

ИЗДАТЕЛЬСТВО
РАНОК



Интернет-
поддержка

А. П. Ершова, В. В. Голобородько,
А. Ф. Крижановский, С. В. Ершов

Геометрия 8

общеобразовательная
и допрофильная подготовка

УДК [514:37.016](075.3)

ББК 22.151.0+я721

Е 80

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
(приказ Министерства образования и науки Украины от 10.05.2016 г. № 491)

Издано за счет государственных средств. Продажа запрещена

Эксперты, осуществившие экспертизу данного учебника в ходе проведения конкурсного отбора проектов учебников для учащихся 8 класса общеобразовательных учебных заведений и давшие заключение о целесообразности присвоения учебнику грифа

«Рекомендовано Министерством образования и науки Украины»:

Е. А. Герус, учитель коммунального учреждения «Луцкий учебно-воспитательный комплекс «общеобразовательная школа I–III ступеней № 22 — лицей» Луцкого городского совета», учитель-методист;

Я. И. Гевко, главный специалист по вопросам общего образования отдела образования исполнительных органов Дрогобычского городского совета Львовской области, учитель-методист Дрогобычской общеобразовательной школы I–III ступеней № 1 им. Ивана Франко;

А. А. Тилищак, доцент кафедры алгебры ГВУЗ «Ужгородский национальный университет», канд. физ.-мат. наук

Рецензенты:

Е. П. Нелин, профессор кафедры математики Харьковского национального педагогического университета им. Г. С. Сковороды, канд. пед. наук;

А. Н. Роганин, учитель математики высшей квалификационной категории Песочинского колледжума Харьковского районного совета Харьковской области, учитель-методист;

И. С. Маркова, главный редактор научно-методического журнала «Математика в школах Украины»

Переведено по изданию: Ершова А. П. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. П. Ершова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Ершов. — Х. : Вид-во «Ранок», 2016. — 256 с. : іл.

Перевод с украинского С. В. Русиновой

Ершова А. П.

Е 80 Геометрия : учебник для 8 кл. общеобразоват. учеб. заведений с обучением на рус. яз. : [пер. с укр.] / А. П. Ершова, В. В. Голобородько, А. Ф. Крижановский, С. В. Ершов. — Харьков : Изд-во «Ранок», 2016. — 256 с. : ил.

ISBN 978-617-09-2941-9

УДК [514:37.016](075.3)

ББК 22.151.0+я721

ИНТЕРНЕТ-ПОДДЕРЖКА
Чтобы воспользоваться
электронными приложениями
к учебнику, зайдите на сайт
interactive.ranok.com.ua



Служба технической поддержки:
тел. (057) 719-48-65, (098) 037-54-68
(понедельник–пятница с 10:00 до 18:00)
e-mail: interactive@ranok.com.ua

ISBN 978-617-09-2941-9 (рус.)
ISBN 978-617-09-2854-2 (укр.)

© Ершова А. П., Голобородько В. В.,
Крижановский А. Ф., Ершов С. В., 2016
© Хорошенко В. Д., иллюстрации, 2016
© ООО Издательство «Ранок», 2016

Дорогие друзья!



В мире геометрии вы уже не ощущаете себя чужими: в седьмом классе вы познакомились со многими важными этапами ее развития, начали осваивать ее язык и овладевать ее законами. Но геометрию неспроста считают удивительной наукой: каждый раз нова и непредсказуема, она открывает свои бесценные сокровища лишь тому, кто проникся ее духом и стремится не останавливаться на достигнутом.



В школьном курсе геометрии можно условно выделить несколько направлений. На начальном этапе преобладает *«геометрия доказательств»* — вы впервые встретились с понятием доказательства, овладели его методами и логикой, научились получать из одних утверждений другие, обосновывать свои выводы. В течение этого учебного года основное место будет отведено *«геометрии вычислений»*. Многие теоремы, которые вы будете изучать, содержат формулы, позволяющие получать новые числовые характеристики геометрических фигур. Важнейшей из этих теорем является знаменитая теорема Пифагора, встреча с которой ждет вас именно в восьмом классе.

Однако изучение геометрии не сводится к одним вычислениям. С помощью этого учебника вы исследуете новые геометрические фигуры, углубите свои знания в области логики, приобретете опыт решения задач оригинальными методами, узнаете о жизни и достижениях выдающихся ученых прошлого. Почти в каждом параграфе вам предложено доказать математическое утверждение или привести пример, провести аналогию, то есть проявить самостоятельность в получении знаний. Надеемся, что каждый шаг на пути познания прибавит вам уверенности в собственных силах и приблизит к новым горизонтам науки.

Как пользоваться учебником

В учебнике четыре главы, каждая из которых состоит из параграфов, а параграфы — из пунктов. В тексте содержится как теоретический материал, так и примеры решения задач. Важнейшие понятия и факты выделены **полужирным шрифтом**.

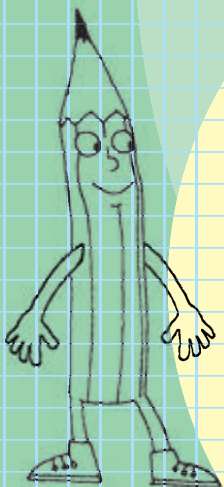
Упражнения и задачи, представленные в учебнике, делятся на несколько групп. **Устные упражнения** помогут вам понять, насколько успешно вы усвоили теоретический материал. Эти упражнения не обязательно выполнять «в уме» — для их решения вы можете выполнить рисунки и необходимые действия в черновике. После устных можно переходить к **графическим упражнениям**, которые выполняются в тетради или на компьютере. Далее идут **письменные упражнения**. Сначала проверьте свои знания, выполняя задачи **уровня А**. Более сложными являются задачи **уровня Б**. И наконец, если вы хорошо усвоили материал и хотите проявить свои творческие способности, вас ждут задачи **уровня В**. Значки  и  возле номеров упражнений обозначают, что эти упражнения на усмотрение учителя могут быть использованы соответственно для работы в парах и группах.

После каждого параграфа в рубрике «**Повторение**» указано, какие именно понятия и факты следует вспомнить для успешного изучения следующего материала (рядом, в частности, указаны соответствующие параграфы в учебнике: Ершова А. П. Геометрия : учебник для 7 класса общеобразоват. учеб. заведений с обучением на русском языке / А. П. Ершова, В. В. Голобородько, А. Ф. Крижановский. — Харьков : Издательство «Ранок». — 2015. — 224 с.: ил.), и приведены соответствующие задачи, которые подготовят вас к восприятию новой темы. Для самостоятельной работы дома предназначены задачи, номера которых обозначены значком . В конце каждой главы даны **контрольные вопросы** и **типовые задачи для контрольных работ**, благодаря которым вы сможете лучше подготовиться к тематическому оцениванию. Пройдя онлайн-тестирование на сайте interactive.ranok.com.ua, вы сможете самостоятельно проверить уровень ваших знаний. Дополнительные задачи к главам помогут вам обобщить изученное, а задачи повышенной сложности откроют новые грани геометрии и красоту нестандартного мышления. Расширить свои знания по каждой главе вы можете, просмотрев видеоматериалы на том же сайте. О возможности воспользоваться материалами сайта вам будет напоминать значок .

Итоговые обзоры в конце каждой главы послужат своеобразным геометрическим компасом и помогут ориентироваться в изученном материале. **Приложения**, приведенные в конце учебника, углубят ваши знания по отдельным изученным темам, а **исторические справки** к главам и материалы рубрики «**Выдающиеся математики Украины**» познакомят с некоторыми интересными фактами о развитии геометрии и с деятельностью известных ученых.

Глава I

Четырехугольники



- § 1. Четырехугольник и его элементы
- § 2. Параллелограмм и его свойства
- § 3. Признаки параллелограмма
- § 4. Виды параллелограммов
- § 5. Трапеция
- § 6. Теорема Фалеса. Средние линии треугольника и трапеции
- § 7. Вписанные углы
- § 8. Вписанные и описанные четырехугольники
- § 9.* Замечательные точки треугольника

В огромном саду геометрии каждый
может подобрать себе букет по вкусу.

Давид Гильберт, математик

Изучая геометрию в седьмом классе, вы познакомились с основными свойствами треугольников. Курс геометрии восьмого класса начинается с рассмотрения более сложных фигур — четырехугольников. Но это не означает, что уже изученную и, наверное, немного забытую за лето тему «Треугольники» не следует вспоминать. Наоборот, этот материал нужно повторить еще до того, как вы придете на первый урок геометрии в восьмом классе. Ведь именно свойства треугольников являются тем ключом, который открывает дверь в мир геометрии.

Отдельные виды четырехугольников уже известны вам из курса математики 5–6 классов. Наиболее внимательные и наблюдательные могли заметить, что особое место среди четырехугольников занимают те, у которых имеются параллельные стороны. Именно поэтому уже в ближайшее время вам пригодятся свойства и признаки параллельных прямых, доказанные в седьмом классе,— этот материал также следует повторить.

Среди теорем, которые будут рассматриваться в этой главе, особая роль отводится теореме Фалеса — одной из древнейших теорем геометрии. С ее помощью мы продолжим открывать новые секреты геометрических фигур.



§1

Четырехугольник и его элементы

1.1. Определение четырехугольника

С четырехугольником вы уже знакомились на уроках математики. Дадим строгое определение этой фигуры.

Определение

Четырехугольником называется фигура, состоящая из четырех точек и четырех отрезков, которые их последовательно соединяют. Данные точки называются **вершинами четырехугольника**, а отрезки — **сторонами четырехугольника**. При этом никакие три вершины не лежат на одной прямой и никакие две стороны не пересекаются.

На рис. 1 изображен четырехугольник с вершинами A , B , C и D и сторонами AB , BC , CD и AD .

Говорят, что две вершины четырехугольника являются **соседними вершинами**, если они соединены одной стороной; вершины, которые не являются соседними, называют **противолежащими вершинами**. Аналогично стороны четырехугольника, имеющие общую вершину, являются **соседними сторонами**, а стороны, не имеющие общих точек, — **противолежащими сторонами**. На рис. 1 стороны AB и CD — соседние для стороны BC , а сторона AD — противолежащая стороне BC ; вершины B и D — соседние с вершиной A , а вершина C — противолежащая вершине A .

Четырехугольник обозначают, последовательно указывая все его вершины, причем буквы, которые стоят рядом, должны обозначать соседние вершины. Например, четырехугольник на рис. 1 можно обозначить $ABCD$, $BCDA$ или $CBAD$, но нельзя обозначать $ABDC$ или $BDCA$.

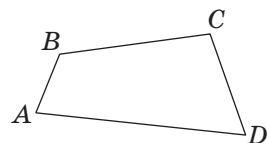


Рис. 1. Четырехугольник $ABCD$



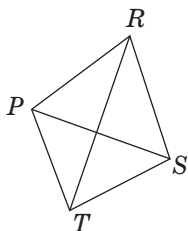


Рис. 2. Отрезки PS и RT — диагонали четырехугольника $PRST$

Определение

Диагональю четырехугольника называется отрезок, соединяющий две противоположные вершины.

В четырехугольнике $PRST$ (рис. 2) диагоналями являются отрезки PS и RT .

Следует отметить, что любой четырехугольник имеет диагональ, которая делит его на два треугольника.

Определение

Периметром четырехугольника называется сумма длин всех его сторон.

Периметр четырехугольника (как и треугольника) обозначают буквой P :

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD.$$

1.2. Выпуклые четырехугольники. Сумма углов четырехугольника

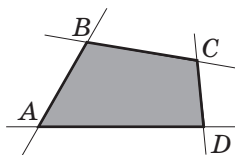
Любой четырехугольник ограничивает конечную часть плоскости, которую называют **внутренней областью** этого четырехугольника (на рис. 3, а, б она закрашена).

На рис. 3 изображены два четырехугольника и проведены прямые, на которых лежат стороны этих четырехугольников. В четырехугольнике $ABCD$ эти прямые не проходят через внутреннюю область — такой четырехугольник является **выпуклым** (рис. 3, а). В четырехугольнике $EFKM$ прямые EM и KM проходят через внутреннюю область — этот четырехугольник является **невыпуклым** (рис. 3, б).

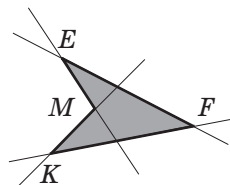
Определение

Четырехугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от любой прямой, содержащей его сторону.

Действительно, четырехугольник $ABCD$ на рис. 3, а лежит по одну сторону от любой



а



б

Рис. 3. Выпуклый (а) и невыпуклый (б) четырехугольники

из прямых AB , BC , CD или AD . В школьном курсе геометрии мы будем рассматривать только выпуклые четырехугольники (если иное не оговорено отдельно).

Попробуйте начертить два четырехугольника, диагонали одного из которых пересекаются, а второго — нет.

Определение

Углом (внутренним углом) выпуклого четырехугольника $ABCD$ при вершине A называется угол BAD .

Угол, смежный с внутренним углом четырехугольника при данной вершине, называют **внешним углом четырехугольника** при данной вершине.

Углы, вершины которых являются соседними, называют **соседними углами**, а углы, вершины которых являются противоположными, — **противоположными углами** четырехугольника.

Теорема (о сумме углов четырехугольника)

Сумма углов четырехугольника равна 360° .

Доказательство¹

□ В данном четырехугольнике $ABCD$ проведем диагональ, которая делит его на два треугольника (рис. 4). Поскольку $\angle BAD = \angle 1 + \angle 2$, $\angle BCD = \angle 3 + \angle 4$, то сумма углов четырехугольника $ABCD$ равна сумме всех углов треугольников ABC и ADC , то есть равна 360° .

Теорема доказана. ■

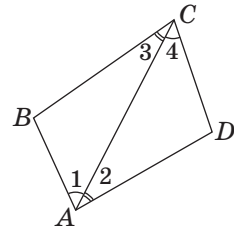


Рис. 4. Сумма углов четырехугольника равна сумме углов двух треугольников

Задача

Углы четырехугольника $ABCD$, соседние с углом C , равны, а противоположный угол в два раза больше угла C . Найдите угол C , если $\angle B = 60^\circ$.

¹ Отметим, что эта теорема и ее доказательство справедливы и для невыпуклых четырехугольников (см. задачу 29).



Решение

Углами, соседними с C , являются углы B и D , а углом, противолежащим C , — угол A . По условию задачи $\angle B = \angle D = 60^\circ$. Поскольку сумма углов четырехугольника равна 360° , то $\angle A + \angle C = 360^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 240^\circ$. Если градусная мера угла C равна x , то градусная мера угла A по условию равна $2x$. Отсюда имеем: $x + 2x = 240$; $3x = 240$; $x = 80$. Значит, $\angle C = 80^\circ$.

Ответ: 80° .

Вопросы и задачи



Устные упражнения

- Сколько соседних вершин имеет вершина четырехугольника? Сколько противолежащих? Назовите соседние и противолежащие вершины для вершины B четырехугольника $ABCD$.
- Сколько соседних сторон имеет сторона четырехугольника? Сколько противолежащих? Назовите соседние и противолежащие стороны для стороны AD четырехугольника $ABCD$.
- Отрезок, соединяющий две вершины четырехугольника, не является его диагональю. Могут ли данные вершины быть противолежащими?
- Вершинами четырехугольника являются точки K, L, M, N .
 - Известно, что KM и ML — стороны четырехугольника. Назовите его диагонали.
 - Известно, что KL — диагональ четырехугольника. Назовите вершины, соседние с вершиной K .
 - Данный четырехугольник можно назвать $KMLN$. Можно ли назвать его $MLKN$?
- Существует ли четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, $AC = 21$ см? Ответ обоснуйте.
- Могут ли все углы выпуклого четырехугольника быть острыми; тупыми; прямыми?

- 7. Может ли выпуклый четырехугольник иметь три острых угла; три тупых угла; два прямых угла; три прямых угла и один не прямой?
- 8. Могут ли углы треугольника быть равными трем углам из четырех углов четырехугольника? Ответ обоснуйте.



Графические упражнения

- 9. Начертите выпуклый четырехугольник с вершинами A , B , C и D .
 - а) Дайте название полученному четырехугольнику и проведите его диагонали.
 - б) Измерьте три угла четырехугольника. Пользуясь соответствующей теоремой, найдите градусную меру четвертого угла. Проверьте полученный результат измерением.
- 10. Проведите две параллельные прямые. Отметьте на одной из них точки A и D , а на другой — точки B и C так, чтобы при последовательном соединении этих точек получился четырехугольник $ABCD$.
 - а) Является ли построенный четырехугольник выпуклым? Почему?
 - б) Измерьте внешние углы четырехугольника $ABCD$ (по одному при каждой вершине) и вычислите их сумму.



Письменные упражнения

Уровень А

- 11. Найдите периметр четырехугольника, если его наименьшая сторона равна 5 см, а каждая следующая сторона на 2 см больше предыдущей.
- 12. Периметр четырехугольника равен 20 см. Найдите стороны четырехугольника, если одна из них составляет 40 % периметра, а три оставшиеся равны.
- 13. Два угла четырехугольника равны 80° и 100° , а два других угла имеют равные градусные меры. Найдите наибольший угол четырехугольника.
- 14. Найдите углы четырехугольника $ABCD$, если $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$, а сумма углов A и B равна 160° .
- 15. Если три угла четырехугольника являются тупыми, то четвертый угол — острый. Докажите.
- 16. Если сумма трех углов четырехугольника равна 270° , то две стороны четырехугольника перпендикулярны. Докажите.


Уровень Б

17. Определите, может ли четырехугольник $ABCD$ быть выпуклым, если:


- а) точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC ;
- б) прямая AB пересекает прямую CD ;
- в) прямая AB пересекает отрезок CD .

Выполните рисунки.


18. Найдите стороны четырехугольника, если его периметр равен 3 дм, а одна сторона меньше каждой из трех оставшихся на 2 см, 3 см и 5 см соответственно.

 **19.** Стороны четырехугольника относятся как 3 : 4 : 5 : 6. Найдите периметр четырехугольника, если сумма его наибольшей и наименьшей сторон равна 18 см.

20. Найдите углы четырехугольника, если один из них вдвое меньше второго, на 20° меньше третьего и на 40° меньше четвертого.

 **21.** Найдите наименьший угол четырехугольника, если суммы его углов, взятых по три, равны 240° , 260° и 280° .


22. Если один из углов выпуклого четырехугольника — острый, то в этом четырехугольнике обязательно есть тупой угол. Докажите.

 **23.** Один из углов выпуклого четырехугольника равен сумме двух других углов. Докажите, что данный угол является тупым.


Уровень В

24. Периметры четырехугольников $ABCD$ и $ABCD_1$ равны. Может ли один из этих четырехугольников быть выпуклым, а другой — невыпуклым? Ответ подтвердите рисунком.

25. Периметр четырехугольника $ABCD$ равен 23 дм. Найдите длину диагонали AC , если периметр треугольника ABC равен 15 дм, а периметр треугольника ADC равен 22 дм.

 **26.** В четырехугольнике три угла равны, а четвертый угол меньше их суммы на 240° . Найдите углы четырехугольника.

27. Докажите, что диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются.

 **28.** Докажите, что любой отрезок с концами на сторонах выпуклого четырехугольника лежит во внутренней области этого четырехугольника.

29. В невыпуклом четырехугольнике $ABCD$ градусной мерой угла при вершине B считают градусную меру α угла ABC , если хотя бы одна из внутренних точек отрезков CD или AD лежит во внутренней области угла ABC (рис. 5, а), или $(360^\circ - \alpha)$, если ни одна внутренняя точка отрезков CD и AD не лежит во внутренней области угла ABC (рис. 5, б). Докажите, что сумма углов невыпуклого четырехугольника равна 360° .

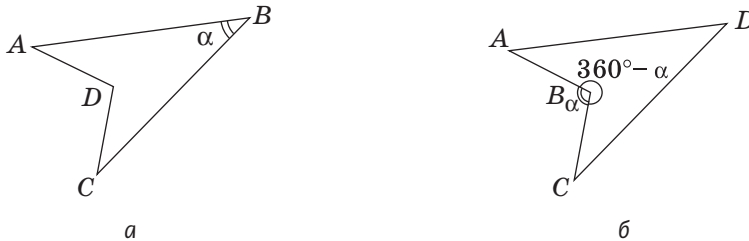


Рис. 5



Повторение перед изучением § 2

Теоретический материал

- треугольник и его элементы;
- признаки равенства треугольников;
- свойства и признаки параллельных прямых.

7 класс, § 7, 8, 10

7 класс, § 13–15

Задачи¹

30. Известно, что $\triangle KMN = \triangle NPK$ (рис. 6).
 а) Докажите, что $MK \parallel NP$.
 б) Найдите угол P , если $\angle M = 65^\circ$.
31. На рис. 6 $MK = PN$, $\angle MKN = \angle PNK$.
 а) Докажите, что $MN \parallel KP$.
 б) Найдите MN , если $KP = 14$ см.

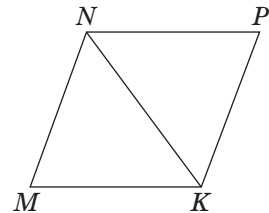


Рис. 6

¹ Напомним, что запись $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ означает равенство соответствующих сторон и углов, то есть $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

§2

Параллелограмм и его свойства

Параллелограмм – от греческих слов «параллелос» – идущий рядом, параллельный, и «грамма» – линия

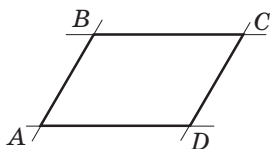


Рис. 7. Параллелограмм $ABCD$

2.1. Определение параллелограмма

Рассмотрим на плоскости две параллельные прямые, пересеченные двумя другими параллельными прямыми (рис. 7).

В результате такого пересечения образуется четырехугольник, который имеет специальное название — **параллелограмм**.

Определение

Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

На рис. 7 изображен параллелограмм $ABCD$, в котором $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.



Задача

На рис. 8 $\triangle KLM = \triangle MNK$. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм.

Решение

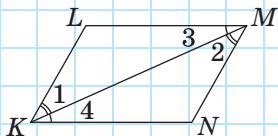


Рис. 8

Из равенства треугольников KLM и MNK следует равенство углов: $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Углы 1 и 2 являются внутренними накрест лежащими при прямых KL и MN и секущей KM . Аналогично углы 3 и 4 являются внутренними накрест лежащими при прямых LM и KN и секущей KM . По признаку параллельности прямых имеем: $KL \parallel MN$ и $LM \parallel KN$. Следовательно, в четырехугольнике $KLMN$ противоположные стороны попарно параллельны, т. е. $KLMN$ — параллелограмм по определению.

Как и в треугольнике, в параллелограмме можно провести высоты (рис. 9).

Определение

Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, проведенный из точки одной стороны к прямой, которая содержит противоположную сторону.

Очевидно, что к одной стороне параллелограмма можно провести бесконечно много высот (рис. 9, а), — все они будут равны как расстояния между параллельными прямыми. А из одной вершины параллелограмма можно провести две высоты к разным сторонам (рис. 9, б). Часто, говоря «высота параллелограмма», имеют в виду ее длину.

Вспомните, сколько высот можно провести к одной стороне треугольника; из одной вершины треугольника.

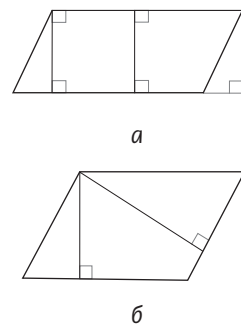


Рис. 9. Высоты параллелограмма

2.2. Свойства параллелограмма

Непосредственно из определения параллелограмма следует, что любые два его соседних угла являются внутренними односторонними при параллельных прямых, которые содержат противоположащие стороны. Это означает, что *сумма двух соседних углов параллелограмма равна 180°* .

Докажем еще несколько важных свойств сторон, углов и диагоналей параллелограмма.

Теорема (свойства параллелограмма)

В параллелограмме:

- 1) противоположащие стороны равны;
- 2) противоположащие углы равны;
- 3) диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Свойства 1 и 2 иллюстрирует рис. 10, а, а свойство 3 — рис. 10, б.

Доказательство

□ Проведем в параллелограмме $ABCD$ диагональ AC (см. рис. 11) и рассмотрим треугольники ABC

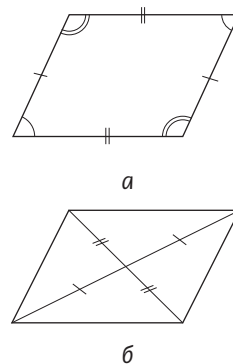


Рис. 10. Свойства параллелограмма

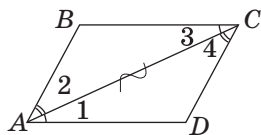


Рис. 11. Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника

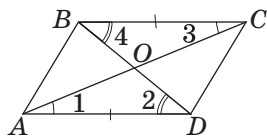


Рис. 12. При пересечении диагоналей параллелограмма образуются равные треугольники

и CDA . У них сторона AC — общая, $\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC , $\angle 2 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC . Следовательно, $\triangle ABC = \triangle CDA$ по второму признаку равенства треугольников. Отсюда, в частности, следует, что $AB = CD$, $AD = BC$ и $\angle B = \angle D$. А поскольку $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$, то $\angle BAD = \angle BCD$. Значит, свойства 1 и 2 доказаны.

Для доказательства свойства 3 проведем в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD , которые пересекаются в точке O (рис. 12).

Рассмотрим треугольники AOD и COB . У них $AD = BC$ по доказанному, $\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC , $\angle 2 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD . Следовательно, $\triangle AOD = \triangle COB$ по второму признаку. Отсюда следует, что $AO = CO$ и $BO = DO$, т.е. точка O является серединой каждой из диагоналей AC и BD . Теорема доказана полностью. ■

Задача

Сумма двух углов параллелограмма равна 200° . Найдите углы параллелограмма.

Решение

Пусть дан параллелограмм $ABCD$.

Поскольку сумма двух соседних углов параллелограмма равна 180° , то данные углы могут быть только противолежащими.

Пусть $\angle B + \angle D = 200^\circ$. Тогда по свойству углов параллелограмма $\angle B = \angle D = 200^\circ : 2 = 100^\circ$.

Значит, $\angle A = \angle C = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

Ответ: 80° и 100° .

Задача

В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A делит сторону BC пополам. Найдите периметр параллелограмма, если $AB = 6$ см.

Решение

Пусть в параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E , $BE = EC$ (рис. 13). Заметим, что $\angle 1 = \angle 2$, поскольку AE — биссектриса угла BAD , а $\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AE . Отсюда $\angle 2 = \angle 3$, т.е. по признаку равнобедренного треугольника треугольник ABE — равнобедренный с основанием AE , значит, $BE = AB = 6$ см. По условию $BE = EC$, т.е. $BC = 12$ см. Следовательно, поскольку противоположные стороны параллелограмма равны, то $P_{ABCD} = 2 \cdot (6 + 12) = 36$ (см).

Ответ: 36 см.

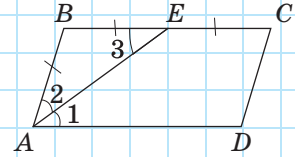


Рис. 13

Вопросы и задачи



Устные упражнения

32. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Назовите:
 - а) сторону, параллельную стороне BC ;
 - б) сторону, равную стороне CD ;
 - в) угол, равный углу A .
33. Верно ли, что любой параллелограмм имеет:
 - а) два угла, сумма которых равна 180° ;
 - б) два острых и два тупых угла?
34. В параллелограмме $ABCD$ $\angle B < \angle C$. Сравните углы A и D .
35. В параллелограмме $ABCD$ $AB + CD > AD + BC$. Сравните стороны BC и CD .

36. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (см. рис. 12). Назовите:

- а) отрезок, который является медианой треугольника ACD ;
- б) треугольник, медианой которого является отрезок AO .



Графические упражнения

37. Проведите две параллельные прямые. Отметьте на одной из них точки A и D и проведите через эти точки две другие параллельные прямые, которые пересекают вторую прямую в точках B и C соответственно.

- а) Объясните, почему четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.
- б) Измерьте угол A параллелограмма $ABCD$. Используя свойства параллелограмма, найдите градусные меры других его углов. Проверьте полученные результаты измерениями.
- в) Проведите диагональ AC и обозначьте ее середину — точку O . С помощью линейки проверьте, принадлежит ли эта точка отрезку BD .



38. Начертите треугольник ABD . Проведите через вершины B и D прямые, параллельные сторонам AD и AB соответственно. Обозначьте точку C — точку пересечения этих прямых.

- а) Объясните, почему четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.
- б) Проведите две высоты параллелограмма из вершины B . Равны ли они?
- в) Измерьте стороны AD и AB и найдите периметр параллелограмма. Каким свойством параллелограмма вы воспользовались?



Письменные упражнения


Уровень А

39. Начертите в тетради треугольник и проведите через каждую его вершину прямую, параллельную противоположной стороне. Сколько параллелограммов образовалось на рисунке? Сколько общих вершин имеют любые два из образовавшихся параллелограммов?



40. Три параллельные прямые пересекаются с двумя другими параллельными прямыми. Сколько параллелограммов образовалось?

41. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если сторона AD равна 12 см и составляет $\frac{2}{3}$ стороны AB .

 **42.** Периметр параллелограмма равен 24 см. Найдите стороны параллелограмма, если:

- а) одна из них на 2 см больше другой;
- б) одна из них в три раза меньше другой;
- в) сумма трех его сторон равна 17 см.

43. Найдите углы параллелограмма, если:


- а) один из них равен 110° ;
- б) один из них на 70° меньше другого;
- в) сумма двух его углов равна 90° ;
- г) диагональ образует с его сторонами углы 30° и 45° .

 **44.** Найдите углы параллелограмма, если:

- а) один из них прямой;
- б) градусные меры двух его углов относятся как 2 : 7;
- в) разность двух его углов равна 40° ;
- г) сумма трех его углов равна 330° .


45. Точка пересечения диагоналей параллелограмма удалена от двух его вершин на 5 см и 8 см. Найдите длины диагоналей параллелограмма.

46. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$, $\angle ADB = \angle CBD$. Докажите по определению, что $ABCD$ — параллелограмм.


 **47.** В четырехугольнике $VXYZ$ $VX \parallel YZ$, $\angle V + \angle X = 180^\circ$. Докажите по определению, что $VXYZ$ — параллелограмм.

Уровень Б

48. На плоскости даны три точки, не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм, тремя вершинами которого являются данные точки. Сколько решений имеет задача?

 **49.** Сколько различных параллелограммов можно образовать из двух равных разносторонних треугольников, прикладывая их друг к другу?

50. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 14 дм, а периметр треугольника ABC — 10 дм. Найдите длину диагонали AC .

 **51.** Сумма трех сторон параллелограмма равна 15 м, а сумма трех других его сторон — 18 м. Найдите периметр параллелограмма.

- 52.** Найдите углы параллелограмма, если:
- биссектриса одного из его углов пересекает сторону под углом 35° ;
 - высота параллелограмма образует с одной из его сторон угол 42° .
- 53.** Найдите углы параллелограмма, если:
- все его стороны равны, а диагональ образует с одной из сторон угол 25° ;
 - высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, делит данный угол в отношении $1 : 3$.
- 54.** Биссектриса угла D параллелограмма $ABCD$ делит сторону BC в отношении $1 : 4$, начиная от точки B . Найдите периметр параллелограмма, если $BC = 15$ см. Сколько решений имеет задача? Ответ обоснуйте.
- 55.** Биссектриса угла параллелограмма делит его сторону на отрезки длиной 5 см и 6 см. Найдите периметр параллелограмма. Сколько решений имеет задача?
- 56 (опорная).** *Любой отрезок с концами на противоположащих сторонах параллелограмма, проходящий через точку пересечения его диагоналей, делится этой точкой пополам. Докажите.*
- 57.** Из вершин тупых углов B и D параллелограмма $ABCD$ проведены перпендикуляры BA_1 и DC_1 к сторонам AD и BC соответственно. Докажите, что четырехугольник A_1BC_1D — параллелограмм.
- 58.** По данным рис. 14 докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

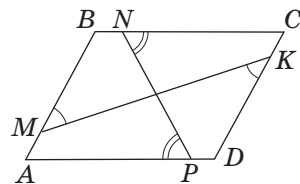


Рис. 14

Уровень В

- 59.** Через точку, принадлежащую стороне равностороннего треугольника, проведены прямые, параллельные двум другим его сторонам. Определите периметр образовавшегося параллелограмма, если периметр треугольника равен 18 см.
- 60.** В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и D делят сторону BC на отрезки длиной 5 см, 3 см и 5 см. Найдите периметр параллелограмма. Сколько решений имеет задача?
- 61.** Найдите углы параллелограмма, если его диагональ перпендикулярна одной из сторон и равна половине другой стороны.

62. Найдите углы параллелограмма, который делится диагональю на два равнобедренных прямоугольных треугольника (рассмотрите два случая).
- 63 (опорная). *Биссектрисы двух соседних углов параллелограмма перпендикулярны, а биссектрисы двух противоположащих углов параллельны или лежат на одной прямой. Докажите.*
- 64 (опорная). *Угол между высотами параллелограмма, проведенными из одной вершины, равен углу параллелограмма при соседней вершине. Докажите.*
65. Если диагональ делит четырехугольник на два равных треугольника, то такой четырехугольник является параллелограммом. Верно ли это утверждение? Ответ обоснуйте.
66. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то все его стороны равны. Докажите. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.



Повторение перед изучением § 3

Теоретический материал

- признаки равенства треугольников;
- свойства и признаки параллельных прямых;
- понятие о свойствах и признаках.

7 класс, § 8, 10, 13

7 класс, § 14, 15

Задачи

67. Докажите, что прямая, проходящая через середины боковых сторон равнобедренного треугольника, параллельна его основанию.
68. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$. Какие соотношения необходимо добавить к условию, чтобы по данным задачи доказать, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм? Выскажите предположение.

§ 3

Признаки параллелограмма

3.1. Теорема о признаках параллелограмма

Для того чтобы воспользоваться свойствами параллелограмма, во многих случаях необходимо сначала убедиться, что данный четырехугольник действительно является параллелограммом. Это можно доказать либо по определению (см. задачу в п. 2.1), либо по признакам — условиям, гарантирующим, что данный четырехугольник — параллелограмм. Докажем признаки параллелограмма, которые чаще всего применяются на практике.



Теорема (признаки параллелограмма)

- 1) Если две противоположные стороны четырехугольника параллельны и равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.
- 2) Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.
- 3) Если диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Доказательство

□ 1) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AD \parallel BC$ и $AD = BC$ (рис. 15). Проведем диагональ AC и рассмотрим треугольники ABC и CDA . Они имеют общую сторону AC , $AD = BC$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC . Следовательно, $\triangle ABC = \triangle CDA$ по первому признаку равенства треугольников. Из равенства этих треугольников следует равенство углов 3 и 4 . Но эти углы являются внутренними накрест лежащими при прямых AB и CD и секущей AC . Тогда по признаку параллельности прямых $AB \parallel CD$. Таким образом, в четырех-

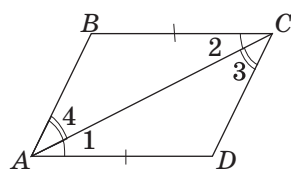


Рис. 15. Если в четырехугольнике $ABCD$ $AD \parallel BC$ и $AD = BC$, то $ABCD$ — параллелограмм

угольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно параллельны, откуда следует, что $ABCD$ — параллелограмм по определению.

2) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$ и $AD = BC$ (рис. 16). Снова проведем диагональ AC и рассмотрим треугольники ABC и CDA . В этом случае они равны по третьему признаку: сторона AC — общая, $AB = CD$ и $AD = BC$ по условию. Из равенства треугольников следует равенство углов 1 и 2, которые являются внутренними накрест лежащими при прямых AD и BC и секущей AC . По признаку параллельности прямых $AD \parallel BC$. Следовательно, в четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны и равны, и по только что доказанному признаку 1 $ABCD$ — параллелограмм.

3) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , $AO = CO$ и $BO = DO$ (рис. 17). Рассмотрим треугольники AOB и COD . Эти треугольники равны по первому признаку: $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, а $AO = CO$ и $BO = DO$ по условию. Значит, равны и соответствующие стороны и углы этих треугольников: $AB = CD$ и $\angle 3 = \angle 4$. Тогда $AB \parallel CD$, и $ABCD$ — параллелограмм по признаку 1.

Теорема доказана полностью. ■

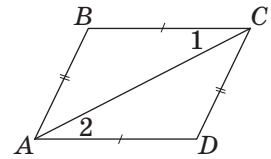


Рис. 16. Если в четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$ и $AD = BC$, то $ABCD$ — параллелограмм

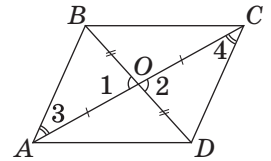


Рис. 17. Если в четырехугольнике $ABCD$ $AO = CO$ и $BO = DO$, то $ABCD$ — параллелограмм

Задача

В параллелограмме $ABCD$ точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно (рис. 18). Докажите, что четырехугольник $MBND$ — параллелограмм.

Решение

Рассмотрим четырехугольник $MBND$. Стороны MB и ND параллельны, т.к. лежат на прямых, содержащих противоположные стороны параллелограмма $ABCD$. Кроме того, $MB = ND$ как половины равных сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Таким образом, в четырехугольнике $MBND$ две стороны параллельны и равны. Следовательно, четырехугольник $MBND$ — параллелограмм.

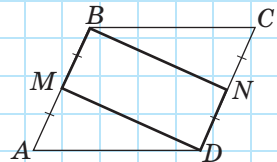


Рис. 18

Попробуйте самостоятельно найти другие способы решения этой задачи, основанные на применении других признаков или определения параллелограмма.

3.2*. Необходимые и достаточные условия¹



Каждый из признаков параллелограмма указывает на определенную особенность, наличия которой в четырехугольнике **достаточно** для того, чтобы утверждать, что он является параллелограммом. Вообще в математике признаки иначе называют **достаточными условиями**. Например, перпендикулярность двух прямых третьей — достаточное условие параллельности данных двух прямых.

В отличие от признаков, свойства параллелограмма указывают на ту особенность, которую обязательно имеет любой параллелограмм. Свойства иначе называют **необходимыми условиями**. Поясним такое название примером: равенство двух углов **необходимо** для того, чтобы углы были вертикальными, ведь если этого равенства нет, вертикальными такие углы быть не могут.

В случае верности теоремы «Если A , то B » утверждение A является достаточным условием для утверждения B , а утверждение B — необходимым условием для утверждения A . Схематически это можно представить так:

Если A , то B
A — достаточное условие для B
B — необходимое условие для A

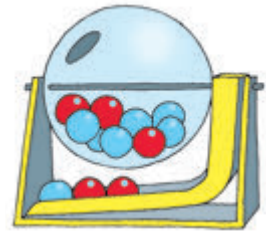
Таким образом, **необходимые условия (свойства)** параллелограмма **следуют из того**, что данный четырехугольник — параллелограмм;

¹ Здесь и далее звездочкой обозначен материал, изучение которого не является обязательным.

из достаточных условий (признаков) следует то, что данный четырехугольник — параллелограмм.

Сравнивая свойства и признаки параллелограмма, нетрудно заметить, что одно и то же условие (например, попарное равенство противоположных сторон) является и свойством, и признаком параллелограмма. В таком случае говорят, что условие является **необходимым и достаточным**. Необходимое и достаточное условие иначе называют **критерием**. Например, равенство двух углов треугольника — критерий равнобедренного треугольника.

Немало примеров необходимых и достаточных условий можно найти в других науках и в повседневной жизни. Все мы знаем, что воздух — необходимое условие для жизни человека, но не достаточное (человеку для жизни нужно еще много чего, среди прочего — пища). Выигрыш в лотерею — достаточное условие для материального обогащения человека, но оно не является необходимым — ведь улучшить свое финансовое положение можно и другим способом. Попробуйте самостоятельно найти несколько примеров необходимых и достаточных условий.



Вопросы и задачи



Устные упражнения

69. Диагонали четырехугольника $DEFK$ пересекаются в точке O , причем $DO = OF$, $EO = OK$. Назовите параллельные стороны четырехугольника и объясните, почему они параллельны.

70. В четырехугольнике $KLMN$ $KL \parallel MN$ и $KL = MN$. Назовите равные углы четырехугольника и объясните, почему они равны.

71. В четырехугольнике $PRSQ$ $PR = SQ$, $PQ = RS$. Найдите сумму углов R и S .

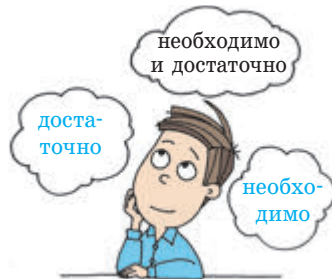


72. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$. Какое соотношение между сторонами четырехугольника необходимо добавить к условию задачи, чтобы доказать, что $ABCD$ — параллелограмм? Приведите все возможные варианты ответа.

73. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 50^\circ$. Может ли данный четырехугольник быть параллелограммом? Какая особенность параллелограмма (свойство или признак) используется для решения этой задачи?

74. Поставьте вместо точек слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно», чтобы полученное утверждение было верным:

- а) для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, ..., чтобы его диагонали точкой пересечения делились пополам;
- б) для того чтобы два угла были смежными, ..., чтобы их сумма была равна 180° ;
- в) для того чтобы прямые AB и CD были параллельными, ..., чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом.



Графические упражнения

75. Проведите две параллельные прямые. Отложите на одной из них отрезок AD , а на другой прямой — отрезок BC , равный AD , так, чтобы отрезки AB и CD не пересекались. Постройте отрезки AB и CD .

- а) Объясните, почему четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.
- б) Отметьте точку M такую, чтобы четырехугольник $ABMC$ был параллелограммом. Лежат ли точки M , C и D на одной прямой?



76. Начертите треугольник ABC и проведите его медиану BO . На луче BO постройте отрезок OD , равный BO . Соедините точку D с точками A и C .

- а) Объясните, почему четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.
- б) Отметьте точку M такую, чтобы четырехугольник $ABDM$ был параллелограммом. Лежат ли точки M , C и D на одной прямой?



Письменные упражнения


Уровень А

77. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Является ли данный четырехугольник параллелограммом, если $AO = 4$ см, $OC = 40$ мм, $BD = 1,2$ дм, $OD = 6$ см? Ответ обоснуйте.

78. По данным рис. 19 докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.



Рис. 19

 **79.** По данным рис. 20 докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

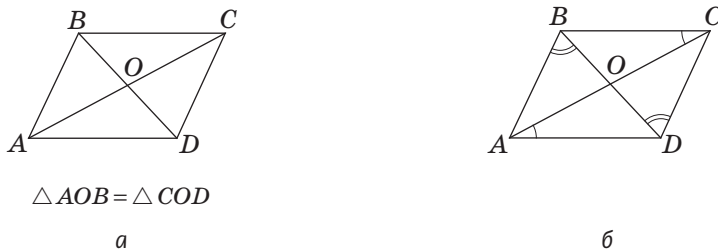




Рис. 20

80. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны. Найдите периметр четырехугольника, если $AB = CD = 9$ см, $AD = 4$ см.

 **81.** В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $AD = BC$. Найдите углы четырехугольника, если угол A втрое больше угла B .

82. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Точки B_1 и D_1 — середины отрезков BO и DO соответственно. Докажите, что четырехугольник AB_1CD_1 — параллелограмм.

 **83.** Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, делит данный параллелограмм на два четырехугольника, которые также являются параллелограммами.

Уровень Б

84. В техническом черчении используют механическую рейсшину (рис. 21). Объясните, как с помощью этого инструмента построить четыре вершины параллелограмма.



85. Объясните, почему ось CD , на которой закреплена лампа (рис. 22), всегда остается вертикальной.

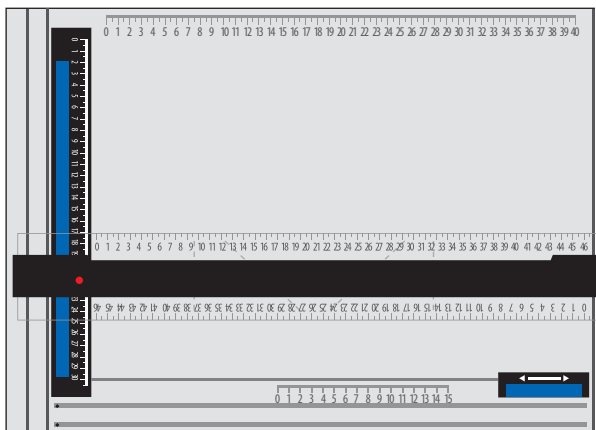


Рис. 21

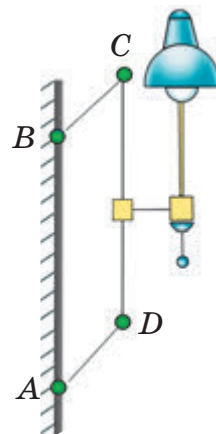
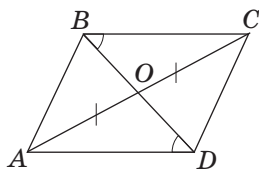
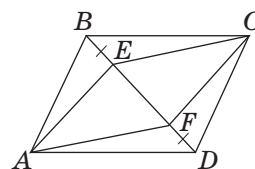


Рис. 22

86. По данным рис. 23 докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.



а

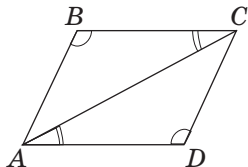


$AECF$ — параллелограмм

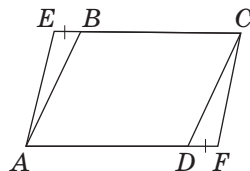
б

Рис. 23

87. По данным рис. 24 докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.



а



$AECF$ — параллелограмм

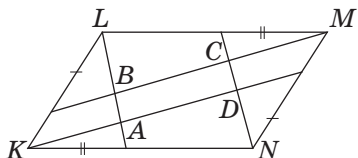
б

Рис. 24

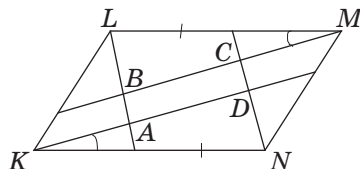
88. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и D пересекают диагональ AC в точках E и F соответственно. Докажите, что четырехугольник $BEDF$ — параллелограмм.
89. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что середины отрезков AO , BO , CO и DO являются вершинами другого параллелограмма.

Уровень В

90. На рис. 25 четырехугольник $KLMN$ является параллелограммом. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ тоже является параллелограммом.



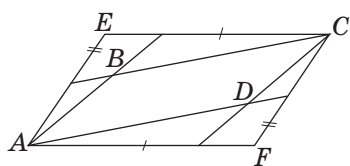
а



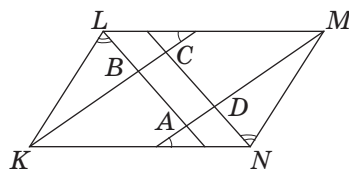
б

Рис. 25

91. По данным рис. 26 докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

 $AECF$ — параллелограмм

а

 $KLMN$ — параллелограмм

б

Рис. 26

- 92 (опорная). Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм. Докажите.
93. Внутри данного угла A отмечена точка O . Постройте отрезок с концами на сторонах угла, серединой которого является точка O .
94. Точка M расположена внутри угла A , вершина которого недоступна (рис. 27). Постройте луч с началом в точке M , направленный в точку A .

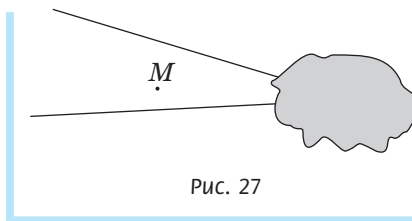


Рис. 27



Повторение перед изучением § 4

Теоретический материал

- равнобедренный треугольник;
- прямоугольный треугольник.

7 класс, § 11, 17

Задачи

95. Высоты треугольника ABC , проведенные из вершин A и B , пересекаются в точке O , причем $AO = BO$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
96. Прямоугольные треугольники ABC и DCB имеют общий катет BC , а гипотенузы AC и BD параллельны. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle DCB$.

§4

Виды параллелограммов

4.1. Прямоугольник

Определение

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

На рис. 28 изображен прямоугольник $ABCD$. Поскольку прямоугольник является частным случаем параллелограмма, он имеет все свойства параллелограмма: противоположные стороны прямоугольника параллельны и равны, противоположные углы равны, диагонали точкой пересечения делятся пополам и т. д. Однако прямоугольник имеет некоторые особые свойства. Докажем одно из них.

Теорема (свойство прямоугольника)

Диагонали прямоугольника равны.

Доказательство

□ Пусть дан прямоугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD (рис. 29). Прямоугольные треугольники BAD и CDA равны по двум катетам (AD общий, $AB = CD$ как противоположные стороны прямоугольника). Отсюда следует равенство гипотенуз этих треугольников, т. е. $AC = BD$, что и требовалось доказать. ■

Имеет место и обратное утверждение (**признак прямоугольника**):

если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.

Докажите это утверждение самостоятельно.

Таким образом, можно утверждать, что равенство диагоналей параллелограмма — *необходимое и достаточное условие прямоугольника*.

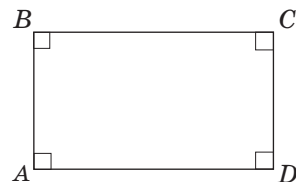


Рис. 28.
Прямоугольник $ABCD$

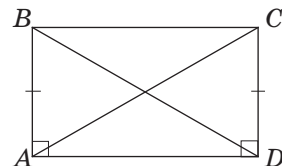


Рис. 29. Если $ABCD$ —
прямоугольник, то
 $AC = BD$



Опорная задача

Если все углы четырехугольника прямые, то этот четырехугольник — прямоугольник. Докажите.

Решение

Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ (см. рис. 28). Углы A и B являются внутренними односторонними при прямых AD и BC и секущей AB . Поскольку сумма этих углов составляет 180° , то по признаку параллельности прямых $AD \parallel BC$. Аналогично доказываем параллельность сторон AB и CD . Следовательно, по определению параллелограмма $ABCD$ — параллелограмм. А поскольку все углы этого параллелограмма прямые, то $ABCD$ — прямоугольник по определению.

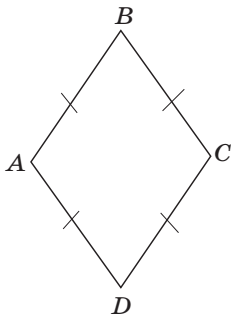


Рис. 30. Ромб $ABCD$

4.2. Ромб

Определение

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

На рис. 30 изображен ромб $ABCD$. Он обладает всеми свойствами параллелограмма, а также некоторыми дополнительными свойствами, которые мы сейчас докажем.

Теорема (свойства ромба)

Диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам.

Эти свойства ромба отражены на рис. 31.

Доказательство

□ Пусть диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 32). Поскольку стороны ромба равны, то треугольник ABC равнобедренный

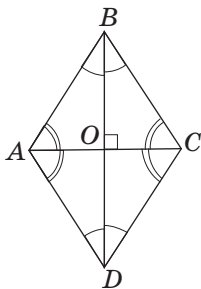


Рис. 31. Свойства ромба

с основанием AC , а по свойству диагоналей параллелограмма точка O — середина AC . Следовательно, отрезок BO — медиана равнобедренного треугольника, которая одновременно является его высотой и биссектрисой. Это означает, что $BD \perp AC$, т.е. диагонали ромба перпендикулярны, и $\angle ABD = \angle CBD$, т.е. BD — биссектриса угла ABC .

Аналогично доказываем, что диагонали ромба являются биссектрисами и других его углов. Теорема доказана. ■

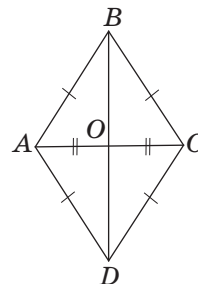


Рис. 32. К доказательству свойств ромба

Опорная задача (признак ромба)

Если все стороны четырехугольника равны, то этот четырехугольник — ромб. Докажите.

Решение

Очевидно, что в четырехугольнике, все стороны которого равны, попарно равными являются и противоположные стороны. Следовательно, по признаку параллелограмма такой четырехугольник — параллелограмм, а по определению ромба параллелограмм, у которого все стороны равны, является ромбом.

Решая задачи, помещенные в конце этого параграфа, вы докажете другие признаки прямоугольника и ромба.

Ромб — от греческого «ромбос» — бубен (в древние времена этот ударный музыкальный инструмент имел форму ромба)

4.3. Квадрат

На рис. 33 изображен еще один вид параллелограмма — квадрат.

Определение

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Иначе можно сказать, что квадрат — это прямоугольник, который является ромбом. Действительно,

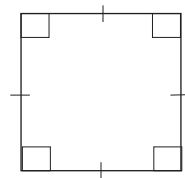


Рис. 33. Квадрат

Квадрат —
от латинского
«квадро» — четыре

поскольку квадрат является прямоугольником и ромбом и, конечно же, параллелограммом, то он имеет такие свойства:

- 1) *все стороны квадрата равны, а противоположные стороны параллельны;*
- 2) *все углы квадрата прямые;*
- 3) *диагонали квадрата равны, перпендикулярны, делят углы квадрата пополам и делятся точкой пересечения пополам.*

4.4*. Связь между отдельными видами параллелограммов. Равносильные утверждения

Исходя из определений произвольного параллелограмма и его отдельных видов, мы можем схематически изобразить связь между ними (рис. 34).

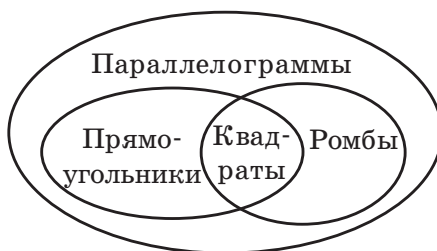


Рис. 34. Диаграмма «Виды параллелограммов»



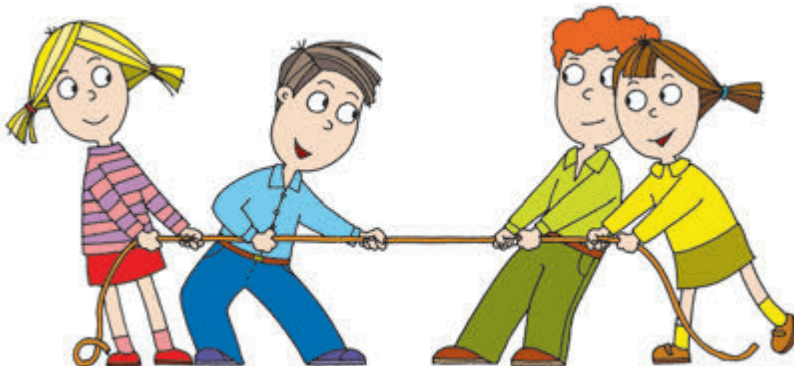
На схеме представлены множества параллелограммов, прямоугольников и ромбов. Такой способ наглядного представления множеств называют **диаграммами Эйлера — Венна**. Диаграмма Эйлера — Венна для параллелограммов демонстрирует, что множества прямоугольников и ромбов являются частями (**подмножествами**) множества параллелограммов, а множество квадратов — общей частью (**пересечением**) множеств прямоугольников и ромбов. Диаграммы Эйлера — Венна часто используют для

подтверждения или проверки правильности логических рассуждений.

Подводя итоги этого параграфа, обратим также внимание на то, что возможно и другое определение квадрата: **квадратом называется ромб с прямыми углами**. В самом деле, оба приведенных определения описывают одну и ту же фигуру. Такие определения называют равносильными. Вообще два утверждения называются **равносильными**, если они или оба выполняются, или оба не выполняются. Например, равносильными являются утверждения «В треугольнике две стороны равны» и «В треугольнике два угла равны», ведь оба они верны, если рассматривается равнобедренный треугольник, и оба ложны, если речь идет о разностороннем треугольнике.

Самостоятельно приведите другие примеры равносильных утверждений.

Равносильность двух утверждений также означает, что любое из них является необходимым и достаточным условием для другого. В самом деле, рассмотрим равносильные утверждения «Диагонали параллелограмма равны» и «Параллелограмм имеет прямые углы». Из того, что диагонали параллелограмма равны, следует, что он является прямоугольником, т. е. имеет прямые углы, и наоборот: параллелограмм с прямыми углами является прямоугольником, т. е. имеет равные диагонали. На этом примере легко проследить логические шаги перехода от признаков фигуры к ее определению и далее — к свойствам. Такой переход довольно часто приходится выполнять в процессе решения задач.



Вопросы и задачи



Устные упражнения


- 97.** Назовите виды параллелограммов, у которых:
- а) все углы равны;
 - б) все стороны равны;
 - в) диагонали равны;
 - г) диагонали перпендикулярны.
- 98.** Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O (см. рис. 31). Назовите:
- а) биссектрису треугольника ABD ;
 - б) высоту треугольника ABC ;
 - в) медиану треугольника BCD .
- 99.** В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 8$ см, $BC = 5$ см. Найдите:
- а) расстояние от точки C до стороны AD ;
 - б) расстояние между прямыми AB и CD .
- 100.** Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O . Назовите все равные треугольники, которые образуются при пересечении диагоналей. Определите вид этих треугольников.
- 101.** Может ли диагональ прямоугольника быть равной его стороне? Может ли диагональ ромба быть равной его стороне?
- 102.** Может ли прямоугольник быть ромбом? В каком случае?
- 103.** Приведите контрпримеры, опровергающие приведенные неверные утверждения:
- а) четырехугольник, который имеет два прямых угла, — прямоугольник;
 - б) четырехугольник с перпендикулярными диагоналями — ромб;
 - в) четырехугольник с равными диагоналями — прямоугольник;
 - г) четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны и равны, — квадрат.



Графические упражнения

- 104.** Начертите две перпендикулярные прямые, которые пересекаются в точке O . На одной из прямых отложите по разные стороны от точки O равные отрезки OA и OC , а на второй прямой — равные отрезки OB и OD . Соедините точки A , B , C и D .

- а) Измерьте стороны четырехугольника $ABCD$, определите его вид.
- б) Измерьте угол A четырехугольника $ABCD$. Используя свойства этого четырехугольника, найдите градусные меры других его углов. Проверьте полученные результаты измерениями.
- в) Измерьте углы ADB и CDB . Выделите цветом все пары равных углов между диагоналями и сторонами четырехугольника.

 **105.** Начертите прямоугольный треугольник ABD с гипотенузой BD . Проведите через вершины B и D прямые, параллельные сторонам AD и AB соответственно. Обозначьте точку C — точку пересечения этих прямых.


- а) Измерьте стороны четырехугольника $ABCD$ и определите его вид.
- б) Проведите диагональ AC . Измерьте и сравните длины диагоналей четырехугольника.
- в) Отметьте на прямых BC и AD точки C_1 и D_1 так, чтобы четырехугольник ABC_1D_1 был квадратом.




Письменные упражнения

Уровень А

106. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если $AC = 15$ см, а периметр треугольника ABC равен 36 см.

 **107.** Найдите стороны прямоугольника, периметр которого равен 36 см, а одна сторона в два раза больше другой.


108. В прямоугольнике $ABCD$ $\angle BAC = 65^\circ$. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.

 **109.** Диагонали прямоугольника пересекаются под углом 80° . Найдите углы, на которые диагональ делит угол прямоугольника.

110. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , причем $\angle COD = 60^\circ$, $CD = 8$ см. Найдите длину диагонали.


111. Найдите углы ромба, если:

- а) один из них на 120° больше другого;
- б) одна из его диагоналей равна стороне.

 **112.** Найдите углы ромба, если:

- а) сумма двух из них равна 220° ;
- б) диагональ образует с одной из его сторон угол 25° .

113. Периметр квадрата равен 40 м. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до его стороны.

 **114.** Расстояние между противоположными сторонами квадрата равно 5 см. Найдите периметр квадрата.

115 (опорная). Если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм является прямоугольником. Докажите.

🔵 **116 (опорная).** Если в параллелограмме соседние стороны равны, то этот параллелограмм является ромбом. Докажите.

Уровень Б

117. Точка пересечения диагоналей прямоугольника удалена от двух его сторон на 3 см и 4 см. Найдите периметр прямоугольника.

🔵 **118.** Биссектриса угла прямоугольника делит его сторону длиной 12 см пополам. Найдите периметр прямоугольника.

119. Из точки окружности проведены две перпендикулярные хорды, удаленные от центра окружности на 3 см и 5 см. Найдите длины этих хорд.

120. Найдите углы ромба, если:

а) углы, образованные его стороной с диагоналями, относятся как 1 : 4;

б) высота ромба в два раза меньше его стороны.

🔵 **121.** Найдите углы ромба, если:

а) высота, проведенная из вершины тупого угла, отсекает от ромба равнобедренный треугольник;

б) высота, проведенная из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам.

122. В ромбе проведена диагональ длиной 6 см из вершины угла, равного 120° . Найдите периметр ромба.

🔵 **123.** Диагональ квадрата равна 18 м, а его сторона является диагональю другого квадрата. Найдите периметр меньшего квадрата.

124. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах (рис. 35). Найдите гипотенузу треугольника, если сторона квадрата равна 2 см.

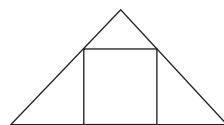


Рис. 35

🔵 **125.** В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что прямой угол является общим для обеих фигур (рис. 36). Найдите периметр квадрата, если катет треугольника равен 4 см.

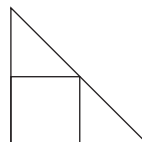



Рис. 36


126 (опорная). *Параллелограмм с перпендикулярными диагоналями является ромбом. Докажите.*


 **127 (опорная).** *Если диагональ параллелограмма лежит на биссектрисе его угла, то этот параллелограмм — ромб. Докажите.*


128. Отрезки AC и BD — диаметры окружности. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

Уровень В


129. Серединный перпендикуляр к диагонали прямоугольника делит его сторону в отношении $2 : 1$. Найдите углы, на которые диагональ делит угол прямоугольника.


 **130.** Серединный перпендикуляр к диагонали прямоугольника пересекает его сторону под углом, равным углу между диагоналями. Найдите этот угол.

 **131.** Докажите, что все высоты ромба равны. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

 **132.** Из точки пересечения диагоналей ромба проведены перпендикуляры к его сторонам. Докажите, что основания этих перпендикуляров являются вершинами прямоугольника.

133. Если диагонали четырехугольника лежат на биссектрисах его углов, то этот четырехугольник — ромб. Докажите.

 **134.** Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма, не являющегося ромбом, пересекаясь, образуют прямоугольник.

 **135.** Докажите, что биссектрисы углов прямоугольника, не являющегося квадратом, пересекаясь, образуют квадрат.



Повторение перед изучением § 5

Теоретический материал

- равнобедренный треугольник;
- прямоугольный треугольник.

 7 класс, § 11, 17, 20

Задачи

136. Прямая, параллельная основанию AC равнобедренного треугольника ABC , пересекает боковые стороны AB и BC в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что $AE = CD$.

б) Найдите углы четырехугольника $ADEC$, если $\angle B = 80^\circ$.

137. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, а стороны AB и CD равны. Обязательно ли данный четырехугольник является параллелограммом? Приведите контрпример.



Онлайн-тренировка для подготовки к контрольной работе № 1

Задачи для подготовки к контрольной работе № 1

1. Высота параллелограмма делит тупой угол на два угла, разность которых равна 20° . Найдите углы параллелограмма.

2. Сумма двух сторон параллелограмма равна 48 см, а периметр — 88 см. Найдите стороны параллелограмма.

3. По данным рис. 37 докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

4. Биссектриса угла параллелограмма при пересечении с его стороной образует углы, градусные меры которых относятся как 1 : 3. Определите вид параллелограмма.

5. Докажите, что ромб является квадратом, если его диагонали образуют со стороной равные углы.

6. Серединный перпендикуляр к диагонали прямоугольника делит его сторону на части, одна из которых равна меньшей стороне прямоугольника. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.

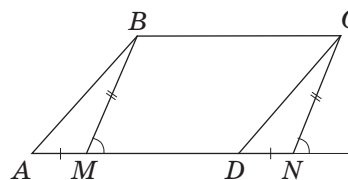


Рис. 37

§5

Трапеция

5.1. Определение трапеции

Как известно, любой параллелограмм имеет две пары параллельных сторон. Рассмотрим теперь четырехугольник, который имеет только одну пару параллельных сторон.

Определение

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называют ее **основаниями**, а непараллельные стороны — **боковыми сторонами**. На рис. 38 в трапеции $ABCD$ стороны AD и BC являются основаниями, а AB и CD — боковыми сторонами.

Углы, прилежащие к одной боковой стороне, являются внутренними односторонними при параллельных прямых, на которых лежат основания трапеции, и секущей, на которой лежит боковая сторона. Отсюда по теореме о свойстве углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, следует, что **сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, равна 180°** . На рис. 38 $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$.

Определение

Высотой трапеции называется перпендикуляр, проведенный из точки одного основания к прямой, содержащей другое основание.

Очевидно, что в трапеции можно провести бесконечно много высот (рис. 39), — все они равны как расстояния между параллельными прямыми.

Чаще всего в процессе решения задач высоты проводят из вершин углов при меньшем основании трапеции.

Трапеция — от греческого «трапезос» — маленький стол. Однокоренным является слово «трапеза»

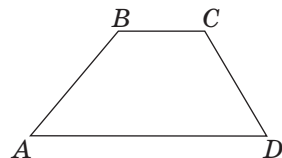


Рис. 38. Трапеция $ABCD$

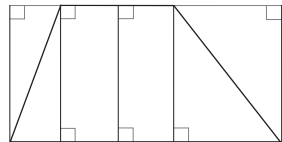


Рис. 39. Высоты трапеции

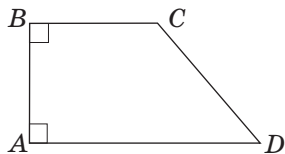


Рис. 40. Прямоугольная трапеция $ABCD$

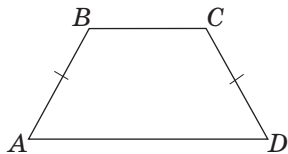


Рис. 41. Равнобокая трапеция $ABCD$

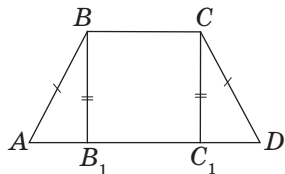


Рис. 42. Высоты, проведенные из вершин тупых углов, отсекают от равнобокой трапеции равные треугольники

5.2. Частные случаи трапеций

Как среди треугольников и параллелограммов, так и среди трапеций выделяются отдельные виды, обладающие дополнительными свойствами.

Определение

Прямоугольной трапецией называется трапеция, в которой одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям.

На рис. 40 изображена прямоугольная трапеция $ABCD$. У нее два прямых угла при меньшей боковой стороне AB . Эта сторона одновременно является и высотой трапеции.

Определение

Равнобокой трапецией называется трапеция, в которой боковые стороны равны.

На рис. 41 изображена равнобокая трапеция $ABCD$ с боковыми сторонами AB и CD . Иногда равнобокую трапецию также называют равнобедренной.

У равнобокой трапеции так же, как и у равнобедренного треугольника, углы при основании равны. Докажем это в следующей теореме.

Теорема (свойство равнобокой трапеции)

В равнобокой трапеции углы при основании равны.

Доказательство

□ Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD \parallel BC$, $AB = CD$.

Перед началом доказательства заметим, что этой теоремой утверждается равенство углов при каждом из двух оснований трапеции, т. е. необходимо доказать, что $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle C$.

Проведем высоты BB_1 и CC_1 из вершин тупых углов и рассмотрим прямоугольные треугольники ABB_1 и DCC_1 (рис. 42). У них $AB = CD$ как

боковые стороны равнобокой трапеции, $BB_1 = CC_1$ как расстояния между параллельными прямыми AD и BC . Следовательно, $\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$ по гипотенузе и катету. Отсюда следует, что $\angle A = \angle D$. Углы трапеции B и C также равны, поскольку они дополняют равные углы A и D до 180° .

Теорема доказана. ■

Имеет место также обратное утверждение
(признак равнобокой трапеции)

Если в трапеции углы при основании равны, то такая трапеция является равнобокой.

Докажите этот факт самостоятельно.



Задача

Меньшее основание равнобокой трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.

Решение

Пусть дана равнобокая трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD$, $BD \perp AB$ (рис. 43).

По условию задачи треугольник BCD равнобедренный с основанием BD , т. е. $\angle 1 = \angle 2$; с другой стороны, $\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD .

Пусть градусная мера угла 1 равна x , тогда в данной трапеции $\angle A = \angle D = 2x$, $\angle B = \angle C = x + 90$. Поскольку сумма углов, прилежащих к боковой стороне, составляет 180° , имеем: $2x + x + 90 = 180$; $3x = 90$; $x = 30$.

Следовательно, $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = 120^\circ$.

Ответ: 60° и 120° .

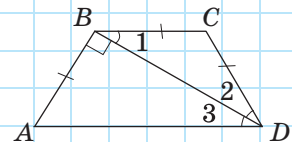


Рис. 43

5.3*. Построение параллелограммов и трапеций



Задачи на построение параллелограммов и трапеций часто решают **методом вспомогательного треугольника**. Напомним, что для этого необходимо выделить в искомой фигуре треугольник, который можно построить по имеющимся данным. Построив его, получаем две или три вершины искомого четырехугольника, а остальные вершины находим по данным задачи.



Задача

Постройте параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними.

Решение

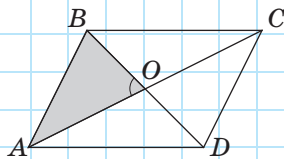


Рис. 44

Пусть d_1 и d_2 — данные диагонали параллелограмма, α — угол между ними.

Анализ

Пусть параллелограмм $ABCD$ построен (рис. 44). Треугольник AOB можно построить по двум сторонам и углу между ними $\left(AO = \frac{d_1}{2}, BO = \frac{d_2}{2}, \angle AOB = \alpha \right)$.

Таким образом, мы получим вершины A и B искомого параллелограмма. Вершины C и D можно получить, «удвоив» отрезки AO и BO .

Построение

1. Разделим отрезки d_1 и d_2 пополам.
2. Построим треугольник AOB по двум сторонам и углу между ними.
3. На лучах AO и BO отложим отрезки $OC = AO$ и $OD = BO$.
4. Последовательно соединим точки B, C, D и A .

Доказательство

Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, поскольку по построению его диагонали AC и BD точкой пересечения делятся пополам. В этом параллелограмме $\angle AOB = \alpha$ (по построению), $AC = \frac{d_1}{2} \cdot 2 = d_1$, $BD = \frac{d_2}{2} \cdot 2 = d_2$.

Исследование

Задача имеет единственное решение при любых значениях d_1 , d_2 и α .

В некоторых случаях для построения вспомогательного треугольника на рисунке-эскизе необходимо провести дополнительные линии.

Задача

Постройте трапецию по четырем сторонам.

Решение

Пусть a и b ($a < b$) — основания искомой трапеции, c и d — ее боковые стороны.

Анализ

Пусть искомая трапеция $ABCD$ построена (рис. 45). Проведем через вершину C прямую CE , параллельную AB . Тогда $ABCE$ — параллелограмм по определению, следовательно, $CE = AB = c$. Кроме того, $AE = BC = a$, следовательно, $ED = b - a$.

Вспомогательный треугольник ECD можно построить по трем сторонам. После этого для получения вершин A и B надо отложить на луче DE и на луче с началом в точке C , параллельном DE , отрезки длиной a .

Построение

1. Построим отрезок $b - a$.
2. Построим треугольник ECD по трем сторонам ($EC = c$, $CD = d$, $ED = b - a$).

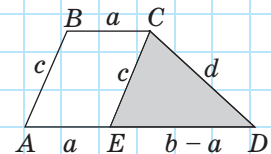


Рис. 45



3. Построим луч, проходящий через точку C и параллельный DE . При этом построенный луч и луч DE должны лежать по одну сторону от прямой CD .
4. На луче DE от точки E отложим отрезок $EA = a$, на луче с началом C — отрезок $CB = a$.
5. Соединим точки A и B .

Доказательство

По построению $BC \parallel AD$, $BC = AE = a$, следовательно, $ABCE$ — параллелограмм по признаку. Отсюда $AB = CE = c$. Кроме того, $AD = a + b - a = b$, $CD = d$. Следовательно, $ABCD$ — искомая трапеция.

Исследование

Задача имеет единственное решение, если числа $b - a$, c и d удовлетворяют теореме о неравенстве треугольника.

Вопросы и задачи



Устные упражнения

138. Могут ли основания трапеции быть равными? Почему?
139. Могут ли быть равными:
 - а) соседние углы трапеции;
 - б) противолежащие углы трапеции?
140. Обязательно ли углы трапеции, прилежащие к большему основанию, должны быть острыми? Приведите примеры.
141. Может ли равнобокая трапеция быть прямоугольной?
142. Может ли высота трапеции быть больше боковой стороны; быть равной боковой стороне?
143. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O .
 - а) Может ли треугольник AOD быть равным треугольнику BOC ?
 - б) Может ли треугольник AOB быть равным треугольнику DOC ?
144. Может ли точка пересечения диагоналей трапеции быть серединой каждой из них; одной из них?



Графические упражнения

145. Начертите параллелограмм $ABCD$ и проведите в нем высоту CH так, чтобы получилась трапеция $ABCH$.

- а) Определите вид трапеции $ABCH$.
- б) Является ли высотой трапеции любая высота параллелограмма? Приведите контрпример.



146. Начертите равнобедренный треугольник AMD с основанием AD . Отметьте на стороне AM точку B и проведите через нее прямую, параллельную AD . Отметьте точку C — точку пересечения этой прямой со стороной MD .

- а) Определите вид трапеции $ABCD$.
- б) Проведите диагонали трапеции. Измерьте и сравните их длины.



Письменные упражнения

Уровень А

147. Найдите неизвестные углы:

- а) трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC , если $\angle A = 40^\circ$, $\angle D = 50^\circ$;
- б) равнобокой трапеции, один из углов которой равен 58° ;
- в) прямоугольной трапеции, наибольший угол которой в три раза больше наименьшего угла.



148. Найдите неизвестные углы:

- а) равнобокой трапеции, в которой высота, проведенная из вершины тупого угла, образует с боковой стороной угол 22° ;
- б) прямоугольной трапеции, которую диагональ, проведенная из вершины тупого угла, делит на два равнобедренных прямоугольных треугольника.

149. В равнобокой трапеции высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки длиной 6 см и 30 см. Найдите меньшее основание трапеции.



150. Меньшее основание равнобокой трапеции равно 10 см. Найдите большее основание трапеции, если высота, проведенная из вершины тупого угла, делит ее на отрезки, один из которых равен 3 см.

151. Докажите, что сумма противоположных углов равнобокой трапеции равна 180° .

Уровень Б

152. Найдите углы:

- а) равнобокой трапеции, если разность двух ее противоположных углов равна 80° ;
- б) прямоугольной трапеции, в которой диагональ является биссектрисой тупого угла и образует с меньшей боковой стороной угол 35° .



153. Найдите углы:

- а) прямоугольной трапеции, если отношение наибольшего и наименьшего из них равно $3 : 2$;
- б) равнобокой трапеции, меньшее основание которой равно боковой стороне и вдвое меньше большего основания.

154. В трапеции $ABCD$ через вершину B проведена прямая BK , параллельная стороне CD (рис. 46).

- а) Докажите, что $KBCD$ — параллелограмм.
- б) Найдите периметр трапеции, если $BC = 4$ см, $P_{\triangle ABK} = 11$ см.



155. В равнобокой трапеции середина большого основания соединена с вершинами меньшего основания. При этом образовались три равносторонних треугольника. Найдите:

- а) углы трапеции;
- б) периметр трапеции, если периметр одного треугольника равен 12 м.

156. В равнобокой трапеции меньшее основание равно 15 см, а диагональ делит пополам острый угол, равный 60° . Найдите периметр трапеции.



157. Диагональ равнобокой трапеции делит пополам ее тупой угол. Найдите периметр трапеции, если ее основания равны 5 см и 10 см.

158. Докажите, что биссектрисы углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, перпендикулярны.

159. Постройте:

- а) параллелограмм по двум сторонам и диагонали;
- б) ромб по стороне и диагонали;
- в) равнобокую трапецию по большему основанию, боковой стороне и острому углу.



160. Постройте:

- а) ромб по углу и диагонали, противолежащей этому углу;
- б) прямоугольник по диагонали и углу между диагоналями;
- в) прямоугольную трапецию по меньшему основанию, большей боковой стороне и большей диагонали.

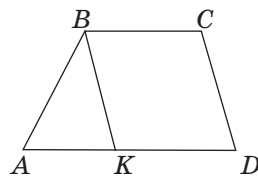




Рис. 46

Уровень В

161. Диагональ делит равнобокую трапецию на два равнобедренных треугольника. Найдите углы трапеции.


 **162.** Длины боковых сторон трапеции равны $2a$, а длины оснований — $7a$ и $9a$. Найдите углы трапеции.

163 (опорная). *Диагонали равнобокой трапеции равны, и наоборот: если диагонали трапеции равны, то она равнобокая.* Докажите.

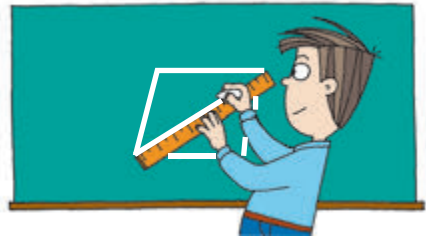
 **164 (опорная).** *Диагонали равнобокой трапеции образуют с ее основанием равные углы, и наоборот: если диагонали трапеции образуют с ее основанием равные углы, то трапеция равнобокая.* Докажите.

165. Постройте:

- а) параллелограмм по стороне, диагонали и углу, противолежащему этой диагонали;
- б) ромб по высоте и диагонали;
- в) трапецию по основаниям и диагоналям.

 **166.** Постройте:

- а) прямоугольник по диагонали и периметру;
- б) ромб по высоте и острому углу;
- в) равнобокую трапецию по разности оснований, боковой стороне и диагонали.



Повторение перед изучением § 6

Теоретический материал

- признаки параллельности прямых;
- свойства параллельных прямых.

 7 класс, § 14, 15

Задачи

167. Точки D , E и F — середины сторон AB , BC и AC равностороннего треугольника ABC соответственно. Докажите, что четырехугольник $ADEF$ — ромб. Назовите другие ромбы, тремя вершинами которых являются точки D , E и F .

168. Отрезки AD и CE — равные высоты треугольника ABC . Докажите, что треугольник DBE равнобедренный.



Выдающиеся математики Украины



Погорелов Алексей Васильевич (1919–2002)

В 80-х годах прошлого века Американское математическое общество выпустило серию книг под общим названием «Выдающиеся математики XX века». Под номером 4 вышел том с монографией харьковского ученого Алексея Васильевича Погорелова. На обложке издания под его фотографией в краткой аннотации ученый был назван «величайшим геометром XX века».

Действительно, главным делом жизни Алексея Васильевича была геометрия. Его труды охватывают широчайший диапазон: от учебников для школьников и студентов до работ по сверхсложным вопросам теоретической и прикладной математики, рассчитанных на узкий круг специалистов.

Школьный учебник по геометрии Погорелова можно смело назвать революционным, так как в нем была впервые предложена краткая и прозрачная система аксиом. С того времени аксиоматичный подход в изучении геометрии — неотъемлемая составляющая развития научного мышления школьников. Учебник Алексея Васильевича по школьной геометрии выдержал более 20 изданий!

Алексей Васильевич Погорелов, пройдя путь от победителя городской математической олимпиады для школьников до академика Академии наук Украины, еще при жизни был признан гением. Но он был чрезвычайно скромным человеком. По воспоминаниям его современников, он никогда ни при каких обстоятельствах не демонстрировал свое превосходство над другими. Почти всю свою жизнь ученый работал в Харькове, руководил кафедрой геометрии в Харьковском государственном университете и отделом геометрии в физико-техническом институте низких температур. В память об академике А. В. Погорелове на зданиях этих всемирно известных научных центров установлены мемориальные доски. Одной из аудиторий математического факультета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина присвоено имя Алексея Васильевича Погорелова.

§ 6

Теорема Фалеса. Средние линии треугольника и трапеции

6.1. Теорема Фалеса

Для дальнейшего изучения свойств трапеции докажем важную теорему.

Теорема (Фалеса)

Параллельные прямые, которые пересекают стороны угла и отсекают на одной из них равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой стороне.

Доказательство

□ Пусть A_1, A_2, A_3 — точки пересечения параллельных прямых с одной из сторон данного угла, а B_1, B_2, B_3 — соответствующие точки пересечения этих прямых с другой стороной угла. Докажем, что если $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$ (рис. 47).

Проведем через точку B_2 прямую CD , параллельную A_1A_3 (рис. 48). Четырехугольники $A_2A_1CB_2$ и $A_3A_2B_2D$ — параллелограммы по определению. Тогда $A_1A_2 = CB_2$, $A_2A_3 = B_2D$, а поскольку $A_1A_2 = A_2A_3$, то $CB_2 = B_2D$.

Рассмотрим треугольники B_1B_2C и B_3B_2D . У них $CB_2 = B_2D$ по доказанному, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, а $\angle 3 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых A_1B_1 и A_3B_3 и секущей CD . Следовательно, $\triangle B_1B_2C = \triangle B_3B_2D$ по второму признаку, откуда $B_1B_2 = B_2B_3$.

Теорема доказана. ■

Заметим, что в условии данной теоремы вместо сторон угла можно рассматривать две произвольные прямые, поэтому теорема Фалеса может формулироваться и следующим образом:

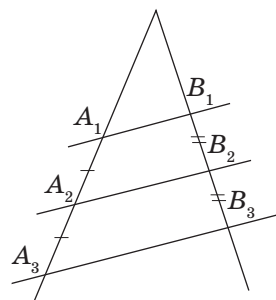


Рис. 47. Теорема Фалеса

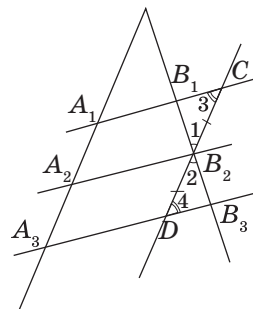


Рис. 48. К доказательству теоремы Фалеса

параллельные прямые, которые пересекают две данные прямые и отсекают на одной из них равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой.

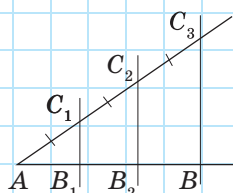


Рис. 49. Деление отрезка на равные части

Задача

Разделите данный отрезок на n равных частей.

Решение

Решим задачу для $n = 3$, т.е. разделим данный отрезок AB на три равные части (рис. 49).

Для этого проведем из точки A произвольный луч, не дополнительный к лучу AB , и отложим на нем равные отрезки AC_1 , C_1C_2 и C_2C_3 . Проведем прямую C_3B и параллельные ей прямые через точки C_1 и C_2 . По теореме Фалеса эти прямые делят отрезок AB на три равные части.

Аналогично можно разделить произвольный отрезок на любое количество равных частей.

Подумайте, как может применить теорему Фалеса в своей практической деятельности архитектор.

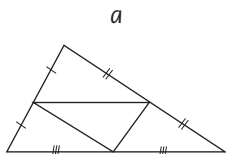
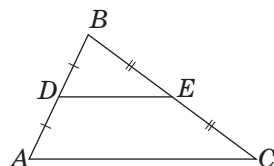


Рис. 50. Средняя линия треугольника

6.2. Средняя линия треугольника

Теорема Фалеса помогает исследовать еще одну важную линию в треугольнике.

Определение

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

На рис. 50, а отрезок DE — средняя линия треугольника ABC . В любом треугольнике можно провести три средние линии (рис. 50, б).

Теорема (свойство средней линии треугольника)

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Доказательство

□ Пусть DE — средняя линия треугольника ABC (рис. 51). Докажем сначала, что $DE \parallel AC$. Проведем через точку D прямую, параллельную AC .

По теореме Фалеса она пересечет отрезок BC в его середине, т. е. будет содержать отрезок DE . Следовательно, $DE \parallel AC$.

Проведем теперь среднюю линию EF . По только что доказанному она будет параллельна стороне AB . Четырехугольник $ADEF$ с попарно параллельными сторонами по определению является параллелограммом, откуда $DE = AF$. А поскольку точка F — середина AC , то $DE = \frac{1}{2} AC$.

Теорема доказана. ■

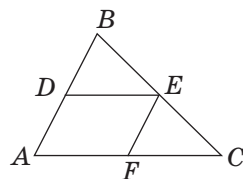


Рис. 51. К доказательству свойства средней линии треугольника

Опорная задача (теорема Вариньона)

Средины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Докажите.

Решение

Пусть точки K, L, M, N — середины сторон четырехугольника $ABCD$ (рис. 52). Проведем диагональ BD . Отрезки KN и ML — средние линии треугольников ABD и CBD соответственно. По свойству средней линии треугольника они параллельны стороне BD и равны ее половине, т. е. параллельны и равны между собой. Тогда по признаку параллелограмма четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм.

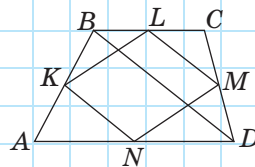


Рис. 52. Средины сторон четырехугольника $ABCD$ — вершины параллелограмма

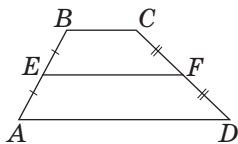


Рис. 53. Средняя линия трапеции

6.3. Средняя линия трапеции

определение

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

На рис. 53 отрезок EF — средняя линия трапеции $ABCD$.

Теорема (свойство средней линии трапеции)

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство

□ Пусть EF — средняя линия трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 54). Проведем прямую BF и отметим точку G — точку пересечения прямых BF и AD . Рассмотрим треугольники BFC и GFD . У них $FC = FD$, поскольку F — середина CD , $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, а $\angle 3 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей CD . Следовательно, $\triangle BFC = \triangle GFD$ по второму признаку, откуда $BF = FG$. Тогда по определению EF — средняя линия треугольника ABG . По свойству средней линии треугольника $EF \parallel AG$, поэтому $EF \parallel AD$ и $EF \parallel BC$. Кроме того, из доказанного равенства треугольников следует, что $BC = DG$, откуда $AG = AD + DG = AD + BC$. По свойству средней линии треугольника $EF = \frac{1}{2} AG = \frac{1}{2} (AD + BC)$. Теорема доказана. ■

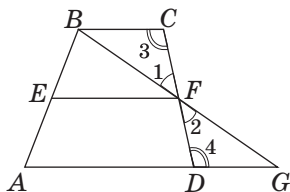


Рис. 54. К доказательству свойства средней линии трапеции

Задача

Через точки, делящие боковую сторону трапеции на три равные части, проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Найдите длины отрезков этих прямых, заключенных внутри трапеции, если ее основания равны 2 м и 5 м.

Решение

Пусть в трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AA_1 = A_1A_2 = A_2B$ (рис. 55). По теореме Фалеса параллельные прямые, проходящие через точки A_1 и A_2 , отсекают на боковой стороне CD равные отрезки, т.е. $DD_1 = D_1D_2 = D_2C$. Тогда по определению A_1D_1 — средняя линия трапеции AA_2D_2D , A_2D_2 — средняя линия трапеции A_1BCD_1 . Пусть $A_1D_1 = x$ м, $A_2D_2 = y$ м. По свойству средней линии трапеции имеем систему:

$$\begin{cases} x = \frac{y+5}{2}, \\ y = \frac{x+2}{2}; \end{cases} \begin{cases} 2x - y = 5, \\ 2y - x = 2; \end{cases} \begin{cases} x = 4, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: 3 м и 4 м.

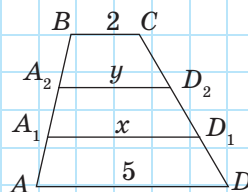


Рис. 55

Вопросы и задачи



Устные упражнения

169. Отрезок DE — средняя линия треугольника ABC (см. рис. 50, а).

а) Определите вид четырехугольника $ADEC$.

б) Назовите медиану треугольника, проведенную из вершины A .

170. Может ли средняя линия треугольника быть перпендикулярной его стороне; двум его сторонам?

171. Могут ли средние линии треугольника быть равными 3 см, 4 см и 10 см? Почему?

172. В треугольнике ABC проведена средняя линия DE , параллельная стороне AC . В каком отношении прямая DE делит медиану BM ; высоту BH ?

173. Середины оснований трапеции соединены отрезком. Является ли он средней линией трапеции?

174. Может ли средняя линия трапеции быть меньше обоих ее оснований; равной одному из оснований?

175. Может ли средняя линия трапеции проходить через точку пересечения диагоналей? Почему?



Графические упражнения

176. Начертите треугольник ABC . Отметьте на стороне AB точки A_1 , A_2 и A_3 так, чтобы они делили отрезок AB на четыре равные части. Проведите через эти точки прямые, параллельные стороне AC , и обозначьте точки их пересечения со стороной BC буквами C_1 , C_2 и C_3 соответственно.

- Измерьте и сравните длины отрезков, на которые точки C_1 , C_2 и C_3 делят сторону BC .
- Выделите красным цветом среднюю линию треугольника ABC .
- Выделите синим цветом среднюю линию трапеции AA_2C_2C .



177. Начертите треугольник ABC . Отметьте точки D , E и F — середины сторон AB , BC и AC соответственно. Соедините отмеченные точки.

- Определите вид четырехугольника $ADEF$.
- Определите вид четырехугольника $ADEC$.
- Назовите все треугольники, которые равны треугольнику DEF . Запишите соответствующие равенства.



Письменные упражнения

Уровень А

178. По данным рис. 56 найдите x , если $a \parallel b$.

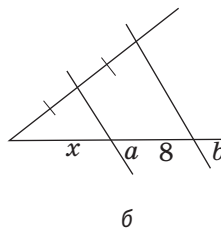
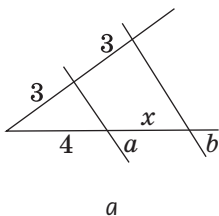


Рис. 56



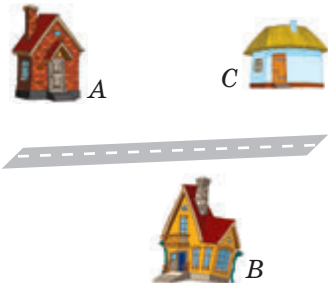
179. Через середину D стороны AB треугольника ABC проведена прямая, которая параллельна AC и пересекает сторону BC в точке E . Найдите BC , если $BE = 8$ см.

180. Стороны треугольника равны 12 см, 16 см и 20 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

181. Средняя линия равностороннего треугольника равна 3,5 см. Найдите периметр треугольника.
182. Докажите, что средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника.
183. Средняя линия треугольника отсекает от него трапецию с боковыми сторонами 3 м и 4 м и меньшим основанием 5 м. Найдите периметр треугольника.
184. Диагонали четырехугольника равны 18 см и 22 см. Найдите периметр параллелограмма, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.
185. Найдите:
- среднюю линию трапеции с основаниями 8 см и 12 см;
 - основания трапеции, в которой диагональ делит среднюю линию на отрезки длиной 3 см и 4 см.
186. Найдите:
- среднюю линию равнобокой трапеции с боковой стороной 5 см и периметром 26 см;
 - основания трапеции, если одно из них больше другого на 6 см, а средняя линия трапеции равна 5 см.
187. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.
188. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

Уровень Б

189. Прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника и проходящая через середину боковой стороны, отсекает от данного треугольника трапецию. Найдите ее периметр, если периметр данного треугольника равен 26 см, а основание относится к боковой стороне как 5 : 4.
190. Средние линии треугольника относятся как 4 : 5 : 6. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 60 см.
191. Прямолинейная трасса делит пополам расстояние между домами А и В и расстояние между домами В и С. Докажите, что эти три дома равноудалены от этой трассы.



192. Докажите, что середины сторон равнобокой трапеции являются вершинами ромба.

193. Как построить треугольник, если заданы середины его сторон?

194. Как разрезать треугольник на две части так, чтобы из них можно было составить параллелограмм?

195. Прямоугольная трапеция делится диагональю на равносторонний треугольник со стороной a и прямоугольный треугольник. Найдите среднюю линию трапеции.

196. Концы диаметра окружности удалены от касательной к этой окружности на 14 см и 20 см. Найдите диаметр окружности.

197. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой l и удалены от нее на 7 см и 11 см соответственно. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l .

198. Боковую сторону равнобедренного треугольника разделили на четыре равные части. Через точки деления проведены прямые, параллельные основанию треугольника. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, если его основание равно 12 см.



Уровень В

199. Точки M и N — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и CN делят диагональ BD на три равные части.

200. Разделите данный отрезок в отношении 3 : 2.

201. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям трапеции и равен их полусумме. Решите задачу 197 при условии, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой l .

202. Середина боковой стороны равнобокой трапеции с основаниями a и b ($a < b$) соединена с основанием ее высоты (рис. 57). Докажите, что:

$$\text{а) } HD = \frac{b-a}{2}; \quad \text{б) } AH = MN = \frac{a+b}{2}.$$

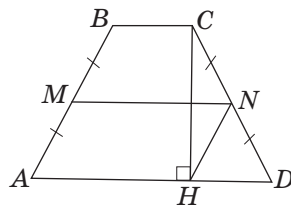




Рис. 57

 **203.** В равнобокой трапеции диагональ длиной 4 см образует с основанием угол 60° . Найдите среднюю линию трапеции.

 **204.** а) В треугольнике ABC каждая из боковых сторон AB и BC разделена на m равных частей (рис. 58). Докажите, что отрезки, соединяющие соответствующие точки деления, параллельны между собой и параллельны стороне AC .

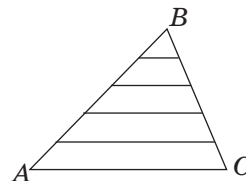


Рис. 58

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для трапеции.

в) Сформулируйте утверждение, обратное теореме Фалеса, и опровергните его с помощью контрпримера.




Повторение перед изучением § 7

Теоретический материал

- внешний угол треугольника;
- окружность;
- окружность, описанная около треугольника;
- геометрическое место точек.

 7 класс, § 19, 22

 7 класс, п. 16.3, 23.1

Задачи

205. Через вершину равностороннего треугольника, вписанного в окружность, проведена прямая, параллельная его стороне. Докажите, что эта прямая является касательной к окружности.

206. Внешний угол равнобедренного треугольника равен 80° . Найдите углы треугольника.

§7

Вписанные углы

7.1. Градусная мера дуги

В седьмом классе изучение свойств треугольников завершалось рассмотрением описанной и вписанной окружностей. Но перед тем как рассмотреть описанную и вписанную окружности для четырехугольника, нам необходимо остановиться на дополнительных свойствах углов.

До сих пор мы изучали только те углы, градусная мера которых не превышала 180° . Расширим понятие угла и введем в рассмотрение вместе с самим углом части, на которые он делит плоскость.

На рис. 59 угол (ab) делит плоскость на две части, каждая из которых называется *плоским углом*. Их градусные меры равны α и $(360^\circ - \alpha)$.

Используем понятие плоского угла для определения центрального угла в окружности.

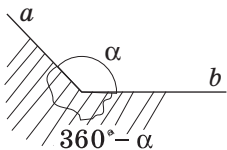


Рис. 59. Углы на плоскости



Определение

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в центре окружности.

На рис. 60, *a*, *б* стороны угла с вершиной в центре окружности *O* пересекают данную окружность в точках *A* и *B*. При этом образуются две дуги, одна из которых меньше полуокружности (на ней обозначена промежуточная точка *L*, рис. 60, *a*), а другая — больше полуокружности (на ней обозначена промежуточная точка *M*, рис. 60, *б*).

Для того чтобы уточнить, какой из двух плоских углов со сторонами *OA* и *OB* мы рассматриваем как центральный, мы будем указывать дугу

окружности, которая *соответствует данному центральному углу* (т. е. содержится внутри него).

На рис. 60, а центральному углу AOB , обозначенному дужкой, соответствует дуга ALB , а на рис. 60, б — дуга AMB . В случае, когда лучи OA и OB дополнительные, соответствующая дуга ANB является полуокружностью (рис. 60, в).

Определение

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.

Градусную меру дуги, как и саму дугу, обозначают так: $\cup ALB$ (или $\cup AB$). Например, на рис. 60, в $\cup ANB = 180^\circ$, т. е. градусная мера полуокружности составляет 180° . Очевидно, что градусная мера дуги всей окружности составляет 360° .

Концы хорды AB делят окружность на две дуги — ALB и AMB (рис. 60, г). Говорят, что эти дуги *стягиваются хордой AB* .

7.2. Вписанный угол

Определение

Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность.

На рис. 61 изображен вписанный угол ABC . Его вершина B лежит на окружности, а стороны пересекают окружность в точках A и C . Дуга AC (на рисунке она выделена) лежит внутри этого угла. В таком случае говорят, что вписанный угол ABC *опирается на дугу AC* .

Теорема (о вписанном угле)

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

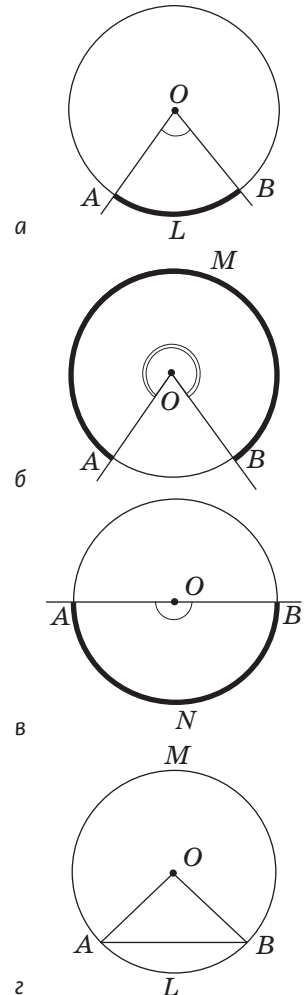


Рис. 60. Центральный угол и дуга окружности

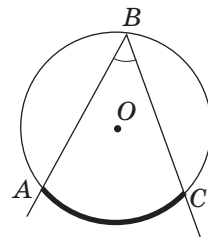


Рис. 61. Вписанный угол ABC

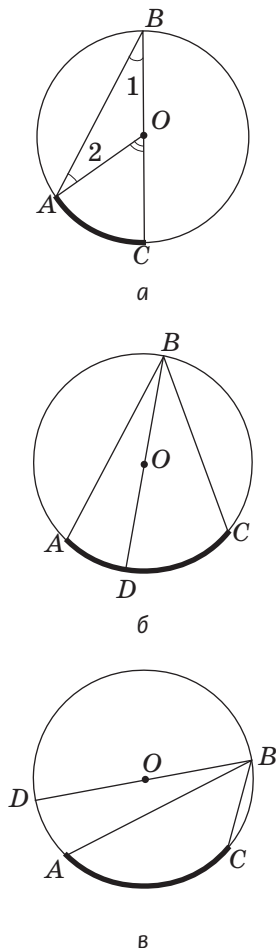


Рис. 62. Измерение вписанного угла ABC

Доказательство

□ Пусть в окружности с центром O вписанный угол ABC опирается на дугу AC . Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$. Рассмотрим три случая расположения центра окружности относительно данного вписанного угла (рис. 62, а–в).

1) Пусть центр окружности лежит на одной из сторон данного угла (рис. 62, а). В этом случае центральный угол AOC является внешним углом при вершине O равнобедренного треугольника AOB . По теореме о внешнем угле треугольника $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2$. А поскольку углы 1 и 2 равны как углы при основании равнобедренного треугольника, то $\angle AOC = 2\angle ABC$, т.е. $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \cup AC$.

2) Пусть центр окружности лежит внутри угла ABC (рис. 62, б). Луч BO делит угол ABC на два угла. По только что доказанному $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$, $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$, следовательно, $\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2} \cup AC$.

3) Аналогично в случае, когда центр окружности лежит вне вписанного угла (рис. 62, в),

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup DC - \cup AD) = \frac{1}{2} \cup AC.$$

Теорема доказана. ■

Только что доказанную теорему можно сформулировать иначе.

Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Задача

Найдите угол BDC , если $\angle BCA = 50^\circ$ (рис. 63).

Решение

Для того чтобы найти угол BDC , необходимо найти градусную меру дуги BC , на которую он опирается. Но непосредственно по данным задачи мы можем найти только градусную меру дуги AB , на которую опирается угол BCA : из теоремы о вписанном угле $\cup AB = 2\angle BCA = 100^\circ$. Заметим, что дуги AB и BC вместе составляют полуокружность, т.е. $\cup AB + \cup BC = 180^\circ$, следовательно, $\cup BC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle BDC = \frac{1}{2} \cup BC = 40^\circ$.

Ответ: 40° .

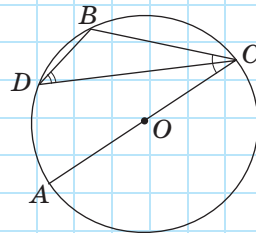


Рис. 63

7.3. Следствия из теоремы о вписанном угле

По количеству и значимости следствий теорема о вписанном угле является одной из «богатейших» геометрических теорем. Сформулируем наиболее важные из этих следствий.

Следствие 1

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

Действительно, по теореме о вписанном угле градусная мера каждого из вписанных углов на рис. 64 равна половине дуги AB .

Следствие 2

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой, и наоборот: любой прямой вписанный угол опирается на полуокружность.

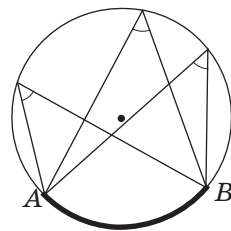


Рис. 64. Вписанные углы, опирающиеся на дугу AB , равны

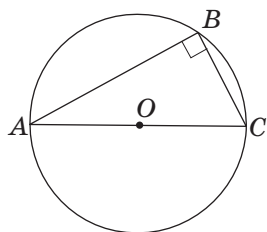
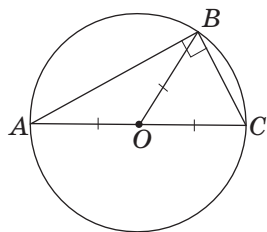


Рис. 65. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой

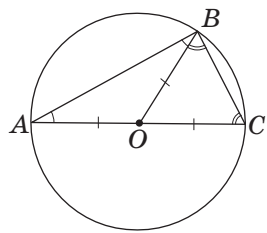
Действительно, поскольку градусная мера полуокружности равна 180° , то угол ABC , опирающийся на полуокружность, равен 90° (рис. 65). Обоснование обратного утверждения проведите самостоятельно.

Следствие 3

Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.



а



б

Рис. 66. Прямоугольный треугольник ABC вписан в окружность

Первое из приведенных утверждений вытекает из следствия 2. Если в треугольнике ABC угол ABC прямой (рис. 66, а), то дуга AC , на которую опирается этот угол, является полуокружностью. Тогда гипотенуза AC — диаметр описанной окружности, т. е. середина гипотенузы — центр окружности. Утверждение о длине медианы следует из равенства радиусов: $BO = AO = CO = \frac{1}{2} AC$.

Отметим еще один интересный факт: медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит данный треугольник на два равнобедренных треугольника с общей боковой стороной. Из этого, в частности, следует, что *углы, на которые медиана делит прямой угол, равны острым углам треугольника* (рис. 66, б).

В качестве примера применения следствий из теоремы о вписанном угле приведем другое решение задачи, которую мы рассмотрели в п. 7.2.

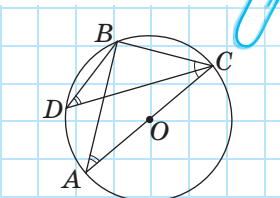


Рис. 67

Задача

Найдите угол BDC , если $\angle BCA = 50^\circ$ (см. рис. 63).

Решение

Проведем хорду AB (рис. 67). Поскольку вписанный угол ABC опирается на полуокружность, то по следствию 2 $\angle ABC = 90^\circ$. Значит, треугольник ABC

прямоугольный, $\angle BCA = 50^\circ$, тогда $\angle BAC = 40^\circ$.
По следствию 1 углы BAC и BDC равны, поскольку оба они опираются на дугу BC . Следовательно,
 $\angle BDC = \angle BAC = 40^\circ$.

Ответ: 40° .

Вопросы и задачи



Устные упражнения

207. Определите, является ли вписанный в окружность угол ABC острым, прямым или тупым, если:

- а) дуга ABC этой окружности меньше полуокружности;
- б) дуга ABC этой окружности больше полуокружности;
- в) дуга ABC этой окружности равна полуокружности.

208. Сторона вписанного угла проходит через центр окружности (см. рис. 62, а). Может ли данный угол быть тупым; прямым?

209. Трое футболистов пробивают штрафные удары по воротам из точек A , B и C , которые лежат на окружности (рис. 68). У кого из них угол обстрела ворот наибольший?

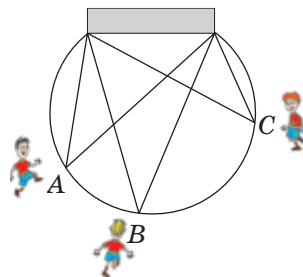


Рис. 68

210. Могут ли два вписанных угла быть равными, если они не опираются на одну дугу?

211. Могут ли вписанные углы ABC и AB_1C не быть равными? Приведите пример.

212. Может ли:

- а) угол, стороны которого пересекают окружность в концах диаметра, быть острым;
- б) угол с вершиной на окружности, стороны которого пересекают окружность в концах диаметра, быть острым?

213. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10. Может ли высота, проведенная к ней, быть равной 6? Ответ обоснуйте.



Графические упражнения

214. Начертите окружность с центром в точке O и отметьте на ней точки A , B и C .

а) Выделите двумя цветами два угла, образованные лучами OA и OC .

б) Каким цветом выделен угол, который в два раза больше угла ABC ?

в) Отметьте на окружности точку D так, чтобы вписанные углы ABC и ADC были равны.



215. Начертите окружность с центром O и проведите ее диаметр AB .

а) Отметьте на окружности точку C и измерьте угол ACB . Объясните полученный результат.

б) Начертите и выделите красным цветом центральный угол, который в два раза больше угла ABC .



Письменные упражнения

Уровень А

216. В окружности построен центральный угол. Найдите градусные меры дуг, которые образовались, если:

а) одна из них больше другой на 120° ;

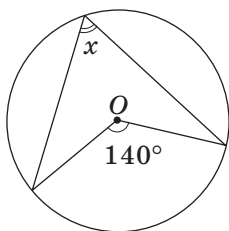
б) они относятся как $2 : 7$.



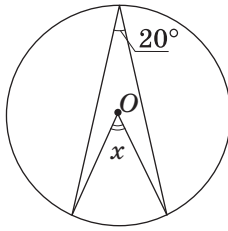
217. Найдите градусную меру дуги, которая составляет:

а) четверть окружности; б) треть окружности; в) $\frac{5}{18}$ окружности.

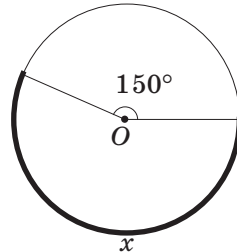
218. По данным рис. 69 найдите градусную меру x (точка O — центр окружности).



а



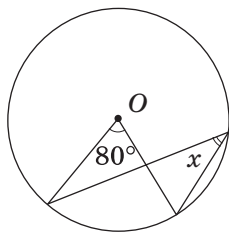
б



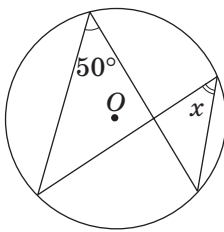
в

Рис. 69

219. По данным рис. 70 найдите угол x (точка O — центр окружности).

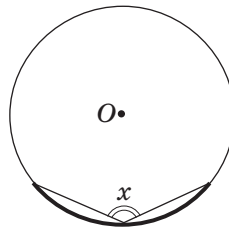


а



б

Рис. 70



в

220. На окружности отмечены точки A, B, C и D . Найдите угол ABC , если $\angle ADC = \alpha$. Сколько решений имеет задача?

221. На окружности отмечены точки A, B и C , причем хорда AC равна радиусу окружности. Найдите угол ABC . Сколько решений имеет задача?

222. Треугольник ABC вписан в окружность, центр которой лежит на отрезке AB . Найдите:

- угол B , если $\angle A = 65^\circ$;
- медиану, проведенную из вершины C , если $AB = 12$ см.

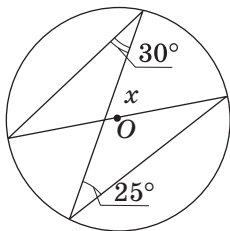
223. Отрезок AC — диаметр окружности с центром O , а точка B лежит на этой окружности. Найдите:

- угол между хордами BA и BC ;
- отрезок AC , если $BO = 5$ см.

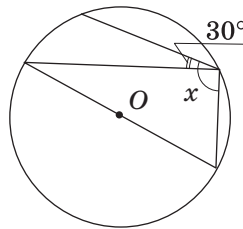
224. Докажите, что биссектриса вписанного угла делит пополам дугу, на которую он опирается.

Уровень Б

225. По данным рис. 71 найдите угол x (точка O — центр окружности).



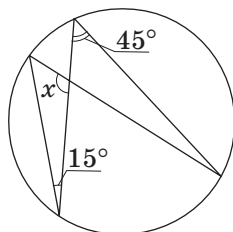
а



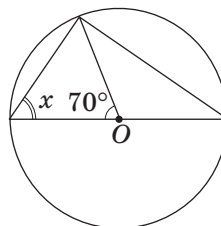
б

Рис. 71

226. По данным рис. 72 найдите угол x (точка O — центр окружности).



а



б

Рис. 72

227. Хорда AC делит окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как $11 : 7$. Найдите угол ABC , если точка B лежит на большей дуге.

228. Найдите углы вписанного треугольника, если его вершины делят окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как $3 : 4 : 5$.

229. Сторона равнобедренного треугольника, вписанного в окружность, стягивает дугу 100° . Найдите углы треугольника. Сколько решений имеет задача?

230 (опорная). Угол между хордой и касательной к окружности, проведенной через конец хорды, измеряется половиной дуги, лежащей внутри этого угла. Докажите.

231 (опорная).

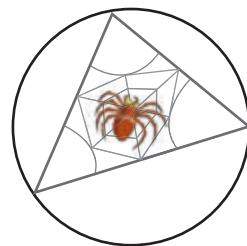
а) Дуги окружности, заключенные между двумя параллельными хордами, равны. Докажите.

б) Если две дуги окружности равны, то равны и хорды, стягивающие их. Докажите. Пользуясь рисунком, сформулируйте и докажите обратное утверждение.

232. Хорда окружности стягивает дугу 100° . Найдите угол между касательными, проведенными через концы этой хорды.

233. На окружности отмечены точки A , B и C , причем AC — диаметр окружности, $\angle BCA = 60^\circ$, $BC = 4$ см. Найдите радиус окружности.

234. Найдите меньший катет прямоугольного треугольника, если его медиана, проведенная к гипотенузе, равна 9 см и образует с гипотенузой угол 60° .




Уровень В

235 (опорная). *Центр окружности, описанной около остроугольного треугольника, лежит внутри треугольника, а центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, — вне треугольника. Докажите.*


236 (опорная). *Угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммой дуг, одна из которых заключена между сторонами этого угла, а другая — между их продолжениями. Докажите.*


237 (опорная). *Угол между двумя секущими, которые пересекаются вне окружности, измеряется полуразностью большей и меньшей дуг, заключенных между его сторонами. Докажите.*

238. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, проведенной к гипотенузе.

 **239.** Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.

240. Найдите геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через концы отрезка AB .

 **241.** Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB видно под заданным углом α .


 **242.** Точка A лежит вне данной окружности с центром в точке O . Постройте касательную к данной окружности, проходящую через точку A .



Повторение перед изучением § 8

Теоретический материал

- описанная и вписанная окружности;
- свойство отрезков касательных;
- теорема о биссектрисе угла.

 7 класс, § 23

 7 класс, п. 21.3, 22.2

Задачи

243. В равнобедренный треугольник с углом при основании 40° вписана окружность. Найдите угол между радиусами, проведенными в точки касания окружности с боковыми сторонами треугольника.

244. Найдите периметр равнобедренного треугольника, если точка касания вписанной окружности делит боковую сторону на отрезки длиной 8 см и 9 см, начиная от основания.

§ 8

Вписанные и описанные четырехугольники

8.1. Вписанные четырехугольники

Определение

Четырехугольник называется **вписанным в окружность**, если все его вершины лежат на этой окружности.

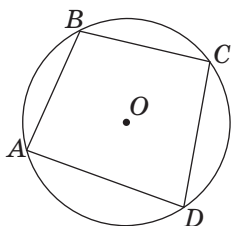


Рис. 73. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность

Четырехугольник $ABCD$ на рис. 73 является вписанным в окружность. Иначе говорят, что *окружность описана около четырехугольника*.

Как известно, около любого треугольника можно описать окружность. Для четырехугольника это можно сделать не всегда. Докажем свойство и признак вписанного четырехугольника.

Теорема (свойство вписанного четырехугольника)

Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180° .

Доказательство

□ Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 73). По теореме о вписанном угле $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$, $\angle C = \frac{1}{2} \cup DAB$. Следовательно, $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\cup BCD + \cup DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

Аналогично доказываем, что $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Теорема доказана. ■

Теорема (признак вписанного четырехугольника)

Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° , то около него можно описать окружность.



Доказательство*

□ Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$. Опишем окружность около треугольника ABC и докажем от противного, что вершина D не может лежать ни внутри этой окружности, ни вне ее. Пусть точка D лежит внутри окружности, а точка E — точка пересечения луча AD с дугой AC (рис. 74). Тогда четырехугольник $ABCE$ — вписанный. По условию $\angle B + \angle D = 180^\circ$, а по только что доказанному свойству вписанного четырехугольника $\angle B + \angle E = 180^\circ$, т. е. $\angle D = \angle E$. Но угол D четырехугольника $ABCD$ — внешний угол треугольника CDE , и по теореме о внешнем угле треугольника он должен быть больше угла E . Итак, мы пришли к противоречию, т. е. точка D не может лежать внутри окружности. Аналогично можно доказать, что точка D не может лежать вне окружности (сделайте это самостоятельно). Тогда точка D лежит на окружности, т. е. около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Теорема доказана. ■

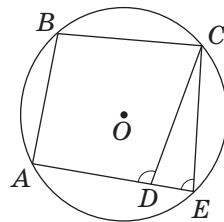


Рис. 74. К доказательству от противного признака вписанного четырехугольника

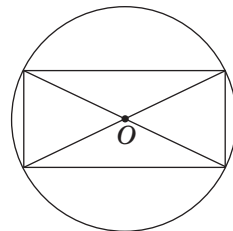


Рис. 75. Прямоугольник, вписанный в окружность

Следствие 1

Около любого прямоугольника можно описать окружность.

Если параллелограмм вписан в окружность, то он является прямоугольником.

Прямоугольник, вписанный в окружность, изображен на рис. 75. Центр описанной окружности является точкой пересечения диагоналей прямоугольника (см. задачу 255).

Следствие 2

Около равнобокой трапеции можно описать окружность.

Если трапеция вписана в окружность, то она равнобокая.

Равнобокая трапеция, вписанная в окружность, изображена на рис. 76.

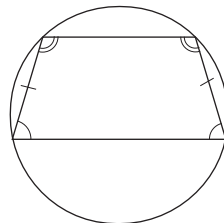


Рис. 76. Равнобокая трапеция, вписанная в окружность

Примеры решения задач о вписанных четырехугольниках представлены в п. 8.4.

8.2. Описанные четырехугольники

Определение

Четырехугольник называется **описанным около окружности**, если все его стороны касаются этой окружности.

Четырехугольник $ABCD$ на рис. 77 является описанным около окружности. Иначе говорят, что окружность вписана в четырехугольник.

Оказывается, не в любой четырехугольник можно вписать окружность. Докажем соответствующие свойство и признак.

Теорема (свойство описанного четырехугольника)

В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

Доказательство

□ Пусть стороны четырехугольника $ABCD$ касаются вписанной окружности в точках K, L, M и N (рис. 77). По свойству отрезков касательных $AK = AN$, $BK = BL$, $CL = CM$, $DM = DN$.

С учетом обозначений на рисунке $AB + CD = a + b + c + d = AD + BC$. Теорема доказана. ■

Теорема (признак описанного четырехугольника)

Если в четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

Доказательство*

□ Пусть в четырехугольнике $ABCD$ с наименьшей стороной AB $AB + CD = AD + BC$. Поскольку по теореме о биссектрисе угла точка O (точка пересечения биссектрис углов A и B) равноудалена от сторон AB, BC и AD , то можно построить окружность с центром O , которая касается этих трех сторон

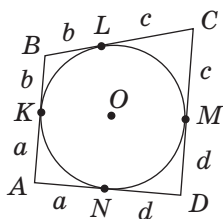
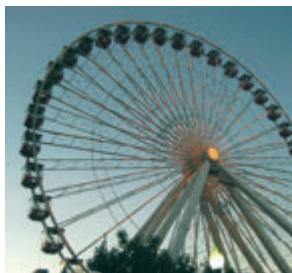


Рис. 77. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности



(рис. 78, а). Докажем от противного, что эта окружность касается также стороны CD .

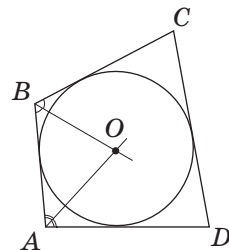
Предположим, что это не так. Тогда прямая CD либо не имеет общих точек с окружностью, либо является секущей окружности. Рассмотрим первый случай (рис. 78, б). Проведем через точку C касательную к окружности, которая пересекает сторону AD в точке D_1 . Тогда по свойству описанного четырехугольника $ABCD_1$ $BC + AD_1 = AB + CD_1$. Но по условию $BC + AD = AB + CD$. Вычитая из второго равенства первое, имеем: $AD - AD_1 = CD - CD_1$, т. е. $DD_1 = CD - CD_1$, что противоречит неравенству треугольника для треугольника CD_1D . Таким образом, наше предположение неверно. Аналогично можно доказать, что прямая CD не может быть секущей окружности (сделайте это самостоятельно). Итак, окружность касается стороны CD , т. е. четырехугольник $ABCD$ описанный. Теорема доказана. ■

Замечание. Напомним, что в данных теоремах рассматриваются только выпуклые четырехугольники.

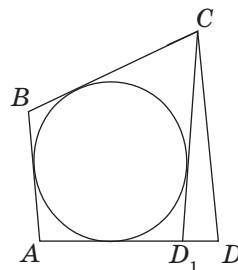
Следствие

**В любой ромб можно вписать окружность.
Если в параллелограмм вписана окружность,
то он является ромбом.**

Ромб, описанный около окружности, изображен на рис. 79. Центр вписанной окружности является точкой пересечения диагоналей ромба (см. задачу 265, а).



а



б

Рис. 78. К доказательству признака описанного четырехугольника

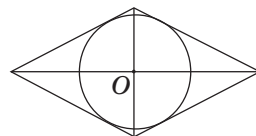


Рис. 79. Ромб, описанный около окружности

Задача

В равнобокую трапецию с боковой стороной 6 см вписана окружность. Найдите среднюю линию трапеции.

Решение

Пусть $ABCD$ — данная равнобокая трапеция с основаниями AD и BC . По свойству описанного четырехугольника $AB + CD = AD + BC = 12$ см. Средняя линия трапеции равна $\frac{AD + BC}{2}$, т. е. 6 см.

Ответ: 6 см.

Софизм — от греческого «софизма» — выдумка, уловка, головоломка

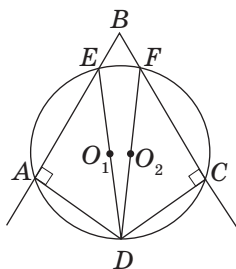


Рис. 80

8.3*. Геометрические софизмы

Многим из вас, наверное, известна древнегреческая история об Ахиллесе, который никак не может догнать черепаху. История математики знает немало примеров того, как ложные утверждения и ошибочные результаты выдавались за истинные, а их опровержение давало толчок настоящим математическим открытиям. Но даже ошибки и неудачи могут принести пользу математикам. Эти ошибки остались в учебниках и пособиях в виде **софизмов** — заведомо ложных утверждений, доказательства которых на первый взгляд кажутся правильными, но на самом деле таковыми не являются. Поиск и анализ ошибок, содержащихся в этих доказательствах, часто позволяют определить причины ошибок в решениях других задач. Поэтому в процессе изучения геометрии софизмы иногда даже более поучительны и полезны, чем «безошибочные» задачи и доказательства.

Рассмотрим пример геометрического софизма, связанного с четырехугольниками, вписанными в окружность.

Окружность имеет два центра.

«Доказательство»

Отметим на сторонах произвольного угла B точки A и C и проведем через эти точки перпендикуляры к сторонам BA и BC соответственно (рис. 80). Эти перпендикуляры должны пересекаться (ведь если бы они были параллельны, то параллельными были бы и стороны данного угла — обоснуйте это самостоятельно). Обозначим точку пересечения перпендикуляров D .

Через точки A , D и C , не лежащие на одной прямой, проведем окружность (это можно сделать, поскольку окружность, описанная около треугольника ADC , существует и является единственной). Обозначим точки E и F — точки пересечения этой окружности со сторонами угла B . Прямые углы EAD

и FCD являются вписанными в окружность. Значит, по следствию из теоремы о вписанных углах отрезки DE и DF являются диаметрами окружности, которые имеют общий конец D , но не совпадают. Тогда их середины O_1 и O_2 являются двумя разными центрами одной окружности, т. е. окружность имеет два центра.

Ошибка этого «доказательства» заключается в неправильности построений на рис. 80. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$, т. е. он вписан в окружность. Это означает, что в ходе построений окружность, проведенная через точки A , D и C , обязательно пройдет через точку B . В таком случае отрезки DE и DF совпадут с отрезком DB , середина которого и является единственным центром построенной окружности.

Среди задач к этому и следующим параграфам вы найдете другие примеры геометрических софизмов и сможете самостоятельно потренироваться в их опровержении. Надеемся, что опыт, который вы при этом приобретете, поможет в дальнейшем избежать подобных ошибок при решении задач.



8.4*. Четырехугольник и окружность в задачах. Метод вспомогательной окружности

При решении задач об окружностях и четырехугольниках иногда следует использовать специальные подходы. Один из них заключается в рассмотрении вписанного треугольника, вершины которого являются вершинами данного вписанного четырехугольника.

Задача

Найдите периметр равнобокой трапеции, диагональ которой перпендикулярна боковой стороне и образует с основанием угол 30° , если радиус окружности, описанной около трапеции, равен 8 см.

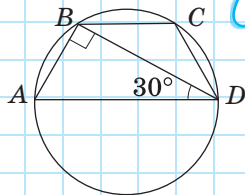


Рис. 81

Решение

Пусть дана вписанная трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, $BD \perp AB$, $\angle ADB = 30^\circ$ (рис. 81). Заметим, что окружность, описанная около трапеции, описана также и около прямоугольного треугольника ABD , значит, ее центром является середина гипотенузы AD . Тогда $AD = 2R = 16$ см. В треугольнике ABD $AB = 8$ см как катет, противолежащий углу 30° . Поскольку в прямоугольном треугольнике ABD $\angle A = 60^\circ$, то углы при большем основании трапеции равны 60° . $\angle ADB = \angle CBD$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD . Следовательно, в треугольнике BCD два угла равны, т.е. он является равнобедренным с основанием BD , откуда $BC = CD = AB = 8$ см. Тогда $P_{ABCD} = 16 + 8 + 8 + 8 = 40$ (см).

Ответ: 40 см.

Особенно интересным и нестандартным является применение окружности (как описанной, так и вписанной) при решении задач, в условиях которых окружность вообще не упоминается.

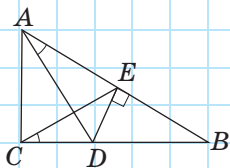


Рис. 82

Задача

Из точки D , лежащей на катете BC прямоугольного треугольника ABC , проведен перпендикуляр DE к гипотенузе AB (рис. 82). Докажите, что $\angle DCE = \angle DAE$.

Решение

В четырехугольнике $ACDE$ $\angle ACD + \angle AED = 180^\circ$, значит, около него можно описать окружность. В этой окружности вписанные углы DCE и DAE будут опираться на одну и ту же дугу, и по следствию из теоремы о вписанном угле $\angle DCE = \angle DAE$.

Метод решения задач с помощью дополнительного построения описанной или вписанной окружности называют **методом вспомогательной окружности**.

Вопросы и задачи



Устные упражнения

245. В какой прямоугольник можно вписать окружность? Около какого ромба можно описать окружность?

246. Можно ли описать окружность около четырехугольника, у которого только один прямой угол; только два прямых угла?

247. Можно ли описать окружность около прямоугольной трапеции?

248. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) описана около окружности (рис. 83). Как построить точку M такую, чтобы треугольник AMD был описан около той же окружности?

249. В трапеции три стороны равны. Можно ли в такую трапецию вписать окружность? Можно ли около такой трапеции описать окружность?

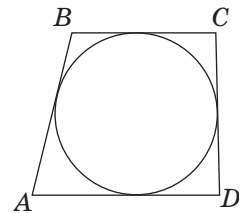


Рис. 83



Графические упражнения

250. Начертите окружность с центром в точке O и отметьте на ней точки A , B , C и D так, чтобы при их последовательном соединении образовался вписанный четырехугольник $ABCD$. Измерьте углы A и B этого четырехугольника. Используя свойства вписанного четырехугольника, вычислите градусные меры углов C и D . Проверьте полученные результаты измерениями.

251. Начертите окружность с центром в точке O и проведите к ней четыре касательные так, чтобы при их попарном пересечении образовался описанный четырехугольник $ABCD$. Измерьте длины сторон AB , BC и CD этого четырехугольника. Используя свойства описанного четырехугольника, вычислите длину стороны AD . Проверьте полученный результат измерением.



Письменные упражнения

Уровень А

252. Определите, можно ли описать окружность около четырехугольника $ABCD$, если углы A , B , C и D равны соответственно:

- а) 90° , 90° , 20° , 160° ;
- б) 5° , 120° , 175° , 60° .

253. Найдите неизвестные углы:

- а) вписанного четырехугольника, если два его угла равны 46° и 125° ;
- б) вписанной трапеции, если один из ее углов равен 80° ;
- в) вписанного четырехугольника, диагонали которого точкой пересечения делятся пополам.



254. Найдите неизвестные углы:

- а) вписанного четырехугольника $ABCD$, если углы A и C равны, а угол D равен 50° ;
- б) вписанной трапеции, если сумма двух из них равна 230° .

255 (опорная). *Центр окружности, описанной около прямоугольника, является точкой пересечения его диагоналей.* Докажите.

256. Из точки C , лежащей внутри острого угла A , проведены перпендикуляры CB и CD к сторонам угла. Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.



257. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$. Докажите, что около этого четырехугольника можно описать окружность.

258. Найдите периметр:

- а) описанного четырехугольника, три последовательные стороны которого равны 7 см, 9 см и 8 см;
- б) описанной трапеции, боковые стороны которой равны 3 см и 11 см.




259. Равнобокая трапеция описана около окружности. Найдите:

- а) боковую сторону трапеции, если ее средняя линия равна 7 см;
- б) среднюю линию трапеции, если ее периметр равен 16 см.


260. Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен 3 см. Найдите периметр квадрата.

Уровень Б

261. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр которой лежит на стороне AD . Найдите углы четырехугольника, если $\angle ACB = 20^\circ$, $\angle DBC = 10^\circ$.

 **262.** Найдите углы трапеции, если центр окружности, описанной около нее, лежит на большем основании, а угол между диагоналями равен 70° .

263. В треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке D . Докажите, что точки A_1, B, C_1, D лежат на одной окружности.


 **264.** Если биссектрисы углов четырехугольника, пересекаясь, образуют четырехугольник, то около образованного четырехугольника можно описать окружность. Докажите.

265 (опорная).


а) Центр окружности, вписанной в ромб, является точкой пересечения его диагоналей, а радиус окружности равен половине высоты ромба. Докажите.

б) Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен половине ее высоты. Докажите.


266. Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC (точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC). Докажите, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

 **267.** Стороны четырехугольника равны 4 м, 9 м, 8 м и 5 м. Назовите пары противоположных сторон этого четырехугольника, если в него можно вписать окружность.

268. Диагональ ромба, проведенная из вершины угла 60° , равна 24 см. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

 **269.** Найдите среднюю линию прямоугольной трапеции, в которой большая боковая сторона равна 10 см, а радиус вписанной окружности равен 3 см.

270. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, делит данный треугольник на трапецию и треугольник с периметром 24 см. Основание данного треугольника равно 12 см. Докажите, что в полученную трапецию можно вписать окружность.


 **271.** Из точки A , лежащей вне окружности с центром в точке O , проведены касательные AB и AC к этой окружности (B и C — точки касания). Докажите, что в четырехугольник $ABOC$ можно вписать окружность.

Уровень В


272 (опорная). Если трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) описана около окружности с центром в точке O , то:


- а) точка O — точка пересечения биссектрис углов трапеции;
 б) треугольники AOB и COD прямоугольные.

Докажите.

 **273.** Если сторону четырехугольника, соединяющую две его вершины, видно из двух других вершин под равными углами, то около этого четырехугольника можно описать окружность. Докажите.

274. Из вершины тупого угла ромба $ABCD$ проведены высоты BM и BN , причем отрезок MN вдвое меньше диагонали BD . Найдите углы ромба.

 **275.** На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построен квадрат $ABDE$, диагонали которого пересекаются в точке K . Найдите угол ACK .

 **276.** Найдите ошибку в «доказательстве» геометрического софизма: *внешний угол треугольника равен внутреннему углу, не смежному с ним.*

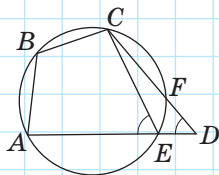



Рис. 84

«Доказательство»

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle B + \angle D = 180^\circ$ (рис. 84). Через точки A , B и C проведем окружность, которая пересечет стороны AD и CD в некоторых точках E и F . Соединив точки E и C , получим четырехугольник $ABCE$, вписанный в данную окружность. По свойству вписанного четырехугольника $\angle B + \angle E = 180^\circ$. Но по условию $\angle B + \angle D = 180^\circ$, следовательно, $\angle D = \angle E$. Это означает, что угол CEA , который является внешним углом треугольника CDE , равен внутреннему углу CDE этого треугольника, т.е. внешний угол треугольника равен внутреннему углу, не смежному с ним.

 **277.** Найдите ошибку в «доказательстве» геометрического софизма: *в окружности хорда, которая не проходит через центр, равна диаметру.*

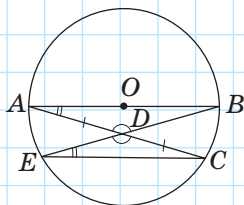


Рис. 85

«Доказательство»

Пусть AB — диаметр окружности с центром в точке O (рис. 85). Проведем через точку A произвольную хорду AC и обозначим ее середину — точку D . Проведем через точки B и D хорду BE и соединим точки E и C .

В треугольниках ADB и CDE углы при вершине D равны как вертикальные, $\angle BAD = \angle CED$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC , а $AD = CD$ по построению. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум углам, откуда $AB = EC$, т.е. диаметр окружности равен хорде, которая не проходит через центр окружности.

278. Постройте ромб по диагонали и радиусу вписанной окружности.



279. Постройте равнобокую трапецию по боковой стороне и радиусу вписанной окружности.



Повторение перед изучением § 9

Теоретический материал

- медиана, биссектриса и высота треугольника;
- описанная и вписанная окружности треугольника.

7 класс, § 12, 23

Задачи

280. Один из углов треугольника равен 60° . Под каким углом пересекаются биссектрисы двух других его углов?

281. Один из углов треугольника равен 60° . Под каким углом пересекаются высоты, проведенные к сторонам этого угла?

§ 9*

Замечательные точки треугольника

9.1. Точка пересечения медиан

В седьмом классе в ходе изучения вписанной и описанной окружностей треугольника рассматривались две его замечательные точки — точка пересечения биссектрис (иначе ее называют **инцентром** треугольника) и точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Рассмотрим еще две замечательные точки треугольника.

Теорема (о точке пересечения медиан треугольника)

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$, начиная от вершины треугольника.

Доказательство

□ Пусть в треугольнике ABC проведены медианы AD , BF и CE (рис. 86). Докажем, что они пересекаются в некоторой точке O , причем $AO : OD = BO : OF = CO : OE = 2 : 1$.

Пусть O — точка пересечения медиан AD и CE , точки K и M — середины отрезков AO и CO соответственно. Отрезок ED — средняя линия треугольника ABC , и по свойству средней линии треугольника $ED \parallel AC$, $ED = \frac{1}{2} AC$. Кроме того, KM — средняя линия треугольника AOC , и по тому же свойству $KM \parallel AC$, $KM = \frac{1}{2} AC$. Зна-

чит, в четырехугольнике $KEDM$ две стороны параллельны и равны. Таким образом, $KEDM$ —

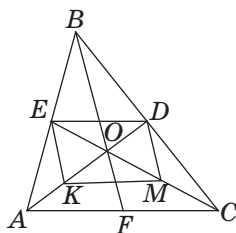


Рис. 86. Медианы треугольника пересекаются в одной точке

параллелограмм, и его диагонали KD и EM точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, $AK = KO = OD$, $CM = MO = OE$, т.е. точка O делит медианы AD и CE в отношении $2 : 1$.

Аналогично доказываем, что и третья медиана BF точкой пересечения с каждой из медиан AD и CE делится в отношении $2 : 1$. А поскольку такая точка деления для каждой из медиан единственная, то, следовательно, все три медианы пересекаются в одной точке. ■

Точку пересечения медиан треугольника иначе называют **центроидом**, или **центром масс** треугольника. В уместности такого названия вы можете убедиться, проведя эксперимент: вырежьте из картона треугольник произвольной формы, проведите в нем медианы и попробуйте удержать его в равновесии, положив на иглу или острый карандаш в точке пересечения медиан (рис. 87).

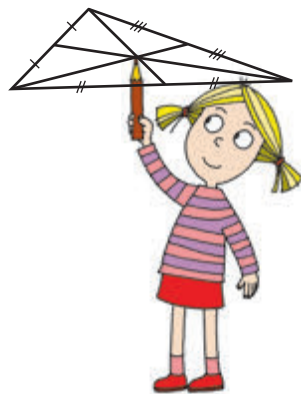


Рис. 87. Точка пересечения медиан — центр масс треугольника

Задача

Если в треугольнике две медианы равны, то он равнобедренный. Докажите.

Решение

Пусть в треугольнике ABC медианы AD и CE равны и пересекаются в точке O (рис. 88).

Рассмотрим треугольники AOE и COD . Поскольку точка O делит каждую из равных медиан AD и CE в отношении $2 : 1$, то $AO = CO$, $EO = DO$. Кроме того, $\angle AOE = \angle COD$ как вертикальные. Значит, $\triangle AOE = \triangle COD$ по первому признаку. Отсюда следует, что $AE = CD$.

Но по определению медианы эти отрезки — половины сторон AB и CB . Следовательно, $AB = CB$, т.е. треугольник ABC равнобедренный.

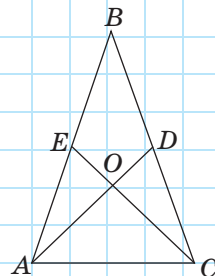


Рис. 88

9.2. Точка пересечения высот

Теорема (о точке пересечения высот треугольника)

Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Доказательство

□ Пусть AD , BF и CE — высоты треугольника ABC (рис. 89). Проведем через вершины треугольника прямые, параллельные противоположным сторонам, получим треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого перпендикулярны высотам треугольника ABC . По построению четырехугольники C_1BCA и B_1ABC — параллелограммы, откуда $C_1A = BC$ и $BC = AB_1$. Следовательно, точка A — середина отрезка B_1C_1 . Аналогично доказываем, что B — середина A_1C_1 и C — середина A_1B_1 .

Таким образом, высоты AD , BF и CE лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, которые пересекаются в одной точке по следствию из теоремы об окружности, описанной около треугольника. ■

Точку пересечения высот (или их продолжений) иначе называют **ортоцентром** треугольника.

Таким образом, замечательными точками треугольника являются:

- *точка пересечения биссектрис — центр окружности, вписанной в треугольник;*
- *точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам — центр окружности, описанной около треугольника;*
- *точка пересечения медиан — делит каждую из медиан в отношении 2 : 1 начиная от вершины треугольника;*
- *точка пересечения высот (или их продолжений).*

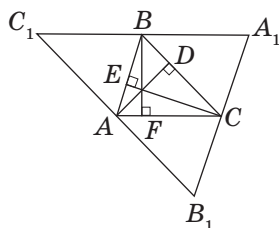


Рис. 89. Высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке



Вопросы и задачи



Устные упражнения

- **282.** Какие из замечательных точек треугольника могут лежать вне треугольника?
- 283.** Может ли ортоцентр треугольника совпадать с его вершиной?
- 284.** Как расположены замечательные точки в равностороннем треугольнике?



Графические упражнения

- 285.** Начертите треугольник ABC , проведите его медианы AD и CE . Обозначьте точку O — точку их пересечения.
 - а) Измерьте длины отрезков AO , OD и CO . Используя теорему о точке пересечения медиан треугольника, вычислите приблизительно длину отрезка OE . Проверьте полученный результат измерением.
 - б) Проведите луч BO и обозначьте точку F , в которой он пересекает сторону AC . В каком отношении эта точка делит сторону AC ?
- 🏠 **286.** Начертите треугольник ABC , проведите его высоты AD и CE . Обозначьте точку O — точку пересечения этих высот (или их продолжений). Проведите луч BO . Под каким углом он пересекает прямую AC ? Почему?



Письменные упражнения


Уровень А

- 287.** Докажите, что в равнобедренном треугольнике все четыре замечательные точки лежат на одной прямой. Какая это прямая?
- 288.** В треугольнике точка пересечения медиан совпадает с ортоцентром. Докажите, что данный треугольник равносторонний.
- 🏠 **289.** Точка пересечения медиан треугольника делит одну из медиан на отрезки, разность которых составляет 3 см. Найдите длину этой медианы.

Уровень Б

- 290.** Точка H — ортоцентр треугольника ABC . Докажите, что точка A — ортоцентр треугольника HBC .


291. Точки D, E, F — середины сторон треугольника ABC . Докажите, что точка пересечения медиан треугольника DEF совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC .

 **292.** Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и CDA лежат на диагонали BD и делят ее на три равные части.

Уровень В

293. Расстояние от центра окружности, описанной около равнобедренного треугольника, до его основания равно 3 см, а радиус этой окружности равен 6 см. Найдите длины отрезков, на которые точка пересечения медиан делит медиану, проведенную к основанию.

294. Постройте треугольник по трем медианам.

 **295.** Центр окружности, описанной около треугольника, является ортоцентром треугольника, образованного средними линиями данного треугольника. Докажите.



Повторение перед изучением § 10

Теоретический материал

- пропорции;
- равенство треугольников;
- теорема Фалеса.



6 класс



7 класс, § 7



8 класс, § 6

Задачи

296. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle B = 90^\circ$) через середину катета AB проведена прямая, параллельная медиане BM . Найдите длины отрезков, на которые эта прямая делит гипотенузу, если $BM = 6$ см.

297. Найдите x из пропорции:

а) $5,4 : x = 2,7 : 7,2$;

б) $\frac{x+1}{144} = \frac{25}{60}$.



Онлайн-тренировка для подготовки к контрольной работе № 2

Задачи для подготовки к контрольной работе № 2

1. В равнобокой трапеции противолежащие углы относятся как 2 : 7. Найдите углы трапеции.

2. По рис. 90 найдите AB_1 , если $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, $AC_1 = C_1C_2$, $AB_2 = 12$ см.

3. Средняя линия отсекает от данного треугольника треугольник, периметр которого равен 17 см. Найдите периметры данного треугольника и треугольника, образованного его средними линиями.

4. В равнобокой трапеции с углом 45° отрезки, соединяющие середину большего основания с вершинами тупых углов, перпендикулярны боковым сторонам. Найдите среднюю линию трапеции, если ее меньшее основание равно 4 см.

5. По данным рис. 91 найдите угол x .

6. В равнобокую трапецию вписана окружность, которая точкой касания делит боковую сторону на отрезки в отношении 9 : 16. Найдите длины этих отрезков, если средняя линия трапеции равна 50 см.

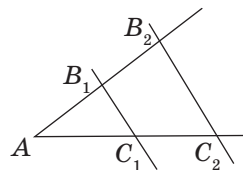


Рис. 90

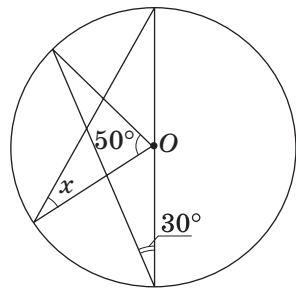
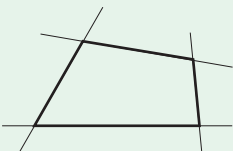
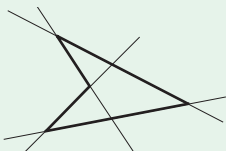
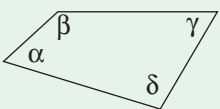

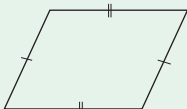
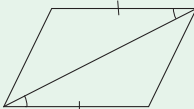
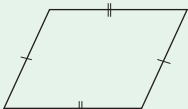



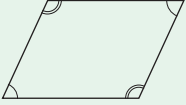
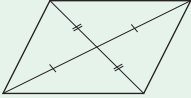
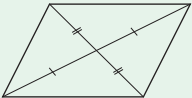
Рис. 91

Итоги

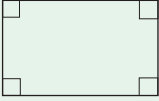
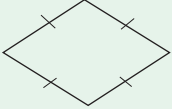
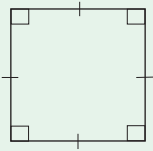
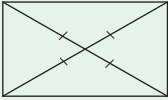

ИТОГОВЫЙ ОБЗОР ГЛАВЫ I

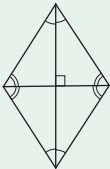
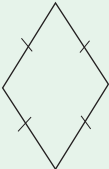
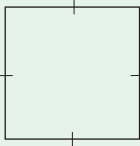
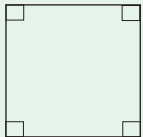
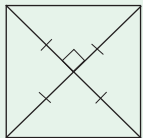

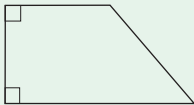
ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК	
Выпуклый четырехугольник 	Невыпуклый четырехугольник 
<p><i>Теорема о сумме углов четырехугольника</i></p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>Сумма углов четырехугольника равна 360°:</p> $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ </div> </div>	

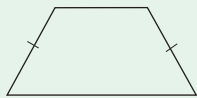
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ	
	<p>Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны</p>
Свойства параллелограмма	Признаки параллелограмма
 <p>Противоположные стороны параллелограмма равны</p>	 <p>Если две противоположные стороны четырехугольника параллельны и равны, то этот четырехугольник — параллелограмм</p>
	 <p>Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм</p>

Свойства параллелограмма		Признаки параллелограмма	
	Противоположные углы параллелограмма равны		Если противоположные углы четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм
	Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам		Если диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм

ВИДЫ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ

	Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые		
	Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны		
	Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны		
Свойство прямоугольника		Признак прямоугольника	
	Диагонали прямоугольника равны		Если все углы четырехугольника равны, то этот четырехугольник является прямоугольником

Свойства ромба		Признак ромба	
	Диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам		Если все стороны четырехугольника равны, то этот четырехугольник является ромбом
Свойства квадрата			
	Все стороны квадрата равны, а противоположные стороны параллельны		
	Все углы квадрата прямые		
	Диагонали квадрата равны, перпендикулярны, делят углы квадрата пополам и точкой пересечения делятся пополам		
ТРАПЕЦИЯ			
	Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие непараллельны		
	Прямоугольной трапецией называется трапеция, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям		



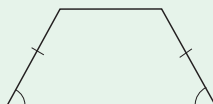
Равнобокой (равнобедренной) трапецией называется трапеция, у которой боковые стороны равны

Свойство равнобокой трапеции

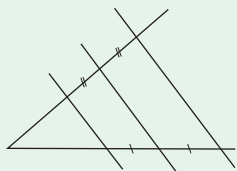
В равнобокой трапеции углы при основании равны

Признак равнобокой трапеции

Если в трапеции углы при основании равны, то такая трапеция равнобокая



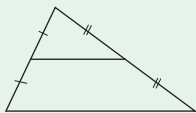
Теорема Фалеса



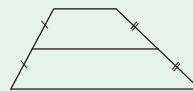
Параллельные прямые, которые пересекают стороны угла и отсекают на одной из них равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой стороне

СРЕДНИЕ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТРАПЕЦИИ

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон



Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции



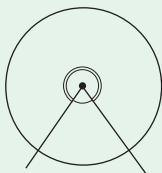
Свойство средней линии треугольника

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны

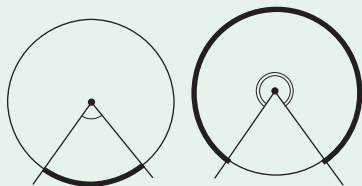
Свойство средней линии трапеции

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме

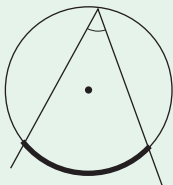
УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ



Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в центре окружности



Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла



Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность.

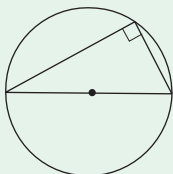
Теорема о вписанном угле

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается

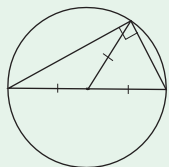
Следствия из теоремы о вписанном угле



Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны

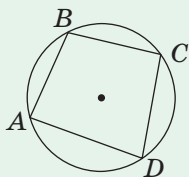


Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой, и наоборот: любой прямой вписанный угол опирается на полуокружность



Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы

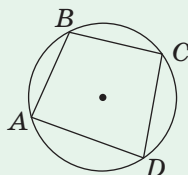
ВПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ



Четырехугольник называется **вписанным в окружность**, если все его вершины лежат на этой окружности

Свойство вписанного четырехугольника

Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°

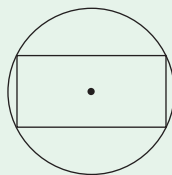


$$\begin{aligned}\angle A + \angle C &= \\ &= \angle B + \angle D = \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

Признак вписанного четырехугольника

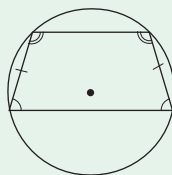
Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180° , то около него можно описать окружность

Если параллелограмм вписан в окружность, то он является прямоугольником



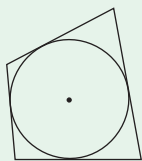
Около любого прямоугольника можно описать окружность

Если трапеция вписана в окружность, то она равнобокая



Около равнобокой трапеции можно описать окружность

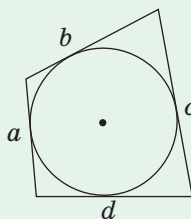
ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ



Четырехугольник называется **описанным около окружности**, если все его стороны касаются этой окружности

Свойство описанного четырехугольника

В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны

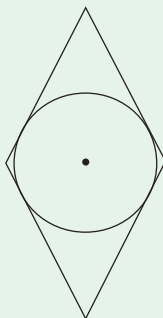


$$a + c = b + d$$

Признак описанного четырехугольника

Если в выпуклом четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность

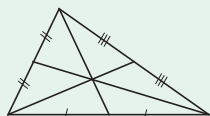
Если в параллелограмм вписана окружность, то он является ромбом



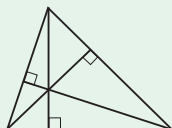
В любой ромб можно вписать окружность

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

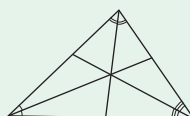
Точка пересечения медиан
(центр масс)



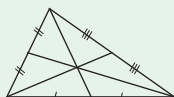
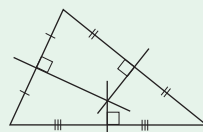
Точка пересечения высот или их продолжений
(ортоцентр)



Точка пересечения биссектрис
(инцентр) — центр вписанной окружности

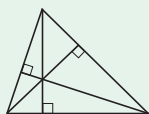


Точка пересечения серединных перпендикуляров — центр описанной окружности



Теорема о точке пересечения медиан треугольника

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, начиная от вершины треугольника



Теорема о точке пересечения высот треугольника

Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке



Контрольные вопросы к главе I

1. Начертите выпуклый четырехугольник $ABCD$. Назовите его стороны и диагонали. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов выпуклого четырехугольника.
2. Дайте определение параллелограмма. Сформулируйте и докажите свойства параллелограмма.
3. Сформулируйте и докажите признаки параллелограмма.
4. Дайте определение прямоугольника. Сформулируйте и докажите свойства прямоугольника.
5. Дайте определение ромба. Сформулируйте и докажите свойства ромба.
6. Дайте определение квадрата. Назовите свойства квадрата.
7. Дайте определение трапеции. Назовите виды трапеций, которые вам известны. Какими свойствами они обладают?
8. Сформулируйте и докажите теорему Фалеса.
9. Дайте определение средней линии треугольника. Сформулируйте и докажите свойство средней линии треугольника.
10. Дайте определение средней линии трапеции. Сформулируйте и докажите свойство средней линии трапеции.
11. Дайте определение центрального угла в окружности. Какова связь между градусной мерой дуги окружности и градусной мерой соответствующего центрального угла?
12. Дайте определение вписанного угла. Сформулируйте и докажите теорему о вписанном угле.
13. Сформулируйте следствия из теоремы о вписанном угле.
14. Дайте определение четырехугольника, вписанного в окружность. Сформулируйте и докажите свойство вписанного четырехугольника. Сформулируйте признак вписанного четырехугольника.
15. Дайте определение четырехугольника, описанного около окружности. Сформулируйте и докажите свойство описанного четырехугольника. Сформулируйте признак описанного четырехугольника.



Дополнительные задачи к главе I

- 298.** Если в выпуклом четырехугольнике не все углы равны, то хотя бы один из них острый. Докажите.

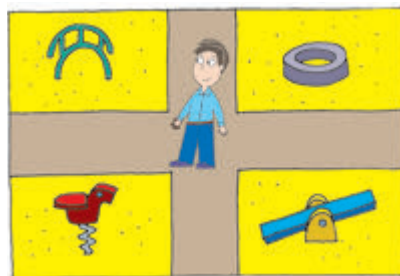
299. Найдите углы параллелограмма, если один из них равен сумме двух других. Может ли такой параллелограмм быть ромбом; квадратом?

300. Диагональ квадрата $ABCD$ равна 7 см. Прямая, проходящая через точку A перпендикулярно диагонали AC , пересекает прямые BC и CD в точках E и F . Найдите EF .

301. Найдите углы треугольника, если две его средние линии перпендикулярны и равны.

302. Детская площадка имеет форму четырехугольника. Докажите, что прямолинейные дорожки, соединяющие середины противоположных сторон площадки, при пересечении делятся пополам.

303. Основания прямоугольной трапеции равны 8 см и 12 см, а тупой угол трапеции в три раза больше острого. Найдите высоту трапеции.



304. Прямая, проходящая через вершину тупого угла трапеции, делит ее на ромб и равносторонний треугольник. Найдите среднюю линию трапеции, если ее периметр равен 60 см.

305. В треугольнике ABC высота BH делит сторону AC на отрезки $AH = 2$ см, $HC = 6$ см. Отрезок AM — медиана треугольника ABC , отрезок MD — высота треугольника AMC . Найдите отрезки AD и DC .

306. Дана трапеция, которая является вписанной в окружность и описанной около окружности. Найдите:

- углы трапеции, если сумма трех из них равна 300° ;
- стороны трапеции, если ее периметр равен 16 см.

307. Используя рис. 92, докажите:

- свойство средней линии трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$);
- если в четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD , равен полусумме сторон AD и BC , то $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

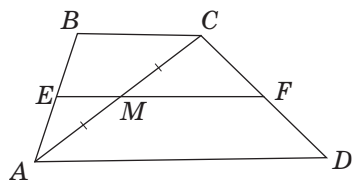





Рис. 92

308. Если диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны, то ее высота равна полусумме оснований. Докажите.

Задачи повышенной сложности

-  **309.** Прямая проходит через вершину B параллелограмма $ABCD$. Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния a и c соответственно. Найдите расстояние от точки D до данной прямой. Рассмотрите два случая.
- 310.** Точки M и N — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что точка пересечения прямых BN и DM лежит на диагонали AC .
- 311.** Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположащим сторонам CD и BC соответственно. Докажите, что точка пересечения этих прямых принадлежит прямой AC .
-  **312.** Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на ее средней линии.
- 313.** Через точку плоскости проведены три прямые так, что угол между любыми двумя из них равен 60° . Докажите, что основания перпендикуляров, проведенных из любой точки плоскости к этим прямым, являются вершинами равностороннего треугольника.
- 314.** Отрезки AB и AC — отрезки касательных к окружности, проведенных из точки A . Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на данной окружности.
- 315.** Найдите углы равнобокой трапеции, в которой боковая сторона равна меньшему основанию, а диагональ перпендикулярна боковой стороне.
- 316.** Даны остроугольный треугольник ABC и точка M такая, что $BM \perp AB$, $CM \perp AC$. Докажите, что точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .
-  **317.** Если сумма углов при основании трапеции равна 90° , то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.
- Докажите данное утверждение.
 - Сформулируйте и докажите обратное утверждение.



Видеоматериалы к главе I

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Большая часть теоретических положений, связанных с четырехугольником, была известна еще в Древней Греции. Например, в работах **Евклида** упоминается параллелограмм под названием «параллельно-линейная площадь». Основные свойства четырехугольников были установлены на практике и только со временем доказаны теоретически.



Фалес Милетский

Одним из творцов идеи геометрического доказательства по праву признан древнегреческий ученый **Фалес Милетский** (ок. 625–547 гг. до н. э.). Его считали первым среди прославленных «семи мудрецов» Эллады. Механик и астроном, философ и общественный деятель, Фалес значительно обогатил науку своего времени. Именно он познакомил греков с достижениями египтян в геометрии и астрономии. По свидетельству историка Геродота, Фалес предсказал затмение Солнца, которое произошло 28 мая 585 г. до н. э. Он дал первые представления об электричестве и магнетизме. Достижения Фалеса в геометрии не ограничиваются теоремой, названной его именем.

Утверждают, что Фалес открыл теорему о вертикальных углах; доказал равенство углов при основании равнобедренного треугольника; обосновал, что угол, опирающийся на полуокружность, прямой, и первым описал окружность около прямоугольного треугольника.



В молодые годы Фалес побывал в Египте. По легенде, он удивил египетских жрецов, измерив высоту пирамиды Хеопса с помощью подобия треугольников (о нем — в следующей главе).

Фалесу приписывают и доказательство второго признака равенства треугольников, на основании которого он создал дальномер для определения расстояния до кораблей в море.

Изучая замечательные точки треугольника, нельзя не вспомнить имена еще нескольких ученых.

Теорему о пересечении высот треугольника доказал в XV в. немецкий математик **Региомонтан** (1436—1476) — в его честь эту теорему иногда называют задачей Региомонтана.



Леонард Эйлер

Выдающийся ученый **Леонард Эйлер** (1707—1783), который установил связь между замечательными точками треугольника, является уникальной исторической фигурой. Геометрия и механика, оптика и баллистика, астрономия и теория музыки, математическая физика и судостроение — вот далеко не полный перечень тех областей науки, которые он обогатил своими открытиями. Перу Эйлера принадлежит более 800 научных работ, причем, по статистическим подсчетам, он делал в среднем одно изобретение в неделю! Человек чрезвычайной широты интересов, Эйлер был академиком Берлинской, Санкт-Петербургской и многих других академий наук, он существенным образом повлиял на развитие мировой науки. Недаром французский математик Пьер Лаплас, рассуждая об ученых своего поколения, утверждал, что Эйлер — «учитель всех нас».

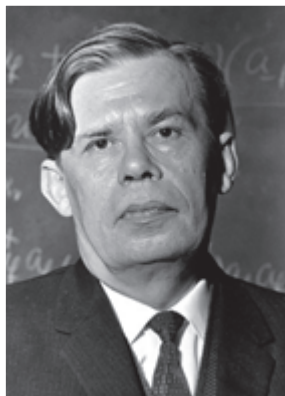
Среди украинских математиков весомый вклад в исследование свойств четырехугольников внес **Михаил Васильевич Остроградский** (1801—1862). Этот выдающийся ученый, профессор Харьковского университета, получил мировое признание благодаря работам по математической физике, математическому анализу, аналитической механике. Талантливый педагог и методист, Остроградский создал «Учебник по элементарной геометрии», который, в частности, содержал ряд интересных и сложных задач на построение вписанных и описанных четырехугольников и вычисление их площадей.



М. В. Остроградский



Выдающиеся математики Украины



Боголюбов Николай Николаевич (1909–1992)

Можно ли стать выдающимся ученым, получив образование в сельской школе? Возможно, кто-то из вас задумывался над этим вопросом. Безусловно, не все могут стать всемирно известными деятелями науки. Поэтому мы должны гордиться теми, кому это удалось, как, например, Н. Н. Боголюбову.

Получив начальное образование дома, Николай Боголюбов с 1919 по 1921 г. учился в Великокучанской семилетней школе на Полтавщине — единственном учебном заведении, которое он окончил. После окончания школы Николай самостоятельно изучал физику и математику. В 1921 г. семья Боголюбовых переехала в Киев, и с 14 лет Николай уже участвовал в семинаре кафедры математической физики Киевского университета. В 15-летнем возрасте Боголюбов написал первую научную работу, а в следующем году был принят сразу в аспирантуру Академии наук Украины. После ее окончания он получил степень доктора математических наук (в 20 лет!). С 1936 г. Николай Николаевич — профессор Киевского университета, в 1940 г. был направлен в Черновцы для организации кафедр на физико-математическом факультете Черновецкого госуниверситета. В 1948 г. Боголюбова избирают академиком Академии наук Украины.

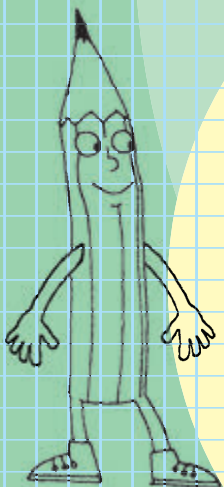
Не разделяя в своих научных интересах математику, механику и физику, Николай Николаевич содействовал совместному развитию. В 1966 г. Н. Н. Боголюбов стал первым директором созданного им Института теоретической физики Академии наук Украины в Киеве. Боголюбов был членом многих иностранных академий наук — Болгарии, Германии, Польши, США и др. Ученый получил множество международных наград, таких как Хейнemannовская премия (1966 г.), медаль Макса Планка (1973 г.), медаль Поля Дирака (1992 г.).

Мемориальные доски в честь Н. Н. Боголюбова установлены на зданиях университетов в Киеве и Черновцах, памятник известному ученому открыт в селе Великая Круча. В 1992 г. Национальная Академия наук Украины учредила Премию имени Н. Н. Боголюбова, в честь ученого названа малая планета «22616 Боголюбов».

Глава II

Подобие треугольников.

Теорема Пифагора



- § 10. Подобные треугольники
- § 11. Признаки подобия треугольников
- § 12. Подобие прямоугольных треугольников
- § 13. Теорема Пифагора и следствия из нее
- § 14. Применение подобия треугольников

Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них — это теорема Пифагора, а второе — деление отрезка в среднем и крайнем отношении... Первое можно сравнить с мерой золота, а второе больше напоминает драгоценный камень.

Иоганн Кеплер, астроном и математик

В этой главе вы начнете знакомиться с подобием фигур. Отношение подобия — одна из важнейших характеристик евклидовой геометрии. Проявления подобия часто встречаются и в повседневной жизни. Например, авиамодели самолетов подобны реальным машинам, а репродукции классических картин подобны оригиналам.

В основе теории подобия лежит обобщение теоремы Фалеса. Благодаря свойствам подобных треугольников устанавливаются важные геометрические соотношения. В частности, с помощью подобия будет доказана знаменитая теорема Пифагора. Правда, такое доказательство не является классическим, ведь во времена Пифагора некоторые геометрические факты, которые мы будем рассматривать, еще не были открыты. Но сегодня даже обычный школьник может овладеть знаниями, неизвестными великому Пифагору.



§ 10

Подобные треугольники

10.1. Обобщенная теорема Фалеса

Напомним некоторые понятия, связанные с делением и пропорциями, которые понадобятся нам для дальнейших рассуждений.

Отношением отрезков длиной a и b называется частное их длин, т.е. число $\frac{a}{b}$.

Иначе говоря, отношение $\frac{a}{b}$ показывает, сколько раз отрезок b и его части укладываются в отрезке a . Действительно, если отрезок b принять за единицу измерения, то данное отношение будет равно длине отрезка a .

Отрезки длиной a и c **пропорциональны** отрезкам длиной b и d , если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Например, отрезки длиной 8 см и 12 см пропорциональны отрезкам длиной 10 см и 15 см, поскольку $\frac{8}{10} = \frac{12}{15} = 0,8$.

Сформулируем обобщенную теорему Фалеса для неравных отрезков, которые отсекаются параллельными прямыми на сторонах угла.

Теорема (о пропорциональных отрезках)

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на сторонах этого угла пропорциональные отрезки: $\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}$, или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Утверждение теоремы иллюстрирует рис. 93. Приведем рассуждения, на которых основано доказательство этой теоремы. Отношение $\frac{AB}{BC}$ показывает,

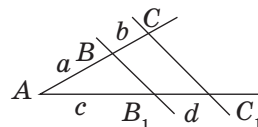
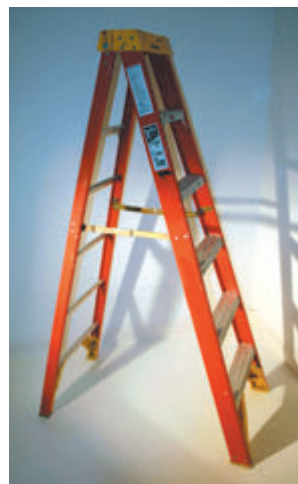


Рис. 93. Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки



сколько раз отрезок BC укладывается в отрезке AB , а отношение $\frac{AB_1}{B_1C_1}$ — сколько раз отрезок B_1C_1 укладывается в отрезке AB_1 . Теорема Фалеса устанавливает соответствие между процессами измерения отрезков AB и AB_1 . Действительно, прямые, параллельные BB_1 , «переводят» равные отрезки на одной стороне угла в равные отрезки на другой его стороне: отрезок AB «переходит» в отрезок AB_1 , десятая часть отрезка AB — в десятую часть отрезка AB_1 и т. д. Поэтому, если отрезок BC укладывается в отрезке AB n раз, то отрезок B_1C_1 укладывается в отрезке AB_1 также n раз.

Полное доказательство этой теоремы представлено в Приложении 1.

Замечание. Поскольку $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$, т. е. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, и следствие данной теоремы можно записать в виде $\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1}$. На такое равенство мы также будем ссылаться как на теорему о пропорциональных отрезках.

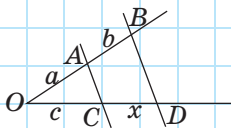


Рис. 94

Задача

Даны отрезки a, b, c . Постройте отрезок $x = \frac{bc}{a}$.

Решение

Построим произвольный неразвернутый угол O и отложим на одной его стороне отрезки $OA = a$ и $AB = b$, а на другой стороне — отрезок $OC = c$ (рис. 94). Проведем прямую AC и прямую, которая параллельна AC , проходит через точку B и пересекает другую сторону угла в точке D . По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$, откуда $CD = \frac{AB \cdot OC}{OA} = \frac{b \cdot c}{a}$. Следовательно, отрезок CD — искомый.

Заметим, что в задаче величина x является четвертым членом пропорции $a : b = c : x$. Поэтому построенный отрезок называют **четвертым пропорциональным отрезком**.

10.2. Определение подобных треугольников

Равные фигуры можно представить как фигуры, имеющие одинаковую форму и одинаковые размеры. Но в повседневной жизни часто встречаются вещи, у которых одинаковая форма, но разные размеры: например, чайное блюдце и тарелка, одинаковые модели обуви разных размеров и т. п. (приведите другие примеры сами). В геометрии фигуры одинаковой формы принято называть **подобными**. Например, подобны друг другу любые два квадрата, любые две окружности. Введем для начала понятие о подобных треугольниках.

Определение

Два треугольника называются **подобными**, если углы одного из них соответственно равны углам другого и соответствующие стороны этих треугольников пропорциональны.

На рис. 95 изображены подобные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Подобие этих треугольников кратко обозначают так: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. В этой записи, как и в записи равенства треугольников, названия треугольников будем записывать так, чтобы вершины равных углов указывались в порядке соответствия. Это означает:

$$\text{если } \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ то } \angle A = \angle A_1, \\ \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k.$$

Число k , равное отношению соответствующих сторон подобных треугольников, называют **коэффициентом подобия**.

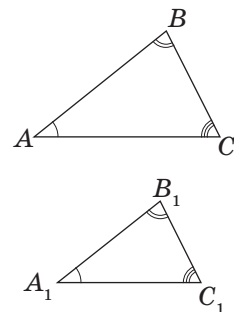
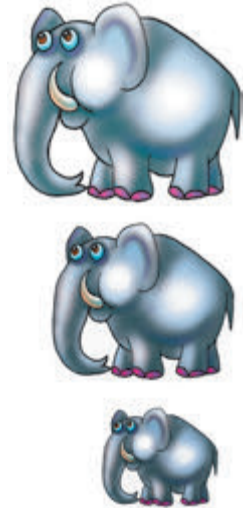


Рис. 95. Подобные треугольники

Очевидно, что два равных треугольника подобны с коэффициентом подобия 1.



Опорная задача

Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия. Докажите.

Решение

Пусть $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия k . Это означает, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$, т. е. $AB = kA_1B_1$, $BC = kB_1C_1$, $AC = kA_1C_1$. Имеем:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kP_{A_1B_1C_1}}{P_{A_1B_1C_1}} = k.$$

Отметим также, что *отношение соответствующих линейных элементов (медиан, биссектрис, высот и т.п.) подобных треугольников равно коэффициенту подобия. Докажите это самостоятельно.*

Вопросы и задачи



Устные упражнения

318. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle KMN$. Назовите соответственно равные углы этих треугольников.



319. Треугольник ABC и треугольник с вершинами D, E, F подобны, причем $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FD} = \frac{AC}{ED}$. Закончите запись $\triangle ABC \sim \triangle \dots$.

320. Являются ли равными любые два подобных треугольника? Подобны ли любые два равных треугольника? Назовите соответствующий коэффициент подобия.

321. Могут ли быть подобными прямоугольный и тупоугольный треугольники?

322. Два треугольника подобны с коэффициентом 0,25. Во сколько раз стороны одного треугольника больше соответствующих сторон другого?



Графические упражнения

323. Начертите треугольник ABC . Отметьте на стороне AB точку D так, чтобы $AD:DB = 2:1$. Проведите через точку D прямую, параллельную стороне AC , и обозначьте точку E — точку пересечения этой прямой со стороной BC . Измерьте отрезок BE и вычислите длину отрезка EC по теореме о пропорциональных отрезках. Проверьте полученный результат измерением.



324. Начертите треугольник ABC и проведите в нем среднюю линию DE , параллельную AC . Назовите подобные треугольники, которые образовались на рисунке.



Письменные упражнения

Уровень А

325. Определите, являются ли отрезки длиной a и b пропорциональными отрезкам c и d , если:

- а) $a = 8$ см, $b = 24$ см, $c = 4$ см, $d = 12$ см;
- б) $a = 9$ см, $b = 14$ см, $c = 7$ см, $d = 18$ см.

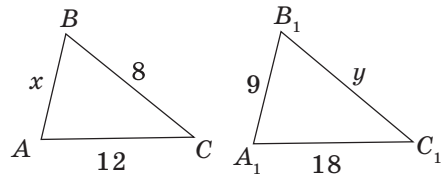


Рис. 96

326. На рис. 96 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. По данным рисунка найдите x и y .



327. На рис. 97 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. По данным рисунка найдите x и y .

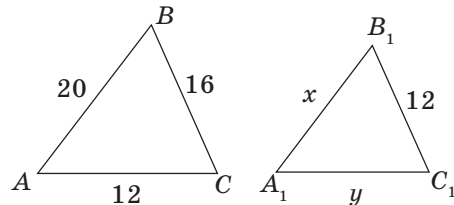


Рис. 97

328. Прямая KM параллельна стороне AC треугольника ABC (рис. 98). Найдите отрезок MC , если:

- а) $AK = 2$ см, $KB = 6$ см, $BM = 9$ см;
- б) $AK:KB = 2:3$, $BC = 10$ см.



329. Прямая KM параллельна стороне AC треугольника ABC (рис. 98). Найдите отрезок AB , если $AK = 6$ см, $BM:MC = 4:3$.

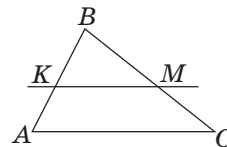


Рис. 98

330. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Найдите:

а) угол C , если $\angle A = 45^\circ$, $\angle E = 110^\circ$;

б) угол F , если $\angle B = 80^\circ$, $\angle A = \angle C$.

331. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если в подобном ему треугольнике разность наибольшего и наименьшего углов равна 70° .

332. Стороны треугольника равны 2,5 см, 4 см и 5 см. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если:

а) его периметр равен 46 см;

б) его наименьшая сторона равна наибольшей стороне данного треугольника.

333. Стороны треугольника равны 16 см, 12 см и 10 см. Найдите периметр треугольника, подобного данному, если его наибольшая сторона равна 8 см.

334. Докажите по определению, что любые два равносторонних треугольника подобны.

335. Докажите от противного, что тупоугольный и равносторонний треугольники не могут быть подобными.

Уровень Б

336. Прямая MN параллельна основаниям трапеции $ABCD$ (рис. 99). Найдите:

а) сторону CD , если $AM:AB = 4:5$, $CN = 3$ см;

б) сторону AB , если $AM:ND = 3:2$, $CN = 2$ см, $AM = 9$ см.

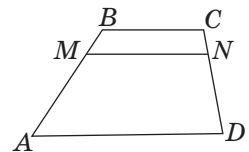
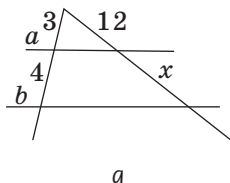


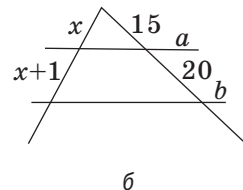
Рис. 99

337. Прямая MN параллельна основаниям трапеции $ABCD$ (рис. 99). Найдите сторону AB , если $AM - MB = 1$ см, $CN:CD = 3:7$.

338. По данным рис. 100 найдите x , если $a \parallel b$.



а



б

Рис. 100

339. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, причем $\angle D = 70^\circ$, $\angle B = 55^\circ$. Докажите, что $AB = AC$.

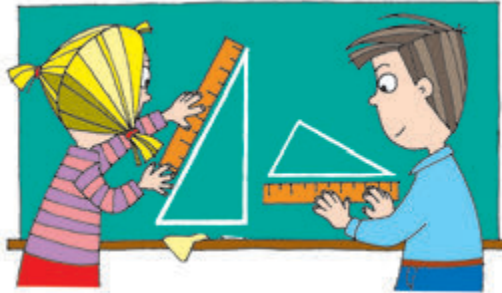
340. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle KMN$, причем $\angle A + \angle M = 90^\circ$. Докажите, что AB — наибольшая сторона треугольника ABC .

341. Докажите, что треугольник с вершинами в серединах сторон данного треугольника подобен данному. Чему равен коэффициент подобия?

342. В треугольнике ABC точки D и E — середины сторон AB и BC соответственно. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle DBE$, и найдите коэффициент подобия.

Уровень В

343. Каждый из двух неравных, но подобных треугольников имеет стороны длиной 12 см и 18 см. Найдите неизвестные стороны этих треугольников.



344. Треугольники со сторонами a, b, c и b, c, d подобны. Докажите, что коэффициент подобия не может быть равным 2.

345. Найдите ошибку в «доказательстве» геометрического софизма: *отрезки параллельных прямых, заключенные между сторонами угла, равны.*

«Доказательство»

Пусть AB и CD — отрезки параллельных прямых, которые пересекают стороны угла O (рис. 101). По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$, или $AO \cdot DO = BO \cdot CO$. Умножим обе части этого равенства на отличную от нуля разность $AB - CD$:

$$AO \cdot DO \cdot (AB - CD) = BO \cdot CO \cdot (AB - CD),$$

$$AO \cdot DO \cdot AB - AO \cdot DO \cdot CD = BO \cdot CO \cdot AB - BO \cdot CO \cdot CD.$$

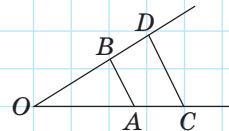



Рис. 101

Перенесем первый член правой части равенства в левую часть равенства, а второй член левой части — в правую часть:

$$AO \cdot DO \cdot AB - BO \cdot CO \cdot AB = AO \cdot DO \cdot CD - BO \cdot CO \cdot CD, \text{ или } (AO \cdot DO - BO \cdot CO) \cdot AB = (AO \cdot DO - BO \cdot CO) \cdot CD.$$

Разделив обе части последнего равенства на выражение в скобках, получим $AB = CD$, т.е. отрезки параллельных прямых, заключенные между сторонами угла, равны.

346. Диагональ AC делит трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$) на два подобных треугольника ABC и ACD . Найдите AC , если $BC = 4$ см, $AD = 9$ см.

 **347.** Диагональ AC трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) равна стороне CD и делит трапецию на два подобных треугольника ABC и ACD . Найдите периметр трапеции, если $AB = 9$ см, $CD = 12$ см.



Повторение перед изучением § 11

Теоретический материал

- признаки равенства треугольников;
- трапеция.

 7 класс, § 8, 10, 13

 8 класс, § 5

Задачи

348. Через вершину треугольника проведена прямая, которая делит данный треугольник на два равных треугольника. Определите вид данного треугольника. Может ли такая прямая разделить треугольник на два неравных, но подобных треугольника? Выскажите предположение.

349. Диаметр AC пересекает хорду BD в точке K , делящей хорду пополам. Докажите равенство треугольников ABC и ADC . Могут ли хорды AB и CD быть параллельными, если точка K не является центром окружности?

§ 11

Признаки подобия треугольников

11.1. Подобие треугольников по двум углам

Для доказательства подобия двух треугольников, как и для доказательства их равенства (вспомните признаки равенства треугольников), не обязательно проверять все соотношения сторон и углов согласно определению — достаточно проверить лишь некоторые из них. Какие именно? Ответ на этот вопрос дают три признака подобия треугольников.

Теорема (признак подобия треугольников по двум углам)

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство

□ Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 102). Докажем подобие этих треугольников. Из теоремы о сумме углов треугольника очевидно следует, что $\angle C = \angle C_1$. Отложим на луче AB отрезок AB_2 , равный A_1B_1 , и проведем прямую B_2C_2 , параллельную BC . Тогда $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ как соответственные углы при параллельных прямых, поэтому $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ по второму признаку, откуда $AC_2 = A_1C_1$. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$, следовательно, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Аналогично доказываем, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Таким образом, по определению подобных треугольников $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана. ■

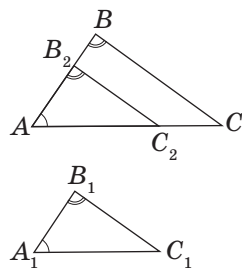


Рис. 102. К доказательству подобия треугольников по двум углам

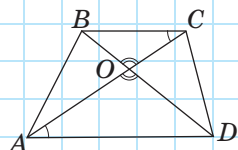


Рис. 103

Задача

Точка пересечения диагоналей трапеции делит одну из них на отрезки длиной 4 см и 7 см. Меньшее основание трапеции равно 8 см. Найдите среднюю линию трапеции.

Решение

Пусть в трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали пересекаются в точке O , $BC = 8$ см (рис. 103). Рассмотрим треугольники AOD и COB . В них углы при вершине O равны как вертикальные, $\angle CAD = \angle BCA$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC . Тогда $\triangle AOD \sim \triangle COB$ по двум углам. Отсюда следует, что $\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{DO}$. Поскольку по условию $BC < AD$, то $BO < OD$, значит, $BO = 4$ см, $OD = 7$ см. Тогда $AD = \frac{BC \cdot DO}{BO} = \frac{8 \cdot 7}{4} = 14$ (см).

Средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований, т. е. $\frac{8 + 14}{2} = 11$ (см).

Ответ: 11 см.

11.2. Подобие треугольников по двум сторонам и углу между ними

Теорема (признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними)

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство

□ Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (рис. 104).

Докажем подобие этих треугольников. Отложим на луче AB отрезок AB_2 , равный A_1B_1 , и проведем прямую B_2C_2 , параллельную BC . Тогда $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ как соответственные углы при параллельных прямых, поэтому $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$

по двум углам. Отсюда $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$, а поскольку

$AB_2 = A_1B_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $A_1C_1 = AC_2$. Тогда

$\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников, следовательно, $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = \angle AB_2C_2$, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по двум углам. Теорема доказана. ■

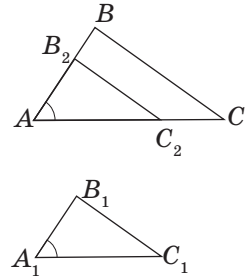


Рис. 104. К доказательству подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними

Задача

Прямая, пересекающая стороны BA и BC треугольника ABC , делит каждую из них в отношении $m:n$, начиная от вершины B . Докажите, что эта прямая параллельна стороне AC .

Решение

Пусть прямая k пересекает стороны BA и BC треугольника ABC в точках A_1 и C_1 соответственно (рис. 105). Поскольку по условию задачи $\frac{BA_1}{A_1A} = \frac{BC_1}{C_1C} = \frac{m}{n}$, то $\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{m}{m+n}$. Тогда треугольники ABC и A_1BC_1 подобны по двум сторонам и углу между ними. Из подобия треугольников следует, что $\angle BA_1C_1 = \angle BAC$. Но эти углы являются соответственными при прямых k и AC и секущей AB . Следовательно, $k \parallel AC$ по признаку параллельности прямых.

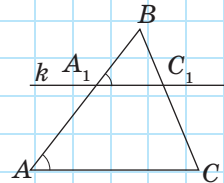


Рис. 105

11.3. Подобие треугольников по трем сторонам

Теорема (признак подобия треугольников по трем сторонам)

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство

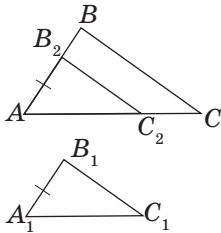


Рис. 106. К доказательству подобия треугольников по трем сторонам

□ Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (рис. 106). Докажем подобие этих треугольников. Как и в предыдущих теоремах, отложим на луче AB отрезок AB_2 , равный отрезку A_1B_1 , и проведем прямую B_2C_2 , параллельную BC . Тогда $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ как соответственные углы при параллельных прямых, поэтому $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$ по двум углам. Отсюда $\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{AC}{AC_2}$, а поскольку $AB_2 = A_1B_1$, то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_2C_2}$. Учитывая, что

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, имеем $B_2C_2 = B_1C_1$. Аналогично докажем, что $AC_2 = A_1C_1$. Тогда $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ по третьему признаку равенства треугольников, значит, $\angle A = \angle A_1$, $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = \angle AB_2C_2$, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по двум углам. Теорема доказана. ■

Таким образом, для доказательства всех трех признаков подобия треугольников использован один и тот же подход, а доказательство каждого из признаков подобия основывается на соответствующем признаке равенства треугольников.

В ходе доказательства признаков подобия треугольников мы показали также, что *прямая, которая параллельна стороне треугольника и пересекает две другие стороны, отсекает от данного треугольника подобный.*

Вопросы и задачи



Устные упражнения

350. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$. Какое равенство необходимо добавить к условию, чтобы можно было доказать подобие этих треугольников? Назовите все возможные варианты ответа.

351. Даны треугольники ABC и KMN , в которых $\frac{AB}{KN} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{MK}$.

Назовите угол треугольника KMN , равный углу C . Почему эти углы равны?

352. Даны треугольники ABC и KMN , в которых $\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NK}$ и $\angle B = \angle N$.

Назовите угол треугольника ABC , равный углу M . Почему эти углы равны?

353. Могут ли быть подобными:

- а) прямоугольный и равнобедренный треугольники;
- б) прямоугольный и равносторонний треугольники;
- в) треугольник с углом 50° и треугольник с углом 100° ;
- г) треугольник с углом 60° и треугольник с углом 120° ?

354. Подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют:

- а) по равному острому углу;
- б) по равному тупому углу?


355. Два подобных треугольника имеют общий угол. Обязательно ли их стороны, противолежащие этому углу, параллельны? Приведите контр-пример.



Графические упражнения

356. Начертите трапецию и проведите ее диагонали.

- а) Выделите цветом подобные треугольники, которые образовались на рисунке. По какому признаку можно доказать их подобие?
- б) Измерьте длины отрезков одной диагонали, на которые она делится точкой пересечения диагоналей. Измерьте длину одного из оснований трапеции и вычислите длину второго основания, используя подобие треугольников. Проверьте полученный результат измерением.

 **357.** Начертите треугольник и проведите прямую, которая параллельна одной из его сторон и пересекает две другие стороны.

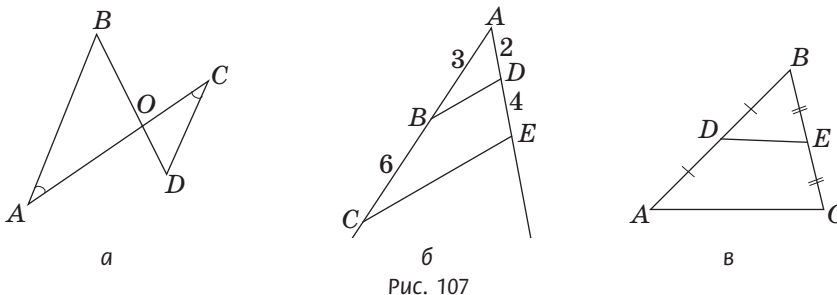
- Выделите цветом подобные треугольники, образовавшиеся на рисунке. По какому признаку можно доказать их подобие?
- Измерьте углы, под которыми данная прямая пересекает стороны треугольника, и найдите все углы данного треугольника.



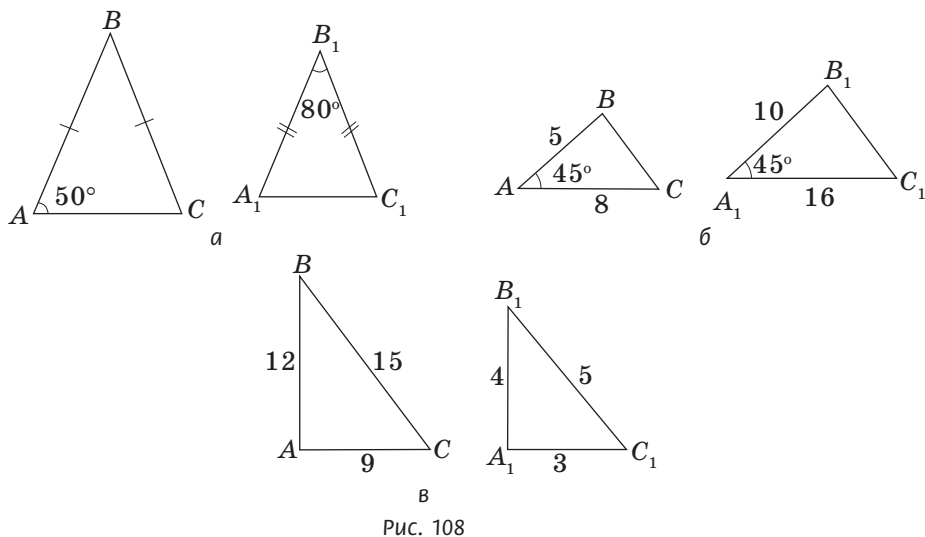
Письменные упражнения

Уровень А

358. На рис. 107 найдите подобные треугольники и доказите их подобие.



 **359.** По данным рис. 108 доказите подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.



360. Определите расстояние на местности от точки A до недоступной точки B (рис. 109), если $CA = 60$ м, $CB = 90$ м, $CD = 20$ м, $CE = 30$ м, $DE = 40$ м. Проведите необходимые доказательства.

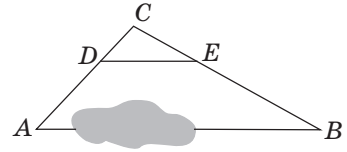


Рис. 109

361. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O .

а) Докажите, что $\triangle AOD \sim \triangle BOC$.

б) Найдите AD , если $BC = 4$ см, $OB = 6$ см, $OA = 9$ см.

 **362.** Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O .

а) Докажите, что $\triangle AOD \sim \triangle COB$.


б) Найдите BC , если $AD = 16$ см, $AO : OC = 4 : 3$.

363. Определите, подобны ли треугольники со сторонами:


а) 3, 4, 6 и 9, 15, 18;

б) 2, 3, 3 и 8, 12, 12.

364. Два равнобедренных треугольника имеют равные углы при основаниях. Основание одного треугольника равно 8 см, боковая сторона — 6 см. Найдите периметр второго треугольника, если его основание равно 4 см.

 **365.** Два равнобедренных треугольника имеют равные углы, противолежащие основаниям. Периметры этих треугольников равны соответственно 15 см и 10 см. Найдите стороны второго треугольника, если боковая сторона первого треугольника равна 6 см.

366. Докажите, что любые два равнобедренных прямоугольных треугольника подобны.

 **367.** Докажите, что отношение соответствующих средних линий подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Уровень Б

368. На рис. 110 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.

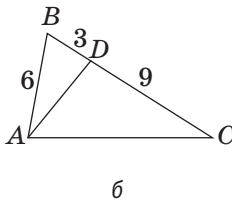
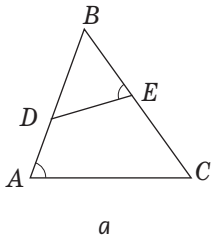
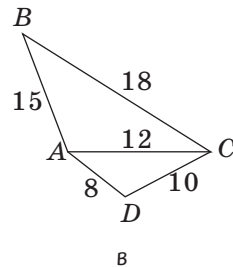


Рис. 110



369. На рис. 111 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.

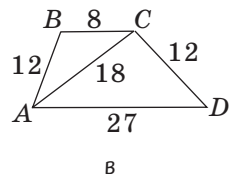
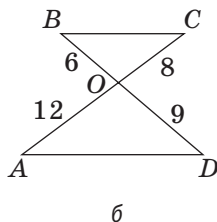
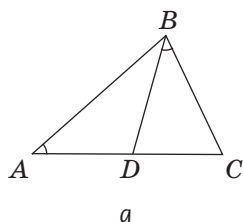


Рис. 111

370. В треугольник ABC вписан ромб $AKLM$ (рис. 112). Найдите периметр ромба, если $BK = 4$ см, $MC = 9$ см.

371. Диагонали трапеции точкой пересечения делятся в отношении $3 : 7$. Найдите основания трапеции, если ее средняя линия равна 10 см.

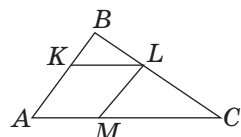


Рис. 112

372. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол B равен 36° , AD — биссектриса треугольника. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle CAD$.

373. На одной стороне неразвернутого угла O отложены отрезки $OA = 9$ см и $OB = 12$ см, а на другой стороне — отрезки $OC = 6$ см и $OD = 18$ см. Подобны ли треугольники OAC и OBD ? Подобны ли треугольники OBC и ODA ?

374. Докажите, что отношение соответствующих медиан подобных треугольников равно коэффициенту подобия.


375. Докажите, что отношение соответствующих биссектрис подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

376. Через вершину наибольшего угла разностороннего треугольника необходимо провести прямую, которая отсекает от данного треугольника подобный треугольник. Сколькими способами это можно сделать? Как изменится ответ, если в условии задачи рассмотреть другую вершину треугольника? Проведите исследование.


377. Через точку на стороне произвольного треугольника необходимо провести прямую, которая отсекает от данного треугольника подобный треугольник. Сколькими способами это можно сделать? Как изменится ответ, если в условии задачи вместо произвольного треугольника рассмотреть прямоугольный? Проведите исследование.


Уровень В


378. Отрезок, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции, параллелен ее основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны a и b .

 **379.** В трапеции через точку, которая делит боковую сторону в отношении $m:n$, начиная от меньшего основания, проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции, если ее основания равны a и b ($a < b$).

380 (опорная). Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, делит основания трапеции пополам. Докажите.

 **381.** Отрезок MN , концы которого лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC , параллелен стороне BC . Докажите, что медиана треугольника, проведенная из вершины A , делит этот отрезок пополам.

 **382.** Через некоторую вершину равнобедренного треугольника проведена прямая, делящая данный треугольник на два неравных равнобедренных треугольника, один из которых подобен данному. Найдите углы треугольника. Сколько решений имеет задача?


 **383.** Через точку внутри произвольного треугольника необходимо провести прямую, которая отсекает от данного треугольника подобный треугольник. Сколькими способами это можно сделать? Проведите исследование. Обобщите в виде исследования результаты решения задач 376, 377, 382 и 383.



Повторение перед изучением § 12

Теоретический материал

- перпендикуляр к прямой;
- прямоугольный треугольник.

 7 класс, § 9, 17

Задачи

384. В прямоугольном треугольнике угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе, равен 20° . Найдите острые углы треугольника.

385. Постройте прямоугольный треугольник по катету и радиусу описанной окружности.

§ 12

Подобие прямоугольных треугольников

12.1. Признаки подобия прямоугольных треугольников

Признаки подобия прямоугольных треугольников являются следствиями соответствующих признаков подобия произвольных треугольников. Наиболее важным признаком подобия прямоугольных треугольников является следующий.

Если два прямоугольных треугольника имеют по равному острому углу, то такие треугольники подобны.

Действительно, поскольку в прямоугольном треугольнике один угол прямой, этот признак следует из признака подобия треугольников по двум углам.

Другие признаки подобия прямоугольных треугольников сформулируйте и докажите самостоятельно (задачи 395, 413).

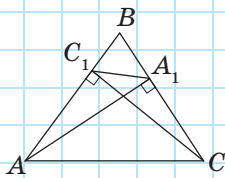


Рис. 113

Задача

В треугольнике ABC с острым углом B проведены высоты AA_1 и CC_1 (рис. 113). Докажите, что $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$.

Решение

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABA_1 и CBC_1 . Они имеют общий острый угол B , следовательно, подобны. Из этого следует, что соответствующие катеты и гипотенузы этих треугольников пропорциональны, т.е. $\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA}{BC}$.

Рассмотрим теперь треугольники A_1BC_1 и ABC . У них также общий угол B , а по только что доказанному стороны, прилежащие к этому углу, пропорциональны. Следовательно, $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

12.2. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Подобие треугольников позволяет установить ряд соотношений между длинами некоторых отрезков в треугольнике и окружности (такие соотношения называют **метрическими**). Сначала введем несколько вспомогательных понятий.

Отрезок x называется **средним пропорциональным**

между отрезками a и b , если $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, т. е. $x^2 = ab$.

В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $BC = a$ и $AC = b$ и гипотенузой $AB = c$ проведем высоту CD и обозначим ее h_c (рис. 114). Отрезки AD и DB , на которые эта высота делит гипотенузу, называют **проекциями катетов на гипотенузу**. Проекции катетов a и b на гипотенузу c обозначают a_c и b_c соответственно.

Теорема (метрические соотношения в прямоугольном треугольнике)

В прямоугольном треугольнике:

1) высота, проведенная к гипотенузе, является средним пропорциональным между проекциями катетов на гипотенузу:

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c;$$

2) катет является средним пропорциональным между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу:

$$a^2 = c \cdot a_c \text{ и } b^2 = c \cdot b_c;$$

3) высота, проведенная к гипотенузе, равна произведению катетов, деленному на гипотенузу:

$$h_c = \frac{ab}{c}.$$

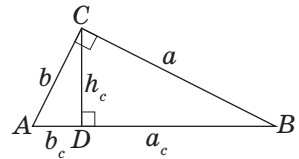


Рис. 114. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Доказательство

□ По признаку подобия прямоугольных треугольников $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ (у этих треугольников общий острый угол A), $\triangle CBD \sim \triangle ABC$ (у этих треугольников общий острый угол C) и $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (острые углы этих треугольников равны острым углам треугольника ABC).

Из подобия треугольников CBD и ACD имеем:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{AD}, \text{ или } \frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}, \text{ откуда } h_c^2 = a_c \cdot b_c.$$

Из подобия треугольников CBD и ABC

$$\text{имеем: } \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}, \text{ или } \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}, \text{ откуда } a^2 = c \cdot a_c.$$

Аналогично из подобия треугольников ACD и ABC получаем $b^2 = c \cdot b_c$.

Из подобия треугольников ACD и ABC имеем:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB}, \text{ или } \frac{h_c}{b} = \frac{a}{c}, \text{ откуда } h_c = \frac{ab}{c}.$$

Теорема доказана. ■

В ходе доказательства теоремы мы установили интересный факт: *высота прямоугольного треугольника делит его на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику*. Среди всех видов треугольников такое свойство имеет лишь прямоугольный.

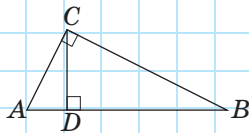


Рис. 115

Задача

Найдите периметр прямоугольного треугольника, в котором катет равен 15 см, а его проекция на гипотенузу равна 9 см.

Решение

Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $AC = 15$ см, $AD = 9$ см (рис. 115).

Из метрического соотношения в треугольнике ABC $AC^2 = AB \cdot AD$, т. е. $15^2 = 9AB$, откуда $AB = 25$ см, тогда $DB = AB - AD = 16$ см. Из соотношения $BC^2 = AB \cdot BD$ имеем: $BC^2 = 25 \cdot 16 = 400$, откуда $BC = 20$ (см). Следовательно, $P_{ABC} = 15 + 20 + 25 = 60$ (см).

Ответ: 60 см.

Вопросы и задачи



Устные упражнения

386. Подобны ли два прямоугольных треугольника, если:

- а) они имеют общий угол;
- б) они имеют общий острый угол;
- в) один из них имеет угол 20° , а другой — угол 70° ;
- г) один из них имеет угол 50° , а катет другого вдвое меньше гипотенузы?



387. Может ли высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, быть меньше каждой из проекций катетов на гипотенузу; быть равной проекции катета на гипотенузу?

388. Отрезки a_c и b_c — проекции катетов a и b прямоугольного треугольника на гипотенузу. Сравните:

- а) a и b , если $a_c < b_c$;
- б) a_c и b_c , если $a > b$.

389. Могут ли быть подобными неравные прямоугольные треугольники с общей гипотенузой; с общим катетом?

390. Для построения четвертого пропорционального отрезка $x = \frac{ab}{c}$ ученик предложил построить прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c и провести в нем высоту h_c , равную x . Другой ученик утверждает, что этот способ ошибочный. Кто из учеников прав?



Графические упражнения

391. Начертите прямоугольный треугольник и проведите его высоту из вершины прямого угла. Выделите цветом проекции катетов на гипотенузу и измерьте их длины. Используя метрические соотношения, вычислите приблизительно:

- длину проведенной высоты;
- длины катетов.

Проверьте полученные результаты измерениями.



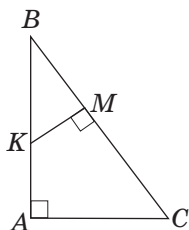
392. Начертите прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB . Отметьте на катете AC точку M и проведите к гипотенузе перпендикуляр MN . Из точки N проведите к катету AC перпендикуляр NK . Назовите три треугольника, подобные треугольнику ABC , и запишите их подобие.



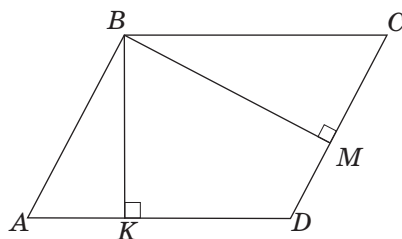
Письменные упражнения¹

Уровень А

393. На рис. 116 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.



а



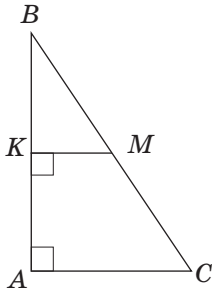
$ABCD$ — параллелограмм

б

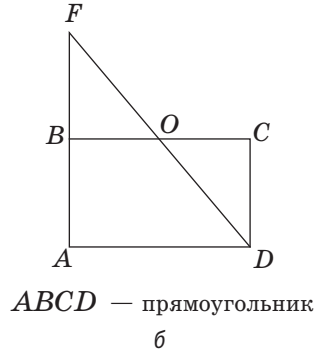
Рис. 116

¹ Все задачи параграфов 12—14 могут быть решены без использования формулы корней квадратного уравнения. Соответствующие задачи, которые решаются с помощью квадратных уравнений, представлены в конце главы, в рубрике «Дополнительные задачи».

394. На рис. 117 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.



а



б

Рис. 117

395. Сформулируйте и докажете признак подобия прямоугольных треугольников по двум катетам.

396. Наблюдатель, который находится в точке A , видит конец жерди B и верхнюю точку башни D , причем точки A , B и D расположены на одной прямой (рис. 118). Определите высоту башни, если $BC = 4$ м, $AC = 6$ м, $AE = 90$ м.

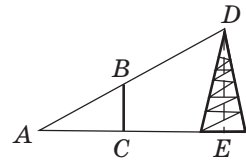


Рис. 118

397. Высота дерева равна 9,2 м, а длина тени человека, рост которого 1,8 м, равна 2,7 м. Найдите длину тени дерева.

398. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CD (см. рис. 114). Найдите:

- CD , если $AD = 4$ см, $DB = 25$ см;
- AC и BC , если $AB = 50$ см, $AD = 18$ см.

399. Найдите периметр прямоугольного треугольника, высота которого делит гипотенузу на отрезки длиной 4,5 см и 8 см.

400. Докажите, что отношение соответствующих высот подобных треугольников равно коэффициенту подобия.



Уровень Б

401. В прямоугольный треугольник вписан квадрат (рис. 119).

а) Найдите на рисунке подобные треугольники и докажите их подобие.

б) Найдите сторону квадрата, если $BK = 9$ см, $MC = 4$ см.

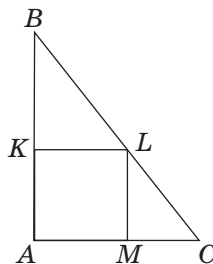


Рис. 119

402. Две окружности с радиусами 4 см и 6 см касаются внешним образом. Их общая касательная, которая не проходит через точку касания окружностей, пересекает линию центров в точке A . Найдите расстояния от точки A до центров окружностей.

403. Отрезки BK и BM — высоты параллелограмма $ABCD$, проведенные из вершины угла B к сторонам AD и CD соответственно. Найдите BK , если $BM = 4$ см, $AD : CD = 2 : 3$.

404. Докажите, что проекции катетов на гипотенузу прямоугольного треугольника относятся как квадраты катетов: $\frac{a_c}{b_c} = \frac{a^2}{b^2}$.

405. По данным рис. 114 выразите a_c и b_c через a , b и c .

406. Высота прямоугольного треугольника равна 24 см и делит гипотенузу в отношении 9 : 16. Найдите катеты треугольника.

407. Точка C делит диаметр окружности AB на отрезки $AC = 10$ см и $CB = 8$ см. Отрезок CD — перпендикуляр к AB . Определите расположение точки D относительно данной окружности, если $CD = 9$ см.

408. Перпендикуляр, проведенный из середины основания равнобедренного треугольника к боковой стороне, делит ее на отрезки длиной 2,25 см и 4 см. Найдите высоту треугольника, проведенную к боковой стороне.

409. Точка касания окружности, вписанной в ромб, делит сторону ромба на отрезки длиной 20 см и 5 см. Найдите высоту ромба.

Уровень В

410. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, делит сторону в отношении 1 : 7. В каком отношении эта высота делит диагональ параллелограмма?

411. В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляр AK , проведенный к диагонали BD , пересекает сторону BC в точке M . Найдите $BM : MC$, если $BK : KD = 3 : 7$. Изменится ли ответ, если K — произвольная точка отрезка BD ?
412. Отрезки AM и AN — высоты параллелограмма $ABCD$, проведенные к сторонам BC и CD соответственно. Докажите, что $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.
413. Сформулируйте и докажите признак подобия прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.



Повторение перед изучением § 13

Теоретический материал

- прямоугольный треугольник;
- соотношения между сторонами треугольника.

7 класс, § 17, 18

Задачи

414. Высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу в отношении $1 : 4$. Во сколько раз эта высота меньше гипотенузы?
415. Острый угол прямоугольного треугольника равен 36° . Найдите углы, под которыми катеты видны из центра описанной окружности.

§ 13

Теорема Пифагора
и следствия из нее

13.1. Теорема Пифагора

Сформулируем и докажем одну из важнейших теорем геометрии — теорему Пифагора.

Теорема (Пифагора)

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

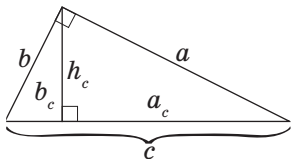


Рис. 120. К доказательству теоремы Пифагора

Доказательство

□ Согласно доказанным метрическим соотношениям, в прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c (рис. 120) $a^2 = c \cdot a_c$, $b^2 = c \cdot b_c$.

Складывая эти равенства почленно, имеем:
 $a^2 + b^2 = c \cdot a_c + c \cdot b_c = c \cdot (a_c + b_c) = c^2$.

Теорема доказана. ■

Соотношение между катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника было известно задолго до Пифагора. Но именно Пифагору удалось доказать его, опираясь на понятие площади (к этому доказательству мы вернемся в следующей главе). Всего же на сегодня известно более 150 способов доказательства теоремы Пифагора. С некоторыми из них вы сможете познакомиться в п. 18.3.

Доказательство, которое мы рассмотрели, является по сути алгебраическим. Собственно, важность теоремы Пифагора заключается, в частности, в том, что она значительно расширяет возможности применения алгебры в геометрии. С ее помощью можно найти любую сторону прямоугольного треугольника, зная



две другие стороны. Например, если $a = 5$, $b = 12$, то $c = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$. Если $c = 17$, $b = 15$, то $a = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{(17+15)(17-15)} = \sqrt{32 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8$.

Теорема Пифагора позволяет использовать для решения геометрических задач и другие алгебраические приемы, например составление уравнений.

Задача

Стороны треугольника равны 13 см, 20 см и 21 см. Найдите высоту треугольника, проведенную к наибольшей стороне.

Решение

Пусть BH — высота треугольника ABC , в котором $AB = 13$ см, $BC = 20$ см, $AC = 21$ см (рис. 121). Поскольку AC — наибольшая сторона треугольника, то точка H лежит на этой стороне (докажите это самостоятельно). Примем длину отрезка AH за x см, тогда $HC = (21 - x)$ см. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABH имеем: $BH^2 = AB^2 - AH^2$, т. е. $BH^2 = 13^2 - x^2$, а из прямоугольного треугольника BCH имеем: $BH^2 = BC^2 - CH^2$, т. е. $BH^2 = 20^2 - (21 - x)^2$. Приравняв два выражения для BH^2 , имеем:

$$169 - x^2 = 400 - (21 - x)^2;$$

$$169 - x^2 = 400 - 441 + 42x - x^2;$$

$$42x = 210;$$

$$x = 5.$$

Таким образом, $AH = 5$ см.

Тогда из треугольника ABH по теореме Пифагора $BH = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

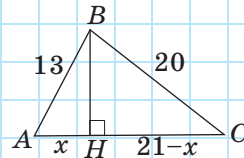


Рис. 121

13.2. Теорема, обратная теореме Пифагора

Не менее важной, чем теорема Пифагора, является обратная теорема. Эту теорему можно рассматривать как признак прямоугольного треугольника.

Теорема (обратная теореме Пифагора)

Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник прямоугольный:

если $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то $\angle C = 90^\circ$.

Доказательство

□ Пусть в треугольнике ABC (рис. 122, а) $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Докажем, что угол C прямой. Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1 , в котором $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$ (рис. 122, б). По теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, а с учетом равенства двух пар сторон рассматриваемых треугольников $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2$, т. е. $A_1B_1 = AB$. Тогда $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ по трем сторонам, откуда $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$. ■

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что треугольник со сторонами 3, 4 и 5 — прямоугольный: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Об этом знали еще древние египтяне: для построения прямых углов на местности они делили бечевку на 12 равных частей, связывали ее концы, а потом с помощью колец натягивали ее так, чтобы получился прямоугольный треугольник. Именно поэтому прямоугольные треугольники со сторонами, пропорциональными числам 3, 4 и 5, называют *египетскими треугольниками*. Вообще, тройки чисел a, b, c , для которых выполняется равенство $a^2 + b^2 = c^2$, принято называть *пифагоровыми тройками*, а треугольники, длины сторон которых являются пифагоровыми тройками, — *пифагоровыми треугольниками*. Попробуйте самостоятельно составить несколько пифагоровых троек чисел (поможет в этом решение задачи 443).

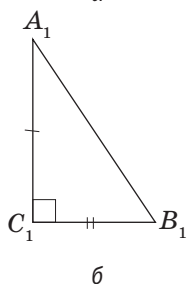
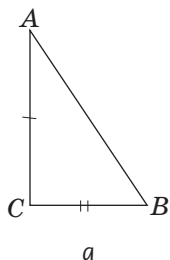


Рис. 122. К доказательству теоремы, обратной теореме Пифагора



13.3. Перпендикуляр и наклонная

Пусть точка A не лежит на прямой a , AB — перпендикуляр к этой прямой (рис. 123). Любой отрезок, соединяющий точку A с точкой прямой a и не совпадающий с перпендикуляром, называют **наклонной** к прямой a . На рис. 123 отрезок AC — наклонная к прямой a , точка C — основание наклонной. При этом отрезок BC прямой a , ограниченный основаниями перпендикуляра и наклонной, называют **проекцией наклонной AC на данную прямую**.

Понятия наклонной и ее проекции взаимосвязаны с понятием перпендикуляра к прямой: невозможно указать проекцию данной наклонной, не построив перпендикуляр. Очевидно, что *перпендикуляр и наклонная, проведенные из одной точки, вместе с проекцией наклонной образуют прямоугольный треугольник, в котором наклонная является гипотенузой*.

Сформулируем свойства перпендикуляра, наклонных и проекций.

Пусть из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонные. Тогда:

- 1) любая наклонная больше перпендикуляра и больше своей проекции на данную прямую (рис. 124, а);
- 2) равные наклонные имеют равные проекции, и наоборот: если проекции двух наклонных равны, то равны и сами наклонные (рис. 124, б);
- 3) большая наклонная имеет большую проекцию, и наоборот: из двух наклонных больше та, которая имеет большую проекцию (рис. 124, в).

Все эти свойства следуют из теоремы Пифагора (самостоятельно объясните почему). Но некоторые из них можно также получить и из других свойств прямоугольного треугольника.

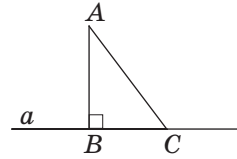


Рис. 123. Перпендикуляр и наклонная

Проекция — от латинского «проектио» — бросок вперед

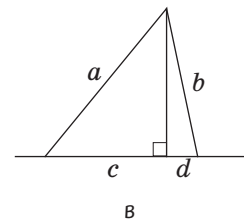
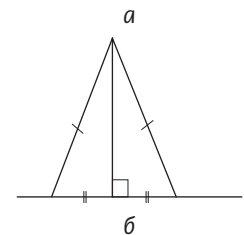
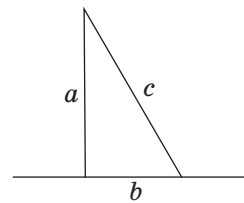


Рис. 124. Свойства наклонных

Вопросы и задачи



Устные упражнения

- 416.** Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника вдвое больше квадрата катета. Чему равны острые углы треугольника?
- 417.** Какова градусная мера наибольшего угла треугольника со сторонами 6, 8 и 10? Почему?
- 418.** Стороны параллелограмма равны 3 см и 4 см, а диагональ — 5 см. Определите вид параллелограмма.
- 419.** В треугольнике ABC $\angle A = 90^\circ$. Назовите:
 а) наклонную к прямой AB , проведенную из точки C ;
 б) проекцию наклонной BC на прямую AC .
- 420.** Отрезки a_1 и a_2 — проекции наклонных l_1 и l_2 , проведенных из одной точки к одной прямой. Сравните:
 а) l_1 и l_2 , если $a_1 < a_2$; б) a_1 и a_2 , если $l_1 = l_2$.
- 421.** Две наклонные к одной прямой имеют равные проекции. Обязательно ли эти наклонные равны?
- 422.** Сколько равных наклонных к данной прямой можно провести из точки, которая не лежит на этой прямой?



Графические упражнения

- 423.** Начертите прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Вычислите по теореме Пифагора длину его гипотенузы. Проверьте полученный результат измерением.
- 424.** Постройте треугольник со сторонами 2,5 см, 6 см и 6,5 см. Измерьте наибольший угол треугольника. Обоснуйте полученный результат с помощью теоремы, обратной теореме Пифагора.



Письменные упражнения

Уровень А

- 425.** В прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c найдите:
- а) c , если $a = 7$, $b = 24$; в) a , если $b = 3\sqrt{3}$, $c = 6$.
 б) b , если $a = \sqrt{17}$, $c = 9$;

426. Из точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная. Найдите длину:

- а) наклонной, если ее проекция равна 9 см, а перпендикуляр имеет длину 40 см;
- б) перпендикуляра, если наклонная и ее проекция равны соответственно 29 см и 20 см.

 **427.** В прямоугольнике найдите:

- а) диагональ, если стороны равны 10 см и 24 см;
- б) периметр, если диагональ равна 10 см, а одна из сторон — 6 см.

428. В равнобедренном прямоугольном треугольнике найдите:


- а) гипотенузу, если катет равен: 4 см; $2\sqrt{2}$ см; a см;
- б) катет, если гипотенуза равна: 10 см; $\sqrt{2}$ см; c см.

 **429.** В квадрате найдите:


- а) диагональ, если сторона равна a ;
- б) сторону, если диагональ равна d .

430. Определите, является ли прямоугольным треугольник со сторонами:

- а) 4, 5, 6; б) 5, 12, 13; в) 2, $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$; г) 6, 8, $\sqrt{10}$.

 **431.** Стороны треугольника равны 12 см, 16 см и 20 см. Какой угол образует с наименьшей стороной биссектриса наибольшего угла?

432. Основание равнобедренного треугольника равно 16 см. Найдите периметр треугольника, если его биссектриса, проведенная к основанию, равна 6 см.

 **433.** Периметр равнобедренного треугольника равен 36 см, а боковая сторона — 13 см. Найдите медиану треугольника, проведенную к основанию.

434. Диагонали параллелограмма равны 16 см и 30 см, а сторона — 17 см. Докажите, что данный параллелограмм является ромбом.

 **435.** Найдите периметр ромба с диагоналями 10 м и $2\sqrt{11}$ м.

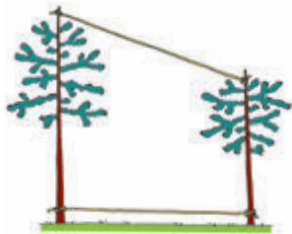
Уровень Б

436. Две стороны прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите длину третьей стороны. Сколько решений имеет задача?


437. В прямоугольном треугольнике найдите неизвестные стороны, если:

- а) катеты относятся как 3 : 4, а гипотенуза равна 45 см;
- б) высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см, а проекция одного из катетов на гипотенузу имеет длину 16 см.

438. В прямоугольном треугольнике найдите неизвестные стороны, если:
- катет и гипотенуза относятся как $12 : 13$, а второй катет равен 10 см;
 - проекции катетов на гипотенузу равны 18 см и 32 см.
439. В равностороннем треугольнике найдите:
- высоту, если сторона равна: 6 см; $2\sqrt{3}$ см; a см;
 - сторону, если высота равна: 1 см; $3\sqrt{3}$ см; h см.
440. Найдите высоту ромба, выходящую из вершины тупого угла, если она делит сторону на отрезки длиной 6 см и 4 см, начиная от вершины острого угла.
441. Высота равнобедренного треугольника делит боковую сторону на отрезки длиной 1 см и 12 см, начиная от основания. Найдите основание треугольника.
442. Стороны треугольника равны 15 см, 20 см и 25 см. Найдите медиану и высоту, проведенные к наибольшей стороне.
443. Если m и n — натуральные числа, то числа $2mn$, $m^2 - n^2$ и $m^2 + n^2$ составляют пифагорову тройку. Докажите.
444. Основания равнобокой трапеции равны 8 см и 18 см, а высота — 12 см. Найдите периметр трапеции. Можно ли вписать в нее окружность?
445. Высота одной сосны равна 21 м, второй — 28 м. Расстояние между основаниями этих сосен составляет 24 м. Найдите расстояние между верхушками сосен.
446. Из точки к прямой проведены перпендикуляр длиной 8 см и две наклонные длиной 10 см и 17 см. Найдите расстояние между основаниями наклонных. Сколько решений имеет задача?
447. Найдите высоту, проведенную к наибольшей стороне треугольника со сторонами:
- 15 , 41 и 52 ;
 - 10 , 17 и 21 .
448. Из точки к прямой проведены перпендикуляр и две наклонные, разность длин которых составляет 8 см. Найдите длину перпендикуляра, если проекции наклонных равны 8 см и 20 см.




449. Точка окружности удалена от концов диаметра на 15 см и 20 см. Найдите расстояние от данной точки до диаметра.


-  **450.** На окружности отмечены точки A , B и C такие, что $AB = 9$ см, $BC = 40$ см, $AC = 41$ см. Найдите радиус окружности.


Уровень В


451. Две окружности с радиусами 4 см и 9 см касаются внешним образом. Найдите расстояние между точками касания данных окружностей с их общей внешней касательной.

-  **452.** Две окружности касаются внешним образом. Расстояния от точки касания A этих окружностей до точек B и C касания данных окружностей с их общей внешней касательной равны соответственно 5 см и 12 см. Найдите BC .

453. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 1 м и $\sqrt{3}$ м. Найдите среднюю линию трапеции.

-  **454.** Медиана и высота, проведенные к гипотенузе прямоугольного треугольника, равны соответственно 25 см и 24 см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

-  **455.** Докажите, что квадрат высоты равнобокой трапеции, описанной около окружности, равен произведению ее оснований.

-  **456.** Если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то суммы квадратов длин его противоположных сторон равны. Докажите. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.



Повторение перед изучением § 14

Теоретический материал

- касательная к окружности;
- геометрическое место точек.



7 класс, § 20, 22

Задачи

457. На катете AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90^\circ$) отмечена точка K . Отрезок KM — перпендикуляр к гипотенузе BC , причем $KM = AK$. Докажите, что CK — биссектриса треугольника ABC .

458. В остроугольном треугольнике ABC $AB > BC$, BD — высота треугольника. Сравните длины отрезков AD и DC . Изменится ли ответ, если BD — биссектриса треугольника? Выскажите предположение.

§ 14

Применение подобия треугольников

14.1. Свойство биссектрисы треугольника

Теорема (свойство биссектрисы треугольника)

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам.

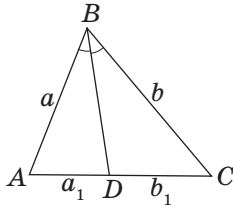


Рис. 125. Свойство биссектрисы треугольника

По данным рис. 125 это означает, что

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}.$$

Доказательство

□ Пусть BD — биссектриса треугольника ABC . Докажем, что $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

В случае, если $AB = BC$, утверждение теоремы очевидно, поскольку биссектриса BD является одновременно и медианой. Рассмотрим случай, когда $AB \neq BC$.

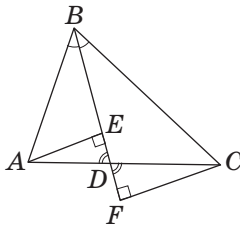


Рис. 126. К доказательству свойства биссектрисы треугольника

Проведем перпендикуляры AE и CF к прямой BD (рис. 126). Прямоугольные треугольники ADE и CDF подобны, поскольку их острые углы при вершине D равны как вертикальные. Из подобия этих треугольников имеем: $\frac{AE}{CF} = \frac{AD}{DC}$. С другой стороны, прямоугольные треугольники ABE и CBF также подобны, поскольку имеют равные острые углы при вершине B . Отсюда следует, что $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CF}$. Сравнивая это равенство с предыдущим, получаем: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, что и требовалось доказать. ■

Предложите способ построения биссектрисы треугольника на основании ее свойства.

Задача

Найдите периметр прямоугольного треугольника, если его биссектриса делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см.

Решение

Пусть BD — биссектриса прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC , $AD = 15$ см, $DC = 20$ см (рис. 127). По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, т. е. $AB : BC = 15 : 20 = 3 : 4$. Тогда, если $AB = 3x$ см, то $BC = 4x$ см, и по теореме Пифагора имеем:

$$(3x)^2 + (4x)^2 = 35^2;$$

$$25x^2 = 1225;$$

$$x = 7.$$

Следовательно, $AB = 21$ см, $BC = 28$ см, $AC = 35$ см, тогда $P_{ABC} = 84$ см.

Ответ: 84 см.

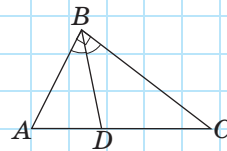


Рис. 127

14.2*. Метрические соотношения в окружности

Теорема (о пропорциональности отрезков хорд)

Произведения отрезков пересекающихся хорд равны.

По данным рис. 128 это означает, что $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Доказательство

□ Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке M . Проведем хорды AC и BD . Треугольники ACM и DBM подобны по двум углам: $\angle C = \angle B$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, а углы при вершине M равны как вертикальные.

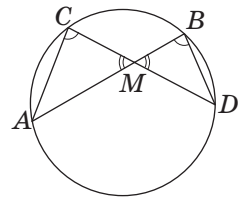


Рис. 128. К доказательству пропорциональности отрезков хорд

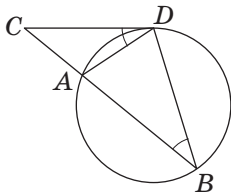


Рис. 129. К доказательству пропорциональности отрезков секущей и касательной

Из подобия треугольников следует, что $\frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}$, т. е. $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. ■

Теорема (о пропорциональности отрезков секущей и касательной)

Произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки.

По данным рис. 129 это означает, что $CB \cdot CA = CD^2$.

Доказательство

□ Пусть из точки C к окружности проведены секущая, которая пересекает окружность в точках A и B , и касательная CD (D — точка касания). Проведем хорды AD и BD . Треугольники BCD и DCA подобны по двум углам: у них общий угол C , а углы CBD и CDA измеряются половиной дуги AD (см. опорную задачу 230). Значит, из подобия треугольников получаем: $\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CA}$, т. е. $CB \cdot CA = CD^2$. ■

Следствие

Произведение одной секущей на ее внешнюю часть равно произведению другой секущей на ее внешнюю часть, если эти секущие проведены из одной точки вне окружности.

По данным рис. 130 это означает, что $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

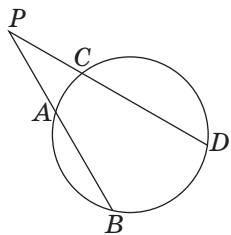


Рис. 130. Пропорциональность отрезков секущих

14.3.* Метод подобия

Подобие треугольников дает ключ к решению задач на доказательство и вычисление, которые содержат соотношения между произведениями некоторых отрезков. Для этого соответствующие равенства превращают в пропорции, благодаря которым можно доказать подобие соответствующих треугольников.

Задача

Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , $AO \cdot BO = CO \cdot DO$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

Решение

Перепишем данное равенство в виде пропорции $\frac{BO}{CO} = \frac{DO}{AO}$. Элементы этой пропорции являются соответствующими сторонами треугольников BOC и DOA (рис. 131). Поскольку $\angle BOC = \angle DOA$ как вертикальные, то эти треугольники подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними, поэтому $\angle CBO = \angle ADO$. Но углы CBO и ADO внутренние накрест лежащие при прямых CB и AD и секущей BD . Следовательно, по признаку параллельности прямых $BC \parallel AD$.

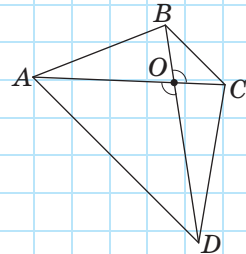


Рис. 131

Подобие треугольников может использоваться не только как инструмент геометрических доказательств или вычислений, но и как средство для решения задач на построение. Метод подобия для решения задач на построение заключается в построении вспомогательной фигуры, подобной искомой.

Задача

Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе, проведенной из вершины третьего угла.

Решение**Анализ**

Обратим внимание на то, что два данных угла (пусть они равны α и β) определяют форму искомого треугольника, а длина данной биссектрисы (пусть она равна l) — его размеры. При этом искомый треугольник будет подобен любому треугольнику с углами α и β . Отсюда следует план построения: строим сначала произвольный треугольник с углами α и β , проводим в нем биссектрису и, пользуясь подобием треугольников, строим искомый треугольник (рис. 132).

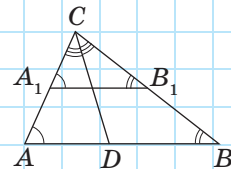


Рис. 132



Построение

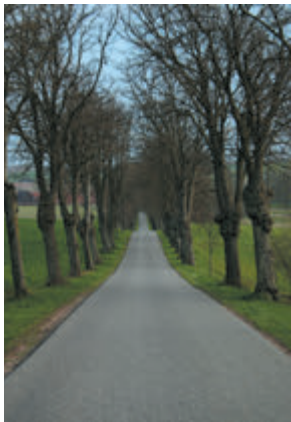
1. Построим треугольник A_1B_1C , в котором $\angle A_1 = \alpha$, $\angle B_1 = \beta$.
2. Построим биссектрису угла C .
3. Отложим на построенной биссектрисе отрезок $CD = l$.
4. Проведем через точку D прямую, параллельную A_1B_1 . Пусть A и B — точки ее пересечения со сторонами угла C . Треугольник ABC искомым.

Доказательство

Поскольку по построению $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ как соответственные углы при параллельных прямых. Значит, в треугольнике ABC CD — биссектриса и $CD = l$ по построению, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Исследование

Задача имеет единственное решение при условии $\alpha + \beta < 180^\circ$ и ни одного, если $\alpha + \beta \geq 180^\circ$.



Итак, при решении задач на построение **методом подобия** следует придерживаться следующего плана.

1. Выделить из условий задачи те, которые определяют форму искомой фигуры.
2. Построить по этим данным фигуру, подобную искомой.
3. Используя условия задачи, определяющие размеры искомой фигуры, построить эту фигуру.

Среди задач на построение, связанных с подобием, одной из наиболее интересных является задача деления отрезка на две части таким образом, чтобы одна из них была средним пропорциональным между второй частью и всем отрезком. Такое деление отрезка называют **делением в среднем и крайнем отношениях**, или **золотым сечением**. Подробнее о таком делении вы можете узнать из Приложения 2.

Вопросы и задачи



Устные упражнения

459. Биссектриса треугольника делит противоположащую сторону в отношении $1 : 2$. Могут ли углы, прилежащие к этой стороне, быть равными? Почему?

460. Может ли биссектриса равнобедренного треугольника делить боковую сторону в отношении $2 : 1$, начиная от основания? Какой теореме это противоречит?



Графические упражнения

461. Начертите треугольник ABC и проведите его биссектрису BD . Измерьте отрезки AB , AD и DC . С помощью свойства биссектрисы треугольника вычислите длину стороны BC . Проверьте полученный результат измерением.



462. Постройте треугольник ABC со сторонами $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см. Отметьте на стороне BC точку D такую, что $BD = 3$ см. Соедините точки A и D . Измерьте углы BAD и CAD . Обоснуйте полученный результат.



Письменные упражнения

Уровень А

463. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC . Найдите:

- AB , если $BC = 8$ см, $AD = 3$ см, $DC = 2$ см;
- AD и DC , если $AB = 9$ см, $BC = 6$ см, $AC = 10$ см.

464. Биссектриса равнобедренного треугольника делит боковую сторону на отрезки длиной 2 см и 4 см, начиная от основания треугольника. Найдите основание треугольника.



465. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC . Найдите стороны треугольника, если $AD = 8$ см, $DC = 12$ см, а периметр треугольника равен 45 см.

466. Биссектриса прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки, разность которых составляет 5 см. Найдите стороны треугольника, если отношение катетов равно $3 : 4$.



467. Биссектриса прямоугольного треугольника делит его катет на отрезки длиной 4 см и 5 см. Найдите периметр треугольника.

Уровень Б

468. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит высоту, проведенную к основанию, на отрезки длиной 16,5 см и 27,5 см. Найдите отрезки, на которые эта биссектриса делит боковую сторону треугольника.

🔵 **469.** Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к основанию как 5 : 6. Биссектриса угла при основании делит высоту, проведенную к основанию, на отрезки, разность которых составляет 4 см. Найдите периметр треугольника.

470. При пересечении двух хорд одна из них делится на отрезки длиной 6 см и 16 см, а вторая — в отношении 3 : 2. Найдите длину второй хорды.

🔵 **471.** При пересечении хорды с диаметром окружности хорда делится на отрезки длиной 3 см и 4 см, а диаметр — в отношении 1 : 3. Найдите радиус окружности.

472. Секущая, проведенная из точки A вне окружности, пересекает окружность в точках B и C , причем $AB = 4$ см, $BC = 5$ см. Найдите длину отрезка касательной, проведенной к окружности из точки A .

🔵 **473.** Из точки вне окружности, удаленной от центра окружности на 39 см, проведена касательная к окружности. Найдите радиус окружности, если отрезок касательной равен 36 см.

Уровень В

474. Катет прямоугольного треугольника равен 18 см. Точка на этом катете удалена от гипотенузы и другого катета на 8 см. Найдите периметр треугольника.

🔵 **475.** Точка на катете прямоугольного треугольника равноудалена от второго катета и гипотенузы. Перпендикуляр, проведенный из данной точки к гипотенузе треугольника, делит ее на отрезки 3 см и 12 см. Найдите периметр треугольника.

476. В треугольнике ABC для высоты CD и отрезков AD и BD , на которые она делит сторону AB , имеет место соотношение $CD^2 = AD \cdot BD$. Докажите, что угол ACB прямой.

🔵 **477.** В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC к стороне BC проведена высота AD . Докажите, что $2DC \cdot BC = AC^2$.

478. Постройте треугольник:

- по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла;
- по углу, биссектрисе этого угла и отношению сторон, которые образуют данный угол.



479. Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе, проведенной из вершины меньшего из них.



Повторение перед изучением § 15

Теоретический материал

- определение треугольника;
- сумма углов треугольника;
- четырехугольник и его элементы.



7 класс, § 7, 16



8 класс, § 1

Задачи

480. Докажите, что периметр параллелограмма больше суммы длин его диагоналей.

481. Два угла треугольника равны 10° и 70° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины третьего угла.



Онлайн-тренировка для подготовки к контрольной работе № 3

Задачи для подготовки к контрольной работе № 3

1. По рис. 133 докажите подобие треугольников ABE и DCE , если $AB \parallel CD$.

2. Периметр прямоугольника равен 34 см, а одна из сторон — 5 см. Найдите диагональ прямоугольника.

3. Стороны треугольника пропорциональны числам 21, 20 и 29. Докажите, что данный треугольник прямоугольный.

4. Из точки к прямой проведены перпендикуляр и две наклонные длиной 17 см и 10 см. Проекции наклонных относятся как 2 : 5. Найдите длину перпендикуляра.

5. В прямоугольном треугольнике биссектриса делит гипотенузу на отрезки 15 см и 20 см. На какие отрезки делит гипотенузу высота треугольника?

6. В окружности проведены две равные пересекающиеся хорды. Докажите, что отрезки первой хорды соответственно равны отрезкам второй хорды.

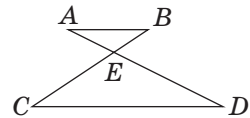
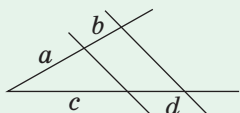


Рис. 133

Итоги

ИТОГОВЫЙ ОБЗОР ГЛАВЫ II

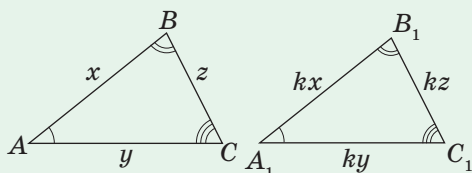
ТЕОРЕМА О ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКАХ



Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на сторонах этого угла пропорциональные отрезки:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

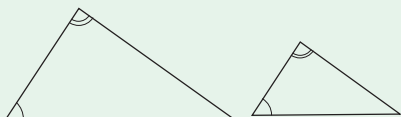
ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Два треугольника называются **подобными**, если углы одного из них соответственно равны углам другого и соответствующие стороны этих треугольников пропорциональны

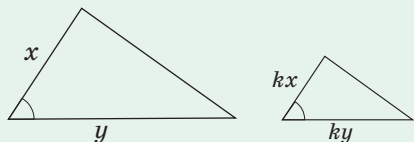
ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

По двум углам



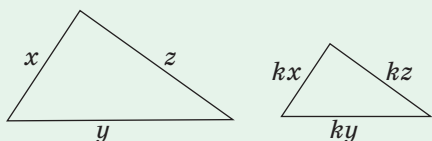
Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны

По двум сторонам и углу между ними



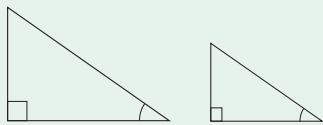
Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны

По трем сторонам



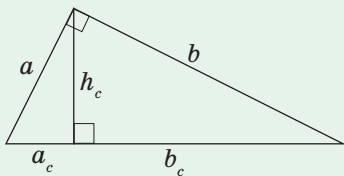
Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны

Признак подобия прямоугольных треугольников



Если два прямоугольных треугольника имеют по равному острому углу, то такие треугольники подобны

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



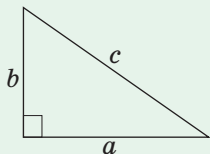
Высота, проведенная к гипотенузе, является средним пропорциональным между проекциями катетов на гипотенузу: $h_c^2 = a_c \cdot b_c$

Катет является средним пропорциональным между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу: $a^2 = c \cdot a_c$ и $b^2 = c \cdot b_c$

Высота, проведенная к гипотенузе, равна произведению катетов, деленному на гипотенузу: $h_c = \frac{ab}{c}$

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕЕ

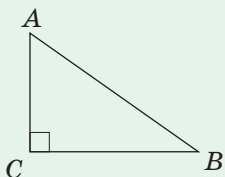
Теорема Пифагора



В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Теорема, обратная теореме Пифагора



Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник является прямоугольным:

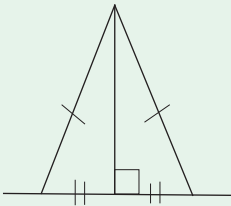
если $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то $\angle C = 90^\circ$

ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

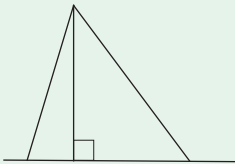


Пусть из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонные. Тогда:

- любая наклонная больше перпендикуляра и больше своей проекции на данную прямую

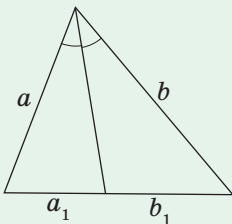


- равные наклонные имеют равные проекции, и наоборот: если проекции двух наклонных равны, то равны и сами наклонные



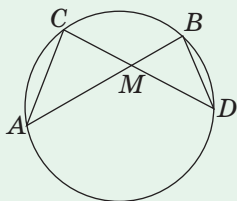
- бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию, и наоборот: из двух наклонных больше та, которая имеет бóльшую проекцию

СВОЙСТВО БИСЕКТРИСЫ ТРЕУГОЛЬНИКА



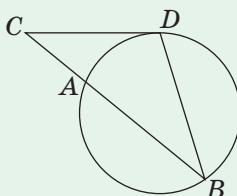
Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$$

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ОКРУЖНОСТИ

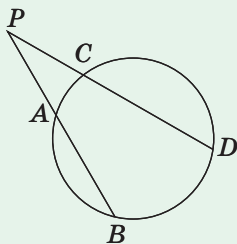
Произведения отрезков пересекающихся хорд равны:

$$AM \cdot BM = CM \cdot DM$$



Произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки:

$$CB \cdot CA = CD^2$$



Произведение одной секущей на ее внешнюю часть равно произведению другой секущей на ее внешнюю часть, если эти секущие проведены из одной точки вне окружности:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



Контрольные вопросы к главе II

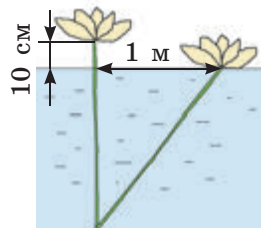
1. Сформулируйте теорему о пропорциональных отрезках.
2. Дайте определение подобных треугольников.
3. Сформулируйте признак подобия треугольников по двум углам.
4. Сформулируйте признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними.
5. Сформулируйте признак подобия треугольников по трем сторонам.
6. Сформулируйте признаки подобия прямоугольных треугольников.
7. Сформулируйте и докажите метрические соотношения в прямоугольном треугольнике.
8. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.
9. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора.
10. Сформулируйте свойства перпендикуляра и наклонных, проведенных из одной точки к прямой.
11. Сформулируйте свойство биссектрисы треугольника.



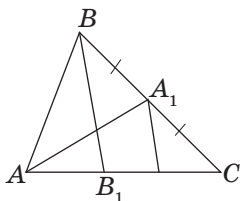
Дополнительные задачи к главе II

- 482.** Катет прямоугольного треугольника равен 6, а проекция другого катета на гипотенузу равна 5. Найдите гипотенузу треугольника.
- 483.** Периметр прямоугольника равен 46 см, а диагональ — 17 см. Найдите стороны прямоугольника.
- 484.** Найдите стороны равнобедренного треугольника с периметром 16 см, если медиана, проведенная к основанию, равна 4 см.
- 485.** Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см. Найдите катеты треугольника, если высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см.
- 486.** Периметр треугольника равен 27 см. Вычислите его стороны, если биссектриса делит одну из них на отрезки длиной 4 см и 5 см.
- 487.** Периметр равнобокой трапеции равен 1 м, а разность оснований составляет 14 см. Найдите радиус окружности, вписанной в трапецию.
- 488.** Катет прямоугольного треугольника равен 32 см. Точка, лежащая на этом катете, удалена от концов гипотенузы на 25 см. Найдите периметр треугольника.

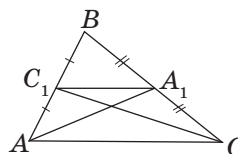
489. Цветок водяной лилии выступает над поверхностью озера на 10 см. Если цветок потянуть в сторону, то он коснется поверхности воды на расстоянии 1 м от начального положения. Найдите глубину озера в данном месте.



490. Пользуясь рис. 134, а, б, докажите теорему о точке пересечения медиан треугольника еще двумя способами.



а



б

Рис. 134

491. На рис. 135 отрезок BD — биссектриса треугольника ABC , $CM \parallel BD$. Пользуясь этим рисунком и теоремой о пропорциональных отрезках, докажите свойство биссектрисы треугольника.

492. На рис. 136 CM — биссектриса внешнего угла треугольника ABC , $BD \parallel CM$. Пользуясь этим рисунком и теоремой о пропорциональных отрезках, докажите, что $AM : BM = AC : BC$.

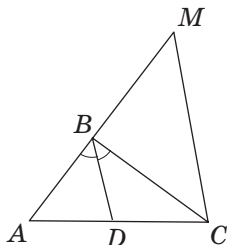


Рис. 135

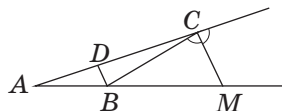


Рис. 136

493. Постройте треугольник по углу, медиане, проведенной из его вершины, и отношению сторон, прилежащих к данному углу.

Задачи повышенной сложности

494. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC отмечены точки A_1 и B_1 соответственно. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O . Найдите:

- а) $AO : A_1O$, если $AB_1 : B_1C = 2 : 1$, $BA_1 = A_1C$;
- б) $BA_1 : A_1C$, если $AO : OA_1 = 4 : 1$, $AB_1 : B_1C = 2 : 1$;
- в) $BA_1 : A_1C$ и $AB_1 : B_1C$, если $AO : OA_1 = 4 : 1$, $BO : OB_1 = 7 : 8$.

495. В треугольнике ABC медиана AM делит высоту BH в отношении $3 : 1$, начиная от вершины B . В каком отношении данная высота делит данную медиану?

496. Основания трапеции равны 6 см и 12 см. Середины каждого из оснований соединены с концами другого основания. Найдите расстояние между точками пересечения проведенных отрезков.

497. В равносторонний треугольник вписан квадрат таким образом, что две его вершины лежат на одной стороне треугольника, а две другие — на двух других сторонах треугольника. Найдите отношение периметров треугольника и квадрата.

498. Основания трапеции равны a и b ($a < b$). Через точку пересечения продолжений боковых сторон проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между продолжениями диагоналей.

499. Основание равнобедренного треугольника равно 36 см, а боковая сторона — 54 см. К боковым сторонам проведены высоты. Найдите длину отрезка, концами которого являются основания этих высот.

500. Докажите, что квадрат наименьшей медианы прямоугольного треугольника в пять раз меньше суммы квадратов двух других медиан.

501. Три окружности с радиусами 1, 2 и 3 попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через центры этих окружностей, и радиус окружности, проходящей через точки их касания.

502. Внутри прямоугольника $ABCD$ отмечена точка M , причем $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$. Найдите MD .

503. Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до данных точек A и B постоянна, если точки A и B принадлежат этому множеству.

504 (теорема Птолемея). Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений двух пар его противоположных сторон: $d_1 d_2 = ac + bd$ (рис. 137). Докажите.

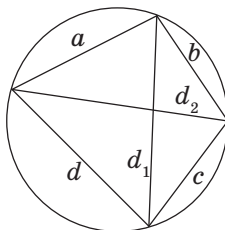


Рис. 137

505 (опорная). Квадрат биссектрисы треугольника равен разности между произведением боковых сторон и произведением отрезков, на которые эта биссектриса делит основание: $l_c^2 = ab - mn$ (рис. 138). Докажите.

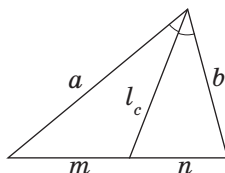


Рис. 138



Видеоматериалы к главе II

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Теории подобия треугольников посвящен шестой раздел «Начал» Евклида. Интересно, что, например, в геометрии Лобачевского не существует подобных треугольников, которые не были бы равны. Оказывается, аксиома параллельных прямых в евклидовой геометрии равносильна предположению о существовании подобных, но неравных треугольников.



Евклид

Центральное место в евклидовой геометрии занимает теорема Пифагора. Пифагор Самосский (ок. 580—500 гг. до н. э.) долгое время жил в Египте и Вавилоне, потом поселился в городе Кротон (греческая колония на юге Италии) и основал так называемый пифагорейский союз. Считается, что именно от пифагорейцев происходит слово «математика» (греческое «матема» означает «наука», «познание»).

Свойства треугольника со сторонами 3, 4 и 5 были известны древним египтянам и китайским ученым.



Пифагор начал исследовать другие прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами. Рассмотрев равнобедренный прямоугольный треугольник с единичными катетами, он увидел, что длина его гипотенузы не выражается целым числом — так были открыты иррациональные числа. Вскоре Пифагору удалось доказать, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе, — именно так выглядела теорема Пифагора в классической формулировке. По легенде, в честь своего открытия он принес богам в жертву сто быков.



Пифагор

Сегодня нельзя с уверенностью сказать, какие из открытий пифагорейцев принадлежат самому Пифагору, а какие — его ученикам. Вообще, школа Пифагора существовала достаточно закрыто и обособленно от общества. Это породило ненависть к пифагорейцам, и школа была разгромлена, а сам Пифагор был вынужден спасаться бегством, но в дороге был убит. После смерти Пифагора его ученики разбрелись по всей Греции и стали распространять его учение, которое дошло и до наших дней.



Пифагорейский союз был одновременно и философской школой, и научным сообществом, и религиозным братством, и даже политической партией. Исследования пифагорейцев охватывали и арифметику, и философию, и музыку, и астрономию.



Выдающиеся математики Украины



Глушков Виктор Михайлович (1923–1982)

Информационные технологии (сокращенно ИТ, произносится по-английски «ай-ти») — это все, что связано с обработкой, хранением и передачей информации. Кто сегодня не слышал об ИТ? Даже малыши уже легко справляются с мобильными телефонами, ноутбуками, планшетами, чтобы посмотреть любимый мультфильм. Но не все задумываются над тем, что, заходя в Интернет, чтобы посмотреть новости, прогноз погоды, электронную почту, интерактивный урок и т. д., они имеют дело с ИТ. И практически

никто, кроме специалистов, не знает, что выдающийся ученый Виктор Михайлович Глушков является одним из основоположников ИТ, создателем многопроцессорных макроконвейерных суперкомпьютеров, организатором Института кибернетики Академии наук Украины, гением, опередившим время.

Виктор Михайлович был серьезным ученым-алгебраистом, поэтому к созданию кибернетики относился именно с научных позиций. Он четко осознавал, что только на научной основе компьютеры станут действительно великим достоянием человечества. Недаром же для написания статьи о кибернетике в американской энциклопедии «Британика» (1973 г.) был приглашен именно вице-президент Украинской академии наук Глушков. Виктор Михайлович опубликовал более 800 печатных работ, и первая в мире «Энциклопедия кибернетики» вышла именно под его редакцией в 1974 г.

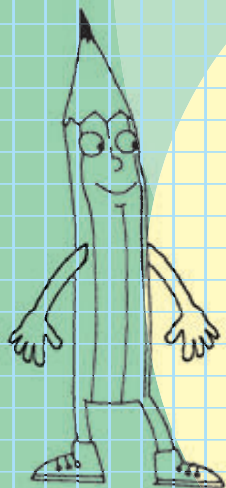
В своей последней пророческой работе «Основы безбумажной информатики» ученый предсказывал: «Уже недалек тот день, когда исчезнут обычные книги, газеты, журналы. Вместо этого каждый человек будет носить с собой “электронный” блокнот, являющийся комбинацией плоского дисплея с миниатюрным радиопередатчиком». Это было почти тридцать лет назад! Великий украинский ученый Б. Е. Патон сказал, что имя академика Глушкова неотделимо от создания в нашей стране кибернетической индустрии. В честь академика Глушкова назван один из самых красивых проспектов Киева.

Благодаря ИТ все, кого заинтересовала биография международно признанного пионера компьютеризации, смогут найти дополнительную информацию о В. М. Глушкове в сети Интернет.

Глава III

Многоугольники.

Площади многоугольников



- § 15. Многоугольник и его элементы
- § 16. Площадь многоугольника. Площади прямоугольника и параллелограмма
- § 17. Площади треугольника, ромба и трапеции
- § 18. Применение площадей

Математика, отделяя линию от площади и площадь от тела, утверждает, что реально только тело, а линия и площадь — абстракции.

Александр Герцен, писатель

До настоящего времени в теоремах и задачах рассматривались лишь числовые характеристики отдельных элементов геометрических фигур — длины сторон, градусные меры углов и т. п. В отличие от них площадь характеризует фигуру в целом, т. е. зависит как от ее формы, так и от размеров.

В повседневной жизни человек имеет дело с площадью каждый день — измеряет жилые помещения и приусадебные участки, лесные массивы и сельскохозяйственные угодья и т. д. Вычислением площадей вы занимались на уроках математики в младших классах. Тем не менее, дать строгое с научной точки зрения определение площади не так просто, и соответствующая математическая теория была создана значительно позже многих известных теорем.

В этой главе мы обобщим сведения о многоугольниках и их площадях. Благодаря этому ваш математический багаж пополнится немалым количеством новых формул, которые необходимо знать и уметь применять. В этой связи дадим вам совет: усвоить какую-либо формулу значительно проще, если понять и запомнить способ ее получения. Более того, откроем вам маленькую профессиональную тайну: иногда даже профессиональные математики не запоминают формулы, а выводят их в уме в случае необходимости. Будет очень здорово, если такую математическую эрудицию удастся приобрести и вам.



§ 15

Многоугольник и его элементы

15.1. Определение многоугольника

Рассмотрим фигуру, которая состоит из отрезков A_1A_2 , A_2A_3 , ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 . Отрезки расположены так, что никакие два *соседних отрезка* (то есть таких, которые имеют общий конец), не лежат на одной прямой, а несоседние отрезки не имеют общих точек (рис. 139, а). Такую фигуру называют **многоугольником**. Точки A_1 , A_2 , ..., A_n называют **вершинами многоугольника**, а отрезки A_1A_2 , A_2A_3 , ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 — **сторонами многоугольника**.

В зависимости от количества вершин многоугольник называют **треугольником**, **четырёхугольником**, **пятиугольником** и т. д. Многоугольник, который имеет n вершин (а следовательно, n сторон), называют **n -угольником**.

Многоугольник обозначают по его вершинам. При этом буквы, которые стоят в названии многоугольника рядом, должны обозначать вершины, которые принадлежат одной стороне (*соседние вершины*). Например, пятиугольник на рис. 139, б можно обозначить $ABCDE$ или $DCBAE$, но нельзя обозначать $ABDEC$.

Определение

Периметром многоугольника называется сумма длин всех его сторон.

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий две несоседние вершины.

Например, на рис. 139, б отрезки AC и AD являются диагоналями пятиугольника $ABCDE$, выходящими из вершины A . Периметр этого многоугольника вычисляется по формуле $P_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + AE$.

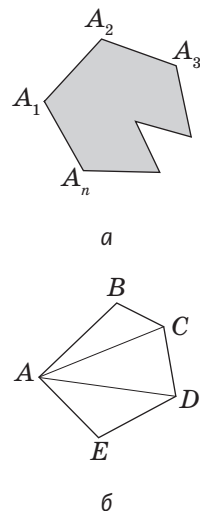


Рис. 139. Многоугольники

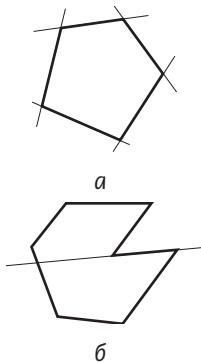


Рис. 140. Выпуклый (а) и невыпуклый (б) многоугольники

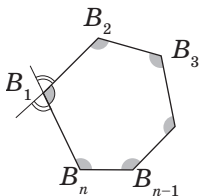


Рис. 141. Внутренний и внешний углы многоугольника

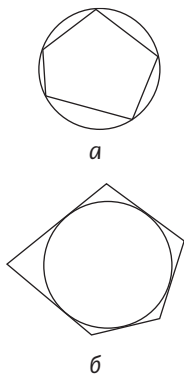


Рис. 142. Вписанный (а) и описанный (б) многоугольники

Любой многоугольник делит плоскость на две части. Одна из них (на рис. 139, а она закрашена) является **внутренней областью многоугольника**. Фигуру, состоящую из многоугольника и его внутренней области, называют **плоским многоугольником**, или, в некоторых случаях, просто многоугольником.

Определение

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от любой прямой, которая содержит его сторону.

На рис. 140, а изображен выпуклый многоугольник, а на рис. 140, б — невыпуклый. Далее мы будем рассматривать только выпуклые многоугольники.

Рассмотрим выпуклый многоугольник $B_1B_2...B_n$ (рис. 141). Углы $B_1B_2B_3$, $B_2B_3B_4$, ..., $B_{n-1}B_nB_1$, $B_nB_1B_2$ (на рисунке они закрашены) называют **углами (внутренними углами) многоугольника $B_1B_2...B_n$** . В частности, угол данного многоугольника при вершине B_1 на рисунке обозначен одной дужкой. Углы, смежные с данным внутренним углом, являются **внешними углами многоугольника $B_1B_2...B_n$** при вершине B_1 (на рисунке они обозначены двумя дужками).

Любой внутренний угол выпуклого многоугольника меньше 180° .

Определение

Многоугольник называется **вписанным в окружность**, если все его вершины лежат на этой окружности.

Многоугольник называется **описанным около окружности**, если все его стороны касаются этой окружности.

На рис. 142, а изображен вписанный многоугольник, а на рис. 142, б — описанный.

Приведите пример многоугольника, который обязательно будет выпуклым.

15.2. Сумма углов выпуклого многоугольника

Как известно, сумма углов треугольника равна 180° , а сумма углов четырехугольника — 360° . Нетрудно предположить, что сумма углов выпуклого многоугольника должна зависеть от количества его сторон. Эта зависимость выражается следующей теоремой.

Теорема (о сумме углов выпуклого n -угольника)

Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n-2)$.

Доказательство

□ Пусть дан выпуклый n -угольник $A_1A_2\dots A_n$ (рис. 143). Обозначим внутри него произвольную точку O и соединим ее с вершинами $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. При этом образуется n треугольников. Обратим внимание на то, что сумма углов данного многоугольника равна сумме всех углов этих треугольников, кроме углов при вершине O . Поскольку сумма углов $A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_nOA_1$ составляет 360° , то искомая сумма углов многоугольника равна $180^\circ \cdot n - 360^\circ$, т. е. $180^\circ(n-2)$. ■

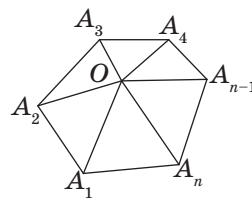


Рис. 143. К доказательству теоремы о сумме углов выпуклого n -угольника

Задача

Докажите, что сумма внешних углов выпуклого n -угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360° .

Решение

Поскольку внешний угол многоугольника по определению является смежным с соответствующим внутренним углом, то сумма этих двух углов равна 180° . Таким образом, сумма всех внутренних и внешних углов равна $180^\circ \cdot n$. Чтобы получить сумму внешних углов, вычтем из этой суммы сумму внутренних углов: $180^\circ \cdot n - 180^\circ(n-2) = 360^\circ$.

Вопросы и задачи



Устные упражнения

506. Сколько диагоналей выходит из одной вершины семиугольника?



507. Может ли диагональ шестиугольника делить его:

- а) на два треугольника;
- б) на два четырехугольника;
- в) на треугольник и пятиугольник?

508. Диагональ отсекает от пятиугольника четырехугольник. Какой вид имеет оставшаяся часть?



509. Может ли выпуклый пятиугольник иметь четыре острых угла; четыре прямых угла; четыре тупых угла?

510. Могут ли четыре угла выпуклого пятиугольника быть равными соответственно четырем углам выпуклого четырехугольника?



Графические упражнения

511. Начертите выпуклый пятиугольник.

- а) Проведите все диагонали пятиугольника. Сколько диагоналей выходит из одной вершины?
- б) Какая фигура образовалась при попарном пересечении диагоналей?
- в) Измерьте углы пятиугольника и вычислите их сумму. Проверьте полученный результат, используя соответствующую теорему.



512. Начертите выпуклый шестиугольник.

- а) Проведите красным цветом диагональ, которая делит данный шестиугольник на два четырехугольника. Сколько существует таких диагоналей?
- б) Проведите синим цветом диагональ, которая делит данный шестиугольник на треугольник и пятиугольник. Установите зависимость между количеством углов выпуклого многоугольника и суммарным количеством углов многоугольников, на которые он делится диагональю.





Письменные упражнения

Уровень А

513. Найдите сумму углов выпуклого:


- а) шестиугольника;
- б) двенадцатиугольника.

514. Определите количество сторон выпуклого многоугольника, сумма углов которого равна:

- а) 540° ;
- б) 900° ;
- в) 1260° .

 **515.** Все углы выпуклого восьмиугольника равны. Найдите их градусную меру.

516. Два угла выпуклого пятиугольника прямые, а остальные три равны. Найдите их градусную меру.

 **517.** Каждый из пяти углов выпуклого шестиугольника равен 120° . Докажите, что в этом шестиугольнике все углы равны.


Уровень Б

518. Определите, существует ли выпуклый многоугольник, сумма углов которого равна:

- а) 1620° ;
- б) 1350° ;
- в) 1980° .

В случае утвердительного ответа укажите количество его сторон.

519. Диагональ делит выпуклый многоугольник на пятиугольник и четырехугольник. Определите вид данного многоугольника и найдите сумму его углов.



 **520.** Каждый из трех углов выпуклого многоугольника равен 80° , а каждый из оставшихся — 160° . Определите количество сторон многоугольника.

521. Определите количество сторон выпуклого многоугольника, каждый угол которого равен:

- а) 60° ;
- б) 108° ;
- в) 120° .

 **522.** Все углы выпуклого многоугольника прямые. Докажите, что он является прямоугольником.

Уровень В

- 523.** Определите количество диагоналей n -угольника.
- 524.** Докажите, что выпуклый многоугольник не может иметь больше трех острых углов.
-  **525.** В равностороннем пятиугольнике углы при одной стороне прямые. Найдите остальные углы.
- 526 (опорная).** *Длина любой стороны многоугольника меньше суммы длин остальных сторон.* Докажите.
-  **527.** Периметр выпуклого многоугольника равен 20 см. Может ли его диагональ быть равной 10 см? Ответ обоснуйте.



Повторение перед изучением § 16

Теоретический материал

- площади прямоугольника и квадрата;
- параллелограмм и его виды.

 5 класс

 8 класс, § 2–4

Задачи

- 528.** Через середину стороны AB параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, перпендикулярная прямой BC . Докажите равенство треугольников, образованных этой прямой, отрезками стороны AB и прямыми BC и AD .
- 529.** Докажите, что сумма высот параллелограмма меньше его периметра.

§ 16

Площадь многоугольника. Площади прямоугольника и параллелограмма

16.1. Понятие площади многоугольника

Понятие площади хорошо известно нам из повседневного опыта: мы измеряем площадь спортивной площадки или садового участка, рассчитываем по площади количество обоев или коврового покрытия для ремонта комнаты и т.д. Попробуем придать представлениям о площади определенную математическую строгость.

Условимся, что под площадью многоугольника мы будем понимать площадь его внутренней области. Как и в случае измерения длин отрезков, измерение площадей основывается на сравнении данной фигуры с фигурой, площадь которой принята за единицу измерения. За единицу измерения площади принимают площадь квадрата, сторона которого равна единице измерения отрезков.

Например, если за единицу измерения отрезков приняты 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения площади принимают площадь квадрата со стороной 1 мм, 1 см или 1 м. Площадь такого квадрата называется квадратным миллиметром (мм^2), квадратным сантиметром (см^2) или квадратным метром (м^2) соответственно. Из курса математики известны и другие единицы площади: ар (площадь квадрата со стороной 10 м), гектар (площадь квадрата со стороной 100 м) и др.

При выбранной единице измерения площадь каждого многоугольника выражается положительным числом, которое показывает, сколько раз единица измерения площади и ее части укладываются в данном многоугольнике. Обычно площадь обозначается буквой S .



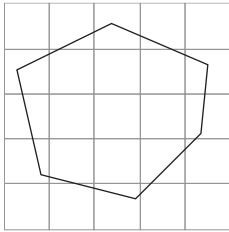


Рис. 144. Измерение площади с помощью палетки

Для определения приближенного значения площади можно использовать палетку — прозрачную пленку с квадратной сеткой (рис. 144). Наложив палетку на фигуру, площадь этой фигуры определяют обычным подсчетом количества единичных квадратов, которые вместились в данной фигуре. Однако на практике применять такой способ неудобно. Поэтому для определения площади многоугольника обычно измеряют лишь некоторые связанные с ним отрезки, а потом вычисляют площадь по соответствующим формулам. Вывод этих формул основывается на свойствах площадей, которые мы рассмотрим ниже.

Прежде всего заметим, что когда два многоугольника равны, то единица измерения площади и ее части укладываются в каждом из них одинаковое количество раз, т. е. имеет место следующее свойство.

1. Равные многоугольники имеют равные площади.

Далее, пусть многоугольник состоит из нескольких частей — других многоугольников, которые не имеют общих внутренних точек (рис. 145). Если эти части имеют площади S_1 , S_2 , S_3 , то площадь всего многоугольника равна их сумме: $S = S_1 + S_2 + S_3$. В этом заключается второе свойство площадей.

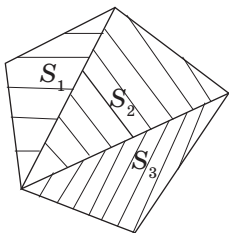


Рис. 145. Площадь многоугольника равна сумме площадей его частей

2. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

Третье свойство площадей связано с единицей их измерения.

3. Площадь квадрата со стороной, равной единице длины, равна единице площади.

Три приведенных свойства называют **аксиомами площадей**.

Итак, **площадь многоугольника** — это положительная величина, численное значение которой удовлетворяет аксиомам площадей.

Из этого, в частности, следует, что *каждый многоугольник имеет некоторую площадь, которая однозначно определяется в заданных единицах измерения.*

Определение

Две фигуры называются **равновеликими**, если они имеют равные площади.

Очевидно, что по первой аксиоме площадей любые два равных многоугольника равновелики. Однако не любые два равновеликих многоугольника равны.

Если рассмотреть два равных прямоугольных треугольника (рис. 146, а), то, прикладывая их равными сторонами друг к другу, можно получить равнобедренный треугольник (рис. 146, б), параллелограмм (рис. 146, в), прямоугольник (рис. 146, г) или четырехугольник с попарно равными соседними сторонами — дельтоид (рис. 146, д). Все эти фигуры **равносоставленные**, т.е. составлены из одних и тех же многоугольников.

По второй аксиоме площадей все образованные таким способом фигуры имеют равные площади. Следовательно, *любые равносоставленные многоугольники являются равновеликими*. Интересно, что имеет место и обратное утверждение (теорема Бойяи — Гервина): *два равновеликих многоугольника являются равносоставленными* (приводим этот факт без доказательства).

16.2. Площадь прямоугольника

Самой простой фигурой с точки зрения вычисления площади является прямоугольник.

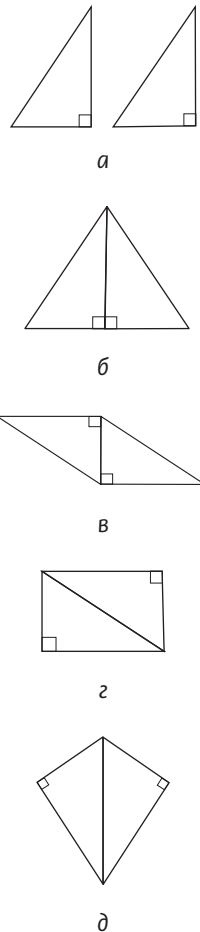


Рис. 146. Равносоставленные многоугольники

Теорема (формула площади прямоугольника)

Площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон:

$$S = ab,$$

где a и b — стороны прямоугольника.

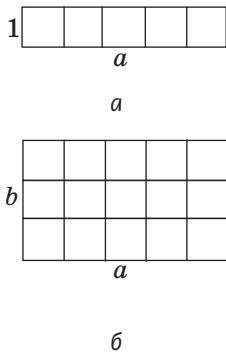


Рис. 147. К обоснованию формулы площади прямоугольника

Приведем рассуждения, на которых основывается доказательство этой теоремы.

Сначала необходимо рассмотреть прямоугольник со сторонами 1 и a . Поскольку в отрезке a единица измерения длины укладывается a раз, то в этом прямоугольнике единица измерения площади (единичный квадрат) будет укладываться также a раз (рис. 147, а), т.е. площадь этого прямоугольника равна a .

В общем случае для прямоугольника со сторонами a и b рассуждаем так: поскольку в отрезке b единица измерения длины укладывается b раз, то прямоугольник со сторонами 1 и a будет укладываться в данном прямоугольнике также b раз (рис. 147, б). Тогда единица измерения площади укладывается в данном прямоугольнике ab раз, т.е. площадь прямоугольника равна ab .

Полное доказательство этой теоремы приводится в Приложении 1.

Следствие (формула площади квадрата)

Площадь квадрата равна квадрату его стороны:

$$S = a^2,$$

где a — сторона квадрата.

16.3. Площадь параллелограмма

С помощью формулы площади прямоугольника можно доказать формулу площади произвольного параллелограмма.

Теорема (формула площади параллелограмма)

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне:

$$S = ah_a,$$

где a — сторона параллелограмма, h_a — проведенная к ней высота.

Доказательство

□ Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм, не являющийся прямоугольником (рис. 148). Проведем его высоты BH и CF и докажем, что $S_{ABCD} = AD \cdot BH$.

Четырехугольник $ABCF$ является прямоугольной трапецией, площадь которой можно вычислить двумя способами — как сумму площадей параллелограмма $ABCD$ и треугольника DCF или как сумму площадей прямоугольника $HBCF$ и треугольника ABH : $S_{ABCF} = S_{ABCD} + S_{DCF} = S_{HBCF} + S_{ABH}$. Треугольники ABH и DCF равны по гипотенузе и катету ($AB = DC$ как противоположащие стороны параллелограмма, $BH = CF$ как расстояния между параллельными прямыми). Следовательно, эти треугольники имеют равные площади. Тогда площади параллелограмма $ABCD$ и прямоугольника $HBCF$ также равны, т. е. $S_{ABCD} = BC \cdot BH = AD \cdot BH$.

Теорема доказана. ■

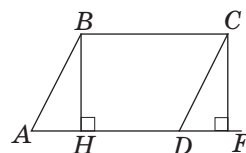


Рис. 148. К доказательству формулы площади параллелограмма

Задача

Площадь параллелограмма равна 36 см^2 , а длины его высот — 3 см и 4 см . Найдите периметр параллелограмма.

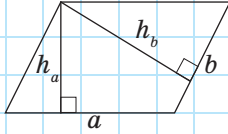


Рис. 149

Решение

Пусть дан параллелограмм с площадью $S = 36 \text{ см}^2$ и высотами $h_a = 3 \text{ см}$ и $h_b = 4 \text{ см}$ (рис. 149). Поскольку $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$, то $a = \frac{S}{h_a}$, т. е. $a = 36 : 3 = 12 \text{ (см)}$,
 $a \cdot b = \frac{S}{h_b}$, т. е. $b = 36 : 4 = 9 \text{ (см)}$. Следовательно, периметр параллелограмма равен $(12 + 9) \cdot 2 = 42 \text{ (см)}$.

Ответ: 42 см.

Решая приведенную задачу, можно заметить интересную закономерность: чем больше сторона параллелограмма, тем меньше проведенная к ней высота. К обоснованию этого факта мы вернемся в § 18.

Вопросы и задачи**Устные упражнения**

530. Площади двух многоугольников равны. Означает ли это, что сами многоугольники также равны?

531. Два прямоугольника имеют равные периметры. Являются ли они равновеликими?

532. Через середины двух противоположных сторон параллелограмма проведена прямая. В каком отношении она делит площадь параллелограмма?

533. Определите, какие из данных утверждений верны:

- а) если диагонали двух квадратов равны, то эти квадраты равновеликие;
- б) два равновеликих прямоугольника равны;
- в) два равновеликих квадрата равны.

534. Сторона квадрата равна меньшей стороне прямоугольника. Площадь какой из этих фигур больше?



Графические упражнения

535. Начертите параллелограмм, который не является прямоугольником.

- Проведите из вершины тупого угла меньшую высоту параллелограмма. Измерьте эту высоту и сторону, к которой она проведена, и вычислите площадь параллелограмма.
- Разрежьте параллелограмм по высоте. Какие фигуры вы получили?
- Приложите полученные фигуры друг к другу так, чтобы образовался прямоугольник. Равна ли площадь этого прямоугольника площади параллелограмма?



536. На бумаге в клеточку начертите параллелограмм.

- Подсчитайте приблизительное количество клеток, которые содержатся внутри параллелограмма. Вычислите площадь одной клетки и найдите приближенное значение площади параллелограмма.
- Проведите необходимые измерения и вычислите площадь параллелограмма по соответствующей формуле. Сравните полученные результаты.



Письменные упражнения

Уровень А

537. Начертите прямоугольник $ABCD$ и постройте параллелограмм AB_1C_1D , равновеликий данному прямоугольнику.



538. Вырежьте из бумаги два равных равнобедренных треугольника и составьте из них:

- ромб;
- параллелограмм, отличный от ромба.




Сравните площади составленных фигур.

539. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если:


- $AB = 9$ см, $BC = 4$ см;
- $AB : BC = 5 : 7$, $P_{ABCD} = 48$ см;
- $AD = 12$ см, $AC = 13$ см.



540. Стороны прямоугольника равны 9 см и 25 см. Найдите периметр квадрата, равновеликого данному прямоугольнику.

- 541.** Диагональ квадрата равна $12\sqrt{2}$ м. Найдите площадь квадрата.
-  **542.** Площадь квадрата равна 32 см^2 . Найдите его периметр.
- 543.** Площадь прямоугольника равна 128 см^2 . Найдите стороны прямоугольника, если одна из них в два раза больше другой.
- 544.** В параллелограмме со стороной a , проведенной к ней высотой h_a и площадью S найдите:
- S , если $a = 10 \text{ см}$, $h_a = 6 \text{ см}$;
 - a , если $S = 48 \text{ см}^2$, $h_a = 4 \text{ см}$;
 - h_a , если $S = 120 \text{ см}^2$, $a = 24 \text{ см}$.
-  **545.** Диагональ параллелограмма перпендикулярна его стороне и равна 15 см. Найдите площадь параллелограмма, если другая его сторона равна 17 см.
- 546.** Стороны параллелограмма равны 12 см и 16 см. Найдите его высоты, если площадь параллелограмма равна 96 см^2 .
-  **547.** Сторона параллелограмма и проведенная к ней высота равны соответственно 16 см и 9 см. Найдите сторону квадрата, равновеликого данному параллелограмму.

Уровень Б

- 548.** Часть стены, имеющую форму прямоугольника со сторонами $2,25 \times 1,8$ м, необходимо покрыть кафелем. Сколько плиток для этого понадобится, если плитка имеет форму квадрата со стороной 15 см?
- 549.** Биссектриса угла прямоугольника делит его сторону на отрезки длиной 3 см и 4 см. Найдите площадь прямоугольника. Сколько решений имеет задача?
-  **550.** Стороны прямоугольника относятся как 5 : 12. Найдите площадь прямоугольника, если его диагональ равна 26 см.
- 551.** Найдите площадь параллелограмма, если:
- его периметр равен 42 см, а длины высот — 6 см и 8 см;
 - его сторона равна 5 см, а высота, проведенная из вершины тупого угла, делит другую сторону на отрезки длиной 4 см и 6 см;
 - его стороны равны 8 см и 10 см, а острый угол — 30° .



552. Найдите площадь параллелограмма, если:

а) его диагональ перпендикулярна стороне, а высота, проведенная из вершины тупого угла, делит другую сторону на отрезки длиной 4 см и 9 см;

б) его стороны равны $4\sqrt{2}$ см и 8 см, а острый угол — 45° .

553. Площадь и периметр ромба равны соответственно 24 см^2 и 24 см. Найдите высоту ромба.

554. Диагонали ромба равны 16 см и 30 см. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного ромба.

555. Высота ромба с тупым углом 150° равна 5 см. Найдите площадь ромба.

556. На диагонали квадрата как на стороне построен другой квадрат. Докажите, что его площадь в два раза больше площади данного квадрата.

557. Точка, лежащая на диагонали квадрата, удалена от двух его сторон на 180 см и 2,2 м. Найдите площадь квадрата.

Уровень В

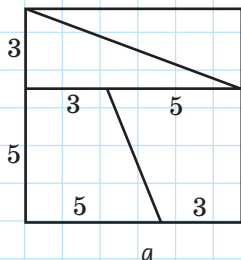
558. Стороны параллелограмма равны 12 см и 16 см, а одна из высот — 15 см. Найдите площадь параллелограмма.

559. Высоты параллелограмма равны 12 см и 16 см, а угол между ними — 30° . Найдите площадь параллелограмма.

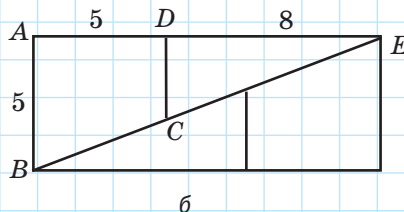
560. Найдите ошибку в «доказательстве» геометрического софизма:
 $64 \text{ см}^2 = 65 \text{ см}^2$.

«Доказательство»

Разрежем квадрат со стороной 8 см так, как показано на рис. 150, а. Переставив полученные части в другом порядке (рис. 150, б), получим прямоугольник со сторонами 13 см и 5 см. Квадрат и прямоугольник — равноставленные, т. е. должны быть равновеликими. Но очевидно, что площадь квадрата равна 64 см^2 , а площадь прямоугольника — 65 см^2 , т. е. $64 \text{ см}^2 = 65 \text{ см}^2$.




а



б

Рис. 150

561. Диагональ ромба делит его высоту, проведенную из вершины, на отрезки длиной 13 см и 5 см. Найдите площадь ромба.

 **562.** Найдите площадь ромба, если его высота и меньшая диагональ равны соответственно 12 см и 13 см.



Повторение перед изучением § 17

Теоретический материал

- расстояние между параллельными прямыми;
- трапеция.



7 класс, § 15



8 класс, § 5

Задачи

563. В равнобокой трапеции биссектриса тупого угла параллельна боковой стороне. Найдите углы трапеции. На какие многоугольники данная биссектриса делит трапецию?

564. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD является высотой, $\angle A = 45^\circ$, $AD = 4$ см. Найдите площади треугольников ABC и BCD .

§ 17

Площади треугольника, ромба и трапеции

17.1. Площадь треугольника

Теорема (формула площади треугольника)

Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a,$$

где a — сторона треугольника, h_a — проведенная к ней высота.

Доказательство

□ Пусть BH — высота треугольника ABC (рис. 151). Докажем, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$.

Проведем через вершины B и C прямые, параллельные сторонам треугольника, и обозначим точку их пересечения D . Таким образом, мы «достроили» треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$, в котором отрезок BH также является высотой, проведенной к стороне AC .

По формуле площади параллелограмма $S_{ABDC} = AC \cdot BH$. Треугольники ABC и DCB равны по трем сторонам (у них сторона BC общая, $AB = DC$ и $AC = DB$ как противолежащие стороны параллелограмма). Эти треугольники имеют равные площади. Тогда площадь треугольника ABC составляет половину площади параллелограмма $ABDC$, т. е. $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$, что и требовалось доказать. ■

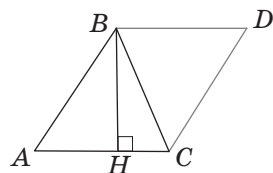


Рис. 151. К доказательству формулы площади треугольника





Следствие 1 (теорема о площади прямоугольного треугольника)

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов:

$$S = \frac{1}{2} ab,$$

где a и b — катеты прямоугольного треугольника.

Действительно, в прямоугольном треугольнике высота, проведенная к катету, совпадает с другим катетом.

Следствие 2 (теорема о площади ромба)

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2,$$

где d_1 и d_2 — диагонали ромба.

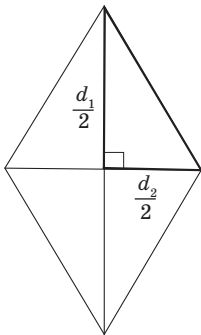


Рис. 152. К вычислению площади ромба

Действительно, диагонали делят ромб на четыре равных прямоугольных треугольника с катетами $\frac{1}{2}d_1$ и $\frac{1}{2}d_2$ (рис. 152). По следствию 1 имеем:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} d_1 \cdot \frac{1}{2} d_2 = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

Следствие 3 (теорема о площади равностороннего треугольника)

Площадь равностороннего треугольника со стороной a вычисляется по формуле:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Обоснуйте это следствие самостоятельно.

Опорная задача

Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника. Докажите.

Решение

Пусть BM — медиана треугольника ABC (рис. 153). Проведем высоту BH треугольника ABC . Этот отрезок будет одновременно высотой треугольника ABM , проведенной к стороне AM , и высотой треугольника MBC , проведенной к стороне MC . Учитывая равенство отрезков AM и MC , имеем:

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BH = \frac{1}{2} MC \cdot BH = S_{MBC}.$$

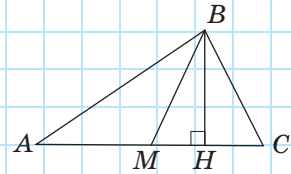


Рис. 153

Эта задача имеет интересные обобщения:

- 1) если высоты двух треугольников равны, то отношение площадей треугольников равно отношению их оснований;
- 2) если основания двух треугольников равны, то отношение площадей треугольников равно отношению их высот.

Докажите эти утверждения самостоятельно.

17.2. Площадь трапеции

Часто для вычисления площади некоторого многоугольника его разбивают на несколько треугольников и находят искомую площадь как сумму площадей этих треугольников. Именно такой подход можно применить для вывода формулы площади трапеции.

Теорема (формула площади трапеции)

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

где a и b — основания трапеции, h — высота трапеции.



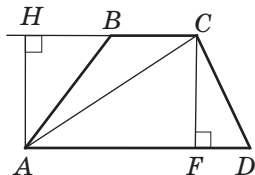


Рис. 154. К доказательству формулы площади трапеции

Доказательство

□ Пусть дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC и высотой h . Диагональ AC делит ее на два треугольника ABC и ACD (рис. 154). Проведем высоты AH и CF этих треугольников. Обе они являются высотами трапеции, т.е. равны h . Имеем:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ACD} + S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot h + \frac{1}{2} BC \cdot h = \\ &= \frac{AD + BC}{2} \cdot h = \frac{a + b}{2} \cdot h. \end{aligned}$$

Теорема доказана. ■

Следствие

Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.

17.3*. Решение задач на вычисление площадей



Решение задач на вычисление площадей многоугольников чаще всего сводится к поиску величин отдельных элементов рассматриваемых фигур и дальнейшему применению соответствующих формул площадей.

Во многих задачах наряду с сугубо геометрическими приемами решения (дополнительные построения, применение равенства фигур и т. п.) используются и методы алгебры (составление уравнений или систем уравнений на основе метрических соотношений между элементами фигуры).

В ходе решения особое внимание следует уделять тому, однозначно ли данные задачи определяют взаимное расположение элементов фигуры.

Задача

Найдите площадь трапеции, в которой одно из оснований равно 24 см, высота 12 см, а боковые стороны 13 см и 20 см.

Решение

Пусть BH и CF — высоты данной трапеции, проведенные из концов основания BC к другому основанию. Пусть $BC = 24$ см, $BH = CF = 12$ см. Проще всего построить трапецию $ABCD$ так, чтобы точки H и F лежали на основании AD . Но этот вариант — только один из возможных, ведь в условии задачи не говорится о том, принадлежат ли точки H и F отрезку AD . Поскольку из точки, лежащей вне данной прямой, можно провести к этой прямой две равные наклонные заданной длины, то каждую из боковых сторон трапеции можно построить двумя способами (рис. 155, а-г): $AB = A_1B = 13$ см, $CD = CD_1 = 20$ см. Следовательно, данную трапецию по условию задачи можно построить четырьмя разными способами.

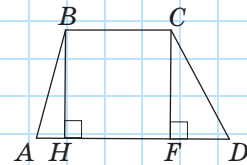
По построению четырехугольник $HBCF$ является прямоугольником, откуда $HF = BC = 24$ см.

Далее рассмотрим четыре случая.

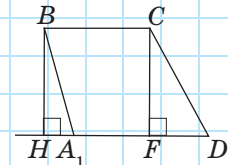
1) Для трапеции $ABCD$ (рис. 155, а): из треугольника ABH по теореме Пифагора $AH = 5$ см, аналогично из треугольника DCF имеем: $DF = 16$ см; тогда $AD = AH + HF + FD = 45$ см,

$$S_{ABCD} = \frac{24 + 45}{2} \cdot 12 = 414 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2) Для трапеции A_1BCD (рис. 155, б): из треугольника A_1BH по теореме Пифагора $A_1H = 5$ см, аналогично из треугольника DCF имеем: $DF = 16$ см; тогда $A_1D = HF + FD - A_1H = 35$ см, $S_{A_1BCD} = \frac{24 + 35}{2} \cdot 12 = 354 \text{ (см}^2\text{)}.$

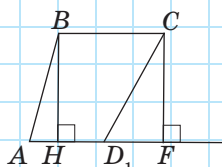


а

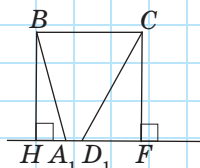


б

Рис. 155. См. также с. 178



в



г

Рис. 155. Окончание

3) Для трапеции $ABCD_1$ (рис. 155, в): из треугольника ABH по теореме Пифагора $AH = 5$ см, аналогично из треугольника D_1CF имеем: $D_1F = 16$ см; тогда $AD_1 = AH + HF - D_1F = 13$ см, $S_{ABCD_1} = \frac{24 + 13}{2} \cdot 12 = 222$ (см²)

4) Для трапеции A_1BCD_1 (рис. 155, г): из треугольника A_1BH по теореме Пифагора $A_1H = 5$ см, аналогично из треугольника D_1CF имеем: $D_1F = 16$ см; тогда $A_1D_1 = HF - A_1H - D_1F = 3$ см, т. е. точки H, A_1, D_1, F расположены на прямой в указанном порядке.

$$S_{A_1BCD_1} = \frac{24 + 3}{2} \cdot 12 = 162$$
 (см²).

Ответ: 414 см², или 354 см²,
или 222 см², или 162 см².

Рассмотренная задача наглядно демонстрирует одну из причин, по которым в процессе решения геометрической задачи может возникать многовариантность. Но даже если такая ситуация не возникает, взаимное расположение элементов фигур нуждается в обосновании.

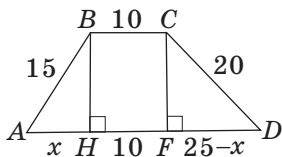


Рис. 156

Задача

Основания трапеции равны 10 см и 35 см, а боковые стороны — 15 см и 20 см. Найдите площадь трапеции.

Прежде всего заметим, что решение данной задачи фактически сводится к нахождению высоты трапеции. Итак, пусть дана трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB = 15$ см, $BC = 10$ см, $CD = 20$ см, $AD = 35$ см.

Естественно было бы провести, как в предыдущей задаче, высоты BH и CF (рис. 156) и составить уравнение на основании теоремы Пифагора, примененной к треугольникам ABH и DCF : $15^2 - x^2 = 20^2 - (25 - x)^2$. Такое решение

позволит получить правильный ответ, но не будет полным, ведь принадлежность точек H и F отрезку AD нужно обосновать. Попробуем избежать необходимости такого обоснования, применив для решения другое дополнительное построение.

Решение

Проведем через вершину C прямую CE , параллельную AB (рис. 157). Поскольку по построению $ABCE$ — параллелограмм, то $CE = AB = 15$ см, $AE = BC = 10$ см, следовательно, $ED = 35 - 10 = 25$ (см). Стороны треугольника ECD пропорциональны числам 3, 4, 5, следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, он является прямоугольным с гипотенузой ED . По формуле $h = \frac{ab}{c}$ находим высоту этого треугольника, которая одновременно является и высотой трапеции: $h = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$ (см). Следовательно, $S = \frac{10 + 35}{2} \cdot 12 = 270$ (см²).

Ответ: 270 см².

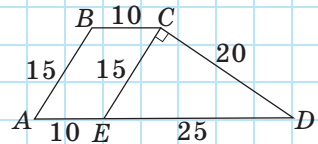


Рис. 157

Как видим, этот способ намного более рационален, в частности, с точки зрения вычислений. Рассмотрим еще одну задачу, для решения которой используется дополнительное построение.

Задача

Диагонали трапеции равны 30 см и 40 см и пересекаются под прямым углом. Найдите площадь трапеции.

Попробуем решить эту задачу чисто геометрическими методами. Основная сложность заключается в том, что данные отрезки не являются сторонами одного треугольника. Попробуем «исправить» эту ситуацию.

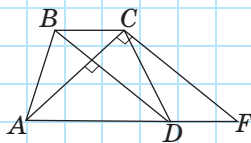


Рис. 158

Решение

Пусть дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$, $AC = 30$ см, $BD = 40$ см.

Проведем через вершину C прямую CF , параллельную диагонали BD (рис. 158). Очевидно, что по построению угол ACF будет прямым, т.е. треугольник ACF прямоугольный с гипотенузой AF . С другой стороны, $DBCF$ — параллелограмм, откуда $DF = BC$, $CF = BD = 40$ см.

Обратим внимание на то, что треугольники ABC и DCF равновеликие, поскольку $DF = BC$, а высоты, проведенные к этим сторонам, являются высотами трапеции. Таким образом, $S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} = S_{ACD} + S_{DCF} = S_{ACF}$, т.е. искомая площадь трапеции равна площади треугольника ACF , которая равна полупроизведению его катетов: $S = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600$ (см²).

Ответ: 600 см².**Вопросы и задачи****Устные упражнения**

565. Площадь треугольника ABC равна S . Чему равна площадь параллелограмма $ABCD$, три вершины которого совпадают с вершинами данного треугольника?

566. По какой формуле целесообразно вычислять площадь прямоугольного треугольника, если известны:

- а) длины гипотенузы и проведенной к ней высоты;
- б) длины двух катетов?



567. Два равновеликих треугольника имеют равные высоты. Означает ли это, что основания данных треугольников также равны?

568. Две равновеликие трапеции имеют равные высоты. Означает ли это, что основания данных трапеций также соответственно равны?

569. Может ли диагональ трапеции делить ее на два равновеликих треугольника? Ответ обоснуйте.



Графические упражнения

570. Начертите остроугольный треугольник и проведите в нем высоту. Выполните необходимые измерения и вычислите:

- площадь данного треугольника;
- площади треугольников, на которые данный треугольник делится высотой.



571. Начертите трапецию и проведите в ней диагональ. Выполните необходимые измерения и вычислите:

- площадь данной трапеции;
- площади треугольников, на которые данная трапеция делится диагональю.



Письменные упражнения

Уровень А

572. По данным рис. 159 найдите площадь треугольника ABC .

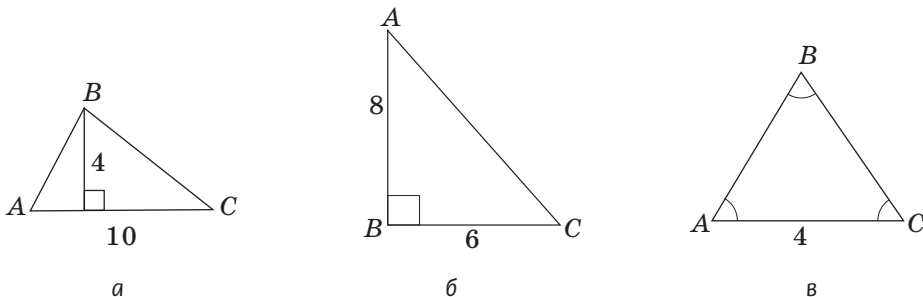



Рис. 159


573. Найдите площадь:

- а) равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см;
- б) треугольника ABC , в котором $AB = 17$ см, а высота BH делит сторону AC на отрезки $AH = 8$ см и $HC = 2$ см.

 **574.** Найдите площадь:

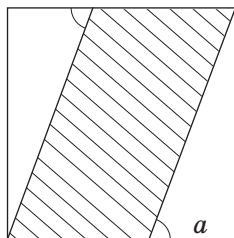
- а) прямоугольного треугольника с гипотенузой 20 см и катетом 12 см;
- б) остроугольного треугольника ABC с высотой $AH = 4$ см, если $BH = 2$ см, $\angle C = 45^\circ$.

575. Площадь треугольника равна 150 см^2 . Найдите периметр треугольника, если его высоты равны 15 см, 12 см и 20 см.

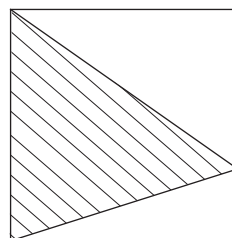
 **576.** Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его площадь равна 20 см^2 , а высота, проведенная из вершины прямого угла, — 4 см.

577. На рис. 160, а дан единичный квадрат. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

578. На рис. 160, б дан единичный квадрат. Найдите площадь заштрихованной фигуры.




а




б

Рис. 160

579. Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 8 м и 20 м.

 **580.** Найдите диагонали ромба, если одна из них в два раза больше другой, а площадь ромба равна 64 см^2 .


581. Точка D — середина высоты BH треугольника ABC . Докажите, что площадь треугольника ADC составляет половину площади треугольника ABC .

 **582.** Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что треугольники AOB и AOD равновеликие.

583. Найдите площадь трапеции, если:

- а) ее основания равны 4 см и 10 см, а высота 6 см;
- б) высота трапеции и ее средняя линия равны 8 см.

584. Основания равнобокой трапеции равны 8 см и 16 см, а острые углы — 45° . Найдите площадь трапеции.

 **585.** Основания прямоугольной трапеции равны 6 см и 10 см, а боковая сторона — 5 см. Найдите площадь трапеции.

Уровень Б

586. Найдите площадь:


- а) треугольника ABC с высотой BH , если $AB = 13$ см, $BC = 15$ см, $BH = 12$ см, а точка H лежит на отрезке AC ;
- б) прямоугольного треугольника, гипотенуза которого делится высотой на отрезки длиной 9 см и 4 см;
- в) равностороннего треугольника с высотой $2\sqrt{3}$ см.

 **587.** Найдите площадь:

- а) равнобедренного треугольника с периметром 16 см и высотой 4 см, проведенной к основанию;
- б) прямоугольного треугольника с гипотенузой 20 см и отношением катетов 3 : 4.

588. Биссектриса прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см. Найдите площадь треугольника.

589. На рис. 161 площадь закрашенного треугольника равна S . По данным рисунка выразите через S площадь заштрихованной фигуры.

 **590.** На рис. 162 площадь закрашенного треугольника равна S . По данным рисунка выразите через S площадь заштрихованной фигуры.

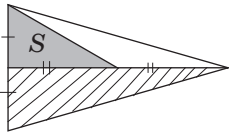


Рис. 161

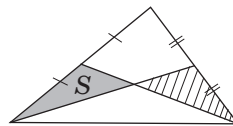



Рис. 162

591. Площадь ромба равна 24 см^2 , а одна из его диагоналей — 8 см. Найдите периметр ромба.

 **592.** Найдите площадь ромба с периметром 24 см и тупым углом 150° .


593. Докажите, что медианы треугольника, пересекаясь, делят данный треугольник на шесть равновеликих треугольников.

594. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC . Докажите, что все треугольники с основанием BC и вершиной на данной прямой равновеликие.

 **595.** Докажите, что диагонали делят параллелограмм на четыре равновеликих треугольника.


596. Найдите площадь:

- равнобокой трапеции с основаниями 15 см и 39 см, в которой диагональ перпендикулярна боковой стороне;
- прямоугольной трапеции с боковыми сторонами 12 см и 13 см, диагональ которой является биссектрисой острого угла.

 **597.** Найдите площадь равнобокой трапеции с основаниями 14 см и 50 см и диагональю 40 см.


Уровень В

598. Постройте треугольник, равновеликий данной трапеции.


 **599.** Постройте параллелограмм, равновеликий данному треугольнику.

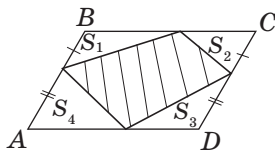
600. Площадь выпуклого четырехугольника с перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей. Докажите.

601. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведите две прямые, которые делят параллелограмм на три равновеликие части.

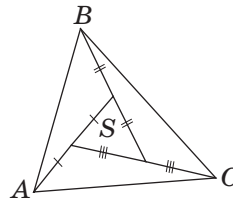
 **602.** В треугольнике ABC медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O . Определите, какую часть площади треугольника ABC составляет:

- площадь треугольника AOC ;
- площадь четырехугольника BA_1OC_1 .

 **603.** По данным рис. 163 найдите площадь:
а) заштрихованной фигуры (рис. 163, а), если $ABCD$ параллелограмм;
б) треугольника ABC (рис. 163, б).




а



б

Рис. 163

604. Найдите площадь равнобокой трапеции, описанной около окружности с радиусом 4 см, если боковая сторона трапеции равна 10 см.


 **605.** Боковые стороны и высота трапеции равны соответственно 25 см, 30 см и 24 см. Найдите площадь трапеции, если биссектрисы ее тупых углов пересекаются на большем основании.



Повторение перед изучением § 18

Теоретический материал


- средняя линия треугольника;
- подобие треугольников.

 8 класс, § 6, п. 6.2

 8 класс, § 10, 11

Задачи

606. Точки D, E, F — середины сторон AB, BC и AC треугольника ABC соответственно. Пользуясь равенством треугольников, докажите, что площадь треугольника DBE составляет треть площади трапеции $ADEC$.

 **607.** В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны 2 см и 8 см соответственно. Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Найдите отношение:

а) $\frac{CO}{AC}$;

б) $\frac{OD}{BD}$;

в) отрезков, на которые точка O делит высоту трапеции;

г) площадей треугольников BOC и AOD (выскажите предположение).

§ 18

Применение площадей

18.1. Отношение площадей подобных треугольников

Теорема (об отношении площадей подобных треугольников)

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство

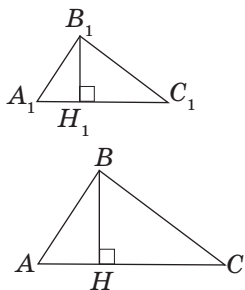


Рис. 164. К доказательству теоремы об отношении площадей подобных треугольников

□ Пусть $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом k , т. е. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$. Докажем, что $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$.

Проведем в данных треугольниках высоты BH и B_1H_1 (рис. 164). Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ подобны, поскольку $\angle A = \angle A_1$. Это означает, что $\frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$, т. е. $BH = k \cdot B_1H_1$. Учитывая,

что $AC = k \cdot A_1C_1$, имеем:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{0,5 AC \cdot BH}{0,5 A_1C_1 \cdot B_1H_1} = \frac{0,5 \cdot k A_1C_1 \cdot k B_1H_1}{0,5 A_1C_1 \cdot B_1H_1} = k^2. \blacksquare$$

Задача

Средняя линия отсекает от данного треугольника треугольник площадью 8 см^2 . Найдите площадь данного треугольника.

Решение

Пусть A_1C_1 — средняя линия треугольника ABC , параллельная стороне AC (рис. 165), $S_{A_1B_1C_1} = 8 \text{ см}^2$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по двум сторонам и углу между ними, причем $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 2$. Тогда

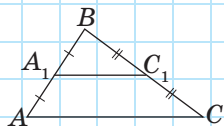


Рис. 165

по доказанной теореме $\frac{S_{ABC}}{S_{AB_1C_1}} = 4$, т. е. $S_{ABC} = 4S_{AB_1C_1}$,
откуда $S_{ABC} = 4 \cdot 8 = 32 \text{ (см}^2\text{)}$.

Ответ: 32 см².

Самостоятельно сделайте вывод об отношении площадей фигур, на которые делит треугольник средняя линия.

18.2. Метод площадей

Понятия площади и формулы ее вычисления могут применяться даже в тех задачах, в условиях которых площадь не упоминается. Рассмотрим такой пример.

Задача

Стороны параллелограмма равны 16 см и 12 см. Высота параллелограмма, проведенная к большей стороне, равна 3 см. Найдите высоту, проведенную к меньшей стороне.

Решение

Пусть дан параллелограмм со сторонами $a = 16$ см и $b = 12$ см, к которым проведены высоты $h_a = 3$ см и h_b , длину которой необходимо найти (рис. 166). По формуле площади параллелограмма $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$,
откуда $h_b = \frac{S}{b} = \frac{a \cdot h_a}{b}$.

Таким образом, $h_b = \frac{16 \cdot 3}{12} = 4 \text{ (см)}$.

Ответ: 4 см.

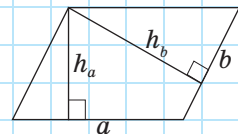


Рис. 166

При решении этой задачи площадь параллелограмма вычислялась двумя разными способами. Поскольку площадь многоугольника независимо от способа ее вычисления определяется однозначно,



то полученные выражения приравнивались, благодаря чему удалось связать известные величины с известной. Такой метод, основанный на использовании площади как вспомогательной величины, называется *методом вспомогательной площади* или просто *методом площадей*.

Заметим, что из формул площади параллелограмма $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ и площади треугольника $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ следует важное утверждение: *в параллелограмме (треугольнике) большей является высота, проведенная к меньшей стороне, меньшей — высота, проведенная к большей стороне*.

Метод площадей используется как в задачах на вычисление, так и для доказательства утверждений.

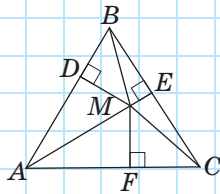


Рис. 167

Задача

Сумма расстояний от точки, взятой внутри равностороннего треугольника, до его сторон не зависит от выбора точки и равна высоте треугольника. Докажите.

Решение

Пусть точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC со стороной a , MD , ME и MF — расстояния от данной точки до сторон треугольника (рис. 167). Соединим точку M с вершинами треугольника. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AMB , BMC и AMC , у которых отрезки MD , ME и MF являются высотами. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a \cdot h &= \frac{1}{2} a \cdot MD + \frac{1}{2} a \cdot ME + \frac{1}{2} a \cdot MF = \\ &= \frac{1}{2} a (MD + ME + MF). \end{aligned}$$

Отсюда $MD + ME + MF = h$, т.е. сумма рассматриваемых расстояний равна высоте треугольника и не зависит от выбора точки M .

18.3*. Другие доказательства теоремы Пифагора

Исторически появление и доказательство теоремы Пифагора связаны с вычислением площадей. Поэтому в классической формулировке этой теоремы речь идет не о квадратах сторон прямоугольного треугольника, а о площадях соответствующих фигур:

Теорема Пифагора (классическая формулировка)

Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.

Рис. 168, который наглядно воплощает эту формулировку, стал своеобразным символом геометрии и среди гимназистов позапрошлого столетия получил название «пифагоровы штаны».

Докажем теорему Пифагора с помощью площадей.

Доказательство

□ Пусть дан прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c (рис. 169, а). Построим его до квадрата со стороной $a+b$ так, как показано на рис. 169, б. Площадь этого квадрата равна $(a+b)^2$. Построенный квадрат состоит из четырех равных прямоугольных треугольников площадью $\frac{1}{2}ab$ и четырехугольника со сторонами длиной c , который является квадратом (докажите это самостоятельно). Итак, имеем:

$$S = (a+b)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2;$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2,$$

т. е. $a^2 + b^2 = c^2$. Теорема доказана. ■

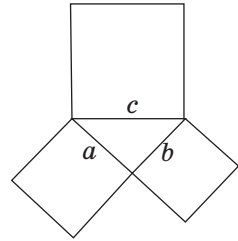


Рис. 168. «Пифагоровы штаны»

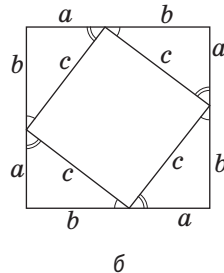
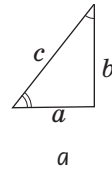
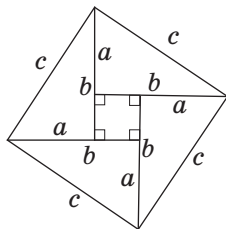


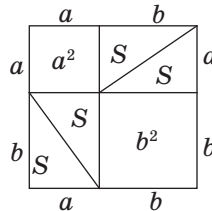
Рис. 169. К доказательству теоремы Пифагора с помощью площадей (см. также с. 190)

На рис. 169, в, г показаны другие способы доказательства теоремы Пифагора с помощью площадей. В трактатах индийского математика XII ст. Бхаскари один из них сопровождался только одним словом: «Смотри!». В целом сегодня известно более 150 разных способов доказательства этой знаменитой теоремы. Но каждый из вас может изобрести и свой собственный способ.



$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} ab + (b-a)^2$$

в



$$4S + a^2 + b^2 = 4S + c^2$$

г

Рис. 169. Окончание

Вопросы и задачи



Устные упражнения

608. Определите, как изменится площадь треугольника, если каждую его сторону:

- а) увеличить в 4 раза;
- б) уменьшить в 3 раза;
- в) уменьшить в n раз.

609. Определите, как надо изменить каждую сторону треугольника, чтобы его площадь:

- а) уменьшилась в 25 раз;
- б) увеличилась в 49 раз;
- в) увеличилась в n^2 раз.

610. Отношение площадей двух треугольников равно 4. Означает ли это, что данные треугольники подобны с коэффициентом 2?

611. В треугольнике со сторонами a , b и c к этим сторонам проведены высоты h_a , h_b и h_c соответственно. Сравните:

- а) стороны треугольника, если $h_a < h_b < h_c$;
- б) высоты треугольника, если $c < a < b$;
- в) стороны a и c , если $a < b$, $h_b > h_c$.



Графические упражнения

612. Начертите прямоугольный треугольник и проведите в нем среднюю линию, параллельную одному из катетов.

- Измерьте катеты данного треугольника и вычислите его площадь.
- Пользуясь теоремой о площадях подобных треугольников, вычислите площадь треугольника, отсекаемого от данного средней линией.
- Вычислите площадь треугольника, отсекаемого от данного средней линией, измерив его гипотенузу и высоту. Сравните полученные результаты.



613. Начертите произвольный треугольник и проведите его высоты. Измерьте стороны и высоты треугольника и вычислите его площадь тремя способами. Сравните полученные результаты.



Письменные упражнения

Уровень А

614. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, причем $\frac{AB}{A_1B_1} = 3$. Найдите:

- S_{ABC} , если $S_{A_1B_1C_1} = 9 \text{ см}^2$;
- $S_{A_1B_1C_1}$, если $S_{ABC} = 9 \text{ см}^2$.



615. Стороны равносторонних треугольников равны 2 см и 6 см. Найдите отношение их площадей.

616. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Найдите:

- сторону A_1B_1 , если $S_{ABC} = 24 \text{ см}^2$, $S_{A_1B_1C_1} = 6 \text{ см}^2$, $AB = 8 \text{ см}$;
- площадь треугольника ABC , если $BC = 2 \text{ см}$, $B_1C_1 = 6 \text{ см}$, $S_{A_1B_1C_1} = 18 \text{ см}^2$.

617. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите площадь треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.



618. Найдите площадь треугольника, если треугольник, образованный средними линиями данного треугольника, имеет площадь 5 см^2 .

619. Высоты треугольника равны 21 см, 28 см и 60 см. Найдите периметр треугольника, если его наибольшая сторона равна 1 м.

620. Две стороны треугольника равны 12 см и 18 см. Найдите высоту, проведенную к меньшей из них, если высота, проведенная к большей стороне, равна 4 см.

621. Высоты параллелограмма равны 6 см и 4 см, а меньшая сторона — 8 см. Найдите периметр параллелограмма.
622. Пользуясь методом площадей, докажите, что в равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к боковым сторонам, равны.
623. Докажите методом площадей, что треугольник с равными высотами является равносторонним.

Уровень Б

624. Два треугольника подобны с коэффициентом 3, причем площадь одного из них на 24 см^2 больше площади другого. Найдите площади этих треугольников.
625. Площади двух подобных треугольников равны 75 м^2 и 300 м^2 . Периметр первого треугольника равен 54 м. Найдите периметр второго треугольника.
626. Соответствующие стороны двух подобных треугольников относятся как 2 : 3. Площадь второго треугольника равна 81 см^2 . Найдите площадь первого треугольника.
627. На плане земельный участок имеет форму треугольника площадью $2,5 \text{ см}^2$. Найдите площадь участка, если масштаб плана 1 : 1000.
628. Периметр параллелограмма равен 56 см. Найдите стороны параллелограмма, если его высоты равны 6 см и 8 см.
629. Диагонали ромба равны 30 см и 40 см. Пользуясь методом площадей, найдите высоту ромба.
630. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если они относятся как 3 : 4, а высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см.
631. Докажите методом площадей, что параллелограмм с равными высотами является ромбом.
632. Докажите методом площадей метрическое соотношение в прямоугольном треугольнике: $h_c = \frac{ab}{c}$.



Уровень В

633. Прямая, параллельная стороне треугольника, делит его на две равновеликие части. В каком отношении эта прямая делит две другие стороны треугольника?
634. Постройте прямую, параллельную стороне треугольника, которая делит площадь треугольника в отношении 9 : 16.

635. Докажите, что стороны треугольника обратно пропорциональны его высотам: $a:b:c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$.



636. Сумма расстояний от точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон не зависит от выбора точки. Докажите.



Повторение перед изучением § 19

Теоретический материал

- прямоугольный треугольник;
- подобие прямоугольных треугольников.



7 класс, § 17



8 класс, § 12

Задачи

637. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$, BM — медиана, проведенная к гипотенузе. Докажите, что треугольник MBC равнобедренный.

638. Найдите углы равнобедренного треугольника, в котором боковая сторона равна 12,6 см, а медиана, проведенная к основанию, — 6,3 см.



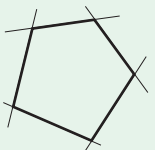
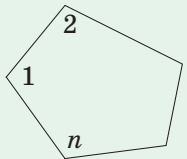
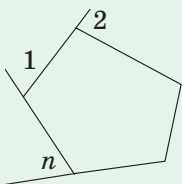
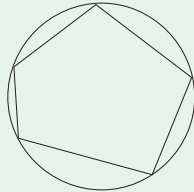
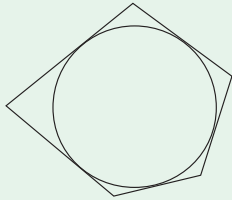
Онлайн-тренировка для подготовки к контрольной работе № 4

Задачи для подготовки к контрольной работе № 4

1. Определите количество сторон выпуклого многоугольника, сумма углов которого равна 1080° .
2. Площадь квадрата равна 144 см^2 . Найдите площадь прямоугольника, ширина которого меньше стороны квадрата на 2 см, а длина больше стороны квадрата в два раза.
3. В равнобедренном треугольнике боковая сторона относится к основанию как 5 : 6. Найдите площадь треугольника, если высота, проведенная к основанию, равна 8 см.
4. Найдите углы ромба, если его высота равна 5 см, а площадь — 50 см^2 .
5. Высоты данного параллелограмма равны 15 см и 18 см. Найдите высоты равновеликого параллелограмма, стороны которого в три раза больше соответствующих сторон данного параллелограмма.
6. Докажите, что площадь равнобокой трапеции с боковой стороной c и радиусом вписанной окружности r вычисляется по формуле $S = 2cr$.

Итоги

ИТОГОВЫЙ ОБЗОР ГЛАВЫ III

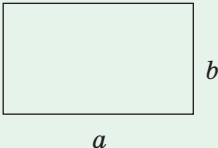
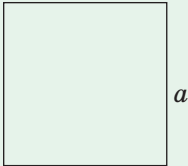
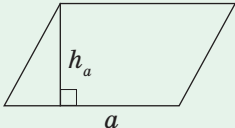
МНОГОУГОЛЬНИК	
	<p>Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от любой прямой, содержащей его сторону</p>
Сумма углов многоугольника	
<p>Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180^\circ(n-2)$.</p>  $\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle n = 180^\circ(n-2)$	<p>Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.</p>  $\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle n = 360^\circ$
Вписанный многоугольник	Описанный многоугольник
<p>Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины лежат на этой окружности</p> 	<p>Многоугольник называется описанным около окружности, если все его стороны касаются этой окружности</p> 

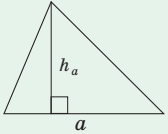
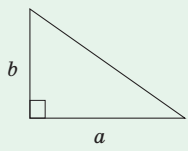
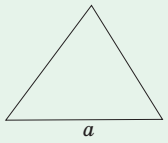
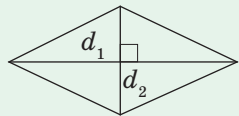
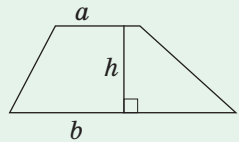
ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Аксиомы площадей

1. Равные многоугольники имеют равные площади.
2. Если многоугольник состоит из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
3. Площадь квадрата со стороной, равной единице длины, равен единице площади.

Две фигуры называются **равновеликими**, если они имеют равные площади.

Фигура	Формула площади
<p>Прямоугольник</p> 	$S = ab,$ <p>где a и b — стороны прямоугольника</p>
<p>Квадрат</p> 	$S = a^2,$ <p>где a — сторона квадрата</p>
<p>Параллелограмм</p> 	$S = ah_a,$ <p>где a — сторона параллелограмма, h_a — проведенная к ней высота</p>

Фигура	Формула площади
<p>Треугольник</p> 	$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a,$ <p>где a — сторона треугольника, h_a — проведенная к ней высота</p>
<p>Прямоугольный треугольник</p> 	$S = \frac{1}{2} ab,$ <p>где a и b — катеты прямоугольного треугольника</p>
<p>Равносторонний треугольник</p> 	$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4},$ <p>где a — сторона треугольника</p>
<p>Ромб</p> 	$S = \frac{1}{2} d_1 d_2,$ <p>где d_1 и d_2 — диагонали ромба</p>
<p>Трапеция</p> 	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$ <p>где a и b — основания трапеции, h — высота трапеции</p>
<p>Теорема об отношении площадей подобных треугольников Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия</p>	



Контрольные вопросы к главе III

1. Дайте определение многоугольника. Какой многоугольник называется выпуклым?
2. Дайте определение описанного многоугольника; вписанного многоугольника.
3. Сформулируйте теорему о сумме углов выпуклого многоугольника.
4. Назовите аксиомы площадей. По каким формулам вычисляются площади прямоугольника и квадрата?
5. Докажите формулу площади параллелограмма.
6. Докажите формулу площади треугольника. Запишите формулы площадей прямоугольного треугольника, равностороннего треугольника.
7. Докажите формулу площади ромба.
8. Докажите формулу площади трапеции.
9. Сформулируйте теорему об отношении площадей подобных треугольников.



Дополнительные задачи к главе III

- 639.** Докажите, что среди всех параллелограммов с данными сторонами наибольшую площадь имеет прямоугольник.
- 640.** Параллелограмм и треугольник равновеликие и имеют общую сторону. Сравните их высоты, проведенные к этой стороне.
- 641.** Через вершину треугольника проведите две прямые, которые делят треугольник на три равновеликие части.
- 642.** Пользуясь рис. 170, докажите методом площадей свойство биссектрисы треугольника.
- 643.** Основания трапеции относятся как $2 : 3$, а ее площадь равна 50 см^2 . Найдите площади:
- а) двух треугольников, на которые данная трапеция делится диагональю;
 - б) четырех треугольников, на которые данная трапеция делится диагоналями.

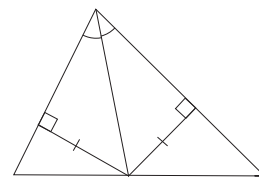



Рис. 170





644 (опорная). *Диагонали делят трапецию на четыре треугольника, два из которых равновеликие, а площади двух других относятся как квадраты оснований.* Докажите.



645. Если диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , причем $S_{AOB} = S_{COD}$, то $ABCD$ — параллелограмм или трапеция. Докажите.

-  **646.** Две стороны треугольника равны 25 см и 40 см, а высота, проведенная к третьей стороне, равна 24 см. Найдите площадь треугольника. Сколько решений имеет задача?
- 647.** Дан треугольник ABC . Постройте:
- равнобедренный треугольник с основанием AB , равновеликий треугольнику ABC ;
 - прямоугольный треугольник с гипотенузой AB , равновеликий треугольнику ABC . В каком случае это сделать невозможно?
- 648.** Разрежьте трапецию с двумя острыми углами при большем основании на три части, из которых можно составить прямоугольник.

Задачи повышенной сложности

- 649.** Докажите, что треугольник с высотами 12, 15 и 20 — прямоугольный.
-  **650.** Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые точка касания вписанной окружности делит гипотенузу.
- 651.** Докажите, что для треугольника со сторонами a , b и c и площадью S выполняется неравенство $S < (ab + bc + ac) : 6$.
- 652.** Вычислите площадь треугольника по двум взаимно перпендикулярным медианам m_a и m_b .
- 653.** а) Площадь описанной прямоугольной трапеции равна произведению ее оснований. Докажите.
б) Высота описанной равнобокой трапеции является средним пропорциональным ее оснований. Докажите.
-  **654.** Докажите, что для четырехугольника со сторонами a , b , c , d и площадью S выполняется неравенство $S \leq (ab + cd) : 2$.
-  **655.** Стороны треугольника DEF равны медианам треугольника ABC . Докажите, что $S_{DEF} : S_{ABC} = 3 : 4$.
- 656.** В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O . Найдите площадь трапеции, если $S_{BOC} = S_1$, $S_{AOD} = S_2$.
- 657.** Докажите, что площадь трапеции $ABCD$ равна произведению боковой стороны AB на перпендикуляр, проведенный из середины M другой боковой стороны CD к прямой AB .
-  **658.** Внутри треугольника ABC выбрана точка M такая, что треугольники AMB , BMC и AMC равновеликие. Докажите, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC .



Видеоматериалы к главе III



Выдающиеся математики Украины



Ляпунов Александр Михайлович (1857–1918)

Александр Михайлович Ляпунов — всемирно известный математик и механик конца XIX — начала XX века, академик Парижской, Петербургской и других академий наук.

Становление его научного пути прошло под влиянием выдающегося ученого Пафнутия Львовича Чебышева. Деятельность Александра Ляпунова была тесно связана с Харьковским Императорским университетом и Харьковским технологическим институтом, в стенах которых проявился еще один его выдающийся талант — талант педагога. Блестящий лектор, который открыл перед своими слушателями горизонты науки, А. М. Ляпунов заслужил исключительное уважение студентов. Главным девизом его лекций была **безупречная строгость доказательств**, главным условием успешной учебы — **организация самостоятельной деятельности** студентов, а главным недостатком в образовании он считал механическое заучивание, которое приводит к притуплению интереса к науке. И в наше стремительное время понимание этих взглядов поможет вам в изучении геометрии — науки строгих доказательств и логических выкладок, науки, которая развивает самостоятельную деятельность и дарит радость открытий.

В 1918 г. Ляпунов с семьей переехал в Одессу и начал читать лекции в университете. Не выдержав внезапной смерти жены, Александр Михайлович в том же году трагически ушел из жизни. Одесситы установили Ляпунову обелиск в память даже такого недолгого пребывания великого математика в их городе.

В честь Александра Ляпунова названа аудитория Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина и одна из улиц Харькова, а в 2007 г., к 150-летию со дня рождения ученого, была выпущена юбилейная монета «Александр Ляпунов» номиналом в 2 гривни.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Вычисление площадей многоугольников — первая среди тех практических задач, благодаря которым появилась геометрия как наука. Но не всегда представление об измерении площадей было таким, как сегодня.

Например, древние египтяне при вычислении площади любого треугольника брали половину произведения двух его сторон. Так же измеряли площадь треугольника и в Древней Руси. Чтобы найти площадь четырехугольника, который не является квадратом, в Вавилоне использовали формулу произведения полусумм его противоположных сторон.

В Средние века для вычисления площади треугольника со стороной и проведенной к ней высотой, которые выражаются целым числом n , брали сумму членов натурального ряда от 1 до n , т. е. число $\frac{n(n+1)}{2}$.





Архимед

Кстати, в то время знали и правильную формулу площади этого треугольника $\frac{n^2}{2}$. Ее обосновал средневековый математик **Герберт**, который в X в. даже занимал какое-то время престол Римского Папы под именем Сильвестра II.

Древние вавилоняне еще четыре тысячи лет назад умели правильно вычислять площадь квадрата, прямоугольника, трапеции. Немало формул площадей и объемов, с которыми вы познакомитесь в старших классах, открыл знаменитый греческий ученый **Архимед** (ок. 287—212 гг. до н. э.). И все это при том, что в те древние времена не было даже алгебраической символики!



Сегодня, благодаря значительно более широкому применению алгебры и геометрии, мы имеем возможность дать куда более простые и понятные решения многих задач, чем это было возможно в те далекие времена.



Выдающиеся математики Украины



Крейн Марк Григорьевич (1907–1989)

Индекс цитирования — ключевой показатель, широко используемый во всем мире для оценки работы ученых. **Марк Григорьевич Крейн является одним из десяти наиболее цитируемых математиков мира!**

Его биография исключительна, а динамика развития его математического гения поражает. Судите сами: маленький киевлянин уже с 13 лет начал посещать лекции профессора Делоне, а в 14 окончил школу и овладел основами высшей математики. В 15 стал вольным слушателем старших курсов физико-математического факультета Киевского института народного образования. После

доклада о своих исследованиях Марк в 17 лет поступил в аспирантуру, хотя у него еще не было высшего образования. В те же 17 написал первую научную статью, в 18 получил премию на конкурсе научных работ, еще через год эта работа была опубликована. В 26 стал профессором, а в 32 — доктором физико-математических наук и членом-корреспондентом Украинской академии наук.

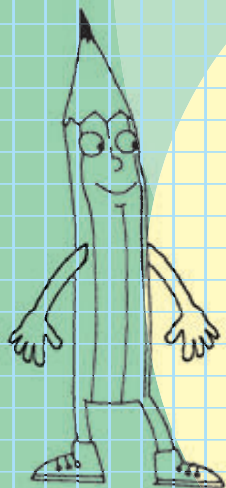
В семье Марка было шестеро детей, поэтому, видимо, и появилось у юноши желание стать на ноги самостоятельно. В поисках романтики он приехал в Одессу с твердым решением стать акробатом в цирке. Но все изменила встреча с выдающимся ученым Н. Г. Чеботаревым, который сумел убедить его стать математиком. Цирк, возможно, и потерял, но математика выиграла точно.

Почти всю свою жизнь Марк Григорьевич работал в Украине — в Одессе, Киеве, Харькове. Несмотря на многочисленные жизненные проблемы, Крейн стал автором более 250 работ в самых разных областях математики, подготовил более 60 кандидатов и докторов наук. Все работы Марка Григорьевича переведены за рубежом. С большим уважением об исследованиях «одесского ученого» отзывался, в частности, один из творцов кибернетики Норберт Винер. Только перечень новых понятий, введенных и исследованных впервые в работах Крейна, занимает почти половину страницы журнала «Успехи математических наук», изданного к 60-летию ученого.

Творчество Марка Григорьевича Крейна является одной из вершин математики XX века.

Глава IV

Решение прямоугольных треугольников



§ 19. Тригонометрические функции
острого угла

§ 20. Вычисление значений тригонометри-
ческих функций

§ 21. Решение прямоугольных треугольников

Занятие геометрией незаметно приводит
человеческий разум к изобретениям.

Дени Дидро, философ

Из этой главы вы узнаете, как решать прямоугольные треугольники, т. е. находить их неизвестные стороны и углы по известным. Необходимые для этого теоретические знания можно почерпнуть из раздела математики, родственного как с геометрией, так и с алгеброй,— из **тригонометрии**. Собственно, само слово «тригонометрия» в переводе с греческого означает «измерение треугольников». Поэтому отношения сторон прямоугольного треугольника, с которыми вы познакомитесь далее, получили название **тригонометрических функций**.

Соотношения, которые будут применяться в этой главе, в полной мере можно считать проявлением подобия треугольников. Вообще, подобие треугольников, теорема Пифагора и площадь — это те три кита, на которых держится геометрия многоугольника. Именно исследование взаимосвязей между этими теоретическими фактами и составляет основное содержание курса геометрии в восьмом классе.



§ 19

Тригонометрические функции острого угла

19.1. Синус, косинус и тангенс

Как уже было доказано, все прямоугольные треугольники, имеющие по равному острому углу, подобны. Свойство подобия обуславливает не только равенство отношений пропорциональных сторон этих треугольников, но и равенство отношений между катетами и гипотенузой каждого из этих треугольников. Именно эти отношения и будут предметом дальнейшего рассмотрения.

Пусть дан прямоугольный треугольник с катетами a и b , гипотенузой c и острым углом α (рис. 171).

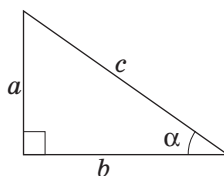


Рис. 171. К определениям тригонометрических функций угла α

Определение

Синусом острого угла α прямоугольного треугольника (обозначается $\sin \alpha$) называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Косинусом острого угла α прямоугольного треугольника (обозначается $\cos \alpha$) называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Тангенсом острого угла α прямоугольного треугольника (обозначается $\operatorname{tg} \alpha$) называется отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Синус – латинский перевод арабского слова «джайб» – пазуха, вырез платья. Это слово, в свою очередь, происходит от индийского «джива» – тетива лука, хорда. Именно так синус называли в древнеиндийских математических трактатах.

Косинус — от латинского «комплиментари синус» — дополнительный синус.

Тангенс — в переводе с латинского «касательный».

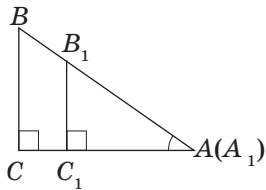


Рис. 172. Значения тригонометрических функций угла A зависят только от величины угла A

Кроме синуса, косинуса и тангенса, рассматривают также **котангенс** острого угла α прямоугольного треугольника (обозначается $\operatorname{ctg} \alpha$), который равен отношению прилежащего катета к противолежащему:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Поскольку катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы, то **синус и косинус острого угла меньше единицы**.

Покажем, что значения тригонометрических функций зависят только от величины угла. Пусть прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют равные острые углы A и A_1 (рис. 172). Эти треугольники подобны, откуда $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, или, по

основному свойству пропорции, $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$. Правая

и левая части этого равенства по определению равны синусам острых углов A и A_1 соответственно. Имеем:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \sin A_1,$$

т.е. синус угла A не зависит от выбора треугольника. Аналогичные рассуждения можно провести и для других тригонометрических функций (сделайте это самостоятельно). Таким образом, **тригонометрические функции острого угла зависят только от величины угла**.

Имеет место еще один важный факт: если значения некоторой тригонометрической функции для острых углов A и A_1 равны, то $\angle A = \angle A_1$. Иначе говоря, **каждому значению тригонометрической функции соответствует единственный острый угол**.

Задача

Найдите синус, косинус и тангенс наименьшего угла египетского треугольника.

Решение

Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 3$, $AC = 4$ (рис. 173). Поскольку в треугольнике наименьший угол лежит против наименьшей стороны, то угол A — наименьший угол треугольника ABC . По опре-

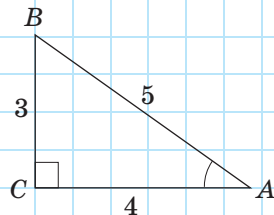


Рис. 173

делению $\sin A = \frac{BC}{AB}$, т. е. $\sin A = \frac{3}{5} = 0,6$; $\cos A = \frac{AC}{AB}$,

т. е. $\cos A = \frac{4}{5} = 0,8$; $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, т. е. $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4} = 0,75$.

Ответ: 0,6; 0,8; 0,75.

19.2. Тригонометрические тождества

Выведем соотношения (тождества), которые выражают зависимость между тригонометрическими функциями одного угла.

Теорема (основное тригонометрическое тождество)

Для любого острого угла α

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Доказательство

□ По определению синуса и косинуса острого угла прямоугольного треугольника (см. рис. 171) имеем:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

По теореме Пифагора числитель этой дроби равен c^2 , т. е. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. ■



Следствие

Для любого острого угла¹ α

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Докажем еще несколько тригонометрических тождеств.

Непосредственно из определений синуса и косинуса имеем: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$, т. е.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Аналогично доказывается, что $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Отсюда следует, что $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.

**Задача**

Найдите косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника, синус которого равен 0,8.

Решение

Пусть для острого угла α $\sin \alpha = 0,8$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \text{ т. е. } \cos \alpha = \sqrt{1 - 0,8^2} = \\ &= \sqrt{0,36} = 0,6. \end{aligned}$$

$$\text{Поскольку } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ то } \operatorname{tg} \alpha = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: 0,6; $\frac{4}{3}$.

¹ Напомним, что по определению тригонометрические функции острого угла являются положительными числами.

Вопросы и задачи



Устные упражнения

659. По рис. 174 определите, какая тригонометрическая функция угла K выражается дробью:

- а) $\frac{KN}{KM}$; б) $\frac{MN}{KN}$; в) $\frac{MN}{KM}$.

660. В прямоугольном треугольнике KMN (рис. 174) $KN > MN$. Какой из острых углов треугольника имеет больший синус; больший косинус; больший тангенс?

661. Может ли синус острого угла прямоугольного треугольника быть равным $0,99$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5} - 2$?

662. Может ли произведение синуса и косинуса одного угла быть равным единице? А произведение тангенса и котангенса?

663. Может ли тангенс острого угла прямоугольного треугольника быть равным $\sqrt{2}$; $0,01$; 100 ?

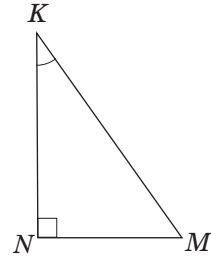


Рис. 174



Графические упражнения

664. Начертите острый угол. Отметьте на одной стороне угла две точки и проведите из них перпендикуляры к другой стороне угла.

а) Измерьте стороны образовавшихся прямоугольных треугольников и вычислите двумя способами синус построенного угла. Сравните полученные результаты.

б) Вычислите косинус построенного угла двумя способами — по определению и по основному тригонометрическому тождеству. Сравните полученные результаты.

665. Начертите острый угол. Отметьте на разных сторонах угла две точки и проведите из них перпендикуляры к другой стороне угла.

а) Измерьте стороны образовавшихся прямоугольных треугольников и вычислите двумя способами синус и косинус построенного угла. Сравните полученные результаты.

б) Вычислите тангенс построенного угла двумя способами — по определению и по соответствующему тригонометрическому тождеству. Сравните полученные результаты.



Письменные упражнения


Уровень А

666. Начертите с помощью транспортира прямоугольный треугольник с острым углом 40° . Измерьте его стороны и вычислите синус, косинус и тангенс этого угла.

667. Постройте прямоугольный треугольник ABC , в котором:

а) $\operatorname{tg} A = \frac{5}{6}$;

б) $\sin A = \frac{2}{3}$.

 **668.** Катеты прямоугольного треугольника равны 8 см и 15 см. Вычислите синус, косинус и тангенс наименьшего угла треугольника.

669. Определите, могут ли синус и косинус одного угла соответственно быть равными:

а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{4}$.

670. Найдите:

а) $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{12}{13}$;

в) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{15}{17}$.

б) $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{2}$;

 **671.** Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если:

а) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$;

б) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

672. Упростите выражение:

а) $1 - \cos^2 \alpha$;

в) $1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$.

б) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$;

 **673.** Упростите выражение:

а) $1 - \sin^2 \alpha$;

в) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}$.

б) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$;

Уровень Б

674. Постройте угол 75° . С помощью дополнительных построений и измерений найдите синус, косинус, тангенс и котангенс этого угла.

675. Постройте острый угол α , если:

а) $\sin \alpha = \frac{5}{8}$;

б) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$.



676. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна 5 см, а длина основания — 24 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла при основании треугольника.

677. Определите, могут ли тангенс и котангенс одного угла быть соответственно равными:

а) 0,4 и 2,5;

в) $\sqrt{5} + 2$ и $\sqrt{5} - 2$.

б) 1,1 и 0,9;

678 (опорная). Докажите, что

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ и } 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

679. Найдите значения тригонометрических функций острого угла A , если:

а) $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\operatorname{tg} A = 2$.

б) $\cos A = 0,28$;



680. Найдите:

а) $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = 0,5$;

б) $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

681. Упростите выражение:

а) $\frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha}$;

в) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \cos^2 \alpha$.

б) $\cos \alpha - \cos \alpha \sin^2 \alpha$;




682. Упростите выражение:

а) $\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$;

в) $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

б) $\sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \sin^2 \alpha$;

Уровень В

- 683.** Докажите, что для любого острого угла A $\operatorname{tg} A > \sin A$.
-  **684.** Докажите, что для любого острого угла A $\cos A < \operatorname{ctg} A$.

685. Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}; \quad \text{в) } \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

$$\text{б) } \operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha);$$

-  **686.** Упростите выражение:

$$\text{а) } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2;$$

$$\text{б) } \frac{1}{\sin \alpha} - \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\text{в) } \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha.$$



Повторение перед изучением § 20

Теоретический материал

- неравенство треугольника;
- теорема Пифагора.

 7 класс, § 18

 7 класс, § 13

Задачи

687. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120° . Найдите боковую сторону треугольника, если медиана, проведенная к основанию, меньше этой стороны на 8 см.

688. Катет прямоугольного треугольника равен 5 см, а медиана, проведенная к другому катету, равна 13 см. Найдите площадь данного треугольника.

§ 20

Вычисление значений тригонометрических функций

20.1. Формулы дополнения

Тригонометрические тождества, которые мы рассмотрели, устанавливают взаимосвязь между разными тригонометрическими функциями одного угла. Попробуем установить связь между функциями двух острых углов прямоугольного треугольника.

Теорема (формулы дополнения)

Для любого острого угла α

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Доказательство

□ Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB (рис. 175). Если $\angle A = \alpha$, то $\angle B = 90^\circ - \alpha$. Выразив синусы и косинусы острых углов треугольника, получим:

$$\sin B = \frac{AC}{AB}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB}, \quad \text{т. е. } \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha,$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \cos B = \frac{BC}{AB}, \quad \text{т. е. } \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Теорема доказана. ■

Следствие

Для любого острого угла α

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Заметим, что название «формулы дополнения», как и название «косинус», в котором префикс «ко» означает «дополнительный», объясняется тем, что косинус является синусом угла, который дополняет данный угол до 90° . Аналогично объясняется и название «котангенс».

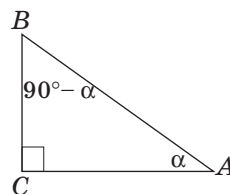


Рис. 175. К доказательству формул дополнения

20.2. Значения тригонометрических функций углов 30° , 45° , 60°

Вычислим значения тригонометрических функций угла 30° . Для этого в равностороннем треугольнике ABC со стороной a проведем высоту BD , которая является также биссектрисой и медианой (рис. 176). В треугольнике ABD $\angle D = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AB = a$, $AD = \frac{a}{2}$, и по теореме

Пифагора $BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Имеем:

$$\sin 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

С помощью формул дополнения получаем значения тригонометрических функций угла 60° :

$$\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Для вычисления значений тригонометрических функций угла 45° рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = BC = a$ (рис. 177). По теореме Пифагора $AB = a\sqrt{2}$. Имеем:

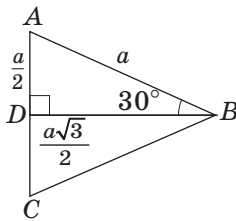


Рис. 176. К вычислению тригонометрических функций угла 30°

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1;$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1.$$

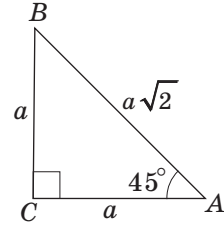


Рис. 177. К вычислению тригонометрических функций угла 45°

Представим значения тригонометрических функций углов 30° , 45° , 60° в виде таблицы.

Функция	Угол α		
	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Значения тригонометрических функций других углов можно вычислить с помощью калькулятора или специальных таблиц (см. Приложение 3).



Вопросы и задачи

Устные упражнения

689. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB $\sin B = a$. Чему равен косинус угла A ?

690. Могут ли синус и косинус острого угла прямоугольного треугольника быть равными? В каком случае?

691. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB $\operatorname{tg} A > \operatorname{tg} B$. Может ли один из этих тангенсов быть равным единице?

692. Углы α и β — острые углы прямоугольного треугольника. Найдите произведение $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$.



Графические упражнения

- 693.** Начертите прямоугольный треугольник.
- Измерьте катет и гипотенузу треугольника и вычислите их отношение.
 - Выделите красным цветом угол, синус которого найден, и синим цветом — угол, косинус которого найден.
- 694.** Начертите равносторонний треугольник и проведите его высоту. Сделайте необходимые измерения и вычислите значения тригонометрических функций углов 30° и 60° . Сравните полученные результаты с табличными.



Письменные упражнения


Уровень А

- 695.** Найдите острый угол x , если:
- $\sin x = \cos 36^\circ$;
 - $\cos x = \sin 82^\circ$;
 - $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;
 - $\cos x = \sin x$.
- 696.** Найдите острый угол x , если:
- $\cos x = \sin 50^\circ$;
 - $\sin x = 0,5$;
 - $\operatorname{tg} x = 1$.
- 697.** Пользуясь калькулятором или таблицами, найдите $\sin 80^\circ$, $\sin 32^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\cos 54^\circ$, $\operatorname{tg} 65^\circ$, $\operatorname{tg} 10^\circ$.
- 698.** Вычислите:
- $\sin 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$;
 - $\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$;
 - $\sqrt{2} \sin 45^\circ - \cos 60^\circ$.
- 699.** Вычислите:
- $\sqrt{3} \cos 30^\circ - \cos 60^\circ$;
 - $\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ$;
 - $\sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$.
- 700.** Углы A и B — острые углы прямоугольного треугольника. Найдите:
- $\sin B$ и $\cos B$, если $\cos A = 0,6$;
 - $\cos A$ и $\operatorname{tg} A$, если $\sin B = 0,5$.
- 701.** Найдите:
- $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$, если $\sin(90^\circ - \alpha) = 0,8$;
 - $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уровень Б

702. Найдите острый угол x , если:

а) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 22^\circ$; б) $\cos(90^\circ - x) = 0,5$.

 703. Найдите острый угол x , если:

а) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} 14^\circ$; б) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

704. Углы A и B — острые углы прямоугольного треугольника. Найдите:

а) $\operatorname{tg} A$, если $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$; в) $\sin^2 A + \sin^2 B$.

б) $\sin B$, если $\operatorname{ctg} A = \sqrt{3}$;


 705. Найдите:

а) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{3}$;

б) $\cos^2 \alpha + \cos^2(90^\circ - \alpha)$.

706. Сумма косинусов острых углов прямоугольного треугольника равна b . Найдите сумму синусов этих углов.

Уровень В

 707 (опорная). При возрастании острого угла синус и тангенс этого угла возрастают, а косинус и котангенс убывают. Докажите.

 708. Сравните:

а) $\sin 23^\circ$ и $\cos 65^\circ$; б) $\operatorname{tg} 36^\circ$ и $\operatorname{ctg} 64^\circ$.

709. Вычислите значение выражения $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ$.

 710. Докажите, что $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ = 1$.



Повторение перед изучением § 21

Теоретический материал

- прямоугольный треугольник;
- тригонометрические функции острого угла.

 7 класс, § 17

 8 класс, § 19

Задачи

711. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне, равна 6 см. Найдите площадь треугольника, если угол при его основании равен 75° .

712. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, наименьшая высота которого равна a .

§ 21

Решение прямоугольных треугольников

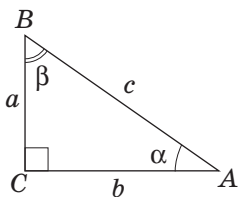


Рис. 178. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

21.1. Нахождение неизвестных сторон прямоугольного треугольника

Пусть дан прямоугольный треугольник с катетами a и b , гипотенузой c и острыми углами α и β (рис. 178).

Зная градусную меру угла α и длину любой из сторон треугольника, мы имеем возможность найти две другие его стороны. Правила нахождения неизвестных сторон прямоугольного треугольника непосредственно следуют из определений тригонометрических функций и могут быть обобщены в виде справочной таблицы.

Искомая сторона	Способ нахождения	Формула
Противолежащий катет	Катет, противолежащий углу α , равен: <ul style="list-style-type: none"> произведению гипотенузы на $\sin \alpha$; произведению прилежащего катета на $\operatorname{tg} \alpha$ 	$a = c \sin \alpha$ $a = b \operatorname{tg} \alpha$
Прилежащий катет	Катет, прилежащий к углу α , равен: <ul style="list-style-type: none"> произведению гипотенузы на $\cos \alpha$; отношению противолежащего катета к $\operatorname{tg} \alpha$ 	$b = c \cos \alpha$ $b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$
Гипотенуза	Гипотенуза равна: <ul style="list-style-type: none"> отношению противолежащего катета к $\sin \alpha$; отношению прилежащего катета к $\cos \alpha$ 	$c = \frac{a}{\sin \alpha}$ $c = \frac{b}{\cos \alpha}$

Заметим, что для нахождения неизвестных сторон прямоугольного треугольника можно использовать и $\operatorname{ctg} \alpha$ (соответствующие правила и формулы получите самостоятельно).

Запоминать содержание справочной таблицы не обязательно. Для нахождения неизвестной стороны прямоугольного треугольника можно действовать по такому плану.

1. Выбрать формулу определения той тригонометрической функции данного угла, которая связывает искомую сторону с известной (этот этап можно выполнить устно).
2. Выразить из этой формулы искомую сторону.
3. Провести необходимые вычисления.

Задача

В прямоугольном треугольнике с гипотенузой 12 м найдите катет, прилежащий к углу 60° .

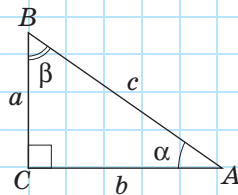
Решение

Пусть в прямоугольном треугольнике $\alpha = 60^\circ$, $c = 12$ м. Найдём катет b .

Поскольку $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, то $b = c \cos \alpha$, т. е.

$$b = 12 \cos 60^\circ = 6 \text{ (м)}.$$

Ответ: 6 м.



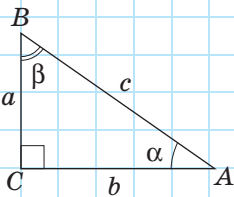
[Рис. 178]

21.2. Примеры решения прямоугольных треугольников

Решить треугольник означает найти его неизвестные стороны и углы по известным сторонам и углам.

Прямоугольный треугольник можно решить по стороне и острому углу или по двум сторонам. Рассмотрим примеры конкретных задач на решение

прямоугольных треугольников, пользуясь обозначениями рис. 178. При этом договоримся округлять значения тригонометрических функций до тысячных, длины сторон — до сотых, а градусные меры углов — до единиц.



[Рис. 178]

Задача 1

Решите прямоугольный треугольник по гипотенузе $c = 10$ и острому углу $\alpha = 50^\circ$.

Решение

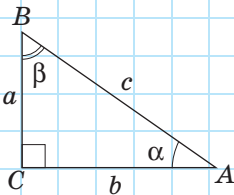
Поскольку сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° , то $\beta = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

Поскольку $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, то $a = c \sin \alpha$, т. е.

$$a = 10 \sin 50^\circ \approx 10 \cdot 0,766 = 7,66.$$

Поскольку $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, то $b = c \cos \alpha$, т. е.

$$b = 10 \cos 50^\circ \approx 10 \cdot 0,643 = 6,43.$$



[Рис. 178]

Задача 2

Решите прямоугольный треугольник по катету $a = 6$ и острому углу $\beta = 22^\circ$.

Решение

Поскольку сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° , то $\alpha = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$.

Поскольку $\cos \beta = \frac{a}{c}$, то $c = \frac{a}{\cos \beta}$, т. е.

$$c = \frac{6}{\cos 22^\circ} \approx \frac{6}{0,927} \approx 6,47.$$

Поскольку $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$, то $b = a \operatorname{tg} \beta$, т. е.

$$b = 6 \operatorname{tg} 22^\circ \approx 6 \cdot 0,404 \approx 2,42.$$

Задача 3

Решите прямоугольный треугольник по гипотенузе $c = 13$ и катету $a = 5$.

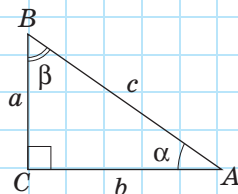
Решение

По теореме Пифагора $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, т. е.

$$b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

Поскольку $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, то $\sin \alpha = \frac{5}{13} \approx 0,385$, откуда $\alpha \approx 23^\circ$.

Поскольку сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° , то $\beta \approx 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$.



[Рис. 178]

Задача 4

Решите прямоугольный треугольник по катетам $a = 8$ и $b = 15$.

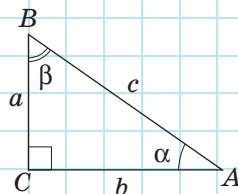
Решение

По теореме Пифагора $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, т. е.

$$c = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17.$$

Поскольку $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, то $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15} \approx 0,533$, откуда $\alpha \approx 28^\circ$.

Поскольку сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° , то $\beta \approx 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$.



[Рис. 178]

На отдельных этапах решения задач 1–4 можно использовать другие способы. Но следует заметить, что в том случае, когда одна из двух сторон треугольника найдена приближенно, для более точного нахождения третьей стороны целесообразно использовать определения тригонометрических функций.

21.3. Прикладные задачи

Рассмотрим примеры применения решения треугольников в практических задачах.

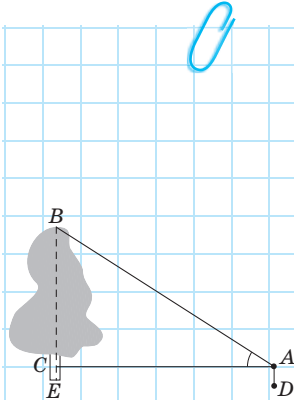


Рис. 179

Задача

Найдите высоту предмета (рис. 179).

Решение

На определенном расстоянии от предмета выберем точку A и измерим угол BAC .

Поскольку в прямоугольном треугольнике ABC

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}, \text{ то } BC = AC \operatorname{tg} A.$$

Для определения высоты предмета необходимо прибавить к BC высоту AD прибора, с помощью которого измеряли угол. Значит, $BE = AC \operatorname{tg} A + AD$.

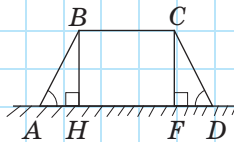


Рис. 180

Задача

Насыпь шоссейной дороги (рис. 180) имеет ширину 60 м в верхней части и 68 м в нижней. Найдите высоту насыпи, если углы наклона откосов к горизонту равны 60° .

Решение

Рассмотрим равнобокую трапецию $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, $AD = 68$ м, $BC = 60$ м, $\angle A = \angle D = 60^\circ$.

Проведем высоты BH и CF . Поскольку $BC = HF$ и $AH = FD$ (докажите это самостоятельно), то $AH = FD = (68 - 60) : 2 = 4$ (м).

В треугольнике ABH $\angle H = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $AH = 4$ м.

Поскольку $\operatorname{tg} A = \frac{BH}{AH}$, то $BH = AH \operatorname{tg} A$, т. е.

$$BH = 4 \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \text{ (м)}.$$

Ответ: $\approx 6,93$ м.



Вопросы и задачи

Устные упражнения

713. Можно ли решить прямоугольный треугольник по двум сторонам; по двум углам?

714. В прямоугольном треугольнике KMN (рис. 181) известны катет MN и угол K . Выразите через них второй катет и гипотенузу треугольника.

715. Пользуясь рис. 181, определите, какие из данных утверждений верны:

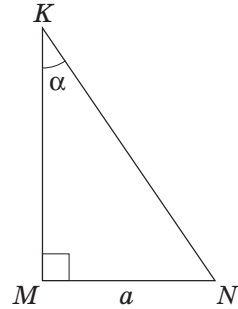


Рис. 181

- а) $KN = \frac{MN}{\sin \alpha}$; б) $MK = KN \sin \alpha$; в) $KN = MN \operatorname{tg} \alpha$; г) $MN = \frac{KM}{\operatorname{ctg} \alpha}$.



Графические упражнения

716. Начертите прямоугольный треугольник и измерьте в нем гипотенузу и острый угол. Решите этот треугольник. Проверьте полученные результаты измерениями.

717. Начертите прямоугольный треугольник и измерьте его катеты. Решите этот треугольник. Проверьте полученные результаты измерениями.



Письменные упражнения

Уровень А

718. В прямоугольном треугольнике катет длиной 7 см является прилежащим к углу 60° . Найдите гипотенузу треугольника.

719. Найдите длину трассы киевского фуникулера, если разность высот между нижней и верхней станциями равна 75 м, а синус угла наклона трассы к горизонту составляет $\frac{25}{74}$.



720. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 8 см, а один из катетов — $4\sqrt{2}$ см. Найдите острые углы треугольника.

721. Решите прямоугольный треугольник¹ по катету и острому углу:

- а) $c = 8$, $\alpha = 30^\circ$; б) $c = 10$, $\alpha = 42^\circ$.

722. Решите прямоугольный треугольник по катету и острому углу:

- а) $a = 2$, $\beta = 45^\circ$; б) $a = 4$, $\alpha = 18^\circ$.

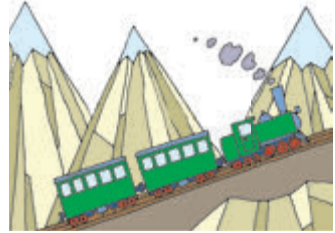
¹ В задачах 721–726 используются обозначения рис. 178.

723. Решите прямоугольный треугольник, если:
 а) $c = 12$, $\alpha = 28^\circ$; б) $a = 8$, $\beta = 40^\circ$.
724. Решите прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету:
 а) $c = 9\sqrt{2}$, $a = 9$; б) $c = 25$, $a = 24$.
725. Решите прямоугольный треугольник по двум катетам:
 а) $a = 6\sqrt{3}$, $b = 6$; б) $a = 9$, $b = 40$.
726. Решите прямоугольный треугольник, если:
 а) $a = 6$, $c = 10$; б) $a = 5$, $b = \sqrt{11}$.
727. Отрезок BD — высота прямоугольного треугольника ABC , проведенная к гипотенузе. Докажите, что $AD \operatorname{tg} A = DC \operatorname{tg} C$.
728. Отрезок BD — высота прямоугольного треугольника ABC , проведенная к гипотенузе. Докажите, что $\frac{BD}{\sin A} = AC \cos A$.

Уровень Б

729. Диагональ прямоугольника равна 10, а угол между диагоналями 40° . Найдите стороны прямоугольника.
730. Синус угла при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{8}{17}$, а высота, проведенная к основанию, — 16 см. Найдите основание треугольника.
731. Диагонали ромба равны 10 см и 24 см. Найдите углы ромба.
732. Отрезок BD — высота прямоугольного треугольника ABC , проведенная к гипотенузе. Решите треугольник ABC , если:
 а) $BD = 4\sqrt{3}$, $\angle DBC = 60^\circ$; б) $AD = 9$, $\angle C = 10^\circ$.
733. Отрезок BD — высота прямоугольного треугольника ABC , проведенная к гипотенузе. Решите треугольник ABC , если $BD = 3$, $DC = 4$.
734. Основания прямоугольной трапеции равны 8 и 12, а тупой угол — 110° . Найдите боковые стороны трапеции.
735. В равнобокой трапеции угол при основании равен 135° , меньшее основание и боковая сторона — соответственно 8 и 10. Найдите среднюю линию трапеции.
736. Тень от столба высотой 11 м равна 4,4 м. Выразите в градусах высоту Солнца над горизонтом.

737. Неподалеку от австралийского города Катумба расположена самая крутая (по наклону трассы) горная железная дорога Katoomba Scenic Railway. Ее длина составляет 415 м, а высота подъема — 321 м. Найдите угол наклона трассы.



Уровень В

738. Решите прямоугольный треугольник по сумме катетов m и острому углу α .
739. Решите прямоугольный треугольник по разности острых углов φ и гипотенузе c .
740. Высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу в отношении $1 : 3$. Найдите острые углы треугольника.
741. На рис. 182 показан способ измерения высоты предмета, основание которого недоступно. Найдите эту высоту, если $AB = d$, $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$.
742. Катеты прямоугольного треугольника равны 30 и 40. Найдите угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.

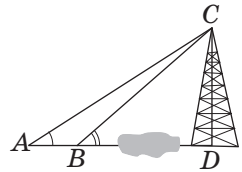


Рис. 182



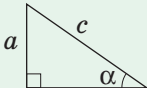
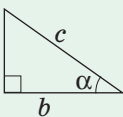
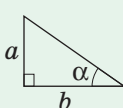
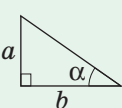
Онлайн-тренировка для подготовки к контрольной работе № 5

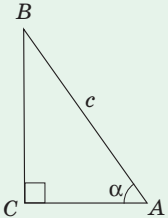
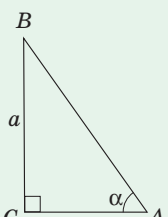
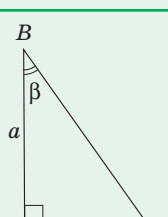
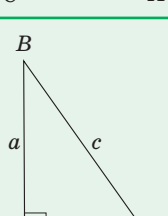
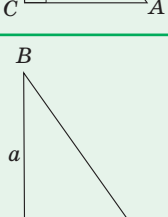
Задачи для подготовки к контрольной работе № 5

- Найдите $\sin A$ и $\operatorname{tg} A$, если $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Упростите выражение $\frac{\cos^2 \alpha}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}$.
- Вычислите $2\sin 60^\circ + 4\cos 60^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ - 2\operatorname{tg} 45^\circ$.
- В прямоугольном треугольнике против угла 60° лежит катет длиной 18 см. Найдите второй катет и гипотенузу треугольника.
- В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 74 см, а синус одного из углов $\frac{12}{37}$. Найдите периметр треугольника.
- Большая боковая сторона описанной прямоугольной трапеции равна c , а острый угол α . Докажите, что средняя линия трапеции равна $\frac{c(1 + \sin \alpha)}{2}$.

Итоги

ИТОГОВЫЙ ОБЗОР ГЛАВЫ IV

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА			
Синус	Косинус	Тангенс	Котангенс
<p>Синусом острого угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:</p> $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ 	<p>Косинусом острого угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:</p> $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ 	<p>Тангенсом острого угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему:</p> $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ 	<p>Котангенсом острого угла α называется отношение прилежащего катета к противолежащему:</p> $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$ 
Тригонометрические тождества			
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	<p><i>Формулы дополнения</i></p> $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	
Значения тригонометрических функций некоторых углов			
α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ		
Задача	Условие	Схема решения
Известны гипотенуза и острый угол	 <p>Дано: $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90^\circ$. Найти: $\angle B$, AC, BC.</p>	1. $\angle B = 90^\circ - \alpha$ 2. $AC = c \cos \alpha$ 3. $BC = c \sin \alpha$
Известны катет и острый угол	 <p>Дано: $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90^\circ$. Найти: $\angle B$, AB, AC.</p>	1. $\angle B = 90^\circ - \alpha$ 2. $AB = \frac{a}{\sin \alpha}$ 3. $AC = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$
	 <p>Дано: $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = 90^\circ$. Найти: $\angle A$, AC, AB.</p>	1. $\angle A = 90^\circ - \beta$ 2. $AB = \frac{a}{\cos \beta}$ 3. $AC = a \operatorname{tg} \beta$
Известны гипотенуза и катет	 <p>Дано: $BC = a$, $AB = c$, $\angle C = 90^\circ$. Найти: AC, $\angle A$, $\angle B$.</p>	1. $AC = \sqrt{c^2 - a^2}$ 2. $\sin A = \frac{a}{c}$ 3. $\angle B = 90^\circ - \angle A$
Известны два катета	 <p>Дано: $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = 90^\circ$. Найти: AB, $\angle A$, $\angle B$.</p>	1. $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ 2. $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$ 3. $\angle B = 90^\circ - \angle A$



Контрольные вопросы к главе IV

1. Дайте определение синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.
2. Сформулируйте основное тригонометрическое тождество.
3. Сформулируйте формулы дополнения.
4. Назовите значения тригонометрических функций углов 30° , 45° , 60° .
5. Опишите решения прямоугольного треугольника:
 - а) по гипотенузе и острому углу;
 - б) по катету и острому углу;
 - в) по гипотенузе и катету;
 - г) по двум катетам.



Дополнительные задачи к главе IV

- 743.** Стороны параллелограмма равны $4\sqrt{2}$ см и 8 см, а острый угол 45° . Найдите высоты и площадь параллелограмма.
- 744.** Радиус окружности, вписанной в ромб с острым углом α , равен r . Найдите сторону и площадь ромба.
- 745.** Сторона треугольника равна 10, а прилежащие к ней углы — 30° и 45° . Найдите другие стороны треугольника.
- 746.** Если два прямоугольных треугольника имеют равные гипотенузы, то синусы их острых углов пропорциональны противолежащим катетам, а косинусы острых углов — прилежащим катетам. Докажите.
- 747.** Биссектриса, проведенная из вершины острого угла α прямоугольного треугольника, равна l . Найдите гипотенузу треугольника.
- 748.** Ступеньки эскалатора харьковского метрополитена имеют ширину 40 см и высоту 30 см. Определите угол наклона эскалатора.
- 749.** На расстоянии 700 м от точки отрыва самолета от земли расположены деревья высотой 24 м. Под каким углом должен подниматься самолет, чтобы не задеть деревья?



Задачи повышенной сложности

750. Докажите, что катеты прямоугольного треугольника и высота, проведенная к гипотенузе, связаны соотношением $\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

751. В равнобедренном треугольнике косинус угла при вершине равен a . Найдите тангенс угла между основанием и высотой, проведенной к боковой стороне.

752. В треугольнике ABC $AB = BC$, а высота AE в два раза меньше высоты BD . Найдите косинус угла при основании треугольника.

753. Две окружности, расстояние между центрами которых равно d , касаются внешним образом. Найдите радиусы этих окружностей, если угол между их общими внешними касательными равен 2α .

 **754.** Найдите $\sin 75^\circ$.

755. Отрезки BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC , в котором $\angle A = \alpha$. Найдите площадь треугольника AB_1C_1 , если площадь треугольника ABC равна S .



Видеоматериалы к главе IV

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА



Птолемей

Необходимость решения треугольников возникла при рассмотрении многих практических задач в связи с потребностями географии, астрономии, навигации. Поэтому элементы тригонометрии появились еще в Древнем Вавилоне в период интенсивного развития астрономии. В работе греческого ученого **Птолемея** «Альмагест» (II в. н. э.), где изложена античная система мира, содержатся элементы сферической тригонометрии.

Синус и косинус как вспомогательные величины использовались индийскими математиками в V в.,



В Древней Греции вместо синуса угла α рассматривали длину хорды, соответствующей центральному углу 2α . Действительно, если радиус окружности равен единице, то $\sin \alpha$ измеряется половиной такой хорды (проверьте это самостоятельно). Первые тригонометрические таблицы были составлены **Гиппархом** во II в. н. э.



а тангенс и котангенс впервые появились в работах арабского математика X в. **Абу-аль-Вефы**.

Как отдельный раздел математики тригонометрия была выделена в произведениях персидского ученого **Насреддина Туси** (1201–1274), а системное изложение тригонометрии первым из европейцев представил немецкий математик и механик **Иоганн Мюллер** (1436–1476), более известный под псевдонимом **Региомонтан**.

Современную форму изложения и современную символику тригонометрия приобрела благодаря **Леонарду Эйлеру** в XVIII в.



Региомонтан



Кроме известных вам четырех тригонометрических функций иногда рассматриваются еще две: секанс $\left(\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}\right)$ и косеканс $\left(\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}\right)$.



Выдающиеся математики Украины



Астрыб Александр Матвеевич (1879–1962)

Сейчас существует множество пособий по школьной математике, в частности изданий в помощь учителю. Но так было не всегда. Благодаря Александру Матвеевичу Астрыбу в Украине начала развиваться новая область педагогической науки, именно ему принадлежит почетное звание **основателя украинской школы методики преподавания математики**. Вместе с коллективом единомышленников он разработал основы методики преподава-

ния курсов арифметики, геометрии, тригонометрии, которые базировались на повышении теоретического уровня преподавания и одновременно на связи теории с практикой. За достижения в разработке актуальных вопросов методики математики А. М. Астрыбу было присвоено звание профессора.

Круг научных интересов ученого был чрезвычайно широк. Он создал целый ряд пособий по математике, которые в свое время были широко распространены. Его перу принадлежит учебник «Наглядная геометрия», который был настолько популярным, что издавался тиражами от трехсот тысяч до полумиллиона экземпляров, выдержал 13 переизданий, был переведен на польский, немецкий, татарский, болгарский, еврейский языки. Был период, когда Александр Матвеевич сконцентрировал свое внимание на вопросах углубленного изучения геометрии, создал ряд интересных книг по этой теме, в том числе чрезвычайно полезную и актуальную «Методику решения задач на построение в средней школе».

Астрыб был блестящим преподавателем, читал лекции для учителей, вел уроки для учеников, принимал участие в проведении олимпиад. Александр Матвеевич организовал и возглавил первую в Украине кафедру элементарной математики и методики математики (1947 г.) в Киевском государственном педагогическом институте им. А. М. Горького (сейчас Национальный педагогический университет им. М. П. Драгоманова).

И это далеко не весь перечень этапов вдохновенного труда выдающегося педагога-реформатора родом с Полтавщины, заслуженного деятеля науки Украины Александра Матвеевича Астрыба.



Выдающиеся математики Украины



Гнеденко Борис Владимирович (1915–1995)

Невозможно представить научные исследования и развитие современной техники без программирования. Этот предмет изучают и в школе, и на университетской скамье. Возможно, кто-то из вас тоже планирует выбрать в будущем профессию программиста. Единство таких разных, на первый взгляд, вещей, как теоретическая математика и создание компьютерных программ, интересно отражено в биографии выдающегося ученого Б. В. Гнеденко. Еще в начале научной деятельности он пришел к убеждению, что полноценная творческая жизнь математика

связана с широким использованием математических методов в решении заданий практики и одновременно — в развитии самих этих методов. Поэтому вполне закономерно, что молодой ученый увлекся теорией вероятностей.

В 1945 г. уже известный ученый, доктор физико-математических наук Б. В. Гнеденко был избран членом-корреспондентом Академии наук Украины и получил направление во Львов, где способствовал восстановлению высокого уровня математики во Львовском университете после войны. В 1949 г. он закончил написание учебника по теории вероятностей, который сейчас считается классикой математической науки.

Во второй половине 50-х годов XX века Борис Владимирович возглавил в Киеве Институт математики при Академии наук Украины и руководил работой по организации Вычислительного центра. Одновременно Гнеденко создал курс программирования для электронных вычислительных машин, который начал читать студентам Киевского университета — будущим сотрудникам Вычислительного центра. Изложение этого курса стало первым в стране учебником по программированию. Именно к этому периоду относится начало разработки Б. В. Гнеденко двух новых направлений прикладных научных исследований — теории массового обслуживания и вопросов использования математических методов в современной медицине. Общее количество опубликованных научных работ Бориса Владимировича приближается к тысяче. Своей личностью, научной, педагогической и организационной работой Б. В. Гнеденко подает пример плодотворного единения теории и практики.



Тематика сообщений и рефератов

К главе I

1. Дельтоид и его свойства.
2. Построение выпуклых четырехугольников.
3. Фалес Милетский и древнегреческая наука.
4. Леонард Эйлер — уникальная фигура мировой науки.
5. Геометрические места точек, связанные с окружностью.
6. Точки Эйлера. Окружность девяти точек. Теорема Фейербаха.
7. Дополнительные сведения о вписанных и описанных четырехугольниках. Теорема Симсона.
8. Особые виды треугольников (ортоцентрический, педальный, разностный, треугольник Наполеона).

К главе II

1. Пифагор Самосский — ученый, философ, общественный деятель.
2. Архимед и его достижения в геометрии. Задачи про арбелос.
3. Пропорциональные отрезки в трапеции.
4. Теоремы Чевы и Менелая и следствия из них.
5. «Золотое сечение» в архитектуре и искусстве.
6. Прикладное применение подобия треугольников. Пропорциональный циркуль.

К главе III

1. Как измеряли в древние времена? (Из истории измерения площадей.)
2. Способы доказательства теоремы Пифагора.
3. Деление площадей и преобразование равновеликих фигур.
4. Метод площадей в геометрических доказательствах и задачах.
5. Площади и равносоставленные фигуры в математических головоломках.

К главе IV

1. Из истории развития тригонометрии.
2. Тригонометрические тождества в треугольнике.
3. Геометрические неравенства, связанные с тригонометрией.
4. Применение тригонометрических функций при решении прикладных задач.



Рекомендованные источники информации

Приложения

Приложение 1. Обобщенная теорема Фалеса и площадь прямоугольника

В ходе доказательства некоторых геометрических теорем используется процедура деления отрезка на некоторое количество равных частей. Это позволяет дать числовые оценки в виде неравенств и с их помощью получить противоречие.

В курсе геометрии 8 класса такой подход целесообразно применить для доказательства двух приведенных ниже теорем.

Теорема (обобщенная теорема Фалеса)

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на сторонах этого угла пропорциональные отрезки.

Доказательство

□ По данным рис. 183 докажем три формулы:

$$1) \frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1}; \quad 2) \frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}; \quad 3) \frac{BC}{CD} = \frac{B_1C_1}{C_1D_1}.$$

Докажем сначала формулу 1.

Пусть отрезок AC можно разделить на n равных отрезков так, что одна из точек деления совпадет с точкой B , причем на отрезке AB будут лежать m точек деления.

Тогда, проведя через точки деления прямые, параллельные CC_1 , по теореме Фалеса получим деление отрезков AC_1 и AB_1 соответственно на n и m равных отрезков. Следовательно, $\frac{AC}{AB} = \frac{n}{m} = \frac{AC_1}{AB_1}$, что и требовалось доказать.

Если описанное деление отрезка AC невозможно, то докажем формулу 1 от противного. Пусть

$$\frac{AC}{AB} \neq \frac{AC_1}{AB_1}, \text{ т. е. } AB \neq AC \cdot \frac{AB_1}{AC_1}.$$

Рассмотрим случай, когда $AB > AC \cdot \frac{AB_1}{AC_1}$ (другой случай рассмотрите самостоятельно).

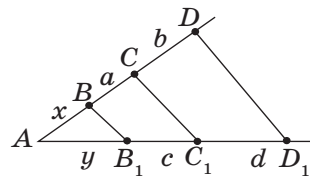


Рис. 183. Обобщенная теорема Фалеса

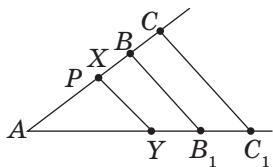


Рис. 184. К доказательству обобщенной теоремы Фалеса

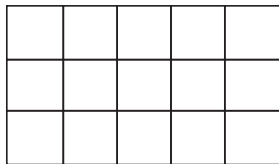


Рис. 185. Прямоугольник 3×5

Отложим на отрезке AB отрезок

$$AP = AC \cdot \frac{AB_1}{AC_1} < AB \text{ (рис. 184).}$$

Разобьем отрезок AC на такое количество равных отрезков¹, чтобы одна из точек деления X попала на отрезок PB . Проведем через точки деления прямые, параллельные CC_1 . Пусть прямая, проходящая через точку X , пересекает луч AC_1 в точке Y . Тогда по доказанному $\frac{AX}{AC} = \frac{AY}{AC_1}$. Учитывая,

что в этой пропорции $AX > AP$ и $AY < AB_1$, имеем: $\frac{AP}{AC} < \frac{AB_1}{AC_1}$, т. е. $AP < AC \cdot \frac{AB_1}{AC_1}$. Это неравенство противоречит выбору длины отрезка AP . Следовательно, формула 1 доказана полностью.

Докажем формулы 2 и 3. Пользуясь обозначениями рис. 183, по формуле 1 имеем: $\frac{a+x}{x} = \frac{c+y}{y}$

и $\frac{a+b+x}{a+x} = \frac{c+d+y}{c+y}$. Разделив в каждом из этих равенств числитель на знаменатель, получим: $1 + \frac{a}{x} = 1 + \frac{c}{y}$, т. е. $\frac{a}{x} = \frac{c}{y}$; $1 + \frac{b}{a+x} = 1 + \frac{d}{c+y}$, т. е. $\frac{b}{a+x} = \frac{d}{c+y}$.

Отсюда $\frac{a}{x} : \frac{b}{a+x} = \frac{c}{y} : \frac{d}{c+y}$, т. е. $\frac{a}{b} \cdot \frac{a+x}{x} = \frac{c}{d} \cdot \frac{c+y}{y}$, или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Таким образом, доказано, что $\frac{a}{x} = \frac{c}{y}$

и $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, т. е. формулы 2 и 3 выполняются.

Теорема доказана полностью. ■

Из курса математики 5 класса известно, что площадь прямоугольника равна произведению двух его

¹ Достаточно, чтобы длина каждого из этих отрезков была не больше, чем $\frac{1}{2}PB$.

соседних сторон. Так, на рис. 185 дан прямоугольник 3×5 , который делится на 15 квадратов площадью 1. Следовательно, по аксиомам площади, его площадь равна 15 кв. ед., то есть 3×5 кв. ед. Таким способом легко найти площадь прямоугольника, у которого длины сторон выражены любыми целыми числами.

Но справедливость этой формулы при условии, что длины сторон прямоугольника не являются целыми числами, — совсем неочевидная теорема. Докажем ее.

Теорема (формула площади прямоугольника)

Площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон:

$S = ab$, где a и b — стороны прямоугольника.

Доказательство

□ Докажем сначала, что площади прямоугольников с одним равным измерением относятся как длины других измерений.

Пусть прямоугольники $ABCD$ и AB_1C_1D имеют общую сторону AD (рис. 186, а).

Разобьем сторону AB на n равных частей. Пусть на отрезке AB_1 лежит m точек деления, причем точка деления B_2 имеет номер m , а точка B_3 — номер $m+1$. Тогда $AB_2 \leq AB_1 \leq AB_3$, отку-

да $\frac{m}{n} AB \leq AB_1 \leq \frac{m+1}{n} AB$, т. е. $\frac{m}{n} \leq \frac{AB_1}{AB} \leq \frac{m+1}{n}$,

$$\frac{m}{n} \leq \frac{AB_1}{AB} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

Теперь проведем через точки деления прямые, параллельные AD . Они разделят прямоугольник $ABCD$ на n равных прямоугольников (т. е. таких, которые совмещаются при наложении). Очевидно, что прямоугольник AB_2C_2D содержится внутри прямоугольника AB_1C_1D , а прямоугольник AB_3C_3D содержит прямоугольник AB_1C_1D .

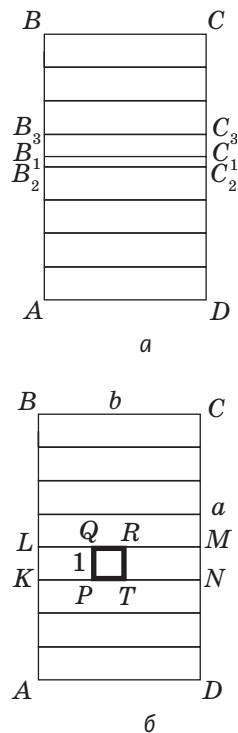


Рис. 186. К доказательству формулы площади прямоугольника

Следовательно, $S_{AB_2C_2D} \leq S_{AB_1C_1D} \leq S_{AB_3C_3D}$.

$$\text{Имеем: } \frac{m}{n} \cdot S_{ABCD} \leq S_{AB_1C_1D} \leq \frac{m+1}{n} \cdot S_{ABCD}, \quad \frac{m}{n} \leq \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}} \leq \frac{m+1}{n},$$

$$\frac{m}{n} \leq \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

Сравнивая выражения для $\frac{AB_1}{AB}$ и $\frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}}$, убеждаемся, что оба эти отношения находятся между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n} + \frac{1}{n}$, т.е. отличаются не более чем на $\frac{1}{n}$ (n — натуральное число). Докажем от противного, что эти отношения равны.

Действительно, если это не так, т.е. $\left| \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}} - \frac{AB_1}{AB} \right| = \delta > 0$, то найдется такое натуральное число¹ n , что $\frac{1}{n} < \delta$, т.е. $\delta = \left| \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}} - \frac{AB_1}{AB} \right| \leq \frac{1}{n} < \delta$. Полученное противоречие доказывает, что площади прямоугольников с одним равным измерением относятся как длины других измерений.

Рассмотрим теперь прямоугольники $ABCD$ со сторонами a и b ; $KLMN$ со сторонами b и 1 и квадрат $PQRT$ со стороной 1 (см. рис. 186, б).

Тогда по доказанному $\frac{S_{KLMN}}{S_{PQRT}} = \frac{b}{1}$, $\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{a}{1}$. Поскольку $S_{PQRT} = 1$ кв. ед.,

то, перемножив полученные отношения, имеем $S_{ABCD} = ab$.

Теорема доказана. ■

Приложение 2. Золотое сечение

С давних времен люди старались познать мир путем поиска гармонии и совершенства. Одним из вопросов, которыми задавались еще древние греки, был поиск наилучшего соотношения неравных частей одного целого. Таким соотношением еще со времен Пифагора считали гармоническое деление, при котором меньшая часть относится к большей, как большая часть относится ко всему целому. Такое деление отрезка на части описано во II книге «Начал» Евклида и названо *делением в среднем и крайнем отношении*.

¹ Выберем $n > \frac{1}{\delta}$, например $n = \left[\frac{1}{\delta} \right] + 1$, где $\left[\frac{1}{\delta} \right]$ — целая часть дроби $\frac{1}{\delta}$.

Рассмотрим деление отрезка AB точкой C , при котором $\frac{AC}{CB} = \frac{CB}{AB}$ (рис. 187). Пусть длина отрезка AB равна a , а длина отрезка CB равна x . Тогда $\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a}$, т. е. $x^2 + ax - a^2 = 0$, $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{x}{a} + 1 = 0$. Отсюда $\frac{x}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Поскольку $\frac{x}{a} > 0$, то геометрический смысл имеет только значение $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,6$.

Значит, если длина данного отрезка равна 1, то при делении в крайнем и среднем отношении его большая часть приблизительно равна 0,6. Полученное число обозначают греческой буквой ϕ . Кроме того, часто рассматривают и отношение $\Phi = \frac{1}{\phi} = \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,6$. Заметим, что Φ — первая буква имени древнегреческого скульптора Фидия, который часто использовал такое деление в своем творчестве (в частности, в знаменитой статуе Зевса Олимпийского, которую считают одним из семи чудес света).

В эпоху Возрождения (XV–XVII вв.) интерес к гармоническому делению чрезвычайно возрос. Выдающийся ученый и художник Леонардо да Винчи (1452–1519) назвал такое деление *золотым сечением*, а его современник и соотечественник, итальянский монах-математик Лука Пачоли (1445–1514) — божественной пропорцией. Золотое сечение и близкие к нему пропорциональные отношения составляли основу композиционного построения многих произведений мирового искусства, в частности архитектуры античности и Возрождения. Одно из величайших сооружений Древней Эллады — Парфенон в Афинах (V в. до н. э.) — содержит в себе золотые пропорции (в частности, отношение высоты к длине этого сооружения равно ϕ).

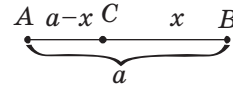


Рис. 187. Деление отрезка AB в крайнем и среднем отношении



Итак, дадим определение золотого сечения.

Определение

Золотым сечением называется такое деление величины на две неравные части, при котором меньшая часть относится к большей, как большая часть относится ко всему целому.

Иначе говоря, золотое сечение — это деление величины в отношении φ (или Φ).

Построить золотое сечение отрезка заданной длины a с помощью циркуля и линейки довольно просто: для этого достаточно построить прямоугольный треугольник с катетами a и $\frac{a}{2}$ и провести две дуги из вершин острых углов так, как показано на рис. 188. По теореме о пропорциональности отрезков секущей и касательной $AB^2 = AE \cdot AD$. Тогда $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD}$. Поскольку

по построению $AB = 2OD = ED = a$, то $AE = AD - AB$ и $\frac{AD - AB}{AB} = \frac{AB}{AD} = \varphi$ по определению золотого сече-

ния. Следовательно, $\frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AB} = \varphi$.

Убедиться в правильности построения можно также с помощью теоремы Пифагора (сделайте это самостоятельно).

С золотым сечением связывают геометрические фигуры, при построении которых используются отношения φ и Φ . Рассмотрим некоторые из них.

Равнобедренный треугольник называется **золотым**, если две его стороны относятся в золотом сечении. Докажем, что треугольник с углами 36° , 72° , 72° (рис. 189, а) является золотым. Действительно, пусть в треугольнике ABC $\angle A = \angle C = 72^\circ$, $\angle B = 36^\circ$, AK — биссектриса. Тогда $\angle KAC = 36^\circ$, $\angle AKC = 72^\circ$, $\triangle ABC \sim \triangle CAK$ по двум углам. Следовательно,

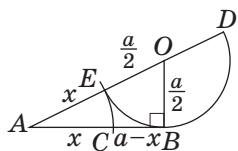
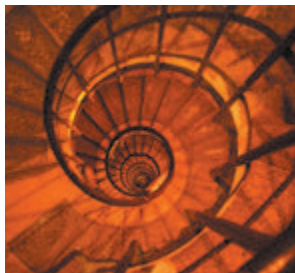


Рис. 188. Построение золотого сечения отрезка



$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{KC} = \frac{AC}{BC - BK} = \frac{AC}{AB - AC} = \Phi$, т. е. треугольник ABC — золотой. И на-

оборот: если в равнобедренном треугольнике $A_1B_1C_1$ $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{C_1B_1}{A_1C_1} = \Phi$, то такой

треугольник подобен треугольнику ABC , т. е. имеет углы 36° , 72° , 72° . Предлагаем самостоятельно убедиться в том, что золотым является также треугольник с углами 36° , 36° , 108° (рис. 189, б) и других золотых треугольников не существует.

Золотые треугольники связаны с правильным пятиугольником (т. е. выпуклым пятиугольником, у которого все стороны равны и все углы равны).

В правильном пятиугольнике:

- 1) диагональ относится к стороне в золотом сечении;
- 2) точка пересечения диагоналей делит каждую из них в золотом сечении;
- 3) диагональ делит другую диагональ на два отрезка, один из которых делится в золотом сечении еще одной диагональю.

Согласно обозначениям рис. 187 это означает, что $\frac{CE}{CD} = \frac{CE}{CN} = \frac{CN}{CM} = \Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. Для доказательства этих свойств достаточно заметить, что в правильном пятиугольнике все углы равны $\frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$, следовательно, треугольники CDE , CMD , MDN являются золотыми. Подробные доказательства предлагаем провести самостоятельно.

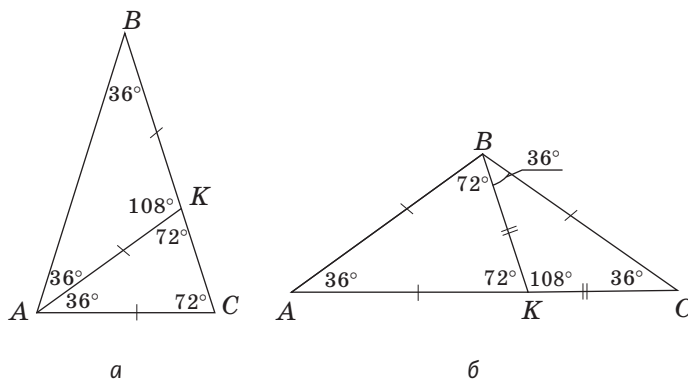


Рис. 189. Золотые треугольники

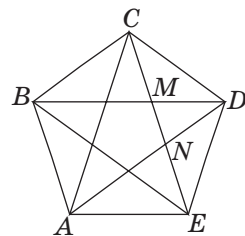


Рис. 190. Правильный пятиугольник

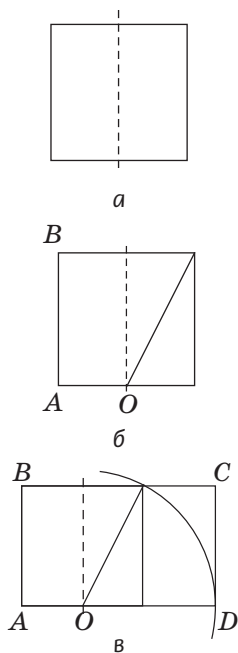


Рис. 191. Построение золотого прямоугольника

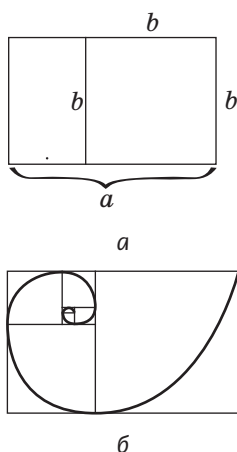


Рис. 192. Построение золотой спирали

Диагонали правильного пятиугольника образуют звезду, которая в древние времена олицетворяла совершенство и имела мистическое значение. Пифагорейцы называли ее пентаграммой и избрали символом своей научной школы. В наши дни пятиконечная звезда — самая распространенная геометрическая фигура на флагах и гербах многих стран (приведите соответствующие примеры из истории и географии).

Прямоугольник называется **золотым**, если его стороны относятся в золотом сечении. Для построения золотого прямоугольника произвольный квадрат перегибаем пополам (рис. 191, а), проводим диагональ одного из полученных прямоугольников (рис. 191, б) и радиусом, равным этой диагонали, проводим дугу окружности с центром O (рис. 188, в). Полученный прямоугольник $ABCD$ — золотой (убедитесь в этом самостоятельно).

Если от золотого прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, то оставшийся прямоугольник также будет золотым. Действительно, на рис. 192, а имеем $\frac{a}{b} = \Phi$, тогда $a - b = b\Phi - b = b(\Phi - 1) = b\phi$. Неограниченно продолжая этот процесс (рис. 192, б), можно получить так называемые вращающиеся квадраты, и весь данный прямоугольник будет составлен из таких квадратов.

Через противоположные вершины квадратов проходит так называемая **золотая спираль**, которая часто встречается в природе. Например, по принципу золотой спирали располагаются семена в подсолнечнике; по золотой спирали закручены раковины улиток, рога архаров, паутина отдельных видов пауков и даже наша Солнечная система, как и некоторые другие галактики.



Отметим также, что золотое сечение имеет немало алгебраических свойств. Отношение φ приближенно может быть выражено дробями $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$, где 2, 3, 5, 8, 13, ... — так называемые числа Фибоначчи¹. Приведем без доказательства две алгебраические формулы, связанные с числами φ и Φ :

$$1) \varphi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}; \quad 2) \Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}}}.$$

Золотое сечение, золотые многоугольники и золотая спираль являются математическими воплощениями идеальных пропорций в природе. Недаром великий немецкий поэт Иоганн Вольфганг Гете считал их математическими символами жизни и духовного развития.

Приложение 3. Таблица значений тригонометрических функций

Градусы	$\sin \alpha$ $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	$\operatorname{tg} \alpha$ $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	$\operatorname{ctg} \alpha$ $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	$\cos \alpha$ $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	Градусы
0	0,000	0,000	—	1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
Градусы	$\cos \alpha$ $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$	$\operatorname{ctg} \alpha$ $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$	$\operatorname{tg} \alpha$ $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$	$\sin \alpha$ $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$	Градусы

¹ Числа Фибоначчи — это натуральные числа ряда 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., в котором каждое последующее число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих.

Градусы	$\sin \alpha$ $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	$\operatorname{tg} \alpha$ $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	$\operatorname{ctg} \alpha$ $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	$\cos \alpha$ $0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$	Градусы
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,335	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
Градусы	$\cos \alpha$ $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$	$\operatorname{ctg} \alpha$ $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$	$\operatorname{tg} \alpha$ $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$	$\sin \alpha$ $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$	Градусы

Значения тригонометрических функций острых углов можно приближенно определять с помощью специальных таблиц. Одна из таких таблиц представлена выше.

Таблица составлена с учетом формул дополнения. В двух крайних столбцах указаны градусные меры углов (в левом — от 0° до 45° , в правом — от 45° до 90°). Между этими столбцами содержатся четыре столбца значений тригонометрических функций:

- 1-й — синусы углов от 0° до 45° (или косинусы углов от 45° до 90°);
- 2-й — тангенсы углов от 0° до 45° (или котангенсы углов от 45° до 90°);
- 3-й — котангенсы углов от 0° до 45° (или тангенсы углов от 45° до 90°);
- 4-й — косинусы углов от 0° до 45° (или синусы углов от 45° до 90°).

Рассмотрим несколько примеров применения данной таблицы.

1) Определим $\sin 25^\circ$. Поскольку $0^\circ \leq 25^\circ \leq 45^\circ$, найдем в крайнем левом столбце значение 25 и рассмотрим соответствующую строку первого столбца значений. Углу 25° в ней соответствует число 0,423. Следовательно, $\sin 25^\circ \approx 0,423$.

2) Определим $\sin 72^\circ$. Поскольку $45^\circ \leq 72^\circ \leq 90^\circ$, найдем в крайнем правом столбце значение 72 и рассмотрим соответствующую строку четвертого столбца значений. Углу 72° в нем соответствует число 0,951. Следовательно, $\sin 72^\circ \approx 0,951$.

3) Определим угол, синус которого равен 0,839. Для этого в первом или четвертом столбце значений найдем число 0,839. Оно находится в четвертом столбце, т.е. искомый угол больше 45° и меньше 90° . В соответствующей строке правого столбца значений находим число 57. Следовательно, искомый угол приблизительно равен 57° .

4) Определим $\cos 14^\circ$. Поскольку $0^\circ \leq 14^\circ \leq 45^\circ$, найдем в крайнем левом столбце значение 14 и рассмотрим соответствующую строку четвертого столбца значений. Углу 14° в нем соответствует число 0,970. Следовательно, $\cos 14^\circ \approx 0,970$.

5) Определим угол, тангенс которого равен 0,7. Для этого во втором или третьем столбце значений найдем число 0,700. Оно находится во втором столбце, т.е. искомый угол меньше 45° . В соответствующей строке левого столбца значений находим число 35. Следовательно, искомый угол приблизительно равен 35° .

С большей точностью значения тригонометрических функций можно определять по «Четырехзначным математическим таблицам» В. М. Брадиса или с помощью калькулятора.

Ответы и указания

Глава I. Четырехугольники

11. 32 см. 12. 8 см, 4 см, 4 см, 4 см. 13. 100° . 14. 80° , 80° , 100° , 100° . 17. а) Нет; б) да; в) нет. 18. 5 см, 7 см, 8 см, 10 см. 19. 36 см. 20. 60° , 120° , 80° , 100° . 21. 60° . 25. 7 дм. 26. 100° , 100° , 100° , 60° . 41. 60 см. 42. а) 5 см и 7 см; б) 3 см и 9 см; в) 5 см и 7 см. 43. а) 110° и 70° ; б) 55° и 125° ; в) 45° и 135° ; г) 75° и 105° . 44. а) Все по 90° ; б) 40° и 140° ; в) 70° и 110° ; г) 30° и 150° . 45. 10 см и 16 см. 48. Три. 49. Три. 50. 3 дм. 51. 22 м. 52. а) 70° и 110° ; б) 48° и 132° . 53. а) 50° и 130° ; б) 60° и 120° . 54. 54 см. 55. 32 см или 34 см. 59. 12 см. 60. 42 см или 36 см. 61. 30° и 150° . 62. 45° и 135° или все по 90° . 65. Нет. 80. 26 см. 81. 45° и 135° . 92. Указание. Воспользуйтесь равенством $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$, где α и β — соседние углы четырехугольника. 93. Указание. На луче AO постройте отрезок $OC = AO$ и проведите через точку C прямые, параллельные сторонам угла. 94. Указание. Проведите прямые MB и MC , параллельные сторонам угла (B и C — точки пересечения этих прямых со сторонами). Луч MA пройдет через середину отрезка BC . 106. 42 см. 107. 6 см, 12 см. 108. 50° . 109. 40° , 50° . 110. 16 см. 111. а) 30° , 150° ; б) 60° , 120° . 112. а) 70° , 110° ; б) 50° , 130° . 113. 5 м. 114. 20 см. 117. 28 см. 118. 36 см. 119. 6 см, 10 см. 120. а) 36° , 144° ; б) 30° , 150° . 121. а) 45° , 135° ; б) 60° , 120° . 122. 24 см. 123. 36 м. 124. 6 см. 125. 8 см. 129. 30° , 60° . 130. 60° . 131. Указание. Докажите отдельно равенство высот, проведенных к противоположащим сторонам, и высот, проведенных к соседним сторонам. 136. б) 50° , 130° . 143. а) Нет; б) да. 144. Нет; нет. 147. а) $\angle C = 130^\circ$, $\angle B = 140^\circ$; б) 58° , 122° , 122° ; в) 90° , 90° , 135° , 45° . 148. а) 68° и 112° ; б) 90° , 90° , 135° , 45° . 149. 24 см. 150. 16 см. 152. а) 50° и 130° ; б) 90° , 90° , 110° , 70° . 153. а) 90° , 90° , 108° , 72° ; б) 60° и 120° . 154. б) 19 см. 155. а) 60° и 120° ; б) 20 м. 156. 75 см. 157. 35 см. 161. 72° и 108° . 162. 60° и 120° . 178. а) 4; б) 8. 179. 16 см. 180. 6 см, 8 см и 10 см. 181. 21 см. 183. 24 см. 184. 40 см. 185. а) 10 см; б) 6 см и 8 см. 186. а) 8 см; б) 2 см и 8 см. 189. 23 см. 190. 16 см, 20 см и 24 см. 193. Соединить середины сторон отрезками и провести через вершины полученного треугольника прямые, параллельные его сторонам. 194. Линия разреза является средней линией треугольника. 195. $0,75a$. 196. 34 см. 197. 9 см. 198. 9 см, 6 см, 3 см. 201. 2 см. 202. Указание. Докажите, что $AMNH$ — параллелограмм.

203. 2 см. 206. 40° , 40° и 100° . 213. Нет. Высота не больше медианы, проведенной к гипотенузе. 216. а) 120° , 240° ; б) 80° , 280° . 217. а) 90° ; б) 120° ; в) 100° . 218. а) 70° ; б) 40° ; в) 210° . 219. а) 40° ; б) 50° ; в) 150° . 220. α или $180^\circ - \alpha$. 221. 30° или 150° . 222. а) 25° ; б) 6 см. 223. а) 90° ; б) 10 см. 225. а) 55° ; б) 120° . 226. а) 120° ; б) 55° . 227. 70° . 228. 45° , 60° , 75° . 229. 50° , 50° , 80° , или 50° , 65° , 65° , или 25° , 25° , 130° . 232. 80° . 233. 4 см. 234. 9 см. 240. Окружность с диаметром AB без точек A и B . 241. Рис. 193. 242. Указание. Точка касания принадлежит окружности с диаметром AO . 243. 80° . 244. 50 см. 248. Продолжить боковые стороны до пересечения. 249. Нет; да. 252. а) Нет; б) да. 253. а) 134° , 55° ; б) 100° , 80° , 100° ; в) все по 90° . 254. а) 90° , 130° , 90° ; б) 115° и 65° . 258. а) 30 см; б) 28 см. 259. а) 7 см; б) 4 см. 260. 24 см. 261. 70° , 100° , 110° , 80° . 262. 55° и 125° . 267. 4 м и 9 м, 8 м и 5 м. 268. 6 см. 269. 8 см. 274. 30° и 150° . Указание. Опишите окружность около четырехугольника $BMDN$. 275. 45° . Указание. Опишите окружность около четырехугольника $ACBK$. 276. Указание. Опровержение аналогично примеру, предложенному в п. 8.3. 277. Указание. Треугольники ADB и CDE не равны, поскольку признака равенства треугольников по стороне и двум углам не существует. 280. 60° . 281. 60° . 289. 9 см. 293. 6 см и 3 см или 2 см и 1 см. 294. Указание. На рис. 194 треугольник ABC искомый, треугольник AOD вспомогательный, $A OCD$ — параллелограмм. 296. 3 см и 9 см. 297. а) 14,4; б) 59. 299. 60° и 120° .

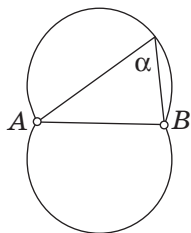


Рис. 193

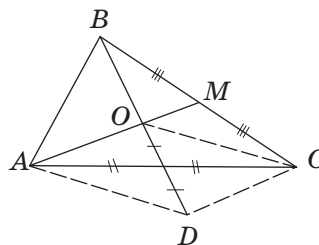


Рис. 194

300. 14 см. 301. 90° , 45° , 45° . 303. 4 см. 304. 18 см. 305. 5 см и 3 см. 306. а) 60° , 120° ; б) 2 см, 6 см, 4 см, 4 см. 307. б) Указание. Проведите через точку M средние линии треугольников ABC и ACD ; докажите по неравенству треугольника, что точки E , F и M лежат на одной прямой. 309. $a + c$ или $|a - c|$. 310. Указание. Медианы треугольника BCD пересекаются в одной точке. 311. Указание. Высоты треугольника с вершинами

в серединах отрезков AB , AC и AD пересекаются в одной точке. **312. Указание.** Данные биссектрисы при пересечении образуют прямоугольный треугольник, в котором отрезок средней линии является медианой. **313. Указание.** Докажите, что вершины искомого треугольника и точка пересечения данных прямых лежат на одной окружности. **314. Указание.** Воспользуйтесь опорной задачей об угле между касательной и хордой (§ 7, № 230). **315.** 60° и 120° . **316. Указание.** Докажите, что четырехугольник $ABMC$ вписанный.

Глава II. Подобие треугольников. Теорема Пифагора

325. а) Да; б) нет. **326.** 6; 12. **327.** 15; 9. **328.** а) 3 см; б) 4 см. **329.** 14 см. **330.** а) 25° ; б) 50° . **331.** 20° , 70° . **332.** а) 10 см, 16 см, 20 см; б) 5 см, 8 см, 10 см. **333.** 19 см. **336.** а) 15 см; б) 12 см. **337.** 7 см. **338.** а) 16; б) 3. **343.** 8 см и 27 см. **345. Указание.** На последнем шаге доказательства выполнено деление на нуль. **346.** 6 см. **347.** 46 см. **348.** Равнобедренный. **349.** Нет. **360.** 120 м. **361.** б) 6 см. **362.** б) 12 см. **364.** 10 см. **365.** 4 см, 4 см, 2 см. **370.** 24 см. **371.** 6 см и 14 см. **373.** Нет; да. **378.** $\frac{2ab}{a+b}$. **379.** $\frac{an+bm}{m+n}$. **382.** 36° , 72° , 72° или 36° , 36° , 108° . **384.** 35° и 55° . **390.** Второй. Треугольник со сторонами a , b , c может не быть прямоугольным или не существовать вовсе. **396.** 60 м. **397.** 13,8 м. **398.** а) 10 см; б) 30 см и 40 см. **399.** 30 см. **401.** б) 6 см. **402.** 20 см и 30 см. **403.** 6 см. **405.** $a_c = \frac{a^2}{c}$, $b_c = \frac{b^2}{c}$. **406.** 30 см и 40 см. **407.** Лежит вне окружности. **408.** 6 см. **409.** 20 см. **410.** 1 : 8 или 7 : 8. **411.** 3 : 4. **413. Указание.** Воспользуйтесь дополнительным построением, которое применяется для доказательства соответствующего признака равенства прямоугольных треугольников. **414.** В 2,5 раза. **415.** 72° , 108° . **426.** а) 41 см; б) 21 см. **427.** а) 26 см; б) 28 см. **431.** 45° . **432.** 36 см. **433.** 12 см. **435.** 24 м. **436.** 10 см или $2\sqrt{7}$ см. **437.** а) 27 см и 36 см; б) 15 см, 20 см, 25 см. **438.** а) 24 см и 26 см; б) 30 см, 40 см, 50 см. **440.** 8 см. **441.** $\sqrt{26}$ см. **442.** 12,5 см и 12 см. **444.** 52 см; да. **445.** 25 м. **446.** 9 см или 21 см. **447.** а) 9; б) 8. **448.** 15 см. **449.** 12 см. **450.** 20,5 см. **Указание.** Докажите, что треугольник ABC прямоугольный. **451.** 12 см. **452.** 13 см. **Указание.** Докажите, что треугольник ABC прямоугольный. **453.** 1 м. **Указание.** Проведите через вершину трапеции прямую, параллельную диагонали. **454.** 10 см. **456. Указание.** Для доказательства обратного утверждения проведите из двух противолежащих вершин четырехугольника перпендикуляры к диагонали и докажите, что их основания совпадают. **463.** а) 12 см; б) 6 см и 4 см. **464.** 3 см.

- 465.** 10 см, 15 см, 20 см. **466.** 21 см, 28 см, 35 см. **467.** 36 см. **468.** 25 см и 30 см. **469.** 64 см. **470.** 20 см. **471.** 4 см. **472.** 6 см. **473.** 15 см. **474.** 72 см. *Указание.* Докажите, что данная точка лежит на биссектрисе треугольника. **475.** 36 см или $(18+6\sqrt{6})$ см. *Указание.* Докажите, что данная точка лежит на биссектрисе треугольника. **476.** *Указание.* Докажите подобие треугольников ACD и CBD . **477.** *Указание.* Проведите высоту BH и докажите подобие треугольников CAD и CBH . **481.** 30° . **482.** 9. **483.** 8 см и 15 см. **484.** 5 см, 5 см, 6 см. **485.** 15 см и 20 см. **486.** 8 см, 9 см, 10 см. **487.** 12 см. **488.** 96 см. **489.** 4,95 м. **494.** а) 4 : 1; б) 1 : 1; в) 1 : 2; 4 : 3. **496.** 4 см. **497.** $\frac{2\sqrt{3}+3}{4}$. **498.** $\frac{2ab}{b-a}$. **499.** 28 см. *Указание.* Докажите подобие прямоугольных треугольников, отсекаемых от данного треугольника высотами. **501.** 2,5 и 1. *Указание.* Центры данных окружностей являются вершинами прямоугольного треугольника. **502.** $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. *Указание.* Проведите через точку M прямые, параллельные сторонам прямоугольника. **503.** Окружность с диаметром AB . **504.** *Решение.* В четырехугольнике $ABCD$ $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$, $BD=d_1$, $AC=d_2$ (рис. 195). Построим треугольник ABE , подобный треугольнику DBC ($\angle 1 = \angle 2$ по построению, $\angle 3 = \angle 4$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу), из подобия имеем: $\frac{a}{AE} = \frac{d_1}{c}$, т. е. $d_1 \cdot AE = ac$. Аналогично из подобия треугольников CBE и DBA имеем: $\frac{b}{CE} = \frac{d_1}{d}$, т. е. $d_1 \cdot CE = bd$. Сложим полученные равенства: $d_1 \cdot AE + d_1 \cdot CE = ac + bd$, т. е. $d_1 \cdot d_2 = ac + bd$, что и требовалось доказать. **505.** *Решение.* Проведем в треугольнике ABC биссектрису CL и обозначим $BC=a$, $AC=b$, $BL=m$, $AL=n$, $CL=l_c$ (рис. 196).

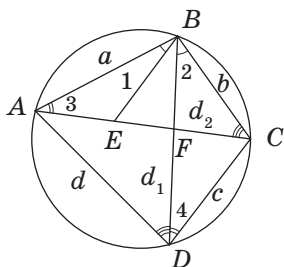


Рис. 195

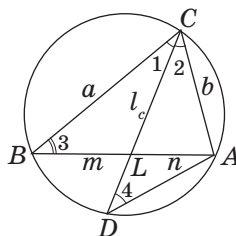


Рис. 196

Опишем окружность около данного треугольника и продолжим биссектрису CL до пересечения с окружностью в точке D . По теореме о пропорциональности хорд имеем: $BL \cdot AL = CL \cdot DL$, или $m \cdot n = l_c \cdot (CD - l_c)$. Из подобия треугольников BCL и DCA ($\angle 1 = \angle 2$ по определению биссектрисы, $\angle 3 = \angle 4$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу) имеем: $\frac{BC}{CL} = \frac{CD}{AC}$, или $\frac{a}{l_c} = \frac{CD}{b}$, т. е. $CD = \frac{ab}{l_c}$. Подставим это значение в равенство $m \cdot n = l_c \cdot (CD - l_c)$, получим: $m \cdot n = l_c \cdot \left(\frac{ab}{l_c} - l_c \right)$, или $l_c^2 = ab - mn$, что и требовалось доказать.

Глава III. Многоугольники. Площади многоугольников

- 513.** а) 720° ; б) 1800° . **514.** а) 5; б) 7; в) 9. **515.** 135° . **516.** 120° . **518.** а) 11; б) нет; в) 13. **519.** Семиугольник; 900° . **520.** 6. **521.** а) 3; б) 5; в) 6. **523.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **525.** 150° , 60° , 150° . **526.** Указание. Воспользуйтесь неравенством треугольника. **527.** Нет. Указание. Воспользуйтесь неравенством треугольника. **539.** а) 36 см^2 ; б) 140 см^2 ; в) 60 см^2 . **540.** 60 см. **541.** 144 м^2 . **542.** $16\sqrt{2}$ см. **543.** 8 см и 16 см. **544.** а) 60 см^2 ; б) 12 см; в) 5 см. **545.** 120 см^2 . **546.** 8 см и 6 см. **547.** 12 см. **548.** 180. **549.** 21 см^2 или 28 см^2 . **550.** 240 см^2 . **551.** а) 72 см^2 ; б) 30 см^2 ; в) 40 см^2 . **552.** а) 78 см^2 ; б) 32 см^2 . **553.** 4 см. **554.** 120 см^2 . **555.** 50 см^2 . **557.** 16 м^2 . Указание. Докажите, что сумма данных расстояний равна стороне квадрата. **558.** 180 см^2 . **559.** 384 см^2 . Указание. Данный угол равен острому углу параллелограмма. **560.** Указание. Рассмотрите отношения катетов прямоугольных треугольников ABE и DCE и докажите, что эти треугольники не являются подобными, т. е. точка C не лежит на прямой BE . **561.** 351 см^2 . **562.** $202,8 \text{ см}^2$. **563.** 60° и 120° ; параллелограмм и равносторонний треугольник. **564.** 8 см^2 . **572.** а) 20; б) 24; в) $4\sqrt{3}$. **573.** а) 60 см^2 ; б) 75 см^2 . **574.** а) 96 см^2 ; б) 12 см^2 . **575.** 60 см. **576.** 10 см. **577.** $1 - a$. **578.** $\frac{1}{2}$. **579.** 80 м^2 . **580.** 8 см и 16 см. **583.** а) 42 см^2 ; б) 64 см^2 . **584.** 48 см^2 . **585.** 24 см^2 . **586.** а) 84 см^2 ; б) 39 см^2 ; в) $4\sqrt{3} \text{ см}^2$. **587.** а) 12 см^2 ; б) 96 см^2 . **588.** 294 см^2 . **589.** $2S$. **590.** S . **591.** 20 см. **592.** 18 см^2 . **596.** а) 486 см^2 ; б) 186 см^2 . **597.** 768 см^2 . **601.** Указание. Искомые прямые делят стороны BC и CD в отношении 1:2, начиная от вершины C . **602.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}$. **603.** а) $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$; б) $7S$. **604.** 80 см^2 . **605.** 1020 см^2 . **607.** а) 1:5; б) 4:5;

в) 1:4. **614.** а) 81 см²; б) 1 см². **615.** $\frac{1}{9}$. **616.** а) 4 см; б) 2 см². **617.** 6 см².
618. 20 см². **619.** 210 см. **620.** 6 см. **621.** 40 см. **624.** 27 см² и 3 см². **625.** 108 м.
626. 36 см². **627.** 250 м². **628.** 12 см и 16 см. **629.** 24 см. **630.** 15 см и 20 см.
633. $1:(\sqrt{2}-1)$. **634.** Искомая прямая делит стороны треугольника в отношении
 3:2 или 4:1, начиная от вершины, противоположащей параллельной ей стороне.
638. 30°, 30°, 120°. **640.** Высота треугольника вдвое больше. **643.** а) 20 см²,
 30 см²; б) 8 см², 12 см², 18 см², 12 см². **646.** 468 см² или 300 см². **647.** б) Если
 высота, проведенная к AB , больше $\frac{1}{2}AB$. **648.** Указание. Разрезы долж-
 ны проходить через середины боковых сторон перпендикулярно основаниям.
649. Указание. Примените метод площадей и обратную теорему Пифагора.
651. Указание. Площадь треугольника не превышает половины произ-
 ведения двух его сторон. **652.** $\frac{2}{3}m_a m_b$. **654.** См. указание к задаче 651.
656. $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$. Указание. Докажите, что площади треугольников AOB
 и COD равны $\sqrt{S_1 S_2}$. **657.** Указание. Докажите, что $S_{AMB} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Глава IV. Решение прямоугольных треугольников

668. $\frac{8}{17}$, $\frac{15}{17}$, $\frac{8}{15}$. **670.** а) $\frac{5}{13}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{15}{8}$. **671.** а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **672.** а) $\sin^2 \alpha$;
 б) $\sin \alpha$; в) 2. **673.** а) $\cos^2 \alpha$; б) $\frac{1}{\cos \alpha}$; в) $\operatorname{tg} \alpha$. **676.** $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{12}$, 2,4.
679. а) $\cos A = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} A = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} A = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sin A = 0,96$, $\operatorname{tg} A = \frac{24}{7}$, $\operatorname{ctg} A = \frac{7}{24}$;
 в) $\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos A = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{ctg} A = \frac{1}{2}$. **680.** а) $\sqrt{3}$; б) 1. **681.** а) $\operatorname{ctg}^2 \alpha$; б) $\cos^3 \alpha$;
 в) $\sin^2 \alpha$. **682.** а) $\sin \alpha$; б) 1; в) 1. **685.** а) $\operatorname{tg} \alpha$; б) $\sin^2 \alpha$; в) $\operatorname{tg}^2 \alpha$. **686.** а) 2; б) $\sin \alpha$;
 в) 1. **687.** 16 см. **688.** 60 см². **695.** а) 54°; б) 8°; в) 60°; г) 45°.
696. а) 40°; б) 30°; в) 45°. **698.** а) 1,5; б) 1,5; в) 0,5. **699.** а) 1; б) 0,5;
 в) 0,5. **700.** а) 0,6 и 0,8; б) 0,5 и $\sqrt{3}$. **701.** а) 0,8 и 0,6; б) 1. **702.** а) 68°; б) 30°.
703. а) 76°; б) 45°. **704.** а) 2; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1. **705.** а) $\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 3; б) 1. **706.** б).
709. 1. **711.** 36 см². **712.** a^2 . **718.** 14 см. **719.** 222 м. **720.** 45°, 45°. **721.** а) $\beta = 60^\circ$,

$a = 4$, $b = 4\sqrt{3}$; б) $\beta = 48^\circ$, $a \approx 6,69$, $b \approx 7,43$. **722.** а) $\alpha = 45^\circ$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{2}$; б) $\beta = 72^\circ$, $c \approx 12,94$, $b \approx 12,31$. **723.** а) $\beta = 62^\circ$, $a \approx 5,63$, $b \approx 10,6$; б) $\alpha = 50^\circ$, $c \approx 10,44$, $b \approx 6,71$. **724.** а) $b = 9$, $\alpha = \beta = 45^\circ$; б) $b = 7$, $\alpha \approx 74^\circ$, $\beta \approx 16^\circ$. **725.** а) $c = 12$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$; б) $c = 41$, $\alpha \approx 13^\circ$, $\beta \approx 77^\circ$. **726.** а) $b = 8$, $\alpha \approx 37^\circ$, $\beta \approx 53^\circ$; б) $c = 6$, $\alpha \approx 56^\circ$, $\beta \approx 34^\circ$. **729.** $\approx 9,40$ и $\approx 3,42$. **730.** 60 см. **731.** $\approx 45^\circ$ и $\approx 135^\circ$. **732.** а) $AB = 8$, $BC = 8\sqrt{3}$, $AC = 16$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$; б) $BC \approx 293,94$, $AB \approx 51,83$, $AC \approx 298,48$, $\angle A = 80^\circ$. **733.** $AB = 3,75$, $BC = 5$, $AC = 6,25$, $\angle A \approx 53^\circ$, $\angle C \approx 37^\circ$. **734.** $\approx 10,99$

и $\approx 11,70$. **735.** $8 + 5\sqrt{2}$. **736.** $\approx 68^\circ$. **737.** $\approx 51^\circ$. **738.** $a = \frac{m}{1 + \operatorname{ctg} \alpha}$, $b = \frac{m}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$, $c = \frac{m}{\sin \alpha + \cos \alpha}$, $\beta = 90^\circ - \alpha$. *Указание.* Выразите две стороны треугольника че-

рез третью сторону и угол α . **739.** $\alpha = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$, $\beta = 45^\circ + \frac{\varphi}{2}$, $a = c \sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$,

$b = c \sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$. **740.** 30° и 60° . **741.** $\frac{d}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$. **742.** $\approx 16^\circ$. **743.** 4 см,

$4\sqrt{2}$ см, 32 см^2 . **744.** $\frac{2r}{\sin \alpha}$, $\frac{4r^2}{\sin \alpha}$. *Указание.* Проведите высоту h и воспользуйтесь тем, что $h = 2r$. **745.** $5\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$, $10(\sqrt{3} - 1)$. *Указание.*

Проведите высоту к данной стороне и составьте уравнение. **747.** $\frac{l \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$.

748. $\approx 37^\circ$. **749.** Не менее 2° . **751.** $\frac{\sqrt{1-a^2}}{1+a}$. **752.** $\frac{1}{4}$. *Указание.* Докажи-

те подобие треугольников ACE и BCD . **753.** $\frac{1}{2}d(1 + \sin \alpha)$, $\frac{1}{2}d(1 - \sin \alpha)$.

754. $\frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}$. *Указание.* Постройте треугольник с углами 75° , 45° и 60°

и проведите его наименьшую высоту. **755.** $S \cos^2 \alpha$. *Указание.* Докажите, что треугольники ABC и AB_1C_1 подобны с коэффициентом $\cos \alpha$.

Предметный указатель

А

Аксиомы площадей 164–165

Б

Боковые стороны трапеции 41

В

Вершины многоугольника 157

— четырехугольника 7

Внутренняя область

многоугольника 158

— — четырехугольника 8

Высота параллелограмма 15

— трапеции 41

Г

Градусная мера дуги окружности 61

Д

Диагональ многоугольника 157

— четырехугольника 8

И

Инцентр 82

К

Квадрат 33

Косинус острого угла

прямоугольного треугольника 205

Котангенс острого угла

прямоугольного треугольника 206

Коэффициент подобия 105

М

Метрические соотношения

в прямоугольном треугольнике 121

Многоугольник 157

— вписанный в окружность 158

— выпуклый 158

— описанный около
окружности 158

— плоский 158

Н

Наклонная 131

О

Ортоцентр 84

Основания трапеции 41

Основное тригонометрическое
тождество 207

Отношение отрезков 103

— площадей подобных
треугольников 186

П

Параллелограмм 14

Периметр многоугольника 157

— четырехугольника 8

Площадь

— квадрата 166

— многоугольника 163, 165

— параллелограмма 167

— прямоугольника 166

— ромба 174

— трапеции 175

— треугольника 173

— — прямоугольного 174

— — равностороннего 174

Подобные треугольники 105

Признак подобия треугольников

— — — по двум сторонам
и углу между ними 112

— — — по двум углам 111

— — — по трем сторонам 114

— прямоугольника 31

— равнобокой трапеции 43

Признаки

— параллелограмма 22

— подобия прямоугольных
треугольников 120

Проекция наклонной 131

Пропорциональность

- отрезков секущей и касательной 138
- отрезков хорд 137

Пропорциональные отрезки 103

Прямоугольник 31

Р

Равновеликие фигуры 165

Равносильные утверждения 35

Решение прямоугольных треугольников 218

Ромб 32

С

Свойства квадрата 34

- параллелограмма 15
- перпендикуляра, наклонных и проекций 131
- ромба 32

Свойство биссектрисы треугольника 136

- прямоугольника 31
- равнобокой трапеции 42
- средней линии трапеции 54
- средней линии треугольника 53

Синус острого угла прямоугольного треугольника 205

Средний пропорциональный отрезок 121

Средняя линия трапеции 54

- — треугольника 52

Стороны многоугольника 157

- четырехугольника 7

Сумма углов выпуклого n -угольника 159

- — четырехугольника 9

Т

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника 205

Теорема обратная теореме

Пифагора 130

- Пифагора 128, 189
- Фалеса 51

Точка пересечения биссектрис треугольника 84

- — высот треугольника 84
- — медиан треугольника 82
- — серединных перпендикуляров к сторонам треугольника 84

Трапеция 41

- прямоугольная 42
- равнобокая 42

У

Угол внешний выпуклого многоугольника 158

- внутренний выпуклого многоугольника 158
- — — четырехугольника 9
- вписанный 61
- центральный 60

Условие достаточное 24

- необходимое 24
- необходимое и достаточное 25

Ф

Формулы дополнения 213

Ц

Центроид (центр масс) 83

Ч

Четырехугольник 7

- вписанный в окружность 70
- выпуклый 8
- описанный около окружности 72

Содержание

Глава I. Четырехугольники

§ 1. Четырехугольник и его элементы	7
§ 2. Параллелограмм и его свойства	14
§ 3. Признаки параллелограмма	22
§ 4. Виды параллелограммов	31
§ 5. Трапеция	41
Выдающиеся математики Украины. Погорелов Алексей Васильевич	50
§ 6. Теорема Фалеса. Средние линии треугольника и трапеции	51
§ 7. Вписанные углы	60
§ 8. Вписанные и описанные четырехугольники	70
§ 9*. Замечательные точки треугольника	82
Итоги	88
Выдающиеся математики Украины. Боголюбов Николай Николаевич	100

Глава II. Подобие треугольников. Теорема Пифагора

§ 10. Подобные треугольники	103
§ 11. Признаки подобия треугольников	111
§ 12. Подобие прямоугольных треугольников	120
§ 13. Теорема Пифагора и следствия из нее	128
§ 14. Применение подобия треугольников	136
Итоги	144
Выдающиеся математики Украины. Глушков Виктор Михайлович	154

Глава III. Многоугольники. Площади многоугольников

§ 15. Многоугольник и его элементы	157
§ 16. Площадь многоугольника. Площади прямоугольника и параллелограмма	163
§ 17. Площади треугольника, ромба и трапеции	173
§ 18. Применение площадей	186
Итоги	194
Выдающиеся математики Украины. Ляпунов Александр Михайлович	199
Выдающиеся математики Украины. Крейн Марк Григорьевич	202

Глава IV. Решение прямоугольных треугольников

§ 19. Тригонометрические функции острого угла	205
§ 20. Вычисление значений тригонометрических функций	213
§ 21. Решение прямоугольных треугольников	218
Итоги	226
Выдающиеся математики Украины. Астряб Александр Матвеевич	232
Выдающиеся математики Украины. Гнеденко Борис Владимирович	233
Тематика сообщений и рефератов	234

Приложения

Приложение 1. Обобщенная теорема Фалеса и площадь прямоугольника	235
Приложение 2. Золотое сечение	238
Приложение 3. Таблица значений тригонометрических функций	243
Ответы и указания	246
Предметный указатель	253

Сведения о состоянии учебника

№ п/п	Фамилия и имя ученика / ученицы	Учебный год	Состояние учебника	
			в начале года	в конце года
1				
2				
3				
4				
5				

Навчальне видання
ЄРШОВА Алла Петрівна
ГОЛОБОРОДЬКО Вадим Володимирович
КРИЖАНОВСЬКИЙ Олександр Феліксівич
ЄРШОВ Сергій Володимирович

«ГЕОМЕТРІЯ»

підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів
з навчанням російською мовою
(російською мовою)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Редактор *О. В. Костіна*. Технічний редактор *О. В. Сміян*.

Художник *В. Д. Хорошенко*. Коректор *Н. В. Красна*

Підписано до друку 23.06.2016. Формат 70×90/16. Папір офсетний.

Гарнітура Шкільна. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 18,67. Обл.-вид. арк. 24,27.

Наклад 5699 прим. Зам. № 30706-16.

ТОВ Видавництво «Ранок».

Свідцтво ДК № 3322 від 26.11.2008. 61071 Харків, вул. Кібальчича, 27, к. 135.

Адреса редакції: 61145 Харків, вул. Космічна, 21а, 7 поверх.

E-mail: office@ranok.com.ua. Тел. (057) 701-11-22, 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

www.ranok.com.ua

Під час підготовки видання були використані матеріали із сайтів:
www.freepik.com, www.freeimages.com, uk.wikipedia.org, www.morguefile.com,
www.stocksnap.com, www.freebiefoto.com

Надруковано у друкарні ТОВ «Тріада Принт»
м. Харків, вул. Киргизська, 19. Тел. 703-12-21, e-mail: sale@triada.kharkov.ua