.

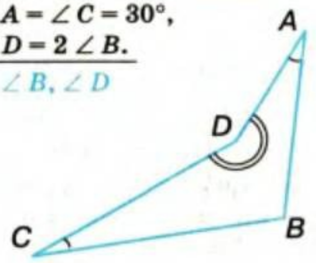
147. З вершин B і D паралелограма $ABCD$ на діагональ AC опущено перпендикуляри BM і DN ($M \in AC$, $N \in AC$). Доведіть, що $BMDN$ — паралелограм.

148. На площині дано два кути: $\angle AOB = 75°$ і $\angle BOC = 32°$. Знайдіть міру $\angle AOC$. Скільки розв'язків має задача?

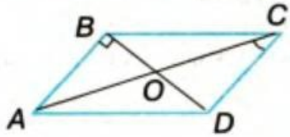
149. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 7 см. Якими натуральними числами може виражатися довжина третьої сторони?

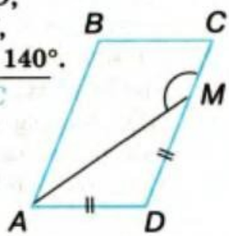
• *Задачі за готовими малюнками*

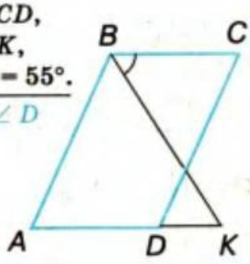
	А	Б
1	$\angle A = \angle C = 30^\circ$, $\angle D = 2\angle B$. $\angle B$, $\angle D$	▱$ABCD$, $\angle A : \angle B = 1 : 2$. $\angle B$, $\angle C$
2	▱$ABCD$, $AB \perp BD$, $\angle ACD = 30^\circ$. Довести: $AO = BD$.	▱$ABCD$, $AD = DM$, $\angle AMC = 140^\circ$. $\angle B$, $\angle C$
3	▱$ABCD$, $AB = AK$, $\angle CBK = 55^\circ$. $\angle A$, $\angle D$	▱$ABCD$, $CD = DK$, $\angle A = 45^\circ$. $\angle B$, $\angle K$
4	$ABCD$ – прямокутник, $AC = 2AB$. $\angle COB$	$\angle MBC = 60^\circ$, $AB = a$, $BM \perp AC$. MC

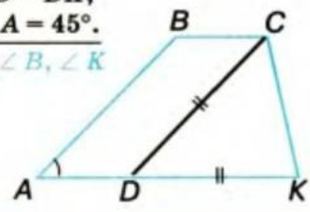
1 А


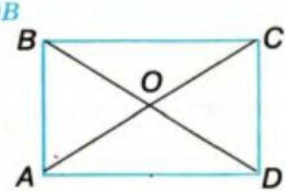
1 Б

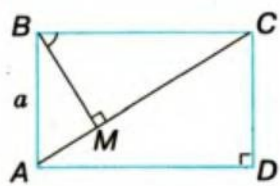

2 А


2 Б


3 А


3 Б


4 А


4 Б


Варіант 1

1°. Знайдіть кути паралелограма, якщо сума двох з них дорівнює 260°.

2°. На діагоналі AC ромба $ABCD$ відклали рівні відрізки AM і CN. Доведіть, що $DMBN$ — ромб.

3 . Побудуйте паралелограм за сторонами 3 см і 5 см і діагоналлю 6 см.

Варіант 2

1°. Знайдіть кути ромба, якщо один з них на 30° більший за другий.

2°. Доведіть, що чотирикутник, вершини якого є серединами сторін квадрата, — квадрат.

3 . Побудуйте паралелограм за сторонами 4 см і 5 см і кутом між ними 60°.

Варіант 3

1°. Знайдіть кути паралелограма, якщо різниця двох з них дорівнює 40°.

2°. На сторонах BC і AD прямокутника $ABCD$ відклали рівні відрізки BK і DL. Доведіть, що чотирикутник $AKCL$ — паралелограм.

3 . Побудуйте ромб за стороною 4 см та гострим кутом 50°.

Варіант 4

1°. Знайдіть кути ромба, якщо один з них у 3 рази більший за другий.

2°. Бісектриси кутів A і C прямокутника $ABCD$ перетинають сторони BC і AD у точках M і N відповідно. Доведіть, що $AMCN$ — паралелограм.

3 . Побудуйте ромб за стороною 5 см і діагоналлю 6 см.

Тестові завдання 1

1.	$ABCD$ — прямокутник. Яке з тверджень хибне?	а) $AB \perp BC$; б) $AC = BD$; в) $AC \perp BD$; г) $BC \parallel AD$.
2.	$ABCD$ — ромб. Який знак слід поставити замість *: $AC * BD$?	а) =; б) $\perp$; в) $\parallel$; г) не можна визначити.
3.	Сума кутів чотирикутника дорівнює:	а) 120°; б) 90°; в) 180°; г) 360°.
4.	Паралелограм, у якого діагоналі рівні й перпендикулярні, — це:	а) прямокутник; б) квадрат; в) ромб; г) не можна визначити.
5.	Сума кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони, дорівнює:	а) 90°; б) 180°; в) 360°; г) 120°.
6.	Одна зі сторін паралелограма дорівнює 5 см, а периметр 16 см. Знайдіть довжину другої сторони.	а) 5 см; б) 6 см; в) 11 см; г) 3 см.
7.	Знайдіть кути ромба, якщо вони пропорційні числам 2 і 7.	а) 20° і 70°; б) 20° і 140°; в) 40° і 140°; г) 80° і 280°.
8.	Менша сторона прямокутника дорівнює 5 см. Знайдіть довжину діагоналі, якщо вона утворює з більшою стороною кут 30°.	а) 10 см; б) 5 см; в) 2,5 см; г) 20 см.
9.	O — точка перетину діагоналей ромба $ABCD$. Визначте вид $\triangle AOB$.	а) гострокутний; б) прямокутний; в) тупокутний; г) рівносторонній.
10.	Периметр квадрата 20 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторони.	а) 20 см; б) 10 см; в) 5 см; г) 2,5 см.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 4, 6 і 8.

2°. Периметр паралелограма дорівнює 120 см, а менша сторона 25 см. Знайдіть довжини інших його сторін.

3°. Знайдіть кути паралелограма, якщо його діагональ утворює зі сторонами кути 42° і 34°.

4°. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см і утворює зі стороною кут 30°. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.

5•. Знайдіть сторони прямокутника, якщо відстань від точки перетину діагоналей до однієї зі сторін на 2,5 см більша, ніж до другої, а периметр прямокутника дорівнює 34 см.

6•. Один з кутів ромба дорівнює 120°. Знайдіть меншу діагональ ромба, якщо його периметр дорівнює 24 см.

7•. Знайдіть периметр паралелограма $ABCD$, якщо його менша сторона дорівнює 5 см, а бісектриси кутів A і D перетинаються в точці K, яка лежить на стороні BC. Знайдіть міру $\angle AKD$.

8•. Побудуйте прямокутник за стороною $AB = 8$ см і діагоналлю $AC = 10$ см.

9•. На діагоналі BD квадрата $ABCD$ взято точки M і N такі, що $BM = DN$. Доведіть, що $AMCN$ — ромб. Знайдіть його периметр, якщо $MN = 4$ см і $\angle BAM = 15°$.

10•. У рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою 15 см вписано прямокутник так, що дві його вершини лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах. Знайдіть периметр прямокутника, якщо одна з його сторін утричі більша за другу.

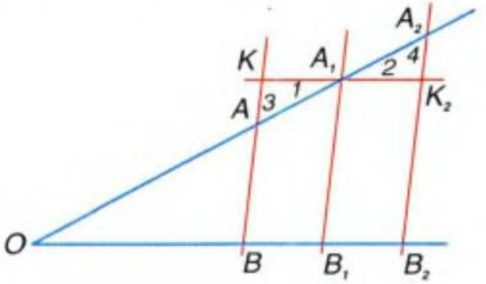
§4 Застосування властивостей паралелограма

Властивості паралелограма можна застосовувати під час доведення теорем і розв'язування задач.

ТЕОРЕМА 7 (Фалéса). **Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій його стороні.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай паралельні прямі AB, A_1B_1 і A_2B_2 перетинають сторону OA кута AOB в точках A, A_1, A_2, а сторону OB — в точках B, B_1, B_2 (мал. 38). Доведемо: якщо $AA_1 = A_1A_2$, то $BB_1 = B_1B_2$.

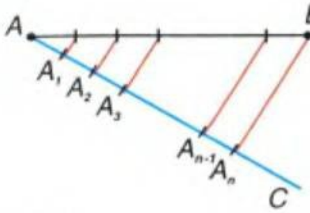


Мал. 38

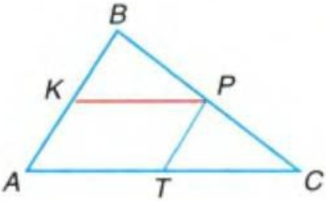
Проведемо через точку A_1 пряму KK_2, паралельну OB. Нехай ця пряма перетинає прямі AB і A_2B_2 в точках K і K_2. Тоді $\triangle AA_1K = \triangle A_2A_1K_2$ (бо $AA_1 = A_1A_2$, $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$). Отже, $KA_1 = A_1K_2$. Чотирикутники KA_1B_1B і $A_1K_2B_2B_1$ — паралелограми. Тому якщо $KA_1 = A_1K_2$, то $BB_1 = B_1B_2$. □

ЗАДАЧА. Поділіть даний відрізок AB на n рівних частин.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Проведемо промінь AC і відкладемо на ньому рівні відрізки AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ (мал. 39). Проведемо пряму A_nB, а через точки A_1, A_2, ..., A_{n-1} — прямі, паралельні A_nB. Вони поділять даний відрізок AB на n рівних частин. Це випливає з теореми Фалеса.



Мал. 39



Мал. 40

Середньою лінією трикутника називається відрізок, який сполучає середини двох сторін цього трикутника.

! ТЕОРЕМА 8 Середня лінія трикутника паралельна одній з його сторін і дорівнює її половині.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай KP — середня лінія $\triangle ABC$ (мал. 40). Проведемо через точку P пряму, паралельну AC. За теоремою Фалеса вона перетинає відрізок AB в його середині K, тобто містить середню лінію KP. Отже, $KP \parallel AC$. Цим доведено першу частину теореми.

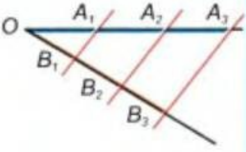
Проведемо ще середню лінію PT. Вона паралельна AB, тому чотирикутник $AKPT$ — паралелограм. За властивістю паралелограма $KP = AT$, а за теоремою Фалеса $AT = TC$. Отже, $KP = \frac{1}{2} AC$. □

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

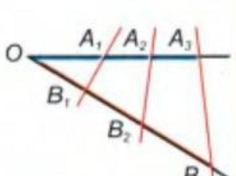
Чи правильне твердження, обернене до теореми Фалеса? Правильне, якщо розглядати відрізки на сторонах кута, починаючи від його вершини.

Якщо на одній стороні кута O відкласти рівні відрізки OA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., а на другій — також рівні між собою відрізки OB_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., то прямі A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... паралельні одна одній (мал. 41). Спробуйте довести це твердження самостійно.

Коли рівні відрізки відкладати на одній стороні кута O і на другій, але не від вершини кута, то прямі A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... можуть бути не паралельними (мал. 42).



Мал. 41



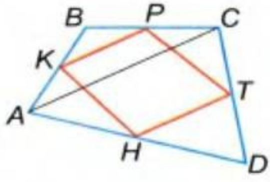
Мал. 42

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте і доведіть теорему Фалеса.
2. Що називається середньою лінією трикутника?
3. Які властивості має середня лінія трикутника?
4. Доведіть теорему про середню лінію трикутника.

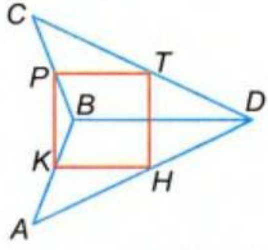
Виконаємо разом

1 Доведіть, що середини сторін довільного чотирикутника є вершинами паралелограма.



Мал. 43

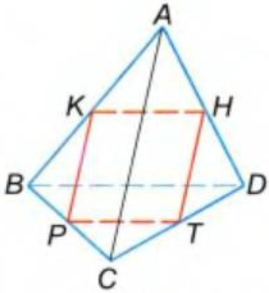
Нехай $ABCD$ — довільний чотирикутник, а точки K, P, T, H — середини його сторін (мал. 43). Проведемо діагональ AC даного чотирикутника і розглянемо трикутники ABC і ADC. KP — середня лінія $\triangle ABC$, тому $KP \parallel AC$ і $KP = 0{,}5\ AC$. TH — середня лінія $\triangle ADC$, тому $TH \parallel AC$ і $TH = 0{,}5\ AC$. За транзитивною властивістю відрізки KP і TH паралельні й рівні. Тому за ознакою паралелограма (теорема 3) чотирикутник $KPTH$ — паралелограм.



Мал. 44

ПРИМІТКА.

Наведене доведення правильне для неопуклого чотирикутника (мал. 44) і для неплоского чотирикутника. Наприклад, якщо ламана $ABCD$ складається з чотирьох ребер трикутної піраміди, а точки K, P, T, H — середини цих ребер, то чотирикутник $KPTH$ — також паралелограм (мал. 45).



Мал. 45

2 Периметр $\triangle ABC$ дорівнює P. Знайдіть периметр трикутника MNK, сторони якого є середніми лініями $\triangle ABC$.

■ Нехай сторони $\triangle ABC$ дорівнюють a, b і c. Тоді, за властивістю середньої лінії трикутника, сторони $\triangle MNK$ дорівнюють $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$, звідки $P_{\triangle MNK} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{P}{2}$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

150. В якому трикутнику дві середні лінії рівні?

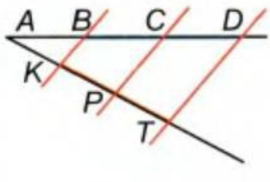
151. В якому трикутнику всі три середні лінії рівні?

152. Сторони трикутника дорівнюють 6 м, 8 м і 10 м. Знайдіть довжини його середніх ліній.

153. K, P, T — середини сторін $\triangle ABC$, периметр якого дорівнює 40 см. Знайдіть периметр трикутника KPT.

154. Дві сторони трикутника відносяться як 2 : 3. Як відносяться його середні лінії, паралельні цим сторонам?

155. Три паралельні прямі перетинають одну сторону кута A в точках B, C і D, а другу — в точках K, P, T (мал. 46). При цьому $AB = BC = CD = 4$ см, $KP = 3$ см. Обчисліть відстані AK, AP, AT, KT.



Мал. 46

А

156. Поділіть даний відрізок на 3 рівні частини.

157. Поділіть даний відрізок на 4 рівні частини двома способами.

158. Побудуйте гострокутний трикутник, одна зі сторін якого дорівнює 6 см. Поділіть кожну сторону трикутника на три рівні частини.

159. На одній зі сторін кута відклали рівні відрізки і через їх кінці провели прямі, перпендикулярні до бісектриси кута. Доведіть, що відрізки, утворені на обох сторонах кута, рівні.

160. Сторону AB $\triangle ABC$, яка удвічі менша за BC, поділили на 4 рівні частини і через точки поділу провели прямі, паралельні AC. Порівняйте довжини відрізків, утворених на сторонах AB і BC.

161. Сторону AB $\triangle ABC$, яка на 6 см менша за BC, поділили на 3 рівні частини і через точки поділу провели прямі, паралельні AC. Порівняйте довжини відрізків, утворених на сторонах AB і BC.

162. Сторони трикутника дорівнюють 3 м, 4 м і 5 м. Знайдіть довжини його середніх ліній.

163. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 10 см і 14 см. Знайдіть периметр трикутника, який відтинає від даного трикутника його середня лінія. Скільки розв'язків має задача?

164. Доведіть, що середні лінії трикутника розбивають його на чотири рівні трикутники.

165. Сторони трикутника a, b і c. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника.

166. K, P, T — середини сторін AB, BC і AC трикутника ABC. Доведіть, що чотирикутник $AKPT$ — паралелограм.

167. K, P, T, H — середини сторін чотирикутника, діагоналі якого дорівнюють 45 дм і 32 дм. Знайдіть периметр чотирикутника $KPTH$.

168. Діагоналі чотирикутника дорівнюють d і d_1. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника.

169. Середини сторін ромба послідовно сполучили відрізками. Доведіть, що утворений чотирикутник — прямокутник.

170. Знайдіть сторони трикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 5 і 7, а периметр трикутника, утвореного середніми лініями, дорівнює 30 см.

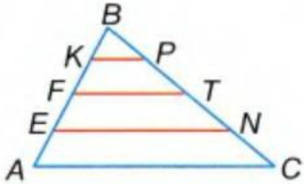
171. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відстань від середини гіпотенузи до катетів трикутника.

172. Точка A лежить на прямій a, а точка B віддалена від прямої на 8 см. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до прямої a.

Б

173. Побудуйте $\triangle ABC$ зі сторонами $AB = 7$ см, $BC = 8$ см і $AC = 6$ см. Використовуючи теорему Фалеса, поділіть сторону AB на 6 частин, а сторону BC на 12 частин.

174. Основу рівнобедреного трикутника, яка дорівнює 8 см, поділили на 4 рівні частини і через точки поділу провели прямі, паралельні бічній стороні. Відрізки, утворені на бічній стороні, на 1 см більші за відповідні відрізки основи. Знайдіть периметр трикутника.



Мал. 47

175. Діагональ ромба $ABCD$ поділили на 6 рівних частин і через точки поділу провели прямі, паралельні другій діагоналі. Знайдіть периметр ромба, якщо довжина одного з утворених на стороні AB відрізків дорівнює 2,5 см.

176. Якщо на прямій a відкласти кілька рівних відрізків і через них провести паралельні прямі до перетину з прямою b, то і на прямій b вони відсічуть рівні відрізки. Доведіть це твердження.

177. M — довільна точка відрізка AC. Доведіть, що середня лінія $\triangle ABC$, паралельна AC, ділить відрізок BM навпіл.

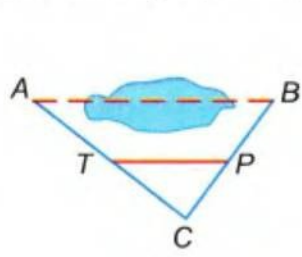
178. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини двох сторін трикутника, рівновіддалена від усіх його вершин.

179. Сторону AB $\triangle ABC$ точками E, F, K поділили на 4 рівні частини і через них провели прямі, паралельні AC (мал. 47). Знайдіть AC і KP, якщо $FT = 5$ см.

180. Відрізок AB точками M, N, K поділили на 4 рівні частини. Знайдіть відстані від точок M і N до прямої, яка проходить через точку A на відстані 12 см від точки B.

181. Точки A і B лежать по різні боки від прямої a і віддалені від неї на 6 см і 10 см. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до прямої a.

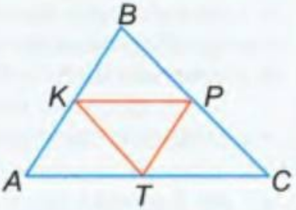
182. Як, користуючись властивістю середньої лінії трикутника, визначити відстань від пункта A до пункта B, між якими не можна пройти (мал. 48)?



Мал. 48

183. На площині позначено три точки. Побудуйте трикутник такий, щоб дані точки виявились серединами його сторін.

184. Як, користуючись тільки циркулем і лінійкою, застосовуючи властивість середньої лінії трикутника, провести через дану точку пряму, паралельну даній прямій?



Мал. 49

185. Одна з вершин трикутника міститься за межами зошита. Побудуйте медіани цього трикутника або частини їх.

186. K, P, T, H — середини сторін чотирикутника $ABCD$. За якої умови чотирикутник $KPTH$ є: а) ромбом; б) прямокутником; в) квадратом?

187. Як розрізати довільний трикутник на дві частини, щоб з них можна було скласти паралелограм?

188. Якщо K, P, T — середини сторін $\triangle ABC$ (мал. 49), то $AK : AB = AT : AC = KT : BC$. Доведіть.

Практичне завдання

189. Виріжте з паперу три рівні різносторонні трикутники. Один з них розріжте по середній лінії і з двох утворених частин складіть паралелограм. Інші трикутники розріжте по інших середніх лініях і складіть з них паралелограми. Чи рівні всі утворені таким способом паралелограми? Чи рівні їх периметри?

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

190. На сторонах AB і CD прямокутника $ABCD$ відкладено рівні відрізки AN і CM. Доведіть, що $NBMD$ — паралелограм.

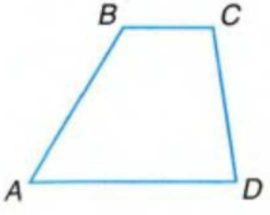
191. Доведіть, що бісектриси кутів ромба утворюють прямий або розгорнутий кут.

192. Доведіть, що периметр ромба, вписаного в рівносторонній трикутник (гострий кут ромба збігається з кутом трикутника), дорівнює $2a$, де a — довжина сторони трикутника.

193. На скільки частин ділять площину два рівні квадрати, розміщені на ній?

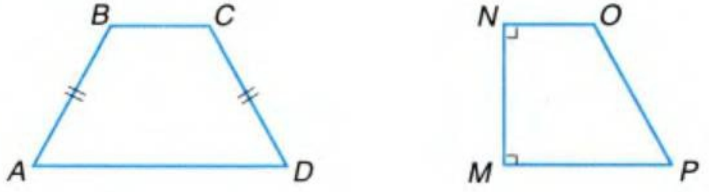
194. Як зміниться периметр трикутника, якщо кожну його сторону зменшити на 1,5 см?

§5 Трапеція



■ Мал. 50

Чотирикутник, у якого тільки дві сторони паралельні, називають ***трапецією*** (мал. 50). Паралельні сторони трапеції — її *основи*, дві інші — *бічні сторони*. Трапецію з рівними бічними сторонами називають *рівнобічною* або *рівнобедреною*. Якщо трапеція має прямий кут, її називають *прямокутною*. На малюнку 51 трапеція $ABCD$ — рівнобічна, а трапеція $MNOP$ — прямокутна.

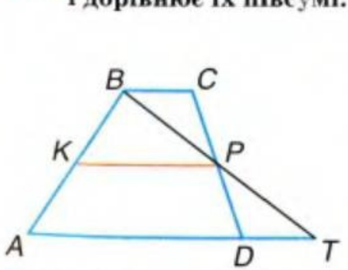


■ Мал. 51

У кожній трапеції сума двох кутів, що прилягають до бічної сторони, дорівнює 180°. Чому?

Середньою лінією трапеції називається відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

ТЕОРЕМА 9 **Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.**



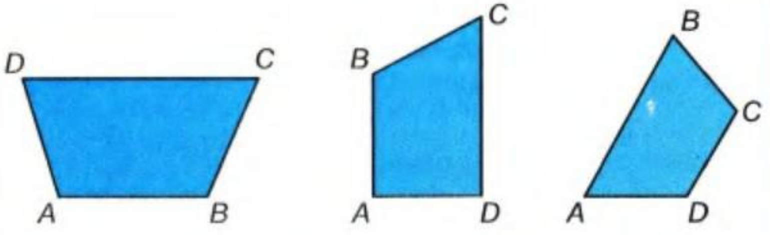
■ Мал. 52

■ **ДОВЕДЕННЯ.**

Нехай KP — середня лінія трапеції $ABCD$ (мал. 52), а прямі BP і AD перетинаються в точці T. Трикутники BCP і TDP рівні, бо $CP = PD$, $\angle BPC = \angle TPD$, $\angle BCP = \angle TDP$. Отже, $BC = DT$ і $BP = PT$. Середня лінія KP трапеції $ABCD$ є також середньою лінією трикутника ABT. Тому $KP \parallel AT$ і $KP = \frac{1}{2} AT$. Отже, $KP \parallel AD$ і $KP = \frac{1}{2}(AD + BC)$. □

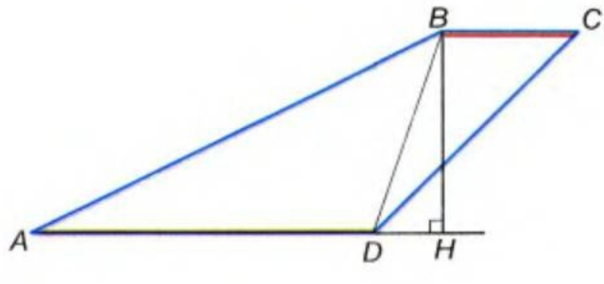
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Креслячи трапецію, найчастіше її більшу основу вважають нижньою основою. Це не обов'язково. Зображені на малюнку 53 чотирикутники — також трапеції. Їхні основи — *AB* і *CD*.



Мал. 53

Чи одне й те саме означають терміни *відстань між основами трапеції* і *відстань між прямими, на яких лежать основи трапеції*? Не завжди. Наприклад, на малюнку 54 зображено трапецію, відстань між основами якої дорівнює довжині діагоналі *BD* (відстані між найближчими точками відрізків *AD* і *BC*). А відстанню між прямими *AD* і *BC* є висота *BH* трапеції *ABCD* і *BH* < *BD*.



Мал. 54

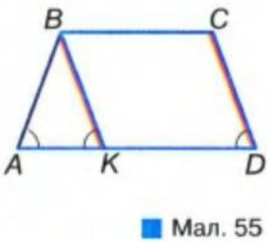
? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення трапеції.
2. Як називають сторони трапеції?
3. Якими бувають трапеції? Сформулюйте їх означення.
4. Чому дорівнює сума двох кутів трапеції, що прилягають до однієї бічної сторони?
5. Що таке середня лінія трапеції?
6. Сформулюйте і доведіть теорему про середню лінію трапеції.

Виконаємо разом

1 **Кути при основі рівнобічної трапеції рівні.** Доведіть.

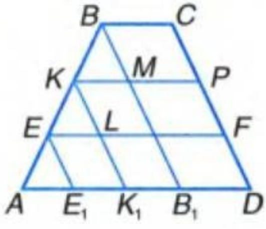
Нехай $ABCD$ — трапеція, в якої $AB = CD$. Доведемо, що $\angle A = \angle D$ (мал. 55). Проведемо відрізок BK, паралельний CD. Оскільки $BC \parallel KD$ і $BK \parallel CD$, то $BCDK$ — паралелограм, $BK = CD = BA$. Отже, $\triangle ABK$ рівнобедрений, тому $\angle A = \angle BKA$. $\angle BKA = \angle D$ — як відповідні кути, утворені січною KD з паралельними прямими BK і CD. Тому $\angle A = \angle D$, що й треба було довести.



Мал. 55

2 Основи трапеції дорівнюють 4 дм і 10 дм. Знайдіть довжини відрізків, паралельних основам, якщо кінці цих відрізків кожну з бічних сторін трапеції ділять на три рівні частини.

Нехай $ABCD$ — трапеція з основами $AD = 10$ см і $BC = 4$ дм, а точки E, K, F, P такі, що $AE = EK = KB$, $EF \parallel AD$ і $KP \parallel AD$ (мал. 56). Проведемо відрізки EE_1, KK_1 і BB_1, паралельні CD. Утворені при цьому чотирикутники B_1BCD, K_1KMB_1, E_1ELK_1 — паралелограми.
$AB_1 = AD - BC = 6$ дм. За теоремою Фалеса $AE_1 = E_1K_1 = K_1B_1 = 6 : 3 = 2$. Отже, $KP = KM + MP = 2 + 4 = 6$ дм, $EF = EL + LF = 2 + 6 = 8$ дм.
Відповідь. 6 дм і 8 дм.



Мал. 56

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

195. Чи існує трапеція, сторони якої дорівнюють 1 м, 2 м, 3 м і 7 м?

196. Один кут рівнобічної трапеції дорівнює 100°. Знайдіть інші її кути.

197. Сума трьох кутів трапеції дорівнює 280°. Знайдіть її четвертий кут.

198. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо сума трьох з них дорівнює 300°.

199. Два кути трапеції в сумі становлять 200°. Чи правильно, що вони — протилежні? Знайдіть суму двох інших кутів.

200. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 20 см, а сума її основ — 12 см. Знайдіть довжину бічної сторони.

А

201. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо один з них на 10° більший за другий.

202. Знайдіть кути трапеції, якщо її можна розрізати на паралелограм і рівносторонній трикутник.

203. Сторони трапеції дорівнюють a, a, a і $2a$. Знайдіть її кути.

204. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть кути трапеції.

205. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо один з них на 30° більший за протилежний.

206. Доведіть, що **діагоналі рівнобічної трапеції рівні**.

207. Доведіть, що коли діагоналі трапеції рівні, то вона рівнобічна.

208. Кути при основі рівнобічної трапеції рівні. Сформулюйте обернене твердження. Чи правильне воно?

209. Знайдіть кути трикутника, якщо пряма, паралельна його стороні, відтинає від нього рівнобічну трапецію з кутом 100°.

210. Два кути трапеції — 100° і 50°. Знайдіть інші її кути.

211. BC і AD — основи рівнобічної трапеції $ABCD$. BM і CK — перпендикуляри до прямої AD. Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle DCK$.

212. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 17 см, бічна сторона — 10 см, а кут між ними — 60°. Знайдіть її периметр.

213. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 14 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60°.

214. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 7 см і 4 см, а гострий кут — 45°. Знайдіть довжину меншої бічної сторони.

215. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 5 см і 9 см, а тупий кут — 135°. Знайдіть відстань між основами трапеції.

216. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Знайдіть сторони трапеції, якщо її основи пропорційні числам 2 і 5, а периметр дорівнює 33 см.

217. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 6 см і менший кут — 60°.

218. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута, а основи дорівнюють 3 см і 7 см. Знайдіть периметр трапеції.

219. Основи трапеції дорівнюють 0,5 м і 0,7 м. Знайдіть довжину її середньої лінії.

220. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 10 см. Знайдіть відрізки, на які діагональ ділить її середню лінію.

221. Діагональ ділить середню лінію трапеції на відрізки, довжини яких дорівнюють 2 см і 5 см. Знайдіть основи трапеції.

222. Середня лінія трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) дорівнює 30 см. Знайдіть основи трапеції, якщо:

а) AD більша за BC на 6 см;

б) AD більша за BC у 5 разів;

в) $AD : BC = 2 : 3$.

223. Перпендикуляр, проведений з вершини тупого кута прямокутної трапеції на її основу, ділить її на відрізки завдовжки 20 см і 30 см. Знайдіть довжину середньої лінії трапеції.

224. Кінці відрізка, що не перетинає пряму, віддалені від цієї прямої на 6 см і 14 см. Знайдіть відстань від середини відрізка до цієї прямої.

225. Знайдіть довжини основ трапеції, якщо вони пропорційні числам 4 і 5, а середня лінія трапеції дорівнює 36 см.

226. Основи трапеції дорівнюють 4 см і 10 см. Знайдіть довжину відрізка середньої лінії, який лежить між діагоналями.

Б

227. Сторону AB $\triangle ABC$ поділено на 3 рівні частини і через точки поділу проведено прямі, паралельні AC. Знайдіть довжини відрізків, які лежать між сторонами AB і BC, якщо найменший з них дорівнює 5 см.

228. Бічну сторону трапеції поділили на 4 рівні частини і через точки поділу провели прямі, паралельні основам. Знайдіть довжини відрізків, які містяться між бічними сторонами трапеції, якщо її основи дорівнюють 4 см і 10 см.

229. Бісектриса тупого кута B трапеції $ABCD$ паралельна бічній стороні CD і перетинає сторону AD у точці M. Знайдіть периметр трапеції, якщо $MD = 3$ см, а периметр $\triangle ABM$ дорівнює 13 см.

230. Бісектриса тупого кута B рівнобічної трапеції $ABCD$ паралельна бічній стороні CD і перетинає сторону AD у точці M. Знайдіть сторони трапеції, якщо її периметр 32 см і $AM : MD = 2 : 1$.

231. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) діагоналі перпендикулярні, $\angle CAD = 30°$. Знайдіть довжину діагоналі BD, якщо основи трапеції дорівнюють 5 см і 9 см.

232. Діагоналі трапеції перпендикулярні, і одна з них утворює з більшою основою кут 30°. Доведіть, що друга діагональ дорівнює середній лінії трапеції.

233. Сторони трапеції дорівнюють a, a, a і $2a$. Знайдіть її кути і кут між діагоналями. Чи існує точка, рівновіддалена від усіх вершин трапеції?

234. Кінці діаметра кола віддалені від дотичної до цього кола на 2 см і 7 см. Знайдіть радіус кола.

235. Діагоналі трапеції перетинають її середню лінію KP у точках E і F. Доведіть, що $KE = FP$.

236. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на три рівні частини. Як відносяться основи трапеції?

237. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам трапеції і дорівнює їх піврізниці.

238. Доведіть, що бісектриси кутів A і B трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) перетинаються під прямим кутом і точка їх перетину лежить на середній лінії трапеції.

239. Основи трапеції a і $2a$. Дві прямі, паралельні її основам, ділять одну з бічних сторін на три рівні відрізки. Знайдіть довжини відрізків цих прямих, що лежать усередині трапеції.

240. Бічна сторона рівнобічної трапеції $ABCD$ дорівнює 5 см, а основа BC — 4 см. Яку з двох цих сторін трапеції перетинає бісектриса її кута A?

241. У трапеції з основами AD і BC кути ABD і ACD прямі. Доведіть, що вона рівнобічна.

242. Чи правильно, що довільну трапецію можна розрізати на два чотирикутники, з яких можна скласти паралелограм?

243. Побудуйте трапецію: а) за даними основами і бічними сторонами; б) за даними основами і діагоналями.

Практичне завдання

244. Виріжте з паперу дві рівні трапеції і складіть з них паралелограм. Скільки різних паралелограмів можна скласти з них? Чи рівні периметри таких паралелограмів?

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

245. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін чотирикутника із сумою діагоналей d.

246. Основа рівнобедреного трикутника на 2 см менша за бічну сторону. Знайдіть сторони трикутника, якщо периметр трикутника, утвореного середніми лініями, дорівнює 11 см.

247. Знайдіть кути паралелограма, якщо сума двох з них дорівнює $136°$.

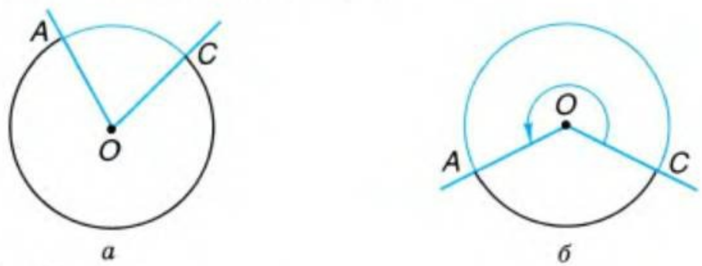
248. Бісектриси кутів A і B прямокутника $ABCD$ перетинаються на стороні DC. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 24 см.

249. З точки A до кола з центром O проведено дотичні AB і AC. Доведіть, що точка O лежить на бісектрисі $\angle BAC$.

§6 *Центральні і вписані кути*

Далі розглядатимемо властивості чотирикутників, вписаних в коло і описаних навколо кола. Для цього введемо поняття центрального кута і вписаного кута.

Кут, вершина якого збігається з центром кола, називається ***центральним кутом***. Сторони центрального кута ділять коло на дві *дуги*. Одна з них лежить у внутрішній області центрального кута. Говорять, що вона *відповідає* даному куту. Наприклад, виділена на малюнку 57, *а* дуга AC відповідає центральному куту AOC, і навпаки: центральний кут AOC відповідає дузі AC. Центральний кут може бути і більшим від розгорнутого (мал. 57, *б*).



Мал. 57

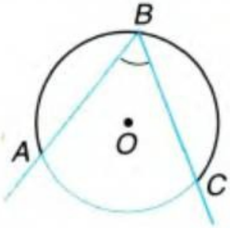
Кожна дуга кола має певну *кутову міру* — міру відповідного їй центрального кута. Кажуть також, що **центральний кут вимірюється дугою, яка йому відповідає**. Наприклад, якщо $\angle AOC = 60°$, то і кутова міра дуги AC дорівнює $60°$. Пишуть: $\overset{\frown}{AC} = 60°$. Кутова міра всього кола дорівнює $360°$.

Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло, називається ***вписаним кутом***. Якщо дуга AC лежить у внутрішній області вписаного кута ABC, то говорять, що даний вписаний *кут спирається на дугу* AC (мал. 58).

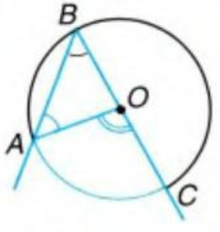
! ТЕОРЕМА 10 **Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.**

ДОВЕДЕННЯ.

Розглянемо спочатку випадок, коли одна сторона вписаного кута ABC, наприклад BC, проходить через центр кола O



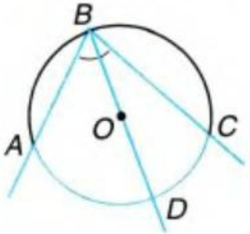
Мал. 58



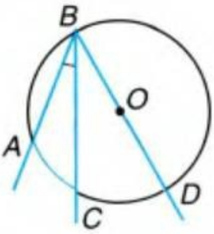
Мал. 59

(мал. 59). Сполучивши точки A і O відрізком, одержимо трикутник AOB, в якому $OA = OB$, отже, $\angle A = \angle B$. За властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle AOC = \angle A + \angle B = 2\angle B$, звідки

$$\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\smile{AC}.$$



Мал. 60



Мал. 61

Якщо жодна із сторін вписаного кута ABC не проходить через центр кола (мал. 60, 61), то, провівши діаметр BD, матимемо:

$$\angle ABD = \frac{1}{2}\smile{AD} \text{ і } \angle DBC = \frac{1}{2}\smile{DC}.$$

Якщо центр кола лежить у внутрішній області $\angle ABC$ (див. мал. 60), то

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2}(\smile{AD} + \smile{DC}) = \frac{1}{2}\smile{AC}.$$

Якщо центр кола лежить поза кутом ABC (див. мал. 61), то

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle DBC = \frac{1}{2}(\smile{AD} - \smile{DC}) = \frac{1}{2}\smile{AC}.$$

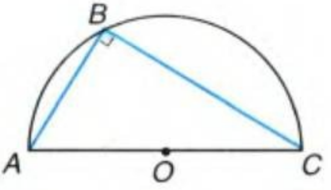
Розглянуто всі можливі випадки.

Отже, кожний вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається. □

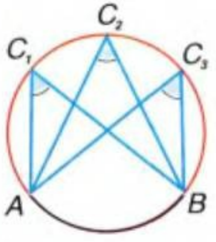
НАСЛІДКИ

1. Вписаний кут, що спирається на діаметр, — прямий (мал. 62).

2. Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, — рівні (мал. 63).



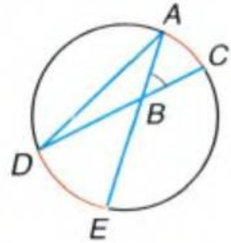
Мал. 62



Мал. 63

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

ТЕОРЕМА 11 **Кут, вершина якого лежить усередині кола, вимірюється півсумою двох дуг, на які спираються даний і вертикальний до нього кути.**



Мал. 64

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі AE і CD перетинаються в точці B, що міститься всередині кола (мал. 64). Доведемо, що кут ABC вимірюється півсумою дуг AC і DE.

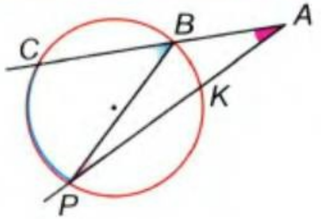
Проведемо відрізок AD. $\angle ABC = \angle A + \angle D$ як зовнішній кут $\triangle ABD$. Кути A і D вписані, тому

$$\angle ABC = \angle A + \angle D = \frac{1}{2}\breve{DE} + \frac{1}{2}\breve{AC} = \frac{1}{2}(\breve{DE} + \breve{AC}).\square$$

ТЕОРЕМА 12 **Кут, сторони якого перетинають коло, а вершина лежить поза колом, вимірюється піврізницею дуг цього кола, що лежать усередині кута.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай сторони довільного кута A перетинають коло в точках, позначених на малюнку 65. За властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle A = \angle CBP - \angle P$.



Мал. 65

Кути CBP і P вписані, вони спираються відповідно на дуги $\breve{CP}$ і $\breve{BK}$ і вимірюються їх половинами. Тому

$$\angle A = \frac{1}{2}\breve{CP} - \frac{1}{2}\breve{BK} = \frac{1}{2}(\breve{CP} - \breve{BK}).$$ □

Запитання і завдання для самоконтролю

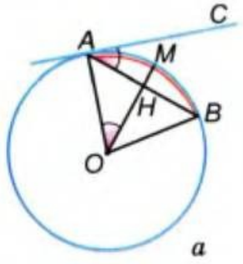
1. Який кут називають центральним? Який вписаним?
2. Що означає вислів «кут спирається на дугу»?
3. Як знайти міру центрального кута?
4. Сформулюйте і доведіть теорему про вписані кути.
5. Яку міру має вписаний кут, що спирається на діаметр?

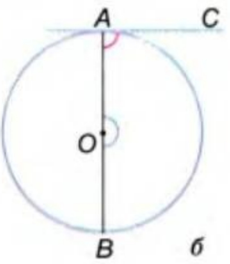
• *Виконаємо разом*

1 Доведіть, що кут **між хордою і дотичною, проведеною через кінець хорди, вимірюється половиною дуги, що лежить між ними.**

■ Нехай в колі з центром O проведено хорду AB, а через точку A — дотичну AC (мал. 66, *а*). Якщо M — середина дуги AB, що лежить усередині кута CAB, і промінь OM перетинає дану хорду в точці H, то $\angle OHA = 90°$. Адже OH — бісектриса кута при вершині рівнобедреного $\triangle OAB$, а вона, як відомо, є водночас і його висотою.

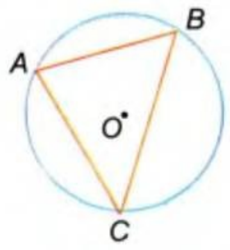
Оскільки $\angle OHA = 90°$, то $\angle AOH = 90° - \angle OAH$. І $\angle CAB = 90° - \angle OAH$. Отже, кут CAB дорівнює $\angle AOM$, який вимірюється половиною дуги AMB. Тому й кут CAB вимірюється половиною цієї дуги.





Мал. 66

Якщо хорда AB — діаметр кола (мал. 66, *б*), доводжуване твердження також правильне, бо в цьому випадку кут CAB прямий, а півколо, що лежить усередині цього кута, має 180°.



Мал. 67

2 Точки A, B і C ділять коло на три дуги, одна з яких дорівнює 100°, а друга на 40° більша за третю. Знайдіть кути $\triangle ABC$.

Нехай кутова міра дуги AC (мал. 67) дорівнює x. Тоді кутова міра дуги BC дорівнює $x + 40°$. Знаючи, що дуга AB містить 100°, отримаємо рівняння $x + x + 40 = 260$, звідки $x = 110°$. Отже, кутова міра дуги AC дорівнює 110°, а дуги BC — 150°. Тоді за властивістю вписаних кутів отримаємо $\angle A = 75°$, $\angle B = 55°$, $\angle C = 50°$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

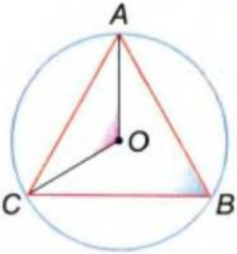
250. Чи може центральний кут бути тупим? А розгорнутим?

251. Вписаний кут прямий. Яким є відповідний йому центральний кут?

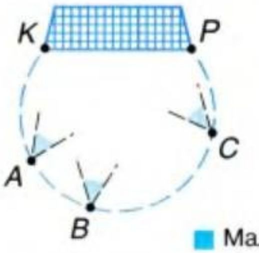
252. Які значення мають бути у порожніх клітинах таблиці?

Центральний кут	60°	100°				n°
Вписаний кут			35°	120°	m°	

253. Який центральний кут більший від відповідного йому вписаного кута на 70°?



Мал. 68



Мал. 69

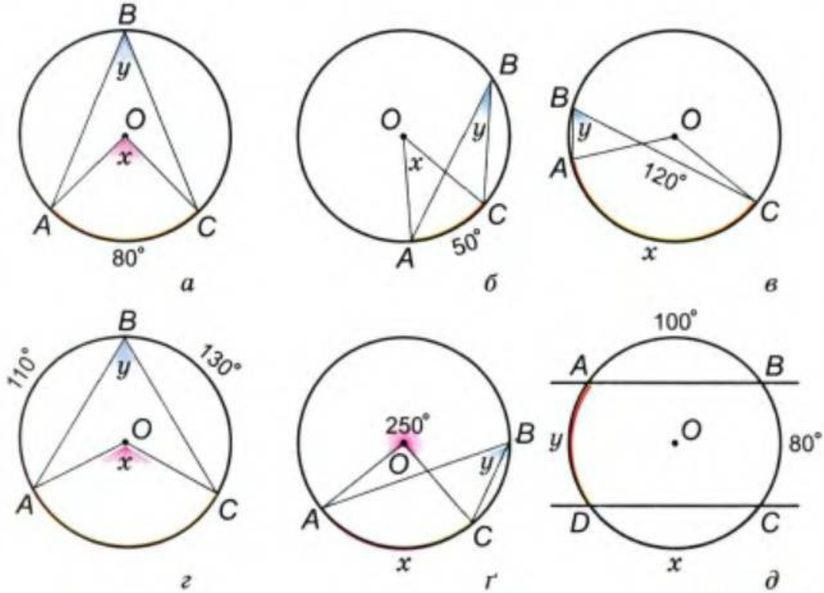
254. Чи може вписаний кут бути більшим від відповідного йому центрального кута на 120°?

255. Вписаний кут спирається на діаметр кола. Яким є відповідний йому центральний кут?

256. Коло з центром O точками A, B, C поділено на три рівні дуги. Знайдіть міри кутів ABC і AOC (мал. 68).

257. М'ячі A, B, C і штанги воріт K та P розміщені на одному колі (мал. 69). Який з кутів більший: KAP, KBP чи KCP?

258. Користуючись малюнками 70, *а*, *б*, *в*, *г*, *ґ* і *д*, знайдіть невідомі елементи x і y.



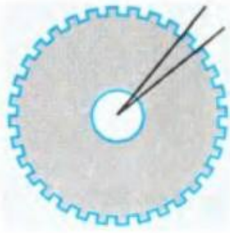
Мал. 70

А

259. Позначте на колі точки A і B та побудуйте центральний кут, що відповідає дузі AB.

260. Знайдіть кутову міру: а) півкола; б) чверті кола.

261. Як співвідносяться кутові міри дуг, на які коло розбиває його центральний кут $60°$?



Мал. 71

262. Шестерня (мал. 71) має 32 зубці. Знайдіть міру центрального кута, який відповідає одному зубцеві і западині.

263. Знайдіть міру вписаного кута, який спирається на третю частину кола.

264. Міра вписаного кута $70°$. Знайдіть кутову міру дуги, на яку він спирається.

265. У колі проведено дві хорди AB і AC. Знайдіть міру кута BAC, якщо кутові міри дуг AC і AB дорівнюють $32°15'$ і $78°55'$.

266. Кут між двома радіусами кола дорівнює $105°34'$. Знайдіть кут між дотичними, проведеними через кінці цих радіусів.

267. Дві точки ділять коло у відношенні $11 : 13$. Знайдіть кут між дотичними, що проходять через ці точки.

268. Коло точками A, B, C, ..., K поділено на 10 рівних дуг. Знайдіть міри кутів: AKB, AKC, KAB, KAC.

269. Навколо трикутника ABC, в якого $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, описано коло. Знайдіть кутові міри дуг AB, BC і CA.

270. Точки A, B і C ділять коло на три дуги, кутові міри яких пропорційні числам 6, 7 і 11. Знайдіть кути трикутника ABC.

271. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює $40°$. Знайдіть кутові міри дуг, на які вершини трикутника розбивають описане коло.

272. Хорда ділить коло на дві дуги, одна з яких у 5 разів більша за другу. Знайдіть міри вписаних кутів, які опираються на цю хорду.

273. Хорда ділить коло на дві дуги, одна з яких на $46°$ менша за другу. Знайдіть міри вписаних і центральних кутів, які опираються на цю хорду.

Б

274. Доведіть, що **рівні хорди стягують рівні дуги**.

275. На стороні AC $\triangle ABC$, як на діаметрі, побудовано коло, яке перетинає сторони AB і BC у точках M і N відповідно. Доведіть, що AN і CM — висоти $\triangle ABC$.

276. Коло, вписане в $\triangle ABC$, дотикається до нього у точках M, N, K. Знайдіть кути $\triangle MNK$, якщо $\angle A = 56°$, $\angle B = 48°$.

277. Кути $\triangle ABC$ пропорційні числам 2, 3 і 5. Яким числам пропорційні кути $\triangle EFK$, якщо E, F і K є точками, в яких коло, вписане в $\triangle ABC$, дотикається до його сторін?

278. Дві рівні непаралельні хорди AB і CD не мають спільних точок. Доведіть, що $ABCD$ — рівнобічна трапеція.

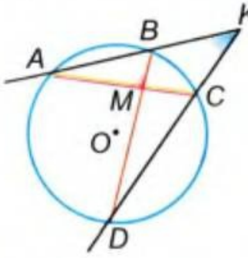
279. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 40°. На бічній стороні, як на діаметрі, побудовано півколо, яке ділиться сторонами трикутника на 3 частини. Знайдіть кутові міри утворених дуг.

280. Хорди AB і CD перетинаються в точці M, $\angle AMC = 80°$. Знайдіть кутові міри дуг AC і BD, якщо дуга BD на 20° більша за дугу AC.

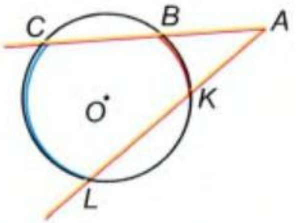
281. На колі послідовно взято точки A, B, C, D, які ділять коло на частини, пропорційні числам 6, 5, 12 і 13. Знайдіть $\angle AMB$ і $\angle AKD$, де M — точка перетину хорд AC і BD, а K — точка перетину прямих AB і CD (мал. 72).

282. Сторони $\angle A = 40°$ перетинають коло в точках B, C, K і L (мал. 73). Знайдіть кутові міри дуг CL і BK, якщо $\breve{CB} = \breve{LK} = 100°$.

283. Через кінець хорди, яка ділить коло у відношенні 3 : 5, проведено дотичну. Знайдіть гострий кут між даною хордою і дотичною.



Мал. 72



Мал. 73

284. Якщо дві рівні хорди перетинаються і одна з них точкою перетину ділиться на відрізки m і n, то на такі самі відрізки ділиться і друга хорда. Доведіть.

Практичне завдання

285. Накресліть коло, позначте на ньому довільні точки A і B, зафарбуйте різними кольорами дві дуги з кінцями в цих точках і відповідними кольорами вписані кути, що спираються на зафарбовані дуги. Виміряйте ці кути і визначте їх суму.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

286. Обчисліть кути рівнобічної трапеції, якщо один з них на 42° більший за інший.

287. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 15 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60°.

288. Один з відрізків, на які діагональ ділить середню лінію трапеції, утричі більший за другий. Знайдіть відношення основ.

289. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 23,6 см, а висота — 11,8 см. Знайдіть тупий кут між бісектрисами кутів при основі.

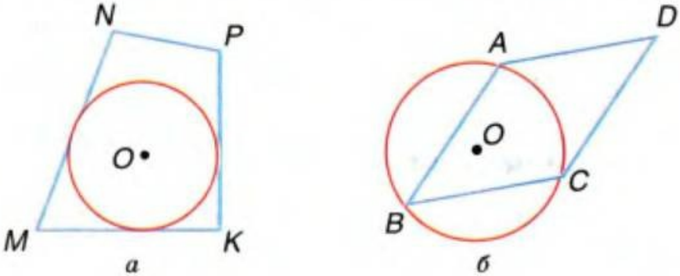
290. Побудуйте трикутник зі сторонами 2 см, 4 см і 5 см. Впишіть у нього і опишіть навколо нього коло.

§7 Вписані й описані чотирикутники

Ви вже знаєте, які трикутники називаються вписаними в коло і які — описаними навколо нього (пригадайте!). Подібно визначаються вписані й описані чотирикутники.

Якщо всі вершини чотирикутника лежать на колі, його називають *вписаним* у коло, а коло — *описаним* навколо чотирикутника. Якщо коло дотикається до всіх сторін чотирикутника, такий чотирикутник називають *описаним* навколо кола, а коло — *вписаним* у чотирикутник.

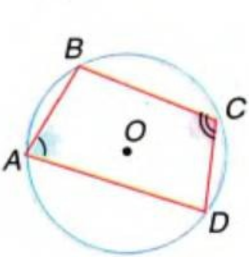
Не в кожний чотирикутник можна вписати коло і не навколо кожного чотирикутника — описати коло (мал. 74).



Мал. 74

Розглянемо найважливіші властивості чотирикутників, описаних навколо кола і вписаних у коло.

ТЕОРЕМА 13 **Сума двох протилежних кутів чотирикутника, вписаного в коло, дорівнює 180°.**



Мал. 75

ДОВЕДЕННЯ.

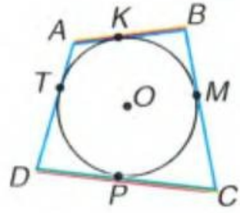
Нехай $ABCD$ — вписаний у коло чотирикутник (мал. 75). Його протилежні кути A і C вписані; перший вимірюється половиною дуги BCD, другий — половиною дуги BAD. Сума кутів A і C вимірюється півсумою цих дуг, тобто півколом. Півколу відповідає 180°. Отже, $\angle A + \angle C = 180°$.

Аналогічно можна показати, що $\angle B + \angle D = 180°$. □

! ТЕОРЕМА 14 **Якщо чотирикутник описаний навколо кола, то сума двох його протилежних сторін дорівнює сумі двох інших його сторін.**

■ **ДОВЕДЕННЯ.**

Нехай чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола. Доведемо, що $AB + CD = BC + AD$ (мал. 76). Позначимо точки дотику сторін чотирикутника до вписаного кола буквами K, M, P, T. Оскільки відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні, то $AK = AT$, $BK = BM$, $CP = CM$, $DP = DT$. Додавши почленно всі ці рівності, дістаємо $AK + BK + CP + DP = BM + CM + DT + AT$, або $AB + CD = BC + AD$. □



Мал. 76

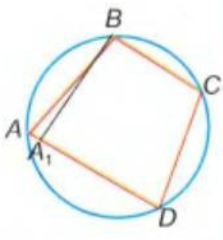
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Для сформульованих двох останніх теорем правильні також обернені теореми.

! ТЕОРЕМА 15 **Якщо сума двох протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180°, то цей чотирикутник можна вписати в коло.**

■ **ДОВЕДЕННЯ.**

Нехай дано чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A + \angle C = 180°$ (мал. 77). Покажемо, що навколо нього можна описати коло. Через точки B, C і D можна описати єдине коло. Воно обов'язково пройде і через точку A. Бо коли б те коло перетинало пряму AD не в точці A, а в іншій точці A_1, то був би вписаний чотирикутник A_1BCD і ми б мали $\angle BA_1D + \angle C = 180°$. За умовою $\angle BAD + \angle C = 180°$. З цих



Мал. 77

двох рівностей виходить, що $\angle BAD = \angle BA_1D$, тобто зовнішній кут трикутника $\triangle AA_1B$ дорівнює його внутрішньому куту. Цього не може бути. Отже, зроблене припущення неправильне. За умови $\angle A + \angle C = 180°$ коло, яке проходить через точки B, C, D, обов'язково проходить і через точку A.□

! **НАСЛІДКИ**

1. **Навколо кожного прямокутника можна описати коло.**
2. **Навколо кожної рівнобічної трапеції можна описати коло.**

! **ТЕОРЕМА 16** **Якщо сума двох протилежних сторін опуклого чотирикутника дорівнює сумі двох інших його сторін, то такий чотирикутник можна описати навколо кола.**

Цю теорему також можна довести методом від супротивного. Спробуйте зробити це самостійно.

? Запитання і завдання для самоконтролю

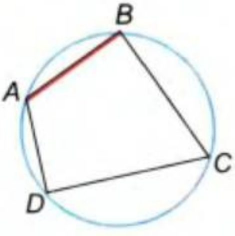
1. Який чотирикутник називається вписаним у коло?
2. Який чотирикутник називається описаним навколо кола?
3. Чи в будь-який чотирикутник можна вписати коло?
4. Чи навколо будь-якого чотирикутника можна описати коло?
5. Поясніть, яку властивість мають кути чотирикутника, вписаного в коло.
6. Поясніть, яку властивість мають сторони чотирикутника, описаного навколо кола.
7. Чи правильно, що коло, описане навколо чотирикутника $ABCD$, є також описаним навколо трикутника ABC?
8. Чи правильно, що коло, вписане в чотирикутник $ABCD$, є також вписаним у трикутник ABC?

Виконаємо разом

1 В коло вписано чотирикутник, два послідовні кути якого дорівнюють 100° і 90°. Знайдіть міри двох інших його кутів.

Нехай у вписаному чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = 100^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ (мал. 78). Тоді

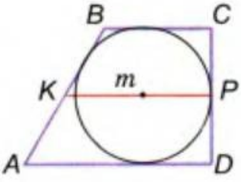
$$\angle C = 180^\circ - \angle A = 80^\circ,$$
$$\angle D = 180^\circ - \angle B = 90^\circ.$$



Мал. 78

2 Середня лінія трапеції, описаної навколо кола, дорівнює m. Знайдіть периметр трапеції.

Сума основ трапеції вдвічі більша від її середньої лінії, тому дорівнює $2m$. В описаному чотирикутнику сума двох протилежних сторін дорівнює сумі двох інших його сторін (мал. 79). Тому сума бічних сторін трапеції також дорівнює $2m$. А периметр трапеції дорівнює $4m$.



Мал. 79

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

291. Чотирикутник вписано в коло. Сформулюйте цей вислів іншими словами.

292. Коло вписано в чотирикутник. Скажіть це іншими словами.

293. Чи правильно, що кожний описаний чотирикутник опуклий?

294. Чи правильно, що кожний опуклий чотирикутник є описаним?

295. Наведіть приклад чотирикутника, який є водночас вписаним і описаним.

296. Наведіть приклад чотирикутника, який є вписаним, але не є описаним. А описаним, але не вписаним?

297. Знайдіть периметр квадрата, описаного навколо кола радіуса r.

298. Знайдіть діагональ квадрата, вписаного в коло радіуса r.

299. Доведіть, що навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.

A

300. Три послідовні сторони описаного чотирикутника дорівнюють 2 см, 3 см і 4 см. Знайдіть четверту сторону.

301. Два послідовні кути вписаного чотирикутника дорівнюють 80° і 120°. Знайдіть два інші його кути.

302. Три послідовні сторони описаного чотирикутника пропорційні числам 3, 4 і 6. Знайдіть їх, якщо довжина четвертої сторони дорівнює 20 см.

303. Три послідовні сторони описаного чотирикутника пропорційні числам 3, 6 і 7, а його периметр 40 м. Знайдіть довжину четвертої сторони.

304. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, кути якого, взяті послідовно, пропорційні числам: а) 2, 5, 7 і 4; б) 3, 4, 7 і 5?

305. Менша сторона прямокутника дорівнює 12 см, а кут між діагоналями дорівнює 60°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутника.

306. Менша сторона прямокутника дорівнює 5 см і утворює з діагоналлю кут 60°. Знайдіть радіус описаного кола.

307. Побудуйте квадрат, периметр якого дорівнює 16 см. Впишіть і опишіть навколо нього коло.

308. Побудуйте прямокутник і опишіть навколо нього коло, якщо: а) сторони прямокутника дорівнюють 2 см і 5 см; б) діагональ прямокутника дорівнює 6 см і утворює зі стороною кут 40°.

309. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони, що дорівнює 6 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60°.

310. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Доведіть, що центр кола, описаного навколо трапеції, лежить на середині більшої сторони.

311. Кути трапеції пропорційні числам 1 і 2, а діагональ є бісектрисою гострого кута. Знайдіть радіус описаного кола, якщо бічна сторона трапеції дорівнює 12 см.

312. Периметр квадрата дорівнює 20 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в квадрат.

313. Різниця основ прямокутної трапеції дорівнює 3 см, а гострий кут 45°. Знайдіть радіус вписаного кола.

314. Периметр трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 8 м. Знайдіть її середню лінію.

315. Знайдіть периметр прямокутної трапеції, описаної навколо кола радіуса r, якщо один з її кутів 30°.

316. Основи рівнобічної трапеції пропорційні числам 2 і 7, а бічна сторона дорівнює 18 см. Знайдіть основи трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

317. У трапецію, середня лінія якої дорівнює 20 см, вписано коло. Знайдіть периметр трапеції.

318. У трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$) вписано коло з центром O. Доведіть, що $\angle AOB = 90°$.

319. Сторона ромба дорівнює 6 см, а гострий кут 30°. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб.

320. Доведіть, що діаметр кола, вписаного в ромб, менший за меншу діагональ.

321. У ромб, один з кутів якого на 46° більший за інший, вписано коло. Знайдіть кутові міри дуг, на які коло ділиться точками дотику.

322. Чи можна вписати коло в паралелограм, відмінний від ромба?

323. Чи можна описати коло навколо паралелограма, відмінного від прямокутника? Чому?

324. Доведіть, що вписана в коло трапеція рівнобічна.

Б

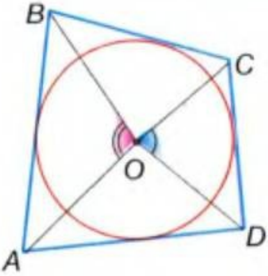
325. Чи можна описати коло навколо прямокутної трапеції? Чому?

326. Доведіть, що периметр трапеції, описаної навколо кола радіуса r, більший за $8r$.

327. Якщо вписане в чотирикутник $ABCD$ коло дотикається до його сторін AB і CD в точках K і P, то $\angle AKP = \angle KPD$. Доведіть.

328. Доведіть, що коли у вписаному чотирикутнику дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник — трапеція.

329. Сума двох кутів, під якими з центра кола, вписаного в чотирикутник, видно дві його протилежні сторони, дорівнює 180°. Доведіть (мал. 80).

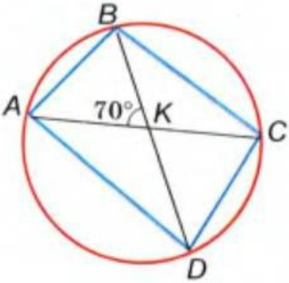


Мал. 80

330. У квадрат, периметр якого дорівнює 24 см, вписано коло. До кола проведено дотичну, яка перетинає дві сторони квадрата. Знайдіть периметр утвореного трикутника.

331. Діагоналі чотирикутника ділять його кути навпіл. Доведіть, що в такий чотирикутник можна вписати коло.

332. Діагоналі чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, перетинаються в точці K, $\angle AKB = 70°$ (мал. 81). Знайдіть кутові міри дуг BC і AD, якщо одна з них на 60° більша за другу.



Мал. 81

333. У ромб зі стороною 8 см і гострим кутом 60° вписано коло. Знайдіть відрізки, на які точка дотику ділить сторону ромба.

334. У ромб, тупий кут якого дорівнює 120°, вписано коло. В якому відношенні точка дотику ділить сторону ромба?

335. У чотирикутнику $ABCD$, вписаному в коло, діагональ BD перпендикулярна до діагоналі AC і ділить її навпіл. Знайдіть кути чотирикутника, якщо $\angle B = 68°$.

336. У рівнобічній трапеції кут при основі дорівнює 50°, а кут між діагоналями, який спирається на бічну сторону, дорівнює 30°. Де лежить центр описаного кола: всередині трапеції чи поза нею?

337. У рівнобічній трапеції з кутом 100° діагональ є бісектрисою гострого кута. Доведіть, що центр описаного кола лежить усередині трапеції.

338. Побудуйте рівнобічну трапецію з основами 3 см і 7 см, в яку можна вписати коло.

339. Побудуйте прямокутну трапецію з основами 3 см і 6 см, якщо у неї можна вписати коло радіуса 2 см. Впишіть це коло.

340. Доведіть, що коли три кути описаного чотирикутника рівні, то він — дельтоїд.

341. Дослідіть, яким є: а) вписаний чотирикутник, три кути якого рівні; б) вписаний чотирикутник, три сторони якого рівні; в) описаний чотирикутник, три сторони якого рівні.

Практичне завдання

342. Накресліть коло, позначте на ньому чотири довільні точки і сполучіть їх послідовно відрізками. Виміряйте кути утвореного чотирикутника. Чи правильно, що сума двох з них дорівнює сумі двох інших?

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

343. Точки A і B ділять коло на частини, одна з яких на 80° більша за другу. Знайдіть міри вписаних кутів, які спираються на хорду AB.

344. Точки M, N, P ділять коло на частини, пропорційні числам 2, 5 і 11. Знайдіть кути $\triangle MNP$.

345. Кут між хордою AB і дотичною, проведеною через точку A, дорівнює 72°. Знайдіть кутові міри дуг, на які хорда AB розбиває коло.

346. До кіл, радіуси яких 12 см і 17 см, проведено спільну внутрішню дотичну, яка перетинає лінію центрів під кутом 45°. Знайдіть відстань між точками дотику.

347. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута. Знайдіть периметр трапеції, якщо основи її дорівнюють 5 см і 7 см.

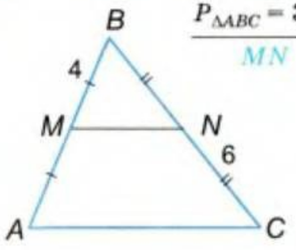
Задачі за готовими малюнками

А | **Б**

1

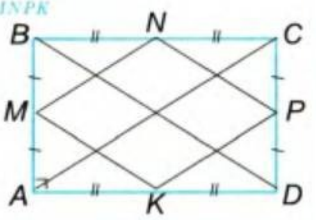
А. $P_{\triangle ABC} = 30.$

MN



Б. $AC = 16.$

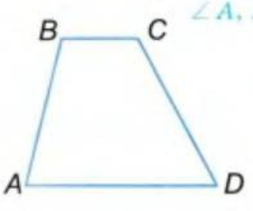
P_{MNPK}



2

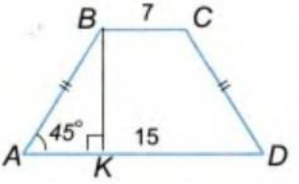
А. $\angle B - \angle A = 30°.$

$\angle A, \angle B$



Б. $BC = 7, AD = 15, \angle A = 45°.$

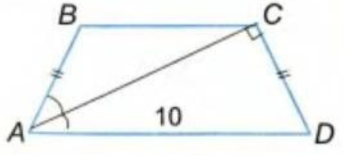
BK



3

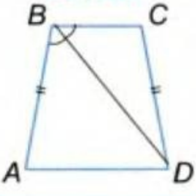
А. $AD = 10, \angle A = 60°.$

P_{ABCD}



Б. $BC : AD = 2 : 3, P_{ABCD} = 66.$

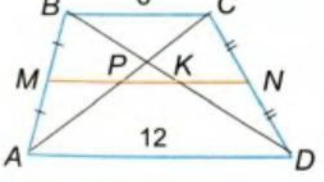
BC, AD



4

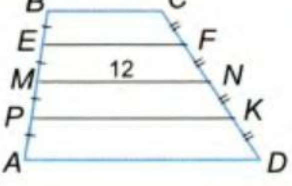
А. $BC = 8, AD = 12.$

MP, PK, KN



Б. $AD : BC = 5 : 3, MN = 12.$

EF, PK



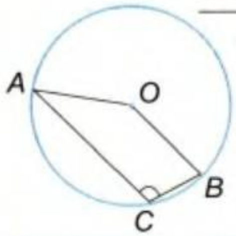
Задачі за готовими малюнками

А

5

$\angle AOB = 130°.$

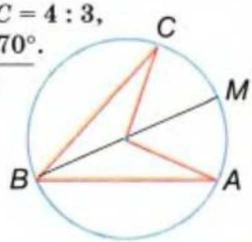
$\angle ACB$



6

$\overset{\smile}{AM} : \overset{\smile}{MC} = 4 : 3,$
$\angle ABC = 70°.$

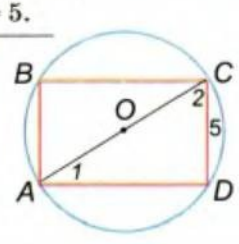
$\angle A, \angle C$



7

$\angle 2 - \angle 1 = 30°,$
$CD = 5.$

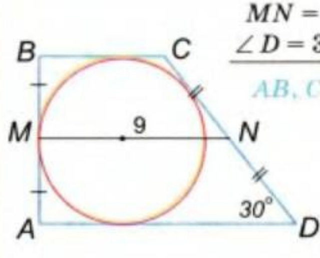
R



8

$MN = 9,$
$\angle D = 30°.$

AB, CD

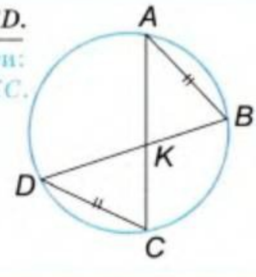


Б

5

$AB = CD.$

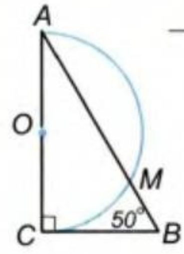
Довести: $BK = KC.$



6

$\angle B = 50°.$

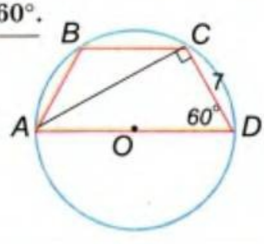
$\overset{\smile}{AM}, \overset{\smile}{MC}$



7

$CD = 7,$
$\angle D = 60°.$

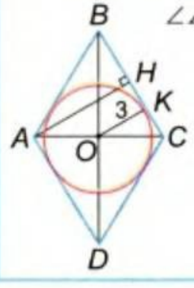
R



8

$\angle ABC : \angle BCD =$
$= 1 : 5,$
$r = 3.$

AB



Самостійна робота 2

Варіант 1

1°. Кути трапеції дорівнюють 70° і 80°. Знайдіть інші кути трапеції.
2°. Точки P і K ділять коло на дві частини, пропорційні числам 2 і 7. Знайдіть міри вписаних кутів, які спираються на хорду PK.
3•. Діагоналі рівнобічної трапеції ділять середню лінію на три рівні відрізки. Знайдіть бічну сторону трапеції, якщо її менша основа дорівнює 7 см і в трапецію можна вписати коло.

Варіант 2

1°. Сума двох кутів рівнобічної трапеції дорівнює 140°. Знайдіть кути трапеції.
2°. Точки E і F ділять коло на дві частини, одна з яких дорівнює третині другої. Знайдіть міри вписаних кутів, які спираються на хорду EF.
3•. Діагоналі рівнобічної трапеції ділять середню лінію на три рівні відрізки. Знайдіть основи трапеції, якщо її бічна сторона має 15 см і в трапецію можна вписати коло.

Варіант 3

1°. Кути трапеції дорівнюють 60° і 70°. Знайдіть інші кути трапеції.
2°. Точки A і B ділять коло на дві частини, одна з яких у 5 разів більша за другу. Знайдіть міри вписаних кутів, які спираються на хорду AB.
3•. Діагоналі рівнобічної трапеції ділять середню лінію на три рівні відрізки. Знайдіть бічну сторону трапеції, якщо її більша основа дорівнює 12 см і в трапецію можна вписати коло.

Варіант 4

1°. Сума двох кутів рівнобічної трапеції дорівнює 220°. Знайдіть кути трапеції.
2°. Точки M і N ділять коло на дві частини, одна з яких на 80° більша за другу. Знайдіть міри вписаних кутів, які спираються на хорду MN.
3•. Діагоналі рівнобічної трапеції ділять середню лінію на три рівні частини, одна з яких дорівнює 7 см. Знайдіть основи та бічну сторону трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

Тестові завдання 2

1. Знайдіть периметр трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють 3 см, 5 см і 7 см .	а) 15 см; б) 30 см; в) 7,5 см; г) 7 см.
2. Радіус кола, вписаного в квадрат зі стороною 4 см, дорівнює:	а) 2 см; б) 4 см; в) 8 см; г) 6 см.
3. Основи трапеції дорівнюють 4 см і 10 см. Знайдіть середню лінію трапеції.	а) 14 см; б) 6 см; в) 3 см; г) 7 см.
4. Центральний кут дорівнює 36°. Чому дорівнює відповідний вписаний кут?	а) 18°; б) 36°; в) 72°; г) 12°.
5. Бічна сторона рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 7 см. Знайдіть довжину середньої лінії.	а) 7 см; б) 14 см; в) 3,5 см; г) 21 см.
6. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутника, менша сторона якого дорівнює 4 см, а кут між діагоналями 60°.	а) 8 см; б) 2 см; в) 4 см; г) 6 см.
7. Радіус кола, вписаного в трапецію, дорівнює r. Знайдіть відстань між прямими, яким належать основи трапеції.	а) $\frac{r}{2}$; б) r; в) $2r$; г) не можна встановити.
8. Периметр рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 20 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.	а) 10 см; б) 2,5 см; в) 5 см; г) 7,5 см.
9. Радіус кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$, дорівнює 5 см. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо $\triangle ABC$?	а) 10 см; б) 2,5 см; в) 5 см; г) 7,5 см.
10. Діагональ трапеції, вписаної в коло, перпендикулярна до бічної сторони. Де лежить центр кола?	а) усередині трапеції; б) на середині більшої основи; в) поза трапецією; г) не можна встановити.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Поділіть відрізок завдовжки 9 см на 7 рівних частин.

2°. Середня лінія рівнобедреного трикутника дорівнює 7 см, а одна з його сторін 10 см. Знайдіть периметр трикутника. Розгляньте два випадки.

3°. $\triangle ABC$ вписаний в коло з центром O. Знайдіть $\angle AOC$, якщо $\angle A = 40°$, а $\angle B$ удвічі більший.

4°. Діагональ трапеції ділить середню лінію завдовжки 15 см на два відрізки, один з яких на 8 см менший за другий. Знайдіть основи трапеції.

5•. Знайдіть кути прямокутної трапеції, якщо один з них удвічі більший за інший. Скільки розв'язків має задача?

6•. Периметр трикутника, утворений середніми лініями $\triangle ABC$, дорівнює 15 см. Знайдіть сторони $\triangle ABC$, якщо одна з них на 2 см менша від другої й удвічі менша за третю.

7•. Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, основи якої пропорційні числам 2 і 5, тупий кут дорівнює 120°, а бічні сторони — 6 см.

8•. На основі AC рівнобедреного $\triangle ABC$, як на діаметрі, побудовано півколо, яке перетинає сторони AB і BC у точках M і N відповідно. Знайдіть кутову міру дуги MN, якщо $\angle B = 70°$.

9•. Побудуйте рівнобічну трапецію з основами 2 см і 6 см, якщо в неї можна вписати коло радіуса 1,5 см, та впишіть це коло.

10•. У ромб з кутом 60° вписано коло. В якому відношенні точка дотику ділить сторону ромба?

Головне в розділі 1

Чотирикутник — проста замкнена ламана з чотирьох ланок. Або об'єднання такої ламаної з обмеженою нею внутрішньою частиною площини. Чотирикутники бувають опуклі й не опуклі. Основні елементи чотирикутника — *сторони, кути, діагоналі.* **Сума всіх кутів кожного чотирикутника дорівнює 360°. Кожна сторона чотирикутника менша від суми трьох інших сторін.**

Чотирикутник, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні, називається *паралелограмом.*

Ознаки паралелограма. Чотирикутник є паралелограмом, якщо: 1) **кожна його сторона дорівнює протилежній стороні;** 2) **дві його сторони паралельні й рівні;** 3) **його діагоналі точкою перетину діляться навпіл.**

Властивості паралелограма. **Кожна сторона паралелограма паралельна протилежній стороні і дорівнює їй; кожний кут паралелограма дорівнює протилежному куту; кожна діагональ паралелограма точкою перетину ділиться навпіл.**

Окремі види паралелограмів: *прямокутники, ромби, квадрати.* Діагоналі прямокутника рівні, діагоналі ромба перпендикулярні і ділять кути ромба навпіл, діагоналі квадрата рівні й перпендикулярні.

Користуючись властивостями паралелограма, можна довести теорему Фалеса. **Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній з них рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій стороні.**

Чотирикутник, тільки дві сторони якого паралельні, — *трапеція.* Паралельні сторони трапеції — її основи, дві інші — бічні сторони. Окремі види трапецій — рівнобічні і прямокутні трапеції. Відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції, — її *середня лінія.* **Середня лінія трапеції паралельна її основам і дорівнює їх півсумі**.

Відрізок, що сполучає середини двох сторін трикутника, називають його *середньою лінією.* **Середня лінія трикутника паралельна одній з його сторін і дорівнює її половині**.

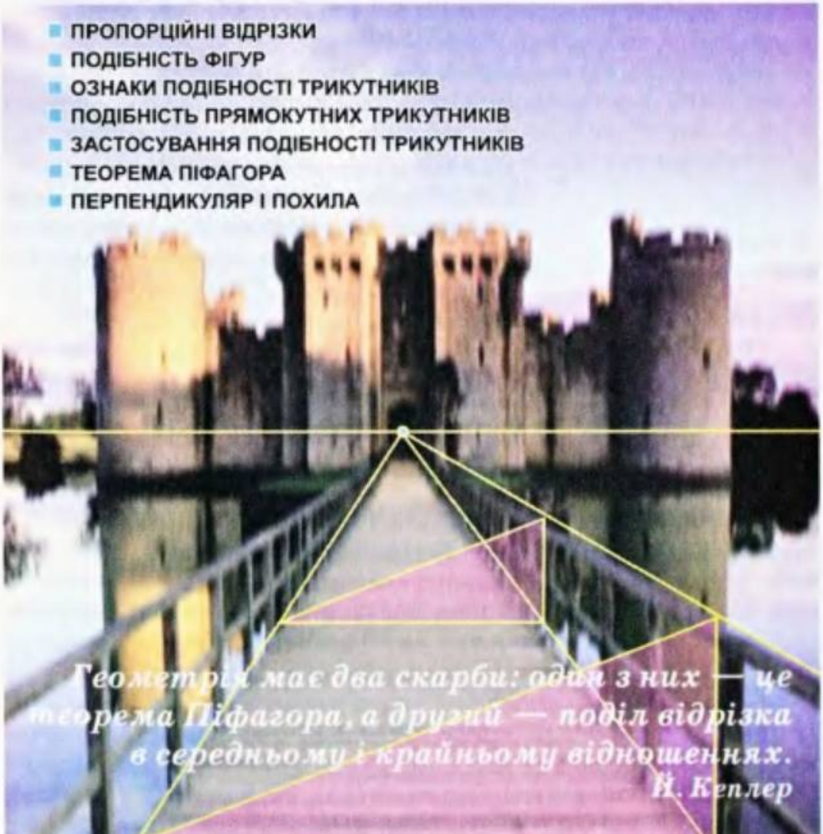
Кут з вершиною в центрі кола називають *центральним кутом.* Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло, називають *вписаним.* **Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку спирається**.

Чотирикутник називається *вписаним* в коло, якщо всі його вершини лежать на колі. **Чотирикутник вписаний в коло тоді й тільки тоді, коли сума двох його протилежних кутів дорівнює 180°.** Чотирикутник називається *описаним* навколо кола, якщо кожна його сторона дотикається до кола. **Опуклий чотирикутник описаний навколо кола тоді й тільки тоді, коли сума двох його протилежних сторін дорівнює сумі двох інших сторін**.

Розділ 2

ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

Подібність геометричних фігур — одне з найважливіших відношень. Коли зображають слона, будинок, континент чи й усю Землю на невеликому аркуші паперу, користуються властивостями подібності. Кожна модель чимось подібна до оригіналу. Геометрія ж здебільшого займається дослідженням геометричних моделей.



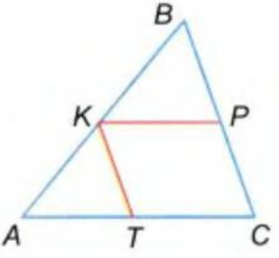
- ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ
- ПОДІБНІСТЬ ФІГУР
- ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ
- ПОДІБНІСТЬ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ
- ЗАСТОСУВАННЯ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ
- ТЕОРЕМА ПІФАГОРА
- ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА

Геометрія має два скарби: один з них — це теорема Піфагора, а другий — поділ відрізка в середньому і крайньому відношеннях.

Й. Кеплер

§8 Пропорційні відрізки

У геометрії та інших прикладних науках часто доводиться визначати *відношення відрізків*. Нагадаємо, що **відношенням двох відрізків називають відношення їх довжин, виражених у тих самих одиницях довжини**. Наприклад, якщо маємо відрізки $a = 2$ см і $b = 5$ см, то їх відношення $a : b = 2 : 5$.



Мал. 82

Якщо K, P, T — середини сторін $\triangle ABC$ (мал. 82), то $AK : AB = 1 : 2$, $AT : AC = 1 : 2$, $KT : BC = 1 : 2$. Отже,

$$AK : AB = AT : AC = KT : BC.$$

З кожних двох таких відношень можна скласти пропорцію, тому в такому випадку кажуть, що відрізки AK, AT, KT пропорційні відрізкам AB, AC і BC. У розглядуваному випадку кожне з відношень дорівнює 0,5, тому попереднє твердження можна уточнити: відрізки AK, AT, KT пропорційні відрізкам AB, AC і BC з коефіцієнтом пропорційності $k = 0{,}5$.

Пропорційними можуть бути дві, три чи більше пар відрізків. Відрізки x, y, ..., z називають пропорційними відрізкам a, b, ..., c, якщо

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = ... = \frac{z}{c}.$$

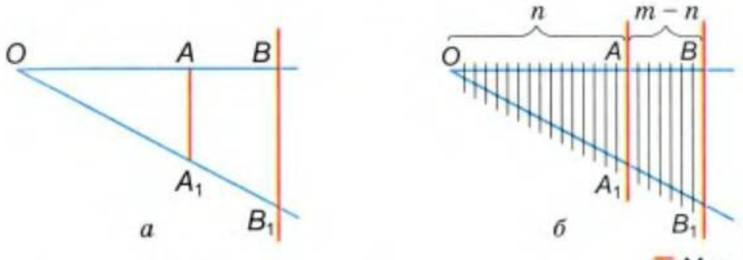
Для дослідження властивостей пропорційних відрізків важливу роль відіграє така узагальнена теорема Фалеса.

! **ТЕОРЕМА 14** **Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від них пропорційні відрізки.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай паралельні прямі AA_1 і BB_1 перетинають сторони кута O, як показано на малюнку 83, a. Покажемо, що відрізки OA, OB, AB пропорційні відрізкам OA_1, OB_1, A_1B_1. Тобто, існує таке число k, що $OA = kOA_1$, $OB = kOB_1$, $AB = kA_1B_1$.

Розглянемо випадок, коли відрізки OA і AB мають спільну міру. Тобто нехай якийсь відрізочок завдовжки ∂ вміщається



Мал. 83

у відрізку OA n разів, а у відрізку OB — m разів. Відклавши такі відрізочки від вершини кута O і провівши через їх кінці прямі, паралельні AA_1 (мал. 83, б), на основі теореми Фалеса можна стверджувати, що відрізки OA, OB, AB діляться на n, m і $m - n$ рівних відрізочків завдовжки ∂, а відрізки OA_1, OB_1, A_1B_1 — відповідно на n, m і $m - n$ відрізочків завдовжки d. Отже, $OA = n\partial$, $OB = m\partial$, $AB = (m - n)\partial$, $OA_1 = nd$, $OB_1 = md$, $A_1B_1 = (m - n)d$. Позначивши відношення $\partial : d = k$, матимемо:

$OA = kOA_1$, $OB = kOB_1$, $AB = kA_1B_1$. □

ПРИМІТКА.

Це доведення правильне для випадку, коли відрізки OA і OB мають спільну міру. Загальніше доведення можна здійснити лише методами вищої математики.

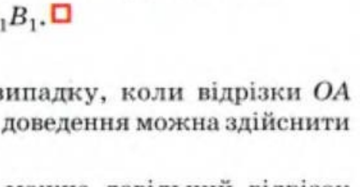
Доведена теорема показує, як можна довільний відрізок ділити на частини, пропорційні даним відрізкам (або числам — довжинам певних відрізків).

Наприклад, поділимо даний відрізок на частини, пропорційні довжинам a, b і c.

Нехай дано відрізок AB (мал. 84). Проведемо промінь AT і відкладемо на ньому відрізки $AK = a$, $KP = b$, $PT = c$. Прямі, що проходять через точки K і P паралельно TB, ділять відрізок AB точками X і Y у потрібному відношенні:

$AX : a = XY : b = YB : c$.

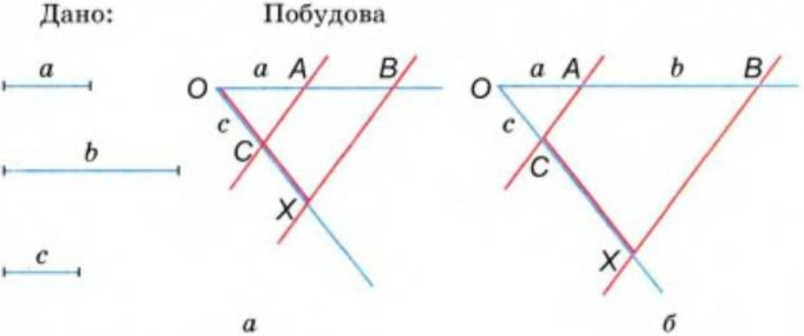
Якщо треба поділити даний відрізок AB на частини, пропорційні, наприклад, числам 3, 2 і 4, відкладають на промені AT відрізки $AK = 3n$, $KP = 2n$, $PT = 4n$, де n — якийсь невеликий відрізок, і виконують побудову, як показано вище.



Мал. 84

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Якщо відрізки a, b, c, x такі, що $a : b = c : x$, то x називають **четвертим пропорційним** трьох даних відрізків a, b і c. Побудувати четвертий пропорційний трьох даних відрізків можна так. На одній стороні довільного нерозгорнутого кута O слід відкласти $OA = a$, $OB = b$, а на другій стороні — $OC = c$. Далі треба провести пряму AC і паралельну їй пряму BX. Відрізок OX — четвертий пропорційний трьох даних відрізків. Бо $OA : OB = OC : OX$ (мал. 85, a).

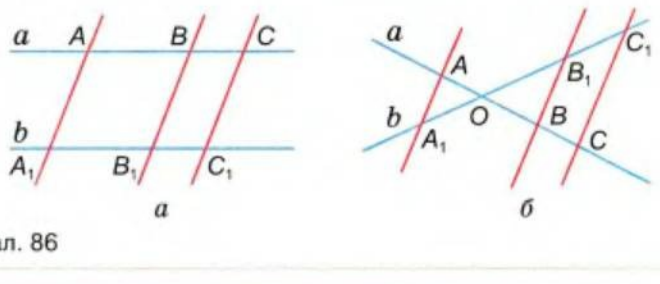


Мал. 85

ЗАУВАЖЕННЯ.

Побудову можна виконати і так, як зображено на малюнку 85, *б*.

Теорему 14 можна узагальнити на випадок довільних прямих однієї площини, а не тільки сторін кута. **Паралельні прямі, які перетинають прямі a і b, відтинають від них пропорційні відрізки**. Така теорема правильна також і у випадках, коли прямі a і b паралельні (мал. 86, a) або перетинаються в точці, що лежить між даними паралельними прямими (мал. 86, *б*). Пропонуємо ці випадки розглянути самостійно.



Мал. 86

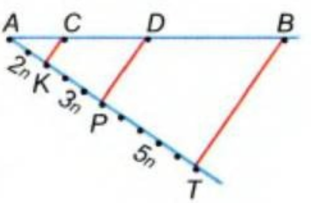
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що розуміють під відношенням двох відрізків?
2. Чому дорівнює відношення відрізків завдовжки 6 дм і 1 м?
3. Які відрізки називають пропорційними відрізкам a, b і c?
4. Сформулюйте узагальнену теорему Фалеса.

Виконаємо разом

1 Поділіть даний відрізок на три частини, пропорційні числам 2, 3 і 5.

З кінця даного відрізка AB під довільним кутом до нього проведемо промінь AT і відкладемо на ньому послідовно 2, 3 і 5 довільних, але рівних відрізочків (мал. 87). Отримаємо відрізки AK, KP і PT, пропорційні даним числам 2, 3 і 5. Проведемо пряму TB і паралельні їй прямі через точки K і P. Ці прямі перетнуть даний відрізок AB у таких точках C і D, що відрізки AC, CD і DB будуть ті, які треба було визначити. Адже, згідно з узагальненою теоремою Фалеса, відрізки AC, CD і DB пропорційні відрізкам AK, KP і PT, які пропорційні числам 2, 3 і 5.



Мал. 87

2 Знайдіть відношення сторони ромба до його півпериметра.

Нехай довжина сторони ромба дорівнює c. Тоді його периметр — $4c$, а півпериметр — $2c$.

$$c : 2c = 1 : 2 = 0{,}5.$$

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

348. Поділіть число 6 на дві частини, пропорційні числам 1 і 2.

349. Поділіть відрізок завдовжки 36 см на частини, пропорційні числам 1 і 2.

350. Поділіть число 10 на частини, пропорційні числам 1, 2 і 2.

351. Поділіть відрізок завдовжки 20 см на частини, пропорційні числам 1, 2 і 2.

352. Відрізок a вдвічі довший за c. Поділіть відрізок завдовжки 9 м на частини, пропорційні відрізкам a і c.

353. Відрізок завдовжки 10 см поділено на дві частини, одна з яких дорівнює 2 см. У якому відношенні поділено даний відрізок?

354. Більша частина відрізка, поділеного у відношенні 2 : 3, дорівнює 9 м. Який завдовжки весь відрізок?

355. Менша частина відрізка, поділеного на частини, пропорційні числам 1, 2 і 4, дорівнює 3 см. Знайдіть довжини двох інших частин.

А

356. Накресліть довільний відрізок і збільшіть його в 1,5 раза.

357. Накресліть довільний відрізок і поділіть його у відношенні 1 : 3.

358. Відрізок завдовжки 1 м поділено на частини, пропорційні числам 3, 6 і 7. Знайдіть довжини утворених частин.

359. Відрізок AB точками C і D поділений пропорційно числам 2, 3 і 5. Знайдіть відношення відрізків:

а) $AC : DB$; б) $CD : AD$; в) $AC : AB$; г) $DB : AD$.

360. Складіть усі можливі пропорції з таких рівних добутків:

а) $5 \cdot 6 = 15 \cdot 2$; б) $a \cdot 3 = c \cdot 8$; в) $a \cdot b = c \cdot d$.

361. Більша частина відрізка, поділеного у відношенні 5 : 8, дорівнює 5,6 дм. Який завдовжки весь відрізок?

362. На скільки треба подовжити відрізок KL завдовжки 32 см, щоб отримати відрізок KM, який задовольняє пропорцію $KM : KL = 9 : 4$?

363. Відрізок завдовжки 28 см поділено на дві частини так, що одна з них дорівнює 21 см. В якому відношенні поділено відрізок?

364. Відрізок поділено на дві частини, відношення яких дорівнює 2 : 11, причому менша частина відрізка коротша за більшу на 27 см. Знайдіть довжину кожної частини відрізка.

365. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = 7 : 2$. Знайдіть відношення $AM : AB$ і $MB : AB$.

366. Точка K ділить відрізок AB у відношенні $m : n$. Знайдіть відношення $AK : AB$ і $KB : AB$.

367. На відрізку AB завдовжки 6 см дано точку C. Відстань цієї точки від A дорівнює 3,6 см. На продовженні відрізка AB за точку B взято таку точку D, що $AD : DB = AC : BC$. Знайдіть відношення $AB : BD$ і $AD : AB$.

368. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 60°. Знайдіть відношення його меншого катета до гіпотенузи.

369. Знайдіть відношення катетів прямокутного рівнобедреного трикутника.

370. Знайдіть відношення сторони рівностороннього трикутника до його півпериметра.

371. Знайдіть відношення сторони квадрата до його півпериметра.

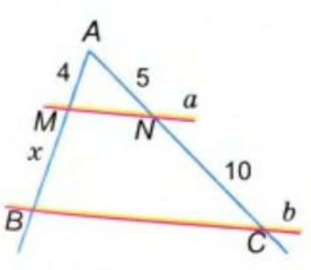
372. Відстань між двома пунктами на карті дорівнює 3 см. Яка справжня відстань між цими пунктами, якщо масштаб карти 1 : 50 000?

373. Визначте масштаб карти, на якій відстані на місцевості завдовжки 200 км відповідає 5 см.

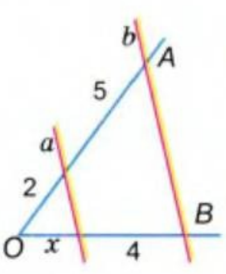
374. Основа рівнобедреного трикутника відноситься до бічної сторони як 2 : 3. Як відноситься його основа до периметра? Як відноситься бічна сторона до периметра?

375. Користуючись малюнками 88–90, де $a \parallel b$, знайдіть невідомі елементи x.

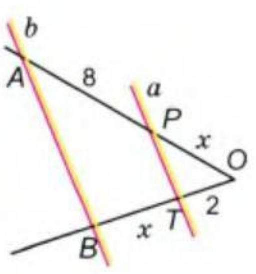
376. Побудуйте відрізок, четвертий пропорційний відрізкам a, b і c, та знайдіть його довжину, якщо:
а) $a = 4$ см; $b = 2$ см; $c = 3$ см;
б) $a = 4$ см; $b = 10$ см; $c = 6$ см;



Мал. 88



Мал. 89



Мал. 90

в) $a = 4{,}8$ см; $b = 4$ см; $c = 2{,}1$ см;
г) $a = 1{,}5$ см; $b = 4{,}5$ см; $c = 2$ см.

Б

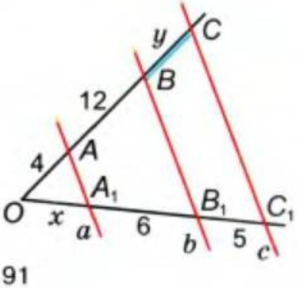
377. Відрізок завдовжки 7 дюймів поділили на частини, пропорційні числам 2, 3, 4 і 5. Знайдіть довжини найбільшої і найменшої частин.

378. Відрізок завдовжки a поділено на частини, пропорційні числам 5, 1 і 4. Знайдіть довжини утворених частин.

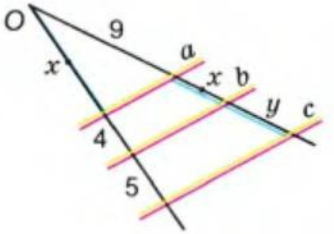
379. Відрізок завдовжки a поділили на частини у відношенні $m : n$. Знайдіть довжини утворених частин.

380. Чи пропорційні відрізки a, b, c, d, якщо:
а) два перші відносяться як $2 : 3$, а два другі — як $3 : 4$;
б) $a : b = 2{,}4 : 5{,}6$; $c : d = 9{,}1 : 21{,}7$?

381. Користуючись малюнками 91 і 92 ($a \parallel b \parallel c$), знайдіть невідомі елементи x та y.



Мал. 91

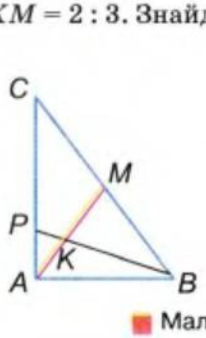


Мал. 92

382. У трапеції $ABCD$ (мал. 93) $AB = 10$ см, $MN \parallel AD$, $BM - AM = 2$ см. Знайдіть CD, якщо $DN = 6$ см.

383. AM — медіана $\triangle ABC$ (мал. 94). $AK : KM = 2 : 3$. Знайдіть відношення $AP : PC$ і $AP : AC$.

Мал. 93



Мал. 94

384. Точка M ділить сторону AB $\triangle ABC$ у відношенні $AM : MB = 3 : 2$, а точка N ділить сторону BC $\triangle ABC$ у відношенні $BN : NC = 5 : 4$. Відрізки AN і CM перетинаються в точці O. Знайдіть відношення $AO : ON$ і $CO : OM$.

385. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 10 см, а бічні сторони 5 см і 8 см. На скільки треба продовжити бічні сторони, щоб вони перетнулися?

386. Дано відрізки a, b, c. Побудуйте: а) їх четвертий пропорційний відрізок; б) середній арифметичний відрізок; в) відрізок завдовжки $\frac{ac}{b}$.

387. Знайдіть відношення радіуса кола, вписаного в рівносторонній трикутник: а) до радіуса описаного кола; б) до висоти трикутника.

388. На стороні AB трикутника ABC позначено точку K таку, що $AK = 10$ см, $KB = 5$ см. Знайдіть відношення відстаней від точок K і B до прямої AC.

389. Скористайтесь малюнком 95 і поясніть, як можна поділити ширину дошки на потрібну кількість рівних частин.

Практичне завдання

390. Накресліть кут O, градусна міра якого $60°$. З його вершини, як з центра, проведіть дуги радіусів $r = 2$ см і $2r$. Позначте буквами точки перетину сторін кута цими дугами і послідовно сполучіть їх відрізками. Який чотирикутник утворився? Знайдіть його кути, сторони і периметр.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

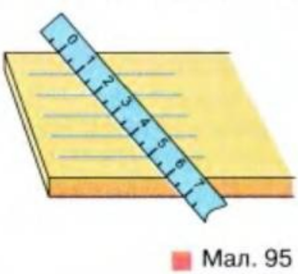
391. Радіус OB кола з центром O ділить вписаний кут ABC на два кути так, що один з них на $15°$ більший за другий. Знайдіть ці кути, якщо $\smile AC = 110°$.

392. Побудуйте ромб з діагоналями 4 см і 10 см та впишіть у нього коло.

393. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 5 і 8.

394. Суміжні кути відносяться як $2{,}5 : \frac{1}{2}$. Знайдіть ці кути.

395. Поділіть даний відрізок на 7 рівних частин.



Мал. 95

§9 Подібність фігур

Усім нам часто доводиться мати справу з предметами різних розмірів, але однакової форми. Наприклад, зменшена модель автомобіля схожа на справжній автомобіль, хоча менша за розмірами. Але їх розміри — відповідно пропорційні. Якщо, наприклад, довжина моделі літака в 100 разів менша від довжини справжнього літака, то і довжина крила моделі повинна бути в 100 разів меншою від довжини крила справжнього літака і т. д. Якщо дві фігури подібні, то всі їх відповідні розміри пропорційні.

Фігури схожих форм називають ***подібними фігурами***. Кожне коло подібне іншому колу, кожний півкруг подібний іншому півкругу. Роздруковані з комп'ютера літери

А, А, А, А, А, А, А, А

як геометричні фігури подібні одна одній. Проте жодна з них не подібна фігурі **а**, що позначає цю саму літеру.

У геометрії подібність фігур використовується часто, тому існує і загальноприйнятий знак подібності $\sim$. Щоб виразити, що трикутник ABC подібний трикутнику KPT, пишуть $\triangle ABC \sim \triangle KPT$.

Два трикутники називаються ***подібними***, якщо їх відповідні кути рівні, а сторони пропорційні.

Якщо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то правильні такі рівності:

$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$

і $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1$.

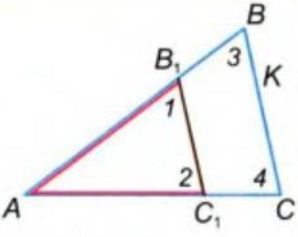
Наступна теорема наводить простий і дуже важливий приклад утворення подібних трикутників.

! ТЕОРЕМА 15 **Січна пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.**

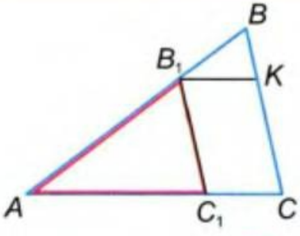
ДОВЕДЕННЯ.

Нехай ABC — довільний трикутник, а пряма B_1C_1, яка перетинає його, паралельна стороні BC (мал. 96). Доведемо, що $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Кут A у цих трикутників спільний, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, як відповідні кути при паралельних прямих BC і B_1C_1. Отже, відповідні кути цих трикутників рівні. Залишається довести,



Мал. 96



Мал. 97

що їх сторони пропорційні. За узагальненою теоремою Фалеса $AB : AB_1 = AC : AC_1$.

Проведемо відрізок B_1K, паралельний AC (мал. 97). Оскільки KCC_1B_1 — паралелограм, то $B_1C_1 = KC$. А за попередньою теоремою $BC : KC = BA : B_1A$. З двох останніх пропорцій випливає рівність трьох відношень:

$$AB : AB_1 = AC : AC_1 = BC : B_1C_1.$$

Отже, відповідні кути трикутників ABC і AB_1C_1 рівні, а сторони пропорційні, тому ці трикутники подібні. □

На доведену теорему далі посилатимемося часто, тому називатимемо її *основною теоремою про подібність трикутників*.

Якщо трикутники ABC і AB_1C_1 подібні, то $AB : AB_1 = AC : AC_1 = BC : B_1C_1 = k$, де k — деяке додатне число. Це число називають *коефіцієнтом подібності*. В цьому випадку всі лінійні розміри трикутника ABC у k разів більші (якщо $k > 1$) за відповідні розміри трикутника AB_1C_1. У подібних трикутниках не тільки сторони, а й їхні відповідні медіани (m і m_1), бісектриси (l і l_1), висоти (h і h_1), периметри (P і P_1), радіуси (r і r_1) вписаних чи описаних кіл пропорційні з тим самим коефіцієнтом. Якщо $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, то:

$$AB = kA_1B_1, \quad P = kP_1, \quad h = kh_1,$$
$$AC = kA_1C_1, \quad m = km_1, \quad r = kr_1.$$
$$BC = kB_1C_1, \quad l = kl_1,$$

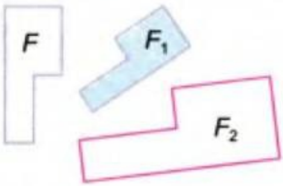
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Подібність геометричних фігур — це відношення (як і відношення рівності, паралельності тощо). Воно має такі властивості:

Якщо $F \backsim F_1$, то і $F_1 \backsim F$.

Якщо $F \backsim F_1$ і $F_1 \backsim F_2$, то $F \backsim F_2$ (мал. 98).

Якщо $F \backsim F_1$ і $F_1 = F_2$, то $F \backsim F_2$.



Мал. 98

Мал. 99

Докладніше про подібні фігури ви дізнаєтесь у старших класах, а тут обмежимося розгляданням подібних трикутників.

Зобразимо діаграмою співвідношення між поняттями «рівні трикутники» і «подібні трикутники».

Якщо два трикутники рівні, то і їх відповідні кути рівні, а сторони одного пропорційні відповідним сторонам другого, бо кожне з відношень дорівнює 1. Отже, два рівні трикутники є водночас і подібними трикутниками. Проте не завжди подібні трикутники дорівнюють один одному (мал. 99).

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які фігури називають подібними? Наведіть приклади подібних фігур.
2. Які два трикутники називають подібними?
3. Трикутники ABC і KPT рівні. Чи подібні вони?
4. Трикутники ABC і KPT подібні. Чи рівні вони?
5. Сформулюйте і доведіть основну теорему про подібність трикутників.

Виконаємо разом

1 Доведіть, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

Нехай трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні з коефіцієнтом подібності k. Тоді

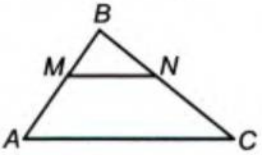
$$AB = kA_1B_1,\ BC = kB_1C_1,\ CA = kC_1A_1.$$

Відношення периметрів даних трикутників

$$P_{ABC} : P_{A_1B_1C_1} = (AB + BC + CA) : (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) =$$
$$= (kA_1B_1 + kB_1C_1 + kC_1A_1) : (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) =$$

$= k\,(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) : (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) = k.$
Отже, $P_{ABC} : P_{A_1B_1C_1} = k$.

2 Точка M ділить сторону AB $\triangle ABC$ у відношенні $AM : BM = 3 : 2$ (мал. 100). Знайдіть MN, якщо $AC = 15$ см, $MN \parallel AC$, $N \in BC$.



Мал. 100

$\triangle MBN \sim \triangle ABC$ за основною теоремою про подібні трикутники. Якщо трикутники подібні, то їх сторони пропорційні, тобто $\frac{MB}{AB} = \frac{MN}{AC}$, $\frac{2}{5} = \frac{MN}{15}$, звідки $MN = 6$.

Відповідь. $MN = 6$ см.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

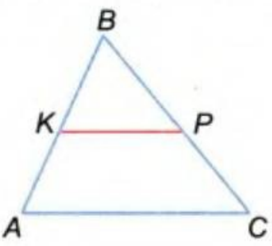
396. KP — середня лінія трикутника ABC (мал. 101).
а) Чи подібні трикутники ABC і KBP?
б) Чи пропорційні відрізки BP і BC відрізкам KP і AC? А відрізки BP і PC відрізкам KP і AC?
в) Знайдіть відношення $KB : AB$, $BP : PC$, $KP : AC$.
г) У скільки разів $P_{\triangle ABC}$ більший від $P_{\triangle KBP}$?

397. Через точки K і P на стороні BC трикутника ABC проведено прямі, паралельні AB і AC (мал. 102). Скільки пар подібних трикутників утворилося?

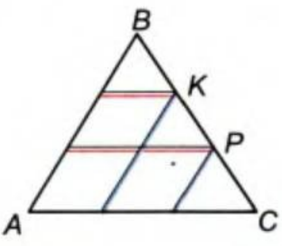
398. Чи подібні два трикутники, якщо сторони одного дорівнюють 2 м, 3 м і 4 м, а другого — 3 м, 4 м і 5 м?

399. Чи можуть бути подібними прямокутний і тупокутний трикутники?

400. Чи правильно, що трикутник, подібний рівнобедреному трикутнику, рівнобедрений?



Мал. 101



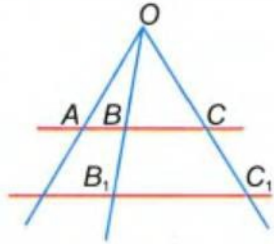
Мал. 102

А

401. K і P — такі точки на сторонах AB і BC $\triangle ABC$, що $KP \parallel AC$ і $BK : BA = 1 : 3$. Чи подібні трикутники ABC і KBP? Чому? Знайдіть:

а) відношення $KB : AK$, $BP : PC$, $KP : AC$;

б) периметри трикутників ABC і KBP, якщо $AK = KP = PB = 8$ см.



Мал. 103

402. Промені OA, OB і OC перетинають паралельні прямі AB і A_1B_1 (мал. 103). При цьому $OA : OA_1 = 2 : 3$.

а) Знайдіть відношення $OB : OB_1$, $OC : OC_1$, $AB : A_1B_1$, $OA : AA_1$, $OB : BB_1$, $OC : CC_1$.

б) Складіть кілька пропорцій з таких відношень.

в) Чи правильні пропорції: $OA : AA_1 = OB : BB_1$, $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$, $OA : OB = OB : OC$?

403. У трикутнику ABC через точку K сторони AC проведено пряму, паралельну стороні BC, до перетину зі стороною AB у точці L. Знайдіть:

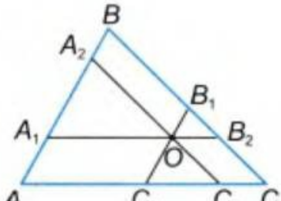
а) відрізок KL, якщо $BC = 27$ см і $AK : KC = 4 : 5$;

б) периметр $\triangle AKL$, якщо $AB = 30$ см, $BC = 36$ см, $AC = 42$ см, $LK = 12$ см.

404. Основа трикутника дорівнює 36 см, бічна сторона поділена на 4 рівні частини, і через точки поділу проведено прямі, паралельні основі. Знайдіть відрізки цих прямих, обмежених бічними сторонами.

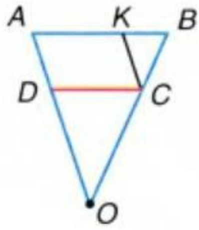
405. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ взято точки M і N відповідно так, що $MN \parallel AC$, $AM = BN$, $MB = 4$ см, $NC = 9$ см, $MN = 7$ см. Знайдіть AC і BN.

406. Через довільну точку O, що лежить всередині $\triangle ABC$, проведено прямі, паралельні його сторонам (мал. 104). Скільки при цьому утворилося трикутників? Чи подібні будь-які два з них? Напишіть кілька відповідних пропорцій.

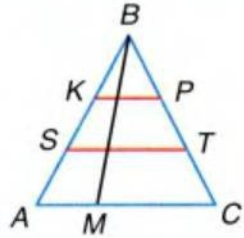


Мал. 104

407. На малюнку 105 $AB \parallel DC$ і $KC \parallel AD$. Доведіть, що $\triangle KCB \backsim \triangle DOC$.



Мал. 105



Мал. 106

408. З точки D гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC опущено перпендикуляр DE на катет BC. Доведіть, що $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$.

409. Побудуйте трикутник зі сторонами 2 см, 4 см і 5 см. Побудуйте трикутник, подібний даному з коефіцієнтом подібності k: а) $k = 2$; б) $k = \frac{1}{2}$.

410. Скільки пар подібних трикутників зображено на малюнку 106?

411. У трикутнику проведено всі його середні лінії. Скільки утворилося трикутників, подібних даному трикутнику?

412. Пряма MN, паралельна стороні AB $\triangle ABC$, ділить його сторону AC у відношенні $AM : MC = 3 : 5$. Знайдіть відношення периметрів утворених трикутників.

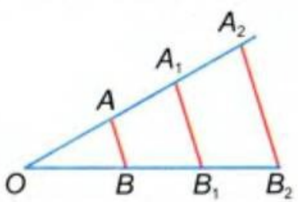
Б

413. На малюнку 107 $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Напишіть пропорції, що починаються відношеннями:

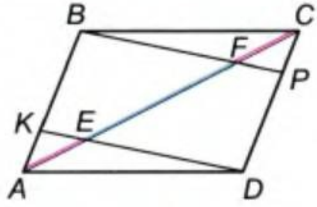
$OA : OB$, $OA : AB$, $AB : A_1B_1$, $A_2B_2 : OB_2$.

414. K і P — середини сторін BC і AD паралелограма $ABCD$. Доведіть, що: а) $AK \parallel CP$; б) відрізки AK і CP ділять діагональ BD на 3 рівні частини; в) $\triangle ABK \backsim \triangle CDP$.

415. Основи AD і BC рівнобічної трапеції дорівнюють 30 см і 20 см. Прямі AB і CD перетинаються в такій точці P, що $PB = 10$ см. Знайдіть довжини бічних сторін трапеції.



Мал. 107



Мал. 108

416. KP — середня лінія $\triangle ABC$, а MH — середня лінія $\triangle KBP$. Кожен із цих відрізків паралельний AC. Як відносяться відрізки MH і AC, AB і MB? Як відносяться периметри трикутників ABC і MBH?

417. На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ взято точки K і P такі, що $AK = CP = 0,25\ AB$. Як відносяться відрізки, на які діагональ AC паралелограма ділиться прямими KD і BP (мал. 108)?

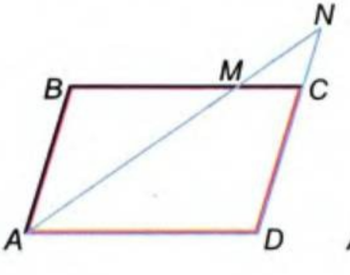
418. Побудуйте прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Паралельно гіпотенузі проведіть пряму так, щоб периметр утвореного трикутника був у 2 рази менший. Чому дорівнюють катети цього трикутника?

419. Через точку M, взяту на стороні BC паралелограма $ABCD$, проведено пряму AM (мал. 109), яка перетинає пряму CD в точці N, $AM : MN = 5 : 2$. Знайдіть периметри $\triangle AND$ і $\triangle MNC$, якщо їх різниця дорівнює 16 см.

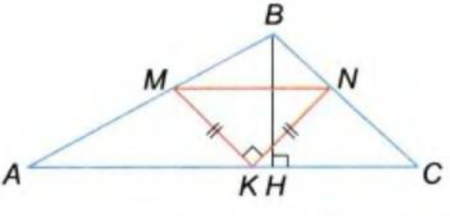
420. У $\triangle ABC$ вписано прямокутний рівнобедрений $\triangle MKN$ так, що гіпотенуза $MN \parallel AC$, а $K \in AC$ (мал. 110). Знайдіть MN, якщо $AC = 30$ см, а висота $BH = 10$ см.

421. На кожній стороні ромба лежить по одній вершині квадрата, сторони якого паралельні діагоналям ромба. Знайдіть сторону квадрата, якщо діагоналі ромба дорівнюють 8 см і 12 см.

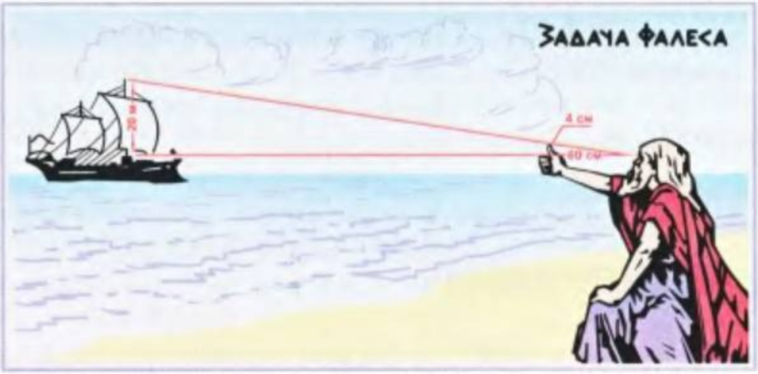
422. Задача Фалеса. Визначте відстань від берега до корабля в морі, знаючи висоту щогли. Розв'язання легко зрозуміти, скориставшись малюнком 111.



Мал. 109



Мал. 110



Мал. 111

423. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 16 см і 12 см, а бічна сторона — 7 см. На скільки треба подовжити бічні сторони, щоб вони перетнулися?

424. Основи трапеції дорівнюють 48 см і 72 см, а бічні сторони — 24 см і 22 см. На скільки треба подовжити кожну з бічних сторін, щоб вони перетнулися?

Практичне завдання

425. Визначте, під яким кутом ви бачите свій великий палець на відстані витягнутої руки (див. мал. 111).

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

426. Відрізок завдовжки 20 см поділили на частини, пропорційні числам 3, 4, 5 і 8. Знайдіть довжину кожної частини.

427. Поділіть даний відрізок на частини, пропорційні числам 2, 5 і 7.

428. У трапеції $ABCD$ $MN \parallel AD$, $M \in AB$, $N \in CD$. Знайдіть AM і BM, якщо $AB = 24$ см і $CN : ND = 5 : 7$.

429. Побудуйте прямокутний трикутник із катетами 3 см і 5 см та опишіть навколо нього коло.

430. Діагоналі паралелограма дорівнюють 10 см і 14 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін паралелограма.

§10 *Ознаки подібності трикутників*

Ознаки подібності трикутників аналогічні ознакам рівності трикутників.

! **ТЕОРЕМА 16** **Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.**

■ ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$. Доведемо, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

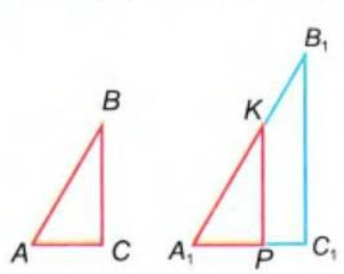
За такої умови розглядувані трикутники можуть бути рівними, а рівні трикутники — подібні. Якщо дані трикутники нерівні і, наприклад, другий більший за перший, то на стороні A_1B_1 відкладемо відрізок A_1K, що дорівнює AB (мал. 112). Провівши відрізок KP, паралельний B_1C_1, утворимо трикутник A_1KP, що дорівнює $\triangle ABC$. Адже $A_1K = AB$, $\angle A_1 = \angle A$, $\angle A_1KP = \angle B_1 = \angle B$.

За теоремою про подібні трикутники $\triangle A_1B_1C_1$ подібний $\triangle A_1KP$, а він дорівнює $\triangle ABC$. Отже, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. □

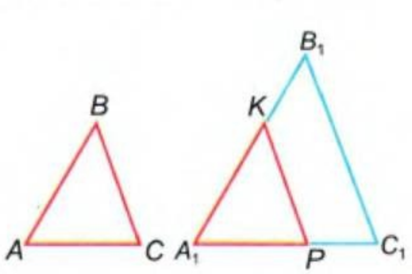
! **ТЕОРЕМА 17** **Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.**

■ ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$ і $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$. Доведемо, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.



Мал. 112



Мал. 113

Якщо дані трикутники нерівні і, наприклад, другий більший за перший, то на стороні A_1B_1 відкладемо відрізок A_1K, що дорівнює AB (мал. 113). Провівши відрізок KP, паралельний B_1C_1, утворимо трикутник A_1KP. Покажемо, що $\triangle A_1KP = \triangle ABC$. Адже в них $\angle A_1 = \angle A$, $A_1K = AB$ і $A_1P = AC$. Остання рівність випливає з двох пропорцій:

$AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$ — за умовою,

$A_1K : A_1B_1 = A_1P : A_1C_1$, бо $\triangle A_1KP \backsim \triangle A_1B_1C_1$ — за основною теоремою про подібні трикутники.

$\triangle A_1B_1C_1$ подібний $\triangle A_1KP$, а він дорівнює $\triangle ABC$. Отже, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. □

ТЕОРЕМА 18 **Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого, то такі трикутники подібні.**

ДОВЕДЕННЯ.

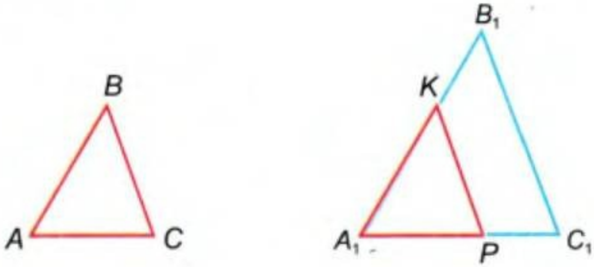
Нехай дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1$. Доведемо, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Як і в попередніх випадках, на стороні A_1B_1 другого трикутника відкладемо відрізок A_1K, що дорівнює AB (мал. 114). Провівши відрізок KP, паралельний B_1C_1, утворимо трикутник A_1KP. Покажемо, що $\triangle A_1KP = \triangle ABC$. Адже в них за побудовою $A_1K = AB$, а з рівностей

$AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1$,

$A_1K : A_1B_1 = A_1P : A_1C_1 = KP : B_1C_1$

за умови, що $A_1K = AB$, випливають рівності $A_1P = AC$ і $KP = BC$. Отже, за трьома сторонами $\triangle A_1KP = \triangle ABC$. Оскільки трикутники $\triangle A_1B_1C_1$ і $\triangle A_1KP$ подібні, то і $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. □



Мал. 114

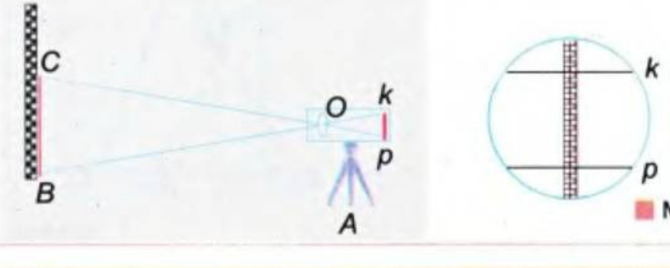
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Мал. 115

Властивості подібних трикутників використовуються в багатьох геодезичних приладах, зокрема — в далекомірах. Коли створюють план, прокладають дорогу, будують греблю, завод чи будь-яку іншу велику споруду, доводиться робити чимало вимірювань відстаней. Тепер це найчастіше роблять, користуючись далекомірами.

Уявіть, що геодезист має визначити відстань між пунктами A, в якому він перебуває, і B, в якому помічник тримає вертикальну рейку, поділену на дециметри і сантиметри (мал. 115). В об'єктиві зорової труби, в яку дивиться геодезист, є дві горизонтальні тонкі лінії k і p (мал. 116). Якщо між ними вміщається, наприклад 97 см рейки, яку тримає його помічник, це означає, що шукана відстань між ними дорівнює 97 м. Бо трикутники OBC і OKP, схематично зображені на малюнку, подібні і коефіцієнт подібності підібрано так, щоб кількість сантиметрів геодезичної рейки, що вміщуються в об'єктиві між лініями k і p, дорівнювала кількості метрів у відстані AB. При цьому додається певна стала у кілька сантиметрів.

Завдяки сучасним далекомірам можна визначати подібні відстані з точністю до сантиметра. Вимірювання таких відстаней безпосередньо мірною стрічкою чи рулеткою дає більшу похибку.



Мал. 116

Запитання і завдання для самоконтролю

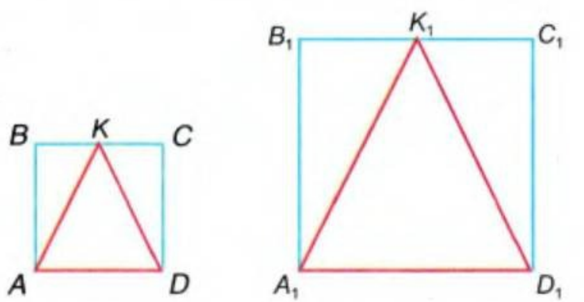
1. Які трикутники називаються подібними?
2. Сформулюйте ознаки подібності трикутників.
3. Доведіть ознаку подібності трикутників за двома кутами.
4. Доведіть ознаку подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними.
5. Доведіть ознаку подібності трикутників за трьома сторонами.

Виконаємо разом

1 $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — два квадрати (мал. 117). K і K_1 — середини їх сторін BC і B_1C_1. Чи подібні трикутники ABK і $A_1B_1K_1$? А трикутники AKD і $A_1K_1D_1$?

Кути B і B_1 трикутників ABK і $A_1B_1K_1$ рівні, бо прямі. $BK : BA = 1 : 2$ і $B_1K_1 : B_1A_1 = 1 : 2$. Тому за другою ознакою подібності $\triangle ABK \backsim \triangle A_1B_1K_1$.

З доведеного випливає, що $AK : A_1K_1 = AB : A_1B_1$. А оскільки $AK = KD$, $A_1K_1 = K_1D_1$, $AB = AD$ і $A_1B_1 = A_1D_1$, то $AK : A_1K_1 = AD : A_1D_1 = KD : K_1D_1$. За третьою ознакою подібності трикутників $\triangle AKD \backsim \triangle A_1K_1D_1$.



Мал. 117

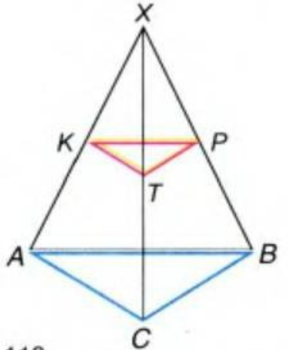
2 Нехай ABC — довільний трикутник, X — довільна точка, а K, P, T — середини відрізків XA, XB, XC (мал. 118). Доведіть, що $\triangle KPT \backsim \triangle ABC$.

Відрізки KP, PT, TK — середні лінії трикутників XAB, XBC, XCA. Тому

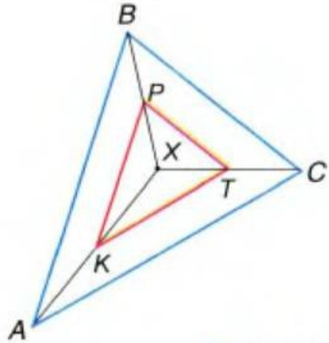
$$KP : AB = PT : BC = TK : AC = 1 : 2.$$

Сторони $\triangle ABC$ пропорційні сторонам $\triangle KPT$, тому ці трикутники подібні (за третьою ознакою).

На малюнку 118 точка X лежить поза межами трикутника ABC. Проте вона може бути і всередині трикутника (мал. 119), і на його стороні чи будь-де, навіть поза площиною ABC.



Мал. 118



Мал. 119

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

431. Чи будь-які два рівносторонні трикутники подібні? Чому?

432. Доведіть, що два будь-які прямокутні рівнобедрені трикутники подібні.

433. K, P, T — середини сторін $\triangle ABC$. Чи подібні трикутники PTK і ABC? Чому?

434. Довжини сторін одного трикутника дорівнюють a, b, c, а другого — $3a$, $3b$ і $3c$. Чи подібні ці трикутники?

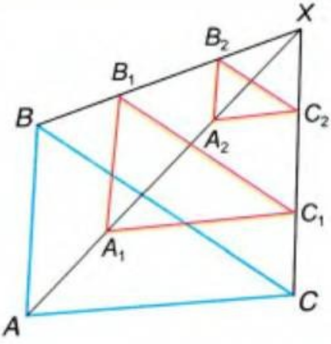
435. Чи подібні два прямокутні трикутники, якщо один з них має кут $30°$, а другий — $60°$?

436. ABC — довільний трикутник, а X — точка (мал. 120). A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2 ділять відрізки XA, XB, XC на 3 рівні частини. Доведіть, що кожний з трикутників $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ подібний $\triangle ABC$.

A

437. Чи подібні трикутники ABC і KPT, якщо $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle P = 60°$, $\angle T = 70°$?

438. Доведіть, що **два рівнобедрені трикутники подібні, якщо кут при основі одного з них дорівнює куту при основі другого трикутника.** А якщо рівні їх кути при вершинах?



Мал. 120

439. Чи подібні два трикутники, якщо їхні сторони мають довжини:
1) 2 см, 3 см, 4 см і 3 см, 4 см, 5 см;
2) 3 см, 4 см, 6 см і 9 дм, 14 дм, 18 дм;
3) 2 см, 4 см, 3 см і 10 м, 15 м, 20 м?

440. Сторони одного трикутника дорівнюють 7 м, 9 м і 11 м. Знайдіть сторони трикутника, подібного даному, якщо його найменша сторона дорівнює 28 м.

441. У двох рівнобедрених трикутниках кути при вершині мають по 52°. Чи подібні ці трикутники?

442. Кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює 50°. Кут при вершині другого рівнобедреного трикутника дорівнює 80°. Чи подібні ці трикутники?

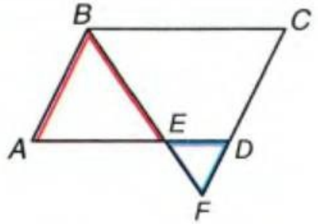
443. Чи подібні прямокутні трикутники, в одного з яких є гострий кут 42°, а в другого — гострий кут 48°?

444. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а бічна сторона — 18 см. Визначте периметр подібного трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 6 см.

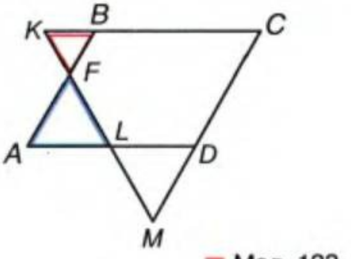
445. Всередині даного трикутника міститься другий трикутник, сторони якого паралельні сторонам даного. Чи подібні ці трикутники?

446. Дано трикутник ABC зі сторонами $AB = 40$ см і $AC = 56$ см. На AB відкладено відрізок $AD = 15$ см і проведено пряму $DE \parallel AC$. Визначте: а) DE; б) $EC : BC$.

447. Дано $ABCD$ — паралелограм (мал. 121). Доведіть, що:
а) $\triangle ABE \sim \triangle DFE$;
б) $\triangle BCF \sim \triangle EAB$.



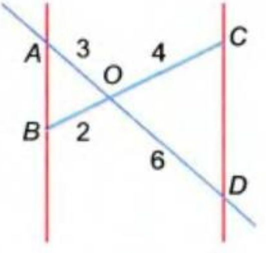
Мал. 121



Мал. 122

448. Дано $ABCD$ — паралелограм (мал. 122). Доведіть, що:
а) $\triangle KBF \backsim \triangle LAF$;
б) $\triangle KBF \backsim \triangle LDM$.
в) $\triangle AFL \backsim \triangle CMK$.

449. Користуючись малюнком 123, доведіть, що $AB \parallel CD$.



Мал. 123

450. Сторони трикутника пропорційні числам 3, 5 і 6. Визначте сторони подібного йому трикутника, в якого:
а) сума найбільшої і найменшої сторін дорівнює 18 см;
б) різниця найбільшої і найменшої сторін дорівнює 27 см;
в) середнє арифметичне сторін дорівнює 21 см;
г) периметр дорівнює 28 см.

451. У $\triangle ABC$ $AB = 15$ см, $BC = 9$ см, $AC = 12$ см. Із точки M сторони AB проведено прямі MN і MK ($N \in BC$, $K \in AC$), паралельні AC і BC. Знайдіть MN, MK, AK, якщо $AM = 5$ см.

452. Основи трапеції дорівнюють 16 см і 20 см, а діагоналі 12 см і 18 см. Знайдіть відрізки, на які діагоналі трапеції діляться в точці перетину.

453. У трикутник вписано паралелограм, кут якого збігається з кутом трикутника (мал. 124). Сторони трикутника, що утворюють цей кут, дорівнюють 6 см і 9 см, а відповідні паралельні їм сторони паралелограма пропорційні числам 2 і 3. Знайдіть сторони паралелограма.

Мал. 124

454. У трикутник вписано паралелограм, кут якого збігається з кутом трикутника. Сторони трикутника, що утворюють цей кут, дорівнюють 6 см і 15 см, а різниця відповідних паралельних їм сторін паралелограма дорівнює 8 см. Знайдіть сторони паралелограма.

Б

455. Пряма, що проходить через точку перетину діагоналей трапеції, ділить одну з її основ у відношенні $m : n$. У якому відношенні вона ділить другу основу?

456. Чи може пряма, не паралельна жодній стороні трикутника, відтинати від нього трикутник, подібний даному?

457. На сторонах AC і AB $\triangle ABC$ позначено точки K і P такі, що $\angle AKP = \angle B$. Доведіть, що $\triangle AKP \backsim \triangle ABC$.

458. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо бісектриса кута при основі відтинає від нього трикутник, подібний даному.

459. Сторону AD паралелограма $ABCD$ поділено на n рівних частин і першу точку поділу K сполучено з вершиною B (мал. 125). У якому відношенні відрізок BK ділить діагональ AC?

460. Знайдіть за малюнком 126 відстань AB, якщо $AC = 300$ м, $DC = 10$ м, $BC = 360$ м, $CF = 12$ м, $DF = 13$ м.

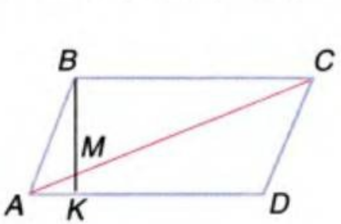
461. У трикутнику ABC проведено відрізок DE так, що $DE \parallel AC$, $D \in AB$, $E \in BC$. Знайдіть DE, якщо:

а) $AB = c,\ AC = b,\ DB = m$;

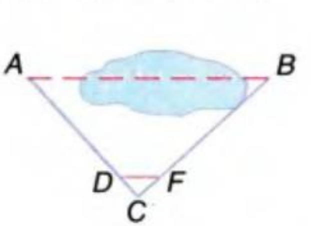
б) $AC = b,\ AB = c,\ AD = n$.

462. Доведіть, що в подібних трикутниках відповідні висоти (бісектриси, медіани) пропорційні відповідним сторонам.

463. У $\triangle ABC$ $AC = 10$ см, $BC = 12$ см. На стороні BC взято точку M так, що $\angle AMC = \angle BAC$. Знайдіть MB і MC.



Мал. 125



Мал. 126

464. У $\triangle ABC$ $AB = 18$ см, $BC = 16$ см, $AC = 24$ см. На сторонах AB і BC взято точки M і N так, що $\angle MNB = \angle BAC$ і $BN : NC = 3 : 5$. Знайдіть MN.

465. Бічні сторони трапеції дорівнюють 8 см і 12 см, а більша основа — 27 см. Знайдіть довжину меншої основи, якщо діагональ ділить трапецію на два подібні трикутники.

466. Основи трапеції дорівнюють a і b. В якому відношенні діляться діагоналі трапеції точкою їх перетину?

467. O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$, $OB = 14$ см, $OD = 18$ см, $AC = 24$ см. Знайдіть довжини відрізків OA і OC.

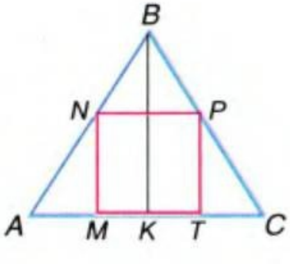
468. У трапеції точка перетину діагоналей ділить одну з діагоналей на частини 12 см і 16 см, а частина другої діагоналі дорівнює 8 см. Визначте другу діагональ і меншу основу, якщо більша основа дорівнює 20 см.

469. На скільки треба продовжити бічну сторону трапеції завдовжки 12 см, щоб вона перетнула продовження другої бічної сторони, якщо основи трапеції пропорційні числам 5 і 9?

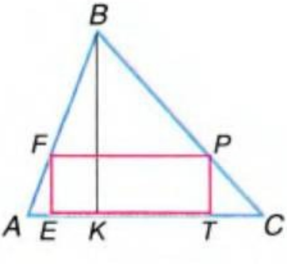
470. Знайдіть відстані від точки перетину діагоналей до основ трапеції, які дорівнюють 8 см і 12 см, якщо висота трапеції дорівнює 15 см.

471. У рівнобедрений $\triangle ABC$ з основою $AC = 10$ см і висотою $BK = 6$ см вписано квадрат (мал. 127). Знайдіть периметр квадрата.

472. У $\triangle ABC$ зі стороною $AC = 27$ см і висотою $BK = 30$ см вписано прямокутник (мал. 128). Знайдіть сторони прямокутника, якщо вони пропорційні числам 5 і 9.



Мал. 127



Мал. 128

Практичне завдання

473. Виріжте з паперу два подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Розташуйте їх на столі так, щоб прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетиналися в одній точці. Скількома способами це можна зробити?

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

474. Чи подібні два квадрати, якщо їх периметри різні? А два прямокутники?

475. Радіус одного кола дорівнює 5 см, а діаметр другого 14 см. Чи подібні ці кола? Якщо так, то знайдіть коефіцієнт подібності.

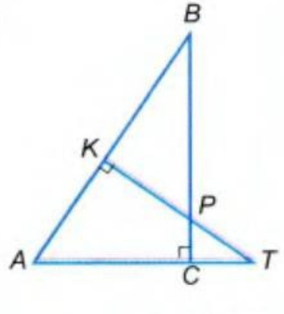
476. Визначте висоту дерева, якщо довжина тіні від нього дорівнює 25 м, а довжина тіні людини зростом 1,8 м дорівнює 3,6 м.

477. Знайдіть радіус кола, вписаного у прямокутний трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см.

478. Зовнішні кути трикутника пропорційні числам 2, 3 і 4. Знайдіть внутрішні кути трикутника.

До самостійної роботи 3

Для виконання самостійної роботи № 3 використайте малюнок 129.



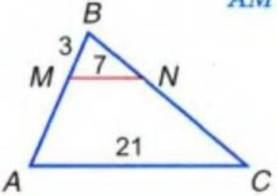
Мал. 129

• *Задачі за готовими малюнками*

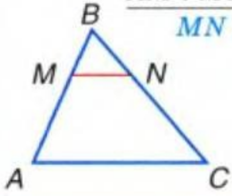
	А	Б

1

А. $MN \parallel AC$. Знайти: AM

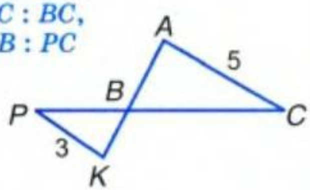


Б. $MN \parallel AC$, $AM : MB = 3 : 2$. Знайти: $MN : AC$

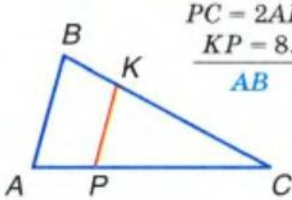


2

А. $KP \parallel AC$. Знайти: $PC : BC$, $PB : PC$

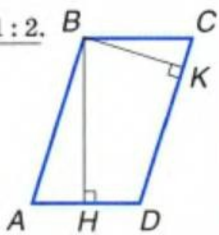


Б. $KP \parallel AB$, $PC = 2AP$, $KP = 8$. Знайти: AB

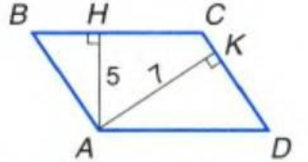


3

А. ▱$ABCD$, $BK : BH = 1 : 2$. Знайти: $AB : BC$

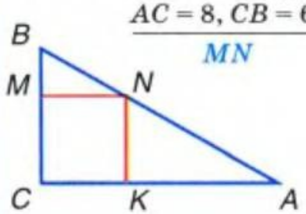


Б. ▱$ABCD$, $AB + BC = 36$. Знайти: AB, AD

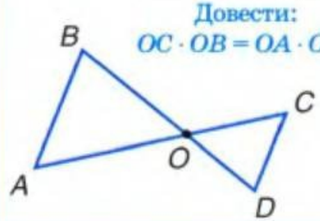


4

А. $CMNK$ — квадрат, $AC = 8$, $CB = 6$. Знайти: MN



Б. $AB \parallel CD$. Довести: $OC \cdot OB = OA \cdot OD$.



Самостійна робота 3

Варіант 1

1°. На сторонах AB і AC $\triangle ABC$ взято точки M і N так, що $MN \parallel BC$. Знайдіть MN, якщо $AM = 6$ см, $BM = 4$ см, $BC = 15$ см.

2°. Вкажіть трикутники, подібні $\triangle ABC$, і доведіть, що вони подібні (див. мал. 129).

3•. Побудуйте відрізок завдовжки 9 см, поділіть його на частини, пропорційні числам 2 і 3, і знайдіть довжину кожної частини.

Варіант 2

1°. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ взято точки E і F так, що $EF \parallel AC$. Знайдіть AB, якщо $EF = 5$ см, $BE = 4$ см, $AC = 8$ см.

2°. Вкажіть трикутники, подібні $\triangle AKT$, і доведіть, що вони подібні (див. мал. 129).

3•. Побудуйте відрізок завдовжки 10 см, поділіть його на частини, пропорційні числам 5 і 7, і знайдіть довжину кожної частини.

Варіант 3

1°. На сторонах AC і BC $\triangle ABC$ взято точки K і P так, що $PK \parallel AB$. Знайдіть AB, якщо $CK = 5$ см, $AK = 4$ см, $PK = 3$ см.

2°. Вкажіть трикутники, подібні $\triangle KBP$, і доведіть, що вони подібні (див. мал. 129).

3•. Побудуйте відрізок завдовжки 8 см, поділіть його на частини, пропорційні числам 3 і 4, і знайдіть довжину кожної частини.

Варіант 4

1°. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ взято точки D і E так, що $DE \parallel AC$. Знайдіть BE, якщо $AD = 7$ см, $BD = 3$ см, $BC = 15$ см.

2°. Вкажіть трикутники, подібні $\triangle CPT$, і доведіть, що вони подібні (див. мал. 129).

3•. Побудуйте відрізок завдовжки 6 см, поділіть його на частини, пропорційні числам 4 і 5, і знайдіть довжину кожної частини.

Тестові завдання 3

Для виконання завдань скористайтеся малюнком 130.

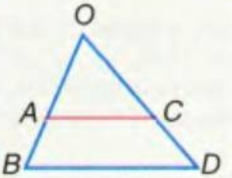
1. Знайдіть відношення $OC : CD$, якщо $AB : AO = 2 : 3$.
а) 2 : 3; б) 2 : 5; в) 3 : 2; г) 3 : 5.

2. Знайдіть AO, якщо $OC : CD = 5 : 3$, $BO = 16$ см.
а) 10 см; б) 6 см; в) 12 см; г) 5 см.

3. Знайдіть відношення $AO : AB$, якщо $AC : BD = 3 : 5$.
а) 3 : 2; б) 2 : 3; в) 3 : 5; г) 5 : 3.

4. $AO = 4$ см, $AB = 3$ см, $OC = 8$ см. Знайдіть CD.
а) 8 см; б) 6 см; в) 12 см; г) 3 см.

5. $OA : AB = 3 : 2$. Яке з тверджень хибне?
а) $OC : CD = 3 : 2$;
б) $OA : OB = 3 : 5$;
в) $AC : BD = 3 : 2$;
г) $OD : OC = 5 : 3$.



Мал. 130

6. $AO = 4$ см, $AB = 3$ см. Знайдіть периметр Δ OAC, якщо $P_{\Delta BOD} = 21$ см.
а) 12 см;
б) 36,75 см;
в) 28 см;
г) 15,75 см.

7. Знайдіть коефіцієнт подібності трикутників OBD і OAC, якщо $OA = 10$ см, $AB = 6$ см.
а) $k = \frac{5}{3}$; б) $k = \frac{3}{5}$; в) $k = \frac{8}{3}$; г) $k = \frac{8}{5}$.

8. Через точку C проведено пряму, паралельну AB. Скільки подібних трикутників буде на малюнку?
а) 2; б) 3; в) 4; г) жодного.

9. $AO = 5$ см, $AB = 3$ см, $AC = 6$ см. Знайдіть BD.
а) 9,6 см; б) 3,6 см; в) 10 см; г) 4,25 см.

10. $AC = 5$ см, $BD = 7$ см. Знайдіть CD, якщо $OD = 14$ см.
а) 10 см; б) $8\frac{1}{6}$ см; в) 4 см; г) $5\frac{5}{6}$ см.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Побудуйте відрізок завдовжки 7 см і поділіть його на відрізки, пропорційні числам 2, 3 і 5.

2°. Чи подібні трикутники, якщо їх сторони мають довжини: а) 2 см, 6 см, 7 см і 10 см, 35 см, 30 см; б) 2 см, 6 см, 7 см і 3 см, 9 см, 10,5 см?

3°. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть невідомі сторони трикутників, якщо $AB = 15$ см, $BC = 17$ см, $A_1B_1 = 30$ см, $A_1C_1 = 48$ см.

4°. Через точку O перетину діагоналей трапеції $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає основи AD і BC у точках M і N відповідно. Доведіть, що $\triangle AOM \backsim \triangle CON$.

5•. Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 5 см і 7 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 75 см.

6•. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 10 см, а бічні сторони 4 см і 7 см. На скільки треба продовжити бічні сторони, щоб вони перетнулися?

7•. З вершини тупого кута паралелограма на його сторони опущено перпендикуляри завдовжки 5 см і 8 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 78 см.

8•. У $\triangle ABC$ (мал. 131) зі сторонами $AB = 12$ см і $AC = 15$ см вписано паралелограм так, що один кут у них спільний. Знайдіть сторони паралелограма, якщо одна з них на 6 см більша за другу.

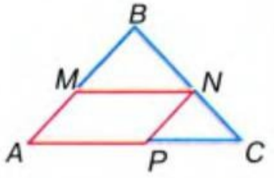


Рис. 131

9•. AM і A_1M_1 — медіани подібних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle AMC \backsim \triangle A_1M_1C_1$.

10•. Продовження бічних сторін AB і DC трапеції $ABCD$ перетинаються в точці H так, що $AB : BH = 2 : 3$. Знайдіть основи трапеції, якщо $AD - BC = 12$ см.

§11 *Застосування подібності трикутників*

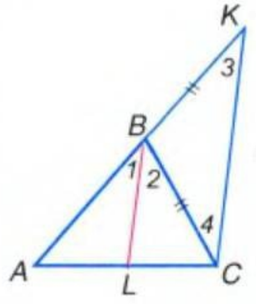
Властивості подібності трикутників можна застосовувати до доведення теорем і розв'язування багатьох задач. Розглянемо, як на основі ознак подібності можна доводити важливі властивості бісектрис і медіан трикутника, хорд кола, а також розв'язувати задачі на побудову методом подібності.

! **ТЕОРЕМА 19** **Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай ABC — довільний трикутник, а BL — його бісектриса (мал. 132). Покажемо, що $AL : LC = AB : BC$.

Проведемо пряму CK, паралельну BL, до перетину з прямою AB в деякій точці K. Занумеруємо кути, як на малюнку. Тоді $\angle 1 = \angle 3$, як відповідні кути при паралельних прямих BL і KC і січній AK, $\angle 2 = \angle 4$, як різносторонні внутрішні кути при тих самих паралельних прямих і січній BC. Оскільки $\angle 1 = \angle 2$, то і $\angle 3 = \angle 4$, тобто трикутник BKC — рівнобедрений, $BK = BC$.



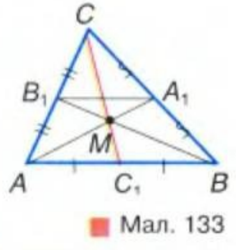
Мал. 132

За узагальненою теоремою Фалеса $AL : LC = AB : BK$. Замінивши в пропорції BK рівним йому відрізком BC, матимемо $AL : LC = AB : BC$. □

! **ТЕОРЕМА 20** **Усі три медіани трикутника проходять через одну точку і діляться цією точкою у відношенні 1 : 2.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M (мал. 133). A_1B_1 — середня лінія $\triangle ABC$, тому $A_1B_1 \parallel AB$ і $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$. $\triangle MAB \sim \triangle MA_1B_1$ за двома кутами, звідки $A_1M : MA = B_1M : MB = A_1B_1 : AB = 1 : 2$. Отже, медіани AA_1 і BB_1 точкою перетину діляться у відношенні 1 : 2.



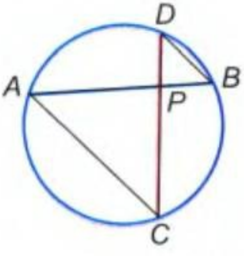
Мал. 133

Медіани AA_1 і CC_1 точкою перетину також діляться у відношенні 1 : 2. А точка, яка ділить медіану AA_1 у відношенні 1 : 2, починаючи від основи, одна — точка M. Отже, і медіана CC_1 проходить через точку M і ділиться нею у відношенні 1 : 2. □

ТЕОРЕМА 21 **Добутки відрізків хорд одного кола, що перетинаються, рівні.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай хорди AB і CD перетинаються в точці P (мал. 134). Проведемо відрізки AC і BD. За властивістю вписаних кутів $\angle A = \angle D$ і $\angle C = \angle B$, тому трикутники ACP і DBP подібні. Отже, $AP : DP = CP : BP$, звідки $AP \cdot BP = CP \cdot DP$. А це й треба було довести. □



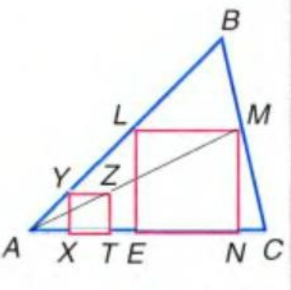
Мал. 134

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Знаючи ознаки подібності трикутників, можна розв'язувати багато важливих задач на побудову. Розглянемо одну з таких задач.

ЗАДАЧА. У даний трикутник впишіть квадрат так, щоб дві його вершини лежали на основі трикутника, а дві — на бічних сторонах.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай AC — основа даного $\triangle ABC$ (мал. 135). Побудуємо спочатку який-небудь квадрат $XYZT$ так, щоб $X \in AC$, $T \in AC$, $Y \in AB$. Потім знайдемо точку M перетину променя AZ зі стороною BC. Через M проводимо пряму ML, паралельну AC, до її перетину з AB в точці L. Нарешті, опускаємо перпендикуляри MN і LE на AC. Чотирикутник $ELMN$ — той, який треба було побудувати. Справді, цей чотирикутник — квадрат, бо коли $TZ = ZY$, то і $NM = ML$ (доведіть це), дві його вершини E і N лежать на основі AC трикутника, а дві — на бічних сторонах.



Мал. 135

Якщо при основі даного трикутника немає тупого кута, задача має один розв'язок. Якщо кут A або C — тупий, задача розв'язку не має.

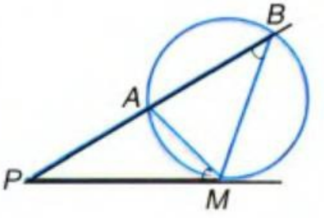
Такий метод розв'язування геометричних задач називають *методом подібності*.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які два трикутники називаються подібними?
2. Сформулюйте ознаки подібності трикутників.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про властивість бісектриси трикутника.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про властивість медіан трикутника.
5. Сформулюйте і доведіть теорему про властивість хорд, що перетинаються.

Виконаємо разом

1 **Якщо з однієї точки P, що поза колом, провести до кола дотичну PM і січну, яка перетинає коло в точках A і B, то $PA \cdot PB = PM^2$.** Доведіть.



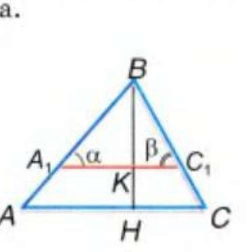
Мал. 136

Сполучивши точку M з A і B відрізками, одержимо трикутники PAM і PMB. Вони подібні, бо мають спільний кут P і $\angle B = \angle AMP$. Отже,

$$PA : PM = PM : PB, \text{ звідки } PA \cdot PB = PM^2.$$

2 Побудуйте трикутник за двома кутами α і β та висотою h, проведеною з вершини третього кута.

Побудуємо довільний трикутник $\triangle A_1BC_1$ з кутами α і β (мал. 137) та проведемо його висоту BK. На промені BK відкладемо відрізок $BH = h$ і через точку H проведемо пряму, паралельну стороні A_1C_1, яка перетинає прямі A_1B і BC_1 відповідно у точках A і C. $\triangle ABC$ — шуканий, бо $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$ і $BH = h$.

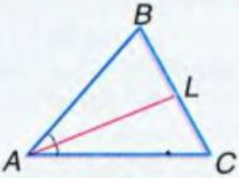


Мал. 137

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

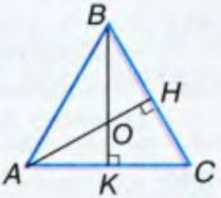
479. AL — бісектриса $\angle A$ $\triangle ABC$ і $AB = 0,6\,AC$ (мал. 138). Знайдіть:
а) відношення $BL : LC$;
б) відношення $BL : BC$;
в) BL, якщо $CL = 15$ см;
г) CL, якщо $BL = 12$ см.



Мал. 138

480. Порівняйте відрізки, на які бісектриса BM $\triangle ABC$ ділить сторону AC, якщо $AB > BC$.

481. В якому відношенні діляться висоти рівностороннього трикутника точкою перетину (мал. 139)?



Мал. 139

482. Чи можуть бісектриси рівностороннього трикутника точкою перетину ділитися на частини 2 см і 8 см, 5 см і 10 см?

483. Через точку перетину медіан трикутника проведено пряму, паралельну одній зі сторін. У якому відношенні ця пряма ділить інші сторони трикутника?

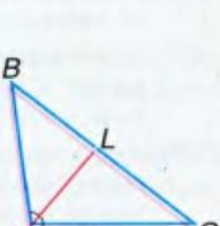
А

484. AL — бісектриса $\angle A$ $\triangle ABC$ (мал. 140). Знайдіть:
а) BL і LC, якщо $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см;
б) AC, якщо $AB = 16$ см і $BL : LC = 4 : 5$;
в) $P_{\triangle ABC}$, якщо $BL = 3$ см, $CL = 5$ см, $AC - AB = 4$ см;
г) BC, якщо $AB = 15$ см, $AC = 12$ см і BL на 2 см більша за CL.

485. Чи є BK бісектрисою $\triangle ABC$, якщо $AB = 15$ см, $BC = 20$ см, $AK = 12$ см, $CK = 16$ см?

486. Бісектриса одного кута прямокутника $ABCD$ ділить діагональ на відрізки, пропорційні числам 5 і 9. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 140 см.

487. Діагональ AC трапеції $ABCD$ є бісектрисою гострого кута A. В якому відношенні вона ділить другу діагональ, якщо основи трапеції дорівнюють 6 см і 10 см?



Мал. 140

488. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 24 см, а бічна сторона 20 см. Знайдіть, в якому відношенні бісектриса кута при основі ділить висоту, проведену до основи. Знайдіть довжини цих відрізків, якщо висота дорівнює 16 см.

489. У рівнобедреному $\triangle ABC$ $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо висота BH дорівнює 8 см.

490. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола ділить висоту, проведену до основи, у відношенні 5 : 12, а бічна сторона дорівнює 36 см. Знайдіть периметр трикутника.

491. Висота рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть радіуси вписаного і описаного кіл.

492. У трикутнику зі сторонами 12 см, 15 см і 21 см через точку перетину медіан проведено пряму, паралельну одній зі сторін. Обчисліть сторони утвореного трикутника.

493. Медіани трикутника дорівнюють 12 см, 15 см і 18 см. Знайдіть довжини частин, на які вони діляться точкою їх перетину.

494. Хорди AB і CD перетинаються в точці M. Знайдіть CM, якщо $AM = 8$ см, $BM = 3$ см, $DM = 6$ см.

495. Хорди AB і CD перетинаються в точці F так, що $FB - FC = 5$ см, $AF = 10$ см, $FD = 12$ см. Знайдіть довжини хорд.

496. Хорди AB і CD перетинаються в точці M, яка ділить хорду AB на відрізки, пропорційні числам 1 і 3. Знайдіть їх довжини, якщо $CM = 9$ см, $DM = 12$ см.

497. Хорди MN і EF перетинаються в точці K, яка ділить хорду MN навпіл. Знайдіть MN, якщо $KE = 4$ см, $KF = 16$ см.

498. З точки до кола проведено січну і дотичну. Визначте довжину січної, якщо дотична дорівнює 12 см, а зовнішня частина січної 8 см.

499. З точки до кола проведено січну і дотичну. Знайдіть довжину дотичної, якщо внутрішня частина січної дорівнює 9 см, а зовнішня частина на 7 см більша.

500. З точки до кола проведено січну і дотичну. Відношення внутрішньої і зовнішньої частин січної дорівнює 8 : 1, а довжина дотичної 12 см. Знайдіть довжину січної.

501. Побудуйте прямокутник, сторони якого пропорційні числам 3 і 4, а діагональ дорівнює 10 см.

Б

502. Бісектриси кутів B і C прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці K, $K \in AD$. Знайдіть, на які відрізки бісектриса кута B ділить діагональ AC, якщо $AC = 18$ см.

503. Користуючись умовою попередньої задачі, доведіть, що бісектриси кутів B і D ділять діагональ AC на три рівні відрізки.

504. У $\triangle ABC$ вписано ромб $AMNK$ так, що $\angle A$ в них спільний і $N \in BC$. Точка N ділить сторону BC на відрізки, різниця яких дорівнює 4 см. Знайдіть BC, якщо $AB = 10$ см, $AC = 15$ см.

505. E — середина дуги BC кола, описаного навколо $\triangle ABC$ зі сторонами $AB = 15$ см, $BC = 18$ см, $AC = 12$ см. Знайдіть відрізки, на які пряма AE ділить BC.

506. У трикутник зі сторонами 10 см, 14 см і 18 см вписано півколо, яке дотикається до двох сторін трикутника і центр якого лежить на більшій стороні. Знайдіть, на які частини центр кола ділить більшу сторону.

507. У трикутник зі сторонами 4 см, 16 см і 18 см вписано ромб, який має з трикутником спільний найбільший кут. Знайдіть відрізки, на які вершина ромба ділить найбільшу сторону.

508. У рівнобедреному трикутнику, периметр якого 72 см, радіус вписаного кола становить $\frac{5}{18}$ висоти, проведеної до основи. Знайдіть сторони трикутника.

509. Через точку перетину медіан трикутника проведено пряму, паралельну одній зі сторін. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що міститься між сторонами трикутника, якщо середня лінія трикутника, паралельна їй, дорівнює 4 см.

510. Знайдіть довжини медіан трикутника, якщо відстані від точки їх перетину до вершин трикутника дорівнюють 26 см, 14 см і 18 см.

511. Знайдіть довжини висот трикутника, якщо відстані від точки перетину медіан трикутника до його сторін дорівнюють 5 см, 7 см і 8 см.

512. Знайдіть довжини хорд AB і CD, які перетинаються в точці K так, що $AK = 18$ см, $CK = 20$ см, $KB + KD = 19$ см.

513. Точка P розташована всередині кола радіуса 11 см, віддалена від центра на 5 см і ділить хорду AB у відношенні 2 : 3. Знайдіть довжину хорди AB.

514. Бісектриси кутів при основі рівнобедреного трикутника перетинають бічні сторони в точках P і K. Знайдіть PK, якщо довжина бічної сторони дорівнює m, а довжина основи n.

515. AK — бісектриса $\triangle ABC$ — ділить сторону BC на відрізки, один з яких дорівнює одній зі сторін AB чи AC. Знайдіть BC, якщо $AB = 16$ см, $AC = 20$ см.

516. У даний трикутник впишіть прямокутник, сторони якого пропорційні числам 2 і 3, так, щоб одна його сторона лежала на основі трикутника, а дві інші вершини — на бічних сторонах.

517. У даний трикутник впишіть ромб так, щоб один кут у них був спільний, а протилежна вершина ромба лежала на стороні, протилежній до цього кута.

518. Побудуйте трикутник, кути якого дорівнюють 40° і 70°, а висота, проведена з вершини третього кута, дорівнює 5 см.

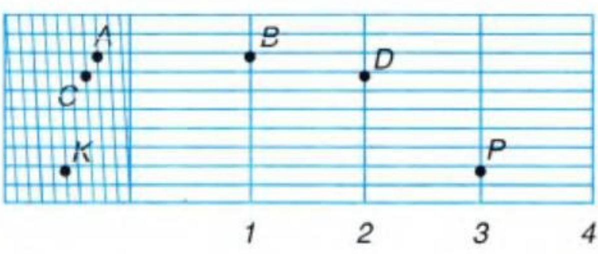
519. Побудуйте трикутник за двома кутами і бісектрисою, проведеною з вершини меншого із цих кутів.

520. Побудуйте трикутник за двома кутами і висотою, проведеною з вершини третього кута.

521. Побудуйте трикутник ABC за даною медіаною AM і відношенням $AB : AC = 2 : 3$, якщо $AB = BC$.

522. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і відношенням катетів.

523. На малюнку 141 зображено лінійку з поперечним масштабом, якою можна виміряти відстані з точністю до 0,1 мм. Знайдіть відстані AB, CD, KP. Відповідь поясніть.



Мал. 141

Практичне завдання

524. Накресліть два подібні трикутники, щоб сторони одного з них були вдвічі більшими за відповідні сторони другого. Проведіть усі їхні медіани і з'ясуйте, як відносяться їх довжини. Те саме — стосовно бісектрис і висот. Сформулюйте висновок.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

525. Сторони трикутника пропорційні числам 4, 5 і 8. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо його периметр дорівнює 34 см.

526. Кути $\triangle ABC$ пропорційні числам 3, 5 і 10. Один з кутів $\triangle MNK$ на 20° більший за другий і на 50° менший за третій. Чи подібні ці трикутники?

527. Діагоналі трапеції точкою перетину діляться у відношенні 3 : 5. Як відносяться основи трапеції?

528. Довжина тіні від вишки 14 м, а від вертикальної двометрової палиці 1 м. Знайдіть висоту вишки.

529. Діагональ прямокутника утворює зі стороною кут 17°. Знайдіть кутові міри дуг, на які вершини прямокутника розбивають описане навколо нього коло.

§12 *Подібність прямокутних трикутників*

Один кут у кожному прямокутному трикутнику прямий, а всі прямі кути рівні. Тому з двох перших загальних ознак подібності трикутників (див. с. 88) випливають такі ознаки подібності прямокутних трикутників.

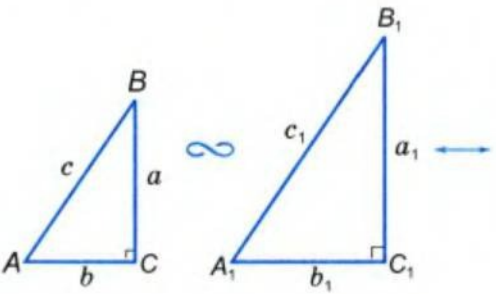
! **Два прямокутні трикутники подібні, якщо гострий кут одного дорівнює гострому куту другого трикутника.**

Два прямокутні трикутники подібні, якщо катети одного пропорційні катетам другого трикутника.

Правильна і така ознака.

! **Два прямокутні трикутники подібні, якщо катет і гіпотенуза одного пропорційні катету і гіпотенузі другого трикутника.**

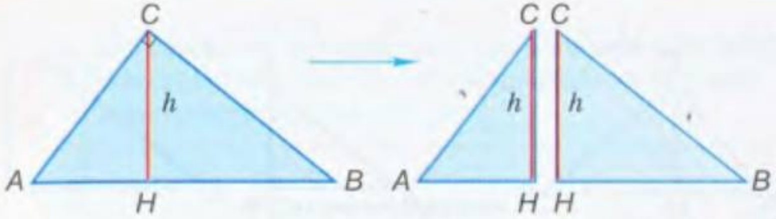
Схематично три сформульовані ознаки подібності прямокутних трикутників можна зобразити так (мал. 142):



$$\left\{\begin{array}{c} \angle A = \angle A_1 \\ \text{або} \\ a : b = a_1 : b_1 \\ \text{або} \\ a : c = a_1 : c_1 \end{array}\right.$$

Мал. 142

Цікаву властивість має висота h прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи (мал. 143). Вона розбиває даний трикутник на два менші прямокутні трикутники, подібні даному. Якщо кут C трикутника ABC прямий, а CH — висота, то кожний з трикутників ACH і CBH подібний $\triangle ABC$. Адже $\triangle ACH$ і $\triangle ABC$ мають спільний кут A, а трикутники CBH і ABC — спільний кут B. Кожний із цих прямокутних трикутників



Мал. 143

подібний кожному іншому з них. Позначивши їх літерами T_C, T_A і T_B, схематично це можна зобразити так:

Важливу роль у геометрії відіграють теореми про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику. Нагадаємо, що відрізок або число x називають середнім пропорційним відрізків або чисел a і b, якщо правильною є пропорція $a : x = x : b$ (або рівнозначні їй рівності $x^2 = ab$, $x = \sqrt{ab}$).

! **ТЕОРЕМА 22** **Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним відрізків, на які ця висота ділить гіпотенузу.**

ДОВЕДЕННЯ.

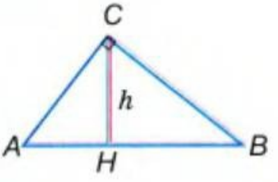
Оскільки висота h розбиває прямокутний трикутник ABC на подібні йому трикутники ACH і CBH (мал. 144), то $AH : h = h : HB$. А це означає, що відрізок h — середній пропорційний відрізків AH і HB. □

! **ТЕОРЕМА 23** **Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним гіпотенузи і проекції цього катета на гіпотенузу.**

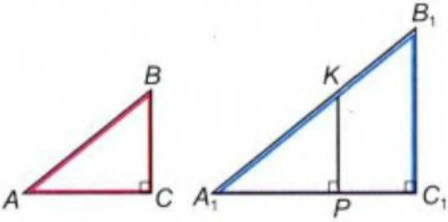
Наприклад, $AC^2 = AB \cdot AH$ (мал. 144).

ДОВЕДЕННЯ.

Оскільки $\triangle ACH \sim \triangle ABC$, то $AH : AC = AC : AB$, звідки $AC^2 = AB \cdot AH$. □



Мал. 144



Мал. 145

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Доведемо третю ознаку подібності прямокутних трикутників, сформульовану вище.

ТЕОРЕМА 24 **Два прямокутні трикутники подібні, якщо катет і гіпотенуза одного пропорційні катету і гіпотенузі другого трикутника.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ такі, в яких кути C і C_1 прямі, а $BC : AB = B_1C_1 : A_1B_1$ (мал. 145). Доведемо, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Якщо, наприклад, $A_1B_1 > AB$, то на стороні A_1B_1 відкладемо відрізок $A_1K = AB$ і з точки K опустимо перпендикуляр KP на пряму A_1C_1. $KP \parallel B_1C_1$, тому згідно з основною теоремою про подібність трикутників $\triangle A_1KP \backsim \triangle A_1B_1C_1$, тобто $KP : A_1K = B_1C_1 : A_1B_1$. Оскільки $A_1K = AB$, то $KP : AB = B_1C_1 : A_1B_1$. За умовою $BC : AB = B_1C_1 : A_1B_1$, тому $KP = BC$. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1KP$ — за гіпотенузою і катетом. Крім того, $\triangle A_1KP \backsim \triangle A_1B_1C_1$, тому $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. □

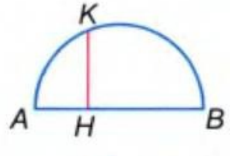
? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте три загальні ознаки подібності трикутників.
2. Сформулюйте ознаки подібності прямокутних трикутників.
3. Яку властивість має висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута?

4. Що називають середнім пропорційним двох відрізків?
5. Наведіть приклади середніх пропорційних відрізків у прямокутному трикутнику.

Виконаємо разом

1 Знайдіть довжину перпендикуляра KH, опущеного з деякої точки K кола на діаметр AB, якщо $AH = 3$ см, $HB = 12$ см (мал. 146).

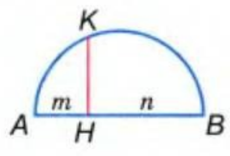


Мал. 146

Сполучимо точку K відрізками з A і B. Оскільки кут AKB вписаний і спирається на діаметр кола, то він прямий. KH — висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи. Згідно з теоремою 22 вона є середнім пропорційним відрізків AH і HB.

$$KH^2 = AH \cdot HB = 3 \text{ см} \cdot 12 \text{ см} = 36 \text{ см}^2,\ KH = 6 \text{ см}.$$

2 Побудуйте відрізок, який є середнім пропорційним відрізків m і n.



Мал. 147

Побудова. Спосіб побудови зрозумілий з попередньої задачі. Відкладаємо на прямій відрізки AH і HB, що дорівнюють m і n, і на AB, як на діаметрі, описуємо півколо (мал. 147). З точки H проводимо пряму, перпендикулярну до AB, і визначаємо точку K перетину цієї прямої з півколом. Відрізок KH — той, який треба було побудувати, бо згідно з теоремою 22 $KH^2 = AH \cdot HB = m \cdot n$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

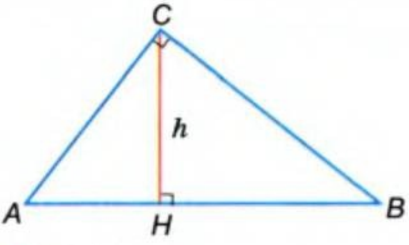
ВИКОНАЙТЕ УСНО

Вправи 530–536 виконайте за малюнком 148.

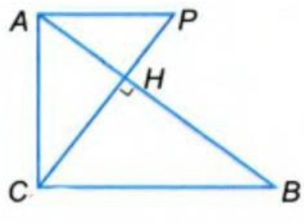
530. Назвіть усі висоти прямокутного трикутника ABC. Яка з них найменша? Чому?

531. Назвіть проекцію катета AC на гіпотенузу AB, на пряму CH, на пряму BC.

532. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle ACH = 30°$.



Мал. 148



Мал. 149

533. Чому подібні трикутники ACH і CBH?

534. Знайдіть $BC : CH$, $HA : AC$ і $AC : AB$, якщо $\angle A = 60°$.

535. Чи те саме означають вислови:

«висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи»;

«висота прямокутного трикутника, проведена з вершини його прямого кута»;

«найменша висота прямокутного трикутника»?

А

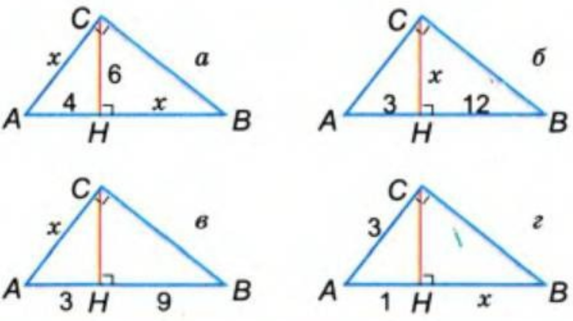
536. За малюнком 148 знайдіть кути трикутника ABC, якщо:
а) $\angle HCB = 75°$; б) $\angle B = 35°$; в) $\angle ACH = n°$.

537. Знаючи, що $AC \perp AP$, $AC \perp CB$, $\angle ACP = 40°$ (мал. 149), знайдіть:

а) $\angle B$; б) $\angle P$; в) $\angle HAC - \angle HCB$.

538. Скільки різних трикутників зображено на малюнку 149? Чи всі ці трикутники подібні один одному? Чому?

539. Знайдіть довжини відрізків, позначених на малюнку 150 (*а*, *б*, *в* і *г*) буквою x.



Мал. 150

540. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а один з гострих кутів — 60°. Знайдіть проекції катетів на гіпотенузу.

541. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°, а проекція меншого катета на гіпотенузу 5 см. Знайдіть проекцію більшого катета на гіпотенузу і найменшу висоту трикутника.

542. Знайдіть довжину перпендикуляра, опущеного з вершини прямокутника на діагональ, якщо він ділить цю діагональ на відрізки завдовжки 4 см і 9 см.

543. Знайдіть проекції сторін прямокутника на його діагональ завдовжки 18 см, яка зі стороною прямокутника утворює кут 30°.

544. Перпендикуляр, опущений з центра ромба на його сторону, ділить її на відрізки завдовжки 3 см і 12 см. Знайдіть відстань між протилежними сторонами ромба.

545. MH — перпендикуляр, опущений із середини сторони AC рівностороннього трикутника ABC на його сторону BC. Знайдіть відношення:

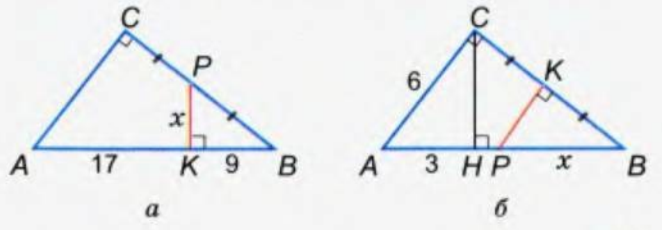
а) $MH : BM$; б) $BH : HC$.

Б

546. За двома даними елементами прямокутного трикутника знайдіть значення довжини x (мал. 151).

547. Один з гострих кутів прямокутного трикутника на 18° більший за другий. Знайдіть відношення мір кутів, утворених найменшою висотою трикутника з його катетами.

548. Відстань між протилежними сторонами ромба дорівнює a, а проекція його меншої діагоналі на сторону — c. Обчисліть сторони ромба, якщо $a = 18$ см, $c = 8$ см.



Мал. 151

549. Доведіть, що в кожному прямокутному трикутнику відношення квадратів катетів дорівнює відношенню їх проекцій на гіпотенузу.

550. Доведіть, що діаметр кола, вписаного в рівнобічну трапецію, є середнім пропорційним основ трапеції.

551. Катети прямокутного трикутника відносяться як 2 : 3, а висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 42 дм. Знайдіть проекції катетів на гіпотенузу.

552. Гіпотенуза трикутника дорівнює 122 дм, а катети відносяться як 5 : 6. Знайдіть проекції катетів на гіпотенузу.

553. Знайдіть довжину гіпотенузи, якщо катети відносяться як 2 : 3, а проекція одного катета на гіпотенузу на 2 см більша за проекцію другого.

554. Кут C $\triangle ABC$ прямий, проекції гіпотенузи AB на прямі AC і BC дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть проекції катетів на гіпотенузу.

555. Побудуйте два відрізки, знаючи їх суму та їх середнє пропорційне.

556. Побудуйте два відрізки, знаючи їх різницю та їх середнє пропорційне.

557. Доведіть, що **в кожному прямокутному трикутнику добуток катетів дорівнює добутку його найменшої висоти і гіпотенузи.**

558. Доведіть геометрично нерівність: якщо $a > 0$ і $b > 0$, то

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

559. Знайдіть кути трикутника, якщо їх міри пропорційні числам 3, 4 і 5.

560. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо один з них на 30° більший за другий.

561. Знайдіть периметр ромба з кутом 30°, описаного навколо кола радіуса $r = 3$ см.

562. Доведіть, що висота рівностороннього трикутника втричі більша за радіус вписаного кола.

563. Знайдіть довжину хорди, перпендикулярної до діаметра кола, що ділить його на відрізки 2 дм і 8 дм.

§13 Теорема Піфагора

Один з відомих геометрів XX ст. академік О. Д. Александров писав: «Теорема Піфагора — це головна і найкраща теорема геометрії». Доводити її можна різними способами, найкраще — з використанням властивостей подібних трикутників.

ТЕОРЕМА 25 (Піфагора). **У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай ACB – довільний прямокутний трикутник, а CH — висота, проведена з вершини прямого кута C (мал. 152). Позначимо: $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AH = b_1$, $BH = a_1$.

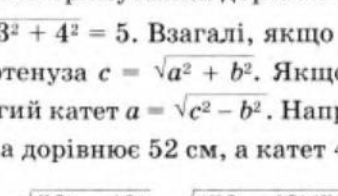
Оскільки $\triangle AHC \backsim \triangle ACB$, то $b_1 : b = b : c$, звідки $b^2 = cb_1$.

Оскільки $\triangle CHB \backsim \triangle ACB$, то $a_1 : a = a : c$, звідки $a^2 = ca_1$.

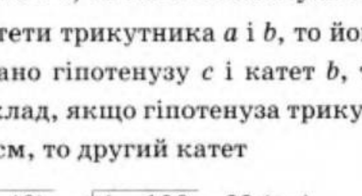
Отже, $a^2 + b^2 = ca_1 + cb_1 = c(a_1 + b_1) = c^2$, тобто $c^2 = a^2 + b^2$. □

Теорема Піфагора дає змогу за двома будь-якими сторонами прямокутного трикутника знайти третю. Наприклад, якщо катети трикутника дорівнюють 3 і 4, то його гіпотенуза $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Взагалі, якщо катети трикутника a і b, то його гіпотенуза $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Якщо дано гіпотенузу c і катет b, то другий катет $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Наприклад, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 52 см, а катет 48 см, то другий катет

$$\sqrt{52^2 - 48^2} = \sqrt{(52 - 48)(52 + 48)} = \sqrt{4 \cdot 100} = 20 \text{ (см)}.$$



Мал. 152



Мал. 153

! ТЕОРЕМА 26 (обернена до теореми Піфагора). **Якщо в трикутнику ABC $AB^2 = AC^2 + CB^2$, то кут C цього трикутника прямий.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай у $\triangle ABC$ $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Припустимо, що кут C не прямий. Побудуємо ще $\triangle AB_1C$, у якого $\angle C = 90°$ і $CB_1 = CB$ (мал. 153). Тоді

$$AB_1 = \sqrt{AC^2 + CB_1^2} = \sqrt{AC^2 + CB^2} = AB.$$

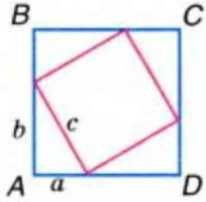
Трикутники ABC і AB_1C рівні за трьома сторонами. Отже, $\angle ACB = \angle ACB_1 = 90°$. □

За допомогою цієї теореми (оберненої до теореми Піфагора), знаючи сторони трикутника, можна встановити, чи має трикутник прямий кут.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Теорема Піфагора — одна з найважливіших і найвідоміших теорем евклідової геометрії. Відомо більше сотні її різних доведень. Найпростіше таке.

Нехай маємо довільний прямокутний трикутник з катетами a, b і гіпотенузою c. На кожній стороні квадрата зі стороною c добудуємо такий трикутник, як на малюнку 154. Утвориться квадрат зі стороною $a + b$. Визначимо його площу двома способами:



Мал. 154

$$S = (a + b)^2 \text{ і } S = 4 \cdot \frac{1}{2}\, ab + c^2.$$

У результаті матимемо:

$$(a + b)^2 = 2ab + c^2,\quad a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2,$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Оскільки квадрати відрізків a, b, c дорівнюють площам квадратів з такими сторонами, то теорему Піфагора часто формулюють і так:

Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на його катетах.

$$\boldsymbol{S_a + S_b = S_c} \text{ (мал. 155).}$$

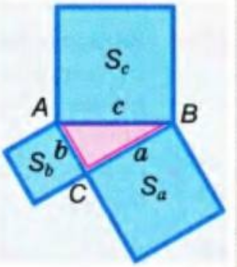
Такий малюнок учням здавався схожим на штани (мал. 156), то ж з давніх часів до нас дійшли примовки:

«Піфагорові штанці файні є у три кінці»;

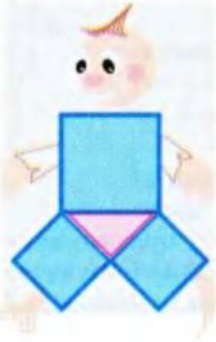
«Пифагоровы штаны на все стороны равны».

Інші вбачають у такій конфігурації не штани, а сорочку (мал. 157), тому примовляють: «Хто в сорочці Піфагора — піднось руки вгору».

Теорема Піфагора правильна лише в евклідовій геометрії, в якій визнається правильною аксіома Евкліда.



Мал. 155



Мал. 156

Мал. 157

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте ознаки подібності прямокутних трикутників.
2. Наведіть приклади пропорційних відрізків у прямокутному трикутнику. Сформулюйте їх властивості.
3. Сформулюйте і доведіть теорему Піфагора.
4. Сформулюйте і доведіть теорему, обернену до теореми Піфагора.
5. Як знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомі його катети?
6. Як знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомі його гіпотенуза і другий катет?

● *Виконаємо разом*

1 Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 16 см, а проведена до неї висота — 6 см.

■ Оскільки даний $\triangle ABC$ рівнобедрений (мал. 158), то $AH = 0{,}5\,AC = 8$ см, $\angle AHB = 90°$.

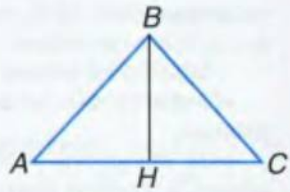
За теоремою Піфагора

$AB^2 = AH^2 + HB^2$,

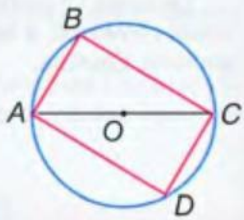
$AB^2 = 64 + 36 = 100$, $AB = 10$.

Шуканий периметр

$P = 16 + 2 \cdot 10 = 36$ (см).



■ Мал. 158



■ Мал. 159

2 Знайдіть сторони прямокутника, вписаного в коло радіуса 50 см, якщо вони відносяться як 3 : 4 (мал. 159).

■ Діагональ прямокутника, вписаного в коло, є діаметром цього кола. Отже, гіпотенуза AC прямокутного трикутника ABC дорівнює 100 см. Оскільки його катети пропорційні числам 3 і 4, то їх довжини дорівнюють $3x$ і $4x$, де x — деяке число. За теоремою Піфагора $(3x)^2 + (4x)^2 = 100^2$, звідки

$$25x^2 = 10\,000,\ x^2 = 400,\ x = 20.\ 3x = 60,\ 4x = 80.$$

Відповідь. 60 см, 80 см, 60 см і 80 см.

● ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

564. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: а) 3 см і 4 см, б) 1 дм і 2 дм, в) c і c.

565. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза і другий катет дорівнюють:
а) 5 см і 3 см, б) 10 дм і 1 дм, в) c і a.

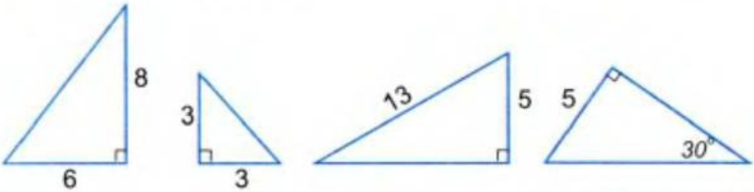
566. Заповніть порожні клітинки таблиці, якщо a і b — катети прямокутного трикутника, а c — його гіпотенуза.

a	1	2	3	1	3	0,5
b	2	3	4	5		
c	$\sqrt{5}$			$\sqrt{19}$		1

567. За малюнком 160 знайдіть невідомі сторони трикутників.

568. Визначаючи вид трикутника зі сторонами 10 см, 24 см і 26 см, учень міркує: «Оскільки $10^2 + 24^2 = 676 = 26^2$, то за теоремою Піфагора цей трикутник прямокутний». Чи правильно міркує учень?

569. Сторони трикутника дорівнюють 6 м, 8 м і 10 м. Чи прямокутний цей трикутник?



Мал. 160

А

570. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: 1) 9 м і 12 м; 2) 12 см і 16 см; 3) $3a$ і $4a$.

571. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо інші його сторони дорівнюють: 1) 5 м і 4 м; 2) 13 см і 12 см; 3) $17m$ і $15m$.

572. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 5 см, а один з кутів 60°.

573. Заповніть порожні клітинки таблиці, якщо a і b — катети прямокутного трикутника, а c — його гіпотенуза.

a	5	8	7	9	11	12	13
b	12			40			
c		17	25		61	37	85

574. Точка M лежить усередині прямого кута ABC на відстані 5 см і 12 см від його сторін. Знайдіть BM.

575. Сторони прямокутника дорівнюють 32 см і 60 см. Знайдіть його діагональ.

576. Знайдіть сторони прямокутника, якщо:
а) одна зі сторін дорівнює 12 см, а діагональ 13 см;
б) діагональ дорівнює 12 см і утворює зі стороною кут 30°;
в) діагональ дорівнює 10 см, а кут між діагоналями 60°;
г) одна зі сторін удвічі більша за другу, а діагональ дорівнює 5 см;
ґ) одна зі сторін дорівнює 8 см, а друга на 4 см менша за діагональ.

577. Знайдіть висоту рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює a.

578. Знайдіть сторону рівностороннього трикутника, якщо його медіана дорівнює m.

579. Катет рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює a. Знайдіть його гіпотенузу.

580. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює c. Знайдіть його катети.

581. Знайдіть відношення діагоналі квадрата до його сторони.

582. Діагоналі ромба 10 м і 24 м. Знайдіть його сторони.

583. У коло радіуса 34 см вписано прямокутник, відношення сторін якого 8 : 15. Знайдіть периметр прямокутника.

584. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо вони пропорційні числам 2 і 3, а гіпотенуза дорівнює $2\sqrt{13}$.

585. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 24 см. Знайдіть радіус описаного кола.

586. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, 5 см. Знайдіть периметр трикутника.

587. У рівнобедреному трикутнику знайдіть:
а) висоту, проведену до основи, якщо бічна сторона і основа відповідно дорівнюють 26 см і 20 см;
б) бічну сторону, якщо основа і висота, проведена до неї, дорівнюють відповідно 10 см і 20 см;
в) сторони, якщо бічна сторона відноситься до основи як 5 : 6, а висота, проведена до основи, дорівнює 12 см;
г) бічну сторону, якщо основа дорівнює 6 см, а кут при основі 45°.

588. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 11 см і 59 см, а бічна сторона 25 см. Знайдіть висоту трапеції.

589. У колі радіуса 17 см проведено хорду завдовжки 16 см. Знайдіть відстань від центра кола до хорди.

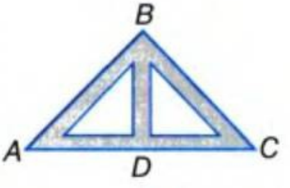
590. Хорда AB і перпендикулярний до неї радіус OC перетинаються в точці K. Знайдіть AB, якщо $OK = 9$ см, $KC = 32$ см.

591. Для транспортування матеріалів між двома фабричними будівлями споруджено похилий жолоб, кінці якого розміщено на висоті 8 м і 3 м. Відстань між будівлями — 10 м. Обчисліть довжину жолоба.

592. Діаметр колоди 12 см. Чи можна з цієї колоди витесати квадратний брус із ребром: а) 10 см; б) 8 см?

593. Дерево надломилось на висоті 6 м і його вершина впала на землю на відстані 8 м від стовбура (мал. 161). Якою була висота дерева?

Мал. 161



Мал. 162

594. Відстань між деревами заввишки 13 м і 27 м дорівнює 48 м. Знайдіть відстань між вершинами дерев.

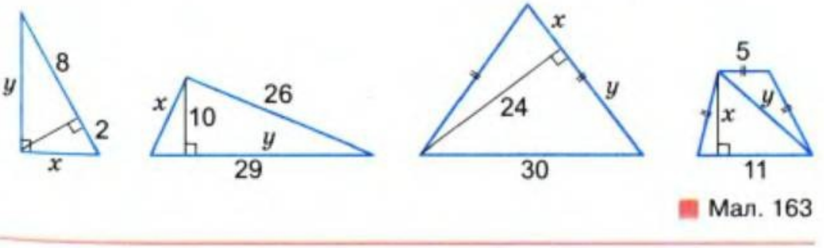
595. Кроквова ферма має крокви AB і BC по 9 м і прогін AC завдовжки 14 м. Визначте висоту ферми BD (мал. 162).

Б

596. За малюнком 163 знайдіть невідомі елементи x і y.

597. Побудуйте відрізок, довжина якого дорівнює:
а) $\sqrt{2}$ см; б) $\sqrt{3}$ см; в) $\sqrt{5}$ см.

598. Дано відрізки a і b ($a > b$). Побудуйте відрізки $\sqrt{a^2 + b^2}$ і $\sqrt{a^2 - b^2}$.



Мал. 163

599. Бічна сторона рівнобедреного трикутника на 8 см більша за висоту, проведену до основи. Знайдіть периметр трикутника, якщо основа дорівнює 24 см.

600. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відстані від її середини до катетів дорівнюють 5 см і 12 см.

601. Катет прямокутного трикутника дорівнює 28 дм, а різниця двох інших сторін 8 дм. Знайдіть периметр трикутника.

602. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 9 см і 40 см. Знайдіть радіуси вписаного і описаного кіл.

603. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть: а) медіани трикутника; б) висоту, проведену до гіпотенузи.

604. На катеті BC прямокутного $\triangle ABC$ з гіпотенузою $AB = 50$ см взято точку M таку, що $AM = 41$ см і $CM : MB = 3 : 7$. Знайдіть катети трикутника.

605. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 22 см і 42 см, а бічна сторона 26 см. Знайдіть діагоналі трапеції.

606. Знайдіть діагоналі прямокутної трапеції з основами 3 см і 6 см та кутом $120°$.

607. Доведіть, що в прямокутній трапеції різниця квадратів діагоналей дорівнює різниці квадратів основ.

608. У прямокутній трапеції менша основа дорівнює m, а більша бічна сторона і менша діагональ дорівнюють по n. Знайдіть більшу діагональ трапеції.

609. Знайдіть радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію з основами 4 см і 16 см.

610. Знайдіть основи трапеції, вписаної в коло, якщо бічна сторона і діагональ відповідно дорівнюють 6 см і 8 см, а центр кола лежить на більшій стороні трапеції.

611. Радіуси двох концентричних кіл дорівнюють r і $2r$. Знайдіть довжину хорди більшого кола, яка дотикається до меншого кола.

612. У колі радіуса 15 см проведено дві паралельні хорди завдовжки 18 см і 24 см. Знайдіть відстань між хордами. Розгляньте два випадки.

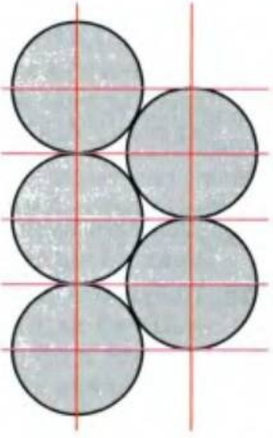
613. З листа жерсті вирізали круги, дотичні один до одного (мал. 164). Знайдіть відстань між прямими, на яких розташовані центри кругів, якщо діаметр кожного круга дорівнює 28 см.

614. Відстань між центрами двох кіл, радіуси яких 10 см і 17 см, дорівнює 21 см. Знайдіть довжину спільної хорди.

615. Радіуси двох кіл, що перетинаються, дорівнюють 13 см і 15 см, а спільна хорда дорівнює 24 см. Знайдіть відстань між центрами кіл.

616. Кола радіусів 8 см і 18 см дотикаються зовні. Знайдіть довжину спільної зовнішньої дотичної.

617. Радіуси двох кіл дорівнюють 2 см і 8 см, а відстань між їх центрами 15 см. Знайдіть довжину спільної: а) зовнішньої дотичної; б) внутрішньої дотичної.



Мал. 164

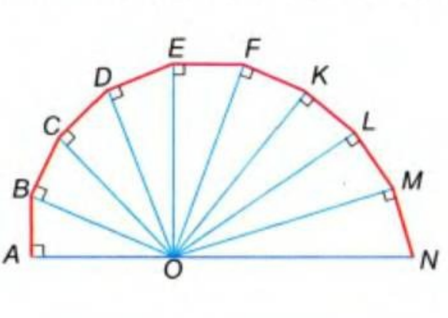
618. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Знайдіть висоту, проведену з вершини прямого кута.

619. Знайдіть висоту BH $\triangle ABC$, якщо $AB = 13$, $AC = 14$, $BC = 15$.

620. У прямокутному трикутнику катет завдовжки 18 см лежить проти кута 15°. Знайдіть довжину другого катета.

621. Доведіть, що квадрат найменшої медіани прямокутного трикутника менший від суми квадратів інших його медіан у 5 разів.

622. Дев'ять прямокутних трикутників розміщено, як показано на малюнку 165. Знайдіть відношення $OA : ON$, якщо всі ланки ламаної $ABCDEFKLMN$ — рівні відрізки і $OA = 2AB$.



Мал. 165

Практичне завдання

623. Позначте на місцевості кілочками три точки *A*, *B* і *C* так, щоб відстані між ними дорівнювали 3, 4 і 5 м. Чи є в трикутнику *ABC* прямий кут? Відповідь обґрунтуйте.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

624. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них на $100°$ менший від суми трьох інших кутів.

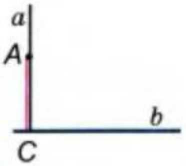
625. Побудуйте опуклий чотирикутник *ABCD*, в якого $AB = AD = 3$ см, $CB = CD = 4$ см і $\angle B = 90°$. Доведіть, що в ньому кути *B* і *D* рівні, а діагоналі перпендикулярні. Чи можна навколо такого чотирикутника описати коло? Якщо можна, то який у нього радіус і де розташований його центр? Чи можна в такий чотирикутник вписати коло? Якщо можна, то знайдіть його радіус.

626. Вкажіть вид трикутника, якщо його кути пропорційні числам: а) 2, 3 і 5; б) 5, 5 і 8; в) 3, 3 і 6.

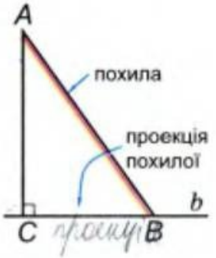
627. Довжина тіні людини зростом 1, 8 м дорівнює 2,5 м. Знайдіть висоту дерева, тінь від якого завдовжки 10 м.

§14 Перпендикуляр і похила

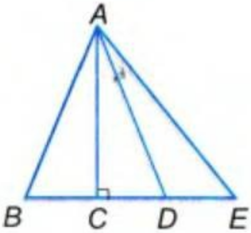
Як ви вже знаєте, дві прямі називають перпендикулярними, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Якщо перпендикулярні прямі a і b перетинаються в точці C, а на прямій a взято довільну точку A, то відрізок AC називають ***перпендикуляром***, опущеним з точки A на пряму b (мал. 166).



Мал. 166



Мал. 167



Мал. 168

Нехай AC — перпендикуляр, опущений з A на пряму b, а B — будь-яка точка цієї прямої, відмінна від C. Відрізок AB називають ***похилою***, проведеною з точки A до прямої b, точку B — *основою похилої*, а відрізок CB — *проекцією похилої* AB на пряму b (мал. 167).

Якщо з однієї точки до якої-небудь прямої провести похилу AB і перпендикуляр AC, то вони разом з проекцією похилої утворять прямокутний трикутник ABC. Оскільки в кожному прямокутному трикутнику гіпотенуза більша кожного з катетів, то:

- **кожна похила довша за перпендикуляр, проведений з тієї самої точки на ту саму пряму;**
- **проекція похилої коротша від самої похилої.**

З ознак рівності прямокутних трикутників випливають такі твердження:

- **якщо з однієї точки до тієї самої прямої проведено дві рівні похилі, то їх проекції рівні;**
- **якщо рівні проекції похилих, проведених з однієї точки до тієї самої прямої, то і ці похилі рівні** (мал. 168).

З теореми Піфагора випливають ще два твердження:

- **якщо з однієї точки до прямої проведено дві похилі, то з них більша та, проекція якої більша;**
- **якщо з однієї точки до прямої проведено дві похилі, то більша похила має більшу проекцію.**

Тому що за теоремою Піфагора $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Таким чином, при сталому значенні AC (одного катета) чим більше значення CB (другого катета), тим більше і значення AB (гіпотенузи), і навпаки.

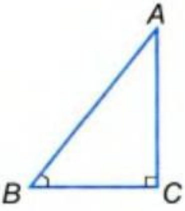
ПРИКЛАД. Нехай у $\triangle ABE$ AC — перпендикуляр, а AB і AE — похилі, проведені з точки A до прямої BE (див. мал. 168). Тоді якщо $AB < AE$, то і $BC < CE$.

Важливу роль відіграє *кут між похилою і її проекцією*. На малюнку 169 це кут B. Він завжди більший за 0° і менший за 90°.

ЗАДАЧА. Кут між похилою завдовжки 50 см і її проекцією дорівнює 60°. Знайдіть проекцію похилої.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо BC — проекція похилої AB, то ABC — прямокутний трикутник (мал. 169). Якщо $\angle B = 60°$, то $\angle A = 30°$. А катет, який лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи. Отже,

$$BC = 0{,}5\ AB = 25 \text{ см}.$$



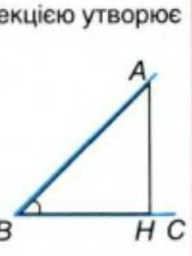
Мал. 169

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

ЗАДАЧА. Похила завдовжки 50 мм зі своєю проекцією утворює кут 40°. Знайдіть довжину проекції.

Ця задача від попередньої відрізняється лише мірою кута, але розв'язувати її ми можемо поки що тільки наближено (способом побудов).

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Користуючись транспортиром, побудуємо $\angle ABC = 40°$. На одній його стороні відкладемо відрізок $BA = 50$ мм і з точки A опустимо перпендикуляр AH на другу сторону кута (мал. 170).



Мал. 170

Вимірявши довжину BH, отримаємо відповідь: $BH \approx 38$ мм.

Подібним способом можна розв'язувати такі задачі при інших значеннях кута між похилою та її проекцією.

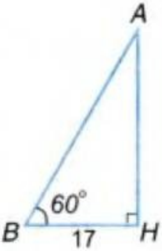
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які прямі називають перпендикулярними?
2. Що таке перпендикуляр? Похила?
3. Поясніть, що таке проекція похилої.
4. Скільки різних похилих можна провести з даної точки до прямої? А скільки перпендикулярів?
5. Як залежить довжина похилої від її проекції?

Виконаємо разом

1 Знайдіть довжину похилої, якщо довжина її проекції дорівнює 17 м, а кут між ними $60°$.

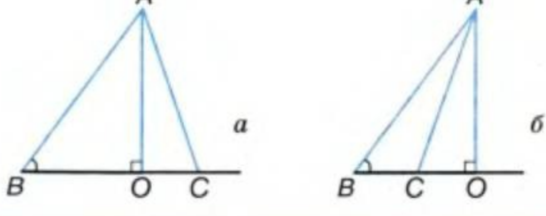
Якщо похила BA, її проекція BH і кут між ними $\angle ABH = 60°$, то $\angle A = 30°$ (мал. 171). А катет BH, який лежить проти кута $30°$, дорівнює половині гіпотенузи. Тому шукана довжина похилої $AB = 2 \cdot BH = 34$ м.



Мал. 171

2 З точки A, що лежить на відстані 8 см від прямої a, до цієї прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 17 см і 10 см. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?

Відразу зауважимо, що задача має два розв'язки, залежно від того, як розміщені похилі відносно перпендикуляра OA (мал. 172, *а*, *б*).



Мал. 172

З $\triangle AOB$ за теоремою Піфагора знайдемо OB:

$OB^2 = AB^2 - AO^2$,
$OB^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$, $OB = 15$ см.

Аналогічно з $\triangle AOC$ знайдемо OC:

$OC^2 = AC^2 - AO^2$,
$OC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$, $OC = 6$ см.
Тоді $BC = BO + OC = 21$ см (у випадку *а*)
і $BC = BO - CO = 9$ см (у випадку *б*).

● ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

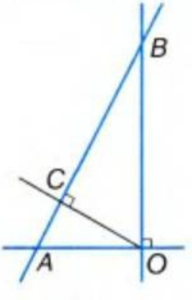
ВИКОНАЙТЕ УСНО

628. Назвіть: а) перпендикуляри до прямих AO, BO, AB; б) похилі до прямих AO, BO, AB, зображені на малюнку 173.

629. Скільки різних перпендикулярів можна провести через дану точку до даної прямої? А з даної точки до даної прямої?

630. З точки A до прямої a проведено перпендикуляр AH і похилу AB завдовжки 30 см. Кут між ними 30°. Знайдіть довжину проекції цієї похилої.

631. Проекція похилої, проведеної з A на пряму a, дорівнює 40 см і утворює з похилою кут 45°. Знайдіть відстань від точки A до прямої a.



Мал. 173

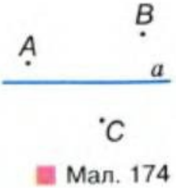
А

632. Позначте в зошиті точки A, B, C і пряму a, як на малюнку 174, і проведіть з названих точок перпендикуляри до a.

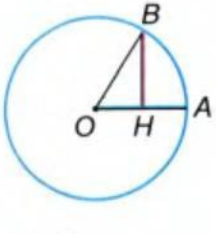
633. З точки P до прямої p проведено перпендикуляр PK і похилу PM, кут між якими 45°. Знайдіть довжину похилої та її проекції, якщо $PK = 37$ см.

634. З точки A, віддаленої від прямої a на 10 см, проведено похилу під кутом 60° до прямої a. Знайдіть довжину похилої та її проекцію на пряму a.

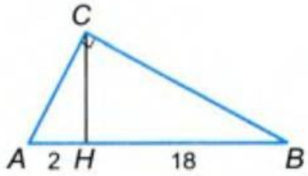
635. M — внутрішня точка прямого кута ABC. Проекції відрізка MB на сторони кута дорівнюють 9 см і 12 см. Знайдіть відстань від точки M до вершини кута.



Мал. 174



Мал. 175



Мал. 176

636. ABC — рівносторонній трикутник зі стороною a. Побудуйте проекцію сторони трикутника на пряму, на якій лежить інша його сторона. Знайдіть довжину цієї проекції.

637. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 10 см і 15 см. Знайдіть проекцію меншої сторони трикутника на пряму, якій належить його більша сторона.

638. Точка M кута ABC рівновіддалена від його сторін. Доведіть, що проекції відрізка MB на сторони кута рівні.

639. OA і OB — радіуси одного кола, $\angle AOB = 60°$. Знайдіть відношення радіуса OA до його проекції на OB.

640. Знайдіть кут між радіусами кола, якщо проекція одного з них на другий становить четверту частину діаметра (мал. 175).

641. Сторона AB рівностороннього трикутника ABC дорівнює a. Знайдіть її проекцію на пряму, якій належить висота BH цього трикутника.

642. Проекції катетів на гіпотенузу прямокутного трикутника дорівнюють 2 см і 18 см. Знайдіть усі три висоти трикутника (мал. 176).

643. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть їх проекції на гіпотенузу.

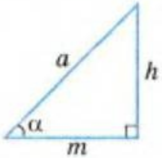
644. Знайдіть проекцію бічної сторони рівнобічної трапеції з основами 30 см і 60 см на її більшу основу.

645. Бічна сторона прямокутного рівнобедреного трикутника дорівнює a. Знайдіть її проекцію на гіпотенузу трикутника.

Б

646. Вкажіть значення величин у порожніх клітинках таблиці, якщо h, a і m — відповідно перпендикуляр, похила та її проекція на на деяку пряму, а α — кут між похилою та її проекцією (мал. 177).

h	2			4		8
a	4	6	10			
m		3		4	7	
α			60°		45°	30°



Мал. 177

647. Точка K — середина сторони AB квадрата $ABCD$. Знайдіть проекції відрізків KB, BC і CD на пряму KC, якщо $AB = 9$.

648. Сторони трикутника дорівнюють a, $2a$ і $2a$. Знайдіть проекції на одну бічну сторону двох інших сторін трикутника.

649. Задача Бхаскари. Квітка лотоса при вертикальному положенні стебла піднімалась над водою на $\frac{1}{2}$ фута. Вітер відхилив її на 2 фути від попереднього положення (по поверхні води). Після цього квітка лотоса опинилась на рівні води. Визначте глибину озера в цьому місці (мал. 178).


Мал. 178

650. Хорда CK ділить перпендикулярний їй діаметр кола на відрізки $AH = 18$ см і $HB = 8$ см. Знайдіть: а) відстані від C до A і B; б) проекції відрізків AH на AC і HB на CB.

651. AH і HB — проекції катетів трикутника ABC на гіпотенузу AB. AK і PB — їх проекції на катети AC і BC. Знайдіть відношення $AK : PB$, якщо: а) $AC = b$, $BC = a$; б) $\angle B = 30°$.

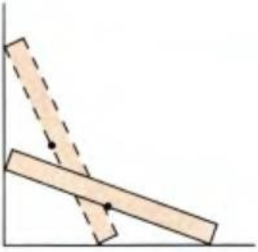
652. Задача Л. Пізанського (XII–XIII ст.). Дві вежі, одна з яких заввишки 40 футів, а друга — 30 футів, розташовані на відстані 50 футів одна від одної. До криниці, що була між ними, одночасно з кожної вежі злетіла пташка. Рухаючись із однаковою швидкістю, вони прилетіли до криниці одночасно. Знайдіть відстань від криниці до найближчої вежі (у футах).

653. Проекція сторони прямокутника на його діагональ становить третину діагоналі. Як відносяться сторони прямокутника?

654. Перпендикуляр, опущений з вершини прямокутника на його діагональ, ділить її у відношенні $m : n$. Як відносяться сторони прямокутника?

Практичне завдання

655. Лінійка переміщається так, що один її кінець лежить на одній стороні прямого кута, а другий — на другій стороні (мал. 179). Як при цьому переміщається середина лінійки? Як змінюються проекції лінійки на сторони кута? З'ясуйте це, переміщаючи лінійку в прямому куті стола.



Мал. 179

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

656. Один з кутів рівнобічної трапеції дорівнює 50°. Знайдіть інші її кути.

657. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 16 см і 12 см. Визначте медіану, проведену до гіпотенузи.

658. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 17 см, а основа 16 см. Обчисліть висоту трикутника.

659. Визначте сторони рівнобедреного трикутника, якщо його висота дорівнює 35 см, а основа відноситься до бічної сторони як 48 : 25.

660. Доведіть, що діагоналі рівнобічної трапеції ділять її на 4 трикутники, два з яких рівнобедрені, а два — рівні один одному.

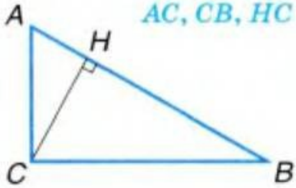
Задачі за готовими малюнками

А

1

$AC \perp CB$, $CH \perp AB$, $AH = 1$, $HB = 4$.

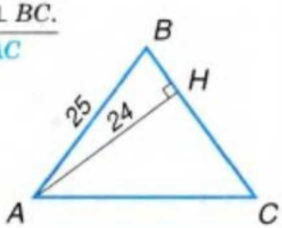
AC, CB, HC



2

$AB = BC$, $AH \perp BC$.

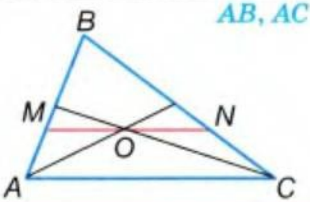
AC



3

O — точка перетину медіан, $MN \parallel AC$, $BM = 5$, $MN = 7$.

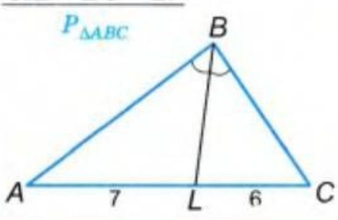
AB, AC



4

$AB - BC = 2$.

$P_{\Delta ABC}$

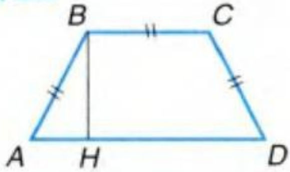


Б

1

$BC \parallel AD$, $AB = BC = CD = 10$, $\angle A = 60°$.

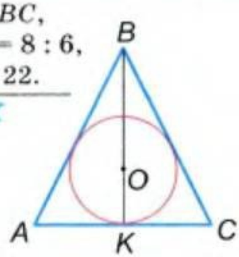
AD, BH



2

$AB = BC$, $AB : AC = 8 : 6$, $BK = 22$.

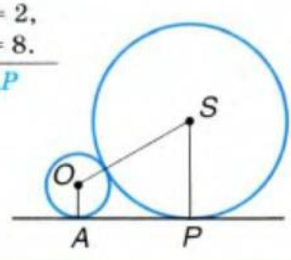
OK



3

$OA = 2$, $SP = 8$.

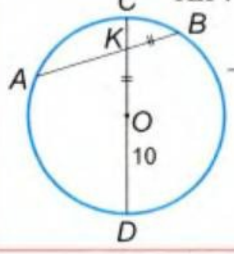
AP



4

$AK : KB = 3 : 1$, $OD = 10$, $OK = KB$.

CK, KD



Самостійна робота 4

Варіант 1

1°. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки 3 см і 12 см.

2°. Знайдіть сторону ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 16 см і 12 см.

3•. У $\triangle ABC$ сторона AB на 15 см менша за BC. Знайдіть периметр трикутника, якщо бісектриса $\angle B$ ділить сторону AC на відрізки 4 см і 14 см.

Варіант 2

1°. Катет прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а його проекція на гіпотенузу 8 см. Знайдіть довжину гіпотенузи.

2°. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 17 см, а бічна сторона 13 см.

3•. У $\triangle ABC$ $AB = 12$ см, $BC = 24$ см, $AC = 30$ см. Знайдіть відрізки, на які бісектриса $\angle B$ ділить сторону AC.

Варіант 3

1°. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 6 см і ділить гіпотенузу на відрізки, пропорційні числам 1 і 4. Знайдіть довжину гіпотенузи.

2°. Сторона ромба дорівнює 15 см, а діагональ 24 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

3•. У $\triangle ABC$ сторона AC на 6 см більша за AB. Знайдіть периметр трикутника, якщо бісектриса $\angle A$ ділить сторону BC на відрізки 5 см і 10 см.

Варіант 4

1°. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його проекція на гіпотенузу дорівнює 2 см, а гіпотенуза 8 см.

2°. Знайдіть більшу бічну сторону прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 9 см і 14 см, а висота 12 см.

3•. У $\triangle ABC$ $AB = 20$ см, $BC = 6$ см, $AC = 24$ см. Знайдіть відрізки, на які бісектриса $\angle C$ ділить сторону AB.

Тестові завдання 4

1. Медіани AA_1 і BB_1 $\triangle ABC$ перетинаються в точці O. Знайдіть відношення $A_1O : A_1A$.	а) 1 : 2; б) 2 : 1; в) 3 : 1; г) 1 : 3.
2. Хорди AB і CD перетинаються в точці L так, що $AL = LB$, $CL = 3$ см і $LD = 12$ см. Знайдіть AB.	а) 6 см; б) 36 см; в) 18 см; г) 12 см.
3. Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 18 см і 20 см. В якому відношенні ділить сторону бісектриса, проведена з вершини найбільшого кута?	а) 1 : 3 б) 3 : 5; в) 5 : 9; г) 1 : 2.
4. Висота рівностороннього трикутника зі стороною a дорівнює:	а) $a\sqrt{2}$; б) $a\sqrt{3}$; в) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
5. Діагональ квадрата зі стороною a дорівнює:	а) $a\sqrt{3}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; в) $a\sqrt{2}$; г) $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
6. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть довжину гіпотенузи.	а) 14 см; б) 100 см; в) 10 см; г) 20 см.
7. Катет рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою a дорівнює:	а) $a\sqrt{3}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; в) $a\sqrt{2}$; г) $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
8. AM — бісектриса $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$, $M \in BC$). Який знак слід поставити замість*: $CM * MB$?	а) $<$; б) $>$; в) $=$; г) $\leq$.
9. a_1 і b_1 — проекції катетів a і b прямокутного трикутника на гіпотенузу c. Яке з тверджень хибне?	а) $a^2 = a_1c$; б) $c = a_1 + b_1$; в) $c^2 = a_1b_1$; г) $c^2 = a^2 + b^2$.
10. Проекції катетів на гіпотенузу в прямокутному трикутнику дорівнюють 2 см і 8 см. Знайдіть довжину висоти, проведеної з вершини прямого кута.	а) 10 см; б) 16 см; в) 4 см; г) 5 см.

Типові задачі для контрольної роботи

1. Знайдіть периметр прямокутного трикутника з катетами 5 см і 12 см.

2. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 12 см, а гострий кут $30°$.

3. З вершини B прямокутника $ABCD$ опущено перпендикуляр BK на діагональ AC. Знайдіть AC, якщо $BK = 12$ см і $AK : KC = 4 : 9$.

4. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 16 см, а бічна сторона на 4 см більша за висоту, проведену до основи.

5. Знайдіть довжини відрізків, на які точка перетину ділить медіани рівностороннього трикутника зі стороною 18 см.

6. Знайдіть радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію з основами 18 см і 32 см.

7. У колі радіуса 8 см проведено хорду AB, яку діаметр MN перетинає в точці P так, що $AP = PB = 2PN$. Знайдіть довжину хорди AB.

8. Побудуйте прямокутний трикутника з катетом 5 см і гіпотенузою 8 см і впишіть у нього прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут і сторони якого пропорційні числам 2 і 3.

9. Центр вписаного кола ділить висоту, проведену до основи рівнобедреного трикутника, на відрізки 3 см і 5 см. Знайдіть периметр трикутника.

10. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. На які відрізки ділить середню за довжиною сторону висота, проведена до неї?

Головне в розділі 2

Відрізки називають *пропорційними*, якщо пропорційні їх довжини. Відрізки a і b пропорційні відрізкам x і y, якщо правильна пропорція $a : x = b : y$.

Узагальнена теорема Фалеса. **Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від них пропорційні відрізки.**

Подібними називають фігури, що мають схожі форми. У подібних трикутників усі відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні.

Основна теорема про подібність трикутників. **Січна пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.**

Ознаки подібності трикутників. **Два трикутники подібні, якщо: 1) два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого;** або **2) дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого, а кути між ними рівні;** або **3) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого.**

З ознак подібності трикутників випливають такі теореми:

Бісектриса трикутника ділить його протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.

Усі три медіани трикутника проходять через одну точку і діляться нею у відношенні 1 : 2.

Якщо дві хорди кола перетинаються, то добуток відрізків однієї хорди дорівнює добутку відрізків другої хорди.

Два прямокутні трикутники подібні, якщо: 1) гострий кут одного дорівнює куту другого трикутника; або 2) катети одного пропорційні катетам другого; або 3) катет і гіпотенуза одного пропорційні катету і гіпотенузі другого.

Відрізок x називають *середнім пропорційним відрізків* a і b, якщо правильною є пропорція $a : x = x : b$ (або рівнозначна їй рівність $x^2 = ab$, $x = \sqrt{ab}$).

Катет прямокутного трикутника — середній пропорційний гіпотенузи і його проекції на гіпотенузу. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, — середнє пропорційне відрізків, на які висота ділить гіпотенузу.

Теорема Піфагора. **У кожному прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.**

Правильною є й обернена теорема. **Якщо в трикутнику квадрат однієї сторони дорівнює сумі квадратів двох інших сторін, то найбільший кут трикутника прямий.**

Розділ 3 МНОГОКУТНИКИ ТА ЇХ ПЛОЩІ

Многокутники, зокрема трикутники і чотирикутники, — найважливіші й найпоширеніші геометричні фігури.

Площа многокутника — геометричне, фізичне, географічне, загальнонаукове і навіть побутове поняття. Чим більша площа квартири, тим зручніше в ній жити, тим вона дорожча; чим більша площа поля, тим більший урожай з нього можна зібрати, тим більший податок за нього треба платити.

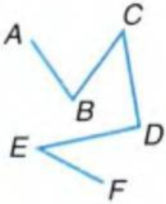
- МНОГОКУТНИКИ
- ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ МНОГОКУТНИКИ
- ПЛОЩА МНОГОКУТНИКА
- ПЛОЩІ ПАРАЛЕЛОГРАМА І ТРАПЕЦІЇ
- ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

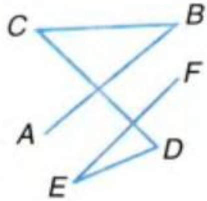
Геометрія кладе в основу чисте споглядання простору.

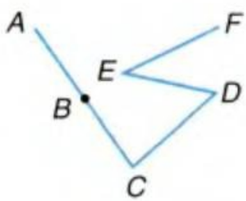
І. Кант

§15 Многокутники

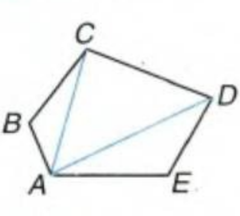
Фігура, що складається з відрізків AB, BC, CD, DE, EF, називається *ламаною* $ABCDEF$ (мал. 180). Точки A, B, C, D, E, F — *вершини* цієї ламаної, A і F — кінці, відрізки AB, BC, CD, DE, EF — її ланки. Розглядувана ламана має 5 ланок, але їх може бути будь-яка кількість (не менше двох). Ламана називається *простою*, якщо вона не має самоперетинів і ніякі дві її сусідні ланки не лежать на одній прямій. На малюнку 180 зображено ламані: *а* — проста, *б* і *в* — непрості.







Мал. 180



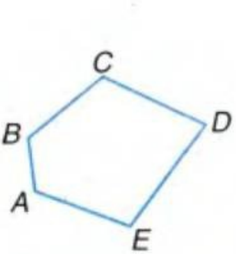
Мал. 181

Довжиною ламаної називають суму довжин усіх її ланок. Довжина ламаної не менша відстані між її кінцями. Наприклад, довжина ламаної $ABCDE$ не менша від AE (мал. 181). Справді, за нерівністю трикутника $AB + BC \geqslant AC$, $AC + CD \geqslant AD$, $AD + DE \geqslant AE$. Додавши усі ці нерівності, маємо $AB + BC + CD + DE \geqslant AE$.

Аналогічно можна довести розглядуване твердження для ламаної з довільним числом ланок. Знак рівності тут є тільки тоді, коли всі ланки ламаної лежать на одній прямій. **Довжина кожної простої ламаної більша відстані між її кінцями.**

Ламана називається *замкненою*, якщо її кінці збігаються.

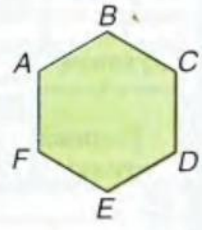
Проста замкнена ламана називається ***многокутником*** або ***багатокутником*** (мал. 182). Вершини і ланки ламаної, яка утворює многокутник, називаються відпо-



Мал. 182

відно *вершинами* і *сторонами многокутника*. Найменше число сторін многокутника — три. Трикутник і чотирикутник — окремі види многокутників. Многокутник з n вершинами називають n-кутником.

Дві вершини многокутника, які є кінцями однієї сторони, називають *сусідніми*; вершини многокутника, які не є кінцями однієї його сторони, — *несусідніми*. Відрізок, що сполучає дві несусідні вершини, — це *діагональ многокутника*. Трикутник не має діагоналей.



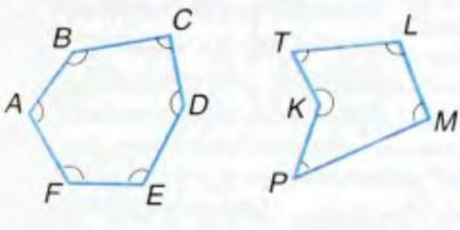
Мал. 183

Многокутник розбиває площину на дві області — внутрішню і зовнішню. На малюнку 183 внутрішню область шестикутника зафарбовано. Просту замкнену ламану разом з її внутрішньою областю також називають многокутником.

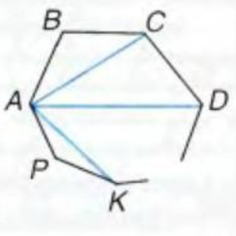
ЗАУВАЖЕННЯ. В геометрії нерідко одним словом називають різні поняття. Наприклад, радіусом кола називають і деякий відрізок, і довжину цього відрізка. Те саме можна сказати про сторону, висоту, кут трикутника, діагональ паралелограма тощо. Вживаючи такі слова, завжди треба уточнювати, що вони означають.

У цьому параграфі, говорячи про многокутники, матимемо на увазі просту замкнену ламану. Згодом многокутник розглядатимемо як просту замкнену ламану разом з її внутрішньою областю.

Якщо всі кути многокутника менші від розгорнутого, його називають *опуклим многокутником*. На малюнку 184 зображено опуклий многокутник $ABCDEF$ і неопуклий $KTLMP$. Їх кути позначено дугами.



Мал. 184



Мал. 185

! ТЕОРЕМА 27 **Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot (n - 2)$.**

■ **ДОВЕДЕННЯ.**

Нехай $ABCD \ldots KP$ — опуклий n-кутник (мал. 185). Діагоналі AC, AD, ..., AK розбивають його на $(n - 2)$ трикутників. Сума кутів кожного трикутника дорівнює 180°, а сума кутів n-кутника — сумі усіх кутів цих $(n - 2)$ трикутників, тобто

$$180° \cdot (n - 2). \square$$

Теорема 27 справджується і для багатьох неопуклих многокутників.

Периметр многокутника — сума довжин усіх його сторін.

Кожна сторона многокутника менша від його півпериметра, бо вона менша від суми всіх інших його сторін.

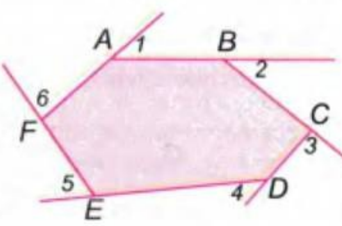
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Якщо многокутник опуклий, то при кожній його вершині можна побудувати два зовнішні кути.

! ТЕОРЕМА 28 **Сума зовнішніх кутів, взятих по одному при кожній вершині довільного опуклого многокутника, дорівнює 360°.**

■ **ДОВЕДЕННЯ.**

Кожний зовнішній кут опуклого многокутника в сумі із суміжним внутрішнім кутом многокутника дорівнює 180°. Якщо многокутник має n вершин, то сума n таких пар кутів дорівнює $n \cdot 180°$. Сума всіх внутрішніх кутів дорівнює $(n - 2) \cdot 180°$. Тому сума зовнішніх кутів n-кутника дорівнює різниці



■ Мал. 186

$$n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°. \square$$

Доведену теорему ілюструє малюнок 186.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке ламана? Проста ламана?
2. Що таке многокутник?
3. Який многокутник називається опуклим?
4. Що таке периметр многокутника?
5. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів опуклого многокутника.

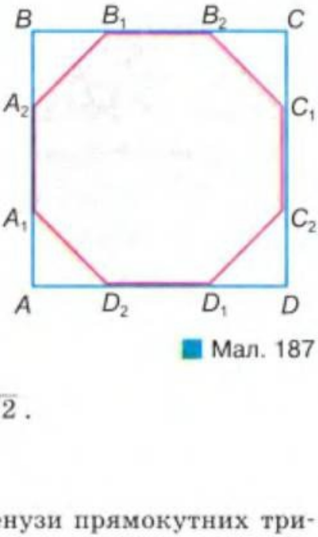
Виконаємо разом

1 Скільки діагоналей має опуклий n-кутник?

■ З кожної вершини опуклого n-кутника виходить $n-3$ діагоналей, з усіх n вершин — $n(n-3)$ діагоналей. При цьому кожну діагональ рахують двічі, бо вона має два кінці. Отже, кожний опуклий n-кутник має:

$$0{,}5\, n(n-3) \text{ діагоналей.}$$

2 Кожну сторону квадрата завдовжки $3a$ поділено на 3 рівні частини, і всі точки поділу послідовно сполучено відрізками (мал. 187). Знайдіть кути утвореного 8-кутника, його діагоналі і периметр.



Мал. 187

■ При вершинах даного квадрата — прямокутні рівнобедрені трикутники, гострі кути яких по 45°. Тому кожний кут утвореного 8-кутника дорівнює $180° - 45° = 135°$.

$AA_1 = A_1A_2 = A_2B = a$, $A_1D_2 = a\sqrt{2}$.

Тому периметр 8-кутника

$P_8 = 4a + 4a\sqrt{2} = 4a(1 + \sqrt{2})$.

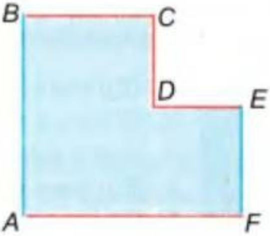
Діагоналі A_1D_1 і A_1B_1 — гіпотенузи прямокутних трикутників з катетами a і $2a$. $A_1C_2 = 3a$, діагоналі A_1C_1 і A_1B_2 — гіпотенузи прямокутних трикутників з катетами a, $3a$ і $2a$, $2a$ відповідно. Тому:

$A_1D_1 = A_1B_1 = a\sqrt{5}$, $A_1C_2 = 3a$,

$A_1C_1 = a\sqrt{10}$, $A_1B_2 = 2\sqrt{2}a$.

З Чи існує шестикутник, кожна сторона якого паралельна двом іншим його сторонам?

Існує. Такий шестикутник можна отримати, відрізавши від будь-якого прямокутника менший прямокутник (мал. 188).



Мал. 188

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

661. Чи перетинає ламана пряму, якщо кінці ламаної розміщені: а) з різних боків від прямої; б) з одного боку від прямої?

662. Чи може число вершин опуклого многокутника не дорівнювати числу його сторін?

663. Скільки ланок мають ламані, зображені на малюнку 180? Назвіть їх вершини і кінці.

664. Знайдіть довжину ламаної $ABCDE$, довжини ланок якої 3 м, 5 м, 8 м і 4 м. Чи може відстань між її кінцями дорівнювати 21 м?

А

665. Довжина ламаної 4,5 м. Знайдіть довжини її ланок, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 4 і 6.

666. Чи існує замкнена ламана з п'яти ланок, довжини яких дорівнюють 1 м, 2 м, 3 м, 4 м і 12 м?

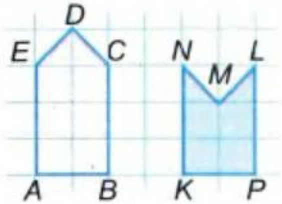
667. Накресліть семикутник $ABCDEFH$. Назвіть усі його вершини, сторони, діагоналі. Скільки діагоналей має семикутник?

668. Чи існує п'ятикутник, сторони якого пропорційні числам 7, 13, 15, 45 і 19?

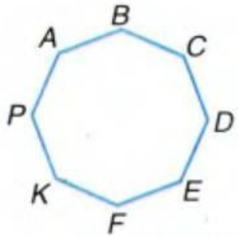
669. Чи існує п'ятикутник з трьома прямими кутами? Із чотирма прямими кутами?

670. Чи може в квадраті з периметром P вміститися многокутник з периметром $2P$? Покажіть на прикладі.

671. а) Периметр якого з п'ятикутників, зображених на малюнку 189, більший?



Мал. 189



Мал. 190

б) Знайдіть периметри п'ятикутників, зображених на малюнку 189, якщо $AB = KP = 4$ см.

672. Знайдіть суму кутів опуклого: а) п'ятикутника; б) шестикутника; в) стокутника.

673. Скільки сторін має многокутник, зображений на малюнку 190? Знайдіть суму його кутів.

674. Усі кути семикутника рівні. Знайдіть міру одного з них.

675. Скільки сторін має многокутник, кожний кут якого дорівнює 135°? А 140°?

676. Чи існує многокутник, кожний зовнішній кут якого дорівнює 36°?

Б

677. Накресліть неопуклий п'ятикутник, у якого тільки дві діагоналі лежать у внутрішній області. Знайдіть суму його кутів.

678. Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює 900°; 9000°?

679. Доведіть на прикладі ламаної з шести ланок, що довжина простої ламаної більша від відстані між її кінцями.

680. На кожній стороні квадрата завдовжки a зовні нього добудували рівносторонній трикутник так, що утворився неопуклий восьмикутник. Знайдіть його кути і довжини найдовших діагоналей.

681. а) Доведіть, що протилежні сторони опуклого шестикутника з рівними кутами паралельні.

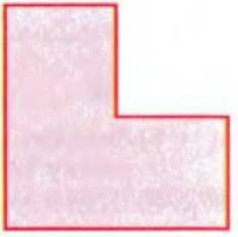
б) Доведіть, що опуклий семикутник з рівними кутами не має паралельних сторін.

682. $ABCDEFMN$ — опуклий восьмикутник з рівними кутами. Доведіть, що: а) прямі AB і CD перпендикулярні; б) $DE \parallel AN$.

683. Шестикутник, усі кути якого рівні і кожна сторона дорівнює a, розрізано на три рівні п'ятикутники найменших периметрів. Знайдіть периметр і кути п'ятикутника.

684. Спробуйте розрізати квадрат на два рівні п'ятикутники. А на два рівні семикутники?

685. Як зображений на малюнку 191 шестикутник розрізати на 4 подібні йому шестикутники?



Мал. 191

686. Яке найменше число гострих кутів може мати опуклий многокутник? Чому?

687. Скільки вершин має опуклий многокутник, жоден з кутів якого не перевищує 120°?

688. Чи існує опуклий п'ятикутник, найбільший кут якого дорівнює 107°?

689. Доведіть, що чотири гострі кути може мати тільки неопуклий многокутник.

690. Доведіть, що сума діагоналей опуклого п'ятикутника більша від його периметра.

691. Вершини чотирикутника мають такі координати: $A(1; 2)$, $B(1; 3)$, $C(6; 3)$, $D(3; 0)$. Знайдіть периметр чотирикутника, міри його кутів і довжини діагоналей.

692. *Дельтоїд* — це чотирикутник, діагоналі якого перпендикулярні і одна з них проходить через середину другої. Дослідіть властивості дельтоїда.

693. Уявіть безліч паркетин у формі хреста, складеного з п'яти рівних квадратів, як зображено на малюнку 192. Чи можна такими паркетинами замостити всю площину?

Мал. 192

Практичне завдання

694. Виріжте з паперу дві трапеції зі сторонами 4 см, 4 см, 4 см і 8 см. Які фігури можна утворити, прикладаючи трапеції рівними сторонами одна до одної? Накресліть ці фігури в масштабі 1 : 2, знайдіть їх периметри і міри кутів.

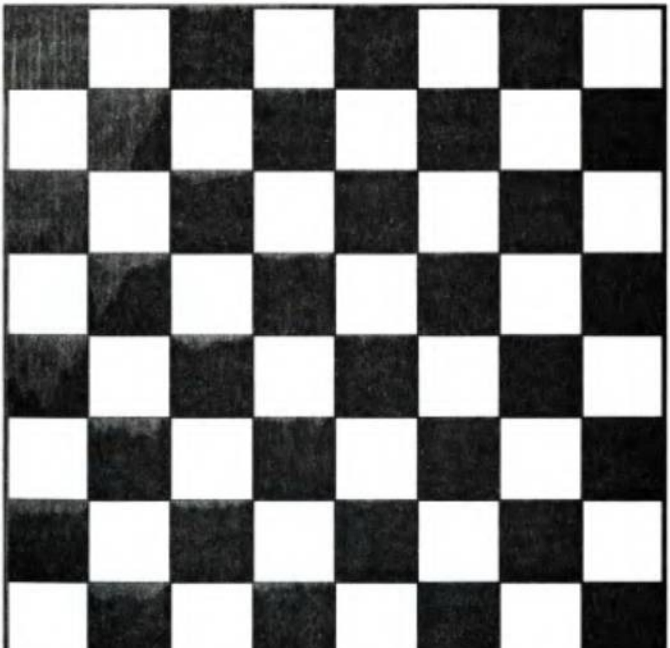
ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

695. Знайдіть кути паралелограма, якщо:
а) два з них пропорційні числам 2 і 3;
б) один з них на 20° більший від другого;
в) один становить 80 % від другого.

696. Знайдіть периметр ромба, якщо він на 60 см більший від сторони ромба.

697. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона ділиться точкою дотику вписаного кола у відношенні 2 : 3 (починаючи від вершини). Знайдіть відношення бічної сторони до основи.

698. На звичайній шаховій дошці (мал. 193) можна виділити 139 різних квадратів, що мають від 2×2 до 7×7 клітинок. Доведіть це. Скільки серед них таких, які мають більше чорних клітинок?

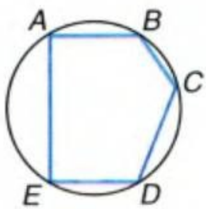


Мал. 193

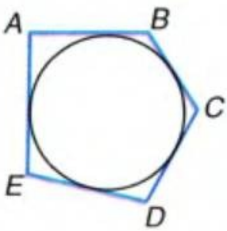
§16 Вписані й описані многокутники

Якщо всі вершини многокутника лежать на колі, його називають *вписаним у коло*, а коло — *описаним навколо многокутника* (мал. 194).

Якщо всі сторони многокутника дотикаються до кола, його називають *описаним навколо кола*, а коло — *вписаним у многокутник* (мал. 195).



Мал. 194



Мал. 195

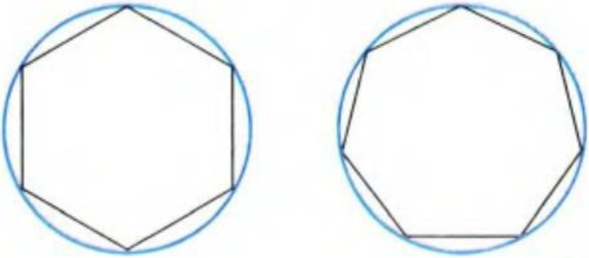
Ви вже дещо знаєте про вписані в коло і описані навколо кола трикутники і чотирикутники. Знаєте, зокрема, що:

- **навколо кожного трикутника можна описати коло і тільки одне;**
- **в будь-який трикутник можна вписати коло і тільки одне;**
- **коло можна вписати тільки в такий чотирикутник, сума двох протилежних сторін якого дорівнює сумі двох інших його сторін;**
- **коло можна описати тільки навколо такого чотирикутника, сума двох протилежних кутів якого дорівнює 180°.**

Для довільних *n*-кутників такі загальні твердження сформулювати не можна. Можна тільки стверджувати, що кожний вписаний у коло многокутник і кожний описаний навколо кола многокутник — фігури опуклі.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

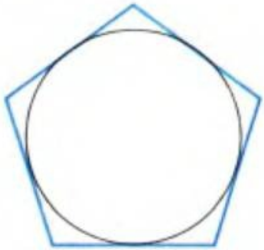
Якщо всі сторони опуклого многокутника рівні і всі його кути рівні, то такий многокутник називають *правильним*. Наприклад, рівносторонній трикутник і квадрат — многокутники правильні. На малюнку 196 зображено правильні шестикутник і семикутник.



Мал. 196

Навколо кожного правильного многокутника можна описати коло і тільки одне.

У кожний правильний многокутник можна вписати коло і тільки одне.



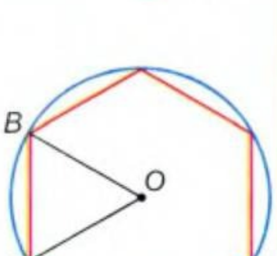
Мал. 197

Мал. 198

На малюнках 197 і 198 зображено кола: вписане в правильний п'ятикутник і описане навколо правильного восьмикутника.

Доведемо, що **сторона правильного шестикутника, вписаного в коло, дорівнює радіусу цього кола** (мал. 199).

Оскільки всі сторони вписаного шестикутника рівні, то рівні і стягувані ними дуги, і відповідні їм центральні кути. Сума всіх шести центральних кутів (при їх спільній вершині *O*) дорівнює 360°, тому



Мал. 199

кожен з них дорівнює $360° : 6 = 60°$. $\triangle OAB$ рівнобедрений, бо $OA = OB$, як радіуси кола. Якщо ж кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 60°, то цей трикутник рівносторонній, $AB = OB$. А це й треба було довести.

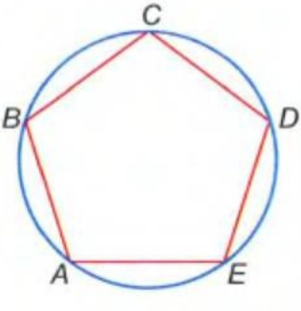
Докладніше про правильні многокутники ви дізнаєтеся в 9 класі.

? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Який многокутник називають вписаним у коло? Описаним навколо кола?
2. Доведіть, що навколо кожного трикутника можна описати коло. Де лежить центр цього кола?
3. Доведіть, що в кожний трикутник можна вписати коло. Де лежить центр цього кола?
4. Навколо якого чотирикутника можна описати коло?
5. В який чотирикутник можна вписати коло?

• *Виконаємо разом*

1 У коло вписано п'ятикутник, усі сторони якого рівні. Доведіть, що всі його кути рівні (мал. 200).



Мал. 200

Якщо всі сторони вписаного в коло п'ятикутника $ABCDE$ рівні, то і стягувані ними дуги кола рівні: кожна з них дорівнює п'ятій частині всього кола. Кут A вписаний і спирається на дугу $BCDE$, що дорівнює $\frac{3}{5}$ усього кола. На таку саму дугу спирається кожний інший кут даного п'ятикутника, тому всі вони рівні.

2 Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC, якщо $AB = BC = 13$, $AC = 10$.

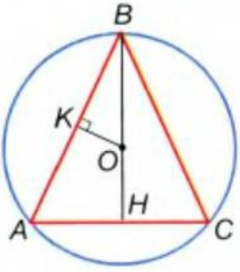
За теоремою Піфагора
$BH^2 = BC^2 - HC^2$,

$BH^2 = 169 - 25 = 144$, $BH = 12$.

Центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, лежить на висоті, проведеній до основи трикутника. Нехай це буде точка O (мал. 201). Опустимо перпендикуляр OK на хорду AB. $BK = KA$, $BK = 0{,}5AB = 6{,}5$. Прямокутні трикутники BKO і BHA подібні, бо мають спільний гострий кут. Тому $OB : BK = AB : BH$, звідки

$$OB = \frac{AB \cdot BK}{BH} = \frac{13 \cdot 6{,}5}{12} = 7\frac{1}{24}.$$

Отже, радіус кола дорівнює $7\frac{1}{24}$.



Мал. 201

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

699. Знайдіть радіус кола, описаного навколо квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 17 см.

700. У коло, діаметр якого дорівнює 30 дм, вписано квадрат. Знайдіть: а) діагональ квадрата; б) сторону квадрата.

701. Що більше: периметр квадрата, довжина вписаного в нього кола чи довжина описаного кола?

702. Знайдіть відношення радіусів кіл, вписаного в рівносторонній трикутник і описаного навколо нього.

А

703. Нехай O — центр кола, вписаного в $\triangle ABC$. Знайдіть кути цього трикутника, якщо $\angle OAB = 40°$ і $\angle OBA = 30°$.

704. Знайдіть кути $\triangle ABC$, якщо O — центр описаного кола і $\angle AOB = 120°$, $\angle BOC = 140°$.

705. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 8 см, а один з кутів 120°. Знайдіть радіус описаного кола.

706. Трикутник ABC — рівнобедрений. Радіус OA описаного кола утворює з основою AC кут OAC, який дорівнює 24°. Визначте кут BAC.

707. Навколо рівностороннього $\triangle ABC$ описано коло і середину K його дуги BC сполучено відрізками з B і C. Знайдіть кути чотирикутника $ABKC$.

708. Знайдіть радіус кола:

а) вписаного в рівносторонній трикутник зі стороною a;

б) описаного навколо рівностороннього трикутника зі стороною a;

в) описаного навколо квадрата зі стороною a.

Розв'яжіть задачі 709–711, використовуючи малюнок 202.

709. Сторона правильного n-кутника дорівнює a, радіус описаного кола R. Знайдіть радіус вписаного кола.

710. Сторона правильного n-кутника дорівнює a, радіус вписаного кола r. Знайдіть радіус описаного кола.

711. Знайдіть довжину сторони правильного n-кутника, якщо радіус описаного кола R, радіус вписаного кола r.

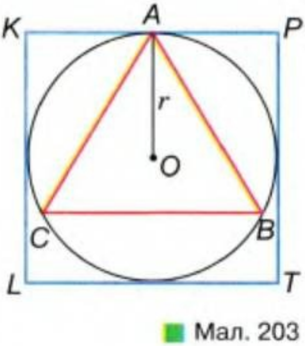
Мал. 202

712. Сторона рівностороннього трикутника, описаного навколо кола, дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це коло.

713. У квадрат вписано коло, а в коло вписано рівносторонній трикутник. Знайдіть відношення сторін трикутника і квадрата (мал. 203).

714. У рівнобічну трапецію з основами 8 см і 18 см вписано коло. Знайдіть його радіус.

715. Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить більшу бічну сторону на відрізки 2 см і 8 см. Знайдіть сторони трапеції і радіус кола.



Мал. 203

716. У дане коло впишіть квадрат.

717. У дане коло впишіть рівносторонній трикутник.

Б

718. П'ятикутник $ABCDE$, усі сторони якого рівні, вписано в коло.

1) Доведіть, що всі його кути рівні.
2) Знайдіть міру одного з його кутів.
3) Знайдіть кут між діагоналями, що виходять з однієї вершини.
4) Знайдіть кут між двома діагоналями, які перетинаються у внутрішніх точках.
5) Доведіть, що в п'ятикутника, обмеженого всіма діагоналями п'ятикутника $ABCDE$, всі кути рівні.

719. Знайдіть кути п'ятикутника $ABKCP$, вписаного в коло, якщо $AB = BC = CA$, а точки K і P — середини дуг BC і CA.

720. В опуклий шестикутник з рівними сторонами і кутами вписано коло і точки дотику через одну послідовно сполучено відрізками. Доведіть, що утворений трикутник — рівносторонній.

721. Навколо рівностороннього $\triangle ABC$ зі стороною a описано коло і середини дуг AB, BC, AC послідовно сполучено з вершинами трикутника. Доведіть, що сторони і кути утвореного шестикутника рівні та знайдіть їх міри.

722. В опуклий шестикутник, усі сторони якого дорівнюють a і кути рівні, вписано коло, а в це коло вписано квадрат. Знайдіть довжину сторони квадрата.

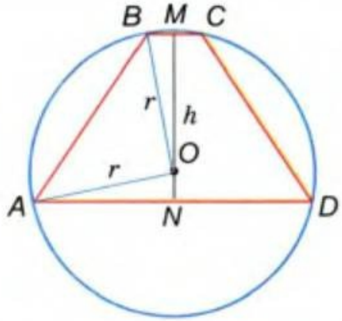
723. Сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 10 см, 10 см і 12 см. Знайдіть: а) радіус кола, вписаного в трикутник; б) радіус кола, описаного навколо трикутника.

724. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою 24 см, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 8 см. Де лежить центр кола?

725. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції з основами 20 см і 4 см та висотою 12 см (мал. 204).

726. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції з основами 12 см і 24 см та бічною стороною $6\sqrt{10}$ см.

727. Радіус вписаного у прямокутний трикутник кола позначено через r, а половину периметра трикутника — через p. Визначте гіпотенузу.



Мал. 204

728. Навколо даного кола опишіть рівнобедрений прямокутний трикутник.

729. У дане коло впишіть трикутник з двома даними кутами.

Практичне завдання

730. Виріжте з паперу п'ятикутник з периметром 25 см, який є водночас вписаним у коло і описаним навколо кола.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

731. Чи подібні два рівнобедрені трикутники, один з яких має кут $100°$, а другий — $40°$?

732. Чи може пряма, не паралельна жодній стороні трикутника, відтинати від нього подібний йому трикутник? Наведіть приклад.

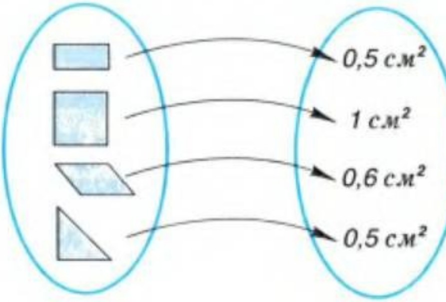
733. Дві прямі перетинаються в точці O, їх перетинають дві паралельні прямі, розташовані по різні боки від точки O. Доведіть, що утворені при цьому два трикутники подібні один одному.

734. Знайдіть периметр ромба, діагоналі якого 15 см і 20 см.

735. Накресліть п'ятикутник, який однією прямою можна розрізати на три трикутники.

§17 Площа многокутника

Тут і далі многокутник розглядатимемо разом з його внутрішньою областю. Кожному многокутнику можна поставити у відповідність значення його площі (мал. 205).



Мал. 205

Площа многокутника — це величина, що має такі властивості:

1) площа кожного многокутника виражається додатним числом;

2) рівні многокутники мають рівні площі;

3) площа многокутника, складеного з кількох частин, дорівнює сумі площ усіх цих частин;

4) за одиницю площі приймається площа одиничного квадрата.

Одиничний квадрат — це квадрат, сторона якого дорівнює одиниці довжини. Квадрати із сторонами 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км мають відповідно площі: 1 мм², 1 см², 1 дм², 1 м², 1 км². При цьому:

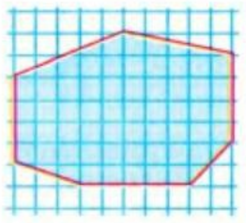
1 м² = 100 дм² = 10 000 см² = 1 000 000 мм²,

1 км² = 1 000 000 м², 1 га = 100 ар = 10 000 м².

У теорії часто приймають довжину деякого (одиничного) відрізка за одиницю довжини, а площу одиничного квадрата — за одиницю площі. У таких випадках найменувань не пишуть.

Дві фігури з рівними площами називають *рівновеликими*. Дві рівні фігури завжди рівновеликі, але не кожні рівновеликі фігури рівні. Наприклад, квадрат зі стороною 4 см і прямокутник зі сторонами 2 см і 8 см рівновеликі, але не рівні.

Наближені значення площ многокутників, як і інших плоских фігур, можна визначати за допомогою *палетки*. Так називають прозору плівку з квадратною сіткою. Наклавши палетку на многокутник, безпосереднім підрахунком одиничних квадратів і їх частин визначають наближене значення площі даного многокутника (мал. 206). Проте площі паралелограмів, трикутників і трапецій зручніше визначати за формулами.



Мал. 206

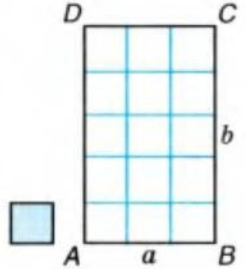
ТЕОРЕМА 29 **Площа прямокутника зі сторонами a і b дорівнює ab.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCD$ — довільний прямокутник, у якого $AB = a$, $BC = b$ і площа S. Доведемо, що $S = ab$.

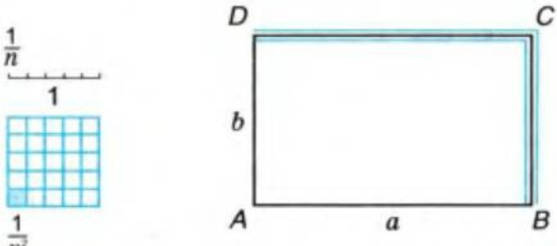
Розглянемо два випадки.

1. Якщо a і b — числа натуральні, то даний прямокутник можна розбити на b смуг, кожна з яких містить a одиничних квадратів (мал. 207). Весь прямокутник вміщає ab одиничних квадратів. Отже, його площа $S = ab$.



Мал. 207

2*. Нехай хоч одне з чисел a або b — дробове або ірраціональне (мал. 208). Поділимо одиничний відрізок на n рівних частин. Довжина однієї такої частини дорівнює $\frac{1}{n}$. Якщо відрізок довжини $\frac{1}{n}$ вміщається щонайбільше q разів на стороні довжини a



Мал. 208

і p разів на стороні довжини b, то

$$\frac{1}{n} q \leqslant a < \frac{1}{n} (q+1), \ \frac{1}{n} p \leqslant b < \frac{1}{n} (p+1).$$

Усі частини цих нерівностей — числа додатні, а добуток двох менших додатних чисел менший від добутку чисел більших.

Перемножимо почленно ці подвійні нерівності:

$$\frac{1}{n^2} qp \leqslant ab < \frac{1}{n^2} (q+1)(p+1).$$

Одиничний квадрат вміщує рівно n^2 квадратиків зі стороною довжини $\frac{1}{n}$. Тому площа одного такого квадратика дорівнює $\frac{1}{n^2}$.

Розглянемо три прямокутники: найменший зі сторонами $\frac{1}{n} q$ і $\frac{1}{n} p$, даний зі сторонами a і b та найбільший зі сторонами $\frac{1}{n} (q+1)$ і $\frac{1}{n} (p+1)$. Найменший прямокутник вміщає рівно qp квадратиків, тому його площа дорівнює $\frac{1}{n^2} qp$. Найбільший вміщає $(q+1)(p+1)$ квадратиків, отже, має площу $\frac{1}{n^2} (q+1)(p+1)$. Оскільки найменший многокутник вміщається в даному, а даний є частиною найбільшого, то

$$\frac{1}{n^2} qp \leqslant S < \frac{1}{n^2} (q+1)(p+1).$$

Як бачимо, площа S даного многокутника міститься в тих самих межах, що й добуток ab. Знайдемо різницю цих меж:

$$\frac{1}{n^2} (q+1)(p+1) - \frac{1}{n^2} qp = \frac{1}{n^2} (q+p+1).$$

Число n можна взяти як завгодно великим, тому різниця меж може як завгодно мало відрізнятись від нуля. Це можливо лише за умови, що $S = ab$. □

Отже, площу прямокутника зі сторонами a і b можна знаходити за формулою $S = ab$.

НАСЛІДОК. **Якщо сторона квадрата дорівнює a, то його площа $S = a^2$.**

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Вимірювати площі в квадратних метрах, квадратних дециметрах, арах, гектарах та інших мірах метричної системи люди почали порівняно недавно.

У Київській Русі певних мір площі не існувало. Тому селяни платили податки не від площі оброблюваного ґрунту, а «від сохи», «від рала», «від диму», «від обжі». Обжа — це площа, яку міг зорати селянин одним конем за один день. З XV ст. ввели точнішу одиницю площі — *десятину*. Це — площа квадрата, сторона якого дорівнює десятій частині версти (десятина ≈ 1,09 га).

У XVIII ст. українці довжини вимірювали у *вершках*, *аршинах*, *сажнях*, а площі визначали відповідно — у *квадратних вершках*, *квадратних аршинах*, *квадратних сажнях*. Співвідношення між ними важко було запам'ятати:

1 кв. аршин = 256 кв. вершків = 784 кв. дюйми.

В англомовних країнах і тепер площі визначають у неметричних мірах; невеликі — у *квадратних дюймах*, *квадратних футах*, а площі земельних ділянок — в *акрах* тощо.

Запитання і завдання для самоконтролю

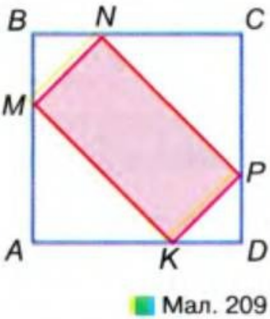
1. Що таке площа многокутника?
2. Що таке палетка?
3. Поясніть, як визначають площу фігури за допомогою палетки.
4. За якою формулою знаходять площу прямокутника?
5. За якою формулою знаходять площу квадрата?

Виконаємо разом

1 Знаючи, що 1 дюйм дорівнює 2,5 см, знайдіть, скільки квадратних дюймів становить 1 дм².

1 дм = 4 дюйми, тому 1 дм² = 16 кв. дюймів.

2 Кожну сторону квадрата $ABCD$ поділено на три рівні частини і деякі точки поділу сполучено, як на малюнку 209. Знайдіть відношення $S_{ABCD} : S_{MNPK}$.



Мал. 209

$MNPK$ — прямокутник (доведіть це самостійно). Нехай $AB = 3a$, тоді $AM = AK = 2a$, $BM = BN = a$. За теоремою Піфагора,
$MK = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}a$

і $MN = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Тоді $S_{MNPK} = a\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}a = 4a^2$, а $S_{ABCD} = 9a^2$.

Отже, $S_{ABCD} : S_{MNPK} = 9 : 4$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

736. Знайдіть площу квадрата, сторона якого дорівнює: 2 см; 3 дм; 10 м; 0,5 км; 100 км.

737. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює: 9 см²; 1 дм²; 4 мм²; 400 м²; 0,16 км².

738. Які числа мають стояти в порожніх клітинках таблиці, де a, b — сторони прямокутника, S — його площа?

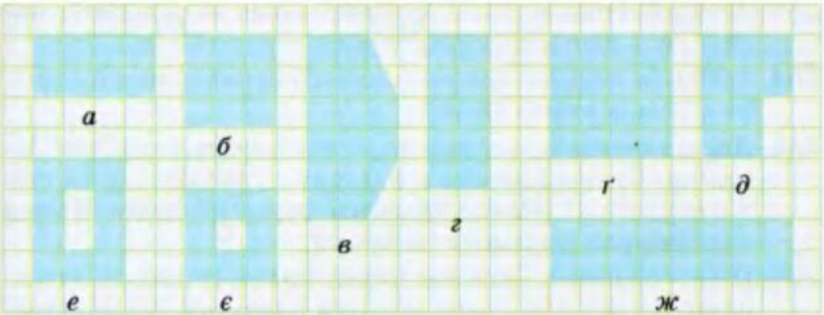
a, см	5	0,2	3	0,5	
b, см	4	2			1,2
S, см²			12	2	6

739. Як зміниться площа квадрата, якщо кожну його сторону збільшити у 3 рази?

740. У скільки разів треба зменшити сторони квадрата, щоб його площа зменшилася у 25 разів?

741. Два прямокутники мають однакові площі. Чи рівні в них сторони?

742. Знайдіть площі зображених фігур (мал. 210). Чи є серед них рівновеликі? (Площа 1 клітинки — 1 кв. од.)



Мал. 210

А

743. Сторони прямокутника дорівнюють 2 м і 8 м, а одна зі сторін іншого прямокутника 5 м. Чому дорівнює друга його сторона, якщо площі цих прямокутників рівні?

744. Знайдіть площу квадрата, якщо його сторона дорівнює: а) 1,1 см; б) $\frac{3}{4}$ дм; в) $8\sqrt{2}$ м.

745. Обчисліть сторону квадрата, якщо його площа дорівнює: а) 36 см^2; б) 2,25 дм^2; в) 12 м^2; г) Q.

746. Площа квадрата дорівнює 124 см^2. Виразіть площу цього квадрата: а) у квадратних міліметрах; б) у квадратних дециметрах; в) у квадратних метрах.

747. Сторони двох квадратів дорівнюють відповідно 15 м і 17 м. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює різниці площ даних квадратів.

748. Дано прямокутник зі сторонами 3 м і 4 м. Знайдіть площу квадрата, сторона якого дорівнює діагоналі цього прямокутника.

749. Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює 6 дм. А якою буде площа квадрата S, якщо його діагональ a?

750. Знайдіть сторону квадрата, що має таку саму площу, як і прямокутник зі сторонами 7 см і 28 см.

751. Відстані від взятої всередині прямокутника точки до протилежних його сторін дорівнюють 2 см і 6 см. Периметр прямокутника 24 см. Знайдіть його площу.

752. Середини сторін одного квадрата є вершинами другого. Як відносяться площі цих квадратів?

753. Знайдіть сторони прямокутника, якщо вони відносяться як 2 : 3, а площа прямокутника дорівнює 54 см^2.

754. Знайдіть сторони прямокутника, периметр якого дорівнює 30 м, а площа 56 м^2.

755. Дві ділянки землі огороджено парканами однакової довжини. Перша ділянка має форму прямокутника зі сторонами 220 м і 160 м, а друга має форму квадрата. Площа якої ділянки більша і на скільки?

756. Підлогу кімнати, яка має форму прямокутника зі сторонами 5,7 м і 6 м, треба покрити паркетом прямокутної форми. Довжина кожної плитки паркету дорівнює 30 см, а ширина 5 см. Скільки таких плиток потрібно для покриття всієї підлоги у спосіб, зображений на малюнку 211?

Мал. 211

757. Вершини чотирикутника мають такі координати: A (0; 1), B (1; 0), C (0; −1), D (−1; 0). Знайдіть його площу.

758. Знайдіть площу чотирикутника, якщо його вершини мають такі координати: A (−2; 3), B (5; 3), C (5; −1), D (−2; −1).

759. Сторони двох квадратів відносяться як 2 : 5. Як відносяться їх площі?

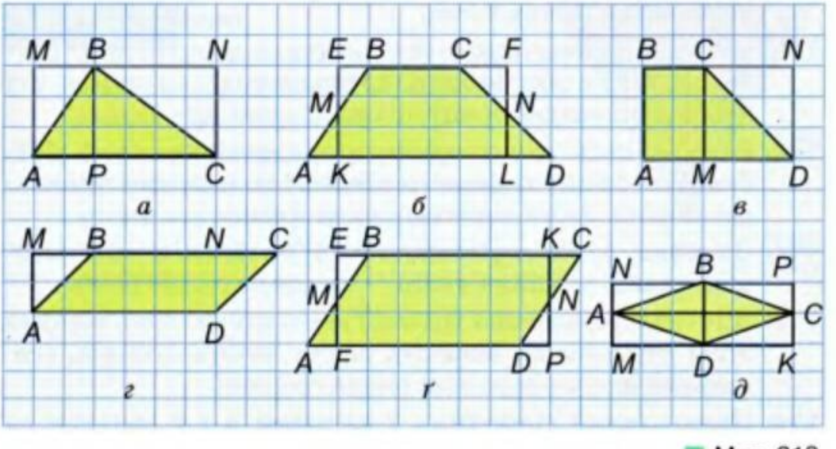
760. Знайдіть площу прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 25 см, а одна зі сторін на сантиметр коротша.

761. У коло радіуса 5 м вписано прямокутник зі стороною 6 м. Знайдіть площу прямокутника.

Б

762. Використовуючи властивості площ, знайдіть площі зафарбованих фігур (мал. 212). (Прийміть сторону клітинки за одиницю довжини.)

763. Знайдіть відношення площ квадратів, один з яких вписаний у коло, а другий описаний навколо того самого кола.



Мал. 212

764. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки 2 см і 6 см. Знайдіть площу прямокутника. Розгляньте два випадки.

765. Знайдіть площу прямокутника $ABCD$, якщо перпендикуляр, опущений з вершини B на діагональ AC, ділить її на відрізки 2 см і 8 см.

766. Відстань від точки перетину діагоналей прямокутника до однієї зі сторін на 3 см більша за відстань до другої. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр 52 см.

767. Обчисліть площу прямокутника, сторони якого пропорційні числам 4 і 3, а радіус описаного кола дорівнює 25 см.

768. Як зміниться площа прямокутника, якщо: а) одну пару протилежних сторін збільшити в два рази; б) кожну сторону збільшити в два рази; в) одну пару протилежних сторін збільшити у два рази, а другу зменшити в два рази?

769. Діагональ одного квадрата у два рази більша за діагональ другого квадрата. У скільки разів площа першого квадрата більша за площу другого?

770. Площа квадрата, побудованого на діагоналі прямокутника, удвічі більша за площу цього прямокутника. Доведіть, що сторони прямокутника рівні.

771. Перемалюйте в зошит фігуру (мал. 213) і проведіть пряму так, щоб розбити її на дві частини рівних площ.

Мал. 213

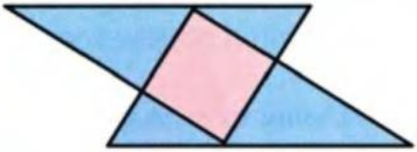
772. Кут між діагоналями прямокутника становить 60°, а менша його сторона дорівнює 3 м. Знайдіть площу прямокутника.

773. Радіуси двох концентричних кіл дорівнюють r і $2r$. Знайдіть площу вписаного в більше коло прямокутника, дві сторони якого дотикаються до меншого кола.

774. Діагоналі ромба дорівнюють a і c. Знайдіть площу чотирикутника, вершини якого — середини сторін ромба.

775. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, середня лінія дорівнює m. Знайдіть площу чотирикутника, вершинами якого є середини сторін трапеції.

776. Прямокутний трикутник з катетами a і b наклали на рівний йому трикутник так, що їх спільною частиною



Мал. 214

виявився найбільший квадрат. Знайдіть площу цього квадрата (мал. 214).

Практичне завдання

777. Визначте, скільки рулонів шпалер потрібно придбати, щоб обклеїти ними вашу кімнату. Довжина рулона 10 м, ширина: а) 0,5 м; б) 1 м.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

778. Знайдіть периметр трикутника, середні лінії якого дорівнюють 7 м, 8 м і 9 м.

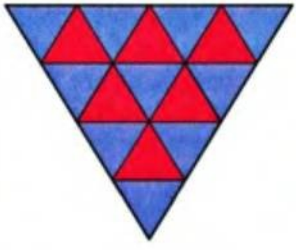
779. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 6, 7, 9 і 8. Чи можна такий чотирикутник вписати в коло?

780. Знайдіть найбільший кут трикутника, сторони якого дорівнюють 8 см, 15 см і 17 см.

781. Побудуйте ромб за двома даними діагоналями.

782. Діагоналі прямокутника перетинаються під кутом 60°. Як відносяться його сторони?

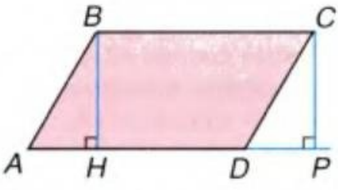
783. Скільки трикутників зображено на малюнку 215? Скільки серед них таких, що містять синіх трикутників удвічі більше, ніж червоних?



Мал. 215

§18 Площі паралелограма і трапеції

1. Площа паралелограма



Мал. 216

Домовимось одну зі сторін паралелограма (і її довжину) називати *основою*, а відстань від основи до прямої, якій належить протилежна сторона, — *висотою* паралелограма. Наприклад, якщо AD — основа паралелограма $ABCD$, то довжина перпендикуляра BH — його висота (мал. 216).

ТЕОРЕМА 30 **Площа паралелограма дорівнює добутку його основи на висоту.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCD$ — довільний паралелограм з основою $AD = a$ і висотою $BH = h$. Доведемо, що його площа $S = ah$ (див. мал. 216).

Якщо BH і CP — перпендикуляри до прямої AD, то трикутники ABH і DCP рівні (за катетом і гіпотенузою). Отже, якщо від площі трапеції $ABCP$ відняти площу $\triangle DCP$ чи від площі трапеції $ABCP$ відняти площу $\triangle ABH$, результати будуть однакові. Перша різниця дорівнює площі S даного паралелограма, друга — площі прямокутника $HBCP$. Отже, площа даного паралелограма дорівнює площі прямокутника $HBCP$, а площа прямокутника $HBCP$ — добутку ah. Тому $S = ah$. ☐

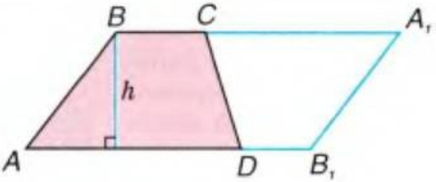
Оскільки ромб — це також паралелограм, то і **площа ромба дорівнює добутку його сторони на висоту.**

2. Площа трапеції

ТЕОРЕМА 31 **Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCD$ – довільна трапеція з основами $AD = a$, $BC = b$ (мал. 217). І нехай h — висота цієї трапеції (відстань між прями-



Мал. 217

ми AD і BC). Добудуємо трапецію A_1B_1DC, рівну даній (у якій $CA_1 = AD$ і $DB_1 = BC$). Чотирикутник ABA_1B_1 — паралелограм, бо $A_1B = AB_1$ і $A_1B \parallel AB_1$. Сторона цього паралелограма $AB_1 = a + b$, а висота h, тому його площа дорівнює $(a + b)h$. Площа трапеції становить половину площі паралелограма. Тому її площа

$$S = \frac{1}{2}(a + b)\,h. \square$$

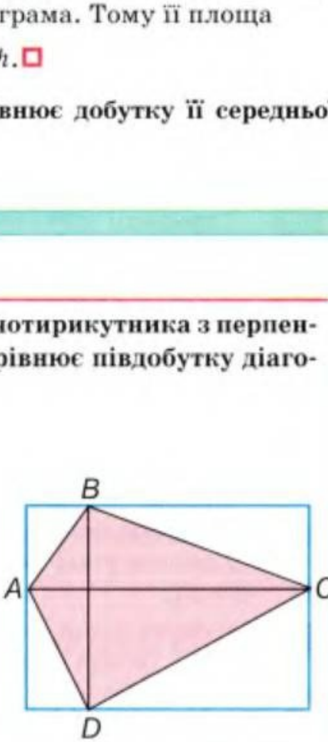
НАСЛІДОК. **Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії на висоту.**

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

ТЕОРЕМА 32 **Площа опуклого чотирикутника з перпендикулярними діагоналями дорівнює півдобутку діагоналей.**

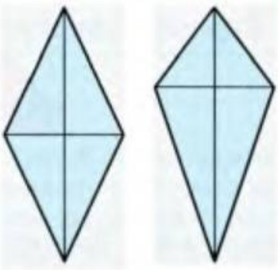
ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано опуклий чотирикутник $ABCD$, діагоналі якого AC і BD перпендикулярні (мал. 218). Провівши через кожну вершину пряму, паралельну протилежній діагоналі чотирикутника, можна навколо даного чотирикутника описати прямокутник, сторони якого дорівнюють діагоналям даного чотирикутника. При цьому прямокутник містить удвічі більше прямокутних трикутників, на які чотирикутник $ABCD$ розбивається діагоналями. Отже, площа даного чотирикутника удвічі менша за площу описаного



Мал. 218

прямокутника. Оскільки площа описаного прямокутника дорівнює добутку діагоналей AC і BD, то площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює півдобутку його діагоналей. □



Мал. 219

НАСЛІДКИ.

1) **Площа ромба дорівнює півдобутку діагоналей.**
2) **Площа дельтоїда дорівнює півдобутку діагоналей** (мал. 219).

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте і доведіть теорему про площу паралелограма.
2. За якою формулою знаходять площу ромба?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про площу трапеції.
4. За якою формулою знаходять площу трапеції, якщо відомі її середня лінія і висота?
5. Як знайти площу ромба за його діагоналями?

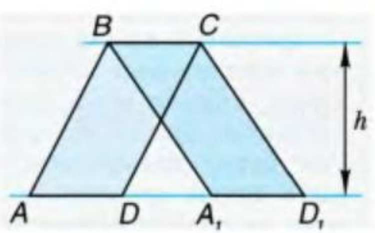
Виконаємо разом

1 Вершини A, D, A_1 і D_1 паралелограмів $ABCD$ і A_1BCD_1 лежать на одній прямій. Доведіть, що площі цих паралелограмів рівні (мал. 220).

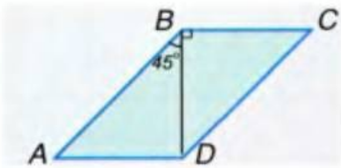
■ Площі даних паралелограмів $S = AD \cdot h$ і $S_1 = A_1D_1 \cdot h$. Їх висоти рівні і основи рівні, бо $AD = BC = A_1D_1$. Тому $S = S_1$.

2 Знайдіть площу паралелограма, якщо його діагональ завдовжки 5 см утворює зі сторонами кути 45° і 90° (мал. 221).

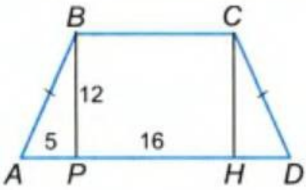
■ Нехай $BD = 5$ см — діагональ паралелограма $ABCD$, $\angle ABD = 45°$, $\angle ADB = 90°$ (за умовою). Тоді $\angle BAD =$



Мал. 220



Мал. 221



Мал. 222

$= 45°$, трикутник ABD — рівнобедрений, а тому $AD = BD = 5$ см. У паралелограмі $ABCD$ BD — висота, AD — основа. Отже, $S_{ABCD} = BD \cdot AD = 5 \cdot 5 = 25$ (см²).

3 У рівнобічній трапеції $ABCD$ висота BP ділить більшу основу на відрізки 5 см і 16 см. Знайдіть площу і периметр трапеції, якщо $BP = 12$ см (мал. 222).

Проведемо $CH \perp AD$, тоді:

$AP = HD$ (як катети рівних трикутників ABP і DCH);

$PH = BC$ (як протилежні сторони прямокутника $PBCH$).

Знайдемо середню лінію трапеції m:

$$m = \frac{BC + AD}{2} = PD = 16 \text{ см}.$$

Тоді $S_{ABCD} = m \cdot BP = 16 \cdot 12 = 192$ (см²).

Знайдемо бічну сторону трапеції:

$AB^2 = AP^2 + BP^2 = 25 + 144 = 169$ (см²), звідки $AB = 13$ см.

Тоді $P_{ABCD} = 2AB + 2m = 26 + 32 = 58$ (см).

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

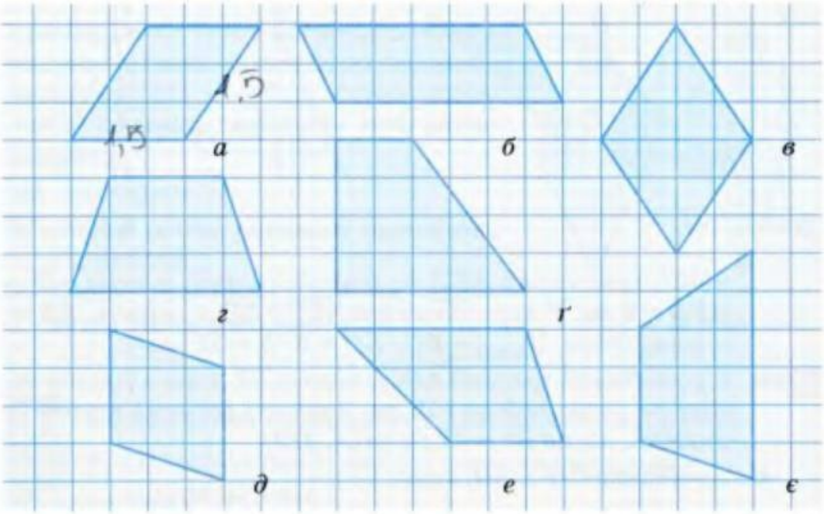
ВИКОНАЙТЕ УСНО

784. Знайдіть площу паралелограма, основа якого дорівнює 5 см, а висота 6 см.

785. Площа паралелограма Q, висота h. Знайдіть його основу.

786. Заповніть порожні клітинки таблиці, в якій a і b — основи трапеції, h, S — відповідно її висота і площа.

a	1	2	1		2
b	3	3	4	7	
h	2	4		2	3
S			5	10	12



Мал. 223

786. Знайдіть площі зображених фігур (мал. 223). Чи є серед них рівновеликі? (Прийміть сторону клітинки за 0,5 см.)

А

788. Чи існує паралелограм, сторони якого дорівнюють 9 і 7, а висоти 7 і 8?

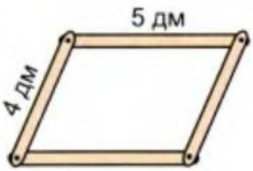
789. Висоти паралелограма 3 м і 4 м; одна з його сторін 5 м. Знайдіть другу сторону паралелограма.

790. Знайдіть площу паралелограма, якщо його діагональ дорівнює 14 см і перпендикулярна до сторони, довжина якої 25 см.

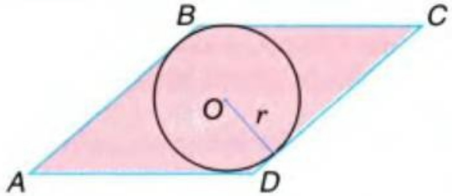
791. Суміжні сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 14 см, його гострий кут дорівнює 30°. Знайдіть площу паралелограма.

792. Сторони паралелограма дорівнюють 4 см і 5 см, а кут між ними 120°. Знайдіть його площу.

793. Дано шарнірний паралелограм зі сторонами 4 дм і 5 дм (мал. 224). У яких межах може змінюватися площа паралелограма?



Мал. 224



Мал. 225

794. Відстань між більшими сторонами паралелограма дорівнює 18 см, а його площа 450 см². Знайдіть відстань між меншими сторонами, якщо різниця сторін дорівнює 5 см.

795. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки 12 см і 20 см. Знайдіть площу паралелограма, якщо $\angle A = 30°$. Розгляньте два випадки.

796. Сторона ромба дорівнює 6 см, а один з кутів дорівнює 150°. Обчисліть площу ромба.

797. Знайдіть площу ромба, якщо його висота 10 см, а гострий кут 30°.

798. Знайдіть площу ромба за його стороною a і кутом 30°.

799. Знайдіть площу ромба за його висотою 20 см і кутом 45°.

800. Сторона ромба дорівнює 37,5 см, а радіус вписаного кола 21,2 см. Знайдіть площу ромба (мал. 225).

801. Знайдіть площу ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 4 см і 6 см.

802. Ромб із периметром 48 см і кутом 30° рівновеликий квадрату. Знайдіть діагональ цього квадрата.

803. Основи трапеції дорівнюють 15 см і 19 см, а висота 12 см. Знайдіть її площу.

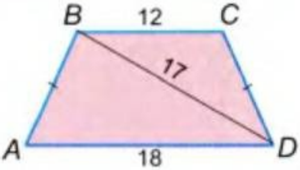
804. Середня лінія трапеції дорівнює 23 дм, а площа 0,23 м². Знайдіть висоту трапеції.

805. У трапеції $ABCD$ основа BC дорівнює 6 см, а бічна сторона $AB = 5$ см. Висота BK ділить основу AD на відрізки $AK = 3$ см і $KD = 7$ см. Знайдіть площу трапеції.

806. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, якщо її основи дорівнюють 5 см і 11 см, а периметр 28 см.

807. Тупий кут рівнобічної трапеції дорівнює 135°, а висота, проведена з вершини цього кута, ділить більшу основу на відрізки 1,4 см і 3,4 см. Обчисліть площу трапеції.

808. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 18 см, а діагональ 17 см. Знайдіть площу трапеції (мал. 226).



Мал. 226

809. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 70 см, а радіус вписаного кола 25 см. Знайдіть площу трапеції.

810. Обчисліть площу рівнобічної трапеції, менша основа якої дорівнює бічній стороні і має 2 см, а кут при більшій основі становить: 1) 60°; 2) 30°; 3) 45°.

811. Обчисліть площу прямокутної трапеції, у якої дві менші сторони дорівнюють по 6 см, а більший кут 135°.

812. Бічна сторона і висота рівнобічної трапеції пропорційні числам 5 і 3. Знайдіть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 7 см і 23 см.

Б

813. Сторони паралелограма дорівнюють 17 м і 15 м. Одна з діагоналей перпендикулярна до меншої сторони. Яка площа цього паралелограма?

814. Гострий кут паралелограма дорівнює 30°, а висоти, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 2 см і 3 см. Обчисліть площу паралелограма.

815. Діагональ паралелограма дорівнює його стороні. Обчисліть площу паралелограма, якщо більша його сторона дорівнює 16 см, а один з його кутів — 45°.

816. Висоти паралелограма дорівнюють 5 см і 4 см, а периметр дорівнює 36 см. Обчисліть площу паралелограма.

817. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його площа дорівнює 24 см^2, а точка перетину діагоналей віддалена від сторін на 2 см і 3 см.

818. Менша сторона паралелограма дорівнює 13 см. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей до більшої сторони, ділить її на відрізки, які дорівнюють 17 см і 12 см. Знайдіть площу паралелограма.

819. Сторона паралелограма дорівнює 8 м, а діагональ завдовжки 14 м утворює з нею кут 30°. Обчисліть площу паралелограма.

820. Поділіть паралелограм на чотири рівновеликі частини прямими, які проходять через одну з його вершин.

821. Знайдіть сторону ромба, якщо його площа дорівнює Q, а один з кутів 30°.

822. Знайдіть площу ромба $ABCD$, якщо його висота $BH = 45$ см, а H — середина сторони AD.

823. Знайдіть площу ромба, якщо точка дотику вписаного в ромб кола ділить сторону на відрізки 3 см і 12 см.

824. Точка дотику кола, вписаного в ромб, ділить сторону на відрізки, пропорційні числам 4 і 9. Знайдіть площу ромба, якщо радіус кола 12 см.

825. Діагоналі ромба пропорційні числам 3 і 4. Знайдіть площу ромба, якщо його периметр 80 см.

826. Знайдіть площу ромба, якщо його периметр 48 см, а кут між висотами, проведеними з однієї вершини, дорівнює 30°.

827. Основа перпендикуляра, проведеного з вершини тупого кута ромба, ділить сторону на відрізки 8 см і 9 см, починаючи від вершини гострого кута. Знайдіть площу ромба.

828. Діагональ ромба ділиться його висотою, проведеною з вершини тупого кута, у відношенні 1 : 2. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 26 см.

829. Діагоналі ромба дорівнюють 1 см і $\sqrt{3}$ см. Через точку їх перетину проведено висоти ромба, основи яких сполучено відрізками. Знайдіть: 1) висоту ромба; 2) кути ромба; 3) кут між висотами; 4) площу утвореного чотирикутника.

830. Знайдіть площу ромба, якщо його висота 12 см, а менша діагональ 13 см.

831. Двома прямими, не паралельними основам трапеції, поділіть дану трапецію на три рівновеликі трапеції.

832. У рівнобічну трапецію вписано коло радіуса 3 см. Знайдіть сторони трапеції, якщо її площа дорівнює 60 см^2.

833. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою гострого кута. Знайдіть площу трапеції, якщо основи її дорівнюють 10 см і 22 см.

834. Площа трапеції 72 см^2, а її основи і висота пропорційні числам 1, 2 і 3. Знайдіть середню лінію трапеції.

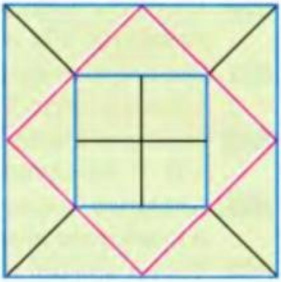
835. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, якщо вписане в неї коло точкою дотику ділить її бічну сторону на відрізки 4 см і 9 см.

836. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, якщо її діагоналі перпендикулярні і середня лінія дорівнює a.

837. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, якщо її більша основа дорівнює 22 см, бічна сторона 8,5 см і діагональ 19,5 см.

838. Знайдіть площу трапеції, основи якої 20 дм і 60 дм, а бічні сторони 13 дм і 37 дм.

839. Знайдіть площу трапеції, основи якої 24 см і 72 см, а кути при більшій основі 30° і 60°.



Мал. 227

840. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою тупого кута. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 6 см, а периметр 84 см.

Практичне завдання

841. Намалюйте квадрат, сторона якого дорівнює 4 см. Поділіть його на 12 рівних трикутників і 4 рівні квадрати (мал. 227). Знайдіть площі утворених квадратів і трикутників.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

842. Скількома і якими елементами можна задати трикутник?

843. Доведіть, що відповідні медіани (бісектриси, висоти) рівних трикутників рівні.

844. Побудуйте паралелограм, дві сторони якого дорівнюють 4 см і 5 см, а кут між ними 60°.

845. У коло радіуса 10 см вписано прямокутник, одна сторона якого дорівнює 12 см. Знайдіть периметр і площу прямокутника.

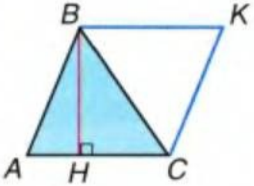
846. Куб об'ємом 1000 $см^3$ розрізали на 64 рівні кубики. Знайдіть довжину ребра і площу поверхні кубика.

§19 Площа трикутника

ТЕОРЕМА 33 **Площа трикутника дорівнює півдобутку його основи на висоту.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай ABC — довільний трикутник з основою $AC = a$ і висотою $BH = h$ (мал. 228). Побудуємо паралелограм $ABKC$. У нього $BK = AC$ і $CK = AB$, тому $\triangle ABC = \triangle KCB$. Площа S даного $\triangle ABC$ становить половину площі паралелограма. Оскільки площа паралелограма дорівнює ah, то площа даного трикутника вдвічі менша: $\frac{1}{2}ah$.



Мал. 228

Отже, площу трикутника можна обчислювати за формулою

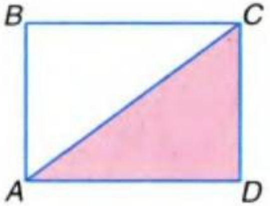
$$S = \frac{1}{2}ah. \square$$

Якщо за основу прямокутного трикутника прийняти один з його катетів, то другий катет буде висотою трикутника. Тому **площа прямокутного трикутника дорівнює півдобутку його катетів.**

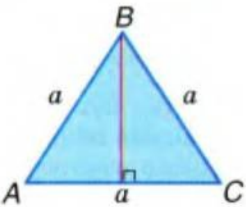
Це твердження випливає також із того, що з двох рівних прямокутних трикутників завжди можна скласти прямокутник (мал. 229).

Якщо кожна сторона трикутника дорівнює a (мал. 230), то згідно з теоремою Піфагора його висота

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$



Мал. 229



Мал. 230

а площа рівностороннього трикутника

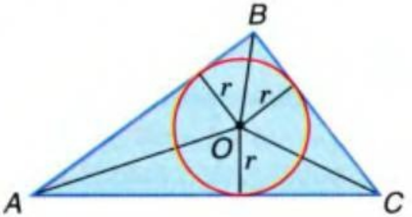
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Доведіть, що в кожному трикутнику зі сторонами a, b, c і відповідними висотами h_a, h_b, h_c завжди $ah_a = bh_b = ch_c$.

Вміючи знаходити площі трикутників, можна обчислити і площу будь-якого многокутника, бо кожний многокутник можна розбити на скінченне число трикутників.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Виведемо ще одну формулу для обчислення площі трикутника.



Мал. 231

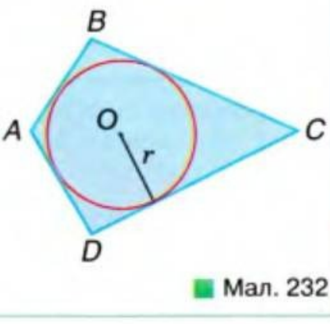
Нехай точка O — центр кола, вписаного в $\triangle ABC$ (мал. 231). Площа S цього трикутника дорівнює сумі площ трикутників OAB, OBC і OCA:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} CA \cdot r =$$
$$= \frac{1}{2}(AB + BC + CA) \cdot r = pr.$$

Отже, площа кожного трикутника дорівнює добутку його півпериметра і радіуса вписаного кола:

$$S = pr.$$

Покажіть, що **за формулою $S = pr$ можна обчислювати площу кожного многокутника периметра $2p$, описаного навколо кола радіуса r** (мал. 232).



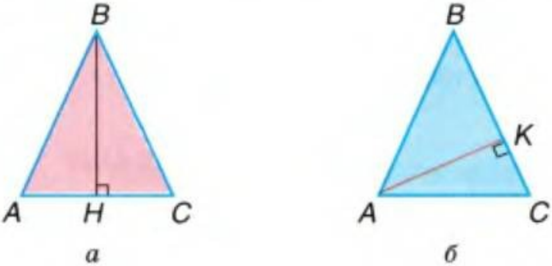
Мал. 232

? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте і доведіть теорему про площу трикутника.
2. Як знайти площу прямокутного трикутника?
3. Як знайти площу трикутника, якщо відомі його сторони і радіус вписаного кола?
4. За якою формулою обчислюють площу рівностороннього трикутника?
5. Як знайти радіус кола, вписаного в трикутник?
6. Як знайти площу многокутника, описаного навколо кола?

Виконаємо разом

1 Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють a, a і b. Чому дорівнює його висота, проведена до бічної сторони?



Мал. 233

Нехай $AB = BC = a$, $AC = b$ (мал. 233, a). Дві сторони трикутника рівні, отже, він рівнобедрений. Його висота BH ділить основу AC навпіл. З прямокутного трикутника ABH, за теоремою Піфагора, знаходимо:

$$BH^2 = a^2 - \frac{b^2}{4},\ BH = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}.$$

Шукана площа трикутника

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{1}{4}b\sqrt{4a^2 - b^2}.$$

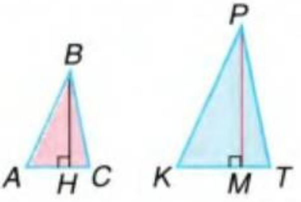
Тут a і b — довільні додатні числа, але такі, що $2a > b$.

Площу трикутника ABC знайти можна інакше (мал. 233, *б*):

$$S = \frac{1}{2} AK \cdot BC.$$

Звідси висота

$$AK = \frac{2S}{BC} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}.$$



Мал. 234

2 Доведіть, що відношення площ двох подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Нехай трикутники ABC і KPT подібні з коефіцієнтом подібності k (мал. 234). Тобто $KP = kAB$ і $KT = kAC$. Так само відносяться і їх висоти: $PM = kBH$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH,$$

$$S_{KPT} = \frac{1}{2} KT \cdot PM = \frac{1}{2} k \cdot AC \cdot k \cdot BH = k^2 \cdot S_{ABC}.$$

Отже, $S_{KPT} : S_{ABC} = k^2$.

Доведене твердження можна сформулювати і так. **Якщо відповідні сторони подібних трикутників відносяться як $m : n$, то їх площі відносяться як $m^2 : n^2$.**

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

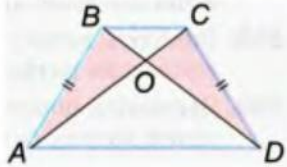
847. Як зміниться площа трикутника, якщо:
а) його висоту збільшити втричі, а основу не змінювати;
б) основу зменшити вдвічі, а висоту не змінювати;
в) основу збільшити вдвічі, а висоту зменшити вдвічі;
г) основу збільшити вдвічі, а висоту збільшити в 5 разів?

848. У наведеній таблиці a, h і S — основа, висота і площа трикутника, виражені у відповідних одиницях. Які числа мають бути в порожніх клітинках?

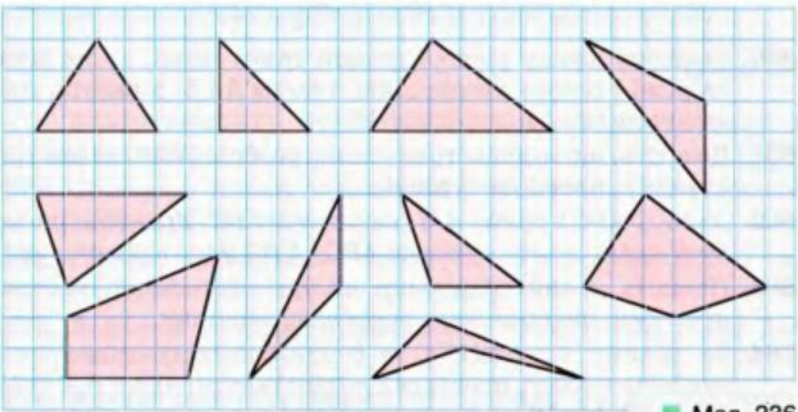
a	3	6	4	7		
h	4	5			0,5	3
S			10	70	1	3

849. $ABCD$ — рівнобічна трапеція (мал. 235). Доведіть, що:
а) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DCB}$; б) $S_{\triangle BAD} = S_{\triangle DCA}$;
в) $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle DOC}$.

850. Знайдіть площі зображених фігур (мал. 236). Чи є серед них рівновеликі? (Прийміть сторону клітинки за одиничний відрізок.)



Мал. 235


Мал. 236

А

851. Знайдіть площу трикутника, основа якого дорівнює 12 см, а висота — 8 см.

852. Знайдіть висоту трикутника, основа якого дорівнює 35 см, а площа — 175 см^2.

853. Обчисліть площу прямокутного трикутника, якщо катети дорівнюють: а) 4 см і 11 см; б) 1,2 дм і 3 дм.

854. Площа прямокутного трикутника дорівнює 175 см^2. Обчисліть катети, якщо відношення їх довжин дорівнює 7 : 2.

855. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза і катет якого дорівнюють 10 см і 8 см.

856. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 2 м, а його площа 10 м^2. Знайдіть другий катет цього трикутника.

857. Знайдіть площу рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою: а) 8 см; б) 1,4 дм; в) c м.

858. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 2 см і 8 см.

859. Заповніть порожні клітинки таблиці, в якій a і b — довжини катетів (у см), а S — площа трикутника (у см²).

a	2	32	5,8	14,4	0,2	$2n$	n
b	5	45			0,24	$3m$	
S			29	36			Q

860. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо бічна сторона і основа пропорційні числам 5 і 8, а висота, проведена до основи, дорівнює 18 см.

861. Доведіть, що медіана трикутника розбиває його на два трикутники, площі яких рівні.

862. Дано $\triangle ABC$ і пряму AM, паралельну BC. Доведіть, що коли $K \in AM$, то трикутники ABC і KBC мають рівні площі.

863. Поділіть даний трикутник на три рівновеликі частини прямими, що проходять через одну вершину.

864. За даними катетами a та b прямокутного трикутника знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи: а) $a = 5$, $b = 12$; б) $a = 12$, $b = 16$.

865. Обчисліть висоти трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см.

866. Сторони AB і BC трикутника ABC дорівнюють відповідно 16 см і 22 см, а висота, проведена до сторони AB, дорівнює 11 см. Обчисліть висоту, проведену до сторони BC.

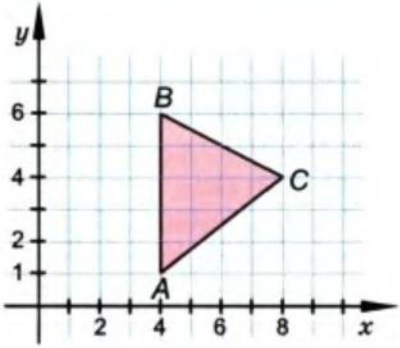
867. Дві сторони трикутника дорівнюють 7,5 см і 3,2 см. Висота, проведена до більшої сторони, дорівнює 2,4 см. Обчисліть висоту, проведену до меншої сторони.

868. Площа трикутника дорівнює 20 см². Знайдіть площу трикутника, який відтинає середня лінія від даного трикутника.

869. Знайдіть радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник з катетами 5 см і 12 см.

870. Знайдіть радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник зі сторонами 17 см, 17 см і 16 см.

871. Доведіть, що площа квадрата, побудованого на катеті рівнобедреного прямокутного трикутника, вдвічі більша від



Мал. 237

площі квадрата, побудованого на висоті, проведеній до гіпотенузи.

872. Обчисліть площу правильного трикутника зі стороною: а) 10 см; б) 7 см; в) a м.

873. Площа правильного трикутника дорівнює $100\sqrt{3}$ м^2. Знайдіть сторону цього трикутника.

874. Виразіть сторону правильного трикутника через його площу Q.

875. Висота рівностороннього трикутника $\sqrt{3}$ м. Яка площа цього трикутника?

876. Знайдіть площу трикутника за координатами його вершин: (4; 1), (4; 6), (8; 4) (мал. 237).

877. Висота трикутника дорівнює 2 м, а проекції бічних сторін на основу дорівнюють 3 м і 10 м. Знайдіть площу трикутника.

878. Висота трикутника дорівнює 4 м, а кути при його основі дорівнюють 30° і 45°. Знайдіть площу трикутника.

Б

879. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $BC = 3\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45°$. Знайдіть його площу.

880. Знайдіть площу правильного трикутника, описаного навколо кола радіуса R.

881. Сторони трикутника пропорційні числам 1 і 2. Висота, проведена до однієї з них, дорівнює 2 см. Знайдіть висоту, проведену до другої сторони.

882. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 4 м і 6 м. Знайдіть площі трикутників, на які бісектриса прямого кута ділить даний трикутник.

883. Знайдіть площу трикутника, вершини якого:

а) $A(-2; 3)$, $B(4; 7)$, $C(4; -1)$;

б) $K(1; 3)$, $P(7; 5)$, $T(3; 1)$.

884. Знайдіть площу чотирикутника, діагоналі якого перпендикулярні і мають довжини 12 см і 15 см.

885. Як відносяться площі двох трикутників, якщо вершини одного з них є серединами сторін другого?

886. Висота CH прямокутного трикутника ABC ділить гіпотенузу на відрізки 1 дм і 9 дм. Обчисліть площу чотирикутника $ACBK$, де K — середина CH.

887. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат так, що прямий кут трикутника збігається з кутом квадрата. Знайдіть відношення площі квадрата до площі трикутника.

888. Точку перетину медіан трикутника (центр мас) сполучили з його вершинами. Порівняйте площу кожного з трьох утворених трикутників з площею даного трикутника.

889. Діагоналі паралелограма ділять його на чотири трикутники. Знайдіть відношення площі кожного з них до площі паралелограма.

890. Усередині паралелограма $ABCD$ довільно позначено точку M. Знайдіть відношення суми площ трикутників AMD і BMC до площі паралелограма для будь-якого положення точки M.

891. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює $30°$. Знайдіть периметр трикутника, якщо його площа дорівнює $16\sqrt{3}$.

892. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 10 см, а до бічної сторони 12 см. Знайдіть сторони трикутника та його площу.

893. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 30 см і 40 см. Знайдіть площу трикутника.

894. Один катет рівнобедреного прямокутного трикутника зменшили на 10 %, а другий збільшили на 10 %. Як змінилася площа трикутника?

895. Доведіть, що сторони трикутника обернено пропорційні до його висот, тобто

$$a : b = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}; \quad a : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_c}; \quad b : c = \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

896. Дано $\triangle ABC$. Побудуйте рівнобедрений трикутник ABK, площа якого дорівнює площі трикутника ABC.

897. Як провести дві прямі через вершину квадрата, щоб розбити його на три фігури, площі яких рівні?

898. Кожна сторона одного трикутника більша за будь-яку сторону другого трикутника. Чи випливає з цього, що площа першого трикутника більша за площу другого трикутника?

899. Доведіть, що сума відстаней від точки на основі рівнобедреного гострокутного трикутника до бічних сторін не залежить від положення цієї точки.

900. Доведіть, що сума відстаней від точки, яка лежить всередині рівностороннього трикутника, до його сторін не залежить від положення цієї точки.

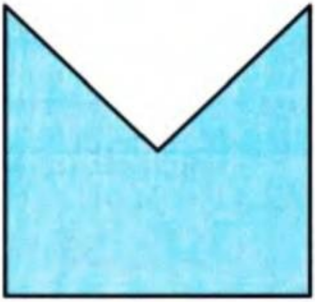
901. Через точку D, що лежить на стороні BC трикутника ABC, проведено прямі, паралельні двом іншим сторонам, які перетинають сторони AB і AC в точках E і F відповідно. Доведіть, що трикутники CDE і BDF мають рівні площі.

902. Через точку перетину медіан $\triangle ABC$ паралельно AC проведено пряму, яка перетинає сторони AB і BC у точках M і N. Знайдіть площу $\triangle ABC$, якщо площа $\triangle MBN$ дорівнює S.

903. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см.

904. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник зі сторонами 13 см, 20 см і 21 см.

905. Для кмітливих. Два батька і два сина хочуть поділити ділянку землі, план якої зображено на малюнку 238, так, щоб усі ділянки мали рівні площі й однакові форми. Як це зробити?



Мал. 238

Практичне завдання

906. Накресліть чотирикутник, відмінний від паралелограма, розбийте його на два трикутники, виміряйте необхідні елементи і обчисліть площу чотирикутника. Прикиньте, якою може бути похибка. Від чого вона залежить?

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

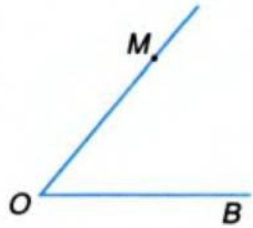
907. Чи існує трикутник зі сторонами a, $2a$ і $4a$? А з кутами $50°$, $60°$ і $80°$?

908. Один кут трикутника збільшили на $10°$, другий зменшили на $15°$. Як зміниться від цього третій кут трикутника?

909. Накресліть три довільні відрізки і побудуйте: а) їх четвертий пропорційний; б) середній пропорційний двох перших відрізків.

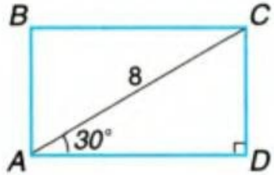
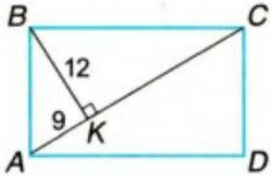
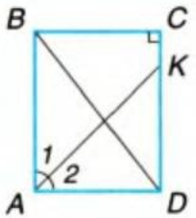
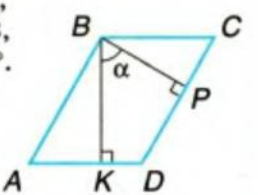
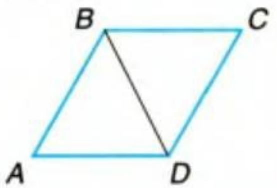
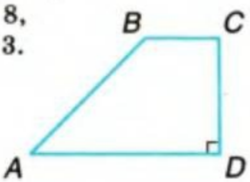
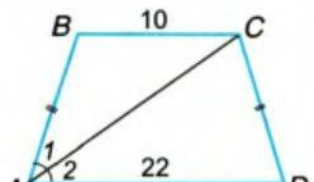
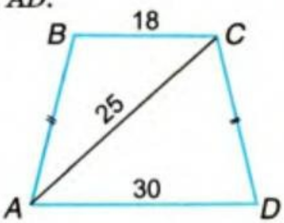
910. Вершини чотирикутника ділять описане коло на дуги, три з яких мають $100°$, $110°$ і $120°$. Знайдіть градусну міру четвертої дуги кола.

911. У кут впишіть коло, яке дотикається до сторін кута і проходить через точку M, що лежить на стороні кута (мал. 239).



Мал. 239

Знайдіть площі чотирикутників ABCD за готовими малюнками.

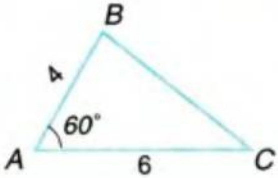
	А	Б
1	$AC = 8$, $\angle CAD = 30°$. 	$AK = 9$, $BK = 12$. 
2	$\angle 1 = \angle 2$, $KD = 3CK$, $BD = 15$. 	▱$ABCD$, $BP = 2$, $BK = 3$, $\alpha = 60°$. 
3	$ABCD$ — ромб, $AB = BD = 6$. 	$BC \parallel AD$, $\angle A = 45°$, $AD = 8$, $BC = 3$. 
4	$BC \parallel AD$, $\angle 1 = \angle 2$. 	$BC \parallel AD$. 

Знайдіть площі трикутників ABC за готовими малюнками.

А / Б

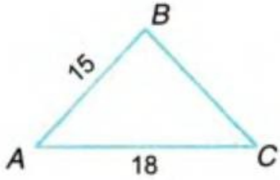
5

А



Б

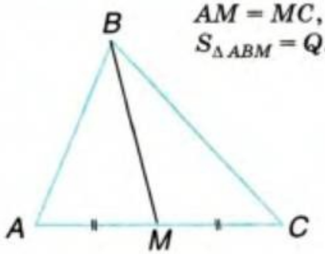
$AB = BC$.



6

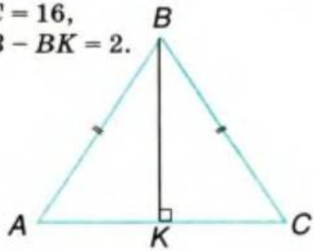
А

$AM = MC$,
$S_{\Delta ABM} = Q$.



Б

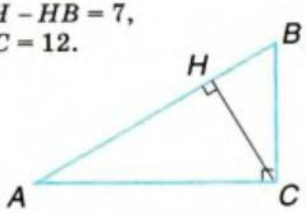
$AC = 16$,
$AB - BK = 2$.



7

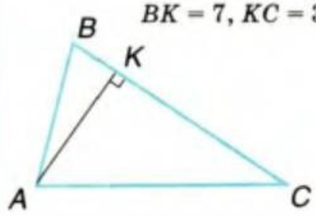
А

$AC \perp BC$,
$AH - HB = 7$,
$HC = 12$.



Б

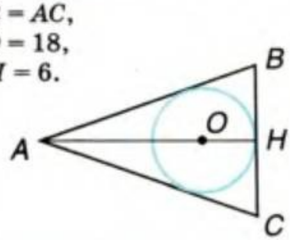
$AB : AC = 5 : 8$,
$BK = 7$, $KC = 32$.



8

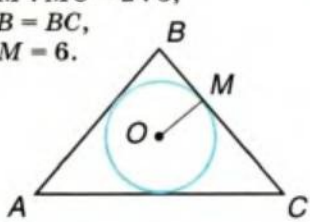
А

$AB = AC$,
$AO = 18$,
$OH = 6$.



Б

$BM : MC = 2 : 3$,
$AB = BC$,
$OM = 6$.



Самостійна робота 5

Варіант 1

1°. Знайдіть площу прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 10 см і утворює зі стороною кут 30°.

2°. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 6 см. Знайдіть висоту, проведену до бічної сторони, якщо основа дорівнює 8 см, а бічна сторона 12 см.

3•. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, якщо її основи дорівнюють 5 см і 17 см, а периметр 42 см.

Варіант 2

1°. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 8 см, а кут при основі 30°.

2°. Сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 12 см, а менша з висот 5 см. Знайдіть більшу висоту паралелограма.

3•. Знайдіть площу прямокутної трапеції, якщо її основи 6 см і 14 см, а бічні сторони пропорційні числам 3 і 5.

Варіант 3

1°. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого утворюють кут 45° і дорівнюють 10 см та 16 см.

2°. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї, 8 см. Знайдіть бічну сторону трикутника, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 6 см.

3•. Знайдіть площу рівнобічної трапеції з основами 6 см і 24 см, якщо в трапецію можна вписати коло.

Варіант 4

1°. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює 120°, а бічна сторона 6 см.

2°. Висоти паралелограма дорівнюють 5 см і 6 см, а більша сторона 12 см. Знайдіть меншу сторону паралелограма.

3•. Знайдіть площу прямокутної трапеції, основи якої 7 см і 16 см, а різниця бічних сторін дорівнює 3 см.

Тестові завдання 5

1. Фігури називаються рівновеликими, якщо в них рівні:	а) кути; б) сторони; в) периметри; г) площі.
2. Площа рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом $2a$ дорівнює:	а) a^2; б) $2a^2$; в) $4a^2$; г) $8a^2$.
3. Висота паралелограма зі стороною a і площею S дорівнює:	а) $a \cdot S$; б) $a : S$; в) $S : a$; г) $2S : a$.
4. За якою з формул не визначають площу ромба?	а) $a \cdot h$; б) $\frac{1}{2}a \cdot h$; в) $\frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$; г) $p \cdot r$.
5. Знайдіть площу трапеції, основи якої 2 см і 8 см, а висота 5 см.	а) 50 см^2; б) 80 см^2; в) 25 см^2; г) 15 см^2.
6. Знайдіть радіус кола, вписаного в квадрат, площа якого $4a^2$.	а) a; б) $2a$; в) $4a$; г) $8a$.
7. Площа рівностороннього трикутника зі стороною a дорівнює:	а) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; б) $3a^2$; в) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; г) $a^2\sqrt{3}$.
8. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 4 см і 6 см.	а) 24 см^2; б) 12 см^2; в) 20 см^2; г) 8 см^2.
9. AM — медіана $\triangle ABC$. Який знак слід поставити замість *: $S_{\triangle ABC} * 2S_{\triangle ABM}$?	а) >; б) <; в) =; г) не можна встановити.
10. Сторони квадратів відносяться як 2 : 5. Як відносяться їх площі?	а) 2 : 5; б) 2 : 25; в) 4 : 25; г) 4 : 5.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Знайдіть площу прямокутника, діагональ якого дорівнює 15 см, а одна зі сторін 12 см.

2°. Знайдіть площу квадрата, вписаного в коло радіуса 5 см.

3°. Середня лінія трапеції дорівнює 15 см, а висота 12 см. Знайдіть площу трапеції.

4°. Знайдіть площу ромба, якщо його периметр 40 см, а одна з діагоналей 12 см.

5•. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його площа 120 см^2, а висоти дорівнюють 5 см і 6 см.

6•. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона і основа якого пропорційні числам 17 і 16, а висота, проведена до основи, дорівнює 30 см.

7•. Менша основа і бічна сторона рівнобічної трапеції відповідно дорівнюють 24 см і 12 см. Знайдіть, площу трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60°.

8•. Катети прямокутного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в $\triangle CMB$, де M — середина AB, якщо $BC < AC$.

9•. Доведіть, що площа рівнобічної трапеції дорівнює подвоєному добутку бічної сторони і радіуса вписаного в трапецію кола.

10•. Точка дотику кола, вписаного у рівнобічну трапецію, ділить бічну сторону на відрізки 3 см і 12 см. Знайдіть площу трапеції.

Головне в розділі 3

Многокутник — проста замкнена ламана. Частину площини, обмежену простою замкненою ламаною, також називають многокутником. Кожний n-кутник має n сторін, n вершин і n кутів. Якщо кожний кут многокутника менший від розгорнутого, його називають *опуклим*, якщо хоч один кут многокутника більший від розгорнутого, його називають *неопуклим* многокутником. Кожна сторона многокутника менша від суми усіх інших його сторін. Суму довжин усіх сторін многокутника називають його *периметром*.

Сума усіх кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot (n - 2)$. Сума зовнішніх кутів опуклого многокутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

Якщо всі вершини многокутника лежать на колі, такий многокутник називають *вписаним у коло*, а коло — описаним навколо многокутника. Якщо всі сторони многокутника дотикаються до кола, такий многокутник називають *описаним навколо кола*, а коло — вписаним у многокутник. У кожний трикутник можна вписати коло і навколо кожного трикутника можна описати коло.

Площа прямокутника дорівнює добутку двох його сусідніх сторін:

$$S = ab.$$

Площа паралелограма дорівнює добутку його основи на висоту:

$$S = ah.$$

Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту, тобто добутку середньої лінії і висоти: $S = \frac{a + b}{2} \cdot h.$

Площа чотирикутника з перпендикулярними діагоналями (зокрема ромба і дельтоїда) дорівнює півдобутку діагоналей:

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2.$$

Площа трикутника дорівнює півдобутку його основи на висоту:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

Площа прямокутного трикутника дорівнює півдобутку його катетів:

$$S = \frac{1}{2}ab.$$

Площа рівностороннього трикутника зі стороною a дорівнює:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Площа многокутника, описаного навколо кола, дорівнює добутку півпериметра многокутника на радіус кола:

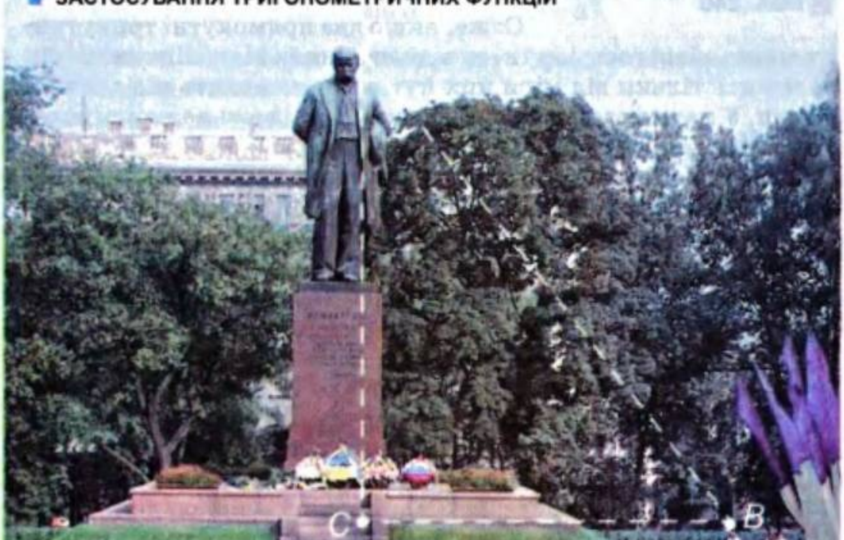
$$S = pr.$$

Розділ 4 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

Розв'язати трикутник — це означає за кількома відомими його елементами знайти всі інші його елементи. Ще понад два тисячоліття тому було створено окрему науку про розв'язування трикутників — **тригонометрію**.

У цьому розділі ви ознайомитеся з найпростішими відомостями цієї науки про розв'язування прямокутних трикутників.

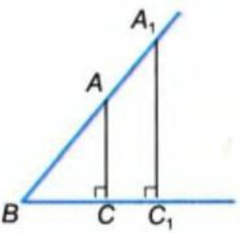
- **СИНУС, КОСИНУС І ТАНГЕНС ГОСТРОГО КУТА**
- **ВЛАСТИВОСТІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ГОСТРОГО КУТА**
- **РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ**
- **ЗАСТОСУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ**



Геометрія — це мистецтво добре вимірювати.
П. Раме

§20 *Синус, косинус і тангенс гострого кута*

Якщо в прямокутному трикутнику кут дорівнює 30°, то, знаючи гіпотенузу c, неважко визначити катети: один з них дорівнює половині гіпотенузи, а другий легко знаходиться за теоремою Піфагора. А як, знаючи гіпотенузу, знайти катети, якщо гострий кут прямокутного трикутника дорівнює, наприклад, 25°? Для цього треба скористатися поняттям синуса чи косинуса цього кута.



Мал. 240

Ви вже знаєте, що два прямокутні трикутники подібні, якщо гострий кут одного дорівнює гострому куту другого трикутника. Зокрема, яким би не був гострий кут B, відповідні сторони трикутників ABC і A_1BC_1, зображених на малюнку **240**, пропорційні:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{A_1C_1}{A_1B},\quad \frac{BC}{AB}=\frac{BC_1}{BA_1},\quad \frac{AC}{BC}=\frac{A_1C_1}{BC_1}.$$

Отже, якщо два прямокутні трикутники мають рівні гострі кути, то відношення їх відповідних сторін залежить тільки від міри цих кутів і не залежить від довжин сторін. У математиці такі відношення відіграють важливу роль, і в усьому світі їх називають однаково: *синус*, *косинус*, *тангенс*.

Синусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до прилеглого.

Мал. 241

Синус, косинус, тангенс гострого кута α позначають відповідно так: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

Розглянемо довільний прямокутний трикутник. Домовимося позначати його прямий кут літерою C, гострі кути — літерами A, B, протилежні їм сторони — відповідними малими літерами c, a, b, а міри гострих кутів — грецькими літерами α (альфа) і β (бета) (мал. 241). Для трикутника з такими сторонами і кутами сформульовані вище означення можна записати у вигляді рівностей:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}. \qquad (1)$$

Це — *співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника.*

Знаючи одну сторону прямокутного трикутника і його гострий кут, за допомогою цих формул можна визначити дві інші сторони трикутника. Значення синуса, косинуса чи тангенса даного кута наведено в таблиці (див. форзац 1).

З рівностей (1) катет прямокутного трикутника визначається так:

$$a = c \cdot \sin\alpha,\ b = c \cdot \cos\alpha,\ a = b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha.$$

! Отже, **катет прямокутного трикутника дорівнює добутку:**

- **гіпотенузи на синус протилежного кута**, або
- **гіпотенузи на косинус прилеглого кута**, або
- **другого катета на тангенс протилежного кута.**

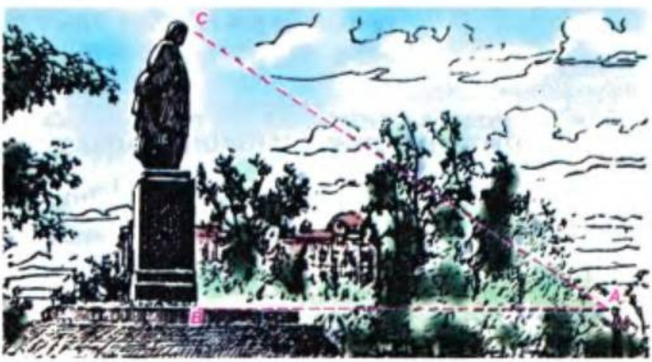
З рівностей (1) гіпотенузу прямокутного трикутника можна знайти так:

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}; \qquad c = \frac{b}{\cos\alpha}.$$

! Отже, **гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення:**

- **катета на синус протилежного кута** або
- **катета на косинус прилеглого кута.**

■ *ЗАДАЧА.* Як визначити висоту пам'ятника Тарасу Шевченку, якщо з точки A, віддаленої від точки B на 30 м, його видно під кутом 18° (мал. 242)?



■ Мал. 242

■ *РОЗВ'ЯЗАННЯ.* Якщо шукана висота пам'ятника дорівнює h, то $\frac{h}{AB} = \text{tg}\, A$. Якщо $AB = 30$ м, $\angle A = 18°$, то $h = 30 \cdot \text{tg}\, 18°$.

За таблицею знаходимо: $\text{tg}\, 18° \approx 0{,}335$.
Отже, $h \approx 30 \cdot 0{,}335 \approx 10{,}05$ м.

■ *ПРИМІТКА.* Пишуть $\text{tg}\, A$, $\sin B$, $\cos C$, а не $\text{tg} \angle A$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Досі мова йшла про синус, косинус і тангенс лише гострого кута. У 9 класі ви ознайомитесь із синусом, косинусом і тангенсом довільного кута — в межах від 0° до 180°. А ще — з котангенсом кута. Котангенс кута α — це число, обернене до тангенса кута α:

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{1}{\text{tg}\, \alpha}.$$

Якщо для прямокутного трикутника

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{a}{b}, \text{ то } \text{ctg}\, \alpha = \frac{b}{a}.$$

Слова *косинус* і *котангенс* починаються префіксами «ко» — скороченням латинського *complementi* — «доповнення». Вони означають відповідно: синус доповнення і тангенс доповнення.

У прямокутному трикутнику один з гострих кутів доповнює інший до 90°. Такі кути називаються *доповняльними.*

Якщо α і β — доповняльні кути одного прямокутного трикутника, то:

$$\sin \alpha = \cos \beta = \cos (90° - \alpha);$$
$$\cos \alpha = \sin \beta = \sin (90° - \alpha);$$
$$\text{tg}\, \alpha = \text{ctg}\, \beta = \text{ctg}\, (90° - \alpha);$$
$$\text{ctg}\, \alpha = \text{tg}\, \beta = \text{tg}\, (90° - \alpha).$$

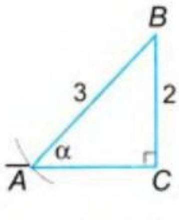
? Запитання для самоконтролю

1. Що таке синус гострого кута прямокутного трикутника? А косинус?
2. Що таке тангенс гострого кута прямокутного трикутника?
3. Чому дорівнює синус кута 30°?

4. Чому дорівнює tg 45°?
5. Чому дорівнює відношення катетів прямокутного трикутника?
6. Як визначити катет прямокутного трикутника через його гіпотенузу; гострий кут?
7. Чи завжди косинус одного гострого кута прямокутного трикутника дорівнює синусу другого гострого кута?

Виконаємо разом

1 Побудуйте кут, синус якого дорівнює $\frac{2}{3}$. Знайдіть косинус і тангенс цього кута.



Мал. 243

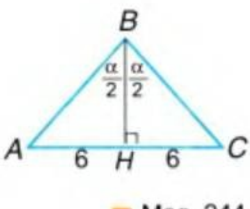
Будуємо прямокутний трикутник (мал. 243) з катетом 2 і гіпотенузою 3 (одиниці вимірювання можна брати довільні, але однакові). Тоді $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

За теоремою Піфагора знайдемо катет AC. $AC = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$. Тоді

$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

і $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2 Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть проведену з вершини висоту і бічну сторону трикутника, якщо кут при його вершині дорівнює α.



Мал. 244

Нехай у $\triangle ABC$ $AB = BC$. Опустимо з вершини B висоту BH (мал. 244).

Тоді $\angle BHA = 90°$, $\angle HBA = \frac{\alpha}{2}$, а $AH = HC = 6$ см.

Бічна сторона $\triangle ABC$ — це гіпотенуза $\triangle ABH$. Щоб знайти її, скористаємося формулою

$AB = \frac{AH}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Отже, $AB = \frac{6}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ см.

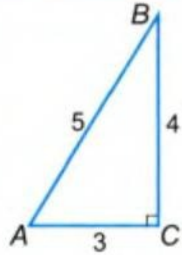
Висота BH трикутника ABC — це катет трикутника ABH. Знайдемо його за формулою $BH = \dfrac{AH}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. Отже,

$$BH = \frac{6}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \text{ см.}$$

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

912. Знайдіть $\sin A$, $\sin B$, $\cos A$, $\cos B$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$, якщо A і B — гострі кути єгипетського трикутника (мал. 245).



Мал. 245

913. Катети прямокутного трикутника ABC дорівнюють 1 і 2. Знайдіть синус, косинус і тангенс його найменшого кута.

914. Тангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнює 1. Знайдіть синус і косинус цього кута.

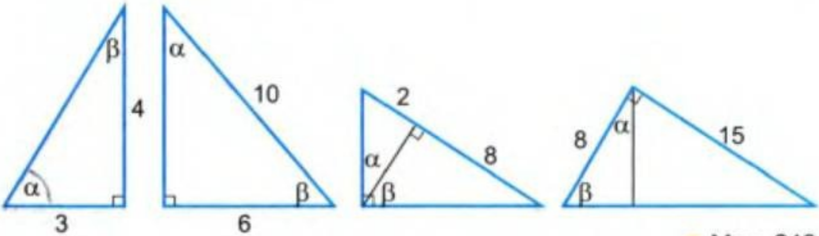
915. Чи може синус гострого кута бути більшим за 1? А косинус?

916. Чи може тангенс гострого кута бути більшим за 1? А меншим за 1?

A

917. Трикутник зі сторонами 6 м, 8 м і 10 м — прямокутний. Знайдіть синуси, косинуси і тангенси його гострих кутів.

918. Користуючись малюнком 246, знайдіть синус, косинус і тангенс кутів α і β.



Мал. 246

919. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнюють 24 см і 25 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів трикутника.

920. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів трикутника.

921. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів A і B прямокутного трикутника ABC, якщо: а) $AC = 40$ см, $BC = 9$ см; б) $AB = 1{,}7$ м, $BC = 0{,}8$ м; в) $AB = \sqrt{3}$ м, $AC = 1$ м; г) $CA = CB = \sqrt{2}$ см.

922. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів A і B прямокутного трикутника ABC, якщо: а) $AB = 25$, $BC = 7$; б) $AC = 2{,}1$, $BC = 2$.

923. Побудуйте прямокутний трикутник з меншим катетом 2 см і кутом 70°. Виміряйте інші сторони трикутника і знайдіть наближені значення синуса, косинуса і тангенса кутів 70° і 20°.

924. Побудуйте прямокутний трикутник з гіпотенузою 5 см і кутом 50°. Виміряйте інші сторони трикутника і знайдіть наближені значення синуса, косинуса і тангенса кутів 50° і 40°.

925. Побудуйте кут, синус якого дорівнює $\frac{4}{5}$. Знайдіть косинус і тангенс цього кута.

926. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює 0,6. Знайдіть синус і тангенс цього кута.

927. Побудуйте кут, тангенс якого дорівнює 1,5. Знайдіть синус і косинус цього кута.

928. Дано три точки: O (0; 0), A (1; 0), B (1; 1). Знайдіть синус, косинус і тангенс кута OBA.

929. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута KAO, якщо A (1; 0), O (0; 0), K (0; 2).

930. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c, а один з кутів α. Знайдіть катети трикутника.

931. Катет прямокутного трикутника дорівнює m, а прилеглий кут α. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

932. Катет прямокутного трикутника дорівнює n, а протилежний кут α. Знайдіть гіпотенузу і другий катет трикутника.

933. Катет прямокутного трикутника дорівнює a, а прилеглий кут α. Знайдіть другий катет і гіпотенузу трикутника.

Б

934. Дано прямокутний $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Знайдіть:
а) BC, якщо $AB = 6$ см, $\sin A = 0{,}3$;
б) AB, якщо $BC = 5$ см, $\cos B = \frac{2}{5}$;
в) BC, якщо $AC = 8$ см, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$.

935. Відомо, що a, b — катети $\triangle ABC$, α, β — протилежні до них кути. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть порожні клітинки за умови, що c — гіпотенуза $\triangle ABC$.

№	a	b	c	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\beta$	$\cos\beta$
1	2			0,5			
2		3					$\frac{\sqrt{3}}{2}$
3			5			0,2	

936. Побудуйте чотирикутник $ABCD$ за координатами його вершин: $A(-2; 0)$, $B(0; 2)$, $C(1; 0)$, $D(0; 3)$. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кутів $\angle OAB$, $\angle OBA$, $\angle OBC$, $\angle OCB$, $\angle OCD$, $\angle ODC$, $\angle OAD$, $\angle ODA$, де $O(0; 0)$.

937. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс гострих кутів паралелограма $OABC$, якщо $O(0; 0)$, $A(0; 3)$, $B(4; 5)$, $C(4; 2)$.

938. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, а кут при вершині — α. Знайдіть: а) основу; б) висоти.

939. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з більшою стороною кут α. Знайдіть меншу сторону прямокутника.

940. З точки, що лежить на відстані h від прямої, проведено похилу, яка утворює з прямою кут α. Знайдіть довжину похилої.

941. Прямокутний трикутник з гострим кутом α вписано в коло радіуса r. Знайдіть катети трикутника.

942. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює a, а кут при основі α. Знайдіть основу трикутника.

943. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кожного з кутів трикутника.

944. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b, а гострий кут при основі α. Знайдіть бічну сторону і висоту трапеції.

Практичне завдання

945. Накресліть на міліметровому папері чверть кола радіуса 100 мм і поділіть його транспортиром на 9 рівних частин. Користуючись цим малюнком, складіть таблицю наближених значень синуса і косинуса для кутів 10°, 20°, 30°, ..., 80°.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

946. Сума двох кутів рівнобічної трапеції дорівнює 80°. Знайдіть кути трапеції.

947. Знайдіть периметр ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 14 см і 48 см.

948. Один з кутів, утворених при перетині двох прямих, становить третю частину від суми інших кутів. Доведіть, що прямі взаємно перпендикулярні.

949. Відрізок завдовжки 5 см поділіть на 4 рівні частини.

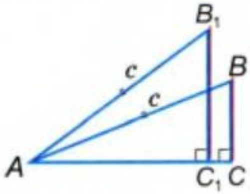
950. Як розміщені два кола, якщо їх радіуси 5 см і 8 см, а відстань між центрами 10 см?

§21 *Властивості тригонометричних функцій гострого кута*

Кожному значенню гострого кута відповідає єдине значення його синуса. Тому синус гострого кута — функція цього кута. Те саме можна сказати про косинус і тангенс. Усі вони — функції, разом їх називають *тригонометричними функціями*. Згодом це поняття буде розширене, а у 8 класі так називатимемо тригонометричні функції гострого кута.

Розглянемо деякі найважливіші їх властивості.

Як змінюються синус, косинус і тангенс гострого кута із збільшенням кута?



Мал. 247

Нехай маємо прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB і гострим кутом BAC (мал. 247). Якщо, не змінюючи гіпотенузи, збільшувати кут, то протилежний катет збільшуватиметься, а прилеглий — зменшуватиметься. Оскільки $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ і катет a збільшується із збільшенням кута α, то приходимо до висновку:

Якщо гострий кут α збільшується, то $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ збільшуються, а $\cos\alpha$ зменшується.

Зверніть увагу і на таке. **Тангенс гострого кута може бути довільним додатним числом, а синус і косинус не можуть перевищувати 1.** Бо синус і косинус гострого кута — відношення катета до гіпотенузи, а катет завжди менший від гіпотенузи.

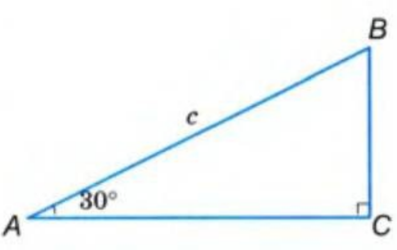
Знайдемо синус, косинус і тангенс кута 30° (мал. 248).

Якщо в $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $AB = c$, то $BC = 0{,}5AB = \frac{c}{2}$ і за теоремою Піфагора $AC = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

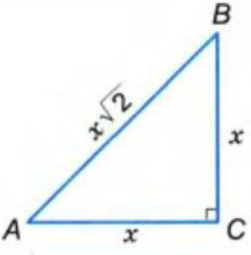
Отже, $\sin 30° = 0{,}5c : c = 0{,}5$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}c : c = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} 30° = \frac{c}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Знайдемо значення $\sin 45°$, $\cos 45°$, $\operatorname{tg} 45°$.



Мал. 248



Мал. 249

Побудуємо довільний $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, $\angle A = 45°$ (мал. 249). Якщо $AC = BC = x$, то за теоремою Піфагора

$AB = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$. Тоді

$\sin 45° = BC : AB = x : x\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 45° = AC : AB = x : x\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\operatorname{tg} 45° = BC : AC = x : x = 1$.

Подібним способом можна знайти значення синуса, косинуса і тангенса кута 60°. Результати зведемо в таблицю.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Досі йшлося про $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, де α — гострий кут, тобто $0° < \alpha < 90°$. Однак багатьом фахівцям часто доводиться мати справу із тригонометричними функціями кутів, що мають 0° або 90°. Вважають, що

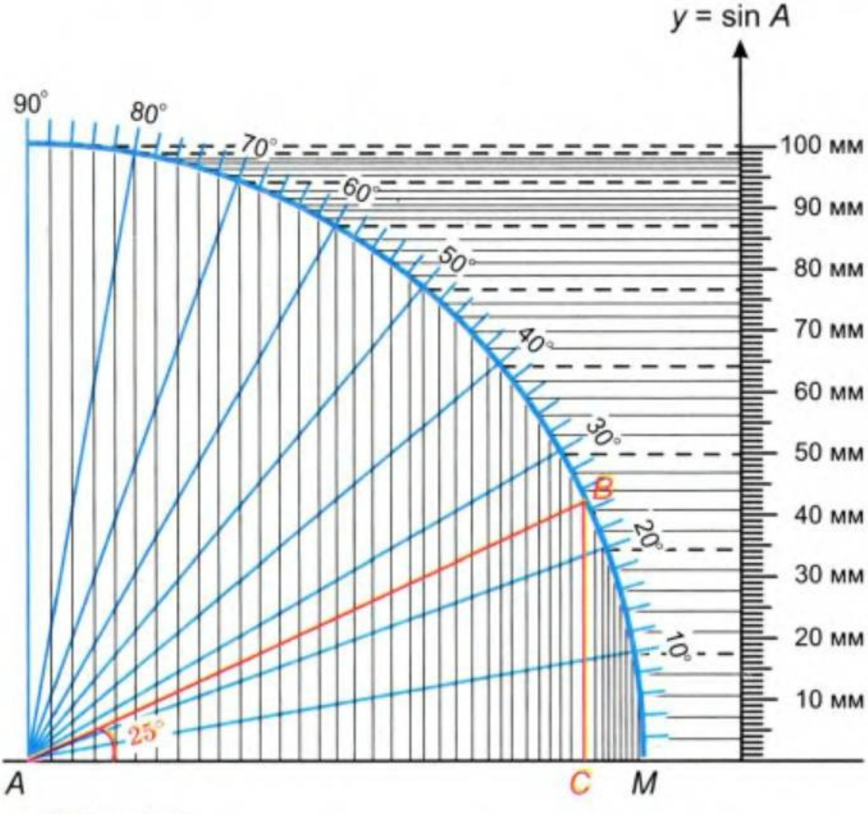
$\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = 0$,

$\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{tg} 90°$ не існує.

Враховуючи останні зауваження, можна уточнити, як саме змінюються значення синуса, косинуса і тангенса кута із його збільшенням від 0° до 90°.

Якщо кут α збільшувати від 0° до 90°, то його синус збільшуватиметься від 0 до 1, косинус зменшуватиметься від 1 до 0, тангенс збільшуватиметься від 0 до нескінченності, тобто може стати як завгодно великим числом.

Наближені значення синуса, косинуса і тангенса, наприклад кута 25°, можна знайти побудовою. Треба побудувати прямокутний трикутник з кутом 25°, виміряти його сторони і знайти потрібні відношення (мал. 250). Найкраще це зробити на міліметровому папері, побудувавши трикутник з гіпотенузою 100 мм.



Мал. 250

Оскільки $BC \approx 42$ мм, $AC \approx 91$ мм, то
$\sin 25^\circ = BC : AB \approx 0,42$, $\cos 25^\circ = AC : AB \approx 0,91$,
$\mathrm{tg}\ 25^\circ = BC : AC \approx 42 : 91 \approx 0,46$.

Наближені значення $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ можна знаходити, користуючись таблицею (див. с. 4 форзаца) або калькулятором. За допомогою калькулятора робимо це так:

1) перемикач «Г – Р» ставимо в положення «Г»;

2) набираємо число градусів α;

3) натискаємо клавіш $\boxed{F}$, якщо це передбачено у вашому калькуляторі;

4) натискаємо клавіш $\boxed{\sin}$ або $\boxed{\cos}$.

Якщо міра кута α містить мінути або секунди, їх переводять у десяткові долі градуса. Наприклад, значення $\sin 27,6^\circ$ знаходимо відповідно за такими програмами:

$27,6\ \boxed{F}\boxed{\sin}$

Результат: $4,6329604 \cdot 0,1 \approx 0,463$.
Кут, косинус якого дорівнює 0,875, знаходимо так:

$0,875\ \boxed{F}\boxed{\mathrm{arc}}\boxed{\cos}$

Результат: $28,955026^\circ \approx 29^\circ$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Доведемо кілька тотожностей, які пов'язують $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$.
Пам'ятаючи, що

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c},\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$$

і що

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha,$$

отримаємо тотожність

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

яка пов'язує всі три тригонометричні функції одного кута α.

Для кожного прямокутного трикутника з гіпотенузою c і катетами a і b $a^2 + b^2 = c^2$.

Поділимо обидві частини цієї рівності на c^2:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Оскільки $\frac{a}{c} = \sin\alpha$, $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, то маємо тотожність

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Це — *основна тригонометрична тотожність*. Вона правильна для будь-якого кута α.

Поділивши останню рівність на $\cos^2\alpha$, дістанемо тотожність

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{або} \quad \mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Отже, яким би не був гострий кут α

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$
$$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

За цими формулами, знаючи значення лише однієї з функцій $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$, можна знайти значення двох інших.

? Запитання і завдання для самоконтролю

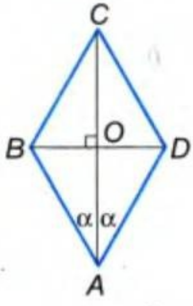
1. Що таке синус кута? Чому дорівнює $\sin 30°$; $\sin 90°$?
2. Що таке косинус кута? Чому дорівнює $\cos 45°$; $\cos 60°$?
3. Поясніть, що таке тангенс гострого кута прямокутного трикутника.
4. Як змінюється синус кута, якщо кут збільшується від 0° до 90°?
5. Як змінюється косинус кута, якщо кут збільшується від 0° до 90°?
6. Які формули пов'язують синус, косинус і тангенс одного й того самого гострого кута?

Виконаємо разом

Мал. 251

1 Синус гострого кута α прямокутного трикутника дорівнює $\frac{12}{13}$. Знайдіть $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

- Перший спосіб. Розглянемо $\triangle ABC$ (мал. 251), у якого $\angle C = 90°$, $BC = 12$, $AB = 13$. Знайдемо катет AC.
  За теоремою Піфагора: $AC = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.
  За означенням $\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$,
  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.
- Другий спосіб. Відомо, що $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, звідки $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$.
  Оскільки косинус гострого кута може набувати лише додатних значень, то $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.
  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.



Мал. 252

2 Діагоналі ромба дорівнюють a і $a\sqrt{3}$. Знайдіть кути ромба і його периметр.

- Нехай $ABCD$ — ромб (мал. 252). Тоді $\angle BOA = 90°$ (за властивістю діагоналей ромба), $OB = OD = \frac{a}{2}$, $AO = OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
  Нехай $\angle BAO = \angle OAD = \alpha$.
  Із $\triangle BOA$:
  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BO}{AO} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Тобто
  $\alpha = 30°$, а $\angle BAD = 60°$. Тоді $\angle ABC = 180° - 60° = 120°$.
  Сторону ромба знайдемо як гіпотенузу $\triangle ABO$:
  $$AB = \frac{BO}{\sin 30°} = \frac{a}{2} : \frac{1}{2} = a.$$
  Отже, периметр ромба дорівнює $4a$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

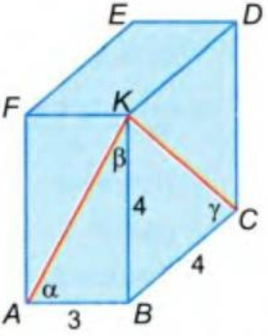
951. Чи існує кут α такий, що: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{3}$; $\sin\alpha = \frac{21}{20}$; $\cos\alpha = \frac{20}{23}$; $\sin\alpha = 0{,}7$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{17}{3}$; $\cos\alpha = 1$; $\text{tg}\,\alpha = 1{,}3$; $\sin\alpha = 0$?

952. Знаючи, що в трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, знайдіть синус, косинус і тангенс кута B.

953. Знаючи, що в $\triangle ABC$ кут C прямий і $\angle A + \angle C = 150°$, знайдіть $\sin A$, $\cos B$, $\text{tg}\,B$.

954. Що більше і чому:

1) $\sin 27°$ чи $\sin 32°$?
2) $\cos 59°$ чи $\cos 24°$?
3) $\text{tg}\,74°$ чи $\text{tg}\,39°$?
4) $\text{tg}\,21°$ чи $\text{tg}\,12°$?
5) $\cos 41°19'$ чи $\cos 41°20'$?
6) $\sin 24°11'$ чи $\sin 24°10'$?



Мал. 253

955. На малюнку 253 зображено прямокутний паралелепіпед, ребра якого $AB = 3$, $BK = BC = 4$. Знайдіть синус, косинус і тангенс кутів α, β, γ.

А

956. Обчисліть:

а) $2\sin 30°$; б) $2\,\text{tg}\,60°$; в) $2\cos 45°$;
г) $3\,\text{tg}\,30°$; ґ) $4\sin 60°$; д) $5\cos 60°$.

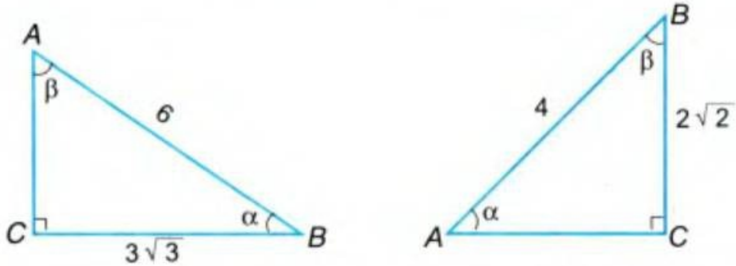
957. В трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів трикутника ABC.

958. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів рівнобедреного прямокутного трикутника.

959. Дано $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Знайдіть:

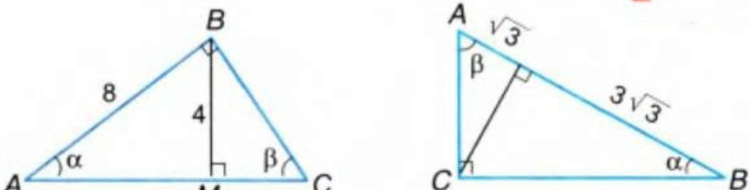
а) $\sin A$, якщо $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\text{tg}\,B$, якщо $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos A$, якщо $\sin B = \frac{1}{2}$; г) $\text{tg}\,B$, якщо $\text{tg}\,A = \sqrt{3}$.



а б

Мал. 254



а б

Мал. 255

960. Чи буде $\triangle ABC$ прямокутним, якщо:

а) $\sin A = \frac{1}{2}$, $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} B = 1$;

в) $\operatorname{tg} A = \sqrt{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos B = \frac{1}{2}$?

961. Знайдіть кути $\triangle ABC$, якщо:

а) $\sin A = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} B = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} A = 1$, $\operatorname{tg} B = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos C = \frac{1}{2}$.

962. Знайдіть кути трикутників на малюнках 254 і 255.

963. Запишіть у порядку зростання числа:

а) $\sin 20°$, $\sin 23°$, $\sin 87°$, $\sin 13°$, $\sin 40°$;

б) $\cos 40°$, $\cos 12°$, $\cos 67°$, $\cos 80°$, $\cos 32°$;

в) $\operatorname{tg} 32°$, $\operatorname{tg} 12°$, $\operatorname{tg} 65°$, $\operatorname{tg} 52°$, $\operatorname{tg} 83°$.

964. Користуючись таблицею значень тригонометричних функцій, знайдіть значення синуса, косинуса, тангенса для кожного з кутів:

1) $7°$, $20°$, $37°$, $59°$, $81°$;

2) $43°30'$, $84°30'$, $12°30'$, $52°30'$.

965. За допомогою таблиці знайдіть:

1) $\sin 12°$, $\sin 71°12'$, $\sin 5°39'$;

2) $\cos 44°$, $\cos 19°30'$, $\cos 78°14'$;

3) $\operatorname{tg} 42°$, $\operatorname{tg} 13°18'$, $\operatorname{tg} 72°43'$.

966. Скориставшись мікрокалькулятором, знайдіть: $\sin 20°$, $\sin 4{,}8°$, $\sin 64{,}25°$, $\cos 25°$, $\cos 45{,}8°$.

967. Знайдіть кути ромба, якщо висота ділить сторону на відрізки $\sqrt{2}$ і $2 - \sqrt{2}$, починаючи від вершини гострого кута.

968. Менша висота паралелограма дорівнює 3 см, а менша сторона $2\sqrt{3}$. Знайдіть кути паралелограма.

969. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 3 см і 7 см, а бічна сторона $2\sqrt{2}$. Знайдіть кути трапеції.

970. Знайдіть кути прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 4 см і 6 см, а радіус вписаного кола $\sqrt{3}$.

971. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо основа і бічна сторона відповідно дорівнюють $6\sqrt{3}$ см і 6 см.

Б

972. Обчисліть:

а) $\cos 30° - \operatorname{tg} 60°$; б) $\operatorname{tg} 30° \cos 30° - \sin 30° \operatorname{tg} 45°$;

в) $\sin 45° \cos 45° - 1$; г) $\operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 45° - \cos 30°$;

ґ) $\operatorname{tg} 45° - 2\sin 30°$; д) $2\cos 30° \sin 30° - \operatorname{tg} 60°$.

973. Встановіть вид гострокутного трикутника, якщо:

а) синуси двох його кутів рівні;

б) косинуси трьох його кутів рівні;

в) синус одного з кутів дорівнює косинусу другого.

974. Знайдіть $\angle B$ $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$), якщо:

а) $\sin A = \dfrac{1}{2}$; б) $\cos A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{tg} A = 1$.

975. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо основа і висота, проведена до неї, дорівнюють відповідно 6 см і $\sqrt{3}$ см.

976. Сторони трикутника дорівнюють 2 см, 2 см і $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть кути трикутника.

977. Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо катет і гіпотенуза дорівнюють $3\sqrt{2}$ см і 6 см.

978. Знайдіть кути прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють $4\sqrt{3}$ см і 4 см.

979. Синус гострого кута прямокутного трикутника дорівнює $\frac{3}{5}$. Чому дорівнюють косинус і тангенс цього кута?

980. Тангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнює $\frac{4}{3}$. Знайдіть синус і косинус цього кута.

981. Знаючи, що $\sin\alpha = 0{,}4$, знайдіть значення $\cos\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$.

982. Заповніть порожні клітинки таблиці.

$\sin\alpha$	0,5					0,8
$\cos\alpha$		0,5			0,8	
$\mathrm{tg}\,\alpha$			0,5	1		

983. Знайдіть з точністю до сотих синус, косинус і тангенс кутів:

а) $\alpha = 25°10'$; б) $\beta = 3°7'$; в) $\gamma = 78°15'$; г) $\delta = 56°36'$.

984. Знайдіть кут, косинус якого дорівнює:

а) 0,325; б) 0,78; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

985. Знайдіть гострий кут, синус якого дорівнює:

а) 0,26; б) $\frac{3}{7}$; в) 0,656; г) 0,07.

986. Знайдіть з точністю до сотих значення виразу: а) $23\sin 75°$;

б) $\frac{49{,}5}{\cos 48°}$; в) $1{,}5 + \mathrm{tg}\,3°$.

987. Знайдіть з точністю до тисячних значення виразу:

а) $\sin 30° + \cos 33°$; б) $\cos 60° - \sin 6°$;

в) $\mathrm{tg}\,45° + \sin 15°$; г) $\mathrm{tg}\,45° - \cos 54°$.

988. Визначте за таблицями міру кута x, якщо:

а) $\sin x = 0{,}1392$, $\sin x = 0{,}2924$; б) $\cos x = 0{,}5446$, $\cos x = 0{,}6896$;

в) $\mathrm{tg}\,x = 0{,}7536$, $\mathrm{tg}\,x = 0{,}2642$; г) $\mathrm{tg}\,x = 1{,}881$, $\mathrm{tg}\,x = 6{,}314$.

989. Побудуйте гострий кут x за даними значеннями тригонометричних функцій:

а) $\sin x = 0{,}5$, б) $\cos x = 0{,}2$, в) $\mathrm{tg}\, x = 0{,}7$,
$\sin x = 0{,}7$, $\cos x = 0{,}6$, $\mathrm{tg}\, x = 1{,}6$,
$\sin x = 0{,}3$; $\cos x = 0{,}8$; $\mathrm{tg}\, x = 5$.

990. Нехай x — міра гострого кута прямокутного трикутника. При яких значеннях x справедливі нерівності:

а) $\sin x < \sin 47°$; б) $\cos x > \cos 13°$;
в) $\mathrm{tg}\, x < \mathrm{tg}\, 12°$; г) $\mathrm{tg}\, x > \mathrm{tg}\, 73°$?

991. Що більше:

а) $\sin 43°$ чи $\cos 70°$; б) $\cos 12°$ чи $\sin 12°$;
в) $\mathrm{tg}\, 40°$ чи $\mathrm{tg}\, 25°$; г) $\mathrm{tg}\, 35°$ чи $\mathrm{tg}\, 82°$?

Практичне завдання

992. Перевірте за допомогою калькулятора правильність виконання завдання 988.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

993. Знайдіть площу прямокутника, якщо відстані від точки перетину діагоналей до сторін дорівнюють 3 см і 5 см.

994. Площа трапеції дорівнює S, а радіус вписаного в неї кола r. Знайдіть периметр трапеції.

995. У квадрат $ABCD$ вписано $\triangle AMD$, де M — середина сторони BC. Доведіть, що $S_{ABCD} = 2S_{\triangle AMD}$.

996. Знайдіть периметр трикутника з попередньої задачі, якщо сторона квадрата дорівнює a.

997. Жоден з кутів паралелограма не є гострим. Встановіть вид цього паралелограма та побудуйте його, якщо сторони дорівнюють 4 см і 6 см. Знайдіть його площу і периметр.

§22 Розв'язування прямокутних трикутників

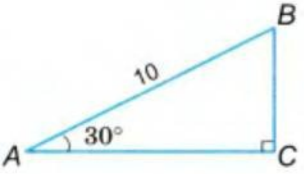
Прямокутні трикутники в геометрії відіграють важливу роль. В багатьох відношеннях вони найпростіші з усіх многокутників, тому ними порівняно легко користуватися. А кожний інший трикутник і навіть кожний многокутник можна розрізати на кілька прямокутних трикутників. Тому далі ми ретельніше займемося розв'язуванням прямокутних трикутників.

Що означає *розв'язати трикутник*? Це означає за кількома відомими елементами трикутника — сторонами чи кутами — знайти інші його елементи.

ЗАДАЧА. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10, а один з гострих кутів 30°. Знайдіть інші сторони і кути трикутника.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай у $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $AB = 10$ (мал. 256). Тоді $\angle B = 90° - 30° = 60°$, $BC = AB : 2 = 5$.
За теоремою Піфагора
$AC = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

Відповідь. $BC = 5$, $AC = 5\sqrt{3}$, $\angle B = 60°$.



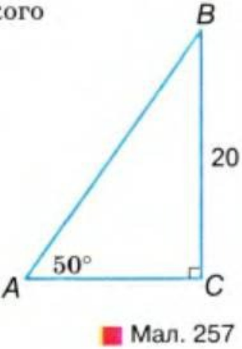
Мал. 256

Цю задачу ми змогли розв'язати, бо в ній серед даних — кут 30°, тож можна скористатися властивістю катета, що лежить проти кута 30°. А як розв'язати прямокутний трикутник з кутом, наприклад, 50°?

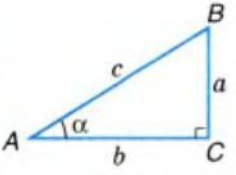
ЗАДАЧА. Розв'яжіть трикутник ABC, у якого $\angle C = 90°$, $\angle A = 50°$, $BC = 20$ (мал. 257).

РОЗВ'ЯЗАННЯ. $\angle B = 90° - \angle A = 40°$.
$BC : AB = \sin A$,
$AB = BC : \sin A = 20 : \sin 50° \approx$
$\approx 20 : 0{,}766 \approx 26{,}1$.
$AC : BC = \operatorname{tg} B$,
$AC = BC \cdot \operatorname{tg} B \approx 20 \cdot \operatorname{tg} 40° \approx 20 \cdot 0{,}643 \approx$
$\approx 12{,}86$.

Відповідь. $\angle B = 40°$, $AB \approx 26{,}11$, $AC \approx 12{,}86$.



Мал. 257



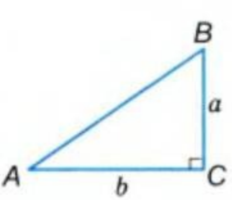
Мал. 258

Знаючи співвідношення $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ (мал. 258) і теорему Піфагора, можна розв'язати будь-який прямокутний трикутник.

Можливі такі випадки розв'язування прямокутних трикутників: 1) за гіпотенузою і гострим кутом; 2) за катетом і гострим кутом; 3) за гіпотенузою і катетом; 4) за катетами. Розв'язання цих чотирьох видів задач за допомогою синуса і косинуса наведено в таблиці.

Вид задачі	Умова задачі	Розв'язання
1-й	Дано: $\angle A = \alpha$; $\angle C = 90°$; $AB = c$. Знайти: $\angle B$, AC, BC.	$\angle B = 90° - \alpha$, $BC = c \cdot \sin\alpha$, $AC = c \cdot \cos\alpha$.
2-й	Дано: $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90°$, $BC = a$. Знайти: $\angle B$, AB, AC.	$\angle B = 90° - \alpha$, $AB = \frac{a}{\sin\alpha}$, $AC = AB\cos\alpha$.
3-й	Дано: $\angle C = 90°$, $AB = c$, $BC = a$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, AC.	$\sin A = \frac{a}{c}$, $\angle B = 90° - \angle A$, $AC = c \cdot \cos A$.
4-й	Дано: $\angle C = 90°$, $AC = b$, $BC = a$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, AB.	$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin A = \frac{a}{AB}$, $\angle B = 90° - \angle A$.

Використовуючи тангенс кута, розв'язування багатьох трикутників можна здійснювати раціональніше.



Мал. 259

■ **ЗАДАЧА.** Розв'яжіть прямокутний трикутник за його катетами $a = 3$ дм, $b = 5$ дм (мал. 259).

■ **РОЗВ'ЯЗАННЯ.**

$AB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$,

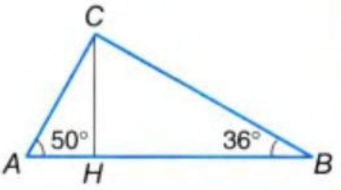
$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$

$\angle A \approx 31^\circ$, $\angle B \approx 90^\circ - 31^\circ \approx 59^\circ$.

Відповідь. $AB = \sqrt{34}$ дм, $\angle A \approx 31^\circ$, $\angle B \approx 59^\circ$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Уміючи розв'язувати прямокутні трикутники, можна розв'язувати і довільні непрямокутні трикутники. Нехай, наприклад, треба розв'язати трикутник ABC, у якого $AC = 20$ см, $\angle A = 50^\circ$ і $\angle B = 36^\circ$ (мал. 260).



Мал. 260

Третій його кут знайти неважко:

$\angle C = 180^\circ - 50^\circ - 36^\circ = 94^\circ$.

Щоб знайти сторони AB і BC, проведемо висоту CH. Трикутники ACH і BCH прямокутні, тому:

$AH = AC \cdot \cos 50^\circ = 20 \cdot 0{,}643 \approx 12{,}68;$

$CH = AC \cdot \sin 50^\circ = 20 \cdot 0{,}765 \approx 15{,}3;$

$CB = CH : \sin 36^\circ = 15{,}3 : 0{,}588 \approx 26{,}9;$

$BH = CB \cdot \cos 36^\circ = 26{,}9 \cdot 0{,}809 \approx 21{,}76;$

$AB = AH + HB = 12{,}68 + 21{,}76 \approx 34{,}44.$

Отже, $AB \approx 34{,}44$ см, $CB \approx 26{,}9$ см, $\angle C = 94^\circ$.

У старших класах ви ознайомитеся з простішими способами розв'язування непрямокутних трикутників.

? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Поясніть, що означає розв'язати трикутник.
2. Як знайти катети за гіпотенузою і гострим кутом?
3. Як знайти гіпотенузу за катетом і гострим кутом?
4. Як знайти гіпотенузу за катетами?
5. Як знайти кути за гіпотенузою і катетом?

Виконаємо разом

Розв'яжіть прямокутний трикутник за гіпотенузою $c = 627$ і гострим кутом $\alpha = 23{,}5°$.

$a = c \cdot \sin \alpha = 627 \cdot \sin 23{,}5° \approx 250$ (мал. 261).

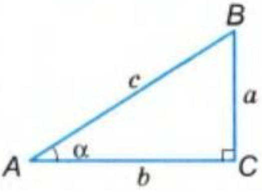
$(23{,}5\ \boxed{F}\ \boxed{\sin}\ 627\ \boxed{\times})$

$b = c \cdot \cos \alpha = 627 \cdot \cos 23{,}5° \approx 575$;

$(23{,}5\ \boxed{F}\ \boxed{\cos}\ 627\ \boxed{\times})$

$B = 90° - 23{,}5° = 66{,}5°$.

Відповідь. $a \approx 250$, $b \approx 575$, $\angle B = 66{,}5°$.



Мал. 261

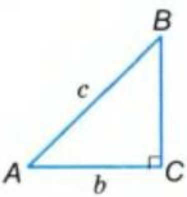
ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

998. Розв'яжіть прямокутний трикутник (див. мал. 261), у якому: а) $c = 10$, $\alpha = 30°$; б) $a = 5$, $\alpha = 45°$; в) $a = b = 7$.

999. Які вирази слід записати в порожніх клітинках таблиці, що відповідає трикутнику на малюнку 262?

AB	AC	BC	$\angle A$	$\angle B$
c			α	
c				β
	b		α	
	b			β



Мал. 262

А

1000. Розв'яжіть прямокутний трикутник за гіпотенузою c і гострим кутом α, якщо:

а) $c = 9{,}85$, $\alpha = 65°$; б) $c = 3{,}84$, $\alpha = 50°$;
в) $c = 0{,}798$, $\alpha = 68{,}5°$; г) $c = 28{,}6$, $\alpha = 37°12'$.

1001. Розв'яжіть прямокутний трикутник за катетом a і гострим кутом α або β, якщо:

а) $a = 38$, $\alpha = 47°$; б) $a = 6{,}87$, $\alpha = 4{,}5°$;
в) $a = 0,\ 274$, $\beta = 36°$; г) $a = 0{,}895$, $\beta = 64{,}5°$.

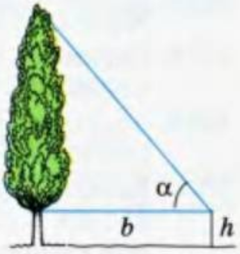
1002. Розв'яжіть прямокутний трикутник за гіпотенузою c і катетом a або b, якщо:

а) $c = 113$, $a = 35$; б) $c = 130$, $a = 82$;
в) $c = 687$, $b = 528$; г) $c = 17,1$, $b = 8,28$.

1003. Розв'яжіть прямокутний трикутник за даними катетами a і b, якщо:

а) $a = 183$, $b = 156$; б) $a = 26,1$, $b = 38$;
в) $a = 1,08$, $b = 0,97$; г) $a = 12,1$, $b = 6,92$.

1004. Знайдіть висоту дерева (мал. 263), якщо $b = 10$ м, $h = 2$ м, $\alpha = 70°$.



Мал. 263

1005. Діагональ прямокутника дорівнює 85 см і утворює зі стороною кут 65°. Знайдіть сторони прямокутника.

1006. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 87 см, а кут при основі 44°.

1007. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 28 см, а кут при основі 65°. Знайдіть бічну сторону.

1008. Гострий кут ромба дорівнює 54°. Його більша діагональ дорівнює 26 см. Знайдіть сторону ромба.

1009. Сторони прямокутника дорівнюють 20 см і 17 см. Знайдіть його діагональ і кути, які вона утворює зі сторонами прямокутника.

1010. Ширина будинку 7 м, довжина крокви 4,5 м. Під яким кутом крокви нахилені до стелі?

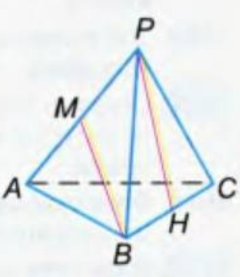
1011. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 60 см, бічна сторона 65 см. Знайдіть кути цього трикутника.

1012. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17,5 см, кут при вершині дорівнює 43°. Знайдіть основу й кути при основі цього трикутника.

1013. У піраміді $PABC$ (мал. 264) кожне ребро — завдовжки 20 см, M і H — середини ребер AP і BC. Знайдіть:

а) кути PBC, BHP, BPH, PMB, MBP;
б) відстані BH, AM, MP, PH, MB.

Чи паралельні прямі BM і PH?



Мал. 264

Б

1014. Основа рівнобедреного трикутника відноситься до бічної сторони як 8 : 7. Знайдіть кути трикутника.

1015. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо його висота дорівнює основі.

1016. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його висота дорівнює 37 см, а кут при основі 40°.

1017. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо довжини двох більших його сторін дорівнюють 20 см і 18 см.

1018. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 82 см, а один з гострих кутів 28°. Знайдіть гіпотенузу.

1019. Знайдіть кути трикутника, якщо його сторони AB, AC і висота AH дорівнюють відповідно 3 см, 5 см і 2 см.

1020. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо її бічна сторона і діагональ перпендикулярні одна до одної і дорівнюють відповідно 3 дм і 4 дм.

1021. Знайдіть кути трапеції, основи якої дорівнюють 20 см і 45 см, а бічні сторони 7 см і 24 см.

1022. З точки M, яка лежить поза кругом, цей круг видно під кутом α. Визначте відстань від точки M до центра круга, якщо його діаметр дорівнює d.

1023. Із зовнішньої точки до кола проведено дві дотичні. Довжина дотичної дорівнює 7,8 см, радіус кола 4 см. Визначте кут між дотичними.

1024. Діагоналі ромба дорівнюють 56 мм і 84 мм. Визначте кути ромба та його сторону.

1025. Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють a і b ($b > a$), а гострий кут α. Визначте бічну сторону трапеції та її висоту.

1026. Дві сторони трикутника дорівнюють 36 см і 87 см, а кут між ними — 58°. Визначте площу трикутника.

1027. Сторони паралелограма дорівнюють 14,8 см і 7,4 см, а його гострий кут дорівнює 62°. Визначте площу паралелограма.

1028. Визначте площу рівнобедреного трикутника, у якого кут при вершині дорівнює 50°, а бічна сторона 8,4 дм.

1029. Визначте площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 8,6 дм, а кут при основі 37°.

1030. Визначте площу ромба, сторона якого дорівнює 8,5 дм, а гострий кут 88°.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1031. Скільки сторін може мати многокутник, утворений прикладанням одного трикутника до другого?

1032. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 73 см, а площа 1320 см². Знайдіть катети.

1033. Як відітнути від даної трапеції трикутник, площа якого становить:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{5}$ площі трапеції?

1034. Доведіть, що $\cos 60° = \sin 30°$, а $\sin 45° = \cos 45°$.

1035. У прямокутному трикутнику радіус вписаного кола дорівнює r, а половина периметра дорівнює p. Знайдіть гіпотенузу.

§23 Застосування тригонометричних функцій

Синус, косинус і тангенс гострого кута часто застосовують в доведеннях теорем і розв'язаннях задач. Наведемо приклади.

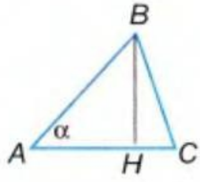
ТЕОРЕМА 36 **Площа трикутника дорівнює півдобутку двох його сторін на синус гострого кута між ними.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано довільний $\triangle ABC$, у якого $\angle A = \alpha$ — гострий (мал. 265). Як вам уже відомо, його площа $S = \frac{1}{2} AC \cdot BH$.

Із прямокутного трикутника ABH знаходимо $BH = AB \sin \alpha$, тому

$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \alpha$. □



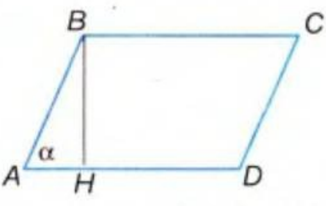
Мал. 265

ТЕОРЕМА 37 **Площа паралелограма дорівнює добутку двох його сусідніх сторін на синус гострого кута між ними.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай у паралелограмі $ABCD$ кут A гострий, а BH — висота (мал. 266). З прямокутного трикутника ABH знаходимо: $BH = AB \sin \alpha$. Тому площа паралелограма

$S = AD \cdot BH = AD \cdot AB \sin \alpha$. □



Мал. 266

ПРИМІТКА.

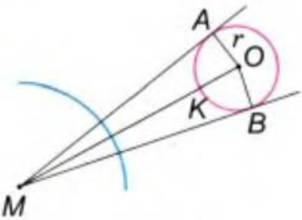
Оскільки поки що вам відомі тригонометричні функції тільки гострих кутів, то і в двох останніх теоремах ідеться тільки про синуси гострих кутів. У 9 класі ці теореми будуть узагальнені для довільних кутів трикутника чи паралелограма.

Найзручніше використовувати тригонометричні функції для розв'язування прикладних задач.

Прикладними задачами в математиці називають задачі, умови яких містять нематематичні поняття. Розв'язуючи такі задачі математичними методами, звичайно створюють їх математичні моделі. В геометрії *математичні моделі* найчастіше створюють з геометричних фігур, чисел, виразів, рівнянь, функцій тощо. Розглянемо прикладні задачі, які можна моделювати за допомогою прямокутних трикутників.

ЗАДАЧА. Як знайти радіус r Місяця, якщо спостерігач, що перебуває на відстані m від найближчої точки Місяця, бачить його під кутом 2α?

РОЗВ'ЯЗАННЯ.
Нехай спостерігач стоїть у точці M і бачить Місяць під кутом $AMB = 2\alpha$ (мал. 267). Якщо центр Місяця — точка O, то шуканий радіус $r = OA$, а $\angle OAM = 90^\circ$, $\angle AMO = \alpha$, $MO = m + r$.
$r : (r + m) = \sin\alpha$. Звідки
$r = r\sin\alpha + m\sin\alpha$,
$r = \dfrac{m\sin\alpha}{1 - \sin\alpha}$.



Мал. 267

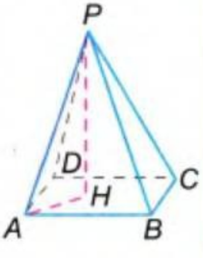
Підставивши у цю формулу значення m і α, неважко обчислити радіус Місяця.

Щоб створити потрібну математичну модель прикладної задачі, треба знати не тільки математику, а й ту галузь науки чи виробництва, якої стосується дана задача. З прямокутними трикутниками найчастіше пов'язані різні просторові об'єкти, споруди, механізми тощо.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Найчастіше розв'язувати прямокутні трикутники доводиться в стереометрії, коли вимагається знаходити значення одних елементів просторової геометричної фігури через інші її значення.

ЗАДАЧА. Бічне ребро AP піраміди з її висотою PH утворює кут 40°. Знайдіть висоту піраміди, якщо $AP = 20$ см (мал. 268).



Мал. 268

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Сполучимо відрізком точки A і H. В утвореному трикутнику APH кут H — прямий, бо висота піраміди PH з кожною прямою, яка лежить в площині її основи і проходить через основу висоти, утворює прямі кути. Отже, задача звелась до визначення катета PH прямокутного трикутника APH за відомим прилеглим до нього кутом і гіпотенузою.

$PH : AP = \cos 40°$, звідки

$PH = 20 \cdot \cos 40° \approx 20 \cdot 0{,}766 \approx 15{,}32$ (см).

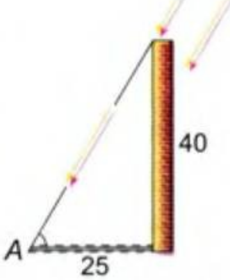
Щоб розв'язувати подібні стереометричні задачі, треба вміти користуватися мовою стереометрії. Зокрема, треба розуміти, що таке *перпендикуляр до площини, кут між прямою і площиною, кут між двома площинами, двогранний кут* тощо. Спробуйте на прикладі малюнка 268 пояснити, як слід розуміти ці терміни.

? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Як знайти площу трикутника, знаючи дві його сторони і гострий кут між ними?
2. За якою формулою можна знаходити площу паралелограма?
3. Чому дорівнює площа ромба, сторона якого дорівнює a, а гострий кут α?
4. Які задачі називають прикладними?
5. Наведіть зразок прикладної задачі.

Виконаємо разом

1 Заводський димар заввишки 40 м кидає тінь завдовжки 25 м. Знайдіть кутову висоту Сонця.



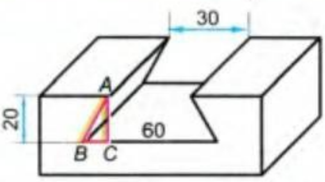
Мал. 269

Кутова висота Сонця — це міра кута A (мал. 269). За числовими даними задачі можемо знайти тангенс цього кута: $\operatorname{tg} A = 40 : 25 = 1{,}6$. В таблиці знаходимо, що гострий кут з таким тангенсом дорівнює приблизно 58°.

Відповідь. $\approx 58°$.

2 У металевій деталі зроблено паз, поперечний розріз якого має форму рівнобічної трапеції (мал. 270). Обчисліть кути нахилу бічних граней паза за зазначеними на малюнку розмірами (в міліметрах).

■ Позначимо деякі точки на малюнку буквами і вкажемо кут, міру якого треба знайти. Нехай $AC \perp BC$, тоді $AC = 20$. Треба знайти кут ABC, а його можна знайти з прямокутного трикутника ABC. В ньому $AC = 20$, $BC = (60 - 30) : 2 = 15$. Звідки, $\text{tg} \angle ABC = AC : BC = 20 : 15 \approx 1{,}33$. Отже, шуканий $\angle ABC \approx 53°$.



Мал. 270

● ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

ВИКОНАЙТЕ УСНО

1036. Знайдіть площу трикутника з кутом 30°, якщо прилеглі до нього сторони дорівнюють: а) 2 м і 3 м; б) a і $3a$.

1037. Знайдіть площу трикутника з кутом 45°, якщо прилеглі до нього сторони дорівнюють: а) 5 см і 10 см; б) a і $a\sqrt{2}$.

1038. Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює a, а гострий кут: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

1039. Площа ромба дорівнює 0,5 м², а один з кутів 30°. Знайдіть периметр ромба.

1040. Сторони паралелограма дорівнюють 2 м і 5 м, а кут між ними 30°. Знайдіть площу паралелограма.

1041. У скільки разів площа паралелограма з кутом 30° більша або менша від площі прямокутника з такими самими сторонами?

1042. До стовпа заввишки 8 м зробили похилу підпору завдовжки 10 м. Знайдіть синус і косинус кута між ними (мал. 271).

Мал. 271

А

1043. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 6 дм і 10 дм, а кут між ними 50°.

1044. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а кут при вершині 40°. Знайдіть площу трикутника.

1045. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 м, а кут при основі 40°. Знайдіть: а) висоту трикутника; б) його бічну сторону; в) площу трикутника.

1046. Знайдіть площу ромба з кутом 50°, якщо його периметр дорівнює 8 см.

1047. Площа ромба зі стороною 10 м дорівнює 50 м². Знайдіть гострий кут ромба.

1048. У таблиці a, α і S — сторона, гострий кут і площа ромба. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її порожні клітинки.

a, м	4	70	10	1		
α	30°	60°			40°	25°
S, м²			45	0,5	20	25

1049. Знаючи сторони a і b паралелограма і гострий кут α між ними, знайдіть площу паралелограма, якщо: а) $a = 2$ м, $b = 5$ м, $\alpha = 47°$; б) $a = 0,2$ км, $b = 1,5$ км, $\alpha = 70°$.

1050. Знайдіть гострий кут паралелограма, якщо його сторони 4 м і 8 м, а площа 28 м².

1051. Сторона, гострий кут і площа паралелограма дорівнюють відповідно 12 м, 70° і 90 м². Знайдіть периметр паралелограма.

1052. Драбину довжиною 12 м приставлено до карниза стіни будинку під кутом 27°. Знайдіть висоту стіни до карниза.

1053. Висота підйому дороги 0,4 м на кожні 3 м, взяті в горизонтальному напрямі. Знайдіть кут підйому дороги.

1054. Підйом дороги характеризується числом $\frac{1}{15}$. Визначте кут підйому.

1055. Дерево при кутовій висоті Сонця 37° відкидає тінь завдовжки 10,2 м. Знайдіть висоту дерева.

1056. Прогін двосхилого даху дорівнює 8,2 м, а висота даху 3,2 м. Знайдіть довжину схилу даху і кут між кроквами.

1057. На відстані 1 км від місця зльоту літака стоїть будинок заввишки 27 м. Під яким кутом повинен підніматися літак, щоб не зачепити будинок?

1058. Верхню точку фабричної труби на відстані 320 м від її основи видно під кутом 7°. Знайдіть висоту труби.

1059. Дерево заввишки 20 м, що росте на одному березі річки, з другого берега видно під кутом 15°. Знайдіть ширину річки. (Припускаємо, що основа дерева і око спостерігача — на одному рівні.)

Б

1060. Переріз залізничного насипу має форму рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 8 м і 28 м. Бічні сторони нахилені до горизонту під кутом 31°. Знайдіть висоту насипу.

1061. Ширина полотна залізничного насипу дорівнює 30 м, а ширина підошви — 62 м. Знайдіть висоту насипу, якщо кут відкосу становить 32°.

1062. Для визначення висоти колони відміряли по прямій від основи колони 150 м. Вершину колони видно під кутом 20°. Висота кутоміра дорівнює 1,5 м. Знайдіть висоту колони.

1063. Знайдіть площу правильного п'ятикутника, вписаного в коло радіуса R.

1064. Для завантаження силосної башти на висоті 4,5 м треба приладнати похилий жолоб з нахилом 12°. Якої довжини слід взяти жолоб?

1065. Із точки M, що лежить на відстані a від центра кола, проведено дві дотичні MA і MB, кут між якими дорівнює α. Визначте довжини дотичних та радіус кола.

1066. У колі з центром O і радіусом 12 см проведено хорду AB. Знайдіть площу трикутника OAB, якщо з дуги кола хорду видно під кутом: а) 20°; б) 130°.

1067. Гострий кут ромба, описаного навколо кола радіуса r, дорівнює α. Знайдіть периметр і площу ромба.

1068. Більша діагональ паралелограма дорівнює d і утворює з двома його сторонами кути 30° і 40°. Знайдіть периметр і площу паралелограма.

1069. Доведіть, що площа паралелограма дорівнює півдобутку його діагоналі на синус кута між ними.

1070. Виведіть формулу для обчислення площі рівнобедреного трикутника за його:

а) основою a і протилежним кутом α;

б) бічною стороною b і кутом β при основі.

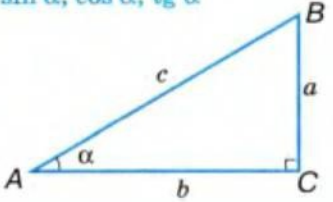
Задачі за готовими малюнками

А | **Б**

1

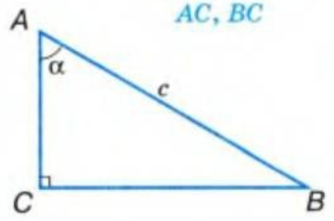
А. $a, b, c, \alpha.$

$\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha$



Б. $c, \alpha.$

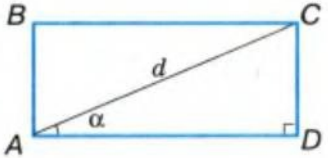
AC, BC



2

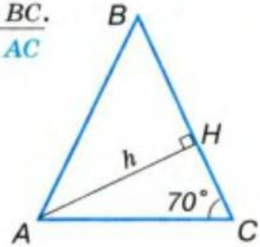
А. $d, \alpha.$

AB, BC



Б. $AB = BC.$

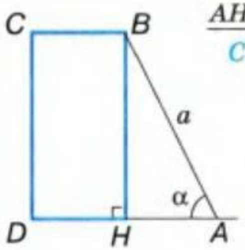
AB, AC



3

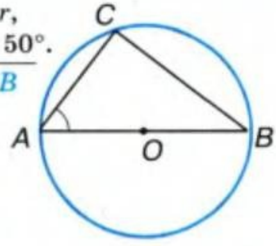
А. $AH = DH.$

CD, DA



Б. $OB = r,$
$\angle A = 50°.$

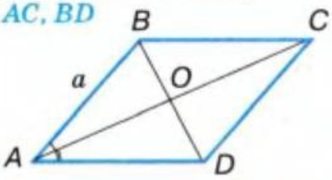
AC, CB



4

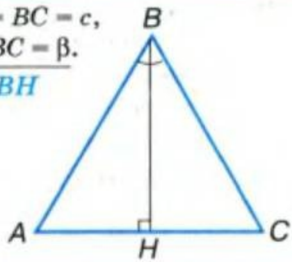
А. $ABCD$ — ромб,
$AB = a, \angle BAD = \alpha.$

AC, BD



Б. $AB = BC = c,$
$\angle ABC = \beta.$

AC, BH



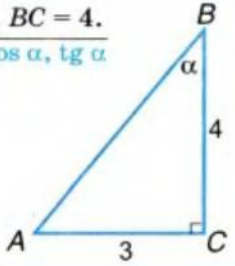
Задачі за готовими малюнками

А | **Б**

5

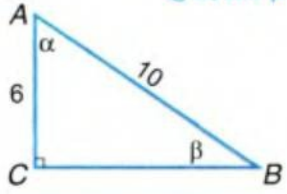
А. $AC = 3$, $BC = 4$.

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$



Б. $AB = 10$, $AC = 6$.

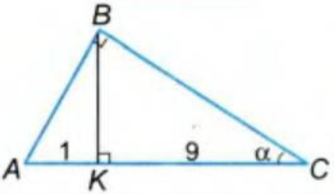
$\mathrm{tg}\,\alpha$, $\cos\beta$



6

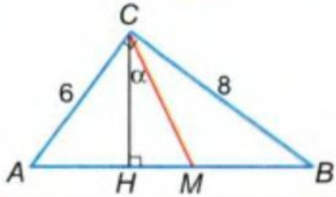
А. $BK \perp AC$, $AK = 1$, $KC = 9$.

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$



Б. $\angle C = 90°$, $AM = MB$.

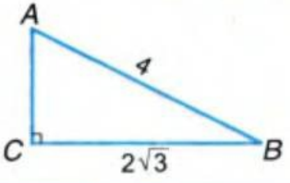
$\sin\alpha$



7

А. $AB = 4$, $BC = 2\sqrt{3}$.

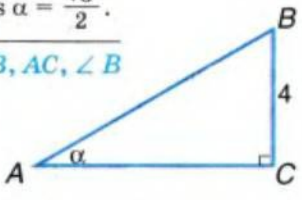
$\angle A$, $\angle B$, AC



Б. $BC = 4$,

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

AB, AC, $\angle B$

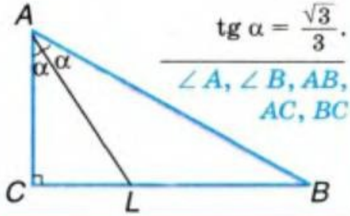


8

А. $AL = 6$,

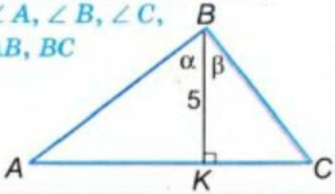
$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\angle A$, $\angle B$, AB, AC, BC



Б. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, AB, BC



Самостійна робота 6

Варіант 1

1°. Побудуйте кут, тангенс якого дорівнює 3. Знайдіть синус та косинус цього кута.

2°. Знайдіть кути $\triangle ABC$, якщо $\sin A = \frac{1}{2}$, $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3•. Менша сторона прямокутника дорівнює 6 см, а діагональ утворює з більшою стороною кут 40°. Знайдіть периметр прямокутника (з точністю до сотих).

Варіант 2

1°. Побудуйте кут, синус якого дорівнює $\frac{2}{3}$. Знайдіть косинус і тангенс цього кута.

2°. Знайдіть кути $\triangle ABC$, якщо $\mathrm{tg}\, A = \sqrt{3}$, $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3•. Висота ромба дорівнює 5 см, а гострий кут 70°. Знайдіть периметр ромба (з точністю до сотих).

Варіант 3

1°. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює $\frac{3}{4}$. Знайдіть синус і тангенс цього кута.

2°. Знайдіть кути $\triangle ABC$, якщо $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{tg}\, C = 1$.

3•. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а кут при основі 40°. Знайдіть периметр трикутника (з точністю до сотих).

Варіант 4

1°. Побудуйте кут, синус якого дорівнює $\frac{4}{5}$. Знайдіть косинус і тангенс цього кута.

2°. Знайдіть кути $\triangle ABC$, якщо $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3•. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 10 см, а кут 50°. Знайдіть периметр трапеції (з точністю до сотих).

Тестові завдання 6

1.	У прямокутному трикутнику з кутом α відношення протилежного катета до гіпотенузи — це:	а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}\alpha$.
2.	Яке з тверджень завжди хибне?	а) $\sin\alpha = 1$; б) $\operatorname{tg}\alpha = 3$; в) $\cos\alpha = 2$; г) $\sin\alpha = 0{,}5$.
3.	Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на:	а) синус прилеглого кута; б) косинус прилеглого кута; в) тангенс протилежного кута; г) косинус протилежного кута.
4.	У $\triangle ABC$ з прямим кутом C $\sin A = \frac{1}{2}$. Знайдіть $\angle B$.	а) $30°$; б) $60°$; в) $45°$; г) $90°$.
5.	Який знак слід поставити замість *: $\cos 32° * \cos 35°$?	а) $>$; б) $<$; в) $=$; г) $\leq$.
6.	Встановіть вид $\triangle ABC$, якщо $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	а) гострокутний; б) прямокутний; в) тупокутний; г) рівнобедрений.
7.	Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть синус більшого гострого кута.	а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{5}{3}$.
8.	У $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) $\operatorname{tg} A = 1$. Який знак слід поставити замість *: $AC * BC$?	а) $>$; б) $<$; в) $=$; г) не можна встановити.
9.	У $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) $AB = a$, $\angle A = \alpha$. Знайдіть AC.	а) $a \sin\alpha$; б) $a\cos\alpha$; в) $\frac{a}{\sin\alpha}$; г) $\frac{a}{\cos\alpha}$.
10.	У $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) $AC = a$, $\angle A = \alpha$. Знайдіть BC.	а) $a\sin\alpha$; б) $a\operatorname{tg}\alpha$; в) $\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$; г) $\frac{a}{\sin\alpha}$.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс меншого гострого кута.

2°. Знайдіть міру кута α, якщо:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 1$; г) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3°. Чи буде $\triangle ABC$ прямокутним, якщо

$\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} B = 1$?

4°. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 5 см, а синус одного з кутів 0,2. Знайдіть катети трикутника.

5•. Обчисліть:

а) $2\sin 30° \sin 60° - \operatorname{tg} 45° \cos 30°$;

б) $\sin 45° \cdot \cos 45° \cdot \operatorname{tg} 60° - \cos 30° \operatorname{tg} 45°$.

6•. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника пропорційні числам 7 і 25. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів трикутника.

7•. Знайдіть кути і сторони прямокутного трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 2 см і 6 см.

8•. Вершину дерева, віддаленого від даного пункту на 16 м, видно під кутом 16° до горизонту, а вершину другого дерева, віддаленого від цього самого пункту на 24 м, видно під кутом 19°. Яке дерево вище і на скільки?

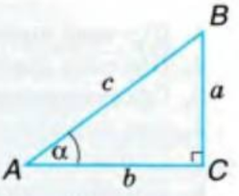
9•. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює l, а кут при основі α. Знайдіть площу трикутника.

10•. Гострий кут рівнобічної трапеції дорівнює α, а радіус вписаного кола r. Знайдіть периметр і площу трапеції.

Головне в розділі 4

Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.



Мал. 272

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого (мал. 272).

Синус, косинус, тангенс (і *котангенс*) певного кута разом називають *тригонометричними функціями* цього кута.

Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Користуючись ними, можна за двома відомими елементами прямокутного трикутника визначити всі інші його елементи.

Властивості тригонометричних функцій

Синус і косинус гострого кута менші від 1, а тангенс може бути довільним додатним числом. Якщо гострий кут збільшувати, то його синус і тангенс збільшуватиметься, а косинус зменшуватиметься.

Значення синуса, косинуса і тангенса кутів 0°, 30°, 45°, 60° і 90° вказані у таблиці на с. 199.

Для кожного гострого кута правильними є співвідношення:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$\sin \alpha = \cos (90° - \alpha),$$

$$\cos \alpha = \sin (90° - \alpha).$$

Розв'язати прямокутний трикутник — це означає за двома відомими елементами трикутника (сторонами чи кутами) визначити всі інші його елементи. Як розв'язувати прямокутні трикутники за різних умов, схематично показано у таблиці на с. 210.

Запитання для повторення

1. Що таке чотирикутник?
2. Що таке діагональ чотирикутника?
3. Сформулюйте означення паралелограма.
4. Які властивості має паралелограм?
5. Сформулюйте і доведіть ознаки паралелограма.
6. Що таке прямокутник? Які властивості має прямокутник?
7. Що таке ромб? Квадрат? Які їх властивості?
8. Сформулюйте і доведіть теорему Фалеса.
9. Сформулюйте і доведіть теорему про середню лінію трикутника.
10. Що таке трапеція? Рівнобічна трапеція? Прямокутна трапеція?
11. Сформулюйте і доведіть теорему про середню лінію трапеції.
12. Що розуміють під відношенням відрізків?
13. Які відрізки називають пропорційними відрізками a, b, c?
14. Сформулюйте узагальнену теорему Фалеса.
15. Які фігури називають подібними?
16. Які два трикутники називають подібними?
17. Сформулюйте основну теорему про подібності трикутників.
18. Які властивості має відношення подібності фігур?
19. Сформулюйте і доведіть ознаки подібності трикутників.
20. Сформулюйте теорему про властивість бісектриси трикутника.
21. Сформулюйте і доведіть теорему про властивість медіан трикутника.
22. Сформулюйте і доведіть теорему про властивість хорд, які перетинаються.
23. Сформулюйте ознаки подібності прямокутних трикутників.
24. Що таке середнє пропорційне двох відрізків?
25. Яку властивість має найменша висота прямокутного трикутника?
26. Сформулюйте і доведіть теорему Піфагора.
27. Чи правильна теорема, обернена до теореми Піфагора?

Запитання для повторення

28. Як, знаючи дві сторони прямокутного трикутника, знайти третю сторону?
29. Які прямі називають перпендикулярними?
30. Що таке перпендикуляр, похила, проекція похилої?
31. Як залежить довжина похилої від довжини її проекції?
32. Що таке ламана? Проста ламана? Замкнена ламана?
33. Що таке многокутник? Опуклий многокутник?
34. Що таке периметр многокутника?
35. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів опуклого многокутника.
36. Який многокутник називають вписаним у коло, описаним навколо кола?
37. Доведіть, що навколо кожного трикутника можна описати коло.
38. Доведіть, що в кожний трикутник можна вписати коло.
39. Що таке площа многокутника?
40. За якою формулою знаходять площу прямокутника, паралелограма, трикутника, трапеції?
41. Як знайти площу ромба за його діагоналями?
42. Як знайти площу прямокутного трикутника?
43. Що таке синус, косинус, тангенс кута?
44. Що означає розв'язати трикутник?
45. Як розв'язують прямокутний трикутник за відомими:
    а) гіпотенузою і гострим кутом;
    б) катетом і гострим кутом;
    в) двома катетами;
    г) гіпотенузою і катетом?
46. Як знаходять площу трикутника за двома сторонами і гострим кутом між ними?
47. Як знаходять площу паралелограма за двома сторонами і гострим кутом між ними?

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1071. Доведіть, що будь-яку трикутну пластинку можна розрізати на три частини, які мають форму трапеції.

1072. Як розрізати квадратну пластинку на 8 частин, кожна з яких мала б форму непрямокутної трапеції?

1073. Точки K, L, E і F — середини сторін AB, BC, CD і DA чотирикутника. Доведіть, що коли $AC \perp BD$, то $KE = FL$.

1074. Доведіть, що сума діагоналей опуклого чотирикутника менша за його периметр, але більша за півпериметр.

1075. Знайдіть периметр чотирикутника, утвореного перетином бісектрис кутів прямокутника, сторони якого дорівнюють $2a$ і $3a$.

1076. На діагоналі AC ромба $ABCD$ взято довільну точку P. Доведіть, що $AP \cdot PC = AB^2 - PB^2$.

1077. Рівносторонній трикутник ABK розміщений зовні квадрата $ABCD$. Знайдіть кут CKD. А якщо $ABCD$ — довільний ромб?

1078. $ABCD$ і ABK — квадрат і рівносторонній трикутник. Прямі KC і BD перетинаються в точці P. Доведіть, що $KP = PD$. Розгляньте два випадки.

1079. Знайдіть кут між діагоналями паралелограма $ABCD$, якщо бісектриси кутів BAC і BDC перетинаються під кутом 45°.

1080. Точки A і B лежать усередині даного кута. Побудуйте паралелограм $ABCD$ з вершинами C і D на сторонах цього кута.

1081. Побудуйте квадрат за сумою діагоналі і сторони.

1082. Побудуйте квадрат за різницею діагоналі і сторони.

1083. Як за допомогою самого лише циркуля в прямокутний трикутник з катетами 3 і 4 вписати коло?

1084. Доведіть, що відрізок, який сполучає будь-які точки основ трапеції, ділиться її середньою лінією на дві рівні частини.

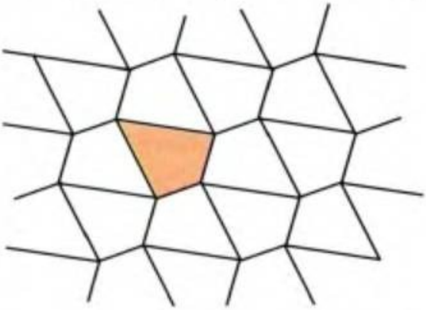
1085. Задача Регіомонтана. Доведіть, що висоти трикутника або їх продовження перетинаються в одній точці.

1086. Вершини трикутника віддалені від прямої, яка не перетинає його, на 6 см, 7 см і 11 см. Як віддалена від цієї прямої точка перетину медіан трикутника?

1087. Дано пряму a і точки A і B по різні боки від неї. Знайдіть на a точку, рівновіддалену від A і B.

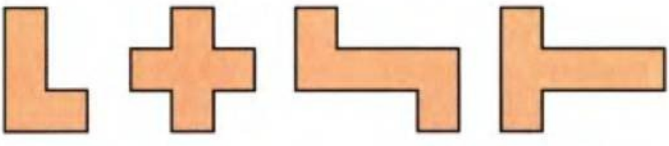
1088. Дано пряму a і точки A та B з одного боку від неї. Знайдіть на a таку точку M, щоб сума $AM + MB$ була найменшою.

1089. Доведіть, що будь-якими рівними чотирикутниками, як паркетинами, можна покрити площину (мал. 273).



Мал. 273

1090. Фігуру F називають *паркетною*, якщо фігурами, рівними F, можна покрити площину. Доведіть, що зображені на малюнку 274 фігури паркетні.



Мал. 274

1091. Якщо дві сторони п'ятикутника паралельні, то такий п'ятикутник — фігура паркетна. Доведіть.

1092. $ABCD$ — паралелограм. Зовні нього побудовано квадрати $ABFE$ і $BCKM$. Доведіть, що відрізки DK і ED рівні і перпендикулярні.

1093. На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ зовні нього побудовано рівносторонні трикутники BCK і CDP. Доведіть, що $AK = AP = KP$.

1094. На сторонах трикутника ABC зовні нього побудовано квадрати $ABKP$ і $CBFE$. Доведіть, що трикутники ABC і BFP рівновеликі.

1095. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і медіаною, проведеною до бічної сторони.

1096. Побудуйте трикутник за двома сторонами і півсумою кутів при третій стороні.

1097. Побудуйте чотирикутник за чотирма сторонами і кутом між двома послідовно даними сторонами.

1098. Доведіть, що дві рівнобічні трапеції рівні, якщо чотири сторони однієї з них дорівнюють відповідним сторонам другої.

1099. Чи існує чотирикутник, кожна сторона якого перпендикулярна до протилежної сторони?

1100. Через центр квадрата проведено дві взаємно перпендикулярні прямі. Доведіть, що відрізки цих прямих, які містяться всередині квадрата, рівні.

1101. Через точку перетину медіан рівностороннього трикутника проведено дві прямі, кут між якими $60°$. Доведіть, що відрізки цих прямих, які містяться всередині трикутника, рівні.

1102. Усередині квадрата зі стороною 6 дм позначено 50 точок. Доведіть, що серед них є такі точки, відстань між якими менша за 1,5 дм.

1103. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = \angle B = 100°$, $\angle ABD = 50°$, $\angle CAB = 60°$. Знайдіть кут ACD.

1104. Знайдіть відношення катетів прямокутного трикутника, якщо один з його кутів дорівнює $22{,}5°$.

1105. Доведіть, що сума катетів прямокутного трикутника менша від 1,5 гіпотенузи.

1106. Чи існує прямокутний трикутник, куб гіпотенузи якого дорівнює сумі кубів катетів?

1107. Задача Діофанта. Знайдіть сторони прямокутного трикутника, якщо вони дорівнюють x^3, $x^3 - x$ і $x^3 + x$, де x — якесь число.

1108. Задача Архімеда. Якщо хорди AB і CD кола перетинаються в точці P під прямим кутом, то сума квадратів відрізків AP, BP, CP і DP дорівнює квадрату діаметра кола. Доведіть.

1109. Задача ал-Каші. Спис стояв у воді вертикально і піднімався над водою на 3 лікті. Вітер відхилив його так, що вершина списа зрівнялась з поверхнею води на відстані

5 ліктів від початкового положення списа. Знайдіть довжину списа.

1110. Задача Евкліда про золотий поділ. Даний відрізок AB точкою P поділіть так, щоб виконувалась умова $AP : PB = PB : AB$.

1111. Задача Евкліда. В дане коло впишіть трикутник, подібний даному трикутнику.

1112. Стародавня китайська задача. Є горизонтальний катет у 5 бу і вертикальний катет у 12 бу. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в цей трикутник.

1113. Задача ал-Хорезмі. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в рівнобедрений трикутник з бічною стороною 10 і основою 12.

1114. Впишіть у даний гострокутний трикутник інший трикутник так, щоб його сторони були перпендикулярні до сторін даного трикутника.

1115. Впишіть у дане коло трапецію з даними основами.

1116. Задача Ейлера. Доведіть, що в кожному чотирикутнику сума квадратів сторін дорівнює сумі квадратів його діагоналей і чотирьох квадратів відрізка, який сполучає середини діагоналей.

1117. Знайдіть відстань від початку координат до прямої, рівняння якої $3x + 4y = 24$.

1118. Висоти AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці H. Доведіть, що $A_1H \cdot A_1A = BA_1 \cdot CA_1$ і $B_1H \cdot B_1B = CB_1 \cdot AB_1$.

1119. На сторонах AB і CD квадрата $ABCD$ зовні нього побудовано квадрати $ABKP$ і $CDEF$. Доведіть, що $\angle KEP + \angle KDP = \angle KAP$.

1120. Основи трапеції дорівнюють 3 і 5, а бічні сторони 2 і $2\sqrt{2}$. Знайдіть кути трапеції.

1121. На діаметрі AB кола, паралельного його хорді CD, взято довільну точку M. Доведіть, що $MC^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2$.

1122. Доведіть, що в прямокутному трикутнику з гострим кутом 15° добуток катетів дорівнює квадрату половини гіпотенузи.

1123. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Знайдіть довжину бісектриси, проведеної до гіпотенузи.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

До розділу 1

1124. Периметр паралелограма $MNPK$ дорівнює 48 см, а периметр трикутника MNP дорівнює 36 см. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо $MP : NK = 3 : 2$.

1125. Знайдіть периметр паралелограма $ABCD$, якщо $AB = a$ і бісектриса кута A перетинає сторону BC в її середині.

1126. Сторони прямокутника пропорційні числам 2 і 5, а точка перетину діагоналей віддалена від однієї зі сторін на 9 см менше, ніж від другої. Знайдіть периметр прямокутника.

1127. а) На діагоналі AC прямокутника $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM і CN. Доведіть, що $MBND$ — паралелограм.

б) Розв'яжіть попередню задачу, якщо точки M і N лежать на продовженнях AC.

1128. На продовженнях діагоналей AC і BD прямокутника $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM, BN, CP, DK. Доведіть, що $MNPK$ — прямокутник.

1129. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, один з яких на 20° більший за другий.

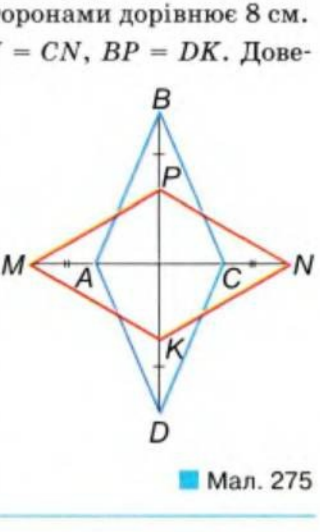
1130. Діагоналі ромба утворюють зі стороною кути, пропорційні числам 1 і 5. Знайдіть периметр ромба, якщо відстань між його паралельними сторонами дорівнює 8 см.

1131. Дано ромб $ABCD$ (мал 275). $AM = CN$, $BP = DK$. Доведіть, що $MPNK$ — ромб.

1132. На сторонах AB і CD квадрата $ABCD$ взято точки T і F так, що $AT = CF$. Доведіть, що $TBFD$ — паралелограм.

1133. На продовженнях діагоналі AC квадрата $ABCD$ взято точки M і N так, що $AM = CN$. Доведіть, що $MBND$ — ромб, і знайдіть його периметр, якщо $AC = 16$ см і $\angle ABM : \angle ABD = 1 : 3$.

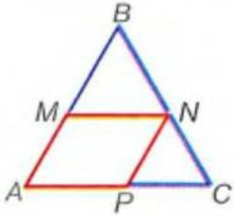
1134. У рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом 6 см



Мал. 275

вписано квадрат так, що прямий кут у них спільний. Знайдіть периметр квадрата.

1135. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник так, що дві його вершини лежать на гіпотенузі, а дві — на катетах. Знайдіть довжину гіпотенузи, якщо периметр прямокутника 18 см, а одна зі сторін на 3 см більша за другу.



Мал. 276

1136. У рівносторонній $\triangle ABC$ вписано ромб $AMNP$ (мал. 276). Знайдіть периметр ромба, якщо периметр чотирикутника $AMNC$ дорівнює 60 см.

1137. Через вершину A $\triangle ABC$ проведено пряму AK ($K \in BC$), яка перетинає медіану BM у точці P. Доведіть, що: а) $BK : KC = 1 : 2$, якщо $BP = PM$; б) $BK = KC$, якщо $BP : PM = 2 : 1$.

1138. Сума двох кутів трапеції дорівнює $140°$, а два інші кути пропорційні числам 4 і 7. Знайдіть кути трапеції.

1139. У рівнобічній трапеції з кутом $60°$ висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки 4 см і 10 см. Знайдіть периметр трапеції.

1140. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони і утворює з більшою основою, яка дорівнює 18 см, кут $45°$. Знайдіть висоту трапеції.

1141. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою гострого кута і перпендикулярна до бічної сторони, яка дорівнює 10 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її кути відносяться як $1 : 2$.

1142. Знайдіть основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 8 см, а середня лінія 15 см.

1143. Середня лінія трапеції дорівнює 18 см і ділиться діагоналлю на відрізки, один з яких на 5 см більший за другий. Знайдіть основи трапеції.

1144. Основи трапеції пропорційні числам 2 і 5, а відрізок середньої лінії, який лежить між діагоналями, дорівнює 6 см. Знайдіть основи трапеції.

1145. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює l і ділиться навпіл прямою, що проходить через вершину трапеції паралельно бічній стороні.

1146. Точки A і B лежать по один бік від прямої на відстані 7 см і 15 см від неї. Точки M, N, K ділять відрізок AB на 4 рівні частини. Знайдіть відстань від точок M, N, K до прямої.

1147. Точки A і B лежать по один бік від прямої на відстані 2 см і 10 см від неї. Знайдіть відстань від точки M до прямої, якщо M лежить між A і B і $AM : MB = 1 : 3$.

1148. Бічні сторони трапеції лежать на перпендикулярних прямих. Доведіть, що відрізок, який з'єднує середини основ трапеції, дорівнює їх піврізниці.

1149. Кутова міра дуги AB дорівнює 72°, а дуги AC — 39°. Знайдіть $\angle BOC$ і $\angle BAC$, де O — центр кола.

До розділу 2

1150. Основи трапеції дорівнюють 8 см і 12 см, а бічні сторони 6 см і 15 см. На скільки треба продовжити бічні сторони, щоб вони перетнулися?

1151. Сторони трикутника пропорційні числам 2, 7 і 8. Знайдіть сторони подібного трикутника, периметр якого 34 см.

1152. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 12 см і 15 см. Знайдіть периметр подібного трикутника, менша сторона якого 12 см.

1153. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 18 см. У якому відношенні діагоналі діляться точкою перетину?

1154. Вершина гострого кута A паралелограма $ABCD$ віддалена від прямих CB і CD на 4 см і 6 см відповідно. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр 80 см.

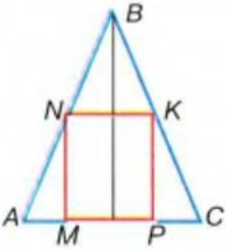
1155. Діагональ розбиває трапецію з основами 12 см і 27 см на два подібні трикутники. Знайдіть довжину цієї діагоналі.

1156. Точка M ділить сторону AD паралелограма $ABCD$ на відрізки $DM = 8$ см і $AM = 12$ см. K — точка перетину прямих BM і CD. Доведіть: а) $\triangle ABM \sim \triangle DKM$; б) $\triangle ABM \sim \triangle CKB$; в) $\triangle MKD \sim \triangle BKC$. Знайдіть периметр $\triangle ABM$ і $\triangle BKC$, якщо периметр $\triangle MKD$ дорівнює p.

1157. Бісектриса $\angle A$ паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC в точці F, а продовження сторони CD — в точці K. Знайдіть периметр трикутників ABF і FKC та чотирикутника $AFCD$, якщо $BF = 24$ см, $FC = 8$ см, $AK = 50$ см.

1158. Паралелограм, сторони якого пропорційні числам 2 і 3, вписано в $\triangle ABC$ так, що кут A у них спільний. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $AB = 8$ см, $AC = 12$ см.

1159. У рівнобедрений трикутник з основою 10 см і висотою 12 см вписано прямокутник $MNKP$ (мал. 277). Знайдіть периметр прямокутника, якщо $KP - NK = 1$ см.



Мал. 277

1160. У паралелограм вписано ромб так, що його сторони паралельні діагоналям паралелограма, які дорівнюють 12 см і 18 см. Знайдіть сторону ромба.

1161. Через точку O перетину діагоналей трапеції проведено пряму, паралельно основам трапеції. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, який лежить між бічними сторонами трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 12 см, а діагоналі точкою O діляться у відношенні 1 : 3.

1162. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ взято точки M і N так, що $MN \parallel AC$ і півколо, побудоване на MN, як на діаметрі, дотикається до AC. Знайдіть його радіус, якщо $AC = 30$ см, а висота $BH = 10$ см.

1163. Кола радіусів 3 см і 9 см дотикаються одне до одного і до сторін кута. Знайдіть відстань від вершини кута до центра меншого з кіл.

1164. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 11 см і 12 см. Знайдіть відрізки, на які бісектриса ділить середню за довжиною сторону.

1165. Бісектриса, проведена з вершини прямокутника, ділить діагональ на відрізки, пропорційні числам 2 і 5. У якому відношенні ця бісектриса ділить сторону прямокутника?

1166. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 18 см, а бічна сторона відноситься до основи як 5 : 8. Знайдіть радіус вписаного кола.

1167. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить висоту, проведену до основи, на відрізки, пропорційні числам 2 і 5. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 56 см.

1168. Точка A лежить на відстані 4 см від центра кола і ділить хорду BC завдовжки 9 см на відрізки, різниця яких дорівнює 1 см. Знайдіть радіус кола.

1169. Продовження хорди AB і діаметра CD перетинаються в точці M. Знайдіть відстань від точки M до центра кола, якщо $MA = 9$ см, $MB = 4$ см, а радіус кола дорівнює 8 см.

1170. Периметр $\triangle ABC$ дорівнює 27 см. Знайдіть периметр $\triangle KBL$, де KL — пряма, що проходить через точку перетину медіан $\triangle ABC$ паралельно AC ($K \in AB$, $L \in BC$).

1171. Висота прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки m і n. Знайдіть катети трикутника.

1172. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 5 см і 13 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

1173. У рівнобедреному трикутнику кут при вершині 120°, а основа 60 см. Знайдіть периметр трикутника.

1174. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 8 см і 18 см. Знайдіть радіус вписаного кола.

1175. Знайдіть діагоналі рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона 13 см.

1176. Знайдіть всі медіани прямокутного трикутника з катетами 8 см і 12 см.

1177. Знайдіть бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника з катетами 6 см і 8 см.

1178. Центр кола лежить на гіпотенузі прямокутного трикутника. Коло проходить через вершину більшого гострого кута і дотикається до більшого катета. Знайдіть радіус кола, якщо катети дорівнюють 12 см і 16 см.

1179. У трикутник вписано ромб з діагоналями 12 см і 16 см так, що один кут у них спільний, а протилежна вершина ділить сторону трикутника у відношенні 2 : 3. Знайдіть сторони трикутника, які містять сторони ромба.

1180. З точки A до прямої a проведено дві похилі, довжини яких $\sqrt{10}$ і $3\sqrt{10}$. Знайдіть відстань від A до прямої та проекції похилих на пряму, якщо кут між похилими 90°.

1181. З точки до прямої проведено перпендикуляр і дві похилі. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо довжини похилих 29 см і 41 см, а їх проекції пропорційні числам 2 і 3.

До розділу 3

1182. Периметр квадрата дорівнює p. Чому дорівнює його площа?

1183. Знайдіть площу квадрата, якщо: а) радіус вписаного кола дорівнює r; б) радіус описаного кола дорівнює R.

1184. Прямокутник і квадрат мають однакові периметри — 36 см. Що більше: площа прямокутника чи площа квадрата?

1185. Знайдіть площу прямокутника, якщо:

а) одна сторона більша за другу на 5 см, а периметр дорівнює 22 см; б) сторони пропорційні числам 2 і 7, а їх різниця дорівнює 15 см; в) одна сторона в 4 рази більша за другу, а периметр дорівнює 20 см; г) одна зі сторін 8 см, а діагональ на 4 см більша за другу сторону.

1186. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 126 см^2 і: а) сторони пропорційні числам 2 і 7; б) різниця сторін дорівнює 15 см.

1187. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см і утворює зі стороною кут 60°. Знайдіть його площу.

1188. Сторони прямокутника дорівнюють 4 см і 8 см. Знайдіть площу чотирикутника, вершини якого — точки перетину бісектрис кутів даного прямокутника.

1189. Знайдіть площу прямокутника, якщо перпендикуляр, опущений з вершини прямого кута на діагональ, ділить її на відрізки 9 см і 16 см.

1190. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 70 см, а бісектриса, проведена з його вершини, ділить діагональ на відрізки, пропорційні числам 3 і 4.

1191. Знайдіть площу прямокутника, якщо бісектриса, проведена з його вершини, ділить діагональ на відрізки 15 см і 20 см.

1192. Основа і висота паралелограма відповідно дорівнюють 12 см і 3 см. Накресліть рівновеликий йому: а) квадрат; б) прямокутник; в) ромб; г) трикутник.

1193. Сторони прямокутника і паралелограма дорівнюють 10 см і 12 см. Знайдіть відношення їх площ, якщо гострий кут паралелограма дорівнює 30°.

1194. Висоти паралелограма дорівнюють 10 см і 12 см. Знайдіть площу паралелограма, якщо один з його кутів 30°.

1195. Сторони паралелограма 10 см і 16 см. Знайдіть його площу, якщо кут між висотами 30°.

1196. Периметр ромба дорівнює 36 см. Знайдіть його площу, якщо один з кутів дорівнює 150°.

1197. Діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 24 см. Знайдіть периметр і площу ромба.

1198. Периметр ромба дорівнює 13,6 см, а одна з діагоналей 3,2 см. Знайдіть площу ромба.

1199. Різниця діагоналей ромба дорівнює 6 см. Знайдіть його площу, якщо сторона дорівнює 15 см.

1200. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 25 см і 45 см, а бічна сторона 26 см. Знайдіть площу трапеції.

1201. У прямокутній трапеції основи дорівнюють 25 см і 32 см, а більша діагональ є бісектрисою гострого кута. Знайдіть площу трапеції.

1202. У прямокутну трапецію вписано коло радіуса 4 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 6 см.

1203. У рівнобічну трапецію, площа якої дорівнює 28 см^2, вписано коло радіуса 2 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

1204. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 18 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні. Знайдіть площу трапеції.

1205. Діагоналі рівнобічної трапеції точкою перетину діляться у відношенні 3 : 13, а більша основа дорівнює бічній стороні. Знайдіть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 36 см.

1206. Площа рівнобічної трапеції дорівнює 12 см^2, а висота 2 см. Знайдіть сторони трапеції, якщо прямі, що містять її бічні сторони, перетинаються під прямим кутом.

1207. Трапеція вписана в коло, центр якого лежить на більшій основі, а радіус дорівнює 6 см. Знайдіть площу трапеції, якщо менша основа дорівнює 4 см.

1208. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини основ трапеції, ділить її на дві рівновеликі частини.

1209. Середня лінія трапеції дорівнює 10 см і ділить площу трапеції на частини, пропорційні числам 3 і 5. Знайдіть основи трапеції.

1210. Основи трапеції дорівнюють 1 см і 7 см. Знайдіть довжину відрізка, який паралельний основам і ділить трапецію на рівновеликі частини.

1211. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо основа і бічна сторона пропорційні числам 6 і 5, а висота, проведена до основи, дорівнює 16 см.

1212. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 15 см і 20 см. Знайдіть площу трикутника.

1213. Площа трикутника дорівнює S. Знайдіть площу трикутника, який відтинає від даного трикутника середня лінія.

1214. Із середини сторони трикутника проведено прямі, паралельні двом іншим сторонам. Доведіть, що площа утвореного чотирикутника дорівнює половині площі трикутника.

1215. Дві сторони трикутника дорівнюють 25 см і 40 см, а висота, проведена до третьої сторони, дорівнює 24 см. Знайдіть площу трикутника й інші висоти.

До розділу 4

1216. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює $\frac{2}{5}$. Знайдіть синус і тангенс цього кута.

1217. Побудуйте кут, тангенс якого дорівнює 5. Знайдіть синус та косинус цього кута.

1218. Побудуйте прямокутний трикутник з катетами 2 см і 7 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс його гострих кутів.

1219. Побудуйте прямокутний трикутник з катетом 3 см і гіпотенузою 6 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс його гострих кутів.

1220. Побудуйте прямокутні трикутники з катетами 2 см і 4 см, 3 см і 4 см, 3 см і 3 см. Знайдіть значення синуса, косинуса і тангенса гострих кутів кожного з трикутників і переконайтесь у справедливості формул: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

1221. Знайдіть кути прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 2 см і $2\sqrt{3}$ см.

1222. Основа і бічні сторони рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють $4\sqrt{2}$ см і 4 см. Знайдіть кути трикутника.

1223. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 5 см і 11 см, а бічна сторона $2\sqrt{3}$ см.

1224. Розв'яжіть прямокутні трикутники, якщо:

а) $a = 12{,}3$ см, $\angle A = 71°$;

б) $c = 24{,}3$ см, $b = 17{,}8$;

в) $a = 5{,}6$, $\angle B = 18°$.

1225. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, а кут при основі α. Знайдіть площу трикутника.

1226. Знайдіть діагоналі ромба, сторона якого дорівнює a, а гострий кут α.

1227. У рівнобічну трапецію з гострим кутом α вписано коло радіуса r. Знайдіть периметр і площу трапеції.

1228. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб, сторона якого дорівнює l, а гострий кут 2α.

1229. Знайдіть площу $\triangle ABC$, якщо висота $BH = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$.

ПРО АВТОРІВ ЕПІГРАФІВ

Блез Паскаль (1623–1662) — французький математик, фізик і філософ.

Йоганн Кеплер (1571–1630) — німецький астроном і математик.

Іммануїл Кант (1724–1804) — німецький філософ.

П'єр де ла Рамé (1515–1572) — французький філософ і математик.

З ІСТОРІЇ ГЕОМЕТРІЇ

Геометрія — одна з найдавніших наук. Спочатку її пов'язували тільки з вимірюванням земельних ділянок. Згодом геометричні відомості почали застосовувати до вимірювання висот, глибин, різних відстаней. Перший знаний нами геометр Фалес Мілетський, один із семи найвідоміших античних мудреців, знав властивості рівних і навіть подібних трикутників.

Фале́с (кінець VII — початок VI ст. до н.е.) — грецький астроном і математик. За свідченням грецького історика Плутарха, Фалес вимірював висоту єгипетської піраміди за довжиною її тіні: довжина тіні піраміди відноситься до довжини тіні вертикального стовпа, поставленого поруч з пірамідою, як невідома висота піраміди відноситься до довжини цього стовпа.

Теорему, яку тепер називають теоремою Фалеса, можливо, сам він і не знав. Жодне з його доведень до нас не дійшло.

Фалес

Піфагор Самоський (VI ст. до н.е.) знав багато властивостей геометричних фігур і натуральних чисел. Теорему про катети і гіпотенузу прямокутного трикутника, яку тепер називають його ім'ям, ще раніше знали єгипетські мудреці. Але Піфагор, здається, першим довів її як теорему. Він і його учні вперше показали, що сторона квадрата і його діагональ не мають спільної міри, тобто якщо довжина сторони квадрата дорівнює 1, то довжину його діагоналі не можна виразити раціональним числом. Це було дуже важливе відкриття. Оскільки античні математики не ввели ірраціональних чисел, то вони більше оперували відрізками, ніж числами.

Піфагор

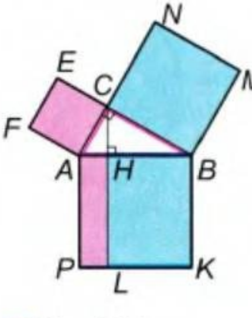
Герон Александрійський (I ст. до н.е.) — давньогрецький винахідник і геодезист, написав книгу «Діоптрика», яку можна вважати першою працею з геодезії. Пояснював, як можна виміряти площу поля, не виходячи за його межі, як знімати плани земельних ділянок. Сконструював прилад для вимірювання кутів у просторі, за принципом якого пізніше створювали теодоліти.

Про *чотирикутники*, зокрема про паралелограми, в «Основах» **Евкліда** відомостей є більше, ніж у нашому підручнику. Розглядалися тоді також прямокутники, ромби, квадрати, трапеції. Трактувалися ці поняття не так, як тепер. Трапеціями раніше називали всі чотирикутники, крім паралелограмів.

Теорему, яку ми тепер називаємо теоремою Піфагора, Евклід формулював так: «У всякому прямокутному трикутнику квадрат, побудований на стороні, протилежній прямому куту, дорівнює сумі квадратів, побудованих на сторонах, які обмежують прямий кут». Словом «квадрат» називав і його площу. Доводив теорему, користуючись малюнком (мал. 278). Показував, що площі квадратів $ACEF$ і $CBMN$ дорівнюють відповідно площам прямокутників $AHLP$ і $HBKL$. Спробуйте здійснити таке доведення самостійно.

І про подібність трикутників в «Основах» Евкліда багато тверджень, хоча формулювання давалися дещо інші. Наприклад, доведено таку теорему: «Якщо в якому-небудь трикутнику проведено пряму, паралельну одній з його сторін, то вона, зустрічаючи дві інші його сторони або їх продовження, поділяє їх на пропорційні частини, і навпаки».

Подібності фігур присвячено всю шосту книжку «Основ» Евкліда.



Мал. 278

Площі многокутників. Правильно обчислювали площі прямокутника, трикутника і трапеції вчені Вавилона ще 4 тисячі років тому. Архімед першим знайшов формулу для обчислення площі трикутника, яку згодом було названо формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Тут a, b, c — сторони довільного трикутника, p — його півпериметр, а S — площа.

Розв'язуванням трикутників раніше займалась окрема математична наука — *тригонометрія* (грецьке τριγωνον — трикутник, μετρέω — міряю). Давньогрецький математик і астроном **Гіппарх** ще в II ст. до н. е. склав тригонометричні таблиці, за допомогою яких досить точно визначив відстань від Землі до Місяця і розв'язав багато інших прикладних задач. Він перший увів географічні координати — довготу і широту.

Великий внесок у розвиток тригонометрії зробив давньогрецький математик, астроном, географ **Птолемей** (близько 100–178 рр.). Родом він з Єгипту, жив здебільшого в Александрії. Його твір «Мегале Сінтаксіс», перекладений арабською мовою під назвою «Альмагест», довгий час був основою тригонометрії. Птолемей ділив коло на 360 рівних частин, а кожну поділку — ще на 60 рівних частин. Латинською мовою ці частини називались *partes minutae primae* і *partes minutae secundae*. Звідси й походять наші назви *мінути* і *секунди*. Він склав також першу таблицю синусів гострого кута.

Згодом з великим успіхом займались тригонометрією індійські астрономи **Бхаскара**, **Брамагупта** (VII ст.), а за ними — арабські, зокрема **Альбаттані** (IX ст.). Індійці ввели терміни *синус*, *косинус*, а араби — *тангенс*. У XVI ст. німецькі математики, зокрема **Мюллер** із Кенігсберга (або, як його ще прозвали, **Регіомонтан**), склали ще точніші таблиці для всіх тригонометричних функцій гострого кута.

Символічне позначення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і строгу систему вивчення тригонометричних функцій розробив швейцарський академік **Леонард Ейлер**.

У Київській Могилянській академії **Феофан Прокопович** ознайомлював спудеїв (учнів, студентів) з вимірювальними роботами на місцевості. Починав він цей курс так: «Спеціальна геометрія, яку іноді називають практичною геометрією, а іноді геодезією, є однією з найшляхетніших, найкорисніших і найцікавіших галузей математики. Адже вона займається не лише вимірюванням землі, від чого колись і дістала свою назву, але вимірює все, що підлягає вимірюванню...».

З українських геометрів найбільш відомі: М. Остроградський, Г. Вороний, М. Ващенко-Захарченко, О. Смогоржевський.

Михайло Васильович Остроградський (1810–1862) народився в селі Пашенна на Полтавщині, навчався в Харківському університеті і в Парижі, був почесним академіком багатьох

Г. Вороний

Мал. 279

академій світу, зокрема Петербурзької, Паризької, Римської, Туринської. Товаришував з Тарасом Шевченком. Працював у багатьох галузях математики і механіки, а для шкіл написав «Підручник з елементарної геометрії», який виявився настільки цікавим і змістовним, що його ще раз передрукували у 2001 р. в Тернополі (мал. 279).

Георгій Феодосійович Вороний (1868–1908) народився у селі Журавка Чернігівської області. Навчався у Прилуцькій гімназії, Петербурзькому університеті. Був професором Варшавського університету, деканом механічного факультету Варшавського політехнічного інституту, працював у галузях геометрії і теорії чисел. Його вважають творцем геометричної теорії чисел. Тривалий час його праці мало привертали до себе увагу, а тепер до них звертаються дедалі більше фахівців усього світу. «Діаграмам Вороного» присвячувалися спеціальні великі міжнародні конференції (в тому числі веб-конференції) в США, Японії, Південній Кореї, Нідерландах, Канаді, Великобританії. У 2008 р. світ відзначає 100 років пам'яті великого математика, а його праці з геометрії з часом стають ще потрібнішими і цікавішими.

Така вона — геометрія. З роками не старіє, а стає дедалі необхіднішою.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

9. 4 см; 6 см; 10 см і 18 см. **10.** 8 см; 4 см; 4 см і 4 см. **11.** 3 см; 6 см; 6 см і 6 см. **12.** а) 36°; 72°; 108° і 144°. **13.** Так. **14.** Ні. **18.** $(a + b - c) : 2$. **19.** 60°; 120°; 60°; 120°. **21.** Ні. **23.** 3. **24.** 110°; 100°; 90° і 60°. **26.** 18 см. **27.** 6 см; 9 см; 18 см і 11 см. **33.** 30°; 50°; 100°. **50.** 78°; 102°; 78°; 102°. **51.** г) 70°; 110°; 70°; 110°. **52.** 69°; 111°; 69°; 111°. **53.** 90°. **54.** 45°; 135°; 45°; 135°. **55.** 58°; 122°; 58°; 122°. **57.** 6 см; 10 см; 6 см і 10 см. **58.** 16 см; 8 см; 16 см і 8 см. **59.** 7 дм. **65.** 30 см. **66.** 5 см; 12 см; 5 см; 12 см. **67.** 22 см або 26 см. **74.** а) 6 см; б) 12 см. **78.** 3. **79.** 3. **80.** 90°; 90°; 90°; 90° або 30°; 150°; 30°; 150° або 60°; 120°; 60°; 120°. **81.** $2(a + b)$, або $2(b + c)$, або $2(a + c)$. **86.** Так. **87.** Ні. **100.** 6 см. **101.** 20° і 70°. **103.** 28 см. **104.** 4 см і 10 см. **108.** 24 см або 30 см. **110.** 65°. **111.** 60°; 120°; 60°; 120°. **112.** 20°; 70°; 90°. **113.** $0{,}5a$. **114.** 10 см. **115.** 24 см. **116.** а) 60°; 120°; 60°; 120°; б) 20 см. **121.** 3 см і 9 см. **122.** 1 : 3. **124.** 9 см. **125.** 28 см. **129.** Ромб. **132.** 24 см. **133.** 7 см. **142.** 1 : 2. **146.** 34 см. **148.** 107° або 43°. **163.** 16 см. **165.** $(a + b + c) : 2$. **167.** 77 см. **168.** $d + d_1$. **170.** 12 см, 20 см, 28 см. **171.** 3 см, 4 см. **172.** 4 см. **174.** 32 см. **175.** 30 см. **179.** 10 см і 2,5 см. **180.** 3 см і 6 см. **181.** 2 см. **186.** 1) $AC = BD$; 2) $AC \perp BD$; 3) $AC = BD$ і $AC \perp BD$. **201.** 85°; 95°; 85°; 95°. **202.** 60°; 120°; 60°; 120°. **203.** 60°; 120°; 60°; 120°. **204.** 60°; 120°; 60°; 120°. **205.** 75°; 105°; 75°; 105°. **209.** 80°; 80°; 20°. **210.** 30° і 130°. **212.** 44 см. **213.** 34 см. **214.** 3 см. **215.** 2 см. **216.** 6 см, 6 см, 6 см, 15 см. **217.** 12 см. **218.** 24 см. **220.** 3 см і 5 см. **221.** 4 см і 10 см. **222.** а) 27 см і 33 см; в) 24 см і 36 см. **223.** 35 см або 40 см. **224.** 10 см. **226.** 3 см. **227.** 10 см і 15 см. **228.** 5,5 см; 7 см; 8,5 см. **229.** 19 см. **231.** 7 см. **233.** 60° і 120°. **234.** 4,5 см. **236.** 1 : 2. **239.** $\frac{4a}{3}$; $\frac{5a}{3}$. **240.** CD. **242.** Так. **246.** 6 см, 8 см, 8 см. **261.** 1 : 5. **263.** 60°. **265.** 23°20′ або 124°25′. **266.** 74°26′. **267.** 15°. **268.** 18°; 36°; 144°; 126°. **269.** 160°; 80°; 120°. **270.** 45°; 52°30′; 82°30′. **271.** 80°; 100°; 180°. **272.** 30° і 150°. **273.** 78°30′; 101°30′; 157°; 203°. **276.** 52°; 62°; 66°. **277.** 5, 7 і 8. **279.** 40°; 40°; 100°. **280.** 70° і 90°. **281.** 90° і 40°. **282.** 120° і 40°. **283.** 67,5°. **287.** 39 см. **288.** 1 : 3. **289.** 150° або 105°. **301.** 100° і 60°. **302.** 12 см; 16 см; 24 см. **303.** 8 см. **304.** а) Так; б) ні. **305.** 12 см.

306. 5 см. **309.** 6 см. **311.** 12 см. **312.** 2,5 см. **313.** 1,5 см. **314.** 2 м. **315.** $12r$. **316.** 8 см і 28 см. **317.** 80 см. **321.** 113°; 67°; 113°; 67°. **330.** 6 см. **332.** 80° і 140°. **333.** 2 см і 6 см. **334.** 1 : 3. **335.** 90°; 112°; 90°. **336.** Поза трапецією. **341.** а) Прямокутник або квадрат; б) рівнобічна трапеція; в) ромб або квадрат. **344.** 20°; 50°; 110°. **345.** 144° і 216°. **346.** 29 см. **347.** 26 см.

359. а) 2 : 5; б) 3 : 5; в) 1 : 5; г) 1 : 1. **361.** 9,1 см. **362.** 40 см. **363.** 3 : 1. **364.** 6 см і 33 см. **365.** 7 : 9 і 2 : 9. **366.** $m : (m + n)$ і $n(m + n)$. **367.** 1 : 2 і 3 : 1. **370.** 2 : 3. **371.** 1 : 2. **372.** 1,5 км. **373.** 1 : 4 000 000. **374.** 1 : 4; 3 : 8. **375.** 8; 1,6; 4. **378.** $0{,}5a$; $0{,}1a$; $0{,}4a$. **379.** $am : (m + n)$; $an : (m + n)$. **380.** а) Ні; б) ні. **381.** 1) $x = 2$; $y = 10$; 2) $x = 6$; $y = 7{,}5$. **382.** 15 см. **383.** 1 : 3 і 1 : 4. **384.** 27 : 8 і 4 : 3. **385.** 7,5 см і 12 см. **387.** а) 1 : 2; б) 1 : 3. **388.** 2 : 3. **391.** 20° і 35°. **394.** 150° і 30°. **401.** б) 60 см і 20 см. **403.** а) 12 см; б) 36 см. **412.** 5 : 8. **415.** 5 см. **417.** 1 : 3 : 1; 1 : 4. **419.** 6,4 см; 22,4 см. **423.** 21 см. **424.** 44 см і 48 см. **440.** 36 м, 44 м. **442.** Так. **444.** 16 см. **446.** а) 35 см; б) 3 : 8. **450.** а) 6 см; 10 см; 12 см; в) 13,5 см; 22,5 см; 27 см. **451.** 8 см; 3 см; 4 см. **452.** 8 см і 10 см; $5\frac{1}{3}$ см і $6\frac{2}{3}$ см. **453.** 3 см і 4,5 см. **454.** 2 см і 10 см. **456.** Так. **458.** 36°; 72°; 72°. **459.** $1 : n$. **460.** 390 м. **461.** а) $\frac{mb}{c}$; б) $\frac{b(c-n)}{c}$. **463.** $3\frac{2}{3}$ см і $8\frac{1}{3}$ см. **464.** 8 см. **465.** 12 см. **467.** 10,5 см; 13,5 см. **468.** 15 см; 14 см або $18\frac{2}{3}$ см. **469.** 15 см. **470.** 6 см і 9 см. **471.** 15 см. **472.** 10 см і 18 см. **484.** а) 4 см і 6 см; в) 24 см. **486.** 25 см і 45 см. **487.** 3 : 5. **488.** 6 см і 10 см. **489.** 3 см. **490.** 102 см. **491.** 4 см і 8 см. **492.** 8 см; 10 см; 14 см. **495.** 37 см і 40 см. **496.** 6 см і 18 см. **497.** 16 см. **498.** 18 см. **500.** 36 см. **502.** 6 см і 12 см. **504.** 20 см. **505.** 8 см і 10 см. **506.** 7,5 см і 10,5 см. **507.** 3,6 см і 14,4 см. **508.** 26 см; 26 см і 20 см. **510.** 39 см; 21 см; 27 см. **511.** 15 см; 21 см і 24 см. **512.** 28 см і 29 см. **513.** 20 см. **514.** $mn : (m + n)$. **515.** 28,8 см. **540.** 2 см і 6 см. **541.** 15 см; $5\sqrt{3}$ см. **542.** 6 см. **543.** 4,5 см і 13,5 см. **544.** 12 см. **547.** 2 : 3. **548.** $(a^2 + c^2) : 2c$; 24,25 см. **551.** 28 см і 63 см. **552.** 50 см і 72 см. **553.** 5,2 см. **554.** 9 см і 16 см. **572.** 2,5 см; $2{,}5\sqrt{3}$ см. **574.** 13 см. **575.** 68 см. **576.** в) $5\sqrt{3}$ см і 5 см; г) $\sqrt{5}$ см і $2\sqrt{5}$; ґ) 8 см і 6 см. **577.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **578.** $\frac{2\sqrt{3}m}{3}$. **579.** $a\sqrt{2}$. **580.** $\frac{c\sqrt{2}}{2}$. **583.** 184 см. **584.** 4 см і 6 см. **585.** 12,5 см. **586.** 24 см. **587.** а) 24 см; в) 15 см; 15 см; 18 см; г) $3\sqrt{2}$ см. **589.** 15 см. **590.** 80 см. **593.** 16 м. **594.** 50 м. **599.** 50 см. **600.** 26 см. **602.** 4 см і 20,5 см. **603.** а) 5 см; $2\sqrt{13}$ см; $\sqrt{73}$ см; б) 4,8 см. **604.** 30 см і 40 см. **605.** 40 см. **606.** 6 см і $3\sqrt{7}$ см. **608.** $\sqrt{n^2+3m^2}$. **609.** 4 см. **610.** 2,8 см і 10 см. **611.** $2r\sqrt{3}$. **612.** 3 см або 21 см. **613.** $14\sqrt{3}$ см. **614.** 16 см. **615.** 14 см. **616.** 24 см. **617.** а) $3\sqrt{21}$ см; б) $5\sqrt{5}$ см. **618.** $ab : \sqrt{a^2+b^2}$. **619.** 12 см. **620.** $18(2+\sqrt{3})$ см. **622.** $2 : \sqrt{13}$. **632.** $20\sqrt{3} : 3$; $10\sqrt{3} : 3$. **635.** 15 см. **637.** 7,5 см. **639.** 2 : 1. **640.** 60°. **641.** $a\sqrt{3} : 2$. **642.** 6 см; $2\sqrt{10}$ см; $6\sqrt{10}$ см. **643.** 16 см і 9 см. **645.** $a\sqrt{2} : 2$. **647.** $4{,}5 : \sqrt{5}$; $18 : \sqrt{5}$; $9 : \sqrt{5}$. **648.** 1,75a і 0,25a. **649.** 3,75 футів. **650.** а) $4\sqrt{13}$; $6\sqrt{13}$; б) $54 : \sqrt{13}$; $16 : \sqrt{13}$. **652.** 18 футів. **653.** $1 : \sqrt{2}$. **654.** $\sqrt{m} : \sqrt{n}$.

674. $128\frac{4}{7}°$. **675.** 8; 9. **676.** Так. **678.** Так. **680.** 60° і 210°; $a(1+\sqrt{3})$. **683.** 90°; 90°; 120°; 120°;120°; $a(2+\sqrt{3})$. **688.** Ні. **691.** $6+5\sqrt{2}$; 45°; 90°; 90°; 135°; $\sqrt{13}$; $\sqrt{26}$. **703.** 60°; 80°; 40°. **704.** 70°, 50° і 60°. **705.** 8 см. **706.** 57° або 33°. **707.** 60°; 90°; 90°; 120°. **708.** а) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **710.** $\sqrt{4r^2+a^2} : 2$. **711.** $2\sqrt{R^2-r^2}$. **712.** $\sqrt{2}$ см. **713.** $\sqrt{3} : 2$. **714.** 6 см. **715.** 6 см; 8 см; 10 см; 12см, $r = 4$ см. **718.** 2)108°; 3) 36°; 4) 72°. **719.** 90° і 120°. **721.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; 120°. **722.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **723.** а) 3 см; б) 6,25 см. **724.** 13 см. **725.** $2\sqrt{26}$ см. **726.** $6\sqrt{5}$ см. **727.** $p-r$. **747.** 8 см. **748.** 25 см². **750.** 14 см. **751.** 32 см². **752.** 2 : 1. **753.** 6 см і 9 см. **754.** 7 см і 8 см. **757.** 2 кв. од. **759.** 4 : 25. **760.** 168 см². **761.** 48 м². **763.** 1 : 2. **764.** 16 см² або 48 см². **765.** 40 см². **766.** 160 см². **767.** 1200 см². **769.** У 4 рази. **773.** $4\sqrt{3}\,r^2$. **774.** $ac : 4$. **775.** $m^2 : 2$. **776.** $a^2b^2 : (a+b)^2$. **780.** 90°. **789.** $3\frac{3}{4}$ см² або $6\frac{2}{3}$ см². **790.** 350 см². **791.** 84 см². **792.** $10\sqrt{3}$ см². **794.** 22,5 см. **795.** 192 см² або 320 см². **796.** 18 см². **798.** $a^2 : 2$. **799.** $400\sqrt{2}$ см². **800.** 1590 см². **801.** 12 см². **805.** 32 см². **806.** $24\sqrt{3}$ см². **807.** 4,76 см². **808.** 120 см². **809.** 3500 см². **811.** 54 см². **812.** 90 см². **813.** 120 м². **814.** 12 см². **815.** 128 см². **816.** 40 см². **817.** 20 см. **818.** 348 см². **819.** 56 см². **821.** $\sqrt{2Q}$. **822.** $1350\sqrt{3}$ см². **823.** 180 см². **824.** 624 см². **825.** 384 см².

826. 72 см^2. **827.** 255 см^2. **828.** $338\sqrt{3}$ см^2. **829.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см; 2) 60° і 120°; 3) 60°; 4) $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ см^2. **830.** 202,8 см^2. **832.** 10 см; 10 см; 2 см і 18 см. **833.** 128 см^2. **834.** 6 см. **835.** 156 см^2. **836.** a^2. **837.** 135 см^2. **838.** 480 см^2. **839.** $576\sqrt{3}$ см^2. **840.** 384 см^2. **857.** а) 16 см^2; в) $c^2 : 4$. **858.** 20 см^2. **860.** 432 см^2. **864.** а) $4\frac{8}{13}$ см; б) 9,6 см. **865.** 8 см; 9,6 см; 9,6 см. **866.** 8 см. **867.** 5,625 см. **868.** 5 см^2. **869.** 2 см. **870.** 4,8 см. **873.** 20 см. **875.** $\sqrt{3}$ см^2. **876.** 10 кв. од. **877.** 13 м^2 або 7 м^2. **878.** $8(1+\sqrt{3})$ м^2. **879.** 12 см^2. **880.** $3\sqrt{3}R^2$. **881.** 1 см або 4 см. **882.** 4,8 см^2 і 7,2 см^2. **883.** а) 24 кв. од.; б) 8 кв. од. **884.** 90 см^2. **886.** 15 см^2. **887.** 1 : 2. **889.** 1 : 4. **890.** 1 : 2. **891.** $8(2+\sqrt{3})$ см. **892.** 15 см; 12,5 см; 12,5 см. $S = 75$ см^2. **893.** 1176 см^2. **902.** $2{,}25S$. **903.** 84 см^2. **904.** $4\frac{2}{3}$ см.

917. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\sin\beta = \frac{4}{5}$; $\cos\beta = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$. **922.** $\sin\angle A = \frac{7}{25}$; $\cos\angle A = \frac{24}{25}$; $\operatorname{tg}\angle A = \frac{7}{24}$; $\sin\angle B = \frac{24}{25}$; $\cos\angle B = \frac{7}{25}$; $\operatorname{tg}\angle B = \frac{24}{7}$. **925.** $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. **929.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 2. **930.** $c\sin\alpha$; $c\cos\alpha$. **932.** $\frac{n}{\sin\alpha}$; $\frac{n}{\operatorname{tg}\alpha}$. **934.** а) 1,8 см; в) 6 см. **937.** $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = 2$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$. **938.** $2b\sin\frac{\alpha}{2}$; $b\cos\frac{\alpha}{2}$; $b\sin\alpha$. **940.** $\frac{h}{\sin\alpha}$. **941.** $2r\sin\alpha$; $2r\cos\alpha$. **942.** $2a\cos\alpha$. **944.** $\frac{a-b}{2\cos\alpha}$; $\frac{a-b}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **959.** а) 0,5; б) 1. **961.** а) 30°; 60°; 90°; б) 45°; 30°; 105°. **967.** 45° і 135°. **968.** 60° і 120°. **969.** 45° і 135°. **970.** 60°; 120°; 90°; 90°. **971.** 30°; 30°; 120°. **975.** 30°; 30°; 120°. **976.** 30°; 30°; 120°. **977.** 45°; 45°; 90°. **979.** $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$. **981.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$. **1004***. 29,47 м. **1005.** 77,04 см і 35,92 см. **1006.** 125,17 см. **1008.** 14,6 см. **1009.** 26,25 см; 40,4°; 49,6°. **1010.** 39°. **1011.** 62,5°; 62,5°; 55°. **1012.** 12,8 см; 68,5°;

* Відповіді до задач 1004–1066 дано наближені.

68,5°. 1014. 55°; 55°; 70°. **1017.** 25,9°; 64,1°. **1018.** 34,9 см. **1020.** 53°; 127°; 53°; 127°. **1021.** 73,7°; 16,3°; 163,7°; 106,3°. **1022.** $\frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

1023. 54,3°. **1025.** $\frac{b-a}{2\cos\alpha}$; $\frac{b-a}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **1027.** 96,7 см². **1029.** 13,9 см².

1043. 23 дм². **1044.** 20,57 см². **1046.** 3 см². **1047.** 30°. **1050.** 61°. **1051.** 40 м. **1052.** 10,7 м. **1053.** 7,6°. **1055.** 7,7 м. **1058.** 39,3 м.

1059. 74,6 м. **1060.** 6 м. **1062.** 56 м. **1065.** $a\cos\frac{\alpha}{2}$; $a\sin\frac{\alpha}{2}$.

1066. а) 46,3 см²; б) 71 см². **1067.** $\frac{8r}{\sin\alpha}$; $\frac{4r^2}{\sin\alpha}$.

1071. Через точку всередині даного трикутника проведіть три відрізки, паралельні його сторонам. **1072.** Розмістіть дві трапеції всередині квадрата так, щоб їх більші основи лежали на діагоналі квадрата. **1073.** Доведіть, що $KLEF$ — прямокутник. **1075.** $2\sqrt{2}\,a$. **1076.** Якщо O — центр ромба, $AO = a$, $OB = b$, $OP = x$, то $AP \cdot PC = a^2 - x^2$ і $AB^2 - PB^2 = a^2 - x^2$. **1077.** 30°. **1078.** Доведіть, що $\angle PKD = \angle PDK = 30°$. **1079.** 90°. **1081.** Спочатку побудуйте прямокутний трикутник, у якого один катет дорівнює даному відрізку, а прилеглий кут 22,5°. **1082.** Побудуйте трикутник за даним відрізком і прилеглими кутами 45° і 112,5°. **1083.** Покажіть, що радіус вписаного кола дорівнює 1 і відкладіть на катетах від вершини прямого кута такі відрізки (як різниці двох сторін). **1084.** Скористайтесь теоремою Фалеса. **1085.** Проведіть через вершини даного трикутника ABC прямі, перпендикулярні до висот. Одержимо трикутник, середини сторін якого — A, B і C. **1086.** 8 см. Скористайтесь властивістю середньої лінії трапеції. **1091.** З двох таких п'ятикутників можна скласти шестикутник, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні і дорівнює їй, а такий шестикутник — фігура паркетна. **1092.** Доведіть, що $\triangle AED = \triangle CDK$. **1093.** Доведіть, що $\triangle ABK = \triangle PCK = \triangle PDA$. **1094.** Скористайтеся тотожністю $\sin\alpha = \sin(180 - \alpha)$. **1095.** Проведіть серединний перпендикуляр основи трикутника і побудуйте відрізок, що дорівнює $\frac{2}{3}$ даної медіани. **1096.** Визначте міру кута між даними сторонами. **1097.** Задача може мати два розв'язки або не мати жодного. **1098.** Покажіть, що висоти таких трапецій рівні. **1099.** Існує такий чотирикутник неопуклий. **1100.** Проведіть діагоналі квадрата і доведіть рівність чотирьох трикутників. **1103.** 30°.

1104. $1 + \sqrt{2}$. **1106.** Не існує. **1107.** 8, 6 і 10. **1109.** $5\frac{2}{3}$ ліктя. **1112.** У старих китайських працях розглядався один випадок, коли дві сторони квадрата лежать на катетах. Для цього випадку $x = \frac{60}{17}$. **1113.** 4,8. **1114.** Побудуйте спочатку який-небудь один такий трикутник з вершинами на двох сторонах даного трикутника. **1116.** Доведіть спочатку, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін. **1117.** 4,8. **1118.** Доведіть, що $\triangle HBA_1 \sim \triangle CAA_1$. **1119.** Нехай O — середина AC. Тоді $\triangle KAO \sim \triangle DPK$, $\angle KEP + \angle KDP = \angle EKF + \angle EKA = 45°$. **1120.** 90°, 90°, 135° і 45°. **1122.** Нехай у $\triangle ABC$ $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = 90°$, $\angle A = 15°$. Серединний перпендикуляр гіпотенузи перетинає AC в точці K. Тоді $BK = KA = 2a$, $CK = b - 2a$. Застосуйте теорему Піфагора до $\triangle BKC$. **1123.** $ab\sqrt{2} : (a + b)$. **1124.** 12 см і 8 см. **1126.** 84 см. **1129.** 70° і 110°. **1130.** 64 см. **1133.** 64 см. **1134.** 12 см. **1135.** 12 см. **1136.** 48 см. **1140.** 9 см. **1141.** 50 см. **1143.** 13 см і 23 см. **1144.** 8 см і 20 см. **1145.** $0,5l$ і $1,5l$. **1147.** 4 см. **1149.** 111° і 124,5° або 33° і 16,5°. **1150.** 12 см і 30 см. **1152.** 93 см. **1154.** 16 см і 24 см. **1155.** 18 см . **1157.** 85,5 см; 28,5 см; 101,5 см. **1158.** 20 см або $18\frac{6}{13}$ см. **1159.** 22 см. **1160.** 7,2 см. **1161.** 9 см. **1162.** 6 см. **1163.** 6 см. **1166.** 8 см. **1168.** 6 см. **1169.** 10 см. **1171.** $\sqrt{m(m+n)}$; $\sqrt{n(m+n)}$. **1174.** 6 см. **1175.** 20 см. **1176.** 10 см; $4\sqrt{10}$ см; $2\sqrt{13}$ см. **1177.** $3\sqrt{5}$ см і $\frac{8\sqrt{10}}{3}$ см. **1178.** 7,5 см. **1179.** $16\frac{2}{3}$ см і 25 см. **1181.** 13 см. **1186.** а), б) 54 см. **1188.** 8 см². **1189.** 300 см². **1191.** 588 см². **1193.** 2 : 1. **1194.** 240 см². **1195.** 80 см². **1198.** 9,6 см². **1199.** 216 см². **1201.** 684 см². **1202.** 72 см². **1204.** 225 см². **1205.** 864 см². **1206.** 4 см; 8 см; $2\sqrt{2}$ см; $2\sqrt{2}$ см. **1207**. $32\sqrt{2}$ см². **1209.** 5 см і 15 см. **1210.** 5 см. **1212.** 294 см². **1215.** 468 см²; 37,44 см; 23,4 см. **1221.** 30° і 60°. **1222.** 45°; 45°; 90°. **1223.** 30°; 30°; 150°; 150°. **1225.** $\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$. **1226.** $2a\cos\frac{\alpha}{2}$; $2a\sin\frac{\alpha}{2}$. **1227.** $\frac{8r}{\sin\alpha}$; $\frac{4r^2}{\sin\alpha}$. **1229.** $\frac{h^2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

ЗМІСТ

Підписано до друку 01.04.2008. Формат $60 \times 90^{1}/_{16}$. Папір офсетний.
Гарнітура шкільна. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 16,00. Обл.-вид. арк. 14,00.
Наклад 137 600 пр. Вид. № 95.

«Вежа». 02125, Київ, вул. Старосільська, 2.
Тел. 512-25-09, 510-59-03.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців ДК №362 від 15.03.2001 р.

Віддруковано з готових діапозитивів видавництва «Вежа»
у ТОВ «Редакція газети «Дорога. Транспорт. Пішохід».
21034, м. Вінниця, вул. Лебединського, 34-а.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 1023 від 12.06.2002 р.