О.Я. Біляніна, Г.І. Білянін, В.О. Швець

ГЕОМЕТРІЯ

10

Академічний рівень

О.Я. Біляніна, Г.І. Білянін, В.О. Швець

ГЕОМЕТРІЯ

10 клас

Академічний рівень

Підручник для загальноосвітніх
навчальних закладів

*Рекомендовано Міністерством
освіти і науки України*

Київ
«Генеза»
2010

Шановний старшокласнику!

Науково-технічний прогрес досить стрімко змінює характер існуючих професій і приводить до появи нових, які більшою мірою вимагають уважності, кмітливості та швидкості реакції працюючих. Отже, ***найважливішим завданням навчання стає виховання логіки мислення, засвоєння загальних методів наукового дослідження***.

Звичайно, розв'язання цієї проблеми значною мірою залежить від стану засвоєння математики. Тому математика – базова дисципліна. Вона – основа для успішного вивчення і засвоєння багатьох спеціальних дисциплін у різних галузях.

Пропонуємо тобі новий підручник «Геометрія. 10 клас» академічного рівня, який містить навчально-практичний матеріал вивчення навколишнього світу, адже геометрія як наука – один із специфічних засобів його відображення.

Ти вже знаєш, що шкільний курс геометрії розділено на 2 частини: планіметрію та стереометрію. Цей підручник є початком вивчення стереометрії – науки, яка вивчає фігури та їхні властивості в просторі. Він складається із 7 модулів, структура яких є такою: назва модуля, його короткий зміст і характеристика цілей вивчення; виклад теоретичного матеріалу зі зразками розв'язання; вправи, складені відповідно до чотирьох рівнів складності; задачі прикладного змісту; історичний матеріал у рубриці *«З літопису геометрії»*; запитання для самоконтролю; тест для самоконтролю.

Зразки розв'язання задач мають додаткове пояснення у формі *«Чому саме так?»*. Це допоможе тобі орієнтуватися в змісті задачі та вибирати спосіб її розв'язування.

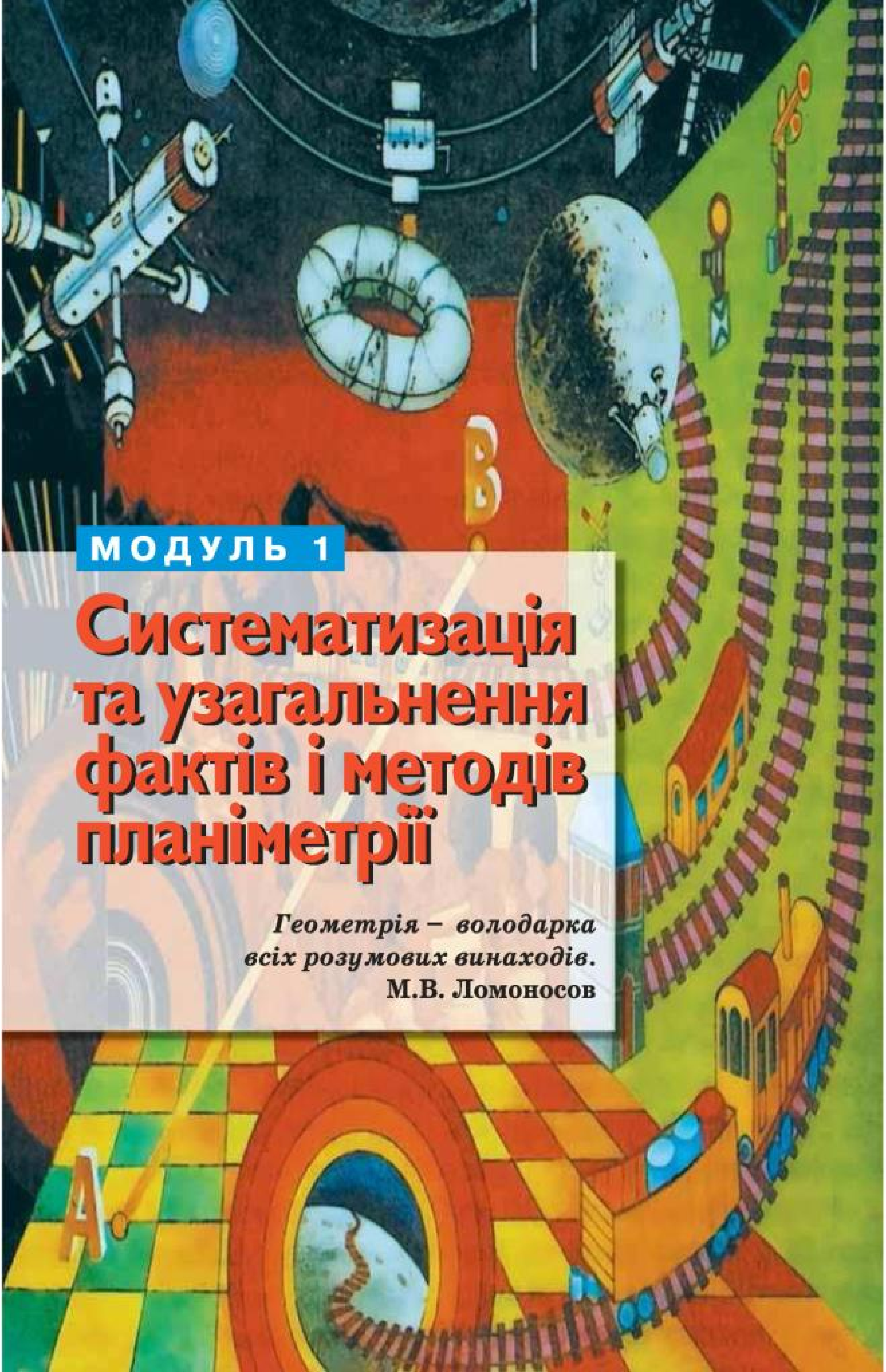
Модулі 1 і 7 містять матеріали для узагальнення та систематизації відповідних курсів планіметрії та вивченого в 10 класі. Тому виклад їх теоретичного матеріалу носить більш інформаційний характер, ніж усі інші модулі. Розрізнити рівень складності задач початкового, середнього, достатнього і високого рівнів допоможуть відповідні позначки: «°», «°°», «•», «••». У більшості випадків задачі початкового та середнього рівнів ми пропонуємо в тестовій формі. Такі задачі можна виконувати усно або письмово.

Запитання та тести самоконтролю допоможуть тобі повторити та закріпити вивчене в модулі, підготуватися до певного виду контролю. Окремі завдання рубрики «Прикладні задачі» ми наводимо або з вказівками, або з повним розв'язанням. Життя ставитиме перед тобою нові задачі, але сподіваємося, що твої знання, набуті в школі, дадуть змогу їх завжди розв'язувати якісно.

Рубрика *«З літопису геометрії»* вміщає історичний розвиток геометрії в Стародавній Греції, Стародавньому Єгипті, Азії, Європі тощо. Очевидно, що геометрія є наукою не штучною, а природною і необхідною для життя. Вона виникла з потреб людини. Геометрія – це практика, логіка, фантазія! За словами М. В. Ломоносова, ***«геометрія – володарка всіх розумових винаходів»***.

Бажаємо тобі успіхів у навчанні!

Автори



МОДУЛЬ 1

Систематизація та узагальнення фактів і методів планіметрії

Геометрія – володарка всіх розумових винаходів.
М.В. Ломоносов

КОРОТКИЙ ЗМІСТ МОДУЛЯ

- *Про логічну побудову планіметрії*
- *Основні поняття планіметрії*
- *Аксіоми планіметрії*
- *Опорні факти курсу планіметрії (довідник і практика)*
  - *Взаємне розміщення прямих на площині*
  - *Коло і круг*
  - *Многокутники*
  - *Трикутник і його елементи*
  - *Опуклі чотирикутники*
- *Задачі і методи їх розв'язування*
  - *Алгебраїчні методи*
  - *Геометричні методи*

Опрацювавши цей модуль, ви дізнаєтеся:

- як розрізняють означувані і неозначувані поняття;
- які поняття вибирають за основні;
- як аксіоми впливають на подальшу побудову геометрії;
- яка роль теорем при складанні комплексної характеристики геометричної фігури;
- як коротко скласти відомості про вивчений курс планіметрії;
- які факти курсу планіметрії можуть бути опорними;
- як відрізнити властивість геометричної фігури від її означення;
- як умовно поділяють методи розв'язування геометричних задач;
- які теоретичні знання потрібні для розв'язування нескладних геометричних задач.

§ 1.1. Про логічну побудову планіметрії. Основні поняття. Аксіоми планіметрії

У навколишньому світі нас оточують різні предмети, кожний з яких має багато характеристик: колір, твердість, хімічний склад, розміри, форму і т. д. Наприклад, круг радіуса 10 см можна вирізати з металевого листа або з аркуша паперу. Зрозуміло, що обидва предмети мають і однакові характерні властивості, і різні. Щоб вивчити певні властивості того чи іншого предмета, у школі вивчаються різні шкільні дисципліни. Якщо порівнювати вищеназвані предмети за формою та кількісними характеристиками, то ці фігури однакові – два круги радіуса 10 см. Шкільні дисципліни, які вивчають просторову форму й кількісні характеристики предметів і явищ навколишнього середовища, належать до математичних – алгебра і геометрія. ***Геометрія*** – це наука про просторову форму й кількісні характеристики предметів реального світу.

Інші характеристики предметів навколишнього середовища вивчають інші шкільні дисципліни. Якщо під час вивчення предмета реального світу не враховувати його характеристики, крім просторової форми і кількісних вимірів, то отримаємо абстрактний об'єкт, який називають геометричною фігурою.

Слово «геометрія» – грецького походження, що в перекладі українською мовою означає *землемірство* (назва походить від вимірювань на місцевості). Геометрія, яку вивчають у школі, називається *евклідовою* за ім'ям давньогрецького вченого Евкліда (див. рубрику «З літопису геометрії» до Модуля 1). Шкільна геометрія складається з двох частин: ***планіметрії*** і ***стереометрії***. З планіметрією ви ознайомилися в основній школі, а стереометрію вивчатимете в старших класах.

Планіметрія – це розділ геометрії, у якому вивчаються геометричні фігури на площині (рис. 1.1). ***Стереометрія*** – це розділ геометрії, у якому вивчаються фігури в просторі.

Рис. 1.1

Геометричні фігури – це абстрактні фігури, які нагадують предмети, що нас оточують. Щоб відрізняти одну геометричну фігуру (чи поняття) від іншої, їх описують у вигляді твердження, яке називають *означенням*.

Означення – це твердження, яке описує істотні властивості предмета (поняття), що дає змогу відрізнити його від інших. Як з'ясувалося, означити всі геометричні фігури неможливо. Наприклад, точка, пряма, площина. Їх називають ***неозначуваними***, або ***початковими*** (з яких усе починається), або ***основними***, як називали їх у планіметрії.

Логічну побудову планіметрії можна описати за такими етапами.

1. Вибір геометричних понять, які називають основними поняттями (абстрактних фігур).
2. Формулювання основних властивостей для цих геометричних понять за допомогою тверджень, які вважаються істинними без доведень.
3. Побудова інших понять, які означуються через основні поняття та їхні властивості, та тверджень, істинність яких встановлюється шляхом доведень, опираючись на відомі.

Таку побудову науки називають ***аксіоматичною.*** Її назва походить від слова «аксіома». Це слово грецького походження, що в перекладі українською мовою означає *повага*, *авторитет*, *незаперечна істина*. ***Аксіома*** – це твердження, яке приймається істинним без доведення. Основні властивості найпростіших геометричних фігур, які вважають істинними без доведення і які є вихідними під час доведення інших властивостей, називають ***аксіомами геометрії.***

Для шкільного курсу планіметрії визначено:

1. Основні геометричні фігури (поняття) – *точка*, *пряма*.

(*Точка* – найпростіша геометрична фігура. Усі інші геометричні фігури складаються з точок, у тому числі й *пряма*.)

2. Аксіоми планіметрії – це основні властивості найпростіших геометричних фігур.

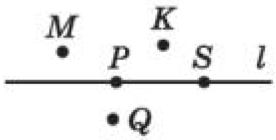
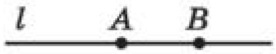
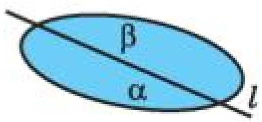
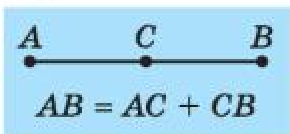
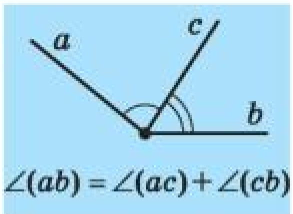
3. Систему означень планіметричних фігур і теорем, що виражають їхні властивості.

До означуваних понять у геометрії відносять поняття відрізка, променя, трикутника тощо, оскільки для них існують пояснення «що це таке?». Означуваних понять багато. Наведемо приклад.

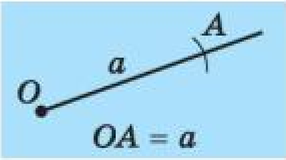
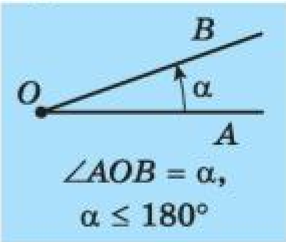
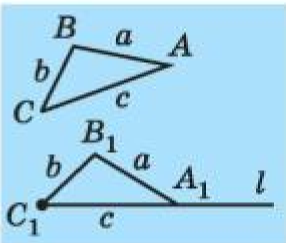
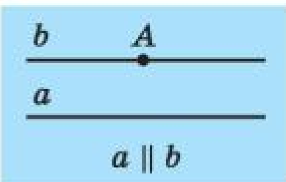
Нехай на прямій a задано дві різні точки A і B. Фігуру, що складається з усіх точок прямої a, які лежать між точками A і B, включаючи точки A і B, називають ***відрізком*** (рис. 1.2). Точки A і B називаються *кінцями* відрізка, а всі інші точки – *внутрішніми точками* відрізка. Таким чином відрізок – означуване поняття.

Рис. 1.2

АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ

№	Назва аксіоми	Зміст аксіоми	Наслідки з аксіом
I	**Аксіоми належності** I_1.  I_2. 	I_1. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй. I_2. Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну	Дві різні прямі або не перетинаються, або перетинаються тільки в одній точці
II	**Аксіоми розміщення** II_1.  II_2. 	II_1. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими. II_2. Пряма розбиває площину на дві півплощини	Якщо кінці будь-якого відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає пряму. Якщо кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму
III	**Аксіоми вимірювання** III_1.  III_2. 	III_1. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою. III_2. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами	Якщо три точки A, B і C лежать на одній прямій, то точка C лежатиме між точками A і B у випадку, коли $AB = AC + CB$. Якщо від даної півпрямої відкласти в одну й ту саму півплощину два кути, то сторона меншого кута, відмінна від даної півпрямої, проходитиме між сторонами більшого кута

Продовження таблиці

№	Назва аксіоми	Зміст аксіоми	Наслідки з аксіом
IV	**Аксіоми відкладання** IV_1. 	IV_1. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини і до того ж тільки один.	Якщо пряма, яка не проходить через жодну з вершин трикутника, перетинає одну з його сторін, то вона перетинає тільки одну з двох інших сторін
	IV_2. 	IV_2. Від будь-якої півпрямої в задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою 180°, і до того ж тільки один.	
	IV_3. 	IV_3. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому, у заданому розміщенні відносно даної півпрямої	
V	**Аксіома паралельності** V_1. 	V_1. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більше як одну пряму, паралельну даній	Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу

Щоб установити правильність твердження про властивості тієї чи іншої геометричної фігури, доводиться висловлювати деякі міркування. Серед цих міркувань є такі, які потребують доведення (*теореми*, *задачі*). Твердження, істинність якого встановлюється шляхом доведення і яке використовується для доведення інших тверджень, називають ***теоремою***. Теорема складається з двох частин: *умови* і *висновку*. Для доведення теорем у шкільному курсі геометрії використовують в основному такі методи (див. § 1.3):

а) по структурі доведення – прямий (аналітичний і синтетичний), від супротивного;

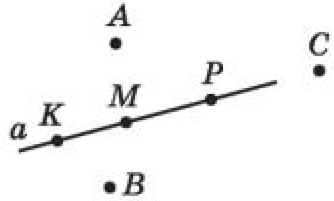
б) по використанню математичного апарату – алгебраїчний, координатний, векторний і т. д.

Усі міркування під час доведення теорем довільним методом опираються на аксіоми та відомі доведені факти. Тобто під час доведення теореми дозволяється користуватися тільки основними властивостями найпростіших фігур (аксіомами) і раніше доведеними властивостями (теоремами). Ніякими іншими властивостями фігур, навіть якщо вони здаються очевидними, користуватися не можна. Наприклад, під час доведення теорем можна користуватися рисунком. Однак це лише геометрична модель змісту тексту, вираженого словами. Тому робити за рисунком висновки про властивості фігур не дозволяється.

Отже, **геометрія, як і інші математичні науки, будується за такою схемою: спочатку потрібно ввести основні поняття, задати аксіоми (*правила гри*), а пізніше, опираючись на аксіоми, виводити інші факти (*проводити гру за визначеними правилами, які є несуперечними між собою*).**

Вправи

1.1°. Виберіть за рисунком два правильні математичні твердження.



А) $A \in a$; Г) $B \notin a$;
Б) $M \notin a$; Д) $C \in a$.
В) $K \notin a$;

1.2°. На одній прямій позначено три точки A, B і C так, що $AB = 2,72$ дм, $BC = 1,38$ дм і $AC = 1,34$ дм. Визначте правильні твердження щодо розміщення однієї точки між двома іншими.

А) $A \in BC$; Б) $B \in AC$; В) $C \in AB$; Г) $C \notin AB$; Д) $B \notin AC$.

1.3°. Відомо, що відрізок AM довший за відрізок BM у 3 рази. Укажіть два математичні твердження, що відповідають тексту задачі.

А) $AM = 3BM$; В) $AM = \frac{1}{3}BM$; Д) $BM = \frac{1}{3}AM$.
Б) $3AM = BM$; Г) $AM + BM = 4AM$;

1.4°. Укажіть два правильні скорочені записи умови задачі: «Відрізок AM коротший за відрізок BM на 2 см».

А) $AM - BM = 2$ см; Г) $AM + 2$ см $= BM$;
Б) $BM - AM = 2$ см; Д) $AM = BM + 2$ см.
В) $AM - 2$ см $= BM$;

1.5°. Знайдіть градусну міру кута AOM, якщо $\angle AOB = 150°$, а $\angle AOM$ у 2 рази більший за $\angle BOM$ (M – внутрішня точка $\angle AOB$).

А) 50°; Б) 100°; В) 75°; Г) 30°; Д) 120°.

1.6°. Знайдіть довжини відрізків AM і BM ($M \in AB$), якщо довжина відрізка AB дорівнює 12 см, а відрізок AM коротший за відрізок BM на 3 см.

А) 1,5 см і 4,5 см; В) 7,5 см і 10,5 см; Д) 5 см і 7 см.
Б) 4,5 см і 7,5 см; Г) 6 см і 9 см;

1.7°°. На одній прямій позначили 21 точку так, що відстань між будь-якими двома сусідніми точками дорівнює 3 см. Знайдіть відстань між крайніми точками.

А) 63 см; Б) 60 см; В) 66 см; Г) 57 см; Д) 54 см.

1.8°°. На відрізку AB завдовжки 42 см позначено точку M відповідно до умов (А–Д). Доберіть до кожної з них правильні твердження (1–6).

А) $AM > BM$ на 2 см;
Б) $AM < BM$ на 6 см;
В) $2AM = BM$;
Г) $AM : BM = 3 : 4$;
Д) $0,5BM = AM$.

1) $AM = 18$ см;
2) $BM = 28$ см;
3) $AM = 22$ см;
4) $BM = 24$ см;
5) $AM = 14$ см;
6) $BM = 20$ см.

А		
Б		
В		
Г		
Д		

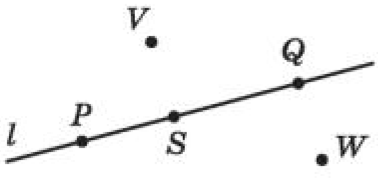
1.9°°. Промінь OA проходить між сторонами кута POM, градусна міра якого дорівнює 160°. Доберіть до кожної умови (А–Д) правильні твердження (1–6).

А) $\angle POA > \angle AOM$ на 40°;
Б) $\angle POA < \angle AOM$ на 60°;
В) $\angle AOM = 0,6\angle POA$;
Г) $\angle POA = 3\angle AOM$;
Д) $\angle AOM : \angle POA = 3 : 5$.

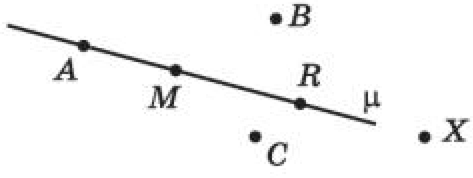
1) $\angle AOM = 110°$;
2) $\angle POA = 120°$;
3) $\angle AOM = 60°$;
4) $\angle POA = 100°$;
5) $\angle AOM = 40°$;
6) $\angle POA = 50°$.

А		
Б		
В		
Г		
Д		

1.10°°. Складіть кілька правильних математичних тверджень до кожного з рисунків.



1)



2)

1.11°°. На промені OX відкладено два відрізки: $OA = 7,3$ см і $OB = 5,8$ см. Визначте довжину відрізка AB.

1.12•. Визначте, яка з трьох точок: A, B, M – лежить між двома іншими.

1) $AM = 3$ см, $AB = 8$ см, $BM = 5$ см;
2) $AM = 7$ см, $BM = 12$ см, $AB = 19$ см;
3) $AM = 27$ см, $BM = 5$ см, $AB = 22$ см;
4) $AM = 9$ см, $BM = 21$ см, $AB = 12$ см;
5) $AM = 21$ см, $BM = 37$ см, $AB = 16$ см;
6) $BM = 18$ см, $AM = 33$ см, $AB = 15$ см.

1.13•. Визначте довжину відрізка KM, якщо точка O розділяє відрізок AB на два відрізки завдовжки 18 см і 14 см, а точки K і M – середини відрізків AO і OB.

1.14•. На відрізку AB завдовжки 48 см позначено точку O. Знайдіть довжини відрізків AO і OB, якщо $AO : OB = 3 : 5$.

1.15•. Знайдіть довжину відрізка MB, якщо точки A, B, C і M лежать на одній прямій, причому $AC = 12$ см, $CB = 5$ см, а M – середина відрізка AC.

1.16•. Промінь OM проходить між сторонами $\angle KOC$, градусна міра якого дорівнює $153°$. Знайдіть кути KOM і MOC, коли відомо, що $\angle KOM$ у 2 рази більший за $\angle MOC$.

1.17•. На відрізку AB завдовжки 75 см позначено дві точки M і K ($M \in AK$, $K \in MB$) так, що відрізок AM на 5 см довший за відрізок MK, а відрізок KB у 2 рази довший за відрізок AM. Знайдіть довжини п'яти утворених відрізків.

1.18••. Промінь, що лежить між сторонами кута, розбиває його на два кути. Доведіть, що бісектриси цих кутів утворюють кут удвічі менший від величини заданого кута.

1.19••. Дано чотири прямі a, b, c і d, причому кожні три з них перетинаються в одній точці. Доведіть, що всі чотири прямі проходять через одну точку.

§ 1.2. Опорні факти курсу планіметрії

Даний параграф призначається для повторення курсу планіметрії. Потреба в ньому зумовлена тим, що багато питань курсу планіметрії на першому етапі навчання у школі розглядаються дещо поверхнево. І хоч у наступних класах рівень вивчення матеріалу підвищується, не завжди вдається повернутися і поглибити раніше вивчені теми. У даному пункті систематизовано та узагальнено основні відомості з планіметрії, які умовно розбиті на блоки: взаємне розміщення прямих на площині; коло і круг; многокутники; трикутник і його елементи; опуклі чотирикутники.

Взаємне розміщення прямих на площині

Дві прямі на площині можуть перетинатися лише в одній точці або не перетинатися, тобто бути паралельними. При перетині двох прямих утворюються ***суміжні*** і ***вертикальні*** кути. Суміжні кути доповнюють один одного до 180°, а вертикальні – рівні. Менший з них називається ***кутом між прямими***. На рисунку 1.3 зображено дві прямі AD і BC, які перетинаються в точці O, утворюючи суміжні та вертикальні кути:

1) $\angle COD$ та $\angle AOB$, $\angle AOC$ та $\angle BOD$ – вертикальні;

2) $\angle AOC$ та $\angle COD$, $\angle COD$ та $\angle DOB$, $\angle AOB$ та $\angle AOC$, $\angle AOB$ та $\angle BOD$ – суміжні.

Якщо один з кутів при перетині двох прямих дорівнює 90°, то всі інші – суміжні та вертикальні кути – також дорівнюють 90°. Такі прямі називають ***взаємно перпендикулярними***. Записують, наприклад, $AD \perp BC$ або $a \perp b$.

Відстанню від точки A до прямої a (рис. 1.4) називають довжину відрізка OA, перпендикулярного до прямої a, де точка O – ***основа перпендикуляра***. Відстань від точки A до будь-якої точки прямої a, відмінної від точки O, більша за відстань від точки A до прямої a. Тобто будь-який відрізок AX, де X – точка прямої a, відмінна від точки O, довший за відрізок AO.

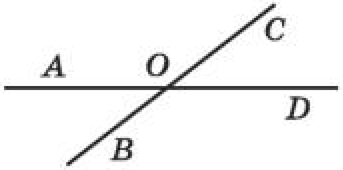


Рис. 1.3

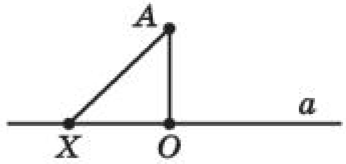


Рис. 1.4

Дві різні прямі a і b, які лежать в одній площині, називаються *паралельними*, якщо вони не мають жодної спільної точки. Коротко записують $a \parallel b$. Якщо прямі не паралельні ($a \nparallel b$), то вони перетинаються ($a \cap b = A$).

Унаслідок перетину двох прямих третьою прямою утворюються вісім кутів (рис. 1.5) (прямі a і b можуть перетинатися, але пряма c через їхню точку перетину не проходить):

- внутрішні односторонні (кути *4* і *5*, *3* і *6*);
- внутрішні різносторонні (кути *3* і *5*, *4* і *6*);
- зовнішні односторонні (кути *1* і *8*, *2* і *7*);
- зовнішні різносторонні (кути *1* і *7*, *2* і *8*);
- відповідні кути (кути *1* і *5*, *2* і *6*, *8* і *4*, *7* і *3*).

Ознаки паралельності прямих:

1) Якщо при перетині двох прямих a і b третьою прямою внутрішні (або зовнішні) різносторонні кути рівні або внутрішні односторонні в сумі становлять 180°, то a і b – паралельні.

2) Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.

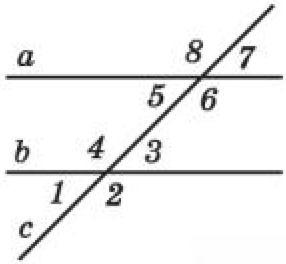


Рис. 1.5

Теорема Фалеса.
Якщо на одній стороні кута відкласти кілька рівних відрізків і через їхні кінці провести паралельні прямі, що перетинають другу сторону кута, то вони відітнуть на другій стороні теж рівні відрізки. Наприклад, якщо $AA_1 \parallel BB_1$, причому $OA = AB$, то $OA_1 = A_1B_1$ (рис. 1.6).

Коло і круг

Круг і коло ми зустрічаємо повсюди. ***Кругом*** з центром O і радіусом R називають фігуру, яка утворена всіма точками площини, які віддалені від точки O на відстань, не більшу за R. **Круг обмежений колом.** ***Колом*** із центром O і радіусом R називають множину точок площини, віддалених від точки O на відстань, що дорівнює R (рис. 1.7, *а*). Відрізки, що з'єднують центр з точками кола та мають довжину R, називають ***радіусами*** кола (круга).

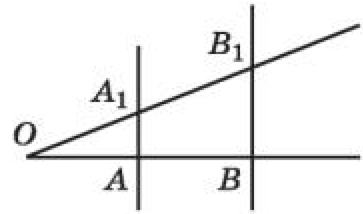


Рис. 1.6

Частини круга, на які він ділиться двома радіусами, називають ***круговими секторами*** (рис. 1.7, б).

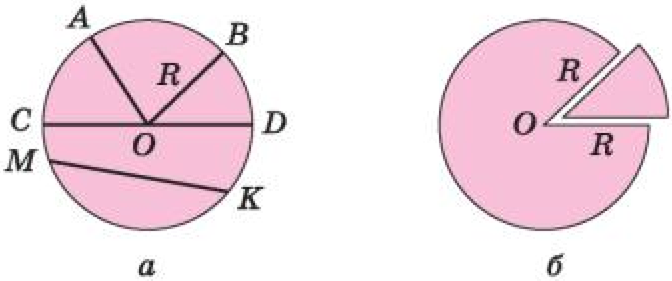


Рис. 1.7

Хорда – відрізок, що з'єднує дві точки кола (MK), ділить круг на два ***сегменти***, а коло – на дві дуги. ***Діаметр*** – найбільша хорда кола (CD).

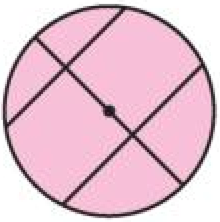
Через три точки, що не лежать на одній прямій, проходить єдине коло. Діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить навпіл цю хорду і обидві дуги, які стягуються нею, і навпаки, якщо діаметр проведено через середину хорди, то він перпендикулярний до неї і ділить навпіл дугу, яку стягує ця хорда (рис. 1.8, *а*).

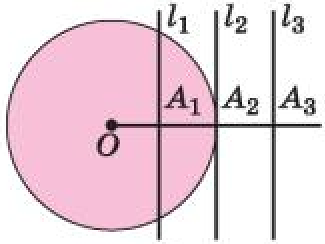
Дуги, що містяться між паралельними хордами, рівні між собою. Рівні дуги стягуються рівними хордами, і навпаки, рівні хорди стягують рівні дуги.

Рівні хорди однаково віддалені від центра, і навпаки, хорди, однаково віддалені від центра, рівні між собою. Більша з двох хорд менше віддалена від центра, і навпаки, з двох хорд більша та, яка менше віддалена від центра (рис. 1.8, *а*).

Яке розміщення може мати пряма з колом?

Розглянемо коло із центром O і пряму l (рис. 1.8, *б*). З точки O проведемо перпендикуляр до прямої l. Нехай A – основа цього перпендикуляра. Можливі три випадки: точка A міститься поза колом (A_3), на колі (A_2) і всередині кола (A_1). У кожному із цих випадків коло і пряма l або не мають спільних точок, або мають одну спільну точку A_2 (l_2 – *дотична до кола*), або мають дві спільні точки (l_1 – *січна*).





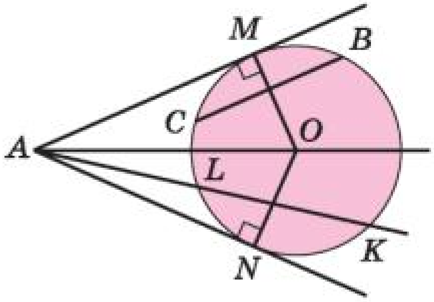


Рис. 1.8

Пряма, що проходить через точку кола, є **дотичною до кола** тоді і тільки тоді, коли вона перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку. Якщо дотична паралельна хорді кола, то точка дотику ділить навпіл дугу, яку стягує хорда (рис. 1.8, *в*; $AM \parallel CB$, $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{MB}$).

Якщо з однієї точки до кола проведено дві дотичні, то відрізки цих дотичних (від точок дотику до даної точки) рівні між собою, а промінь, проведений через дану точку і центр кола, ділить навпіл кут між дотичними (рис. 1.8, *в*; $AM = AN$, $\angle MAO = \angle OAN$).

Вписаним кутом у коло називають кут, утворений двома хордами, що виходять з однієї точки на колі (рис. 1.9). Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається. Вписані кути, що спираються на одну дугу, між собою рівні. Вписаний кут, що спирається на півколо (на діаметр), – прямий.

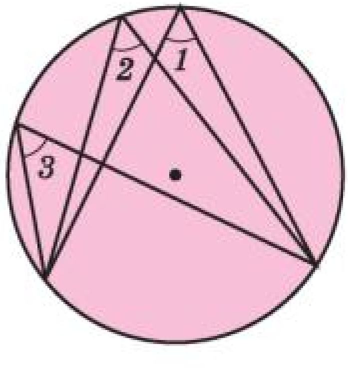


Рис. 1.9

Кут з вершиною у центрі кола називається ***центральним кутом***. Центральний кут, сторони якого перетинають коло в тих самих точках, що і вписаний, називається відповідним центральним кутом до вписаного (рис. 1.10). Міра ***вписаного*** кута дорівнює половині міри відповідного центрального або доповнює його половину до 180°. Кут, утворений хордою і дотичною, яка проходить через кінець хорди, вимірюється половиною дуги, що міститься між сторонами цього кута (рис. 1.11); $\angle MAN = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MA}$. Кут, утворений двома хордами, що перетинаються всередині кола, вимірюється півсумою двох дуг, одна з яких міститься між сторонами цього кута, а друга – між продовженнями цих сторін.

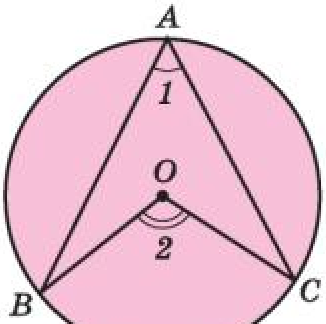


Рис. 1.10

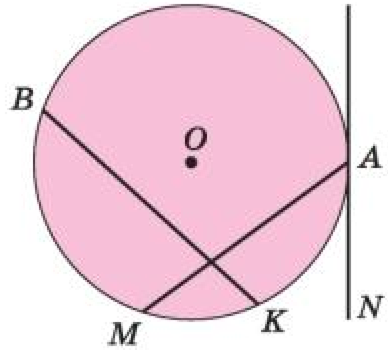


Рис. 1.11

Кут, утворений двома дотичними, називається ***описаним*** (рис. 1.8, *в*; $\angle MAN$). Описаний кут вимірюється піврізницею двох дуг, що містяться між його сторонами $\left(\angle MAN = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MBN} - \overset{\frown}{MCN})\right)$.

Довжину кола знаходять за формулою: $C = \pi d = 2\pi R$, де d – діаметр кола, R – радіус кола, а довжину дуги кола – за формулою: $l = \frac{\pi R\alpha}{180}$, де α – градусна міра відповідного центрального кута. Площа круга: $S = \pi R^2 = \frac{CR}{2}$, площа кругового сектора: $S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha$, де R – радіус круга, α – градусна міра відповідного центрального кута. Площа сегмента: $S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_\Delta$, де α – градусна міра центрального кута, який містить дугу цього кругового сегмента, а S_Δ – площа трикутника з вершинами в центрі круга та на кінцях радіусів, що обмежують відповідний сектор. Знак «−» треба брати, коли $\alpha < 180°$, а знак « + » – коли $\alpha > 180°$.

Многокутники

Многокутником називається проста замкнена ламана. Наприклад, ***многокутником*** $A_1A_2...A_n$ називається лінія, яку отримують при послідовному сполученні n різних точок A_1, A_2, ..., A_n відрізками так, щоб кожна точка була сполучена з наступною, а остання з першою (рис. 1.12). Розрізняють многокутники плоскі й неплоскі. ***Плоский многокутник*** – частина площини, обмежена многокутником.

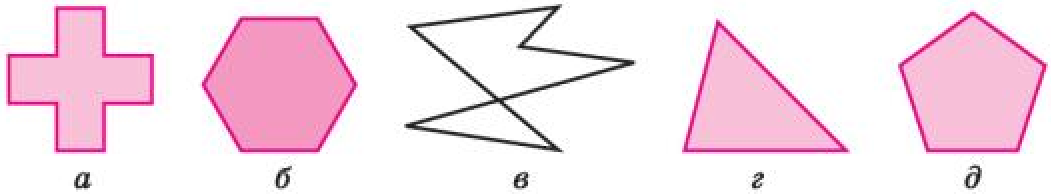


Рис. 1.12

Многокутник може бути опуклий або не опуклий. Многокутник ***опуклий***, якщо він лежить в одній півплощині відносно кожної прямої, що проходить через дві його сусідні вершини (рис. 1.12, *б*, *г*, *д*).

Многокутники називають ***рівними***, якщо вони при накладанні суміщаються. Для опуклого n-кутника сума внутрішніх кутів дорівнює $180°(n-2)$, а кількість діагоналей будь-якого n-кутника дорівнює $\frac{n(n-3)}{2}$. Якщо всі сторони опуклого многокутника рівні між собою і всі кути теж рівні між собою, то його називають ***правильним*** (рис. 1.12, *д*). Якщо всі вершини многокутника лежать на деякому колі, то він називається ***вписаним*** у це коло (рис. 1.13, *а*). Якщо всі сторони многокутника дотикаються до деякого кола, то він називається ***описаним навколо кола*** (рис. 1.13, *б*). За кількістю сторін n-кутника йому дають назву. Наприклад, трикутник ($n = 3$), чотирикутник ($n = 4$), п'ятикутник ($n = 5$) і т. д.

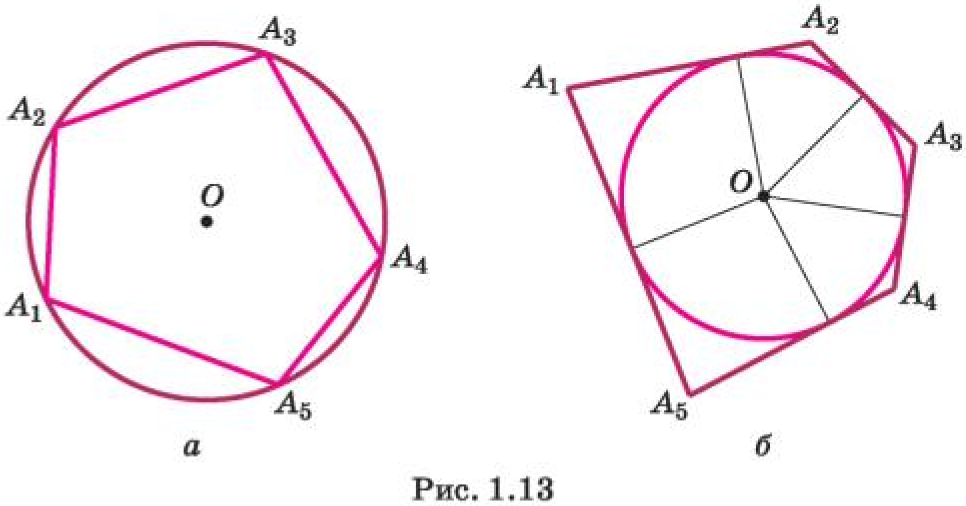


Рис. 1.13

Як побудувати правильний n-кутник?

Якщо коло поділити на n рівних частин і точки послідовно сполучити відрізками, то дістанемо правильний n-кутник, вписаний у коло (рис. 1.14).

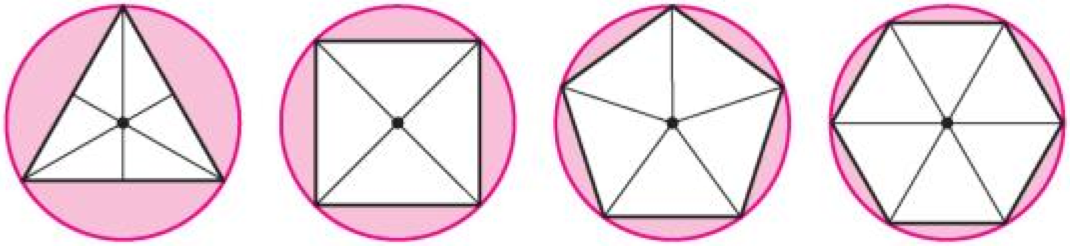


Рис. 1.14

Якщо коло поділити на n рівних частин і через точки поділу провести дотичні до кола, то відрізки цих дотичних утворять правильний n-кутник, описаний навколо кола (рис. 1.15).

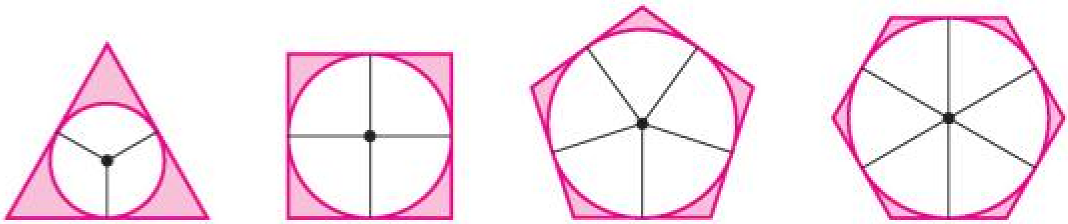


Рис. 1.15

Навколо кожного правильного многокутника можна описати коло або в кожний правильний многокутник можна вписати коло.

У правильному многокутнику центри описаного і вписаного кіл збігаються. Спільний центр описаного і вписаного кіл називається *центром* правильного многокутника. Радіус вписаного кола називають *апофемою* правильного многокутника.

Кут, утворений двома радіусами, проведеними через суміжні вершини правильного многокутника, називається його *центральним кутом*. Усі центральні кути правильного многокутника рівні між собою, вони дорівнюють $\frac{360°}{n}$, де n – кількість сторін (кутів) многокутника.

У правильному n-кутнику, як і в довільному n-кутнику, сума всіх кутів (внутрішніх) становить $180°(n-2)$. Тому кожний його кут визначається за формулою $\frac{180°(n-2)}{n}$.

Коло, вписане в правильний многокутник, дотикається до його сторін в їхніх серединах. Центр кола, вписаного в правильний многокутник, є точкою перетину серединних перпендикулярів до його сторін (рис. 1.15).

Якщо сторона правильного многокутника дорівнює a, радіус вписаного в нього кола – r, а радіус описаного навколо нього кола – R, то між ними існує взаємозв'язок, що виражається формулами:

$$r = \frac{a}{2\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}, \ R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}.$$

Якщо $n = 3$ (правильний трикутник), то:

$$r = \frac{a}{2\mathrm{tg}60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \ R = \frac{a}{2\sin60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Якщо $n = 4$ (правильний чотирикутник), то:

$$r = \frac{a}{2\mathrm{tg}45^\circ} = \frac{a}{2}, \ R = \frac{a}{2\sin45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Якщо $n = 6$ (правильний шестикутник), то:

$$r = \frac{a}{2\mathrm{tg}30^\circ} = \frac{a}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \ R = \frac{a}{2\sin30^\circ} = a.$$

Найпростішим многокутником є трикутник. У будь-який трикутник можна вписати коло, причому тільки одне. На рисунку 1.16, *а* зображено коло із центром O, вписане в трикутник ABC, $r = OM$ – його радіус. Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис і знаходиться всередині трикутника. Оскільки площу трикутника знаходять за формулою $S_\triangle = pr$, де p – півпериметр трикутника, то звідси $r = \frac{S_\triangle}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, де a, b, c – сторони трикутника. Центр кола, вписаного в трикутник, рівновіддалений від його сторін.

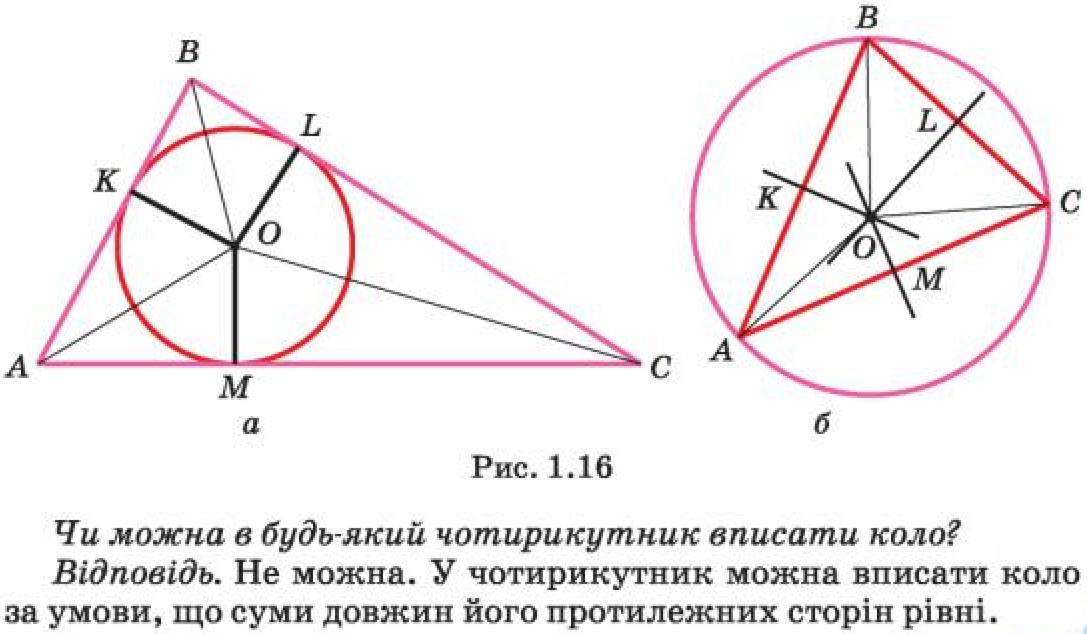


Рис. 1.16

Чи можна в будь-який чотирикутник вписати коло?

Відповідь. Не можна. У чотирикутник можна вписати коло за умови, що суми довжин його протилежних сторін рівні.

Навколо довільного трикутника можна описати коло, причому тільки одне (рис. 1.16, *б*). Центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів, проведених до його сторін. Центр кола O, описаного навколо трикутника ABC, рівновіддалений від його вершин.

На рисунку 1.16, *б* зображено коло із центром O, описане навколо трикутника ABC, $R = OA$ – його радіус. Якщо радіус описаного кола R, сторони трикутника, вписаного в коло, a, b і c, то $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, де p – півпериметр трикутника.

Чи можна описати коло навколо довільного чотирикутника?

Відповідь. Не можна. Навколо чотирикутника можна описати коло тільки тоді, коли суми протилежних кутів дорівнюють 180°.

Трикутник і його елементи

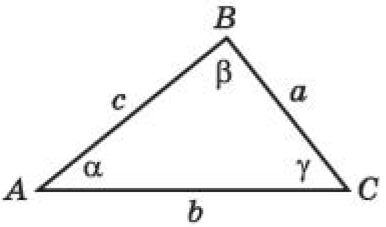


Рис. 1.17

Трикутником називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що попарно сполучають ці точки. Розглянемо $\triangle ABC$ (рис. 1.17), у якому виділяють шість основних елементів: три внутрішні кути α, β, γ і три відповідно протилежні їм сторони a, b, c.

Трикутник називається ***тупокутним***, ***прямокутним*** або ***гострокутним***, якщо його найбільший внутрішній кут відповідно більший, дорівнює або менший за 90°.

Трикутник називається ***рівнобедреним***, якщо в нього дві сторони рівні (бічні сторони). Основою рівнобедреного трикутника є та сторона, яка не дорівнює жодній з інших двох рівних сторін.

Трикутник, усі сторони якого рівні, називається ***рівностороннім***, або ***правильним***.

Співвідношення між сторонами і кутами трикутника:

- проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки;
- проти рівних сторін лежать рівні кути;
- теорема синусів: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$;
- теорема косинусів: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ (квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними).

Трикутник можна визначити будь-якою трійкою таких основних елементів: або двома сторонами і кутом між ними, або однією стороною і двома кутами, або трьома сторонами. Наприклад, $\triangle ABC$ зі сторонами a, b, c можна задати так:

1) a, b і C; b, c і A; a, c і B;
2) a, B і C; b, A і C; c, A і B;
3) a, b і c.

Співвідношення між внутрішніми і зовнішніми кутами трикутника: будь-який зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.

З трьох відрізків можна утворити трикутник тоді і тільки тоді, коли будь-яка його сторона більша за різницю і менша за суму двох інших його сторін. У будь-якому трикутнику можна провести три медіани, три бісектриси і три висоти.

Властивості бісектриси кута трикутника: *бісектриси* трикутника перетинаються в одній точці, яка лежить усередині трикутника і є центром вписаного в трикутник кола. Бісектриса ділить протилежну сторону на частини, пропорційні прилеглим до неї сторонам (рис. 1.18; BL – бісектриса, $AL : LC = AB : BC$).

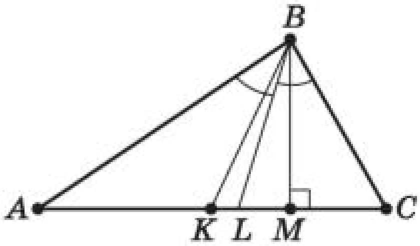


Рис. 1.18

Основні властивості медіан трикутника:

1. Медіани трикутника перетинаються в одній точці, що лежить усередині трикутника.
2. Медіани трикутника точкою їхнього перетину діляться у відношенні 2 : 1 (рахуючи від вершин трикутника).
3. Медіана ділить трикутник на два трикутники, площі яких рівні (рис. 1.18; BK – медіана, $S_{\triangle ABK} = S_{\triangle KBC}$).
4. Три медіани трикутника ділять трикутник на шість трикутників, площі яких рівні.

Прямі, на яких лежать ***висоти*** трикутника, перетинаються в одній точці – ***ортоцентрі*** трикутника, яка може міститися у внутрішній або зовнішній області трикутника. Висоти трикутника, проведені до сторін трикутника a, b і c, позначаються h_a, h_b і h_c відповідно. Висота трикутника h_a визначається через сторони трикутника за формулою:

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

де $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Медіана трикутника m_a, проведена до сторони a, визначається через сторони трикутника за формулою:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

У кожному трикутнику можна побудувати три ***середні лінії*** – відрізки, які сполучають середини двох сторін трикутника. Середня лінія трикутника паралельна третій стороні трикутника та дорівнює її половині. Середня лінія трикутника відтинає від трикутника подібний трикутник. Площа меншого трикутника відноситься до площі основного трикутника як 1 : 4.

Властивості рівнобедреного трикутника: кути при основі трикутника рівні; висота, проведена до основи, є також бісектрисою і медіаною.

Властивості рівностороннього трикутника: усі кути рівні (кожний кут дорівнює 60°); кожна з трьох його висот є також бісектрисою і медіаною; центр кола, описаного навколо трикутника, збігається із центром кола, вписаного в нього.

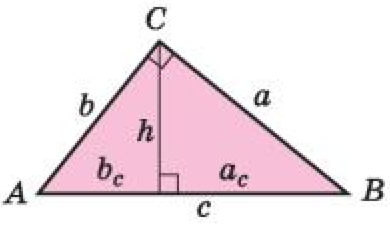


Рис. 1.19

Прямокутний трикутник має сторону, яка лежить проти прямого кута, – ***гіпотенузу*** (c) та дві сторони, які утворюють прямий кут, – ***катети*** (a і b) (рис. 1.19). Сторони прямокутного трикутника a, b і c (c – гіпотенуза) зв'язані між собою співвідношенням, що називається теоремою Піфагора: $c^2 = a^2 + b^2$. Воно читається так: ***квадрат довжини гіпотенузи дорівнює сумі квадратів довжин катетів.***

Властивості прямокутного трикутника:

1) Катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу: $b^2 = b_c \cdot c$ і $a^2 = a_c \cdot c$ (рис. 1.19).

2) Висота, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу: $h^2 = b_c \cdot a_c$.

3) Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, лежить на середині гіпотенузи.

4) Для сторін прямокутного трикутника істинні відношення: $\sin A = \dfrac{CB}{AB}$, $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$.

Запам'ятайте!

α	30°	45°	60°	***Вказівка для кращого запам'ятовування***: 1) запишіть риски дробів для кожного значення виразу $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ та знаменники, що дорівнюють 2; 2) запишіть у чисельниках числа: 1, 2, 3 (для $\sin\alpha$) і, навпаки: 3, 2, 1 (для $\cos\alpha$); 3) допишіть знак радикала до кожного чисельника дробу. Враховуючи те, що $\sqrt{1} = 1$, отримуємо заповнену таблицю
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Опуклі чотирикутники

Чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні, називається ***паралелограмом***.

Властивості паралелограма:

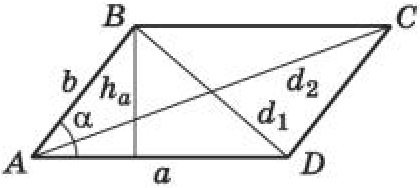


Рис. 1.20

1) Середина діагоналі паралелограма є його центром симетрії.

2) Протилежні сторони паралелограма рівні.

3) Протилежні кути паралелограма рівні.

4) Кожна діагональ паралелограма ділить його на два рівні трикутники.

5) Діагоналі паралелограма діляться точкою перетину навпіл.

6) Сума квадратів діагоналей паралелограма (d_1 і d_2) дорівнює сумі квадратів усіх його сторін:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Щоб довести, що деякий заданий чотирикутник є паралелограмом, треба, згідно з означенням, переконатися в паралельності його протилежних сторін. Інколи такі міркування є громіздкими, а інколи – зайвими. Існують інші доведені ознаки, на підставі яких можна стверджувати, що даний чотирикутник є справді паралелограмом.

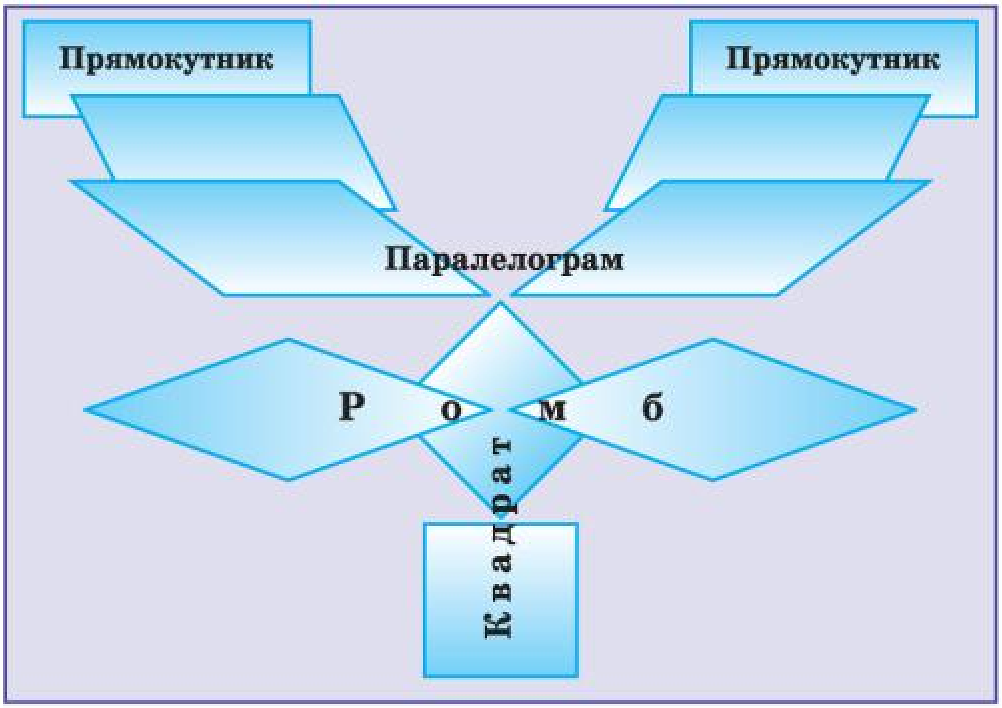
Якщо в чотирикутнику справджується будь-яка з таких умов: 1) протилежні сторони попарно рівні; 2) дві протилежні сторони рівні і паралельні; 3) протилежні кути попарно рівні; 4) діагоналі в точці перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник є паралелограмом.

Прямокутник – це паралелограм, у якому всі кути рівні. Оскільки сума кутів чотирикутника дорівнює $180°(4 - 2) = 360°$, то в прямокутнику всі кути прямі. Прямокутник має всі властивості паралелограма. Крім того, він має ще одну властивість: ***діагоналі прямокутника рівні між собою.***

Для прямокутника справджується і обернена теорема про те, що коли в паралелограмі діагоналі рівні, то такий паралелограм є прямокутником. Ця теорема є ознакою прямокутника.

Ромб – це паралелограм, у якому всі сторони рівні. Крім загальних властивостей паралелограма, ромб має ще й інші властивості, характерні лише для нього.

Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і ділять його кути навпіл. Справджується і обернена теорема, яка є ознакою ромба: якщо в паралелограмі діагоналі взаємно перпендикулярні або якщо в ньому діагоналі ділять кути навпіл, то такий паралелограм – ромб.



Квадрат – це паралелограм, у якому всі кути рівні і всі сторони рівні. Отже, квадрат – це прямокутник з рівними сторонами або квадрат – це ромб з рівними кутами (прямими). Очевидно, що квадрат має всі властивості прямокутника і ромба.

Трапеція – це чотирикутник, у якому тільки дві протилежні сторони паралельні. Ці паралельні сторони називаються ***основами*** трапеції, дві інші сторони – ***бічними сторонами***.

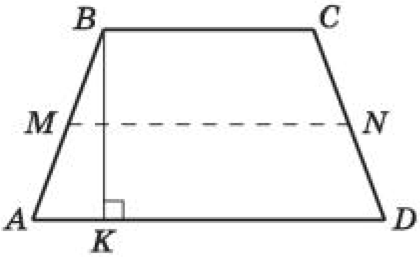


Рис. 1.21

Якщо бічні сторони трапеції рівні між собою, то таку трапецію називають ***рівнобічною*** (рис. 1.21, $AB = CD$).

Рівнобічна трапеція має такі властивості:

1) Кути, прилеглі до основи рівнобічної трапеції, рівні. Справджується і обернене твердження: якщо кути, прилеглі до основи трапеції, рівні, то така трапеція рівнобічна.

2) Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

3) Сума протилежних кутів рівнобічної трапеції дорівнює 180°.

Відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції, називається її ***середньою лінією*** (рис. 1.21, MN – середня лінія, $AM = MB$, $CN = ND$).

Середня лінія трапеції паралельна її основам і дорівнює їхній півсумі (рис. 1.21, $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$).

Вправи

1.20°. При перетині прямих a і b утворилося чотири кути (рис. 1.22, *а*). Задайте кожній з умов (А–Д) можливий наслідок (1–5).

А) $\angle 1 = \angle 3$; 1) $\angle 3 = \angle 4 = 90°$;
Б) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$; 2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90°$;
В) $\angle 1 = \angle 2 = 90°$; 3) $\angle 1$ і $\angle 4$ – суміжні;
Г) $\angle 2 + \angle 4 = 260°$; 4) $\angle 1$ і $\angle 3$ – гострі;
Д) $\angle 3 = 90°$. 5) $\angle 2$ і $\angle 4$ – вертикальні.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

1.21°. Умовами (1–7) указано градусну міру деяких кутів. Виберіть серед них ті, які можуть бути суміжними.

1) 18°; 2) 72°; 3) 128°; 4) 62°; 5) 28°; 6) 108°; 7) 38°.

А) 1 і 2; Б) 2 і 6; В) 3 і 4; Г) 1 і 7; Д) 2 і 5.

1.22°. Виберіть правильний висновок, коли відомо, що $\angle 1 = \angle 7$ (рис. 1.22, *б*).

А) $a \parallel b$; Б) $a \perp b$; В) $a \cap b$.

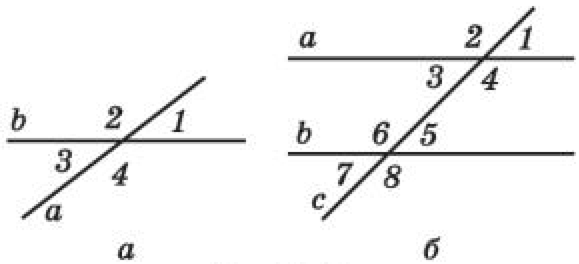


Рис. 1.22

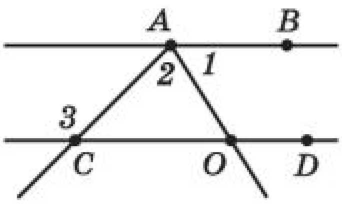


Рис. 1.23

1.23°°. Знайдіть градусну міру $\angle 3$ (рис. 1.23), якщо $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 2 = 72°$.

А) 72°; Б) 144°; В) 108°; Г) 36°; Д) 124°.

1.24°. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута KMN трикутника KMZ (рис. 1.24).

А) 135°; В) 108°; Д) 45°.
Б) 125°; Г) 117°;

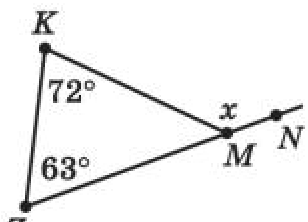


Рис. 1.24

1.25°. Знайдіть градусну міру кута між бісектрисою кута при вершині рівнобедреного трикутника та його бічною стороною, якщо кути трикутника ABC відносяться як 3 : 4 : 3.

А) 18°; Б) 36°; В) 72°; Г) 60°; Д) 30°.

1.26°. Визначте правильні рівності (рис. 1.25).

А) $\triangle ABO = \triangle OCD$; В) $BA = CD$; Д) $\angle BAO = \angle DCO$;
Б) $\triangle AOB = \triangle COD$; Г) $\angle AOB = \angle DOC$; Е) $\angle BAO = \angle CDO$.

1.27°. Знайдіть кути трикутника BOC (рис. 1.26).

А) 48°, 48°, 84°; В) 24°, 132°, 24°; Д) 48°, 132°, 20°.
Б) 132°, 48°, 48°; Г) 42°, 90°, 48°;

1.28°. Ідентифікуйте кожному шестикутнику периметра P коло радіуса R, описане навколо нього.

А) $P = 42$ см; 1) $R = 2$ см;
Б) $P = 12$ см; 2) $R = 8$ см;
В) $P = 84$ см; 3) $R = 6$ см;
Г) $P = 48$ см; 4) $R = 14$ см;
Д) $P = 36$ см. 5) $R = 7$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

1.29°. Обчисліть периметр трикутника з вершинами в центрах трьох кіл з радіусами 6 см, 7 см і 8 см, що попарно дотикаються зовні (рис. 1.27).

А) 28 см; Б) 29 см; В) 27 см; Г) 42 см; Д) 21 см.

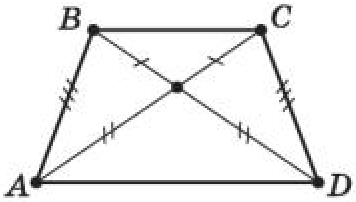


Рис. 1.25

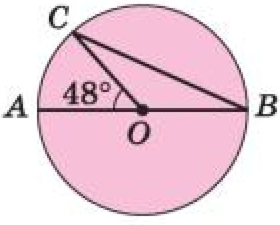


Рис. 1.26

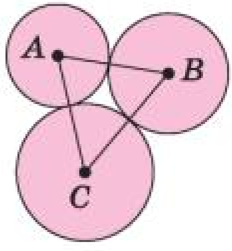


Рис. 1.27

1.30°. Виберіть вирази, якими визначаються радіус вписаного кола в правильний трикутник зі стороною a та радіус описаного навколо нього кола:

1) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{a}{2}$; 5) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

А) 1 і 2; Б) 2 і 3; В) 3 і 4; Г) 4 і 5; Д) 1 і 5.

1.31°. Знайдіть діаметр кола, якщо пряма a є дотичною до нього, A – точка дотику, $OB = 12$ см та утворює з дотичною кут 30° (рис. 1.28).

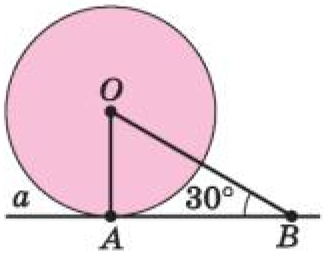


Рис. 1.28

А) 24 см; Б) 12 см; В) 6 см; Г) 18 см; Д) 4 см.

1.32°. Сторона квадрата дорівнює $20\sqrt{2}$ см. Укажіть довжину радіуса кола, вписаного в цей квадрат.

А) 20 см; Б) $10\sqrt{2}$ см; В) 10 см; Г) $5\sqrt{2}$ см; Д) 5 см.

1.33°. Одна з основ трапеції на 8 см більша за іншу, а середня лінія трапеції дорівнює 10 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

А) 2 см; Б) 4 см; В) 6 см; Г) 8 см; Д) 10 см.

1.34°. Обчисліть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 10 см і 36 см.

А) 90 см^2; Б) 92 см^2; В) 180 см^2; Г) 184 см^2; Д) 360 см^2.

1.35°°. Знайдіть кут між прямими a і b, якщо прямі m і n паралельні (рис. 1.29).

А) 50°; Б) 80°; В) 100°; Г) 65°; Д) 115°.

1.36°°. Визначте довжини радіусів двох кіл, що дотикаються зовні, якщо відстань між їхніми центрами 18 см, а довжина одного з них становить 50 % довжини іншого.

А) 9 см і 6 см; В) 12 см і 6 см; Д) 24 см і 12 см.
Б) 10 см і 8 см; Г) 14 см і 4 см;

1.37°°. Укажіть вираз, що визначає довжину кола, яке обмежує круг площею 9π см^2.

А) 3π см; Б) 9π см; В) 12π см; Г) 18π см; Д) 6π см.

1.38°°. Знайдіть площу круга, вписаного у квадрат зі стороною 6 см.

А) 9π см^2; В) 36π см^2; Д) 18π см^2.
Б) 144π см^2; Г) 72π см^2;

1.39°°. Знайдіть площу трикутника (рис. 1.30) (довжини відрізків наведені в сантиметрах).

А) 6 см^2; Б) 9 см^2; В) 12 см^2; Г) 24 см^2; Д) 30 см^2.

1.40°°. Визначте периметр рівнобедреного трикутника, якщо точка дотику вписаного в нього кола ділить його бічну сторону на відрізки 6 см і 5 см. Виберіть правильну комбінацію можливих відповідей.

1) 21 см; 2) 32 см; 3) 23 см; 4) 34 см; 5) 33 см.
А) 1 або 2; Б) 2 або 4; В) 2 або 3; Г) 3 або 5; Д) 4 або 5.

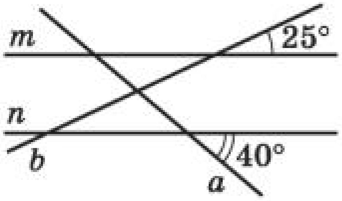


Рис. 1.29

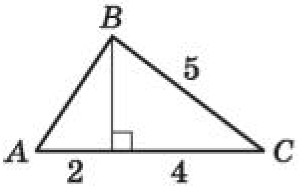


Рис. 1.30

1.41°°. Знайдіть сторону BC трикутника ABC, вписаного в коло радіуса R (рис. 1.31).

А) R; Б) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$; В) $R\sqrt{2}$; Г) $R\sqrt{3}$; Д) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

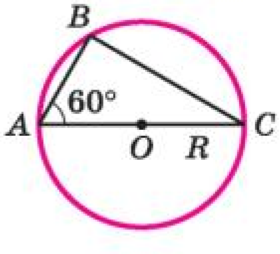


Рис. 1.31

1.42°°. Ідентифікуйте парами сторону правильного трикутника a та радіус r вписаного в нього кола.

А) $a = 18$ см;
Б) $a = 9\sqrt{3}$ см;
В) $a = 30$ см;
Г) $a = 24$ см;
Д) $a = 15\sqrt{3}$ см.

1) $r = 4\sqrt{3}$ см;
2) $r = 7{,}5$ см;
3) $r = 4{,}5$ см;
4) $r = 3\sqrt{3}$ см;
5) $r = 5\sqrt{3}$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

1.43°°. Радіус кола, вписаного в квадрат, дорівнює 5 см. Знайдіть діагональ квадрата.

А) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ см; Б) $5\sqrt{2}$ см; В) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ см; Г) $10\sqrt{2}$ см; Д) $20\sqrt{3}$ см.

1.44°°. На рисунку 1.32 зображено два трикутники ABC і CDM, сторони яких AB і MD – паралельні. Знайдіть довжину відрізка AD, якщо $MD = \frac{1}{3}AB$, $CD = 1{,}5$ см.

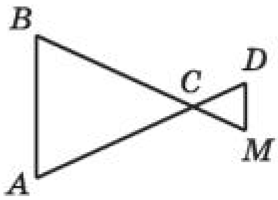


Рис. 1.32

А) 3 см; В) 6 см; Д) 9 см.
Б) 4,5 см; Г) 7,5 см;

1.45°°. Укажіть кількість сторін правильного многокутника, внутрішній кут якого дорівнює 160°.

А) 12; Б) 14; В) 16; Г) 18; Д) 20.

1.46°°. Знайдіть периметр ромба, діагоналі якого дорівнюють 24 см і 18 см.

А) 120 см; Б) 60 см; В) 84 см; Г) 108 см; Д) 144 см.

1.47°°. Відомо, що периметр паралелограма дорівнює 48 см, а одна з його сторін на 8 см довша за іншу. Знайдіть меншу сторону паралелограма.

А) 8 см; Б) 16 см; В) 6 см; Г) 12 см; Д) 10 см.

1.48°°. Зовні рівнобедреного трикутника ABC побудували два рівні кути ABM і CBK, сторони яких перетнули продовження основи AC відповідно у точках M і K. Доведіть рівність трикутників MBC і KBA (рис. 1.33, *а*).

1.49°°. З точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди довжиною 5 см і 12 см. Знайдіть відстань між кінцями хорд.

1.50•. Визначте взаємне розміщення прямих AB і CD за даними рисунка 1.33, *б*. Відповідь обґрунтуйте.

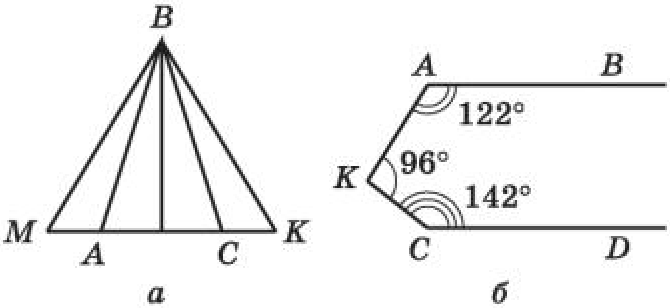


Рис. 1.33

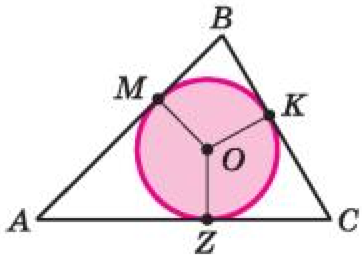


Рис. 1.34

1.51•. У трикутник ABC вписано коло (рис. 1.34), точки дотику якого M, Z поділяють дві його сторони AB і AC на відрізки, різниця яких відповідно дорівнює 3 см і 4 см ($AM > MB$, $AZ > ZC$). Знайдіть сторони трикутника ABC, якщо його периметр дорівнює 28 см.

1.52•. Навколо рівностороннього трикутника описано коло, радіус якого дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Обчисліть радіус вписаного кола.

1.53•. Навколо кола описано рівнобічну трапецію, кут при основі якої дорівнює 30°. Висота трапеції – 7 см. Знайдіть довжину середньої лінії трапеції.

1.54•. Навколо кола описано рівнобічну трапецію, кут при основі якої дорівнює 150°. Середня лінія трапеції дорівнює $16\sqrt{3}$ см. Знайдіть довжину висоти трапеції.

1.55•. Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 16 см, а висота, проведена до неї, – 15 см.

1.56•. Висота AM трикутника ABC ділить його сторону BC на відрізки BM і MC. Знайдіть довжину відрізка MC, якщо $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AB = 26$ см, $\angle B = 45°$.

1.57•. Сторона ромба дорівнює 10 см, а одна з діагоналей – 12 см. Знайдіть радіус вписаного в ромб кола.

1.58•. У колі радіуса 15 см на відстані 12 см від його центра проведено хорду. Знайдіть довжину цієї хорди.

1.59•. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону на відрізки 6 см і 10 см, рахуючи від вершини гострого кута. Обчисліть площу паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 60°.

1.60••. У колі проведено дві хорди, що перетинаються. Одна з них точкою перетину ділиться навпіл, а друга – на частини завдовжки 5 см і 20 см. Знайдіть довжину кожної хорди.

1.61••. З точки поза колом проведено січну і дотичну. Знайдіть довжину дотичної, якщо вона на 5 см більша від зовнішньої частини і на стільки само менша від внутрішньої частини січної.

1.62••. З точки поза колом проведено січну і дотичну, сума довжин яких дорівнює 15 см, а зовнішня частина січної на 2 см менша від дотичної. Знайдіть довжини січної і дотичної.

1.63••. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 6 см і 9 см.

1.64••. У прямокутній трапеції менша основа дорівнює 8 см, а менша бічна сторона – $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 120°.

1.65••. Навколо трапеції, основи якої дорівнюють 40 см і 14 см, а висота – 39 см, описано коло. Знайдіть його радіус.

1.66••. 1) Діагоналі трапеції дорівнюють 20 см і 15 см, висота – 12 см. Обчисліть площу трапеції.

2) Діагоналі трапеції дорівнюють 30 см і 26 см, а висота – 24 см. Обчисліть площу трапеції.

1.67••. Більша діагональ ромба дорівнює 24 см, а радіус вписаного кола – 6 см. Обчисліть площу ромба.

1.68••. Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 25 см і 28 см. Коло з центром на найбільшій стороні дотикається до двох інших сторін. Обчисліть площу круга.

1.69••. Знайдіть площу паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 6 см і 4 см, а кут між діагоналями – 60°.

§ 1.3. Задачі і методи їх розв'язування

Для геометрії закономірним є те, що введені основні поняття та сформульована аксіоматика складають основу для зародження нових тверджень. Однак їхню істинність потрібно доводити шляхом певних міркувань, які опираються на раніше доведені твердження або аксіоми. Їх називають *математичними задачами*.

Що таке математична задача?

Існують різні означення цього поняття, наприклад, ***математична задача*** – це будь-яка вимога обчислити, побудувати, довести або дослідити що-небудь, або запитання, рівносильне даній вимозі.

У кожній задачі щось дано (умова) і щось треба довести чи знайти (вимога, висновок). Виконати поставлену вимогу – це й означає розв'язати задачу. Зауважимо, що якщо істинність певного, часто застосовуваного математичного твердження встановлено міркуваннями (доведенням), то таке твердження називають *теоремою*. Навчитися доводити теореми, розв'язувати задачі – основна мета кожного школяра.

Чи можна стверджувати, що для успішного розв'язування геометричних задач і доведення теорем достатньо вільно володіти всім теоретичним матеріалом?

Ні. Це не є достатньою умовою. При хороших знаннях теорії слід набути практичних навичок. А це можливо лише під час розв'язування задач, починаючи від простіших і поступово переходячи до більш складних.

Математичні задачі умовно поділяють на чотири види відповідно до їхніх вимог: задачі на обчислення, доведення, дослідження і побудову. З ними ви вже ознайомилися в курсі планіметрії.

Приступаючи до розв'язування задачі, треба вибрати метод. Методи поділяють:

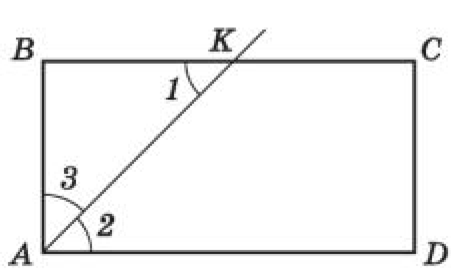
а) за структурою – синтетичний, аналітичний, від супротивного тощо;

б) за використанням математичного апарату – алгебраїчний, векторний, координатний, метод площ, метод геометричних перетворень тощо.

Суть синтетичного методу полягає в тому, що, виходячи з умови задачі чи теореми і використовуючи відомі твердження, будується ланцюг логічних міркувань, останнє з яких збігається з вимогою задачі. Наведемо приклад.

Задача 1.

Бісектриса кута прямокутника ділить більшу сторону на два відрізки 7 см і 9 см. Знайдіть периметр цього прямокутника.



Дано: $ABCD$ – прямокутник; AK – бісектриса, $K \in BC$; $BK = 7$ см, $KC = 9$ см (або $BK = 9$ см, $KC = 7$ см).

Знайти: P_{ABCD}.

Розв'язання	Чому саме так?
AK – бісектриса прямого кута BAD, $BC \parallel AD$, AK – січна, тому $\angle 1 = \angle 2$ як внутрішні різносторонні.	Нехай за умовою AK задана бісектриса. Точка K розбиває відрізок BC на два відрізки BK і KC. Далі, враховуючи

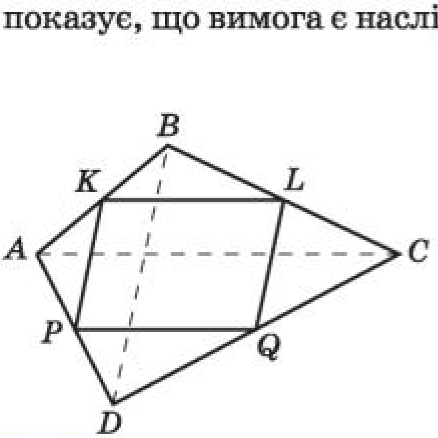
AK – бісектриса, тому $\angle 2 = \angle 3$. Отже $\angle 1 = \angle 3$. У $\triangle ABK$: $\angle 1 = \angle 3$, тому $\triangle ABK$ – рівнобедрений і $AB = BK$. 1) Якщо $BK = 7$ см, $KC = 9$ см, то $AB = BK = 7$ см і $BC = 16$ см. $P_{ABCD} = (7 + 16) \cdot 2 = 46$ (см). 2) Якщо $BK = 9$ см, $KC = 7$ см, то $AB = BK = 9$ см і $BC = 16$ см. $P_{ABCD} = (9 + 16) \cdot 2 = 50$ (см). *Відповідь.* 46 см або 50 см.	паралельність протилежних сторін прямокутника та їх перетин січною (AK – бісектриса), встановлюємо рівність двох кутів трикутника. Це визначає вид трикутника – рівнобедрений, а значить, рівність двох сторін. Тобто $AB = BK$. Якщо $BK = 7$ см, то $AB = 7$ см, $BC = 7 + 9 = 16$ (см), тому периметр: $P = (7 + 16) \cdot 2 = 46$ (см). Якщо $BK = 9$ см, то $AB = 9$ см, $BC = 7 + 9 = 16$ (см), тому периметр: $P = (9 + 16) \cdot 2 = 50$ (см). Отже, периметр прямокутника може дорівнювати або 46 см, або 50 см.

Ця задача є *опорною*, оскільки на такій ідеї будується багато задач і для паралелограма, і для трапеції. У цих фігурах бісектриса кута відтинає завжди рівнобедрений трикутник.

Зауважимо, що скорочене позначення кутів, у вигляді $\angle 1$, $\angle 2$, ..., спрощує записи та економить час, тому в таких випадках ним користуватися зручніше.

Як бачимо, у процесі розв'язування задачі 1 використовуються лише відомі геометричні твердження та проводяться відповідні обчислення. Причому для кожної геометричної задачі такі міркування свої.

Суть аналітичного методу полягає в тому, що, виходячи з вимоги (висновку) твердження (теореми чи задачі) і спираючись на відомі твердження, будуємо ланцюг логічних міркувань, який показує, що вимога є наслідком умови. Наведемо приклад.



Задача 2.

Доведіть, що середини сторін будь-якого опуклого чотирикутника є вершинами паралелограма.

Дано: $ABCD$ – чотирикутник; $K \in AB$, $AK = KB$; $L \in BC$, $BL = LC$; $Q \in CD$, $CQ = QD$; $P \in AD$, $AP = PD$.

Довести: $KLQP$ – паралелограм.

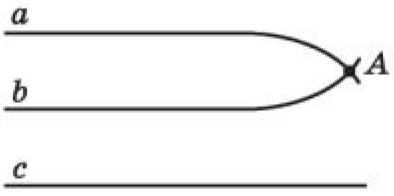
Доведення	Чому саме так?
$KLQP$ – заданий чотирикутник. K, L, Q, P – середини відповідних сторін. AC і BD – діагоналі чотирикутника $ABCD$. У $\triangle ABC$: KL – середня лінія, тому $KL \parallel AC$. У $\triangle ADC$: PQ – середня лінія, тому $PQ \parallel AC$. Маємо: 1) $KL \parallel AC$ і $AC \parallel PQ$, тому $KL \parallel PQ$ (за ознакою паралельних прямих). 2) Аналогічно $KP \parallel LQ$ як середні лінії трикутників ABD та BDC. Отже, у чотирикутнику $KLQP$ протилежні сторони паралельні, тому він – паралелограм, згідно з ознакою паралелограма. Що й вимагалося довести (щ. в. д.).	Вимога задачі: довести. Це означає, що істинність твердження слід підтвердити «ланцюжковим» міркуванням. Щоб чотирикутник $KLQP$ був паралелограмом, достатньо показати, що в нього протилежні сторони паралельні. Для цього заданий чотирикутник розбиваємо на два трикутники однією діагоналлю, а потім – іншою. Середні лінії однієї пари трикутників паралельні одній діагоналі, а другої пари – інші. (Відрізок, що сполучає середини двох сторін, є середньою лінією трикутника, яка має властивість: паралельна до третьої сторони трикутника.) Звідси, середні лінії кожної пари трикутників паралельні між собою. Таким чином, отримуємо, що в чотирикутнику $KLQP$ протилежні сторони паралельні, тому він – паралелограм.

Зауважимо, що доведення того, що чотирикутник, вершини якого є серединами довільного опуклого чотирикутника, є паралелограмом, можна проводити й іншими методами.

Синтетичний та *аналітичний* методи ще називають *прямими* методами розв'язування математичних задач.

Отже, щоб розв'язати задачу прямим методом, слід розпочинати з аналізу змісту задачі (від якого залежить вибір методу розв'язування). Далі допомогти собі створенням моделі у вигляді рисунка і продовжити міркувати над кожною дією, які в сукупності утворюють ланцюг дій, що ведуть або від умови до вимоги, або від вимоги до умови.

Суть методу від супротивного полягає в тому, що, маючи твердження, будуємо нове, заперечивши висновок попереднього. Утворюється протилежне твердження. Виходячи з висновку протилежного твердження, будуємо «ланцюг» істинних тверджень, поки не отримаємо твердження, яке суперечить або умові, або відомій аксіомі чи теоремі, або припущенню. Отже, отримуємо висновок, що протилежне твердження хибне, а тому початкове – істинне (тут діє логічний закон: з двох протилежних тверджень одне істинне, друге хибне, третього не дано). Розглянемо приклад.



Задача 3.

Доведіть твердження: якщо дві прямі паралельні третій, то вони паралельні між собою.

Будуємо протилежне твердження: існують дві прямі паралельні третій і не паралельні між собою.

Доведення	*Чому саме так?*
Від супротивного. Припустимо, що $a \parallel c$, $b \parallel c$, але $a \nparallel b$. Тоді $a \cap b = A$. Отримали твердження, яке протирічить аксіомі паралельності: через точку A на площині проходять дві різні прямі, паралельні третій. Отже, протилежне твердження хибне, тому початкове твердження – істинне. Тобто дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній. Щ. в. д.	Виходимо з висновку нового твердження: нехай прямі a та b, які паралельні третій прямій c, не паралельні між собою. Тоді вони перетинаються в деякій точці A. Отримали, що через точку проходять дві різні прямі, паралельні третій. Це суперечить аксіомі паралельності. Прийшли до протиріччя. Останнє твердження – хибне. Отже, початкове твердження – істинне.

Математичну задачу вважають розв'язаною, якщо: 1) записано відповідь у вигляді числа, виразу, вказано алгоритм побудови рисунка, коли це задача на обчислення, побудову чи дослідження; 2) підтверджено сформульоване в задачі твердження, коли це задача на доведення.

Метод від супротивного називають *непрямим* методом розв'язування математичних задач.

Розглянемо деякі інші методи розв'язування геометричних задач, які поділяють на види за використанням математичного апарату.

Алгебраїчний метод розв'язування задач

Розв'язуючи задачу алгебраїчним методом, слід приділити увагу таким етапам:

1. Моделювання тексту задачі за допомогою рисунка (у більшості випадків).
2. Введення позначень шуканих величин або тих, які приводять до шуканих (найчастіше літерами латинського алфавіту).
3. Складання рівняння або системи рівнянь, використовуючи введені позначення та відомі геометричні співвідношення між шуканими і даними величинами.
4. Розв'язування складеного рівняння або системи рівнянь. Повернення до введених позначень і визначення шуканих геометричних величин. За потреби, виконання дослідження знайдених розв'язків.
5. Записування відповіді.

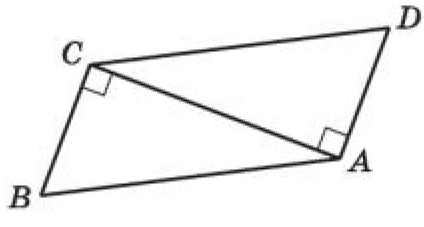
Вам доводилося неодноразово розв'язувати геометричні задачі алгебраїчними методами. Задачі, у яких задано залежність між двома вимірами, зводяться до розв'язування рівняння. Наприклад, одна зі сторін паралелограма на 3 см довша за іншу, а периметр – 30 см. Потрібно знайти довжини сторін паралелограма. Тоді, увівши змінну x як довжину сторони цього паралелограма, маємо довжину другої сторони $(x - 3)$. Враховуючи означення периметра паралелограма та відоме його значення, отримуємо рівняння:

$$(x + x - 3) \cdot 2 = 30.$$

Наведемо ще приклади розв'язування задач алгебраїчним методом.

Задача 4.

Периметр прямокутного трикутника дорівнює 36 см. Гіпотенуза відноситься до катета як 5 : 3. Знайдіть сторони трикутника.



Дано: $\triangle ACB$ ($\angle C = 90°$); $P_\triangle = 36$ см; $AB : AC = 5 : 3$.

Знайти: AB, AC і BC.

Розв'язання	*Чому саме так?*
Позначимо коефіцієнт пропорційності через k. Тоді $AB = 5k$, а $AC = 3k$. $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $25k^2 = 9k^2 + BC^2$,	$P_\triangle = 36$ см – єдиний лінійний вимір, з яким пов'язані сторони трикутника. $\dfrac{\textit{Гіпотенуза}}{\textit{Катет}} = \dfrac{5}{3}$.

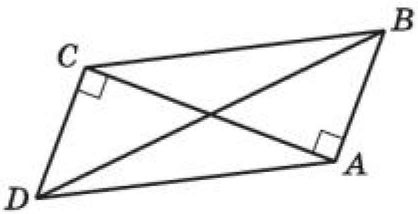
$BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$ ($BC > 0$, $k > 0$).
$P_\triangle = AB + AC + BC$, або
$5k + 3k + 4k = 36$,
$12k = 36$, $k = 3$.
$AB = 5 \cdot 3 = 15$ (см),
$AC = 3 \cdot 3 = 9$ (см),
$BC = 4 \cdot 3 = 12$ (см).

Відповідь. 15 см, 9 см і 12 см.

Нехай $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{3} = \frac{5k}{3k}$, звідси $AB = 5k$, $AC = 3k$.

$P_\triangle = AB + AC + BC$. Визначити сторону BC можна за теоремою Піфагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$, звідси $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$, $BC > 0$, $BC = 4k$. Метод розв'язування – *алгебраїчний*, оскільки використовується математична модель – рівняння $5k + 3k + 4k = 36$.

Задача 5.



У паралелограмі діагоналі дорівнюють 16 см і 20 см. Менша з них перпендикулярна до його сторони. Знайдіть площу цього паралелограма.

Дано: $ABCD$ – паралелограм; $\angle A > \angle B$, $AC < BD$; $AC \perp AB$, $AC \perp CD$, $AC = 16$ см, $BD = 20$ см.

Знайти: S_{ABCD}.

Розв'язання	Чому саме так?
Нехай $ABCD$ – заданий паралелограм, у якому $AC \perp CD$ і $AC \perp AB$. Позначимо сторони паралелограма: $AB = x$, $BC = y$. Тоді маємо рівняння: $2(x^2 + y^2) = 16^2 + 20^2$, звідси $x^2 + y^2 = \frac{16^2 + 20^2}{2}$, $x^2 + y^2 = 328$. За теоремою Піфагора з $\triangle CAB$ ($\angle A = 90°$):	Під час розв'язування цієї задачі спочатку вибираємо формулу для обчислення площі паралелограма. $S_{ABCD} = a \cdot h_a$, де a – основа паралелограма, h_a – висота, проведена до неї. $AC \perp AB$, тому AC є висотою паралелограма, проведеною до сторони AB або CD, довжини яких невідомі. Сторони паралелограма пов'язані з його діагоналями формулою $(a^2 + b^2) \cdot 2 = d_1^2 + d_2^2$. Довжини сторін паралелограма є невідомими, тому,

$AB^2 + AC^2 = BC^2$, тобто маємо: $x^2 + 16^2 = y^2$, або $y^2 - x^2 = 16^2$.

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 328, \\ y^2 - x^2 = 256. \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - (y^2 - x^2) = 328 - 256$,

$2x^2 = 72$, $x^2 = 36$,

$(x > 0)$, $x = 6$.

$S_{ABCD} = AB \cdot AC = 6 \text{ см} \cdot 16 \text{ см} = 96 \text{ см}^2$.

Відповідь. 96 см^2.

очевидно, потрібно скласти систему рівнянь. Одне з рівнянь можна отримати за вищевказаною формулою, а друге, враховуючи перпендикулярність діагоналі паралелограма, маємо прямокутний трикутник з двома невідомими сторонами, які є його сторонами.

Зауважимо, що, беручи до уваги вимогу задачі, можна не шукати обидві сторони паралелограма, а лише, наприклад, сторону AB.

Метод площ

Якщо умова задачі містить дані, з яких легко знайти площу одним зі способів, однак, використовуючи інший спосіб для відшукання площі цієї самої фігури, маємо один з лінійних вимірів невідомий, то, прирівнюючи площі, отримують рівняння з одним невідомим.

Задача 6.

Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Обчисліть висоту, проведену до сторони, яка має довжину 14 см.

Розв'язання	Чому саме так?

Нехай a, b, c – сторони деякого $\triangle ABC$, причому $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см.

$a < b$ і $b < c$. h_b – висота, проведена до середньої сторони.

За формулою Герона:

$$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

а за іншою формулою:

$$S_\triangle = \frac{1}{2} b \cdot h_b.$$

$S_\triangle = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} =$

Маючи три сторони трикутника a, b, c, можна знайти його площу за формулою Герона:

$$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

З іншої боку, площу трикутника можна знайти за формулами:

$$S_\triangle = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c,$$

де h_i – висота, проведена до

$= \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2} =$
$= \sqrt{3^2 \cdot 7^2 \cdot 4^2} = 3 \cdot 7 \cdot 4 =$
$= 84$ (см²).

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot h_b = 7 \cdot h_b,$

$7 \cdot h_b = 84,$

$h_b = 12$ (см).

Відповідь. 12 см.

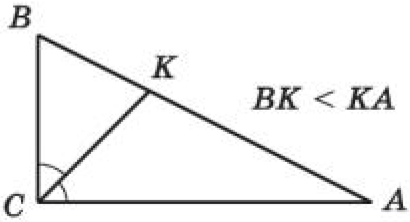
i-ї сторони. Залишилося вибрати сторону трикутника і отримати рівняння:

$$\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot h_i = S_\Delta,$$

у якому невідомим буде h_i.

Зауважимо, що хоча під час розв'язування задачі 6 використовувалося алгебраїчне рівняння, однак більш суттєвим у розв'язуванні задачі є міркування про площу фігури, тому такий метод отримав назву *метод площ*.

Задача 7.



Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 6 см. Знайдіть довжину бісектриси прямого кута.

Дано: $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$); CK – бісектриса; $BC = 3$ см, $AC = 6$ см.

Знайти: CK.

Розв'язання	Чому саме так?
Нехай ABC – даний прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), у якому $BC = 3$ см, $AC = 6$ см і CK – бісектриса прямого кута. Введемо позначення: $CK = x$. Знайдемо площу $\triangle ABC$ двома різними способами: 1) $S_{\triangle ABC} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$ (см²); 2) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCK} + S_{\triangle ACK}$; $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sin 45° +$	Площу $\triangle ABC$ можна знайти за формулою $S = \frac{ab}{2}$, де a і b – два катети. Бісектриса розділила $\triangle ABC$ на два трикутники, площі яких невідомі. Їхні площі можна знайти за формулою: $S_\Delta = \frac{1}{2} mn \sin\gamma,$ де m і n – сторони трикутника, а γ – кут між ними, тобто $\gamma = 45°$. $S_{\triangle BCK} = \frac{1}{2} CB \cdot CK \cdot \sin 45°,$

$+\frac{1}{2}\cdot 6x\cdot\sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{4}x +$

$+\frac{6\sqrt{2}}{4}x = \frac{9\sqrt{2}x}{4}.$

Прирівнюємо праві частини рівностей:

$$\frac{9\sqrt{2}x}{4} = 9.$$

Звідси $x = 2\sqrt{2}$.

Тобто $CK = 2\sqrt{2}$ см.

Відповідь. $2\sqrt{2}$ см.

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$S_{\triangle ACK} = \frac{1}{2}CK\cdot CA\cdot\sin 45^\circ.$

Оскільки

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCK} + S_{\triangle ACK},$$

а бісектриса CK є невідомою, то отримаємо рівняння з одним невідомим.

Метод векторів

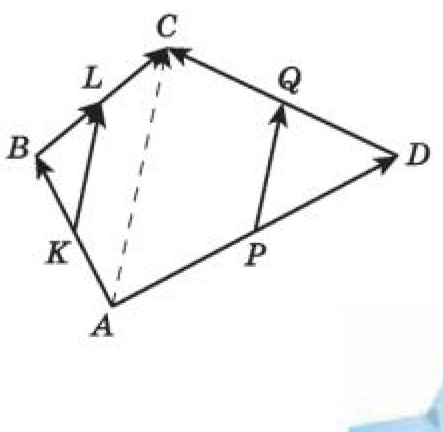
Щоб застосовувати метод векторів до розв'язування задачі, потрібно виконати такі дії:

1. Перевести задачу на мову векторів, тобто розглянути деякі дані в задачі відрізки як вектори та скласти векторну рівність.
2. Здійснити перетворення для векторної рівності, користуючись відповідними властивостями дій над векторами та відомими векторними рівностями.
3. Повернутися від векторної мови до геометричної.
4. Записати відповідь.

Метод векторів найчастіше використовується під час розв'язування задач, у яких вимагається довести: паралельність прямих (відрізків), поділ відрізка в певному відношенні; що три точки лежать на одній прямій; що даний чотирикутник – паралелограм (ромб, прямокутник, квадрат, трапеція). Проілюструємо суть цього методу на прикладі розв'язування задачі.

Задача 8.

Доведіть, що середини сторін будь-якого опуклого чотирикутника є вершинами паралелограма.



Дано: $ABCD$ – чотирикутник;
$K \in AB$, $AK = KB$;
$L \in BC$, $BL = LC$;
$Q \in CD$, $CQ = QD$;
$P \in AD$, $AP = PD$.

Довести: $KLQP$ – паралелограм.

Доведення	*Чому саме так?*
1. Переведемо задачу на мову векторів, замінивши відрізки векторами: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{KB}$.	Перевівши задачу на мову векторів, отримуємо вимогу задачі: довести рівність векторів $\overrightarrow{KL}$ і $\overrightarrow{PQ}$.
2. Скористаємося правилом трикутника для додавання векторів: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{KL}$. Враховуючи, що $\overrightarrow{KB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (K – середина AB) і $\overrightarrow{BL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (L – середина BC), отримуємо рівність: $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=$ $=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Отже, $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Аналогічно $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.	Скориставшися правилом трикутника для знаходження суми векторів, маємо: $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Однак $\overrightarrow{KB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, тому $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Аналогічно отримуємо, що $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
3. Тому $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{PQ}$. Тобто вектори однаково напрямлені, лежать на паралельних прямих і мають однакову довжину. Це доводить, що $KLQP$ – паралелограм. Щ. в. д.	Отже, $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{PQ}$, що й вимагалося довести.

Метод координат

Розв'язуючи задачу координатним методом, слід виконати такі дії:

1. Записати геометричну задачу мовою координат.
2. Перетворити вираз чи обчислити його значення.
3. Перевести знайдений результат на мову геометрії.
4. Записати відповідь.

Методом координат найчастіше розв'язують задачі:

– на відшукання геометричних місць точок;

– на доведення залежностей між лінійними елементами геометричних фігур.

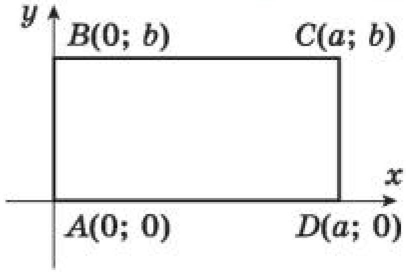


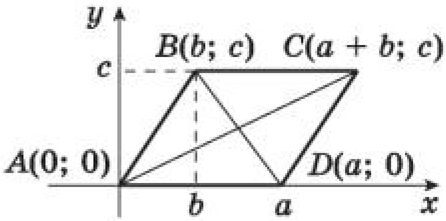
Рис. 1.35

Розв'язуючи задачу методом координат, потрібно раціонально вибрати систему координат: дану фігуру слід розмістити відносно осей координат так, щоб якнайбільше координат потрібних точок дорівнювало нулю, а також одному і тому самому числу. Наприклад, координати вершин прямокутника $ABCD$ можна вибрати так, як на рисунку 1.35: $A(0; 0)$, $B(0; b)$, $C(a; b)$, $D(a; 0)$.

Проілюструємо суть методу на прикладі.

Задача 9.

Доведіть, що коли в паралелограма діагоналі рівні, то він прямокутник.



Доведення

Розмістимо паралелограм у системі координат так, щоб його вершини мали координати: $A(0; 0)$, $B(b; c)$, $C(a + b; c)$, $D(a; 0)$, причому $a > 0$, $b \geqslant 0$, $c > 0$. За умовою $AC = BD$. Виразимо відстані між точками A і C, B і D через їхні координати:

$$AC = \sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2},\ BD = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}.$$

Тоді $\sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$, або

$(a+b-0)^2 + (c-0)^2 = (a-b)^2 + (0-c)^2$, звідси $4ab = 0$.

Оскільки $a > 0$, то $b = 0$, а це означає, що точка $B(b;\ c)$ лежить на осі Oy. Тому кут BAD прямий. Звідси випливає, що паралелограм $ABCD$ – прямокутник.

Метод геометричних перетворень: метод повороту, метод симетрії, метод паралельного перенесення, метод гомотетії.

Розв'язуючи задачі методом геометричних перетворень, розглядають поряд з даними фігурами нові фігури, які отримали з даних за допомогою певного перетворення. З'ясовують властивості нових фігур, переносять ці властивості на дані фігури, а далі – знаходять спосіб розв'язування задачі.

Кажуть, що задачі, які розв'язані методом векторів, методом координат, методом геометричних переміщень, методом площ та іншими методами, у яких використовується більше властивостей геометричних фігур, розв'язані *геометричними методами*.

Вправи

1.70°. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 20 см, сторона $AB = 5$ см. Знайдіть довжину іншої сторони паралелограма. Виберіть рівняння, яке є моделлю даної задачі.

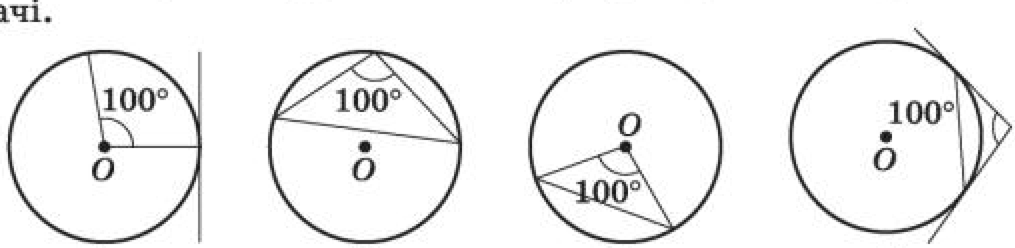
А) $x + 5 = 20$; В) $3x + 5 = 20$; Д) $2x + 5 = 10$.
Б) $2x + 5 = 20$; Г) $(x + 5) \cdot 2 = 20$;

1.71°. Периметр паралелограма зі сторонами a см і b см дорівнює 50 см. Знайдіть сторони паралелограма. Ідентифікуйте кожній умові алгебраїчне рівняння, яке може бути моделлю утвореної задачі.

А) $a : b = 2 : 3$; 1) $(x + 3 + x) \cdot 2 = 50$;
Б) $a > b$ на 3 см; 2) $(x - 2 + x) \cdot 2 = 50$;
В) $a > b$ у 2 рази; 3) $(x + 3x) \cdot 2 = 50$;
Г) $a < b$ на 2 см; 4) $(2x + 3x) \cdot 2 = 50$;
Д) $a < b$ у 3 рази. 5) $(x + 2x) \cdot 2 = 50$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

1.72°. Центральний кут опирається на хорду, яка стягує дугу 100°. Знайдіть кути трикутника, утвореного сторонами центрального кута й хордою. Укажіть рисунок, який є моделлю задачі.



А) Б) В) Г)

1.73°. У колі з центром O проведено діаметри AB і CD (рис. 1.36). Кут AOC у 17 разів менший за суму інших трьох кутів, що утворилися. Знайдіть вписаний кут ABC.

А) 20°; Б) 40°; В) 10°; Г) 80°; Д) 160°.

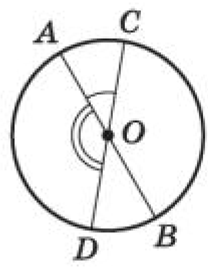


Рис. 1.36

1.74°. Знайдіть катет, прилеглий до кута в 60°, прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 10 см.

А) $5\sqrt{3}$ см; Б) 5 см; В) $10\sqrt{3}$ см; Г) $2\sqrt{5}$ см; Д) $5\sqrt{2}$ см.

1.75°. У рівнобедреному трикутнику ABC до основи AC проведено висоту BH. Відомо, що $P_{\triangle ABC} = 18$ см, $P_{\triangle ABH} = 12$ см і $AB : AC = 5 : 8$. Знайдіть відношення висоти рівнобедреного трикутника BH до його основи AC.

А) $\frac{3}{2}$; Б) $\frac{3}{8}$; В) $\frac{1}{2}$; Г) $\frac{4}{5}$; Д) $\frac{5}{6}$.

1.76°. У прямокутнику (рис. 1.37), діагональ якого дорівнює 13 см, позначено точки M, N, K і L – середини його сторін. Виберіть геометричні твердження, які потрібні для знаходження периметра чотирикутника $MNKL$.

1) Означення прямокутника;

2) властивості прямокутника;

3) властивості прямокутного трикутника;

4) означення трикутника;

5) означення середньої лінії трикутника;

6) властивості середньої лінії трикутника;

7) ознаки паралельності прямих.

А) 1, 2, 4 і 7; Б) 2, 4, 5 і 7; В) 2, 5 і 6; Г) 3, 5 і 6; Д) 3, 6 і 7.

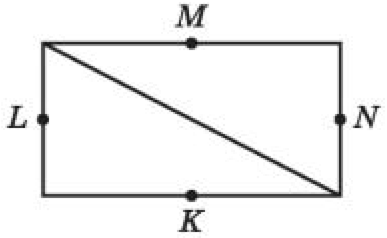


Рис. 1.37

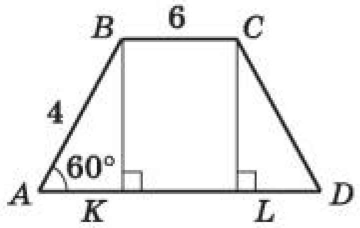


Рис. 1.38

1.77°°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною 24 см.

А) $4\sqrt{2}$ см; В) 12 см; Д) $8\sqrt{3}$ см.

Б) $12\sqrt{3}$ см; Г) $12\sqrt{2}$ см;

1.78°°. Обчисліть площу паралелограма, дві сторони якого дорівнюють 9 см і $5\sqrt{2}$ см, а кут між ними – 45°.

А) $45\sqrt{2}$ см^2; В) 45 см^2; Д) $15\sqrt{2}$ см^2.

Б) $22{,}5\sqrt{2}$ см^2; Г) 22,5 см^2;

1.79°°. Виберіть три послідовності правильного знаходження площі рівнобічної трапеції $ABCD$ (рис. 1.38).

1) Використання аксіоми вимірювання відрізків;

2) знаходження сторін утвореного трикутника;

3) доведення рівності двох утворених трикутників;

4) установлення виду чотирикутника;

5) використання властивостей чотирикутника $BCLK$.

А) 1, 4, 5, 2 і 3; В) 5, 4, 3, 1 і 2; Д) 4, 5, 2, 3 і 1.

Б) 2, 3, 4, 5 і 1; Г) 3, 2, 4, 5 і 1;

1.80°°. Знайдіть радіус вписаного у ромб кола, якщо діагоналі ромба дорівнюють 6 см і 8 см.

А) 4,8 см; Б) 3,6 см; В) 2,4 см; Г) 1,8 см; Д) 1,2 см.

1.81•. У трикутнику ABC проведено паралельно AC відрізок DE ($D \in AB$, $E \in BC$). Знайдіть сторону AB трикутника ABC, коли відомо, що $DE = 4$ см, $DB = 6$ см, $AC = 10$ см.

1.82•. Висоти паралелограма дорівнюють 8 см і 12 см, а кут між ними – 60°. Знайдіть площу паралелограма.

1.83•. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до нього, – 5 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

1.84•. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 30 см, а радіус описаного навколо нього кола – 17 см. Обчисліть площу даного трикутника.

1.85••. Сторони трикутника дорівнюють 29 см, 25 см і 6 см. Знайдіть довжину висоти трикутника, проведеної до найменшої сторони.

1.86••. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки завдовжки 24 см і 51 см.

1.87••. У трикутнику одна сторона дорівнює 24 см, медіана, проведена до неї, – 14 см, а різниця двох інших сторін – 8 см. Обчисліть периметр трикутника.

1.88••. У трикутнику дві сторони і медіана, проведена з вершини кута, утвореного ними, відповідно дорівнюють 14 см, 22 см і 14 см. Обчисліть периметр трикутника.

1.89••. У трикутнику ABC проведено медіани AA_1, BB_1, CC_1. Доведіть, що $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = 0$.

1.90••. Доведіть, що середини сторін рівнобедреної трапеції є вершинами ромба. (Використайте різні методи розв'язування.)

1.91••. У квадрат вписано коло радіуса R. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до сторін квадрата стала і дорівнює $6R^2$. (Використайте різні методи розв'язування.)

Геометрія – одна з найдавніших математичних наук. Свідчення про перші геометричні факти відображено на вавилонських клинописних таблицях, єгипетських папірусах та інших джерелах (VI–III ст. до н. е.).

Назва науки **«геометрія»** – давньогрецького походження. Вона складається з двох давньогрецьких слів: «geo» (гео) – *земля* і «metreo» (метрео) – *вимірюю*. У розвитку геометрії можна вказати ***чотири основні періоди***.

Перший період – **зародження геометрії як науки.** Він відбувався у Стародавньому Єгипті, Вавилоні та Греції (приблизно до V ст. до н. е.). Саме в цей час учені геометри встановили перші загальні закономірності в природі та відтворили їх на залежностях між геометричними величинами. Основною проблемою геометрів того періоду було обчислення деяких площ і об'ємів. Логічних обґрунтувань у задачах було дуже мало. В основному геометричні властивості виводилися за практичними спостереженнями, пошуком закономірностей, використанням досвіду, тобто емпірично.

Другий період – **формування геометрії у структурну систему.** У VII ст. до н. е. геометрія була «перенесена» з Єгипту в Грецію. Під час цього періоду геометри працювали над систематизацією накопичених і нових знань, встановлювали зв'язки між геометричними фактами, виробляли прийоми доведень. У розвиток математики, зокрема геометрії, у цей період значний внесок зробили Піфагор, Платон, Арістотель, Фалес, Анаксигор, Демокріт, Евклід. У книзі «Начала» Евкліда сформульовано поняття про фігуру, про геометричні твердження та про доведення. Вона є актуальною і до наших днів.

Третій період – **доповнення геометрії новими методами.** Розпочинається цей період у першій половині XVII ст. Французький учений Рене Декарт увів метод координат. Це було великим досягненням, тріумфом, який зумів пов'язати три науки: геометрію, алгебру і математичний аналіз. Використання методів цих наук у геометрії дало змогу створити нові науки, які були тісно пов'язані з евклідовою геометрією. Це – аналітична геометрія, а пізніше – диференціальна геометрія, проективна геометрія, нарисна геометрія. Таким чином, евклідова геометрія піднялася на якісно новий ступінь порівняно зі стародавньою геометрією. У ній почали розглядатися значно загальніші фігури та використовуватися суттєво новіші методи.

Четвертий період – **створення неевклідової геометрії.** Започаткував його російський учений Микола Іванович Лобачевський. Він у 1826 році вперше за період, що тривав понад 2000 років, відкрив можливості для створення неевклідових геометрій. Ним була побудована зовсім нова, неевклідова геометрія, яку тепер називають геометрією Лобачевського.

Особливість нового періоду в історії геометрії, розпочатого М. І. Лобачевським, полягає в тому, що після його геометрії почали розвиватися нові геометричні теорії, нові «геометрії» та відповідні узагальнення самого предмета геометрії. У цей період виникло поняття про різновиди простору (термін «простір» у науці має різний зміст: з одного боку, це звичайний реальний простір, а з другого – абстрактний «математичний простір»). Одні теорії складалися всередині евклідових геометрій, у вигляді її особливих розділів, а пізніше отримували статус самостійності. А інші – подібно геометрії Лобачевського, вводили зміни аксіом і структурувалися на основі цих змін, узагальнюючи та будуючи науку.

Саме так було створено геометрію Рімана (Георг Фрідріх Бернхард Ріман (1826–1866) – німецький учений) та її узагальнення (1854–1866), які знайшли важливе застосування в теорії відносності, у механіці та ін.

У шкільному курсі ми вивчаємо **геометрію Евкліда**. Переклав книжку «Начала» український математик Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко (1825–1912) у 1880 році. На основі цієї книжки написано й пишуться різні підручники з геометрії. Наприклад, викладання геометрії в радянській школі майже до 1982 року здійснювалося за підручником російського педагога-математика А. П. Кисельова (1852–1940). У 1980-х роках було створено новий навчальний посібник, написаний українським математиком О. В. Погорєловим, який і нині є в бібліотеках загальноосвітніх навчальних закладів.

Сьогодні геометрія є багатовекторною і такою, що швидко розвивається в різних сукупностях математичних теорій, які вивчають різні простори та їхні фігури. Значний внесок у геометрію зробили й наші вітчизняні геометри: М. В. Остроградський, О. М. Астряб, А. П. Кисельов, О. Д. Александров, А. М. Колмогоров, О. В. Погорєлов та ін.

Запитання для самоконтролю

1. Які фігури на площині є основними?
2. Які поняття є означуваними, а які – неозначуваними?
3. Що таке аксіома; теорема?
4. Які основні властивості належності точок і прямих?
5. Який відрізок належить півплощині?
6. Які основні властивості взаємного розміщення точок на прямій; площині?
7. Які основні властивості вимірювання відрізків; кутів?
8. Які основні властивості відкладання відрізків; кутів?
9. Назвіть властивість паралельних прямих.
10. Яка структурна побудова планіметрії?
11. У якому випадку три точки площини будуть розміщені на одній прямій?
12. Що таке означення? Наведіть приклади означень.
13. Яке можливе розміщення трьох точок на площині?

14. Які прямі називаються паралельними; перпендикулярними?
15. Як визначити кут між прямими, що перетинаються?
16. Які кути називаються суміжними; вертикальними?
17. Яку властивість мають суміжні кути; вертикальні?
18. Як доводять паралельність прямих?
19. Як можуть бути розміщені коло і пряма?
20. Які властивості має дотична до кола?
21. Які многокутники називаються плоскими?
22. Які кути називаються вписаними в коло?
23. Яка залежність між вписаним і центральним кутами?
24. Як знайти центр кола, вписаного в трикутник і описаного навколо нього?
25. Які загальні формули пов'язують сторону правильного n-кутника з радіусом вписаного кола?
26. Які загальні формули пов'язують сторону правильного n-кутника з радіусом описаного кола?
27. Яка властивість перпендикуляра, проведеного через середину хорди кола?
28. Яка залежність між катетами і гіпотенузою в прямокутному трикутнику?
29. Назвіть властивість медіан трикутника.
30. Назвіть властивості бісектриси кута трикутника.
31. Як за трійкою елементів трикутника, серед яких один лінійний, можна його розв'язати?
32. Які теореми допомагають при розв'язуванні трикутника?
33. Як визначити вид чотирикутника?
34. Як перевірити, що даний чотирикутник є паралелограмом; прямокутником; ромбом; квадратом; трапецією?
35. Які умови визначають існування трикутника?
36. Які многокутники є рівними, а які подібними?
37. Які формули можна використовувати для знаходження площі паралелограма; прямокутника; ромба; квадрата; трапеції?
38. Які методи розв'язування задач ви знаєте?
39. Як розв'язати геометричну задачу алгебраїчним методом?

Тест для самоконтролю

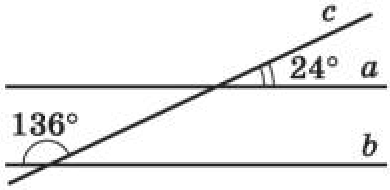
● ***Частина 1***

Завдання 1–16 мають варіанти відповідей, з яких правильна тільки ОДНА або конкретна кількість. Виберіть правильну відповідь.

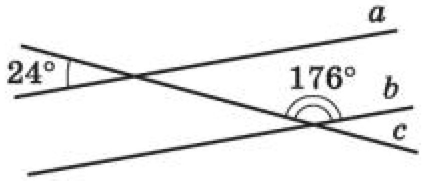
1°. Визначте величини кутів, що утворилися при перетині двох прямих, якщо один з них дорівнює 26°.

А) 64°, 116°, 64°; В) 26°, 116°, 116°; Д) 141°, 52°, 141°.
Б) 126°, 64°, 126°; Г) 26°, 154°, 154°;

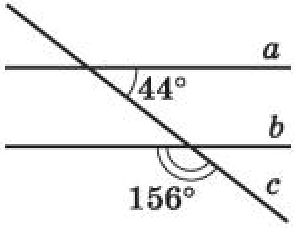
2°. Укажіть рисунок, за даними якого можна зробити висновок, що прямі a і b – паралельні.



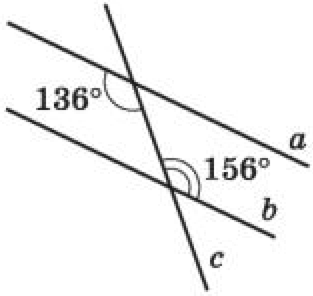
А)



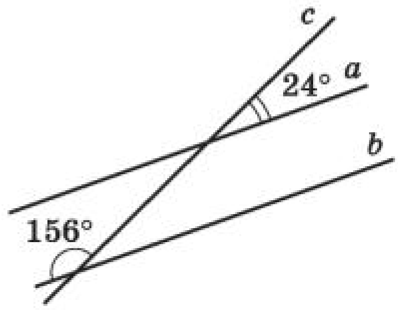
Б)



В)



Г)



Д)

3°. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD, перетинаючись у точці O, утворюють $\angle AOB = 84°$ (рис. 1.39). Знайдіть величину $\angle OBC$.

А) 21°; В) 48°; Д) 63°.
Б) 42°; Г) 24°;

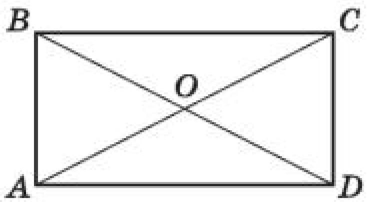


Рис. 1.39

4°. Знайдіть площу квадрата, навколо якого описано коло радіуса R.

А) $R^2\sqrt{2}$ см^2; В) $2R^2$ см^2; Д) $4R^2$ см^2.

Б) $\dfrac{R^2\sqrt{2}}{2}$ см^2; Г) $2R^2\sqrt{2}$ см^2;

5°. Знайдіть площу трапеції, середня лінія якої дорівнює 12 см, а висота – 6 см.

А) 144 см^2; Б) 18 см^2; В) 54 см^2; Г) 36 см^2; Д) 72 см^2.

6°. Обчисліть периметр рівнобедреного трикутника, якщо коло, вписане в трикутник, точкою дотику ділить його бічну сторону на відрізки завдовжки 4 см і 5 см, рахуючи від основи.

А) 23 см; Б) 22 см; В) 26 см; Г) 27 см; Д) 28 см.

7°. Гострий кут прямокутної трапеції в 5 разів менший від її тупого кута. Знайдіть величину тупого кута.

А) 120°; Б) 135°; В) 144°; Г) 150°; Д) 160°.

8°. Знайдіть відношення кутів, утворених дотичною, проведеною через точку C деякого кола, та двома хордами CB і CA, коли відомо, що AB – діаметр і $\angle COB = 36°$ (рис. 1.40).

А) 1 : 5; В) 1 : 7; Д) 1 : 2.
Б) 1 : 6; Г) 1 : 4;

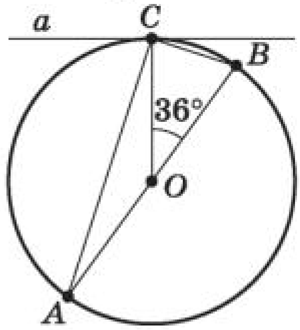


Рис. 1.40

9°°. Периметр квадрата дорівнює $20\sqrt{2}$ см. Визначте радіус кола, описаного навколо квадрата.

А) 2,5 см; В) 5 см; Д) 20 см.
Б) 4 см; Г) 10 см;

10°°. Знайдіть різницю кутів β і α, коли відомо, що хорда $AB = R$, де R – радіус кола (рис. 1.41).

А) 30°; В) 60°; Д) 120°.
Б) 45°; Г) 90°;

11°°. Радіус кола, описаного навколо квадрата, дорівнює $8\sqrt{2}$ см. Обчисліть периметр квадрата.

А) 32 см; Б) $32\sqrt{2}$ см; В) 16 см; Г) 64 см; Д) $16\sqrt{2}$ см.

12°°. Знайдіть площу заштрихованої частини фігури (рис. 1.42).

А) $(2\pi - 2)$ см^2; В) $(8 - 2\pi)$ см^2; Д) $(4 - 2\pi)$ см^2.
Б) $(2 - 2\pi)$ см^2; Г) $(2\pi - 8)$ см^2;

13°°. Визначте градусну міру кута x (рис. 1.43).

А) 120°; В) 75°; Д) 45°.
Б) 60°; Г) 105°;

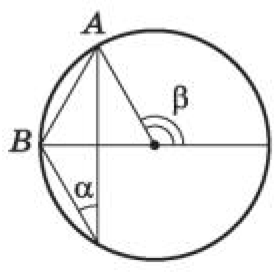


Рис. 1.41

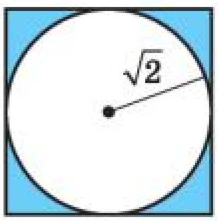


Рис. 1.42

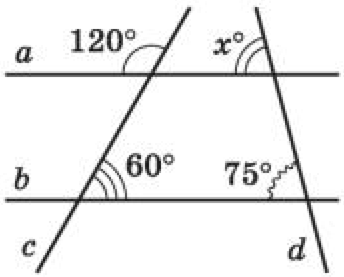


Рис. 1.43

14°°. У колі, радіус якого дорівнює 13 см, проведено хорду завдовжки 24 см. Знайдіть відстань від центра кола до даної хорди.

А) 10 см; Б) 12 см; В) 13 см; Г) 5 см; Д) 1 см.

15°°. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 20 см, а один з катетів – 16 см.

А) 96 см^2; Б) 120 см^2; В) 160 см^2; Г) 192 см^2; Д) 240 см^2.

16°°. Обчисліть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють $6\sqrt{2}$ см і 8 см, а кут між ними – 45°.

А) 48 см²; Б) 24 см²; В) 96 см²; Г) 12 см²; Д) $12\sqrt{2}$ см².

Частина 2

Розв'яжіть завдання 17–28 з коротким записом ходу міркувань.

17•. Знайдіть відсоткове відношення більшого із суміжних кутів до меншого, якщо сума трьох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 240°.

18•. Знайдіть суму двох гострих кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них у 3 рази більший за другий.

19•. З точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди завдовжки 8 см і 15 см. Знайдіть радіус кола.

20•. З точки кола проведено дві хорди, які утворюють кут 30°. Знайдіть довжину відрізка, що сполучає їхні кінці, якщо радіус кола дорівнює 5 см.

21•. Хорда завдовжки 8 см віддалена від центра кола на 4 см. Знайдіть довжину кола.

22•. Сторона правильного шестикутника дорівнює $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть радіус кола, вписаного в шестикутник.

23•. Бічні сторони трапеції, описаної навколо кола, відносяться як 7 : 9, а середня лінія дорівнює 32 см. Знайдіть бічні сторони трапеції.

24•. У коло радіуса 4 см вписано трапецію, діагональ якої є бісектрисою гострого кута й утворює з меншою основою кут 30°. Знайдіть висоту трапеції.

25•. Відомо, що два відрізки AC і BD перетинаються в точці O, причому $AO = OD$, $CO = BO$, $BD = 20$ см, $CD = 14$ см (рис. 1.44). Знайдіть периметр трикутника AOB.

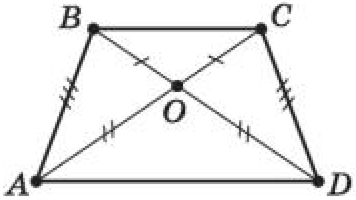


Рис. 1.44

26•. У трикутнику ABC $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$, $BC = 3\sqrt{6}$ см. Знайдіть довжину сторони AC.

27•. Діагоналі ромба відносяться як 5 : 12, а його площа дорівнює 120 см². Знайдіть периметр ромба.

28•. Висота BD трикутника ABC ділить його сторону AC на відрізки AD і CD. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $AB = 2\sqrt{3}$ см, $BC = 5$ см, $\angle A = 60°$.

Частина 3

Розв'яжіть завдання 29–32 з повним обґрунтуванням.

29••. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 26 см, а висота, опущена на основу, – 10 см. Визначте радіуси кіл, вписаного у трикутник та описаного навколо нього.

30••. Бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки у відношенні 5 : 12. Обчисліть периметр трикутника, якщо медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 26 см.

31••. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 5 см, а медіана, проведена до третьої сторони трикутника, – 3,5 см. Знайдіть кут трикутника, обмеженого даними сторонами.

32••. Діагональ рівнобічної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 12 см, а бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

МОДУЛЬ 2

Вступ до стереометрії

Аксіоми володіють найвищим степенем загальності і задають початок усього.

Арістотель

КОРОТКИЙ ЗМІСТ МОДУЛЯ

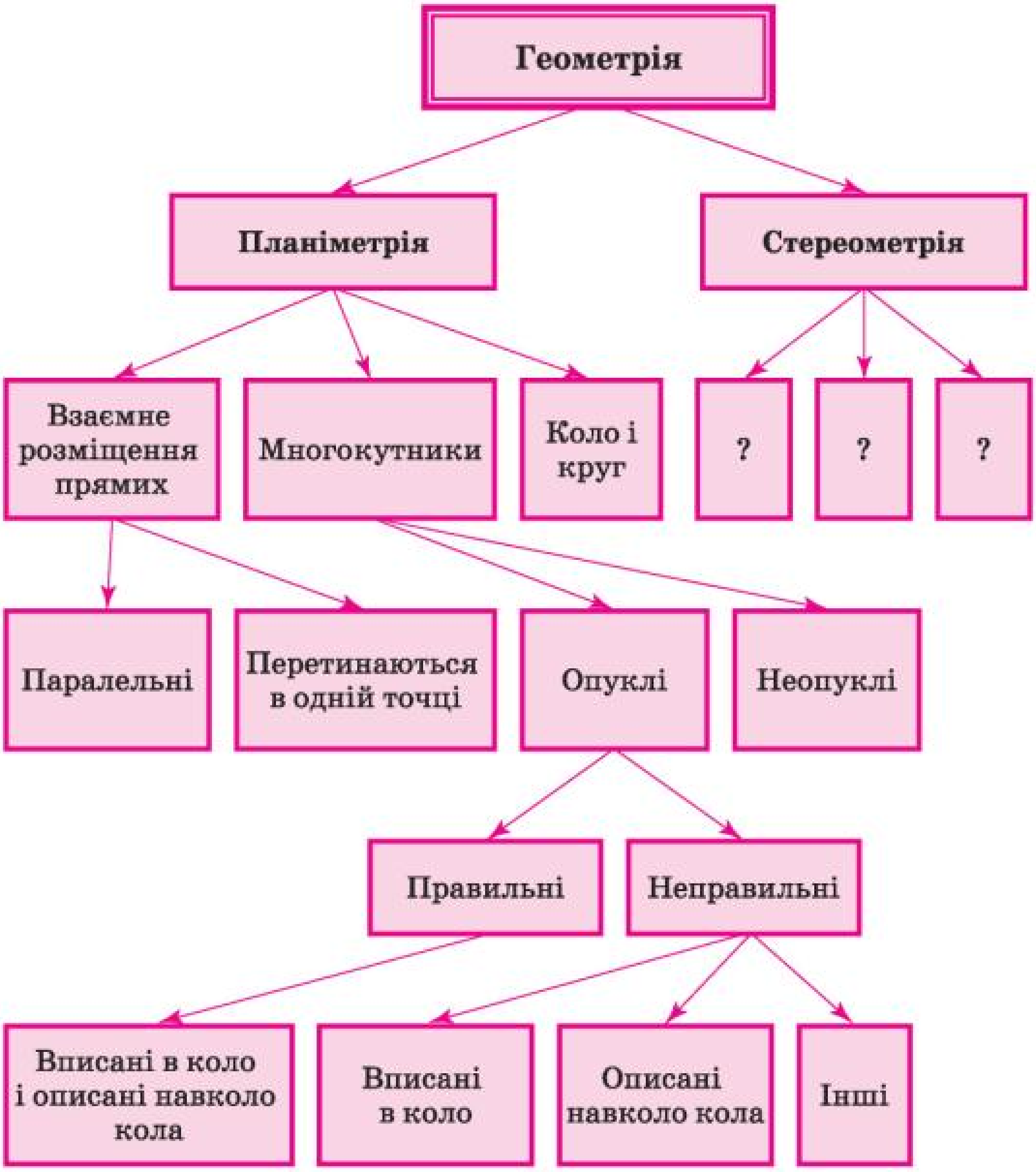
- *Основні поняття стереометрії*
- *Аксіоми стереометрії*
- *Наслідки з аксіом стереометрії*
- *Просторові геометричні фігури*
- *Побудова найпростіших перерізів:*
  - *куба*
  - *прямокутного паралелепіпеда*
  - *піраміди*

Опрацювавши цей модуль, ви дізнаєтеся:

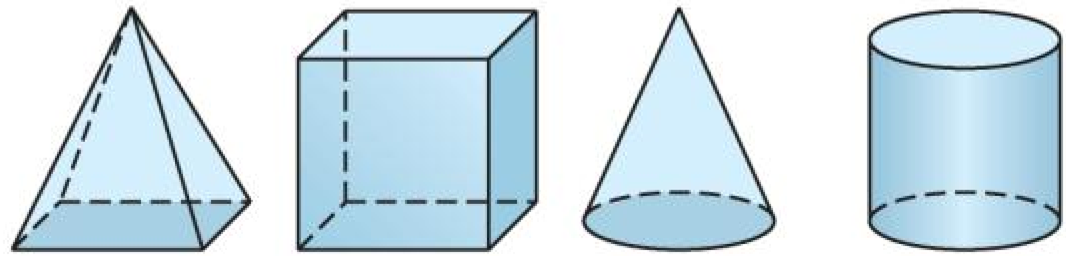
- які поняття в стереометрії є неозначуваними, а які – означуваними;
- яка логічна побудова стереометрії;
- які аксіоми закладено в структурну будову стереометрії;
- як аксіоми впливають на подальшу побудову геометрії;
- які основні властивості мають найпростіші фігури простору;
- як визначається єдина площина;
- чим відрізняються плоскі фігури від неплоских;
- як виконують переріз фігури;
- як побудувати переріз куба, піраміди, паралелепіпеда площиною, яка проходить через три точки;
- як побудувати переріз куба, піраміди, паралелепіпеда площиною, яка проходить через пряму і точку поза нею.

§ 2.1. Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії

Як говорилось у § 1.1, геометрія – це наука про властивості геометричних фігур, яка складається з двох частин: *планіметрії* та *стереометрії*. Планіметрію – розділ геометрії, у якому вивчають властивості фігур на площині, ви вже вивчили. У модулі 1 систематизовано й узагальнено факти і властивості для таких фігур. Стереометрію вивчають у старших класах. Це розділ геометрії, у якому вивчають властивості фігур у просторі. Схематично це виглядає так:



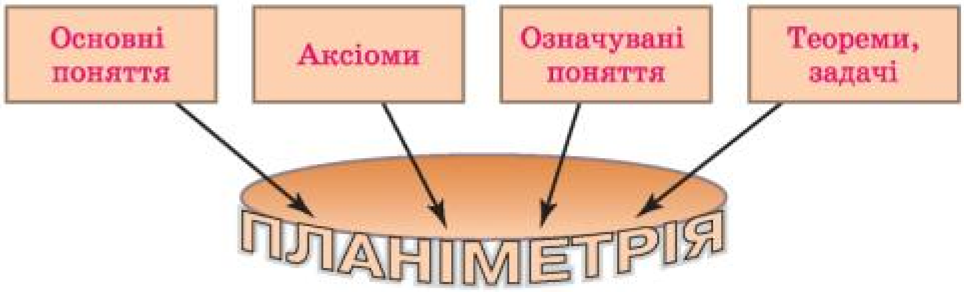
Стереометрія складає другу частину геометрії. Фігури, які вивчаються в ній, також називаються *геометричними фігурами* або ж *просторовими*. На рисунку 2.1 зображено деякі просторові фігури: піраміда, паралелепіпед, конус, циліндр.



а *б* *в* *г*

Рис. 2.1

Нагадаємо, що структура логічної побудови планіметрії має вигляд:



Оскільки стереометрія – друга складова геометрії, то вона будується так само. Деякі поняття є *основними* (*найпростішими*, *неозначуваними*). Для них формулюються основні властивості – *аксіоми,* а далі розглядаються інші означувані поняття та їхні властивості.

Зрозуміло, що всі фігури, які розглядалися на площині, можна розглядати й у просторі. Тому основні фігури (поняття) планіметрії – точка і пряма – автоматично стають основними фігурами стереометрії. Описуються вони так само. У просторі розглядається ще одна основна фігура – *площина.* Її можна уявити як ідеально гладеньку поверхню дошки, поверхню аркуша паперу, які продовжені в усі сторони до нескінченності. Площину розуміють також як множину точок.

На базі основних понять визначаються інші основні означувані поняття: відстань між точками, відрізок, промінь, трикутник і т. д.

Пряма – підмножина точок площини, відрізок – підмножина точок прямої. Деяка підмножина точок площини є плоским трикутником, чотирикутником і т. д., а деякі – неплоскими фігурами. Простір складається з нескінченної множини точок.

Отже, у стереометрії основними фігурами (поняттями) є *точка, пряма* і *площина*. Ці поняття *неозначувані.* Кожна просторова геометрична фігура складається з множини точок. Розглянемо куб на рисунку 2.2. У нього 8 вершин (точки), 12 ребер (частини прямих) і 6 граней (частини площин). Гранями куба є квадрати – фігури планіметрії.

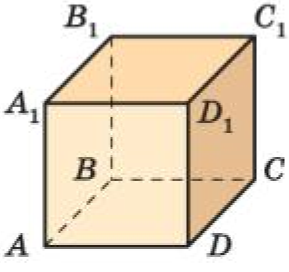


Рис. 2.2

У стереометрії розглядається більше однієї площини. Простір складається з безлічі площин, прямих і точок. Тому всі аксіоми планіметрії (див. § 1.1) мають місце і в стереометрії. Однак при цьому ***деякі з них набувають іншого змісту***. Так, аксіома I_1 у планіметрії стверджує, що існують точки поза даною прямою ***на площині***, у якій лежить пряма. Саме в такому розумінні ця аксіома застосовувалась у процесі побудови геометрії на площині. Тепер ця аксіома стверджує взагалі існування точок, які не лежать на даній прямій ***у просторі***. З неї безпосередньо не випливає, що існують точки поза даною прямою на площині, у якій лежить пряма. Це потребує вже спеціального доведення.

Формулювання деяких аксіом планіметрії як аксіом стереометрії потребують уточнення. Це стосується, наприклад, аксіом II_2, IV_2, IV_3, V_1. Наведемо ці уточнені формулювання.

II_2. Пряма, ***що належить площині***, розбиває цю площину на дві півплощини.

IV_2. Від будь-якої півпрямої ***на площині, що містить її,*** у задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою за 180°, і до того ж тільки один.

IV_3. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому ***в даній площині*** в заданому розміщенні відносно даної півпрямої ***в цій площині***.

V_1. ***На площині*** через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більше як одну пряму, паралельну даній.

Зрозуміло, що оскільки збільшилася кількість основних фігур, то з'явилися нові аксіоми про їхні властивості:

1\. *Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй* (рис. 2.3, *а*).

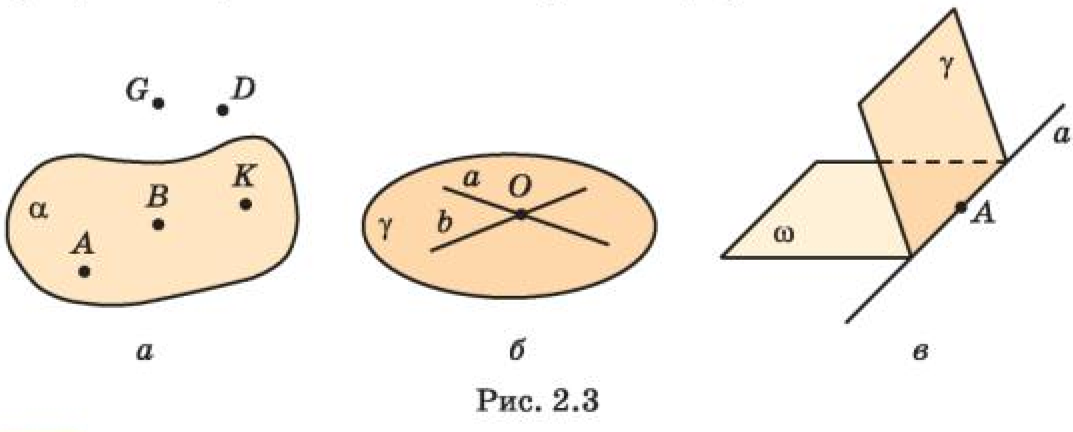


Рис. 2.3

2. *Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину і до того ж тільки одну* (рис. 2.3, *б*).

3. *Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку* (рис. 2.3, *в*).

Аксіома 1 вказує на те, що будь-яка площина весь простір не вичерпує. Є точки простору, які їй не належать. Аксіома 2 стверджує, що дві прямі, які перетинаються у просторі, завжди визначають єдину площину. З аксіоми 3 випливає, що якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони мають безліч спільних точок, які утворюють пряму, що містить цю точку.

Ці три аксіоми доповнюють п'ять груп аксіом планіметрії і разом з ними утворюють аксіоматику стереометрії. Аксіому 1 стереометрії віднесемо до групи *аксіом належності* (позначимо I_3), а аксіоми 2 і 3 – до групи *аксіом взаємного розміщення* (відповідно позначимо II_3, II_4).

Площини позначаються малими літерами грецького алфавіту α, β, γ, ...; точки – великими літерами латинського алфавіту A, B, C, ...; прямі – малими літерами латинського алфавіту a, b, c, ... або двома великими літерами латинського алфавіту AB, CD, ...

Для коротких записів тверджень використовують символи «$\in$» – належить, «$\notin$» – не належить, «$\subset$» – підмножина тощо.

Короткі записи взаємного розміщення точок, прямих і площин:

1. Точка A належить прямій a (точка A лежить на прямій a, пряма a проходить через точку A). Позначення: $A \in a$.

2. Точка A не належить прямій a (точка A не лежить на прямій a, пряма a не проходить через точку A). Позначення: $A \notin a$.

3. Точка A належить площині α (точка A лежить на площині α, площина α проходить через точку A). Позначення: $A \in \alpha$.

4. Пряма a належить площині α (пряма a лежить на площині α, площина α проходить через пряму a). Позначення: $a \subset \alpha$.

Тоді, використовуючи рисунок 2.3, аксіоми можна записати так:

I_3. Існують точки $\{A, B, K, ...\} \in \alpha$ і точки $\{G, D, ...\} \notin \alpha$.

II_3. Якщо $a \subset \gamma$, $b \subset \gamma$ і $a \cap b = O$, то γ – єдина.

II_4. Якщо $A \in \omega$ і $A \in \gamma$, то $\omega \cap \gamma = a$, причому $A \in a$.

Площини зображають по-різному. На рисунку 2.4 показано деякі приклади різних зображень площин на аркуші паперу.

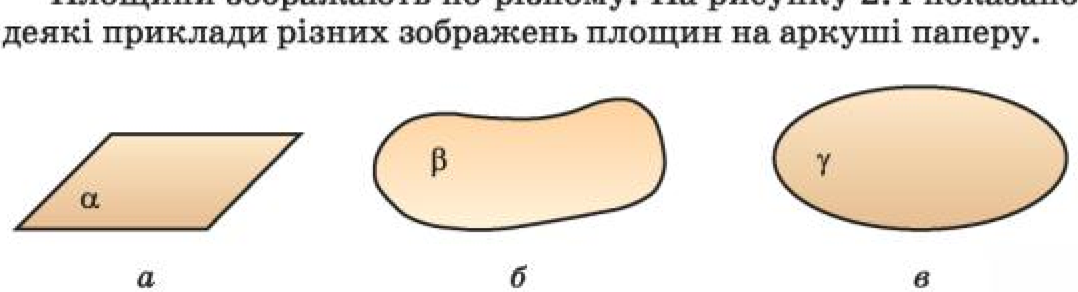


Рис. 2.4

Далі у стереометрії будемо використовувати всі означувані поняття планіметрії, доповнювати їх новими, які є, власне, стереометричними, формулювати та доводити властивості просторових фігур.

Як бачимо, різниці між логічною побудовою планіметрії і стереометрії немає, відрізняються вони між собою лише деяким змістом основних понять, аксіом, означень, теорем.

Задача 1.

Точки A, B, C, D не лежать на одній площині. Доведіть, що прямі AB і CD не перетинаються.

Доведення

Доведемо методом від супротивного. Припустимо, що прямі AB і CD перетинаються (рис. 2.5). Тоді, за аксіомою II_3, через них можна провести площину, якій належатимуть ці прямі. Це означає, що точки A, B, C, D теж належать цій площині, що суперечить умові. Припущення неправильне. Прямі AB і CD не перетинаються, що й вимагалося довести.

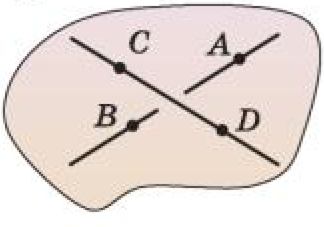


Рис. 2.5

Зауважимо, що шкільний курс геометрії присвячений евклідовій геометрії. І хоча із часом геометрія Евкліда отримала багато нових доповнень, уточнень, корекцій як у предметному змісті, так і в методах дослідження, її продовжують з великою шаною називати *евклідовою геометрією*. Такий авторитет вона заслужила через практичне застосування в реальному житті. Нею користуються технічні науки, картографія, геодезія, астрономія та інші науки.

Вправи

2.1°. Укажіть кількість точок, що належать площині ω (рис. 2.6).

А) Одна; Б) дві; В) три; Г) 2012; Д) безліч.

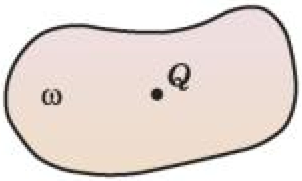


Рис. 2.6

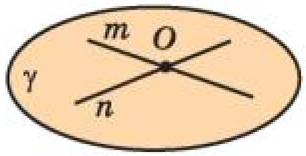


Рис. 2.7

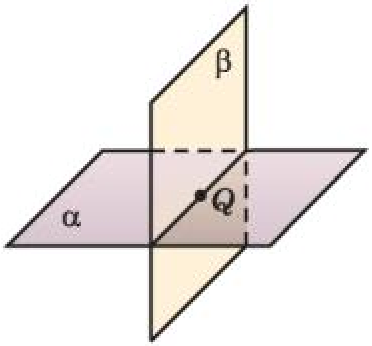


Рис. 2.8

2.2°. На рисунку 2.7 зображено дві прямі m і n, що перетинаються в точці O та визначають площину γ. Укажіть, яка кількість прямих, що проходять через точку O, лежить на площині γ.

А) Жодної; В) дві; Д) безліч.
Б) одна; Г) три;

2.3°. Виберіть для двох різних площин α і β однакові за змістом твердження.

1) Площини α і β перетинаються;
2) площини α і β мають лише одну спільну точку;
3) площини α і β мають спільну точку;
4) площини α і β мають не більше двох спільних точок;
5) площини α і β мають спільну пряму.

А) 1, 2 і 4; Б) 1, 3 і 5; В) 2, 4 і 5; Г) 2, 3 і 4; Д) 1, 3 і 4.

2.4°. Дві різні площини мають спільну точку Q. Визначте, скільки прямих, які проходять через точку Q, є спільними для площин α і β (рис. 2.8).

А) Одна; В) три; Д) безліч.
Б) дві; Г) жодної;

2.5°. Площини перетинаються. Визначте кількість спільних прямих, які вони можуть мати.

А) Одну; В) три; Д) десять.
Б) дві; Г) безліч;

2.6°°. Доведіть, що дві прямі в просторі не можуть перетинатися більше ніж в одній точці.

2.7°°. Точки A, B, C лежать у кожній з двох різних площин. Доведіть, що ці точки лежать на одній прямій.

2.8•. Дано дві площини, які перетинаються по прямій a, і пряму b, яка лежить в одній із цих площин і перетинає другу. Доведіть, що прямі a і b перетинаються.

2.9••. Дано три різні площини, які попарно перетинаються. Доведіть, що коли дві з прямих перетину цих площин перетинаються, то третя пряма проходить через точку їхнього перетину.

§ 2.2. Наслідки з аксіом стереометрії

Проаналізувавши все сказане раніше, можна стверджувати, що логічна побудова геометрії має вигляд:

Почесне місце в геометрії займають аксіоми. Вони виражають найбільш важливі властивості основних геометричних фігур. Усі інші властивості геометричних фігур встановлюються міркуваннями та опираються на аксіоми або на доведені твердження, які опиралися на аксіоми. Такі міркування називають ***доведеннями***. Твердження, істинність якого доведено і яке використовують для доведення інших тверджень, називають ***теоремою***. Найпростішими з них є твердження для основних фігур стереометрії, які називають ***наслідками з аксіом стереометрії***. Розглянемо теореми, які є наслідками аксіом стереометрії.

Теорема 1.
Через пряму і точку, що не належить їй, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Доведення. Нехай BC – дана пряма і A – точка, що не належить їй (рис. 2.9). Через точки A і B проведемо пряму b. Прямі BC і b різні та перетинаються в точці B. За аксіомою II_3, через них можна провести площину α. Доведемо, що вона єдина, методом від супротивного.

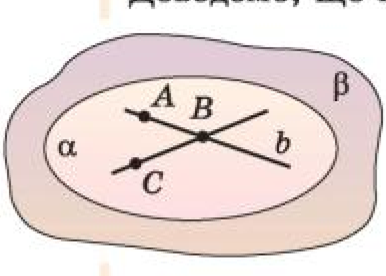


Рис. 2.9

Припустимо, що існує інша площина β, яка містить пряму BC і точку A. Тоді, згідно з аксіомою II_4, площини α і β перетинаються по спільній прямій, якій належать точки A, B, C, що суперечить умові. Припущення неправильне. Площина α – єдина. *Теорему доведено.*

Теорема 2.
Якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма належить цій площині.

Доведення. Нехай задано пряму a, площину α і точки A та B прямої a, які належать α (рис. 2.10). Виберемо точку C, що не належить прямій a. Через точку C і пряму a проведемо площину β. Якщо α і β збіжаться, то пряма a належить площині α. Якщо ж площини α і β різні і мають дві спільні точки A і B, то вони перетинаються по прямій a_1, що містить ці точки. Отже, через дві точки A і B проходять дві прямі a і a_1, що суперечить аксіомі належності I_2. Тому a і a_1 – збігаються. Але оскільки a_1 належить площині α, то і пряма a теж належить α. *Теорему доведено.*

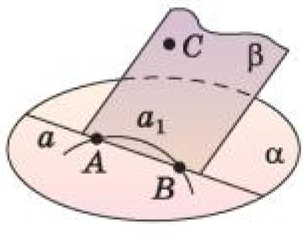


Рис. 2.10

Теорема 3.
Через три точки, що не належать одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Доведення. Нехай A, B, C – задані точки (рис. 2.11). Проведемо через точки A і C пряму b, а через точки A і B – пряму a. Прямі a і b різні та мають спільну точку A. Через них можна провести площину α. Доведемо, що вона єдина, методом від супротивного. Припустимо, що існує інша площина β, що містить точки A, B, C. Тоді, за теоремою 2, прямі a і b належать площині β. Отже, площини α і β мають дві спільні прямі a і b, які перетинаються, що суперечить аксіомі II_3. Отже, площина α – єдина. *Теорему доведено.*

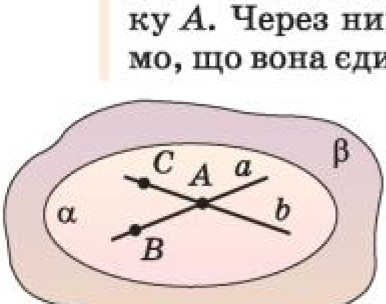


Рис. 2.11

Зауважимо, якщо площина визначена трьома точками, які не лежать на одній прямій, наприклад A, B, C, то у такому випадку користуються позначенням: (ABC). Читається: «площина, яка задана точками A, B і C», або скорочено «площина ABC».

Якщо грань многогранника – чотирикутник, наприклад $ABCD$, то вибирають запис площини довільною трійкою його вершин. Наприклад, (BCD), (ACD) чи (ABC). Однак інколи у записі площини залишають усі чотири вершини, наприклад ($ABCD$).

Задача 1.

Чи можна через точку перетину двох даних прямих провести третю пряму, яка б не лежала з ними в одній площині?

Розв'язання	Чому саме так?
Через прямі a і b (рис. 2.12), які мають спільну точку O, можна провести площину α. Візьмемо точку B, яка не належить α. Через точки O і B проведемо пряму c. Пряма c не лежить на площині α, бо якби пряма c належала площині α, то і точка B належала б площині α. Отже, через точку перетину прямих a і b можна провести третю пряму, яка не лежить з ними в одній площині. *Відповідь.* Можна.	Очевидно, що точки площини задаватимуть прямі, які будуть належати цій самій площині. Якщо ж взяти точку перетину двох прямих на площині та точку поза площиною, то через будь-які дві точки простору можна провести пряму. Ця пряма матиме лише одну спільну точку з площиною, а значить, буде її перетинати.

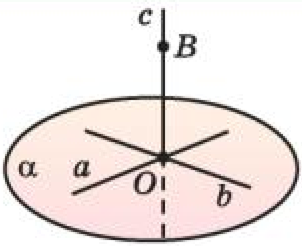


Рис. 2.12

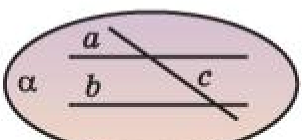


Рис. 2.13

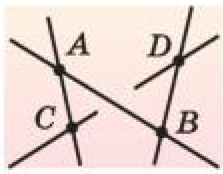


Рис. 2.14

Задача 2.

Доведіть, що всі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині.

Доведення

Оскільки прямі a і b паралельні, то, за означенням, ці прямі лежать в одній площині α (рис. 2.13). Довільна пряма c, яка перетинає a і b, має з площиною α дві спільні точки – точки перетину. Згідно з теоремою 2, ця пряма належить площині α. Отже, всі прямі, які перетинають дві паралельні прямі, лежать в одній площині, що й вимагалося довести.

Задача 3.

Доведіть, що коли прямі AB і CD не лежать в одній площині, то прямі AC і BD теж не лежать в одній площині.

Доведення	Чому саме так?
Доведемо методом від супротивного. Припустимо, що прямі AC і BD лежать в одній площині (рис. 2.14). Тоді точки A, B, C, D належать цій площині, а тому прямі AB і CD належать цій площині, що суперечить умові. Припущення неправильне, тому прямі AC і BD не належать одній площині, що й вимагалося довести.	Під час доведення належності чи неналежності часто використовують метод доведення від супротивного. У цьому випадку він одразу виводить на суперечність, а значить – доводить вимогу задачі.

Задача 4.

Скільки всього існує різних площин, які проходять через пряму і точку в просторі?

Розв'язання	Чому саме так?
Якщо в просторі дано пряму і точку, що лежить на ній, то ними визначається безліч площин, оскільки через пряму проходить безліч різних площин. Якщо ж точка не лежить на прямій, то за наслідком з аксіом стереометрії таку площину можна побудувати лише одну. *Відповідь.* Безліч або одна.	Взявши поза цією прямою довільну точку, ми кожного разу матимемо іншу площину, яка не збігатиметься з раніше побудованою. Таких площин – безліч. Через дану точку поза прямою можна побудувати або пряму, що перетинатиме дану пряму, або пряму, паралельну даній. Обидва випадки задають одну площину.

Вправи

2.10°. Виберіть чотири твердження, які визначають єдиність площини.

А) Будь-які дві точки простору;
Б) будь-яка пряма простору і точка на ній;
В) будь-яка пряма простору і точка поза нею;
Г) будь-які три прямі простору;
Д) будь-які три точки простору;
Е) будь-які дві паралельні прямі;
Є) будь-які дві прямі;
Ж) будь-які дві прямі, що перетинаються.

2.11°. Укажіть площини, яким належить точка P (рис. 2.15).

1) (SAB); 2) (SBC); 3) (SAC); 4) (ABC).

А) 1 і 2; Б) 2 і 3; В) 3 і 4; Г) 1 і 4.

2.12°. Укажіть кількість площин, які можна провести через три точки, що лежать на одній прямій.

А) Одну; В) нескінченну кількість; Д) три.
Б) дві; Г) скінченну кількість;

2.13°. Укажіть пряму перетину площин (CMD) і (MAD), що зображені на рисунку 2.16.

А) CD; Б) MC; В) MA; Г) DA; Д) MD.

2.14°. На двох ребрах піраміди позначено точки M і N (рис. 2.17). Укажіть площину, в якій лежить пряма MN.

А) (TRS); Б) (PTS); В) (PRS); Г) (PTR).

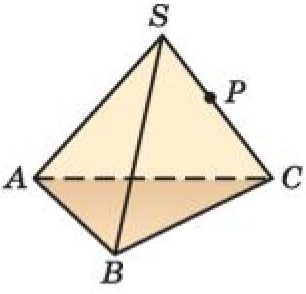


Рис. 2.15

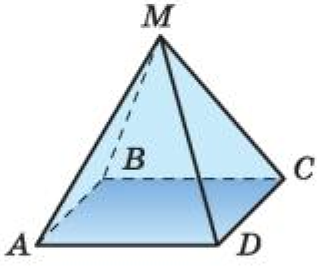


Рис. 2.16

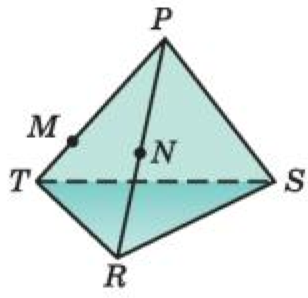


Рис. 2.17

2.15°°. Визначте кількість різних площин, які можна провести через п'ять точок, якщо чотири з них лежать на одній площині (рис. 2.16).

А) Одну; В) п'ять; Д) сім.
Б) чотири; Г) шість;

2.16°°. За рисунком 2.16 вибрано площини, що перетинаються по прямих, які містять ребра піраміди. Визначте серед нижченаведених тверджень правильні.

1) (MAB) і (MBC); 3) (MBD) і (MAC); 5) (MBC) і (MAD);
2) (MAB) і (MCD); 4) (MAB) і (BCD); 6) (MBD) і (ABD).

А) 1 і 3; Б) 2 і 5; В) 3 і 6; Г) 1 і 4; Д) 2 і 6.

2.17°°. Визначте прямі, з якими може перетинатися пряма MN (рис. 2.17).

1) PR; 2) PS; 3) PT; 4) TS; 5) RS; 6) TR.

А) 1, 2 і 4; Б) 2, 3 і 5; В) 3, 4 і 5; Г) 1, 3 і 6; Д) 2, 4 і 6.

2.18°°. Виберіть дві площини, яким належить точка Q (рис. 2.18).

А) (ABC); В) (MBC); Д) (MAD).
Б) (MAB); Г) (MCD);

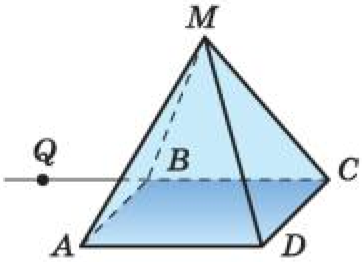


Рис. 2.18

2.19°°. Дано трапецію $ABCD$ і точку O, що належить основі BC (рис. 2.19). Визначте два твердження, за якими можна довести, що всі вершини трапеції лежать в одній площині α.

А) $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $AB \subset \alpha$;
Б) $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $O \in \alpha$;
В) $A \in \alpha$, $D \in \alpha$, $O \in \alpha$;
Г) $C \in \alpha$, $D \in \alpha$, $A \in \alpha$;
Д) $BC \subset \alpha$, $O \in BC$, $O \in \alpha$.

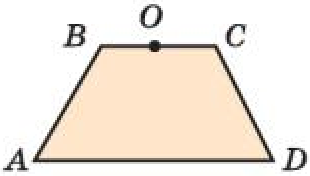


Рис. 2.19

2.20•. Три прямі, які проходять через точку O, перетинають четверту пряму в точках A, B і C. Доведіть, що точки A, B, C і O лежать в одній площині.

2.21•. Дві вершини і точка перетину медіан трикутника лежать у площині δ. Доведіть, що й третя вершина трикутника належить площині δ.

2.22•. Доведіть, що через пряму можна провести дві різні площини.

2.23•. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку поза прямою, лежать в одній площині.

2.24•. Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Скільки можна провести різних площин, які проходять через три з цих точок?

2.25•. Скільки площин можна провести через:
1) одну точку; 2) дві точки; 3) три точки?

2.26•. Доведіть, що коли діагоналі чотирикутника перетинаються, то його вершини лежать в одній площині.

2.27••. Точки A, B, C не лежать на одній прямій. $M \in AB$, $K \in AC$, $X \in MK$. Доведіть, що точка X належить площині (ABC).

2.28••. Через вершину A ромба $ABCD$ проведено пряму a, яка паралельна діагоналі BD. Доведіть, що прямі a і CD перетинаються.

§ 2.3. Перерізи

Аналізуючи навколишній світ і систематизуючи його предмети за формою, переконуємося, що багато предметів «перерізані» або «склеєні». Роз'єднуючи їх, маємо поверхню, яку називають їх ***перерізом***.

З перерізами зустрічаються у різних ситуаціях: у побуті, столярстві, токарстві і т. д. Розв'язуванням задач на ***перерізи*** геометричних фігур або інших тіл займаються у кресленні, в конструкторській практиці. Перерізи виконують для просторових геометричних фігур.

Розглядатимемо перерізи трьох просторових фігур: піраміди, куба і прямокутного паралелепіпеда (їх відносять до многогранників; з поняттям многогранника ознайомимося пізніше). Для введення поняття перерізу геометричної фігури нагадаємо поняття про відрізок, який перетинає або не перетинає пряму: якщо у заданій площині кінці відрізка лежать у різних півплощинах відносно заданої прямої, то відрізок перетинає пряму, якщо ж в одній, – то ні. Аналогією такої ситуації у просторі є площина і відрізок, тобто їхнє взаємне розміщення. Кожна площина розбиває простір на два півпростори, а кінці відрізка можуть лежати у різних півпросторах (рис. 2.20, *а*) відносно деякої площини, на площині (рис. 2.20, *б*) або в одному півпросторі (рис. 2.20, *в*).

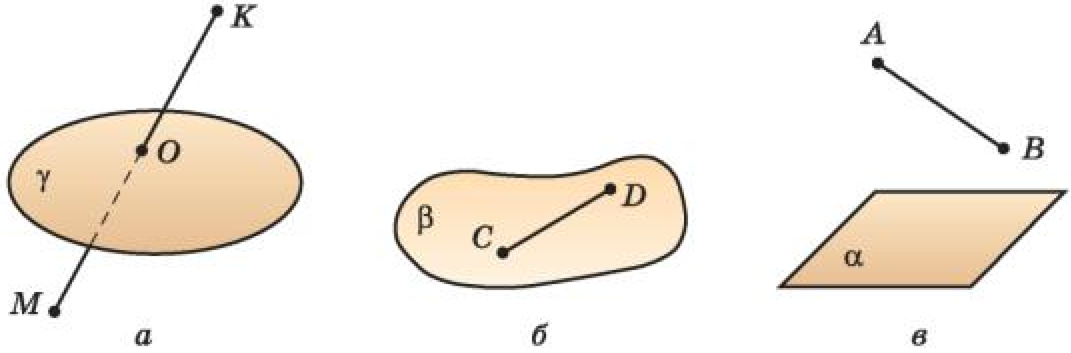


Рис. 2.20

Якщо жодна з двох точок не належить площині, а відрізок, що їх сполучає, має з цією площиною спільну точку, то говорять, що дані точки лежать по різні боки відносно площини, або відрізок перетинає площину. Якщо ж принаймні дві точки просторової геометричної фігури лежать по різні боки від площини, то говорять, що площина цю фігуру перетинає. У такому разі таку площину називають *січною*.

Фігура, яка складається з усіх спільних точок геометричної фігури і січної площини, називається ***перерізом геометричної фігури***. На рисунку 2.21 перерізи зображено кольором.

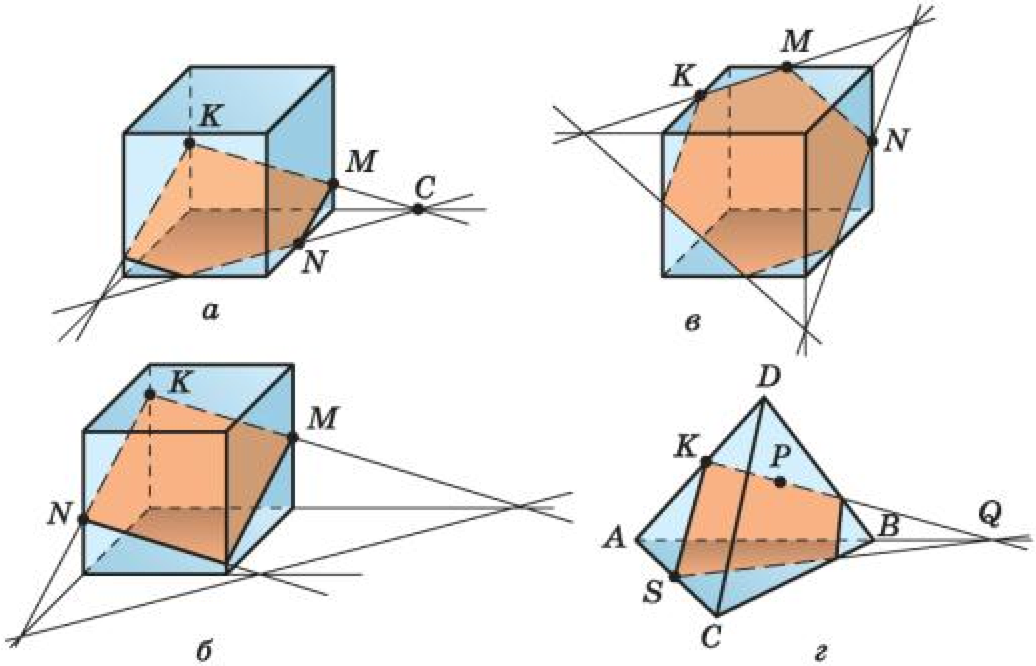


Рис. 2.21

Переріз задають умовою задачі. Залежно від цих умов і виконують побудову перерізу. Враховуючи зміст вивченого, будемо розв'язувати задачі, в яких переріз задається трьома точками чи прямою і точкою поза нею. З перерізами нам доведеться працювати майже в усьому курсі стереометрії.

Існують різні методи побудови перерізів. Найбільш поширений у практиці вивчення курсу геометрії середньої школи – *метод слідів*. Розглянемо його, з'ясуємо, у чому полягає суть цього методу.

Якщо площина грані многогранника і площина перерізу мають дві спільні точки, то вони перетинаються по прямій, що проходить через ці точки. Цю пряму називають *лінією перетину* даних площин.

Площина перерізу многогранника має спільні прямі з площинами граней многогранника. Пряму, по якій площина перерізу перетинає площину будь-якої грані многогранника, називають *слідом площини перерізу*. Слідів стільки, скільки площин граней перетинаються з площиною перерізу.

Під час побудови перерізу варто пам'ятати:
- через дві точки, що належать площині, проходить тільки одна пряма, і ця пряма теж належить цій площині;
- щоб побудувати лінію перетину двох площин, необхідно відшукати дві точки, які належать обом площинам, і через них провести лінію перетину;
- при побудові перерізів многогранників січною площиною треба відшукати відрізки, по яких січна площина перетинається з гранями многогранника.

Розглянемо приклади побудови перерізу многогранника січною площиною.

Задача 1.

Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через середини ребер зі спільною вершиною.

Побудова

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – заданий куб (рис. 2.22). Виберемо одну з вершин, наприклад A, яка є спільною для трьох ребер AB, AA_1 і AD. Позначимо на цих ребрах точки M, N і P відповідно, які є їхніми серединами. Точки M, N і P не лежать на одній прямій, а тому визначають січну площину (MNP). Точки M і P – спільні точки площини перерізу і грані $ABCD$, тому $PM = (MNP) \cap (ABCD)$, PM – сторона перерізу.

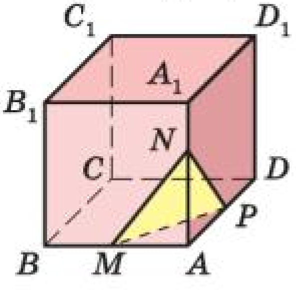


Рис. 2.22

Аналогічно $PN = (MNP) \cap (AA_1D_1D)$ і $MN = (MNP) \cap (ABB_1A_1)$, тому PN і MN – дві інші сторони перерізу. Отже, $\triangle MNP$ – шуканий переріз.

Задача 2.

Побудуйте переріз піраміди $MABC$ площиною, що проходить через ребро MA та середину ребра BC.

Побудова

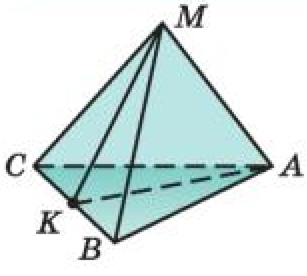


Рис. 2.23

Площина перерізу задається прямою MA і серединою ребра BC (позначимо її точкою K) (рис. 2.23). (MAK) – площина перерізу. Знайдемо прямі перетину цієї площини з площинами (ABC) і (MBC). Ними будуть відповідні прямі AK і KM, а $\triangle MAK$, утворений перетином прямих MA, AK і KM, – шуканий переріз.

Задача 3.

Побудуйте переріз піраміди $DABC$ площиною, що проходить через три точки, які лежать відповідно на ребрах AD, DC, BC.

Побудова

Розглянемо випадок, коли жодна з прямих, що проходять через ці точки, не буде паралельною сторонам граней.

Нехай $M \in AD$, $N \in DC$, $P \in BC$, α – січна площина, що проходить через задані точки M, N і P. Побудуємо переріз, виконуючи послідовно кроки:

1. $M \in (ADC)$, $N \in (ADC)$, тому $MN \subset (ADC)$; $MN = \alpha \cap (ADC)$.
2. $N \in (BDC)$, $P \in (BDC)$, тому $NP \subset (BDC)$; $NP = \alpha \cap (BDC)$.

Ми знайшли дві сторони фігури перерізу: відрізки MN і NP (рис. 2.24, *а*). Точка P – спільна точка двох площин (ABC) і (MNP). Такі площини (за аксіомою II_4) перетинаються по прямій, що проходить через точку P. Для побудови такої прямої потрібна друга точка.

3. Площини (ADC) і (ABC) перетинаються по прямій AC. MN, за умовою, не паралельна AC і $MN \subset (ADC)$, тому $MN \cap AC = S$ (рис. 2.24, *б*).
4. Пряма SP – лінія перетину площин (MNP) і (ABC). Перетин цієї прямої з ребром AB дає точку Q, яка є вершиною перерізу. Отже, чотирикутник $MNPQ$ – шуканий переріз (рис. 2.24, *в*).

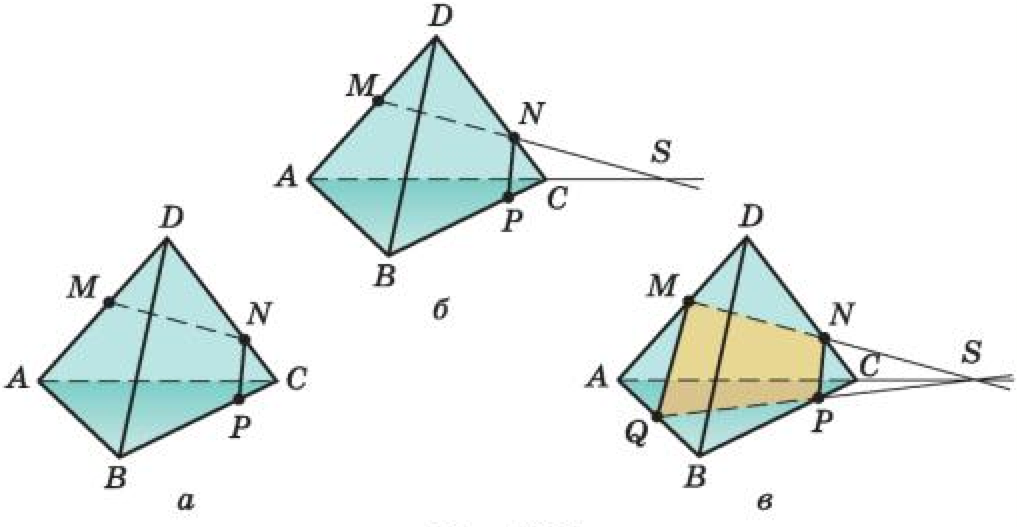


Рис. 2.24

Задача 4.

Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через середини M і N ребер AD і BB_1 і точку P перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.25, *а*).

Побудова

Позначимо січну площину $\alpha = (MNP)$. Виконаємо послідовно кроки, шукаючи фігуру, утворену площиною перерізу.

1. Знайдемо точку перетину прямої NP з площиною (AA_1D_1D). Ця пряма лежить у площині (BB_1D_1D), яка перетинається з площиною (AA_1D_1D) по прямій DD_1. Точка K_1 – точка перетину прямих NP і DD_1. Точка K_1 – шукана (рис. 2.25, *б*).

2. Аналогічно знаходимо точку K_2, як точку перетину прямої NP з площиною $(ABCD)$. Точка K_2 – шукана.

3. Площина α перетинає площину (AA_1D_1D) по прямій K_1M, а площину $(ABCD)$ – по прямій K_2M. Прямі K_1M і K_2M перетинають ребра прямокутного паралелепіпеда A_1D_1 і AB у точках K_3 і K_4 відповідно (рис. 2.25, *в*).

4. Пряма K_3P перетинає ребро прямокутного паралелепіпеда B_1C_1 у деякій точці K_5 – останній вершині перерізу (рис. 2.25, *в*).

Отже, п'ятикутник $MK_3K_5NK_4$ – шуканий переріз (рис. 2.25, *г*).

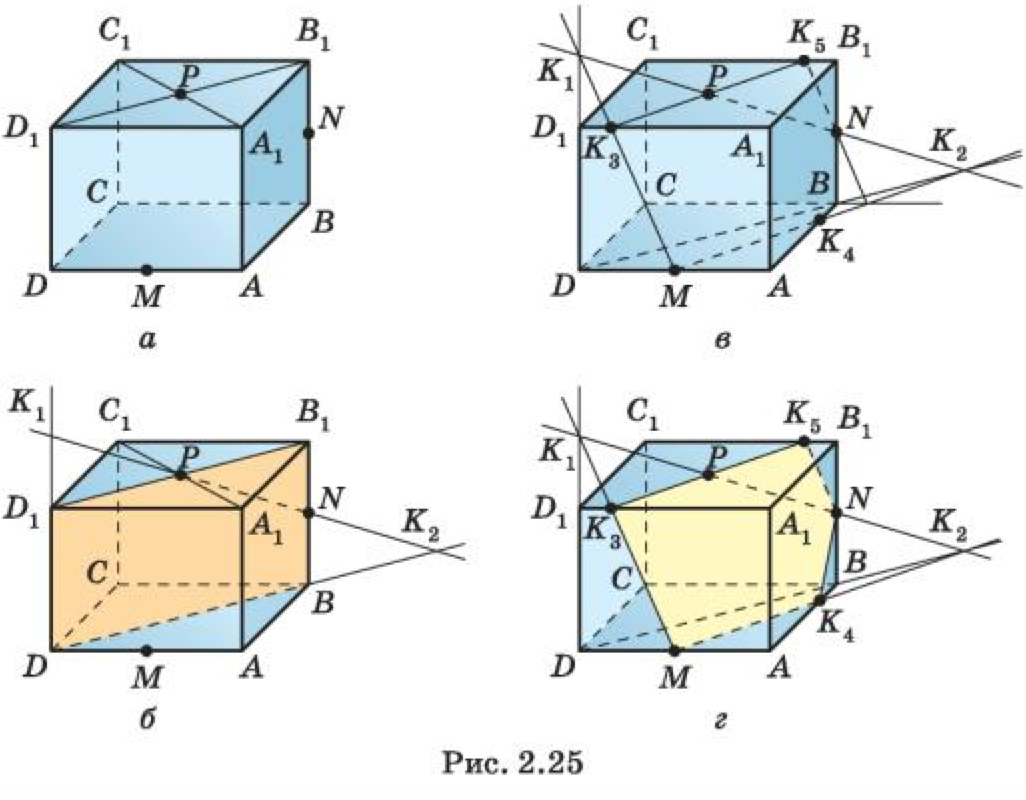


Рис. 2.25

Наведемо короткі описи побудови перерізу куба площиною, що проходить через три точки.

Задача 5.

Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точки M, N, P, які належать відповідно ребрам AD, DD_1, CC_1.

Побудова

Січна площина (MNP) (рис. 2.26).

1) Точки N і P лежать у (PDC). Проведемо пряму PN, $PN \cap DC = E$.

2) Точки E, M лежать у (ABC). Проведемо пряму EM, $EM \cap AB = K$, $EM \cap BC = F$.

3) Точки F, P лежать у (BB_1P), $FP \cap BB_1 = Q$.

4) $PNMKQ$ – шуканий переріз.

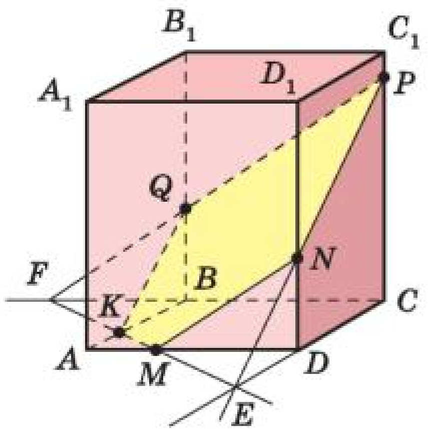


Рис. 2.26

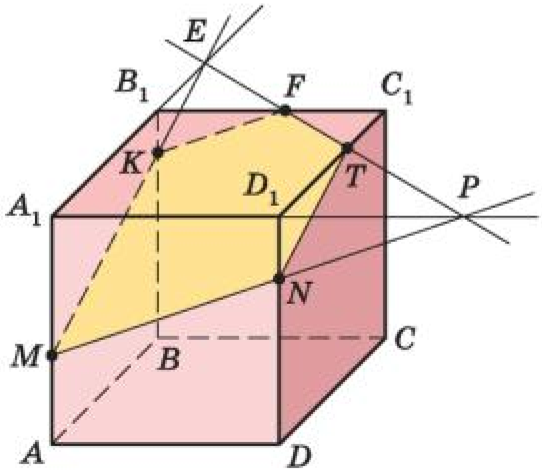


Рис. 2.27

Задача 6.

Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точки K, M, T, які належать відповідно ребрам BB_1, AA_1, D_1C_1.

Побудова

Січна площина (KMT) (рис. 2.27).

1) Точки M і K лежать у (AA_1B_1), $KM \cap A_1B_1 = E$.

2) Точки E, T лежать у $(A_1B_1C_1)$, $ET \cap B_1C_1 = F$, $T \cap A_1D_1 = P$.

3) Точки M, P лежать у (AA_1D_1), $MP \cap DD_1 = N$.

4) $MKFTN$ – шуканий переріз.

Задача 7.

Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точки K, M, N, які належать відповідно ребрам CC_1, B_1C_1, DC.

Побудова

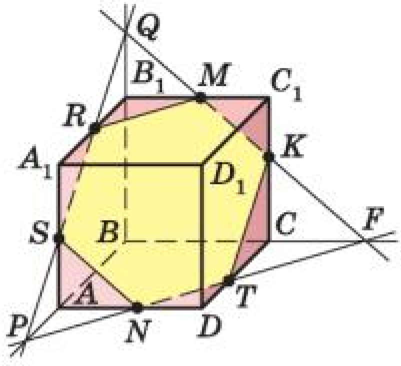


Рис. 2.28

Січна площина (KMN) (рис. 2.28).

1) Точки M, K лежать у (B_1C_1C), $MK \cap BB_1 = Q$, $MK \cap BC = F$.
2) Точки F і N лежать у (ABC), $FN \cap DC = T$, $FN \cap AB = P$.
3) Точки Q і P лежать у (ABB_1), $QP \cap AA_1 = S$, $QP \cap A_1B_1 = R$.
4) $MKTNSR$ – шуканий переріз.

Вправи

2.29°. Виберіть площини, які перетинає пряма KL у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.29).

А) (ABC); Б) $(A_1D_1B_1)$; В) (B_1BD); Г) (ADD_1); Д) (ABB_1).

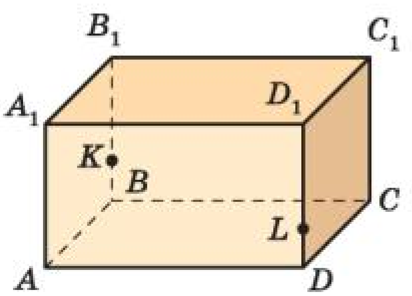


Рис. 2.29

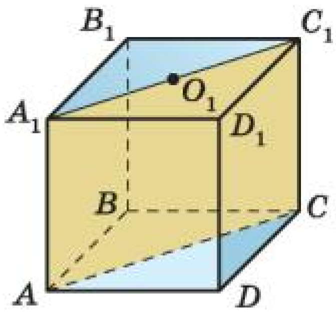


Рис. 2.30

2.30°. На рисунку 2.30 зображено переріз прямокутного паралелепіпеда, який проходить через три точки. Укажіть такі трійки точок, для яких переріз побудовано правильно.

1) A, C і O_1; 2) B, A і C; 3) A, A_1 і C; 4) O_1, C_1 і A; 5) C, C_1 і A_1.

А) 1, 2 і 4; Б) 2, 3 і 5; В) 1, 3 і 4; Г) 3, 4 і 5; Д) 1, 2 і 5.

2.31°. На ребрах піраміди $DABC$, зображеної на рисунку 2.31, позначено точки M і N. Виберіть трикутник, який може бути перерізом цієї піраміди.

А) $\triangle DMN$; Б) $\triangle MNC$; В) $\triangle MNA$; Г) $\triangle MNB$.

2.32°°. У кубі проведено пряму MN (рис. 2.32). Ідентифікуйте парами правильні твердження.

А) $(ABC) \cap MN$; 1) S;
Б) $(A_1B_1C_1) \cap MN$; 2) N;
В) $(AA_1B_1) \cap MN$; 3) P;
Г) $(DD_1C_1) \cap MN$. 4) M.

А	
Б	
В	
Г	

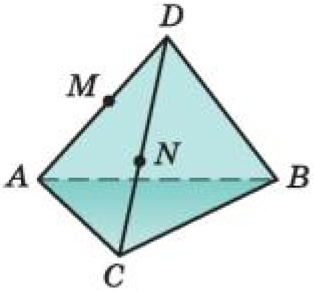


Рис. 2.31

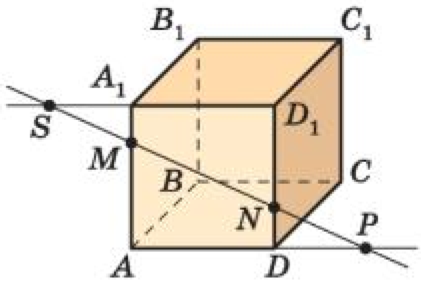


Рис. 2.32

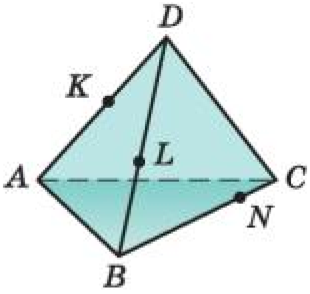


Рис. 2.33

2.33°°. Укажіть площини, які перетинатимуться по прямій DN (рис. 2.33).

1) (ABC); 2) (DCB); 3) (ALD); 4) (ADN); 5) (KDC).

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 2 і 5; Д) 1 і 4.

2.34°°. Виконайте рисунок 2.34 і побудуйте точку перетину прямої KF з площиною (ADC).

2.35°°. Виконайте рисунок 2.35 і побудуйте точку перетину прямої EF з площиною (ABC).

2.36°°. Виконайте рисунок 2.36 і побудуйте точку перетину прямої PQ з площиною (ABC).

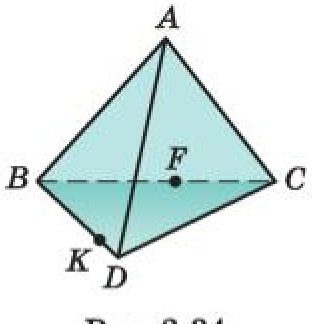


Рис. 2.34

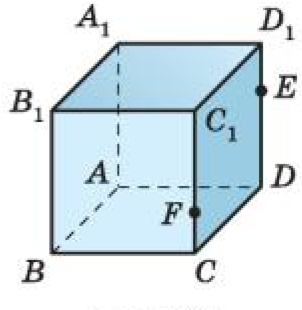


Рис. 2.35

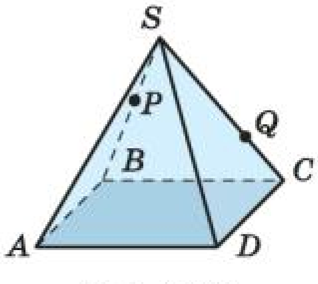


Рис. 2.36

2.37°°. У трикутній піраміді $ABCD$ точка M належить ребру BC (рис. 2.37). Побудуйте лінію перетину площин (AMD) і (CDB).

2.38°°. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажіть лінію перетину площин (ABB_1) і (BCC_1).

2.39•. Побудуйте переріз трикутної піраміди $ABCD$ площиною, що проходить через ребро DC і точку перетину медіан грані ABC.

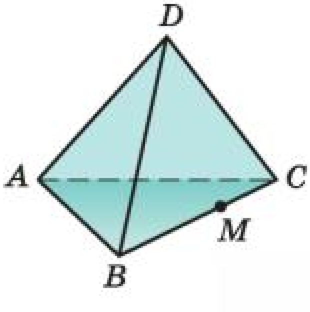


Рис. 2.37

2.40•. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через ребро AB і точку перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$.

2.41•. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда площиною, що проходить через кінці трьох ребер, які виходять з однієї вершини.

2.42•. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через діагональ AD_1 грані AA_1D_1D і вершину B.

2.43••. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через діагональ AD_1 грані AA_1D_1D і середину ребра BB_1.

2.44••. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через вершину B_1 і дві точки M і N, які лежать на ребрах AA_1 і CC_1. Розгляньте різні випадки розміщення точок M і N.

2.45••. Побудуйте переріз трикутної піраміди $ABCD$ площиною, що проходить через три точки K, S і P ($K \in AD$, $S \in AC$, $P \in (ADB)$).

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ

2.1. Чому для розмітки котловану під невелику будівлю користуються натягнутим шнуром?

Вказівка. Перетином двох площин є пряма.

2.2. Під час формування цеглини (або будівельного блока) по паралельних краях форми, наповненої відповідною масою, ковзає прямолінійний брусок. Чому при цьому грань цеглини (блока), що розрівнюється, стає плоскою?

2.3. Столяр перевіряє, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині, прикріпивши до кінців ніжок навхрест дві нитки. На чому ґрунтується така перевірка?

Вказівка. Дві прямі, що перетинаються, визначають площину і до того ж тільки одну.

2.4. Як тесля відпилює частину від дерев'яного бруска, щоб зріз був плоским?

Відповідь. На двох суміжних гранях бруска креслить відрізки, наприклад AB і AC. Потім відпилює так, щоб полотно пилки йшло по цих відрізках. Оскільки пилка буде рухатися по двох відрізках (частинах прямих), які перетинаються, то зріз буде плоским.

2.5. Штативи для багатьох інструментів (фотоапарата, геодезичних приладів – нівеліра, теодоліта та ін.) виготовлено у вигляді триноги. Чому підставка з такою кількістю ніжок є стійкою?

Вказівка. Через три точки, що не лежать на одній прямій, проходить лише одна площина.

2.6. Тесля виявляє недоліки в обробці дерев'яного бруска або дошки, дивлячись уздовж обробленої поверхні. На чому ґрунтується така перевірка?

Вказівка. Якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма належить площині.

2.7. Чому стілець з трьома ніжками, розміщеними по колу, завжди стоїть на підлозі стійко, а з чотирма – не завжди?

Вказівка. Три точки, що не лежать на одній прямій, визначають площину і до того ж тільки одну.

2.8. Чому мотоцикл з коляскою стоїть на дорозі стійко, а для мотоцикла без коляски потрібна додаткова опора?

Вказівка. Три точки, що не лежать на одній прямій, визначають площину і до того ж тільки одну.

2.9. Чому незамкнені двері відчиняються, а замкнені – нерухомі?

Вказівка. Через пряму і точку поза нею можна провести площину і лише одну.

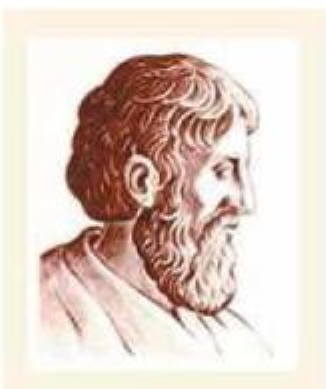
2.10. Скільки приблизно цеглин потрібно для будівництва 18 стовпців висотою 4 м з перерізом у вигляді квадрата зі стороною 7 дм? Розмір цеглини $1 \times 1{,}5 \times 3$ дм. Втрати становлять 5 %.

Відповідь. 8200 цеглин.

Фалес (бл. 624–548 до н. е.)

Від часів греків говорити «математика» – означає говорити «доведення». А початок цьому поклав Фалес.

Е. Куртіус



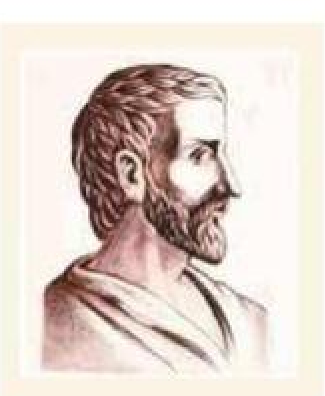
Фалес Мілетський – давньогрецький філософ, математик, астроном, засновник іонійської школи натурфілософії, купець і політичний діяч. Походив зі знатного фінікійського роду. У своєму житті та творчості поєднував питання практики з теоретичними проблемами, що стосувалися проблем Всесвіту. Він багато подорожував, зокрема у молодості відвідав Єгипет, де в школах Мемфіса і Фів вивчав різні науки. Повернувшись на батьківщину, заснував у Мілеті філософську школу. Усі свої натурфілософські пізнання Фалес використовував для створення завершеного філософського вчення. Так, він вважав, що все існуюче породжене водою. Вода – це джерело, з якого все постійно виникає. При цьому вода й усе, що з неї виникло, не є мертвими, вони одушевлені.

Фалес також має великі заслуги у створенні наукової математики. У Фалеса вперше в історії математики зустрічаються доведення теорем. Якщо єгипетських землемірів задовольняла відповідь на питання «як?», то Фалес, мабуть, першим у світі поставив запитання «чому?» і успішно відповів на нього. Нині відомо, що багато математичних правил були відкриті набагато раніше, ніж у Стародавній Греції. Але усі – дослідним шляхом. Строго логічне доведення правильності тверджень на підставі загальних положень, прийнятих за достовірні істини, було винайдено греками. Характерна і зовсім нова риса грецької математики полягає в поступовому переході від одного твердження до іншого за допомогою доведення. Саме такий характер математиці надав Фалес. І навіть сьогодні, приступаючи до доведення, наприклад теореми про властивості ромба, ми, по суті, міркуємо майже так само, як це робили учні Фалеса.

Вважається, що Фалес першим познайомив греків з геометрією. Йому приписують відкриття і доведення ряду теорем: про поділ кола діаметром навпіл; про те, що кут, вписаний у півколо, є прямим; про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника; про рівність вертикальних кутів; про пропорційність відрізків, утворених на прямих, що перетинаються кількома паралельними прямими. Фалес установив, що трикутник повністю визначається стороною і прилеглими до неї кутами.

Фалес відкрив цікавий спосіб визначення відстані від берега до видимого корабля. Деякі історики стверджують, що для цього він використав ознаку подібності прямокутних трикутників. Фалесу приписують також спосіб визначення висот різних предметів, зокрема пірамід, за довжиною тіні, коли сонце піднімається над горизонтом на 45°.

Усі ці досягнення принесли Фалесу славу першого мудреця серед знаменитих «семи мудреців» давності.



Піфагор (бл. 580–500 до н. е.)

Усе – число.

Головний принцип Піфагора

Піфагор народився на острові Самос у сім'ї багатого ювеліра. За багатьма античними свідченнями, новонароджений хлопчик був казково красивий, а незабаром виявив і свої неабиякі здібності.

Піфагор уважно слухав у Мілеті лекції Фалеса і його учня Анаксимандра – видатного філософа, географа та астронома. Багато важливих знань здобув Піфагор за час свого перебування в мілетській школі. Та все ж Фалес порекомендував йому продовжити освіту в Єгипті.

Протягом 22 років Піфагор проходив навчання в храмах Мемфіса, де він ґрунтовно вивчив математику, «науку чисел або всесвітніх принципів». З Мемфіса Піфагор разом з єгипетськими жерцями потрапив у Вавилон, де провів ще 12 років. Тут він, крім математики, астрономії, теорії музики, мав можливість вивчати релігії та культи, проникнути в містерію давньої магії. Деякі історики вважають, що Піфагор ще певний час перебував і в Індії.

Близько 530 р. до н. е. Піфагор з накопиченими знаннями та здобутим досвідом нарешті повернувся на батьківщину. У Кротоні він заснував своєрідне релігійно-етичне братство, або таємний чернечий орден («піфагорійський союз»), члени якого зобов'язувалися вести так званий піфагорійський спосіб життя. Це був одночасно і релігійний союз, і політичний клуб, і наукове товариство. Розпізнавальним знаком членів цього братства була п'ятикутна зірка — пентаграма, яку вони називали символом здоров'я. І якщо хтось із членів братства потрапляв у біду, то лише цього знаку вистачало, щоб йому прийшли на допомогу інші піфагорійці.

Вважають, що Піфагор дав перше доведення теореми, що носить його ім'я (сама теорема була відома набагато раніше). За легендою, Піфагор на честь цього відкриття приніс у жертву бика (дехто, правда, вважає, що бик став жертвою відкриття прямокутного трикутника зі сторонами 3, 4, 5). Причина величезної популярності теореми Піфагора триєдина: простота – краса – значущість. Існує кілька сотень різних доведень цієї теореми (геометричні, алгебраїчні, механічні та ін.).

До числа математичних наук піфагорійці відносили арифметику, геометрію, астрономію і музику. Вони встановили, що висота звучання струни залежить від її довжини, тобто знову від числа, і створили першу математичну теорію музики. Відкриття того факту, що сторона і діагональ квадрата несумірні, стало великою заслугою піфагорійців. При цьому вперше було застосовано метод доведення від супротивного. Це відкриття привело до першої кризи в основах математики, подолання якої у подальшому (Евдокс та ін.) пов'язане з розширенням поняття числа (створення теорії ірраціональних чисел).

Піфагору приписують також теорему про суму внутрішніх кутів трикутника і задачу про покриття площини правильними одноименними многокутниками (можливі лише три варіанти: трикутниками, квадратами і шестикутниками). Є відомості, що Піфагор побудував «космічні» фігури, тобто правильні многогранники (так звані тіла Платона). Але найбільш імовірно, що піфагорійці знали лише три з них: куб, тетраедр і додекаедр. А октаедр та ікосаедр, імовірно, були вперше відкриті Теететом.

Школа Піфагора багато зробила для того щоб геометрія стала наукою. Основною особливістю піфагорійського методу було об'єднання геометрії з арифметикою, за допомогою чого було знайдено спосіб розв'язування задач, які тепер зводяться до квадратних рівнянь, а також геометрично доведено деякі числові рівності. Піфагор багато займався пропорціями та прогресіями і, ймовірно, подібністю фігур. Арифметика як практика обчислень не цікавила Піфагора, і він з гордістю заявляв, що «поставив арифметику вище за інтереси торгівця».

У подальшому ідеї Піфагора розвивали, крім античних учених, видатні дослідники нового часу: Коперник і Кеплер, Дюрер і Леонардо да Вінчі, Еддінгтон і багато інших з тих, хто знайшов у науково-філософському спадку мислителя необхідне підґрунтя для встановлення закономірностей світобудови.

Іменем Піфагора названо кратер на видимій стороні Місяця, а також багато наукових премій і вулиць у різних містах світу.

Запитання для самоконтролю

1. Яка структура шкільного курсу геометрії?
2. Як будується геометрія як наука?
3. Яка різниця між планіметрією і стереометрією?
4. Які геометричні фігури є основними у стереометрії?
5. Яке твердження називають аксіомою?
6. Які геометричні поняття називають означуваними, а які – неозначуваними?
7. Якими аксіомами доповнено стереометрію?
8. Як визначають єдину площину?
9. Які наслідки з аксіом стереометрії ви знаєте?
10. Яке твердження називають теоремою?
11. Які способи доведення теореми ви знаєте?
12. Яку кількість площин можна провести через три точки?
13. Як перевірити, чи належить пряма площині?
14. Який відрізок перетинатиме площину?
15. Що називають перерізом фігури площиною?
16. Які фігури є плоскими, а які – неплоскими?
17. Як визначити пряму перетину площин?
18. Як побудувати переріз методом слідів?

Тест для самоконтролю

Частина 1

Завдання 1–16 мають варіанти відповідей, з яких правильна тільки ОДНА або конкретна кількість. Виберіть правильну відповідь.

1°. Укажіть текстові твердження до скороченого запису «$M \in \alpha$».

А) Точка M належить прямій α;
Б) точка M належить площині α;
В) точка M лежить на прямій α;
Г) пряма α проходить через точку M;
Д) площина α проходить через точку M.

2°. Виберіть твердження, яке інтерпретує зображений рисунок 2.38.

А) $m \in \beta$, $F \in m$, $Q \notin m$;
Б) $m \subset \beta$, $F \in m$, $Q \notin m$;
В) $m \not\subset \beta$, $F \in m$, $Q \notin m$;
Г) $m \subset \beta$, $F \in m$, $Q \in m$;
Д) $m \not\subset \beta$, $F \notin m$, $Q \in m$.

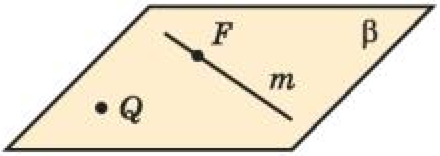


Рис. 2.38

3°. Відомо, що P, Q, S – спільні точки для двох площин α і β. Укажіть два правильні твердження.

А) Площини перетинаються по прямій a, причому $P \in a$, $Q \in a$, $S \in a$;
Б) площини перетинаються по прямій a, причому $P \in a$, $Q \in \alpha$, $S \notin \alpha$;
В) площини не перетинаються по прямій a, причому $P \in a$ і $P \in \beta$, $Q \in a$ і $Q \in \beta$, $S \in a$ і $S \in \beta$;
Г) площини не перетинаються по прямій a, причому $P \in a$, $Q \in a$, $S \in a$ і $\alpha \neq \beta$;
Д) площини перетинаються по прямій a, причому $\alpha \cap \beta = P$, $\alpha \cap \beta = Q$, $\alpha \cap \beta = S$.

4°. Відомо, що точки X_1, X_2, X_3 лежать на одній прямій x. Виберіть правильно зроблений висновок.

А) Через x проходить не більше трьох площин;
Б) через x проходить одна або дві площини;
В) через x проходить безліч площин;
Г) через x проходить дві площини;
Д) через x не проходить жодної площини.

5°. Відомо, що прямі a, b і c не мають спільної точки, однак попарно перетинаються. Укажіть правильне твердження.

А) Прямі a, b і c лежать у двох різних площинах;
Б) прямі a, b і c лежать у трьох різних площинах;
В) прямі a, b і c належать безлічі площин;
Г) прямі a, b і c не можуть лежати в жодній існуючій площині;
Д) прямі a, b і c належать лише одній площині.

6°. У чотирикутнику $ABCD$ деякі вершини лежать у площині α. Укажіть твердження, з яких випливає належність усіх вершин чотирикутника $ABCD$ даній площині.

1) $A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $M \in AC$ і $M \in \alpha$;
2) $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $K \in BC$ і $K \in \alpha$;
3) $B \in \alpha$, $D \in \alpha$, $Q \in BD$ і $Q \in \alpha$;
4) $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \in \alpha$;
5) $C \in \alpha$, $D \in \alpha$, $A \in \alpha$.

А) 1, 2 і 4; Б) 2, 4 і 5; В) 3, 4 і 5; Г) 1, 3 і 5; Д) 2, 3 і 4.

7°. У $\triangle ABC$ проведено середню лінію MN ($M \in AB$, $N \in BC$), на якій лежить точка Q. Визначте правильні твердження щодо розміщення точки Q.

1) $Q \in MB$;
2) $Q \in MN$;
3) $Q \in (MBN)$;
4) $Q \in (AMB)$;
5) $Q \in AC$;
6) $Q \in (BNC)$;
7) $Q \in (CBM)$;
8) $Q \in (ACN)$.

А) 1, 3, 5 і 6;
Б) 2, 3, 5 і 6;
В) 3, 4, 7 і 8;
Г) 4, 5, 6 і 7;
Д) 2, 3, 7 і 8.

8°. Ідентифікуйте до кожного перетину площин пряму їхнього перетину, користуючись зображенням куба (рис. 2.39).

А) $(A_1D_1B_1) \cap (BB_1D)$;
Б) $(A_1B_1C_1) \cap (BB_1C)$;
В) $(BCA_1) \cap (ADD_1)$;
Г) $(A_1C_1B_1) \cap (CC_1D)$;
Д) $(B_1C_1D_1) \cap (AA_1C)$.

1) A_1C_1;
2) C_1D_1;
3) B_1C_1;
4) B_1D_1;
5) A_1D_1.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

9°°. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проведено середню лінію MN ($M \in AB$, $N \in CD$). Укажіть, за якими з умов (А–Д) можна зробити висновок, що трапеція $ABCD$ лежить у даній площині α.

А) $AC \cap BD = O$;
Б) $MN \subset \alpha$;
В) $MN \subset \alpha$ і $A \in \alpha$;
Г) $CD \subset \alpha$ і $N \in \alpha$;
Д) $AB \subset \alpha$ і $M \in \alpha$.

10°°. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перерізали площиною, що проходить через середини трьох ребер, що виходять з вершини A. Визначте вид фігури перерізу.

А) Тупокутний трикутник;
Б) прямокутний трикутник;
В) рівносторонній трикутник;
Г) різносторонній трикутник.

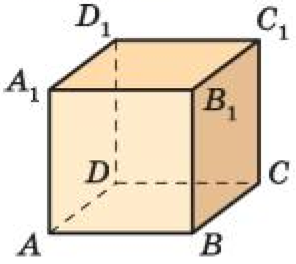


Рис. 2.39

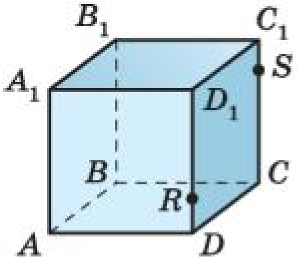


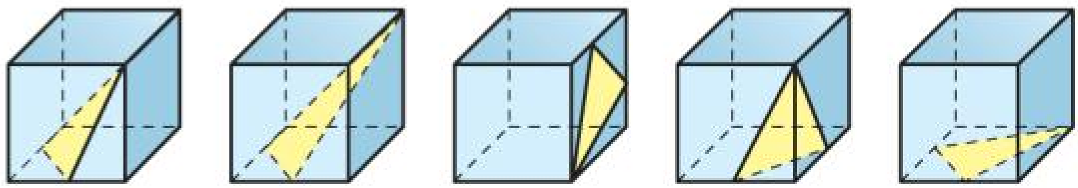
Рис. 2.40

11°°. Виберіть площини, які буде перетинати пряма RS (рис. 2.40).

1) (ABA_1); 2) (DD_1A); 3) (DD_1C_1); 4) (BDD_1); 5) $(A_1B_1C_1)$.

А) 1, 2 і 4; Б) 2, 4 і 5; В) 3, 4 і 5; Г) 1, 3 і 5; Д) 2, 3 і 4.

12°°. Виберіть серед рисунків 2.41 такий, на якому зображено переріз, утворений площиною, що проходить через середини двох суміжних сторін однієї грані та вершину, сусідню до точки перетину ребер, на яких вибрано середини.



А) Б) В) Г) Д)

Рис. 2.41

13°°. Визначте два правильні твердження.

А) Якщо коло має з площиною дві спільні точки, то всі точки цього кола лежать на цій площині;

Б) якщо дві точки – кінці діаметра кола – лежать на площині, то всі точки кола належать цій площині;

В) якщо дві довільні точки кола, що не утворюють діаметр, лежать на площині, то всі точки кола належать цій площині;

Г) якщо хорда кола і точка кола, що не лежить на ній, належать одній площині, то всі точки кола лежать на цій площині;

Д) якщо дві хорди кола належать деякій площині, то всі точки кола лежать на цій площині.

14°°. Відомо, три точки у просторі розміщені так, що через них можна провести не менше 100 різних площин. Визначте правильне доповнення цього твердження.

А) Ці точки лежать в одній площині;

Б) ці точки лежать на одній прямій;

В) ці точки не лежать на одній прямій;
Г) ці точки лежать в одній площині, але на одній прямій;
Д) ці точки лежать в одній площині, але не на одній прямій.

15°°. Відомо, що чотири точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Укажіть пряму перетину (1–6) кожної пари площин, заданих умовами (А–Е).

А) (ABC) і (ABD); 1) AC;
Б) (ACD) і (ABC); 2) AB;
В) (BCD) і (ABC); 3) AD;
Г) (ACD) і (BCD); 4) BD;
Д) (BDC) і (ADB); 5) BC;
Е) (ABD) і (ACD). 6) CD.

А	
Б	
В	
Г	
Д	
Е	

16°°. На ребрах AA_1 і CC_1 прямокутного паралелепіпеда позначено точки P і Q. Визначте прямі, які перетинатиме пряма PQ.

А) AD і B_1C_1; В) CD і A_1B_1; Д) BD і B_1D_1.
Б) AB і C_1D_1; Г) AC і A_1C_1;

● *Частина 2*

Розв'яжіть завдання 17–28 з коротким записом ходу міркувань.

17•. Пряма a перетинає дві сторони $\triangle ABC$. Визначте, чи може пряма a перетинати третю сторону трикутника.

18•. Три прямі, які проходять через точку T, перетинають четверту пряму в точках P, Q і R. Визначте розміщення точок T, P, Q і R.

19•. Діагоналі ромба $PLST$ перетинаються в точці Q. Відомо, що вершини ромба P і L належать деякій площині α. Визначте, чи належатимуть цій площині точки S і T. (Відповідь запишіть у формі «так» чи «ні».)

20•. Визначте розміщення чотирьох точок M, N, B і C, коли відомо, що прямі AB і AC перетинаються з деякою прямою l у точках M і N відповідно.

21•. Дві вершини трикутника і точка перетину медіан лежать в одній площині α. Визначте, чи буде лежати в цій площині точка перетину висот трикутника.

22•. Дано чотири точки X_1, X_2, X_3 і X_4, що не лежать на одній прямій. Запишіть усі можливі площини, які проходять через кожні три з них.

23•. Визначте максимальну кількість площин, які можна провести через чотири точки, якщо жодні три з них не лежать на одній прямій.

24•. Виконайте рисунки до всіх випадків розміщення деякої прямої a і точок B і C, що не лежать на ній.

25•. Побудуйте переріз площиною, що проходить через точки M, N, K (рис. 2.42).

26•. Побудуйте переріз площиною, що проходить через точки S, P, R (рис. 2.43).

27•. Побудуйте переріз площиною, що проходить через точки H, V, W (рис. 2.44).

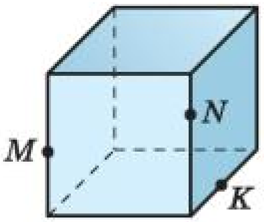


Рис. 2.42

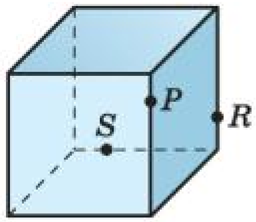


Рис. 2.43

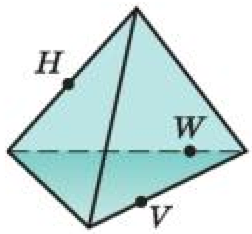


Рис. 2.44

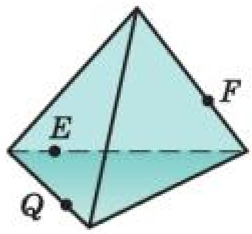


Рис. 2.45

28•. Побудуйте переріз площиною, що проходить через точки E, F, Q (рис. 2.45).

● *Частина 3*

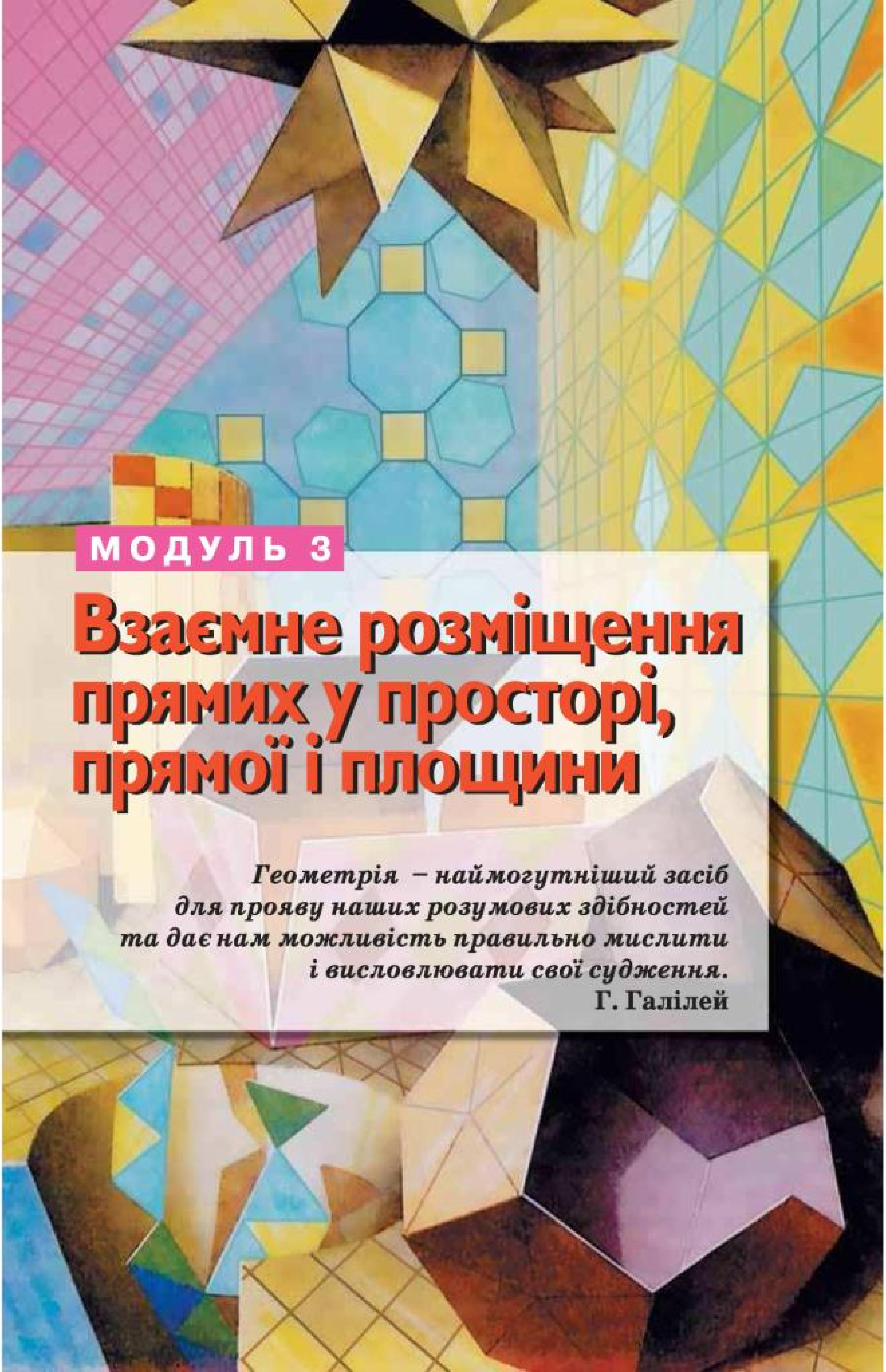
Розв'яжіть завдання 29–32 з повним обґрунтуванням.

29••. Відомо, що дві прямі перетинаються в точці O. Доведіть, що всі прямі, які не проходять через точку O, але перетинають обидві задані прямі, лежать в одній площині.

30••. Доведіть, що коли десять прямих проходять через одну точку і перетинають одинадцяту пряму в інших точках, відмінних від указаної, то всі одинадцять прямих лежать в одній площині.

31••. Побудуйте переріз трикутної піраміди $KLMN$ площиною, яка проходить через точки P, R і S, якщо $P \in LK$, $R \in KN$, $S \in ML$.

32••. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $PRSTP_1R_1S_1T_1$ площиною, яка проходить через точки A, B і C, якщо $A \in PT$, $B \in RR_1$, а точка $C \in (P_1R_1S_1T_1)$.



МОДУЛЬ 3

Взаємне розміщення прямих у просторі, прямої і площини

Геометрія – наймогутніший засіб
для прояву наших розумових здібностей
та дає нам можливість правильно мислити
і висловлювати свої судження.
Г. Галілей

КОРОТКИЙ ЗМІСТ МОДУЛЯ

- *Розміщення двох прямих у просторі*
- *Ознака мимобіжності прямих у просторі*
- *Властивості паралельних прямих простору*
- *Розміщення прямої і площини у просторі*
- *Ознака паралельності прямої і площини*

Опрацювавши цей модуль, ви дізнаєтеся:

- які прямі простору можуть перетинатися, а які – ні;
- як розміщені в просторі прямі, які не перетинаються;
- як побудувати дві паралельні прямі на рисунку;
- як побудувати дві мимобіжні прямі на рисунку;
- як визначити, чи будуть прямі перетинатися;
- як визначити, чи перетинає пряма площину;
- як довести паралельність прямих;
- як довести паралельність прямої і площини;
- як знайти окремі лінійні виміри, користуючись властивостями паралельних прямих;
- як знайти окремі лінійні виміри, користуючись властивостями паралельних прямої і площини.

§ 3.1. Взаємне розміщення прямих у просторі

Якщо розглядати дві прямі на площині, то вони або не перетинаються, або перетинаються лише в одній точці. Ті прямі, які не перетинаються і лежать в одній площині, називають ***паралельними***. А ті, які перетинаються, – мають окрему назву лише в одному випадку, коли перетинаються під прямим кутом. Такі прямі називаються ***перпендикулярними***.

Чи існують у просторі прямі, які перетинаються і які не перетинаються? Відповідь на це запитання дають образи навколишнього світу. Чи мають такі прямі свою назву та як їх розрізняти – ви дізнаєтесь у цьому параграфі.

За аксіомою стереометрії: якщо дві прямі перетинаються, то через них можна провести єдину площину. Це означає, що будь-які дві прямі, які перетинаються, визначають площину, а площини, у свою чергу, – простір.

Отже, у просторі прямі, розміщені в одній площині, можуть перетинатися або бути паралельними. За аксіомою паралельних прямих, через точку поза прямою можна провести єдину пряму, паралельну даній. За наслідком з аксіоми стереометрії: через пряму і точку поза нею можна провести єдину площину. Тому знову ж таки виходить, що дві паралельні прямі задають площину.

Дві прямі у просторі називаються ***паралельними***, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.

Якщо дві довільні прямі a і b простору паралельні, то використовують символ «$\parallel$» і записують «$a \parallel b$» (читають: «пряма a паралельна прямій b», або «прямі a і b – паралельні»). Відрізки, що лежать на паралельних прямих, також називаються ***паралельними***.

Розглянемо модель куба, виготовленого з «дротяних відрізків», які лежать на відповідних прямих. Серед прямих, на яких лежать ребра куба, є такі, що не перетинаються і лежать в одній площині (AB і CD, A_1B_1 і C_1D_1, A_1D_1 і BC і т. д.), тобто – паралельні, однак є й такі, що не перетинаються і не є паралельними (AA_1 і CD, BB_1 і AD, A_1B і C_1D і т. д.). Такі прямі називаються *мимобіжними*.

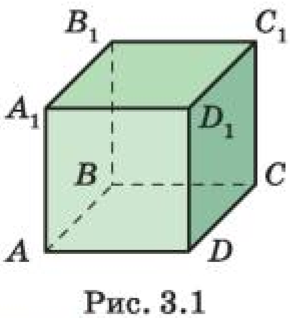


Рис. 3.1

Дві прямі простору, які не перетинаються і не паралельні, називаються ***мимобіжними***.

Зрозуміло, що дві мимобіжні прямі не можуть лежати в одній площині. Тому ще кажуть, що дві прямі мимобіжні, якщо їх не можна помістити в одну площину. Для позначення мимобіжних прямих використовують символ «$\dot{-}$». Наприклад $a \dot{-} b$ (читають: «прямі a і b – мимобіжні» або «пряма a мимобіжна з прямою b»). Окремим випадком розміщення прямих є їх накладання – прямі збігаються.

Отже, розміщення двох прямих у просторі може бути таким:

1) прямі перетинаються, якщо вони мають тільки одну спільну точку;

2) прямі паралельні, якщо вони не перетинаються і лежать в одній площині;

3) прямі мимобіжні, якщо вони не перетинаються і не паралельні;

4) прямі збігаються, якщо вони мають принаймні дві спільні точки.

Розглянемо властивості, якими володіють паралельні прямі у просторі.

Теорема 1.

Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

Доведення. Нехай a довільна пряма простору, A – точка, що не належить їй (рис. 3.2). Через пряму a і точку A можна провести площину. Нехай це буде площина α. На площині α лежить пряма і точка поза нею. Через цю точку можна провести пряму, паралельну даній. Нехай пряма $b \parallel a$ і $A \in b$. Доведемо, що пряма b єдина. Припустимо, що існує інша пряма b_1, яка не збігається з прямою b, паралельна прямій a і проходить через точку A. Оскільки $a \parallel b_1$, то, за означенням, вони лежать в одній площині, наприклад β.

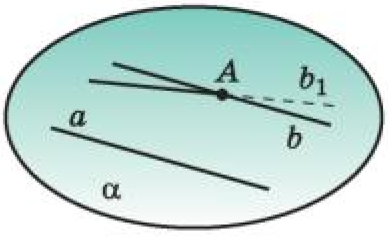


Рис. 3.2

Отже, α і β мають спільну пряму a та точку A, а тому збігаються. У площині α через точку A проходять дві прямі b_1 і b, паралельні прямій a, що суперечить аксіомі паралельності. Одержали протиріччя, яке доводить єдиність прямої b, що й вимагалося довести. *Теорему доведено.*

Теорема 2 (***ознака паралельності прямих***).
Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні між собою.

Доведення. Нехай прямі a і b паралельні прямій c (рис. 3.3). Доведемо, що прямі a і b паралельні. Випадок, коли прямі a, b, c лежать в одній площині, було розглянуто в планіметрії. Цю властивість ще називають ознакою паралельності прямих. Тому вважатимемо, що ці прямі не лежать в одній площині, і доведемо, що така ознака має місце і в просторі.

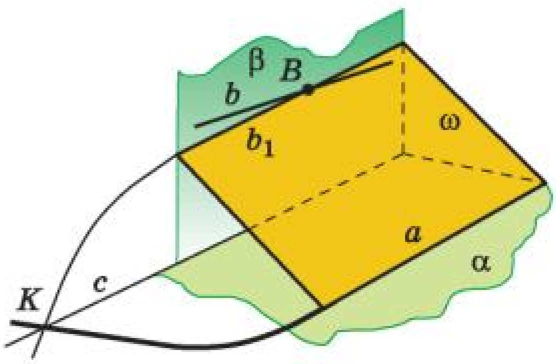


Рис. 3.3

За умовою $b \parallel c$, а тому ці прямі лежать в одній площині, нехай це буде площина β. Аналогічно $a \parallel c$, тому ці прямі лежатимуть у деякій іншій площині – площині α. Виберемо на прямій b точку B. Через пряму a і точку B проведемо площину ω, яка перетне площину β по деякій прямій b_1 (ω і β мають спільну точку B). Оскільки через точку B у площині β вже проходить пряма $b \parallel c$, то $b_1 \nparallel c$, тобто b_1 перетинатиме c у деякій точці K. $K \in c$, а значить $K \in \beta$ і $K \in \alpha$. Але $K \in b_1$, тому $K \in \omega$.

Тобто точка K належить трьом площинам α, β і ω. Але всі точки, спільні для площин α і ω, лежать на прямій a. Тому пряма a проходить через точку K, що суперечить умові $a \parallel c$. Отже, b_1 не перетинає пряму c, тобто b_1 паралельна c. Але в площині β через точку B проходить тільки одна пряма, паралельна прямій c.

Тому прямі b_1 та b збігаються. Оскільки пряма b_1 не перетинає площину α, то пряма b_1 не перетинатиме прямої a і належить площині ω. Отже, $b_1 \parallel a$, тобто $b \parallel a$, що й вимагалося довести. *Теорему доведено.*

Властивість мимобіжних прямих виражає ***ознака***: **якщо одна із двох прямих лежить у деякій площині, а друга пряма перетинає цю площину в точці, яка не лежить на першій прямій, то ці прямі мимобіжні** (пропонуємо довести самостійно).

Вправи

3.1°. Відомо, що прямі a і b лежать на одній площині. Укажіть можливі взаємні розміщення цих прямих.

А) a і b перетинаються; Г) a і b не паралельні;

Б) a і b не перетинаються; Д) a і b мимобіжні.

В) a і b паралельні;

3.2°. Дві прямі k і l паралельні прямій x. Укажіть взаємне розміщення прямих k і l.

А) Мимобіжні; Б) паралельні; В) перетинаються.

3.3°. На рисунку 3.4 зображено дві площини α і β, які перетинаються по прямій b. Укажіть взаємне розміщення прямих a і c, коли відомо, що $a \parallel b$, $c \nparallel b$.

А) Паралельні; Б) мимобіжні; В) перетинаються.

3.4°. Точка M не лежить на площині трикутника ABC (рис. 3.5). Доберіть мимобіжні до прямих (А–В) серед (1–3).

А) MA; 1) AB;
Б) MC; 2) AC;
В) MB. 3) BC.

А	
Б	
В	

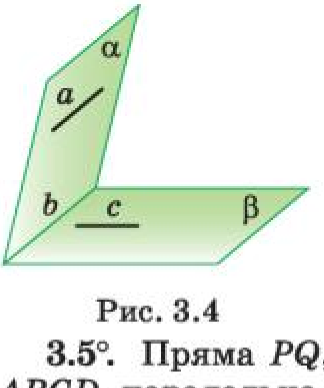


Рис. 3.4

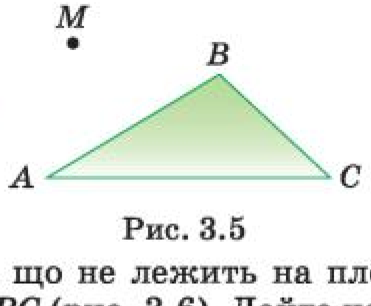


Рис. 3.5

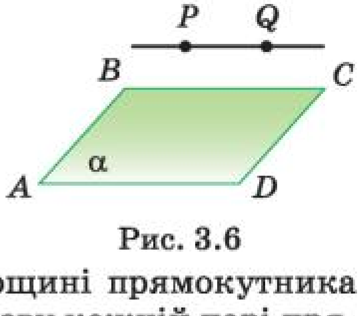


Рис. 3.6

3.5°. Пряма PQ, що не лежить на площині прямокутника $ABCD$, паралельна BC (рис. 3.6). Дайте назву кожній парі прямих.

А) PQ і AB; 1) Мимобіжні;
Б) PQ і CD; 2) паралельні;
В) PQ і AD. 3) перетинаються.

А	
Б	
В	

3.6°. Точка M знаходиться поза площиною трикутника ABC (рис. 3.7). На серединах відрізків MA, MC і MB позначено точки K, F і P відповідно. Виберіть три пари паралельних прямих.

1) KP;	3) KF;	5) PM;	7) AB;	9) AC.
2) PF;	4) KM;	6) FM;	8) BC;	
А) 1 і 6;	В) 2 і 4;	Д) 3 і 9;	Є) 5 і 8;	
Б) 1 і 7;	Г) 2 і 8;	Е) 3 і 5;	Ж) 4 і 9.	

3.7°°. Прямі m і n перетинаються, а пряма d паралельна прямій n. Укажіть можливе взаємне розміщення прямої m по відношенню до d.

А) Паралельні; Б) перетинаються; В) мимобіжні.

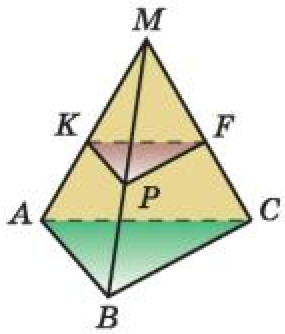


Рис. 3.7

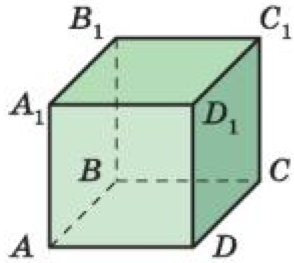


Рис. 3.8

3.8°°. На рисунку 3.8 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Виберіть таке взаємне розміщення прямих у просторі (А–В), яке б відповідало чотирьом із п'яти заданих пар прямих (1–5), і таке, яке не підходить жодній парі прямих.

А) Паралельні;
Б) мимобіжні;
В) перетинаються.

1) D_1D і B_1C;
2) B_1C_1 і D_1C;
3) A_1B і D_1C;
4) AD і D_1B_1;
5) CD і BC_1.

А				
Б				
В				

3.9°°. Два паралелограми $ABCD$ і $ABKZ$ належать різним площинам. Укажіть паралельні прямі.

А) DA і KB; В) CD і KZ; Д) CB і KB.
Б) BC і AZ; Г) DA і ZA;

3.10°°. Визначте геометричну фігуру, яку утворюють усі відрізки, що сполучають будь-які точки двох ребер прямокутного паралелепіпеда, які лежать на мимобіжних прямих.

А) Трикутник; В) площина; Д) відрізок.
Б) чотирикутник; Г) трикутна піраміда;

3.11•. Доведіть, що через пряму можна провести дві різні площини.

3.12•. Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Скільки можна провести різних площин, які проходять через три з цих точок?

3.13•. Точки A, B, C лежать у кожній з двох різних площин. Доведіть, що ці точки лежать на одній прямій.

3.14•. Дано дві площини, які перетинаються по прямій a, і пряму b, яка лежить в одній з цих площин і перетинає другу. Доведіть, що прямі a і b перетинаються.

3.15•. Дано три різні площини, які попарно перетинаються. Доведіть, що коли дві з прямих перетину цих площин перетинаються, то третя пряма проходить через точку їхнього перетину.

3.16•. Доведіть, що коли діагоналі чотирикутника перетинаються, то його вершини лежать в одній площині.

3.17••. Трикутник MNZ і паралелограм $MNPS$ не належать одній площині. Точки Q і R – відповідно середини сторін MZ і NZ. Доведіть паралельність прямих QR і PS.

3.18••. Паралелограм $ABCD$ і трапеція $MBCN$ (BC – основа трапеції) не належать одній площині. Доведіть паралельність прямих MN і AD.

3.19••. Трапеції $ABCD$ і $PZCD$ (CD – спільна основа трапецій) не належать одній площині. Точки Q і R – середини відрізків CB і DA, а точки M і N – середини відрізків DP і CZ відповідно. Доведіть паралельність прямих MN і QR.

3.20••. Точки K, Z, M, N є серединами відрізків SA, AC, BC, SB трикутної піраміди $SABC$. Знайдіть периметр чотирикутника $KZMN$, якщо бічні ребра дорівнюють b, а сторони основи – a.

3.21••. Чотири точки простору A, B, C, D не належать одній площині. Точки M, N, K, Z – середини відповідних відрізків AD, BD, BC, AC, причому $CD = AB$. Доведіть перпендикулярність прямих MK і NZ.

§ 3.2. Взаємне розміщення прямої і площини у просторі

Пряма є підмножиною точок площини. Вона складається з безлічі точок. Такі міркування приводять до того, що пряма і площина можуть мати безліч спільних точок, одну або жодної спільної точки. Випадки, коли пряма належить площині і коли пряма перетинає площину, нам знайомі (рис. 3.9). Інші випадки розміщення прямої і площини розглядатимемо в наступних параграфах.

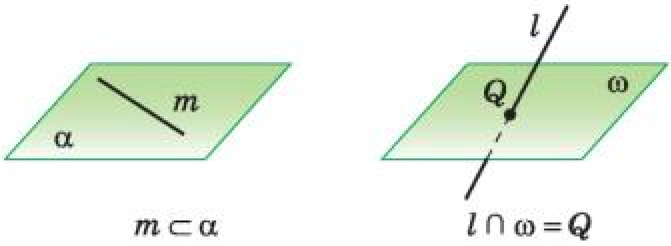


Рис. 3.9

Теорема 3.

Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає площину, то й друга пряма також перетинає цю площину.

Доведення. Нехай дано паралельні прямі a і b, одна з них – a, перетинає площину α у точці A (рис. 3.10). Доведемо, що друга пряма b також перетинає площину α, тобто має з нею спільну точку і до того ж тільки одну.

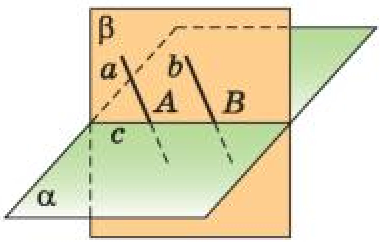


Рис. 3.10

Позначимо β – площину, якій належать паралельні прямі a і b. Оскільки різні площини α і β мають спільну точку A, то, за аксіомою стереометрії, вони мають деяку спільну пряму c. На площині β одна з паралельних прямих a перетинає пряму c. Тому її перетинає друга, паралельна їй, пряма b. Точка B є точкою перетину прямих b і c – спільною точкою прямої b і площини α.

Припустимо, що пряма b має з площиною α ще якусь іншу спільну точку. Тоді, за наслідком з аксіом стереометрії, b належить α. Оскільки пряма b належить і площині β, то вона збігається з прямою c, яка є лінією перетину площин α і β. З цього випливає, що пряма a одночасно і перетинає пряму b, і паралельна їй. Отримали суперечність, що й вимагалося довести. *Теорему доведено.*

Задача.

Відрізок AB перетинає площину α в точці O. Через його кінці A, B і точку K, яка ділить відрізок у відношенні $5 : 2$, рахуючи від точки A, проведено паралельні прямі, які перетинають площину відповідно в точках A_1, B_1, K_1. Знайдіть довжину відрізка BB_1, коли відомо, що $AA_1 = 45$ см, $KK_1 = 10$ см.

Розв'язання

Оскільки прямі AA_1, BB_1, KK_1 паралельні і перетинають пряму AB, то вони лежать в одній площині ω (рис. 3.11). Точки A_1, B_1, K_1 лежать на одній прямій – прямій перетину площини ω із площиною α.

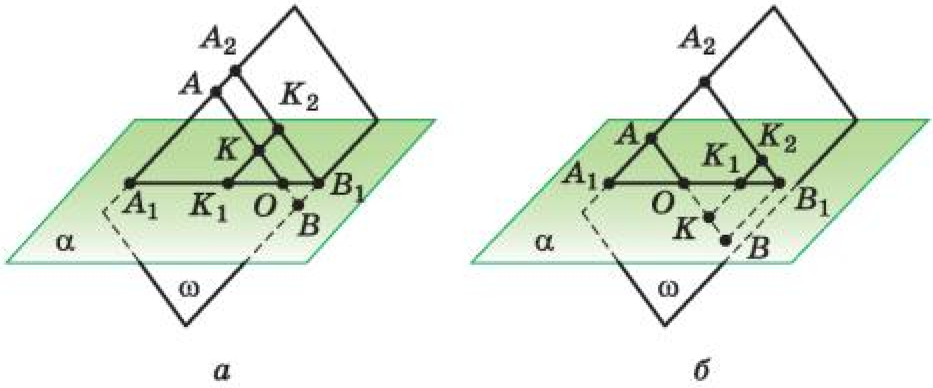


Рис. 3.11

Проведемо у площині ω через точку B_1 пряму $B_1A_2 \parallel BA$, де A_2 – точка перетину цієї прямої з прямою AA_1, а K_2 – з прямою KK_1. Оскільки чотирикутники BB_1K_2K і BB_1A_2A – паралелограми, то $KK_2 = AA_2 = BB_1$. Позначимо довжину цих відрізків через x.

Тоді $A_1A_2 = AA_2 + AA_1 = x + 45$, $K_1K_2 = KK_2 \pm KK_1 = x \pm \pm 10$ (взаємне розміщення точок K, K_1, K_2 може бути різне: рис. 3.11, *а* і рис. 3.11, *б*). З подібності трикутників $B_1K_1K_2$ та $B_1A_1A_2$ маємо: $\frac{K_1K_2}{A_1A_2} = \frac{B_1K_2}{B_1A_2} = \frac{BK}{BA} = \frac{2}{5+2} = \frac{2}{7}$.

Отже, $\frac{x \pm 10}{x + 45} = \frac{2}{7}$, звідси $x = 4$ см або $x = 32$ см.

Відповідь. 4 см або 32 см.

Зауважимо, що пряма перетинає площину, коли у неї з площиною одна спільна точка.

Вправи

3.22°. Виберіть правильне твердження.

А) Через точку простору, що не лежить на прямій, можна провести безліч прямих, які паралельні даній;

Б) дві прямі, які паралельні третій, перетинаються в одній точці;

В) якщо дві точки прямої належать площині, то вона її перетинає;

Г) через пряму і точку поза нею можна провести дві різні площини;

Д) через точку простору, що не лежить на площині, можна провести безліч прямих, які перетинатимуть цю площину.

3.23°. Точки A і C належать площині α, точки B і D належать площині β. Укажіть чотири прямі, які перетинатимуть площину β.

А) AC; Б) CD; В) BD; Г) AB; Д) BC; Е) AD.

3.24°. Відрізки AB, AC, KB, KD перетинають площину α. Виберіть відрізки, які перетинатимуть площину α.

1) AK; 2) AD; 3) BD; 4) KC; 5) CD.

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 2 і 5; Д) 1 і 4.

3.25°. Відомо, що прямі AB, AC і AD, які лежать на одній площині, перетинають площину α в точках B_1, C_1, D_1. Виберіть фігуру, яку можна отримати, послідовно сполучивши точки B_1, C_1, D_1.

А) Трикутник; Б) пряма; В) відрізок; Г) промінь.

3.26°. Трикутник ABC перетинає площину α в точках B_1 і C_1 (рис. 3.12). Знайдіть довжину відрізка B_1C_1, коли відомо, що $AB_1 : B_1B = 2 : 3$, а $BC = 15$ см, $BC \parallel B_1C_1$.

А) 5 см; Б) 10 см; В) 7,5 см; Г) 6 см; Д) 9 см.

3.27°°. Через точку поза площиною проведено прямі OA, OB, OC, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Точки K, M, N – середини відрізків OA_1, OB_1, OC_1 відповідно. Знайдіть відношення периметрів трикутників KMN і $A_1B_1C_1$ (рис. 3.13).

А) 1 : 3; Б) 2 : 3; В) 1 : 2; Г) 1 : 4; Д) 1 : 10.

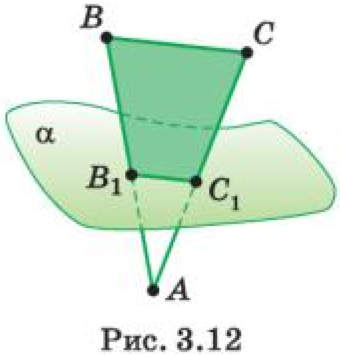


Рис. 3.12

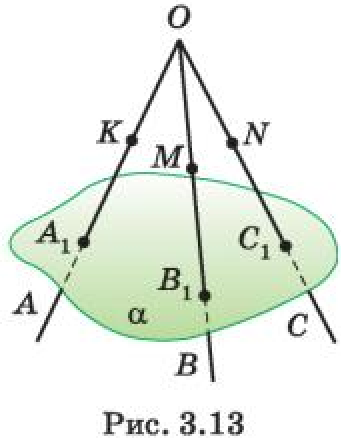


Рис. 3.13

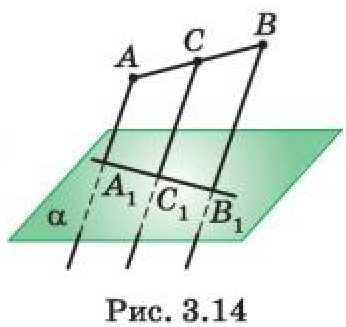


Рис. 3.14

3.28°°. Через кінці відрізка AB (рис. 3.14), який не перетинає площину α, та його середину C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка CC_1, якщо $AA_1 = 12$ см, $BB_1 = 16$ см.

А) 6 см; Б) 8 см; В) 12 см; Г) 14 см; Д) 20 см.

3.29°°. Дві вершини A і B трикутника ABC (рис. 3.15) належать площині α, а C – не належить їй. Через точку D, що належить стороні AC, проведено пряму $DD_1 \parallel BC$. Знайдіть довжину відрізка DD_1, коли відомо, що $AD_1 = 4{,}5$ см, $D_1B = 1{,}5$ см, $BC = 8$ см.

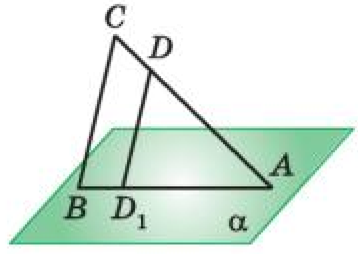


Рис. 3.15

А) 6 см; В) 2 см; Д) 4 см.
Б) 3,5 см; Г) 6,5 см;

3.30°°. Через кінці відрізка MN, який не перетинає площину α, та його середину K проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках M_1, N_1, K_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо $KK_1 = 9$ см, $NN_1 = 15$ см.

А) 3 см; Б) 5 см; В) 8 см; Г) 6 см; Д) 4 см.

3.31°°. З точок P і Z площини α проведено поза нею паралельні відрізки $PK = 6$ см і $ZM = 9$ см. Пряма MK перетинає площину α в точці O. Знайдіть відстань MO, якщо $MK = 6$ см.

А) 12 см; Б) 9 см; В) 15 см; Г) 18 см; Д) 10 см.

3.32•. Сторона AB трикутника ABC належить площині α, а дві інші – не належать їй. Точка X – довільна точка променя AC. Побудуйте точку перетину прямої $XX_1 \parallel BC$ з площиною α.

3.33•. Бічна сторона AB трапеції $ABCD$ належить площині α, а три інші сторони трапеції не належать їй. Побудуйте точку X – точку перетину прямої, що містить другу бічну сторону трапеції, з площиною α.

3.34•. Знайдіть при зазначених вимогах задачі 3.33 довжину відрізка AX, якщо $AD : BC = 2 : 3$, $AB = 2$ см.

3.35•. Сторона AD прямокутника $ABCD$ належить площині α, а всі інші – ні. На стороні DC вибрали точку M так, що $DM : MC = 2 : 3$. Побудуйте точку перетину прямої MX з площиною α, якщо $MX \parallel AC$.

3.36•. Сторона TS прямокутника $TPRS$ належить площині α, а всі інші – ні. На стороні RS вибрали точку M так, що $SM : MR = 2 : 3$ і провели пряму $MN \parallel TR$, точка N належить площині α. Знайдіть довжину відрізка TN, якщо $TS = 10$ см.

3.37••. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $AC : CB = 2 : 3$. Паралельні прямі, які проходять через точки A, B, C, перетинають деяку площину в точках A_1, B_1, C_1. Знайдіть відношення $A_1B_1 : A_1C_1$.

3.38••. Сторони *AB* і *BC* паралелограма *ABCD* перетинають площину α. Доведіть, що прямі *AD* і *DC* також перетинають площину α.

3.39••. Трикутники *ABC* і *ABD* не лежать на одній площині. Доведіть, що будь-яка пряма, паралельна відрізку *CD*, перетинає площини даних трикутників.

§ 3.3. Паралельність прямої і площини

Розглянуті у параграфах 3.1 і 3.2 випадки не вичерпують усіх можливих розміщень прямої відносно площини. Залишилося розглянути випадок, коли у прямої з площиною немає жодної спільної точки, тоді кажуть, що пряма *паралельна площині.*

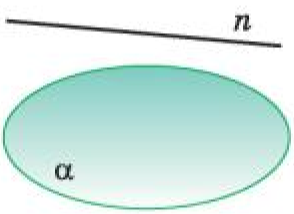


Рис. 3.16

Пряма називається ***паралельною*** площині, якщо вона не має жодної спільної точки з нею.

Паралельність прямої і площини позначають символом $\parallel$. Наприклад $n \parallel \alpha$ (рис. 3.16). Перевірити паралельність прямої і площини можна, користуючись ознакою.

Теорема 4 (***ознака паралельності прямої і площини***).

Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.

Доведення. Нехай α – площина, m – пряма, яка їй не належить, m_1 – пряма, яка належить α, і $m_1 \parallel m$. Якщо $m \parallel m_1$ (рис. 3.17), то вони лежать в одній площині β. Тоді m_1 – пряма, всі точки якої спільні для площин α і β. Нехай пряма m перетинає площину α, тоді ця точка перетину є спільною точкою для площин α і β, тобто належить прямій m_1. Це означає, що прямі m і m_1 перетинаються. Отримали суперечність умові. Отже, пряма m не може мати з площиною α спільних точок, тому паралельна їй, що й вимагалося довести. *Теорему доведено.*

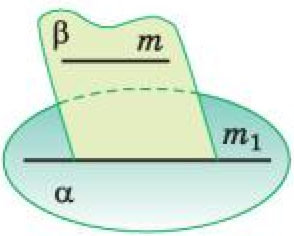


Рис. 3.17

Відрізок називається ***паралельним площині***, якщо він належить прямій, яка паралельна площині. Наприклад, у приміщенні, яке має форму прямокутного паралелепіпеда, стики стін зі стелею паралельні підлозі, і навпаки – стики стін з підлогою паралельні стелі і т. д. Аналогічно можна розглядати таке розміщення на моделі прямокутного паралелепіпеда (рис. 3.18):

$AA_1 \parallel (CC_1D_1D)$, $DD_1 \parallel (BB_1C_1C)$,
$BB_1 \parallel (A_1ADD_1)$, $AA_1 \parallel (BB_1C_1C)$,
$AD \parallel (BB_1C_1C)$, $AD_1 \parallel (BB_1C_1C)$ і т. д.

Наслідок 1. *Якщо пряма паралельна площині, то через кожну точку цієї площини можна провести на ній пряму, паралельну даній прямій.*

Наприклад, на площині α міститься безліч прямих, яким паралельна пряма b (рис. 3.19).

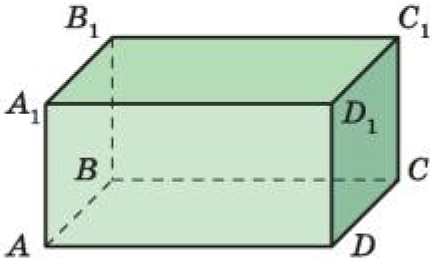


Рис. 3.18

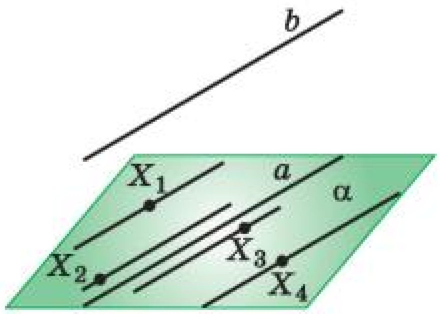


Рис. 3.19

Наслідок 2. *Існує безліч прямих, які паралельні одній і тій самій площині.*

Наприклад, поза площиною α міститься безліч паралельних їй прямих, які можуть належати або не належати одній площині (рис. 3.20).

Наслідок 3. *Якщо пряма паралельна кожній з площин, які перетинаються, то вона паралельна і прямій їхнього перетину.*

Наприклад, на рисунку 3.21 зображено $\alpha \cap \beta = l$, $m \parallel \alpha$ і $m \parallel \beta$. Висновок: $m \parallel l$.

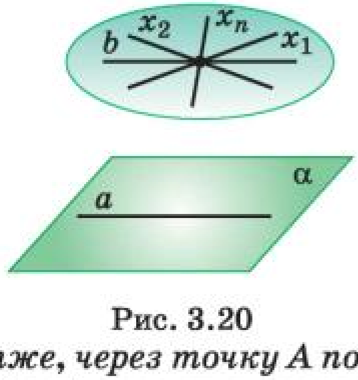


Рис. 3.20

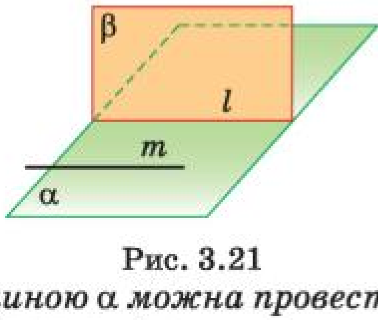


Рис. 3.21

Отже, через точку А поза площиною α можна провести:

– безліч прямих, паралельних площині α,

– одну пряму b, паралельну прямій a площини α,
– безліч прямих, мимобіжних з прямою a площини α.

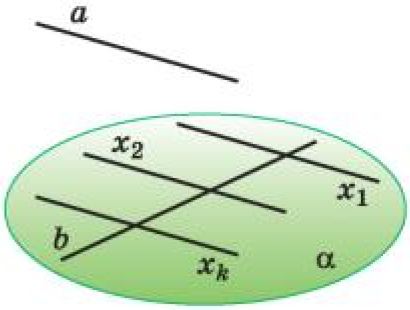


Рис. 3.22

Задача 1.

Доведіть, що всі прямі, які перетинають одну з двох мимобіжних прямих і паралельні другій, лежать на одній площині.

Дано: прямі a, b – мимобіжні.

Довести, що всі прямі, які перетинають b і паралельні a, лежать в одній площині.

Доведення	Чому саме так?
Проведемо кілька довільних прямих x_1, x_2, ..., x_k, які перетинають одну з двох мимобіжних, наприклад b, і паралельні прямій a (рис. 3.22). Оскільки $x_1 \parallel a$ і $x_2 \parallel a$, то $x_1 \parallel x_2$, тобто x_1 і x_2 належать деякій площині. Назвемо її α. Звідси слідує, що прямі x_1, a, $x_2 \subset \alpha$. Аналогічно міркуючи, отримуємо, що прямі x_3, x_4, ..., x_k, ... також належать площині α. Отже, всі прямі x_1, x_2, x_3, ... належать площині α.	Мимобіжні прямі a і b не перетинаються і не паралельні. Треба вибрати одну із них, з якою виконуватимемо перетин, наприклад b. Тоді на прямій b вибираємо деяку точку, через яку проводимо пряму, паралельну прямій a (за аксіомою). Нехай це пряма x_1. Це визначає єдину площину, нехай α. На прямій вибираємо ще одну точку, через яку проводимо пряму $x_2 \parallel a$, причому $x_2 \cap b$. Приходимо до висновку: $x_1 \parallel a$ і $x_2 \parallel a$, то $x_1 \parallel x_2$, а це означає, що $x_2 \subset \alpha$. Такі міркування можна провести для будь-якої прямої, яка перетинає пряму b і паралельна прямій a.

Задача 2.

Площина α перетинає сторони AB і AC трикутника ABC відповідно в точках B_1 і C_1, $BC \parallel \alpha$ (рис. 3.23). Знайдіть довжину сторони BC трикутника ABC, якщо $B_1C_1 = 6$ см і $CC_1 : C_1A = 3 : 2$.

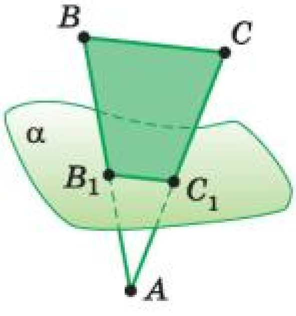


Рис. 3.23

Дано: $\triangle ABC$, α, $BC \parallel \alpha$, $AB \cap \alpha = B_1$, $AC \cap \alpha = C_1$, $CC_1 : C_1A = 3 : 2$, $B_1C_1 = 6$ см.

Знайти: BC.

Розв'язання	Чому саме так?
B_1C_1 – пряма перетину (ABC) і α. $BC \parallel \alpha$, тому $BC \parallel B_1C_1$, $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ (за кутами). $\frac{CC_1}{C_1A} = \frac{3}{2} = \frac{3k}{2k}$. $CC_1 = 3k$, $C_1A = 2k$, тоді $AC = 5k$. $\frac{AC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$, $\frac{AC_1}{AC} = \frac{2}{5}$. $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{2}{5} = \frac{2k}{5k}$, $B_1C_1 = 6$ см, $2k = 6$, $k = 3$, $BC = 5k = 5 \cdot 3 = 15$ (см). *Відповідь.* 15 см.	Площина трикутника ABC перетинається з площиною α у двох точках B_1 і C_1, через які проходить єдина пряма B_1C_1 – пряма перетину площин. $BC \parallel \alpha$, тому $BC \parallel x$, $x \subset \alpha$. Однак через BC і x проходить єдина площина (BCC_1B_1). Отже, $BC \parallel B_1C_1$. Далі використовуємо узагальнену теорему Фалеса (про пропорційні відрізки) або подібність трикутників.

Вправи

3.40°. Визначте, скільки прямих, паралельних площині, можна побудувати через точку поза цією площиною.

А) Одну; Б) дві; В) три; Г) безліч; Д) жодної.

3.41°. Відомо, що пряма a паралельна площині α. Виберіть правильні твердження.

А) Пряма a паралельна лише одній прямій площини α;

Б) пряма a мимобіжна з будь-якою прямою площини α, окрім однієї;

В) на площині α існує безліч прямих, паралельних a, і безліч мимобіжних з a прямих;

Г) на площині α існує лише одна пряма, паралельна a, що проходить через будь-яку точку площини;

Д) пряма a має на площині α безліч прямих, що проходять через одну точку, і лише одна з них паралельна їй, а всі інші – мимобіжні.

3.42°. Визначте кількість площин, які можна провести через вершину C трикутника ABC паралельно AB.

А) Одну; В) жодної; Д) безліч.
Б) дві; Г) одну або жодної;

3.43°. Площина α перетинає сторони AB і AC трикутника ABC відповідно в точках B_1 і C_1, $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$, $B_1C_1 = 12$ см, $BC \parallel \alpha$. Визначте сторону BC трикутника ABC (рис. 3.24).

А) 15 см; Б) 16 см; В) 18 см; Г) 24 см; Д) 20 см.

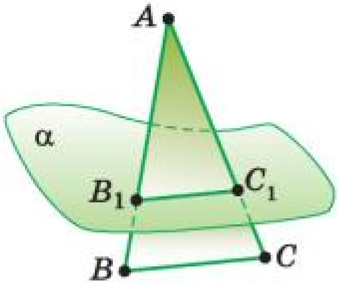


Рис. 3.24

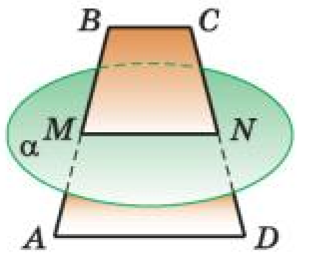


Рис. 3.25

3.44°. Площина α, що паралельна основі AD трапеції $ABCD$, перетинає її бічні сторони в точках M і N, які є їхніми серединами. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо $AD = 17$ см, $BC = 9$ см (рис. 3.25).

А) 16 см; Б) 12 см; В) 13 см; Г) 10 см; Д) 13,5 см.

3.45°. Площина α, яка паралельна основі рівнобічної трапеції, перетинає сторони AB і CD у точках M і N відповідно, $AD = 20$ см, $MN = 16$ см. Знайдіть периметр трапеції $ABCD$, якщо M – середина AB і $AB = 8$ см (рис. 3.25).

А) 44 см; Б) 40 см; В) 52 см; Г) 48 см; Д) 36 см.

3.46°°. Площини α і β перетинаються по прямій c. На площині α проведено пряму a, яка паралельна прямій c. Укажіть взаємне розміщення прямої a і площини β.

А) Пряма a перетинає площину β;
Б) пряма a належить площині β;
В) пряма a паралельна площині β.

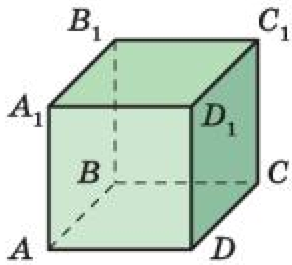


Рис. 3.26

3.47°°. Укажіть грані куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, яким паралельна пряма A_1B_1 (рис. 3.26).

1) AA_1D_1D; 3) $ABCD$; 5) $B_1C_1D_1A_1$;
2) BB_1C_1C; 4) DD_1C_1C; 6) $AD\,D_1A_1$.

А) 1 і 2; Б) 2 і 3; В) 3 і 4; Г) 4 і 5; Д) 5 і 6.

3.48°°. Дано трикутник PRT. Площина α, паралельна прямій PT, перетинає сторону PR у точці S, а сторону RT – у точці Q. Визначте довжину сторони PT трикутника PRT, якщо $SR = 7$ см, $SQ = 3$ см і $SP = 35$ см (рис. 3.27).

А) 17 см; Б) 21 см; В) 18 см; Г) 22 см; Д) 30 см.

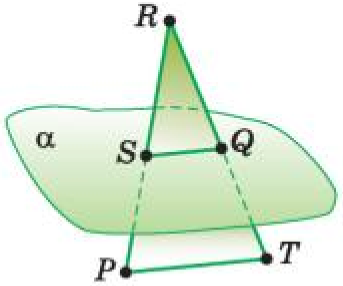


Рис. 3.27

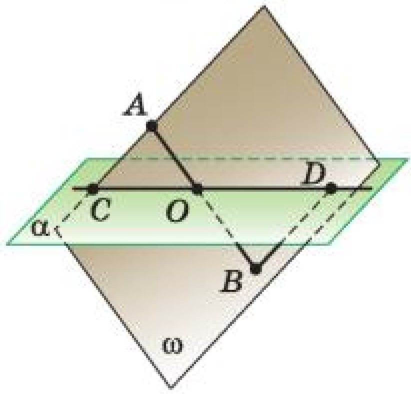


Рис. 3.28

3.49°°. Відрізок AB завдовжки 24 см перетинається площиною α в точці O, яка ділить його у відношенні 3 : 5, починаючи від точки A. Через кінці відрізка A і B проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках C і D. Визначте суму довжин відрізків CO і AO, якщо $OD = 10$ см (рис. 3.28).

А) 15 см; Б) 12 см; В) 18 см; Г) 21 см; Д) 16 см.

3.50•. На рисунку 3.29 зображено відрізки. Відомо, що $AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 = CC_1$. Доведіть, що $B_1C_1 = BC$.

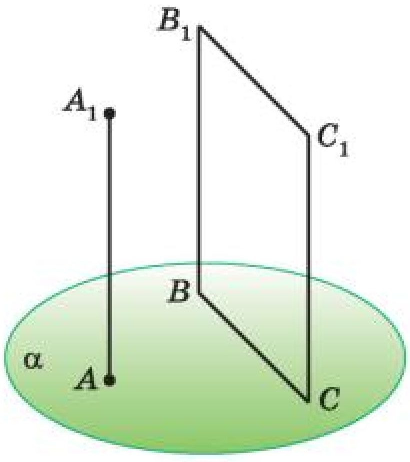


Рис. 3.29

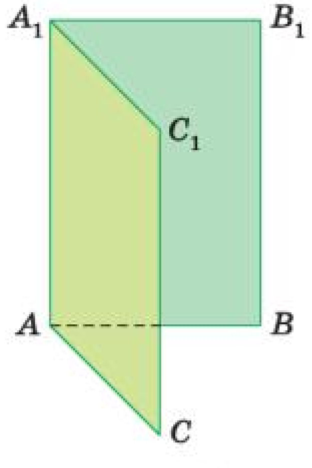


Рис. 3.30

3.51•. На рисунку 3.30 зображено два чотирикутники. Відомо, що $A_1C_1 = AC$ та $A_1C_1 \parallel AC$, $B_1A_1 = BA$ та $B_1A_1 \parallel BA$. Доведіть, що $CC_1 \parallel BB_1$.

3.52•. Паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 належать різним площинам. Доведіть, що чотирикутник CDD_1C_1 – теж паралелограм.

3.53•. Дано ромб $ABCD$, в якому менша діагональ дорівнює його стороні. Площина, паралельна цій діагоналі, перетинає дві суміжні сторони ромба в точках M і N – серединах цих сторін. Знайдіть периметр ромба, якщо $MN = 6$ см.

3.54•. Дано трикутник MNK. Площина, яка паралельна прямій MN, перетинає сторону MK в точці Q, а сторону NK – в точці P. Знайдіть довжину відрізка KP, якщо $QP = 9$ см, $MN = 13$ см, $PN = 8$ см.

3.55•. Через один кінець O відрізка OA проведено площину. Через другий кінець A і точку B цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину в точках A_1 і B_1. Знайдіть довжину відрізка AA_1, якщо:

1) $BB_1 = 12$ см, $OB : AB = 3 : 2$; 3) $BB_1 = 18$ см, $OA : OB = 5 : 3$;
2) $OA = 8$ см, $OB : BB_1 = 4 : 5$; 4) $OB = a$, $AB = b$, $BB_1 = c$.

3.56••. Точка M не належить площині трапеції $ABCD$ з основою AD. Доведіть, що пряма AD паралельна площині (BMC).

3.57••. Доведіть, що площина α, яка проходить через середини двох ребер основи тетраедра і вершину, що не належить його основі, паралельна третьому ребру основи тетраедра.

3.58••. Відрізок AB перетинає площину α в точці O. Через кінці A і B відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину в точках A_1 і B_1 відповідно. Знайдіть:
1) AA_1, коли відомо, що $OA : OB = 4 : 5$, $BB_1 = 15$ см;
2) OA_1 і OB_1, якщо $AA_1 : BB_1 = 5 : 6$, $A_1B_1 = 22$ см.

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ

3.1. Як розміщені осі залізничних вагонів між собою?

3.2. Як розміщені осі залізничних вагонів відносно рейок?

3.3. Назвіть серед предметів, що вас оточують, моделі паралельних і мимобіжних прямих.

3.4. Чому шухляди шаф або письмових столів іноді рухаються ривками, із зупинками?

Вказівка. Відрізки паралельних прямих, які містяться між двома іншими паралельними прямими, рівні.

3.5. Чому вставлений у насос поршень, як правило, рухається без перешкод, плавно?

Вказівка. Відрізки паралельних прямих, які містяться між двома іншими паралельними прямими, рівні.

3.6. Треба перевірити, чи паралельні плінтуси підлоги коридору. Чи можна це зробити за допомогою вимірювальної стрічки, чи достатньо довгої палиці?

3.7. Спільна дотична двох конічних катків дорівнює 100 мм і утворює з віссю обертання кожного конуса кути відповідно $30°$ і $60°$. Обчисліть радіуси основ конічних катків.

Відповідь. 50 мм; ≈ 87 мм.

Евклід (бл. 365–300 до н. е.)

Якщо праця Евкліда не змогла запалити ваш юнацький ентузіазм, – ви не народжені бути теоретиком.

А. Ейнштейн

Відомостей про життя Евкліда майже не збереглося, залишилися лише 2–3 легенди і найголовніше – основна його праця – видатні «Начала». Вони складаються з 13 книг, які містять основи планіметрії, стереометрії, арифметики. Головна особливість «Начал» у тому, що вони побудовані за єдиною логічною схемою, яка справедливо вважається зразком дедуктивної системи. Невелике число основних положень приймається без доведення, і на основі даної системи аксіом та інших достовірних істин Евклід із дивовижною стрункістю, ясністю і розмахом побудував свою величну будівлю, свою грандіозну геометрію.

Для сучасного математика книги «Начал» все ще мають надзвичайну чарівність, а їх логічна побудова вплинула на наукове мислення більше, ніж будь-який інший твір.

Наука має незначні відомості про життя і діяльність Евкліда. Прокл (V ст. н. е.), коментатор праць Евкліда, не зміг точно вказати, де і коли народився й помер Евклід. За Проклом, «цей учений муж» жив у період царювання Птолемея I. Деякі біографічні дані збереглися на сторінках арабського рукопису XII ст.: «Евклід, син Наукрата, відомий під іменем Геометра, вчений давнього часу, за своїм походженням грек, за місцем проживання сирієць, родом з Тиру». На запрошення царя Птолемея I переїхав в Александрію, де організував математичну школу і написав для її учнів свої знамениті «Начала» (близько 325 року до н. е.).

Після Біблії книга Евкліда «Начала» – найпопулярніша писемна пам'ятка давнини. Протягом двох тисячоліть «Начала» Евкліда були настільною книгою для школярів усього світу, з папірусу перейшли на пергамент, а потім – на папір і електронні носії. Протягом останніх чотирьох століть «Начала» друкувалися 2500 разів: у середньому виходило щорічно 6–7 видань. До початку XX ст. книга вважалась основним підручником з геометрії не лише для шкіл, але й для університетів.

З історичних свідчень Паппа Александрійського (III ст. н. е.), Евклід був людиною м'якого характеру, дуже скромною і незалежною. Як розповідається в одній з легенд, одного разу цар Птолемей I вирішив вивчити геометрію і покликав Евкліда, щоб той указав йому легкий шлях до математики. Учений відповів: «До геометрії немає царських шляхів». Інша легенда стверджує, що якось до Евкліда прийшов юнак і став під його керівництвом вивчати геометрію. Опанувавши декілька перших теорем, він запитав, що буде мати від вивчення «Начал». Евклід не відповів учневі. Він покликав раба і наказав: «Дай йому гріш, він хоче мати лише користь з навчання».

Над входом до Академії Платона було написано: «Та не увійде сюди Той, хто не знає геометрії».

Описи основних фігур геометрії. У розмовній практиці ми іноді вживаємо вислови *точка зору*, *больова точка*, *точка опори*, *рушити з мертвої точки*, *точка відліку*, *критична точка*, *влучити в точку*, *дійти до точки* тощо. Можливо, ви продовжите цей ряд? Що означає кожен із цих висловів? Що спільного вони мають? Спільне помітити не складно – це слово «точка». Але потрібно звернути увагу на суть висловів: кожного разу йдеться про те, що не має протяжності. Існує багато задач у практиці, коли необхідно визначити знаходження тіла у просторі. Тоді розміри тіла не беруть до уваги. Якщо ми шукаємо певний географічний об'єкт, наприклад місто чи селище, за картою, то також тут не важливі його реальні розміри. Можна навести й інші приклади (наведіть). Тобто часто доводиться абстрагуватися від вимірів предмета. Таким чином приходять до неозначуваного, ідеального поняття – геометричної точки. Уявити її можна, наприклад, як слід від уколу голки чи слід на папері від тонко загостреного олівця, від крейди на дошці, від загостреної палиці на землі тощо.

Математичні моделі з'являються як спеціальний спосіб наближеного опису певного об'єкта, явища, будь-якої проблеми. Зрозуміло, що реально їх не існує. Тоді чому їх створюють? Які функції математичних моделей?

У відповіді на поставлене запитання бажано відобразити, що математична модель реальних явищ дає змогу дослідити її математичними засобами та, відповідно, розв'язати певну практичну задачу.

За аналогічною схемою створюємо іншу математичну модель – геометричну пряму, про яку ви також знаєте з курсу планіметрії. Усім зрозумілі вислови: *пряма мова*, *пряма дорога*, *прямий спадкоємець або родич*, *пряме сполучення*, *прямі вибори*, *пряма вказівка*, *пряма протилежність*, *пряма користь* тощо (продовжіть ряд). Тут ми вживаємо прикметник «прямий», але у якому значенні? Мабуть, йдеться про те, що відбувається в одному напрямі, не розгалужується, має лише один вимір. Згадайте, як виглядають плани будинків на схемі. З ними, можливо, матимете справу або у професійній діяльності, або коли будуватимете, переплановуватимете будинок чи квартиру. Стіни зображають у вигляді прямих ліній, хоча вони, звичайно, мають певну товщину. Але на схемі це не беруть до уваги, бо найперше цікавляться розміщенням кімнат, вікон тощо. Під час проведення комунікацій, наприклад електричного кабелю в будинках, теж зображають їх, не звертаючи уваги на товщину кабелю. Можна навести ще чимало прикладів (наведіть), коли абстрагуються від матеріалу, його якості та вимірів, залишаючи довжину. Але не забудьте, що для математичної моделі геометричної прямої суттєвим є те, що вона нескінченна та не є хвилястою, закрученою тощо. Наближене уявлення про частину прямої може дати світловий промінь, туго натягнута струна, дріт, слід від крейди, протягнутої на дошці вздовж лінійки, слід олівця, протягнутого вздовж лінійки в зошиті тощо.

Далі переходимо до ще одного неозначуваного поняття. Спочатку згадаємо вислови: *наші інтереси лежать в одній площині*, *котитися по похилій площині*, *розглянути питання в іншій площині* (продовжіть ряд). Ви, мабуть, здогадалися, що йтиметься про створення третьої математичної моделі – площини. Уявити частину площин допоможе добре відполірована дошка, гладінь озера у тиху погоду чи віконне скло, дзеркало тощо. Які реальні задачі приводять до необхідності створення цього ідеального поняття, вивчення його властивостей? Наприклад, задачі будівельника (стіни кімнати повинні бути паралельні між собою та мати гладеньку поверхню, міжповерхові перекриття), задачі закрійника тощо.

Якщо ви зрозуміли суть побудови математичних моделей, то вам неважко буде дати відповідь на таке запитання: «Чи може один і той самий реальний об'єкт слугувати в одному випадку – моделлю для точки, в іншому – для прямої, потім, наприклад, для прямокутника чи прямокутного паралелепіпеда? Наведіть приклади». Відповідь може бути такою: «Так, наприклад, будинок. Коли нас цікавить його місцезнаходження на карті, то ми не беремо до уваги його розміри (модель точки). Якщо цікавить розміщення відносно певної вулиці – перпендикулярно чи паралельно, то це модель відрізка. Якщо є вимога обчислити площу, яку займає фундамент будинку, то ми зображаємо його як прямокутник. Необхідність виготовити макет будинку вимагає сприймати будинок як модель прямокутного паралелепіпеда».

Запитання для самоконтролю

1. Як можуть бути розміщені прямі у просторі?
2. Які прямі називаються паралельними, а які – мимобіжними?
3. Чи можуть паралельні прямі бути мимобіжними? А мимобіжні – паралельними? Відповідь обґрунтуйте.
4. Чи завжди можна провести площину через чотири точки?
5. Які ознаки паралельності прямих ви знаєте?
6. Чи можуть дві прямі бути паралельними, якщо не існує третьої прямої, до якої вони паралельні?
7. Чи може площина перетинати лише одну сторону паралелограма; трапеції; опуклого чотирикутника?
8. Яка ознака мимобіжності прямих?
9. Чи можуть дві прямі бути мимобіжними, якщо вони обидві паралельні третій прямій?
10. Чи може пряма, мимобіжна з однією з двох паралельних прямих, бути паралельною другій прямій?
11. Чи можна у просторі провести таку пряму, яка була б паралельна до двох різних прямих, які не належать одній площині?
12. Як можуть бути розміщені прямі в просторі відносно площини?
13. Яка пряма називається паралельною площині?
14. Як можуть бути розміщені дві прямі, якщо одна з них належить площині, а друга – перетинає цю площину?
15. Як можуть бути розміщені дві прямі, кожна з яких мимобіжна з третьою?
16. Яку фігуру утворюють усі прямі, які перетинають одну з двох мимобіжних прямих і паралельні другій?
17. Чи правильне твердження: «прямі, які паралельні двом мимобіжним прямим, мимобіжні»?
18. Яка ознака паралельності прямої і площини?
19. Чи можуть бути дві прямі паралельними, якщо кожна з них паралельна одній з двох мимобіжних прямих?
20. Чи однаковий зміст тверджень: «прямі належать різним площинам» і «прямі не належать одній площині»?
21. Чи може бути так, щоб пряма a була не паралельною площині α, але на площині α були б прямі, паралельні a?
22. Чи правильне твердження: «якщо дві прямі паралельні одній і тій самій площині, то вони паралельні між собою»?
23. Скільки прямих, паралельних даній площині, можна провести через дану точку?
24. Які треба мати відомості про пряму і площину, щоб зробити висновок, що вони не паралельні?

Тест для самоконтролю

● ***Частина 1***

Завдання 1–16 мають варіанти відповідей, з яких правильна тільки ОДНА або конкретна кількість. Виберіть правильну відповідь.

1°. Сторона AD паралелограма $ABCD$ розміщена на площині α, а сторона BC не лежить на ній. Укажіть розміщення прямої BC відносно площини α (рис. 3.31).

А) Перетинає площину;
Б) лежить на площині;
В) паралельна площині.

2°. Дві площини α і β перетинаються по прямій a (рис. 3.32). Пряма b перетинає площини α і β в точках A і B відповідно, які не належать прямій a. Укажіть взаємне розміщення прямих a і b.

А) Перетинаються; В) паралельні.
Б) мимобіжні;

3°. Відомо, що пряма a розміщена на площині α. Поставте до кожної умови (А–В) висновок (1–3) про взаємне розміщення прямих a і b.

А) Пряма b перетинає площину α в точці, що не належить прямій a;
Б) пряма b не перетинає пряму a і належить площині α;
В) пряма b перетинає площину α в точці, що належить прямій a.

1) Перетинаються;
2) мимобіжні;
3) паралельні.

А	
Б	
В	

4°. На рисунку 3.33 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Виберіть для прямої, що містить ребро куба DD_1, три паралельні їй прямі.

А) AA_1; Б) A_1B_1; В) BB_1; Г) CC_1; Д) AB.

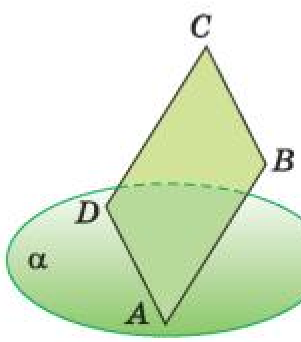


Рис. 3.31

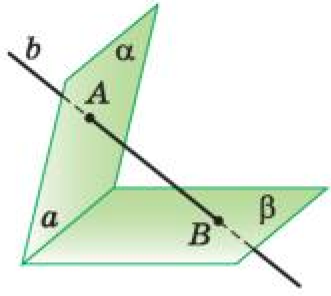


Рис. 3.32

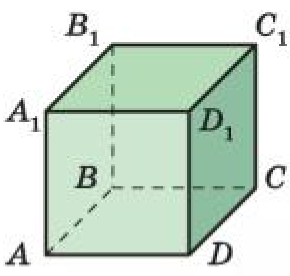


Рис. 3.33

5°. Укажіть, користуючись зображенням куба, прямі, мимобіжні з прямою DC (рис. 3.33).

А) AB; Б) A_1B_1; В) AA_1; Г) C_1D_1; Д) BB_1.

6°. Укажіть грані куба (рис. 3.33), яким паралельне ребро AB.

А) DD_1A_1A; В) $A_1B_1C_1D_1$; Д) $CBAD$.
Б) DD_1C_1C; Г) BB_1C_1C;

7°. Укажіть грані куба (рис. 3.33), які перетинає пряма B_1C_1.

А) ABB_1A_1; В) DCC_1D_1; Д) $DABC$.
Б) DD_1A_1A; Г) $C_1D_1A_1B_1$;

8°. Дано трикутник PRQ (рис. 3.34). Площина α перетинає сторони PR і PQ у його серединах – точках A і B відповідно. $PA = 6$ см, $AB = 8$ см, $BQ = 9$ см. Поставте у відповідність кожному елементу трикутника його числове значення.

А) Довжина PR; 1) 18 см;
Б) довжина RQ; 2) 46 см;
В) довжина PQ; 3) 12 см;
Г) периметр $\triangle PAB$; 4) 16 см;
Д) периметр $\triangle PRQ$. 5) 23 см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

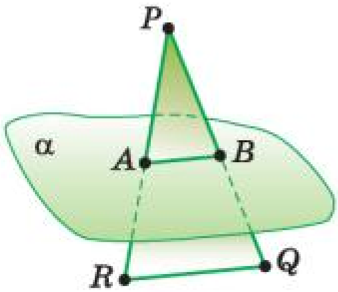


Рис. 3.34

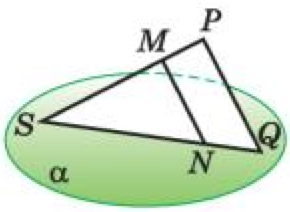


Рис. 3.35

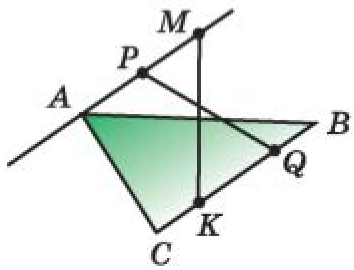


Рис. 3.36

9°°. Через один кінець S відрізка SP проведено площину α (рис. 3.35). Точка M належить відрізку SP. Через точки M і P проведені паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках N і Q. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо $SN = 5$ см, $NQ = 2$ см, $PQ = 14$ см.

А) 9 см; Б) 8 см; В) 10 см; Г) 12 см; Д) 11 см.

10°°. Пряма MA, зображена на рисунку 3.36, перетинає площину (ABC). $P \in AM$, $K \in CB$, $Q \in CB$, $K \in CQ$. Визначте взаємне розміщення прямих MK і PQ.

А) Мимобіжні; Б) перетинаються; В) паралельні.

11°°. Дано правильний трикутник LMN (рис. 3.37), сторона якого дорівнює 6 см. Точка K не належить площині трикутника LMN, причому $KL = KM = KN = 8$ см. Точки A, B, C, D –

середини відрізків KL, KN, NM, ML відповідно. Знайдіть периметр утвореного паралелограма $ABCD$.

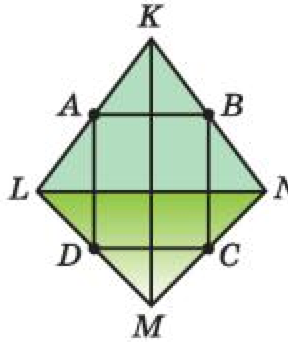


Рис. 3.37

А) 14 см; В) 32 см; Д) 28 см.
Б) 24 см; Г) 7 см;

12°°. Катети прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), зображеного на рисунку 3.38, дорівнюють 3 см і 4 см. Через середини катетів паралельно гіпотенузі проведено площину α, яка перетнула трикутник по відрізку A_1B_1. Знайдіть довжину цього відрізка.

А) 1,5 см; Б) 2 см; В) 3,5 см; Г) 2,5 см; Д) 5 см.

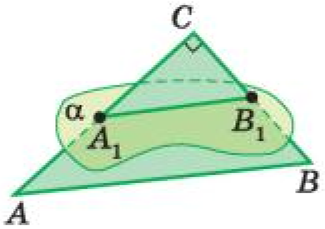


Рис. 3.38

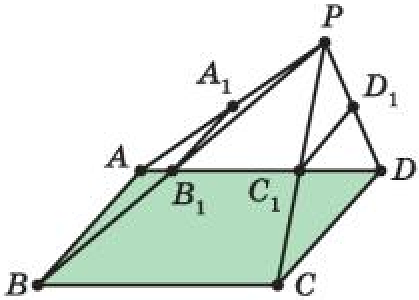


Рис. 3.39

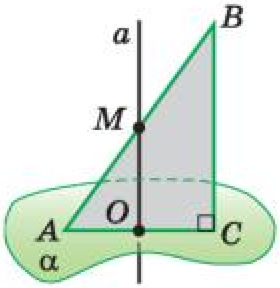


Рис. 3.40

13°°. Сторони прямокутника $ABCD$, зображеного на рисунку 3.39, дорівнюють 6 см і 8 см. Точка P не належить площині ($ABCD$). Знайдіть площу прямокутника $A_1B_1C_1D_1$, в якому A_1, B_1, C_1, D_1 – середини відрізків PA, PB, PC, PD відповідно.

А) 48 см²; Б) 24 см²; В) 36 см²; Г) 12 см²; Д) 16 см².

14°°. На рисунку 3.40 зображено прямокутний трикутник ABC, катет якого $AC = 6$ см належить площині α. Вершина B цій площині не належить. Пряма a, що проходить через середину гіпотенузи, паралельно катету BC, перетинає площину α в точці O. Знайдіть довжину відрізка MO, якщо $BM = 5$ см.

А) 5 см; Б) 3 см; В) 4 см; Г) 2 см; Д) 2,5 см.

15°°. Через точку Q відрізка QA проведено площину α (рис. 3.41). Точка B належить відрізку AQ, причому $AB : BQ = 1 : 2$. Відрізок CB паралельний площині α і дорівнює 5 см. Пряма AC перетинає площину α в точці D. Знайдіть відстань між точками Q і D.

А) 10 см; Б) 7,5 см; В) 12,5 см; Г) 15 см; Д) 17,5 см.

16°°. На рисунку 3.42 зображено ромб $ABCD$ і рівнобічну трапецію $ABKZ$. AB – лінія перетину цих площин. MN – середня лінія $ABKZ$, $MN = 7$ см. $P_{ABCD} = 16$ см. Знайдіть довжину відрізка ZK.

А) 23 см; Б) 11 см; В) 15 см; Г) 14 см; Д) 10 см.

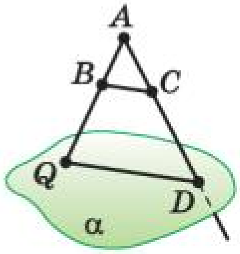


Рис. 3.41

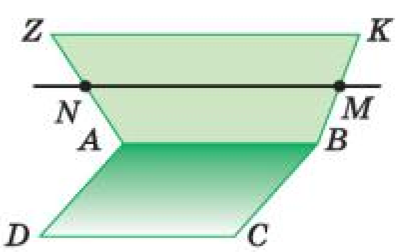


Рис. 3.42

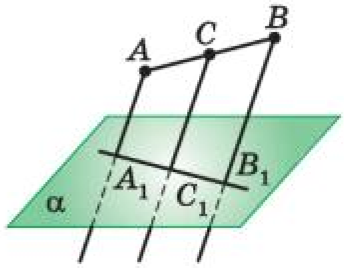


Рис. 3.43

● ***Частина 2***

Розв'яжіть завдання 17–28 з коротким записом ходу міркувань.

17•. Через катет BC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено площину α. Через точку D, що лежить на гіпотенузі AB, проведено пряму a, паралельну другому катету, яка перетинає площину в точці D_1. Знайдіть довжину катета AC, якщо $BD : DA = 2 : 7$, а $DD_1 = 7$ см.

18•. Через точки M і N, що належать відповідно катетам CA і CB прямокутного трикутника ABC з гострим кутом $30°$, паралельно гіпотенузі проведено площину. Знайдіть периметр трикутника CMN, якщо гіпотенуза $AB = 13$ см, $AC = 5$ см, а $CM : MA = 1 : 4$.

19•. Відрізок AB не перетинає площину α (рис. 3.43). Через кінці відрізка та його середину проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках A_1, B_1, C_1. Знайдіть довжину відрізка AA_1, якщо $BB_1 = 10$ см, а CC_1 на 4 см довший, ніж AA_1.

20•. Через кінець A відрізка AK проведено площину α, а через точку B відрізка AK проведено відрізок BM довжиною 8 см, паралельний площині α. Пряма KM перетинає площину α в точці Q. Знайдіть відстань між точками площини A та Q, коли відомо, що $KB : BA = 4 : 7$.

21•. Дано трикутник PQR. Площина, паралельна PQ, перетинає сторону PR цього трикутника в точці P_1, а сторону QR – в точці Q_1. Знайдіть довжину відрізка P_1Q_1, якщо $PQ = 30$ см, а $PP_1 : PR = 2 : 3$.

22•. За умовою задачі 21 знайдіть довжину відрізка P_1Q_1, якщо $PQ = 27$ см, а $PP_1 : P_1R = 2 : 7$.

23•. Дано трикутник ABC. Площина, паралельна прямій AB, перетинає сторону AC цього трикутника в точці A_1, а сторону BC – в точці B_1. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо $B_1C = 10$ см, $AB : BC = 4 : 5$.

24•. Дано трикутник ABC. Площина, паралельна прямій AB, перетинає сторону AC цього трикутника в точці A_1, а сторону BC – в точці B_1. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$. Обчисліть значення виразу, якщо $a = 20$ см, $b = 24$ см, $c = 10$ см.

25•. Відрізок AB перетинає площину α в точці O. Через кінці відрізка A і B проведено паралельні прямі AA_1 і BB_1, які перетинають площину в точках A_1 і B_1. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $AA_1 : BB_1 = 2 : 3$ і відрізок OA на 3 см коротший, ніж відрізок BO.

26•. Відрізок AB перетинає площину α в точці O. Через кінці відрізка A і B проведено паралельні прямі AA_1 і BB_1, які перетинають площину в точках A_1 і B_1, де A_1, B_1 – точки перетину з площиною α. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо $AO : OB = 2 : 5$ і відрізок OB_1 на 9 см довший, ніж відрізок OA_1.

27•. Відрізок AB перетинає площину. Через його кінці і середину – точку Q_1 – проведено паралельні прямі, які перетинають дану площину відповідно в точках A_1, B_1, Q_1. Визначте довжину відрізка QQ_1, якщо $AA_1 = 7$ см, $BB_1 = 11$ см.

28•. Відрізок CD перетинає площину. Через його кінці і середину – точку M – проведено паралельні прямі, які перетинають дану площину відповідно в точках C_1, M_1, D_1. Відомо, що $CC_1 = 4$ см, $DD_1 = 16$ см. Знайдіть довжину відрізка MM_1.

● *Частина 3*

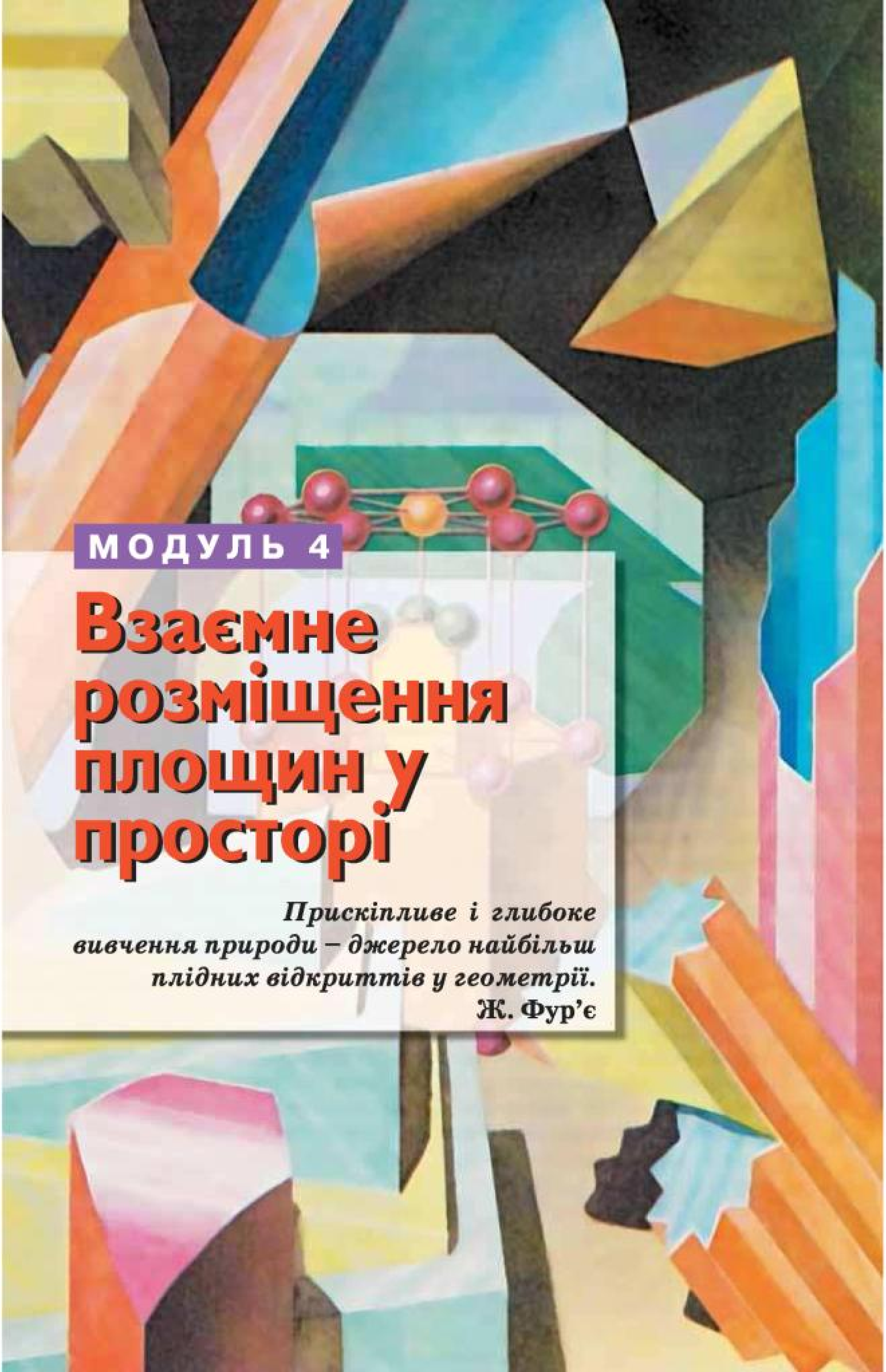
Розв'яжіть завдання 29–32 з повним обґрунтуванням.

29••. Дано трикутник ABC, в якому $AC = 9$ см. Відомо, що площина, паралельна прямій AC, перетинає сторону AB в точці K, а сторону BC – в точці M так, що $MC = 15$ см, а $KM = 4$ см. Визначте довжину відрізка BC.

30••. Дано трикутник ABC і площину α, яка його не перетинає. Точки M, N, K – середини сторін AB, BC, AC відповідно. Через точки A, B, C, M, N, K проведено паралельні прямі AA_1, BB_1, CC_1, MM_1, NN_1, KK_1 (A_1, B_1, C_1, M_1, N_1, K_1 – точки перетину паралельних прямих з площиною α). Відомо, що $KK_1 = 10$ см, $NN_1 = 9$ см, $BB_1 = 11$ см. Знайдіть довжини відрізків AA_1, CC_1, MM_1.

31••. Через вершину A ромба $ABCD$ проведено пряму a, яка паралельна діагоналі BD. Доведіть, що прямі a і CD перетинаються.

32••. Через вершину C ромба $ABCD$ проведено пряму b, яка не лежить у площині ромба, а через вершину A – пряму a, яка паралельна діагоналі BD. Доведіть, що прямі a і b мимобіжні.



МОДУЛЬ 4

Взаємне розміщення площин у просторі

Прискіпливе і глибоке вивчення природи – джерело найбільш плідних відкриттів у геометрії.

Ж. Фур'є

КОРОТКИЙ ЗМІСТ МОДУЛЯ

- *Площини простору, що перетинаються*
- *Площини простору, що не перетинаються*
- *Розміщення прямих на площинах, які перетинаються, і на площинах, які не перетинаються*
- *Властивості паралельних площин*
- *Ознака паралельних площин*
- *Паралельне проекціювання*
- *Зображення, просторових фігур на площині*

Опрацювавши цей модуль, ви дізнаєтеся:

- як переконатися, що площини будуть перетинатися;
- як побудувати дві паралельні площини;
- як довести паралельність площин;
- як вибрати рівні фігури, користуючись властивостями паралельних площин;
- які властивості методу паралельного проекціювання;
- як виконати побудову зображень геометричних фігур;
- як напрям прямої проекціювання впливає на зображення проекцій геометричної фігури;
- як застосувати властивості паралельних прямих для розв'язування геометричних задач;
- як застосувати властивості паралельних прямої і площини для розв'язування геометричних задач;
- як застосувати властивості паралельних площин для розв'язування геометричних задач;
- який зв'язок використання властивостей паралельних прямих, прямої і площини та площин у геометрії та житті.

§ 4.1. Взаємне розміщення двох площин у просторі. Паралельні площини

Якщо розглядати дві площини у просторі, то їхнє розміщення залежить від існування у них спільних точок. Можливі випадки:

1. Якщо у двох площин є ***одна спільна точка***, то вони ***перетинаються по прямій***, що проходить через цю точку (аксіома розміщення) (рис. 4.1, *а*). За наявності ***двох спільних*** точок ситуація не зміниться: через довільні дві точки можна провести тільки одну пряму, яка буде спільною для цих двох площин, тобто вони ***перетинаються по цій прямій***.

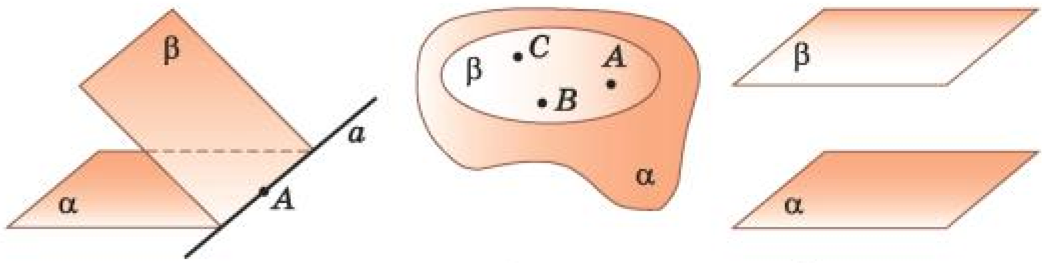
Отже, якщо дві площини мають ***одну або безліч спільних точок, які лежать на одній прямій***, то ці площини ***перетинаються***.

2. Як відомо, через три довільні точки простору, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну (наслідок із аксіом стереометрії). Тоді очевидно, що якщо дві площини матимуть ***три і більше спільних точок, які не лежать на одній прямій***, то вони накладатимуться (рис. 4.1, *б*). У такому разі кажуть, що площини ***збігаються***.

Звідси випливає, що площини ***збігаються***, якщо вони мають:

а) спільну пряму і точку, що не належить їй;
б) дві спільні прямі, що перетинаються;
в) принаймні три спільні точки, що не лежать на одній прямій.

3. Якщо дві різні площини не мають жодної спільної точки, то вони називаються ***паралельними*** (рис. 4.1, *в*). Для позначення паралельності площин використовують символ «$\|$». Записують $\alpha \parallel \beta$, читають: «площина α паралельна площині β», або «площини α і β – паралельні».



$A \in \alpha, A \in \beta$, то $\alpha \cap \beta = a$. Площини перетинаються
а

$\alpha = \beta$, площини збігаються
б

$\alpha \parallel \beta$, площини паралельні
в

Рис. 4.1

Отже, ***площини у просторі можуть: перетинатися, збігатися або бути паралельними.***

Моделі паралельних площин можна побачити на кожному кроці: полиці у шафі, шибки подвійного вікна, несусідні стіни кімнати чи підлога і стеля, перекриття у багатоповерхівці, рівно складені в упаковках диски, підручники тощо. З'ясувати, чи площини паралельні, дає змогу *ознака паралельності площин*.

Теорема 1.

Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини, відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

Доведення. Нехай α і β – дані площини (рис. 4.2), a і b – дві прямі, що лежать на площині α і перетинаються в точці A. Прямі a_1 і b_1 лежать на площині β і відповідно паралельні прямим a і b. Доведемо, що площини α і β паралельні, ***методом від супротивного***.

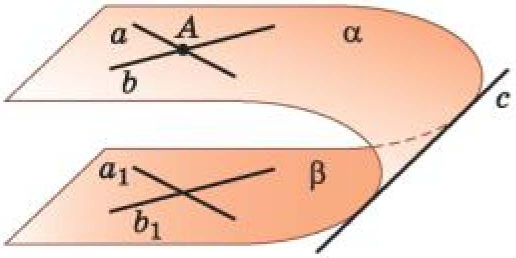


Рис. 4.2

Припустимо, що α і β перетинаються по деякій прямій c. За теоремою про паралельність прямої і площини, прямі a і b, які паралельні прямим a_1 і b_1, паралельні площині β. Отже, a і b не перетинають площини β, а значить не перетинають і пряму c, яка належить β. Таким чином, на площині α через точку A проходять дві прямі a і b, паралельні c, що неможливо за аксіомою паралельності. Отримали протиріччя. Отже, припущення неправильне, площини α і β перетинатися не можуть, тому α і β – паралельні, що й вимагалося довести. *Теорему доведено.*

Теорема 2.

Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

Доведення. Нехай α – задана площина, A – точка, що не належить їй. Проведемо у площині α дві довільні прямі a і b, що перетинаються в точці B (рис. 4.3), а через точку A – дві прямі a_1 і b_1, паралельні їм ($a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$). Площина β, що проходить через прямі a_1 і b_1, паралельна площині α. Отже, площина β – побудована. Доведемо, що вона єдина, тобто не залежить від вибору прямих a_1 і b_1.

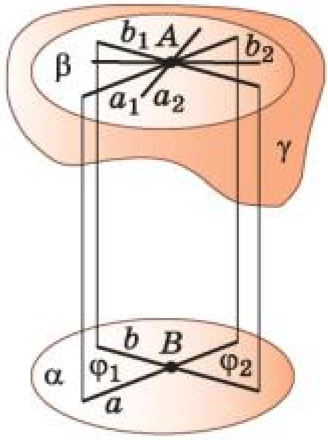


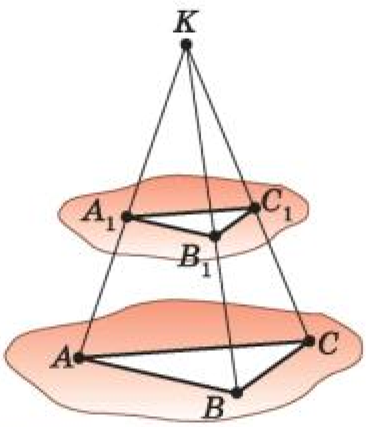
Рис. 4.3

Припустимо, що існує інша площина γ, яка проходить через точку A і паралельна площині α. Далі виконаємо ще дві додаткові побудови:

1) Побудуємо площину φ_1, яка містить паралельні прямі a і a_1. Оскільки вона має з γ спільну точку A, то вона перетинає її по деякій прямій a_2, яка проходить через цю точку. Але оскільки $\gamma \parallel \alpha$, то $a_2 \parallel a$, тоді це суперечить аксіомі паралельності. Отже, прямі a_2 і a_1 збігаються.

2) Побудуємо площину φ_2, яка містить паралельні прямі b_1 і b. Вона перетне площину γ по деякій прямій b_2 . Міркуючи аналогічно, доводимо, що b_2 збігається з b_1.

Отже, маємо, що через дві прямі a_1 і b_1, які перетинаються, проходять дві різні площини γ і β, однак це суперечить аксіомі належності. Припущення існування двох різних площин, паралельних даній, які б проходили через одну й ту саму точку, неправильне. Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну, щ. в. д. *Теорему доведено.*



Задача 1.

Точка K не лежить у площині трикутника ABC. На відрізках KA, KB і KC вибрано точки A_1, B_1, C_1 відповідно, що $KA_1 : AA_1 = KB_1 : BB_1 = KC_1 : CC_1$. Доведіть, що площини (ABC) і $(A_1B_1C_1)$ – паралельні.

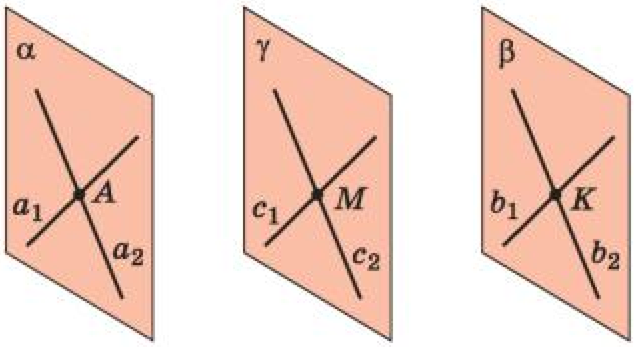
Дано: $\triangle ABC$, $K \notin (ABC)$, $A_1 \in KA$, $B_1 \in KB$, $C_1 \in KC$, $KA_1 : AA_1 = KB_1 : BB_1 = KC_1 : CC_1$.

Довести: $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.

Доведення	Чому саме так?
За умовою задачі: $KA_1 : AA_1 = KB_1 : BB_1 = KC_1 : CC_1$, тому $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ та $AC \parallel A_1C_1$ (за узагальненою теоремою Фалеса).	За узагальненою теоремою Фалеса паралельні прямі відтинають на сторонах кута пропорційні відрізки. Тому, враховуючи умову задачі, отримуємо паралельність трьох пар відповідних прямих: AB і A_1B_1, BC і B_1C_1 та AC і A_1C_1.
$A_1B_1 \cap B_1C_1 = B_1$, тому $(A_1B_1C_1)$ – єдина площина; $AB \cap BC = B$, (ABC) – єдина площина.	Точками A, B, C визначається одна площина, а A_1, B_1, C_1 – інша, які, за ознакою паралельності площин, паралельні, щ. в. д.
Отже, за ознакою паралельності площин, маємо, що $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, щ. в. д.	

Задача 2.

Дано дві паралельні площини α і β. Точка M не лежить у жодній з них. Знайдіть геометричне місце прямих, які проходять через точку M і паралельні двом площинам α і β.



Розв'язання	Чому саме так?
Нехай площини α і β – паралельні. Точка M не лежить ні у площині α, ні у площині β. Візьмемо у площині α довільну точку A, через яку проведемо дві прямі a_1 і a_2.	Точка M не належить двом даним площинам α і β. Її розміщення у просторі довільне: або між площинами, або поза площинами. На розв'язок задачі це не впливає. Через точку поза площиною можна завжди провести безліч прямих, паралельних даній
Через точку M проведемо відповідно дві прямі c_1 і c_2, які паралельні a_1 і a_2, а значить, і площині α. Дві прямі, що	

перетинаються, визначають єдину площину, нехай це буде площина γ. Тоді $\gamma \parallel \alpha$, за ознакою паралельності площин.

Аналогічно доводиться, що $\gamma \parallel \beta$.

Через точку M, яка не лежить у жодній з двох площин, можна провести безліч прямих, паралельних площинам α і β, які лежатимуть в одній площині, паралельній даним площинам.

Відповідь. Площина.

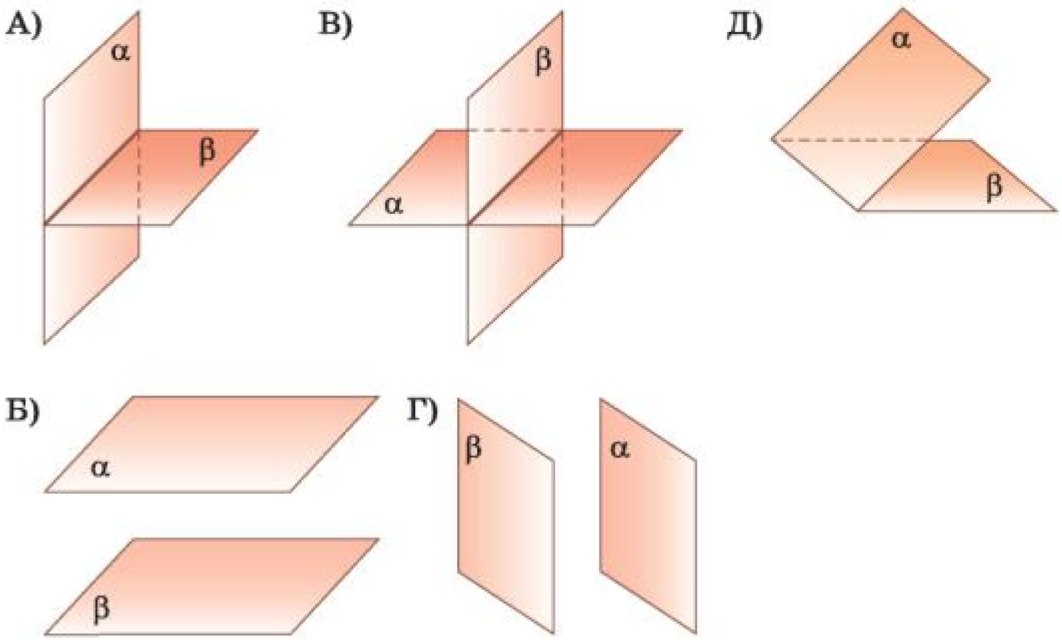
площині. Кожна пряма, яка паралельна одній з двох паралельних площин, буде паралельною і другій площині. Оскільки через дві прямі, що перетинаються, можна провести єдину площину, то всі паралельні даним площинам прямі, які проходять через задану точку M, належать одній і тій самій площині. Геометричним місцем таких прямих є площина.

Вправи

4.1°. Укажіть розміщення двох площин α і β, якщо вони не мають жодної спільної точки.

А) Перетинаються; Б) збігаються; В) паралельні.

4.2°. Укажіть три рисунки, на яких зображено дві площини, що перетинаються.



4.3°. Відомо, що площини α і β – паралельні, прямі a і b належать площині α, а прямі c і d належать площині β. Укажіть правильні твердження.

1) $a \parallel \beta$; 3) $b \parallel \beta$; 5) $c \parallel \alpha$; 7) $a \parallel \alpha$;
2) $c \parallel \beta$; 4) $b \parallel \alpha$; 6) $d \parallel \beta$; 8) $d \parallel \alpha$.

А) 1, 3, 4 і 7; В) 3, 4, 7 і 8; Д) 4, 5, 6 і 8.
Б) 2, 4, 5 і 6; Г) 1, 3, 5 і 8;

4.4°. Площини α і β – паралельні. Через точку A, яка не належить жодній з них, проведено площину ω. Укажіть три правильні твердження.

А) ω – єдина можлива площина, яка паралельна площині α;
Б) ω – єдина можлива площина, яка перетинає площину β;
В) ω – єдина можлива площина, яка паралельна площині β;
Г) ω – єдина можлива площина, яка перетинає площину α;
Д) ω – єдина можлива площина, яка паралельна і площині α, і площині β.

4.5°. Дві сторони AB і BC паралелограма $ABCD$, зображеного на рисунку 4.4, паралельні двом прямим a і b відповідно, які перетинаються і належать площині α. Укажіть взаємне розміщення площини паралелограма $ABCD$ та α.

А) Перетинаються; В) паралельні.
Б) збігаються;

4.6°. Відомо, що сторона AB прямокутника $ABCD$ паралельна деякій площині α, а сторона AD – не паралельна цій площині. Визначте взаємне розміщення площин ($ABCD$) та α.

А) Перетинаються; В) збігаються.
Б) паралельні;

4.7°°. На рисунку 4.5 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть взаємне розміщення площин, заданих умовами (А–Д).

А) $A_1B_1C_1D_1$ і $B_1A_1D_1C_1$;
Б) ADD_1A_1 і $ABCD$;
В) ABB_1A_1 і C_1D_1DC;
Г) $BADC$ і ABB_1A_1;
Д) CC_1B_1B і ADD_1A_1.

1) Перетинаються;
2) паралельні;
3) збігаються.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

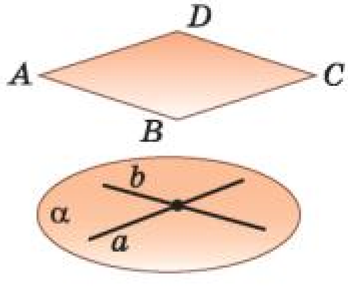


Рис. 4.4

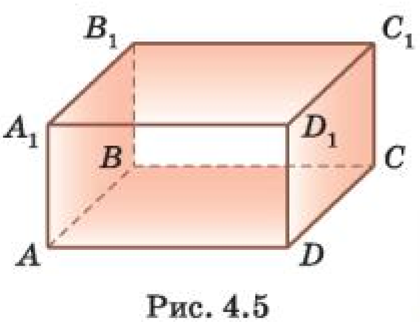


Рис. 4.5

4.8°°. У прямокутному паралелепіпеді вибрано вершину B (рис. 4.5). Виберіть три пари граней серед (1–6), які перетинаються по ребру, що містить точку B.

1) $ABCD$; 3) BCC_1B_1; 5) CDD_1C_1;
2) $A_1B_1C_1D_1$; 4) ADD_1A_1; 6) ABB_1A_1.

А) 1 і 4; Б) 3 і 6; В) 3 і 5; Г) 1 і 3; Д) 1 і 6.

4.9°°. Укажіть грань прямокутного паралелепіпеда, яка проходить через точку A_1 паралельно грані $ABCD$ (рис. 4.5).

А) D_1A_1AD; В) $D_1A_1B_1C_1$; Д) ABB_1A_1.
Б) D_1C_1CD; Г) D_1A_1BD;

4.10°°. Дві діагоналі ромба паралельні площині ω. Визначте розміщення площини, якій належить ромб і площина ω.

А) Паралельні; Б) збігаються; В) перетинаються.

4.11°°. Точка D не належить площині трикутника ABC (рис. 4.6). Точки K, Z, M – середини відрізків DA, DB, DC відповідно. Визначте взаємне розміщення площин (ABC) і (KZM).

А) Перетинаються; Б) збігаються; В) паралельні.

4.12°°. Точка S не належить площині паралелограма $ABCD$ (рис. 4.7). Точки K, Z, M, N належать відрізкам SA, SB, SC, SD відповідно, причому $SK = AK$, $SZ = BZ$, $SM : MC = 2 : 1$, $SN : ND = 2 : 1$. Визначте взаємне розміщення площин ($ABCD$) і ($KZMN$).

А) Перетинаються; Б) збігаються; В) паралельні.

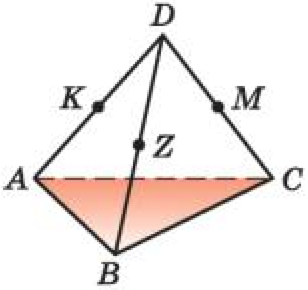


Рис. 4.6

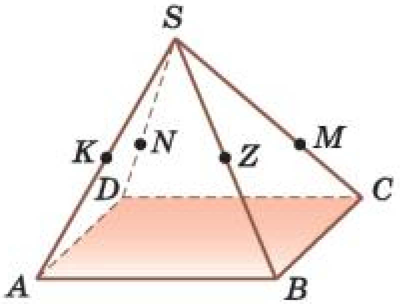


Рис. 4.7

4.13°°. Дві паралельні прямі l і m та точка K, яка не лежить на жодній з них, належать площині α. Через пряму l і точку K провели площину β, а через пряму m і точку K – площину γ. Визначте взаємне розміщення площин β і γ.

А) Перетинаються; Б) паралельні; В) збігаються.

4.14°°. Дано дві мимобіжні прямі a і b. Укажіть кількість площин, які проходять через пряму a і паралельні прямій b.

А) Одна; Б) дві; В) три; Г) жодна; Д) безліч.

4.15•. Доведіть, що через будь-які дві мимобіжні прямі можна провести єдину пару паралельних площин.

4.16•. Площини α і β паралельні. Доведіть, що кожна пряма площини α паралельна площині β.

4.17•. Точка O – спільна середина кожного з відрізків AA_1, BB_1, CC_1, які не лежать в одній площині. Доведіть, що площини (ABC) і $(A_1B_1C_1)$ паралельні.

4.18•. Три прямі, які проходять через одну точку, перетинають дану площину в точках A, B, C, а паралельну їй площину – в точках A_1, B_1, C_1. Доведіть подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

4.19••. Дано паралелограм $ABCD$ і площину, яка його не перетинає. Через вершини паралелограма проведено паралельні прямі, які перетинають дану площину в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Знайдіть довжину відрізка DD_1, якщо $AA_1 = 4$ м, $BB_1 = 3$ м, $CC_1 = 1$ м.

4.20••. Доведіть, що всі прямі, які проходять через дану точку паралельно даній площині, лежать в одній площині.

4.21••. Площини α і β паралельні площині γ. Визначте, чи можуть площини α і β перетинатися. Відповідь обґрунтуйте.

4.22••. На ребрах AA_1 і BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідні точки M і N (рис. 4.8), які є серединами цих ребер, а на грані CDD_1C_1 – точку O, яка є центром цієї грані.

1) Визначте взаємне розміщення площин (MNO) і (ABC); (BDM) і $(B_1C_1D_1)$.

2) У випадку перетину площин, побудуйте їхню лінію перетину.

3) Обчисліть площу перерізу куба, побудованого площиною, яка проходить через точки B_1 і D_1 паралельно ребру AA_1, якщо ребро куба дорівнює $3\sqrt{2}$ см.

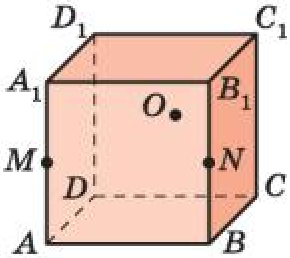


Рис. 4.8

§ 4.2. Властивості паралельних площин

Паралельні площини мають певні важливі властивості. Розглянемо їх.

В л а с т и в і с т ь 1. **Якщо дві паралельні площини перетнути третьою, то прямі їхнього перетину паралельні.**

Доведення. Нехай γ – січна площина для площин α і β, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$ (рис. 4.9). Тоді маємо дві прямі a і b, які можуть не перетинатися або перетинатися лише в одній точці, як прямі однієї площини γ. Однак $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, причому $\alpha \parallel \beta$. Отже, прямі a і b не перетинаються і лежать в одній площині γ. Отже, вони паралельні, $a \parallel b$, щ. в. д.

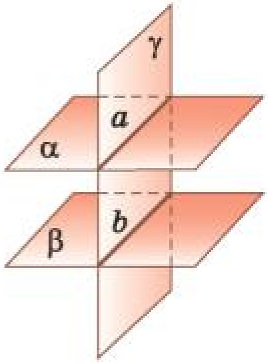


Рис. 4.9

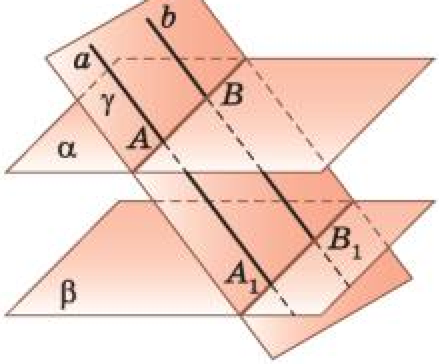


Рис. 4.10

В л а с т и в і с т ь 2. **Паралельні площини, перетинаючи дві паралельні прямі, відтинають на них рівні відрізки.**

Доведення. Нехай a і b – дані паралельні прямі, α і β – паралельні площини, що перетинають їх відповідно в точках A, B, A_1, B_1 (рис. 4.10).

Оскільки прямі a і b паралельні, то вони лежать в одній площині γ. Площина γ перетинає площину α по прямій AB, а площину β по прямій A_1B_1, які за властивістю 1 паралельні. Тому ABB_1A_1 – паралелограм. Отже, $AA_1 = BB_1$, щ. в. д.

Властивість 2 інколи формулюється так: *відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні*.

В л а с т и в і с т ь 3. **Дві площини, паралельні третій площині, паралельні між собою.**

Доведення. Нехай $\alpha \parallel \gamma$, $\beta \parallel \gamma$. Припустимо, що площини α і β не паралельні. Тоді площини α і β мають спільну точку. Через цю точку проходить дві площини α і β, які паралельні площині γ. Проте відомо, що через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній і до того ж тільки одну, тому ми прийшли до протиріччя. Отже, $\alpha \parallel \beta$, щ. в. д.

Задача 1.

Доведіть, що площина, яка перетинає одну з двох паралельних площин, перетинатиме й другу площину.

Д а н о: α, β, γ; $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$.

Д о в е с т и: площина γ перетинається з площиною β.

Доведення	Чому саме так?
Доведемо, що площина γ перетинається з площиною β, методом від супротивного (рис. 4.9). Нехай γ і β не пере-	Під час доведення вимоги задачі важливо вибрати метод доведення: прямий чи від супротивного. У за-

тинаються, тоді $\gamma \parallel \beta$. За умовою задачі, $\alpha \parallel \beta$ і $\gamma \cap \alpha = a$, тоді $a \subset \alpha$ і $a \subset \gamma$. Тобто існує така точка A на прямій a, через яку проведено дві різні площини, які паралельні площині β. Це суперечить теоремі про існування площини, паралельної даній. Отже, $\gamma \nparallel \beta$, тобто площина γ перетинається з площиною β, що й вимагалося довести.

гальних випадках більше використовують метод від супротивного. Зробивши припущення, протилежне до вимоги задачі, ми приходимо до висновку: $\gamma \parallel \beta$, $\alpha \parallel \beta$. Звідси, за транзитивністю, $\gamma \parallel \alpha$, що суперечить умові задачі. Отримана суперечність доводить вимогу задачі.

Отже, ***площина, яка перетинає одну з двох паралельних площин, перетинає й іншу.***

Задача 2.

Доведіть, що пряма, яка перетинає одну з паралельних площин, перетинає й іншу.

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $m \not\subset \alpha$ і $m \not\subset \beta$, $m \cap \alpha = A$.

Довести: пряма m перетинає площину β.

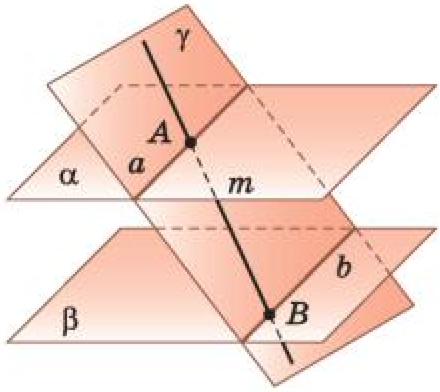


Рис. 4.11

Доведення

Побудуємо довільну площину γ (рис. 4.11), яка проходить через пряму m. A – спільна точка прямої m і площини α, а значить і площини γ. Тому $\alpha \cap \gamma = a$, $A \in a$. Тоді, за задачею 1, $\gamma \cap \beta = b$, де b – пряма перетину γ і β. Отримали, що $a \parallel b$. Пряма m, яка належить γ, перетинає пряму a в точці A, а отже, і пряму b, тобто площину β.

Можна було б довести вимогу задачі методом від супротивного: припустити, що пряма m не перетинає площину β. Тоді, якщо $m \cap \alpha = A$ і m не перетинається з β, то $m \subset \alpha$, що суперечить умові задачі. Отже, пряма m перетинає площину β, що й вимагалося довести.

Отже, ***будь-яка пряма, яка перетинає одну з двох паралельних площин, перетинає й іншу.***

Задача 3.

Дві паралельні площини α і β перетинають сторону BA кута ABC в точках D і D_1, а сторону BC – відповідно в точках E і E_1. Знайдіть довжину відрізка DE, якщо $BD = 12$ см, $BD_1 = 18$ см, $D_1E_1 = 54$ см (рис. 4.12).

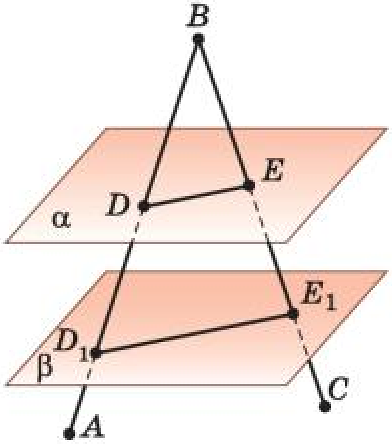


Рис. 4.12

Дано: площини α і β, $\alpha \parallel \beta$,
$AB \cap \alpha = D$, $AB \cap \beta = D_1$,
$BC \cap \alpha = E$, $BC \cap \beta = E_1$,
$D_1E_1 = 54$ см, $BD = 12$ см,
$BD_1 = 18$ см.

Знайти: DE.

Розв'язання	*Чому саме так?*
Нехай $\alpha \parallel \beta$, площина α перетинає сторони кута ABC в точках D і E, а площина β – в точках D_1 і E_1. За умовою $BD = 12$ см, $BD_1 = 18$ см, $D_1E_1 = 54$ см. Враховуючи, що $DE \parallel D_1E_1$, маємо: $\triangle DBE$ подібний $\triangle D_1BE_1$. Отже, $\frac{BD}{DE} = \frac{BD_1}{D_1E_1}$; $DE = \frac{BD \cdot D_1E_1}{BD_1}$; $DE = \frac{12 \cdot 54}{18} = 36$ (см). *Відповідь.* 36 см.	Через точки A, B, C проведемо площину (ABC), яка перетинає дві паралельні площини α і β по паралельних прямих DE і D_1E_1. Тоді отримані трикутники DBE і D_1BE_1 – подібні і їхні відповідні сторони – пропорційні. Знаходимо невідомий член пропорції і отримуємо розв'язок задачі.

Вправи

4.23°. Відомо, що прямі перетину двох площин α і β третьою площиною γ – паралельні. Виберіть взаємне розміщення площин α і β.

А) Перетинаються; В) паралельні або перетинаються.

Б) паралельні;

4.24°. На рисунку 4.13 зображено паралельні площини α і β. Точки A, B, C, D, M належать площині α, а точки A_1, B_1, C_1, D_1, M_1 – площині β. Відомо, що прямі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, MM_1 –

попарно паралельні й $AA_1 = 7$ см. Укажіть два відрізки, довжина яких також дорівнює 7 см.

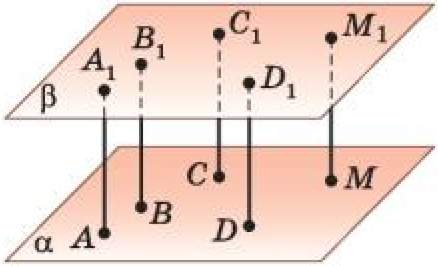


Рис. 4.13

А) CC_1; В) DM_1; Д) BD_1.
Б) AC_1; Г) MM_1;

4.25°. Через дві паралельні прямі AB і CD провели площину γ, яка перетнула паралельні площини α і β по прямих AC і BD відповідно. $BD = 15$ см. Виберіть правильне твердження для відрізка AC (рис. 4.14).

А) $AC = 3$ см; В) $AC = 15$ см; Д) $AC = 30$ см.
Б) $AC = 5$ см; Г) $AC = 20$ см;

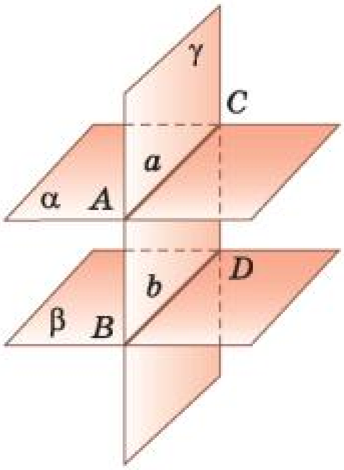


Рис. 4.14

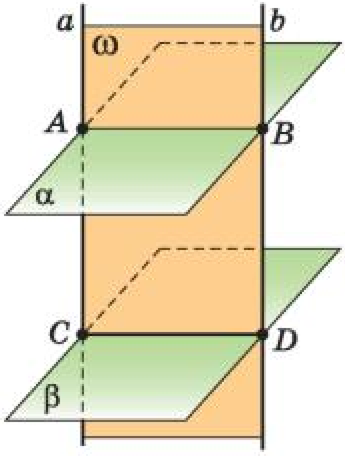


Рис. 4.15

4.26°. Площина ω, якій належать дві паралельні прямі a і b (рис. 4.15), перетинає дві паралельні площини α і β по прямих AB і CD. Визначте чотири можливі назви чотирикутника $ABDC$.

А) Квадрат; В) ромб; Д) паралелограм.
Б) прямокутник; Г) трапеція;

4.27°. Визначте взаємне розташування площин α і β, якщо пряма k перетинає площину α і належить площині β.

А) Перетинаються; В) паралельні.
Б) збігаються;

4.28°°. Укажіть дві пари мимобіжних прямих, що належать паралельним площинам (AA_1B_1) і (CC_1D_1) куба (рис. 4.16).

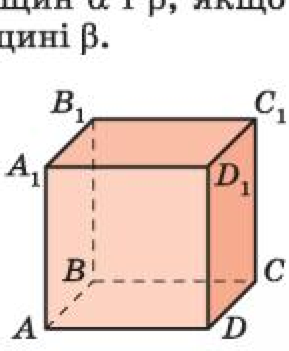


Рис. 4.16

А) AB і D_1D; В) A_1B_1 і CD; Д) BB_1 і DD_1.
Б) AA_1 і CC_1; Г) A_1B і DC;

4.29°°. На рисунку 4.16 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність правильних тверджень (А–Б) і (1–5) для прямих, що належать паралельним площинам (BCC_1) і (AA_1D_1).

А) Мимобіжні прямі;
Б) паралельні прямі.

1) AD і CB_1;
2) A_1D і BC_1;
3) A_1D_1 і BC;
4) DD_1 і B_1C_1;
5) A_1D і B_1C.

А	Б

4.30°°. Дві прямі a і b, перетинаючись в точці O, перетинають паралельні площини α і β відповідно в точках A, B і C, D. Виберіть, користуючись рисунком 4.17, три правильні твердження.

А) $\angle OCD = \angle OBA$;
Б) $\angle CDO = \angle ABO$;
В) $CO : OB = OD : OA$;
Г) $\Delta OCD = \Delta OBA$;
Д) $\Delta COD \sim \Delta BOA$.

4.31°°. Укажіть за умовою задачі 4.30 довжину відрізка CO до кожного з випадків (А–Д).

А) $CO : OB = 2 : 3$, $CB = 12$ см;
Б) $CD : AB = 1 : 4$, $OB = 6$ см;
В) $AO = OD$, $OB = 3$ см;
Г) $AB = CD$, $OB = 4{,}5$ см;
Д) $CO - OB = 1{,}5$ см, $CB = 10{,}5$ см.

1) 6 см;
2) 3 см;
3) 1,5 см;
4) 4,8 см;
5) 4,5 см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

4.32°°. Точки A, B, C належать площині α, яка паралельна площині β. Через ці точки провели паралельні прямі, які перетнули площину β в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 4.18). Знайдіть периметр $\Delta A_1B_1C_1$, якщо $\angle ABC = 90°$, $AB = 5$ см, $BC = 12$ см.

А) 29 см; Б) 34 см; В) 30 см; Г) 22 см; Д) 24 см.

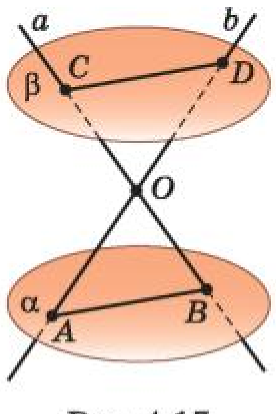


Рис. 4.17

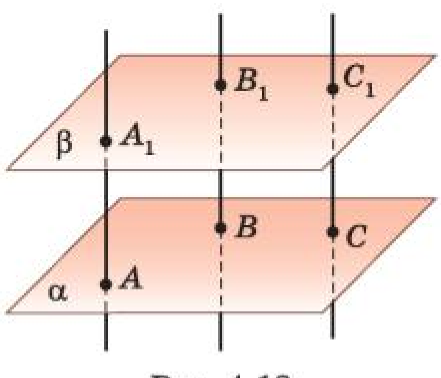


Рис. 4.18

4.33•. Дано дві паралельні площини. Через точки A і B однієї площини проведено паралельні прямі, які перетинають другу площину в точках A_1 і B_1. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо $AB = a$.

4.34•. Чи можуть мати рівні довжини відрізки непаралельних прямих, які містяться між паралельними площинами?

4.35•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точки F, P, Q – середини відрізків C_1D_1, C_1B_1, C_1C відповідно. Доведіть, що площини (FPQ) і (D_1B_1C) паралельні.

4.36•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точки M, N, R – середини відрізків A_1D_1, C_1D_1, D_1D відповідно. Доведіть, що площина (MNR) паралельна площині (A_1DC_1).

4.37•. Точка M не належить площині трикутника ABC. Точки Q, P, K належать відрізкам MA, MB, MC відповідно і такі, що $\angle MAB + \angle AQP = 180°$, $\angle MKQ = \angle MCA$. Доведіть, що площини (ABC) і (QPK) паралельні.

4.38•. Точка D не належить площині трикутника ABC. Точки T, S, F – середини відрізків AB, AC, AD відповідно. Доведіть, що площина (TSF) паралельна площині (BCD).

4.39•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.19). Доведіть паралельність площин (B_1D_1K) і (BDL), де точки K і L – середини відрізків CC_1 і AA_1 відповідно.

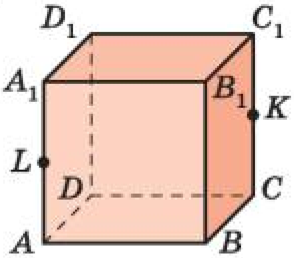


Рис. 4.19

4.40••. Дано паралельні площини α і β. Через точки M і N площини α проведено паралельні прямі, які перетинають площину β в точках K і L. Доведіть, що чотирикутник $MNLK$ – паралелограм. Обчисліть периметр чотирикутника $MNLK$, якщо $ML = 14$ см, $NK = 8$ см і $MK : MN = 9 : 7$.

4.41••. Два промені OF і OP перетинають паралельні площини α і β в точках F_1 і P_1 та F_2 і P_2 відповідно. Визначте OP_1, якщо $F_1P_1 = 3$ см, $F_2P_2 = 5$ см, $P_1P_2 = 4$ см.

4.42••. Два промені з початком у точці O перетинають одну з паралельних площин у точках A_1 і B_1, а другу – у точках A_2 і B_2. Обчисліть довжину відрізка A_1B_1, якщо $OA_1 = 16$ см, $A_1A_2 = 24$ см, $A_2B_2 = 50$ см.

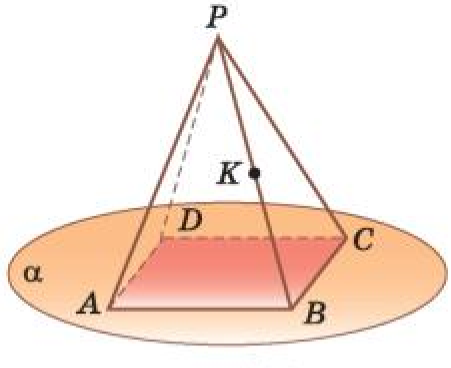


Рис. 4.20

4.43••. З точки P, що не належить даній площині α, проведено чотири промені, які перетинають цю площину в точках A, B, C, D. Побудуйте через точку K – середину відрізка PB (рис. 4.20):

1) площину, паралельну площині (ABC);

2) площину, паралельну площині (PCA).

4.44••. Прямі a, b і c, які не належать одній площині, перетинаються в точці O (рис. 4.21). На кожній із цих прямих взято точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 так, що $OA_1 = OA_2$, $OB_1 = OB_2$, $OC_1 = OC_2$. Доведіть паралельність площин $(A_1B_1C_1)$ і $(A_2B_2C_2)$.

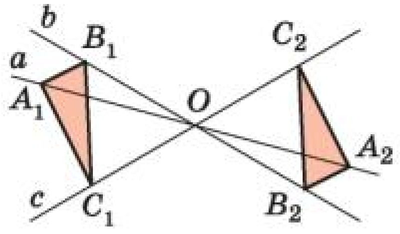


Рис. 4.21

4.45••. Доведіть, що можна побудувати дві паралельні площини, які відтинають на трьох даних попарно мимобіжних прямих рівні відрізки.

4.46••. Три площини паралельні. Прямі a і b перетинають ці площини відповідно в точках A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3. Відомо, що $A_1A_2 = 5$ см, $B_1B_2 = 6$ см, $B_1B_2 : B_2B_3 = 2 : 5$. Визначте довжину відрізків A_1A_3 і B_1B_3.

§ 4.3. Паралельне проекціювання. Зображення плоских і просторових фігур на площині

Щоб зобразити просторові фігури на площині, користуються різними методами. Один з них – паралельне проекціювання.

Паралельне проекціювання – це зображення довільної геометричної фігури на площині, при якому всі точки фігури переносяться на площину по прямих, паралельних заданій, яка називається **напрямом** проекціювання.

Моделі паралельного проекціювання можна порівняти з утворенням тіні на плоскій поверхні стіни, землі за сонячного освітлення. Отже, щоб виконати паралельне проекціювання, спочатку задають фігуру і площину, на яку проекціюють, – ***площину проекції***. Далі задають прямою напрям проекціювання – ***проекціюючу пряму***. Вона має перетинати площину проекції.

Нехай задано довільну площину α, проекціюючу пряму l і точку A, що не належить ні прямій l, ні площині α (рис. 4.22, a).

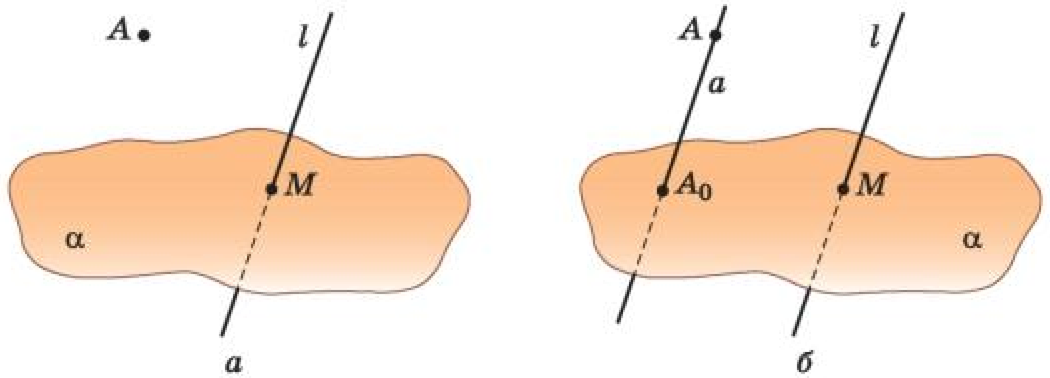


Рис. 4.22

Проведемо через точку A паралельно l пряму a, яка перетинає площину α в точці A_0 (рис. 4.22, *б*). Знайдена в такий спосіб точка A_0 називається ***паралельною проекцією точки A*** на площину α. Тобто ми виконали паралельне проекціювання точки A на площину α.

Як відомо, кожна геометрична фігура складається з точок. Тому, проекціюючи послідовно точки фігури на площину, отримуємо зображення, яке називають *проекцією* цієї фігури, а спосіб виконання зображення – *паралельним проекціюванням*.

Зауважимо, що у випадку розміщення точки на проекціюючій прямій, її проекцією буде точка перетину прямої з площиною (точка M на рисунку 4.22). Якщо точка, яку треба проекціювати, належить площині проекції, то її проекція збігається з точкою площини.

Розглянемо паралельне проекціювання для зображення геометричних фігур на площину. Нехай F довільна геометрична фігура, яку треба спроекціювати на площину α. Для цього візьмемо довільну пряму l, яка перетинає площину α, і проведемо через точки, які є вершинами фігури F (A, B, L, K, D, C), прямі, паралельні l. Точки A_1, B_1, L_1, K_1, D_1, C_1 – точки перетину цих прямих з площиною проекції α – будуть проекцією вершин фігури. Зрозуміло, що відрізки (DK, KL, LB, ...) перейдуть у відрізки площини проекції (D_1K_1, K_1L_1, L_1B_1, ...), усі точки фігури перейдуть у точки площини проекції, утворивши зображення F_1 фігури F (рис. 4.23).

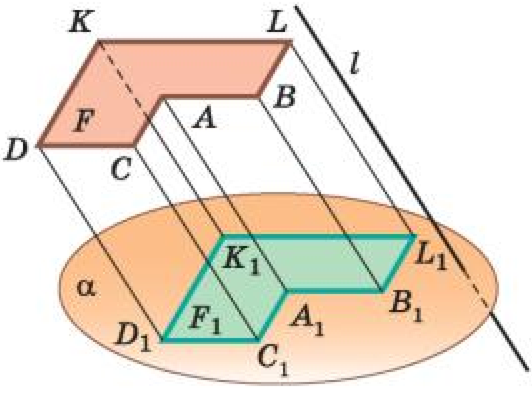


Рис. 4.23

Очевидно, що для паралельного проекціювання важливо знати його напрям. Від нього залежить загальний вигляд зображення проекції. Наприклад, проекцію відрізка, паралельного проекціюючій прямій, буде точка (рис. 4.24, *а*), а проекцією відрізка, не паралельного проекціюючій прямій, – відрізок (рис. 4.24, *б*).

Отже, паралельне проекціювання має свої властивості для прямих і відрізків, не паралельних напряму проекціювання:

1. Проекцією прямої є пряма, а проекцією відрізка – відрізок.
2. Проекції паралельних прямих паралельні або збігаються.
3. Відношення довжин відрізків однієї прямої або паралельних прямих зберігаються (рис. 4.24, *б*), тобто дорівнюють відношенням довжин своїх проекцій, зокрема середина відрізка проекціюється в середину його проекцій.

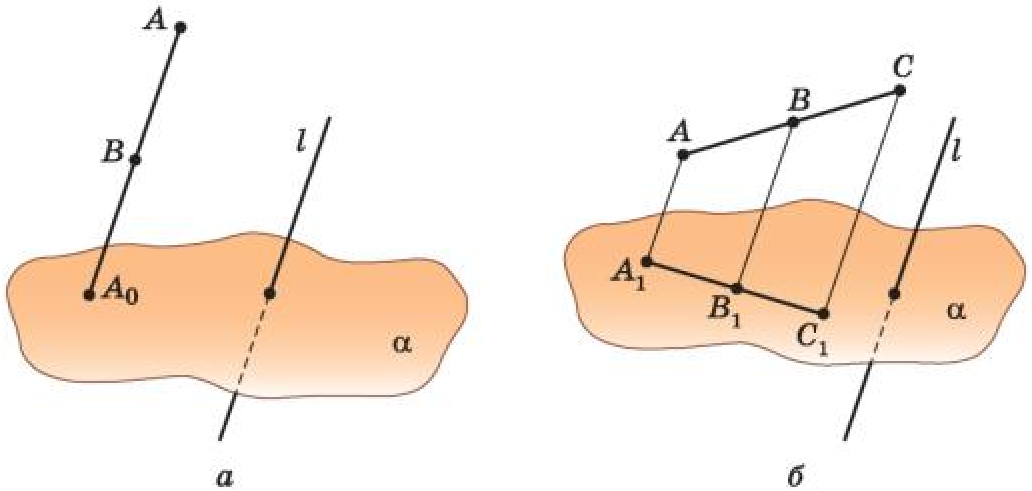


Рис. 4.24

Зауважимо, що довжини проекцій відрізків, паралельних площині проекцій, зберігаються, тобто дорівнюють довжинам самих відрізків. Звідси випливає, що плоска фігура, площина якої паралельна площині проекції, проекціюється в рівну собі фігуру.

Наведемо деякі властивості зображення фігури на площині, які випливають з вищеописаної побудови.

Прямолінійні відрізки фігури зображаються на площині рисунка відрізками (рис. 4.24, *б*).

Справді, всі прямі, що проекціюють точки відрізка AC, лежать в одній площині, яка перетинає площину α по прямій A_1C_1. Довільна точка B відрізка AC зображається точкою B_1 відрізка A_1C_1.

Зауважимо, що вищерозглянуті відрізки, які проекціюються, не паралельні напряму проекціювання.

Паралельні відрізки фігури зображаються на площині рисунка паралельними відрізками (рис. 4.25).

Справді, нехай AC і BD – паралельні відрізки деякої фігури. Їхні проекції – відрізки A_1C_1 і $B_1\ D_1$ – паралельні, оскільки їх отримали в результаті перетину паралельних площин з площиною α (перша з цих площин проходить через прямі AC і AA_1, а друга – через прямі BD і BB_1. Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої, то площини паралельні).

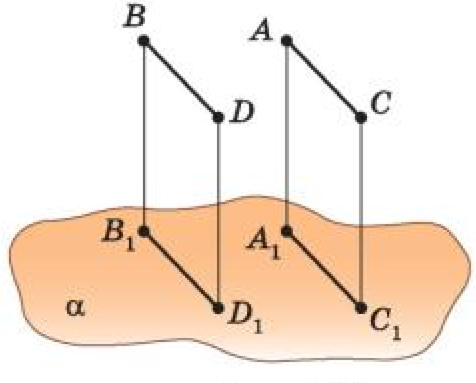


Рис. 4.25

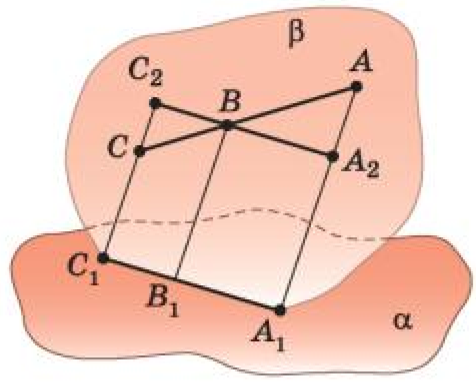


Рис. 4.26

Відношення довжин відрізків однієї прямої або паралельних прямих зберігаються при паралельному проекціюванні.

Покажемо, наприклад, що $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ (рис. 4.26).

Прямі AC і A_1C_1 лежать в одній площині β. Проведемо в ній через точку B пряму A_2C_2, паралельну A_1C_1. Трикутники BAA_2 і BCC_2 подібні. З подібності трикутників і рівностей $A_1B_1 = A_2B$ і $B_1C_1 = BC_2$ випливає пропорція: $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

Задача.

Дано паралельну проекцію трикутника. Як побудувати проекції медіан цього трикутника?

Розв'язання

При паралельному проекціюванні зберігається відношення відрізків прямої. Тому середина сторони трикутника проекціюється в середину проекції цієї сторони. Звідси випливає, що проекції медіан трикутника будуть медіанами його проекції.

Вправи

4.47°. Виберіть три фігури, які можуть бути паралельними проекціями двох паралельних прямих.

А) Пряма; В) промінь; Д) дві точки;
Б) точка; Г) дві паралельні прямі; Е) відрізок.

4.48°. Відомо, що l – проекціююча пряма паралельного проекціювання. AB і CD – відрізки, причому $AB \parallel CD$, $AB \nparallel l$, $CD \nparallel l$.

Укажіть взаємне розміщення проекцій A_1B_1 і C_1D_1 відрізків AB і CD на площину α.

А) $A_1B_1 \parallel C_1D_1$; В) $A_1B_1 \subset C_1D_1$; Д) $A_1B_1 \dot{-} C_1D_1$.
Б) $A_1B_1 \cap C_1D_1$; Г) $C_1D_1 \subset A_1B_1$;

4.49°. Дано l – напрям паралельного проекціювання, $AB \nparallel l$. Виберіть фігуру, яка може бути проекцією відрізка AB.

А) Пряма; В) дві точки; Д) відрізок.
Б) точка; Г) промінь;

4.50°. Дано l – напрям паралельного проекціювання, $a \cap b = O$, $a \nparallel l$ і $b \nparallel l$. Укажіть дві фігури, які можуть бути проекціями прямих a і b.

А) Одна пряма; Г) дві мимобіжні прямі;
Б) дві прямі, що перетинаються; Д) кут.
В) дві паралельні прямі;

4.51°. Дано l – напрям паралельного проекціювання, $ABCD$ – паралелограм, $l \nparallel (ABCD)$. Чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ – проекція $ABCD$ на площину α. Укажіть, якими фігурами може бути чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$.

А) Ромб; В) прямокутник; Д) паралелограм.
Б) квадрат; Г) трапеція;

4.52°. Укажіть п'ять фігур, в які може проекціюватися квадрат $ABCD$.

А) Паралелограм; В) трапеція; Д) квадрат;
Б) прямокутник; Г) ромб; Е) відрізок.

4.53°°. Визначте таку фігуру з умов (А–В), яка може бути паралельною проекцією чотирьох із п'яти заданих фігур (1–5), і таку, яка не може бути паралельною проекцією для жодної з них. (Пряма паралельного проекціювання не паралельна площині фігури.)

А) Трапеція;
Б) паралелограм;
В) трикутник.

1) Прямокутник;
2) квадрат;
3) прямокутний трикутник;
4) ромб;
5) паралелограм.

А					
Б					
В					

4.54°°. Відомо, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ є паралельною проекцією трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) на площину α. Визначте вид чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$.

А) Ромб; Б) паралелограм;

В) трапеція ($A_1B_1 \parallel C_1D_1$); Д) прямокутник.

Г) трапеція ($A_1D_1 \parallel B_1C_1$);

4.55°°. Відомо, що $\triangle A_1B_1C_1$ є паралельною проекцією $\triangle ABC$ на площину α; AM – медіана $\triangle ABC$, AK і AH – бісектриса і висота $\triangle ABC$; M_1, K_1, H_1 – відповідно паралельні проекції точок M, K, H на площину α. Укажіть правильні твердження.

1) Якщо $\triangle ABC$ – правильний, то $\triangle A_1B_1C_1$ – правильний;
2) якщо $\triangle ABC$ – прямокутний, то $\triangle A_1B_1C_1$ – прямокутний;
3) якщо AM – медіана $\triangle ABC$, то A_1M_1 – медіана $\triangle A_1B_1C_1$;
4) якщо AK – бісектриса $\triangle ABC$, то A_1K_1 – бісектриса $\triangle A_1B_1C_1$;
5) якщо AH – висота $\triangle ABC$, то A_1H_1 – висота $\triangle A_1B_1C_1$;
6) якщо $BK : KC = 2 : 3$, то $B_1K_1 : K_1C_1 = 2 : 3$;
7) якщо $\angle A = 30°$, $BC = 20$ см, то $\angle A_1 = 30°$, $B_1C_1 = 20$ см.

А) 1, 3 і 5; В) 1 і 2; Д) 4 і 7.

Б) 2, 6 і 7; Г) 3 і 6;

4.56°°. Відомо, що A_1B_1 – паралельна проекція відрізка AB (рис. 4.27) на площину α; $C_1 \in A_1B_1$, C_1 – паралельна проекція точки C, де $C \in AB$; $AB = 48$ см, $A_1B_1 = 36$ см. Установіть відповідність між умовою (А–Д) і висновком (1–5).

А) $AC = 24$ см; 1) $A_1C_1 = 9$ см;
Б) $AC = 12$ см; 2) $A_1C_1 = 6$ см;
В) $AC = 8$ см; 3) $A_1C_1 = 27$ см;
Г) $AC = 32$ см; 4) $A_1C_1 = 18$ см;
Д) $AC = 36$ см. 5) $A_1C_1 = 24$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

4.57•. Намалюйте довільний трикутник, виберіть пряму паралельного проекціювання і побудуйте паралельну проекцію цього трикутника на деяку площину α.

4.58•. Доведіть, що коли $\triangle A_1B_1C_1$ – паралельна проекція $\triangle ABC$ і $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$, то $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

4.59•. На рисунку 4.28 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Яких основних властивостей паралельного проекціювання дотримуються під час його побудови?

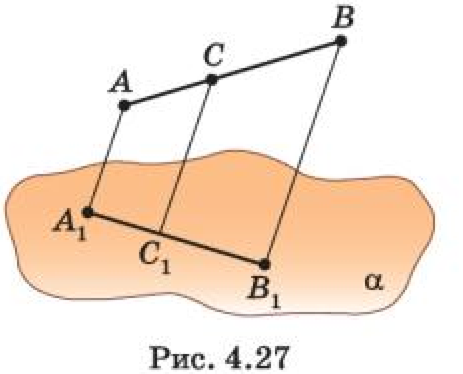


Рис. 4.27

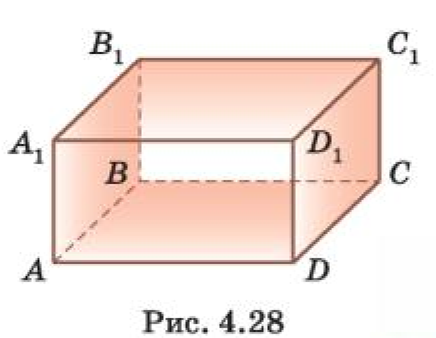


Рис. 4.28

4.60•. Сформулюйте правила побудови тетраедра.

4.61•. Чи може паралельною проекцією паралелограма бути трапеція? Відповідь обґрунтуйте.

4.62••. Точки A і B лежать по один бік від площини α; точки A_1 і B_1 – відповідно паралельні проекції точок A і B на площину α.

1) Побудуйте точку C перетину прямої AB з площиною α, якщо $AA_1 > BB_1$.

2) Побудуйте паралельну проекцію точки D – середини відрізка BC – на площину α.

3) Запишіть можливі відношення відрізка.

4.63••. Визначте фігуру паралельних проекцій відносно прямої проекціювання AA_1 на площину $A_1B_1C_1D_1$ у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

1) грані $ABCD$;
2) грані CC_1D_1D;
3) грані AA_1D_1D;
4) перерізу ADC_1B_1;
5) перерізу BCD_1A_1;
6) відрізка AC_1;
7) $\triangle BDC$;
8) перерізу AB_1D_1.

4.64••. Побудуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і знайдіть площу паралельної проекції $\triangle DB_1C$:

1) на грань B_1C_1CB;
2) на грань $ABCD$;
3) на грань $A_1B_1C_1D_1$, якщо ребро куба дорівнює 6 см.

4.65••. Трикутник $A_1B_1C_1$ – паралельна проекція рівностороннього трикутника ABC. Точка M лежить на стороні AC, $AM : AC = 1 : 4$. Побудуйте проекцію прямої, яка перпендикулярна до прямої AC і проходить через точку M.

4.66••. Паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ є зображенням при паралельному проекціюванні ромба з гострим кутом 60°. Побудуйте з вершини цього кута висоти ромба.

4.67••. Трикутник $A_1B_1C_1$ є зображенням при паралельному проекціюванні прямокутного трикутника з гострим кутом 60°. Побудуйте зображення бісектриси цього кута.

4.1. Кожна грань дерев'яного бруска – прямокутник. Доведіть, що який би спосіб розпилу цього бруска по поздовжніх ребрах не вибирали, кожний отриманий переріз буде паралелограмом.

Леонардо Пізанський (Фібоначчі) (бл. 1170–1228)

Більше двох століть книги Фібоначчі були неперевершеним зразком математичних творів для європейців...

К. Рибніков

Леонардо Пізанський, більше відомий під прізвиськом Фібоначчі, був одним з основоположників математики нового часу в Західній Європі. Роль його книг у розвитку математики і поширення в Європі математичних знань важко переоцінити. Він народився у м. Піза (Італія). Його батько був діловодом пізанської факторії в Алжирі, де Леонардо й отримав математичну освіту. Під керівництвом місцевого вчителя він ознайомився з арифметикою і алгеброю арабів, а згодом розширив і поповнив свої знання під час подорожей до Єгипту, Сирії, Греції, Сицилії та Провансу.

Повернувшись на батьківщину, Леонардо вирішив «приєднати до індійського методу дещо від себе, дещо від геометричного мистецтва Евкліда та скласти трактат», який мав за мету ознайомити «рід латинян» з основними досягненнями математики і надавав би їм можливість успішно вести торговельні справи з використанням математичних розрахунків.

Цей трактат був написаний у 1202 р. і називався «Книга про абак», тобто це книга, в якій у 15 розділах абак розглядається не стільки як пристрій, скільки як числення взагалі.

До основних праць ученого, крім вищевказаного знаменитого трактату, належать ще дві: «Практична геометрія» (1220 р.) і «Книга квадрата» (1225 р.). «Практична геометрія» містить застосування алгебраїчних методів до розв'язування геометричних задач. Користуючись працями Евкліда та інших грецьких авторів, Фібоначчі викладає питання про площі плоских фігур, про вимірювання круга, про многокутники, сфери і циліндри. Праці Фібоначчі понад два століття були невичерпним джерелом для вивчення математики і підґрунтям подальших успіхів італійської математичної школи в добу Відродження.

Леонардо да Вінчі (1452–1519)

Жодне дослідження не може вважатися справжньою наукою, якщо воно не пройшло через математичне доведення.

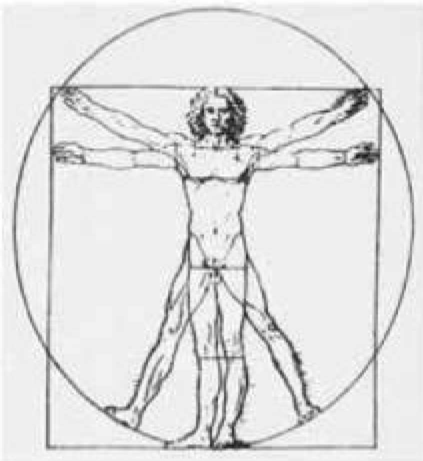
Леонардо да Вінчі

Природа поєднала в особі Леонардо майже всі людські таланти – від надзвичайної вроди і фізичної досконалості до інтелектуальної і духовної всеосяжності. Генії такого рівня з'являються раз на тисячоліття.

Народився Леонардо неподалік Венеції в м. Вінчі. У 14 років Леонардо став учнем флорентійського художника Андреа Вероккьо, оскільки за своїм походженням не міг займатися більш поважною справою, ніж живописом. У 20 років він був проголошений «майстром», самобутнім і непересічним художником.

Леонардо жив і працював у Мілані, Венеції, Флоренції, Римі, Парижі та інших містах Європи. Художник винайшов принцип розсіювання (або сфумато). Предмети на його полотнах не мають чітких меж: усе, як у житті, розмито, переходить з одного стану в інший, а тому дихає, живе, пробуджує фантазію. Завдяки ефекту сфумато (прийом в образотворчому мистецтві) з'явилася незрівнянна посмішка його знаменитої «Джоконди». Усі 120 творів генія також розсіялися по білому світу і поступово відкриваються людству.

Леонардо да Вінчі дуже високо цінував математику. У зв'язку з цим він розробив теорію перспективи, а також багато уваги приділяв теорії побудови правильних многокутників і поділу кола на рівні частини. Деякі побудови виконував точно, а деякі – наближено. Іноді він накладав певні обмеження, згідно з якими креслення виконував одним і тим самим розхилом циркуля.



Крім цього, розглядав питання побудови рівновеликих фігур і розв'язав першу задачу про побудову прямокутника, рівновеликого даному кругу. Серед інших геометричних задач, які розв'язував учений, – знаходження висоти предмета за його тінню та знаходження ширини річки, що ґрунтуються на подібності трикутників.

Леонардо належить уведення терміна «золотий переріз» для позначення поділу відрізка в крайньому і середньому відношенні. Такий поділ вивчався ще давніми греками, а пізніше – Лукою Пачолі в книзі «Божественна пропорція», ілюстрації до якої виконав Леонардо.

Особливо слід згадати задачі про визначення центра мас півкруга і тетраедра, розв'язуючи які, вчений висловив чимало оригінальних думок. У знаходженні площі еліпса Леонардо застосував метод, який отримав розвиток лише у математиків наступних поколінь під назвою «метод неподільних». Крізь призму математичних знань він краще розумів перспективу картин і глибше проникав у навколишній світ. Математика в його житті була вірним і надійним помічником.

Запитання для самоконтролю

1. Які площини називаються паралельними?
2. Чи є прямі на площині α, які перетинатимуть площину β, якщо $\alpha \parallel \beta$?
3. Чи можна стверджувати, що площини паралельні, коли дві прямі однієї площини паралельні двом прямим другої площини?
4. Як розміщена площина трикутника по відношенню до деякої площини, якщо дві сторони трикутника паралельні цій площині?
5. Як формулюється ознака паралельності площин?
6. Скільки площин, паралельних площині трикутника, можна провести через точку поза трикутником?
7. Чи можна вважати площину α такою, що збігається з декількома площинами?
8. У якому випадку площини перетинаються?
9. Яке взаємне розміщення площин у просторі?
10. Чи може пряма, що перетинає одну з двох площин, які перетинаються, не перетинати іншу?
11. Чи може пряма, що перетинає одну з двох площин, які паралельні, не перетинати іншу?
12. Чи завжди будуть рівними відрізки паралельних прямих, які відтинаються паралельними площинами?

13. Чи можуть між паралельними площинами бути рівними відрізки непаралельних прямих?

14. Чи можна стверджувати про паралельність площин α і β, якщо площина γ перетинає ці площини по паралельних прямих?

15. Як розміщені площина трапеції і площина α, якщо діагоналі цієї трапеції паралельні площині α?

16. Чи можуть мимобіжні прямі належати паралельним площинам?

17. Чи можуть три грані куба бути паралельними одній площині?

18. Як будують паралельну проекцію геометричної фігури?

19. Які основні властивості паралельного проекціювання?

20. Яка фігура може бути паралельною проекцією трапеції?

21. Чи можна стверджувати, що коли проекцією є паралельні прямі, то геометричною фігурою, яку проекціюють, є також паралельні прямі?

22. Чи можуть довжини проекцій відрізка і самого відрізка бути різними?

23. Чи може паралельна проекція квадрата бути прямокутником; паралелограмом?

24. Який елемент трикутника проекціюється сам у себе?

25. Яке взаємне розміщення проекцій двох прямих, які перетинаються?

26. Чи можуть проекції мимобіжних прямих збігатися?

27. Чи будь-яке зображення геометричної фігури є її паралельною проекцією?

28. Чи можна різносторонній трикутник вважати зображенням рівностороннього; рівнобедреного трикутника?

29. Чи можна тупокутний трикутник вважати зображенням прямокутного; гострокутного трикутника?

30. Які загальні вимоги для виконання зображення прямокутного паралелепіпеда; куба; піраміди?

31. Чи можна паралелограм вважати зображенням ромба; квадрата; прямокутника?

Тест для самоконтролю

● ***Частина 1***

Завдання 1–16 мають варіанти відповідей, з яких тільки ОДНА правильна або конкретна кількість. Виберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1°. Дві сторони *AB* і *AC* трикутника *ABC* паралельні деякій площині α (рис. 4.29). Укажіть розміщення площин (*ABC*) і α.

А) Перетинаються; Б) збігаються; В) паралельні.

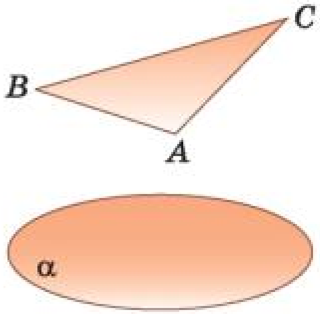


Рис. 4.29

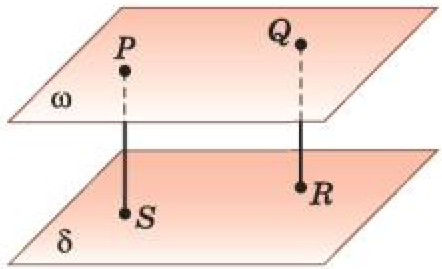


Рис. 4.30

2°. Площини ω і δ паралельні (рис. 4.30). Точки P, Q належать площині ω, а точки S, R – площині δ і $PS \parallel QR$. Порівняйте довжини відрізків PS і QR.

А) $PS > QR$; Б) $PS < QR$; В) $PS = QR$.

3°. Укажіть за умовою попередньої задачі дві пари рівних відрізків.

1) PS; 2) PR; 3) QR; 4) PQ; 5) QS; 6) RS.

А) 1 і 2; Б) 1 і 3; В) 3 і 5; Г) 2 і 5; Д) 4 і 6.

4°. Дві паралельні площини перетинаються третьою площиною. Укажіть взаємне розміщення прямих перетину.

А) Збігаються; В) мимобіжні;
Б) перетинаються; Г) паралельні.

5°. Дві сторони AB і BC трапеції $ABCD$ паралельні площині α. Визначте взаємне розміщення площин ($ABCD$) і α.

А) Паралельні; Б) перетинаються; В) збігаються.

6°. Дві площини α і β паралельні деякій прямій AB. Визначте взаємне розміщення площин α і β.

А) Перетинаються; Б) збігаються; В) паралельні.

7°. Визначте, якою фігурою може бути квадрат при паралельному проекціюванні.

1) Довільний чотирикутник; 5) ромб;
2) рівнобічна трапеція; 6) трапеція;
3) паралелограм; 7) прямокутник;
4) прямокутна трапеція; 8) квадрат.

А) 1, 2, 6 і 7; В) 1, 3, 5 і 7; Д) 3, 5, 6 і 7.
Б) 2, 4, 6 і 8; Г) 3, 5, 7 і 8;

8°. Відрізок A_1B_1 – паралельна проекція відрізка AB на площину α, точка O – середина відрізка AB, O_1 – проекція точки O на площину α. Знайдіть довжину відрізка O_1B_1, якщо $A_1B_1 = 36$ см.

А) 18 см; Б) 12 см; В) 9 см; Г) 36 см; Д) 27 см.

9°°. Визначте взаємне розміщення площин перерізів зображеного на рисунку 4.31 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо точки K, L, M, N – середини ребер AB, CD, CC_1, BB_1 відповідно.

А) Перетинаються; Б) паралельні; В) збігаються.

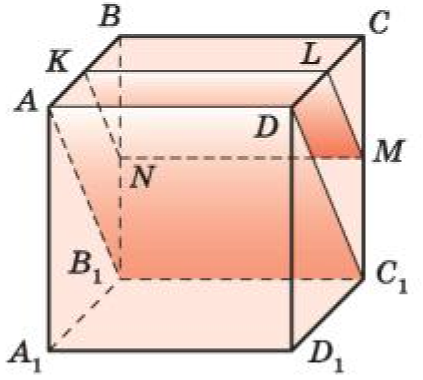


Рис. 4.31

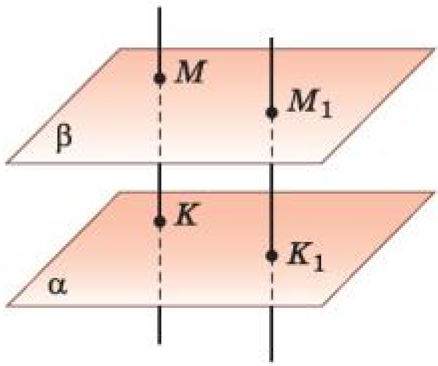


Рис. 4.32

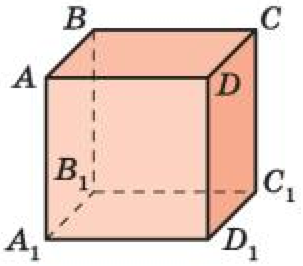


Рис. 4.33

10°°. Визначте взаємне розміщення прямих MK і M_1K_1, якщо паралельні площини α і β перетинають їх у точках M, K, M_1, K_1 (рис. 4.32), причому $MM_1 \nparallel KK_1$.

А) Мимобіжні; В) паралельні.

Б) перетинаються;

11°°. Виберіть правильні обґрунтування паралельності площин (ABB_1) і (DD_1C_1) зображеного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ за ознакою паралельності площин (рис. 4.33).

1) $AB \parallel C_1D_1$, $B_1B \parallel D_1D$ і $B_1A \parallel C_1D$;

2) $AB \parallel C_1D_1$, $BB_1 \parallel DD_1$ і $AB \cap BB_1$, $C_1D \cap DD_1$;

3) $B_1B \parallel D_1D$, $A_1A \parallel C_1C$, $AB \parallel C_1D_1$ і $A_1B_1 \parallel CD$;

4) $BB_1 \cap B_1A$, $DD_1 \cap C_1D$ і $B_1B \parallel D_1D$, $B_1A \parallel DC_1$;

5) $A_1B \cap AB_1$, $D_1C \cap C_1D$ і $A_1B \parallel D_1C$, $B_1A \parallel C_1D$.

А) 1, 2 і 4; Б) 2, 3 і 5; В) 2, 4 і 5; Г) 1, 4 і 5; Д) 2, 3 і 4.

12°°. Виберіть правила побудови зображення проекцій прямокутного паралелепіпеда.

1) Протилежні ребра проекцій – рівні відрізки;

2) протилежні ребра проекцій – паралельні відрізки;

3) кути всіх граней проекцій – прямі;

4) усі грані проекцій – прямокутники;

5) усі грані проекцій – паралелограми;

6) усі грані проекцій – квадрати.

А) 1, 2 і 4; Б) 1, 2 і 5; В) 3, 4 і 6; Г) 2, 5 і 6; Д) 1, 3 і 6.

13°°. Виберіть вимоги для побудови зображення правильної трикутної піраміди (основа піраміди – правильний трикутник, бічні грані піраміди – рівнобедрений трикутник).

1) Ребра основи піраміди – рівні відрізки;

2) не всі ребра основи піраміди – рівні відрізки;

3) бічні ребра піраміди – рівні відрізки;

4) не всі бічні ребра піраміди – рівні відрізки;

5) усі грані піраміди – трикутники.

А) 1, 3 і 5; Б) 1, 4 і 5; В) 2, 3 і 5; Г) 2, 4 і 5; Д) 2, 3 і 5.

14°°. Пряма a лежить на площині α, пряма b – на площині β, причому $\alpha \parallel \beta$. Укажіть кількість можливих спільних точок для прямих a і b (рис. 4.34).

А) Одна; Б) дві; В) три; Г) безліч; Д) жодної.

15°°. Через паралельні прямі m і n проведено площину γ, яка перетинає паралельні площини α і β по прямих MN і M_1N_1. Укажіть можливий вид чотирикутника MNN_1M_1.

1) Трапеція;

2) паралелограм;

3) довільний чотирикутник;

4) ромб;

5) прямокутник.

А) 1 або 2, або 4; Б) 2 або 4, або 5; В) 3 або 4, або 5; Г) 1 або 3, або 4; Д) 1 або 4, або 5.

16°°. Точки K і L належать площині α, а точки M і H – площині β, $\alpha \parallel \beta$, відрізки KM і LH перетинаються в точці O (рис. 4.35). Знайдіть довжину відрізка KM при виконанні додаткових умов з (А–Д). Ідентифікуйте умову (А–Д) і правильну відповідь (1–5).

А) $KL = 6$ см, $MH = 5$ см, $OM = 10$ см;

Б) $OM = 9$ см, $OL = 4$ см, $OH = 12$ см;

В) $KL = 3$ см, $MH = 4$ см, $OM = 8$ см;

Г) $OK = 8$ см, $OL = 6$ см, $OH = 9$ см;

Д) $KL = 10$ см, $OK = 4$ см, $MH = 15$ см.

1) $KM = 20$ см;

2) $KM = 10$ см;

3) $KM = 22$ см;

4) $KM = 14$ см;

5) $KM = 12$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

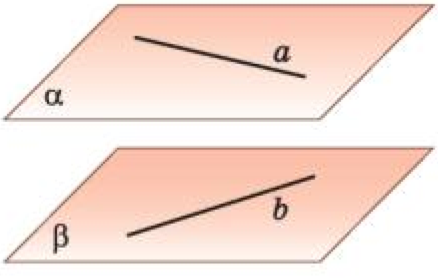


Рис. 4.34

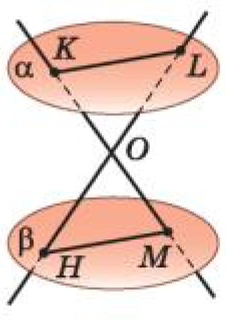


Рис. 4.35

● ***Частина 2***

Розв'яжіть завдання 17–28 з коротким записом ходу міркувань.

17•. Дано дві паралельні площини α і β. Точки K і H належать площині α, точки C і P – площині β. Відрізки KP і CH перетинаються в точці O. Знайдіть довжину відрізка OP, якщо $KH = 13{,}5$ см, $KO = 9{,}6$ см, $CP = 4{,}5$ см.

18•. Паралельні площини α і β перетинають сторони кута ACB у точках A_1, B_1, A_2, B_2 відповідно. Знайдіть довжину відрізка CB_1, якщо $CA_1 : A_1A_2 = 1 : 3$ і $CB_2 = 12$ см.

19•. Сторона AB трикутника ASB паралельна кожній з паралельних площин α і β. Площини α і β перетинають сторону AS відповідно в точках A_1 і A_2, а сторону BC – в точках B_1 і B_2. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо $AB = 18$ см, A_2 – середина відрізка AS, а A_1 – середина відрізка A_2S.

20•. Дано прямокутник $ABCD$ і точку S, що не належить площині цього прямокутника. Точку S з'єднали відрізками з усіма вершинами цього прямокутника. Через точку D_1 – середину відрізка SD – провели площину α, паралельну площині $(ABCD)$, яка перетнула відрізки SA, SB і SC в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Знайдіть периметр чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$, якщо $AD = 8$ см, $AB = 6$ см.

21•. З точки S, що не належить жодній з двох паралельних площин α, β і не лежить між ними, проведено три промені, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1, а площину β – в точках A_2, B_2, C_2. Обчисліть периметр $\triangle A_1B_1C_1$, якщо $A_2B_2 = 8$ см, $B_2C_2 = 10$ см, $A_2C_2 = 12$ см і $SA_1 : SA_2 = 2 : 3$.

22•. З точки S, що не належить жодній з двох паралельних площин α, β і не лежить між ними, проведено три промені, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1, а площину β – в точках A_2, B_2, C_2. Обчисліть площу $\triangle A_1B_1C_1$, якщо трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ – правильні, $A_2C_2 = 4\sqrt{3}$ см, $SA_1 : SA_2 = \sqrt{3} : 2$.

23•. Дано паралельні площини α і β. Точки A і B лежать на площині α, а точки C і D – на площині β. Відрізки AC і BD перетинаються в точці K. Знайдіть довжину відрізка KD, якщо $AB = 2$ см, $CD = 4$ см і $KB = 5$ см.

24•. На паралельних площинах α і β вибрано по парі точок A_1, A_2 і B_1, B_2 відповідно так, що A_1B_1 і A_2B_2 перетинаються у точці Q. Обчисліть довжину відрізка QA_1, якщо $A_1B_1 = 6$ см, $QA_2 = 2{,}5$ см, $QB_2 : QA_2 = 3 : 1$.

25•. На паралельних площинах α і β зображено $\triangle A_1B_1C_1$ і $\triangle A_2B_2C_2$ відповідно. Знайдіть площу $\triangle A_2B_2C_2$, коли відомо, що $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$, $A_1B_1 = 4$ см, $B_1C_1 = 3$ см, $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

26•. При паралельному проекціюванні ромба $ABCD$ на площину α отримали чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$, в якому $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

$K \in AB$, точка K_1 – проекція точки K на площину α, причому $KA : KB = 2 : 3$. Знайдіть довжину відрізка A_1K_1, якщо $A_1B_1 = 15$ см.

27•. При паралельному проекціюванні рівнобічної трапеції $ABCD$ (AC – основа) отримали чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$. Діагональ трапеції точкою O ділить її середню лінію MN у відношенні $3 : 5$. Знайдіть довжини відрізків M_1O_1 і O_1N_1 (M_1, O_1, N_1 – проекції точок M, O, N відповідно на площину α), якщо $M_1N_1 = 24$ см.

28•. На рисунку 4.36 зображено паралельне проекціювання квадрата $ABCD$ на площину α, l – напрям проекціювання, O – центр квадрата. Площини (ABC) і α – паралельні, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. Знайдіть площу проекції $A_1B_1C_1D_1$, коли відомо, що $AO = 8$ см.

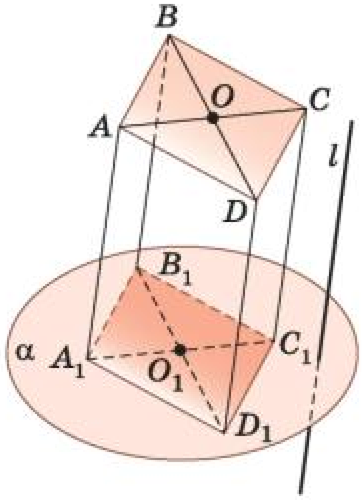


Рис. 4.36

● ***Частина 3***

Розв'яжіть завдання 29–32 з повним обґрунтуванням.

29••. Дано рівнобічну трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$), $M \in BC$ і $BM : MC = 1 : 3$.

1) Побудуйте паралельну проекцію $ABCD$ на площину α.

2) Побудуйте паралельну проекцію точки M на площину α.

3) Побудуйте паралельну проекцію перпендикуляра, проведеного з точки M до основи AD.

4) Обчисліть довжини відрізків B_1M_1 і M_1C_1, якщо $B_1C_1 = 18$ см.

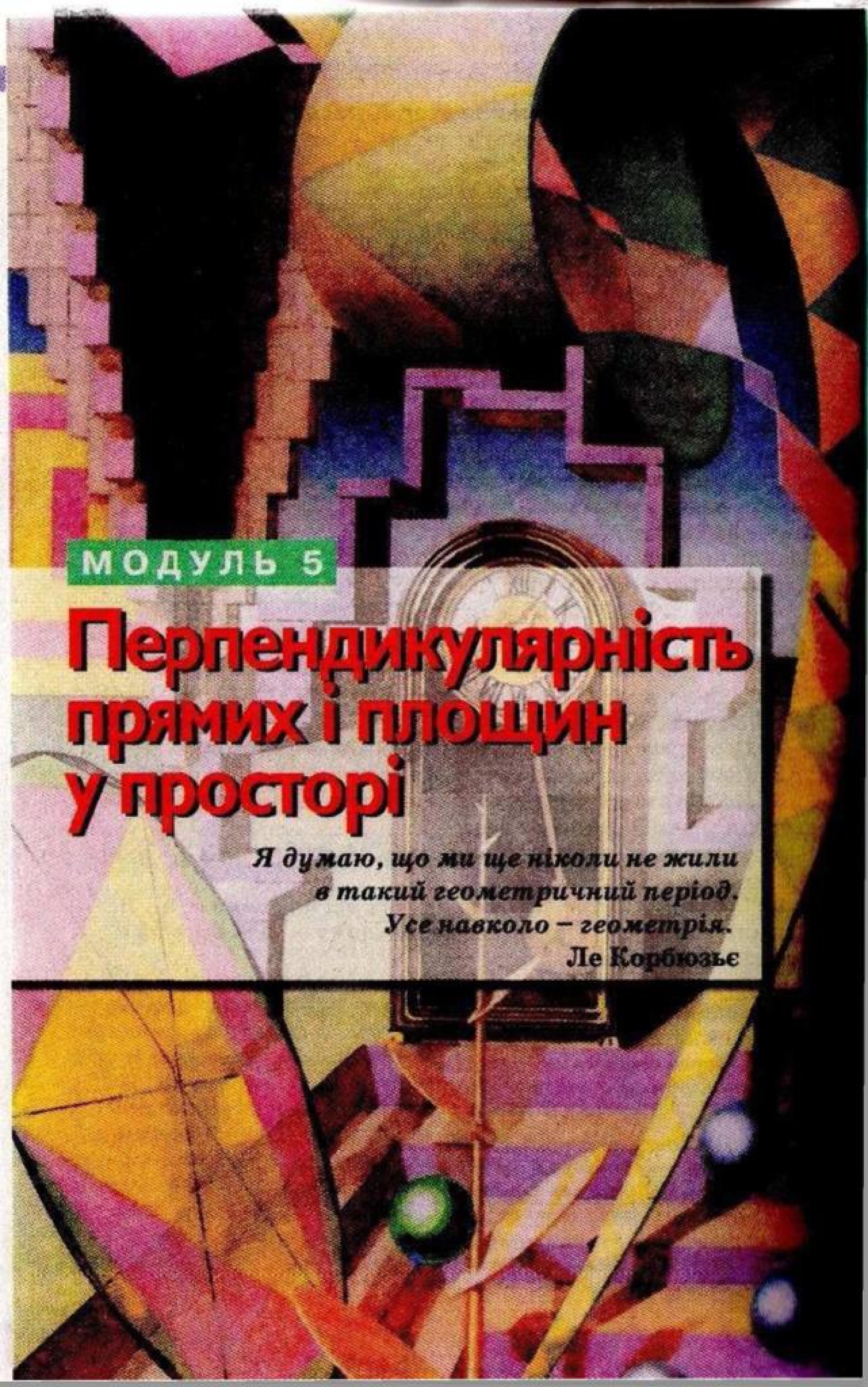
30••. Точки A і B лежать по один бік від площини α; A_1, B_1 – проекції точок A, B відповідно на площину α; O – середина відрізка BB_1, $BB_1 < AA_1$.

1) Побудуйте точку перетину C прямої AO з площиною α.

2) Знайдіть довжину відрізка A_1C, якщо $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 4$ см, $A_1B_1 = 9$ см.

31••. Через середини ребер AD, DC і A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину перерізу (MNK), а через AA_1 і точку C_1 – площину перерізу (AA_1C_1). Доведіть, що $(MNK) \parallel (AA_1C)$.

32••. Дано чотири точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Доведіть, що будь-яка площина, паралельна прямим AB і CD, перетинає прямі AC, AD, BD, BC у вершинах паралелограма.



МОДУЛЬ 5

Перпендикулярність прямих і площин у просторі

Я думаю, що ми ще ніколи не жили
в такий геометричний період.
Усе навколо – геометрія.

Ле Корбюзьє

КОРОТКИЙ ЗМІСТ МОДУЛЯ

- Перпен икулярні прямі простору та прямі, перпенд икулярні деякій площині простору
- Ознаки ерпендикулярності прямих простору та прям ї і площини
- Побудов я прямої, перпендикулярної до деякої площини
- Власти ості прямої і площини, перпендикулярних між собо ю
- Перпен икуляр і похила
- Теорема про три перпендикуляри
- Ознака ерпендикулярності площин

Опрацюв вши цей модуль, ви дізнаєтеся:

- яка відмі ність між властивостями перпендикулярних прямих на площи і й у просторі;
- як побуду вати пряму, перпендикулярну до деякої площини простору;
- як викори стовувати ознаки перпендикулярності прямих при розв'язув нні задач;
- як викори стовувати ознаки перпендикулярності прямих і площин при розв' зуванні задач;
- як пов'яз а паралельність та перпендикулярність прямих і площин у просторі
- які відрізк и називають перпендикуляром і похилою до площини;
- як порівн ти довжини проекцій похилих, маючи довжини похилих;
- як порівн ти довжини похилих, маючи довжини проекцій похилих;
- як визнач ти, чи буде пряма перпендикулярна до похилої або її проекції;
- як визнач ти, чи буде пряма перпендикулярна до проекції похилої;
- як застосу вати ознаку перпендикулярності площин для ... довжини в ідрізка, кінці якого лежать на перпендику...

§ 5.1. Перпендикулярність прямих у просторі

У третьому модулі ми розглядали взаємне розміщення прямих у просторі. Очевидно, що прямі, які перетинаються, утворюють кути. Кутом між прямими є менший з двох суміжних. Наприклад, на рисунку 5.1 зображено дві прямі AB і CD, які перетинаються. $\angle DOB$ – кут між ними. Очевидно, що найбільшим кутом між прямими може бути кут 90°. Такі прямі називаються *перпендикулярними*.

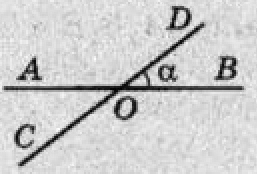


Рис. 5.1

Дві прямі у просторі називаються ***перпендикулярними***, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

Властивості перпендикулярних прямих простору виражають теореми 1–4.

Теорема 1.
Через довільну точку прямої у просторі можна провести перпендикулярну до неї пряму.

Доведення. Нехай a – дана пряма і A – точка на ній (рис. 5.2). Візьмемо поза прямою a яку-небудь точку X і проведемо через цю точку і пряму a площину α (наслідок з аксіом). У площині α через точку A можна провести пряму b, перпендикулярну до a ($b \perp a$), що й вимагалося довести. *Теорему доведено.*

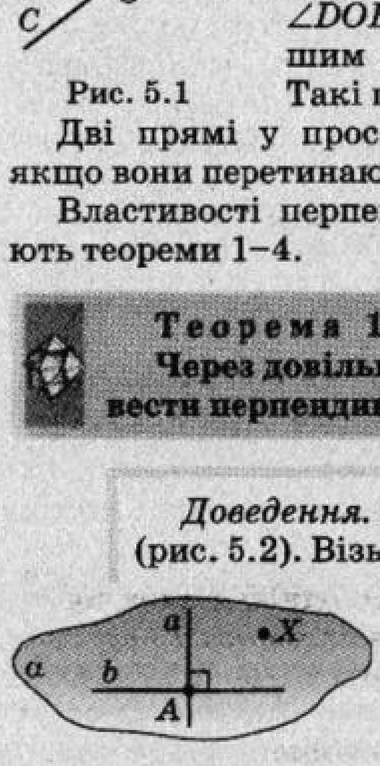


Рис. 5.2

Теорема 2.
Якщо дві прямі, які перетинаються, відповідно паралельні двом перпендикулярним прямим, то вони теж перпендикулярні.

Доведення. Нехай a і b – дані перпендикулярні прямі й $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$, а також пряма a перетинає b в точці O, а пряма a_1 перетинає b_1 в точці O_1 (рис. 5.3). Тоді a_1 і b_1 лежать у площині β, а прямі a і b – у площині α, які будуть паралельні за ознакою паралельності площин. Сполучимо точки O і O_1. Виберемо на прямій a_1 точку A_1, а на прямій b_1 – точку B_1. Проведемо $AA_1 \parallel OO_1$ і $BB_1 \parallel OO_1$. Тоді $AA_1 \parallel BB_1$.

Чотирикутники O_1A_1AO і O_1B_1BO – паралелограми, звідси $O_1A_1 = OA$ і $O_1B_1 = OB$. Оскільки $AA_1 \parallel BB_1$, то вони лежать в одній площині γ, яка перетинає площину β по прямій A_1B_1, а площину α – по прямій AB, які паралельні, тобто $A_1B_1 \parallel AB$.

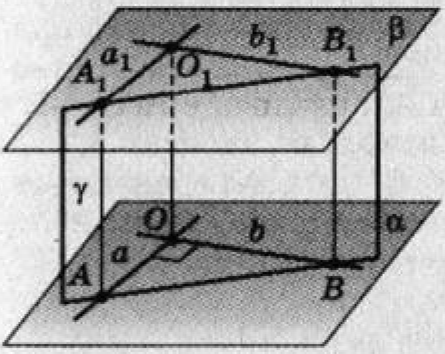


Рис. 5.3

Отже, чотирикутник AA_1B_1B – паралелограм, у якого $A_1B_1 = AB$. Таким чином, трикутники OAB і $O_1A_1B_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. $a \perp b$, звідси $\angle AOB = 90°$, тому $\angle A_1O_1B_1 = 90°$. Отже, пряма a_1 перпендикулярна до прямої b_1, що й вимагалося довести. *Теорему доведено.*

Теорема 3.
Через будь-яку точку простору, що не належить прямій, можна провести пряму, перпендикулярну до даної (рис. 5.4, *а*).

Теорема 4.
Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих і лежить з ними в одній площині, то вона перпендикулярна і до другої прямої (рис. 5.4, *б*).

Доведення теорем 3 і 4 виконайте самостійно.

Розміщення трьох прямих у просторі, коли вони між собою попарно перпендикулярні і мають спільну точку, є окремим випадком (рис. 5.4, *в*).

Рис. 5.4

Зауважимо, що у просторі існує безліч площин, які можна провести через одну й ту саму пряму. Вибираючи точку A поза прямою, ми попадаємо на одну із цих площин, і у вибраній площині до даної прямої через точку A проводимо пряму, перпендикулярну до даної.

Отже, у просторі до прямої можна провести безліч перпендикулярних прямих, що проходять через дану точку цієї прямої.

Задача 1.

Прямі AB, AC і AD попарно перпендикулярні (рис. 5.5). Знайдіть відрізок CD, якщо $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$ см.

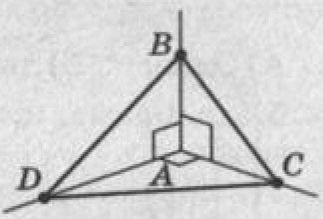


Рис. 5.5

Дано: $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AB \perp AD$;
$AB = 3$ см, $BC = 7$ см,
$AD = 1{,}5$ см.

Знайти: CD.

Розв'язання	Чому саме так?
З $\triangle ABC$ ($\angle A = 90°$) за теоремою Піфагора $AB^2 + AC^2 = BC^2$. $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, тому $9 + AC^2 = 49$, звідси $AC^2 = 40$ см^2. З $\triangle ACD$ ($\angle A = 90°$) за теоремою Піфагора $AC^2 + AD^2 = CD^2$. $AC^2 = 40$ см^2, $AD = 1{,}5$ см, тому $40 + 2{,}25 = CD^2$, $CD^2 = 42{,}25$ см^2, $CD > 0$; $CD = 6{,}5$ см. *Відповідь.* 6,5 см.	Кожна пара даних прямих AB, AC і AD – перпендикулярна, тобто утворюють прямі кути. Сполучивши послідовно точки B з C, C з D і D з B, отримаємо прямокутні трикутники. 1) $\triangle ABC$ ($\angle A = 90°$): відомі катет і гіпотенуза, невідома – сторона, що є другим катетом. CA – сторона $\triangle ACD$. 2) $\triangle ACD$ ($\angle A = 90°$): один катет відомий за умовою, другий – знайдено з $\triangle ABC$; невідомою є третя сторона – гіпотенуза. За теоремою Піфагора складаємо вираз і виконуємо обчислення довжини відрізка CD.

Вправи

5.1°. Виберіть правильне означення перпендикулярних прямих у просторі.

А) Прямі, що перетинаються під прямим кутом;
Б) прямі, що лежать в одній площині, перетинаються і утворюють рівні кути;
В) прямі, що перетинаються і утворюють рівні кути;
Г) прямі, які при перетині утворюють два рівні суміжні кути;
Д) прямі, що лежать в одній площині і не є паралельними.

5.2°. Укажіть кількість перпендикулярних прямих, які можна провести до прямої простору через дану точку на ній.

А) Одну; Б) дві; В) три; Г) чотири; Д) безліч.

5.3°. Укажіть кількість прямих, перпендикулярних даній, що проходять через точку поза даною прямою.

А) Одна; Б) дві; В) три; Г) чотири; Д) безліч.

5.4°. Відомо, що прямі a, b належать площині α, а a_1, b_1 – площині β, $a \parallel a_1$ і $b \parallel b_1$, причому a і b – перпендикулярні. Виберіть правильне твердження.

А) $a_1 \parallel b_1$; Б) $a_1 \perp b_1$; В) $a_1 \parallel b$; Г) $a_1 \perp b$; Д) $a \perp b_1$.

5.5°°. Укажіть взаємне розташування прямих у просторі, перпендикулярних до однієї і тієї самої прямої.

А) Перетинаються або мимобіжні; Г) тільки мимобіжні;
Б) перетинаються або паралельні; Д) тільки паралельні.
В) паралельні або мимобіжні;

5.6°°. На рисунку 5.6 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть трійку попарно перпендикулярних прямих.

А) DD_1, AA_1, AD; Г) A_1B_1, C_1B_1, B_1B;
Б) A_1A, AB, BC; Д) C_1D, BC, AB.
В) A_1B_1, A_1D_1, D_1C_1;

5.7°°. Обчисліть периметр $\triangle AB_1C$, якщо ребро куба дорівнює 4 см (рис. 5.6).

А) 12 см; Б) $6\sqrt{2}$ см; В) $4\sqrt{2}$ см; Г) $12\sqrt{2}$ см; Д) $16\sqrt{2}$ см.

5.8°°. Обчисліть площу $\triangle D_1AC$, якщо ребро куба дорівнює 8 см (рис. 5.6).

А) $18\sqrt{3}$ см^2; В) $24\sqrt{3}$ см^2; Д) $16\sqrt{3}$ см^2.
Б) $32\sqrt{3}$ см^2; Г) $36\sqrt{3}$ см^2;

5.9*. На попарно перпендикулярних променях OX, OY, OZ (рис. 5.7) вибрано точки M, N, K так, що $OM = ON = OK$. Доведіть, що трикутник MNK – правильний. Запишіть формулою периметр і площу $\triangle MNK$, якщо $OM = a$.

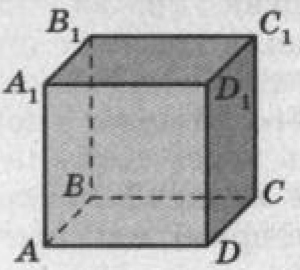


Рис. 5.6

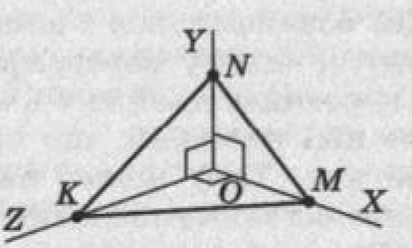


Рис. 5.7

5.10•. На попарно перпендикулярних променях OX, OY, OZ вибрано точки A, B, C відповідно (рис. 5.8). Знайдіть периметр утвореного трикутника ABC, якщо:

1) $OA = OB = OC = 5$ см;

2) $OA = OC = 5$ см, $OB = 6$ см;

3) $OA = 3$ см, $OB = 4$ см, $OC = 5$ см;

4) $OA = a$, $OB = 2a$, $OC = 3a$.

5.11••. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в якому точки O і O_1 – центри протилежних граней. Доведіть, що пряма OO_1 перпендикулярна до діагоналей цих граней.

5.12••. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.9) через відрізок DC_1 і точку B проведено площину. Обчисліть периметр утвореного перерізу, якщо a, b, c – виміри паралелепіпеда, причому $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 6$ см.

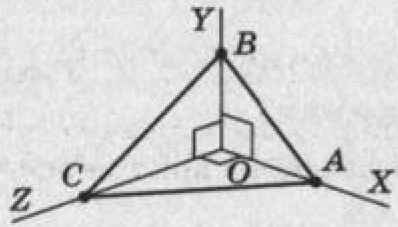


Рис. 5.8

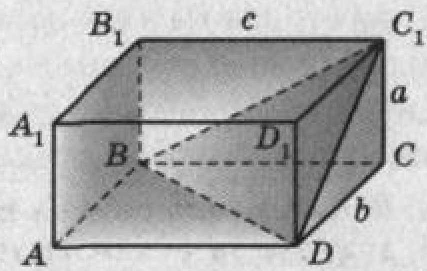


Рис. 5.9

5.13••. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обчисліть периметр перерізу, утвореного площиною, проведеною через відрізок DC_1 і точку B, якщо a, b, c – виміри паралелепіпеда, причому $a = 4$ см, $b = 2$ см, $c = 8$ см.

5.14••. На ребрах AD і BC правильного тетраедра $ABCD$ позначено точки M і K, які є серединами цих ребер. Доведіть перпендикулярність прямих:

1) KM і AD; 2) KM і BC.

§ 5.2. Перпендикулярність прямої та площини у просторі

Ми вже розглядали взаємне розміщення прямої і площини, детально ознайомилися з випадком, коли пряма не перетинає площину. У цьому параграфі ми розглянемо випадок, коли пряма перетинає площину і, крім цього, утворює з довільною прямою цієї площини, що проходить через точку перетину, прямий кут. Таку пряму називають ***перпендикулярною*** до площини. Всі інші неперпендикулярні прямі, які перетинають площину, називають ***похилими***.

Моделлю прямої, перпендикулярної до площини, може бути встановлена вишка, стовп, закопаний у землю, цвях, забитий у стінку, і т. д.

Пряма, яка перетинає площину, називається ***перпендикулярною до цієї площини***, якщо вона перпендикулярна до довільної прямої, що лежить на цій площині і проходить через їхню точку перетину.

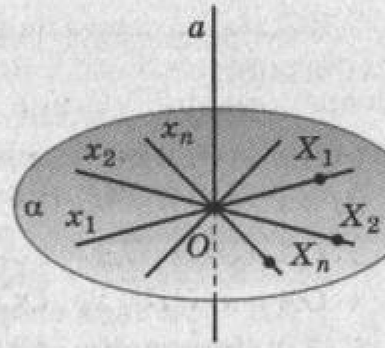


Рис. 5.10

Щоб визначити, чи буде пряма a перпендикулярна до площини α, треба через точку її перетину з площиною O провести безліч прямих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (рис. 5.10) і довести, що вона перпендикулярна до кожної з них. Цей шлях дуже довгий і практично нездійсненний. Тому для встановлення перпендикулярності прямої до площини користуються *ознакою перпендикулярності прямої та площини.*

Теорема 5 (***ознака перпендикулярності прямої та площини***).
Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, які лежать у площині та перетинаються, то вона перпендикулярна до даної площини.

Доведення. Нехай α – дана площина, c – пряма, яка перетинає її в точці O, a і b – прямі, що належать площині α, проходять через точку O (рис. 5.11) і перпендикулярні прямій c ($c \perp a$, $c \perp b$). Доведемо, що $c \perp \alpha$, тобто що пряма c перпендикулярна до будь-якої прямої x площини α, яка проходить через точку O. Для цього зробимо додаткову побудову:

1) відкладемо у різних півпросторах на прямій c від точки O рівні відрізки OQ_1 і OQ_2;

2) позначимо на прямій a деяку точку A, а на прямій b – точку B; сполучимо точки: A і Q_1, A і Q_2, B і Q_1, B і Q_2 та A і B;

3) проведемо через точку O довільну пряму x, яка перетне AB в точці X, яку теж з'єднаємо з Q_1 і Q_2.

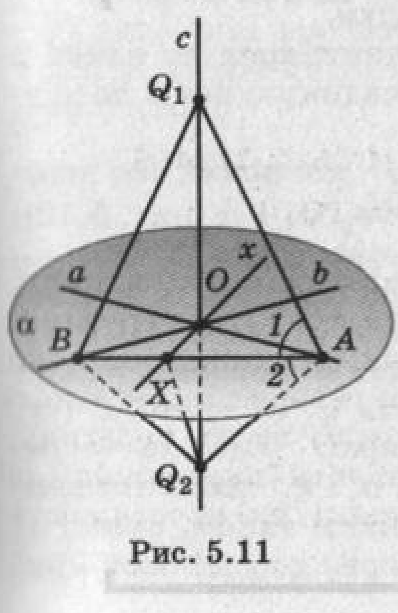


Рис. 5.11

Розглянемо утворені при цьому трикутники.

1. $\triangle Q_1AQ_2$. AO – медіана і висота; $OQ_1 = OQ_2$ за побудовою; OA – спільна

сторона трикутників Q_1OA і Q_2OA; $\angle Q_1OA = \angle Q_2OA = 90°$.

Отже, $\triangle Q_1OA = \triangle Q_2OA$ за двома сторонами і кутом між ними. Звідси $Q_1A = Q_2A$.

2. $\triangle Q_1BQ_2$. Рівність відрізків Q_1B і Q_2B доводиться аналогічно, як і рівність відрізків Q_1A і Q_2A.

3. $\triangle Q_1BA = \triangle Q_2BA$, оскільки $Q_1A = Q_2A$ і $Q_1B = Q_2B$, AB – спільна сторона. Звідси випливає рівність відповідних кутів: $\angle Q_1BA = \angle Q_2BA$, $\angle Q_1AB = \angle Q_2AB$.

4. $\triangle Q_1XA = \triangle Q_2XA$ за двома сторонами і кутом між ними: $Q_1A = Q_2A$; XA – спільна сторона; $\angle Q_1AX = \angle Q_2AX$ за доведенням вище. Отже, $Q_1X = Q_2X$, тобто $\triangle Q_1XQ_2$ – рівнобедрений: Q_1Q_2 – основа трикутника, O – середина Q_1Q_2, тому XO – медіана $\triangle Q_1XQ_2$. У рівнобедреному трикутнику медіана є висотою, тобто $XO \perp Q_1Q_2$, а це означає, що $x \perp c$. Оскільки пряма x – довільна пряма площини α, яка проходить через точку перетину прямої c з площиною α, і за доведенням $x \perp c$, тому $c \perp \alpha$. Щ. в. д. *Теорему доведено.*

Зауважимо, що вам вперше трапляється таке громіздке доведення. Доведення не треба заучувати напам'ять чи запам'ятовувати кроки, його треба розуміти і послідовно, спираючись на відомі факти, викласти міркування. Для цього важливо спланувати послідовність логічних кроків і не допускати помилок.

Отже, для встановлення перпендикулярності прямої і площини достатньо перевірити перпендикулярність прямої до двох прямих площини, які проходять через точку їхнього перетину (за ознакою).

З даної теореми випливають два наслідки.

Наслідок 1. Якщо площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої прямої.

Доведення. Нехай α – площина, a_1 і a_2 – дві прямі, що перетинають її в точках A_1 і A_2, причому $a_1 \parallel a_2$, $a_1 \perp \alpha$ (рис. 5.12).

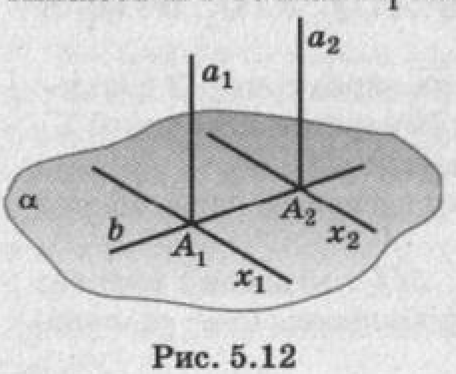


Рис. 5.12

Проведемо через точку A_1 довільну пряму x_1 на площині α, а через точку A_2 – пряму x_2, паралельну x_1. Оскільки пряма a_1 перпендикулярна до площини α, то прямі a_1 і x_1 перпендикулярні. Тоді, за теоремою 2, прямі a_2 і x_2 також перпендикулярні. Таким чином, пряма a_2 перпендикулярна до довільної прямої x_2, яка лежить на площині α і проходить через їхню точку перетину A_2. Це визначає перпендикулярність прямої a_2 до площини α.

Наслідок 2. Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.

Доведення. Нехай a і b дві прямі, які перпендикулярні до площини α (рис. 5.13). Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Виберемо на прямій b точку C, яка не належить площині α. Проведемо через точку C пряму b_1, паралельну прямій a. Вона перпендикулярна до площини α, за попереднім наслідком. Нехай пряма b_1 перетинає площину α в точці B_1, а пряма b перетинає α в точці B. Тоді пряма BB_1 перпендикулярна до прямих b та b_1, які перетинаються. А це неможливо, припущення неправильне. Отже, прямі паралельні.

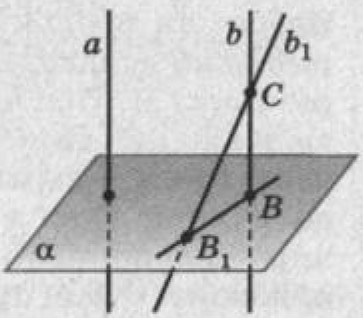


Рис. 5.13

Задача.

Доведіть, що через будь-яку точку A можна провести пряму, перпендикулярну до даної площини.

Доведення

Розглянемо два випадки.

Перший випадок. Нехай точка A належить площині α (рис. 5.14). Тоді через точку A в площині α проведемо пряму a. Вибравши точку K, що не належить α, проведемо через неї і пряму a площину β (наслідок із аксіом). Проведемо у площині α пряму $c \perp a$, а у площині β – пряму $b \perp a$. Через ці дві прямі проходить площина γ, яка буде перпендикулярна до прямої a (теорема про перпендикулярність прямої і площини).

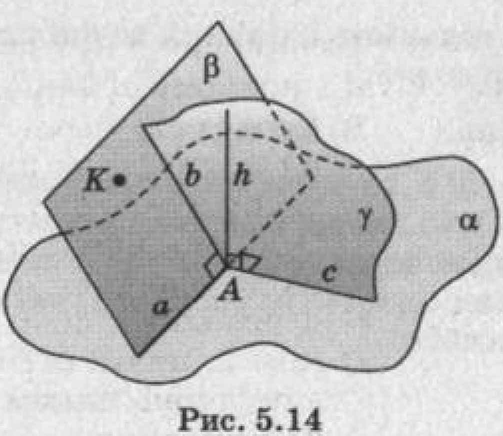


Рис. 5.14

Тоді у площині γ достатньо провести пряму $h \perp c$. Вона буде перпендикулярна і до прямої a, оскільки лежить у γ і проходить через точку перетину. Оскільки h перпендикулярна двом прямим площини α, то вона перпендикулярна і самій площині. Отже, ми побудували пряму h, яка перпендикулярна до площини α і проходить через задану точку A.

Другий випадок. Нехай точка A не належить площині α. Вибравши довільну точку B на площині α, аналогічно попередньому випадку, проведемо пряму $l \perp \alpha$, що проходить через точку B. Тоді через цю пряму та точку A можна провести деяку площину φ, а на ній деяку пряму h, що проходить через точку A паралельно l. Пряма h буде перпендикулярна до α (якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна площині, то друга теж перпендикулярна). Побудова виконана. Отже, пряму побудувати можна. Щ. в. д.

Підсумовуючи сказане вище, приходимо до таких висновків:

1. Через точку поза прямою у просторі можна провести ***єдину*** пряму, перпендикулярну до даної (рис. 5.4, *а*).
2. Через точку на прямій у просторі можна провести ***безліч*** прямих, перпендикулярних до даної (рис. 5.10).
3. Через задану точку на площині можна провести ***одну і тільки одну*** пряму, перпендикулярну до даної площини (рис. 5.10).
4. Через задану точку, що не належить площині, можна провести ***одну і тільки одну*** пряму, перпендикулярну до даної площини (рис. 5.14).

Вправи

5.15°. Укажіть кількість спільних точок площини і прямої, перпендикулярної до неї.

А) Одна; Б) дві; В) безліч.

5.16°. На рисунку 5.15 зображено площину α і пряму a, що перпендикулярна до α і перетинає площину α у точці M. Прямі $b_1, b_2, ..., b_n$ проходять через точку M і належать площині α. Виберіть серед заданих $b_1, b_2, ..., b_n$ усі прямі, які будуть перпендикулярними до прямої a.

А) Пряма b_1;

Б) прямі b_1 і b_2;

В) прямі $b_1, b_2, ..., b_{10}$;

Г) прямі $b_1, b_2, ..., b_n$, де n – скінченне натуральне число;

Д) прямі $b_1, b_2, ..., b_n$, де n – нескінченне натуральне число.

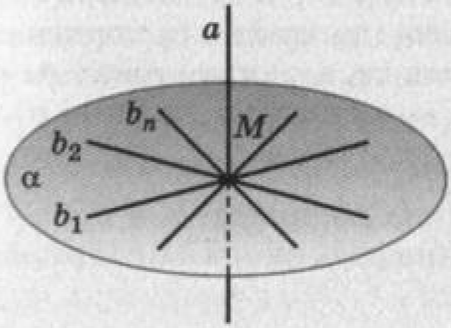


Рис. 5.15

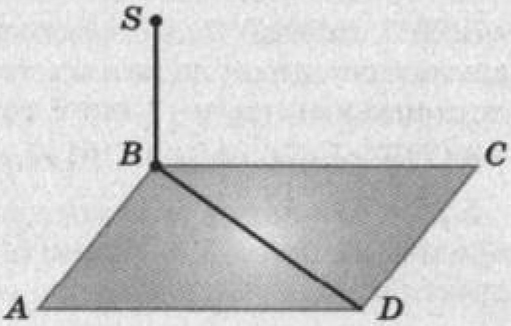


Рис. 5.16

5.17°. Пряма SB – перпендикулярна до площини паралелограма $ABCD$ (рис. 5.16). Укажіть прямі, до яких перпендикулярна пряма SB.

1) AB; 2) BC; 3) AD; 4) BD; 5) CD.

А) 1, 2 і 3; Б) 1, 2 і 4; В) 2, 3 і 4; Г) 2, 3 і 5; Д) 1, 3 і 5.

5.18°. Відомо, що деяка пряма l перпендикулярна до сторін AB і AC трикутника ABC. Визначте взаємне розміщення прямої l і площини (ABC).

А) Пряма l перетинає площину (ABC), але не перпендикулярна до неї;

Б) пряма l належить площині (ABC);

В) пряма l перпендикулярна до площини (ABC);

Г) пряма l паралельна площині (ABC).

5.19°. Пряма KO – перпендикулярна до площини паралелограма $ABCD$ (рис. 5.17). Виберіть пару прямих, які перпендикулярні до прямої KO.

А) AB і BD; Г) AD і BC;

Б) AB і CD; Д) AC і CD.

В) AC і BD;

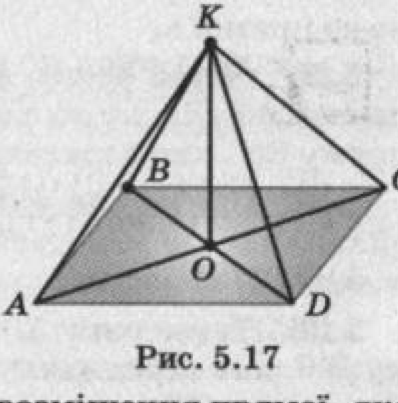


Рис. 5.17

5.20°°. Одна з прямих, яка містить сторону паралелограма, перпендикулярна до площини α. Визначте взаємне розміщення прямої, яка містить протилежну сторону цього паралелограма, і площини α.

А) Належить площині α;

Б) паралельні між собою;

В) перпендикулярні між собою.

5.21°°. Пряма MB перпендикулярна до сторін AB і BC трикутника ABC. X – довільна точка сторони AC (рис. 5.18). Визначте вид трикутника MBX.

А) Гострокутний; Б) тупокутний; В) прямокутний.

5.22°°. Площина α перпендикулярна до прямої b, а пряма b перпендикулярна до площини φ. Укажіть взаємне розміщення площин α і φ.

А) Перетинаються; Б) паралельні; В) збігаються.

5.23°°. Площина α перпендикулярна до прямої b, а пряма b паралельна прямій c. Укажіть взаємне розміщення площини α і прямої c.

А) $c \parallel \alpha$; Б) $c \perp \alpha$; В) $c \subset \alpha$; Г) $c \cap \alpha$, $\angle(c\alpha) \neq 90°$.

5.24°°. Через точки M, N, K – середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1 відповідно (рис. 5.19) – проведено площину (MNK). Визначте площини, до яких буде перпендикулярне ребро куба DD_1.

1) (ADD_1); 2) (CBD); 3) (MNK); 4) (CD_1D); 5) $(A_1D_1C_1)$.

А) 1, 2 і 4; Б) 2, 3 і 4; В) 1, 3 і 5; Г) 2, 3 і 5; Д) 2, 4 і 5.

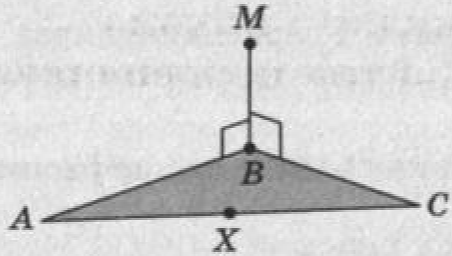


Рис. 5.18

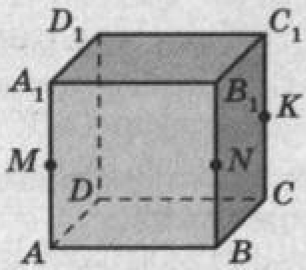


Рис. 5.19

5.25*. Площина α перпендикулярна до прямої m, а пряма m паралельна прямій n. Доведіть, що площина α перпендикулярна до прямої n.

5.26*. Через точку A деякого $\triangle ABC$ проведено пряму AM, перпендикулярну до площини (ABC), а через точку B проведено пряму BN, яка паралельна AM. Знайдіть кут NBC.

5.27*. Пряма, що містить основу AB трапеції $ABCD$, перпендикулярна до площини α. Доведіть, що пряма, яка містить основу CD цієї самої трапеції, перпендикулярна до площини α.

5.28*. Через точку B трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проведено пряму HB, яка перпендикулярна до площини (ABC), а через точку C – пряму CK, яка паралельна прямій BH. Доведіть, що пряма CK перпендикулярна до діагоналі AC трапеції $ABCD$.

5.29*. Через вершину B прямокутної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $\angle A = 90°$) проведено пряму l, перпендикулярну до площини (ABC), $M \in l$. Доведіть, що пряма AB перпендикулярна до площини (BMC).

5.30$^{\bullet\bullet}$. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AK, перпендикулярну до площини (ABC). Доведіть, що пряма AD перпендикулярна до площини (ABK).

5.31$^{\bullet\bullet}$. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середину ребра AB перпендикулярно до прямої AC.

5.32$^{\bullet\bullet}$. $ABCD$ – паралелограм, BK і FD – прямі, перпендикулярні до площини (ABC). Доведіть, що площини ABK і DFC паралельні.

5.33$^{\bullet\bullet}$. $ABCD$ – паралелограм, AN і CK – прямі, перпендикулярні до площини (ABC). Доведіть, що площини AND і KBC паралельні.

5.34$^{\bullet\bullet}$. У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, причому $BO = OD$. Точка M, що не належить площині чотирикутника, сполучена з його вершинами B, D, C та з точкою O. Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до площини (MOC), якщо $MB = MD$, $BD = 6$ см, $OC = 4$ см, $CD = 5$ см.

§ 5.3. Перпендикуляр і похила. Теорема про три перпендикуляри

Розглянемо зображення прямої a, перпендикулярної до площини α (рис. 5.20). Позначимо на прямій a довільний відрізок.

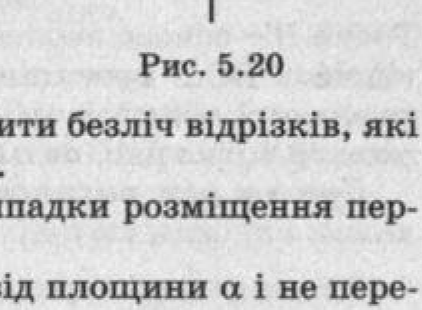


Рис. 5.20

Відрізок називається ***перпендикулярним до площини***, якщо він лежить на прямій, перпендикулярній до площини.

Отже, на прямій a, яка перпендикулярна до площини α, можна розмістити безліч відрізків, які будуть перпендикулярні до площини α.

На рисунку 5.21 зображено різні випадки розміщення перпендикулярного до площини відрізка:

1) відрізок AB лежить по один бік від площини α і не перетинає її (рис. 5.21, *а*);

2) відрізок CD перетинає площину α (кінці відрізка знаходяться у різних півпросторах) (рис. 5.21, *б*);

3) відрізок MO лежить по один бік від площини α і точка O – кінець відрізка – належить площині α (рис. 5.21, *в*).

Найчастіше на практиці мають справу з третім випадком. Такий відрізок MO називають ***перпендикуляром, проведеним з даної точки до площини***.

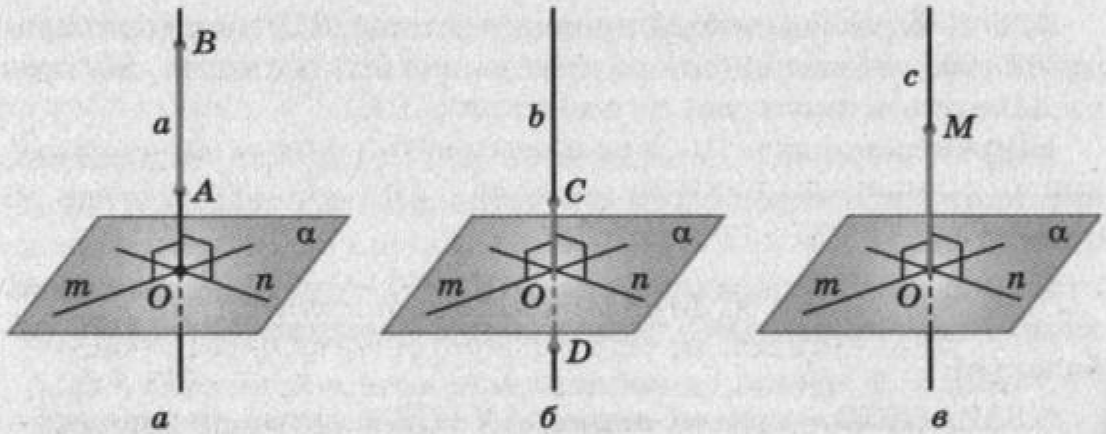


Рис. 5.21

Перпендикуляром, проведеним з даної точки на площину, називають відрізок, що сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до цієї площини (рис. 5.21, *в*). Кінець відрізка, який лежить на площині, називається ***основою перпендикуляра.***

Похилою, проведеною з даної точки до даної площини, називається будь-який відрізок, який сполучає дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром до площини. Кінець відрізка, що лежить на площині, називається ***основою похилої.*** Відрізок, який сполучає основу перпендикуляра і основу похилої, проведених з однієї і тієї самої точки, називається ***проекцією похилої.***

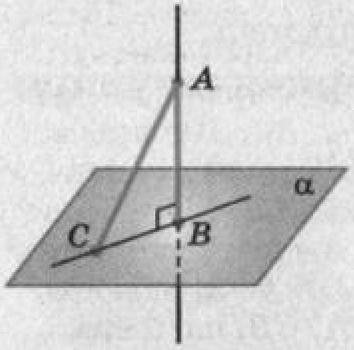


Рис. 5.22

На рисунку 5.22 відрізок AB – перпендикуляр, проведений з точки A на площину α. Відрізок AC – похила, проведена з точки A на ту саму площину α. Точка B – основа перпендикуляра, а точка C – основа похилої, відрізок BC – проекція похилої AC на площину α. Кут ACB, утворений похилою AC та її проекцією BC, називають ***кутом нахилу похилої AC до площини α.***

Кутом між похилою і площиною називається кут між похилою і проекцією цієї похилої на площину.

Властивості перпендикуляра і похилих

Якщо з однієї точки поза площиною провести до неї перпендикуляр і похилі, то:

1) з точки, що не належить площині, можна провести один і тільки один перпендикуляр і безліч похилих;

2) довжина перпендикуляра менша за довжину будь-якої похилої;

3) похилі, що мають рівні проекції, рівні між собою, і навпаки, рівні похилі мають рівні проекції;

4) з двох похилих більшу довжину має та, яка має більшу проекцію, і навпаки, більша похила має більшу проекцію.

Доведіть ці властивості самостійно.

Широке застосування має властивість прямої, перпендикулярної до проекції похилої чи до похилої, яку називають *теоремою про три перпендикуляри*.

Теорема 6 (*про три перпендикуляри*).
Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна і до похилої. І навпаки, якщо пряма, проведена через основу похилої на площині, перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.

Дано: $B \in \alpha, AB \perp \alpha, a \in \alpha, C \in \alpha, AC \perp a$.

Довести: пряма $a \perp CB$.

Доведення. Доведемо другу частину теореми. Нехай AB – перпендикуляр до площини α, AC – похила. Пряма a належить площині α, проходить через основу C похилої і перпендикулярна до неї (рис. 5.23). Тобто $a \perp AC$. Проведемо через основу похилої C пряму b, паралельну AB. Матимемо $b \perp \alpha$, тобто $b \perp a$. Прямі b і AB лежать в одній площині β. Оскільки $a \perp AC$ і $a \perp b$, то за ознакою $a \perp \beta$. $CB \subset \beta$. Отже, $a \perp CB$, що й вимагалося довести. Першу частину теореми доведіть самостійно.

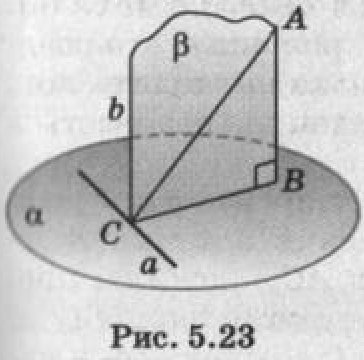


Рис. 5.23

Задача.

З точки до площини проведено дві похилі. Знайдіть довжини похилих, якщо одна з них на 26 см більша від другої, а проекції похилих дорівнюють 12 см і 40 см.

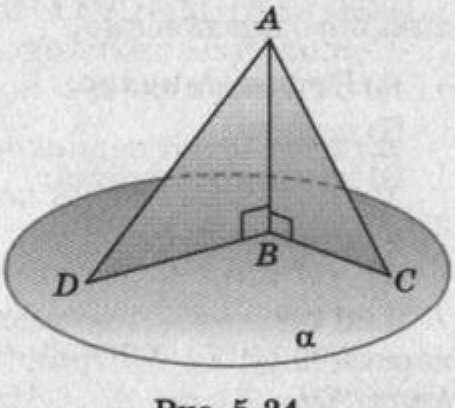


Рис. 5.24

Дано: α, AB – перпендикуляр до площини α (рис. 5.24); AC і AD – похилі; $AC < AD$ на 26 см; $\text{Пр}_\alpha AC = BC = 12$ см; $\text{Пр}_\alpha AD = BD = 40$ см.

Знайти: AC і AD.

Розв'язання

Нехай $AC = x$ см, тоді $AD = (x + 26)$ см. У $\triangle ABC$ ($\angle B = 90°$): $AC = x$ см – гіпотенуза; $CB = 12$ см – катет. За теоремою Піфагора: $AC^2 = BC^2 + AB^2$, звідси
$AB^2 = AC^2 - BC^2$,
$AB^2 = x^2 - 144$. (1)

У $\triangle ABD$ ($\angle B = 90°$): $AD = (x + 26)$ см – гіпотенуза; $BD = 40$ см – катет. За теоремою Піфагора:
$AD^2 = BD^2 + AB^2$, звідси
$AB^2 = AD^2 - BD^2$,
$AB^2 = (x + 26)^2 - 1600 =$
$= x^2 + 52x + 676 - 1600$,
$AB^2 = x^2 + 52x - 924$. (2)

З (1) і (2) маємо:
$x^2 + 52x - 924 = x^2 - 144$,
$52x = 780$, $x = 15$.
$AC = 15$ см,
$AD = 15 + 26 = 41$ (см).

Відповідь. 15 см і 41 см.

Чому саме так?

AB – перпендикуляр до α, тому $AB \perp BC$ і $AB \perp BD$. Перпендикуляр, похила і її проекція утворюють прямокутний трикутник. Дві різні похилі, один перпендикуляр і дві проекції утворюють два прямокутні трикутники зі спільним катетом. Скласти співвідношення між сторонами прямокутного трикутника можна за теоремою Піфагора. Алгебраїчний метод розв'язування спрощує процес пошуку розв'язку. Знаходимо спільний катет для $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$:

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$
$$\text{і } AB^2 = AD^2 - BD^2.$$

Звідси маємо рівність:

$$AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$$

і відповідне рівняння з однією змінною, що приводить до розв'язку задачі.

Вправи

5.35°. Точка M не належить площині α, а точки Q, A, B – належать їй, $MQ \perp \alpha$. Доберіть до кожної назви відрізка всі можливі його позначення.

А) Перпендикуляр;
Б) похила;
В) проекція похилої.

1) MA;
2) AQ;
3) MQ;
4) BQ;
5) MB.

А		
Б		
В		

5.36°. З точки A до площини α проведено похилі AB і AC та перпендикуляр AO (рис. 5.25). Порівняйте проекції похилих, якщо $AB = 2{,}5$ см, $AC = 3$ см.

А) $OB = OC$; Б) $OB < OC$; В) $OB > OC$.

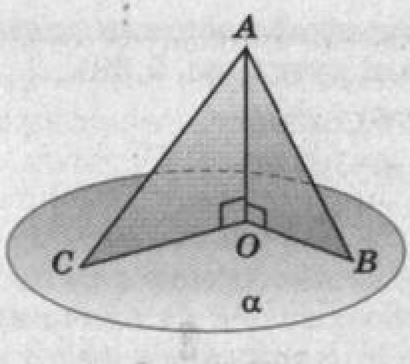


Рис. 5.25

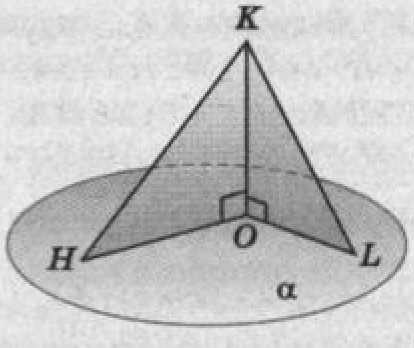


Рис. 5.26

5.37°. До площини α проведено перпендикуляр KO та похилі KH і KL. Виберіть три правильні твердження (рис. 5.26).

А) Якщо $OH < OL$, то $KO > OL$;

Б) якщо $OL > OH$, то $KL > KH$;

В) якщо $KO > OH$, то $KH > OL$;

Г) якщо $KH < KL$, то $LO > OH$;

Д) якщо $KO \perp \alpha$, то $KO < KH$ і $KO < KL$.

5.38°. Через точку O – перетин діагоналей ромба $ABCD$ – проведено перпендикуляр KO до його площини (рис. 5.27). Виберіть трикутники, які є прямокутними.

1) $\triangle BOK$; 2) $\triangle BDK$; 3) $\triangle AKD$; 4) $\triangle KCB$; 5) $\triangle KOC$.

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 1 і 4; Г) 2 і 5; Д) 1 і 5.

5.39°. Відрізок MB – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$ (рис. 5.28). Виберіть правильні твердження.

1) $MB < MC$; 3) $MA < MC$; 5) $MA = MC$.

2) $MC > MD$; 4) $MA < MD$;

А) 1, 3 і 5; Б) 2, 3 і 4; В) 1, 2 і 4; Г) 2, 3 і 5; Д) 1, 4 і 5.

5.40°°. Відрізок MB – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Укажіть, користуючись рисунком 5.28, прямі кути.

1) $\angle MAB$; 2) $\angle MAD$; 3) $\angle MDA$; 4) $\angle MDC$; 5) $\angle MCD$.

А) 1 і 2; Б) 1 і 3; В) 2 і 4; Г) 2 і 5; Д) 3 і 5.

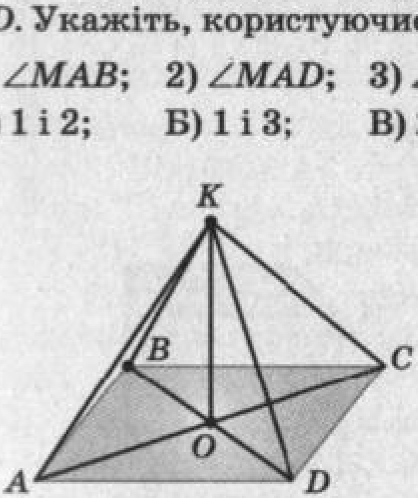


Рис. 5.27

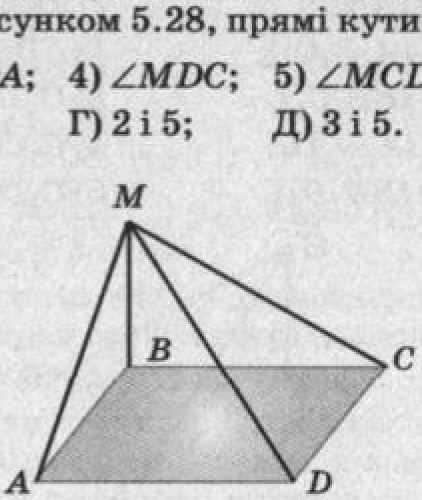


Рис. 5.28

5.41°°. Відрізок HA – перпендикуляр до площини прямокутного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Укажіть прямі кути (рис. 5.29).

1) $\angle HBA$; 3) $\angle CHA$; 5) $\angle HCB$;
2) $\angle HAC$; 4) $\angle BAH$; 6) $\angle HBC$.

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 1 і 4; Г) 2 і 5; Д) 1 і 5.

5.42°°. До площини квадрата $ABCD$ зі стороною a см проведено перпендикуляр DM. Довжина проекції MB на площину квадрата дорівнює l см. Ідентифікуйте кожному значенню a відповідне значення l.

А) $a = 2\sqrt{2}$ см; 1) $l = 4\sqrt{2}$ см;
Б) $a = 4$ см; 2) $l = 6\sqrt{2}$ см;
В) $a = 4\sqrt{2}$ см; 3) $l = 4$ см;
Г) $a = 3\sqrt{2}$ см; 4) $l = 8$ см;
Д) $a = 6$ см. 5) $l = 6$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

5.43°°. До площини квадрата $ABCD$, площа якого дорівнює S см^2, проведено перпендикуляр DM завдовжки 10 см. Довжина похилої MA дорівнює m см. Ідентифікуйте до кожної заданої площі квадрата S відповідне значення m.

А) $S = 21$ см^2; 1) $m = 12$ см;
Б) $S = 96$ см^2; 2) $m = 16$ см;
В) $S = 44$ см^2; 3) $m = 14$ см;
Г) $S = 69$ см^2; 4) $m = 13$ см;
Д) $S = 156$ см^2. 5) $m = 11$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

5.44°°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.30). Укажіть проекцію похилої DC_1 на кожну з площин, заданих умовами (А–Д).

А) (ABC); 1) DD_1;
Б) $(A_1B_1C_1)$; 2) CD;
В) (BB_1C_1); 3) O_1D;
Г) (A_1D_1D); 4) C_1C;
Д) (BB_1D_1). 5) C_1D_1.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

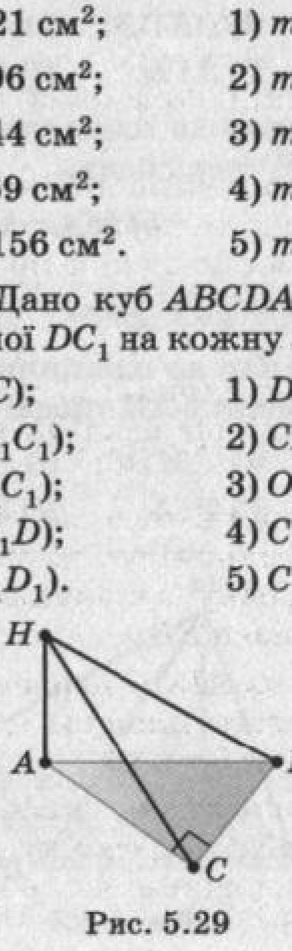


Рис. 5.29

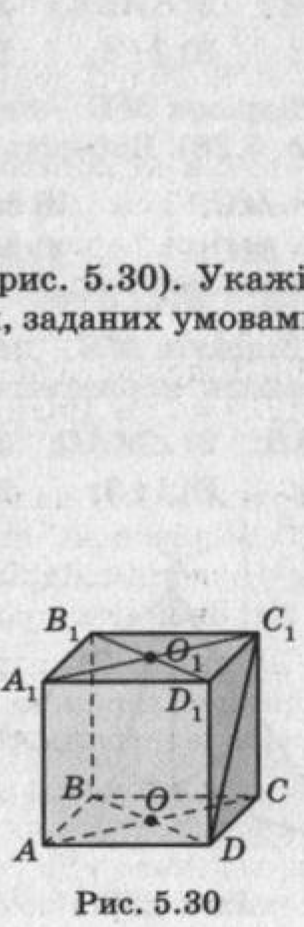


Рис. 5.30

5.45*. Побудуйте проекцію діагоналі B_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на площину:

1) (ABC); 2) (BB_1C_1); 3) (DCC_1).

5.46*. Трикутник ABC прямокутний з прямим кутом C. Відрізок AM перпендикулярний до площини трикутника ABC. Доведіть, що $\triangle MCB$ – прямокутний.

5.47*. З точки M, яка лежить поза площиною трикутника ABC, проведено до цієї площини перпендикуляр MA, завдовжки 12 см. Знайдіть довжини похилих MB і MC, якщо катети AC і BC дорівнюють 4 см і 3 см відповідно.

5.48*. З точки A, яка лежить поза площиною α, проведено до площини перпендикуляр AB завдовжки 12 см і похилу AC, яка на 8 см більша від своєї проекції. Знайдіть довжину похилої.

5.49*. З точки A до площини α проведено дві похилі AB та AC і перпендикуляр AQ. Знайдіть довжини проекцій похилих AB і AC, якщо $AB = 13$ см, $AC = 15$ см, $AQ = 12$ см.

5.50*. З точки S, яка лежить поза площиною α, проведено до площини перпендикуляр SO завдовжки 15 см і похилу SA. Знайдіть довжину проекції цієї похилої на площину α, якщо похила довша за свою проекцію на 3 см.

5.51*. З точки A до площини α проведено дві похилі AB і AC завдовжки 26 см і 30 см відповідно. Проекція похилої AB дорівнює 10 см. Знайдіть довжину проекції похилої AC на площину α.

5.52*. З точки M до площини α проведено дві похилі MB і MC завдовжки 13 см і 15 см відповідно та перпендикуляр MA. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо одна із проекцій похилих на площину α на 4 см довша за іншу.

5.53*. Точки K і D належать площині α, а M і N – площині β ($\alpha \parallel \beta$). Відрізок KM перпендикулярний до площини α. $KM = 5$ см, $DN = 7$ см. Знайдіть проекції відрізка DN на площини α і β.

5.54*. Точки A і B належать площині α, а точки C і D – площині β. Відрізок AC перпендикулярний до площин α і β, $AC = 10$ см. Проекція відрізка BD на одну із площин α чи β дорівнює 24 см. Знайдіть довжину відрізка BD.

5.55.** Діагональ BD паралелограма $ABCD$ перпендикулярна до площини α, вершини A і C належать площині α. Знайдіть периметр паралелограма $ABCD$, якщо $AB = 6$ см.

5.56.** З деякої точки до площини проведено дві похилі, довжини яких відносяться як $5 : 6$. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини, якщо відповідні проекції похилих дорівнюють 4 см і $3\sqrt{3}$ см.

5.57.** З деякої точки простору проведені до даної площини перпендикуляр завдовжки 12 см і похила, що дорівнює 15 см. Обчисліть довжину проекції перпендикуляра на похилу.

5.58.** З точки M, узятої поза площиною β, проведено дві похилі, що дорівнюють 37 см і 13 см. Довжини проекцій цих похилих відносяться як 7 : 1. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки M до площини β.

5.59*. Через вершину прямого кута C прямокутного трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр CD завдовжки 1 дм. Знайдіть площу трикутника ADB, якщо $AC = 3$ дм, $BC = 2$ дм.

5.60.** Сторони трикутника 15 см, 37 см і 44 см. З вершини найбільшого кута трикутника побудовано до його площини перпендикуляр h завдовжки 9 см. Знайдіть довжину перпендикуляра h_1, проведеного з кінця перпендикуляра h, який не належить площині трикутника, до більшої сторони трикутника.

5.61.** Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 13 см і 20 см. Через вершину найменшого кута проведено перпендикуляр до площини трикутника, а з його кінця, що не належить трикутнику, опущено перпендикуляр завдовжки 24 см на протилежну цьому куту сторону. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного до площини трикутника.

5.62.** З вершини прямого кута C рівнобедреного трикутника ABC проведено перпендикуляр CF до площини трикутника. Побудуйте перпендикуляр з точки F до гіпотенузи і знайдіть його довжину, якщо $CF = 24$ см, $AB = 36$ см.

5.63.** З центра круга O радіуса 4 см проведено до площини круга перпендикуляр OA. Через точку B кола проведено дотичну BD і на ній відкладено відрізок BC завдовжки $4\sqrt{3}$ см. Похила AC дорівнює 10 см. Знайдіть довжину перпендикуляра OA.

§ 5.4. Перпендикулярність площин

Дві площини, що перетинаються, називаються ***перпендикулярними***, якщо третя площина, перпендикулярна до прямої перетину цих площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих (рис. 5.31).

Якщо $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$, $\alpha \cap \beta = c$, $c \perp \gamma$ і $a \perp b$, то $\alpha \perp \beta$.

Моделями перпендикулярних площин у навколишньому світі є різні конфігурації предметів. Наприклад, шкатулка з кришкою, двері, вікна, що відчиняються тощо. Принцип «відкривання» частин моделей ґрунтується на перпендикулярності прямих, проведених перпендикулярно до прямої перетину (до лінії кріплення) (рис. 5.32).

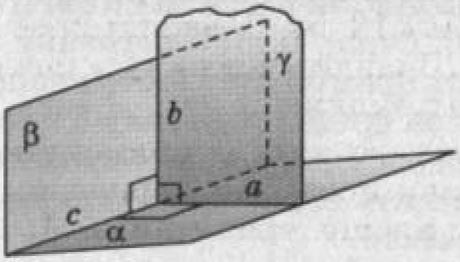


Рис. 5.31

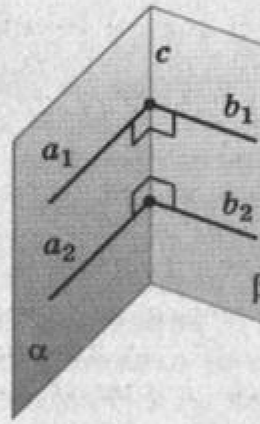


Рис. 5.32

Перпендикулярні площини мають такі властивості:

1) Будь-яка площина, яка перпендикулярна до лінії перетину перпендикулярних площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих. І навпаки, площина, перпендикулярна до двох площин, що перетинаються, перпендикулярна до їхньої лінії перетину.

2) Якщо дві площини взаємно перпендикулярні, то будь-яка пряма, що лежить в одній з них і перпендикулярна до їхньої лінії перетину, перпендикулярна до другої площини.

3) Якщо дві площини взаємно перпендикулярні і з якої-небудь точки однієї з них опущено перпендикуляр на другу, то цей перпендикуляр лежить у першій площині.

Розглянемо їх дещо пізніше. Доведемо спочатку ***ознаку перпендикулярності двох площин***.

Теорема 7 (***ознака перпендикулярності площин***).

Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.

Дано: α, $a \perp \alpha$; $a \cap \alpha = O$; площина β проходить через a.

Довести: $\beta \perp \alpha$.

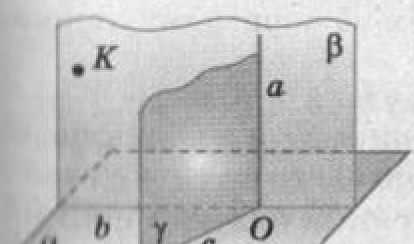


Рис. 5.33

Доведення. Побудуємо довільну площину β через пряму a і деяку точку K поза нею (рис. 5.33). O – спільна точка площин α і β, тому вони перетинаються по деякій прямій b, що проходить через точку O. Проведемо на площині α деяку пряму $c \perp b$ (на площині така пряма єдина). Оскільки $a \perp \alpha$ і $a \cap \alpha = O$, то $a \perp c$ ($O \in c$, $O \in b$, $O \in a$). Отже, пряма c перпендикулярна до двох прямих a і b, які перетинаються ($c \perp a$ і $c \perp b$). Побудуємо через прямі a і c площину γ. Вона перпендикулярна прямій b (оскільки дві її прямі перпендикулярні до b). Отже, її лінії перетину з площинами α і β утворюють прямий кут. Тобто площина γ, яка перпендикулярна до прямої перетину b площини α і β, перетинає їх по перпендикулярних прямих a і c, що за означенням доводить перпендикулярність площин α і β. *Теорему доведено.*

Тепер повернемося до властивостей перпендикулярних прямих і площин та доведемо деякі з них.

Теорема 8.

Якщо дві площини взаємно перпендикулярні, то будь-яка пряма, що лежить в одній з них і перпендикулярна до їхньої лінії перетину, перпендикулярна до другої площини.

Дано: $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = c$, $a_1 \subset \alpha$ і $a_1 \perp c$, $c \cap a_1 = A$.
Довести: $a_1 \perp \beta$.

Доведення. Нехай площини α і β взаємно перпендикулярні (рис. 5.34), тобто деяка площина γ, яка перпендикулярна до прямої c, перетинає їх по перпендикулярних прямих a і b.

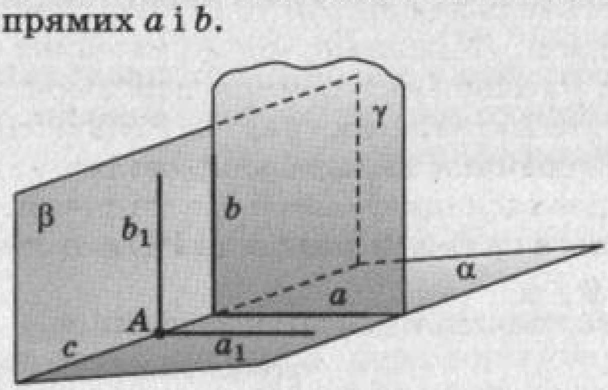


Рис. 5.34

Проведемо через точку A пряму b_1, $b_1 \subset \beta$, $b_1 \perp c$. Тоді $a_1 \perp c$ і $b_1 \perp c$, звідси площина, що проходитиме через прямі a_1 і b_1, буде перпендикулярною до прямої c. Через те, що $\alpha \perp \beta$, перпендикулярними будуть і прямі $a_1 \perp b_1$. Крім того, $a_1 \perp c$ (за умовою), тому $a_1 \perp \beta$, що й вимагалося довести. *Теорему доведено.*

Теорема 9.
Якщо дві площини взаємно перпендикулярні та з деякої точки однієї з них опущено перпендикуляр на другу, то цей перпендикуляр лежить у першій площині.

Дано: $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = c$, $A \in \beta$, $B \in \alpha$, $AB \perp \alpha$.
Довести: $AB \in \beta$.

Доведення. Нехай площини α і β взаємно перпендикулярні (рис. 5.35). Тоді деяка площина γ, яка перпендикулярна до прямої c, перетинає їх по перпендикулярних прямих a і b.

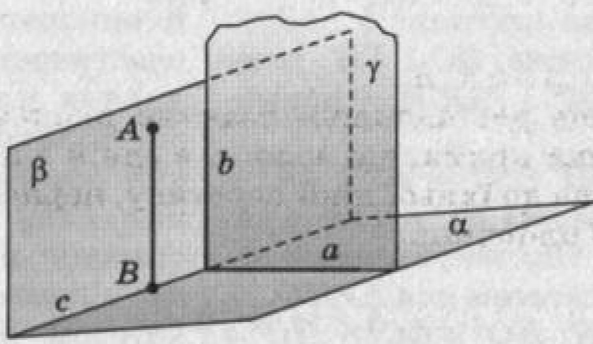


Рис. 5.35

Отже, дано $a \perp b$ та $b \perp c$. Тобто $b \perp \alpha$. У площині β через точку A проведено $AB \perp \alpha$. За наслідком, дві прямі, перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, будуть паралельні. $AB \parallel b$. Отже, вони лежать в одній площині. Покажемо, що це площина β. Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає у площині пряму c, то й друга перетинає її. Звідси випливає, що точка B повинна належати прямій c. Тоді вона спільна для двох площин. Але якщо дві точки A та B належать β, то вся пряма належить β. Щ. в. д. *Теорему доведено.*

Решту властивостей доведіть самостійно.

Задача.

З точок P і Q, які лежать на двох взаємно перпендикулярних площинах (рис. 5.36), проведено перпендикуляри PH і QC на пряму перетину площин α і β. Знайдіть довжину відрізка PQ, якщо $PH = 6$ см, $QC = 7$ см, $HC = 6$ см.

Рис. 5.36

Дано: $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = c$; $PH \perp c$, $H \in c$; $QC \perp c$, $C \in c$; $PH = 6$ см, $QC = 7$ см, $HC = 6$ см.

Знайти: PQ.

Розв'язання	*Чому саме так?*
Оскільки $\alpha \perp \beta$, $PH \subset \alpha$, $PH \perp c$, то $PH \perp \beta$, звідси $PH \perp HQ$. ΔPHQ ($\angle H = 90°$) – прямокутний: $PH = 6$ см – катет, HQ – катет, PQ – гіпотенуза (шуканий відрізок). Розглянемо на площині β ΔHQC: $QC \perp c$, а отже, $QC \perp CH$, тому $\angle QCH = 90°$ і ΔQCH – прямокутний. З ΔQCH ($\angle C = 90°$): $QC = 7$ см – катет; $HC = 6$ см – катет; HQ – гіпотенуза, яка є невідомим катетом для ΔPHQ. З ΔQCH: $HQ^2 = QC^2 + HC^2 = 49 + 36 = 85$. З ΔPHQ: $PQ^2 = PH^2 + HQ^2 = 36 + 85 = 121$. Звідси, враховуючи що $PQ > 0$, маємо $PQ = 11$ см. *Відповідь.* 11 см.	Для кожної геометричної задачі важливо побудувати ланцюг логічних міркувань. У цій задачі важливо побачити не лише прямокутні трикутники на площинах α і β, а й використати ознаку та властивості перпендикулярних площин. У такий спосіб можна вийти на новий прямокутний трикутник PHQ чи QCP, третю сторону якого знаходять за відомим і знайденим катетом. У цьому чи в іншому випадку PQ залишається похилою, міняються лише перпендикуляри до відповідних площин α і β та проекції похилої на площину α чи на площину β.

Вправи

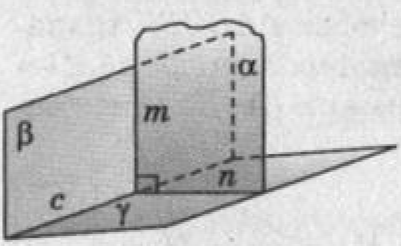


Рис. 5.37

5.64°. Площини β і γ перетинаються по прямій c (рис. 5.37). Площина α перпендикулярна до прямої c і перетинає площину β по прямій m, а площину γ – по прямій n, причому $m \perp n$. Укажіть взаємне розміщення площин β і γ.

А) Паралельні;

Б) перпендикулярні;

В) перетинаються, але не перпендикулярні.

5.65°. Дано дві площини α і β, які перетинаються по прямій l. На площині α лежать точки A і C, а на площині β – точки B і C, причому $AC \perp BC$, $l \perp AC$, $l \perp BC$. Укажіть можливе взаємне розміщення площин α і β.

А) $\alpha \cap \beta$; Б) $\alpha \parallel \beta$; В) $\alpha = \beta$; Г) $\alpha \perp \beta$.

5.66°. Дано паралелограм $ABCD$ і $\triangle ACK$. KH – відрізок площини AKC, точка $H \in AC$ (рис. 5.38). Виберіть умову, за якою можна стверджувати, що площини (AKC) і (ABC) перпендикулярні.

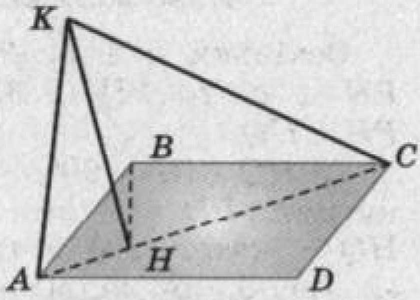


Рис. 5.38

А) KH – медіана $\triangle AKC$ і $BH \perp AC$;
Б) KH – висота $\triangle AKC$ і $BH \perp AC$;
В) KH – бісектриса $\triangle AKC$ і $BH \perp AC$;
Г) KH – довільний відрізок площини (AKC) і $KH \perp AC$;
Д) KH – довільний відрізок площини (AKC) і $KH \perp (ABC)$.

5.67°. Укажіть дві пари перпендикулярних площин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.39).

А) (ADD_1) і (BB_1C_1); Г) (BCD) і $(A_1B_1D_1)$;
Б) (CC_1D_1) і (BB_1C); Д) (A_1AB) і (C_1CB).
В) (B_1BA) і (DD_1C_1);

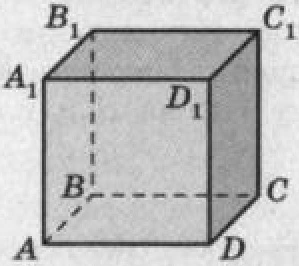


Рис. 5.39

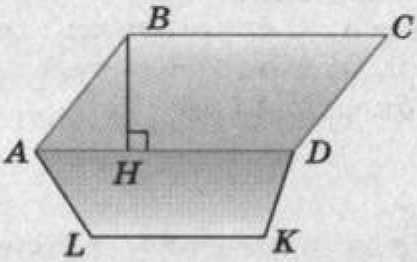


Рис. 5.40

5.68°. Площини, в яких лежать паралелограм $ABCD$ і трапеція $ADKL$, перпендикулярні. BH – висота паралелограма. Поставте у відповідність до кожної пари прямих (А–Д) їхнє взаємне розміщення (1–4) (рис. 5.40).

А) BH і LH;
Б) AD і KD;
В) BH і KL;
Г) BC і LK;
Д) BH і HK.

1) Мимобіжні;
2) перетинаються, але не перпендикулярні;
3) паралельні;
4) перпендикулярні.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

5.69°°. Площини рівносторонніх трикутників ABC і ADC перпендикулярні (рис. 5.41). BM – медіана $\triangle ABC$, $BM = 5$ см. Обчисліть довжину відрізка BD.

А) 10 см; Б) 5 см; В) $5\sqrt{2}$ см; Г) $2{,}5\sqrt{3}$ см; Д) $\sqrt{5}$ см.

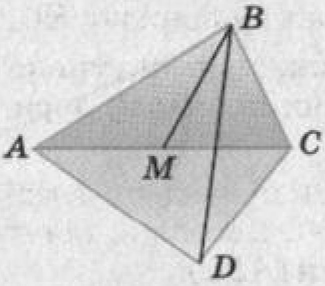


Рис. 5.41

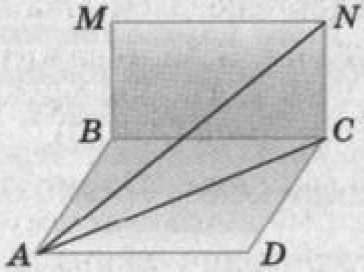


Рис. 5.42

5.70°°. Площини квадратів $ABCD$ і $MNCB$ перпендикулярні, $BC = 5$ см (рис. 5.42). Обчисліть довжину відрізка AN.

А) $5\sqrt{2}$ см; Б) $5\sqrt{3}$ см; В) $5\sqrt{5}$ см; Г) $2\sqrt{5}$ см; Д) $3\sqrt{5}$ см.

5.71°°. Площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) і квадрата $ACPR$ перпендикулярні (рис. 5.43). Сторона квадрата 6 см, гіпотенуза $AB = 10$ см. Знайдіть довжину відрізка BP.

А) 6 см; Б) 10 см; В) 8 см; Г) 14 см; Д) 12 см.

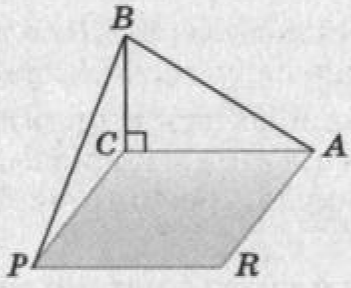


Рис. 5.43

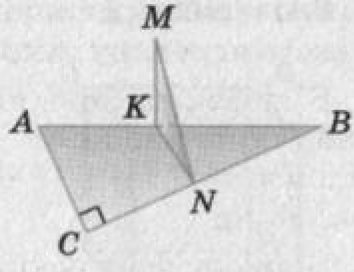


Рис. 5.44

5.72°°. Відрізок MK перпендикулярний до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). $KN \parallel AC$, $AK = KB$, $AC = 12$ см, $MK = 8$ см. Знайдіть довжину відрізка MN (рис. 5.44).

А) 20 см; Б) 16 см; В) 14 см; Г) 10 см; Д) 8 см.

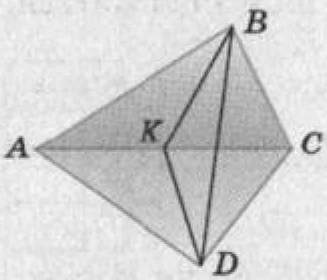


Рис. 5.45

5.73°°. Площини рівнобедрених трикутників ABC і ADC перпендикулярні (рис. 5.45), AC – їхня спільна основа. BK – медіана $\triangle ABC$, $BK = 8$ см, $DK = 15$ см. Знайдіть довжину відрізка BD.

А) 8 см; В) 17 см; Д) 11,5 см.

Б) 15 см; Г) 23 см;

5.74•. Дано три різні площини α, β і φ. Відомо, що α перпендикулярна до β, а β перпендикулярна до φ. Яке взаємне розміщення площин α і φ? (Відповідь обґрунтуйте.)

5.75•. Площини квадрата $ABCD$ і прямокутного рівнобедреного трикутника ADK ($\angle A = 90°$) перпендикулярні. Сторона квадрата дорівнює 2 см. Знайдіть довжину відрізка KC.

5.76•. Точка S не належить площині прямокутника $ABCD$. $SB \perp BC$ і $SB \perp AB$. Доведіть, що площина (SAB) перпендикулярна до площини ($ABCD$).

5.77•. З вершин A і C трикутника ABC проведено два відрізки: $NA \perp AB$, $MC \perp AC$, причому $NA \parallel MC$. Доведіть, що площина ($ANMC$) перпендикулярна до площини (ABC).

5.78•. Відрізок MC – перпендикуляр до площини трикутника ABC, $MD \perp AB$. Доведіть, що площини (MCD) і (ABC) перпендикулярні.

5.79•. Перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій a. У площині α проведена пряма, перпендикулярна до прямої a. Доведіть, що ця пряма перпендикулярна і до площини β.

5.80••. Доведіть, що коли дві площини, які перетинаються, перпендикулярні до третьої, то пряма їхнього перетину перпендикулярна до цієї площини.

5.81••. Три площини попарно перпендикулярні. Доведіть, що прямі їхнього перетину також попарно перпендикулярні.

5.82••. Відрізок завдовжки 25 см опирається кінцями на дві перпендикулярні площини. Відстані від кінців відрізка до площин дорівнюють 7 см і 15 см. Обчисліть проекції відрізка на кожну з площин.

5.83••. Відрізок завдовжки 25 см опирається кінцями на дві перпендикулярні площини. Проекції відрізка на ці площини дорівнюють 24 см і 20 см. Обчисліть довжину перпендикулярів до даних площин.

5.1. Як перевірити за допомогою вимірювань, чи є перпендикулярною до підлоги лінія, по якій з'єднуються дві суміжні стіни кімнати?

5.2. Як перевірити за допомогою рулетки вертикальність стовпа?

5.3. Як перевірити, чи перпендикулярна площина колеса до осі, на яку воно насаджено?

5.4. Чому бурульки, які звисають з даху навесні, можна вважати паралельними між собою, нехтуючи їхньою товщиною?

5.5. Під час виконання завдання з визначення вертикальності стовпців для паркана учень перевірив вертикальність першого стовпчика, а далі, вимірюючи висоту кожного стовпця та відстані між стовпцями внизу і вгорі прийняв рішення щодо встановлення їхньої вертикальності. Чи правильно виконував завдання учень?

5.6. Чому поверхня дверей, незалежно від того зачинені вони чи відчинені, розміщена вертикально до підлоги?

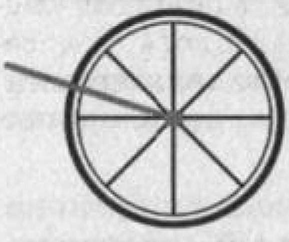


Рис. 5.46

5.7. Наочною моделлю перпендикулярної прямої і площини є колесо зі спицями та вісь (рис. 5.46). Вісь перпендикулярна до кожної спиці. Під час руху колеса спиці описують площину круга, на якій містяться безліч відрізків, що перетинаються в одній точці. Якщо вісь розміщено горизонтально, то в якій площині буде обертатися колесо? Чому?

Вказівка. У площині, перпендикулярній до осі колеса.

5.8. Десятикласники виконують на уроці фізичної культури стрибки у висоту. Підставкою для планки є куби з ребром 25 см і прямокутні паралелепіпеди, основа яких 25×25 см, а висота – 50 см. Як організувати стрибки у висоту на:

1) 125 см; 2) 150 см; 3) 175 см?

5.9. На рисунку 5.47 зображено два вертикальні стовпи та їхні тіні.

За цими даними потрібно знайти положення джерела світла (лампочки, ліхтаря) та його основи (проекції джерела світла на горизонтальну площину). Розв'яжіть задачу та дайте відповідь на запитання.

1) Чи істотно, що стовпи вертикальні?

2) Чи істотно, що площина, на яку падають тіні, горизонтальна?

3) Чи всі дані, наведені на рисунку, є необхідними?

Розв'язання. Побудови, необхідні для розв'язування основної задачі, представлено на рисунку 5.48.

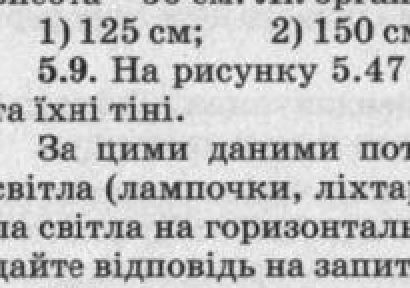


Рис. 5.47

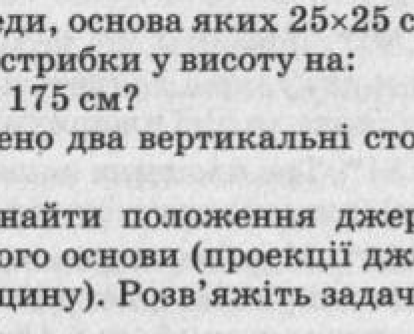


Рис. 5.48

Для знаходження положення світла напрям стовпів не має значення; для знаходження положення основи джерела світла потрібно бути впевненим, що стовпи вертикальні. Якщо стовпи вертикальні, а тіні падають на горизонтальну площину, то для розв'язування задачі достатньо задати на рисунку один стовп із тінню і лише напрям тіні від другого стовпа.

5.10. Круглий стіл накрито квадратною скатертиною з тонкої тканини (центр квадрата збігається з центром круга). На скільки кути скатертини ближче до підлоги, ніж середини її сторін? Прийняти сторону квадрата (скатертини) за a.

Відповідь. $\dfrac{a(\sqrt{2}-1)}{2} \approx 0,207a.$

5.11. Перпендикулярність стіни перевіряють за допомогою виска (шнур з тягарцем). Якщо він щільно прилягає до її поверхні, вважають, що вертикальність витримано. Чи правильно це? На чому ґрунтується такий спосіб перевірки?

Вказівка. Якщо площина проходить через пряму, яка перпендикулярна до іншої площини, то ці площини перпендикулярні.

5.12. Як намітити лінії, по яких потрібно відпиляти частину балки, щоб площина розпилу була перпендикулярною до будь-якого ребра цієї балки?

Відповідь. Щоб розпил був перпендикулярним до бруска, через точку A ребра слід провести перпендикулярно до нього прямі AB та AC, а потім розпиляти по них брусок.

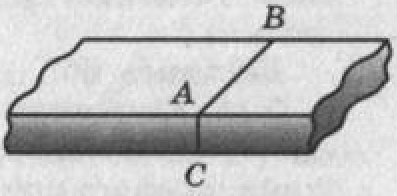


Рис. 5.49

5.13. Треба перевірити, чи перпендикулярні одна до одної сусідні стіни в кімнаті. Як використати для цього теорему Піфагора?

Розв'язання. Припустимо, що стіни у кімнаті вертикальні, а підлога горизонтальна. По нижньому краю стін від точки, яка лежить на лінії їхнього перетину, відкладемо відрізки AB та AC завдовжки 3 та 4 довільні одиниці (наприклад, дециметрів). Відрізки будуть перпендикулярними до лінії перетину площин стін. Тоді кут, який утворили побудовані відрізки, – це лінійний кут двогранного кута між стінами, і він буде прямим тоді і тільки тоді, коли довжина відрізка BC дорівнюватиме 5 одиницям.

5.14. Щоб перевірити вертикальність стовпа, спостереження ведуть з двох пунктів, які не лежать на одній прямій з основою стовпа. Обґрунтуйте такий спосіб перевірки.

Вказівка. Скористайтеся ознакою перпендикулярності прямої та площини.

5.15. На недоступному узвишші встановлено високий стовп. Як за допомогою виска перевірити його вертикальність?

Розв'язання. Достатньо перевірити, що стовп знаходиться в одній площині з деякою вертикальною лінією, а також в одній площині (іншій) з деякою іншою вертикальною лінією. Якщо розмістити висок перед собою так, щоб верхні кінці виска та стовпа опинилися на одній лінії з оком, то лінії виска та стовпа повинні збігатися. Обґрунтуванням цього способу перевірки є, по-перше, те, що вертикальний стовп повинен лежати в одній площині з довільною вертикальною прямою. По-друге, якщо дві паралельні прямі лежать у двох площинах, які перетинаються, то ці прямі паралельні лінії перетину площин.

5.16. Горизонтальний промінь, паралельний площині одного з двох вертикальних плоских дзеркал, відбивається від другого дзеркала по прямій, яка перпендикулярна до площини першого дзеркала. Знайдіть кут між дзеркалами.

Вказівка. Скористайтеся законами відбивання світла.

Відповідь. 45°.

5.17. Горизонтальний промінь відбивається від двох вертикальних плоских дзеркал. Причому, спочатку промінь є паралельним площині одного дзеркала, а після двох відбивань – площині другого дзеркала. Знайдіть кут між дзеркалами.

Відповідь. 60°.

5.18. Квадратну стальну платформу товщиною 5 м і площею 4 $м^2$ підвішено горизонтально на чотирьох тросах. Довжина кожного троса 2 м. Обчисліть кути нахилу тросів до платформи. Чи вміститься на цю платформу циліндричний бак, висота якого 0,9 м, а діаметр основи 0,6 м?

Відповідь. 45°; бак вміститься на платформі.

Абу-ль-Фатх Омар Ібн Ібрахім ель-Хайям (1048–1131)

Абу-ль-Фатх Омар Ібн Ібрахім ель-Хайям – видатний середньоазіатський учений і поет. Наукові праці присвячені математиці, астрономії, філософії. Запропонував детальну класифікацію і теорію графічного розв'язування кубічних рівнянь. Особливу увагу приділяв теорії паралельних прямих і вперше явно замінив V постулатів Евкліда більш простим твердженням. Можна вважати, що саме він уперше вивів деякі теореми неевклідових геометрій Лобачевського і Рімана. Світову славу принесли Омару Хайяму його чудові рубаї, які по праву належать до шедеврів світової лірики. Математичні твори Омара Хайяма, які дійшли до наших днів, характеризують його як видатного вченого свого часу.

Микола Іванович Лобачевський (1792–1856)

Зі всіх мов світу найкращою є мова математики.

М. І. Лобачевський

Народився М. І. Лобачевський у Нижньому Новгороді в родині землеміра. «Бідність оточила його колиску», – згадував один з викладачів науковця. Але стан родини ще більше погіршився після смерті батька. Мати залишилася з трьома малими дітьми та, рятуючися від крайньої бідності, переїхала до Казані з надією отримати підтримку родичів. У Казані М. Лобачевський прожив майже все життя. Завдяки своїм феноменальним здібностям він у 14 років був зарахований до університету, у 18 років став магістром, у 21 – ад'юнктом (доцентом), у 23 – професором. З цього часу починається його 30-річна професорська діяльність у рідному університеті, ректором якого він обирався шість разів поспіль.

В історію математики М. Лобачевський увійшов як перша людина, яка виступила з новою теорією геометрії, тим самим завоював собі почесне звання «Коперник геометрії». Лобачевський зробив сміливий висновок про те, що можливе існування геометрії, яка ґрунтується на запереченні аксіоми паралельності Евкліда. Усе життя він присвятив створенню цієї «уявної геометрії», яка зараз називається геометрією Лобачевського. У цій геометрії до даної прямої можна провести нескінченно багато прямих, їй паралельних. Це була справжня революція в науці. «Легше було зупинити Сонце, легше було зрушити Землю, ніж звести паралелі до сходження» (В. Ф. Каган).

За життя вченого його геніальні ідеї не були сприйняті. Геометрія Лобачевського отримала поширення лише через 15 років після його смерті, коли нарешті стало зрозуміло, що «Лобачевський був не лише Коперником геометрії, але й Коперником усього нашого мислення» (Е. Т. Белл).

Георг Фрідріх Бернхард Ріман (1826–1866)

Моя головна робота – нове розуміння відомих законів природи.

Г. Ріман

Г. Ріман – людина з блискучою інтуїцією. Своєю всеохоплюючою геніальністю він перевершує всіх своїх сучасників. Там, де пробудилася його цікавість, він завжди приступає до дослідження по-новому, його не стримують традиції, він не визнає обмежувальних рамок якоїсь системи.

Народився вчений у селі Брезеленц поблизу міста Даненберг (Нижня Саксонія) у сім'ї лютеранського пастора. Він ріс хворобливим хлопчиком, відрізнявся від однолітків несміливістю та скромністю. У школі Ріман не був блискучим учнем. За бажанням батька він вступив на теологічний факультет Геттінгенського університету, але дуже швидко його схильність та цікавість до точних наук взяли гору, і молодий студент вирішив повністю присвятити себе математиці. У 25 років він захистив дисертацію й отримав ступінь доктора математики, у 29 був призначений професором університету в Геттінгені. Лише 15 років тривала наукова діяльність Рімана, але її результатом став значний внесок майже в усі галузі математики.

Надзвичайно великий вплив на розвиток математичних і фізичних ідей мала праця Рімана «Про гіпотези, що лежать в основі геометрії», в якій він дав класифікацію всіх існуючих видів геометрії, включаючи вже знайдені неевклідові геометрії, і показав можливість створення нових геометричних просторів. Успіху в науці Ріман досяг завдяки своєму універсальному підходу до явищ природи, незвичайному відчуттю і розумінню зв'язків між, як здавалося раніше, різнорідними явищами.

Запитання для самоконтролю

1. Які прямі простору називаються перпендикулярними?
2. Скільки прямих, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через точку цієї прямої?
3. Скільки прямих, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через точку, що не лежить на цій прямій?
4. Як розміщені дві прямі простору, які перпендикулярні до однієї і тієї самої прямої?
5. Яка пряма називається перпендикулярною до площини?
6. Як спрощує вимоги перпендикулярності прямої і площини їхня ознака?
7. Чи можна стверджувати про перпендикулярність прямої до площини круга, якщо вона перпендикулярна до одного з його діаметрів?
8. Чи можна стверджувати про перпендикулярність прямої і площини паралелограма, якщо вона перпендикулярна до кожної з його діагоналей і проходить через точку їхнього перетину?
9. Відомо, що пряма a перпендикулярна до деякої прямої b і площини α. Яке взаємне розміщення прямої b і площини α?
10. Площина γ перетинає площину α, але не перетинає площину β. Яке взаємне розміщення площин α і β?
11. Які дві площини називаються перпендикулярними?
12. Чи можна провести пряму, перпендикулярну до кожної з двох площин, які перетинаються?
13. Який відрізок називають перпендикуляром до площини, а який – похилою?
14. Як побудувати проекцію похилої на площину?
15. Сформулюйте теорему про три перпендикуляри.
16. Як порівняти довжини похилих, проведених до площини з однієї точки, маючи довжини їхніх проекцій?
17. Як порівняти довжини проекцій похилих, маючи довжини похилих, проведених до площини з однієї точки?
18. Чи може перпендикуляр мати більшу довжину, ніж похила, якщо вони проведені з однієї точки?
19. Чи може проекція похилої бути довшою за саму похилу?
20. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сполучили точки A_1 і B. Як пояснити, що $A_1B \perp BC$?
21. Чи буде у прямокутному паралелепіпеді відрізок D_1C перпендикулярний до BC?
22. Відомо, що площини α і β – перпендикулярні. Чи кожна пряма площини α буде перпендикулярною до площини β?

12-Geometrija, 10 kl (Biljanina)

23. Відомо, що пряма a перпендикулярна до площини β і належить площині α. Чи можна стверджувати, що площина α перпендикулярна до площини β?

Тест для самоконтролю

• ***Частина 1***

Завдання 1–16 мають варіанти відповідей, з яких правильна тільки ОДНА або конкретна кількість. Виберіть правильну відповідь.

1°. Дано пряму m і точку M, що лежить на ній. Укажіть кількість прямих, що проходять через точку M перпендикулярно до прямої m.

А) Одна; Б) дві; В) три; Г) безліч; Д) жодної.

2°. Дано площину α і точку $O \in \alpha$. Укажіть кількість прямих, що проходять через точку O перпендикулярно до площини α.

А) Одна; Б) дві; В) три; Г) безліч; Д) жодної.

3°. Дано площину ω і точку $Q \notin \omega$. Укажіть кількість прямих, що проходять через точку Q перпендикулярно до площини ω.

А) Одна; Б) дві; В) три; Г) безліч; Д) жодної.

4°. Пряма AM проходить через вершину A трикутника ABC і $AM \perp AB$, $AM \perp AC$. Укажіть взаємне розташування прямої AM і площини трикутника ABC.

А) Пряма паралельна площині трикутника;

Б) пряма лежить на площині трикутника;

В) пряма перпендикулярна до площини трикутника;

Г) пряма перетинає площину трикутника, але не перпендикулярна до неї.

5°. Пряма MB перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$ (рис. 5.50). Виберіть прямі, які перпендикулярні до прямої MB.

1) AB; 2) AD; 3) BD; 4) DC; 5) BC; 6) AC.

А) 1, 3 і 5; Б) 2, 4 і 6; В) 1, 2 і 5; Г) 3, 4 і 6; Д) 1, 3 і 6.

6°. На рисунку 5.51 зображено прямокутник $ABCD$, $S \notin (ABC)$, $SB \perp (ABC)$. Виберіть трикутники, у яких один з кутів прямий за теоремою про три перпендикуляри.

1) $\triangle ASB$; 2) $\triangle ASD$; 3) $\triangle SBD$; 4) $\triangle SCD$; 5) $\triangle SBC$.

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 2 і 6; Д) 1 і 4.

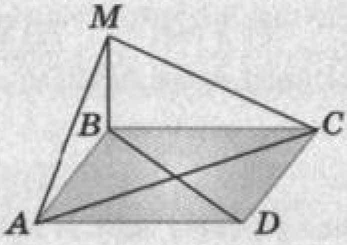


Рис. 5.50

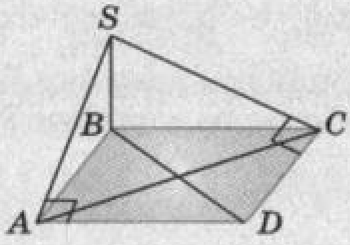


Рис. 5.51

7°. Відрізок KC перпендикулярний до площини паралелограма $ABCD$ (рис. 5.52). Укажіть взаємне розміщення площин (KCD) і $(ABCD)$.

А) Паралельні; В) перпендикулярні;

Б) збігаються; Г) перетинаються, але не перпендикулярні.

8°. З точки A до площини α проведено перпендикуляр AO і похилу AB. $AO = 6$ см, $AB = 9$ см. Знайдіть довжину проекції похилої AB на площину α.

А) 6 см; Б) 9 см; В) 7,5 см; Г) $3\sqrt{5}$ см; Д) $5\sqrt{3}$ см.

9°°. Через вершину B ромба $ABCD$ проведено пряму SB перпендикулярно до площини ромба. Виберіть три правильні твердження.

А) $SB \perp AD$; В) $SB \perp CD$; Д) $SB \perp DB$.

Б) $SB \perp BA$; Г) $SB \perp CB$;

10°°. Через вершину B квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр BH (рис. 5.53). Визначте взаємне розміщення діагоналі квадрата AC і похилої HO (O – точка перетину діагоналей квадрата).

А) Мимобіжні; В) перпендикулярні;

Б) перетинаються; Г) паралельні.

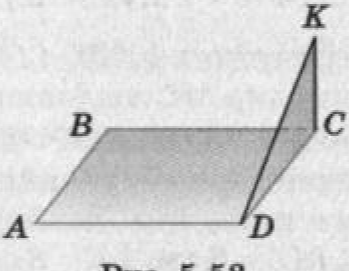


Рис. 5.52

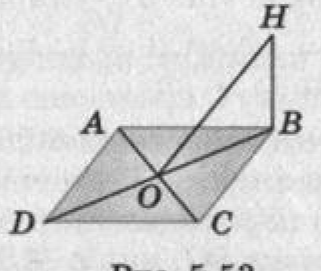


Рис. 5.53

11°°. З точок A і C, що не належать площині α, проведено до площини два перпендикуляри AB і CD. $AB = 9$ см, $CD = 17$ см, $AC = 10$ см. Знайдіть довжину відрізка BD.

А) 8 см; Б) 6 см; В) 10 см; Г) 5 см; Д) 12 см.

12°°. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює $\sqrt{2}$ см. Через вершину B до площини квадрата проведено перпендикуляр $SB = 1$ см. Обчисліть довжину відрізка SA.

А) $\sqrt{2}$ см; Б) $\sqrt{3}$ см; В) $\sqrt{5}$ см; Г) 1 см; Д) 2 см.

13°°. Знайдіть довжину BD_1 – діагоналі куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, якщо ребро куба дорівнює 2 см.

А) $3\sqrt{2}$ см; Б) $2\sqrt{2}$ см; В) $2\sqrt{3}$ см; Г) $4\sqrt{2}$ см; Д) $4\sqrt{3}$ см.

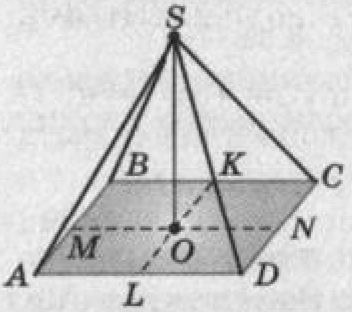


Рис. 5.54

14°°. У прямокутнику $ABCD$ проведено осі симетрії MN і KL, що перетинаються в точці O (рис. 5.54). З точки O проведено перпендикуляр OS. Визначте пари перпендикулярних площин.

1) (MSN) і (ABC); 4) (KSL) і (MSN);
2) (MSN) і (ASC); 5) (ASC) і (BSD).
3) (KSL) і (ABC);

А) 1, 2 і 3; В) 3, 4 і 5; Д) 1, 2 і 5.
Б) 2, 3 і 4; Г) 1, 3 і 4;

15°°. З точки A до площини α проведено дві похилі $AB = 15$ см і $AC = 13$ см. Обчисліть проекцію похилої AC, якщо проекція похилої AB дорівнює 9 см.

А) 9 см; Б) 12 см; В) 5 см; Г) 10 см; Д) 6 см.

16°°. З точки A до площини α проведено перпендикуляр AK і дві похилі $AT = 13$ см та $AQ = 7$ см. Знайдіть довжину проекції похилої AQ на площину α, якщо проекція похилої AT на α дорівнює 12 см.

А) $2\sqrt{3}$ см; Б) 4 см; В) $4\sqrt{2}$ см; Г) $3\sqrt{3}$ см; Д) $2\sqrt{6}$ см.

● *Частина 2*

Розв'яжіть завдання 17–28 з коротким записом ходу міркувань.

17•. До площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) через вершину C проведено перпендикуляр MC завдовжки 3 см. Знайдіть довжину похилої MA, якщо $AB = 6$ см, а $BC = 2\sqrt{5}$ см.

18•. Через точку O перетину діагоналей прямокутника $MNKL$ проведено перпендикуляр SO до його площини. Знайдіть довжину відрізка SO, якщо $MS = 13$ см, $ML = 6$ см, $LK = 8$ см.

19•. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 2 см. З точки A до площини квадрата проведено перпендикуляр $MA = 1$ см. Знайдіть довжину відрізка MC.

20•. Відрізок SB – перпендикуляр, проведений до площини квадрата. Знайдіть довжину відрізка SD, якщо $AB = 12$ см, $SC = 16$ см.

21•. З точки K до площини α проведено перпендикуляр KO і похилу KM. Знайдіть довжину похилої, якщо вона на 2 см довша, ніж перпендикуляр, а довжина проекції цієї похилої дорівнює 10 см.

22•. З точки M до площини α проведено перпендикуляр MB і похилу MA. Проекція похилої більша за перпендикуляр на 7 см. Знайдіть довжину проекції похилої, якщо похила $MA = 17$ см.

23•. Площини рівносторонніх трикутників MNK і MNF перпендикулярні. Висоти цих трикутників дорівнюють $4\sqrt{2}$. Знайдіть довжину відрізка KF.

24•. Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O. OM – перпендикуляр проведений до площини квадрата. $MA = 53$ см, $AB = 28\sqrt{2}$ см. Знайдіть довжину відрізка MO.

25•. З даної точки до площини α проведено дві похилі, різниця довжин яких дорівнює 6 см. Їхні проекції на цю саму площину α відповідно дорівнюють 27 см і 15 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, опущеного з даної точки на площину α.

26•. З точки до площини проведено перпендикуляр і дві похилі завдовжки 4 см і 8 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо їхні проекції відносяться як 1 : 7.

27•. У правильному $\triangle ABC$ зі стороною 8 см провели медіану AO. Через точку O побудували перпендикуляр OD до площини трикутника завдовжки 4 см. Знайдіть довжину відрізка AD.

28•. Відрізок BK – медіана рівнобедреного трикутника з основою AC завдовжки 24 см і бічними сторонами, рівними 20 см. Через вершину B проведено перпендикуляр до площини трикутника BS, що дорівнює $8\sqrt{5}$ см. Знайдіть довжину відрізка SK.

● ***Частина 3***

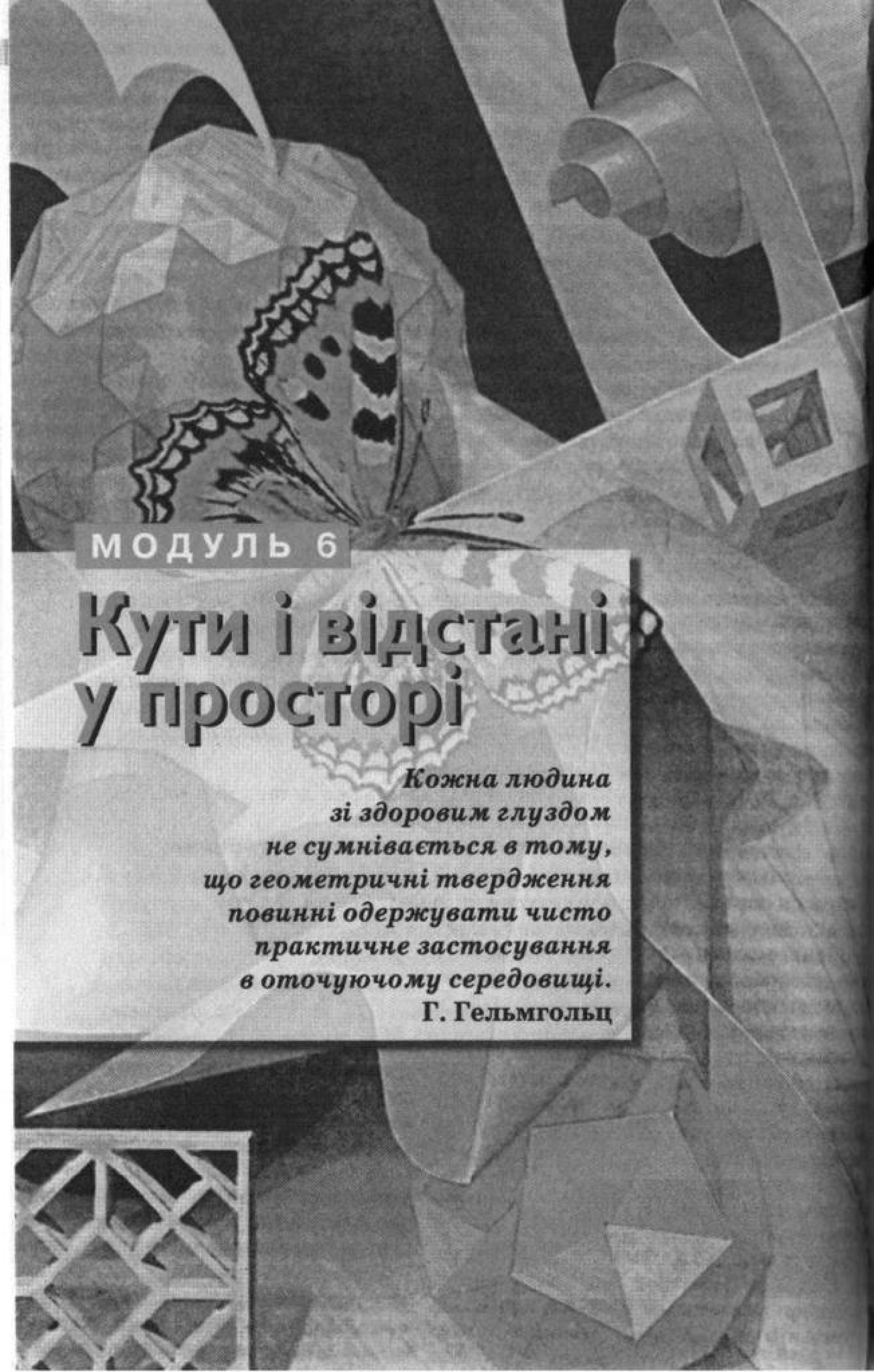
Розв'яжіть завдання 29–32 з повним обґрунтуванням.

29••. З точок A і B, які лежать у перпендикулярних площинах, опущено перпендикуляри AH і BQ на пряму перетину площин. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $AH = a$, $BQ = b$, $HQ = c$.

30••. З точок M і N, які лежать у перпендикулярних площинах, опущено перпендикуляри MK і NT на пряму перетину площин. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо $MT = a$, $NK = b$, $KT = c$.

31••. Відрізки AC і BD – два перпендикуляри, проведені до площини α. Точки A і B лежать по різні боки від площини α. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $AC = 30$ см, $BD = 18$ см і $CD = 16$ см.

32••. Площина трапеції $ABCD$ і площина трикутника ABM перетинаються по прямій l. $AB = 8$ см, $BM = 6$ см, $AM = 10$ см. Визначте умови, за яких пряма l буде перпендикулярною до площини (CBM).



МОДУЛЬ 6

Кути і відстані у просторі

Кожна людина
зі здоровим глуздом
не сумнівається в тому,
що геометричні твердження
повинні одержувати чисто
практичне застосування
в оточуючому середовищі.
Г. Гельмгольц

КОРОТКИЙ ЗМІСТ МОДУЛЯ

- *Кути між прямими у просторі*
- *Кути між прямою і площиною у просторі*
- *Кути між площинами*
- *Відстані у просторі*
  - *між точками та прямими*
  - *між точкою і прямою*
  - *між точкою і площиною*
  - *між площиною і паралельною їй прямою*
  - *між паралельними площинами*
- *Ортогональне проекціювання. Площа ортогональної проекції многокутника*
- *Практичне застосування властивостей паралельності та перпендикулярності прямих і площин*

Опрацювавши цей модуль, ви дізнаєтеся:

- як визначити кут між двома прямими простору, що лежать в одній площині;
- як визначити кут між двома мимобіжними прямими;
- як визначити кут між двома прямими простору, що не лежать в одній площині;
- як визначити кут між прямою і площиною у просторі;
- як визначити кут між двома площинами;
- як знайти довжину відрізка, що визначає відстань між точкою і прямою (площиною);
- як знайти довжину відрізка, що визначає відстань між двома прямими (площинами);
- як знайти довжину відрізка, що виражає відстань між двома мимобіжними прямими;
- як застосувати ортогональне проекціювання при розв'язуванні задач;
- як знайти площу ортогональної проекції многокутника;
- як застосувати відношення між прямими і площинами у просторі, вимірювання відстаней і кутів у просторі для опису об'єктів оточуючого світу.

§ 6.1. Кути у просторі

У планіметрії *кут* – це геометрична фігура, утворена двома променями, що виходять з однієї точки – вершини кута (промені – сторони кута). Таке означення поняття кута переноситься і в стереометрію. Кути у просторі розглядаються між двома прямими, прямою і площиною, двома площинами.

Опишемо та означимо кожний із вищенаведених випадків.

1. Кут між двома прямими у просторі

Дві прямі, які лежать на одній площині, при перетині утворюють суміжні та вертикальні кути. У модулі 1 ми повторили всі властивості таких кутів, зокрема важливо пам'ятати, що вертикальні кути рівні, а суміжні – доповнюють один одного до 180°. У просторі також зберігаються всі назви і поняття, що існують про кути та їхні величини з планіметрії. Так, менший з кутів, які утворюють дві прямі, що перетинаються, називають ***кутом між прямими.*** Кут між перпендикулярними прямими дорівнює 90°. Вважають, що паралельні прямі теж утворюють кут, який дорівнює 0°. Також у стереометрії розглядають кут між мимобіжними прямими. Нехай дано мимобіжні прямі a і b (рис. 6.1, *б*). Виберемо у просторі довільну точку і проведемо через неї дві прямі, паралельні мимобіжним (рис. 6.1, *а*, *в*), або ж виберемо точку на одній із мимобіжних (рис. 6.1, *б*) і побудуємо тільки одну пряму, паралельну іншій. Кут між побудованими прямими називають кутом між мимобіжними прямими.

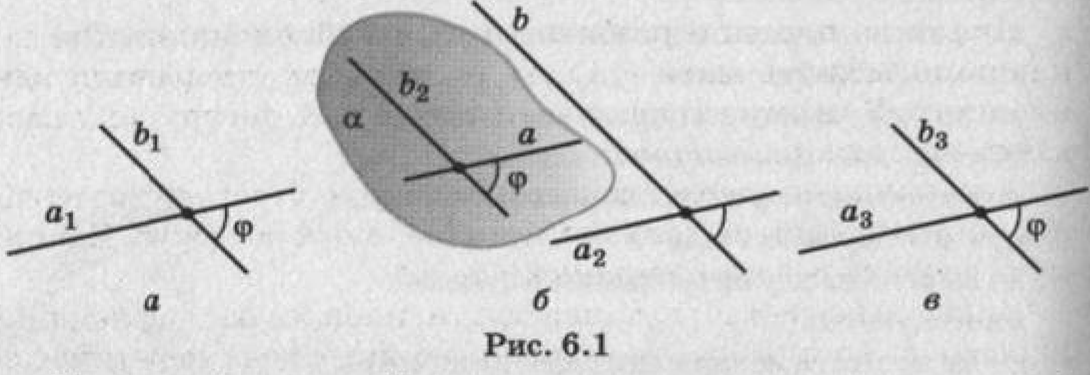


Рис. 6.1

Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, які перетинаються і відповідно паралельні мимобіжним. φ – кут між мимобіжними прямими b і a (рис. 6.1). Цей кут не залежить від вибору прямих, що перетинаються, оскільки паралельне перенесення зберігає рівність відповідних кутів з паралельними сторонами. Наприклад, якщо $b \dot{-} a$, $a \subset \alpha$, то кутом між прямими b і a буде кут між прямими a та b_2, де $b_2 \parallel b$, $b_2 \subset \alpha$ (рис. 6.1, *б*).

Отже, $\angle(ab) = \angle(a_1b_1) = \angle(ab_2) = \angle(ba_2) = \angle(a_3b_3)$. Якщо $\angle(a_2b) = 90°$, то $\angle(ab) = 90°$. Однак про перпендикулярність мимобіжних прямих не кажуть, оскільки витримується означення поняття перпендикулярних прямих.

2. *Кут між прямою і площиною у просторі*

Про кут нахилу прямої до площини говоритимемо, коли пряма перетинає цю площину. Щоб побудувати, наприклад, кут між прямою a і площиною α ($O \in a$, $O \in \alpha$), послідовно виконують такі кроки (рис. 6.2):

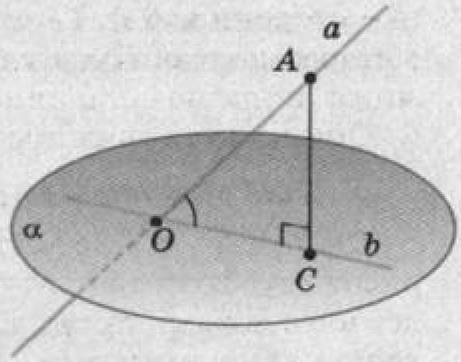


Рис. 6.2

1) вибирають точку A прямої a ($A \notin \alpha$);

2) проводять з точки A перпендикуляр на площину α ($AC \perp \alpha$, $C \in \alpha$);

3) проводять через точки площини O і C пряму b.

Пряму b називають проекцією прямої a на площину α.

Кутом між прямою і площиною називається кут між цією прямою і її проекцією на площину. Якщо пряма a перпендикулярна до α, то кут між нею і площиною дорівнює 90°, якщо паралельна, то – 0°.

Коротко позначають кут між прямою a і площиною α за допомогою символів «$\angle$» або «$\hat{}$»: $\angle(a\alpha)$ або $(\widehat{a\alpha})$. Читають: «кут між прямою a і площиною α».

3. *Кут між двома площинами простору*

Пряма на площині розбиває її на дві півплощини. Дві півплощини можуть мати спільну пряму і не утворювати одну площину. У цьому випадку вони утворюють фігуру, яку називають *двогранним кутом*.

Двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами разом зі спільною прямою, що їх обмежує. Цю пряму називають *ребром двогранного кута*.

Якщо двогранний кут перетнути площиною, перпендикулярною до його ребра, то промені, по яких вона перетинає задані півплощини, утворюють ***лінійний кут***, наприклад $\angle(ab)$ (рис. 6.3). За міру двогранного кута приймають міру його лінійного кута.

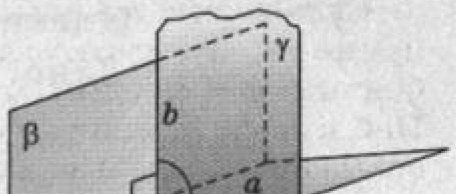


Рис. 6.3

Площини, що перетинаються, утворюють чотири кути. Щоб визначити кут між двома площинами, проводять площину, перпендикулярну до прямої їхнього перетину. Вона перетинатиме дані площини по двох прямих. Кут між цими прямими називається *кутом між даними площинами*. Тобто ***кут між двома площинами***, які перетинаються – це кут між двома прямими, які належать цим площинам і перпендикулярні до прямої їхнього перетину.

$\angle(\alpha\beta) = \angle(ab)$, де $\alpha \cap \beta = c$, $a \perp c$, $a \subset \alpha$, $b \perp c$, $b \subset \beta$ (рис. 6.3).

Якщо лінійний кут – прямий, то площини – перпендикулярні. Якщо площини паралельні, то кут між ними дорівнює 0°.

Теорема 1.

Кут між площинами не залежить від місця побудови лінійного кута.

Доведення. Виберемо точки A і B (рис. 6.4), які належать прямій a, лінії перетину площин α і β, та побудуємо два лінійні кути для площин α і β. Для цього проведемо площини γ_1 і γ_2, перпендикулярні прямій a, які перетнуть площини α і β по прямих a_1 і b_1 та a_2 і b_2. Прямі a_1 і a_2 лежать в площині α і перпендикулярні до прямої a, тому вони паралельні, аналогічно $b_1 \parallel b_2$. Якщо до площини γ_1 застосувати паралельне перенесення, яке переводить точку A в точку B, то пряма a_1 збіжиться з прямою a_2, а пряма b_1 з прямою b_2. Це можливо, оскільки прямі паралельні. А тому площини γ_1 і γ_2 збігаються, звідси збіг лінійних кутів і відповідно їх рівність. *Теорему доведено.*

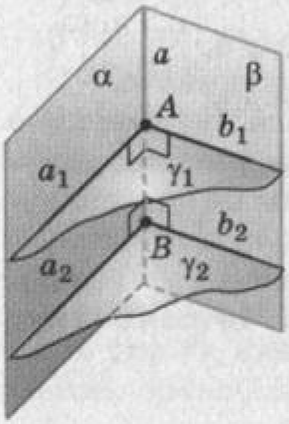


Рис. 6.4

Задача.

Кінці відрізка завдовжки 24 см належать двом перпендикулярним площинам. Відстані від кінців відрізка до лінії перетину даних площин дорівнюють 12 см і $12\sqrt{2}$ см. Знайдіть кути, утворені відрізком із цими площинами.

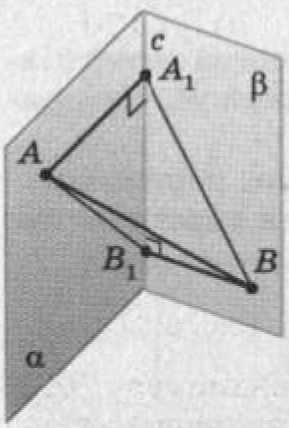


Рис. 6.5

Дано: α, β, $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = c$; AB – відрізок, $A \in \alpha$, $B \in \beta$; $AA_1 \perp c$, $BB_1 \perp c$, $A_1 \in c$, $B_1 \in c$; $AB = 24$ см, $AA_1 = 12\sqrt{2}$ см, $BB_1 = 12$ см.

Знайти: кути, утворені відрізком AB з площинами α і β.

Розв'язання	Чому саме так?
A_1 і B_1 – проекції точок A і B на площини β і α відповідно. Оскільки $\alpha \perp \beta$, c (або A_1B_1) – пряма перетину цих площин, тому $BB_1 \perp \alpha$, $AA_1 \perp \beta$. Отже, $\triangle ABA_1$ і $\triangle ABB_1$ – прямокутні, у яких: $AA_1 = 12\sqrt{2}$ см, $BB_1 = 12$ см, $AB = 24$ см, за умовою. З $\triangle ABB_1$ ($\angle AB_1B = 90°$): $\sin\angle BAB_1 = \frac{BB_1}{AB} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, $\angle BAB_1 = 30°$. З $\triangle ABA_1$ ($\angle AA_1B = 90°$): $\sin\angle ABA_1 = \frac{AA_1}{AB} = \frac{12\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle ABA_1 = 45°$. *Відповідь.* 30°; 45°.	У цій задачі важливо побудувати проекції кінців відрізка на іншу перпендикулярну до неї площину. При цьому слід пам'ятати, що вони повинні лежати на прямій перетину даних перпендикулярних площин, згідно з властивостями перпендикулярних площин. Далі, розглядаючи прямокутні трикутники, слід правильно використовувати означення синуса кута як відношення протилежного катета до гіпотенузи і таблицю значень: $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вправи

6.1°. Відомо, що прямі a і b, які розміщені у просторі, перпендикулярні та кут між ними дорівнює α. Виберіть правильне твердження.

А) $\alpha = 30°$; Б) $\alpha = 45°$; В) $\alpha = 60°$; Г) $\alpha = 90°$; Д) $\alpha = 120°$.

6.2°. Пряма a перпендикулярна до площини ω і перетинає її в точці O (рис. 6.6). Пряма b проходить через точку O і належить ω. Укажіть величину кута між прямими a і b.

А) 60°; В) 120°; Д) 30°.
Б) 90°; Г) 45°;

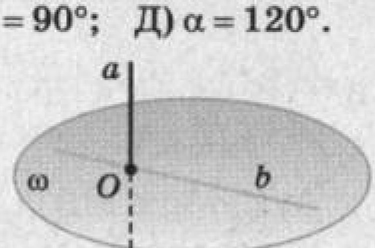


Рис. 6.6

6.3°. З точки B до площини ψ проведено перпендикуляр BA і похилу BC, кут між якими 45°. Визначте довжину перпендикуляра, якщо довжина проекції 6 см.

А) 2 см; Б) 3 см; В) 4 см; Г) 6 см; Д) 9 см.

6.4°. Дано прямі a і b, кут між якими α. Укажіть до кожного можливого взаємного розміщення цих прямих (А–Г) величину кута α (1–4).

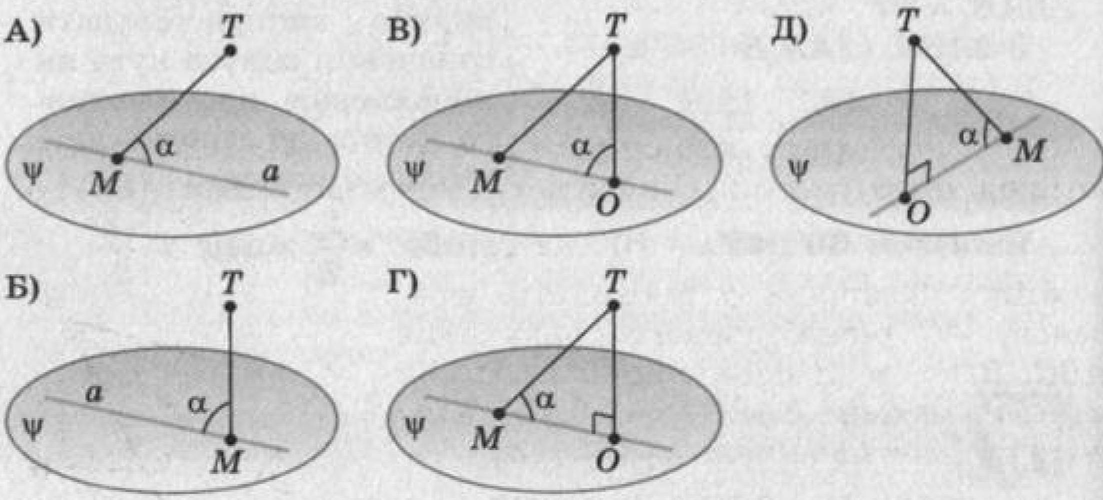
А) $a \parallel b$; 1) $0° < \alpha \leqslant 90°$;
Б) $a \cap b$; 2) $\alpha = 90°$;
В) $a \perp b$; 3) $\alpha = 0°$;
Г) $a \dot{-} b$. 4) $0° < \alpha < 90°$.

А	
Б	
В	
Г	

6.5°. Виберіть три величини кутів, які можуть виражати величину кута між мимобіжними прямими.

А) 0°; Б) 50°; В) 180°; Г) 75°; Д) 45°.

6.6°. З точки T під кутом 45° до площини ψ проведено похилу TM. Укажіть два рисунки, на яких правильно зображено кут між похилою і площиною.



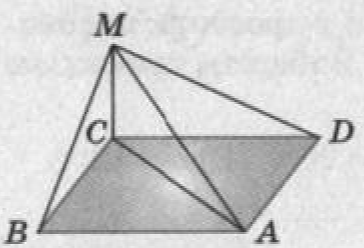


Рис. 6.7

6.7°. Через вершину C паралелограма $ABCD$ проведено перпендикуляр MC до його площини (рис. 6.7). Поставте у відповідність до кожного кута між прямою і площиною (А–Г) його позначення (1–6).

А) Кут між MB і (ABC); 1) $\angle MCD$;
Б) кут між MD і (ABC); 2) $\angle MBC$;
В) кут між MC і (ABC); 3) $\angle MDC$;
Г) кут між MA і (ABC). 4) $\angle MCB$;
5) $\angle MAC$;
6) $\angle MCA$.

А	
Б	
В	
Г	

6.8°. Перпендикуляр SB проведено до площини квадрата $ABCD$ (рис. 6.8).

Виберіть таку назву кута, яка відповідає чотирьом із п'яти визначених умов (1–5), і таку, яка б не підходила до жодної з них.

А) Прямий кут;
Б) гострий кут;
В) тупий кут.

1) $\angle SAD$;
2) $\angle SAB$;
3) $\angle SDB$;
4) $\angle SDC$;
5) $\angle SDA$.

А				
Б				
В				

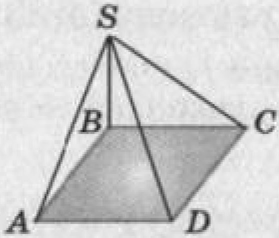


Рис. 6.8

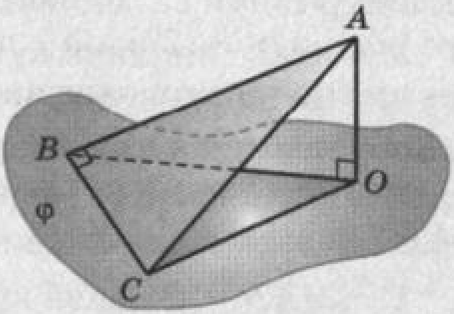


Рис. 6.9

6.9°°. Через катет BC прямокутного трикутника ABC проведено площину φ (рис. 6.9). Укажіть кут між площинами (ABC) і φ.

А) $\angle ACD$; Б) $\angle BCO$; В) $\angle ABO$; Г) $\angle AOC$; Д) $\angle ABO$.

6.10°°. Площина α проходить через основу AC рівнобедреного трикутника ABC, BH – перпендикуляр до площини α, BD – медіана $\triangle ABC$ (рис. 6.10). Укажіть кут між площинами (ABC) і α.

А) $\angle BDH$; В) $\angle BCH$; Д) $\angle AHC$.
Б) $\angle BAH$; Г) $\angle BHD$;

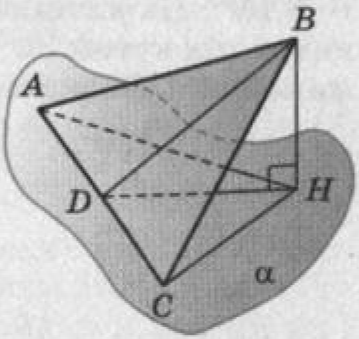


Рис. 6.10

6.11°°. З точки K до площини проведено перпендикуляр і похилу завдовжки 24 см. Кут між похилою і площиною дорівнює 30°. Знайдіть довжину перпендикуляра.

А) $24\sqrt{3}$ см; Б) $24\sqrt{2}$ см; В) $12\sqrt{3}$ см; Г) $12\sqrt{2}$ см; Д) 12 см.

6.12°°. З точки A до площини проведено перпендикуляр і похилу, довжина якої 20 см. Кут між похилою і площиною 60°. Знайдіть довжину перпендикуляра.

А) 10 см; Б) $10\sqrt{2}$ см; В) $10\sqrt{3}$ см; Г) $20\sqrt{2}$ см; Д) $20\sqrt{3}$ см.

6.13°°. З точки M до площини проведено перпендикуляр і похилу, кут між якими 60°. Знайдіть довжину похилої, якщо перпендикуляр завдовжки 20 см.

А) $20\sqrt{2}$ см; Б) $10\sqrt{3}$ см; В) $20\sqrt{3}$ см; Г) 40 см; Д) $10\sqrt{2}$ см.

6.14°°. Площини квадрата $ABCD$ і прямокутного $\triangle ABM$ ($\angle B = 90°$) перетинаються по прямій AB (рис. 6.11). Укажіть кут між цими площинами.

А) $\angle MKL$; Б) $\angle MBD$; В) $\angle MBC$; Г) $\angle MAD$; Д) $\angle MAC$.

6.15°°. До площини квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр SB. Точка S сполучена з вершиною A квадрата. Визначте, яким є трикутник SAD.

А) Прямокутний; Б) гострокутний; В) тупокутний.

6.16°°. Кут ABC – лінійний кут двогранного кута з ребром m. Укажіть взаємне розміщення прямої m і площини (ABC).

А) Пряма і площина (ABC) паралельні;

Б) пряма і площина (ABC) перпендикулярні;

В) пряма m лежить на площині (ABC).

6.17°°. Кут MKN – лінійний кут двогранного кута з ребром c. Укажіть взаємне розміщення площини (MKN) і прямої c.

А) Пряма лежить на площині (MKN);

Б) пряма паралельна площині (MKN);

В) пряма перпендикулярна до площини (MKN).

6.18°°. На площині α лежать дві прямі a і b_1, які перетинаються під кутом 30°. Прямі b і b_1 – паралельні, а прямі a і b – мимобіжні. Визначте кут між прямими a і b (рис. 6.12).

А) $(\widehat{ab}) = 150°$; Г) $(\widehat{ab}) = 60°$;
Б) $(\widehat{ab}) = 0°$; Д) $(\widehat{ab}) = 90°$.
В) $(\widehat{ab}) = 30°$;

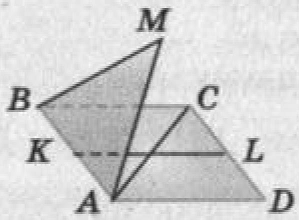


Рис. 6.11

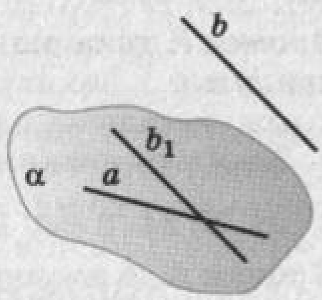


Рис. 6.12

6.19°°. З точки A до площини α проведено похилу AB і перпендикуляр AC. Кут між похилою і площиною α дорівнює 60°, $AB = a$. Укажіть два вирази, за якими можна знайти довжину проекції похилої AB на площину α.

А) $a\sin 60°$; Б) $a\cos 60°$; В) $\dfrac{a}{\sin 60°}$; Г) $\dfrac{a}{\cos 60°}$; Д) $a\sin 30°$.

6.20°°. На рисунку 6.13 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якому проведено переріз ABC_1D_1. Визначте кут нахилу площини перерізу до площини $(ABCD)$ (рис. 6.13).

А) 90°; В) 135°; Д) 150°.

Б) 45°; Г) 30°;

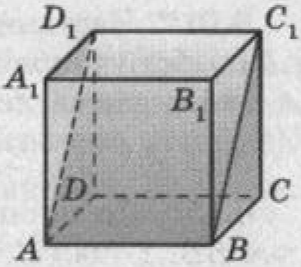


Рис. 6.13

6.21•. З точки до площини проведено похилу завдовжки 12 см. Знайдіть кут, який утворює похила з площиною, якщо проекція похилої дорівнює 6 см.

6.22•. З точки A до площини α проведено перпендикуляр AO завдовжки $5\sqrt{3}$ см і похилу AK. Знайдіть кут, який утворює похила AK з площиною α, якщо її проекція дорівнює 5 см.

6.23•. З точки до площини проведено дві похилі. Одна з них завдовжки $4\sqrt{3}$ см і утворює з площиною кут 60°. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з площиною кут 30°.

6.24•. Доведіть, що рівні похилі, проведені до однієї площини з однієї точки, взятої поза площиною, утворюють з площиною рівні кути.

6.25•. Точка O – центр квадрата. OM – перпендикуляр до площини $(ABCD)$. Доведіть, що похилі MA, MB, MC, MD нахилені до площини $(ABCD)$ під однаковим кутом.

6.26•. Точка O – центр квадрата. OS – перпендикуляр до площини $(ABCD)$. Точки K, L, M, N – середини сторін AB, BC, CD, AD відповідно. Доведіть, що похилі SK, SL, SM, SN нахилені до площини $(ABCD)$ під однаковим кутом.

6.27•. $ABCD$ – прямокутник, MA – перпендикуляр до площини прямокутника, $DC = 3$ см, $BC = 4$ см. Пряма MC нахилена до площини прямокутника під кутом 60°. Знайдіть довжину перпендикуляра MA.

6.28•. Через сторону рівностороннього трикутника проведено площину α так, що проекції двох інших сторін цього трикутника на площину α взаємно перпендикулярні. Доведіть, що ці сторони утворюють з площиною α кути 45°.

6.29•. З точки A до площини проведено дві похилі AB та AC, які дорівнюють $3\sqrt{2}$ см кожна, і перпендикуляр AO. Кут між похилими 60°, а кут між їхніми проекціями – прямий. Знайдіть довжину перпендикуляра AO.

6.30•. З точки до площини проведено дві похилі, кут між якими дорівнює 60°, а кут між їхніми проекціями – 90°. Довжини проекцій цих похилих на площину дорівнюють 3 см кожна. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного від точки до площини.

6.31.** Через сторону BC трикутника ABC проходить площина α, яка утворює з площиною трикутника кут $60°$. З вершини A трикутника до площини α побудовано перпендикуляр AH. Знайдіть довжину перпендикуляра AH, якщо висота трикутника AM дорівнює $6\sqrt{3}$ см.

6.32.** Через гіпотенузу AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC проходить площина α, яка утворює з площиною трикутника кут $30°$. Знайдіть довжину перпендикуляра, опущеного з точки C на площину α, якщо $AB = 20$ см.

6.33.** Сторона AB рівностороннього $\triangle ABC$ належить α, а вершина C – не належить їй. З вершини C проведено перпендикуляр CO до площини α, довжина якого дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Обчисліть кут між площинами (ABC) і α, якщо довжина висоти $\triangle ABC$ дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

6.34.** З вершини B квадрата $ABCD$ до площини α проведено перпендикуляр BO завдовжки $3\sqrt{3}$ см. Обчисліть кут між площинами квадрата $ABCD$ і α, якщо сторона квадрата $AD = 6$ см і належить площині α.

6.35.** Один з катетів рівнобедреного прямокутного трикутника завдовжки 6 см лежить на площині α, а другий – нахилений до неї під кутом $45°$. Знайдіть кут між гіпотенузою і площиною α.

6.36.** У рівнобедреному прямокутному трикутнику ABC катет AC лежить на площині α, а катет BC утворює із цією площиною кут $45°$. Знайдіть довжину перпендикуляра BH, проведеного до площини α, та кут нахилу гіпотенузи до площини α, якщо гіпотенуза дорівнює 30 см.

6.37.** Дві площини перетинаються під кутом $60°$. Кінці відрізка AB, що дорівнює 25 см, лежать на цих площинах. До лінії перетину площин побудовано перпендикуляри $AC = 5$ см і $BD = 8$ см. Знайдіть довжину відрізка CD.

6.38.** Дві площини перетинаються під кутом $30°$. Кінці відрізка AB, що дорівнює 5 см, лежать на цих площинах. До лінії перетину площин побудовано перпендикуляри AC і BD. Знайдіть довжину відрізка BD, якщо $AC = 4\sqrt{3}$ см, $CD = 3$ см.

6.39.** Через сторону рівностороннього трикутника проведено площину α так, що проекції двох інших сторін трикутника на цю площину взаємно перпендикулярні. Доведіть, що ці сторони утворюють з площиною α кути $45°$.

6.40.** З точки B під кутом $45°$ до площини α проведено похилу BA і пряму AC, яка лежить на площині α й утворює кут $45°$ з проекцією похилої AB на площину α. Визначте довжину відрізка BC і його кут нахилу до площини α, якщо $AB = AC = a$.

§ 6.2. Відстані у просторі

Одним з ключових понять геометрії є *довжина відрізка*. Через нього вводиться багато інших понять, пов'язаних з поняттям відстані. Як відомо, ***відстанню між двома точками A і B*** називається довжина відрізка AB (рис. 6.14). Відстань від точки A до прямої l дорівнює довжині перпендикуляра AO, проведеного із цієї точки на дану пряму (рис. 6.15). Оскільки всі інші відрізки AX із кінцями у точці A і довільній точці X прямої, відмінної від O, – похилі, то вони мають довжину більшу за довжину перпендикуляра. Тому кажуть, що відстань від точки до прямої – це довжина найменшого відрізка з усіх можливих, проведених з цієї точки до прямої. Такий відрізок є перпендикуляром до прямої. Опираючись на такі міркування, означимо поняття відстані між деякими іншими фігурами у просторі.

Рис. 6.14

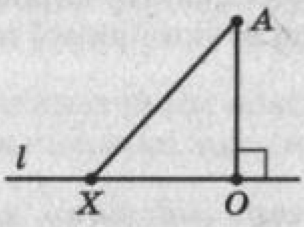


Рис. 6.15

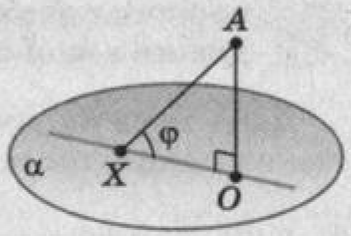


Рис. 6.16

Розглянемо площину α і точку A, що не належить їй (рис. 6.16). Зрозуміло, що за відстань від точки A до площини α, потрібно вибрати довжину перпендикуляра AO, проведеного з цієї точки до площини, оскільки всі інші відрізки AX, де X – довільна точка площини, відмінна від O, будуть похилими і тому матимуть більшу довжину від AO.

Отже, ***відстань від точки до площини*** дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини.

Якщо точка належить площині, то у цьому випадку відстань від неї до площини дорівнює нулю.

Відстань від точки A до відрізка BC (рис. 6.17) визначається за таким алгоритмом: 1) проводимо перпендикуляр AO з точки A на пряму BC; 2) якщо основа O цього перпендикуляра

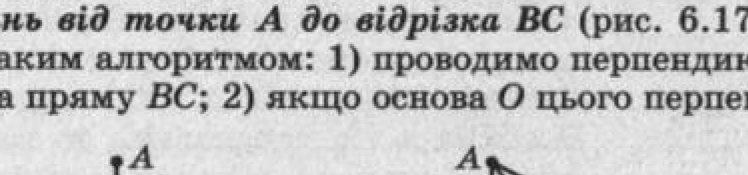


Рис. 6.17

13-Geometrija, 10 kl (Biljanina)

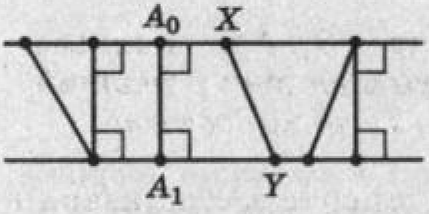


Рис. 6.18

належить даному відрізку BC, то шукана відстань дорівнює довжині відрізка AO (рис. 6.17, *а*); в іншому випадку вона дорівнює довжині відрізка AB чи AC (залежно від того, яка з точок B чи C лежить ближче до точки O) (рис. 6.17, *б*). Аналогічно визначається відстань від точки до променя.

Відстань між двома паралельними прямими дорівнює довжині спільного перпендикуляра цих прямих (рис. 6.18). Це випливає з того, що всі такі перпендикуляри A_0A_1 рівні між собою, а кожний відрізок з кінцями X та Y на даних прямих, який не є їхнім спільним перпендикуляром, має довжину, більшу від довжини спільного перпендикуляра A_0A_1.

Теорема 2 (***про відстань між паралельними прямою і площиною***).

Відстань між паралельними прямою і площиною дорівнює довжині (спільного) перпендикуляра, проведеного з якої-небудь точки прямої на площину.

Дана теорема доводиться міркуваннями, аналогічними вищенаведеним про відстань між паралельними прямими.

Теорема 3 (***про відстань між паралельними площинами***).

Відстань між паралельними площинами дорівнює довжині (спільного) перпендикуляра, проведеного з якої-небудь точки однієї площини на другу.

Доведення. Нехай маємо дві паралельні площини α і β (рис. 6.19). Оскільки пряма, яка перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, перпендикулярна і до другої, то перпендикуляр AA_1, проведений з якої-небудь точки A однієї із цих площин на другу, буде перпендикуляром і до першої, тобто їхнім спільним перпендикуляром. Оскільки будь-які два попарно взяті спільні перпендикуляри AA_1, BB_1 і CC_1 паралельних площин α і β паралельні, то вони рівні між собою як відрізки паралельних прямих між паралельними площинами. Для повного доведення теореми залишається показати, що будь-який відрізок CX з кінцями в даних площинах α і β, який не є їхнім спільним перпендикуляром, біль-

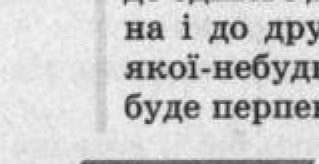


Рис. 6.19

ший від спільного перпендикуляра CC_1. А це випливає з того, що перпендикуляр CC_1 до площини β менший від похилої CX до цієї площини. *Теорему доведено.*

Поняття відстані між точками має широке застосування в найрізноманітніших сферах життя людини – від високої науки до побуту і дозвілля. Використовується воно тоді, коли розмірами реальних об'єктів, відстанню між якими цікавляться, за даних умов можна знехтувати. Так ми кажемо про відстань між зірками, планетами, передавачами і приймачами інформації, населеними пунктами, ядрами атома і електронами на його орбіті тощо.

Відстань між мимобіжними прямими

Спочатку розглянемо означення перпендикуляра, проведеного до двох мимобіжних прямих, і доведемо його існування та єдиність.

Спільним перпендикуляром до двох мимобіжних прямих називається відрізок з кінцями на цих прямих, перпендикулярний до кожної з них.

Теорема 4.
Дві мимобіжні прямі мають спільний перпендикуляр і до того ж тільки один. Він є спільним перпендикуляром до паралельних площин, які проходять через ці прямі.

Доведення. Справді, нехай a і b – дані мимобіжні прямі (рис. 6.20). Проведемо прямі a_1 і b_1, які відповідно паралельні до a і b, так, що пряма a_1 перетинається з прямою b, а пряма b_1 з a. Через прямі a і b_1 та b і a_1, що попарно перетинаються, проводимо площини α і β.

Рис. 6.20

Площини α і β – паралельні. Довільні прямі x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, які перетинають пряму a і перпендикулярні до площини α, лежать в одній площині. Назвемо її γ. Ця площина перетинає площину β по прямій a_2, паралельній a. Нехай точка B – точка перетину прямих a_2, b та якоїсь прямої x, а точка A – точка перетину тієї самої прямої x та a. Тоді пряма AB, перпендикулярна до площини α, перпендикулярна і до площини β, оскільки $\beta \parallel \alpha$. Звідси випливає, що $AB \perp a$ і $AB \perp b$.

Відрізок AB – спільний перпендикуляр до площин α і β, а отже, і до прямих a і b. Доведемо, що він єдиний. Нехай прямі a і b мають інший спільний перпендикуляр CD. Проведемо через точку C пряму b_2, паралельну b. Пряма CD перпендикулярна до прямої b, а отже, і до b_2. Оскільки вона перпендикулярна до прямих a і b_2, що проходять через точку C, то вона перпендикулярна до площини α. Тоді CD паралельна прямій AB. Маємо, що через прямі AB і CD, як через паралельні прямі, можна провести площину, і вона буде містити мимобіжні прямі AC і BD. А це неможливо. Отримали протиріччя. *Теорему доведено.*

Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їхнього спільного перпендикуляра.

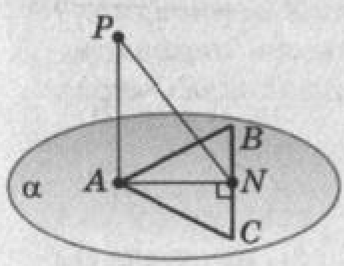


Рис. 6.21

Задача 1.

Відрізок PA перпендикулярний до площини трикутника ABC, сторони AB, BC і AC якого відповідно дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть відстань від точки P до сторони BC, якщо $PA = 16$ см.

Розв'язання

Нехай AN – висота даного гострокутного трикутника ABC (рис. 6.21). Тоді, за теоремою про три перпендикуляри, $PN \perp BC$ і довжина PN буде відстанню від точки P до сторони BC. Визначимо її з прямокутного трикутника PAN (оскільки $PA \perp (ABC)$, то $\angle PAN = 90°$). Для цього попередньо знайдемо AN.

З формули для площі трикутника $AN = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$.

Необхідну площу визначимо за формулою Герона:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84\ (\text{см}^2).$$

Тоді $AN = 12$ см і $PN = \sqrt{PA^2 + AN^2} = 20$ (см).
Відповідь. 20 см.

Задача 2.

Пряма OK перпендикулярна до площини ромба, діагоналі якого перетинаються в точці O. Доведіть, що відстані від точки K до всіх сторін ромба рівні між собою.

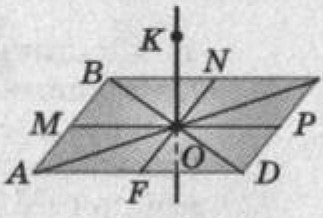


Рис. 6.22

Доведення

Нехай $ABCD$ – ромб і O – точка перетину його діагоналей (рис. 6.22). Тоді O – центр вписаного в ромб кола. Нехай M, N, P, F – точки дотику сторін до кола. Тоді $OM = ON = OF = OP = r$. Оскільки $OP \perp DC$, $OM \perp AB$, $OF \perp AD$, $ON \perp BC$, то за теоремою про три перпендикуляри $KM \perp AB$, $KN \perp BC$, $KP \perp DC$, $KF \perp AD$. Отже, KM, KN, KP, KF – відстані від точки K до сторін ромба. З рівності трикутників KOP, KOF, KOM, KON випливає, що $KM = KF = KN = KP$. Щ. в. д.

Задача 3.

Точка M не лежить у площині прямокутного трикутника ABC ($\angle B = 90°$) і знаходиться на відстанях MK і MD від прямих, що містять катети BA і BC (рис. 6.23). MO – перпендикуляр до площини цього трикутника. Доведіть, що чотирикутник $BKOD$ – прямокутник.

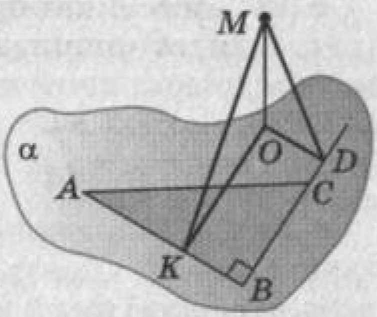


Рис. 6.23

Доведення

Оскільки відрізки MK і MD – відстані від точки M відповідно до прямих AB і BC, то $MK \perp AB$ і $MD \perp BC$. За умовою $MO \perp (ABC)$, тому OK і OD – проекції похилих MK і MD на площину (ABC) і $OK \perp AB$, $OD \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри). Але $AB \perp BC$ за умовою, тому $BKOD$ – прямокутник. Щ. в. д.

Вправи

6.41°. Точка K не належить площині ω, а точки A, B, C, D, M лежать на площині ω (рис. 6.24). Укажіть відрізок, що є відстанню між точками K і C.

А) KA; Б) KC; В) KB; Г) AC; Д) CB.

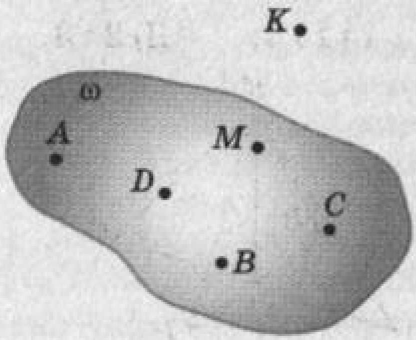


Рис. 6.24

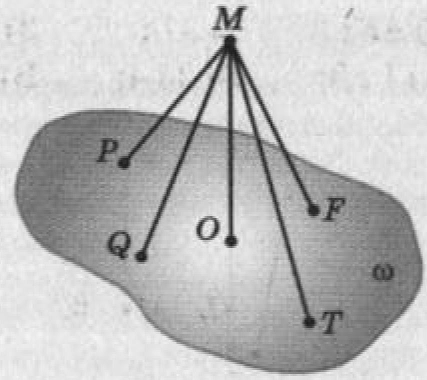


Рис. 6.25

6.42°. З точки M до площини ω проведено перпендикуляр MO (рис. 6.25). Точка $M \notin \omega$, а точки T, P, Q, F належать площині ω. Виберіть відрізок, який виражає відстань від точки M до площини ω.

А) MT; Б) MF; В) MO; Г) MP; Д) MQ.

6.43°. MB – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$ (рис. 6.26). O – центр квадрата, N – середина сторони CD. Укажіть відрізок, який виражає відстань від точки M до площини $(ABCD)$.

А) MO; Б) MA; В) MD; Г) MB; Д) MN.

6.44°. MB – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$ (рис. 6.26). O – центр квадрата, N – середина сторони CD. Укажіть відрізок, який виражає відстань від точки M до сторони квадрата CD.

А) MO; Б) MC; В) MD; Г) MB; Д) MN.

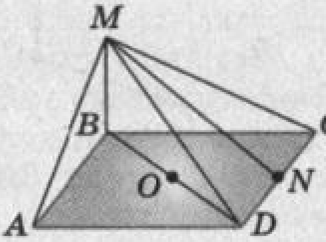


Рис. 6.26

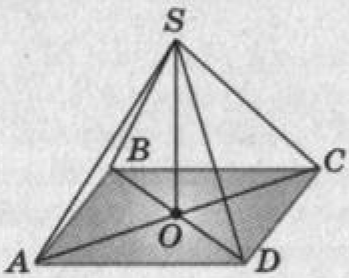


Рис. 6.27

6.45°. Відрізок SO – перпендикуляр до площини ромба $ABCD$ (рис. 6.27). Укажіть відрізок, який виражає відстань від точки S до діагоналі BD.

А) SB; Б) AO; В) SD; Г) CO; Д) SO.

6.46°. Площини α і β паралельні (рис. 6.28). Точки A, B, C належать площині α, а точки K, L, M – площині β. $AL \perp \beta$, $CM \parallel AL$, $BK \nparallel AL$. Укажіть відрізки, які виражають відстань між площинами α і β.

1) AK; 2) AL; 3) BK; 4) CM; 5) CL.

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 1 і 4; Д) 2 і 3.

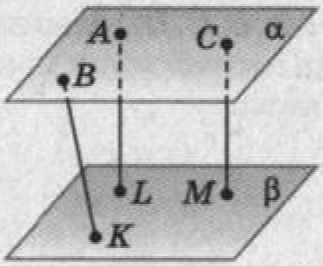


Рис. 6.28

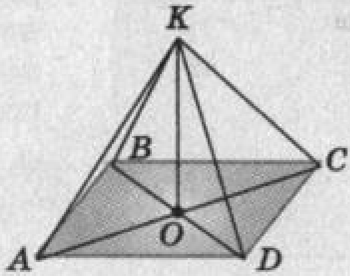


Рис. 6.29

6.47°. Точки A, C, B належать площині α, а точки K, L, M – площині β. $\alpha \parallel \beta$, $BK \perp \beta$, $AL = 4$ см, $CM = 6$ см, $BK = 3$ см, $BM = 5$ см, $AK = 7$ см. Укажіть відстань між площинами α і β.

А) 3 см; Б) 4 см; В) 5 см; Г) 6 см; Д) 7 см.

6.48°. Точка K не лежить на площині прямокутника $ABCD$ (рис. 6.29) і віддалена від кожної його вершини на 10 см. Сторони прямокутника дорівнюють 3 см і 4 см. Укажіть два відрізки, довжина яких дорівнює 10 см.

А) KO; Б) BD; В) BK; Г) AC; Д) KD.

6.49°. Площини, у яких лежать паралелограм $ABCD$ і трапеція $ABKM$, перпендикулярні (рис. 6.30). AB – лінія перетину площин. DR – висота паралелограма. Укажіть відрізок, що є відстанню між прямою CD і площиною $ABKM$.

А) AD; Б) DM; В) CB; Г) DR; Д) DK.

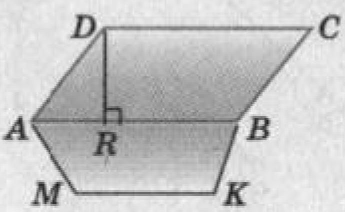


Рис. 6.30

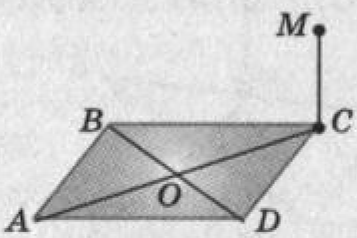


Рис. 6.31

6.50°. Дано квадрат $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O (рис. 6.31). Пряма MC перпендикулярна до площини квадрата. Доберіть до кожної пари мимобіжних прямих відрізок, що виражає відстань між ними.

А) AB і MC;
Б) AD і MC;
В) BD і MC.

1) MO;
2) CO;
3) BC;
4) MA;
5) CD.

А	
Б	
В	

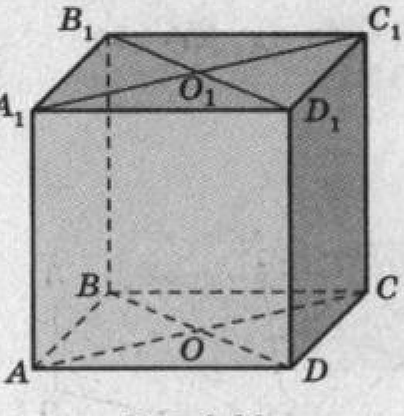


Рис. 6.32

6.51°°. На рисунку 6.32 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ та точки O і O_1 перетину відповідних діагоналей граней $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Ідентифікуйте кожній парі мимобіжних прямих відстань між ними.

А) AD і CC_1; 1) B_1C_1;
Б) A_1B_1 і CC_1; 2) C_1O_1;
В) BD і CC_1; 3) BC;
Г) A_1D_1 і CC_1; 4) CD;
Д) AB і CC_1; 5) C_1D_1;
Е) B_1D_1 і CC_1. 6) OC.

А	
Б	
В	
Г	
Д	
Е	

6.52°°. У прямокутному $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) проведено $MN \parallel AC$ ($M \in AB$, $N \in BC$). Точка $K \notin (ABC)$ і KM – перпендикуляр до площини (ABC). Укажіть відрізок, що є відстанню від точки K до прямої BC (рис. 6.33).

А) KM; Б) KC; В) KN; Г) KB; Д) MN.

6.53°°. Відрізок KM – перпендикуляр до площини трикутника ABC, проведений через точку M – середину гіпотенузи AB (рис. 6.33). Знайдіть відстань від точки K до сторони BC, якщо $AC = 24$ см, $KM = 12$ см.

А) $6\sqrt{5}$ см; Б) $4\sqrt{13}$ см; В) $4\sqrt{10}$ см; Г) $12\sqrt{2}$ см; Д) $24\sqrt{2}$ см.

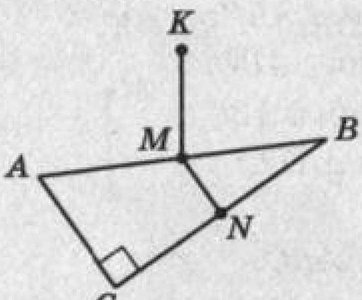


Рис. 6.33

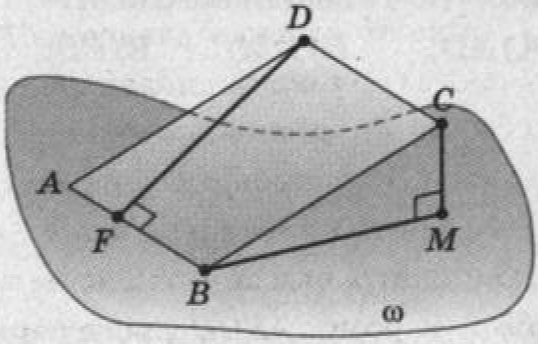


Рис. 6.34

6.54°°. Сторона паралелограма AB належить площині ω, DF – висота паралелограма, CM – перпендикуляр до площини ω (рис. 6.34). Укажіть відрізок, що виражає відстань від прямої CD до площини ω.

А) DA; Б) DF; В) CM; Г) BM; Д) BC.

6.55°°. На рисунку 6.35 зображено коло з центром O, яке вписано в $\triangle ABC$, M, N, K – точки дотику, S – не лежить на площині (ABC). Укажіть трійку відрізків, що є відстанню від точки S до сторін $\triangle ABC$.

А) SA, SB, SC; В) MO, NO, KO; Д) BK, KO, OC.
Б) SM, SN, SK; Г) SO, SA, SM;

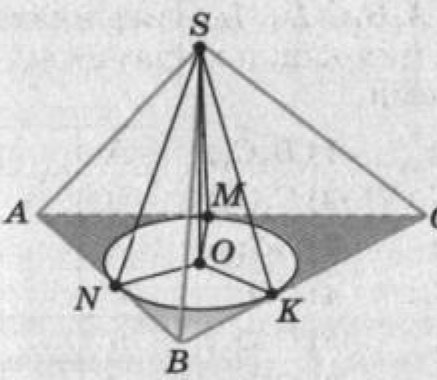


Рис. 6.35

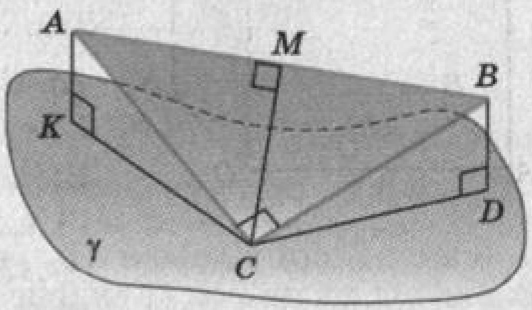


Рис. 6.36

6.56°°. Через вершину C прямокутного $\triangle ABC$ проведено площину γ (рис. 6.36). Гіпотенуза AB паралельна площині γ, $AK \perp \gamma$ і $BD \perp \gamma$, $CM \perp AB$. Укажіть відрізки, що виражають відстань від гіпотенузи AB до площини γ.

1) MC; 2) AK; 3) BC; 4) BD; 5) AC.
А) 1 і 2; Б) 2 і 3; В) 3 і 4; Г) 5 і 4; Д) 2 і 4.

6.57°°. Дано різносторонній трикутник ABC. Точка $M \notin (ABC)$, O – основа перпендикуляра, проведеного з точки M до площини (ABC). $MA = MB = MC = 5$ см. Укажіть три правильні твердження.

А) Точка M – рівновіддалена від сторін $\triangle ABC$;
Б) точка O – рівновіддалена від вершин $\triangle ABC$;
В) точка M – рівновіддалена від вершин $\triangle ABC$;
Г) точка O – рівновіддалена від сторін $\triangle ABC$;
Д) O – центр вписаного кола в $\triangle ABC$;
Е) O – центр описаного кола навколо $\triangle ABC$.

6.58°°. У ромбі $ABCD$ проведено висоти MN і KL, що перетинаються в точці O (рис. 6.37). O – точка перетину діагоналей ромба, F – точка, що не лежить на площині $(ABCD)$, FO – перпендикуляр до площини $(ABCD)$.

Укажіть три правильні твердження.

А) Точка F – рівновіддалена від сторін ромба;
Б) точка O – рівновіддалена від вершин ромба;
В) O – центр описаного кола навколо ромба;
Г) O – центр вписаного кола в ромб;
Д) точка F – рівновіддалена від вершин ромба;
Е) точка O – рівновіддалена від сторін ромба.

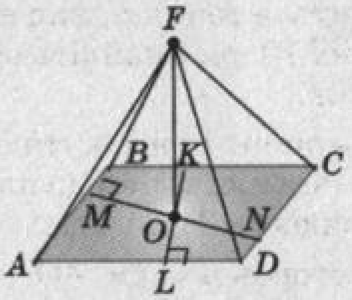


Рис. 6.37

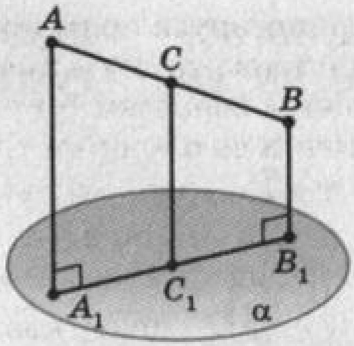


Рис. 6.38

6.59°°. Кінці відрізка AB, що не перетинає площину α, віддалені від неї на a см і b см (рис. 6.38). Точка C – середина відрізка AB, віддалена від площини α на x см. Ідентифікуйте кожній умові (А–Д) правильну відповідь (1–5).

А) $a = 5$ см, $b = 7$ см; 1) $x = 7$ см;
Б) $a = 3$ см, $b = 5$ см; 2) $x = 8$ см;
В) $a = 6$ см, $b = 8$ см; 3) $x = 5$ см;
Г) $a = 7$ см, $b = 9$ см; 4) $x = 6$ см;
Д) $a = 4$ см, $b = 6$ см. 5) $x = 4$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

6.60°°. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 10 см і 18 см. Через середину гіпотенузи – точку O – проведено перпендикуляр OM до площини трикутника. Визначте відстань від точки M до кожного катета, якщо $OM = 12$ см.

А) 13 см і 15 см; В) 12 см і 15 см; Д) 9 см і 12 см.
Б) 12 см і 13 см; Г) 5 см і 12 см;

6.61•. Відрізок KM не перетинає площину α. Точка K віддалена від неї на 1,8 см, а точка F – середина відрізка KM – на 4 см. Знайдіть відстань від точки M до площини α.

6.62•. Через вершину B квадрата $ABCD$ зі стороною 8 см проведено перпендикуляр SB до площини квадрата. Знайдіть відстань від точки S до діагоналей квадрата, якщо $SB = 7$ см.

6.63•. Відстань від точки M до сторін квадрата дорівнює 13 см. Знайдіть відстань від точки M до площини квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 10 см.

6.64•. Дано рівнобедрений прямокутний $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Через вершину C проведено перпендикуляр CK до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки K до гіпотенузи AB, якщо $AB = 36$ см, $CK = 24$ см.

6.65•. Відстань від точки M до всіх вершин квадрата дорівнює 5 см. Знайдіть відстань від точки M до площини квадрата, якщо діагональ квадрата дорівнює 5 см.

6.66*. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см. Поза площиною трикутника знаходиться точка S, яка віддалена від кожної вершини трикутника на 10 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини трикутника.

6.67*. Точка віддалена від усіх вершин прямокутного трикутника на 6,5 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини трикутника, якщо його катети дорівнюють 3 см і 4 см.

6.68*. Точка O – центр квадрата зі стороною 4 см. AO – пряма, перпендикулярна до площини квадрата; відрізок $AO = 2\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань від точки A до вершин квадрата.

6.69*. Сторони трикутника ABC дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. З вершини більшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр AD, який дорівнює 15 см. Знайдіть відстань від точки D до сторони BC трикутника.

6.70*. Сторони трикутника ABC дорівнюють 11 см, 13 см і 20 см. Через вершину найменшого кута до площини трикутника проведено перпендикуляр BM. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника, якщо відстань від точки M до найменшої сторони трикутника дорівнює 15 см.

6.71.** Дві площини взаємно перпендикулярні. Точка A віддалена від них на 20 см і 21 см. Знайдіть відстань від точки A до лінії перетину цих площин.

6.72.** Дві площини α і β взаємно перпендикулярні. Точка M віддалена від площини α на 12 см, а від прямої перетину площин – на 37 см. Знайдіть відстань від точки M до площини β.

6.73.** Точка M знаходиться поза площиною квадрата $ABCD$ на однаковій відстані від усіх вершин. Визначте взаємне розміщення площин (AMC) і (BDM).

6.74.** З точки O перетину діагоналей прямокутника до площини цього прямокутника проведено перпендикуляр. Доведіть, що довільна точка цього перпендикуляра рівновіддалена від вершин прямокутника.

6.75.** Доведіть, що відстань від середини відрізка до площини, яка його не перетинає, дорівнює півсумі відстаней від кінців відрізка до цієї площини.

6.76.** Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см. Поза площиною трикутника дано точку, яка знаходиться на відстані 10 см від кожної його вершини. Знайдіть відстань від цієї точки до площини трикутника.

6.77.** Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Точка M знаходиться поза площиною ромба і віддалена від усіх сторін ромба на 8 см. Знайдіть відстань від точки M до площини ромба.

6.78••. Рівнобічна трапеція, периметр якої дорівнює 48 см, а гострий кут – 60°, лежить у площині α. Точка, рівновіддалена від усіх сторін трапеції, знаходиться на відстані 3 см від площини α. Знайдіть відстань від цієї точки до сторін трапеції.

6.79••. Дано трикутник зі сторонами 26 см, 28 см і 30 см. Точка M віддалена від усіх сторін трикутника на 17 см. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

6.80••. Периметр правильного трикутника дорівнює $36\sqrt{3}$ см, а відстані від деякої точки до кожної зі сторін трикутника – 10 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини трикутника.

6.81••. Площа рівностороннього трикутника дорівнює $27\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть відстань між площиною трикутника і точкою, яка віддалена від кожної з його вершин на 10 см.

6.82••. З точки до площини правильного трикутника зі стороною $8\sqrt{3}$ см проведено перпендикуляр завдовжки 5 см. Основою перпендикуляра є одна з вершин трикутника. Знайдіть відстань від точки до сторони трикутника, яка не містить основи перпендикуляра.

6.83••. З точки до площини прямокутника зі сторонами 9 см і 12 см проведено перпендикуляр, основою якого є одна з вершин прямокутника. Відстань від протилежної вершини прямокутника до цієї точки дорівнює 39 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини прямокутника.

6.84••. Дано дві мимобіжні прямі a і b. Пряма a лежить у площині α, а пряма b перпендикулярна до площини α. Точка $K \in b$ і віддалена від прямої a на 13 см. Знайдіть відстань від точки K до площини α, якщо відстань між a і b дорівнює 5 см.

6.85••. Дано дві мимобіжні прямі m і n. Пряма n лежить у площині α, а пряма m перпендикулярна до площини α. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими, якщо точка A прямої m віддалена від площини α на 6 см, а від прямої n – на 10 см.

§ 6.3. Ортогональне проекціювання

Паралельне проекціювання, напрям якого перпендикулярний до площини проекції, називається ***ортогональним проекціюванням***. Проекція фігури, що утворюється при ортогональному проекціюванні, називається *ортогональною проекцією*, або просто *проекцією* цієї фігури.

Оскільки ортогональне проекціювання є окремим видом паралельного проекціювання, то для нього виконуються всі властивості останнього. Зокрема, ортогональною проекцією прямої a, що не перпендикулярна до площини проекції, є деяка

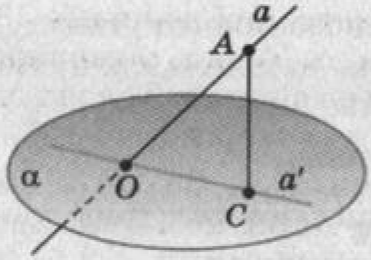


Рис. 6.39

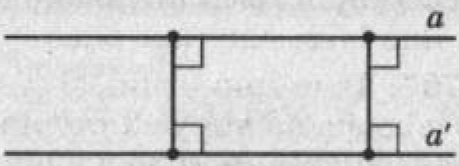


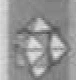
Рис. 6.40

пряма a' (рис. 6.39), а прямої a, паралельної площині проекції α, – пряма a', яка паралельна прямій a (рис. 6.40).

Зауважимо, що прямі, перпендикулярні до однієї з паралельних площин, перпендикулярні і до решти, тому ортогональне проекціювання на одну з таких площин буде ортогональним і на решту площин. Очевидно, що ортогональні проекції фігури на паралельні площини рівні між собою.

Ортогональне проекціювання також має лише йому притаманні властивості. Одну з них виражає теорема про площу ортогональної проекції многокутника.

Площа ортогональної проекції



Теорема 5.
Площа ортогональної проекції довільного многокутника на площину дорівнює добутку площі самого многокутника на косинус кута між площиною многокутника і площиною проекції.

Доведення. Як приклад многокутника візьмемо трикутник ABC (рис. 6.41). Проекцією $\triangle ABC$ на площину α є $\triangle AB_1C$. Проведемо висоту BK трикутника ABC. За теоремою про три перпендикуляри B_1K – висота трикутника AB_1C. Кут BKB_1 – кут між площиною трикутника ABC і площиною проекції. Нехай $\angle BKB_1 = \varphi$. Тоді

Рис. 6.41

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK; \; S_{\triangle AB_1C} = \frac{1}{2}AC \cdot B_1K.$$

Але, враховуючи, що трикутник KBB_1 прямокутний ($\angle B_1 = 90°$), маємо: $B_1K = BK \cdot \cos\varphi$. Тому

$$S_{\triangle AB_1C} = \frac{1}{2}AC \cdot B_1K = \frac{1}{2}AC \cdot BK \cdot \cos\varphi = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi.$$

Отже, $S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi$. *Теорему доведено.*

Щоб довести теорему для довільного многокутника, його розбивають на трикутники. Тоді для кожного трикутника і його проекції можна записати рівність

$$S_{проекції\ \Delta i} = S_{\Delta i} \cdot \cos\varphi,$$

де $i = 1, ..., k$, оскільки кут між площинами цих трикутників і площиною їхніх проекцій буде один і той самий. Усі ці рівності додамо почленно:

$$S_{проекції\ \Delta 1} + S_{проекції\ \Delta 2} + ... + S_{проекції\ \Delta k} = S_{проекції\ многокутника};$$

$$S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2} + ... + S_{\Delta k} = S_{многокутника}.$$

Отримаємо в лівій частині рівності площу проекції многокутника, а в правій – площу самого многокутника, помножену на косинус кута між їхніми площинами. Звідси

$$S_{проекції\ многокутника} = S_{многокутника} \cdot \cos\varphi.$$

Тобто і для цього випадку теорема істинна.

Задача.

Ортогональною проекцією трикутника є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Площина трикутника утворює з площиною проекції кут 60°. Обчисліть площу даного трикутника.

Розв'язання

Скористаємося рисунком 6.41. Відомо, що площу проекції триктуника обчислюють за формулою:

$$S_{проекції\ трикутника} = S_{трикутника} \cdot \cos\varphi,$$

де φ – кут між площиною трикутника і площиною проекції.

За формулою Герона знайдемо площу ΔAB_1C:

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де p – півпериметр трикутника, a, b, c – його сторони.

$S_{\Delta AB_1C} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} =$
$= 84\ (см^2)$.

Тоді $S_{\Delta ABC} = \dfrac{S_{\Delta AB_1C}}{\cos\varphi} = \dfrac{84}{\cos 60°} = 84 : \dfrac{1}{2} = 168\ (см^2)$.

Відповідь: 168 см^2.

Вправи

6.86°. Ортогональне проекціювання на площину ω задається прямою проекціювання, яка утворює з площиною кут α. Укажіть величину кута α.

А) 0°; Б) 30°; В) 45°; Г) 60°; Д) 90°.

6.87°. Кут ABC – лінійний, що вимірює двогранний кут з ребром a. Виберіть взаємне розміщення прямої a і площини (ABC).

А) Пряма не перетинає площину;

Б) пряма перетинає площину під гострим кутом;

В) пряма перетинає площину під прямим кутом.

6.88°. Дано дві паралельні площини α і β. Відрізки AB і CD належать площині α, $AB \parallel CD$. Відрізки A_1B_1 і C_1D_1 – їхні ортогональні проекції на площину β (рис. 6.42). Укажіть взаємне розміщення відрізків A_1B_1 і C_1D_1.

А) $A_1B_1 \cap C_1D_1$; Б) $A_1B_1 \perp C_1D_1$; В) $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

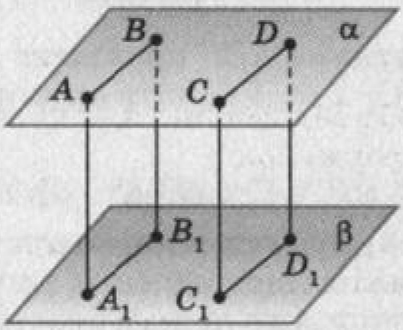


Рис. 6.42

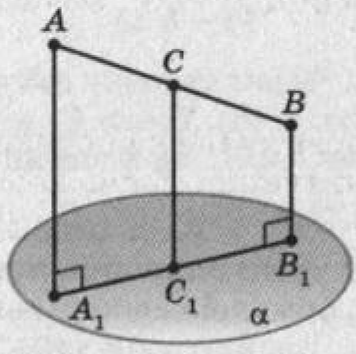


Рис. 6.43

6.89°. A_1B_1 – ортогональна проекція відрізка AB на площину α. $AB = 20$ см, $AC = 10$ см, $A_1B_1 = 12$ см. Знайдіть довжину відрізка B_1C_1 (рис. 6.43).

А) 9 см; Б) 6 см; В) 4 см; Г) 10 см; Д) 8 см.

6.90°. Виберіть дві фігури, які можуть бути ортогональною проекцією трапеції.

А) Квадрат; В) прямокутник; Д) трапеція.

Б) відрізок; Г) паралелограм;

6.91°. Ортогональною проекцією відрізка AB завдовжки 5 см на площину ω є відрізок AC завдовжки 3 см. Знайдіть косинус кута нахилу α відрізка AB до площини ω (рис. 6.44).

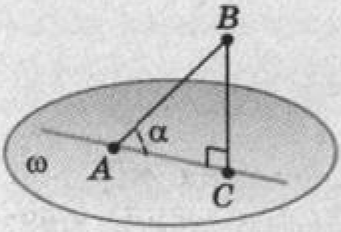


Рис. 6.44

А) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; В) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; Д) $\cos\alpha = \frac{4}{3}$.

Б) $\cos\alpha = 1$; Г) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$;

6.92°. Знайдіть кут між площинами (ABC) і (ABD), якщо відстань від точки C до прямої AB удвічі більша, ніж відстань від точки C до площини (ABD) (рис. 6.45).

А) 90°; Б) 60°; В) 30°; Г) 45°; Д) 75°.

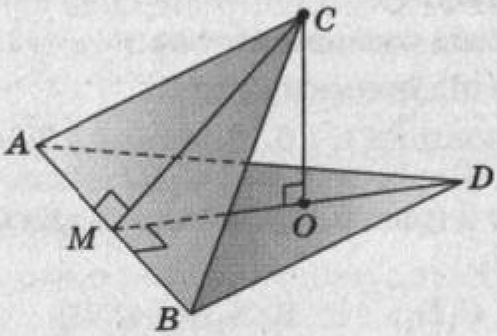


Рис. 6.45

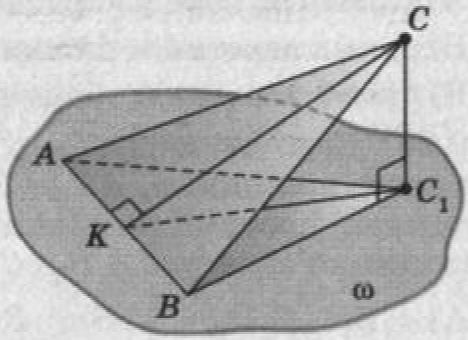


Рис. 6.46

6.93°. Через сторону AB трикутника ABC проведено площину ω (рис. 6.46). Точка $C_1 \in \omega$, $CC_1 \perp \omega$. Укажіть ортогональну проекцію $\triangle ABC$ на площину ω.

А) $\triangle CC_1A$; Б) $\triangle CC_1B$; В) $\triangle C_1KB$; Г) $\triangle AC_1K$; Д) $\triangle AC_1B$.

6.94°. Дано дві площини α і β, які перетинаються під кутом 30°. Точка A належить площині α і віддалена від площини β на 12 см. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину цих площин.

А) 12 см; Б) 6 см; В) 24 см; Г) 18 см; Д) 30 см.

6.95°°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.47). Укажіть ортогональну проекцію $\triangle C_1BD$ на кожну з площин, заданих умовами (А–Д).

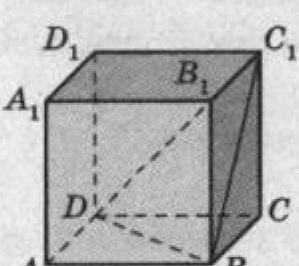


Рис. 6.47

А) ($ABCD$); 1) $\triangle D_1AD$;

Б) (CDD_1C_1); 2) $\triangle CBD$;

В) ($A_1B_1C_1D_1$); 3) $\triangle B_1BA$;

Г) (AA_1D_1D); 4) $\triangle C_1B_1D_1$;

Д) (AA_1B_1B). 5) $\triangle C_1DC$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

6.96°°. Точки A, B і C лежать на одній прямій. $AB = 2$ см, $BC = 5$ см. Точки A_1, B_1 і C_1 –

їхні ортогональні проекції на площину α. Знайдіть відношення відрізків A_1B_1 і B_1C_1.

А) 2 : 5; Б) 3 : 5; В) 2 : 7; Г) 3 : 7; Д) 5 : 7.

6.97°°. Площа $\triangle ABC$ дорівнює 18 см^2, $KC \perp (ABC)$. Знайдіть площу $\triangle ABK$, якщо кут між площинами (ABK) і (ABC) дорівнює α (рис. 6.48).

А) $\alpha = 30°$; 1) $S_{\triangle ABK} = 36$ см^2;

Б) $\alpha = 45°$; 2) $S_{\triangle ABK} = 18\sqrt{2}$ см^2;

В) $\alpha = 60°$. 3) $S_{\triangle ABK} = 36\sqrt{3}$ см^2;

4) $S_{\triangle ABK} = 12\sqrt{3}$ см^2;

5) $S_{\triangle ABK} = 12\sqrt{2}$ см^2.

А	
Б	
В	

6.98°°. Трикутник ACB є ортогональною проекцією трикутника AKB на площину (ABC). Площа $\triangle ABC$ дорівнює S_0 см^2, а площа $\triangle AKB$ – S см^2. Ідентифікуйте кожному заданню площ S_0 і S відповідне значення $\cos\alpha$, де α – кут між площинами (ABC) і (AKB).

А) $S_0 = 8$ см^2, $S = 10$ см^2; 1) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$;

Б) $S_0 = 5$ см^2, $S = 15$ см^2; 2) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;

В) $S_0 = 9$ см^2, $S = 21$ см^2; 3) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$;

Г) $S_0 = 6$ см^2, $S = 12$ см^2; 4) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$;

Д) $S_0 = 12$ см^2, $S = 18$ см^2. 5) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

6.99°°. До площини квадрата $ABCD$ через точку A проведено перпендикуляр AK (рис. 6.49). Знайдіть площу $\triangle KDC$, якщо сторона квадрата дорівнює 8 см, а $\angle KDA = 45°$.

А) $8\sqrt{2}$ см^2; В) $32\sqrt{2}$ см^2; Д) $128\sqrt{2}$ см^2.

Б) $16\sqrt{2}$ см^2; Г) $64\sqrt{2}$ см^2;

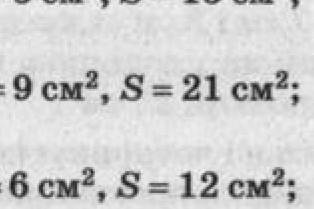


Рис. 6.48

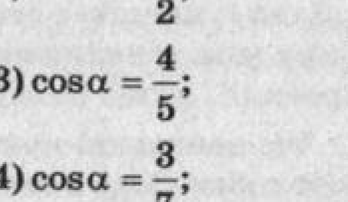


Рис. 6.49

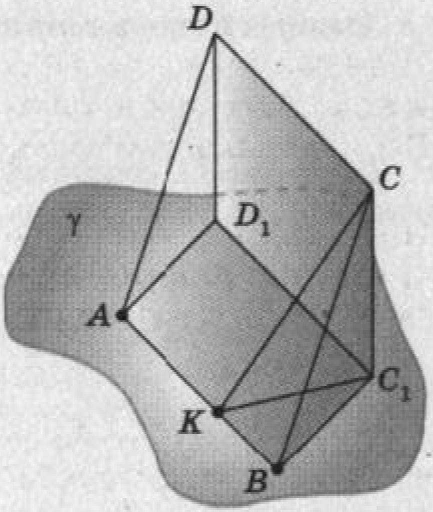


Рис. 6.50

6.100°°. Ортогональною проекцією паралелограма $ABCD$ на площину γ є чотирикутник ABC_1D_1. $CK \perp AB$, $CK = 12$ см, $AB = 15$ см, $\angle CKC_1 = 60°$. Знайдіть площу паралелограма ABC_1D_1 (рис. 6.50).

А) $180\sqrt{2}$ см²; Б) $180\sqrt{3}$ см²; В) 90 см²; Г) 45 см²; Д) 30 см².

6.101°. Кут між площинами рівносторонніх трикутників ABC і ABD дорівнює 60°. Знайдіть відстань CD, якщо $AB = 4\sqrt{3}$ см.

6.102°. З точок A і B, які лежать у двох перпендикулярних площинах, опущено перпендикуляри AC і BD на пряму перетину площин. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $AC = 3$ см, $BD = 4$ см, $AB = 13$ см.

6.103°. Дано паралелограм зі сторонами 6 см і 8 см та кутом між ними 60°. Знайдіть площу його ортогональної проекції на площину, нахилену до площини паралелограма під кутом 30°.

6.104°. Дано трапецію з основами 7 см і 9 см та висотою 5 см. Знайдіть кут між площиною трапеції та площиною її ортогональної проекції, якщо площа цієї проекції 20 см².

6.105°. Усі двогранні кути при основі чотирикутної піраміди рівні між собою. Яка з точок є основою висоти піраміди?

6.106°. Одна з бічних граней трикутної піраміди перпендикулярна до основи, а двогранні кути, утворені основою з двома іншими бічними гранями, рівні між собою. Яка з точок є основою висоти піраміди?

6.107°. Через кінець A відрізка AB проведено площину α. Точка C ділить відрізок AB у відношенні 3 : 5, починаючи від точки A. Обчисліть проекцію відрізка AC на площину α, якщо проекція відрізка AB на цю площину дорівнює 48 см.

6.108°°. Ортогональною проекцією рівнобічної трапеції з висотою 12 см і основами 3 см та 9 см на площину, паралельну основам трапеції, є чотирикутник, у який можна вписати коло. Визначте кут між площиною трапеції і площиною проекції.

6.109°°. Пряма AB паралельна площині α; пряма CD перетинає AB під кутом 45° і утворює з площиною α кут 30°. Доведіть, що площина, яка проходить через прямі AB і CD, утворює з площиною α кут 45°.

6.110.** Ортогональною проекцією рівнобічної трапеції з основами 3 см і 9 см на площину, паралельну основі трапеції, є чотирикутник, у який можна вписати коло. Кут між площиною трапеції і площиною проекції 30°. Визначте площу фігури, що проекціюється.

6.111.** Рівнобедрені трикутники ABC і ABD зі спільною основою AB лежать у різних площинах, кут між якими дорівнює α. $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AD = 37$ см, $CD = 35$ см. Знайдіть кут α та площу ортогональної проекції трикутника ABC на площину (ABD).

6.112.** Рівнобедрені трикутники ABC і ABD зі спільною основою AB лежать у різних площинах, кут між якими дорівнює α. $AB = 32$ см, $AC = 65$ см, $AD = 20$ см, $CD = 63$ см. Знайдіть кут α та площу ортогональної проекції трикутника ABC на площину (ABD).

6.113.** Рівнобедрені трикутники ABC і ABD зі спільною основою AB лежать у різних площинах, кут між якими дорівнює α. $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AD = 37$ см, $CD = 35$ см. Знайдіть кут α та площу ортогональної проекції трикутника ABD на площину трикутника ABC.

6.114.** Рівнобедрені трикутники ABC і ABD зі спільною основою AB лежать у різних площинах, кут між якими дорівнює α. $AB = 32$ см, $AC = 65$ см, $AD = 20$ см, $CD = 63$ см. Знайдіть кут α та площу ортогональної проекції трикутника ABD на площину трикутника ABC.

6.1. Які треба зробити виміри, щоб визначити:
1) висоту башти, до основи якої неможливо підійти;
2) відстань до будинку відомої висоти, якщо до нього неможливо підійти?

6.2. Чому тіні зникають опівдні?

6.3. Як виміряти висоту дерева, не підіймаючись до його верхівки?

Михайло Васильович Остроградський (1801–1862)

Математика – найвища філософська наука, наука справжніх поетів.

М. В. Остроградський

Народився М. Остроградський 24 вересня 1801 р. в селі Пашенна (нині Пашенівка) на Полтавщині в сім'ї поміщика середньої руки. М. Остроградський навчався у Харківському університеті, спочатку

на правах вільного слухача, а у вересні 1817 р. був зарахований студентом фізико-математичного факультету. Однак навчався недовго, залишив його і переїхав у Париж.

У Парижі Остроградський старанно відвідував лекції в Сорбонні та Колеж де Франс і своїм математичним хистом невдовзі привернув увагу відомих французьких математиків – Лапласа, Коші, Фур'є, Ампера, Пуассона, Нав'є та ін. Повернувся у Росію (1828 р.) вже не як початківець. У грудні 1828 р. Петербурзька академія наук обрала Остроградського ад'юнктом прикладної математики, у 1830 р. йому надали звання екстраординарного академіка, а через рік ординарного.

Остроградський увійшов в історію не лише як видатний учений. Він був також і великий педагог, чия діяльність мала вирішальне значення для підвищення рівня і ролі науки, і в першу чергу, математики, механіки та інженерії, у тодішній Російській імперії. Учений був активним пропагандистом фізико-математичних досягнень, творцем багатьох підручників з математики й механіки, за якими вчилися покоління науковців та інженерів.

Наша рідна Україна дала світові великого науковця Михайла Васильовича Остроградського – першого вітчизняного вченого, який вийшов на рівень найвидатніших математиків XIX ст. і в епоху бурхливого розвитку науки разом зі славетною когортою європейських учених творив основи сучасної математики, механіки і фізики.

Давид Гільберт (1862–1943)

Математичний аналіз можна назвати єдиною симфонією нескінченності.

Д. Гільберт

Гільберт поєднував у собі найкращі традиції видатних геніїв минулого. Надзвичайно гостре абстрактне мислення поєднувалося в нього з умінням не відриватися від конкретного фізичного змісту проблеми. Німецький математик Давид Гільберт народився поблизу Кенігсберга в сім'ї місцевого судді. Усе його творче життя пов'язане з Геттінгеном, який у той час був загальновизнаним центром світової математичної думки.

У 1900 р. на Міжнародному математичному конгресі в Парижі Гільберт сформулював 23 найважливіші математичні проблеми, які були свого роду заповітом математиків минулого століття математикам наступного століття. Цими проблемами й досі займаються вчені всього світу, а хто розв'язує хоча б одну з них, одразу завойовує світове визнання. Ім'я Гільберта є в усіх розділах сучасної математики. Простір Гільберта, система аксіом Гільберта, теорема Гільберта про базис, проблеми Гільберта – ці поняття назавжди увійшли в науку і відомі тепер кожній людині, що має математичну освіту. Гільберта завжди вирізняла оригінальність суджень. «Іноді трапляється, – казав він, – що світогляд людини стає дедалі вужчим і вужчим, прямуючи до однієї точки. Саме вона і стає його точкою зору». На запитання, що його спонукало займатися фізикою, Гільберт дотепно відповів: «Фізика занадто складна для фізиків, щоб вони нею займалися». Один з учнів Гільберта, полишивши заняття математикою, почав писати романи. «Чому він почав займатися цим? – дивувалися всі навколо. – Як може колишній математик писати романи?». «Але це ж зовсім просто, – відповідав Гільберт. – Для математики в нього не вистачало фантазії, у той час як її цілком вистачало для написання романів».

Сучасники Гільберта ще за життя визнавали надзвичайний талант ученого. «У моїх спогадах Гільберт залишився великим генієм, якого я коли-небудь бачив» (М. Лауе). «Давид Гільберт був одним з дійсно великих математиків свого часу. Його праці і надихаюча особистість ученого зробили значний вплив на розвиток математичних наук, навіть до теперішнього часу» (Р. Курант).

Запитання для самоконтролю

1. Як знайти кут між похилою і площиною, до якої вона проведена?
2. Чи може кут між прямою і площиною бути тупим?
3. Як знайти кут між двома площинами, які перетинаються?
4. Чи може кут між площинами бути тупим?
5. Як знайти відстань від точки до площини?
6. Як знайти відстань між двома паралельними прямими?
7. Як знайти відстань між прямою і площиною, які паралельні?
8. Як знайти відстань між двома паралельними площинами?
9. Як знайти відстань між мимобіжними прямими?
10. Яку фігуру утворюють основи всіх можливих похилих, проведених до площини з однієї точки під однаковими кутами?

11. Чи можуть дві похилі, проведені з однієї точки до площини, що мають різну довжину, бути нахиленими до цієї площини під однаковим кутом?

12. Як порівняти довжини ребер тетраедра, якщо вони утворюють рівні кути з площиною основи?

13. Чи може двогранний кут бути тупим?

14. Яку фігуру утворюють точки, рівновіддалені від сторін трикутника?

15. Що є геометричним місцем точок, рівновіддалених від вершин прямокутника?

16. Чи може відстань від точки до площини бути довшою за довільну відстань від цієї точки до прямої, що належить цій площині?

17. Чи може перерізом куба бути прямокутний трикутник?

18. Чи може перерізом куба бути тупокутний трикутник?

19. Чи можна провести одну пряму, яка утворювала б прямий кут з кожною стороною трикутника; квадрата; прямокутника?

20. Як знайти відстань від відрізка до площини, якщо він не знаходиться на прямій, що паралельна цій площині?

21. Чи можна стверджувати, що будь-яка точка прямої, яка проходить через середину відрізка, рівновіддалена від кінців цього відрізка?

22. Чи можна стверджувати, що будь-яка точка площини, яка проходить через середину відрізка, рівновіддалена від кінців цього відрізка?

23. Чи обов'язково три точки, які знаходяться на однаковій відстані від площини, належать площині, яка паралельна даній?

24. Чи може ортогональна проекція відрізка дорівнювати довжині цього відрізка?

25. Чи може ортогональна проекція відрізка бути більшою, ніж довжина відрізка?

26. Чи можуть ортогональні проекції прямих збігатися?

27. Чи може ортогональна проекція куба бути квадратом?

28. Як побудувати ортогональну проекцію геометричної фігури?

29. Який зв'язок між площею многокутника і площею його ортогональної проекції?

30. Чи може площа ортогональної проекції многокутника дорівнювати площі цього многокутника?

Тест для самоконтролю

Частина 1

Завдання 1–16 мають варіанти відповідей, з яких правильна тільки ОДНА або конкретна кількість. Виберіть правильну відповідь.

1°. Укажіть довжину сторони AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо $AB = 10$ см, $\angle B = 45°$.

А) 5 см; Б) 2,5 см; В) $2\sqrt{10}$ см; Г) $5\sqrt{3}$ см; Д) $5\sqrt{2}$ см.

2°. Через сторону AK паралелограма $AKLP$ проведено площину δ (рис. 6.51). PB – перпендикуляр до площини δ. Виберіть кут між прямою AP і площиною δ.

А) $\angle APB$; В) $\angle APK$; Д) $\angle PAB$.
Б) $\angle APL$; Г) $\angle PLK$;

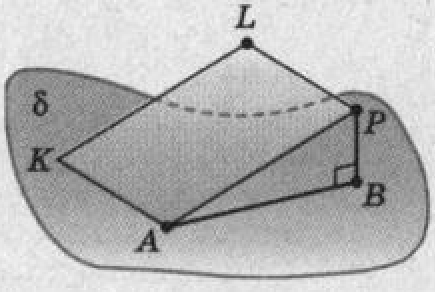


Рис. 6.51

3°. З точки M до площини α під кутом 45° проведено похилу MA і перпендикуляр MB. Знайдіть довжину похилої MA, якщо довжина її проекції на площину α дорівнює $3\sqrt{2}$ см.

А) 5 см; Б) 9 см; В) 6 см; Г) 18 см; Д) 12 см.

4°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.52). Укажіть величину кута між прямими AB і D_1C.

А) 0°; Б) 30°; В) 45°; Г) 60°; Д) 90°.

5°. Трикутник MNA є ортогональною проекцією трикутника MNB на площину (MNA) (рис. 6.53). Укажіть правильні твердження.

1) $MB\widehat{\ }(MNA) = \angle BMA$;
2) $MB\widehat{\ }(MNA) = \angle BMN$;
3) $(MNB)\widehat{\ }(MNA) = \angle BMA$;
4) $(MNB)\widehat{\ }(MNA) = \angle BNA$;
5) $BN\widehat{\ }(MNA) = \angle BNM$;
6) $BN\widehat{\ }(MNA) = \angle BNA$.

А) 1, 3 і 5; Б) 2, 4 і 6; В) 1 і 5; Г) 2 і 6; Д) 1 і 6.

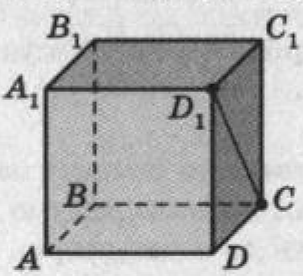


Рис. 6.52

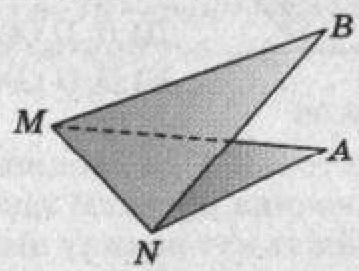


Рис. 6.53

6°. Точка M віддалена від кожної вершини правильного трикутника ABC зі стороною 3 см на 2 см. Визначте відстань від точки M до площини (ABC).

А) 1 см; Б) 2 см; В) $\sqrt{2}$ см; Г) $\sqrt{3}$ см; Д) 0,5 см.

7°. Точки A, B, C лежать на прямій, яка перпендикулярна до площини γ (рис. 6.54). Точки B, F, M належать площині γ. Укажіть кути, градусна міра яких 90°.

1) $\angle ABF$;	3) $\angle AFB$;	5) $\angle ABM$;	7) $\angle MCB$;
2) $\angle BAM$;	4) $\angle CBF$;	6) $\angle BFC$;	8) $\angle CBM$.

А) 1, 2, 5 і 7; В) 2, 4, 6 і 8; Д) 3, 4, 5 і 6.
Б) 1, 4, 5 і 8; Г) 2, 5, 7 і 8;

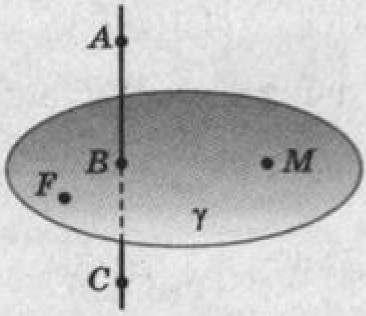


Рис. 6.54

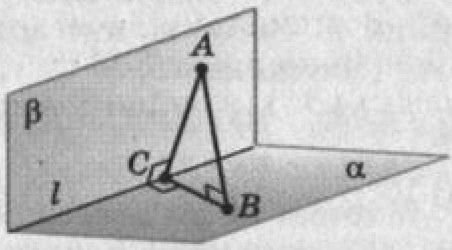


Рис. 6.55

8°. Дві площини α і β перетинаються по прямій l під кутом 45° (рис. 6.55). Точка A належить площині β і знаходиться на відстані 6 см від площини α. Знайдіть відстань від точки A до прямої l.

А) 6 см; Б) $3\sqrt{2}$ см; В) $2\sqrt{3}$ см; Г) $6\sqrt{2}$ см; Д) 8 см.

9°°. На рисунку 6.56 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якому проведено діагональ B_1D. Виконайте ортогональне проекціювання цього відрізка на кожну з граней куба і поставте у відповідність кут між прямою B_1D та відповідною площиною.

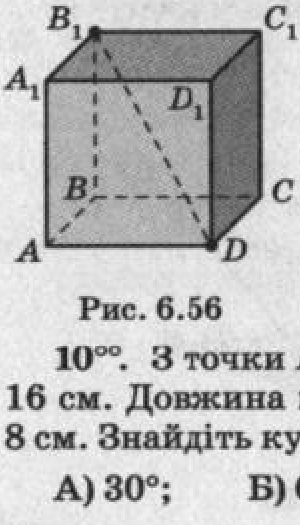


Рис. 6.56

А) $B_1D\widehat{\ }(ABC)$; 1) $\angle DB_1C$;
Б) $B_1D\widehat{\ }(B_1C_1D_1)$; 2) $\angle B_1DC_1$;
В) $B_1D\widehat{\ }(BB_1C_1)$; 3) $\angle B_1DB$;
Г) $B_1D\widehat{\ }(AA_1D_1)$; 4) $\angle AB_1D$;
Д) $B_1D\widehat{\ }(ABB_1)$; 5) $\angle D_1B_1D$;
Е) $B_1D\widehat{\ }(DCC_1)$. 6) $\angle A_1DB_1$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	
Е	

10°°. З точки K до площини ω проведено похилу завдовжки 16 см. Довжина проекції цієї похилої на площину ω дорівнює 8 см. Знайдіть кут нахилу цієї похилої до площини ω.

А) 30°; Б) 60°; В) 20°; Г) 80°; Д) 50°.

11°°. Точка A знаходиться на відстані 12 см і 16 см від двох взаємно перпендикулярних площин (рис. 6.57). Знайдіть відстань від цієї точки до прямої перетину цих площин.

А) 12 см; Б) 16 см; В) 14 см; Г) 20 см; Д) 28 см.

12°°. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей однієї грані куба до вершини протилежної їй грані.

А) $\frac{a}{2}$; Б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; В) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; Г) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; Д) a.

13°°. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює a. Знайдіть відстань між прямими DD_1 і AC_1.

А) $\frac{a}{2}$; Б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; В) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; Г) $a\sqrt{2}$; Д) $a\sqrt{3}$.

14°°. Вершина A рівностороннього трикутника ABC віддалена від площини γ на $3\sqrt{3}$ см (рис. 6.58). Визначте кут між площинами (ABC) і γ, якщо довжина сторони трикутника дорівнює 12 см.

А) 15°; Б) 30°; В) 45°; Г) 60°; Д) 90°.

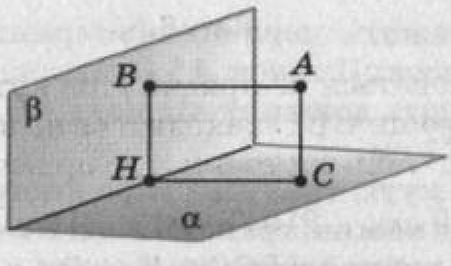


Рис. 6.57

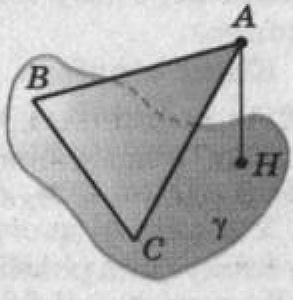


Рис. 6.58

15°°. Ортогональною проекцією трикутника ABC є прямокутний трикутник AKB з гіпотенузою 15 см і катетом 9 см. Кут між площинами цих трикутників дорівнює 30°. Знайдіть площу трикутника ABC.

А) $36\sqrt{3}$ см²; В) $54\sqrt{2}$ см²; Д) 108 см².

Б) $36\sqrt{2}$ см²; Г) $54\sqrt{3}$ см²;

16°°. Відстань від точки M до сторін квадрата дорівнює 13 см. Знайдіть відстань від точки M до площини квадрата, якщо його сторона 10 см.

А) 8 см; Б) 11 см; В) 12 см; Г) 14 см; Д) 15 см.

● ***Частина 2***

Розв'яжіть завдання 17–28 з коротким записом ходу міркувань.

17*. Сторони трикутника ABC дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. З вершини більшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр AF завдовжки 15 см. Знайдіть відстань від точки F до сторони BC трикутника ABC.

18*. Ортогональною проекцією прямокутника зі сторонами 4 см і 6 см є чотирикутник, площа якого дорівнює 12 см^2. Знайдіть кут нахилу між площиною прямокутника та його ортогональною проекцією.

19*. З точки, яка віддалена від площини α на 4 см, проведено дві похилі, які утворюють з площиною кути 30° і 45° відповідно, а кут між їхніми проекціями дорівнює 150°. Знайдіть відстань між основами похилих.

20*. Дві площини перетинаються під кутом 60°. Точка A знаходиться на відстані 10 см від цих площин. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину цих площин.

21*. Дві площини перетинаються під кутом 60°. Точка B знаходиться на одній відстані від цих площин і на відстані 16 см від прямої перетину площин. Знайдіть відстань від точки B до цих площин.

22*. Кінці відрізка AB належать перпендикулярним площинам α і β. Точки A_1 і B_1 – проекції точок A і B відповідно на пряму перетину площин. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 4$ см, $A_1B_1 = \sqrt{11}$ см.

23*. У середині двогранного кута, градусна міра якого 120°, задано точку, яка розміщена від кожної грані на відстані a. Знайдіть відстань від цієї точки до ребра двогранного кута.

24*. Площини рівносторонніх трикутників ABC і KBC перпендикулярні. Знайдіть кут між площинами (AKC) і (ABK).

25*. Ортогональною проекцією відрізка AB на площину α є відрізок A_1B_1. C – середина відрізка AB. C_1 – проекція точки C на площину α. Знайдіть довжини відрізків AA_1 і BB_1, якщо $CC_1 = 24$ см, $AA_1 : BB_1 = 3 : 5$.

26*. Дано квадрат $ABCD$, сторона якого 6 см. Точка F віддалена від кожної вершини квадрата на 7 см. Знайдіть відстань від середини відрізка FC до середини сторони AB.

27*. З вершини B прямокутного рівнобедреного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено перпендикуляр MB завдовжки $\sqrt{2}$ см до площини (ABC). Знайдіть площу трикутника MAC, якщо $BC = \sqrt{2}$ см.

28*. Точка M віддалена від площини правильного трикутника ABC на 3 см, а від усіх його сторін – на $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону трикутника ABC.

Частина 3

Розв'яжіть завдання 29–32 з повним обґрунтуванням.

29.** Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть відстань від його вершини до протилежної грані.

30.** З точки до площини проведено дві похилі, що утворюють з цією площиною кути, сума яких 90°. Доведіть, що проекції похилих на дану площину відносяться між собою як квадрати довжин похилих.

31.** Рівнобічна трапеція, периметр якої дорівнює 48 см, а гострий кут 60°, лежить у площині α. Точка, рівновіддалена від усіх сторін трапеції, знаходиться на відстані 3 см від площини α. Знайдіть відстань від цієї точки до сторін трапеції.

32.** Ортогональною проекцією трикутника, площа якого 48 см^2, є трикутник зі сторонами 14 см, 16 см і 6 см. Обчисліть кут між площиною цього трикутника і площиною його проекції.

МОДУЛЬ 7

Узагальнення і систематизація вивченого

Геометрія є пізнання всього існуючого.
Платон

КОРОТКИЙ ЗМІСТ МОДУЛЯ

- *Основні фігури геометрії та їхнє розміщення у просторі*
- *Перпендикуляр і похила до площини*
- *Відстані і кути у просторі*
- *Перерізи*
- *Проекціювання*

Опрацювавши цей модуль, ви дізнаєтеся:

- як розрізняти означувані і неозначувані поняття, аксіоми і теореми, властивості геометричних фігур;
- які просторові геометричні фігури є плоскими, а які – не плоскими;
- як називають основні поняття стереометрії;
- як формулюються аксіоми стереометрії та наслідки з них; означення паралельних і мимобіжних прямих, паралельних прямої і площини, паралельних площин; властивості та ознаки паралельності прямих і площин; означення перпендикулярних прямих у просторі, прямої, перпендикулярної до площини, перпендикулярних площин; властивості та ознаки перпендикулярних прямих і площин;
- як використовуються аксіоми стереометрії, вивчені формули, властивості для розв'язування нескладних геометричних задач;
- як розв'язати нескладні задачі на побудову перерізів куба, прямокутного паралелепіпеда та піраміди; на застосування властивостей та ознак паралельності та перпендикулярності прямих і площин;
- як знайти і зобразити паралельні та перпендикулярні прямі та площини на малюнках і моделях;
- як побудувати зображення фігур і виконати на них нескладні побудови;
- як обчислити відстані і кути у просторі;
- як застосувати відношення паралельності та перпендикулярності між прямими і площинами у просторі та вимірювання відстаней і кутів у просторі до опису відношень між об'єктами оточуючого світу; вивчені властивості та ознаки до розв'язування задач;
- як установити та обґрунтувати у просторі взаємне розміщення прямих і площин, зокрема паралельність прямих, прямої і площини, двох площин, взаємозв'язок паралельності й перпендикулярності прямих і площин, мимобіжність прямих;
- як класифікувати взаємне розміщення прямих, прямих і площин, площин у просторі.

§ 7.1. Основні фігури геометрії та їхнє розміщення у просторі

Даний модуль призначається для повторення всього того, що розглядалося з курсу стереометрії у цьому навчальному році. У міні-конспекті систематизовано та узагальнено основні теми курсу, які умовно розбито на блоки: основні фігури геометрії та їхнє розміщення у просторі; перпендикуляр і похила до площини, відстані і кути у просторі; перерізи та проекціювання.

Згідно зі структурою побудови геометрії як науки для неї визначено:

Основні фігури (неозначувані) – точка, пряма, площина (§ 2.1).

Аксіоми (§ 1.1, § 2.1)

I. Належності

I_1. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

I_2. Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

I_3. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.

II. Взаємного розміщення

II_1. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

II_2. Пряма розбиває площину на дві півплощини.

II_3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину і до того ж тільки одну.

II_4. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

III. Вимірювання

III_1. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

III_2. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

IV. Відкладання

IV_1. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини і до того ж тільки один.

IV_2. Від будь-якої півпрямої у задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою 180°, і до того ж тільки один.

IV_3. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому, у заданому розміщенні відносно даної півпрямої.

V. Паралельності

V_1. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більше як одну пряму, паралельну даній.

Наслідки з аксіом (§ 2.2)

1. Через пряму і точку, що не належить їй, можна провести площину і до того ж тільки одну.

2. Якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма належить цій площині.

3. Через три точки, що не належать прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

Взаємне розміщення прямих у просторі (§ 3.1)

Дві прямі у просторі можуть:

- перетинатися (якщо мають тільки одну спільну точку; якщо перетинаються під прямим кутом, то взаємно перпендикулярні);
- збігатися (мають дві і більше спільних точок);
- бути паралельними (лежать в одній площині і не мають жодної спільної точки);
- бути мимобіжними (не лежать в одній площині).

Властивості перпендикулярних прямих (§ 5.1).

1. Через довільну точку прямої у просторі можна провести перпендикулярну до неї пряму.

2. Якщо дві прямі, які перетинаються, відповідно паралельні двом перпендикулярним прямим, то вони теж перпендикулярні.

3. Через будь-яку точку простору, що не належить прямій, можна провести пряму, перпендикулярну до даної (див. рис. 5.4, *а*).

4. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих і лежить з ними в одній площині, то вона перпендикулярна і до другої прямої (див. рис. 5.4, *б*).

Властивість паралельності прямих (§ 3.1). Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, проходить пряма, паралельна даній, і до того ж тільки одна.

Ознака паралельності прямих (§ 3.1). Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні між собою.

Ознака мимобіжності прямих (§ 3.1). Якщо одна з двох прямих лежить у деякій площині, а друга пряма перетинає цю площину в точці, яка не лежить на першій прямій, то ці прямі мимобіжні.

Взаємне розміщення прямої і площини у просторі (§ 3.2)

Пряма і площина у просторі можуть:

- перетинатися (якщо мають тільки одну спільну точку; якщо пряма при перетині площини перпендикулярна до довільної прямої цієї площини, що проходить через точку перетину, то пряма перпендикулярна й до площини);
- бути паралельними (не мають жодної спільної точки);
- мати дві і більше спільних точок (пряма належить площині).

Властивості перпендикулярності прямої і площини (§ 5.2).

1. Якщо площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої прямої.

2. Дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.

Властивості паралельності прямої і площини (§ 3.3).

1. Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає площину, то й друга пряма також перетинає цю площину.

2. Якщо пряма паралельна площині, то через кожну точку, взяту на цій площині, проходить пряма цієї площини, паралельна даній прямій (див. рис. 3.19).

3. Через довільну точку, яка не належить площині, проходить безліч прямих, які паралельні цій площині (див. рис. 3.20).

4. Якщо пряма паралельна кожній із площин, які перетинаються, то вона паралельна і прямій їхнього перетину (див. рис. 3.21).

Ознака перпендикулярності прямої і площини (§ 5.2). Якщо пряма перпендикулярна до кожної з двох прямих, які лежать у площині і перетинаються, то вона перпендикулярна і до даної площини.

Ознака паралельності прямої і площини (§ 3.3). Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.

Взаємне розміщення двох площин у просторі (§ 4.1)

Дві площини у просторі можуть:

- перетинатися по прямій (якщо мають одну спільну точку; дві площини, що перетинаються, називаються перпендикулярними, якщо третя площина, перпендикулярна до прямої перетину цих площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих (див. рис. 5.31));
- бути паралельними (не мають жодної спільної точки);
- збігатися (мають дві спільні прямі, що перетинаються; спільні три точки, що не лежать на прямій; спільну пряму і точку, що не належить прямій).

Властивості перпендикулярності площин (§ 5.4).

1. Будь-яка площина, яка перпендикулярна до лінії перетину перпендикулярних площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих, які утворюють кут між площинами. І навпаки, площина, перпендикулярна до двох площин, що перетинаються, перпендикулярна до прямої їхнього перетину.

2. Якщо дві площини взаємно перпендикулярні, то будь-яка пряма, що лежить в одній з них і перпендикулярна до їхньої лінії перетину, перпендикулярна до другої площини.

3. Якщо дві площини взаємно перпендикулярні і з якоїнебудь точки однієї з них опущено перпендикуляр на другу, то цей перпендикуляр лежить у першій площині.

Властивості паралельності площин (§ 4.2).

1. Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

2. Якщо дві паралельні площини перетнути третьою, то прямі їхнього перетину паралельні.

3. Паралельні площини, перетинаючи дві паралельні прямі, відтинають на них рівні відрізки (відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні).

4. Дві площини, паралельні третій площині, паралельні між собою.

Ознака перпендикулярності площин (§ 5.4). Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.

Ознака паралельності площин (§ 4.1). Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

Вправи

7.1°. Укажіть кількість площин, які можна провести через три точки, що лежать на одній прямій.

А) Одну; Б) дві; В) три; Г) чотири; Д) безліч.

7.2°. Укажіть кількість різних площин, які можна провести через чотири точки, якщо кожні три з них не лежать на одній прямій.

А) Одну; Б) дві; В) три; Г) чотири; Д) безліч.

7.3°. Точка K не належить площині чотирикутника $ABCD$. Визначте таке взаємне розміщення прямих у просторі, яке справедливе для чотирьох з п'яти заданих (1–5) пар прямих, і таке, яке не задовольняє жодна пара прямих.

А) Паралельні;
Б) перетинаються;
В) мимобіжні.

1) KC і AB;
2) KA і BC;
3) KB і CD;
4) KD і AB;
5) KB і CB.

А			
Б			
В			

7.4°. Через основу AD трапеції $ABCD$ проведено площину α, а через середини сторін AD і CD – пряму PQ. Укажіть взаємне розміщення прямої PQ і площини α.

А) $PQ \perp \alpha$; Б) $PQ \cap \alpha$; В) $PQ \parallel \alpha$; Г) $PQ \subset \alpha$.

7.5°. Відомо, що площина α перетинає бічні сторони AB і CD трапеції $ABCD$, $BC \parallel \alpha$. Укажіть взаємне розміщення площини α і сторони AD трапеції $ABCD$.

А) Паралельні; В) перпендикулярні;
Б) перетинаються; Г) належить площині.

7.6°. Відомо, що діагональ і сторона трапеції паралельні площині α. Укажіть взаємне розміщення площини α і площини, на якій лежить трапеція.

А) Перетинаються; Б) паралельні; В) збігаються.

7.7°. Три паралельні прямі a, b і c перетинають площину α у трьох точках A, B і C, які не належать одній прямій. Визначте взаємне розміщення площини, яка містить прямі a і b, та площини, яка містить прямі a і c.

А) Збігаються; Г) перетинаються по прямій b;
Б) паралельні; Д) перетинаються по прямій c.
В) перетинаються по прямій a;

7.8°. Дано дві паралельні площини α і β та дві паралельні прямі a і b, які перетинають площини у точках A, A_1 та B, B_1 відповідно. Укажіть пари рівних відрізків, якщо $AB \neq AA_1$.

1) $AA_1 = BB_1$; 3) $A_1B_1 = AA_1$; 5) $A_1B_1 = BB_1$.
2) $AB = BB_1$; 4) $AB = A_1B_1$;

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 1 і 4; Д) 2 і 5.

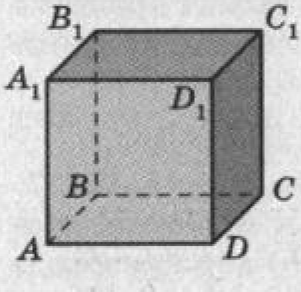


Рис. 7.1

7.9°. На рисунку 7.1 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть площини, які перетинаються по прямій CC_1.

А) (ABC) і (CDD_1); Г) (DD_1C_1) і (B_1C_1C);
Б) (B_1BC) і (BCD); Д) (CBD) і (C_1CB_1).
В) $(D_1B_1C_1)$ і (B_1BC);

7.10°. Укажіть пари паралельних площин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.1).

1) (ABC) і (CDD_1);
2) $(A_1B_1C_1)$ і (BCD);
3) (D_1DC) і (ABB_1);
4) (BCC_1) і (CDB);
5) (ADD_1) і (CBB_1).

А) 1, 2 і 3; Б) 2, 3 і 4; В) 2, 3 і 5; Г) 1, 2 і 4; Д) 1, 3 і 5.

7.11°°. Укажіть площини куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.1), які перпендикулярні до площини CDD_1C_1.

1) AA_1D_1D; 2) $ABCD$; 3) ABB_1A_1; 4) BCC_1B_1; 5) $A_1B_1C_1D_1$.

А) 1, 2, 3 і 4; Б) 2, 3, 4 і 5; В) 1, 3, 4 і 5; Г) 1, 2, 4 і 5; Д) 1, 2, 3 і 5.

7.12°°. Відомо, що площина α перпендикулярна до прямої b, а пряма b перпендикулярна до площини γ. Укажіть взаємне розміщення площин α і γ.

А) Паралельні; Б) перетинаються; В) перпендикулярні; Г) збігаються.

7.13°°. Площини (ABC) і ω – паралельні. $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, де A_1, B_1, C_1, D_1 – точки площини ω; $AA_1 = 12$ см. Знайдіть довжину відрізка CC_1.

А) 12 см; Б) 8 см; В) 6 см; Г) 4 см; Д) 15 см.

7.14°°. Дано три різні площини α, β і φ. Відомо, що α перпендикулярна до β, а площина β перпендикулярна до φ. Укажіть взаємне розміщення площин α і φ.

А) Перетинаються або збігаються;

Б) паралельні або збігаються;

В) паралельні або перпендикулярні;

Г) перпендикулярні або перетинаються;

Д) паралельні або перетинаються.

7.15°°. Відомо, що площина α паралельна прямій b, а пряма b перпендикулярна до площини φ. Укажіть взаємне розміщення площин α і φ.

А) Паралельні;

Б) перпендикулярні;

В) збігаються;

Г) перетинаються, але не перпендикулярні;

Д) паралельні або перетинаються.

7.16°°. Площина α паралельна стороні AC трикутника ABC і перетинає його сторони в точках M і K. M – середина AC (рис. 7.2). Знайдіть довжину відрізка MK, якщо $AB = 20$ см.

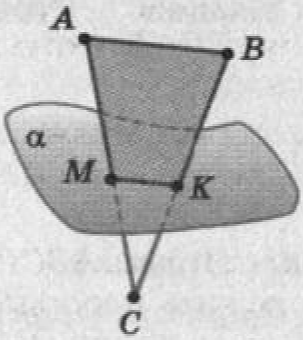


Рис. 7.2

А) 15 см; В) 12 см; Д) 8 см.
Б) 16 см; Г) 10 см;

7.17°°. Прямі OA, OB і OC попарно перпендикулярні, $OA = 4$ см, $OB = 3$ см, $AC = 5$ см. Знайдіть довжину відрізка BC.

А) 3 см; В) $3\sqrt{2}$ см; Д) $3\sqrt{3}$ см.
Б) 4 см; Г) $2\sqrt{3}$ см;

7.18°°. Доведіть, що коли діагоналі чотирикутника перетинаються, то його вершини лежать на одній площині.

7.19*. Точка C лежить на прямій AB, точка D не лежить на прямій AB. Доведіть, що площини (ABD) і (CDB) збігаються.

7.20*. Дано дві прямі, які перетинаються в точці A. Доведіть, що всі прямі, які перетинають обидві дані прямі і не проходять через точку A, лежать в одній площині.

7.21*. Дано дві прямі a і b, які перетинаються. Точки A і A_1 лежать на прямій a, а точки B і B_1 – на прямій b. Доведіть, що прямі AB і A_1B_1 лежать на одній площині.

7.22*. Точки A, B, C не лежать на одній прямій. $M \in AB$, $K \in AC$, $X \in MK$. Доведіть, що точка X лежить на площині (ABC).

7.23*. Прямі a і b перетинаються в точці O, $A \in a$, $B \in b$, $Y \in AB$. Доведіть, що прямі a, b та точка Y лежать на одній площині.

7.24*. Прямі a і b перетинаються. Доведіть, що всі прямі, які паралельні прямій b і перетинають пряму a, лежать на одній площині.

7.25*. Сторони AB і BC паралелограма $ABCD$ перетинають площину α. Доведіть, що прямі AD і DC також перетинають площину α.

7.26*. Доведіть, що середини сторін просторового чотирикутника є вершинами паралелограма.

7.27*. Доведіть, що відрізки, які сполучають середини протилежних ребер тетраедра, перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.

7.28*. Через вершину A ромба $ABCD$ проведено пряму a, яка паралельна діагоналі BD. Доведіть, що прямі a і CD перетинаються.

7.29.** Доведіть, що всі прямі, які перетинають одну з двох мимобіжних прямих і паралельні другій, лежать на одній площині.

7.30••. $ABCD$ — паралелограм. Площина α проходить через його вершини A і B і не проходить через вершину C. Доведіть, що $CD \parallel \alpha$.

7.31••. Площини α і β перетинаються по прямій AB. Пряма a паралельна площині α і площині β. Доведіть, що прямі a і AB паралельні.

7.32••. Через точку перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ проведено пряму OM так, що точка M не належить площині паралелограма, $MA = MC$ і $MB = MD$. Доведіть, що пряма OM перпендикулярна до площини паралелограма.

7.33••. Пряма AM перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до площини (AMO).

7.34••. Доведіть, що коли дві площини α і β перпендикулярні до прямої a, то вони паралельні.

7.35••. У тетраедрі $ABCD$ точка M – середина BC, $AB = AC$, $DB = DC$. Доведіть, що площина трикутника ADM перпендикулярна до BC.

7.36••. Доведіть, що через дві мимобіжні прямі можна провести паралельні площини.

7.37••. $ABCD$ – паралелограм, BE і FD – перпендикуляри до площини (ABC). Доведіть, що площини (ABE) і (DFC) паралельні.

7.38••. $ABCD$ – паралелограм, AN і CK – перпендикуляри до площини (ABC). Доведіть, що площини (ADN) і (KBC) паралельні.

7.39••. Площини α і β паралельні площині δ. Доведіть, що площини α і β паралельні.

§ 7.2. Перпендикуляр і похила до площини, відстані та кути у просторі

Перпендикуляр і похила (§ 5.3)

Перпендикуляром, проведеним з даної точки на дану площину, називається відрізок, що сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини (див. рис. 5.21, *в*). Кінець цього відрізка, який лежить на площині, називається ***основою перпендикуляра***.

Похилою, проведеною з даної точки до даної площини, називається будь-який відрізок, який сполучає дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром до площини. Кінець відрізка, що лежить на площині, називається ***основою похилої***.

Відрізок, який сполучає основу перпендикуляра і основу похилої, проведених з однієї і тієї самої точки, називається ***проекцією похилої.***

Якщо з однієї точки поза площиною провести до неї перпендикуляр і похилі, то:

1) довжина перпендикуляра менша за довжину будь-якої похилої;

2) похилі, що мають рівні проекції, рівні між собою;

3) з двох похилих більшу довжину має та, яка має більшу проекцію.

Теорема (*про три перпендикуляри*).
Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна і до похилої. І навпаки, якщо пряма, проведена через основу похилої на площині, перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.

Кути у просторі (§ 6.1)

Менший з кутів, які утворюють дві прямі, що перетинаються, називається ***кутом між прямими.*** Кут між перпендикулярними прямими дорівнює 90°. Кутом між паралельними прямими вважають кут, що дорівнює 0°. ***Кутом між мимобіжними*** прямими називається кут між прямими, які перетинаються і відповідно паралельні мимобіжним.

Кутом між ***прямою і площиною*** називається кут між цією прямою і її проекцією на площину. Якщо пряма a перпендикулярна до α, то кут між нею і площиною дорівнює 90°, якщо паралельна, то 0°.

Двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами разом зі спільною прямою, що їх обмежує. Цю пряму називають ***ребром двогранного кута.***

Якщо двогранний кут перетнути площиною, перпендикулярною до його ребра, то промені, по яких перетинає вона задані півплощини, утворюють ***лінійний кут*** (див. рис. 6.3).

Кутом між площинами, що перетинаються, називається кут між прямими, утвореними перетином цих площин третьою площиною, перпендикулярною до їхньої лінії перетину. Кутом між паралельними площинами вважають кут, що утворює 0°.

Відстані у просторі (§ 6.2)

Відстанню між двома точками A і B називається довжина відрізка AB. ***Відстань від точки A до прямої l*** дорівнює довжині перпендикуляра AO, проведеного із цієї точки до даної прямої (див. рис. 6.15). ***Відстанню від точки до площини*** називається довжина перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини (див. рис. 6.16). ***Відстань між двома паралельними прямими*** дорівнює довжині спільного перпендикуляра цих прямих (див. рис. 6.18). ***Відстань між паралельними прямою і площиною*** дорівнює довжині спільного перпендикуляра, проведеного з якої-небудь точки прямої до площини. ***Відстань між паралельними площинами*** дорівнює довжині спільного перпендикуляра, проведеного з якої-небудь точки однієї площини до другої.

Спільним перпендикуляром до двох мимобіжних прямих називається відрізок з кінцями на цих прямих, перпендикулярний до кожної з них.

Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їхнього спільного перпендикуляра. Вона дорівнює відстані між паралельними площинами, які проходять через ці прямі.

Перерізи (§ 2.3)

Якщо принаймні дві точки просторової геометричної фігури лежать по різні боки від площини, то кажуть, що площина її перетинає. У цьому разі таку площину називають ***січною площиною***. Фігура, яка складається з усіх спільних точок для геометричної фігури і січної площини, називається ***перерізом геометричної фігури***.

Пряму, по якій площина перерізу перетинає площину якої-небудь грані многогранника, називають *слідом площини перерізу*. Цим встановлюється кількість слідів: слідів стільки, скільки площин граней перетинає площина перерізу.

Під час побудови перерізу слід пам'ятати:

– через дві точки, що належать площині, проходить тільки одна пряма, яка належить цій площині;

– щоб побудувати лінію перетину двох площин, необхідно відшукати дві точки, які належать обом площинам, і через них провести лінію перетину;

– під час побудови перерізів многогранників січною площиною слід відшукати відрізки, по яких січна площина перетинається з гранями многогранника.

Проекціювання (§ 4.3 і § 6.3)

Щоб зобразити просторові фігури на площині, користуються різними методами. Один з них – паралельне проекціювання.

Паралельне проекціювання – це метод зображення довільної геометричної фігури на площині, при якому всі точки фігури переносяться на площину по прямих, паралельних заданій, яка називається *напрямом проекціювання*. Кожна геометрична фігура складається з точок. Тому, проекціюючи послідовно точки фігури на площину, отримуємо зображення, яке називають *проекцією* цієї фігури, а спосіб виконання зображення – *паралельним проекціюванням*.

Властивості паралельного проекціювання для прямих і відрізків, не паралельних напряму проекціювання:

1. Проекцією прямої є пряма, а проекцією відрізка – відрізок.
2. Проекції паралельних прямих паралельні або збігаються.
3. Відношення довжин відрізків однієї прямої або паралельних прямих зберігаються (див. рис. 4.26), тобто дорівнюють відношенням довжин своїх проекцій, зокрема середина відрізка проекціюється в середину його проекції.

Паралельне проекціювання, напрям якого перпендикулярний до площини проекцій, називається ***ортогональним проекціюванням***. Для ортогонального проекціювання виконуються всі властивості паралельного проекціювання.

Площа ортогональної проекції довільного многокутника на площину дорівнює добутку площі многокутника на косинус кута між його площиною і площиною проекції.

Вправи

7.40°. З точки M до площини квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр MD. Виберіть правильні твердження.

1) MD – відстань від точки M до площини $(ABCD)$;
2) MB – відстань від точки M до сторони AB;
3) MC – відстань від точки M до сторони BC;
4) AM – відстань від точки M до сторони AB;
5) MB – відстань від точки M до площини $(ABCD)$.

А) 1, 2 і 3; Б) 2, 3 і 4; В) 3, 4 і 5; Г) 1, 3 і 4; Д) 2, 4 і 5.

7.41°. Умовами (А–В) задано геометричні фігури, а умовами (1–5) – проекції деяких геометричних фігур. Виберіть таку фігуру серед (А–В), яка може проекціюватися в чотири фігури (1–5), і таку, яка не може проекціюватися в жодну з них.

А) Трикутник;
Б) квадрат;
В) трапеція.

1) Квадрат;
2) трапеція;
3) ромб;
4) прямокутник;
5) паралелограм.

А				
Б				
В				

7.42°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.3). Виберіть правильні твердження щодо визначення кута нахилу між прямою та площиною.

1) $B_1A\widehat{\ }(ABC) = \angle B_1AB$;
2) $C_1B\widehat{\ }(BCD) = \angle C_1BB_1$;
3) $A_1C\widehat{\ }(ACD) = \angle A_1CA$;
4) $D_1B\widehat{\ }(ABD) = \angle D_1CD$;
5) $A_1D\widehat{\ }(DCB) = \angle A_1DB$.

А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 1 і 4; Д) 2 і 5.

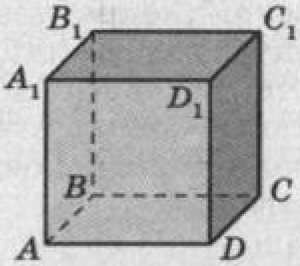


Рис. 7.3

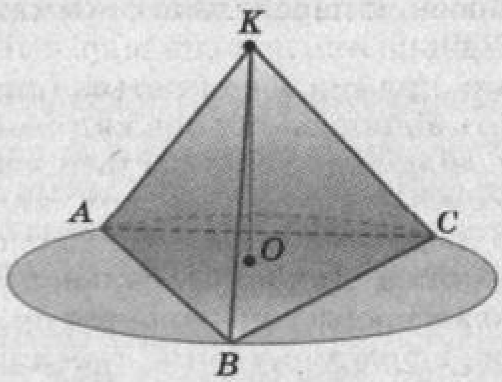


Рис. 7.4

7.43°. Точка O – центр кола радіуса R, описаного навколо різностороннього трикутника ABC, а точка K – рівновіддалена від вершин трикутника ABC (рис. 7.4). Укажіть правильні твердження.

1) $\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle AOC$;
2) $\triangle KOA = \triangle KOB = \triangle KOC$;
3) $AK\widehat{\ }(ABC) = BK\widehat{\ }(ABC) = CK\widehat{\ }(ABC)$;
4) $AO = BO = CO = R$;
5) $AB = BC = AC = a$, де a – довжина відрізка.

А) 1, 2 і 3; Б) 2, 3 і 4; В) 3, 4 і 5; Г) 1, 2 і 4; Д) 1, 3 і 4.

7.44°. Точка O – центр кола радіуса r, вписаного в різносторонній трикутник ABC, а точка S – рівновіддалена від його сторін (рис. 7.5). $SP \perp AC$, $SQ \perp BC$, $SD \perp AB$. Укажіть правильні твердження.

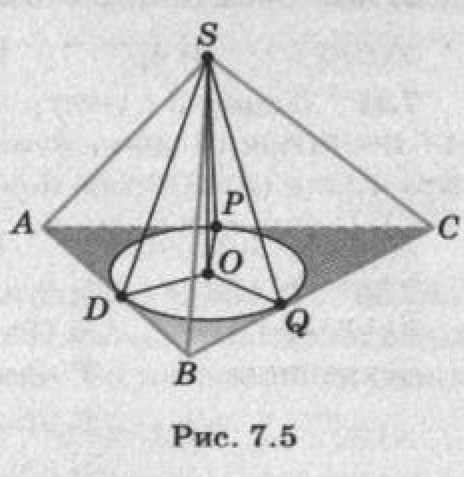


Рис. 7.5

1) $\triangle SAO = \triangle SBO = \triangle SCO$;
2) $\triangle SPO = \triangle SQO = \triangle SDO$;
3) $OP = OQ = OD = r$;
4) $OP \perp AC$, $OQ \perp BC$, $OD \perp AB$;
5) $OA \perp AS$, $OB \perp BS$, $OC \perp CS$.

А) 1, 3 і 4; Б) 2, 3 і 5; В) 2, 4 і 5; Г) 2, 3 і 4; Д) 1, 3 і 5.

7.45°. Пряма MB перпендикулярна до сторін AB і BC трикутника ABC, а точка D належить стороні AC. Визначте вид трикутника MBD.

А) Прямокутний; Б) гострокутний; В) тупокутний.

7.46°. Пряма KO перпендикулярна до діагоналей AC і BD квадрата $ABCD$, які перетинаються в точці O. Визначте вид трикутника KOC.

А) Гострокутний; Б) прямокутний; В) тупокутний.

7.47°°. Відстань від точки K до площини α дорівнює x см, а похила, проведена з цієї самої точки до площини, на 3 см довша. Визначте рівняння, яке є математичною моделлю цієї задачі, якщо проекція даної похилої на площину α дорівнює 15 см.

А) $x^2 + (x - 3)^2 = 15^2$; Г) $(x + 3)^2 + 15^2 = x^2$;
Б) $x^2 - (x - 3)^2 = 15^2$; Д) $x^2 + (x + 3)^2 = 15^2$.
В) $x^2 + 15^2 = (x + 3)^2$;

7.48°°. З точки A до площини проведено перпендикуляр і похилу, довжина якої 18 см. Кут між похилою і площиною 60°. Знайдіть довжину перпендикуляра.

А) 9 см; Б) $9\sqrt{3}$ см; В) $9\sqrt{2}$ см; Г) $6\sqrt{3}$ см; Д) $6\sqrt{2}$ см.

7.49°°. З точки поза даною площиною проведено до неї перпендикуляр завдовжки 6 см і похилу, довжина якої 9 см. Знайдіть довжину проекції перпендикуляра на похилу.

А) 4 см; Б) 5 см; В) $3\sqrt{2}$ см; Г) $2\sqrt{3}$ см; Д) $6\sqrt{2}$ см.

7.50°°. Точка, яку взято на одній із граней двогранного кута, знаходиться від ребра на відстані в 2 рази більшій, ніж від другої грані. Знайдіть величину двогранного кута.

А) 90°; Б) 45°; В) 30°; Г) 60°; Д) 15°.

7.51°°. Точка O – центр квадрата зі стороною 4 см. AO – пряма, перпендикулярна до площини квадрата, $AO = 2\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань від точки A до вершин квадрата.

А) 4 см; Б) 8 см; В) $4\sqrt{2}$ см; Г) $3\sqrt{2}$ см; Д) $8\sqrt{2}$ см.

7.52°°. Точка O – центр квадрата $ABCD$. OM – перпендикуляр до площини $ABCD$, $AB = 8$ см. Пряма MA нахилена до площини квадрата під кутом 60°. Знайдіть відстань між точками M і B.

А) $2\sqrt{2}$ см; Б) $3\sqrt{2}$ см; В) $4\sqrt{2}$ см; Г) 8 см; Д) $8\sqrt{2}$ см.

7.53°°. Сторони трикутника ABC дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. З вершини більшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр AD, який дорівнює 15 см. Знайдіть відстань від точки D до сторони BC.

А) 17 см; Б) $\sqrt{241}$ см; В) $17\sqrt{2}$ см; Г) 21 см; Д) $21\sqrt{2}$ см.

7.54°°. *ABCD* – прямокутник, *MA* – перпендикуляр до площини прямокутника, $\angle MCA = 60°$, $DC = 3$ см, $CB = 4$ см. Знайдіть площу трикутника *MBC*.

А) 20 см^2; В) $20\sqrt{3}$ см^2; Д) $4\sqrt{21}$ см^2.

Б) $8\sqrt{21}$ см^2; Г) $15\sqrt{3}$ см^2;

7.55°°. З точки до площини проведено дві похилі, довжини яких відносяться як 5 : 6. Знайдіть відстань від точки до площини, якщо відповідні проекції похилих дорівнюють 4 см і $3\sqrt{3}$ см.

А) 5 см; Б) 3 см; В) 4 см; Г) 6 см; Д) $\sqrt{11}$ см.

7.56*. З точки *M*, взятої поза площиною β, проведено дві похилі, що дорівнюють 37 см і 13 см. Проекції цих похилих відносяться як 7 : 1. Знайдіть відстань від точки *M* до площини β.

7.57*. З точки, взятої поза площиною α на відстані 12 см, проведено дві похилі, що дорівнюють 37 см і 13 см. Знайдіть відношення проекцій цих похилих на площину α.

7.58*. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Точка *M* знаходиться поза площиною ромба і віддалена від усіх сторін ромба на 8 см. Знайдіть відстань від точки *M* до площини ромба.

7.59*. Точка *M* рівновіддалена від сторін ромба і знаходиться на відстані 2 см від площини ромба. Знайдіть відстань від точки *M* до сторін ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 12 см і 16 см.

7.60*. Рівнобічна трапеція, периметр якої дорівнює 48 см, а гострий кут 60°, лежить у площині α. Точка, рівновіддалена від усіх сторін трапеції, знаходиться на відстані 3 см від площини α. Знайдіть відстань від цієї точки до сторін трапеції.

7.61*. Трапеція вписана в коло, причому менша її основа, що дорівнює 16 см, стягує дугу в 60°. На відстані 12 см від площини трапеції знаходиться точка, рівновіддалена від усіх вершин трапеції. Знайдіть відстані від цієї точки до вершин трапеції.

7.62*. З точки *A*, взятої поза площиною α, проведено до неї рівні похилі *AB* і *AC*. Відстань *BC* між основами похилих дорівнює 10 см. Кут між *BC* і *AB* дорівнює 60°, кут між *BC* і проекцією похилої *AB* на площину α – 30°. Знайдіть відстань від точки *A* до площини α.

7.63*. З точки до площини проведено дві похилі. Довжина однієї похилої дорівнює 13 см, а довжина її проекції – 5 см. Кут між проекціями похилих дорівнює 120°, а довжина відрізка, що сполучає основи похилих, – 19 см. Знайдіть довжину іншої похилої.

7.64•. У трикутнику ABC сторони $AB = 15$ см, $AC = 13$ см, $CB = 14$ см. З вершини A проведено до його площини перпендикуляр, який дорівнює 16 см. Знайдіть відстань від його кінців до сторони BC.

7.65•. Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 15 см і 8 см. Через вершину A меншого кута трикутника проведено пряму AM, перпендикулярну до його площини. Знайдіть відстань від точки M до прямої, яка містить меншу сторону трикутника, коли відомо, що $AM = 20$ см.

7.66••. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 32 см. До площини трикутника з середини гіпотенузи проведено перпендикуляр, який дорівнює 12 см. Знайдіть відстань від кінців перпендикуляра до катетів.

7.67••. З вершини гострого кута прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено перпендикуляр AD до його площини. Знайдіть відстані від точки D до вершин B і C, якщо $AC = 15$ см, $BC = 8$ см, $AD = 12$ см.

7.68••. Точка M знаходиться на однаковій відстані від усіх сторін правильного трикутника зі стороною 12 см і віддалена від площини трикутника на 6 см. Знайдіть відстані від точки M до сторін трикутника.

7.69••. Точка M рівновіддалена від сторін правильного трикутника і знаходиться на відстані $6\sqrt{3}$ см від площини трикутника. Кут між перпендикуляром і похилою, проведеними із точки M до площини цього трикутника, дорівнює 60°. Знайдіть сторону цього трикутника.

7.70••. Ортогональною проекцією трикутника, площа якого дорівнює 48 см^2, є трикутник зі сторонами 14 см, 16 см і 6 см. Обчисліть кут між площиною цього трикутника і площиною його проекції.

7.71••. Ортогональною проекцією даного трикутника є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Площина трикутника утворює з площиною проекції кут 60°. Обчисліть площу даного трикутника.

7.72••. Рівнобедрені трикутники мають спільну основу завдовжки 16 см, а їхні площини утворюють між собою кут 60°. Бічна сторона одного трикутника дорівнює 17 см, а бічні сторони іншого трикутника взаємно перпендикулярні. Знайдіть відстань між вершинами трикутників.

7.73••. Рівнобедрені трикутники мають спільну основу, що дорівнює 16 см. Відстань між вершинами цих трикутників дорівнює 13 см. Бічна сторона одного трикутника – 17 см. Інший трикутник – прямокутний. Знайдіть кут між площинами цих трикутників.

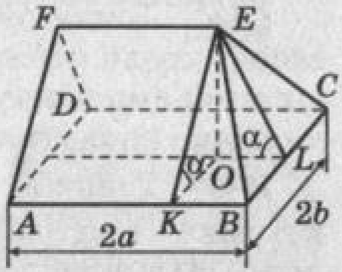
7.74.** Кінці відрізка, довжина якого дорівнює 24 см, належать двом перпендикулярним площинам. Відстані від кінців відрізка до лінії перетину даних площин відповідно дорівнюють 12 см і $12\sqrt{2}$ см. Обчисліть кути, утворені відрізком з цими площинами.

7.75.** З кінців відрізка, що належать двом перпендикулярним площинам, до лінії перетину даних площин проведено перпендикуляри, що дорівнюють $4\sqrt{2}$ см і 4 см. Відстань між основами перпендикулярів дорівнює 4 см. Обчисліть кути, утворені відрізком з цими площинами.

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ

7.1. Запроектовано чотирисхилий дах. Доведіть, що проекції ребер даху – це бісектриси кутів прямокутника, який є загальним контуром плану даху.

7.2. Для будинку прямокутної форми треба зробити чотирисхилий дах, зображений на рисунку, з розмірами $AB = 2a$ м, $BC = 2b$ м. Усі схили даху утворюють з горизонтом однаковий кут, що дорівнює α. Знайдіть, скільки квадратних метрів заліза потрібно для даху, коли на шви та відходи передбачається витрата заліза, що становить k % від площі даху.



Відповідь. $\dfrac{4ab}{\cos\alpha}\left(1+\dfrac{k}{100}\right)$ м.

7.3. У безвітряну погоду падає «косий» дощ. Як за допомогою листа фанери визначити кут, який утворює траєкторія падаючих крапель з горизонтальною площиною? Зробіть відповідний рисунок.

Вказівка. Треба розмістити лист фанери так, щоб його площина була приблизно перпендикулярна до площини, яку визначають траєкторія руху краплини та її проекція на горизонтальну площину. Тоді на горизонтальній площині отримаємо прямокутник $ADFE$, на який дощ не падає. Далі слід виміряти PM і PN та знайти тангенс кута між ними.

7.4. Над дитячим ліжком, яке займає площу S_1, планують повісити полог з двох однакового розміру прямокутних завіс, ширина яких нарізно дорівнює довжині ліжка, а кожна завіса займає площу S_2. Обидві завіси закріплено верхніми кінцями до планки, що є однаковою за довжиною з ліжком і яку закріплено над ліжком паралельно. Визначте висоту планки над ліжком, якщо її довжина дорівнює n і краї завіс доходять до верхніх країв ліжка (вважати, що завіси натягнуто у вигляді площин). Розв'язати задачу для таких числових даних: $n = 1$ м 20 см, $S_1 = 6000$ см^2, $S_2 = 7800$ см^2. Зробіть відповідний рисунок.

Вказівка. $\dfrac{\sqrt{4S_2^2 - S_1^2}}{2n}$. *Відповідь.* 0,5 м.

7.5. Основою чотирисхилого даху є прямокутник зі сторонами 18 м і 12 м. Кути нахилу схилів даху однакові та дорівнюють 40°. Скільки черепиці потрібно для покриття даху, якщо на 1 м^2 даху витрачається 15 штук черепиці?

Вказівка. Скористайтеся (частково) результатом попередньої задачі.

7.6. Зобразіть геометричні образи кута між прямими, кута між прямою та площиною, кута між двома площинами, використовуючи як модель шестигранний олівець і розгорнуту книжку.

7.7. Покажіть на зображенні даху (задача 7.1), що має дві площини симетрії, напрями, за якими буде стікати дощова вода.

Андрій Миколайович Колмогоров
(1903–1987)

Досконало викладати математику може лише той, хто сам нею захоплений.

А. М. Колмогоров

«Можна прямо сказати, що А. М. Колмогоров не має собі рівних серед математиків нашого часу». (П. С. Александров)

Народився А. Колмогоров у Тамбові, де затрималася його мати, коли їхала з Криму. Вона померла під час пологів, і всі турботи за доглядом та вихованням дитини взяла на себе сестра матері. Нелегким був шлях Андрія Миколайовича у велику математику. Він рано почав заробляти собі на хліб – їздив провідником на залізничному транспорті. Школу закінчував екстерном.

У 1920 р. А.М. Колмогоров вступив на фізико-математичний факультет Московського університету і став учнем М.М. Лузіна. Будучи студентом, також працював.

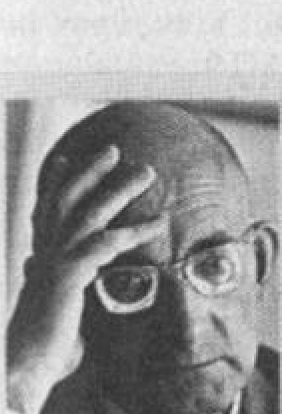
Наукова діяльність А.М. Колмогорова вражає різноманітністю інтересів, думок і глибиною проникнення в сутність проблем, які стоять перед наукою. Ось неповний перелік тих галузей математики, у яких учений отримав значні результати: теорія ортогональних рядів, дескриптивна теорія множин, математична логіка, класична теорія ймовірностей, геометрія, випадкові процеси, математична статистика, функціональний аналіз, теорія наближень, топологія, диференціальні рівняння, теорія стрільби, турбулентність, теорія алгоритмів, динамічні системи, класична механіка, метрична теорія функцій, теорія інформації, алгоритмічна теорія ймовірностей. Суттєву компоненту в його дослідженнях складали праці в галузі суміжних наук: у фізиці, біології, геології, океанології, метеорології, кристалографії, філософії, історії математики і т. д. У кожній галузі, якою займався учений, він досягав вершин. Його роботи можна назвати класичними: їхній вплив із часом не тільки не зменшується, але й постійно зростає.

Значний внесок учений зробив і в топологію. Він увів поняття когомології, сформулював ідею топологічного векторного простору, а також отримав важливі результати про подання функцій декількох змінних функціями меншого числа змінних. Він також вніс зміни в удосконалення шкільних програм з математики, написав кілька шкільних підручників.

Починаючи з 1920 р. вся діяльність А.М. Колмогорова пов'язана з Московським державним університетом, у якому він створив всесвітньо відому наукову школу. Учений був дуже захоплений наукою, і тому все життя його оточували талановиті учні. Серед них – 10 академіків; під його безпосереднім керівництвом більш ніж 80 науковців захистили свої дисертації.

А.М. Колмогоров – лауреат Ленінської і Державної премій СРСР, нагороджений сімома орденами Леніна, отримав звання Героя Соціалістичної Праці. Він був членом більш ніж 20 зарубіжних академій і наукових товариств.

А.М. Колмогорова по праву вважають одним з найвидатніших учених XX ст.



Павло Сергійович Александров (1896–1982)

Павло Сергійович Александров – російський математик, який прожив яскраве й красиве життя. Народився в сім'ї лікаря в Бєлгородську (нині м. Ногінськ) Московської області. Уже в 14 років П. Александров захоплювався математикою, однак він добре знав і любив і літературу, особливо поезію, і музику, і театр.

У 19 років, на другому році навчання в Московському університеті (1913–1917 рр.) на математичному факультеті, розв'язав задачу – *теорему про потужність так званих борелівських множин*. (Науковий керівник дослідження М.М. Лузін – представник нового в ті часи теоретико-множинного напряму). Це велике досягнення надало йому можливість одразу стати в перші ряди московських математиків.

Наступною задачею Лузіна, визначеною для молодого науковця, була так звана континуум-проблема. Це була одна з найважчих задач того часу. Саме ця задача змінила життя Павла Сергійовича. Спроба її розв'язати була відносно невдалою, тому вчений засумнівався у своїх математичних здібностях. (Пізніше стало відомо, що в колі ідей і методів школи Лузіна її розв'язати було неможливо). Він покинув університет і став режисером у театрі, завідував театральною секцією народної освіти, читав лекції з літератури і музики. Однак цей період життя вченого був дуже коротким. У 1921 р. він повернувся до Московського університету і ніколи більше його не залишав.

Найпродуктивніший період життя П.С. Александрова – період, коли він співпрацював з П.С. Урисоном. Вони створюють новий напрям геометрії – *основи топології*. У 1921–1924 рр. ними зроблено фундаментальний внесок в основи теоретико-множинної топології. За ці роботи П.С. Александрова в 1929 р. обирають членом-кореспондентом Академії наук СРСР. З 1929 р. він стає професором Московського університету, а з 1932 р. – президентом Московського математичного товариства. Академік АН СРСР з 1953 р. стає в 1954 р. членом редколегії «Математичної енциклопедії», редактором журналу «Успіхи математичних наук». Звання Героя Соціалістичної Праці йому присвоюють в 1969 р.

Ученим розроблено гомологічну теорію вимірності, яка безпосередньо закріплена за ним як першовідкривачем. П.С. Александров – почесний президент Московського математичного товариства (1964 р.), член багатьох Академій наук і наукових товариств, лауреат багатьох премій, відкривач радянської *топологічної* школи, яка отримала світове визнання. Павлу Сергійовичу Александрову належить заслуга у створенні наукової школи. Це була висококультурна людина, яка володіла вміннями організовувати і навчати талановитих молодих людей, що захоплювалися математичною наукою.

Погорєлов Олексій Васильович (1919–2002)

У школі є два головні предмети – рідна мова й геометрія. Одна вчить людину грамотно викладати думки, друга – дедуктивному мисленню.

О. В. Погорєлов

Народився Погорєлов Олексій Васильович 3 березня 1919 р. у м. Короча (Бєлгородська область).

Інтерес до математики у нього з'явився ще в 13–14 років у зв'язку з успішним виступом на математичних олімпіадах для школярів у роки навчання в середній школі № 80, що і нині знаходиться на вулиці Другої п'ятирічки м. Харкова. Це і визначило подальшу долю Олексія Васильовича. У 1936 р. він стає студентом фізико-математичного факультету Харківського університету, а у 1941 р. з початком Великої Вітчизняної війни його було призвано до армії і направлено до Військово-повітряної академії ім. Жуковського (Москва).

Після закінчення війни Олексій Васильович продовжив навчання і у 1947 р. захистив у Московському університеті кандидатську дисертацію, а потім перевівся до Харківського університету, де у 1948 р. захистив докторську дисертацію. Ця робота була відзначена Сталінською премією (1950 р.) – першою з шести престижних премій, якими було відзначено його наукові досягнення.

Завдяки фундаментальним результатам О.В. Погорєлова вітчизняна школа з геометрії в цілому займала в другій половині XX ст. провідне місце у світі. З 1960 р. Олексій Васильович став працювати в новозаснованому у Харкові Фізико-технічному інституті низьких температур Академії наук України та очолив відділ геометрії. Вже будучи вченим зі світовим ім'ям, Олексій Васильович почав займатися створенням підручника для школи. Погорєлов побудував виклад матеріалу у своєму підручнику, поклавши в його основу строгу й прозору систему аксіом. Навчаючись за підручником геометрії О.В. Погорєлова, виросло не одне покоління школярів. З моменту масового впровадження в школи (1982 р.) підручник більше двох десятиліть перевидавався багатомільйонними накладами різними мовами. У школах України він використовується і тепер.

У Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б.Є. Вєркіна Національної академії наук України Олексій Васильович пропрацював 40 років – до від'їзду до Москви в 2000 р., де помер 17 грудня 2002 р.

Першокласні підручники О.В. Погорєлова для вузів і середньої школи, як і вся його науково-педагогічна спадщина,

16-Geometrija, 10 kl (Biljanina)

ввійшли в скарбницю світової науки і продовжують служити людям.

Погорєлов Олексій Васильович – заслужений діяч науки і техніки України, почесний громадянин міста Харкова, лауреат Державної премії СРСР (1950 р.), Міжнародної премії імені Лобачевського (1959 р.), Ленінської премії (1962 р.), Державної премії УРСР (1974 р.), Премії АН УРСР ім. Крилова (1988 р.), Премії НАН України ім. Боголюбова (1998 р.).

Тест для самоконтролю

● ***Частина 1***

Завдання 1–16 мають варіанти відповідей, з яких правильна тільки ОДНА або конкретна кількість. Виберіть правильну відповідь.

1°. Через три точки простору проведено різні площини. Виберіть три можливі розміщення цих точок.

А) Лежать на двох паралельних прямих;

Б) лежать на одній прямій;

В) лежать на трьох прямих, які не перетинаються;

Г) лежать на двох площинах, які перетинаються;

Д) лежать на двох різних прямих, які перетинаються.

2°. Точка M не належить площині трикутника ABC. Укажіть взаємне розміщення прямих MC і AB.

А) Збігаються;

Б) мимобіжні;

В) перпендикулярні;

Г) паралельні;

Д) перетинаються, але не перпендикулярні.

3°. Дві прямі m і k площини α перетинаються в точці O, а дві прямі a і b площини β – в точці Q. Визначте взаємне розміщення площин α і β, якщо $m \parallel a$, $k \parallel b$.

А) Збігаються; Б) перетинаються; В) паралельні.

4°. Укажіть мимобіжні прямі, що містять ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.6).

А) CD і A_1B_1; В) A_1D_1 і AB; Д) BB_1 і DD_1.

Б) B_1C_1 і AD; Г) AA_1 і CC_1;

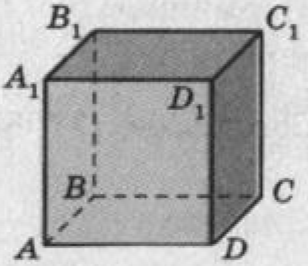


Рис. 7.6

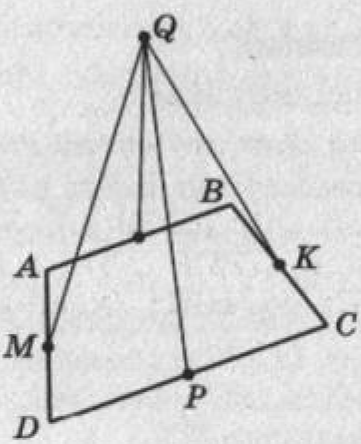


Рис. 7.7

5°. Укажіть для правильного трикутника його можливі проекції.

1) Правильний трикутник;
2) рівнобедрений трикутник;
3) прямокутний трикутник;
4) різносторонній трикутник;
5) одна точка;
6) три точки;
7) відрізок;
8) чотирикутник.

А) 1, 2, 4, 5 і 7; В) 1, 2, 4, 7 і 8; Д) 2, 3, 5, 6 і 7.
Б) 2, 3, 4, 5 і 8; Г) 1, 2, 3, 4 і 7;

6°. Точка Q рівновіддалена від сторін трапеції $ABCD$, $QM \perp AD$, $QP \perp CD$, $DC \parallel AB$ (рис. 7.7). Визначте два відрізки, які будуть рівними при будь-якому виді трапеції.

1) QA; 2) QM; 3) QD; 4) QP; 5) QC; 6) QB.

А) 1 і 6; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 3 і 6; Д) 1 і 5.

7°. Пряма PA перпендикулярна до площини ромба $ABCD$, O – точка перетину його діагоналей. Укажіть відрізок, який є відстанню між мимобіжними прямими AP і BD.

А) AC; Б) PC; В) BO; Г) PO; Д) AO.

8°. Пряма KO перпендикулярна до діагоналей AC і BD квадрата $ABCD$, які перетинаються в точці O. Визначте вид трикутника KOA.

А) Гострокутний; Б) прямокутний; В) тупокутний.

9°°. Відомо, що пряма a перпендикулярна до прямої b, а пряма b перпендикулярна до площини φ. Укажіть взаємне розміщення прямої a і площини φ.

А) Паралельні; В) перпендикулярні;
Б) перетинаються; Г) пряма належить площині.

10°°. Відомо, що площина α перпендикулярна до прямої b, а пряма b паралельна прямій c. Укажіть взаємне розміщення прямої c і площини α.

А) Паралельні;

Б) перпендикулярні;

В) пряма належить площині;

Г) паралельні або пряма належить площині;

Д) паралельні або перетинаються.

11°°. Площина α, яка паралельна основі BC трапеції $ABCD$, перетинає сторони AB і CD в точках M і K відповідно. M – середина AB, $AD = 10$ см, $BC = 4$ см (рис. 7.8). Знайдіть довжину відрізка MK.

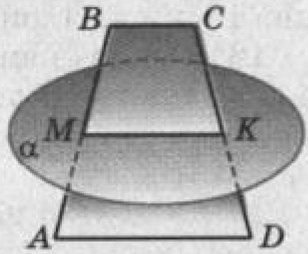


Рис. 7.8

А) 8 см; В) 14 см; Д) 10,5 см.

Б) 7 см; Г) 12 см;

12°°. Кінці ребер куба, які виходять з однієї вершини, сполучено відрізками. Площа трикутника, який утворився при цьому, дорівнює $\sqrt{12}$ см^2. Знайдіть довжину ребра куба.

А) $2\sqrt{2}$ см; Б) $4\sqrt{2}$ см; В) $2\sqrt{3}$ см; Г) 2 см; Д) 3 см.

13°°. Відстань від точки M до всіх вершин квадрата дорівнює 5 см, діагональ квадрата – 6 см. Знайдіть відстань від точки M до площини квадрата.

А) 3 см; Б) 4 см; В) 2 см; Г) 5 см; Д) 8 см.

14°°. Відрізок MK – середня лінія трикутника ABC ($M \in AC$, $K \in AB$), у якому $\angle C = 90°$. Відрізок PK – перпендикуляр до площини (ABC). Визначте прямі кути.

1) PKA; 3) PMC; 5) PMB; 7) PBM;

2) PCB; 4) PBC; 6) PKM; 8) PAC.

А) 1, 4 і 7; Б) 3, 5 і 8; В) 2, 6 і 8; Г) 1, 3 і 6; Д) 2, 4 і 7.

15°°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через ребра A_1D_1 і BC проведено площину. Укажіть лінійні кути, які визначають кут між площинами (A_1D_1CB) і (BCC_1B_1).

1) $\angle C_1D_1C$; 2) $\angle B_1A_1D_1$; 3) $\angle D_1CC_1$; 4) $\angle B_1BA_1$; 5) $\angle B_1A_1B$.

А) 1 і 2; Б) 2 і 3; В) 3 і 4; Г) 4 і 5; Д) 1 і 5.

16°°. З даної точки до площини проведено дві похилі, різниця довжин яких дорівнює 6 см, їхні проекції на цю площину дорівнюють 27 см і 15 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини.

А) 36 см; Б) 39 см; В) 33 см; Г) 30 см; Д) 42 см.

● *Частина 2*

Розв'яжіть завдання 17–28 з коротким записом ходу міркувань.

17•. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см. Поза площиною трикутника дано точку, яка знаходиться на відстані 10 см від кожної його вершини. Знайдіть відстань від цієї точки до площини трикутника.

18•. Основа і висота рівнобедреного трикутника дорівнюють 4 см. Дана точка знаходиться на відстані 6 см від площини трикутника і на однаковій відстані від його вершин. Знайдіть цю відстань.

19•. З деякої точки простору до даної площини проведено перпендикуляр, що дорівнює 12 см, і похила завдовжки 13 см. Обчисліть проекцію перпендикуляра на похилу.

20•. До площини прямокутника $ABCD$ через його вершину D проведено перпендикуляр DK, кінець якого K віддалений від сторони AB на 2,4 см, від сторони BC – на 2,8 см, від вершини B – на 3,6 см. Знайдіть довжину перпендикуляра DK.

21•. У прямокутному трикутнику ABC кут A дорівнює 30°, більший катет – 6 см. З вершини гострого кута B проведено перпендикуляр $BK = 2\sqrt{6}$ см до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки K до катета AC.

22•. Дано трикутник зі сторонами 26 см, 28 см і 30 см. Точка M віддалена від усіх сторін трикутника на 17 см і проекціюється у внутрішню точку трикутника. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

23•. Сторони трикутника дорівнюють 20 см, 65 см і 75 см. З вершини більшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр, довжина якого 60 см. Знайдіть відстань від кінців перпендикуляра до більшої сторони трикутника.

24•. Площа ромба дорівнює 120 см^2, а його сторона – 12 см. Точка M віддалена від усіх сторін ромба на 13 см. Знайдіть відстань від точки M до площини ромба.

25•. Площа рівностороннього трикутника дорівнює $27\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть відстань між площиною трикутника і точкою, яка віддалена від кожної з його вершин на 10 см.

26•. З точки, що знаходиться на відстані 4 см від площини, проведено до цієї площини дві похилі завдовжки 5 см і $4\sqrt{5}$ см. Кут між проекціями цих похилих дорівнює 60°. Знайдіть відстань між основами похилих.

27•. З кінців відрізка, що належать двом взаємно перпендикулярним площинам, до лінії перетину даних площин проведено перпендикуляри, відстань між основами яких дорівнює 3 см. Проекції відрізка на ці площини дорівнюють $3\sqrt{2}$ см і $3\sqrt{3}$ см. Обчисліть кути, утворені відрізком з даними площинами.

28*. Відрізок завдовжки 25 см опирається кінцями на дві взаємно перпендикулярні площини. Відстані від кінців відрізка до площин дорівнюють 15 см і 16 см. Знайдіть проекції відрізка на кожну з площин.

● ***Частина 3***

Розв'яжіть завдання 29–32 з повним обґрунтуванням.

29.** У прямокутній трапеції $ABCD$ бічні сторони дорівнюють 24 см і 25 см, а більша діагональ BD є бісектрисою прямого кута. З вершини тупого кута C до площини трапеції проведено перпендикуляр CM завдовжки $7\sqrt{15}$ см. Знайдіть відстань від точки M до вершини A.

30.** Вершина C рівностороннього трикутника ABC, сторона якого 8 см, віддалена від площини α на $2\sqrt{3}$ см. Обчисліть кут між площиною трикутника ABC і площиною α, якщо сторона AB лежить на площині α.

31.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 128 см, а медіана, проведена до основи, 32 см. Відстані від точки простору до вершин трикутника дорівнюють по 65 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини даного трикутника.

32.** Пряма a паралельна площині ω. Через точки A і B прямої a проведено паралельні прямі, які перетинають площину ω в точках A_1 і B_1 відповідно. Знайдіть площу чотирикутника AA_1B_1B, якщо $A_1B_1 = 13$ см, $AA_1 = 14$ см, $A_1B = 15$ см.

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

ВІДПОВІДІ

1.13. 16 см. **1.14.** 18 см і 30 см. **1.15.** 1 см або 11 см. **1.16.** 51° і 102°. **1.17.** 20 см; 15 см; 40 см; 35 см; 55 см. **1.49.** 13 см. **1.50.** $AB \parallel CD$. **1.51.** $7\frac{2}{3}$ см; $8\frac{2}{3}$ см; $11\frac{2}{3}$ см. **1.52.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. **1.53.** 14 см. **1.54.** $8\sqrt{3}$ см. **1.55.** 17 см. **1.56.** 24 см. **1.57.** 4,8 см. **1.58.** 18 см. **1.59.** $48\sqrt{3}$ см. **1.60.** 20 см і 25 см. **1.61.** 10 см. **1.62.** 2,5 см і 12,5 см. **1.63.** 54 см^2. **1.64.** $66\sqrt{3}$ см^2. **1.65.** 25 см. **1.66.** 1) 150 см^2; 2) 336 см^2. **1.67.** $96\sqrt{3}$ см^2. **1.68.** 100π см^2. **1.69.** $10\sqrt{3}$ см^2. **1.81.** 15 см. **1.82.** $64\sqrt{3}$ см^2. **1.83.** $2\sqrt{13}$ см. **1.84.** 240 см^2. **1.85.** 20 см. **1.86.** 1500 см^2. **1.87.** 72 см. **1.88.** 60 см. **3.20.** $a+b$. **3.34.** 4 см. **3.36.** 6 см. **3.37.** 5 : 2. **3.53.** 48 см. **3.54.** 18 см. **3.55.** 1) 20 см; 2) 6,4 см; 3) 30 см; 4) $\frac{c(a+b)}{a}$. **3.58.** 1) 12 см; 2) 10 см і 12 см. **4.19.** 2 м. **4.22.** 3) $18\sqrt{2}$ см^2. **4.33.** a. **4.34.** Так. **4.40.** 32 см. **4.41.** 6 см. **4.42.** 20 см. **4.46.** 17,5 см, 21 см. **4.64.** 3) 18 см^2. **5.9.** $3a\sqrt{2}$ см; $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ см^2. **5.10.** 1) $15\sqrt{2}$ см; 2) $(5\sqrt{2}+2\sqrt{61})$ см; 3) $(5+\sqrt{34}+\sqrt{41})$ см; 4) $a(\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{13})$ см. **5.12.** $\sqrt{a^2+b^2}$ + $\sqrt{a^2+c^2}$ + $\sqrt{b^2+c^2}$; $(5+3\sqrt{5}+2\sqrt{13})$ см. **5.13.** $(6\sqrt{5}+2\sqrt{17})$ см. **5.47.** 13 см і $4\sqrt{10}$ см. **5.48.** 13 см. **5.49.** 5 см і 9 см. **5.50.** 9 см. **5.51.** 24 см і $20\sqrt{2}$ см. **5.52.** 12 см. **5.53.** $2\sqrt{6}$ см. **5.54.** 26 см. **5.55.** 24 см. **5.56.** 3 см. **5.57.** 9,6 см. **5.58.** 12 см. **5.59.** 3,5 дм^2. **5.60.** 15 см. **5.61.** $12\sqrt{3}$ см. **5.62.** 30 см. **5.63.** 6 см. **5.75.** $2\sqrt{3}$ см. **5.82.** 20 см і 24 см. **5.83.** 7 см і 15 см. **6.21.** 60°. **6.22.** 60°. **6.23.** 12 см. **6.27.** $5\sqrt{3}$ см. **6.29.** 3 см. **6.30.** 3 см. **6.31.** 9 см. **6.32.** 5 см. **6.33.** 30°. **6.34.** 60°. **6.35.** 30°. **6.36.** 15 см; 30°. **6.37.** 24 см. **6.38.** 4 см або 8 см. **6.40.** a; 45°. **6.61.** 6,2 см. **6.62.** $\sqrt{68{,}5}$; 8. **6.63.** 12 см. **6.64.** 30 см. **6.65.** $\sqrt{18{,}75}$ см. **6.66.** 8 см. **6.67.** 6 см. **6.68.** 4 см. **6.69.** 17 см. **6.70.** 9 см. **6.71.** 29 см. **6.72.** 35 см. **6.76.** 8 см. **6.77.** 6,4 см. **6.78.** $6\sqrt{3}$ см. **6.79.** 15 см. **6.80.** 8 см. **6.81.** 8 см. **6.82.** 13 см. **6.83.** 36 см. **6.84.** 12 см. **6.85.** 8 см. **6.101.** 6 см. **6.102.** 12 см. **6.103.** 36 см^2. **6.104.** 60°. **6.107.** 18 см. **6.108.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. **6.110.** 36 см^2. **6.111.** $\alpha = \arccos\frac{1}{14}$; $S = \frac{30}{7}$ см^2. **6.112.** $\alpha = \arccos\frac{2}{21}$; $S = \frac{632}{7}$ см^2. **6.113.** $\alpha = \arccos\frac{1}{14}$; S = 30 см^2. **6.114.** $\alpha = \arccos\frac{2}{21}$; $S = \frac{640}{21}$ см^2.

7.56. 12 см. **7.57.** 7 : 1. **7.58.** 6,4 см. **7.59.** 5,2 см. **7.60.** 6 см. **7.61.** 20 см. **7.62.** $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ см. **7.63.** 20 см. **7.64.** 20 см. **7.65.** 25 см. **7.66.** 15 см і 20 см. **7.67.** $3\sqrt{41}$ см і $\sqrt{433}$ см. **7.68.** $4\sqrt{3}$ см. **7.69.** $36\sqrt{3}$ см. **7.70.** 30°. **7.71.** 168 см^2. **7.72.** 13 см. **7.73.** 60°. **7.74.** 45° і 30°. **7.75.** 45° і 30°.

МОДУЛЬ 1. Тест для самоконтролю
Частини 2 і 3

Завдання	17	18	19	20	21	22
Відповідь	50 %	90° і 270°	8,5 см	5 см	$8\sqrt{2}\pi$ см	9 см
Завдання	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
Відповідь	28 см і 36 см	4 см	34 см	9 см	52 см	4 см
Завдання	**29**	**30**	**31**	**32**		
Відповідь	2,6 см і 33,8 см	120 см	60°	2187 см^2		

МОДУЛЬ 3. Тест для самоконтролю
Частини 2 і 3

Завдання	17	18	19	20	21	22
Відповідь	31,5 см	4,9 см	2 см	22 см	10 см	21 см
Завдання	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
Відповідь	8 см	$\frac{bc}{a+c}$; 8 см	21 см	21 см	2 см	6 см
Завдання	**29**	**30**				
Відповідь	27 см	7 см; 12 см; 13 см				

МОДУЛЬ 4. Тест для самоконтролю
Частини 2 і 3

Завдання	17	18	19	20	21	22
Відповідь	3,2 см	3 см	4,5 см	14 см	20 см	$9\sqrt{3}$ см^2
Завдання	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
Відповідь	10 см	1,5 см	6 см^2	6 см	9 см і 15 см	128 см^2
Завдання	**29 (4)**	**30 (2)**				
Відповідь	4,5 см; 13,5 см	12 см				

МОДУЛЬ 5. Тест для самоконтролю
Частини 2 і 3

Завдання	17	18	19	20	21	22
Відповідь	5 см	12 см	3 см	$4\sqrt{43}$ см	26 см	15 см
Завдання	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
Відповідь	8 см	45 см	36 см	$\sqrt{15}$ см	8 см	24 см

МОДУЛЬ 6. Тест для самоконтролю

Частини 2 і 3

Завдання	17	18	19	20	21	22
Відповідь	17 см	60°	$4\sqrt{5}$ см	20 см	8 см	6 см
Завдання	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
Відповідь	$\frac{2\sqrt{3}a}{3}$ см	$\arccos\frac{1}{5}$	18 см і 30 см	1,75 см	$\sqrt{6}$ см^2	6 см
Завдання	**29**	**30**	**31**			
Відповідь	$\frac{a\sqrt{6}}{3}$	6 см	30°			

МОДУЛЬ 7. Тест для самоконтролю

Частини 2 і 3

Завдання	17	18	19	20
Відповідь	8 см	6,5 см	$11\frac{1}{13}$ см	0,8 см
Завдання	**21**	**22**	**23**	**24**
Відповідь	6 см	15 см	16 см і $4\sqrt{241}$ см	12 см
Завдання	**25**	**26**	**27**	**28**
Відповідь	8 см	7 см	45° і $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\arccos\frac{4}{5}$ і $\arccos\frac{3\sqrt{41}}{25}$
Завдання	**29**	**30**	**31**	**32**
Відповідь	$2\sqrt{610}$ см	$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$	60 см	168 см^2

ЗМІСТ

Навчальне видання

БІЛЯНІНА Ольга Ярославівна
БІЛЯНІН Григорій Іванович
ШВЕЦЬ Василь Олександрович

ГЕОМЕТРІЯ
10 клас

Академічний рівень

Підручник
для загальноосвітніх
навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством
освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Редактор *Н. Дашко*
Художній редактор *В. Марущинець*
Технічний редактор *В. Олійник*
Коректор *І. Іванюсь*
Комп'ютерна верстка
і технічні малюнки *Ю. Лебедєва*