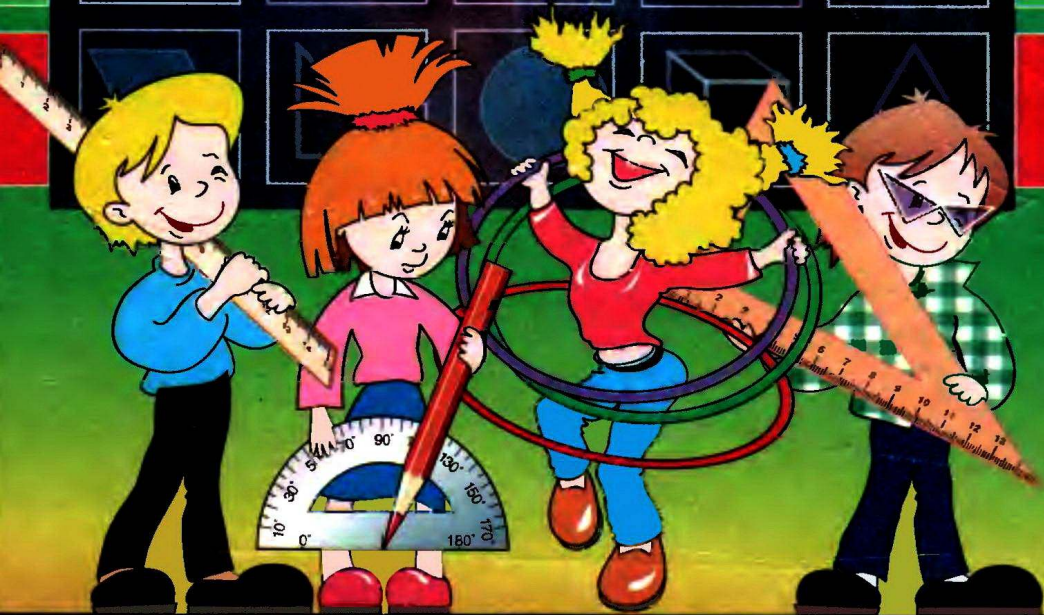
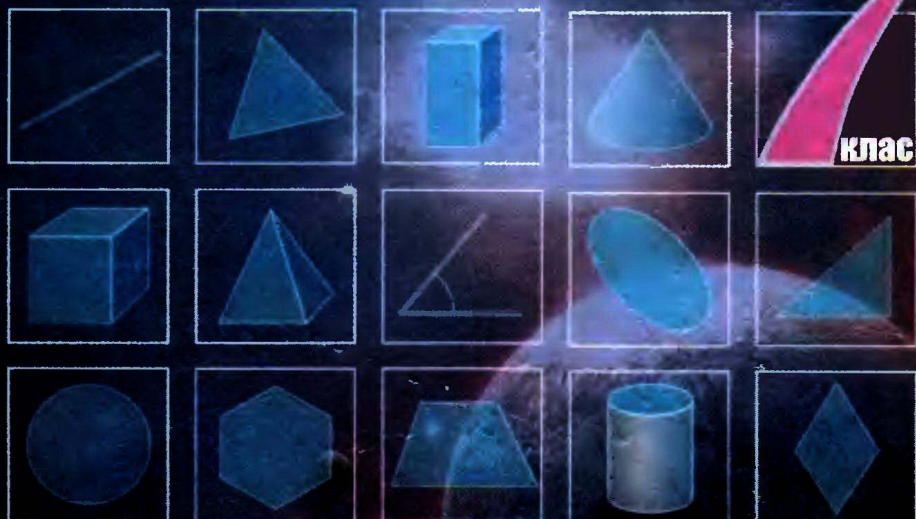


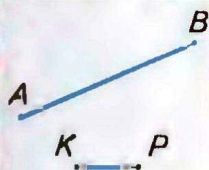
Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова

# ГЕОМЕТРІЯ

7  
клас



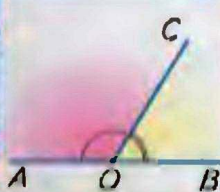




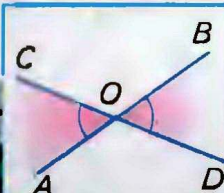
● Довжини відрізків вимірюють у:  
метрах, сантиметрах, міліметрах, кілометрах, футах, дюймах ...



● Кути вимірюють у:  
градусах, мінутах, секундах, румбах ...



● Сума суміжних кутів дорівнює  $180^\circ$ .



● Вертикальні кути рівні.

● ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

Дві прямі паралельні, якщо з січною вони утворюють:

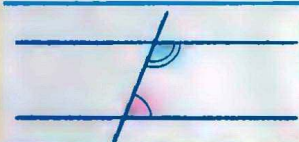
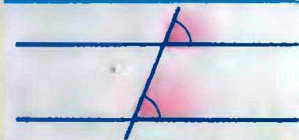
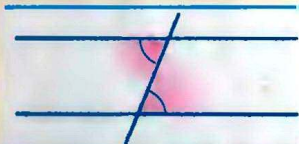
1) рівні внутрішні різносторонні кути;

або

2) рівні відповідні кути;

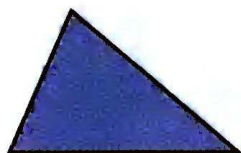
або

3) внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює  $180^\circ$ .





## ● ВИДИ ТРИКУТНИКІВ



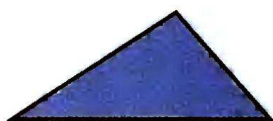
гострокутні



прямокутні



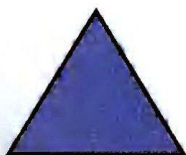
тупокутні



рівносторонні



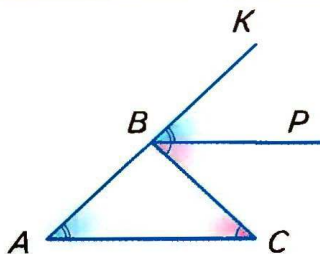
рівнобедрені



рівносторонні

● Сума кутів трикутника дорівнює  $180^\circ$ .

● Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.



## ● ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

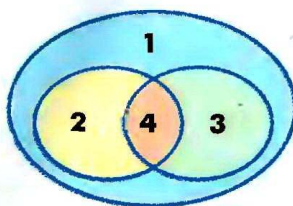
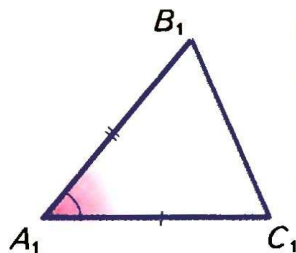
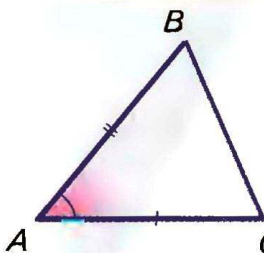
$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1,$$

якщо:

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1;$$

$$AB = A_1B_1, \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1;$$

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, BC = B_1C_1.$$

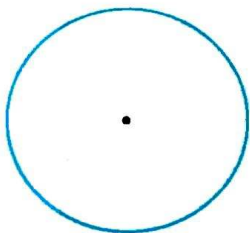


- 1 — трикутники
- 2 — рівнобедрені
- 3 — прямокутні
- 4 — прямокутні рівнобедрені

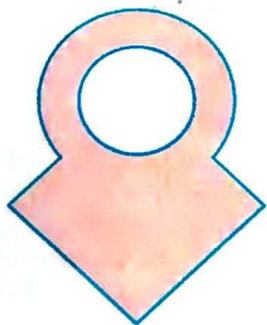


## § 1. Точки і прямі

*Геометрія — це наука про геометричні фігури та їх властивості.* Найпростіша геометрична фігура — *точка*. Кожна інша геометрична фігура складається з точок. Наприклад, *коло* — це фігура, що складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (мал. 1). *Відрізок* також складається з точок. Будь-яка *множина точок є геометричною фігурою*. Частина геометричної фігури чи об'єднання кількох фігур — теж геометрична фігура (мал. 2).



■ Мал. 1



■ Мал. 2

Однією з геометричних фігур є *площина*. Уявлення про частину площини дає поверхня стола, стелі, підлоги. В геометрії площина вважається необмеженою, ідеально рівною і гладенькою.

Фігури, які можна розмістити в одній площині, називають *плоскими*. Всі названі вище геометричні фігури — плоскі. А от куб, куля, прямокутний паралелепіпед — *неплоскі фігури* (мал. 3). Частина геометрії, в якій вивчаються плоскі фігури, називається *планіметрією* (від латинського слова «планум» — площина).

Ми починаємо вивчати планіметрію.

Насамперед розглянемо, як можуть бути розташовані на площині точки і прямі.

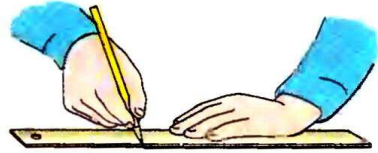


■ Мал. 3



Ви вже знаєте, як за допомогою лінійки проводять прямі (мал. 4).

**Пряма** в геометрії — ідеально рівна і нескінченна в обидва боки. Як і кожна інша фігура, пряма складається з *точок*. Якщо точка  $A$  лежить на прямій  $a$ , говорять, що пряма  $a$  проходить через точку  $A$ . Символічно записують це так:  $A \in a$ . Якщо точка  $B$  не лежить на прямій  $a$ , пишуть:  $B \notin a$  (мал. 5).



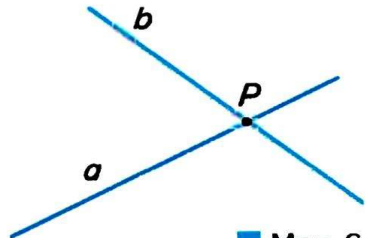
■ Мал. 4



■ Мал. 5

**!** **Якби не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.**

Через одну точку можна провести безліч прямих. На малюнку 6 зображено прямі  $a$  і  $b$ , які проходять через точку  $P$ . Це їх спільна точка, інших спільних точок прямих  $a$  і  $b$  не мають. Якщо дві прямі мають тільки одну спільну точку, кажуть, що вони *перетинаються в цій точці*. Прямі  $a$  і  $b$  перетинаються в точці  $P$ .

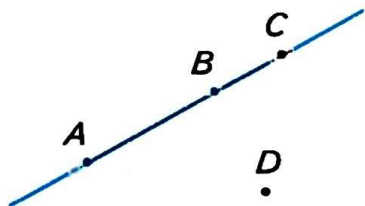


■ Мал. 6

Якщо прямій належать точки  $A$  і  $B$ , кажуть, що ця пряма *проходить через точки  $A$  і  $B$* . Позначають її:  $AB$ .

**!** **Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і тільки одну.**

Чи можна провести пряму через три точки? Не завжди. Якщо точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  розміщені, як показано на малюнку 7, через них пряму провести можна. А через точки  $A$ ,  $B$  і  $D$  — не можна. Кажуть, що *точки  $A$ ,  $B$  і  $D$  не лежать на одній прямій*. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  лежать на одній прямій, причому  $B$  — між  $A$  і  $C$ .

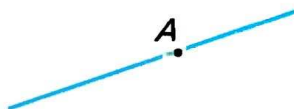


■ Мал. 7

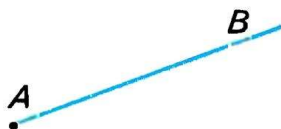




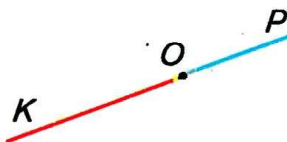
**З трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.**



■ Мал. 8




■ Мал. 9



■ Мал. 10

Якщо точка  $B$  лежить між  $A$  і  $C$ , кажуть, що точки  $A$  і  $C$  лежать по різні боки від  $B$ , а точки  $A$  і  $B$  — по один бік від  $C$ .

Надруковані вище жирним шрифтом три речення, позначені знаком , — це *основні властивості розміщення точок на прямій*.

Будь-яка точка  $A$  прямої ділить цю пряму на дві частини (мал. 8). Кожну із частин прямої разом із точкою  $A$  називають *променем*, який виходить з точки  $A$ . Точку  $A$  називають *початком променя*. Якщо кажуть «промінь  $AB$ », то мають на увазі промінь з початком у точці  $A$  (мал. 9).

Два промені, які мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої, називаються *доповняльними*. На малюнку 10 зображено промінь  $OK$  — доповняльний для променя  $OP$  і промінь  $OP$  — доповняльний для  $OK$ .

## Для допитливих

Геометрія — частина математики (мал. 11). Геометрична наука багата за змістом і методами дослідження. До неї входять: елементарна геометрія, вища геометрія, неевклідові геометрії, топологія та ін. У школі вивчають тільки *елементарну геометрію*.



■ Мал. 11

Геометрія тісно пов'язана з багатьма іншими науками, насамперед із фізикою. Проте фізика займається вивченням матеріальних тіл (які мають масу, температуру, колір тощо), а в геометрії абстрагуються від усього матеріального. *Абстрагуватися* — це означає подумки відриватися від конкретних об'єктів, які нас оточують. Абстрагуючись від матеріальних речей, ми уявно створюємо *ідеальні об'єкти* зі схожими властивостями. Кінець голки, натягнута струна — це матеріальні



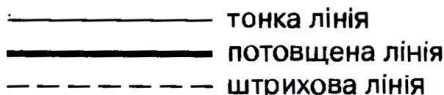
об'єкти. Вони мають певну товщину, довжину, масу. Абстрагуючись від таких фізичних властивостей, людська уява створила абстрактні геометричні поняття *точка*, *пряма*. У природі абстрактної прямої немає, але це поняття існує в людській уяві. І дуже корисне поняття, бо всі властивості прямої і її частин, виявлені в геометрії, переносяться на мільйони і мільярди всіх натягнутих струн, прямолінійних рейок, труб, стрічок тощо. Не існує в природі і геометрична *площина* — без товщини, ідеально рівна і гладенька, нескінченна в кожному її напрямі. Але для науки це ідеальне поняття дуже важливе, бо властивості, встановлені в геометрії для площини і її частин, можна переносити на властивості мільярдів конкретних шибок, стін та інших предметів, які мають плоскі поверхні.

### Кресліть красиво

Проводячи відрізок, вістря олівця не слід торкатися нижнього ребра лінійки, а треба трохи відступити від нього.



Геометричний відрізок не має товщини. Але щоб зробити малюнок зрозумілішим і красивішим, креслярі іноді зображують його потовщеною лінією. Іноді — штриховою лінією або й іншим кольором:



### Запитання і завдання для самоконтролю

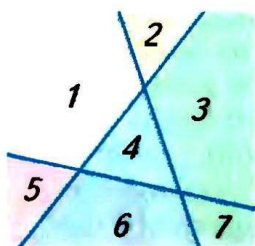
1. Що таке геометрія? Що таке планіметрія?
2. Наведіть приклади плоских і неплоских фігур.
3. Що означають записи  $A \in a$ ,  $B \notin b$ ?
4. Опишіть поняття *точка*, *пряма*, *площина*.
5. Наведіть приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є точка, пряма, площина.
6. Сформулюйте основні властивості розміщення точок на прямій.
7. Що означає вислів «точка  $B$  лежить між  $A$  і  $C$ »?
8. Що таке промінь? Як позначають промені?
9. Які промені називають доповняльними?

## ● Виконаємо разом

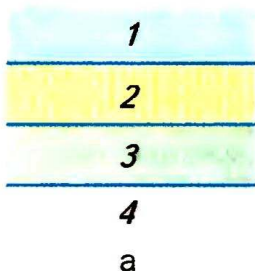
■ На скільки частин можуть розбивати площину три її прямі?

■ Якщо прямі розташовані, як показано на малюнку 12, то вони розбивають площину на 7 частин. Якщо вони розташовані, як показано на малюнку 13, то вони розбивають площину на 4 або 6 частин.

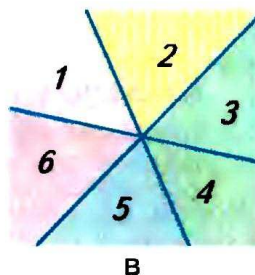
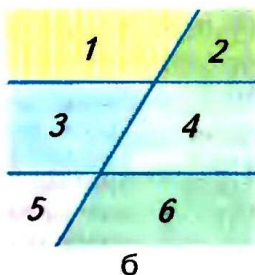
■ **Відповідь.** Три прямі розбивають площину, якій вони належать, на 4, 6 або 7 частин.



■ Мал. 12



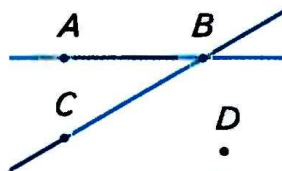
■ Мал. 13



## ● Задачі і вправи

### ■ ВИКОНАЙТЕ УСНО

1. Чи через кожні дві точки можна провести пряму? Чи існують дві точки, через які можна провести пряму?
2. Чи через кожні три точки можна провести пряму? Чи існують три точки, через які можна провести пряму?
3. Провідмініайте слово: а) *точка*; б) *пряма*; в) *площина*.
4. Опишіть, як взаємно розташовані точки і прямі на малюнку 14.
5. На скільки частин пряму ділить її точка? А дві точки?
6. Чи можна вважати доповняльними промені  $PK$  і  $KP$  (див. мал. 10)? А промені  $OP$  і  $KP$ ? Чому?



■ Мал. 14

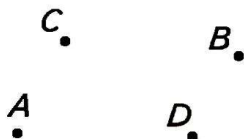


## A

7. Позначте в зошиті точки  $A$  і  $B$  та проведіть через них пряму. Назвіть цю пряму.
8. Проведіть пряму. Позначте кілька точок, що належать цій прямій, і кілька точок, що їй не належать.
9. Дано точку  $A$ . Проведіть через неї три прямі. Чи можна через точку  $A$  провести десять прямих? А мільйон прямих?
10. Пряма  $a$  і точки  $A, B$  такі, що  $A \in a$  і  $B \notin a$ . Зобразіть це на малюнку.
11. Прямі  $k$  і  $p$  перетинаються в точці  $X$ . Зобразіть це на малюнку. Чи правильно, що  $X \in k$  і  $X \in p$ ?
12. Пряма  $AB$  перетинає пряму  $AC$  у точці  $A$ , а пряму  $BC$  — у точці  $B$ . Чи належить точка  $C$  прямій  $AB$ ?
13. Позначте точки  $K, P$  і  $T$  так, щоб через них можна було провести пряму. Як можна назвати цю пряму?
14. Позначте на прямій точки  $A, B, C$  так, щоб  $A$  і  $B$  лежали по один бік від  $C$ , а  $A$  і  $C$  — по один бік від  $B$ .
15. Дано пряму  $a$ . Позначте точки  $A, B$  і  $C$  так, щоб прямі  $AB$  і  $a$  перетинались у точці  $C$ , яка лежить між  $A$  і  $B$ .
16. Прямі  $a$  і  $b$  перетинаються в точці  $P$ . Скільки променів утворилось?
17. На скільки частин площину ділить її пряма? А дві прямі? Зобразіть усі випадки.

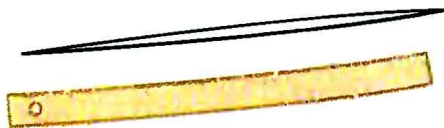
## B

18. Позначте точки  $A, B, C$  і  $D$  так, щоб прямі  $AB$  і  $CD$  перетинались, а промені  $AB$  і  $CD$  не перетинались.
19. Чи можна розмістити точки  $A, B, C$  і  $D$  так, щоб промені  $AB$  і  $CD$  перетинались, а промені  $AC$  і  $BD$  не перетинались?
20. Накресліть три прямі  $AB, BC$  і  $AC$ . На скільки частин розбивають ці прямі площину?
- 21\*. Позначте чотири точки так, щоб жодні три з них не лежали на одній прямій (мал. 15). Скільки існує прямих, що проходять через будь-які дві з цих точок? На скільки частин розбивають ці прямі площину?

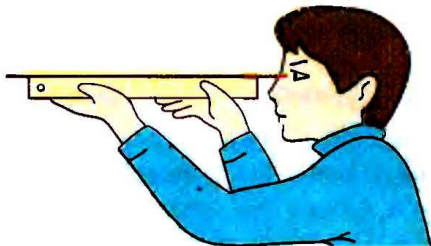


■ Мал. 15

- 22.** Учень провів спочатку одну пряму, а потім, перевернувши лінійку, — другу й одержав лінії, що перетинаються в двох точках (мал. 16). Що можна сказати про його лінійку? Чому?
- 23.** Щоб перевірити лінійку, дивляться вдовж її ребра (мал. 17). Що бачать, якщо лінійка викривлена?



■ Мал. 16



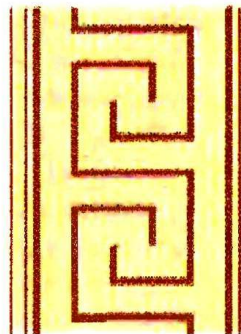
■ Мал. 17

### ■ ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ ■

- 24.** Покажіть, як, перегнувши аркуш паперу, можна одержати «лінійку» для проведення прямих.

### ■ ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ■

- 25.** Назвіть і зобразіть геометричні фігури, які ви розглядали в попередніх класах.
- 26.** Накресліть відрізок завдовжки 4 см і відрізок удвічі довший.
- 27.** Накресліть кути: гострий, прямий, тупий, розгорнутий. Зафарбуйте їх внутрішні області.
- 28.** Знайдіть периметр трикутника, сторони якого дорівнюють 5 см, 7 см і 8,5 см.
- 29.** Знайдіть периметр квадрата, якщо він більший за довжину однієї сторони на 6 см.
- 30.** Перемалюйте в зошит частину давньогрецького орнаменту (мал. 18). Зробіть стрічку з ним удвічі довшою.



■ Мал. 18



## § 2. Відрізки і їх довжини

Дві точки прямої розділяють цю пряму на три частини: два промені і відрізок.

**Відрізком  $AB$**  називається частина прямої, яка складається з точок  $A$  і  $B$  та всіх точок, що лежать між ними.

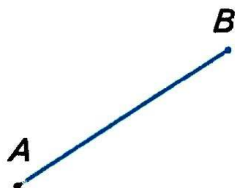
Точки  $A$  і  $B$  називають **кінцями відрізка  $AB$** . Усі інші точки цього відрізка — його **внутрішні точки**.

На малюнку 19 зображено відрізок  $AB$ . Точки  $A$  і  $B$  — його кінці, а будь-яка точка, що лежить між  $A$  і  $B$ , — внутрішня точка відрізка  $AB$ .

Два відрізки **перетинаються**, якщо вони мають тільки одну спільну внутрішню точку.

Щоб виміряти відрізки, треба мати **одиничний відрізок** (одиницю вимірювання). Відрізок, зображений на малюнку 20, вважаємо одиничним. Його довжина дорівнює 1 см. Якщо на відрізку  $AB$  одиничний відрізок відкладається рівно 3 рази, то це означає, що довжина відрізка  $AB$  дорівнює 3 см (мал. 21). Якщо на відрізку  $EP$  одиничний відрізок відкладається два рази з остачею, а в остачі десята частина одиничного відрізка відкладається 7 разів, то довжина відрізка  $EP$  дорівнює 2,7 см. Пишуть:  $AB = 3$  см,  $EP = 2,7$  см.

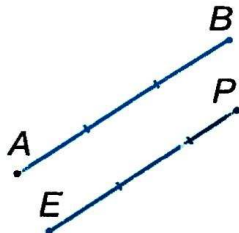
За одиничний відрізок можна брати відрізок завдовжки 1 м, 1 км, 1 фут, 1 дюйм тощо.



■ Мал. 19



■ Мал. 20



■ Мал. 21



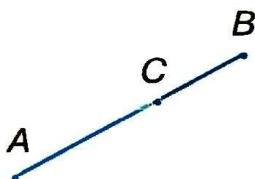
**Кожний відрізок має певну довжину.**

Два відрізки називають **рівними**, якщо рівні їх довжини.

З двох відрізків **більшим** вважається той, довжина якого більша.

У сантиметрах вимірюють порівняно невеликі відрізки. Більші відрізки вимірюють у дециметрах, метрах, кілометрах; менші — в міліметрах. Нагадаємо, що

$$1 \text{ км} = 1000 \text{ м}, 1 \text{ м} = 10 \text{ дм} = 100 \text{ см} = 1000 \text{ мм}.$$



■ Мал. 22

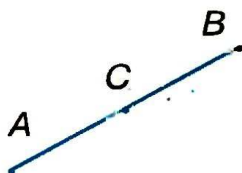
Довжину відрізка називають також *відстанню* між його кінцями. Якщо  $XU = 18$  см, то це означає, що *відстань між точками*  $X$  і  $U$  дорівнює 18 см. Відстань між  $X$  і  $U$  завжди дорівнює відстані між  $U$  і  $X$ .

Якщо точка  $C$  відрізка  $AB$  розбиває його на дві частини, довжини яких дорівнюють, наприклад, 2 см і 1,2 см, то довжина відрізка  $AB$  дорівнює 3,2 см (мал. 22).



**Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка його внутрішня точка.**

Надруковані вище жирним шрифтом два речення, позначені знаком **!**, — це *основні властивості вимірювання відрізків*.



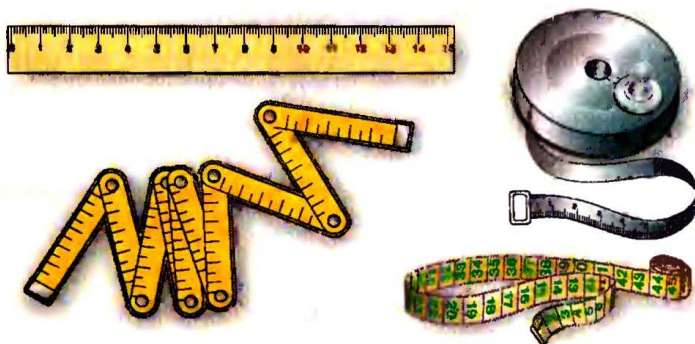
■ Мал. 23

*Серединою відрізка* називається його внутрішня точка, яка розбиває цей відрізок на дві рівні частини.

Якщо точка  $C$  — середина відрізка  $AB$ , то  $AC = CB$  (мал. 23).

Якщо точка  $C$  не належить відрізку  $AB$ , то сума довжин відрізків  $AC$  і  $CB$  більша від  $AB$ . Отже, для будь-яких трьох точок  $A$ ,  $B$  і  $C$  завжди  $AB + BC \geq AC$ .

Вимірювати довжини відрізків доводиться багатьом фахівцям. Креслярі вимірюють відрізки масштабними лінійками, столяри — складними метрами, кравці — клейончастими сантиметрами, будівельники — рулетками (мал. 24).



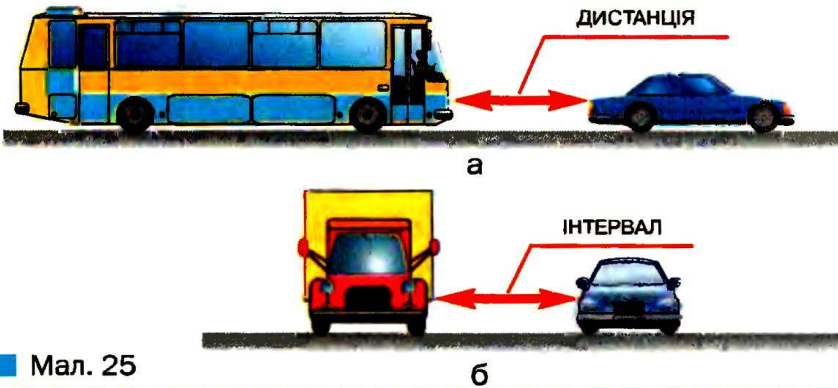
■ Мал. 24



## Для допитливих

**Вимірювальні прилади** забезпечують ту чи іншу точність. Відстань між містами звичайно визначають з точністю до кілометра, між берегами річки — з точністю до метра, довжину олівця — з точністю до міліметра, діаметр деталі ручного годинника — з точністю до десятої чи й сотої частини міліметра. Зрозуміло, що для вимірювань різних довжин і відстаней застосовують відповідні вимірювальні засоби: крім уже названих, циркулі, кронциркулі, штангенциркулі, далекоміри тощо. З деякими з них ви ознайомитесь пізніше. Одиниці довжини бувають різні. В англійських країнах найчастіше використовують такі: *фут, дюйм, миля*. Докладніше про них — далі.

На практиці для різних відстаней існують різні назви: *довжина, ширина, висота, глибина, дистанція, інтервал* (мал. 25).



Мал. 25

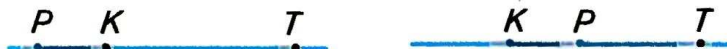
б

## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке відрізок? Що таке кінці відрізка?
2. Що таке відстань між двома точками?
3. Що означає вислів «два відрізки перетинаються»?
4. Сформулюйте основні властивості вимірювання відрізків.
5. Які відрізки називаються рівними?
6. Що таке середина відрізка?
7. Яка нерівність виконується для будь-яких трьох точок?

## ● Виконаємо разом

- 1** Промінь — частина прямої. Чи правильно говорити, що промінь коротший за пряму?
- 2** Пряма і промінь не мають довжин, тому порівнювати їх довжини немає сенсу.
- Відповідь.** Ні.
- 2** Точки  $K$ ,  $P$  і  $T$  лежать на одній прямій. Знайдіть відстань між  $P$  і  $T$ , якщо  $KP = 1,7$  м,  $KT = 4,8$  м. Скільки розв'язків має задача?
- Позначимо точки  $K$  і  $T$  такі, що  $KT = 4,8$  м. Точка  $P$  прямої  $KT$  віддалена від  $K$  на  $1,7$  м. Можливі два випадки (мал. 26):
- а)  $K$  лежить між  $P$  і  $T$ :  $PT = 1,7$  м +  $4,8$  м =  $6,5$  м;  
 б)  $P$  лежить між  $K$  і  $T$ :  $PT = 4,8$  м –  $1,7$  м =  $3,1$  м.



■ Мал. 26

**Відповідь.** Задача має два розв'язки:  $6,5$  м;  $3,1$  м.

## ● Задачі і вправи

### ВІКОНАЙТЕ УСНО

- 31.** Знайдіть довжину відрізка  $AB$ , якщо точка  $C$  — його середина і  $CB = 5$  дм.
- 32.** Знайдіть довжину відрізка, який довший за свою половину на  $35$  см.
- 33.** Точка  $C$  ділить відрізок  $AB$  у відношенні  $1 : 2$  (мал. 27). Знайдіть:
- 1)  $CB$ , якщо  $AC$  дорівнює  $1$  см;  $3$  дм;  $10$  км;
  - 2)  $AB$ , якщо  $AC$  дорівнює  $2$  см;  $5$  дм;  $30$  м;
  - 3)  $AB$ , якщо  $CB$  дорівнює  $2$  см;  $6$  м;  $12$  км.
- 34.** Знайдіть довжину відрізка, якщо точки  $K$  і  $P$  ділять його на три рівні частини і  $KP = 7$  см.
- 35.** Точки  $A$  і  $B$  лежать по різні боки від прямої  $a$ . Чи перетинає відрізок  $AB$  пряму  $a$ ?
- 36.** Точки  $K$  і  $P$  лежать по один бік від прямої  $c$ . Чи перетинає відрізок  $KP$  пряму  $c$ ? А пряма  $c$  перетинає пряму  $KP$ ?
- 37.** Точка  $A$  лежить між  $B$  і  $C$ . Чи є точка  $B$  внутрішньою точкою відрізка  $AC$ ?



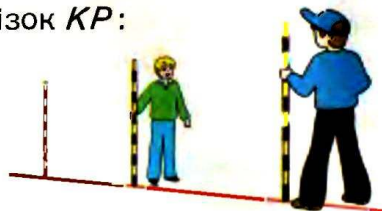
■ Мал. 27



**A**

- 38.** Позначте на прямій точки  $A$  і  $B$ . Який відрізок утворився? Зобразіть його середину.
- 39.** Позначте точки  $A, B, C, D$  так, щоб ніякі три з них не лежали на одній прямій. Побудуйте відрізки  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$ .
- 40.** Позначте на прямій точки  $A, B, C, D$  так, щоб відрізки  $AC$  і  $BD$  не мали спільних точок і щоб точки  $C$  і  $B$  лежали між  $A$  і  $D$ . Знайдіть спільну частину відрізків  $AB$  і  $CD$ .
- 41.** Прямі  $AB$  і  $CD$  перетинаються,  $C$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ . Чи перетинаються відрізки  $AB$  і  $CD$ ?
- 42.** Відрізок  $AB$  перетинає пряму  $a$ , а відрізок  $BC$  не перетинає її, причому  $C \notin a$ . Чи перетинає пряму  $a$  відрізок  $AC$ ?
- 43.** Накресліть відрізки  $AB, AC, AD, CB, CD, BD$  такі, щоб точка  $C$  лежала між  $A$  і  $B$ , а точка  $B$  — між  $C$  і  $D$ . Скільки спільних точок мають відрізки  $AC$  і  $BD, AC$  і  $CB, AB$  і  $CD$ ?
- 44.** Точка  $X$  лежить між  $A$  і  $B$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$ , якщо:
- а)  $AX = 2,5$  см,  $XB = 3,4$  см.
  - б)  $AX = 5,3$  м,  $XB = 4,2$  м.
  - в)  $AX = 2\frac{1}{3}$  дм,  $XB = 6\frac{2}{3}$  дм.
- 45.** Точка  $M$  лежить між  $K$  і  $P$ . Знайдіть відстань між  $M$  і  $P$ , якщо:
- а)  $KP = 0,9$  дм,  $KM = 0,3$  дм.
  - б)  $KP = 2,6$  дм,  $KM = 1,4$  дм.
  - в)  $KP = 2\frac{5}{6}$  дм,  $KM = \frac{1}{6}$  дм.
- 46.** Точка  $C$  лежить між  $A$  і  $B$ .  $AC = 5$  см, відстань  $BC$  — на 3 см більша. Знайдіть  $AB$ .
- 47.** Чи лежать точки  $A, B$  і  $C$  на одній прямій, якщо:
- а)  $AB = 2,5$  см,  $BC = 3,8$  см,  $AC = 1,3$  см;
  - б)  $AB = 1,9$  дм,  $BC = 2,9$  дм,  $AC = 4,9$  дм?
- 48.** Точки  $A, B, C, K$  лежать на одній прямій.  $AB = BC = CK$ . Знайдіть  $CK$ , якщо  $AC = 12$  см.
- 49.** Чи можна розмістити точки  $A, B$  і  $C$  так, щоб виконувались рівності:
- а)  $AB = 2,3$  см,  $BC = 3,5$  см,  $AC = 6,3$  см;
  - б)  $AB = 5,1$  см,  $BC = 3,5$  см,  $AC = 6,8$  см;
  - в)  $AB = 3,1$  см,  $BC = 7,2$  см,  $AC = 10,3$  см?

50. Чи може відрізок  $BC$  лежати на промені  $AB$ , якщо:
- $AB = 9,2$  см,  $BC = 3,8$  см,  $AB = 13$  см;
  - $AB = 9,2$  см,  $BC = 3,8$  см,  $AB = 5,4$  см;
  - $AB = 9,2$  см,  $BC = 13,8$  см,  $AB = 4,6$  см?
51. На відрізку  $XY$  завдовжки 4,8 дм лежить точка  $C$ . Знайдіть відстані  $XC$  і  $CY$ , якщо:
- $XC - CY = 1,3$  дм;
  - $CY = 2XC$ ;
  - $XC : CY = 1 : 5$ .
52. Точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій,  $AB = 10$  дм,  $BC = 3$  дм. Знайдіть  $AC$ . Розгляньте всі можливі випадки.
53. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  лежать на одній прямій,  $B$  — середина  $AC$ ,  $BC = 7$  м,  $CD = 10$  м. Знайдіть  $AD$ .
54. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  лежать на одній прямій. Знайдіть  $CD$ , якщо  $AB = 10$  см,  $AC = 3$  см,  $BD = 4$  см. Розгляньте всі можливі випадки.
55. Дано відрізок  $AB$ . Побудуйте відрізок  $KP$ :
- втричі довший за  $AB$ ;
  - вдвічі коротший за  $AB$ ;
  - якщо  $KP = 2,5 AB$ .
56. Як за допомогою півметрової лінійки побудувати двометровий відрізок?
57. Поясніть, як *провішують* *прямі* за допомогою віх (мал. 28).



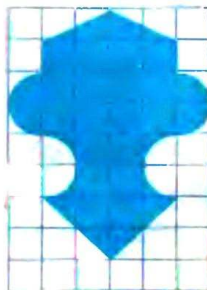
■ Мал. 28

### ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

58. Виміряйте довжину і ширину своєї парти.

### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

59. Накресліть коло радіуса 4 см. Поділіть його на 4 рівні дуги і знайдіть довжину однієї з них.
60. На скільки частин можуть поділити площину два кола, розташовані на ній?
61. Знайдіть довжину ребра куба, якщо сума довжин усіх його ребер дорівнює 6 м.
62. Перемалюйте в зошит фігуру, зображену на малюнку 29. Знайдіть її площу, прийнявши площу однієї клітинки за  $0,25$  см<sup>2</sup>.



■ Мал. 29



### § 3. Кути і їх міри

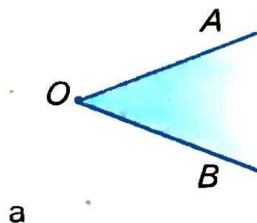
Два промені, що мають спільний початок, розбивають площину на дві частини.

Частину площини, обмежену двома променями із спільним початком, називають *кутом*.

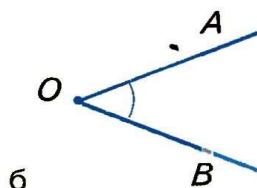
Промені, що обмежують кут, називають *сторонами*, а їх спільний початок — *вершиною кута* (мал. 30, а). Такий кут називають кутом  $AOB$ , або кутом  $BOA$ , або кутом  $O$  і записують відповідно:  $\angle AOB$ , або  $\angle BOA$ , або  $\angle O$ . Усі точки кута, які не належать його сторонам, утворюють *внутрішню область* цього кута. Внутрішню область кута на малюнку 30, а зафарбовано. Іноді внутрішню область кута позначають дугою, іноді ніяк не позначають, а тільки уявляють. На малюнку 30, б і в зображено кути з вершиною  $O$  і сторонами  $OA$  і  $OB$ .

Кут, сторони якого — доповняльні промені, називається *розгорнутим* кутом (мал. 31).

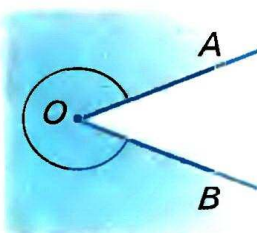
Щоб вимірювати кути, треба мати одиницю вимірювання. За таку одиницю приймають кут в 1 *градус* (скорочено  $1^\circ$ ). У розгорнутому куті він вміщується 180 разів. Уявімо півколо, поділене на 18 рівних дуг (мал. 32). Коли з його центра  $O$  через усі точки поділу і кінці півкола провести промені, вони поділять розгорнутий кут на 18 кутів по  $10^\circ$ . Один із таких кутів ( $AOB$ ) ділимо на 10. Міра кута  $AOC$  дорівнює  $1^\circ$ .



а

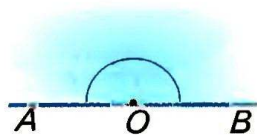


б

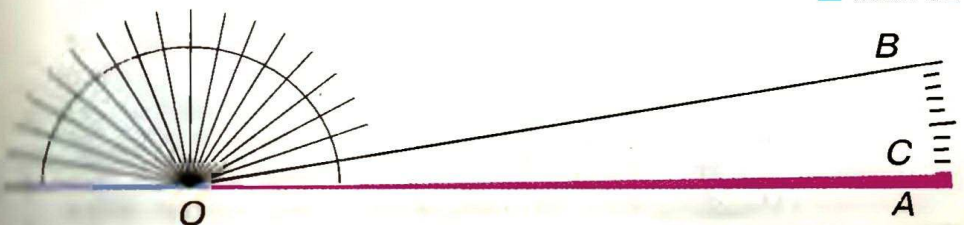


в

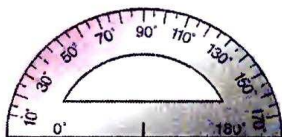
■ Мал. 30



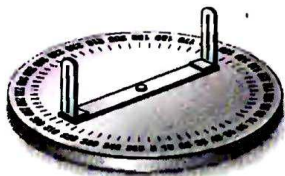
■ Мал. 31



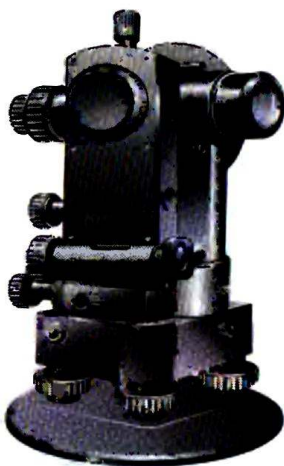
■ Мал. 32



■ Мал. 33



■ Мал. 34



■ Мал. 35

## ! Кожний кут має певну міру.

Міра розгорнутого кута дорівнює  $180^\circ$ .

Міру кута позначають так само, як і кут. Наприклад, якщо міра кута  $ABC$  дорівнює  $60$  градусів, пишуть:  $\angle ABC = 60^\circ$ . Дуже малі кути вимірюють у хвилинах і секундах.

*Мінutoю* називають  $\frac{1}{60}$  частину градуса, а *секундою* —  $\frac{1}{60}$  частину хвилини.

Записують:  $1^\circ = 60'$ ,  $1' = 60''$ .

Кути в зошиті та на класній дошці вимірюють *транспортом* (мал. 33), а на місцевості — *астролябією* (мал. 34), *теодолітом* (мал. 35) чи іншими кутомірними приладами.

Два кути називаються *рівними*, якщо їх міри рівні.

З двох кутів більшим вважається той, міра якого більша.

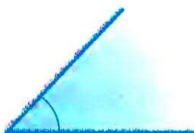
Кут називається *прямим*, якщо його міра дорівнює  $90^\circ$ , *гострим* — якщо він менший прямого, *тупим* — якщо він більший прямого, але менший розгорнутого (мал. 36).

Прямі кути на малюнках частіше позначають не дугами, а квадратами.

Кути, більші від розгорнутого (див. мал. 30, в), поки що не розглядатимемо.



ПРЯМИЙ КУТ



ГОСТРИЙ КУТ

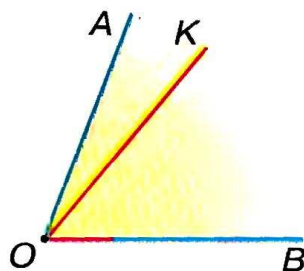


ТУПИЙ КУТ

■ Мал. 36



Промінь, який виходить з вершини кута і лежить у його внутрішній області, називають *внутрішнім променем кута*. Внутрішній промінь розбиває даний кут на два менші кути. Наприклад, внутрішній промінь  $OK$  кута  $AOB$  розбиває цей кут на кути  $AOK$  і  $KOB$  (мал. 37). При цьому  $\angle AOK + \angle KOB = \angle AOB$ . Говорять, що кут  $AOB$  дорівнює сумі кутів  $AOK$  і  $KOB$ .

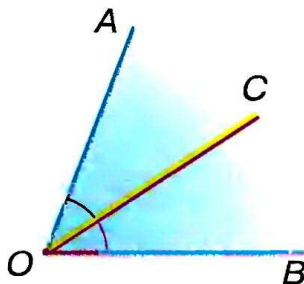


■ Мал. 37

**!** Міра кута дорівнює сумі мір кутів, на які даний кут розбивається його внутрішнім променем.

Два виділені вище речення, позначені знаком **!**, називають *основними властивостями вимірювання кутів*.

Внутрішній промінь, який розбиває кут на два рівні кути, називається *бісектрисою* цього кута. На малюнку 38 промінь  $OC$  — бісектриса кута  $AOB$ .

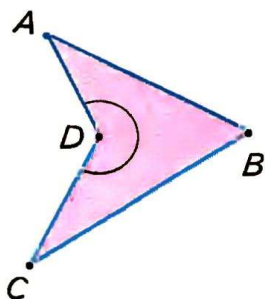


■ Мал. 38

## Для допитливих

*Кутом* часто називають також фігуру, складену з двох променів, що мають спільний початок. Таким чином, кутом називають і деяку лінію. Але поділити такий кут на два чи більше рівних кутів не можна. То ж коли говорять про додавання, віднімання чи ділення кутів, то кут розглядають разом з його внутрішньою областю.

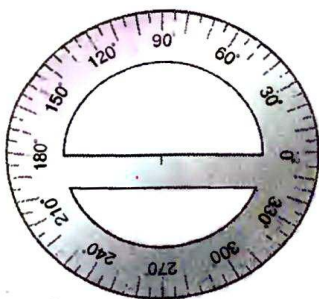
Хоча далі ми розглядатимемо здебільшого кути менші від розгорнутого, слід пам'ятати, що кути бувають і більші від розгорнутого. Вони мають більше  $180^\circ$ . Таким, наприклад, є кут  $D$  чотирикутника  $ABCD$  (мал. 39). Існують і спеціальні транспортири, якими вимірюють кути, більші від розгорнутого (мал. 40). Звичайно в геометрії розглядають кути не більші від  $360^\circ$ . Поняття кута застосовують часто також для характеристики поворотів. Наприклад, велосипедне колесо можна повернути на  $100^\circ$ , можна на



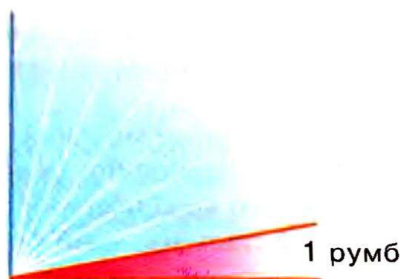
■ Мал. 39

300°. А коли колесо зробило півтора оберти? Вважають, що воно повернулося на  $360^\circ$  і ще на  $180^\circ$ , а разом — на  $540^\circ$ .

Крім градусів, минут і секунд, є й інші міри кутів. Моряки кути вимірюють у *румбах*. Румбом називають восьму частину прямого кута,  $1 \text{ румб} = 11,25^\circ$  (мал. 41). Науковці найчастіше вимірюють кути в *радіанах*. Що це таке, дізнаєтесь у старших класах.



■ Мал. 40



■ Мал. 41



## Запитання і завдання для самоконтролю

1. Яка фігура називається кутом? Як позначають кути?
2. Який кут називають:
  - а) гострим;
  - б) тупим;
  - в) прямим;
  - г) розгорнутим?
3. Якими приладами і в яких одиницях вимірюють кути?
4. Що таке внутрішня область кута? Внутрішній промінь кута?
5. Що таке бісектриса кута?
6. Які кути називають рівними?
7. Сформулюйте основні властивості вимірювання кутів.



### ● Виконаємо разом

- 1** Знайдіть міру кута  $AOB$ , якщо промені  $OC$  і  $OK$  ділять його на три рівні кути і  $\angle COK = 40^\circ$ .
- Кут  $COK$  — третя частина кута  $AOB$ . Тому  $\angle AOB = 40^\circ \cdot 3 = 120^\circ$ .
- **Відповідь.**  $120^\circ$ .
- 2** Знайдіть міри кутів, утворених стрілками годинника: о 3-й годині; о 5-й годині (мал. 42).
- На циферблаті годинника півколо відповідає 6 годинам. Тому одній годині відповідає  $\frac{1}{6}$  частина розгорнутого кута, тобто  $30^\circ$ . Коли на годиннику 3-тя година, кут між годинною і хвилинною стрілками дорівнює  $30^\circ \cdot 3 = 90^\circ$ . Коли на годиннику 5-та година, кут між його стрілками дорівнює  $30^\circ \cdot 5 = 150^\circ$ .
- **Відповідь.**  $90^\circ$ ;  $150^\circ$ .



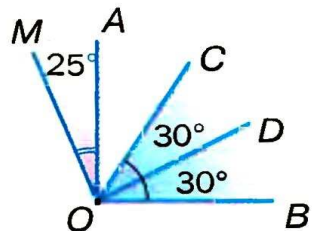
■ Мал. 42

### ● Задачі і вправи

#### ■ ВИКОНАЙТЕ УСНО

**63.** Скільки мінут мають  $2^\circ$ ? А півтора градуси?

- 64.** 1) Назвіть усі кути, що є на малюнку 43. Які з них гострі, прямі, тупі?
- 2) Нехай  $\angle MOA = 25^\circ$ ,  $\angle COD = \angle DOB = 30^\circ$ ,  $\angle AOB$  — прямий. Знайдіть  $\angle MOB$  і  $\angle AOC$ .
- 3) Порівняйте кути  $MOC$  і  $AOD$ ,  $AOD$  і  $COB$ .



■ Мал. 43

- 65.** Знайдіть кут між променями, які ділять прямий кут на 3 рівні частини.
- 66.** Промені, проведені з центра кола, ділять його на 4 рівні частини. Знайдіть кут між двома сусідніми променями.

## А

67. Накресліть гострий кут. Позначте буквами його вершину і сторони. Заштрихуйте його внутрішню область.
68. Накресліть тупий кут. Позначте його сторони буквами, а внутрішню область — дугою.
69. Накресліть розгорнутий кут  $KPT$ . Назвіть його вершину і сторони. Позначте внутрішню область кута дугою.
70. Позначте три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , що не лежать на одній прямій. Побудуйте кут  $ABC$ . Чи може цей кут бути розгорнутим?
71. Користуючись транспортиром, побудуйте кути, міри яких дорівнюють  $50^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ . Проведіть бісектриси побудованих кутів.
72. Побудуйте на око кути, міри яких  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ , і проведіть їх бісектриси. Перевірте точність побудови транспортиром.
73. Виразіть у градусах і мінутах міри кутів:  $135'$ ;  $5000'$ .
74. Виразіть у мінутах:  $6^\circ 15'$ ;  $2^\circ$ ;  $11,5^\circ$ .
75. Виконайте дії: а)  $5^\circ 48' + 7^\circ 35'$ ; б)  $32^\circ 17' - 8^\circ 45'$ .
76. Виконайте дії: а)  $33^\circ 33' + 15^\circ 15'$ ; б)  $145^\circ 54' - 41^\circ 41'$ ; в)  $123^\circ 45' + 54^\circ 32'$ ; г)  $44^\circ 14' - 14^\circ 44'$ .
77. Заповніть таблицю, в якій  $A$  — міра даного кута,  $B$  — міра кута між його бісектрисою і стороною.

$A$	$10^\circ$		$60^\circ$		$100^\circ$	$180^\circ$
$B$		$50^\circ$		$45^\circ$		

78. Знайдіть міру кута  $AOB$ , якщо  $OC$  — його внутрішній промінь і  $\angle AOC = 60^\circ$ ,  $\angle COB = 30^\circ$ .
79. Чи є промінь  $PM$  внутрішнім променем кута  $KPT$ , якщо  $\angle KPT = 70^\circ$ ,  $\angle KPM = 80^\circ$ ? А якщо  $\angle KPM = 20^\circ$ ?

## Б

80. На який кут повертається хвилинна стрілка годинника протягом 20 хв; 30 хв?
81. На який кут повертається годинна стрілка годинника протягом 0,5 год; п'яти хвилин?
82. Знайдіть кут  $MOB$ , якщо  $\angle AOM = 25^\circ$  і  $\angle AOM : \angle MOB = 4 : 5$ .
83. Знайдіть кут  $AOB$ , якщо  $\angle AOM = 30^\circ$ ,  $\angle MOB = 60^\circ$  і всі ці кути розташовані в одній площині.



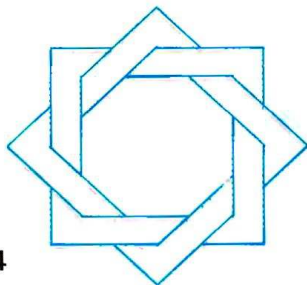
84. Дано кути  $AOB$  і  $MOB$  однієї площини, що містять відповідно  $120^\circ$  і  $60^\circ$ . Знайдіть міру кута  $AOM$ . Розгляньте два випадки.
85. Накресліть кут  $AOB$  і його внутрішні промені  $OK$  і  $OM$  так, щоб  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $\angle AOK = 40^\circ$ ,  $\angle MOB = 30^\circ$ . Знайдіть  $\angle KOM$ .
86.  $OM$  — бісектриса кута  $AOB$ ,  $OK$  — бісектриса кута  $AOM$ . У скільки разів  $\angle KOM$  менший від  $\angle AOB$ ?
87.  $OM$  — бісектриса прямого кута  $AOB$ ;  $OK$  і  $OP$  — бісектриси кутів  $AOM$  і  $MOB$ . Знайдіть міру кута  $KOP$ .
88.  $\angle AOM = 30^\circ$ , а  $\angle BOM$  на  $20^\circ$  більший. Знайдіть  $\angle AOB$ . Розгляньте усі можливі випадки.
89.  $OM$  і  $OK$  — внутрішні промені кута  $AOB$ ,  $OK$  — бісектриса кута  $MOB$ ,  $\angle AOB = 150^\circ$ ,  $\angle KOB$  на  $40^\circ$  менший за  $\angle MOB$ . Знайдіть  $\angle AOM$  і  $\angle MOK$ .

### ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

90. а) Виріжте з паперу гострий, прямий і тупий кути. Виміряйте їх транспортиром.  
б) Перегинаючи аркуші паперу, зробіть моделі кутів, міри яких дорівнюють  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ .

### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

91. Площа квадрата дорівнює  $16 \text{ см}^2$ . Знайдіть його периметр.
92. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює  $40 \text{ см}^2$ , а одна із сторін  $5 \text{ см}$ .
93. Чи на одній прямій розташовані точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ , якщо:  
а)  $AB = 5 \text{ дм}$ ,  $BC = 7 \text{ дм}$ ,  $AC = 10 \text{ дм}$ ;  
б)  $AB = 35 \text{ см}$ ,  $BC = 45 \text{ см}$ ,  $AC = 1 \text{ дм}$ ;  
в)  $AB = \frac{3}{4}$  дюйма,  $BC = \frac{2}{3}$  дюйма,  $AC = \frac{1}{12}$  дюйма?
94. Як знайти площу прямокутного трикутника, сторони якого дорівнюють  $3$ ,  $4$  і  $5 \text{ см}$ ?
95. Перемалюйте в зошит фігуру, зображену на малюнку 44. Розфарбуйте її двома кольорами.



■ Мал. 44

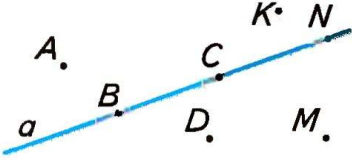
Задачі за готовими малюнками

А

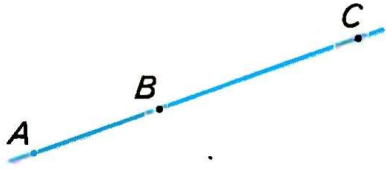
Б

Які з точок:  
а) належать прямій  $a$ ;  
б) не належать прямій  $a$ ?

1

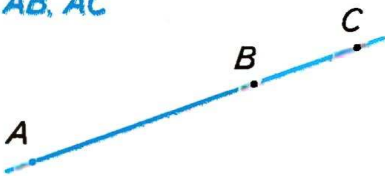


$AC = 10, AB : BC = 2 : 3.$   
 $AB, BC$

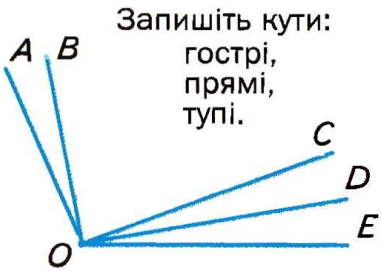
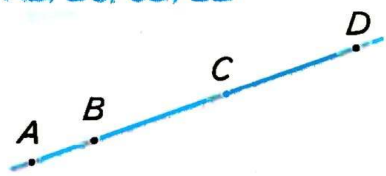


$AB = \frac{2}{3} AC, BC = 5.$   
 $AB, AC$

2

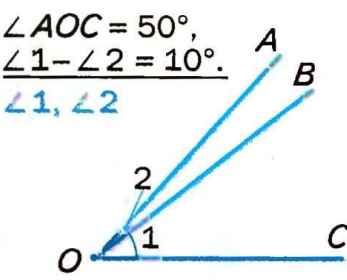
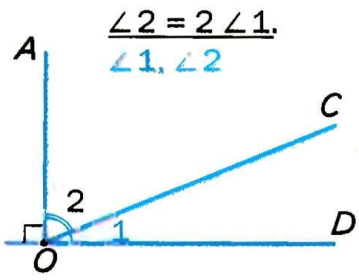


$AD = 20, BC = CD = 2AB.$   
 $AB, BC, CD, BD$



3

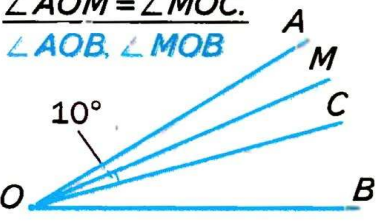
Запишіть кути:  
гострі,  
прямі,  
тупі.



4

$\angle AOC = 50^\circ,$   
 $\angle 1 - \angle 2 = 10^\circ.$   
 $\angle 1, \angle 2$

$OC$  — бісектриса  $\angle AOB,$   
 $\angle AOM = \angle MOC.$   
 $\angle AOB, \angle MOB$





## ● Самостійна робота 1

### Варіант 1

- 1°.  $C$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ ,  $AC = 6$  см,  $BC$  на 2 см менший за  $AC$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$ .
- 2°.  $\angle AOB = 130^\circ$ ,  $OC$  — його бісектриса. Знайдіть  $\angle BOC$ .
- 3°. Точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій.  $AB = 9$  см,  $BC = 4$  см. Знайдіть довжину відрізка  $AC$ . Розгляньте два випадки.
- 4°. Промінь  $OC$  ділить  $\angle AOB = 80^\circ$  на два кути так, що один з них у 3 рази більший за другий. Знайдіть  $\angle AOC$  і  $\angle BOC$ .

### Варіант 2

- 1°.  $C$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ ,  $BC = 4$  см,  $AC$  у 2 рази більший за  $BC$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$ .
- 2°.  $OC$  — бісектриса  $\angle AOB$ ,  $\angle AOC = 50^\circ$ . Знайдіть  $\angle AOB$ .
- 3°. Точки  $M$ ,  $N$  і  $K$  лежать на одній прямій.  $MN = 6$  см,  $NK = 10$  см. Знайдіть довжину відрізка  $MK$ . Розгляньте два випадки.
- 4°. Промінь  $OC$  ділить  $\angle AOB = 70^\circ$  на два кути так, що один з них на  $20^\circ$  більший за другий. Знайдіть  $\angle AOC$  і  $\angle BOC$ .

### Варіант 3

- 1°.  $C$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ ,  $AC = 4$  см,  $BC$  на 3 см більший за  $AC$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$ .
- 2°.  $\angle AOB = 60^\circ$ ,  $OC$  — його бісектриса. Знайдіть  $\angle AOC$ .
- 3°. Точки  $E$ ,  $F$  і  $P$  лежать на одній прямій.  $EF = 7$  см,  $FP = 3$  см. Знайдіть довжину відрізка  $EP$ . Розгляньте два випадки.
- 4°. Промінь  $OC$  ділить  $\angle AOB = 100^\circ$  на два кути так, що  $\angle AOC : \angle BOC = 2 : 3$ . Знайдіть  $\angle AOC$  і  $\angle BOC$ .

### Варіант 4

- 1°.  $C$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ ,  $AC = 9$  см,  $BC$  у 3 рази менший за  $AC$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$ .
- 2°.  $OC$  — бісектриса  $\angle AOB$ ,  $\angle BOC = 40^\circ$ . Знайдіть  $\angle AOB$ .
- 3°. Точки  $K$ ,  $P$  і  $T$  лежать на одній прямій.  $KP = 12$  см,  $PT = 5$  см. Знайдіть довжину відрізка  $KT$ . Розгляньте два випадки.
- 4°. Промінь  $OC$  ділить  $\angle AOB = 120^\circ$  на два кути так, що один з них на  $30^\circ$  менший за другий. Знайдіть  $\angle AOC$  і  $\angle BOC$ .

## ● Тестові завдання 1

- |   |   |
|---|---|
| 1. Прямі $a$ і $b$ перетинаються в точці $O$ . Якій прямій належить точка $O$ ?   | а) $a$ ; б) $b$ ; в) $a$ і $b$ ; г) не належить жодній.                                       |
| 2. На скільки частин ділять площину дві прямі, що перетинаються?  | а) на 2; б) на 3; в) на 4; г) на 6.   |
| 3. Яка з трьох точок лежить між двома іншими, якщо $XU = 3$ , $YZ = 7$ , $XZ = 4$ ?   | а) $X$ ; б) $Y$ ; в) $Z$ ; г) жодна.  |
| 4. $M$ — середина відрізка $AB$ , $AM = 7$ см. Знайдіть довжину $AB$ .  | а) 14 см; б) 21 см; в) 3,5 см; г) 7 см.   |
| 5. $K$ — внутрішня точка відрізка $AB$ , $AK = 3$ см, $AB = 10$ см. Знайдіть довжину $KB$ .                                       | а) 13 см; б) 7 см; в) 30 см; г) 8 см.   |
| 6. Знайдіть міру кута, якщо його бісектриса утворює зі стороною кут $20^\circ$ .  | а) $20^\circ$ ; б) $10^\circ$ ; в) $30^\circ$ ; г) $40^\circ$ .                               |
| 7. $\angle AOB = 110^\circ$ , $OM$ — його внутрішній промінь, $\angle BOM = 60^\circ$ . Знайдіть $\angle AOM$ .                   | а) $50^\circ$ ; б) $170^\circ$ ; в) $90^\circ$ ; г) $70^\circ$ .                              |
| 8. $OM$ — внутрішній промінь $\angle AOB$ , $\angle AOM = 40^\circ$ , $\angle BOM$ на $10^\circ$ більший. Знайдіть $\angle AOB$ . | а) $70^\circ$ ; б) $50^\circ$ ; в) $90^\circ$ ; г) $44^\circ$ .                               |
| 9. Точки $A$ , $B$ і $C$ лежать на одній прямій. $AB = 5$ см, $BC = 12$ см. Знайдіть $AC$ .                                       | а) 17 см; б) 7 см; в) 17 см або 7 см; г) 18 см або 8 см.                                      |
| 10. $\angle AOB = 50^\circ$ , $\angle BOC = 20^\circ$ . Знайдіть $\angle AOC$ .   | а) $70^\circ$ ; б) $30^\circ$ або $70^\circ$ ; в) $30^\circ$ ; г) $70^\circ$ або $40^\circ$ . |



## ● **Запитання і завдання для самоконтролю**

1. Що таке геометрія?
2. Що таке планіметрія?
3. Наведіть приклади плоских і неплоских фігур.
4. Опишіть поняття *точка*.
5. Опишіть поняття *пряма*.
6. Опишіть поняття *площина*.
7. Наведіть приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є точка, пряма, площина.
8. Що означають записи  $A \in a$ ,  $A \notin b$ ?
9. Що означає вислів «точка  $B$  лежить між  $A$  і  $C$ »?
10. Сформулюйте основні властивості розміщення точки на прямій.
11. Що таке промінь?
12. Як позначають промені?
13. Які промені називають доповняльними?
14. Що таке відрізок?
15. Що таке кінці відрізка?
16. В яких одиницях вимірюють відрізки?
17. Сформулюйте основні властивості вимірювання відрізків.
18. Що таке середина відрізка?
19. Яка нерівність виконується для будь-яких трьох точок?
20. Що таке відстань між двома точками?
21. Яка фігура називається кутом?
22. Як позначають кути?
23. Який кут називають гострим?
24. Який кут називають тупим?
25. Який кут називають прямим?
26. Який кут називають розгорнутим?
27. В яких одиницях вимірюють кути?
28. Що таке внутрішня область кута?
29. Що таке внутрішній промінь кута?
30. Сформулюйте основні властивості вимірювання кутів.
31. Що таке бісектриса кута?
32. Які кути називають рівними?

## Головне в розділі 1

*Геометрія* — наука про геометричні фігури і їх властивості. Найпростіша геометрична фігура — *точка*. Кожна інша геометрична фігура складається з точок, тобто є деякою множиною точок. Інші фігури — *пряма*, *площина*. Їх зміст розкривають не означеннями, а описуючи їх основні властивості. Фігури, які можна розмістити в одній площині, називають *плоскими фігурами*. Частина геометрії, в якій досліджуються фігури тільки однієї площини, називається *планіметрією*.

*Основні властивості розміщення точок на прямій*

- Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.
- Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і тільки одну.
- З трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.

Частини прямої — *відрізок* і *промінь*. Відрізок *AB* — це частина прямої, що містить точки *A*, *B* і всі точки, що лежать між ними. Кожному відрізку ставиться у відповідність його довжина. Довжина відрізка — відстань між його кінцями. Відстані і довжини вимірюють метрами, сантиметрами, міліметрами, кілометрами, футами, дюймами та іншими одиничними відрізками.

*Основні властивості вимірювання відрізків*

- Кожний відрізок має певну довжину.
- Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка внутрішня точка.

Частину площини, обмежену двома променями із спільним початком, називають *кутом*. Кути бувають гострі, прямі, тупі, розгорнуті і більші від розгорнутих. *Міри кутів* визначають у градусах, мінутах, секундах, румбах та деяких інших кутових одиницях вимірювання.

*Основні властивості вимірювання кутів*

- Кожний кут має певну міру.
- Міра кута дорівнює сумі мір кутів, на які даний кут розбивається його внутрішнім променем.

*Бісектриса кута* — внутрішній промінь, який розбиває даний кут на два рівні кути.



Розділ

## ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ



У цьому розділі підручника ви розширите і поглибите свої знання про прямі і промені однієї площини, ознайомитеся з дуже важливими поняттями: **суміжні кути**, **вертикальні кути**, **перпендикулярні прямі**, **паралельні прямі** тощо, а також із важливими загально-математичними поняттями: **аксіома**, **теорема**, **наслідок**, **доведення**, **ознака**, **означення**.

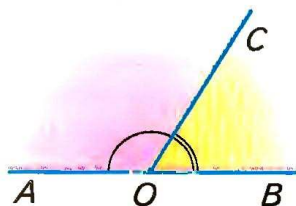
- СУМІЖНІ І ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ
- ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ І ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ
- ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ
- ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ
- ТЕОРЕМИ І АКСІОМИ

**Основна ідея, якою пройнята  
вся математика, —  
це ідея рівності.**

**Г. Спенсер**

## § 4. Суміжні і вертикальні кути

Два кути, на які розбивається розгорнутий кут його внутрішнім променем, називають *суміжними*.



■ Мал. 45

Одна сторона у суміжних кутів спільна, а дві інші — доповняльні промені. Якщо точки  $A, O, B$  лежать на одній прямій, а  $C$  — довільна точка, яка не належить прямій  $AB$ , то кути  $AOC$  і  $COB$  — суміжні (мал. 45).

Властивість суміжних кутів сформулюємо у вигляді *теорема*.

У математиці **теоре́мою** називають кожне твердження, істинність якого обґрунтовується за допомогою логічних міркувань. Ланцюжок таких міркувань називають *доведенням*.

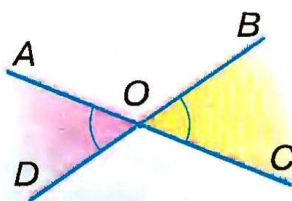
У нашому підручнику теореми надруковано жирним шрифтом і занумеровано.

**ТЕОРЕМА 1**

Сума мір двох суміжних кутів дорівнює  $180^\circ$ .

■ **ДОВЕДЕННЯ.**

Об'єднання двох суміжних кутів є розгорнутим кутом. Міра розгорнутого кута дорівнює  $180^\circ$ . Отже, якими б не були суміжні кути, сума їх мір дорівнює  $180^\circ$ . ▲



■ Мал. 46

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного є доповняльними променями сторін другого.

Наприклад, якщо прямі  $AC$  і  $BD$  перетинаються в точці  $O$ , то кути  $AOD$  і  $BOC$  — вертикальні (мал. 46). Кожний з них суміжний із кутом  $AOB$ . Кути  $AOB$  і  $COD$  також вертикальні.

**ТЕОРЕМА 2**

Вертикальні кути рівні.

■ **ДОВЕДЕННЯ.**

Нехай  $AOD$  і  $BOC$  — довільні вертикальні кути (див. мал. 46). Кожний з них суміжний із кутом  $AOB$ . За теоремою про суміжні кути

$$\angle AOD + \angle AOB = 180^\circ \text{ і } \angle BOC + \angle AOB = 180^\circ,$$



звідки

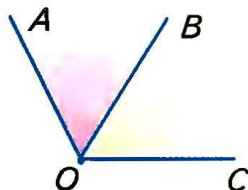
$$\angle AOD = 180^\circ - \angle AOB \text{ і } \angle BOC = 180^\circ - \angle AOB.$$

Праві частини цих рівностей однакові, тому

$$\angle AOD = \angle BOC. \text{ А це й треба було довести. } \blacktriangle$$

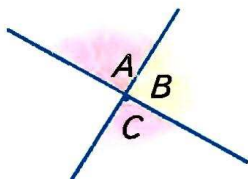
### Для допитливих

Слово *суміжні* вживають не тільки щодо кутів. *Суміжний* — той, що має спільну межу, прилеглий до чогось, сусідній. Можна говорити про суміжні кімнати, суміжні поля тощо. Стосовно кутів це поняття має особливий зміст. Не будь-які два кути зі спільною межею називають суміжними. Наприклад, зображені на малюнку 47 кути  $\angle AOB$  і  $\angle BOC$  мають спільну сторону  $OB$ , але не є суміжними кутами.



■ Мал. 47

Суміжні кути — це два кути, які перебувають у певному відношенні. Один кут не може бути суміжним. Якщо говоримо, що якийсь кут суміжний, то обов'язково маємо закінчити думку: суміжний з яким кутом? Відношення суміжності кутів має таку властивість: якщо кут  $A$  суміжний з кутом  $B$ , то і кут  $B$  суміжний з кутом  $A$ .



■ Мал. 48

Нехай кут  $A$  суміжний з кутом  $B$ , а кут  $B$  суміжний з кутом  $C$ . Що можна сказати про кути  $A$  і  $C$ ? Вони або вертикальні, або кут  $C$  — той самий кут  $A$  (мал. 48).

Слово *вертикальні* також стосується не тільки кутів. Здебільшого вертикально розміщеним вважають продовгуватий предмет, розташований в напрямі виска (перпендикулярно до горизонту).

Завжди правильна властивість: якщо кут  $A$  вертикальний куту  $C$ , то і кут  $C$  вертикальний куту  $A$ .



### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які кути називають суміжними?
2. Сформулюйте і доведіть властивість суміжних кутів.
3. Які кути називають вертикальними?
4. Сформулюйте і доведіть властивість вертикальних кутів.

### ● Виконаємо разом

**1** Знайдіть міри суміжних кутів, якщо один з них на  $50^\circ$  більший, ніж другий.

■ Нехай міра меншого із суміжних кутів дорівнює  $x$ , тоді міра більшого кута  $x + 50^\circ$ . За властивістю суміжних кутів  $x + x + 50^\circ = 180^\circ$ , звідки  $x = 65^\circ$ , а  $x + 50^\circ = 115^\circ$ .

■ **Відповідь.**  $65^\circ$  і  $115^\circ$ .

**2** Один із чотирьох кутів, які утворилися при перетині двох прямих, удвічі більший від другого. Знайдіть міру кожного з утворених кутів.

■ При перетині двох прямих утворюються вертикальні і суміжні кути. Оскільки вертикальні кути рівні, то вони умову задачі не задовольняють. Робимо висновок: один із суміжних кутів удвічі більший від другого, їх міри  $x$  і  $2x$ . За властивістю суміжних кутів  $x + 2x = 180^\circ$ , звідки  $x = 60^\circ$ , а  $2x = 120^\circ$ . Відповідні їм вертикальні кути також дорівнюють  $60^\circ$  і  $120^\circ$ .

■ **Відповідь.**  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ .

### ● Задачі і вправи

#### ■ ВИКОНАЙТЕ УСНО ■

**96.** Назвіть пари суміжних кутів, зображених на малюнку 49.

**97.** Чи можна вважати суміжними кути  $KOB$  і  $KOA$ , зображені на малюнку 49? А кути  $AOC$  і  $AOD$ ?

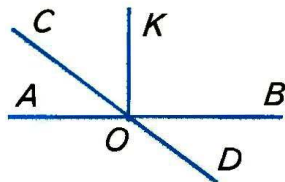
**98.** Дано гострий кут  $A$ . Чи може бути гострим суміжний з ним кут? А прямим?

**99.** Дано тупий кут. Яким є суміжний з ним кут?

**100.** Сума кутів  $A$  і  $B$  дорівнює  $180^\circ$ . Чи суміжні вони?

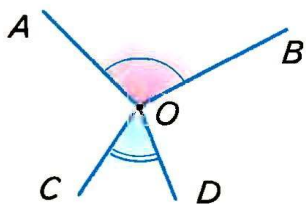
**101.** Розгорнутий кут двома внутрішніми променями розбито на три менші кути. Чи можна їх вважати суміжними кутами?

**102.** Чи вертикальні кути  $AOB$  і  $COD$ , зображені на малюнку 50?

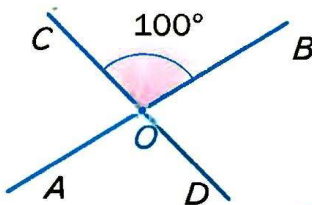


■ Мал. 49

- 103.** Один з кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює  $100^\circ$ . Знайдіть міри трьох інших кутів (мал. 51).



■ Мал. 50



■ Мал. 51

- 104.** Міра одного з двох суміжних кутів дорівнює  $50^\circ$ . Знайдіть міру другого кута. Побудуйте ці кути.

- 105.** Дано кут, міра якого  $160^\circ$ . Знайдіть міру суміжного кута. Побудуйте ці кути. Зафарбуйте їх різними кольорами.

- 106.** Знайдіть міру кута, суміжного з  $\angle ABC$ , якщо:

- а)  $\angle ABC = 34^\circ$ ;      б)  $\angle ABC = 111^\circ$ ;  
в)  $\angle ABC = 13^\circ 13'$ ;    г)  $\angle ABC = 135^\circ 47'$ .

- 107.** Доведіть, що коли суміжні кути рівні, то вони прямі.

- 108.** Знайдіть міри суміжних кутів, якщо один з них:

- а) на  $30^\circ$  більший від другого;  
б) у два рази менший від другого.

- 109.** Знайдіть міри суміжних кутів, що відносяться як:

- а)  $4 : 5$ ;    б)  $3 : 2$ .

- 110.** Накресліть кут, що має  $45^\circ$ . Побудуйте вертикальний йому кут.

- 111.** Сума мір двох вертикальних кутів дорівнює  $120^\circ$ . Знайдіть міру кожного з цих кутів.

- 112.** Знайдіть міри кутів, утворених перетином двох прямих, якщо міра одного з них дорівнює:

- а)  $50^\circ$ ;    б)  $110^\circ$ ;    в)  $n^\circ$ .

- 113.** Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її.

Даний кут	$10^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$170^\circ$
Вертикальний йому кут						
Суміжний з ним кут						



**114.** Перемалюйте в зошит малюнок 46 і подану нижче таблицю. Використовуючи малюнок, заповніть порожні клітинки таблиці.

$\angle AOD$	$66^\circ$					$50^\circ 5'$		
$\angle AOB$		$135^\circ$			$177^\circ$			
$\angle BOC$				$39^\circ$			$33^\circ 33'$	
$\angle DOC$			$97^\circ$					$99^\circ 9'$

5

**115.** Чи можуть кути, що утворилися при перетині двох прямих, бути пропорційними числам:

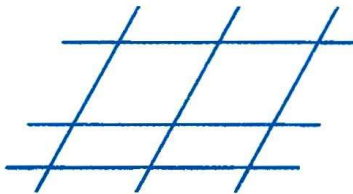
а) 2, 3, 4 і 5; б) 5, 5, 5 і 8; в) 2, 3, 2 і 3; г) 1, 4, 2 і 8?

**116.** Доведіть, що кути, суміжні з рівними кутами, рівні.

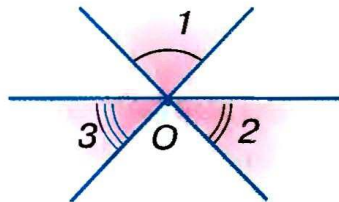
**117.** Намалюйте три прямі так, щоб вони перетиналися в одній точці. Скільки пар вертикальних кутів утворилося?

**118.** Скільки пар вертикальних кутів і скільки пар суміжних кутів зображено на малюнку 52?

**119.** На малюнку 53 зображено три прямі, що перетинаються в точці  $O$ . Доведіть, що  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ .



■ Мал. 52



■ Мал. 53

**120.** Знайдіть міри кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо:

- а) один з них на  $20^\circ$  більший від другого;
- б) один з них дорівнює половині другого;
- в) сума мір двох із цих кутів дорівнює  $100^\circ$ .

**121.** Кут  $AOB$  має  $180^\circ$ , промінь  $OM$  ділить його на два кути, один з яких більший від другого на  $20^\circ$ . Знайдіть міри цих двох кутів, а також кут між їх бісектрисами.

**122.** Кути  $AOB$  і  $BOC$  суміжні,  $OM$  — бісектриса кута  $BOC$ . Знайдіть  $\angle AOB$ , якщо:

а)  $\angle MOC = 30^\circ$ ; б)  $\angle MOC = 45^\circ$ ; в)  $\angle MOC = 60^\circ$ .

**123.** Накресліть куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Чи можна вважати суміжними його кути  $ABB_1$  і  $B_1 BC$ ? Чому? Чому дорівнює міра кута, суміжного з кутом  $ABB_1$ ?

**124.** Знайдіть міру кута, якщо сума двох суміжних з ним кутів дорівнює  $100^\circ$ .

**125.** Кути  $AOB$  і  $BOC$  суміжні,  $OM$  — бісектриса кута  $AOB$  (мал. 54).

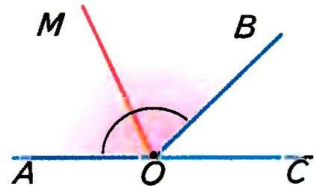
Знайдіть  $\angle MOB$ , якщо:

а)  $\angle AOB - \angle BOC = 40^\circ$ ;

б)  $\angle AOB : \angle BOC = 5$ ;

в)  $\angle AOB : \angle BOC = 5 : 4$ ;

г)  $\angle BOC$  становить  $\frac{2}{5} \angle AOB$ .



■ Мал. 54

### ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

**126.** Перегинаючи аркуш паперу, утворіть пару суміжних кутів і пару вертикальних кутів.

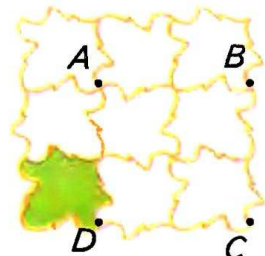
### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**127.** Ребра двох кубів відносяться як  $1 : 2$ . Як відносяться їх об'єми? А площі поверхонь?

**128.** Позначте на координатній площині точки  $A(1; -1)$ ,  $B(1; 3)$ ,  $C(5; 3)$ ;  $D(5; -1)$  і сполучіть їх послідовно відрізками. Як називається утворена фігура  $ABCD$ ? Які з її сторін паралельні, а які — перпендикулярні?

**129.** Круг радіуса 3 см поділіть радіусами на 6 рівних секторів. Знайдіть площу одного такого сектора. На скільки вона менша від площі всього круга?

**130.** Фігура, зображена на малюнку 55, складається з 9 рівних листків. Знайдіть площу одного листка, якщо  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  — вершини квадрата площі  $S$ .



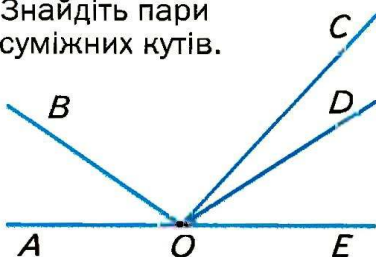
■ Мал. 55

● **Задачі за готовими малюнками**

**А**

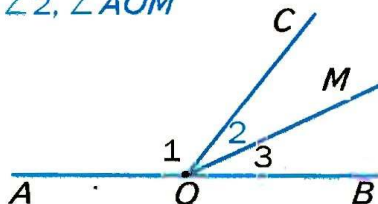
Знайдіть пари суміжних кутів.

**1**



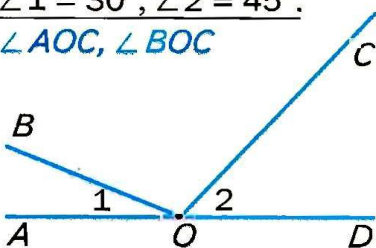
**Б**

$\angle 1 = 120^\circ, \angle 2 = \angle 3.$   
 $\angle 2, \angle AOM$

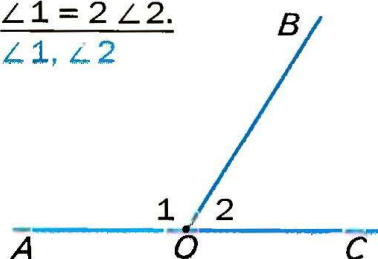


**2**

$\angle 1 = 30^\circ, \angle 2 = 45^\circ.$   
 $\angle AOC, \angle BOC$

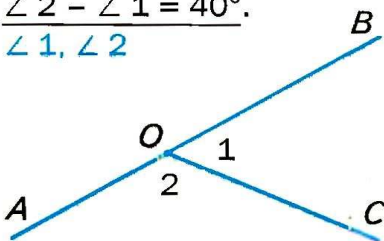


$\angle 1 = 2 \angle 2.$   
 $\angle 1, \angle 2$

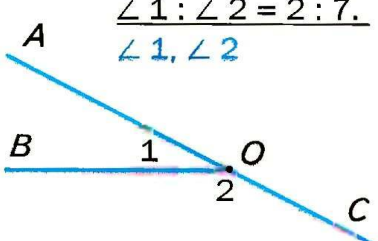


**3**

$\angle 2 - \angle 1 = 40^\circ.$   
 $\angle 1, \angle 2$

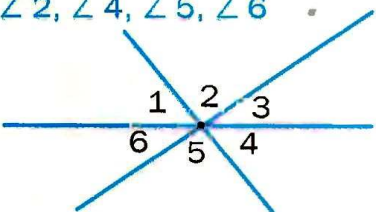


$\angle 1 : \angle 2 = 2 : 7.$   
 $\angle 1, \angle 2$

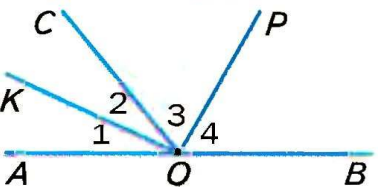


**4**

$\angle 1 = 60^\circ, \angle 3 = 40^\circ.$   
 $\angle 2, \angle 4, \angle 5, \angle 6$



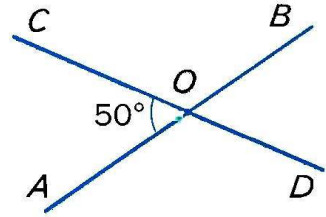
$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4.$   
Довести:  $\angle KOP = 90^\circ$





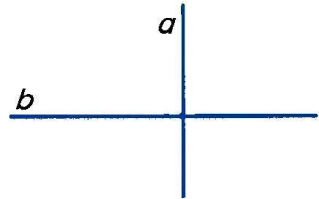
## § 5. Перпендикулярні і паралельні прямі

Пригадайте, як можуть розташовуватися на площині дві прямі. Якщо вони перетинаються, то утворюють чотири кути — дві пари вертикальних кутів. Йдеться про кути, менші від розгорнутого. Менший із цих кутів вважають *кутом між даними прямими*. Наприклад, на малюнку 56 прямі  $AB$  і  $CD$  перетинаються під кутом  $50^\circ$ . Кажуть також, що кут між прямими  $AB$  і  $CD$  дорівнює  $50^\circ$ . Якщо дві прямі, перетинаючись, утворюють чотири прямі кути, кажуть, що вони перетинаються під прямим кутом.



■ Мал. 56

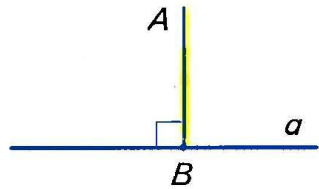
Дві прямі, які перетинаються під прямим кутом, називають *перпендикулярними прямими*. Прямі  $a$  і  $b$  на малюнку 57 перпендикулярні одна до одної. Коротко пишуть:  $a \perp b$ , або  $b \perp a$ .



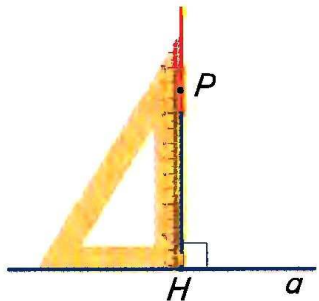
■ Мал. 57

*Відрізки* або *промені* називають *перпендикулярними*, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

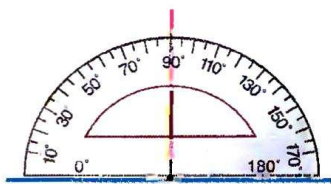
Якщо відрізок  $AB$  лежить на прямій, перпендикулярній до прямої  $a$ , кажуть, що *відрізок  $AB$  перпендикулярний до прямої  $a$* . Якщо при цьому точка  $B$  належить прямій  $a$ , то відрізок  $AB$  називають *перпендикуляром*, проведеним з точки  $A$  на пряму  $a$  (мал. 58). Точку  $B$  називають *основою перпендикуляра*, а довжину перпендикуляра  $AB$  — *відстанню від точки  $A$  до прямої  $a$* .



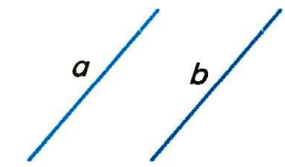
■ Мал. 58



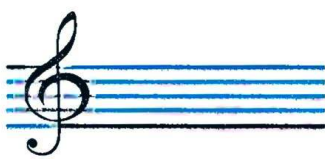
■ Мал. 59



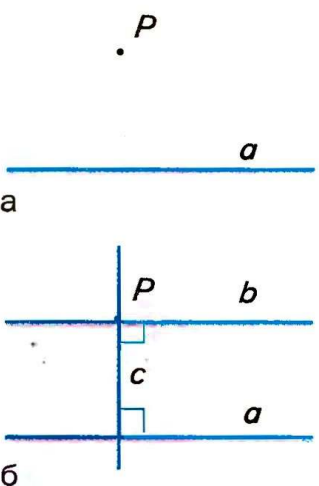
■ Мал. 60



■ Мал. 61



■ Мал. 62



■ Мал. 63

Через довільну точку  $P$  завжди можна провести пряму, перпендикулярну до даної прямої  $a$ . Це можна зробити, користуючись косинцем (мал. 59) або транспортиром (мал. 60). Згодом дізнаєтесь, як можна виконати потрібну побудову за допомогою лінійки і циркуля. Можна довести, що існує тільки одна пряма, яка перпендикулярна до даної прямої і проходить через дану точку.

Не кожні дві прямі перетинаються. Особливої уваги заслуговують прямі, які не перетинаються і лежать в одній площині.

Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються. Якщо прямі  $a$  і  $b$  паралельні, пишуть:  $a \parallel b$  (мал. 61).

Уявлення про паралельні прямі дають лінії в зошиті, лінії нотного стану (мал. 62), протилежні ребра бруска.

Два *відрізки* або *промені* називають паралельними, якщо вони лежать на паралельних прямих. Наприклад, якщо  $ABCD$  — прямокутник, то  $AB \parallel DC$  і  $BC \parallel AD$ .

Через будь-яку точку  $P$ , яка не лежить на прямій  $a$ , можна провести пряму, паралельну прямій  $a$  (мал. 63, а). Для цього можна через точку  $P$  провести пряму  $c$ , перпендикулярну до прямої  $a$ , а потім пряму  $b$ , перпендикулярну до прямої  $c$  (мал. 63, б). За такої побудови завжди  $b \parallel a$ . Можна скористатися також лінійкою і косинцем.

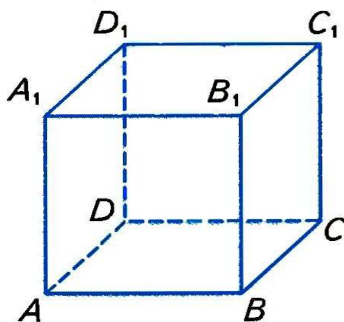
Як проводити паралельні прямі, користуючись лінійкою і циркулем, дізнаєтесь пізніше.



## Для допитливих

Можна довести (спробуйте!), що дві прямі однієї площини, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні. Тобто, якщо  $a \perp c$  і  $b \perp c$ , то  $a \parallel b$ .

Але якщо прямі  $a$  і  $b$  не належать одній площині, то таке твердження неправильне. Наприклад, якщо  $ABCD, A_1B_1C_1D_1$  — куб, то  $AB \perp BB_1$  і  $B_1C_1 \perp BB_1$ , але прямі  $AB$  і  $B_1C_1$  не паралельні (мал. 64).



■ Мал. 64

Слово *паралельні* походить від грецького слова «параллелос», яке означає: ті, що йдуть поруч. Якщо говорять, що якась пряма паралельна, то обов'язково слід сказати, якій саме прямій вона паралельна. Отже, паралельність прямих — це своєрідне відношення між двома прямими. *Відношення паралельності прямих* має таку властивість: якщо  $a \parallel b$ , то і  $b \parallel a$ . Іншими відношеннями є перпендикулярність прямих, рівність кутів тощо. Знаки цих відношень:  $\parallel$ ,  $\perp$ ,  $=$ .

Згодом ви дізнаєтеся про інші відношення між геометричними об'єктами.

## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке *кут між прямими*?
2. Сформулюйте означення перпендикулярних прямих.
3. Які відрізки називаються перпендикулярними?
4. Які дві прямі називаються паралельними?
5. Які відрізки називаються паралельними?
6. За допомогою яких креслярських інструментів можна провести пряму, перпендикулярну до даної прямої? Як це роблять?
7. Як можна провести пряму, паралельну даній прямій?

## ● Виконаємо разом

**1** Доведіть, що бісектриси суміжних кутів перпендикулярні.

■ Нехай  $\angle AOB$  і  $\angle BOC$  — суміжні кути.  $OK$  і  $OP$  — їх бісектриси (мал. 65).  $\angle KOP = \angle KOB + \angle BOP$ . Оскільки  $OK$  і  $OP$  — бісектриси, то

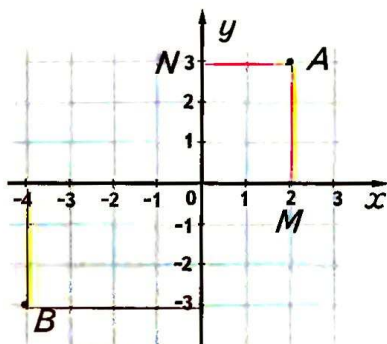
$$\angle KOB = \frac{1}{2} \angle AOB,$$

$$\angle BOP = \frac{1}{2} \angle BOC.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \angle KOP &= \frac{1}{2} \angle AOB + \frac{1}{2} \angle BOC = \\ &= \frac{1}{2} (\angle AOB + \angle BOC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = \\ &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Отже,  $OK \perp OP$ .

**2** Позначте на координатній площині точки  $A(2; 3)$  і  $B(-4; -3)$ . Знайдіть відстань від цих точок до осей координат, якщо довжина одиничного відрізка дорівнює 1 см.



■ Мал. 66

■ З точок  $A$  і  $B$  опустимо перпендикуляри на осі координат (мал. 66). Довжина відрізка  $AM$  — відстань від точки  $A$  до осі  $OX$ , а довжина відрізка  $AN$  — відстань від точки  $A$  до осі  $OY$ . З малюнка видно, що  $AM = 3$  см, а  $AN = 2$  см.

Аналогічно встановлюємо, що відстань від точки  $B$  до осей координат дорівнює 3 см і 4 см.

## ● Задачі і вправи

### ВІКОНАЙТЕ УСНО

**131.** Наведіть приклади матеріальних моделей:

- а) перпендикулярних прямих;
- б) паралельних прямих.



**132.** Які з прямих, зображених на малюнку 67:

- перпендикулярні;
- паралельні?

**133.** Користуючись клітинками зошита (мал. 68), вкажіть:

1) через яку точку пройде пряма, що:

а) перпендикулярна до прямої  $a$  і проходить через точку  $A$ ;

б) перпендикулярна до прямої  $a$  і проходить через точку  $D$ ;

в) паралельна прямій  $a$  і проходить через точку  $F$ ;

г) паралельна прямій  $a$  і проходить через точку  $K$ ;

2) яке з тверджень правильне:

а)  $AB \perp a$ ; б)  $BM \perp a$ ;

в)  $KP \perp a$ ; г)  $FK \parallel a$ ;

г)  $BC \parallel a$ ; д)  $KP \parallel a$ .

**134.**  $ABCD, A_1B_1C_1D_1$  — прямокутний паралелепіпед (мал.69).

1) Назвіть відрізки:

а) паралельні  $AA_1$ ;

б) паралельні  $AD$ ;

в) перпендикулярні до  $AA_1$ ;

г) перпендикулярні до  $AD$ .

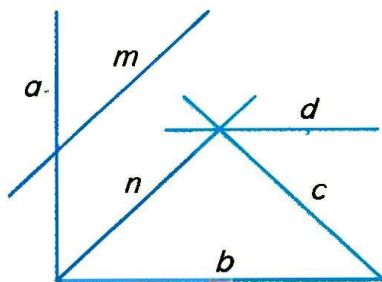
2) Яке з тверджень правильне:

$AA_1 \perp AD$ ;  $B_1C_1 \perp A_1B_1$ ;

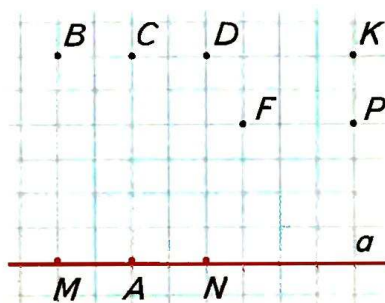
$DC \perp AB$ ;  $A_1D_1 \parallel AD$ ;

$CD \parallel C_1D_1$ ;  $DD_1 \parallel A_1D_1$ ;

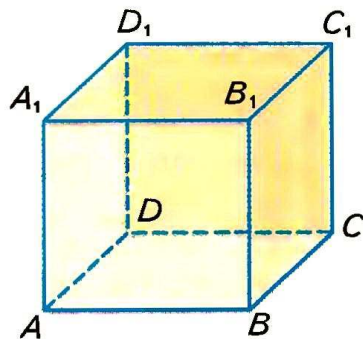
$CD \parallel AB$ ?



■ Мал. 67



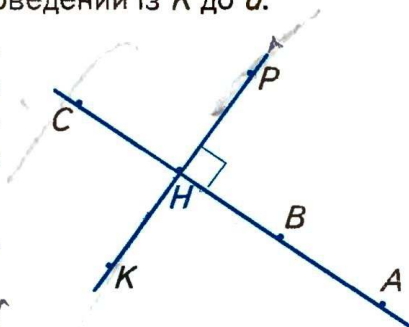
■ Мал. 68



■ Мал. 69

## A

- 135.** Проведіть пряму  $a$  і позначте точки  $M$  і  $N$  такі, що  $M \in a$ ,  $N \notin a$ . Користуючись клітинками зошита, проведіть через точки  $M$  і  $N$  прямі, перпендикулярні до прямої  $a$ .
- 136.** Точки  $M$  і  $N$  лежать по різні боки від прямої  $a$ . Користуючись клітинками зошита, через точки  $M$  і  $N$  проведіть прямі, паралельні прямій  $a$ .
- 137.** Точка  $A$  не лежить на прямій  $c$ . Скільки прямих, перпендикулярних до  $c$ , можна провести через точку  $A$ ? Чому?
- 138.** Точка  $K$  не лежить на прямій  $a$ . Користуючись косинцем, побудуйте перпендикуляр, проведений із  $K$  до  $a$ .
- 139.** Назвіть десять пар перпендикулярних відрізків, що є на малюнку 70. Чи є перпендикулярами до прямої  $KP$  відрізки  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$ ,  $AB$ ,  $BC$ ?
- 140.** Відомо, що  $a \parallel b$ . Чи правильно, що  $b \parallel a$ ?
- 141.** Промені  $AB$  і  $CD$  не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?
- 142.** Використовуючи малюнок 67 і символи  $\perp$  і  $\parallel$ , заповніть пропуски:  
а)  $a \dots b$ ; б)  $m \dots n$ ; в)  $n \dots c$ ;  
г)  $a \dots d$ ; г)  $m \dots c$ ; д)  $b \dots d$ .
- 143.** Перпендикулярні прямі  $AB$  та  $CD$  перетинаються в точці  $O$ .  $OM$  — бісектриса  $\angle COB$ . Знайдіть  $\angle AOM$  і  $\angle MOD$ .
- 144.** Позначте на координатній площині точки  $A(-3; 4)$ ,  $B(1; 8)$ ,  $C(4; 5)$ ,  $D(-2; -1)$ . Перевірте, чи перпендикулярні прямі  $AD$  і  $DC$ ,  $AB$  і  $BC$ . Чи паралельні прямі  $AB$  і  $CD$ ,  $AD$  і  $BC$ ?
- 145.** Позначте на координатній площині точки  $A(-3; -1)$  і  $B(2; 4)$ . Через ці точки проведіть прямі, перпендикулярні до прямої  $AB$ . Знайдіть координати точок перетину побудованих прямих з осями координат. Чи паралельні побудовані прямі?

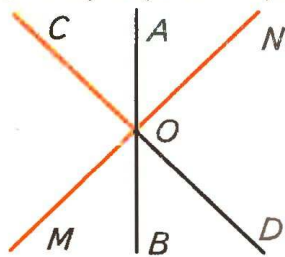


■ Мал. 70

- 146.** За допомогою транспортира побудуйте  $\angle AOB = 30^\circ$ . Позначте точку  $M$  таку, що  $M \in OA$  і  $OM = 4$  см. Із точки  $M$  опустіть перпендикуляр на пряму  $OB$ . Виміряйте відстань від точки  $M$  до  $OB$ .
- 147.** За допомогою транспортира побудуйте  $\angle AOB = 130^\circ$ . Позначте  $M \in OA$ . З точки  $M$  опустіть перпендикуляр на пряму  $OB$ . Чи лежатиме основа перпендикуляра на промені  $OB$ ? А на прямій  $OB$ ?
- 148.**  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $M$  — внутрішня точка  $\angle AOB$ . Через точку  $M$  проведіть прямі, паралельні сторонам кута. Переконайтеся, що побудовані прямі перпендикулярні.
- 149.**  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $M$  — довільна точка бісектриси  $\angle AOB$ . Виміряйте відстані від точки  $M$  до променів  $OB$  і  $OA$ . Порівняйте ці відстані.

## Б

- 150.**  $\angle AOB$  і  $\angle BOC$  — суміжні кути.  $OM$  — внутрішній промінь кута  $AOB$ ,  $OM \perp AC$ . Чому дорівнює  $\angle MOB$ , якщо:
- $\angle BOC = 40^\circ$ ;
  - $\angle AOB - \angle BOC = 30^\circ$ ;
  - $\angle AOB : \angle BOC = 3 : 2$ ;
  - $\angle BOC = \frac{1}{3} \angle AOB$ ?
- 151.** Три прямі  $AB$ ,  $CD$ ,  $MN$  перетинаються в точці  $O$  (мал. 71). Доведіть, що  $CD \perp MN$ , якщо:
- $\angle AOM = 130^\circ$ ,  $\angle COB = 140^\circ$ ;
  - $\angle COM = \angle AOC + \angle MOB$ ;
  - $\angle AOM = 135^\circ$ ,  $OB$  — бісектриса  $\angle MOD$ .

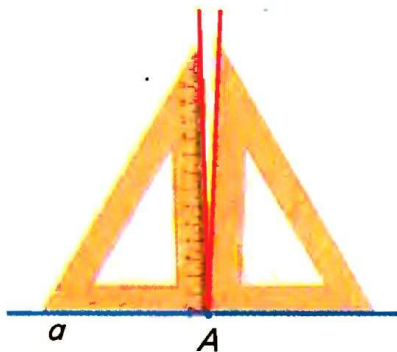


Мал. 71

- 152.**  $\angle AOB = 90^\circ$ . Побудуйте точку  $M$ , яка лежить у внутрішній області  $\angle AOB$  на відстані 2 см від кожної сторони кута.
- 153.** Побудуйте перпендикулярні прямі  $a$ ,  $c$  і точку  $M$ , що лежить на відстані 3 см від прямої  $a$  і на відстані 1 см від прямої  $c$ .
- 154.** За допомогою транспортира побудуйте  $\angle AOB = 80^\circ$  і проведіть його бісектрису  $OM$ . Через довільну точку  $K$  цієї бісектриси проведіть прямі, перпендикулярні до сторін кута. Виміряйте відстані від точки  $K$  до сторін кута і порівняйте їх.



- 155.** Розв'яжіть попередню задачу, якщо  $\angle AOB$  дорівнює  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  і  $130^\circ$ . Сформулюйте припущення про відстань від точок бісектриси кута до сторін цього кута.
- 156.** За допомогою транспортира побудуйте  $\angle AOB = 60^\circ$  і проведіть його бісектрису  $OM$ . Через довільну точку  $K$  цієї бісектриси проведіть пряму  $EF$ , перпендикулярну до  $OM$ . Порівняйте довжини відрізків  $OE$  і  $OF$ , якщо  $E \in OA$ ,  $F \in OB$ .
- 157.** Розв'яжіть попередню задачу, якщо  $\angle AOB$  дорівнює  $80^\circ$ ,  $90^\circ$  і  $120^\circ$ . Сформулюйте припущення про властивість прямої, перпендикулярної до бісектриси кута.
- 158.** Прикладаючи косинець то одним, то другим боком, учень через точку  $A$  провів два перпендикуляри до прямої  $a$  (мал. 72). Що можна сказати про такий косинець?



■ Мал. 72

### ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

- 159.** Перегинаючи аркуш паперу, утворіть моделі перпендикулярних і паралельних прямих.

### ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 160.** Позначте на прямій  $a$  точки  $A, B, C, D, M$  так, щоб точка  $B$  лежала між точками  $A$  і  $D$ , точка  $M$  — між  $A$  і  $B$ , а  $C$  — між  $B$  і  $D$ .
- 161.** Чи належить точка  $K$  відрізку  $AB$ , якщо  $AK = 3$  см,  $BK = 5$  см,  $AB = 7$  см?
- 162.** Знайдіть міри суміжних кутів, якщо вони пропорційні числам:  
а)  $1$  і  $2$ ; б)  $1$  і  $4$ ; в)  $4$  і  $5$ ; г)  $\frac{1}{2}$  і  $\frac{1}{3}$ .
- 163.** Периметр чотирикутника дорівнює  $P$ . Знайдіть довжини його сторін, якщо вони пропорційні числам:  
а)  $1$ ;  $2$ ;  $3$  і  $4$ ; б)  $3$ ;  $5$ ;  $3$  і  $7$ ; в)  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{2}$  і  $1$ .

## § 6. Ознаки паралельності прямих

**В**ажливу роль у дослідженні паралельних прямих відіграють поняття січної та деяких пар кутів.

Нехай  $a$  і  $b$  — дві довільні прямі площини. Прямая  $c$ , що їх перетинає, називається *січною* прямих  $a$  і  $b$  (мал. 73).

Прямі  $a$  і  $b$  з їх січною  $c$  утворюють 8 кутів. На малюнку 73 їх занумеровано. Деякі пари цих кутів мають спеціальні назви:

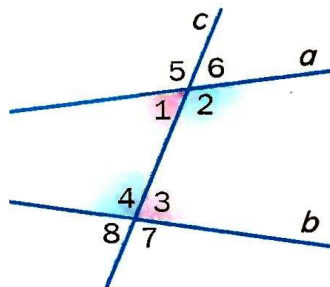
*внутрішні різносторонні кути*: 1 і 3, 2 і 4;

*внутрішні односторонні кути*: 1 і 4, 2 і 3;

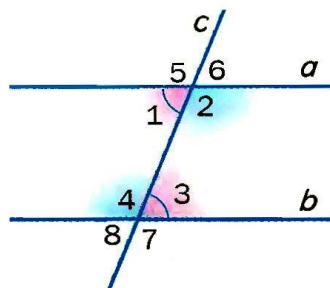
*відповідні кути*: 1 і 8, 2 і 7, 3 і 6, 4 і 5.

Зверніть увагу! Якщо два які-небудь внутрішні різносторонні кути рівні, то рівні також внутрішні різносторонні кути другої пари (мал. 74). Якщо, наприклад,  $\angle 1 = \angle 3$ , то  $\angle 2 = \angle 4$ , бо кути, суміжні з рівними, рівні.

Випадок, коли внутрішні різносторонні кути рівні, заслуговує особливої уваги, тому що саме за цієї умови прямі  $a$  і  $b$  паралельні.



■ Мал. 73



■ Мал. 74



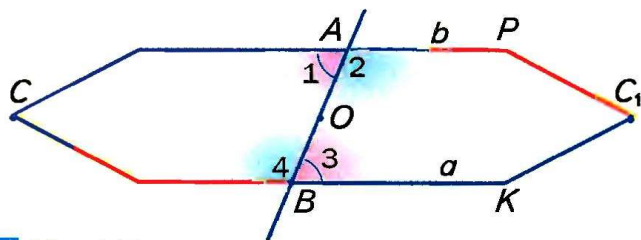
### ТЕОРЕМА 3

(ознака паралельності прямих).

**Дві прямі паралельні, якщо із січною вони утворюють рівні внутрішні різносторонні кути.**

### ■ ДОВЕДЕННЯ.

Нехай січна  $AB$  перетинає прямі  $a$  і  $b$  так, що утворені при цьому внутрішні різносторонні кути 1 і 3 дорівнюють один одному. Тоді, як показано вище, кути 2 і 4 також рівні. Припустимо, що за такої умови прямі  $a$  і  $b$  перетинаються в якійсь віддаленій точці  $C$ . У результаті утвориться трикутник  $ABC$  (на малюнку 75



■ Мал. 75

схематично його зображено у вигляді п'ятикутника). Уявимо, що цей трикутник повернуто навколо точки  $O$  — середини відрізка  $AB$  — так, щоб відрізок  $OA$  зайняв положення  $OB$ . Тоді, оскільки  $\angle 1 = \angle 3$  і  $\angle 2 = \angle 4$ , промінь  $AC$  суміститься з променем  $BK$ , а промінь  $BC$  — з променем  $AP$ . Оскільки промені  $AC$  і  $BC$  (за припущенням) мають спільну точку  $C$ , то промені  $BK$  і  $AP$  також мають якусь спільну точку  $C_1$ . А це означає, що через дві точки  $C$  і  $C_1$  проведено дві різні прямі. Такого не може бути.

Отже, якщо  $\angle 1 = \angle 3$ , то прямі  $a$  і  $b$  не можуть перетинатися. А оскільки вони лежать в одній площині і не перетинаються, то вони паралельні:  $a \parallel b$ . Це й треба було довести. ▲

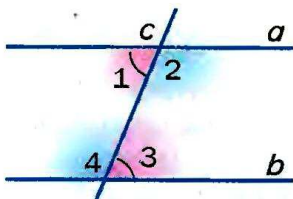
Зверніть увагу на спосіб доведення теореми 3. Щоб довести, що прямі  $a$  і  $b$  паралельні, ми показували, що вони не можуть перетинатися. Тобто припускали супротивне тому, що треба було довести. Такий спосіб міркувань називають *методом доведення від супротивного*.

На основі доведеної теореми 3 неважко довести й інші ознаки паралельності прямих.



#### ТЕОРЕМА 4

Дві прямі паралельні, якщо при перетині з січною вони утворюють внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює  $180^\circ$ .



■ Мал. 76

#### ■ ДОВЕДЕННЯ.

Нехай, наприклад, на малюнку 76 сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 4 дорівнює  $180^\circ$ . Сума суміжних кутів 3 і 4 також дорівнює  $180^\circ$ . Тому  $\angle 1 = \angle 3$ . Це — внутрішні різносторонні кути; якщо вони рівні, то прямі  $a$  і  $b$  паралельні. ▲



**ТЕОРЕМА 5** Дві прямі паралельні, якщо, перетинаючись із січною, вони утворюють рівні відповідні кути.

### ■ ДОВЕДЕННЯ.

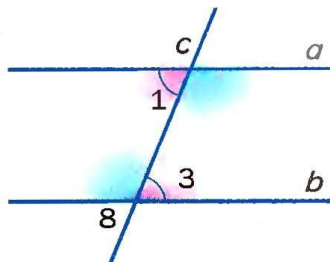
Нехай січна  $c$  перетинає прямі  $a$  і  $b$  так, що утворені при цьому відповідні кути 1 і 8 рівні (мал. 77). Кути 8 і 3 рівні, бо вертикальні. Тому якщо  $\angle 1 = \angle 8$ ,  $\angle 8 = \angle 3$ , то і  $\angle 1 = \angle 3$ , звідки випливає, що  $a \parallel b$ . ▲

Заслугує на увагу такий наслідок із теореми 3.

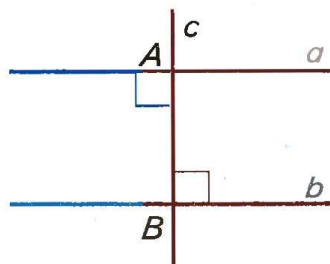
### ■ НАСЛІДОК.

Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Адже якщо кожна з прямих  $a$  і  $b$  перпендикулярна до  $c$ , то утворені при цьому внутрішні різносторонні кути рівні, бо прямі (мал. 78). Отже, прямі  $a$  і  $b$  паралельні.



■ Мал. 77



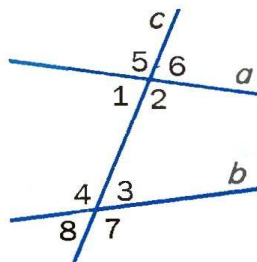
■ Мал. 78

### ■ Для допитливих

Кути 5 і 7 (а також 6 і 8) називають *зовнішніми різносторонніми*, а 5 і 8 (а також 6 і 7) — *зовнішніми односторонніми* кутами (мал. 79). Використовуючи ці поняття, спробуйте сформулювати і довести ще дві ознаки паралельності прямих.

Корисно краще зрозуміти сутність методу доведення від супротивного.

Якщо твердження  $A$  заперечує твердження  $B$ , то такі два *твердження* називають *суперечливими* або *супротивними* одне одному. Із двох взаємно суперечливих тверджень завжди одне правильне, а друге



■ Мал. 79

хибне. Тому якщо переконаємося, що твердження  $A$  і  $B$  суперечливі одне одному і, наприклад, що  $B$  неправильне, то можемо бути певні, що твердження  $A$  правильне.

Не слід плутати твердження *супротивні* з *протилежними*. Наприклад, якщо йдеться про числові вирази і натуральні числа, то твердження: «вираз  $A$  додатний» і «вираз  $A$  від'ємний» або «число  $n$  просте» і «число  $n$  складене» — протилежні, але не супротивні, адже кожне з них може бути неправильним. А от твердження «вираз  $A$  додатний» і «вираз  $A$  недодатний» або «число  $n$  просте» і «число  $n$  непросте» — взаємно суперечливі. *Непросте* — означає складене або дорівнює 1; *недодатне* — від'ємне або дорівнює нулю.

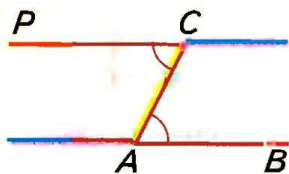
**Доводячи методом від супротивного, спростовувати треба не протилежне твердження, а супротивне даному.** *Спростувати* що-небудь — означає показати, що воно неправильне.

## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення паралельних прямих.
2. Що таке січна двох прямих?
3. Які кути називають внутрішніми різносторонніми? А внутрішніми односторонніми? Покажіть на малюнку.
4. Які кути називають відповідними? Покажіть на малюнку.
5. Сформулюйте і доведіть ознаки паралельності прямих.

## ● Виконаємо разом

- 1** Як побудувати паралельні прямі, користуючись лише лінійкою і транспортиром?

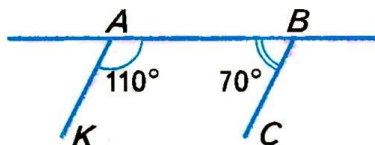


■ Мал. 80

■ Накреслимо довільний промінь  $AB$  і відкладемо рівні кути  $BAC$  і  $ACP$ , як показано на малюнку 80. Прямі  $AB$  і  $CP$  паралельні, адже кути  $BAC$  і  $ACP$  внутрішні різносторонні, а за побудовою вони рівні.

**2** Через кінці відрізка  $AB$  з одного боку від прямої  $AB$  проведено промені  $AK$  і  $BC$  так, що  $\angle KAB = 110^\circ$ , а  $\angle ABC = 70^\circ$ . Чи паралельні ці промені?

■ Прямую  $AB$  можна вважати січною прямих  $AK$  і  $BC$  (мал. 81). Кути  $KAB$  і  $ABC$  — внутрішні односторонні. Оскільки їх сума  $110^\circ + 70^\circ$  дорівнює  $180^\circ$ , то прямі  $AK$  і  $BC$  паралельні (теорема 4). Тому і промені  $AK$  і  $BC$  паралельні.



■ Мал. 81

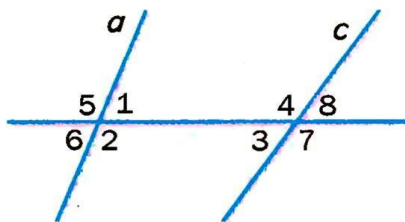
### ● Задачі і вправи

#### ■ ВИКОНАЙТЕ УСНО ■

**164.** Скільки кутів утворюється при перетині двох прямих третьою?

**165.** Розгляньте малюнок 82 і назвіть пари кутів:

- внутрішніх різносторонніх;
- внутрішніх односторонніх;
- зовнішніх різносторонніх;
- зовнішніх односторонніх;
- відповідних;
- суміжних;
- вертикальних.



■ Мал. 82

**166.** Використовуючи малюнок 82, знайдіть суми мір кутів:

- 1, 2, 3 і 4; б) 1, 3, 5 і 7; в) 1, 4, 5 і 8; г) 5, 6, 7 і 8.

**167.** Чи паралельні прямі  $a$  і  $c$  на малюнку 82, якщо:

- $\angle 6 = \angle 8$ ; б)  $\angle 7 = 101^\circ$  і  $\angle 5 = 101^\circ$ ;
- $\angle 5 + \angle 8 = 180^\circ$ ; г)  $\angle 1 + \angle 7 = 180^\circ$ ?

**168.** Як розташовані прямі  $a$  і  $b$ , якщо  $a \perp c$ ,  $b \perp c$  і всі вони лежать в одній площині?

**169.** Як можуть бути розміщені в просторі прямі  $a$  і  $b$ , якщо  $a \perp c$  і  $b \perp c$ ?



**170.** Запишіть назви пар кутів, зображених на малюнку 82:

- а)  $\angle 1$  і  $\angle 5$ ; в)  $\angle 7$  і  $\angle 2$ ; г)  $\angle 2$  і  $\angle 3$ ;  
б)  $\angle 6$  і  $\angle 3$ ; г)  $\angle 3$  і  $\angle 1$ ; д)  $\angle 8$  і  $\angle 5$ .

**171.** Відомо, що  $\angle 1 = 87^\circ$ ,  $\angle 3 = 78^\circ$  (мал. 82). Обчисліть міри кутів 2, 4, 5, 6, 7, 8.

**172.** Скориставшись малюнком 82, обчисліть:

- а) міри кутів 1, 2, 3, 4, 5, 8, якщо  $\angle 7 = 100^\circ$ ,  $\angle 6 = 90^\circ$ ;  
б)  $\angle 1 + \angle 4$  і  $\angle 2 + \angle 3$ , якщо  $\angle 5 + \angle 8 = 170^\circ$ ;  
в)  $\angle 4 - \angle 5$ , якщо  $\angle 4 - \angle 2 = 10^\circ$ .

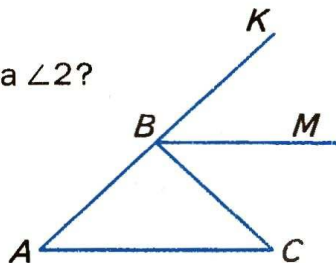
**173.** Чи паралельні прямі  $a$  і  $c$  (мал. 82), якщо:

- а)  $\angle 1 = 50^\circ$ ,  $\angle 7 = 130^\circ$ ;  
б)  $\angle 6 = 65^\circ$ ;  $\angle 8 = 115^\circ$ ;  
в)  $\angle 1 + \angle 7 = 180^\circ$ ;  
г)  $\angle 2 = 140^\circ$ ,  $\angle 3$  на  $80^\circ$  менший за  $\angle 2$ ?

**174.**  $BM$  — бісектриса  $\angle KBC$  (мал. 83).

Чи паралельні прямі  $AC$  і  $BM$ , якщо  $\angle A = 50^\circ$  і:

- а)  $\angle CBM = 50^\circ$ ;  
б)  $\angle ABM = 130^\circ$ ;  
в)  $\angle BCA = \angle KBM$ ;  
г)  $\angle ABM$  на  $50^\circ$  більший за  $\angle CAB$ ?



■ Мал. 83

**175.** Пряма  $KP$  перетинає пряму  $AB$  у точці  $K$ , а пряму  $CD$  — у точці  $P$ . Чи паралельні прямі  $AB$  і  $CD$ , якщо  $\angle AKP = 90^\circ$  і  $\angle KPC = 90^\circ$ ?

**176.** Пряма  $KP$  перетинає пряму  $AB$  у точці  $K$ , а пряму  $CD$  — у точці  $P$  так, що точки  $B$  і  $D$  лежать по один бік від прямої  $KP$ . Чи паралельні прямі  $AB$  і  $CD$ , якщо  $\angle BKP = 89^\circ 39'$  і  $\angle KPD = 90^\circ 21'$ ?

**177.** Через кінці відрізка  $AB$  з одного боку від нього проведено промені  $AP$  і  $BC$ . Чи паралельні ці промені, якщо:

- а)  $\angle PAB = 105^\circ$ , а  $\angle ABC = 75^\circ$ ;  
б)  $\angle PAB = 93^\circ$ , а  $\angle ABC = 87^\circ$ ?

**178.** Доведіть, що протилежні сторони прямокутника лежать на паралельних прямих.

## 5

**179.** Прямі  $a$  і  $b$  із січною  $c$  утворюють рівні гострі кути. Чи випливає з цього, що  $a \parallel b$ ?

**180.** Знайдіть міри кутів 1 і 2, зображених на малюнку 84, якщо  $\angle 1 + \angle 4 = 160^\circ$  і:

- $\angle 4$  на  $20^\circ$  менший за  $\angle 1$ ;
- $\angle 2$  у 2 рази більший за  $\angle 1$ ;
- $\angle 4 : \angle 2 = 2 : 3$ ;
- $\angle 4$  становить 60% кута 2.

**181.** Чи паралельні прямі  $a$  і  $b$ , зображені на малюнку 85, якщо:

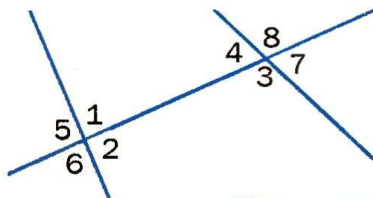
- $\angle 4 - \angle 1 = 30^\circ$  і  $\angle 3 = 75^\circ$ ;
- $\angle 1 = 60^\circ$  і  $\angle 2 : \angle 3 = 2 : 1$ ?

**182.** Встановіть взаємне розташування прямих  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , зображених на малюнку 86, якщо:

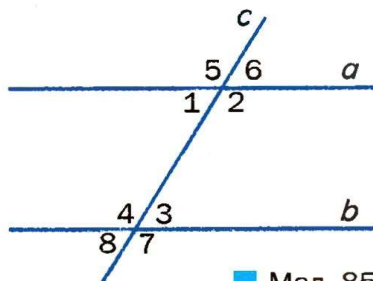
- $\angle 3 = \angle 5 = \angle 9$ ;
- $\angle 2 = \angle 8$  і  $\angle 7 = \angle 9$ ;
- $\angle 12 = \angle 8$  і  $\angle 6 + \angle 3 = 180^\circ$ .

**183.** Січна  $n$  перетинає прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$  так, що позначені на малюнку 86 числами 2, 8 і 12 кути дорівнюють один одному. Доведіть, що прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$  попарно паралельні.

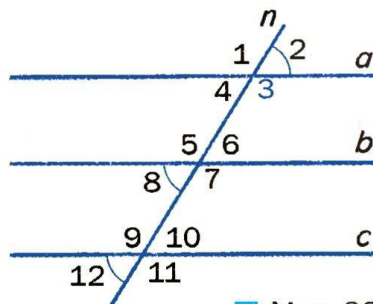
**184.** У зображеному на малюнку 87 шестикутнику  $\angle 1 = \angle 4$ ,  $\angle 2 = \angle 5$  і  $\angle 3 = \angle 6$ . Доведіть, що кожна сторона даного шестикутника паралельна протилежній стороні.



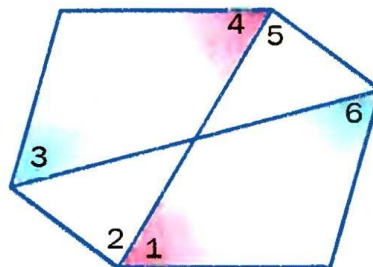
■ Мал. 84



■ Мал. 85



■ Мал. 86



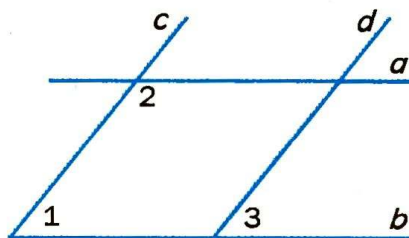
■ Мал. 87

**185.** Чи паралельні прямі  $a$  і  $b$ ,  $c$  і  $d$ , якщо:  $\angle 1 = 60^\circ$ ,  $\angle 2$  вдвічі більший, а  $\angle 2 - \angle 3 = 60^\circ$  (мал. 88)?

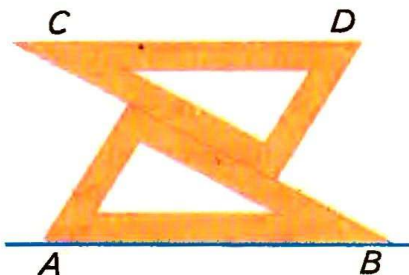
**186.** Як можна побудувати паралельні прямі, користуючись косинцем?

**187.** Користуючись двома однаковими косинцями, паралельні прямі можна проводити, як показано на малюнку 89. Обґрунтуйте таку побудову.

**188.** Закінчіть речення: «Щоб дізнатися, чи паралельні дані прямі, треба провести їх січну і виміряти відповідні кути. Якщо...»



■ Мал. 88



■ Мал. 89

## ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

**189.** Зробіть модель для ілюстрації доведення теореми 3.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**190.** Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 15 см і 18 см. У скільки разів зменшиться периметр трикутника, якщо кожен його сторону зменшити на 5 см?

**191.** На скільки частин можуть поділити площину пряма і коло, розташовані на ній?

**192.** Прямі  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$ ,  $OM$  — бісектриса кута  $AOC$ . Знайдіть міри кутів  $MOB$  і  $MOD$ , якщо  $COB = 70^\circ$ .

**193.** Один з двох кутів, утворених при перетині двох прямих, на  $90^\circ$  більший за другий. У скільки разів він більший за другий кут?



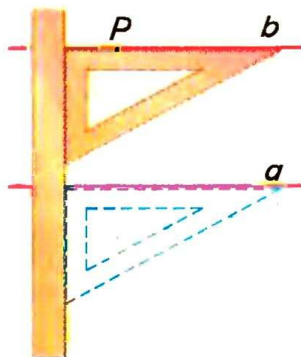
## § 7. Властивості паралельних прямих

### ● Задача

Дано пряму  $a$  і точку  $P$ , що не належить цій прямій. Проведіть через точку  $P$  пряму, паралельну прямій  $a$ .

■ За допомогою лінійки і косинця побудову можна виконати, як показано на малюнку 90.

Чи можна через точку  $P$  провести дві різні прямі, паралельні прямій  $a$ ? Геометри здавна вважали істинним таке твердження:



■ Мал. 90

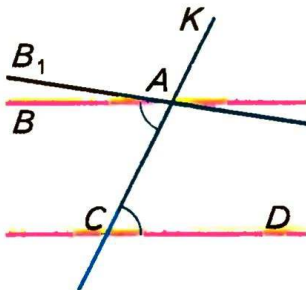
! Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Давньогрецький геометр Евклід це твердження прийняв без доведення. Його назвали *аксіомою Евкліда*, тому що *всі твердження, які приймають без доведення, називають аксіомами*. (Детальніше про аксіоми і теореми — в наступному параграфі.)

Не всі вчені аксіому Евкліда вважають правильною. Геометрію, в якій визнається правильною аксіома Евкліда, називають *евклідовою геометрією*. Ви вивчаєте евклідову геометрію.

! **ТЕОРЕМА 6** (обернена до теореми 3).

Якщо прямі паралельні, то внутрішні різносторонні кути, утворені ними з січною, рівні.

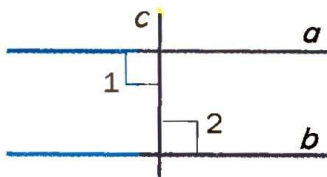


■ Мал. 91

### ■ ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі  $AB$  і  $CD$  — паралельні, а  $KC$  — їх січна, яка проходить через точку  $A$  (мал. 91). Доведемо, що  $\angle CAB = \angle ACD$ .

Припустимо, що  $\angle CAB \neq \angle ACD$ . Проведемо пряму  $AB_1$  так, щоб виконувалась рівність  $\angle CAB_1 = \angle ACD$ . За ознакою паралельності прямих  $AB_1 \parallel CD$ , а за умовою  $AB \parallel CD$ . Виходить, що через точку  $A$  проведено дві різні прямі, паралельні прямій  $CD$ . Це суперечить аксіомі Евкліда. Отже, зроблене вище припущення призводить до суперечності. Тому  $\angle CAB = \angle ACD$ . ▲



■ Мал. 92

■ **НАСЛІДОК.**

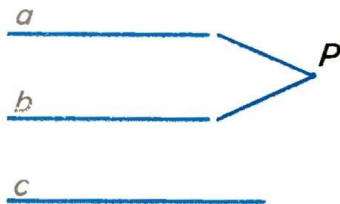
Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.

Справді, якщо  $c \perp a$  і  $a \parallel b$ , то  $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ , тобто  $c \perp b$  (мал. 92).

Сформулюйте і доведіть теорему, обернені до теорем 4 і 5.

**ТЕОРЕМА 7**

Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.



■ Мал. 93

■ **ДОВЕДЕННЯ.**

Нехай кожна з прямих  $a$  і  $b$  паралельна прямій  $c$ . Доведемо, що  $a \parallel b$ .

Припустимо, що прямі  $a$  і  $b$  не паралельні (мал. 93), а перетинаються в деякій точці  $P$ . Виходить, що через точку  $P$  проходять дві різні прямі  $a$  і  $b$ , паралельні  $c$ . Це суперечить аксіомі Евкліда. Отже, прямі  $a$  і  $b$  не можуть перетинатися, вони паралельні. ▲

■ **ПРИМІТКА.**

Доведення теореми правильне і для випадку, коли пряма  $c$  лежить між  $a$  і  $b$ .

**Для допитливих**

Останню теорему називають теоремою про *транзитивність паралельності прямих* (лат. *transitivus* — пере-

хідний), бо вона стверджує, що паралельність двох пар паралельних прямих переходить на третю пару:

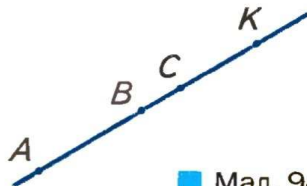
якщо  $a \parallel b$  і  $b \parallel c$ , то  $a \parallel c$ .

Щоб це твердження виконувалося завжди, домовилися вважати, що кожна пряма паралельна сама собі, тобто  $a \parallel a$ . Адже якщо

$a \parallel b$  і  $b \parallel a$ , то  $a \parallel a$ .

Відрізки однієї прямої також вважають паралельними. Наприклад, якщо  $A, B, C, K$  — точки однієї прямої, то кожний з відрізків  $AB, AC, AK, BC, BK, CK$  паралельний будь-якому з них (мал. 94). У доцільності такої домовленості ви переконаєтеся згодом, вивчаючи паралельні перенесення, паралельне проектування тощо. А в цьому класі основна увага звертатиметься на паралельність відрізків і променів, що не лежать на одній прямій.

Є геометрії, в яких аксіома Евкліда не вважається правильною. Їх називають *неевклідовими геометріями*. Такою, наприклад, є геометрія Лобачевського (див. с. 195).



■ Мал. 94

## ? Запитання і завдання для самоконтролю

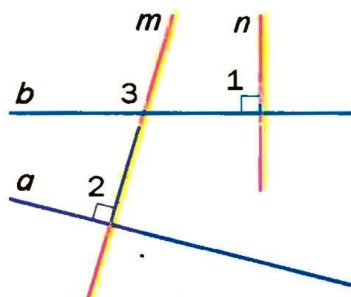
1. Сформулюйте аксіому Евкліда про паралельність прямих.
2. Що ви знаєте про Евкліда, про його «Основи»?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про внутрішні рівносторонні кути при паралельних прямих та січній.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про дві прямі, паралельні третій.
5. Що таке метод доведення від супротивного?



## Виконаємо разом

Доведіть, що прямі, перпендикулярні до непаралельних прямих, перетинаються.

Нехай прямі  $a$  і  $b$  перетинаються, а прямі  $m$  і  $n$  перпендикулярні до них:  $m \perp a$ ,  $n \perp b$  (мал. 95). Тоді  $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ . Припустимо, що  $m \parallel n$ , тобто  $\angle 1 = \angle 3$ . Тоді і  $\angle 2 = \angle 3$ , звідки випливає, що  $a \parallel b$ . Це суперечить умові задачі. Отже, прямі  $m$  і  $n$  не можуть бути паралельними, вони перетинаються.



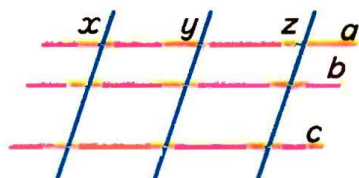
Мал. 95

## Задачі і вправи

### ВИКОНАЙТЕ УСНО

194. Скільки пар паралельних прямих є на малюнку 96? А скільки пар непаралельних прямих?

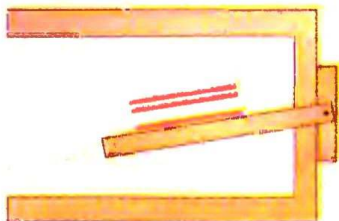
195. Кут між прямими  $a$  і  $x$  дорівнює  $70^\circ$ . Знайдіть кути між усіма парами прямих, що є на малюнку 96.



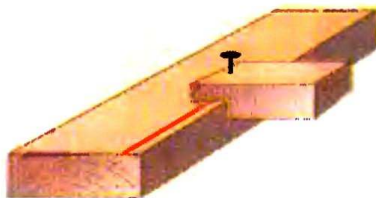
Мал. 96

196. Поясніть, як можна проводити паралельні прямі, користуючись рейсшиною (мал. 97).

197. На малюнку 98 зображено саморобний рейсмус. Як таким рейсмусом можна проводити на бруску прямі, паралельні його ребрам?



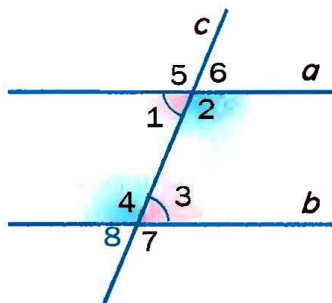
Мал. 97



Мал. 98

## ■ А

- 198.** Міра одного з кутів, утворених двома паралельними прямими з їх січною, дорівнює  $35^\circ$ . Знайдіть міри інших кутів.
- 199.** На стороні кута  $ABC$  взято точку  $A$ . Через неї проведено пряму, паралельну  $BC$ . Знайдіть міри кутів при вершині  $A$ , якщо  $\angle ABC = 50^\circ$ .
- 200.** Доведіть, що коли січна перетинає дві паралельні прямі, то:  
а) відповідні кути рівні;  
б) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює  $180^\circ$ .
- 201.** Знайдіть міри всіх кутів, зображених на малюнку 99, якщо  $a \parallel b$  і:  
а)  $\angle 1 = 60^\circ$ ;  
б)  $\angle 5 + \angle 7 = 250^\circ$ ;  
в)  $\angle 2 - \angle 1 = 50^\circ$ .
- 202.** Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.
- 203.** Прямі  $a$  і  $b$  не паралельні прямій  $c$ . Чи впливає з цього, що прямі  $a$  і  $b$  не паралельні?
- 204.** Доведіть, що бісектриси двох відповідних кутів при паралельних прямих паралельні.
- 205.** Доведіть, що коли одна січна з двома прямими утворює рівні відповідні кути, то й кожна інша січна з цими прямими утворює рівні відповідні кути.
- 206.** Кут між однією з двох паралельних прямих і їх січною дорівнює  $80^\circ$ . Під яким кутом бісектриса цього кута перетинає другу пряму?
- 207.** На сторонах  $AB$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  взято точки  $K$  і  $P$  такі, що  $KP \parallel AC$ . Знайдіть кути чотирикутника  $AKPC$ , якщо  $\angle BKP = 60^\circ$ ,  $\angle BPK = 80^\circ$ .



■ Мал. 99

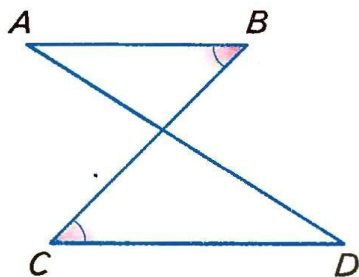
**208.** Якщо прямі з січною утворюють нерівні відповідні кути, то вони перетинаються. Доведіть це.

**209.** Промені  $AB$ ,  $AC$  і  $KP$  різні і такі, що  $AB \parallel KP$ ,  $AC \parallel KP$ . Знайдіть міру кута  $BAC$ .

**210.** Користуючись малюнком 99, на якому  $\angle 1 = \angle 3$ , обчисліть міри кутів 3 і 4, якщо:

- а)  $\angle 4 - \angle 1 = 50^\circ$ ;
- б)  $\angle 4$  в 3 рази більший за  $\angle 6$ .

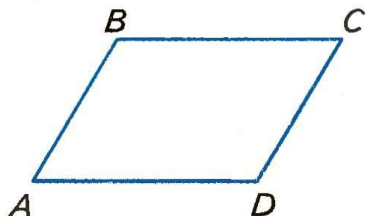
**211.** Сторони  $AD$  і  $BC$  замкненої ламаної  $ABCD$  перетинаються і  $\angle B = \angle C$  (мал. 100). Доведіть, що  $\angle A = \angle D$ .



■ Мал. 100

**212.** Кожна сторона чотирикутника  $ABCD$  паралельна протилежній стороні (мал. 101). Доведіть, що:

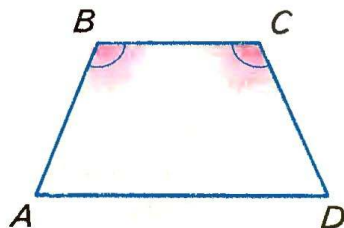
- а)  $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ;
- б)  $\angle B + \angle C = 180^\circ$ ;
- в)  $\angle A = \angle C$ ;
- г)  $\angle B = \angle D$ .



■ Мал. 101

**213.** У чотирикутнику  $ABCD$   $BC \parallel AD$  і  $\angle B = \angle C$  (мал. 102). Доведіть, що:

- а)  $\angle A = \angle D$ ;
- б)  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ .



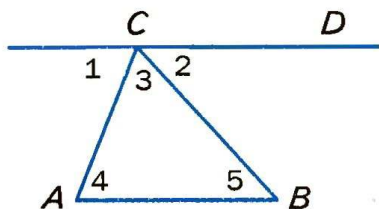
■ Мал. 102

**214.** Через точку, яка не лежить на прямій  $a$ , проведено три прямі. Доведіть, що принаймні дві з них перетинають пряму  $a$ .

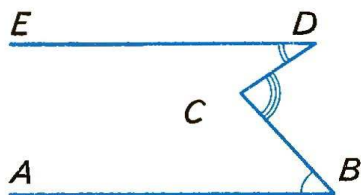
**215.** Доведіть, що два кути з відповідно паралельними сторонами рівні або сума їх мір дорівнює  $180^\circ$ .

**216.** На малюнку 103  $\angle 1 = 70^\circ$ ,  $\angle 2 = 50^\circ$  і  $AB \parallel CD$ . Знайдіть міри кутів 3, 4 і 5.





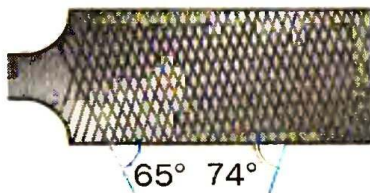
■ Мал. 103



■ Мал. 104

- 217.** На малюнку 104  $\angle ABC = 50^\circ$ ,  $\angle CDE = 36^\circ$ ,  $AB \parallel DE$ . Знайдіть  $\angle BCD$ .

- 218.** Одна насічка напилка утворює з його ребром кут  $65^\circ$ , а інша —  $74^\circ$  (мал. 105). Знайдіть міру гострого кута між двома різними насічками.



■ Мал. 105

### ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

- 219.** Виміряйте транспортиром кут між прямими в зошиті в косу лінійку (див. мал. 52). Визначте інші кути.

### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 220.** Знайдіть діаметр кола, якщо він довший від радіуса:

а) на 3 см; б) на 3,5 м.

- 221.** Чому дорівнює довжина кола, діаметр якого:

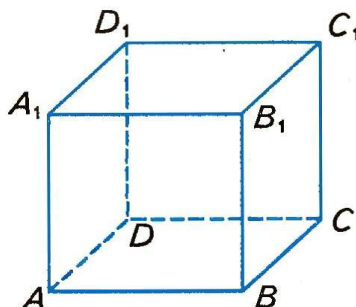
а) 10 см; б) 0,1 м?

- 222.** Скільки спільних точок можуть мати:

- а) пряма і коло;  
б) пряма і круг;  
в) коло і коло?

- 223.** Перемалюйте в зошит фігуру з малюнка 106. Як називають таку фігуру? Назвіть її вершини, ребра, грані.

- 224.** Скільки різних пар паралельних ребер має куб?



■ Мал. 106

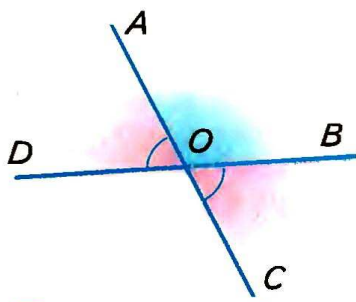
## § 8. Теореми і аксіоми

Ви вже маєте уявлення про теореми.

**Теорема** — це твердження, в істинності якого переконуються за допомогою логічних міркувань, доведень.

Звичайно теорема містить *умову* (те, що дано) і *висновок* (що вимагається довести). Щоб виокремити умову і висновок теореми, її зручно подати у формі «Якщо... , то...». Наприклад: «Якщо кути вертикальні, то вони рівні». Тут слова перед комою виражають умову теореми, а після коми — висновок.

Часто умову теореми записують після слова «дано», а висновок — після слова «довести». Наприклад, теорему про вертикальні кути можна оформити так.



■ Мал. 107

Д а н о:  $\angle AOD$ ,  $\angle BOC$  —  
вертикальні кути (мал. 107).

Д о в е с т и:  $\angle AOD = \angle BOC$ .

Д о в е д е н н я.

$$\angle AOD = 180^\circ - \angle AOB$$

( $\angle AOD$  і  $\angle AOB$  — суміжні),

$$\angle BOC = 180^\circ - \angle AOB$$

( $\angle BOC$  і  $\angle AOB$  — суміжні).

Отже,  $\angle AOD = \angle BOC$ .

Помінявши умову і висновок теореми місцями, одержимо нове твердження (істинне або хибне). Якщо одержане таким способом твердження істинне, його називають *теоремою, оберненою до даної*.

### ■ ПРИКЛАДИ

1. «Якщо кути вертикальні, то вони рівні» — дана теорема. «Якщо кути рівні, то вони вертикальні» — обернене твердження (хибне).
2. «Якщо відповідні кути рівні, то прямі паралельні» — дана теорема. «Якщо прямі паралельні, то відповідні кути рівні» — теорема, обернена до даної.

Найважливіші теореми, в яких подано критерії чого-небудь, називають *ознаками*.

Доводячи теорему, показують, що вона впливає з інших істинних тверджень. Однак на початку вивчення геометрії ще ніяких «інших істинних тверджень» немає. Тому кілька перших тверджень звичайно приймають без доведень. Їх називають **аксіомами**.

Деякі аксіоми вам уже відомі. Сформулюємо їх ще раз.

**!** Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.

■ Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і тільки одну.

■ Із трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.

■ Кожний відрізок має певну довжину.

■ Кожний кут має певну міру.

■ Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Від теорем і аксіом слід відрізняти *означення*, в яких розкривається зміст поняття. Наприклад: «Відрізком називається частина прямої, обмежена двома точками» — означення відрізка; «Гострим кутом називається кут, менший від прямого» — означення гострого кута.

В означеннях, аксіомах і теоремах — основний зміст геометрії. Їх треба знати, але формулювати (правильно!) можна і своїми словами. Наприклад, означення відрізка можна формулювати так: «Відрізок — це частина прямої, обмежена двома її точками» або так: «Частину прямої, обмежену двома її точками, називають відрізком».

## Для допитливих

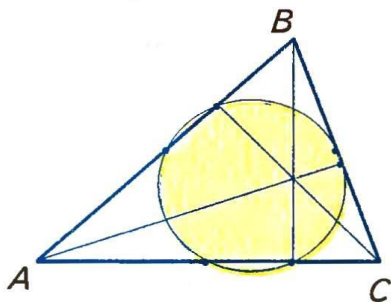
Слово *аксіома* грецького походження; спочатку це словом означало: повага, авторитет, незаперечність; згодом словом «аксіома» стали називати твердження, яке приймається без обґрунтування.



Слово *теорема* також грецького походження. Спочатку теоремою називали видовище, театральну виставу. Першим геометрам доведені ними теореми здавалися досить несподіваними, дивними, мов цікаві видовища. І справді дивно: з небагатьох примітивних тверджень, які приймаються без доведень, шляхом самих міркувань людина може отримати мільйони неочевидних наслідків. Навіть таких, яких ніде в природі не можна спостерігати. І таких, про існування яких не здогадувався жоден мислитель.

Щоб і ви зрозуміли, яке задоволення відчували перші геометри, відкриваючи і доводячи все нові й нові властивості геометричних фігур за допомогою самих лише міркувань, спробуйте відповісти на одне з таких питань.

Подивіться на малюнок 108. На ньому виділено 6 точок: середини сторін трикутника  $ABC$  і основи його висот. Здається, усі ці точки лежать на одному колі. Чи це справді так? Чи в кожному трикутнику? Хто першим виявляв подібні закономірності й обґрунтовував їх, той відчував велике задоволення, немов мандрівник, який першим прийшов туди, де жодна інша людина ще не була, або спортсмен, який побив світовий рекорд.



■ Мал. 108



### Запитання і завдання для самоконтролю

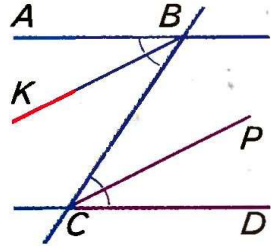
1. Що таке теорема? Наведіть приклади теорем.
2. Що таке аксіома? Наведіть приклади аксіом.
3. Що таке означення? Наведіть приклади означень.
4. Яке твердження називається теоремою, оберненою до даної?
5. Що таке ознака?

### ● Виконаємо разом

**1** Бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів, утворених січною з двома паралельними прямими, паралельні одна одній. Доведіть. Сформулюйте обернене твердження.

■ Нехай  $BC$  — січна прямих  $AB$  і  $CD$ , кути  $ABC$  і  $BCD$  — внутрішні різносторонні, а  $BK$  і  $CP$  — їх бісектриси (мал. 109). Покажемо, що коли  $AB \parallel CD$ , то  $BK \parallel CP$ .

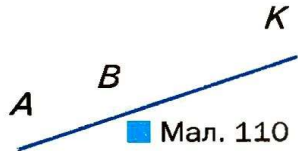
Якщо  $AB \parallel CD$ , то  $\angle ABC = \angle BCD$  — як внутрішні різносторонні при паралельних прямих. Половини рівних кутів рівні, тому  $\angle KBC = \angle BCP$ . Ці кути — внутрішні різносторонні для прямих  $KB$  і  $CP$  та січної  $BC$ . Оскільки ці кути рівні, то прямі  $KB$  і  $CP$  паралельні. А це й треба було довести.



■ Мал. 109

Обернене твердження: якщо бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів, утворених двома прямими з їх січною, паралельні, то паралельні і дані прямі.

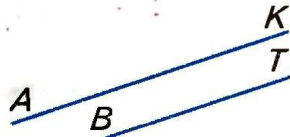
**2** Два промені називають *співнапрямленими*, якщо один з них є частиною другого або якщо вони паралельні і розміщені по один бік від прямої, що проходить через їх початки. Наведіть приклади.



■ Мал. 110

#### ■ ПРИКЛАДИ

Промені  $AK$  і  $BK$  (мал. 110), а також промені  $AK$  і  $BT$  (мал. 111).



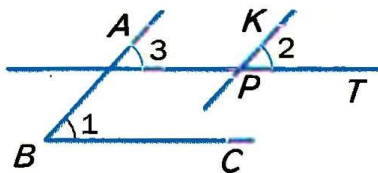
■ Мал. 111

**3** Доведіть, що кути із співнапрямленими сторонами рівні.

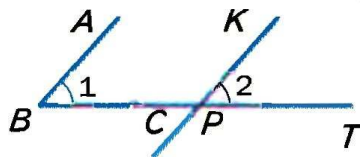
■ Доведемо, що коли промені  $BA$  і  $PK$ ,  $BC$  і  $PT$  співнапрямлені, то кути 1 і 2 рівні.

Якщо дані кути розміщені, як показано на малюнку 112, то  $\angle 1 = \angle 3$  і  $\angle 3 = \angle 2$ , отже,  $\angle 1 = \angle 2$ .

Якщо дані кути розміщені, як показано на малюнку 113, то промінь  $PT$  становить частину променя  $BC$ . У цьому випадку  $\angle 1 = \angle 2$  як відповідні кути при паралельних прямих  $BA$  і  $PK$ .



■ Мал. 112



■ Мал. 113

### ● Задачі і вправи

#### ■ ВИКОНАЙТЕ УСНО

225. Сформулюйте означення:  
а) вертикальних кутів; б) суміжних кутів.
226. Сформулюйте аксіоми про розміщення точок на прямій.
227. Сформулюйте аксіоми про вимірювання відрізків.
228. Сформулюйте аксіому Евкліда про паралельність прямих.
229. Чи через кожні три точки можна провести пряму? Чи існують три точки, через які можна провести пряму?
230. Чи існують 4 точки, через які можна провести пряму?
231. Сформулюйте ознаку подільності натуральних чисел на 3. Як її можна сформулювати інакше?
232. Які з тверджень правильні:  
а) «Якщо кожне з двох натуральних чисел ділиться на 10, то і їх сума ділиться на 10»;  
б) «Якщо сума двох натуральних чисел ділиться на 10, то кожне з них ділиться на 10»?

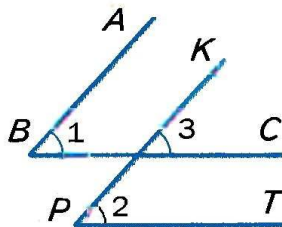
#### ■ А

233. Сформулюйте теорему про суміжні кути. Подайте її у формі «Якщо... , то...». Зазначте її умову і висновок.
234. Сформулюйте теорему про дві прямі, паралельні третій. Запишіть її за допомогою математичних символів.
235. Які з даних тверджень істинні:  
а) «Якщо кути рівні, то вони вертикальні»;  
б) «Якщо кути не вертикальні, то вони не рівні»;  
в) «Якщо кути не рівні, то вони не вертикальні»?
236. Сформулюйте твердження, обернене до теореми 1. Чи можна вважати його теоремою? Чому?



**237.** Сформулюйте твердження, обернене до теореми 5. Чи є воно теоремою?

**238.** Дивлячись на малюнок 114, учень міркує: «Якщо  $AB \parallel KP$  і  $BC \parallel PT$ , то  $\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$ . Отже, кути з відповідно паралельними сторонами рівні». Чи правильно він міркує? Розгляньте інші можливі випадки.



■ Мал. 114

**239.** Чи можна вважати правильними такі означення:

- а) «Бісектрисою кута називається пряма, яка ділить цей кут навпіл»;
- б) «Бісектрисою кута називається промінь, який ділить цей кут на рівні частини»?

**240.** Прочитайте три перші абзаци § 3 «Кути і їх міри». Чи є в них означення? Сформулюйте одне з них.

### Б

**241.** Сформулюйте означення паралельних прямих. Чи можна слова «на площині» опустити? Чому?

**242.** Яке з тверджень правильне:

- а) «Якщо кожне з трьох натуральних чисел ділиться на 5, то їх сума також ділиться на 5»;
- б) «Якщо сума трьох натуральних чисел ділиться на 5, то кожне з них ділиться на 5»?

**243.** Доведіть, що кут між бісектрисами двох вертикальних кутів розгорнутий. Сформулюйте і доведіть аналогічне твердження про бісектриси двох суміжних кутів.

**244.** Сформулюйте словами і доведіть твердження:

- а) якщо  $a \parallel b$  і  $b \parallel c$ , то  $a \parallel c$ ;
- б) якщо  $a \perp b$  і  $b \perp c$ , то  $a \parallel c$ .

Чи правильні ці твердження, коли прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$  не лежать в одній площині?

**245.** Доведіть, що:

- а) якщо кут  $A$  дорівнює куту  $B$ , а кут  $B$  — куту  $C$ , то кути  $A$  і  $C$  дорівнюють один одному;
- б) якщо відрізок  $AB$  дорівнює відрізку  $KP$ , а  $KP$  — відрізку  $MT$ , то відрізок  $AB$  дорівнює  $MT$ .

**246.** Чи правильні твердження:

- а) «Якщо кут  $A$  суміжний із кутом  $B$ , а кут  $B$  — з кутом  $C$ , то кути  $A$  і  $C$  суміжні»;
- б) «Якщо кут  $A$  вертикальний до кута  $B$ , а кут  $B$  — до кута  $C$ , то кути  $A$  і  $C$  також вертикальні»;
- в) «Якщо прямі  $a$  і  $c$  лежать в одній площині і прямі  $c$  і  $n$  — в одній площині, то прямі  $a$  і  $n$  також лежать в одній площині»?

**247.** Паралельні залізничні рейки, промені сонця та багато інших моделей прямих на фотографіях і картинах часто зображають у вигляді непаралельних прямих (мал. 115). Наведіть приклади зображень, на яких непаралельні прямі мають вигляд паралельних.



■ Мал. 115

**248.** Доведіть, що січна, перетинаючи паралельні прямі, утворює з ними:

- а) рівні зовнішні різносторонні кути;
- б) односторонні зовнішні кути, які в сумі становлять  $180^\circ$ .

**249.** Доведіть, що кути з відповідно перпендикулярними сторонами рівні або в сумі становлять  $180^\circ$ .

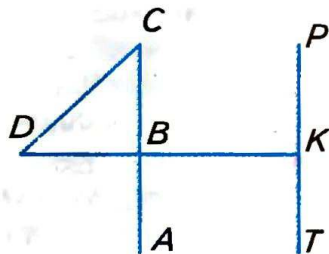
### ■ ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ■

**250.** Скільки існує на прямій точок, які лежать між даними її точками  $A$  і  $B$ ?

**251.** На які частини пряму ділять дві її точки?

**252.** Скільки різних відрізків зображено на малюнку 116? Назвіть їх.

**253.** Скількома різними ламаними можна сполучити дві дані точки  $K$  і  $P$ ? А скількома відрізками? Скількома дугами кіл?



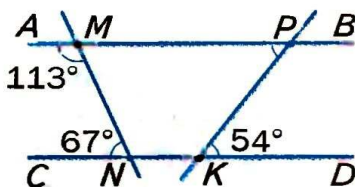
**254.** Дюйм — це 2,5 см. Скільки квадратних сантиметрів має квадратний дюйм?

■ Мал. 116

## ● Типові задачі для контрольної роботи

- 1°. Точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій.  $AB = 7,3$  см,  $BC = 3,7$  см. Знайдіть довжину відрізка  $AC$ . Розгляньте два випадки.
- 2°. Внутрішній промінь  $OK$  кута  $AOB$  розбиває його на кути  $AOK$  і  $KOB$ . Знайдіть міру кута:
  - а)  $AOB$ , якщо  $\angle AOK = 30^\circ$ ,  $\angle KOB = 40^\circ$ ;
  - б)  $KOB$ , якщо  $\angle AOB = 79^\circ$ ,  $\angle KOA = 53^\circ$ ;
  - в)  $KOA$ , якщо він на  $20^\circ$  менший за  $\angle KOB$  і  $\angle AOB = 80^\circ$ .
- 3°. Накресліть  $\angle ABC = 120^\circ$ . Проведіть його бісектрису  $BM$  і бісектрису  $BK$  кута  $MBC$ . Знайдіть міри кутів  $KBC$  і  $ABK$ .
- 4°. Знайдіть міри чотирьох кутів, утворених перетином двох прямих, якщо один з них  $45^\circ$ .
- 5°. Знайдіть міри суміжних кутів, якщо один з них:
  - а) на  $25^\circ$  більший від другого;
  - б) у 3 рази менший від другого.

- 6°. За допомогою малюнка 117 встановіть:
  - а) чи паралельні прямі  $AB$  і  $CD$ ;
  - б) міру кута  $KPM$ .



■ Мал. 117

- 7°. Дві паралельні прямі перетинає третя пряма так, що сума двох із восьми утворених кутів дорівнює  $240^\circ$ . Знайдіть міри всіх утворених кутів.
- 8°. Відрізки  $AB$  і  $KP$  перетинаються в точці  $O$ . Доведіть, що коли  $\angle AOK = \angle OPB$ , то  $\angle KAO = \angle OBP$ .
- 9°. Прямі  $AB$  і  $KP$  перетинаються в точці  $O$ .  $OM$  — бісектриса кута  $AOP$ . Знайдіть міру кута  $KOM$ , якщо  $\angle AOK - \angle AOM = 36^\circ$ .
- 10°. Доведіть, що бісектриси внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих перпендикулярні.



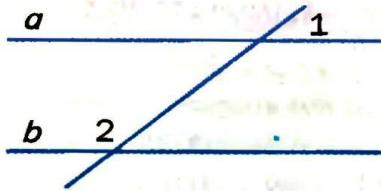
Задачі за готовими малюнками

А

Б

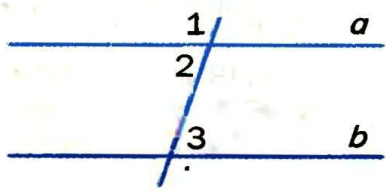
$\angle 1 = 50^\circ, \angle 2 = 130^\circ.$

Довести:  $a \parallel b.$



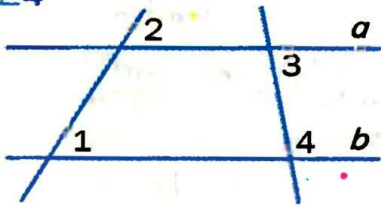
$\angle 1 : \angle 2 = 3 : 2, \angle 3 = 72^\circ.$

Довести:  $a \parallel b.$



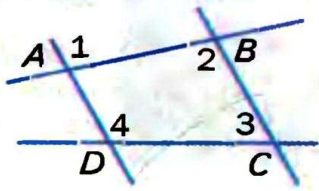
$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = 80^\circ.$

$\angle 4$



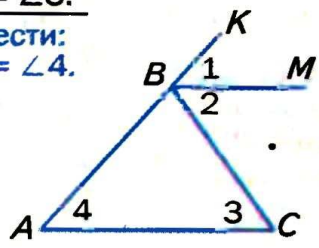
$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ.$

Довести:  $\angle 1 = \angle 2.$



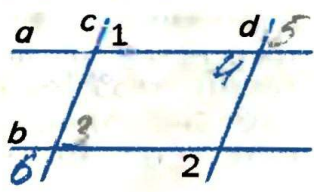
$\angle 2 = \angle 3.$

Довести:  
 $\angle 1 = \angle 4.$



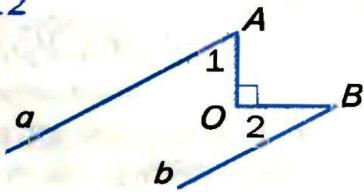
$a \parallel b, \angle 1 = \angle 2.$

Довести:  $c \parallel d.$



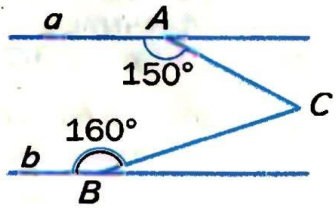
$a \parallel b, \angle 1 = 60^\circ.$

$\angle 2$



$a \parallel b.$

$\angle C$



■ Варіант 1

- 1°. Відрізки  $AB$  і  $KP$  перетинаються у внутрішній точці  $O$  так, що  $\angle AOK = 50^\circ$ . Знайдіть міри кутів  $AOP$ ,  $BOP$ ,  $BOK$ .
- 2°. Один із двох суміжних кутів більший від другого на  $18^\circ$ . Знайдіть ці кути.
- 3°. Через кінці відрізка  $AB$  з одного боку від прямої  $AB$  проведіть промені  $AK$  і  $BC$  так, щоб  $\angle KAB = 107^\circ$ , а  $\angle ABC = 73^\circ$ . Чи паралельні ці промені? Чому?

■ Варіант 2

- 1°. Відрізки  $MN$  і  $KT$  перетинаються у внутрішній точці  $X$  так, що  $\angle MXK = 65^\circ$ . Знайдіть міри кутів  $MXT$ ,  $TXN$ ,  $KXN$ .
- 2°. Знайдіть міри двох суміжних кутів, якщо один із них утричі більший від другого.
- 3°. Через кінці відрізка  $AB$  з одного боку від прямої  $AB$  проведіть промені  $AM$  і  $BC$  так, щоб  $\angle MAB = 102^\circ$ , а  $\angle ABC = 77^\circ$ . Чи паралельні ці промені? Чому?

■ Варіант 3

- 1°. Відрізки  $AC$  і  $MP$  перетинаються у внутрішній точці  $O$  так, що  $\angle MOC = 48^\circ$ . Знайдіть міри кутів  $AOP$ ,  $AOM$  і  $POC$ .
- 2°. Знайдіть міри двох суміжних кутів, якщо один із них на  $26^\circ$  більший від другого.
- 3°. Через кінці відрізка  $KP$  з одного боку від прямої  $KP$  проведіть промені  $KA$  і  $PB$  так, щоб  $\angle AKP = 97^\circ$ , а  $\angle KPB = 83^\circ$ . Чи паралельні ці промені? Чому?

■ Варіант 4

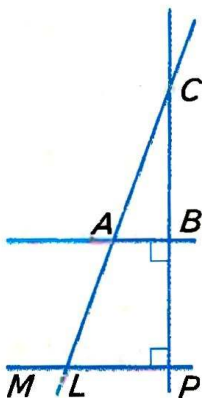
- 1°. Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються у внутрішній точці  $M$  так, що  $\angle AMC = 35^\circ$ . Знайдіть міри кутів  $AMD$ ,  $CMB$  і  $BMD$ .
- 2°. Знайдіть міри двох суміжних кутів, якщо один із них на  $15^\circ$  менший від другого.
- 3°. Через кінці відрізка  $AB$  з одного боку від прямої  $AB$  проведіть промені  $AK$  і  $BM$  так, щоб  $\angle KAB = 58^\circ$ , а  $\angle ABM = 123^\circ$ . Чи паралельні ці промені? Чому?

## ● Тестові завдання 2

1. Яку міру має кут, суміжний із кутом  $100^\circ$  ?  
а)  $100^\circ$ ; б)  $80^\circ$ ;  
в)  $8^\circ$ ; г)  $50^\circ$ .
2. Яким є кут, суміжний із тупим кутом?  
а) тупий; б) прямий;  
в) гострий;  
г) розгорнутий.
3.  $\angle AOP$  і  $\angle BOC$  — вертикальні кути. Який знак слід поставити замість \*:  $\angle AOP * \angle BOC$ ?  
а)  $<$ ; б)  $=$ ;  
в)  $>$ ; г)  $\geq$ .
4. Сума трьох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює  $280^\circ$ . Знайдіть міру четвертого кута.  
а)  $100^\circ$ ; б)  $80^\circ$ ;  
в)  $90^\circ$ ; г)  $70^\circ$ .

Для виконання завдань 5–10 скористайтеся малюнком 118.

5. Який знак слід поставити замість \*:  $CB * LP$ ?  
а)  $\parallel$ ; б)  $=$ ;  
в)  $\in$ ; г)  $\perp$ .
6. Які з прямих паралельні?  
а)  $BP \parallel LC$ ; б)  $CP \parallel AB$ ;  
в)  $AB \parallel LP$ ; г)  $CB \parallel LP$ .
7. Яким є кут  $\angle ABC$ ?  
а) гострий; б) тупий;  
в) прямий;  
г) розгорнутий.
8.  $\angle ALM = 130^\circ$ . Знайдіть  $\angle LAB$ .  
а)  $50^\circ$ ; б)  $80^\circ$ ;  
в)  $130^\circ$ ; г)  $120^\circ$ .
9. Знайдіть  $\angle CAB$ , якщо  $\angle MLA = 145^\circ$ .  
а)  $145^\circ$ ; б)  $45^\circ$ ;  
в)  $25^\circ$ ; г)  $35^\circ$ .
10. Відстань від точки  $C$  до прямої  $MP$  дорівнює 12 см. Знайдіть відстань від точки  $C$  до прямої  $AB$ , якщо  $CB = BP$ .  
а) 12 см; б) 4 см;  
в) 6 см; г) 24 см.



■ Мал. 118



## ● Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які кути називають суміжними?
2. Сформулюйте і доведіть властивість суміжних кутів.
3. Які кути називають вертикальними?
4. Сформулюйте і доведіть властивість вертикальних кутів.
5. Що таке кут між прямими?
6. Сформулюйте означення перпендикулярних прямих.
7. Які відрізки називаються перпендикулярними?
8. Які дві прямі називаються паралельними?
9. Які відрізки називаються паралельними?
10. За допомогою яких креслярських інструментів можна провести пряму, перпендикулярну до даної прямої? Як це роблять?
11. Як можна провести пряму, паралельну даній прямій?
12. Сформулюйте означення паралельних прямих.
13. Що таке січна двох прямих?
14. Які кути називають внутрішніми різносторонніми? А внутрішніми односторонніми? Покажіть на малюнку.
15. Які кути називають відповідними? Покажіть на малюнку.
16. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямих.
17. Сформулюйте аксіому Евкліда про паралельність прямих.
18. Що ви знаєте про Евкліда, про його «Основи»?
19. Сформулюйте і доведіть теорему про внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих.
20. Сформулюйте і доведіть теорему про дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої.
21. Що означає слово *транзитивний*? Сформулюйте теорему про транзитивність паралельності прямих.
22. Що таке теорема? Наведіть приклади теорем.
23. Що таке аксіома? Наведіть приклади аксіом.
24. Що таке означення? Наведіть приклади означень.
25. Яке твердження називається теоремою, оберненою до даної?
26. Що таке ознака?

## Головне в розділі 2

Два кути, на які розгорнутий кут розбивається його внутрішнім променем, називаються *суміжними*. Сума мір двох суміжних кутів дорівнює  $180^\circ$ .

Два кути називаються *вертикальними*, якщо сторони одного є доповняльними променями сторін другого кута. Вертикальні кути рівні.

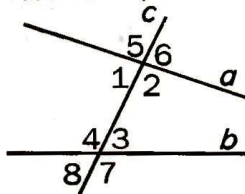
Якщо дві прямі перетинаються, вони утворюють чотири кути: дві пари вертикальних кутів. Менший із них — кут між даними прямими.

Дві прямі називаються *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Відрізки чи промені називають перпендикулярними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

Пряма, яка перетинає дві інші прямі, називається їх *січною*. З двома даними прямими вона утворює 8 кутів, деякі пари яких мають окремі назви:

- 1 і 3, 2 і 4 — внутрішні різносторонні;
- 1 і 4, 2 і 3 — внутрішні односторонні;
- 1 і 8, 2 і 7, 3 і 6, 4 і 5 — відповідні;
- 5 і 7, 6 і 8 — зовнішні різносторонні;
- 5 і 8, 6 і 7 — зовнішні односторонні.



### Ознака паралельності прямих

- Дві прямі паралельні, якщо з січною вони утворюють рівні внутрішні різносторонні кути, або рівні відповідні кути, або такі внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює  $180^\circ$ .

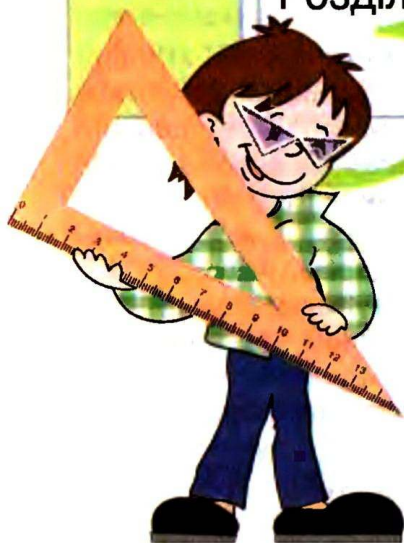
### Властивості паралельних прямих

- Січна з двома паралельними прямими утворює рівні внутрішні різносторонні кути, рівні відповідні кути, такі внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює  $180^\circ$ .
- Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.
- Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої. Дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні.



## Розділ

## ТРИКУТНИКИ



У цьому розділі ви повторите свої знання про трикутники, здобуті в попередніх класах, і дізнаєтесь про багато інших їх властивостей. Основне в розділі — три **ознаки рівності трикутників**. Вони часто використовуються в геометрії. Тому від того, як добре ви вивчите ці ознаки, залежить, як ви засвоїте наступні розділи підручника.

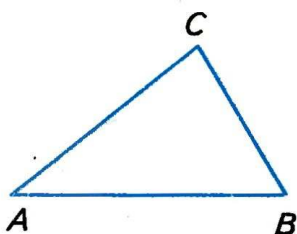
- ТРИКУТНИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ
- СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА
- ПРО РІВНІСТЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР
- ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ
- РІВНОБЕДРНИЙ ТРИКУТНИК
- ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ
- ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК
- НЕРІВНОСТІ ТРИКУТНИКА

Геометрія Евкліда  
є лише першим кроком  
до вивчення форм реального  
простору.

О. Смогоржевський



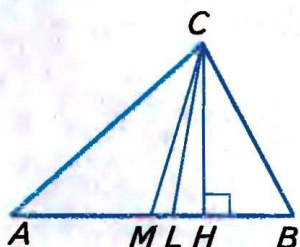
## § 9. Трикутник і його елементи



■ Мал. 119



■ Мал. 120



■ Мал. 121

Якщо три точки, що не лежать на одній прямій, сполучити відрізками, матимемо *трикутник*. Іншими словами: *трикутник* — це замкнена ламана з трьох ланок. На малюнку 119 зображено трикутник  $ABC$  (пишуть:  $\triangle ABC$ ). Точки  $A, B, C$  — *вершини*, відрізки  $AB, BC$  і  $CA$  — *сторони* цього трикутника. Кожний трикутник має три вершини і три сторони.

Багато різних моделей трикутників можна бачити в підйомних кранах, заводських конструкціях, в різних архітектурних спорудах (мал. 120).

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його *периметром*.

Кожна сторона трикутника коротша за суму двох інших його сторін. Чому?

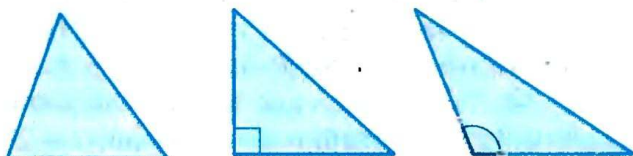
Відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою його протилежної сторони, — *медіана трикутника*. Відрізок бісектриси кута трикутника від його вершини до протилежної сторони — *бісектриса трикутника*. Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, на якій лежить його протилежна сторона, — *висота трикутника*. На малюнку 121 зображено  $\triangle ABC$ , в якому з вершини  $C$  проведено: медіану  $CM$ , бісектрису  $CL$  і висоту  $CH$ .

Кожний трикутник має три медіани, три бісектриси і три висоти.

Трикутник розбиває площину на дві області: внутрішню і зовнішню. Фігуру, яка складається з трикутника і його внутрішньої області, також називають *трикутником*.

*Кутами трикутника ABC* називають кути  $BAC$ ,  $ABC$  і  $ACB$ . Їх позначають і так:  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$ . Кожний трикутник має три кути.

Якщо трикутник має прямий або тупий кут, його називають відповідно *прямокутним* або *тупокутним* трикутником. Трикутник, усі кути якого гострі, називається *гострокутним*. На малюнку 122 зображено гострокутний, прямокутний і тупокутний трикутники. Їх внутрішні області зафарбовано.



■ Мал. 122

### Для допитливих

Словом *трикутник* геометри називають два різні поняття: і замкнену ламану з трьох ланок, і внутрішню частину площини, обмежену такою ламаною.

Так само *стороною трикутника* іноді називають відрізок, іноді — довжину цього відрізка; *висотою трикутника* — і певний відрізок, і його довжину.

Так роблять для зручності: щоб кожного разу не говорити, наприклад, «довжина висоти трикутника дорівнює 5 см», домовилися говорити простіше: «висота трикутника дорівнює 5 см».

Кожний многокутник можна розрізати на кілька трикутників. Тому трикутники в геометрії відіграють таку важливу роль, як атоми у фізиці, як цеглини в будинку. Існує навіть окрема частина геометрії, досить цікава і багата змістом: *геометрія трикутника*.



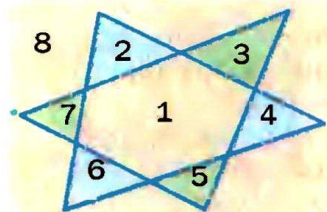
### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке трикутник?
2. Назвіть елементи трикутника.
3. Якими бувають трикутники? Сформулюйте їх означення.
4. Що таке бісектриса, медіана і висота трикутника?
5. Чим відрізняється бісектриса трикутника від бісектриси кута?

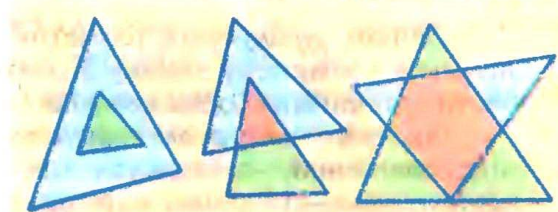


### ● Виконаємо разом

- 1** На скільки частин можуть розбивати площину два її трикутники?
- Якщо два трикутники розташовані в одній площині, то вони можуть розбивати її щонайбільше на 8 частин (мал. 123). Уявно переміщаючи один з двох даних трикутників так, щоб спочатку один з утворених їхнім перерізом трикутник перетворився в точку, потім — другий і т. д., переконуємось, що два трикутники можуть розбивати площину на 3, 4, 5, 6, 7, 8 частин (мал. 124). Тільки якщо два трикутники рівні і суміщені один з одним, то вони розбивають площину на 2 частини.



Мал. 123



Мал. 124

- 2** Середнє арифметичне всіх сторін трикутника дорівнює  $m$ . Знайдіть периметр трикутника.
- Якщо  $a, b, c$  — сторони трикутника, а  $P$  — його периметр, то  $\frac{a+b+c}{3} = m$ , або  $\frac{P}{3} = m$ , звідки:  $P = 3m$ .

### ● Задачі і вправи

#### ВКОНАЙТЕ УСНО

- 255.** Чи можуть дві сторони трикутника бути перпендикулярними до його третьої сторони?
- 256.** Скільки висот трикутника можуть лежати зовні нього?
- 257.** Чи може висота трикутника збігатися з його стороною?
- 258.** Знайдіть периметр  $\triangle ABC$ , якщо:  
а)  $AB = 6$ ,  $BC = 3$ ,  $AC = 7$ ; б)  $AB = 2,2$ ,  $BC = 8,5$ ,  $AC = 8,8$ .
- 259.** Чи існує трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і 8 см?



## A

**260.** Накресліть будь-який трикутник. Позначте його вершини буквами  $K, P, T$ . Назвіть сторони і кути трикутника. Знайдіть його периметр.

**261.** Накресліть гострокутний трикутник  $ABC$ . Проведіть з його вершини  $A$  медіану, бісектрису і висоту.

**262.** Побудуйте довільний трикутник. Проведіть його медіани і висоти.

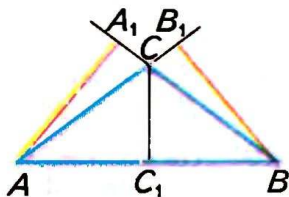
**263.** Сторони трикутника 3,8 см, 4,5 см і 7,5 см. Знайдіть його периметр.

**264.** Периметр трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть сторону квадрата, периметр якого вдвічі більший за периметр трикутника.

**265.**  $AM$  і  $BN$  — медіани  $\triangle ABC$ ,  $AN = 5$  см,  $BM = 7$  см. Знайдіть периметр  $\triangle ABC$ , якщо  $AB = 15$  см.

**266.** Чи правильно, що на малюнку 125 відрізки  $AA_1, BB_1, CC_1$  — висоти трикутника  $ABC$ ?

**267.** Трикутник ділить площину на дві частини: обмежену і необмежену. А на скільки частин можуть ділити площину трикутник і пряма, розташовані на ній? А трикутник і коло?

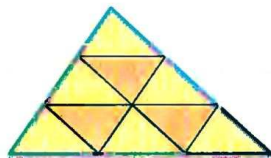


■ Мал. 125

**268.** Скільки різних трикутників зображено на малюнку 126?

**269.** Периметр  $\triangle ABC$  дорівнює 26 см. Знайдіть його сторони, якщо  $AC = 10$  см і:

- а)  $BC = 3AB$ ; б)  $AB : BC = 3 : 5$ ;  
в)  $AB = BC$ ; г)  $BC - AB = 6$  см.



■ Мал. 126

## Б

**270.** Чи кожний трикутник можна розрізати на 2 трикутники? А на довільне число  $n$  трикутників? Якими способами можна розрізати довільний трикутник на 3 менші трикутники? А на 4 трикутники?

**271.** Покажіть, як можна розрізати квадрат на 2, 3, 4, 5 трикутників.

- 272.** Знайдіть сторони трикутника, якщо одна з них більша від другої удвічі, від третьої — у півтора рази і друга сторона менша від третьої на 2 см.
- 273.** Знайдіть периметр трикутника, якщо він більший від першої сторони на 7 м, від другої — на 8 м і від третьої — на 9 м.
- 274.** Середнє арифметичне всіх сторін трикутника дорівнює 10 дм. Знайдіть периметр трикутника.
- 275.** Периметр квадрата дорівнює 4 дм. Чи можна з нього вирізати трикутник периметра 3 дм?
- 276.** Чи існує трикутник, периметр якого у 1000 разів більший за одну з його сторін? А за одну з висот?
- 277.** Сторони трикутника пропорційні числам 4, 5 і 8. Знайдіть периметр трикутника, якщо найбільша його сторона більша від найменшої на 24 см.
- 278.** Побудуйте тупокутний трикутник і проведіть його висоти.
- 279.** Знайдіть висоту  $BH$  трикутника  $ABC$ , якщо периметри трикутників  $ABC$ ,  $ABH$  і  $BHC$  дорівнюють відповідно 26 см, 14 см і 18 см.
- 280.**  $BM$  — медіана трикутника  $ABC$ , а периметри трикутників  $ABM$  і  $BMC$  рівні. Доведіть, що  $AB = BC$ .
- 281.** На сторонах  $AB$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  взято точки  $M$  і  $K$  такі, що  $MK \parallel AC$ . Доведіть, що кути трикутника  $MBK$  дорівнюють відповідно кутам трикутника  $ABC$ .

### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 282.** Згадайте, як визначити площу прямокутника. А квадрата?
- 283.** Які одиниці площі ви знаєте?
- 284.** Скільки квадратних метрів містить 1 км<sup>2</sup>, 1 га, 1 ар?
- 285.** Чи правильно, що з двох будь-яких рівних прямокутних трикутників можна скласти один прямокутник?
- 286.** Як знайти площу прямокутного трикутника?
- 287.** Поле прямокутної форми має площу 20 га, а одна його сторона півкілометра завдовжки. Знайдіть довжину другої сторони поля.
- 288.** Сума кутів  $AOB$  і  $BOC$  дорівнює  $100^\circ$ . Знайдіть кут між їх бісектрисами, якщо промінь  $OB$  для кута  $AOC$  внутрішній.

## § 10. Сума кутів трикутника



### ТЕОРЕМА 8

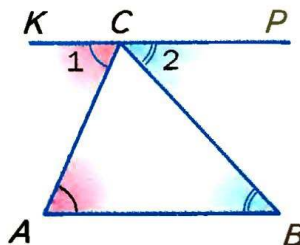
Сума кутів трикутника дорівнює  $180^\circ$ .

#### ■ ДОВЕДЕННЯ.

Нехай  $ABC$  — довільний трикутник (мал. 127). Через його вершину  $C$  проведемо пряму  $KP$ , паралельну  $AB$ .

Утворені кути  $ACK$  і  $BCP$  позначимо цифрами 1 і 2. Тоді  $\angle A = \angle 1$ ,  $\angle B = \angle 2$ , як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих  $AB$  і  $KP$  та січних  $AC$  і  $BC$ . Кути 1, 2 і  $C$  в сумі дорівнюють розгорнутому куту, тобто  $180^\circ$ . Тому  $\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle C = 180^\circ$ .

Отже,  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ . ▲



■ Мал. 127

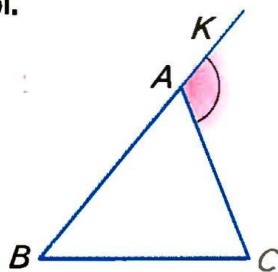
#### ■ ЗАУВАЖЕННЯ.

У доведеній теоремі 8 йдеться про суму мір кутів трикутника. Але для спрощення формулювань замість «міра кута» часто вживають слово «кут».

#### ■ НАСЛІДОК.

Трикутник не може мати двох прямих або тупих кутів. У кожному трикутнику принаймні два кути — гострі.

Іноді крім кутів трикутника (внутрішніх) розглядають також його зовнішні кути. *Зовнішнім кутом трикутника* називають кут, утворений стороною трикутника і продовженням його іншої сторони. Наприклад, зовнішнім кутом трикутника  $ABC$  при вершині  $A$  є кут  $KAC$  (мал. 128).



■ Мал. 128



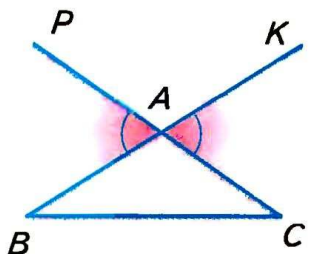
### ТЕОРЕМА 9

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів трикутника, не суміжних з ним.

#### ■ ДОВЕДЕННЯ.

Нехай  $\angle KAC$  — зовнішній кут  $\triangle ABC$  (мал. 128).





■ Мал. 129

Тоді

$\angle KAC = 180^\circ - \angle BAC$  (згідно з теоремою про суміжні кути),

$\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle BAC$  (згідно з теоремою про суму кутів трикутника).

Отже,  $\angle KAC = \angle B + \angle C$ . ▲

■ **НАСЛІДОК.**

Зовнішній кут трикутника більший кожного внутрішнього кута, не суміжного з ним.

**УВАГА!** При кожній вершині трикутника можна побудувати два зовнішні кути, продовживши одну чи другу його сторону. Наприклад, кожен із кутів  $KAC$  і  $PAB$  — зовнішній кут трикутника  $ABC$  при вершині  $A$  (мал. 129). Такі два зовнішні кути — вертикальні, тому дорівнюють один одному.

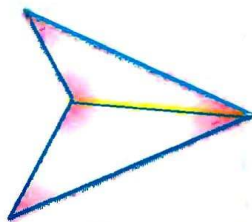
■ **Для допитливих**

Теорему про суму кутів трикутника можна узагальнити і поширити на довільні багатокутники.

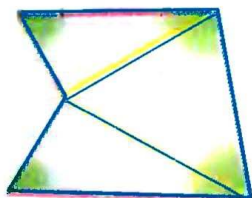
Кожний чотирикутник можна розрізати на два трикутники, сполучивши його протилежні вершини відрізком. (Якщо один з кутів чотирикутника більший від розгорнутого, то саме його вершину слід сполучити з протилежною, як на малюнку 130.) Сума всіх кутів чотирикутника дорівнює сумі всіх кутів двох утворених трикутників, тобто  $180^\circ \cdot 2$ . Отже, **сума кутів будь-якого чотирикутника дорівнює  $360^\circ$ .**

Довільний п'ятикутник можна розрізати на чотирикутник і трикутник або на 3 трикутники (мал. 131). Отже, сума кутів п'ятикутника дорівнює  $180^\circ \cdot 3$ , тобто  $540^\circ$ .

Спробуйте написати формулу, за якою можна обчислити суму кутів довільного  $n$ -кутника.



■ Мал. 130



■ Мал. 131

**? Запитання і завдання для самоконтролю**

1. Сформулюйте теорему про суму кутів трикутника.
2. Що таке зовнішній кут трикутника?
3. Сформулюйте теорему про зовнішній кут трикутника.
4. Чи правильно, що зовнішній кут трикутника більший від кожного внутрішнього кута, не суміжного з ним?
5. Чому дорівнює сума кутів чотирикутника?

**● Виконаємо разом**

**1** Чому дорівнює сума зовнішніх кутів трикутника, взятих при кожній вершині по одному?

- Нехай  $ABC$  — довільний трикутник. Позначимо його зовнішні кути цифрами 1, 2 і 3 (мал. 132). Згідно з теоремою про зовнішній кут трикутника

$$\angle 1 = \angle B + \angle C,$$

$$\angle 2 = \angle A + \angle B, \angle 3 = \angle A + \angle C.$$

Додавши окремо ліві і праві частини цих рівностей, матимемо:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 =$$

$$= 2(\angle A + \angle B + \angle C) = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

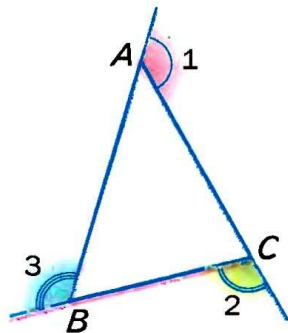
Другий спосіб:

$$\begin{aligned} \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 &= 180^\circ - \angle A + 180^\circ - \angle B + 180^\circ - \angle C = \\ &= 540^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ. \end{aligned}$$

**2** Доведіть, що в кожному трикутнику є кут не більший за  $60^\circ$  і кут не менший за  $60^\circ$ .

- Якби кожний кут трикутника був менший за  $60^\circ$ , то сума всіх його кутів становила б менше  $180^\circ$ , а це неможливо. Якби кожний кут трикутника мав більше від  $60^\circ$ , то сума всіх його кутів була б більшою за  $180^\circ$ , що також неможливо.

Отже, в кожному трикутнику є кут, не більший за  $60^\circ$ , і кут не менший за  $60^\circ$ .



■ Мал. 132

● **Задачі і вправи**■ **ВИКОНАЙТЕ УСНО** ■

- 289.** Сума двох кутів трикутника дорівнює  $80^\circ$ . Знайдіть третій кут.
- 290.** Два кути трикутника мають по  $30^\circ$ . Знайдіть третій кут.
- 291.** Чи існує трикутник з кутами  $60^\circ$ ,  $70^\circ$  і  $80^\circ$ ?
- 292.** Два кути трикутника  $20^\circ$  і  $80^\circ$ . Знайдіть третій кут.
- 293.** Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо один з них  $30^\circ$ .

■ **A** ■

- 294.** Знайдіть кути трикутника, якщо вони пропорційні числам:  
а) 2, 3 і 5; б) 1, 5 і 6; в)  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ .
- 295.** Доведіть, що сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює  $90^\circ$ .
- 296.** Заповніть порожні клітинки таблиці про кути  $\triangle ABC$ .

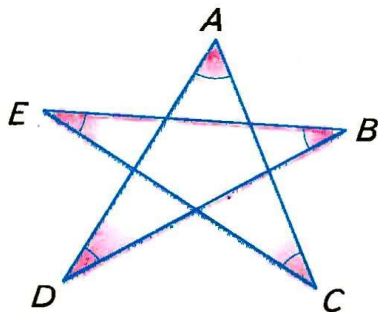
<i>A</i>	$30^\circ$	$20^\circ$		$83^\circ$	$95^\circ$		$54^\circ$
<i>B</i>	$70^\circ$		$45^\circ$		$35^\circ$	$47^\circ$	
<i>C</i>		$100^\circ$	$45^\circ$	$17^\circ$		$67^\circ$	$54^\circ$

- 297.** Знайдіть кути трикутника, якщо один з них:  
а) дорівнює другому і менший від третього на  $30^\circ$ ;  
б) більший від другого на  $20^\circ$ , а від третього — на  $40^\circ$ .  
в) більший від другого у 2 рази, а від третього — на  $10^\circ$ .
- 298.** У трикутнику  $ABC$  кути  $A$  і  $B$  мають по  $65^\circ$ . Знайдіть зовнішній кут трикутника при вершині  $C$ .
- 299.** Чи може кожний зовнішній кут трикутника дорівнювати  $100^\circ$ ?
- 300.** Кути трикутника пропорційні числам 1, 2 і 3. Доведіть, що цей трикутник прямокутний.

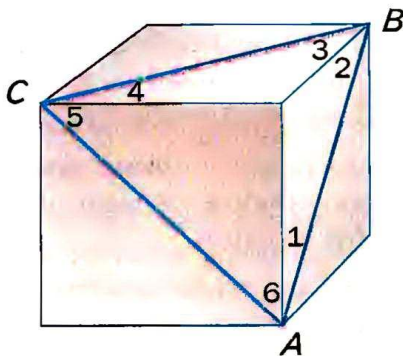


## Б

- 301.** Знайдіть кути  $\triangle ABC$ , якщо  $\angle A + \angle B = 100^\circ$  і  $\angle B + \angle C = 120^\circ$ .
- 302.**  $\angle ABC = 30^\circ$ . Під яким кутом пряма  $AC$  перетинає промінь  $BC$ , якщо промінь  $BA$  вона перетинає під кутом  $45^\circ$ ?
- 303.**  $CH$  і  $CL$  — висота і бісектриса  $\triangle ABC$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ . Знайдіть  $\angle HCL$ .
- 304.**  $CL$  — бісектриса  $\triangle ABC$ ,  $\angle A = 80^\circ$ ,  $\angle B = 40^\circ$ . Знайдіть:  
а)  $\angle CLA$ ;  
б) під яким кутом перетинаються бісектриси кутів  $A$  і  $B$ .
- 305.**  $CH$  — висота  $\triangle ABC$ . Знайдіть  $\angle ACH$  і  $\angle BCH$ , якщо:  
а)  $\angle A = 30^\circ$  і  $\angle B = 60^\circ$ ;  
б)  $\angle A = 30^\circ$  і  $\angle B = 120^\circ$ .
- 306.** Знайдіть міри зовнішніх кутів  $\triangle ABC$ , якщо:  
а)  $\angle A = 40^\circ$ ,  $\angle B = 50^\circ$ ;  
б)  $\angle B = 120^\circ$ ,  $\angle C = 40^\circ$ ;  
в)  $\angle A + \angle B = 100^\circ$ ,  $\angle B + \angle C = 130^\circ$ ;  
г)  $\angle A + \angle C = 95^\circ$ ,  $\angle B + \angle C = 135^\circ$ .
- 307.** Кути  $A$  і  $B$  трикутника  $ABC$  рівні. Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута  $\triangle ABC$  при вершині  $C$  паралельна стороні  $AB$ .
- 308.** Знайдіть суму кутів  $A, B, C, D, E$  п'ятикутної зірки (мал. 133).
- 309.** Трикутник  $ABC$  розташований на поверхні куба, як показано на малюнку 134. Знайдіть суму кутів, позначених на малюнку цифрами.

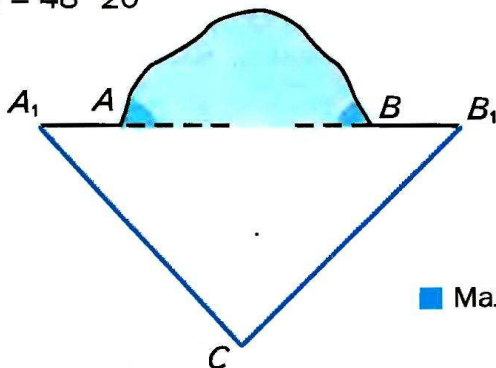


■ Мал. 133



■ Мал. 134

- 310.** Прямолінійний тунель  $AB$  пробивають з двох боків гори (мал. 135). Чи правильно вибрано напрям  $A_1A$  і  $B_1B$ , якщо вимірювання показали, що  $\angle A_1 = 50^\circ 10'$ ,  $\angle B_1 = 48^\circ 20'$  і  $\angle C = 80^\circ 5'$ ?



■ Мал. 135

### ■ ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ ■

- 311.** Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його бісектриси. Що ви помітили? Чи можна стверджувати, що всі три бісектриси трикутника проходять через одну точку? А якщо замість бісектрис провести медіани трикутника?

### ■ ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ■

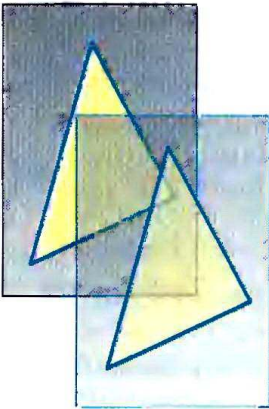
- 312.** Відрізок, довжина якого дорівнює  $a$ , поділено на два нерівні відрізки. Знайдіть відстань між серединами утворених відрізків.
- 313.** У  $\triangle ABC$  медіана  $BM = MC$ . Знайдіть периметр  $\triangle ABC$ , якщо периметр  $\triangle ABM$  дорівнює 16 см,  $BC = 8$  см.
- 314.**  $M$  і  $N$  — середини сторін  $AB$  і  $BC$   $\triangle ABC$ . Периметр  $\triangle MBN$  у 2 рази менший за периметр  $\triangle ABC$ . Знайдіть  $MN$ , якщо  $AC = 10$  см.
- 315.** Трикутник із периметром 22 см поділено медіаною на два трикутники з периметрами 12 см і 16 см. Знайдіть довжину медіани.
- 316.** Січна  $c$  з паралельними прямими  $a$  і  $b$  утворює внутрішні односторонні кути, що відносяться як 2 : 3. Як відносяться кути, утворені бісектрисами цих кутів і січною  $c$ ?

## § 11. Про рівність геометричних фігур

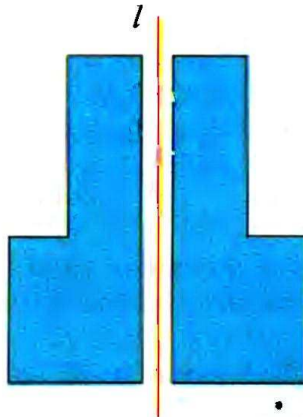
На малюнку 136 зображено два

трикутники. Уявіть, що один з них накреслений на папері, а другий — на прозорій плівці. Переміщаючи плівку, другий трикутник можна сумістити з першим. Кажуть: якщо дані трикутники *можна сумістити рухом*, то вони *рівні*. Рівними один одному бувають не тільки трикутники, а й відрізки, кути, кола та інші фігури.

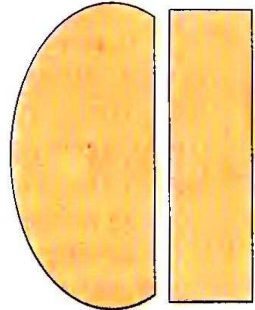
Зображені на малюнку 137 фігури також рівні, бо їх можна сумістити, перегнувши аркуш по прямій  $l$ . А фігури, зображені на малюнку 138, не рівні, їх не можна сумістити.



■ Мал. 136



■ Мал. 137



■ Мал. 138

Для позначення рівних фігур використовують знак рівності « $=$ ». Наприклад,  $AB = KP$ ,  $\angle A = \angle B$ ,  $\triangle ABC = \triangle KPT$ .



Якщо кожна з двох фігур дорівнює третій, то перша і друга фігури також рівні.

З рівними фігурами часто доводиться мати справу багатьом фахівцям. У формі рівних прямокутників випускають листи жерсті, фанери, скла, облицювальні плитки, паркетини тощо. Рівні всі аркуші паперу з однієї пачки, відповідні деталі двох машин однієї марки.



Щоб з'ясувати, чи рівні дві фігури, можна спробувати їх сумістити. Але на практиці це не завжди можна зробити. Наприклад, таким способом не можна з'ясувати, чи рівні дві земельні ділянки. Тому доводиться шукати інші способи, виявляти ознаки рівності тих чи інших фігур. Наприклад, якщо радіуси двох кіл рівні, то рівні й самі кола. Це — ознака рівності кіл. У наступному параграфі ми розглянемо ознаки рівності трикутників.

### ПРИМІТКА.

Трикутник з вершинами  $A$ ,  $B$  і  $C$  можна позначати по-різному:  $\triangle ABC$ ,  $\triangle BCA$ ,  $\triangle CAB$ ,  $\triangle BAC$  і т. д. Однак для зручності домовимося, що коли пишуть  $\triangle ABC = \triangle KPT$ , то розуміють, що  $\angle A = \angle K$ ,  $\angle B = \angle P$ ,  $\angle C = \angle T$ ,  $AB = KP$ ,  $AC = KT$ ,  $BC = PT$ .

### Для допитливих

Слово **рівність** у математиці й інших науках вживається досить часто. Говорять, зокрема, про рівність чисел, рівність виразів, рівність значень величин. Рівність геометричних фігур — це **відношення**. Воно має такі властивості:

- 1) кожна фігура дорівнює сама собі;
- 2) якщо фігура  $A$  дорівнює фігурі  $B$ , то й фігура  $B$  дорівнює  $A$ ;
- 3) якщо фігура  $A$  дорівнює  $B$ , а фігура  $B$  дорівнює  $C$ , то фігури  $A$  і  $C$  також рівні.

Нерідко з рівності одних фігур чи величин випливає рівність інших, але — не завжди. Наприклад, якщо трикутники рівні, то і їхні периметри рівні. Але якщо периметри двох трикутників рівні, то це ще не означає, що рівні й самі трикутники. Так само: якщо трикутники рівні, то і їхні площі рівні. Але якщо площі двох трикутників рівні, це ще не означає, що й трикутники рівні.

Досить часто для обґрунтування рівності тих чи інших фігур треба обґрунтувати рівність деяких трикутників. Ось чому питання про рівність трикутників у геометрії дуже важливе: більшість теорем шкільної геометрії доводять, користуючись ознаками рівності трикутників.

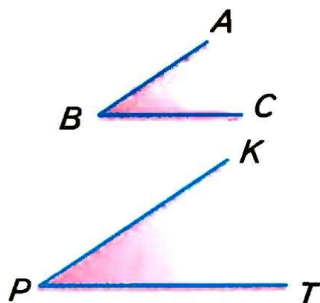
## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які фігури називають рівними?
2. Яким знаком позначають рівність фігур?
3. Сформулюйте властивості відношення рівності фігур.
4. Сформулюйте ознаку рівності двох кіл.

### ● Виконаємо разом

**1** Чи рівні кути, зображені на малюнку 139?

- Сторони кута — промені. Хоч на малюнку вони зображені нерівними відрізками, але слід уявляти їх у вигляді нескінченних променів. Оскільки кожний із цих кутів має  $35^\circ$  (перевірте), то вони рівні.



■ Мал. 139

**2** Доведіть, що трикутники не можуть бути рівними, якщо не рівні їх найбільші кути.

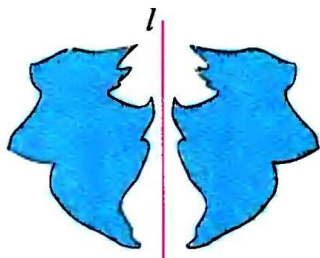
- Нехай у трикутників  $ABC$  і  $KPT$   $\angle A > \angle B > \angle C$ ,  $\angle K > \angle P > \angle T$ . Якби дані трикутники були рівні, їх можна було б сумістити. Тоді найбільший кут  $A$  трикутника  $ABC$  сумістився б із найбільшим кутом  $K$  трикутника  $KPT$ . Це неможливо, оскільки  $\angle A \neq \angle K$ . Отже, дані трикутники не можуть бути рівними.

### ● Задачі і вправи

#### ■ ВИКОНАЙТЕ УСНО

**317.** Чи рівні дві фігури на малюнку 140?

**318.** Чи правильно, що коли даний трикутник прямокутний, тупокутний чи рівносторонній, то й рівний йому трикутник також відносно прямокутний, тупокутний чи рівносторонній?



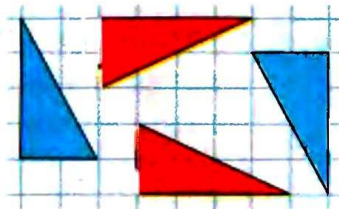
■ Мал. 140

319. Чи рівні трикутники, зображені на малюнку 141?

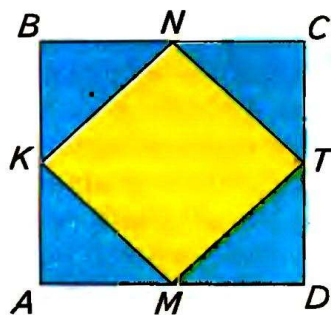
320. Середини сторін квадрата  $ABCD$  послідовно сполучили відрізками так, що утворилися 4 трикутники (мал 142). Чи правильно, що кожний із цих трикутників дорівнює іншому?

321. Чи рівні як геометричні фігури символи:

- а)  $\bigcirc$  і  $\emptyset$ ;
- б)  $<$  і  $>$ ;
- в)  $=$  і  $\parallel$ ;
- г)  $\Gamma$  і  $L$ ?



■ Мал. 141



■ Мал. 142

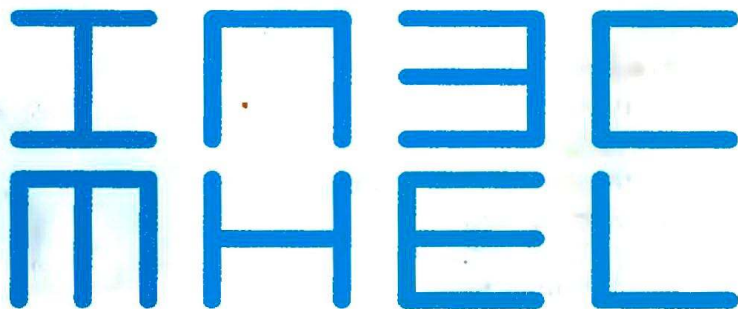
322. Чи можуть бути рівними прямокутний і тупокутний трикутники? А прямокутний і гострокутний?

323. Трикутники  $ABC$  і  $KPT$  рівні. Чи рівні їх периметри?

324. Периметри трикутників  $ABC$  і  $KPT$  рівні. Чи рівні трикутники?

325. Один із двох суміжних кутів можна сумістити з другим. Які це кути?

326. Які з фігур, зображених на малюнку 143, рівні?

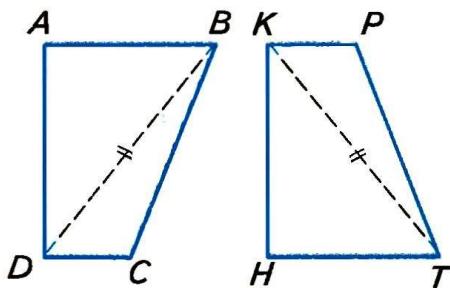


■ Мал. 143



## ■ А ■

- 327.** Чи можуть бути рівними трикутники, найменші сторони яких не рівні?
- 328.** Пряма, яка проходить через центр кола, розбиває його на два півкола. Чи рівні вони? Як можна одне півколо сумістити з другим?
- 329.** Знайдіть периметр трикутника  $KPT$ , якщо  $\triangle KPT = \triangle ABC$ ,  $AB = 3$  см,  $BC = 4$  см і  $AC = 5$  см.
- 330.** Трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  наклали один на другий так, що сумістилися вершини  $A$  і  $A_1$ ,  $B$  і  $B_1$ ,  $C$  і  $C_1$ . Чи сумістяться сторони  $AB$  і  $A_1B_1$ ,  $AC$  і  $A_1C_1$ ,  $BC$  і  $B_1C_1$ ? А медіани  $AM$  і  $A_1M_1$ ?
- 331.** Фігури  $ABCD$  і  $HTPK$  рівні (мал.144). Знайдіть кут  $T$  і відстань  $KT$ , якщо  $BD = 3,8$  см і  $\angle B = 70^\circ$ .
- 332.** Знайдіть кути трикутника  $ABC$ , якщо  $\triangle ABC = \triangle KPT$ ,  $\angle K = 60^\circ$  і  $\angle P = 60^\circ$ .
- 333.** Сторони  $AB$  і  $PT$  не рівні. Чи можуть бути рівними трикутники  $ABC$  і  $KPT$ ?

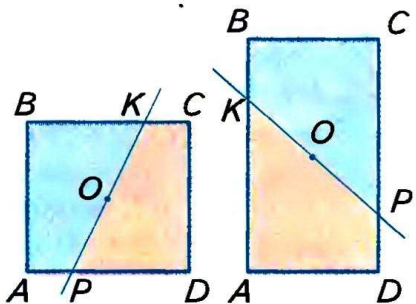


■ Мал. 144

## ■ Б ■

- 334.** Кути  $ABC$  і  $KPT$  рівні. Скількома способами один із них можна сумістити з іншим?
- 335.**  $\triangle ABC$  — тупокутний, а кути  $\triangle A_1B_1C_1$  пропорційні числам 5, 6 і 7. Чи можуть бути рівними ці трикутники?
- 336.**  $\triangle ABC = \triangle MNK$ ,  $\angle N = 2\angle A$ . Знайдіть кути трикутників, якщо  $\angle C = 60^\circ$ .
- 337.**  $\angle AOB$  і  $\angle BOC$  — суміжні,  $\angle BOC - \angle AOB = 30^\circ$ .  $\angle MKP$  і  $\angle PKN$  — суміжні,  $\angle MKP : \angle PKN = 7 : 5$ . Вкажіть пари рівних кутів, якщо вони є.
- 338.** Периметри прямокутників  $ABCD$  і  $MNPK$  дорівнюють по 28 см. Побудуйте ці прямокутники так, щоб:
- а) вони були рівними;
  - б) вони не були рівними.

- 339.** Одна зі сторін прямокутника  $ABCD$  на 3 см більша за іншу, а периметр його дорівнює 34 см. Площа прямокутника  $MNPK$  дорівнює  $70 \text{ см}^2$ . Чи можуть бути рівними ці прямокутники? А якщо площа  $MNPK$  дорівнює  $72 \text{ см}^2$ ?
- 340.** На координатній площині дано точки  $A(1; 4)$ ,  $B(2; 7)$ ,  $C(2; 4)$ ,  $D(2; 1)$ ,  $K(4; 1)$ . Чи рівні трикутники  $ABC$  і  $ADC$ ? А трикутники  $ABC$  і  $CDK$ ?
- 341.** Прямокутники  $ABCD$  і  $KPTM$  дорівнюють один одному і  $AB = KP$ . Знайдіть  $KT$ , якщо  $AC = 26$  см.
- 342.** Точки  $A, B, C, D, E$  ділять коло з центром  $O$  на 5 рівних дуг. Чи рівні відрізки  $AB$  і  $EA$ ? А трикутники  $OBC$  і  $OAE$ ?
- 343.** Чи правильно, що кожна пряма, проведена через центр  $O$  квадрата або прямокутника (мал. 145), розрізає його на дві рівні фігури?



■ Мал. 145

### ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

- 344.** Накресліть  $\triangle ABC$  на папері і  $\triangle A_1B_1C_1$  на прозорій плівці такі, щоб їх можна було сумістити.

### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 345.** Накресліть круг діаметром 6 см. Чому дорівнюють його площа і довжина кола, що його обмежує?
- 346.** Накресліть круг радіусом 3 см. Поділіть його на 5 рівних секторів. Зафарбуйте один сектор і знайдіть його площу.
- 347.** На скільки частин можуть розрізати площину два кола? А три кола?
- 348.** Скільки гектарів містить круг, діаметр якого дорівнює 1 км?
- 349.** У  $\triangle ABC$  кут  $A = 70^\circ$ , а кут  $B$  на  $20^\circ$  більший за  $C$ . Під яким кутом перетинаються бісектриси кутів  $B$  і  $C$ ?
- 350.** У  $\triangle ABC$  всі кути рівні. Доведіть, що бісектриси будь-яких двох із них перетинаються під рівними кутами.

## § 12. Ознаки рівності трикутників

Якщо трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  дорівнюють один одному, то їх можна сумістити. При цьому якщо сумістяться вершини  $A$  і  $A_1$ ,  $B$  і  $B_1$ ,  $C$  і  $C_1$ , то сумістяться і сторони:  $AB$  з  $A_1B_1$ ,  $BC$  з  $B_1C_1$ ,  $CA$  з  $C_1A_1$  і кути:  $\angle A$  з  $\angle A_1$ ,  $\angle B$  з  $\angle B_1$ ,  $\angle C$  з  $\angle C_1$ . Отже, якщо  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ , то  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$ ,  $CA = C_1A_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ .

Щоб довести, що дані трикутники рівні, не обов'язково переконуватися в істинності всіх шістьох рівностей.

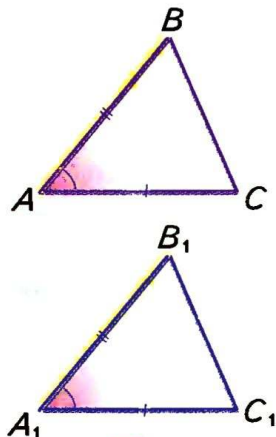
**ТЕОРЕМА 10** (перша ознака рівності трикутників).

Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

### ■ ДОВЕДЕННЯ.

Нехай  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  — два трикутники, в яких  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$  і  $\angle A = \angle A_1$  (мал. 146). Доведемо, що  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Накладемо  $\triangle A_1B_1C_1$  на  $\triangle ABC$  так, щоб вершина  $A_1$  сумістилася з  $A$ , вершина  $B_1$  — з  $B$ , а сторона  $A_1C_1$  накладалася на промінь  $AC$ . Це зробити можна, бо згідно з умовою  $A_1B_1 = AB$  і  $\angle A_1 = \angle A$ . Оскільки  $A_1C_1 = AC$ , то при такому накладанні точка  $C_1$  суміститься з  $C$ . В результаті всі вершини  $\triangle A_1B_1C_1$  сумістяться з відповідними вершинами  $\triangle ABC$ . Отже,  $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ . ▲



■ Мал. 146

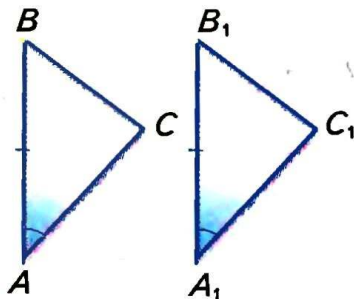
**ТЕОРЕМА 11** (друга ознака рівності трикутників).

Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні й прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

### ■ ДОВЕДЕННЯ.

Нехай  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  — два трикутники, в яких  $AB = A_1B_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$  і  $\angle B = \angle B_1$  (мал. 147). Доведемо, що  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .





■ Мал. 147

Накладемо  $\triangle A_1B_1C_1$  на  $\triangle ABC$  так, щоб вершина  $A_1$  сумістилася з  $A$ , вершина  $B_1$  — з  $B$ , а сторона  $A_1C_1$  накладалася на  $AC$ . Це зробити можна, бо  $AB = A_1B_1$  і  $\angle A = \angle A_1$ . Оскільки  $\angle B = \angle B_1$ , то сторона  $B_1C_1$  накладеться на  $BC$ . Отже, при такому накладанні промінь  $A_1C_1$  суміститься з  $AC$ , а промінь  $B_1C_1$  — з  $BC$ . Точка  $C_1$ , в якій перетинаються промені  $A_1C_1$  і  $B_1C_1$ , суміститься з точкою  $C$  перетину променів  $AC$  і  $BC$ . Як бачимо,  $\triangle A_1B_1C_1$  можна сумістити з  $\triangle ABC$ , а це означає, що  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ . ▲

### Для допитливих

Існують ще й інші ознаки рівності трикутників (див. теорему 14).

На ознаки рівності трикутників згодом доведеться посилалися часто. Щоб не сплутати, яку з них названо першою, яку другою і т. д., їх краще розрізняти за змістом, говорити про **ознаку рівності трикутників**:

- 1) за двома сторонами і кутом між ними;
- 2) за стороною і двома прилеглими кутами,
- 3) за трьома сторонами (її доведемо пізніше).

Ці ознаки рівності трикутників називають загальними ознаками, бо вони правильні для будь-яких трикутників. Крім них існують ще ознаки рівності прямокутних трикутників, рівнобедрених трикутників тощо.

**Два рівносторонні трикутники рівні, якщо сторона одного з них дорівнює стороні другого.**

Спробуйте довести цю ознаку, користуючись загальними ознаками.

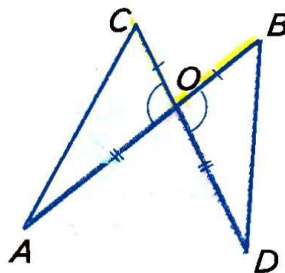
## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте першу ознаку рівності трикутників.
2. Сформулюйте другу ознаку рівності трикутників.
3. Доведіть ознаку рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними.
4. Доведіть ознаку рівності трикутників за стороною і прилеглими до неї кутами.

### Виконаємо разом

**1** Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$  так, що  $AO = OD$  і  $CO = OB$ . Доведіть, що  $AC = BD$ .

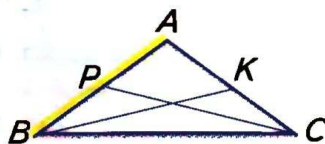
- Розглянемо трикутники  $ACO$  і  $DBO$  (мал. 148). Їх кути при вершині  $O$  вертикальні, отже, рівні. Відповідні сторони також рівні:  $AO = OD$ ,  $CO = OB$ . Згідно з першою ознакою  $\triangle ACO = \triangle DBO$ . Сторони  $AC$  і  $BD$  цих трикутників відповідні, бо лежать проти рівних кутів при вершині  $O$ . Отже,  $AC = BD$ .



■ Мал. 148

**2** Дві сторони трикутника дорівнюють одна одній. Доведіть, що медіани, проведені до цих сторін, також рівні.

- Нехай у  $\triangle ABC$  сторона  $AB = AC$ , а  $BK$  і  $CP$  — медіани (мал. 149).  $AP = AK$  як половини рівних сторін.  $\triangle ABK = \triangle ACP$ , бо  $AB = AC$ ,  $AK = AP$  і кут  $A$  спільний. Отже,  $BK = CP$ .



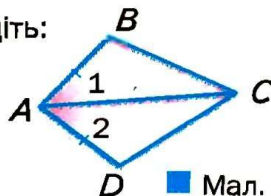
■ Мал. 149

### Задачі і вправи

#### ВИКОНАЙТЕ УСНО

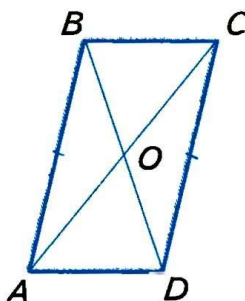
**351.** Користуючись малюнком 150, доведіть:

- а) якщо  $AB = AD$  і  $\angle 1 = \angle 2$ ,  
то  $\triangle ABC = \triangle ADC$ ;
- б) якщо  $\angle 1 = \angle 2$  і  $\angle B = \angle D$ ,  
то  $\triangle ABC = \triangle ADC$ .



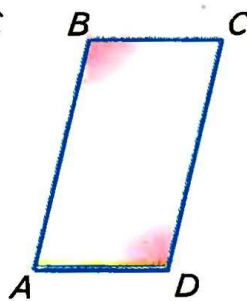
■ Мал. 150

- 352.** На малюнку 151  $AB = CD$ ,  $AB \parallel CD$ .  
Доведіть, що  $\triangle AOB = \triangle COD$ .



■ Мал. 151

- 353.** У чотирикутнику  $ABCD$   $AB \parallel CD$  і  $BC \parallel AD$  (мал. 152). Доведіть, що  $\angle B = \angle D$ .



■ Мал. 152

### A

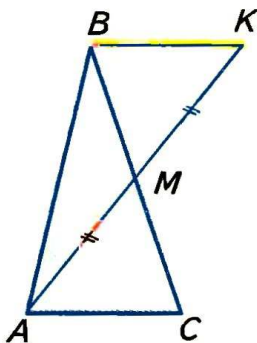
- 354.** Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$  так, що  $AO = OB$  і  $CO = OD$ . Доведіть, що  $\triangle AOC = \triangle BOD$ .

- 355.** Відрізки  $KP$  і  $EF$  перетинаються в точці  $M$  так, що  $KM = MP$  і  $EM = MF$ . Знайдіть відстань  $KE$ , якщо  $PF = 12$  см.

- 356.** Учні побудували в зошитах трикутники за двома сторонами 3 см і 5 см та кутом  $60^\circ$  між ними. Чи рівні ці трикутники?

- 357.** Доведіть, що  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ , якщо  $AC = A_1C_1$ ,  $\angle A = \angle A_1$  і  $\angle B = \angle B_1$ .

- 358.** Нехай  $AM$  — медіана трикутника  $ABC$  і  $MK = MA$  (мал. 153). Доведіть, що  $\triangle ACM = \triangle KBM$ .



■ Мал. 153

- 359.** Учні побудували в зошитах трикутники за стороною 5 см і прилеглими до неї кутами  $30^\circ$  і  $70^\circ$ . Чи рівні ці трикутники?

- 360.** На бісектрисі кута  $A$  позначено точку  $D$ , на сторонах кута — точки  $B$  і  $C$  такі, що  $\angle BDA = \angle ADC$ . Доведіть, що  $BD = CD$ .

- 361.** У рівносторонньому  $\triangle ABC$  проведіть бісектрису  $AL$  і доведіть, що:  
а)  $BL = LC$ ; б)  $AL \perp BC$ .

- 362.** У чотирикутнику  $ABCD$   $AB \parallel CD$  і  $BC \parallel AD$ . Проведіть відрізок  $BD$  і доведіть, що:  
а)  $AB = CD$ ; б)  $BC = AD$ , в)  $\angle A = \angle C$ .



**363.** Чи дорівнюють один одному трикутники, зображені на малюнку 154?

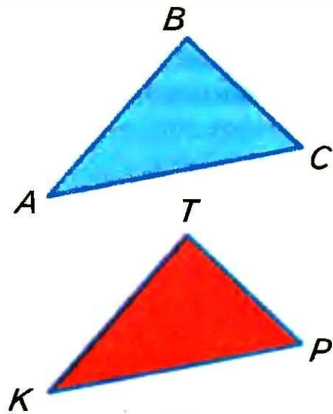
**364.** Щоб виміряти на місцевості відстань між пунктами  $A$  і  $B$ , між якими не можна пройти (мал. 155), вибирають таку точку  $C$ , від якої можна пройти до  $A$  і до  $B$ . Потім на прямих  $AC$  і  $BC$  відкладають відрізки  $CT = AC$  і  $CP = BC$ . Відстань  $PT$  дорівнює  $AB$ . Чому?

**365.** Попередню задачу можна розв'язати іншим способом (мал. 156). Відкладають  $\angle BCM = \angle BCA$  і  $CM = CA$ . Тоді  $AB = BM$ . Чому?

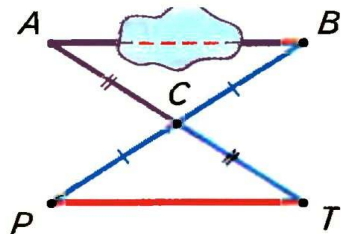
**366.** Через кінці відрізка  $AB$  проведено паралельні прямі  $AC$  і  $BD$ , а через середину  $O$  відрізка  $AB$  — пряму, яка перетинає прямі  $AC$  і  $BD$  у точках  $C$  і  $D$ . Знайдіть відстань  $AC$ , якщо  $BD = 8$  см.

**367.** Рівні відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$  так, що  $OA = OC$ . Доведіть, що  $\angle ABC = \angle ADC$  і  $\angle BAD = \angle BCD$ .

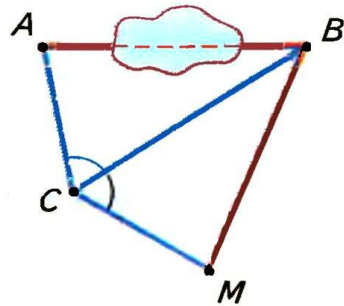
**368.** Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$ , яка є серединою кожного з них. Доведіть, що  $AC \parallel BD$ .



■ Мал. 154



■ Мал. 155



■ Мал. 156

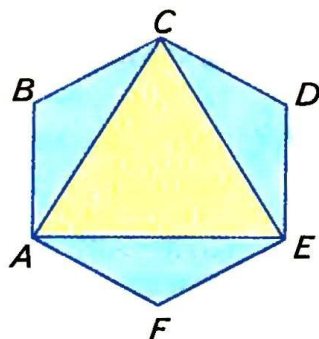
### Б

**369.** Доведіть, що медіани рівних трикутників, проведені до рівних сторін, рівні.

**370.** Доведіть, що в рівних трикутниках рівні відповідні:

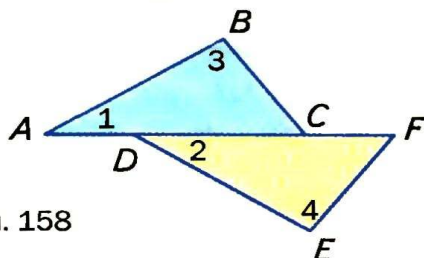
а) бісектриси; б) висоти.

**371.** Усі сторони шестикутника  $ABCDEF$  рівні і всі кути рівні (мал. 157). Доведіть, що трикутник  $ACE$  рівносторонній.



■ Мал. 157

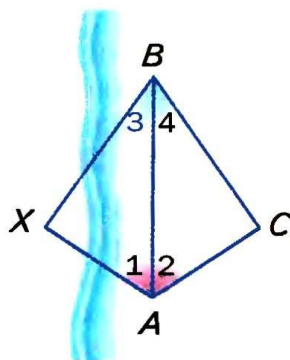
**372.** На малюнку 158  $AD = CF$ ,  $\angle 1 = \angle 2$  і  $\angle 3 = \angle 4$ . Доведіть, що  $\triangle ABC = \triangle DEF$ .



■ Мал. 158

**373.** Бісектриса  $AL$  трикутника  $ABC$  перпендикулярна до сторони  $BC$ . Доведіть, що  $AB = AC$ .

**374.** Щоб знайти відстань між пунктами  $A$  та  $X$  (мал. 159), на березі річки позначили точки  $B$  і  $C$  так, щоб виконувались рівності  $\angle 1 = \angle 2$  і  $\angle 3 = \angle 4$ . Шукана відстань  $AX$  дорівнює  $AC$ . Чому?



■ Мал. 159

### ■ ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ■

- 375.** Один з двох кутів на  $40^\circ$  більший за другий. Знайдіть ці кути, якщо суміжні з ними відносяться як  $7 : 5$ .
- 376.** Чи має трикутник рівні сторони, якщо дві його сторони відносяться як  $5 : 4$ , третя на  $1$  см більша за їх півсуму, а периметр трикутника дорівнює  $28$  см?
- 377.** Чому дорівнює кут між бісектрисами внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника, взятих при одній вершині?
- 378.** Скількома способами можна розрізати прямокутник на два рівні прямокутники? А на дві рівні фігури?
- 379.** Як два рівні квадрати розрізати на рівні частини і скласти з них один квадрат?

## ● Самостійна робота 3

### Варіант 1

- 1°. Накресліть гострокутний трикутник і проведіть його медіани.
- 2°. Два кути трикутника дорівнюють  $35^\circ$  і  $68^\circ$ . Знайдіть третій кут.
- 3°. Периметр трикутника дорівнює 35 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо одна з них довша за другу на 3 см і коротша за третю на 5 см.
- 4°. У трикутнику  $ABC$  сторони  $AB$  і  $BC$  рівні, а  $BH$  — бісектриса. Доведіть, що  $\triangle ABH = \triangle CBH$ .

### Варіант 2

- 1°. Накресліть прямокутний трикутник і проведіть його бісектриси.
- 2°. Два кути трикутника дорівнюють  $110^\circ$  і  $57^\circ$ . Знайдіть третій кут.
- 3°. Знайдіть довжини сторін трикутника, якщо одна з них довша на 8 м за другу і на 5 м за третю, а периметр трикутника дорівнює 50 м.
- 4°. У трикутнику  $KPT$  висота  $PM$  є водночас і бісектрисою. Доведіть, що  $\triangle KPM = \triangle TPM$ .

### Варіант 3

- 1°. Накресліть тупокутний трикутник і проведіть його медіани.
- 2°. Два кути трикутника дорівнюють  $87^\circ$  і  $56^\circ$ . Знайдіть третій кут.
- 3°. Периметр трикутника дорівнює 62 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо одна з них довша за другу в 2 рази, а за третю — на 8 см.
- 4°. У трикутнику  $ABC$  кути  $A$  і  $C$  рівні, а  $BM$  — висота. Доведіть, що  $\triangle ABM = \triangle CBM$ .

### Варіант 4

- 1°. Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його висоти.
- 2°. Два кути трикутника дорівнюють  $130^\circ$  і  $25^\circ$ . Знайдіть третій кут.
- 3°. Периметр трикутника дорівнює 85 м. Знайдіть довжини його сторін, якщо одна з них коротша за другу в 2 рази, а за третю — на 1 м.
- 4°. У трикутнику  $KPT$  висота  $PH$  є водночас і медіаною. Доведіть, що  $\triangle KPH = \triangle TPH$ .



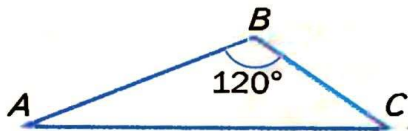
Задачі за готовими малюнками

А

Б

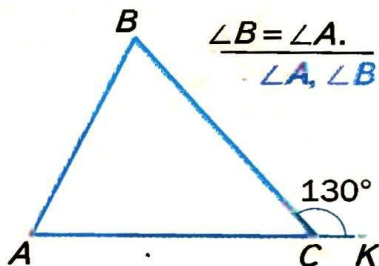
$$\angle A = \frac{2}{3} \angle C.$$

$\angle A, \angle C$



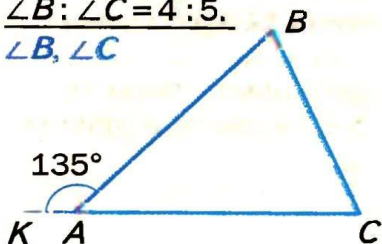
$$\angle B = \angle A.$$

$\angle A, \angle B$



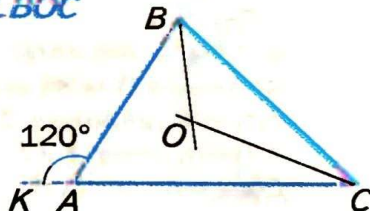
$$\angle B : \angle C = 4 : 5.$$

$\angle B, \angle C$



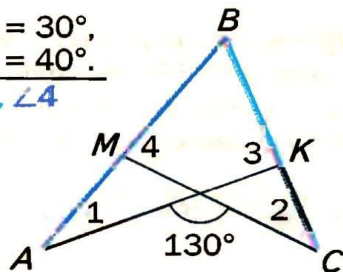
BO, CO — бісектриси.

$\angle BOC$



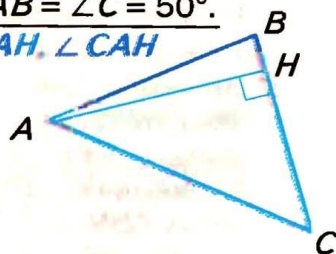
$$\angle 1 = 30^\circ, \angle 2 = 40^\circ.$$

$\angle 3, \angle 4$



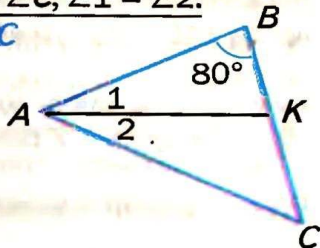
$$\angle CAB = \angle C = 50^\circ.$$

$\angle BAH, \angle CAH$



$$\angle A = \angle C, \angle 1 = \angle 2.$$

$\angle AKC$



AO, BO — бісектриси.

$\angle C$



● **Запитання і завдання  
для самоконтролю**

1. Що таке трикутник?
2. Назвіть елементи трикутника.
3. Якими бувають трикутники? Сформулюйте їх означення.
4. Що таке бісектриса, медіана і висота трикутника?
5. Чим відрізняється бісектриса трикутника від бісектриси кута?
6. Сформулюйте теорему про суму кутів трикутника.
7. Що таке зовнішній кут трикутника?
8. Сформулюйте теорему про зовнішній кут трикутника.
9. Чи правильно, що зовнішній кут трикутника більший від кожного внутрішнього кута, не суміжного з ним?
10. Чому дорівнює сума кутів чотирикутника?
11. Які фігури називають рівними?
12. Яким знаком відношення позначають рівність фігур?
13. Сформулюйте властивості рівності фігур.
14. Сформулюйте ознаку рівності двох кіл.
15. Сформулюйте першу ознаку рівності трикутників.
16. Сформулюйте другу ознаку рівності трикутників.
17. Доведіть ознаку рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними.
18. Доведіть ознаку рівності трикутників за стороною і прилеглими до неї кутами.

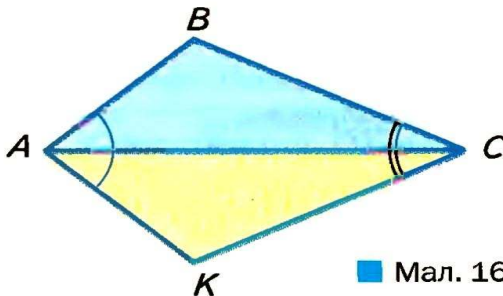
● Тестові завдання 3

- |   |                                     |                                     |
|---|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. Один з кутів трикутника $40^\circ$ , другий — на $20^\circ$ більший. Третій кут трикутника дорівнює:                           | а) $100^\circ$ ;<br>в) $60^\circ$ ; | б) $80^\circ$ ;<br>г) $120^\circ$ . |
| 2. Зовнішні кути трикутника дорівнюють $100^\circ$ і $120^\circ$ . Знайдіть внутрішній кут при третій вершині.                    | а) $60^\circ$ ;<br>в) $40^\circ$ ;  | б) $90^\circ$ ;<br>г) $80^\circ$ .  |
| 3. Кути трикутника пропорційні числам 2, 3 і 5. Знайдіть найменший кут трикутника.  | а) $30^\circ$ ;<br>в) $28^\circ$ ;  | б) $54^\circ$ ;<br>г) $36^\circ$ .  |
| 4. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ . Який знак слід поставити замість *: $\angle A * \angle A_1$ ?                          | а) $<$ ;<br>в) $>$ ;                | б) $=$ ;<br>г) $\neq$ .             |
| 5. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ . Який знак слід поставити замість *: $AB * A_1B_1$ ?                                    | а) $<$ ;<br>в) $=$ ;                | б) $>$ ;<br>г) $\neq$ .             |
| 6. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ , $AB = 5$ см, $AC = 7$ см. Знайдіть $BC$ , якщо периметр $\triangle A_1B_1C_1 = 21$ см. | а) 11 см;<br>в) 10 см;              | б) 19 см;<br>г) 9 см.               |
| 7. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ , $\angle A = 70^\circ$ , $\angle B = 60^\circ$ . Знайдіть $\angle C_1$ .                | а) $50^\circ$ ;<br>в) $30^\circ$ ;  | б) $90^\circ$ ;<br>г) $70^\circ$ .  |
- Для виконання завдань 8–10 скористайтеся умовою:  
відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$  так, що  $AO = BO$  і  $CO = DO$ .
- |  |  |
|--|--|
| 8. Який трикутник дорівнює $\triangle AOC$ ? | а) $\triangle AOD$ ; б) $\triangle BOD$ ;<br>в) $\triangle COB$ ; г) $\triangle CBD$ . |
| 9. Якому куту дорівнює $\angle OAC$ ?        | а) $\angle ODB$ ; б) $\angle OBD$ ;<br>в) $\angle BOD$ ; г) $\angle AOD$ .             |
| 10. Яке твердження хибне?                    | а) $AC = BD$ ; б) $AC \parallel BD$ ;<br>в) $AB \parallel CD$ ; г) $AO = OB$ .         |



## ● Типові задачі для контрольної роботи

- 1°. Намалюйте довільний трикутник і проведіть до його більшої сторони медіану, бісектрису і висоту.
- 2°. Два кути трикутника дорівнюють  $95^\circ$  і  $43^\circ$ . Знайдіть міру третього кута трикутника.
- 3°. Знайдіть кути трикутника  $ABC$ , якщо він дорівнює трикутнику  $KPT$ , у якого  $\angle K = 70^\circ$ ,  $\angle P = 50^\circ$ .
- 4°. Знайдіть периметр трикутника  $KLM$ , якщо  $\triangle KLM = \triangle ABC$  і  $AB = 5$  см,  $BC = 3$  см,  $AC = 4$  см.
- 5°.  $BK$  — висота  $\triangle ABC$ . Знайдіть  $AC$ , якщо  $AK = 5$  см,  $KC = 11$  см,  $\angle A = 120^\circ$ .
- 6°. Відрізки  $AB$  і  $KP$  перетинаються в точці  $O$  так, що  $OA = OB$ ,  $OK = OP$ . Доведіть, що  $\triangle AOP = \triangle BOK$ .
- 7°. Зображені на малюнку 160 трикутники  $ABC$  і  $AKC$  такі, що  $\angle BAC = \angle KAC$  і  $\angle BCA = \angle KCA$ . Доведіть, що  $AB = AK$ .



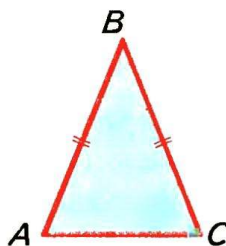
■ Мал. 160

- 8°. Знайдіть кути трикутника, якщо його зовнішні кути пропорційні числам 3, 7 і 8.
- 9°. У трикутнику  $ABC$  проведено висоти  $AP$  і  $BH$ . Доведіть, що  $AP = BH$ , якщо  $PC = HC$ .
- 10°. У трикутнику  $ABC$  проведено медіани  $AP$  і  $BH$ . Доведіть, що  $\triangle APC = \triangle BHC$ , якщо  $AC = BC$ .

## § 13. Рівнобедрений трикутник

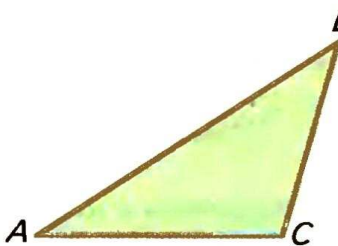
Трикутник називається *рівнобедреним*, якщо в нього дві сторони рівні. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а третю його сторону — *основою*.

Трикутник, який не є рівнобедреним, називають *різностороннім*. Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають *рівностороннім*. Рівносторонній трикутник є окремим видом рівнобедреного трикутника (мал. 161).

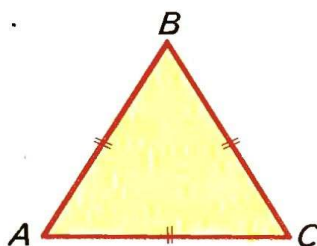


РІВНОБЕДРЕНИЙ  
ТРИКУТНИК

■ Мал. 161



РІЗНОСТОРОННІЙ  
ТРИКУТНИК



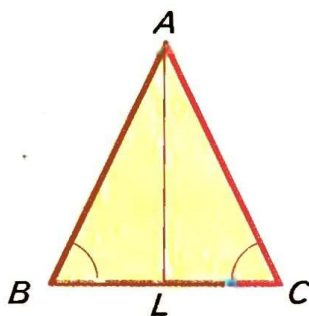
РІВНОСТОРОННІЙ  
ТРИКУТНИК



**ТЕОРЕМА 12** У рівнобедреного трикутника кути при основі рівні, а бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.

### ■ ДОВЕДЕННЯ.

Нехай  $ABC$  — рівнобедрений трикутник з основою  $BC$  (мал. 162). Бісектриса  $AL$  розбиває його на трикутники  $ABL$  і  $ACL$ . Оскільки  $AB = AC$ ,  $AL$  — спільна сторона,  $\angle BAL = \angle CAL$ , то за двома сторонами і кутом між ними  $\triangle ABL = \triangle ACL$ . З рівності цих трикутників випливає:



■ Мал. 162

- $\angle B = \angle C$ , тобто кути при основі  $\triangle ABC$  рівні;
- $BL = CL$ , тобто  $AL$  — медіана  $\triangle ABC$ ;
- $\angle ALB = \angle ALC = 90^\circ$ , тобто  $AL$  — висота  $\triangle ABC$ . ▲

**ТЕОРЕМА 13** Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.

**ДОВЕДЕННЯ.**

Нехай у  $\triangle ABC$   $\angle B = \angle C$  (мал. 162). Доведемо, що  $AB = AC$ .  
Проведемо бісектрису  $AL$ . Вона розбиває даний трикутник на два:  $\triangle ABL$  і  $\triangle ACL$ . В них  $\angle B = \angle C$  і  $\angle BAL = \angle CAL$ , тому  $\angle ALB = \angle ALC$ . За стороною  $AL$  і прилеглими до неї кутами  $\triangle BAL = \triangle CAL$ . Отже,  $AB = AC$ . ▲

З теорем 12 і 13 випливає такий наслідок.

**!** У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути, а проти рівних кутів — рівні сторони.

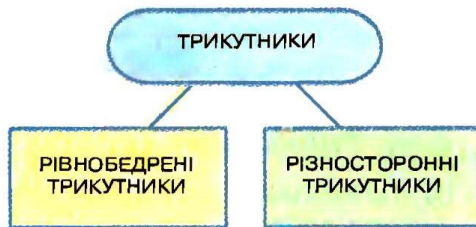
### Для допитливих

**Рівнобедрений** — той, що має рівні бедра. Рівні сторони — немов ноги.

Як співвідносяться між собою *трикутники* і *рівнобедрені трикутники*? Рівнобедрені трикутники становлять тільки частину всіх трикутників. Говорять, що обсяг поняття *трикутники* більший від обсягу поняття *рівнобедрені трикутники*. Такі співвідношення прийнято зображати наочно діаграмами Ейлера (мал. 163). Ті трикутники, які не є рівнобедреними, називають *різносторонніми* трикутниками. Отже, загальне поняття *трикутники* можна розбити на два класи: трикутники рівнобедрені і різносторонні (мал. 164).



■ Мал. 163



■ Мал. 164



**? Запитання і завдання для самоконтролю**

1. Який трикутник називають рівнобедреним?
2. Як називають сторони рівнобедреного трикутника?
3. Сформулюйте властивості рівнобедреного трикутника.
4. Який трикутник називається рівностороннім?
5. Як співвідносяться поняття *трикутники* і *рівнобедрені трикутники*?

**● Виконаємо разом**

- 1** Дві сторони рівнобедреного трикутника мають довжини 2 см і 6 см. Знайдіть довжину третьої його сторони.
- Основа даного трикутника не може дорівнювати 6 см, бо  $2\text{ см} + 2\text{ см} < 6\text{ см}$ . Отже, йдеться про трикутник з основою 2 см і бічними сторонами по 6 см.
- Відповідь. 6 см.
- 2** Покажіть на діаграмі співвідношення між поняттями: трикутники, рівнобедрені трикутники і рівносторонні трикутники.



■ Мал. 165

- Рівносторонній трикутник є водночас і рівнобедреним трикутником. Отже, співвідношення між названими видами трикутників можна зобразити схемою, як на малюнку 165.

**● Задачі і вправи****■ ВИКОНАЙТЕ УСНО**

- 380.** Доведіть, що кут при основі рівнобедреного трикутника не може бути прямим.
- 381.** Кут при вершині рівнобедреного трикутника  $120^\circ$ . Знайдіть кут при основі.
- 382.** Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при його вершині дорівнює куту при основі.

- 383.** Кут при основі рівнобедреного трикутника  $70^\circ$ . Знайдіть кут при вершині.
- 384.** Сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 5 см і 10 см. Яка з них — основа?
- 385.** Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, якщо його основа дорівнює 10 см, а бічна сторона 20 см.

**A**

- 386.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а бічна сторона — 26 см. Знайдіть периметр трикутника.
- 387.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а бічна сторона — 5 см. Знайдіть основу.
- 388.** Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює  $80^\circ$ . Знайдіть кути при основі.
- 389.** Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює  $30^\circ$ . Знайдіть кут при вершині.
- 390.** Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо:  
а) один з них на  $30^\circ$  більший від іншого;  
б) один з них удвічі більший від іншого.  
Розгляньте два випадки.
- 391.** Доведіть, що коли який-небудь кут рівнобедреного трикутника дорівнює  $60^\circ$ , то цей трикутник рівносторонній.
- 392.** Доведіть, що в рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.
- 393.** Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює  $80^\circ$ . Знайдіть кут між:  
а) основою і бісектрисою, проведеною до бічної сторони;  
б) бічною стороною і бісектрисою, проведеною до неї;  
в) основою і висотою, проведеною до бічної сторони.
- 394.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 50 см. Знайдіть його сторони, якщо вони пропорційні числам:  
а) 1, 2 і 2;  
б) 3, 3 і 4.
- 395.** Кут при вершині рівнобедреного трикутника  $30^\circ$ . Знайдіть кут між висотами, проведеними до бічних сторін.

- 396.** Якщо медіана трикутника є його висотою, то такий трикутник рівнобедрений. Доведіть.
- 397.** Якщо висота трикутника є його бісектрисою, то такий трикутник рівнобедрений. Доведіть.
- 398.** У  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $\angle B = 36^\circ$ ,  $AK$  — бісектриса. Доведіть, що  $BK = KA = AC$ .

5

- 399.** У  $\triangle ABC$   $AB = BC$ . Знайдіть довжину медіани  $BD$ , якщо периметри трикутників  $ABD$  і  $ABC$  дорівнюють відповідно 40 см і 50 см.
- 400.** Доведіть, що в кожному рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені до бічних сторін, рівні.
- 401.** Рівні відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $M$  так, що  $AM = MD$ . Доведіть, що  $\triangle ABC = \triangle DCB$ .
- 402.** Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо одна з них менша від периметра на 30 см, а друга — на 40 см.
- 403.** Доведіть, що сума двох нерівних кутів рівнобедреного трикутника перевищує  $90^\circ$ .
- 404.** Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо:
- а) сума двох з них дорівнює  $60^\circ$ ;
  - б) сума двох з них дорівнює  $150^\circ$ ;
  - в) один з його зовнішніх кутів дорівнює  $15^\circ$ ;
  - г) один з його зовнішніх кутів дорівнює  $115^\circ$ .
- 405.** Сформулюйте і доведіть ознаки рівності рівнобедрених трикутників:
- а) за основою і прилеглим кутом;
  - б) за основою і протилежним кутом;
  - в) за бічною стороною і кутом при основі.
- 406.** Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника з основою  $a$  і бічною стороною  $b$ .
- 407.** а) Знайдіть основу рівнобедреного трикутника, якщо його периметр  $2p$ , а бічна сторона  $b$ .  
б) Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його периметр  $2p$ , а основа  $a$ .

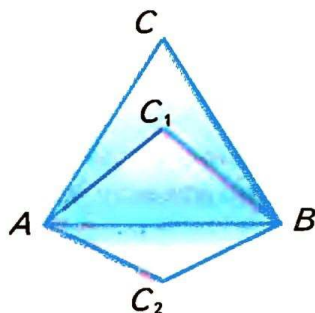


**408.** Доведіть, що в рівносторонньому трикутнику:

- а) всі медіани рівні;
- б) всі висоти рівні;
- в) всі бісектриси рівні.

**409.** Покажіть, що рівносторонній трикутник можна розрізати на 4 рівні рівносторонні трикутники.

**410.** Як можна розрізати рівносторонній трикутник на три рівні рівнобедрені трикутники?



■ Мал. 166

**411.** Як розташовані вершини всіх рівнобедрених трикутників, що мають спільну основу (мал. 166)?

**412.** Приклавши один до одного два рівнобедрені трикутники з кутом по  $100^\circ$ , утворили чотирикутник. Визначте кути чотирикутника.

### ■ ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ ■

**413.** Виріжте з паперу гострокутний, прямокутний і тупокутний рівнобедрені трикутники. Перегинаючи їх по бісектрисі кута при вершині, повторіть доведення теореми 12.

### ■ ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ■

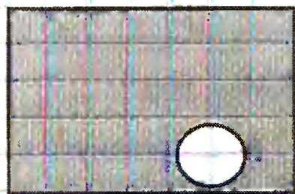
**414.** Знайдіть міру кута, якщо його бісектриса зі стороною утворює кут  $48^\circ$ .

**415.** Знайдіть міри двох суміжних кутів, якщо вони відносяться як: а)  $1 : 2$ ; б)  $2 : 3$ .

**416.** Знайдіть периметр рівностороннього трикутника, якщо він на 4 см довший від сторони.

**417.** Середнє арифметичне всіх сторін трикутника дорівнює 10 дм. Чому дорівнює його периметр?

**418.** Перемалюйте в зошит фігуру, що на малюнку 167, і проведіть пряму так, щоб вона розрізала зафарбовану фігуру на дві частини рівних площ.



■ Мал. 167

## § 14. Третя ознака рівності трикутників

Вам уже відомі дві ознаки рівності трикутників. Знаючи властивості рівнобедреного трикутника, можна довести ще одну ознаку.



### ТЕОРЕМА 14 (третя ознака рівності трикутників).

Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

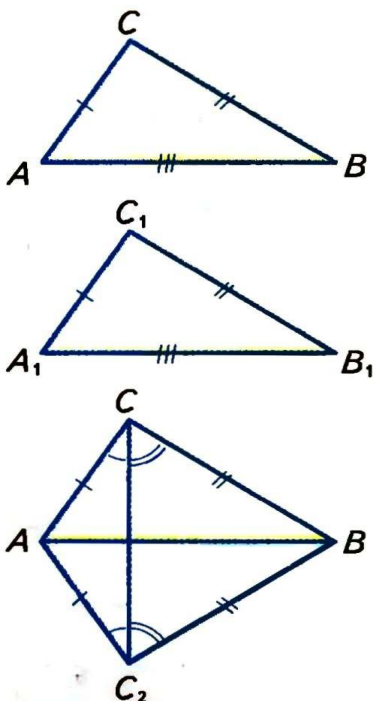
#### ■ ДОВЕДЕННЯ.

Нехай у трикутників  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$   $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$  і  $BC = B_1C_1$  (мал. 168). Доведемо, що  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

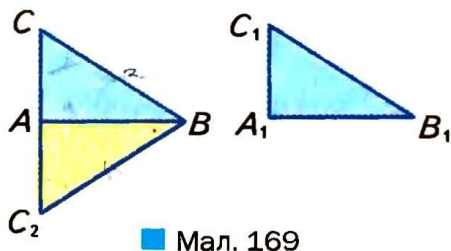
Прикладемо трикутник  $A_1B_1C_1$  до трикутника  $ABC$  так, щоб вершина  $A_1$  сумістилася з  $A$ ,  $B_1$  — з  $B$ , а  $C_1$  і  $C$  виявилися по різні боки від прямої  $AB$ . Тоді  $\triangle A_1B_1C_1$  займе положення  $\triangle ABC_2$ . Провівши відрізок  $CC_2$ , одержимо рівнобедрені трикутники  $CAC_2$  і  $CBC_2$ , бо  $AC = AC_2$  і  $BC = BC_2$ . У цих трикутників кути при основах рівні:  $\angle ACC_2 = \angle AC_2C$ ,  $\angle BCC_2 = \angle BC_2C$ . Отже, рівні також кути  $ACB$  і  $AC_2B$ . Тому за двома сторонами і кутом між ними  $\triangle ABC = \triangle ABC_2$ . За побудовою  $\triangle ABC_2 = \triangle A_1B_1C_1$ . Таким чином,  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ , що й треба було довести. ▲

#### ■ ЗАУВАЖЕННЯ.

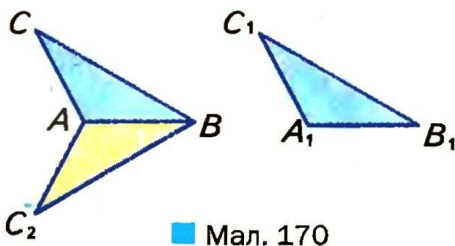
Ми розглянули випадок, коли відрізки  $AB$  і  $CC_2$  перетинаються. Для випадків, коли ці відрізки не перетинаються, доведення теореми треба дещо змінити. Пропонуємо розглянути ці випадки самостійно, використовуючи малюнки 169 і 170.



■ Мал. 168



■ Мал. 169



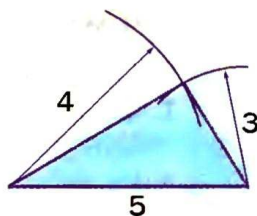
■ Мал. 170

Третя ознака рівності трикутників стверджує, що трьома сторонами трикутник визначається однозначно. Уявімо, що кожний семикласник побудував у зошиті трикутник, сторони якого дорівнюють, наприклад, 3 см, 4 см і 5 см. Один спочатку відклав найбільший відрізок, а з його кінців проводив дуги радіусами 4 см і 5 см (мал. 171). Другий спочатку відклав найменший з даних відрізків і т. д. Хоч будували вони різними способами, в результаті всі одержали рівні трикутники.

Пригадавши й дві інші ознаки рівності трикутників, можна зробити такий висновок.

*Трикутник визначається (задається) однозначно:*

- 1) двома сторонами і кутом між ними;
- 2) стороною і двома прилеглими кутами;
- 3) трьома сторонами.



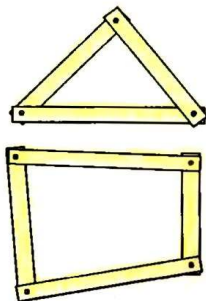
■ Мал. 171

### ■ ПРИМІТКА.

У пункті 2) йдеться про кути, сума яких менша від  $180^\circ$ , а в пункті 3) — про три відрізки, кожний із яких менший від суми двох інших.

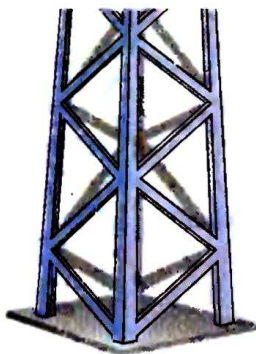
### ■ Для допитливих

Третя ознака рівності трикутників засвідчує, що трикутник — *фігура жорстка*. Щоб краще зрозуміти, про що йдеться, уявіть збиті цвяхами з окремих планок трикутник і чотирикутник (мал. 172). Такий чотирикутник неважко деформувати: змінити кути, не змінюючи довжин сторін. Трикутник так деформувати не можна. *Три сторони трикутника однозначно*



■ Мал. 172





■ Мал. 173

*визначають його кути!* Так само, знаючи дві сторони трикутника і кут між ними, можна однозначно визначити третю сторону і два інші кути; знаючи сторону і два прилеглі кути, можна визначити дві інші його сторони і т. д. Як це робити, дізнаєтеся в старших класах.

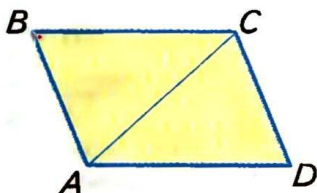
Знаючи, що з усіх многокутників тільки трикутник фігура жорстка, ажурні конструкції виготовляють так, щоб вони мали якомога більше трикутників (мал. 173).

## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте третю ознаку рівності трикутників.
2. Сформулюйте першу і другу ознаки рівності трикутників.
3. Як ви розумієте вислів *трикутник визначається трьома його сторонами*?
4. Якими елементами визначається трикутник?
5. Як слід розуміти, що *трикутник — фігура жорстка*?

## ● Виконаємо разом

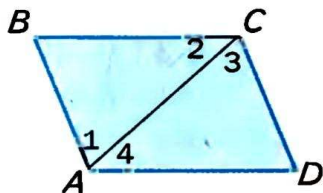
- 1** Доведіть, що коли в чотирикутнику протилежні сторони рівні, то і протилежні кути рівні.



■ Мал. 174

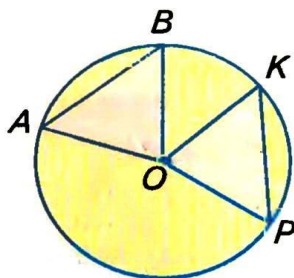
- Нехай в чотирикутнику  $ABCD$   $AB = CD$  і  $BC = AD$  (мал. 174). Проведемо відрізок  $AC$ , в результаті утворяться два трикутники  $ABC$  і  $CDA$ . Вони рівні за трьома сторонами, бо  $AB = CD$  і  $BC = AD$ , а сторона  $AC$  у них спільна. Отже,  $\triangle ABC = \triangle CDA$ . А в рівних трикутників протилежні сторін лежать рівні кути. Тому  $\angle B = \angle D$ .

Рівність кутів  $BAD$  і  $BCD$  можна довести двома способами: або показати що кожний з них складається з двох рівних кутів  $\angle 1 = \angle 3$  і  $\angle 2 = \angle 4$  (мал. 175), або — провівши відрізок  $BD$ .



■ Мал. 175

**2** На колі з центром  $O$  позначено точки  $A, B, K$  і  $P$  такі, що  $AB = KP$  (мал. 176). Доведіть, що  $\triangle AOB = \triangle KOP$ .



■ Мал. 176

■ Провівши в дані точки радіуси, отримаємо трикутники  $AOB$  і  $KOP$ . Вони рівні за трьома сторонами, бо  $AB = KP$  за умовою і  $OA = OB = OK = OP$  — як радіуси. Тому  $\triangle AOB = \triangle KOP$ .

### ● Задчі і вправи

#### ■ ВИКОНАЙТЕ УСНО ■

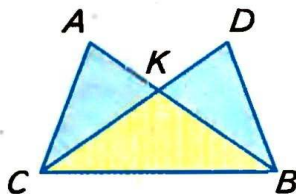
**419.**  $\triangle ABC = \triangle KPT$ . Знайдіть периметр трикутника  $KPT$ , якщо:

- кожна сторона  $\triangle ABC$  дорівнює 5 см;
- $AB = BC = 3$  дм,  $AC = 4$  дм;

**420.** На малюнку 177  $AB = CD$  і  $AC = BD$ .

Доведіть, що:

- $\angle A = \angle D$ ;
- $BK = CK$ ;
- $\angle ACK = \angle DBK$ .



■ Мал. 177

**421.** Точка  $O$  рівновіддалена від вершин  $A, B$  і  $C$  рівностороннього трикутника. Доведіть, що:

$$\begin{aligned}\angle AOB &= \angle BOC = \angle AOC; \\ \angle OAB &= \angle OBC = \angle OCA.\end{aligned}$$

**422.** Якщо кожна сторона чотирикутника паралельна протилежній стороні, то його протилежні кути рівні. Доведіть.

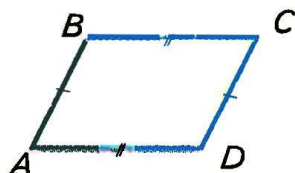
- 423.** Якщо відрізки  $AO$  і  $OB$  рівні, а точка  $X$  рівновіддалена від  $A$  і  $B$ , то точка  $X$  лежить на прямій, яка ділить кут  $AOB$  навпіл. Доведіть.
- 424.** Якщо  $M$  — довільна точка висоти  $BH$  трикутника  $ABC$ , у якого  $AB = BC$ , то : а)  $MA = MC$ ; б)  $\triangle ABM = \triangle CBM$ ; в)  $\triangle AMH = \triangle CMH$ . Доведіть.
- 425.** Прикладаючи два рівні трикутники з кутами  $30^\circ$  і  $70^\circ$  рівними сторонами, можна утворити кілька різних чотирикутників. Зобразіть їх на малюнку, визначте кути утворених чотирикутників.
- 426.** Доведіть, що коли основа і бічна сторона одного рівнобедреного трикутника дорівнюють відповідно основі і бічній стороні другого рівнобедреного трикутника, то такі трикутники рівні.
- 427.** Доведіть, що коли сторона одного рівностороннього трикутника дорівнює стороні другого рівностороннього трикутника, то такі трикутники рівні.
- 428.** На колі з центром  $O$  позначено точки  $A, B$  і  $C$  так, що  $AB = BC = CA$ . Доведіть, що:  
 а)  $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCA$ ;  
 б)  $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$ ;  
 в)  $\angle OAB = \angle OBC = \angle OCA = 30^\circ$ .

5

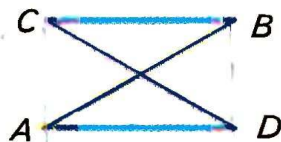
- 429.** На колі з центром  $O$  позначено точки  $A, B$  і  $C$  так, що  $AB = BC = CA$ , а  $AM$  — діаметр. Доведіть, що:  
 а)  $BM = CM$ ;  
 б)  $\angle OBM = \angle OCM$ .

- 430.** Доведіть рівність двох трикутників за двома даними сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

- 431.** Замкнена ламана  $ABCD$  така, що  $AB = CD$  і  $AD = BC$ . Доведіть, що  $\angle A = \angle C$  і  $\angle B = \angle D$ . Розгляньте два випадки (мал. 178, 179).



■ Мал. 178



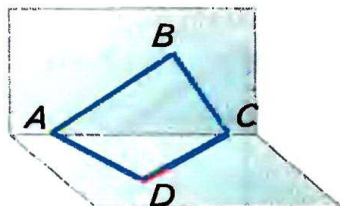
■ Мал. 179



**432.** Спробуйте узагальнити задачу 431 на випадок, коли дана ламана не лежить у одній площині (мал. 180).

**433.** Рівнобедрені трикутники  $APC$  і  $ABC$  мають спільну основу  $AC$ . Пряма  $PB$  перетинає її в точці  $O$ . Доведіть, що:

- а)  $\angle PAB = \angle PCB$ ;
- б)  $AO = OC$ ;
- б)  $AC \perp BP$ .



■ Мал. 180

**434.** Чи з будь-яких чотирьох рівних трикутників можна скласти один трикутник? Покажіть на малюнку.

**435.** Рівносторонніми трикутниками, мов паркетинами, можна замостити всю площину (мал. 181). Чи можна замостити площину рівними нерівносторонніми трикутниками? Якщо можна — покажіть на малюнку.



■ Мал. 181

**436.** Два рівні різносторонні трикутники  $ABC$  і  $KPT$  можна сумістити тільки одним способом. Два рівні рівнобедрені трикутники — двома способами, суміщаючи сторону  $AB$  із  $KP$  або із  $TP$ . Скількома способами можна сумістити два рівні рівносторонні трикутники?

### ■ ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ■

**437.** Знайдіть кути трикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 4.

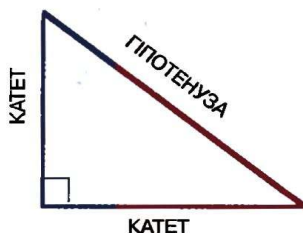
**438.** Знайдіть середнє арифметичне кутів трикутника.

**439.** Середнє арифметичне сторін трикутника дорівнює 20 см. Знайдіть його периметр.

**440.** Півпериметр трикутника дорівнює  $p$ . Знайдіть середнє арифметичне його сторін.

**441.** Доведіть, що сума кутів чотирикутника дорівнює  $360^\circ$ . Знайдіть середнє арифметичне його кутів.

## § 15. Прямокутний трикутник



■ Мал. 182

позначають квадратиком. У кожному прямокутному трикутнику гіпотенуза більша від кожного катета.

Згодом нам будуть потрібні ознаки рівності прямокутних трикутників. З першої і другої ознак рівності трикутників (§ 12) безпосередньо впливають такі ознаки.



Два прямокутні трикутники рівні, якщо:

- 1) катети одного з них дорівнюють відповідно катетам другого;
- 2) катет і прилеглий гострий кут одного трикутника дорівнюють відповідно катету і прилеглому гострому куту другого;
- 3) гіпотенуза і прилеглий кут одного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі і прилеглому куту другого.

Ще одна ознака рівності прямокутних трикутників потребує доведення.



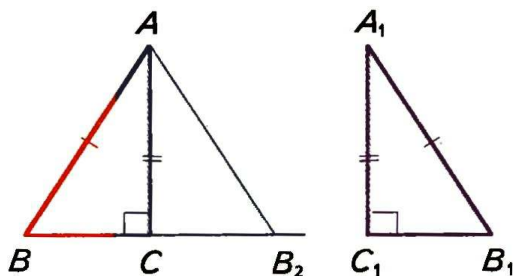
**ТЕОРЕМА 15** Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі другого, то такі трикутники рівні.

■ **ДОВЕДЕННЯ.**

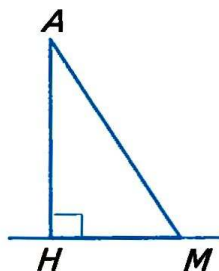
Нехай у трикутників  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  кути  $C$  і  $C_1$  прямі і  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$  (мал. 183). Доведемо, що  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

Прикладемо  $\triangle A_1B_1C_1$  до  $\triangle ABC$  так, щоб вершина  $A_1$  сумістилась з  $A$ ,  $C_1$  — з  $C$ , а  $\triangle A_1B_1C_1$  зайняв положення  $\triangle AB_2C$ . Оскільки кути  $C$  і  $C_1$  прямі, то точки  $B$ ,  $C$  і  $B_2$  розмістяться на одній прямій.  $\triangle ABB_2$  — рівнобедрений,  $\angle B = \angle B_2 = \angle B_1$ . Тоді

і  $\angle A = \angle A_1$ . Отже, у даних трикутників між відповідно рівними сторонами  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$  лежать рівні кути  $A$  і  $A_1$ . За першою ознакою трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  рівні. ▲



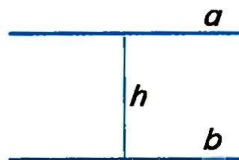
Мал. 183



Мал. 184

Введемо ще кілька важливих понять, пов'язаних з прямокутним трикутником. Якщо  $АНМ$  — прямокутний трикутник із прямим кутом  $H$ , то його катет  $АН$  — *перпендикуляр*, проведений з точки  $A$  на пряму  $HM$  (мал. 184). Гіпотенузу  $AM$  називають також *похилою*, проведеною з точки  $A$  до прямої  $HM$ , а катет  $HM$  — *проекцією* цієї похилої на пряму  $HM$ .

Довжину перпендикуляра  $АН$  називають також *відстанню* від точки  $A$  до прямої  $HM$ . Взагалі, відстань між двома геометричними фігурами — це відстань між їх найближчими точками (якщо такі точки існують). Наприклад, відстань між двома паралельними прямими дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї прямої на другу (мал. 185). А відстань від точки  $K$  до відрізка  $PT$ , зображених на малюнку 186, дорівнює  $KT$ .



Мал. 185



Мал. 186

## Для допитливих

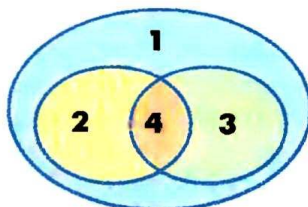
*Прямокутні трикутники* становлять тільки частину всіх трикутників. Якщо трикутник не має прямого кута, його називають *непрямокутним* трикутником. Отже, залежно від того, має чи не має трикутник прямий кут, усі трикутники можна поділити на два класи. Схематично цей поділ можна зобразити малюнком 187.



Якщо катети прямокутного трикутника рівні, то він водночас є і рівнобедреним трикутником. Співвідношення між такими видами трикутників можна зобразити, як показано на малюнку 188.



■ Мал. 187



■ Мал. 188

- 1 — ТРИКУТНИКИ
- 2 — РІВНОБЕДРЕНІ
- 3 — ПРЯМОКУТНІ
- 4 — ПРЯМОКУТНІ РІВНОБЕДРЕНІ

Прямокутні трикутники в геометрії відіграють важливу роль, бо будь-який трикутник можна розрізати на два прямокутні трикутники, а для кожного прямокутного трикутника справджується славнозвісна теорема Піфагора: **квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів**. Докладніше про теорему Піфагора і про застосування властивостей прямокутних трикутників ви дізнаєтесь у 8 класі.

## ? Запитання і завдання для самоконтролю

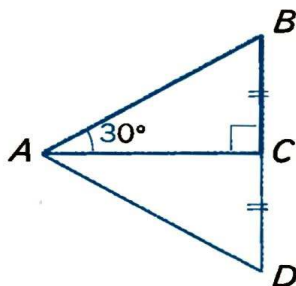
1. Сформулюйте означення прямокутного трикутника.
2. Як називають сторони прямокутного трикутника?
3. Сформулюйте і доведіть ознаки рівності прямокутних трикутників.
4. Що таке перпендикуляр, похила і проекція похилої?
5. Що таке відстань від точки до прямої?
6. Що таке відстань між фігурами?

## ● Виконаємо разом

■ Доведіть, що катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута  $30^\circ$ , дорівнює половині гіпотенузи.

- Нехай у  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$  і  $\angle A = 30^\circ$  (мал. 189). Доведемо, що  $BC = 0,5 AB$ .

На прямій  $BC$  відкладемо відрізок  $CD$ , рівний  $CB$ , і проведемо відрізок  $AD$ . За двома катетами  $\triangle BCA = \triangle DCA$ . Оскільки  $\angle BAD = 60^\circ$ , то  $\angle B = \angle D = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$ . Отже, всі кути  $\triangle ABD$  дорівнюють по  $60^\circ$ . Таку властивість має тільки рівносторонній трикутник. Оскільки  $BD = AB$  і  $BC = CD$ , то  $BC = 0,5 AB$ .



■ Мал. 189

### ● Задачі і вправи

#### ■ ВИКОНАЙТЕ УСНО ■

- 442.** Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо один з них дорівнює: а)  $30^\circ$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $70^\circ$ .
- 443.** Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо один з них більший від другого: а) удвічі; б) у 9 разів; в) на  $30^\circ$ .
- 444.** Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 3 м, 4 м і 5 м. Яка з них гіпотенуза?
- 445.** Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.

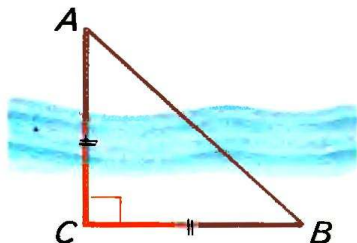
#### ■ А ■

- 446.** Один з гострих кутів прямокутного трикутника на  $10^\circ$  більший від другого. Знайдіть ці кути.
- 447.** Кути трикутника пропорційні числам 3, 5 і 8. Доведіть, що цей трикутник прямокутний.
- 448.** Один з кутів трикутника на  $30^\circ$  більший від другого і на  $30^\circ$  менший від третього. Знайдіть кути цього трикутника.
- 449.** Доведіть, що бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника перетинаються під кутом  $45^\circ$ .
- 450.** Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо його висота, проведена з вершини прямого кута, утворює з катетом кут  $50^\circ$ .
- 451.** З точки  $D$ , яка лежить на бісектрисі кута  $B$ , на сторони кута проведено перпендикуляри  $DA$  і  $DC$ . Доведіть, що  $DA = DC$ .

**452.** Точка  $B$  лежить на внутрішньому промені кута  $A$ ;  $BK$  і  $BM$  — рівні перпендикуляри до сторін кута. Доведіть, що  $AB$  — бісектриса кута  $A$ .

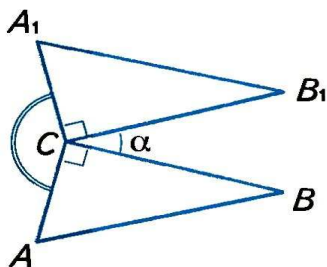
**453.** Прямая  $m$  перетинає відрізок  $AB$  в його середині  $O$ . Доведіть, що точки  $A$  і  $B$  рівновіддалені від прямої  $m$ .

**454.** За малюнком 190 поясніть, як можна знайти ширину річки на основі властивостей прямокутного рівнобедреного трикутника.



■ Мал. 190

**455.** Прямокутні трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C$  розташовані, як показано на малюнку 191. Знайдіть міру кута  $ACA_1$ , якщо  $\angle BCB_1 = \alpha$  (грецька літера «альфа»).



■ Мал. 191

**456.** Якщо катет і протилежний кут одного трикутника дорівнюють відповідно катету і протилежному куту другого, то такі трикутники рівні. Доведіть.

**457.** У  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $AB = 32$  см. Знайдіть  $AC$ .

### Б

**458.** Сформулюйте і доведіть твердження, обернене до сформульованого в задачі, розв'язаній на с. 118.

**459.** У  $\triangle ABC$   $AB = 18$  см,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ . Знайдіть:  
а) відстань від точки  $A$  до прямої  $CB$ ;  
б) проекцію похилої  $AB$  на пряму  $AC$ .

**460.** У  $\triangle ABC$   $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ,  $AB = 19$  см. Знайдіть:  
а) відстань від точки  $C$  до прямої  $AB$ ;  
б) проекцію відрізка  $AC$  на пряму  $AB$ .

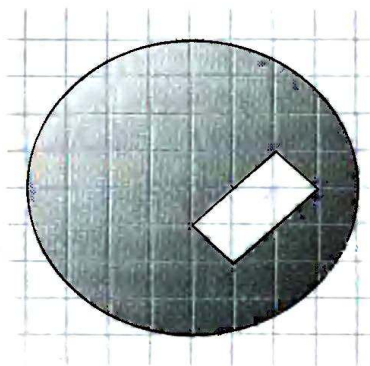
**461.** Знайдіть відстань між паралельними прямими, якщо відсічної, яка перетинає їх під кутом  $30^\circ$ , прямі відсікають відрізок завдовжки 54 см.



- 462.** Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо бісектриси двох його кутів перетинаються під кутом  $70^\circ$ .
- 463.** Чи можуть бісектриси двох кутів прямокутного трикутника перетинатися під кутом  $40^\circ$ ?
- 464.** Знаючи, що всі сторони квадрата рівні, а всі кути прямі, доведіть, що квадрат  $ABCD$  відрізками  $AC$  і  $BD$  розбивається на 4 рівні прямокутні рівнобедрені трикутники.
- 465.** Побудуйте на координатній площині трикутники з вершинами  $A(0; 1)$ ,  $B(2; 3)$ ,  $C(0; 3)$  і з вершинами  $K(1; 0)$ ,  $P(3; 0)$ ,  $T(3; 1)$ . Чи рівні ці трикутники?
- 466.** Медіана якого трикутника розбиває його на два менші трикутники, рівні між собою?
- 467.**  $CM$  — висота прямокутного рівнобедреного трикутника  $ABC$ , проведена до гіпотенузи. Знайдіть  $AB$ , якщо  $CM = m$ .
- 468.** Гіпотенуза  $AB$  прямокутного трикутника  $ABC$  дорівнює 20 см,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $CK$  — висота. Знайдіть  $AK$ .

### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 469.** Сформулюйте яку-небудь ознаку рівності рівнобедрених трикутників і спробуйте її довести.
- 470.**  $\triangle ABC = \triangle MNK$ ,  $\angle A = 70^\circ$ ,  $\angle B = 80^\circ$ . Знайдіть кути  $\triangle MNK$ .
- 471.** Чи існує трикутник, кути якого дорівнюють  $91^\circ$ ,  $52^\circ$  і  $44^\circ$ ?
- 472.** Рівні відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$  так, що  $AO = CO$ , а кути трикутника  $AOD$  пропорційні числам 2, 3 і 5. Знайдіть кути трикутника  $COB$ .
- 473.** Перемалюйте в зошит фігуру, що на малюнку 192, і проведіть пряму так, щоб вона розрізала зафарбовану фігуру на дві частини рівних площ.



■ Мал. 192

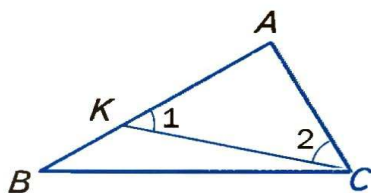
## § 16. Нерівності трикутника

Ви вже знаєте, що кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін. Щоб довести це твердження як теорему, спочатку розглянемо іншу теорему.



### ТЕОРЕМА 16

У кожному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута — більша сторона.



■ Мал. 193

### ■ ДОВЕДЕННЯ.

1) Нехай у трикутнику  $ABC$  сторона  $AB$  більша від  $AC$ . Покажемо, що кут  $C$  більший від кута  $B$  (мал. 193). Відкладемо на стороні  $AB$  відрізок  $AK$ , що дорівнює  $AC$ . Оскільки відкладений відрізок коротший від  $AB$ , то точка  $K$  лежить між  $A$  і  $B$ , а  $\angle ACK$  є частиною кута  $ACB$ . Кути  $AKC$  і  $ACK$  рівні, тобто  $\angle 1 = \angle 2$ , бо  $\triangle KAC$  рівнобедрений.  $\angle 1$  більший за  $\angle B$ , бо є зовнішнім для трикутника  $BKC$ . Отже, весь кут  $C$  більший за  $\angle 2$ , а  $\angle 2$  більший за  $\angle B$ . Цим доведено, що коли в трикутнику  $AB > AC$ , то  $\angle C > \angle B$ .

2) Нехай у  $\triangle ABC$  кут  $C$  більший за кут  $B$ .

Доведемо, що тоді  $AB > AC$ .

Сторони  $AB$  і  $AC$  не можуть дорівнювати одна одній, бо інакше даний трикутник був би рівнобедреним і один з його кутів при основі не міг би бути більшим від другого.

Не може сторона  $AB$  бути і меншою за  $AC$ , бо тоді кут  $C$  був би меншим за  $B$ . А оскільки сторона  $AB$  не дорівнює  $AC$  і не менша від  $AC$ , то вона більша від  $AC$ . ▲

### ■ НАСЛІДКИ.

1. У кожному прямокутному трикутнику гіпотенуза довша за кожний катет.
2. Перпендикуляр, проведений з будь-якої точки до прямої, коротший від будь-якої похилої, проведеної з тієї самої точки до тієї ж прямої.
3. Проекція похилої завжди менша від похилої.


**ТЕОРЕМА 17**

Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

**■ ДОВЕДЕННЯ.**

Розглянемо довільний  $\triangle ABC$  і покажемо, що  $AB < BC + CA$  (мал. 194).

Для доведення відкладемо на продовженні сторони  $AC$  відрізок  $CP$ , що дорівнює  $BC$ , і розглянемо трикутник  $ABP$ . Кут  $CBP$  і  $CPB$  рівні, бо  $CB = CP$ . Кут  $ABP$  більший за  $\angle P$ .

А оскільки проти більшого кута лежить більша сторона, то  $AB < AP$ . Врахувавши, що

$$AP = AC + CP = AC + CB, \text{ маємо: } AB < AC + CB.$$

Так само можна показати, що  $BC < CA + AB$ ,  $AC < CB + BA$ . ▲

З доведеної теореми випливає таке твердження.

■ Якщо точки  $A, B, C$  не лежать на одній прямій, то правильні нерівності:

$$AB < BC + CA, \quad BC < CA + AB, \quad AC < CB + BA.$$

Кожну з цих трьох нерівностей називають *нерівністю трикутника*.

**Для допитливих**

Якщо точки  $A, B, C$  лежать на одній прямій, то одна з наведених вище нерівностей перетворюється в рівність, а дві інші залишаються правильними. Наприклад, якщо точка  $C$  лежить між  $A$  і  $B$  (мал. 195), то правильні такі співвідношення:

$$AB = BC + CA, \quad BC < CA + AB, \quad CA < AB + BC.$$

Враховуючи все сказане вище, можна зробити такий висновок.

Як би не були розташовані три точки  $A, B, C$ , то завжди:  $AB \leq BC + CA$ ,  $BC \leq CA + AB$ ,  $CA \leq AB + BC$ .

З трьох відстаней між будь-якими трьома точками кожна не перевищує суми двох інших.



■ Мал. 195

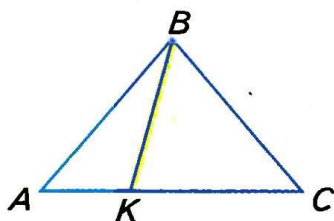


## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Чи правильно, що в трикутнику проти меншої сторони лежить менший кут, а проти меншого кута — менша сторона?
2. Сформулюйте нерівності трикутника  $XYZ$ .
3. Що означає вислів «точка  $B$  лежить між  $A$  і  $C$ »?
4. Як пов'язані між собою відстані між точками  $A$ ,  $B$  і  $C$ , якщо  $B$  лежить між  $A$  і  $C$ ?
5. Сформулюйте властивості відстаней між довільними точками  $A$ ,  $B$  і  $C$ .

### ● Виконаємо разом

- 1** Доведіть, що відрізок, який сполучає вершину рівнобедреного трикутника з довільною внутрішньою точкою основи, коротший за бічну сторону трикутника.

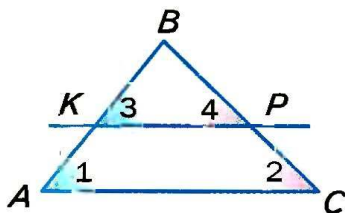


■ Мал. 196

- Нехай  $AC$  — основа довільного рівнобедреного трикутника  $ABC$ , а  $K$  — довільна внутрішня точка його основи (мал. 196). Покажемо, що  $BK < AB$ .

Кут  $AKB$  — зовнішній у  $\triangle KBC$ , тому  $\angle AKB > \angle C$ . Оскільки  $\angle C = \angle A$ , то  $\angle AKB > \angle A$ . Отже, у  $\triangle ABK$  сторона  $BK$  лежить проти меншого кута, ніж той, проти якого лежить сторона  $AB$ . Тому  $BK < AB$ .

- 2** Прямка  $KP$ , що перетинає  $\triangle ABC$ , паралельна  $AC$  (мал. 197). Яка із сторін  $AB$  чи  $BC$  даного трикутника більша, якщо  $BK < BP$ ?



■ Мал. 197

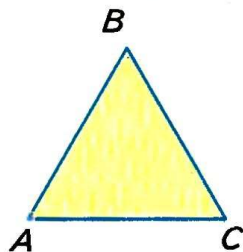
- Занумеруємо деякі кути, як показано на малюнку 197. Відповідні кути при паралельних прямих і січній рівні, тому  $\angle 1 = \angle 3$  і  $\angle 2 = \angle 4$ . Оскільки в  $\triangle BKP$   $BK < BP$ , то  $\angle 4 < \angle 3$ , тоді і  $\angle 2 < \angle 1$ .

Отже,  $AB < BC$ .

● **Задачі і вправи**■ **ВИКОНАЙТЕ УСНО** ■

**474.** Дивлячись на малюнок 198, порівняйте сторони  $AB$  і  $BC$  трикутника  $ABC$ , якщо:

- 1)  $\angle A < \angle C$ ; 4)  $\angle A \leq \angle C$ ;
- 2)  $\angle A > \angle C$ ; 5)  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 70^\circ$ ;
- 3)  $\angle A = \angle C$ ; 6)  $\angle B = 80^\circ$ ,  $\angle C = 40^\circ$ .



■ Мал. 198

**475.** Доведіть, що коли кожен кут рівнобедреного трикутника збільшити, наприклад, на  $1^\circ$ , то утворений трикутник також буде рівнобедрений.

**476.** Чи можна кожний кут трикутника збільшити, наприклад, на  $10^\circ$ ?

■ **А** ■

**477.** Яка із сторін  $\triangle ABC$  найбільша і яка найменша, якщо:

- 1)  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ;
- 2)  $\angle A = 50^\circ$ ,  $\angle B = 100^\circ$ ;
- 3)  $\angle B = 75^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ?

**478.** Який кут  $\triangle KPT$  найбільший і який найменший, якщо:

- 1)  $AB = 3$  м,  $BC = 4$  м,  $AC = 5$  м;
- 2)  $AB - BC = 2$  м,  $BC - AC = 1$  м?

**479.** Чи може основа рівнобедреного трикутника бути вдвічі довшою за бічну сторону? А вдвічі коротшою?

**480.** Чи може кожний кут трикутника бути меншим за  $60^\circ$ ?

**481.** Чи існує трикутник, кожний кут якого більший за  $60^\circ$ ?

**482.** Доведіть, що висота трикутника не довша за медіану, проведenu з тієї самої вершини.

■ **Б** ■

**483.** Чи може одна сторона трикутника дорівнювати половині його периметра?

**484.** Доведіть, що кожна сторона трикутника менша від його півпериметра.

- 485.** Чи може сума двох сторін трикутника дорівнювати його півпериметру?
- 486.** Доведіть, що кожна сторона трикутника довша від різниці інших його сторін.
- 487.** Чи існує трикутник, одна сторона якого дорівнює різниці двох інших?
- 488.** У трикутнику  $ABC$  сторони  $AB$  і  $AC$  дорівнюють відповідно 5 см і 8 см. Якою завдовжки може бути сторона  $BC$ ?
- 489.** Доведіть, що кожна сторона чотирикутника коротша від суми трьох інших сторін.
- 490.** Дві сторони трикутника дорівнюють 98 см і 28 см. Яким може бути периметр цього трикутника?
- 491.** Сума двох рівних сторін трикутника становить 0,6 периметра. Чи правильно, що кут між рівними сторонами більший від  $60^\circ$ ?

### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 492.** Знайдіть міри двох суміжних кутів, якщо їх різниця дорівнює  $30^\circ$ .
- 493.** Сума двох кутів, утворених перетином двох прямих, дорівнює  $200^\circ$ . Знайдіть міри двох інших кутів.
- 494.** У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  з основою  $AC$  бісектриси кутів  $A$  і  $C$  перетинаються в точці  $O$ . Доведіть, що трикутник  $AOC$  також рівнобедрений.
- 495.** Доведіть, що коли бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна стороні трикутника, то такий трикутник рівнобедрений.
- 496.** Доведіть, що пряма, паралельна будь-якій стороні рівнобедреного трикутника, відтинає від нього рівнобедрений трикутник.



■ Варіант 1

- 1°. Сформулюйте означення рівнобедреного трикутника.
- 2°.  $\triangle ABC$  — прямокутний ( $\angle C = 90^\circ$ ). Знайдіть  $\angle A$ , якщо  $\angle B = 70^\circ$ .
- 3°. Точки  $K$  і  $P$  — середини бічних сторін  $AB$  і  $AC$  рівнобедреного трикутника  $ABC$ . Доведіть, що  $\triangle AKC = \triangle APB$ .
- 4°. Знайдіть кути трикутника, якщо один із них удвічі більший від другого і на  $40^\circ$  менший від третього.

■ Варіант 2

- 1°. Сформулюйте означення прямокутного трикутника.
- 2°.  $\triangle ABC$  — рівнобедрений ( $AB = BC$ ). Знайдіть  $\angle A$ , якщо  $\angle B = 70^\circ$ .
- 3°. Точки  $K$  і  $P$  — середини бічних сторін  $AB$  і  $AC$  рівнобедреного трикутника  $ABC$ . Доведіть, що  $\triangle KBC = \triangle PCB$ .
- 4°. Знайдіть кути трикутника, якщо один із них удвічі менший від другого і на  $12^\circ$  більший від третього.

■ Варіант 3

- 1°. Сформулюйте властивість кутів рівнобедреного трикутника.
- 2°.  $\triangle ABC$  — прямокутний ( $\angle C = 90^\circ$ ) і рівнобедрений. Знайдіть  $\angle B$ .
- 3°. Точки  $K$  і  $M$  лежать на основі  $AC$  рівнобедреного трикутника  $ABC$ ,  $\angle BKA = \angle BMC$ . Доведіть, що  $BK = BM$ .
- 4°. Знайдіть кути трикутника, якщо один із них утричі більший від другого і на  $40^\circ$  менший від третього.

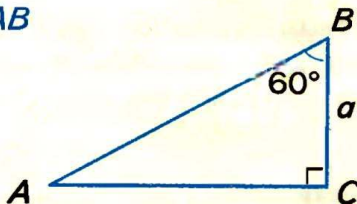
■ Варіант 4

- 1°. Сформулюйте одну з ознак рівності прямокутних трикутників.
- 2°.  $\triangle ABC$  — рівнобедрений ( $AB = BC$ ). Знайдіть  $\angle B$ , якщо  $\angle C = 50^\circ$ .
- 3°. Точки  $K$  і  $M$  лежать на основі  $AC$  рівнобедреного трикутника  $ABC$ ,  $\angle BKA = \angle BMC$ . Доведіть, що  $AK = CM$ .
- 4°. Знайдіть кути трикутника, якщо один із них утричі менший від другого і на  $5^\circ$  більший від третього.

Задачі за готовими малюнками

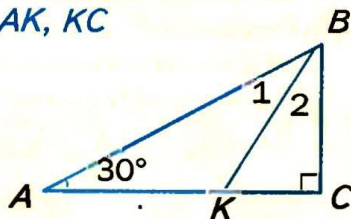
А

$BC = a.$   
 $AB$



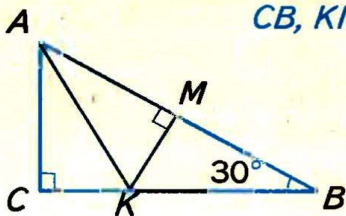
Б

$\angle 1 = \angle 2, BK = 10.$   
 $AK, KC$

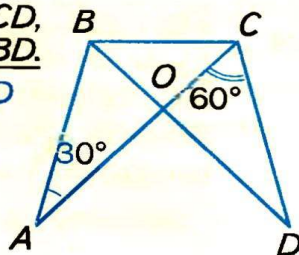


2

$AK = KB = 8.$   
 $CB, KM$



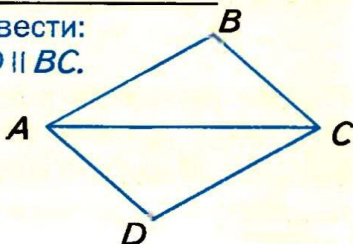
$AB = CD,$   
 $AC = BD.$   
 $\angle AOD$



3

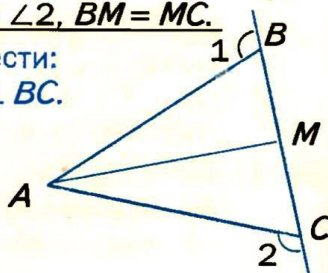
$AB = CD, AD = BC.$

Довести:  
 $AD \parallel BC.$



$\angle 1 = \angle 2, BM = MC.$

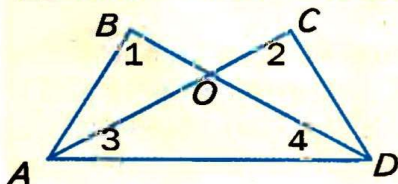
Довести:  
 $AM \perp BC.$



4

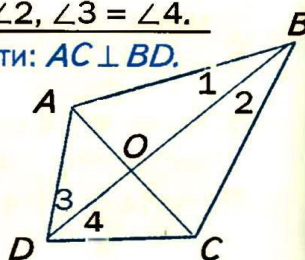
$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4.$

Довести:  $\triangle ABO = \triangle DCO.$



$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4.$

Довести:  $AC \perp BD.$





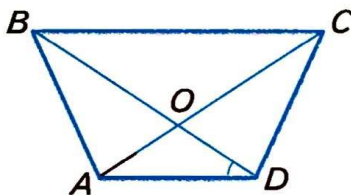
### ● Тестові завдання 4

- |  |  |
|--|--|
| 1. Периметр рівнобедреного трикутника з основою 6 см і бічною стороною 5 см дорівнює:  | а) 17 см;      б) 16 см;<br>в) 11 см;      г) 30 см.   |
| 2. Один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює $100^\circ$ . Обчисліть інші кути трикутника.   | а) $100^\circ$ і $60^\circ$ ; б) $80^\circ$ і $80^\circ$ ;<br>в) $40^\circ$ і $40^\circ$ ;<br>г) $100^\circ$ і $160^\circ$ .               |
| 3. Кут при вершині $B$ рівнобедреного $\triangle ABC$ ( $AB = BC$ ) дорівнює $80^\circ$ . Обчисліть кут між бічною стороною і медіаною, проведеною з вершини $B$ . | а) $50^\circ$ ;      б) $40^\circ$ ;<br>в) $60^\circ$ ;      г) $25^\circ$ .   |
| 4. Кут при основі рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює:   | а) $45^\circ$ ;      б) $60^\circ$ ;<br>в) $30^\circ$ ;      г) $90^\circ$ .   |
| 5. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 20 см, один з кутів $30^\circ$ . Довжина меншого катета дорівнює:   | а) 20 см;      б) 5 см;<br>в) 10 см;      г) 15 см.  |
| 6. Кути трикутника пропорційні числам 4, 5 і 9. Даний трикутник:   | а) гострокутний;<br>б) прямокутний;<br>в) тупокутний;<br>г) рівнобедрений.   |
| 7. Діагональ $AC$ прямокутника $ABCD$ розбиває його на два трикутники. Яке з тверджень хибне?  | а) $\triangle ABC = \triangle CDA$ ;<br>б) $\angle BAC = \angle ACD$ ;<br>в) $\angle ACB = \angle ACD$ ;<br>г) $\angle ABC = \angle ADC$ . |
| 8. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а прилеглий кут $60^\circ$ . Гіпотенуза трикутника дорівнює:  | а) 10 см;      б) 5 см;<br>в) 2,5 см;      г) 20 см.   |
| 9. У $\triangle ABC$ $\angle A = 50^\circ$ , $\angle B = 70^\circ$ . Який знак слід поставити замість*: $AB * BC$ ?  | а) $<$ ;      б) $=$ ;<br>в) $\leq$ ;      г) $>$ .  |
| 10. Один з кутів прямокутного трикутника має $60^\circ$ , а сума найменшої і найбільшої його сторін дорівнює 6 см. Знайдіть довжину гіпотенузи.                    | а) 7 см;      б) 2 см;<br>в) 4 см;      г) 1 см.   |



## ● Типові задачі для контрольної роботи

- 1°. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 112 см, а основа 34 см. Знайдіть бічну сторону.
- 2°. Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.
- 3°. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 17 см, а периметр 54 см.
- 4°. Трикутники  $ABC$  і  $KPH$  рівносторонні й  $AB = KP$ . Знайдіть  $KH$ , якщо  $BC = 5$  см.
- 5°. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо його кут при вершині втричі більший від кута при основі.
- 6°. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 73 см. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо його бічна сторона на 7 см менша від основи.
- 7°. Доведіть, що в рівносторонньому трикутнику всі медіани рівні.
- 8°. Доведіть, що два прямокутні трикутники рівні, якщо катети одного відповідно дорівнюють катетам другого.
- 9°.  $BM$  і  $B_1M_1$  – відповідно медіани трикутників  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ .  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  $BM = B_1M_1$ . Доведіть, що  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .
- 10°. Знайдіть за малюнком 199 міру кута  $COD$ , якщо  $AB = CD$ ,  $BD = AC$ ,  $\angle BDA = 35^\circ$ .



■ Мал. 199

## ● Запитання і завдання для самоконтролю

1. Який трикутник називають рівнобедреним?
2. Як називають сторони рівнобедреного трикутника?
3. Сформулюйте властивості рівнобедреного трикутника.
4. Який трикутник називають рівностороннім?
5. Як співвідносяться поняття *трикутники* і *рівнобедрені трикутники*?
6. Сформулюйте третю ознаку рівності трикутників.
7. Сформулюйте першу і другу ознаки рівності трикутників.
8. Як ви розумієте вислів: *трикутник визначається трьома його сторонами*?
9. Якими елементами визначається трикутник?
10. Як слід розуміти, що *трикутник — фігура жорстка*?
11. Сформулюйте означення прямокутного трикутника.
12. Як називають сторони прямокутного трикутника?
13. Сформулюйте і доведіть ознаки рівності прямокутних трикутників.
14. Що таке перпендикуляр, похила і проекція похилої?
15. Що таке відстань від точки до прямої?
16. Що таке відстань між фігурами?
17. Чи правильно, що в трикутнику проти меншої сторони лежить менший кут, а проти меншого кута — менша сторона?
18. Сформулюйте нерівності трикутника  $XYZ$ .
19. Що означає вислів: *точка  $B$  лежить між точками  $A$  і  $C$* ?
20. Як пов'язані між собою відстані між точками  $A$ ,  $B$  і  $C$ , якщо  $B$  лежить між  $A$  і  $C$ ?
21. Сформулюйте властивості відстаней між довільними точками  $A$ ,  $B$  і  $C$ .



## Головне в розділі 3

**Трикутник** — замкнена ламана із трьох ланок. Або частина площини, обмежена такою ламаною. Кожний трикутник має три сторони, три вершини і три кути. Сума довжин сторін трикутника — його *периметр*.

**Сума кутів трикутника дорівнює  $180^\circ$ .**

Важливу роль у геометрії відіграють ознаки рівності трикутників. Дві фігури називаються рівними, якщо їх можна сумістити. Якщо  $\triangle ABC = \triangle KPT$ , то  $AB = KP$ ,  $BC = PT$ ,  $CA = TK$ ,  $\angle A = \angle K$ ,  $\angle B = \angle P$ ,  $\angle C = \angle T$ .

*Три ознаки рівності трикутників*

- Два трикутники рівні, якщо: дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють двом сторонам і куту між ними другого трикутника ( I ); або якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють стороні і прилеглим до неї кутам другого ( II ); або якщо три сторони одного трикутника дорівнюють трьом сторонам другого ( III ).

Трикутник називається *рівнобедреним*, якщо має дві рівні сторони. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а третю — його *основою*.

**У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.**

**Якщо трикутник має два рівні кути, то він рівнобедрений.**

Якщо всі сторони трикутника рівні, його називають *рівностороннім* трикутником. Кожний кут рівностороннього трикутника дорівнює  $60^\circ$ .

Залежно від кутів трикутники поділяють на *гострокутні*, *прямокутні* і *тупокутні*. Сторону прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута, називають *гіпотенузою*, а дві інші — *катетами*.

**Кожна сторона трикутника менша за суму двох інших його сторін і більша за їх різницю. Якби не були три точки площини  $A$ ,  $B$  і  $C$ , завжди  $AB + BC \geq AC$ .**

**У кожному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута — більша сторона.**



## Розділ

# КОЛО І КРУГ. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ



У цьому розділі ви розширите і поглибите свої знання про коло і круг, набуті в попередніх класах, дізнаєтеся про взаємні розміщення на площині прямої і кола, двох кіл, про властивості **дотичної до кола, дотичних кіл**, про **кола вписані й описані навколо трикутника**. А ще зрозумієте, що таке **геометричне місце точок**, навчитеся виконувати основні геометричні побудови і розв'язувати складніші задачі на побудову циркулем і лінійкою.

- КОЛО І КРУГ
- ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК
- КОЛО І ТРИКУТНИК
- ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ
- ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

*Круг — перша  
найпростіша  
і найдосконаліша  
фігура.*

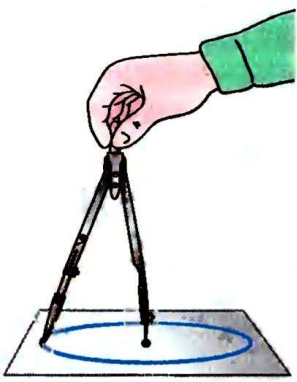
*Прокл*

# § 17. Коло і круг

**Коло** — це фігура, що складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Цю точку називають *центром кола*.



■ Мал. 200



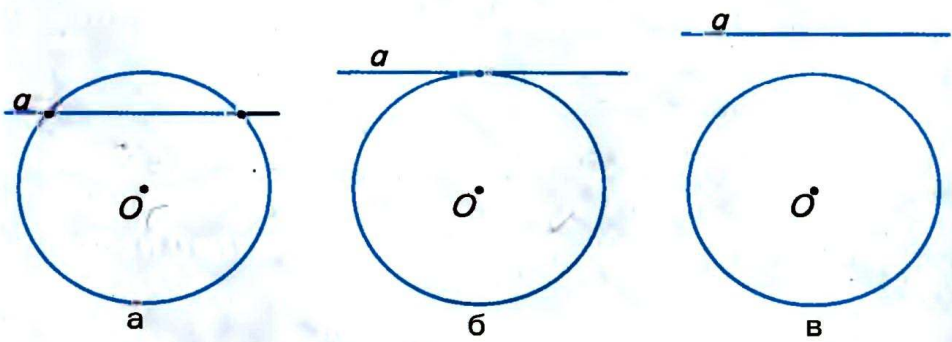
■ Мал. 201

Відрізок, що сполучає будь-яку точку кола з його центром, називають *радіусом*. Відрізок, що сполучає дві довільні точки кола, називають *хордою* кола. Хорда, що проходить через центр кола, називається *діаметром* (мал. 200). Кожний діаметр кола складається з двох радіусів, тому його довжина вдвічі більша від довжини радіуса. Якщо хорда не проходить через центр кола, її довжина менша від довжини діаметра. (Чому?)

Коло на папері зображають за допомогою циркуля. Вважається, що з даного центра на площині можна описати тільки одне коло даного радіуса (мал. 201).

Пряма і коло можуть мати дві спільні точки (мал. 202, а), одну спільну точку (мал. 202, б) або не мати жодної (мал. 202, в).

Пряма, що має з колом дві спільні точки, називається *січною*.



■ Мал. 202

Пряма, що має з колом тільки одну спільну точку, називається *дотичною* до кола. Їх спільну точку називають *точкою дотику*. (Йдеться про фігури однієї площини.) Точка дотику лежить на колі, тому дотична віддалена від центра кола на відстань, що дорівнює довжині радіуса. Оскільки всі інші точки дотичної лежать поза колом, відстані від них до центра кола більші від довжини радіуса. З цього випливає, що

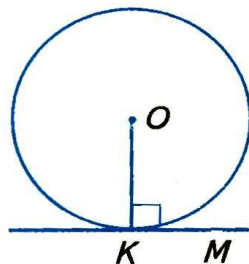


**дотична до кола перпендикулярна до його радіуса, проведеного в точку дотику.**

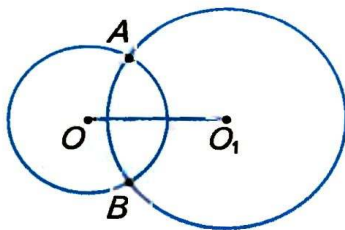
Щоб через дану на колі точку  $K$  провести дотичну до цього кола, треба провести радіус  $OK$ , потім — пряму  $KM$ , перпендикулярну до цього радіуса (мал. 203).

Якщо два різні кола мають дві спільні точки, то говорять, що дані кола *перетинаються* в цих точках. Точки перетину двох кіл лежать по різні боки від прямої, яка проходить через центри цих кіл. На малюнку 204 зображено кола з центрами  $O$  і  $O_1$ , що перетинаються в точках  $A$  і  $B$ .

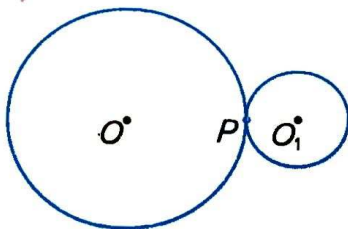
Якщо два кола мають тільки одну спільну точку, говорять, що вони *дотикаються* в цій точці. Дотик двох кіл може бути зовнішнім (мал. 205) або внутрішнім (мал. 206). В обох випадках точка дотику і центри кіл лежать на одній прямій.



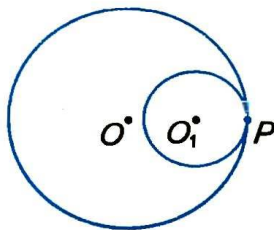
■ Мал. 203



■ Мал. 204

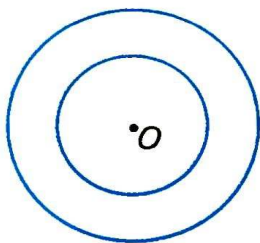


■ Мал. 205

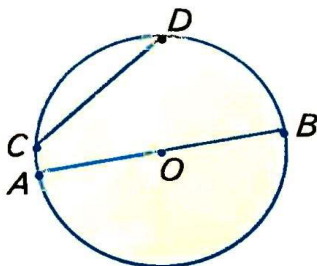


■ Мал. 206

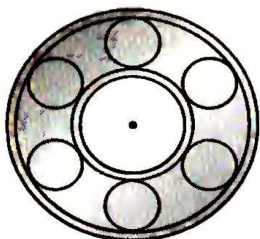




■ Мал. 207



■ Мал. 208



■ Мал. 209

Два кола однієї площини, які мають спільний центр, називають *концентричними колами* (мал. 207).

Звичайно кола креслять, користуючись циркулем. Але іноді зручніше це робити за допомогою спеціальних шаблонів з вирізаними кругами різних радіусів.

Коло ділить площину на дві частини (області). Об'єднання кола з його внутрішньою областю називається *кругом*. Межа круга — коло. *Центром, радіусом, діаметром, хордою круга* називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, що є межею даного круга (мал. 208).

Форму кола має обруч, форму круга — дно відра, видимий диск Сонця тощо. Колесо на рейці — матеріальна модель кола, що дотикається до прямої. На схематичному зображенні підшипника (мал. 209) є кілька дотичних кіл.

Як вам відомо з попередніх класів, довжина  $C$  кола і площа  $S$  круга виражаються через радіус  $r$  такими формулами:

$$C = 2\pi r, \quad S = \pi r^2.$$

Строгі доведення цих формул розглядатимуться у старших класах.

## Для допитливих

Слово *коло* давньоукраїнське. Воно одного кореня зі словами *колода, колоти, колотити, сколоти*. Сколотами називали праукраїнців, які жили на землях сучасної України за скіфів і ще раніше. А ще слово *коло* в українській мові служить прийменником, як і *навколо, довкола*. Якщо до забитого в землю кілка (кола) прив'язували тварину, то вона ходила *довкола, навколо*.

Раніше *круг* також називали *колом*, наприклад, співали: «Ой зійди, зійди, ясен місяцю, як млинове»

коло». Хоч і повний місяць, і камінь у млині мають форму круга, а не кола. Нерідко коло називали також колесом; дехто вважає, що перші колеса навчилися робити майстрові люди в наших краях.

У геометрії коло відіграє важливу роль. Існує навіть окрема частина геометрії — *геометрія кіл*, в якій досліджуються важливі і цікаві властивості геометричних фігур, пов'язаних із колом.



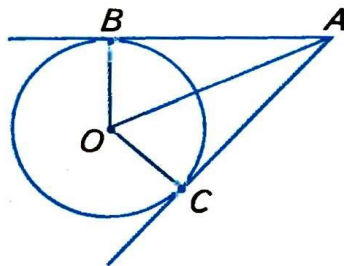
### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке коло? Центр кола? Радіус? Діаметр? Хорда?
2. Що таке круг? Чим відрізняється круг від кола?
3. Скільки спільних точок можуть мати:
  - а) пряма і коло;
  - б) два кола?
4. Сформулюйте означення дотичної до кола. Яку властивість має дотична до кола?
5. Які кола називають дотичними? Що таке точка дотику?
6. Як можуть дотикатися два кола?
5. Які кола називають концентричними?

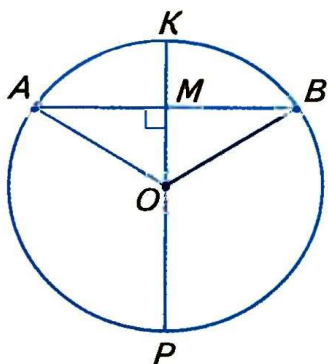
### Виконаємо разом

**1** Доведіть, що точки дотику кола до сторін кута рівновіддалені від його вершини.

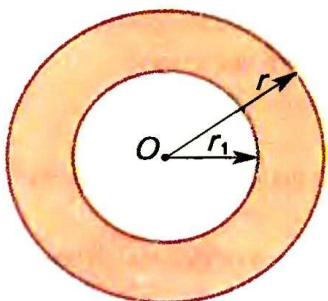
- Нехай коло з центром  $O$  дотикається до сторін кута  $A$  в точках  $B$  і  $C$  (мал. 210). Доведемо, що  $AB = AC$ . Радіуси  $OB$  і  $OC$ , проведені в точки дотику, перпендикулярні до відповідних дотичних і рівні. Тому прямокутні трикутники  $ABO$  і  $ACO$  рівні за гіпотенузою і катетом. Отже,  $AB = AC$ .



■ Мал. 210



■ Мал. 211



■ Мал. 212

**2** Доведіть, що діаметр кола, проведений через середину хорди, відмінної від діаметра, перпендикулярний до хорди.

■ Нехай  $AB$  — хорда кола, яка не проходить через центр  $O$  кола, а  $KP$  — діаметр кола, який проходить через середину  $M$  хорди  $AB$  (мал. 211). Трикутник  $OAB$  рівнобедрений, бо  $OA = OB$ . А медіана  $OM$  рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, є також висотою трикутника. Тому  $OM \perp AB$ , а отже, і  $KP \perp AB$ .

**3** Знайдіть площу кільця, обмеженого двома концентричними колами радіусів  $r$  і  $r_1$  (мал. 212).

■ Площа  $S$  кільця дорівнює різниці площ кругів радіусів  $r$  і  $r_1$ :

$$S = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi (r^2 - r_1^2).$$

### ● Задачі і вправи

#### ■ ВИКОНАЙТЕ УСНО

- 497.** Скільки різних кіл можна провести через:  
а) одну точку; б) дві точки; в) три точки?
- 498.** Скільки спільних точок можуть мати:  
а) коло і пряма; б) два кола;  
в) коло і трикутник; г) коло і площина?
- 499.** Дано коло з центром  $O$ . Скільки спільних точок має коло з:  
а) прямою  $OA$ ; б) променем  $OM$ ?
- 500.** Скільки різних дотичних до даного кола можна провести через дану точку, що лежить:  
а) на колі; б) поза колом; в) усередині кола?
- 501.** Скільки пар дотичних кіл є на малюнку 209? А скільки пар концентричних кіл?



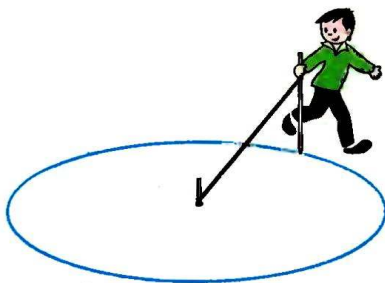
## А

- 502.** Накресліть коло. Проведіть його радіус, діаметр, хорду.
- 503.** Доведіть, що діаметр — найбільша з хорд даного кола.
- 504.** Дано коло і відрізок, менший від діаметра. Проведіть хорду, довжина якої дорівнює довжині даного відрізка.
- 505.** Знайдіть відстань між центрами кіл радіусів 5 м і 7 м, які дотикаються:  
а) зовнішнім способом; б) внутрішнім способом.
- 506.** Чи мають спільні точки два кола, радіуси яких 3 см і 4 см, якщо відстань між їх центрами дорівнює 5 см?
- 507.**  $AB$  і  $CD$  — рівні хорди кола з центром  $O$ . Доведіть, що  $\triangle ABO = \triangle CDO$ .
- 508.** Кола з центрами  $O$  і  $O_1$  перетинаються в точках  $A$  і  $B$ . Доведіть, що: 1)  $\triangle OAO_1 = \triangle BOO_1$ ; 2)  $\triangle OAB$  і  $\triangle O_1AB$  — рівнобедрені.
- 509.** Кола з центрами  $O$  і  $O_1$  перетинаються в точках  $A$  і  $B$ , причому кожне з них проходить через центр другого. Знайдіть  $\angle AOB$  і  $\angle OAO_1$ .

## Б

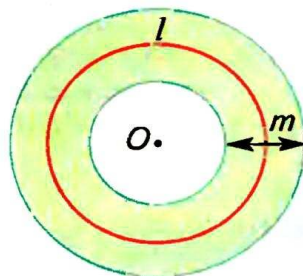
- 510.** Кожне з трьох кіл проходить через центри двох інших. Доведіть, що їх центри — вершини рівностороннього трикутника.
- 511.** Доведіть, що рівні хорди кола рівновіддалені від центра.
- 512\*.** Як побудувати дотичну до даного кола:  
а) паралельну даній прямій;  
б) перпендикулярну до даної прямої?

- 513.** Садівник описує коло для клумби за допомогою кілочків і мотузки (мал. 213). Чому описана таким способом фігура — коло? Чи вийде коло, якщо мотузка намотуватиметься на кілочок?



■ Мал. 213

- 514.** Знайдіть радіуси двох дотичних кіл, якщо вони відносяться як  $1 : 3$ , а відстань між центрами кіл дорівнює  $16$  см. Розгляньте два випадки.
- 515.** З точки  $A$  до кола з центром  $O$  проведено дотичні  $AB$  і  $AC$ . Доведіть, що  $AO$  — бісектриса кута  $BAC$ .
- 516.** З точки  $A$  до кола з центром  $O$  проведено дві дотичні, кут між якими дорівнює  $60^\circ$ . Знайдіть радіус кола, якщо  $OA = 10$  см.
- 517.** З точки  $A$  до кола проведено дві дотичні. Знайдіть кут між ними, якщо відстань від  $A$  до точки дотику дорівнює радіусу кола.
- 518.** Коло дотикається до сторін кута  $A$  в точках  $B$  і  $C$  так, що  $AB = BC$ . Знайдіть міру кута  $A$ .
- 519.** Три рівні кола з центрами  $O_1, O_2, O_3$  попарно дотикаються одне до одного в точках  $K, P$  і  $T$ . Доведіть, що:  
1)  $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$ ; 2)  $KP = PT = TK$ .
- 520.** З центра кола провели три промені, які розбили дане коло на три дуги, довжина кожної з яких дорівнює  $3$  см. Знайдіть кути між цими променями і радіус кола.
- 521.** Доведіть, що площа кільця, обмеженого двома концентричними колами радіусів  $r$  і  $r_1$ , дорівнює середньому арифметичному довжин цих кіл, помноженому на різницю радіусів, тобто  $S = lm$  (мал. 214).



■ Мал. 214

### ■ ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ■

- 522.** Відрізок завдовжки  $a$  поділений на 3 рівні частини. Яку частину  $a$  становить відстань між серединами першої і третьої частин?
- 523.** Знайдіть довжину бісектриси трикутника з периметром  $40$  см, якщо вона розбиває його на два трикутники з периметрами  $20$  см і  $30$  см.
- 524.** Знайдіть середнє арифметичне сторін трикутника, периметр якого дорівнює  $36$  см.
- 525\*.** Знайдіть площу квадрата  $ABCD$ , якщо  $AC = 10$  см.

## § 18. Геометричне місце точок

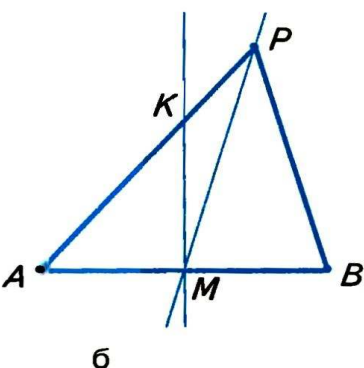
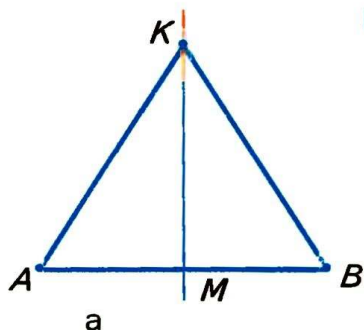
Щоб розв'язувати складніші задачі на побудову, потрібно знати, що таке геометричне місце точок.

*Геометричним місцем точок (ГМТ)* називають фігуру, яка складається з усіх точок, що мають певну властивість.

Розглянемо кілька геометричних місць точок площини.

Коло — геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки.

Круг радіуса  $r$  — геометричне місце точок, відстані від яких до даної точки не перевищують  $r$ .



■ Мал. 215

**ЗАДАЧА 1.** Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців даного відрізка.

**РОЗВ'ЯЗАННЯ:** Нехай дано відрізок  $AB$ . Його середина  $M$  рівновіддалена від  $A$  і  $B$  (мал. 215, а). Проведемо пряму  $MK$ , перпендикулярну до  $AB$ . Кожна її точка  $K$ , відмінна від  $M$ , також рівновіддалена від  $A$  і  $B$ , бо  $\triangle KAM = \triangle KBM$ . Отже,  $KA = KB$ .

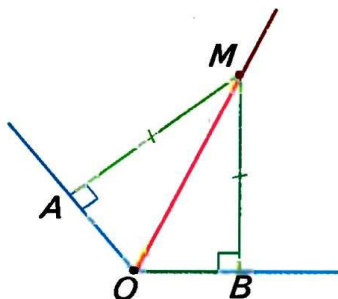
Якщо ж точка  $P$  не лежить на прямій  $MK$ , вона не може бути рівновіддаленою від  $A$  і  $B$  (мал. 215, б). Справді, з припущення, що  $PA = PB$ , випливає перпендикулярність прямих  $PM$  і  $AB$ , бо медіана  $PM$  рівнобедреного трикутника  $PAB$  є його висотою. Тоді сума двох прямих кутів  $PMB$  і  $KMA$  не дорівнювала б  $180^\circ$ . Цього не може бути. Отже, поза прямою  $MK$  не існує точки, рівновіддаленої від  $A$  і  $B$ .

Таким чином, кожна точка прямої  $MK$  рівновіддалена від  $A$  і  $B$ , а точка, яка не лежить на  $MK$ , не може бути рівновіддаленою від  $A$  і  $B$ .



Пряму, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього, називають *серединним перпендикуляром* даного відрізка. З попередніх міркувань випливає, що

**!** геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є його серединний перпендикуляр.



■ Мал. 216

**ЗАДАЧА 2.** Знайдіть геометричне місце точок, які лежать всередині кута і рівновіддалені від його сторін.

- 1) Нехай  $M$  — точка кута, рівновіддалена від його сторін  $OA$  і  $OB$  (мал. 216). Перпендикуляри  $MA$  і  $MB$ , опущені з  $M$  на сторони кута, рівні. Тому  $\triangle MOA = \triangle MOB$  за катетом і гіпотенузою. Отже,  $\angle AOM = \angle BOM$ , тобто точка  $M$  належить бісектрисі даного кута  $AOB$ .
- 2) Якщо  $M$  — довільна точка бісектриси кута  $AOB$ , а  $MA$  і  $MB$  — перпендикуляри на  $OA$  і  $OB$  (див. мал. 216), то  $\triangle OAM = \triangle OBM$  (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому  $MA = MB$ , тобто точка  $M$  рівновіддалена від сторін даного кута.

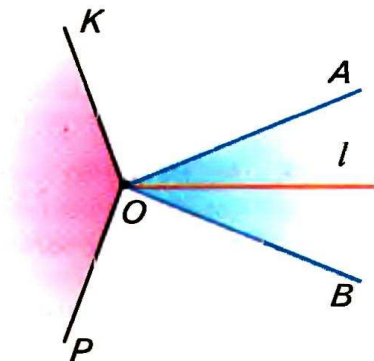
**!** Геометричним місцем точок кута, рівновіддалених від його сторін, є бісектриса цього кута.

#### ■ ПРИМІТКА.

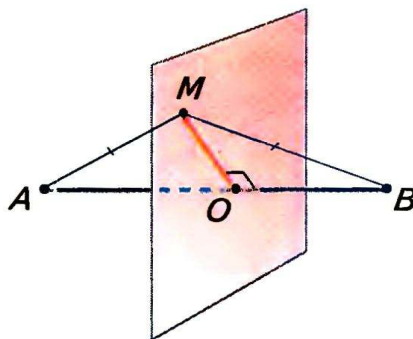
Тут мають на увазі кути, менші від розгорнутого.

#### ■ Для допитливих

Чи правильно говорити, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута, є бісектриса цього кута? Ні. Коли в планіметрії говорять про геометричне місце точок, не уточнюючи, про які саме точки йдеться, то мають на увазі точки площини, якій належить дана фігура. За такої умови геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута, є об'єднання бісектриси  $l$  даного кута і всіх точок деякого іншого кута,



■ Мал. 217



■ Мал. 218

показаного на малюнку 217. Адже кожна точка кута  $KOP$  також рівновіддалена від сторін даного кута  $AOB$ . Йдеться про кути, менші від розгорнутого.

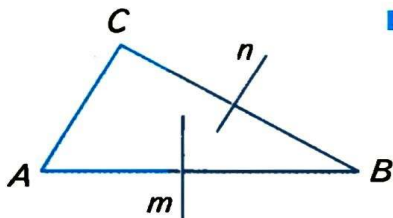
Говорячи, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр цього відрізка, мають на увазі, що йдеться про геометричне місце точок **площини**, в якій лежить відрізок. А геометричним місцем точок **простору**, рівновіддалених від кінців відрізка, є деяка площина (мал. 218). Подумайте, як розташована ця площина відносно даного відрізка.

Геометричні місця точок простору розглядають у старших класах.

## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке геометричне місце точок?  
Наведіть приклади.
2. Що таке серединний перпендикуляр даного відрізка?
3. Що є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка?
4. Що є геометричним місцем точок кута, рівновіддалених від його сторін?

## Виконаємо разом



■ Мал. 219

■ Доведіть, що серединні перпендикуляри двох сторін трикутника перетинаються.

■ **ДОВЕДЕННЯ.** Нехай  $n$  і  $m$  — серединні перпендикуляри сторін  $BC$  і  $AB$  трикутника  $ABC$  (мал. 219). Доведемо, що вони не можуть бути паралельними один одному. Доводитимемо від супротивного. Припу-

стимо, що  $n \parallel m$ . Тоді пряма, перпендикулярна до  $n$ , має бути перпендикулярною і до  $m$ . Отже,  $BC \perp n$  і  $BC \perp m$ . Але за умовою і  $AB \perp m$ . А дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні. Отже, з припущення, що  $n \parallel m$ , випливає паралельність сторін  $AB$  і  $BC$  трикутника. Цього не може бути. Тому прямі  $n$  і  $m$  не можуть бути паралельними. Вони перетинаються.

## Задачі і вправи

### ВИКОНАЙТЕ УСНО

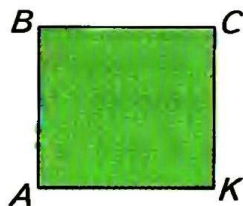
526. Чи правильно, що кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута?

527. Чи правильно, що бісектриса кута є геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін цього кута?

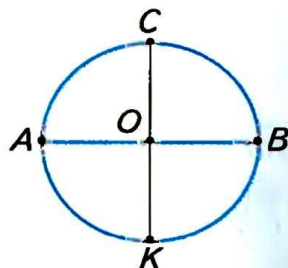
528. Чим є геометричне місце точок, які лежать на відстані 2 м від деякої точки?

529. Чим є геометричне місце точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих?

530.  $ABCK$  — квадрат (мал. 220). Чим є геометричне місце точок, рівновіддалених від точок  $A$  і  $C$ ? А від точок  $B$  і  $K$ ?



■ Мал. 220



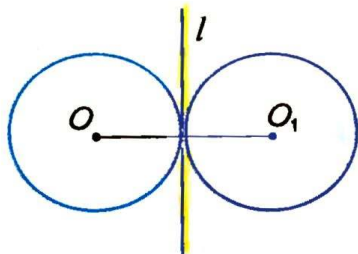
■ Мал. 221



**531.**  $AB$  і  $CK$  — перпендикулярні діаметри одного кола (мал. 221). Чим є серединний перпендикуляр діаметра  $AB$ ?

**532.** Серединний перпендикуляр відрізка  $AB$  проходить через точку  $C$ . Чи правильно, що трикутник  $ABC$  рівнобедрений?

**533.** Два рівні кола з центрами  $O$  і  $O_1$  дотикаються зовнішнім способом (мал. 222). Чи правильно, що їх спільна дотична, проведена через точку дотику, є серединним перпендикуляром відрізка  $OO_1$ ?



■ Мал. 222

**A**

**534.** Дано точки  $A$  і  $B$ . Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від  $A$  і  $B$ .

**535.** Дано прямий кут. Побудуйте геометричне місце точок, які лежать всередині цього кута і рівновіддалені від його сторін.

**536.** Побудуйте геометричне місце точок, які віддалені від даної точки на дану відстань  $a$ .

**537.** Чим є геометричне місце точок, які лежать на даній відстані від даної прямої?

**538.** Дано дві паралельні прямі. Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від цих прямих.

**539.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що проходять через дві дані точки.

**540.** Знайдіть геометричне місце центрів рівних кіл, які дотикаються до даної прямої.

**541.** Знайдіть геометричне місце центрів рівних кіл, які проходять через дану точку.

**542.** Дано гострий кут. Побудуйте геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до сторін цього кута.

- 543.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіуса  $2r$ , які дотикаються до кола радіуса: а)  $r$ ; б)  $3r$ .
- 544.** Дано коло радіуса 6 см. Чим є ГМТ, які ділять усі його діаметри у відношенні  $1 : 2$ ?
- 545.** Чим є геометричне місце вершин прямих кутів, обидві сторони яких дотикаються до даного кола?
- 546.** Дано дві паралельні прямі  $a$  і  $b$ . Побудуйте ГМТ, які лежать між даними прямими і відстані від яких до  $a$  і  $b$  відносяться як  $1 : 2$ .
- 547.** Дано дві паралельні прямі. Чим є ГМТ, відстані від яких до даних прямих відносяться як  $2 : 3$ ?
- 548.** Дано відрізок  $AB$  завдовжки 10 см. Чим є ГМТ, які віддалені від одного з кінців на відстань 6 см, а від другого — на 8 см?
- 549.** Дано прямокутник зі сторонами 3 см і 5 см. Чим є ГМТ, які віддалені від якої-небудь із його найближчих сторін на відстань 1 см і лежать:  
а) в його внутрішній області; б) поза прямокутником?
- 550.** Доведіть, що точка перетину двох бісектрис трикутника рівновіддалена від усіх сторін трикутника.

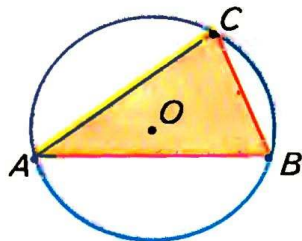
**ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ**

- 551.** Знайдіть міру кута, який у 3 рази більший за суміжний з ним кут.
- 552.** Чи може висота трикутника бути в 100 разів більшою за суму двох інших його висот? А в 100 разів меншою за суму двох інших його висот?
- 553.** У якому трикутнику бісектриси кутів перетинаються під кутом  $45^\circ$ ?
- 554.** Висота якого рівнобедреного трикутника ділить його на два рівнобедрені трикутники?
- 555.** Знайдіть міри двох рівних тупих кутів, одна сторона яких спільна, а дві інші перпендикулярні.

## § 19. Коло і трикутник

**Коло і трикутник** можуть не мати спільних точок або мати 1, 2, 3, 4, 5, 6 спільних точок (відповідні малюнки виконайте самостійно). Заслужовують на увагу випадки, коли коло проходить через усі три вершини трикутника або коли воно дотикається до всіх сторін трикутника. Розглянемо такі випадки детальніше.

- **1. Описане коло.** Коло називається *описаним навколо трикутника*, якщо воно проходить через усі вершини трикутника (мал. 223).

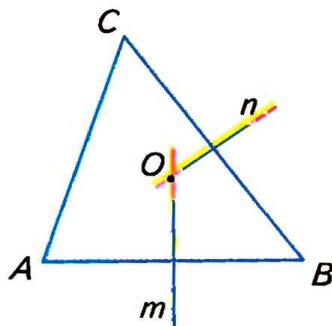


■ Мал. 223

**ТЕОРЕМА 18** Навколо кожного трикутника можна описати лише одне коло. Його центром є точка перетину серединних перпендикулярів двох сторін трикутника.

■ **ДОВЕДЕННЯ.**

Нехай  $ABC$  — довільний трикутник (мал. 224). Знайдемо точку, рівновіддалену від вершин  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Геометричне місце точок, рівновіддалених від  $A$  і  $B$ , — серединний перпендикуляр  $m$  відрізка  $AB$ ; геометричне місце точок, рівновіддалених від  $B$  і  $C$ , — серединний перпендикуляр  $n$  відрізка  $BC$ . Ці два серединні перпендикуляри не можуть бути паралельними, вони перетинаються в деякій точці  $O$ . А вона рівновіддалена від  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Отже,  $OA = OB = OC$ , тому  $O$  — центр кола, описаного навколо  $ABC$ .



■ Мал. 224

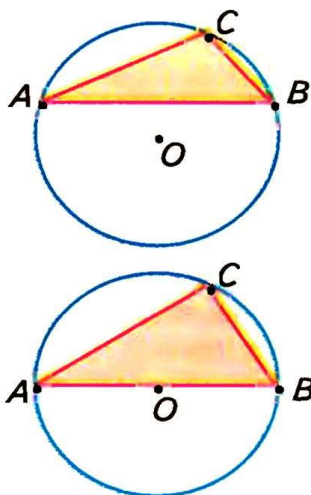
Для кожного відрізка  $AB$  існує серединний перпендикуляр  $m$ , і лише один, а для  $BC$  — серединний перпендикуляр  $n$ , і тільки один. І точка їх перетину завжди існує, і тільки одна. Отже, навколо кожного трикутника можна описати коло, і тільки одне.



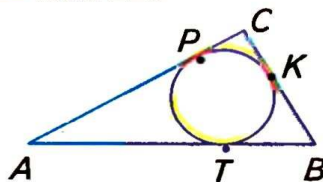
## ■ НАСЛІДКИ.

Серединні перпендикуляри усіх трьох сторін довільного трикутника проходять через одну й ту саму точку.

Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести коло, і лише одне.



■ Мал. 225



■ Мал. 226

З доведеної теореми випливає спосіб побудови кола, описаного навколо трикутника. Щоб описати навколо трикутника  $ABC$  коло, досить:

- 1) побудувати серединні перпендикуляри двох сторін даного трикутника;
- 2) визначити точку  $O$ , в якій ці серединні перпендикуляри перетинаються;
- 3) з центра  $O$  провести коло радіусом  $OA$ .

Центр кола, описаного навколо трикутника, може лежати у внутрішній або зовнішній області даного трикутника або на його стороні (мал. 225).

- **2. Вписане коло.** Коло називається *вписаним у трикутник*, якщо воно дотикається до всіх сторін трикутника (мал. 226). Центр кола, вписаного в трикутник, лежить у внутрішній області цього трикутника.

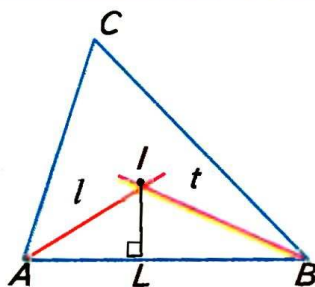
**ТЕОРЕМА 19**

У кожний трикутник можна вписати лише одне коло. Його центром є точка перетину двох бісектрис трикутника.

■ **ДОВЕДЕННЯ.**

Нехай  $ABC$  — довільний трикутник. Визначимо точку  $O$ , рівновіддалену від усіх його сторін (мал. 227). Геометричне місце точок, які лежать всередині кута  $A$  і рівновіддалені від сторін

$AB$  і  $AC$ , — бісектриса  $l$  кута  $A$ . Геометричне місце точок, які рівновіддалені від сторін  $AB$  і  $BC$  і лежать всередині кута  $B$ , — бісектриса  $t$  кута  $B$ . Ці дві бісектриси обов'язково перетинаються (доведіть це!). Точка  $I$ , в якій перетинаються бісектриси  $l$  і  $t$ , рівновіддалена від усіх трьох сторін даного трикутника. Отже, точка  $I$  — центр кола, вписаного в трикутник  $ABC$ .



■ Мал. 227

### ■ НАСЛІДОК.

У кожному трикутнику всі три бісектриси перетинаються в одній точці.

З доведеної теореми випливає спосіб побудови кола, вписаного в трикутник. Щоб у даний трикутник вписати коло, досить:

- 1) провести дві його бісектриси;
- 2) з точки їх перетину  $I$  опустити перпендикуляр  $IL$  на довільну сторону трикутника;
- 3) із центра  $I$  радіусом  $IL$  описати коло. Воно дотикатиметься до кожної сторони трикутника, отже, вписане в даний трикутник.

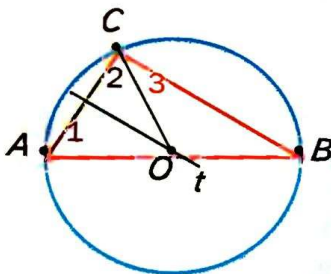
### ■ Для допитливих

**! ТЕОРЕМА 20** Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина його гіпотенузи.

#### ■ ДОВЕДЕННЯ.

Нехай  $ABC$  — довільний трикутник з прямим кутом  $C$ ,  $t$  — серединний перпендикуляр катета  $AC$  і  $t$  перетинає гіпотенузу  $AB$  в точці  $O$  (мал. 228).

Оскільки точка  $O$  лежить на серединному перпендикулярі відрізка  $AC$ , то  $OA = OC$  і  $\angle 1 = \angle 2$ . Тоді  $\angle B = 90^\circ - \angle 1$  і  $\angle 3 = 90^\circ - \angle 1$ , тобто  $\angle B = \angle 3$  і  $OB = OC$ .  $OA = OC = OB$ , тобто точка  $O$  —



■ Мал. 228

середина гіпотенузи  $AB$ , рівновіддалена від усіх вершин трикутника. Отже, коло з центром  $O$  і радіусом  $OA$  проходить через усі вершини даного трикутника.

#### ■ НАСЛІДОК.

Діаметр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює його гіпотенузі.



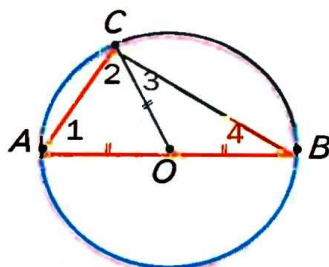
**ТЕОРЕМА 21** З будь-якої точки кола його діаметр, що не виходить з цієї точки, видно під прямим кутом.

#### ■ ДОВЕДЕННЯ.

Нехай  $AB$  — довільний діаметр кола з центром  $O$ , а  $C$  — довільна точка кола, відмінна від  $A$  і  $B$  (мал. 229). Покажемо, що  $\angle ACB = 90^\circ$ . Оскільки  $OA = OB = OC$ , то  $\angle 1 = \angle 2$  і  $\angle 3 = \angle 4$ . Тоді  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ , звідки  $\angle C = \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ : 2 = 90^\circ$ .

#### ■ ІНОДІ ГОВОРЯТЬ:

Геометричним місцем точок площини, з яких відрізок  $AB$  видно під прямим кутом, є коло діаметра  $AB$ . Насправді цьому ГМТ точки  $A$  і  $B$  не належать. Докладніше про це дізнаєтесь у старших класах.



■ Мал. 229



### Запитання і завдання для самоконтролю

1. Яке коло називають описаним навколо трикутника?
2. Яке коло називають вписаним у трикутник?
3. Чи навколо кожного трикутника можна описати коло?
4. Чи в кожний трикутник можна вписати коло?
5. Де лежить центр кола, вписаного в трикутник?
6. Де лежить центр кола, описаного навколо трикутника?  
А навколо прямокутного трикутника?



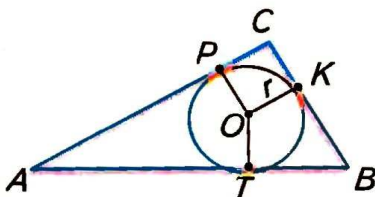
### ● Виконаємо разом

**1** Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника з гіпотенузою 6 см.

■ Діаметр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є його гіпотенузою. Радіус цього кола вдвічі менший: 3 см.

**2** Доведіть, що діаметр кола, вписаного в прямокутний трикутник з катетами  $a$  і  $b$  і гіпотенузою  $c$ , дорівнює  $a + b - c$ .

■ Нехай у  $\triangle ABC$  кут  $C$  прямий, а  $K, P, T$  — точки дотику вписаного в трикутник кола (мал. 230). Оскільки  $AP = AT$  і  $BK = BT$ , то  $AC + BC - AB = PC + CK = 2r$ , або  $2r = a + b - c$ .



■ Мал. 230

### ● Задачі і вправи

#### ■ ВИКОНАЙТЕ УСНО ■

556. Скільки спільних точок можуть мати коло і пряма?
557. Скільки спільних точок можуть мати круг і пряма?
558. Скільки спільних точок мають трикутник і описане навколо нього коло?
559. Скільки спільних точок можуть мати трикутник і коло?
560. Чи через будь-які 4 точки можна провести коло?
561. Чи можна в коло діаметра 1 м вписати трикутник з периметром 8 м? А трикутник з периметром 8 см?

#### ■ А ■

562. Накресліть довільний трикутник і опишіть навколо нього коло.
563. Накресліть довільний трикутник і впишіть у нього коло.
564. Кожна з хорд  $AB$  і  $BC$  дорівнює радіусу кола. Знайдіть кути трикутника  $ABC$ .

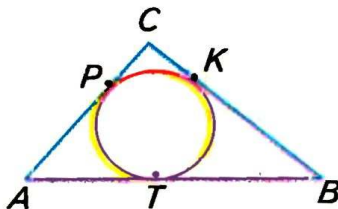
- 565.** Доведіть, що не існує кола, яке б проходило через три точки однієї прямої.
- 566.** Чому два різні кола не можуть мати три спільні точки?
- 567.** Порівняйте довжину кола і периметр вписаного в нього трикутника.
- 568.** Прикиньте, як відносяться радіуси кіл: описаного навколо рівностороннього трикутника і вписаного в нього.
- 569.** Чи можуть дотикатися два кола: вписане в трикутник і описане навколо того самого трикутника?
- 570.** Чи може центр кола, вписаного в трикутник, бути центром кола, описаного навколо того самого трикутника?
- 571.** Покажіть на малюнку, що центр кола, описаного навколо трикутника, може лежати в його внутрішній області, або на його стороні, або поза трикутником.
- 572.** Навколо рівностороннього трикутника описано коло. Під яким кутом з центра цього кола видно сторону трикутника?
- 573.** У рівносторонній трикутник вписано коло. Під яким кутом з центра цього кола видно сторону трикутника?
- 574.** Центр кола  $O$ , описаного навколо рівностороннього трикутника  $ABC$ , сполучено відрізками з вершинами трикутника. Доведіть, що трикутники  $OAB$ ,  $OBC$  і  $OCA$  дорівнюють один одному. Знайдіть кути цих трикутників.

**Б**

- 575.** Трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см прямокутний. Чому дорівнює радіус описаного навколо нього кола?
- 576.** Кожний трикутник, сторони якого пропорційні числам 3, 4 і 5, — прямокутний. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 15 м, 20 м і 25 м.
- 577.** Одне коло вписане в рівносторонній трикутник, друге — описане навколо того самого трикутника. Доведіть, що:
- 1) центри цих кіл збігаються;
  - 2) радіуси кіл відносяться як 1 : 2.

**578.** Вписане в трикутник  $ABC$  коло дотикається до його сторін у точках  $K, P, T$  (мал. 231). Доведіть, що:

- 1)  $AP + CK + BT = AT + BK + CP$ ,
- 2)  $BK = 0,5 (AB + BC - AC)$ .



**579.** Знайдіть радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник зі сторонами 3, 4 і 5.

■ Мал. 231

**580.** Знайдіть периметр прямокутного трикутника, описаного навколо кола радіуса  $r$ , якщо його гіпотенуза дорівнює  $s$ .

**581.** Вписане в прямокутний трикутник  $ABC$  коло дотикається до катетів  $AC$  і  $CB$  в точках  $P$  і  $K$ . Знайдіть довжину ламаної  $KBAP$ , якщо  $AB = 17$  см.

**582.** На сторонах кута  $B$ , що має  $120^\circ$ , відкладено відрізки  $AB = BC = 4$  см. Проведіть коло через точки  $A, B, C$  і знайдіть його радіус.

**583.** Доведіть, що одна з медіан (яка?) розбиває прямокутний трикутник на два рівнобедрені трикутники.

### СПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**584.** Знайдіть довжину кола і площу круга радіуса 8 см.

**585.** Знайдіть площу прямокутника, периметр якого дорівнює 200 м, а одна сторона в півтора рази більша за другу.

**586.**  $\triangle ABC = \triangle MNK$ . Сторони  $\triangle ABC$  відносяться як 2 : 3 : 4. Знайдіть сторони  $\triangle MNK$ , якщо його периметр 45 см.

**587.**  $\triangle ABC = \triangle MNK$ ,  $AC = 17$  см,  $MN - NK = 5$  см. Знайдіть сторони  $\triangle ABC$ , якщо  $P_{\triangle ABC} = 38$  см.

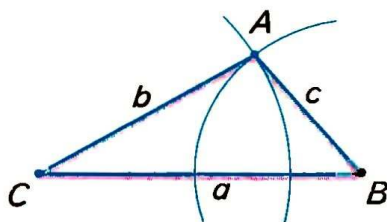
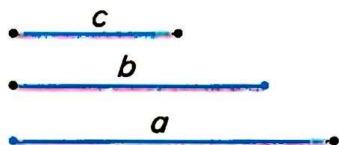
**588.** Сторони трикутника пропорційні числам 7, 5 і 8. Знайдіть периметр трикутника, якщо:

- а) сума найменшої і найбільшої сторін дорівнює 39 см;
- б) різниця найбільшої і найменшої сторін дорівнює 9 см;
- в) найменша сторона на 12 см менша за півпериметр;
- г) найбільша сторона менша за суму двох інших на 8 см.



## § 20. Геометричні побудови

Користуючись лінійкою<sup>1</sup> і циркулем, можна виконувати багато геометричних побудов, тобто креслити геометричні фігури. Розглянемо спочатку, як виконувати найпростіші геометричні побудови.



■ Мал. 232

■ **ЗАДАЧА 1.** Побудуйте трикутник з даними сторонами.

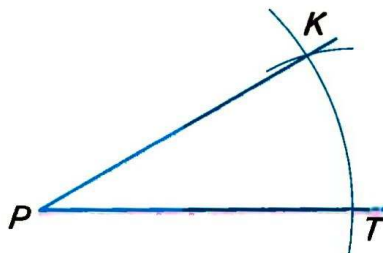
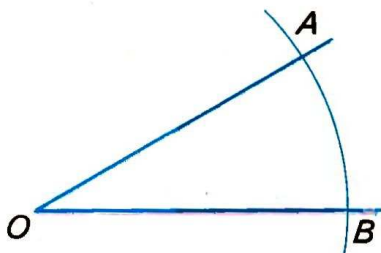
■ **РОЗВ'ЯЗАННЯ.** Нехай дано три відрізки:  $a$ ,  $b$  і  $c$  (мал. 232). Треба побудувати трикутник, сторони якого дорівнювали б цим відрізкам. За допомогою лінійки проводимо довільну пряму, позначаємо на ній довільну точку  $B$  і відкладаємо циркулем на цій самій прямій відрізок  $BC = a$ . Розхилом циркуля, що дорівнює  $c$ , описуємо дугу кола з центром  $B$ . З того самого боку від прямої  $CB$  описуємо дугу кола радіуса  $b$  з центром  $C$ . Точку перетину  $A$  цих дуг сполучаємо відрізками з  $C$  і  $B$ . Трикутник  $ABC$  — той, який вимагалось побудувати, бо його сторони  $BC$ ,  $AC$  і  $AB$  дорівнюють даним відрізкам.

■ **ЗАУВАЖЕННЯ.** Якщо побудовані дуги не перетинаються, трикутник побудувати не можна. Це буває тоді, коли один з даних відрізків більший від суми двох інших або дорівнює цій сумі.

■ **ЗАДАЧА 2.** Побудуйте кут, що дорівнює даному куту.

■ **РОЗВ'ЯЗАННЯ.** Нехай дано кут  $AOB$  і потрібно побудувати кут  $KPT$ , що дорівнює  $\angle AOB$  (мал. 233). Будуємо промінь  $PT$  і дуги рівних радіусів із центрами  $O$  і  $P$ . Нехай одна з цих дуг перетинає сторони кута  $AOB$  у точках  $A$  і  $B$ , а друга — промінь  $PT$  у точці  $T$ . Далі розхилом циркуля, що дорівнює  $AB$ , описуємо третю дугу з центром  $T$ . Якщо вона перетинає другу дугу в точці  $K$ , проводимо

<sup>1</sup> Вважаємо, що лінійка без поділок.

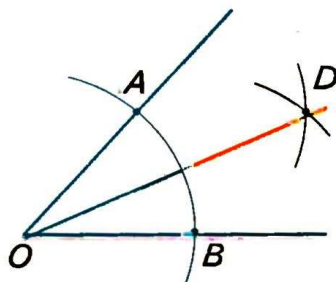


■ Мал. 233

промінь  $PK$ . Кут  $KPT$  — той, який вимагалось побудувати. Адже трикутники  $KPT$  і  $AOB$  рівні (за трьома сторонами), тому  $\angle KPT = \angle AOB$ .

■ **ЗАДАЧА 3.** Побудуйте бісектрису даного кута.

■ **РОЗВ'ЯЗАННЯ.** Нехай  $AOB$  (мал. 234) — даний кут. Довільним розхилом циркуля опишемо дугу з центром  $O$ . Нехай  $A$  і  $B$  — точки перетину цієї дуги з променями  $OA$  і  $OB$ . Із центрів  $A$  і  $B$  опишемо дуги такими самими радіусами. Якщо  $D$  — точка перетину цих дуг, то промінь  $OD$  — бісектриса кута  $AOB$ . Справді,  $\triangle AOD = \triangle BOD$  за трьома сторонами. Тому  $\angle AOD = \angle DOB$ .

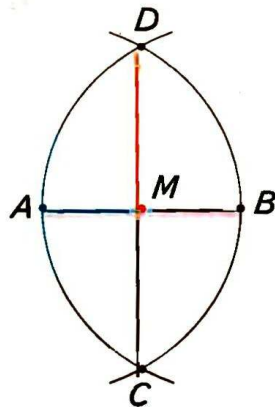


■ Мал. 234

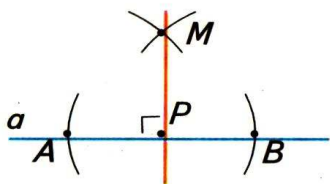
■ **ЗАДАЧА 4.** Поділіть даний відрізок пополам.

■ **РОЗВ'ЯЗАННЯ.** Нехай  $AB$  — даний відрізок (мал. 235). З точок  $A$  і  $B$  радіусом  $AB$  описуємо дуги. Вони перетнуться в деяких точках  $C$  і  $D$ . Пряма  $CD$  точкою  $M$  ділить даний відрізок пополам.

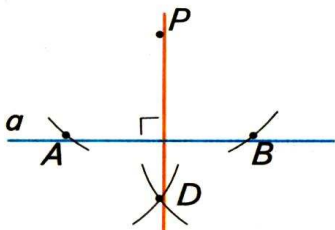
Справді, за трьома сторонами  $\triangle ACD = \triangle BCD$ , тому  $\angle ACM = \angle BCM$ . За першою ознакою  $\triangle ACM = \triangle BCM$ . Отже,  $AM = BM$ .



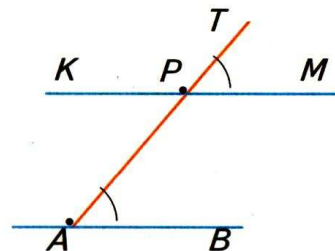
■ Мал. 235



Мал. 236



Мал. 237



Мал. 238

**ЗАДАЧА 5.** Через дану точку  $P$  проведіть пряму, перпендикулярну до даної прямої  $a$ .

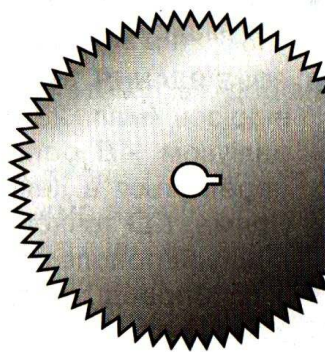
**РОЗВ'ЯЗАННЯ.** Залежно від того, лежить чи не лежить точка  $P$  на прямій  $a$ , задачу можна розв'язувати, як показано на малюнках 236 і 237. Опишіть і обґрунтуйте ці побудови самостійно.

**ЗАДАЧА 6.** Через точку  $P$ , що не лежить на прямій  $AB$ , проведіть пряму, паралельну прямій  $AB$ .

**РОЗВ'ЯЗАННЯ.** Через точку  $P$  і довільну точку  $A$  прямої  $AB$  проводимо пряму  $AT$  (мал. 238). Будуємо кут  $TPM$ , що дорівнює куту  $PAB$ , так, щоб ці кути стали відповідними при прямих  $PM$ ,  $AB$  і січній  $AP$ . Побудована таким способом пряма  $PM$  задовольняє задачу, бо вона проходить через дану точку  $P$  і паралельна прямій  $AB$ , оскільки  $\angle TPM = \angle PAB$ .

## Для допитливих

Геометричними побудовами часто доводиться займатися багатьом людям. Ще в доісторичні часи майсти, які робили колеса до колісниць, уміли ділити коло на кілька рівних частин. Тепер виконувати такі побудови доводиться фахівцям, які проектують чи виготовляють шестерні, дискові пилки (мал. 239), турбіни та різні роторні механізми. Як би ви поділили коло, наприклад, на 5, 6 чи 7 рівних частин?



Мал. 239

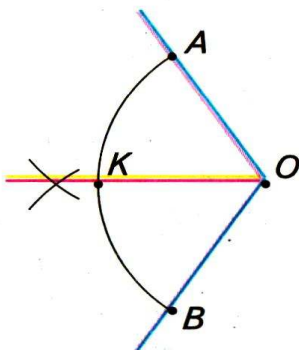


Основні креслярські інструменти — лінійка і циркуль — майстровим людям були відомі ще кілька тисячоліть тому. Слово *лінійка* походить від слова «лінія», яке латинською мовою спочатку означало «льняна нитка». І слово *циркуль* латинського походження, спочатку слово «циркулюс» означало *коло, круг, обвід*.

У Стародавній Греції лінійку і циркуль визнавали єдиними приладами геометричних побудов. Задачу на побудову вважали розв'язаною, якщо в ній всі побудови виконувалися тільки за допомогою лінійки і циркуля. Тепер фахівці, виконуючи ті чи інші побудови, використовують косинець, транспорир, рейсмус, рейсшину та інші креслярські засоби.

## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Поясніть, як побудувати трикутник за трьома даними сторонами.
2. Як побудувати кут, що дорівнює даному?
3. Як побудувати бісектрису даного кута?
4. Як поділити даний відрізок пополам?
5. Як через дану точку провести пряму, перпендикулярну до даної прямої?
4. Як через дану точку провести пряму, паралельну даній прямій?



Мал. 240

## ● Виконаємо разом

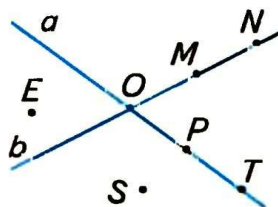
1. Поділіть дану дугу кола на дві рівні частини.
- Нехай дано дугу  $AB$  кола з центром  $O$  (мал. 240). Уявімо кут  $AOB$  і проведемо його бісектрису  $OK$ . Трикутники  $AOK$  і  $KOB$  рівні, тому й дуги  $AK$  і  $KB$  дорівнюють одна одній.

## ■ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ■

### до § 1

**647.** Користуючись малюнком 250, вкажіть:

- а) у якій точці перетинаються прямі  $a$  і  $b$ ;
- б) які точки належать прямій  $a$ , прямій  $b$ ;
- в) які точки не належать жодній з прямих  $a$  і  $b$ ;
- г) чи належить точка  $O$  прямій  $a$ , прямій  $b$ .



■ Мал. 250

**648.** Точки  $A, B$  і  $C$  лежать на прямій  $a$ . Точки  $M, N, K$  не належать прямій  $a$ . Зобразіть це на малюнку.

**649.**  $M \in a, N \notin a, K \notin a$ , причому  $N$  і  $K$  лежать по різні боки від  $a$ . Зобразіть це на малюнку.

**650.** На прямій  $a$  дано точки  $A$  і  $B$ . Зобразіть точки  $M$  і  $N$  так, щоб  $M$  лежала між  $A$  і  $B$ ; а  $B$  — між  $M$  і  $N$ .

**651.** Зобразіть на малюнку:

- а) три прямі перетинаються в одній точці;
- б) три прямі, дві з яких не перетинаються;
- в) три прямі попарно перетинаються у трьох точках.

На скільки частин у кожному випадку прямі розбивають площину?

### до § 2

**652.**  $M$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ . Знайдіть довжину  $AB$ , якщо  $BM = 5$  см і:

- а)  $AM$  на 2 см більший за  $BM$ ;
- б)  $AM$  у 3 рази більший за  $BM$ ;
- в)  $AM : BM = 3 : 2$ ;
- г)  $AB = 3 AM$ .

**653.** Точки  $A, B$  і  $C$  лежать на одній прямій, причому відрізок  $AB$  у 3 рази менший за  $BC$ . Знайдіть  $AB$  і  $BC$ , якщо  $AC = 8$  см. Скільки розв'язків має задача?

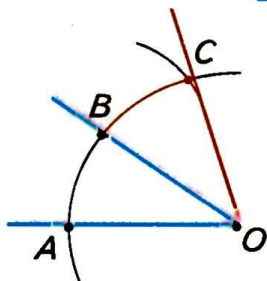
**654.** Точки  $A, B, C$  і  $D$  лежать на одній прямій, причому  $AB = 2$  см,  $BC = 4$  см,  $CD = 7$  см. Чому дорівнює  $AD$ ? Розгляньте всі можливі випадки.

- 655.** Точка  $C$  — середина відрізка  $AB$ ,  $D$  — середина відрізка  $AC$ . Знайдіть відношення  $AD : AB$ ,  $AD : BC$ ,  $BC : DC$ .
- 656.** Точка  $C$  — середина відрізка  $AB$ ,  $D$  — середина  $CB$ . Знайдіть  $AB$ , якщо:
- а)  $CD = 2$  см; б)  $BC - CD = 3$  см; в)  $AC - DC = 4$  см.
- 657.**  $M$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ .  $K$  і  $P$  — середини відрізків  $AM$  і  $MB$  відповідно. Знайдіть  $KP$ , якщо  $AB = 10$  см.
- 658.** Точка  $M$  — середина відрізка  $AB$ , а точка  $K$  ділить відрізок  $AM$  у відношенні  $AK : KM = 1 : 2$ . Знайдіть  $MK$ , якщо:
- а)  $AB = 12$  см; б)  $BM = 9$  см; в)  $MB - AK = 10$  см.
- 659.** На прямій  $a$  лежать точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ , причому  $AB = 12$  см,  $AC + CB = 15$  см. Знайдіть довжини відрізків  $AC$  і  $BC$ .
- 660.** Точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій.  $BC = 6$  см,  $AB + AC = 10$  см. Знайдіть  $AB$  і  $AC$ .
- 661.**  $AB = 10$  см.  $C$  — середина  $AB$ . На прямій  $AB$  знайдіть усі такі точки  $D$ , що  $DA + DB + DC = 12$  см. Зобразіть ці точки на малюнку.
- 662.** Точки  $A$  і  $B$  лежать по різні боки від прямої  $a$ , точка  $M \in a$ .  $AM = 10$  см,  $BM = 15$  см,  $AB = 23$  см. Чи є точка  $M$  точкою перетину прямих  $AB$  і  $a$ ?
- 663.** Є лінійка з поділками 0; 3 см і 7 см. Як за допомогою цієї лінійки побудувати відрізок завдовжки 4 см? 11 см?

### до § 3

- 664.**  $OM$  — внутрішній промінь  $\angle AOB$ . Знайдіть  $\angle AOM$  і  $\angle BOM$ , якщо  $\angle AOB = 80^\circ$  і:
- а)  $\angle AOM$  у 3 рази менший за  $\angle MOB$ ;  
 б)  $\angle BOM$  на  $20^\circ$  більший за  $\angle AOM$ ;  
 в)  $\angle AOM : \angle BOM = 1 : 3$ ;  
 г)  $\angle BOM = \angle AOM$ .
- 665.** Прямий кут розбили двома внутрішніми променями на кути, один з яких на  $20^\circ$  більший за другий і на  $20^\circ$  менший за третій. Знайдіть ці кути.
- 666.**  $OC$  — бісектриса  $\angle AOB$ ,  $OM$  — бісектриса  $\angle AOC$ . Знайдіть  $\angle AOB$ , якщо  $\angle MOC = 20^\circ$ .
- 667.**  $\angle AOB = 80^\circ$ ,  $\angle BOC = 20^\circ$ ,  $OM$  — бісектриса  $\angle AOC$ . Знайдіть  $\angle MOC$ . Розгляньте всі можливі випадки.





■ Мал. 241

**2** Побудуйте кут, більший від даного удвічі.

■ Нехай  $AOB$  — даний кут (мал. 241). Опишемо дугу кола із центром  $O$ . Якщо вона перетне сторони даного кута в точках  $A$  і  $B$ , з  $B$  як із центра зробимо засічку  $BC = BA$  і проведемо промінь  $OC$ . Кут  $AOC$  удвічі більший за  $\angle AOB$ , бо  $\triangle AOB = \triangle BOC$ .

### ● Задачі і вправи

#### ■ ВИКОНАЙТЕ УСНО ■

**589.** Які з тверджень правильні?

- а) Щоб поділити кут на дві рівні частини, треба провести його бісектрису.
- б) Щоб поділити відрізок на дві рівні частини, треба провести його серединний перпендикуляр.
- в) Щоб поділити дугу кола на дві рівні частини, треба провести серединний перпендикуляр відрізка, що сполучає кінці даної дуги.
- г) Щоб знайти центр кола, описаного навколо трикутника, треба провести серединні перпендикуляри двох сторін трикутника.

#### ■ А ■

**590.** Поділіть даний кут на 4 рівні частини.

**591.** Побудуйте прямий кут.

**592.** Побудуйте кут, міра якого: а)  $45^\circ$ ; б)  $22,5^\circ$ ; в)  $60^\circ$ ; г)  $30^\circ$ .

**593.** Побудуйте кут, утричі більший від даного гострого кута.

**594.** Поділіть даний відрізок на 4 рівні частини.

**595.** Як поділити пополам відрізок, довжина якого в кілька разів більша від найбільшого розхилу циркуля?

**596.** Побудуйте відрізок, який у два рази більший від даного.

**597.** Побудуйте відрізок, у 3 рази більший від даного відрізка.

**598.** Поділіть дану дугу кола на чотири рівні частини.

**599.** Побудуйте трикутник, рівний даному трикутнику.

**600.** Побудуйте рівносторонній трикутник за даною його стороною.

- 601.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і бічною стороною.
- 602.** Побудуйте прямокутний трикутник за двома катетами.
- 603.** Побудуйте трикутник за двома сторонами і кутом між ними.
- 604.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і кутом при вершині.
- 605.** Побудуйте трикутник за стороною і прилеглими кутами.
- 606.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і кутом при основі.

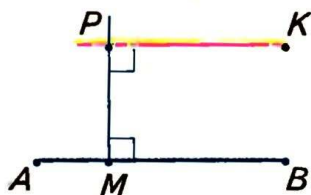
## Б

- 607.** Побудуйте трикутник за сторонами 3 см, 4 см і 5 см. Опишіть навколо нього коло.

- 608.** Побудуйте трикутник і проведіть його медіани.

- 609.** Дано трикутник. Побудуйте його бісектриси.

- 610.** Дано трикутник. Побудуйте його висоти. Розгляньте всі можливі випадки.



■ Мал. 242

- 611.** Щоб через дану точку  $P$  провести пряму, паралельну  $AB$ , можна спочатку провести  $PM \perp AB$ , а потім  $PK \perp PM$  (мал. 242). Обґрунтуйте цю побудову.
- 612\*.** Через дану точку проведіть пряму, яка перетинає дану пряму під даним кутом.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 613.** Знайдіть міру кута, який у сумі з двома суміжними йому кутами утворює кут  $300^\circ$ .
- 614.** Доведіть, що кожна сторона квадрата  $ABCD$  з прямою  $AC$  утворює кути по  $45^\circ$ .
- 615.** Визначте вид трикутника, у якому сума двох кутів менша від третього.
- 616.** Під яким кутом перетинаються дві медіани рівностороннього трикутника?
- 617.** Побудуйте рівносторонній трикутник  $ABC$ , якщо  $AB = 4$  см, і опишіть навколо нього коло.

## § 21. Задачі на побудову

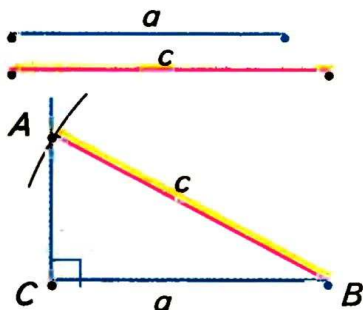
**З** геометричними побудовами мають справу різні фахівці. Геометричні побудови виконують креслярі, архітектори, конструктори, топографи, геодезисти, штурмани. Геометричні фігури також будують: слюсар — на жерсті, столяр — на дошці, кравець — на тканині, садівник — на землі.

У задачі на побудову вимагається побудувати геометричну фігуру, яка повинна задовольняти певні умови. У геометрії побудови виконують найчастіше за допомогою лінійки і циркуля. Домовимось, що коли в задачі не говориться, якими інструментами треба виконувати побудови, маються на увазі тільки лінійка (без поділок) і циркуль.

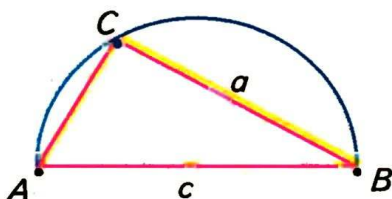
Складніші задачі на побудову часто розв'язують *методом геометричних місць*. Нехай, наприклад, у задачі треба знайти точку  $X$ , що задовольняє дві умови. Якщо першу умову задовольняють точки фігури  $K$ , а другу — точки фігури  $P$ , то  $X$  має належати кожній із цих фігур. Тобто  $X$  — точка перетину фігур  $K$  і  $P$ .

**ЗАДАЧА.** Побудуйте прямокутний трикутник за даним катетом  $a$  і гіпотенузою  $c$  (мал. 243).

**РОЗВ'ЯЗАННЯ.** Будуємо прямий кут  $ACB$ , на його стороні відкладаємо відрізок  $CB = a$ . Точки  $C$  і  $B$  — дві вершини трикутника, який треба побудувати. Третя вершина має лежати, по-перше, на промені  $CA$ , по-друге, на відстані  $c$  від  $B$ , тобто на колі радіуса  $c$  із центром  $B$ . Якщо це коло перетинає промінь  $CA$  в точці  $A$ , то трикутник  $ABC$  — той, який вимагалось побудувати. Адже його кут  $C$  прямий,  $BC = a$ ,  $BA = c$ .



■ Мал. 243



■ Мал. 244



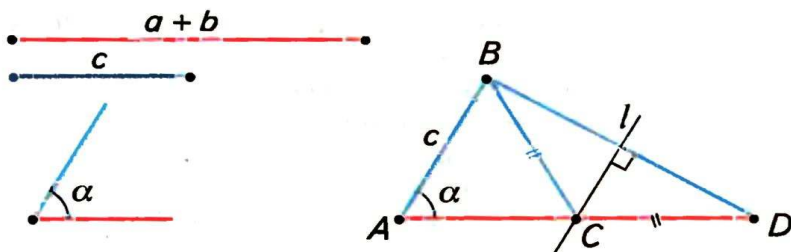
- Другий спосіб (мал. 244). Відкладаємо відрізок  $AB = c$  і проводимо коло діаметра  $AB$  — ГМТ, з яких  $AB$  видно під прямим кутом. Далі будуємо коло радіуса  $a$  з центром  $B$  — ГМТ, віддалених від  $B$  на відстань  $a$ . Якщо два ГМТ перетинаються в точці  $C$ , то трикутник  $ABC$  — той, який вимагалось побудувати. Два розглянуті кола можуть перетинатися ще в одній точці  $C_1$ . Але трикутники  $ABC$  і  $ABC_1$  рівні, тому вважаються одним розв'язком.

Складові частини розв'язання задачі на побудову — *аналіз, побудова, доведення і дослідження*. В аналізі шукається спосіб розв'язування задачі, в побудові виконується побудова, в доведенні обґрунтовується правильність виконаної побудови, в дослідженні з'ясовується, скільки розв'язків має задача.

- ЗАДАЧА.** Побудуйте трикутник за даною стороною, прилеглим до неї кутом і сумою двох інших сторін (мал. 245).

#### РОЗВ'ЯЗАННЯ.

- А н а л і з.** Припустимо, що потрібний трикутник  $ABC$  побудовано. Його сторона  $c$  і  $\angle A = \alpha$  — дані. Дано також відрізок, який дорівнює сумі сторін  $a$  і  $b$ . За даними відрізками  $c$  і  $a + b$  та кутом  $A$  між ними можна побудувати  $\triangle ABD$ . Вершиною  $C$  шуканого трикутника буде така точка відрізка  $AD$ , для якої  $CD = CB$ . Отже, точка  $C$  повинна лежати і на серединному перпендикулярі відрізка  $BD$ .
- П о б у д о в а.** За двома даними відрізками і кутом між ними будуємо  $\triangle ABD$ , після чого проводимо серединний перпендикуляр  $l$  відрізка  $BD$ . Нехай пряма  $l$  перетинає відрізок  $AD$  у точці  $C$ . Проводимо відрізок  $CB$ . Трикутник  $ABC$  — той, який вимагалось побудувати.



■ Мал. 245

- Д о в е д е н н я. У  $\triangle ABC$   $AB = c$  і  $\angle A = \alpha$  за побудовою.  $AC + CB = AC + CD = a + b$ . Отже,  $\triangle ABC$  задовольняє всі умови задачі.
- Д о с л і д ж е н н я. Задача має розв'язок тільки за умови, що  $a + b > c$ .
- З а у в а ж е н н я. Якщо задача нескладна і спосіб її розв'язування відомий, аналіз можна не описувати. А в розв'язанні не обов'язково виділяти аналіз, побудову, доведення і дослідження.

### Для допитливих

У математиці найчастіше мають справу із задачами: на обчислення, на доведення, на побудову, на перетворення і на дослідження. Геометричними задачами на побудову активно цікавилися античні геометри. Допускаючи тільки *класичні побудови* (які виконуються лише лінійкою і циркулем), вони досліджували, які з побудов можна виконати, а які не можна. Зокрема, з'ясовували:

- 1) чи можна будь-який кут поділити на три рівні частини;
- 2) чи можна побудувати квадрат, площа якого дорівнювала б площі даного круга;
- 3) чи можна побудувати ребро такого куба, об'єм якого був би у 2 рази більший за об'єм даного куба.

Багато століть видатні геометри намагалися розв'язати ці задачі і не змогли. Ці *три класичні задачі* давнини дістали спеціальні назви: 1) *трисекція кута*, 2) *квадратура круга*, 3) *подвоєння куба*. Останню задачу називають ще делоською задачею, пов'язуючи її з давньогрецькою легендою, за якою оракул бога Аполлона погодився врятувати жителів острова Делос від чуми, якщо кубічний жертovníк у делоському храмі замінять жертovníком такої самої форми, але вдвічі більшого об'єму. Тільки майже через 2000 років учені переконалися, що жодну з цих трьох задач за допомогою лише лінійки і циркуля розв'язати не можна.

Тепер фахівці, яким доводиться виконувати геометричні побудови, користуються не тільки лінійкою і циркулем. З погляду класичних методів такі побудови *наближені*. Але для практичних потреб точність, яку забезпечують наближені методи, цілком достатня.

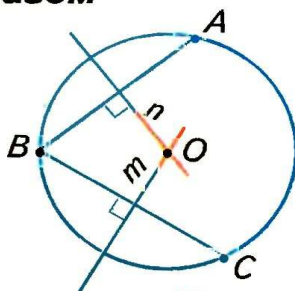
## ? Запитання і завдання для самоконтролю

1. Якими інструментами найчастіше виконують побудови в геометрії?
2. Назвіть складові частини розв'язання задачі на побудову.
3. Що таке *трисекція кута*, *квадратура круга*, *подвоєння куба*?

### ● Виконаємо разом

**1** Знайдіть центр даного кола.

- Позначимо на даному колі три довільні точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  (мал. 246). Уявимо хорди  $AB$ ,  $BC$  і проведемо їх серединні перпендикуляри  $n$  і  $m$ . Точка  $O$ , в якій перетинаються прямі  $n$  і  $m$ , — центр даного кола. Адже  $OA = OB = OC$ .



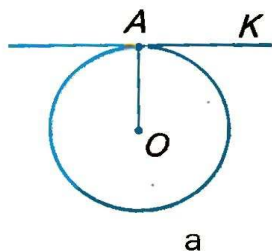
■ Мал. 246

**2** Через дану точку проведіть дотичну до даного кола.

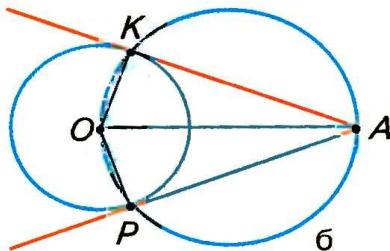
- Якщо дана точка  $A$  лежить на колі центра  $O$  (мал. 247, а), проводимо промінь  $OA$ , потім — пряму  $AK$ , перпендикулярну до  $OA$ . Пряма  $AK$  — дотична, яку вимагалось побудувати.

Якщо точка  $A$  лежить поза даним колом центра  $O$  (мал. 247, б), то на діаметрі  $OA$  описуємо коло. Воно перетнеться з даним колом у двох точках  $K$  і  $P$ . Прямі  $AK$  і  $AP$  — шукані дотичні, бо  $AK \perp OK$  і  $AP \perp OP$ . (Із точок  $K$  і  $P$  допоміжного кола його діаметр  $OM$  видно під прямими кутами  $AKO$  і  $APO$ .) У цьому випадку задача має два розв'язки.

Якщо точка  $A$  лежить всередині кола, задача не має розв'язку, бо дотичну провести не можна.



а



б

■ Мал. 247



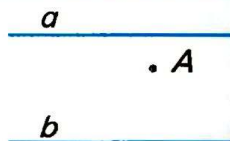
## ● Задачі і вправи

**А**

- 618.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і висотою, проведеною до основи.
- 619.** Побудуйте прямокутний трикутник:  
 1) за гіпотенузою і гострим кутом;  
 2) за гіпотенузою і катетом;  
 3) за катетом і прилеглим до нього гострим кутом;  
 4) за катетом і протилежним кутом.
- 620.** Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.
- 621.** Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, проведеною: 1) до однієї з них; 2) до третьої сторони.
- 622.** Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник:  
 1) за даним катетом; 2) за гіпотенузою;  
 3) за медіаною, проведеною до гіпотенузи.
- 623.** Знайдіть на даній прямій точку, що лежить на даній відстані від другої даної прямої.
- 624.** Знайдіть на даній прямій точку, що лежить на однакових відстанях від двох даних точок.
- 625.** Побудуйте коло, що дотикається до сторін даного кута, причому до однієї з них — у даній точці.
- 626.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом описаного кола.
- 627.** Побудуйте трикутник за двома сторонами і радіусом описаного кола.
- 628.** Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола.
- 629.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за радіусом описаного кола і основою.

**Б**

- 630.** Побудуйте прямокутний трикутник за радіусом описаного кола і гострим кутом.
- 631.** Дано паралельні прямі  $a$ ,  $b$  і точку  $A$  між ними (мал. 248). Побудуйте коло, що проходить через точку  $A$  і дотикається до прямих  $a$  і  $b$ .

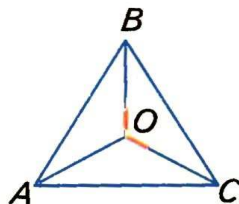


■ Мал. 248

- 632\*.** Побудуйте рівносторонній трикутник за радіусом описаного кола.
- 633.** Як побудувати спільну дотичну:
- до двох кіл, радіуси яких однакові;
  - до двох кіл, радіуси яких різні?
- 634.** Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і висотою, проведеною з вершини прямого кута.
- 635.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою двох інших сторін.
- 636.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.
- 637.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і радіусом вписаного кола.
- 638\*.** Побудуйте геометричне місце точок, з яких даний відрізок  $a$  видно під кутом  $90^\circ$ .
- 639.** Побудуйте прямокутний трикутник за даними медіаною і висотою, проведеними до гіпотенузи.
- 640.** Покажіть, як можна наближено поділити:
- коло на 7 рівних частин;
  - довільний кут на 3 рівні частини;
  - довільну дугу кола на 5 рівних частин.

### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 641.** Поділіть прямий кут на 3 рівні частини.
- 642.** З вершини  $B$   $\triangle ABC$  проведено висоту  $BH$  і медіану  $BM$ .  $AH = 3$  см,  $AC = 10$  см. Знайдіть  $HM$ , якщо: 1)  $\angle A$  — гострий; 2)  $\angle A$  — тупий.
- 643.** Доведіть, що бісектриси двох вертикальних кутів лежать на одній прямій.
- 644.** Точку, рівновіддалену від усіх вершин рівностороннього трикутника, сполучили з його вершинами (мал. 249). Доведіть, що всі три утворені трикутники рівні.
- 645.** Радіуси двох кіл 3 см і 5 см. Чи перетинаються вони, якщо відстань між їх центрами дорівнює:
- 1 см;
  - 3 см;
  - 8 см;
  - 10 см?
- 646.** Побудуйте розгорнутий кут і поділіть його на 4 рівні частини.



■ Мал. 249

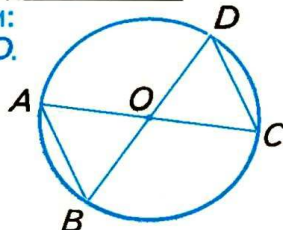
Задачі за готовими малюнками

А

Б

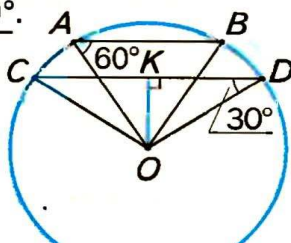
$AC, BD$  — діаметри.

Довести:  
 $AB \parallel CD$ .



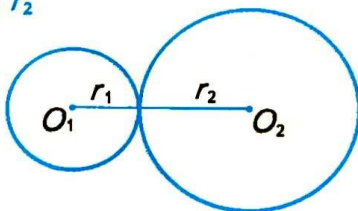
$AB = 8, \angle A = 60^\circ,$   
 $\angle D = 30^\circ$ .

OK



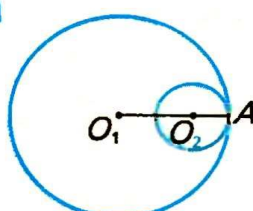
$r_1 : r_2 = 2 : 3, O_1 O_2 = 15.$

$r_1, r_2$



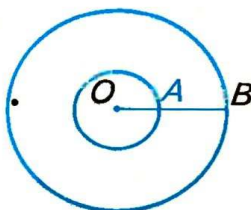
$O_1 A = 3 O_2 A, O_1 O_2 = 10.$

$O_1 A, O_2 A$



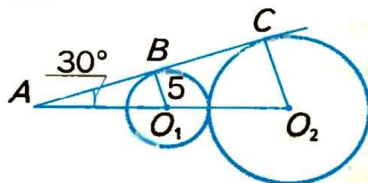
$OB = 3 OA,$   
 $AB = 18.$

$OA, OB$



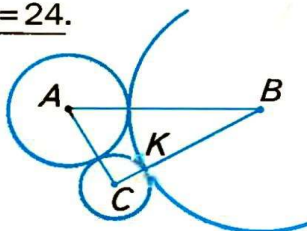
$BC$  — спільна дотична.

$CO_2$



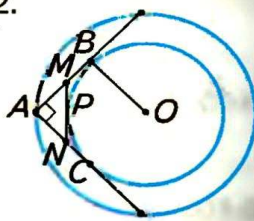
$CK = 2, KB = 7,$   
 $P_{\triangle ABC} = 24.$

$AB$



$B, P, C$  — точки дотику,  
 $P_{\triangle AMN} = 12.$

$OB$



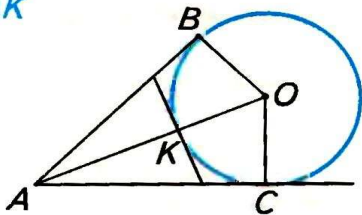


### ● **Задачі за готовими малюнками**



$\angle A = 60^\circ, OB = 5.$

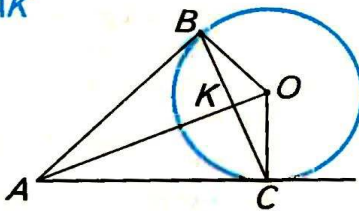
AK



5

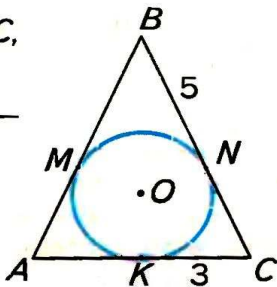
$\angle BAC = 60^\circ, OB = 6.$

AK



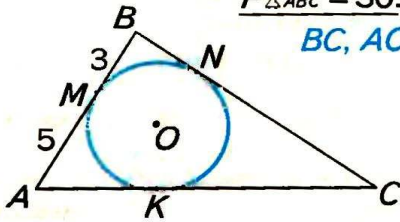
5

$$\begin{aligned} AB &= BC, \\ BN &= 5, \\ KC &= 3. \end{aligned}$$

 $P_{\triangle ABC}$ 

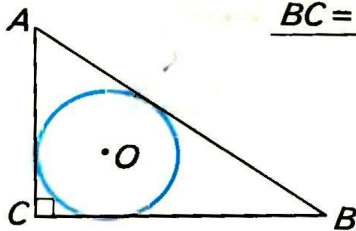
$$MB = 3, AM = 5,$$

$$\underline{P_{\triangle ABC} = 30.}$$

 $BC, AC$ 

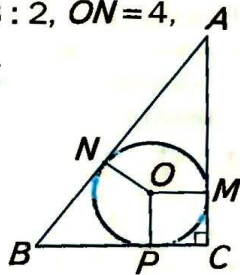
6

$$AB = 25, AC = 7, BC = 24.$$



$$AN:NB=3:2, ON=4,$$

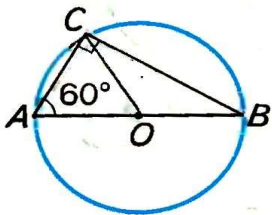
$$P_{\triangle ABC} = 48.$$

 $AB, BC, AC$ 

7

$AC = 10.$

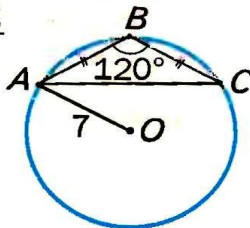
AO



$OA = 7, \angle B = 120^\circ,$

$AB = BC.$

**AB**



8

## ● Самостійна робота 5

### ■ Варіант 1

- 1°. Знайдіть довжину чверті кола радіуса 10 см.
- 2°. Користуючись циркулем і лінійкою з поділками, побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і катетом, довжини яких дорівнюють 8 см і 4,5 см. Опишіть навколо цього трикутника коло.
- 3°. Сформулюйте означення серединного перпендикуляра.

### ■ Варіант 2

- 1°. Знайдіть площу чверті круга радіуса 20 см.
- 2°. Користуючись циркулем і лінійкою з поділками, побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і катетом, довжини яких дорівнюють 8 см і 4 см. Опишіть навколо цього трикутника коло.
- 3°. Сформулюйте означення дотичної кола.

### ■ Варіант 3

- 1°. Вписане в прямокутний трикутник коло має радіус 5 см. На скільки сума катетів більша за гіпотенузу?
- 2°. Користуючись циркулем і лінійкою з поділками, побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і катетом, довжини яких дорівнюють 8 см і 5 см. Опишіть навколо цього трикутника коло.
- 3°. Сформулюйте означення кола, описаного навколо трикутника.

### ■ Варіант 4

- 1°. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює  $r$ .
- 2°. Користуючись циркулем і лінійкою з поділками, побудуйте трикутник за трьома сторонами, довжини яких дорівнюють 3 см, 3,5 см і 4 см. Опишіть навколо цього трикутника коло.
- 3°. Сформулюйте означення кола, вписаного в трикутник.

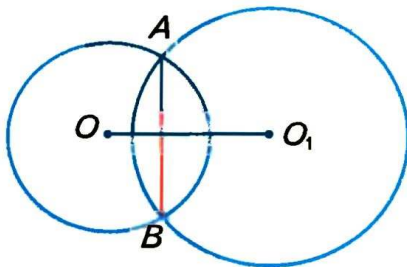
### ● Тестові завдання 5

1. Діаметр кола дорівнює 6 см.  
Довжина кола дорівнює: а)  $6\pi$  см; б)  $3\pi$  см;  
в)  $9\pi$  см; г)  $36\pi$  см.
2. Центр кола, вписаного в трикутник, лежить у точці перетину: а) бісектрис;  
б) медіан;  
в) висот;  
г) серединних перпендикулярів.
3. Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, лежить на середині: а) медіани;  
б) катета;  
в) гіпотенузи;  
г) бісектриси.
4. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть радіус описаного кола. а) 10 см; б) 6 см;  
в) 4 см; г) 12 см.
5. Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см. Знайдіть радіус вписаного кола. а) 4 см; б) 8 см;  
в) 12 см; г) 2 см.
6. Із точки  $A$  до кола проведено дотичні  $AB$  і  $AC$  ( $B$  і  $C$  — точки дотику). Яке з тверджень правильне? а)  $AB = AC$ ; б)  $AB < AC$ ;  
в)  $AB > AC$ ; г)  $AB \neq AC$ .
7. Кола радіусів 3 см і 7 см дотикаються зовні. Знайдіть відстань між центрами кіл. а) 2 см; б) 4 см;  
в) 10 см; г) 5 см.
8. Знайдіть ширину кільця, утвореного концентричними колами радіусів 3 см і 5 см. а) 8 см; б) 2 см;  
в) 4 см; г)  $4\pi$  см.
9. З точки  $A$  до кола з центром  $O$  проведено дотичну  $AB$  ( $B$  — точка дотику).  $\angle ABO$ : а) гострий;  
б) прямий;  
в) тупий;  
г) розгорнутий.
10. Геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від даної точки, є: а) коло; б) квадрат;  
в) круг; г) куб.



## ● Типові задачі для контрольної роботи

1. Накресліть коло діаметра 5 см.  
Чому дорівнює його радіус?
2. Чи мають спільні точки два кола, радіуси яких 2 см і 5 см, а відстань між їх центрами 8 см?
3. Знайдіть міру кута, під яким із центра кола видно сторону вписаного рівностороннього трикутника.
4. Побудуйте відрізок утричі більший за даний.
5. Кут між двома радіусами кола дорівнює  $130^\circ$ .  
Знайдіть кут між дотичними, проведеними через кінці цих радіусів.
6. Два кола мають зовнішній дотик, а відстань між їх центрами дорівнює 16 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо вони відносяться як 3 : 5.
7. Навколо трикутника  $ABC$  з кутами  $\angle A = 30^\circ$  і  $\angle B = 60^\circ$  описано коло. Знайдіть його радіус, якщо  $AB = 10$  см.
8. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою  $AC = 5$  см і катетом  $AB = 3$  см. Опишіть навколо нього коло.
9. Доведіть, що коли два кола з центрами  $O$  і  $O_1$  перетинаються в точках  $A$  і  $B$ , то  $AB \perp OO_1$ .



10. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною (6 см) і проведеною до неї медіаною (5 см).

## Головне в розділі 4

**Коло** — фігура, що складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. **Круг** — частина площини, обмежена колом. Пряма, яка має з колом тільки одну спільну точку і лежить у площині кола, називається *дотичною* до кола. **Хорда** кола — відрізок, кінці якого належать даному колу. Найбільша хорда кола — його *діаметр*.

Діаметр кола, проведений через середину хорди, відмінної від діаметра, перпендикулярний до неї.

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Коло, яке проходить через усі вершини трикутника, називається *описаним* навколо даного трикутника. Коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника, — *вписане* в даний трикутник. Навколо кожного трикутника можна описати коло і в кожний трикутник можна вписати коло. Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину бісектрис трикутника. Центр кола, описаного навколо трикутника, — точка перетину серединних перпендикулярів сторін даного трикутника.

*Серединний перпендикуляр відрізка* — пряма, яка перпендикулярна до даного відрізка і проходить через його середину.

Користуючись тільки лінійкою і циркулем, можна: будувати трикутник за трьома даними сторонами і кут, що дорівнює даному; проводити бісектрису кута; ділити навпіл відрізок; будувати пряму, перпендикулярну до даної прямої, тощо.

Один з найважливіших видів геометричних задач — *задачі на побудову*. Найчастіше їх розв'язують *методом геометричних місць*.

**Геометричне місце точок** — це множина точок, які мають певну властивість.

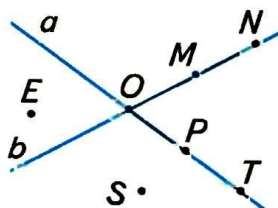
Геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр цього відрізка. Йдеться про фігури однієї площини.

Геометричне місце точок кута, рівновіддалених від його сторін, — бісектриса цього кута.

## ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

### До § 1

- 647.** Користуючись малюнком 250, вкажіть:
- у якій точці перетинаються прямі  $a$  і  $b$ ;
  - які точки належать прямій  $a$ , прямій  $b$ ;
  - які точки не належать жодній з прямих  $a$  і  $b$ ;
  - чи належить точка  $O$  прямій  $a$ , прямій  $b$ .



■ Мал. 250

- 648.** Точки  $A, B$  і  $C$  лежать на прямій  $a$ . Точки  $M, N, K$  не належать прямій  $a$ . Зобразіть це на малюнку.
- 649.**  $M \in a, N \notin a, K \notin a$ , причому  $N$  і  $K$  лежать по різні боки від  $a$ . Зобразіть це на малюнку.
- 650.** На прямій  $a$  дано точки  $A$  і  $B$ . Зобразіть точки  $M$  і  $N$  так, щоб  $M$  лежала між  $A$  і  $B$ ; а  $B$  — між  $M$  і  $N$ .
- 651.** Зобразіть на малюнку:
- три прямі перетинаються в одній точці;
  - три прямі, дві з яких не перетинаються;
  - три прямі попарно перетинаються у трьох точках.
- На скільки частин у кожному випадку прямі розбивають площину?

### До § 2

- 652.**  $M$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ . Знайдіть довжину  $AB$ , якщо  $BM = 5$  см і:
- $AM$  на 2 см більший за  $BM$ ;
  - $AM$  у 3 рази більший за  $BM$ ;
  - $AM : BM = 3 : 2$ ;
  - $AB = 3 AM$ .
- 653.** Точки  $A, B$  і  $C$  лежать на одній прямій, причому відрізок  $AB$  у 3 рази менший за  $BC$ . Знайдіть  $AB$  і  $BC$ , якщо  $AC = 8$  см. Скільки розв'язків має задача?
- 654.** Точки  $A, B, C$  і  $D$  лежать на одній прямій, причому  $AB = 2$  см,  $BC = 4$  см,  $CD = 7$  см. Чому дорівнює  $AD$ ? Розгляньте всі можливі випадки.



- 655.** Точка  $C$  — середина відрізка  $AB$ ,  $D$  — середина відрізка  $AC$ . Знайдіть відношення  $AD : AB$ ,  $AD : BC$ ,  $BC : DC$ .
- 656.** Точка  $C$  — середина відрізка  $AB$ ,  $D$  — середина  $CB$ . Знайдіть  $AB$ , якщо:  
а)  $CD = 2$  см; б)  $BC - CD = 3$  см; в)  $AC - DC = 4$  см.
- 657.**  $M$  — внутрішня точка відрізка  $AB$ .  $K$  і  $P$  — середини відрізків  $AM$  і  $MB$  відповідно. Знайдіть  $KP$ , якщо  $AB = 10$  см.
- 658.** Точка  $M$  — середина відрізка  $AB$ , а точка  $K$  ділить відрізок  $AM$  у відношенні  $AK : KM = 1 : 2$ . Знайдіть  $MK$ , якщо:  
а)  $AB = 12$  см; б)  $BM = 9$  см; в)  $MB - AK = 10$  см.
- 659.** На прямій  $a$  лежать точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ , причому  $AB = 12$  см,  $AC + CB = 15$  см. Знайдіть довжини відрізків  $AC$  і  $BC$ .
- 660.** Точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій.  $BC = 6$  см,  $AB + AC = 10$  см. Знайдіть  $AB$  і  $AC$ .
- 661.**  $AB = 10$  см.  $C$  — середина  $AB$ . На прямій  $AB$  знайдіть усі такі точки  $D$ , що  $DA + DB + DC = 12$  см. Зобразіть ці точки на малюнку.
- 662.** Точки  $A$  і  $B$  лежать по різні боки від прямої  $a$ , точка  $M \in a$ .  $AM = 10$  см,  $BM = 15$  см,  $AB = 23$  см. Чи є точка  $M$  точкою перетину прямих  $AB$  і  $a$ ?
- 663.** Є лінійка з поділками 0; 3 см і 7 см. Як за допомогою цієї лінійки побудувати відрізок завдовжки 4 см? 11 см?

### до § 3

- 664.**  $OM$  — внутрішній промінь  $\angle AOB$ . Знайдіть  $\angle AOM$  і  $\angle BOM$ , якщо  $\angle AOB = 80^\circ$  і:  
а)  $\angle AOM$  у 3 рази менший за  $\angle MOB$ ;  
б)  $\angle BOM$  на  $20^\circ$  більший за  $\angle AOM$ ;  
в)  $\angle AOM : \angle BOM = 1 : 3$ ;  
г)  $\angle BOM = \angle AOM$ .
- 665.** Прямий кут розбили двома внутрішніми променями на кути, один з яких на  $20^\circ$  більший за другий і на  $20^\circ$  менший за третій. Знайдіть ці кути.
- 666.**  $OC$  — бісектриса  $\angle AOB$ ,  $OM$  — бісектриса  $\angle AOC$ . Знайдіть  $\angle AOB$ , якщо  $\angle MOC = 20^\circ$ .
- 667.**  $\angle AOB = 80^\circ$ ,  $\angle BOC = 20^\circ$ ,  $OM$  — бісектриса  $\angle AOC$ . Знайдіть  $\angle MOC$ . Розгляньте всі можливі випадки.

- 668.**  $OC$  — бісектриса  $\angle AOB$ ,  $OM$  — внутрішній промінь  $\angle AOC$ ,  $\angle AOM : \angle MOC = 1 : 3$ . Знайдіть  $\angle AOM$  і  $\angle AOB$ , якщо  $\angle MOC = 60^\circ$ .
- 669.** Розгорнутий кут поділено променем на два кути так, що половина одного з них дорівнює третині другого. Знайдіть ці кути.
- 670\*.**  $OC$  — бісектриса  $\angle AOB$ ,  $M$  — внутрішня точка  $\angle AOC$ . Доведіть, що  $\angle MOC$  дорівнює піврізниці кутів  $\angle BOM$  і  $\angle AOM$ .
- 671\*.**  $OC$  — бісектриса  $\angle AOB$ .  $OA$  — бісектриса  $\angle MOC$ . Доведіть, що  $\angle MOC$  дорівнює півсумі кутів  $\angle AOM$  і  $\angle BOM$ .
- 672.** Є косинець із кутом  $50^\circ$ . Як за його допомогою побудувати кут  $100^\circ$ ;  $80^\circ$ ;  $160^\circ$ ?

## до § 4

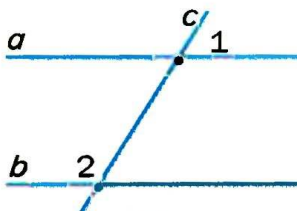
- 673.**  $\angle AOB$  і  $\angle BOC$  = суміжні кути. Визначте  $\angle AOB$ , якщо:
- $\angle BOC = 50^\circ$ ;
  - $\angle BOC$  більший за  $\angle AOB$  на  $20^\circ$ ;
  - $\angle BOC$  менший за  $\angle AOB$  у 4 рази;
  - $\angle AOB : \angle BOC = 3 : 2$ ;
  - $\angle AOB - \angle BOC = 30^\circ$ .
- 674.** Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює  $35^\circ 25'$ . Обчисліть інші кути.
- 675.** Один з кутів, утворених при перетині двох прямих, у 2 рази більший за другий. Визначте міри утворених кутів.
- 676.** Прямі  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$ , причому  $\angle AOC = 130^\circ$ . Знайдіть кут між бісектрисами:
- $\angle COB$  і  $\angle BOD$ ;
  - $\angle COB$  і  $\angle AOD$ .
- 677.** Прямі  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$ . Доведіть, що бісектриси кутів  $\angle BOC$  і  $\angle AOC$  перпендикулярні.
- 678.** Прямі  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$ ,  $OE$  — бісектриса  $\angle BOD$ ,  $\angle DOE = 55^\circ$ . Знайдіть  $\angle AOC$  і  $\angle COB$ .
- 679.**  $\angle AOB$  і  $\angle BOC$  — суміжні кути,  $OE$  — бісектриса  $\angle BOC$ ,  $\angle EOC = 45^\circ$ . Доведіть, що  $OB \perp AC$ .
- 680.** Один з кутів, утворених при перетині двох прямих, у 9 разів менший за суму трьох інших кутів. Знайдіть ці кути.
- 681.** Один з кутів, утворених при перетині двох прямих, у 4 рази більший за суму двох суміжних з ним кутів. Обчисліть ці кути.

## до § 5

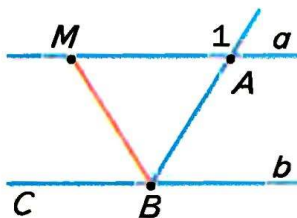
- 682.** За допомогою транспортира побудуйте  $\angle AOB = 70^\circ$ .  $M$  — внутрішня точка  $\angle AOB$ . Через точку  $M$  проведіть прямі, перпендикулярні до сторін кута.
- 683.** За допомогою транспортира побудуйте  $\angle AOB = 120^\circ$ .  $M$  — внутрішня точка  $\angle AOB$ . Через точку  $M$  проведіть прямі, паралельні сторонам кута.
- 684.** Площа квадрата  $ABCD$  дорівнює  $16 \text{ см}^2$ . Знайдіть відстань від точки  $A$  до сторін  $BC$  і  $CD$ .
- 685.** Периметр прямокутника  $ABCD$  дорівнює  $20 \text{ см}$ .  $AB$  менша за  $BC$  на  $2 \text{ см}$ . Побудуйте даний прямокутник і знайдіть відстань від точки  $A$  до сторін  $BC$  і  $CD$ .
- 686.**  $\angle AOB$  і  $\angle BOC$  — суміжні кути. Чи перпендикулярні промені  $OM$  і  $ON$  ( $M$  — внутрішня точка  $\angle AOB$ ,  $N$  —  $\angle BOC$ ), якщо:
- $\angle BOC = 50^\circ$ ,  $ON$  — бісектриса  $\angle BOC$ ,  $\angle AOM = 70^\circ$ ;
  - $\angle AOB : \angle BOC = 2 : 1$ ,  $\angle MOB = \frac{1}{3} \angle AOB$ ,  $\angle CON = 10^\circ$ ;
  - $\angle AOB - \angle BOC = 20^\circ$ ,  $\angle MOB = \angle NOC = 40^\circ$ ;
  - $\angle DOC = \frac{2}{3} \angle AOB$ ,  $\angle NOC : \angle NOB = 1 : 2$ ,  $\angle AOM - \angle BOM = 24^\circ$ ?

## до § 6

- 687.** Чи паралельні прямі  $a$  і  $b$  (мал. 251), якщо:
- $\angle 1 = 40^\circ$ ,  $\angle 2 = 140^\circ$ ;
  - $\angle 1$  у 3 рази менший за  $\angle 2$ , а  $\angle 2$  на  $90^\circ$  більший за  $\angle 1$ ;
  - $\angle 1 : \angle 2 = 1 : 4$ , а  $\angle 1$  на  $108^\circ$  менший за  $\angle 2$ ?
- 688.**  $BM$  — бісектриса  $\angle ABC$  (мал. 252). Чи паралельні прямі  $a$  і  $b$ , якщо:
- $\angle 1 = 160^\circ$ ,  $\angle ABM = 80^\circ$ ;
  - $\angle CBM = 50^\circ$ ,  $\angle 1 = 120^\circ$ ;
  - $\angle ABM$  у 2 рази менший за  $\angle 1$ ?



Мал. 251

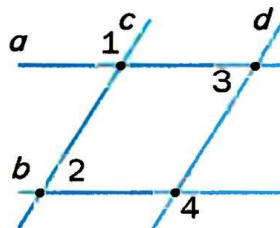


Мал. 252



**689.** Запишіть пари паралельних прямих (мал. 253), якщо:

- а)  $\angle 1 = 120^\circ$ ,  $\angle 2 = 70^\circ$ ,  $\angle 3 = 60^\circ$ ;
- б)  $\angle 1 = 120^\circ$ ,  $\angle 3 = 80^\circ$ ,  $\angle 4 = 100^\circ$ ;
- в)  $\angle 2 = 60^\circ$ ,  $\angle 3 = 80^\circ$ ,  $\angle 4 = 120^\circ$ ;
- г)  $\angle 3 = \angle 2 = 60^\circ$ ,  $\angle 4 = 120^\circ$ .



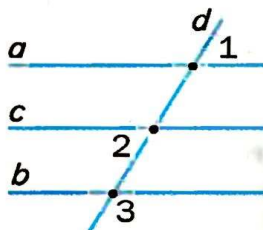
■ Мал. 253

**690.** Доведіть, що протилежні сторони квадрата лежать на паралельних прямих.

**691.** У чотирикутнику  $ABCD$   $\angle BAD$  у 2 рази менший за  $\angle ABC$ , а  $\angle ABC$  на  $60^\circ$  більший за  $\angle BAD$ . Доведіть, що  $BC \parallel AD$ .

**692.** У чотирикутнику  $ABCD$  пряма  $BD$  ділить навпіл  $\angle ABC$  і  $\angle ADC$ . Чи паралельні протилежні сторони чотирикутника, якщо:

- а)  $\angle ABC = 140^\circ$ ,  $\angle BDC = 70^\circ$ ;
- б)  $\angle ABC = \angle ADC$ ?

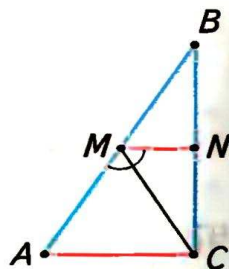


■ Мал. 254

**693.** Запишіть пари паралельних прямих (мал. 254), якщо:

- а)  $\angle 1 = 70^\circ$ ,  $\angle 2 = 80^\circ$ ,  $\angle 3 = 110^\circ$ ;
- б)  $\angle 1 = 60^\circ$ ,  $\angle 2 = 60^\circ$ ,  $\angle 3 = 100^\circ$ ;
- в)  $\angle 1 = 50^\circ$ ,  $\angle 2 = 80^\circ$ ,  $\angle 3 = 100^\circ$ ;
- г)  $\angle 1 = \angle 2 = 40^\circ$ ,  $\angle 3 = 140^\circ$ .

**694.** На сторонах  $AB$  і  $BC$   $\triangle ABC$  (мал. 255) взято точки  $M$  і  $N$  так, що  $MC$  — бісектриса  $\angle AMN$ ,  $\angle ACM = 50^\circ$ . Доведіть, що  $MN \parallel AC$ , якщо  $\angle BMN = 80^\circ$ .

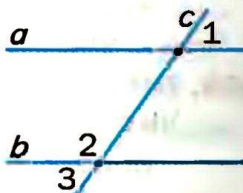


■ Мал. 255

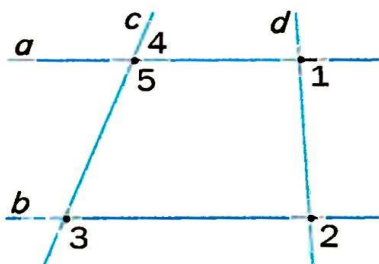
## До § 7

**695.** Прямі  $a$  і  $b$  паралельні (мал. 256). Знайдіть  $\angle 3$ , якщо:

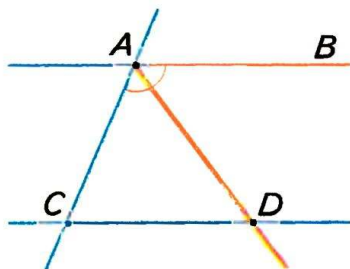
- а)  $\angle 1 = 70^\circ$ ;
- б)  $\angle 1$  на  $30^\circ$  менший за  $\angle 2$ ;
- в)  $\angle 1 : \angle 2 = 4 : 5$ ;
- г)  $\angle 1$  становить  $\frac{3}{5} \angle 2$ .



■ Мал. 256



Мал. 257



Мал. 258

**696.** Розв'яжіть задачі, користуючись малюнком 257:

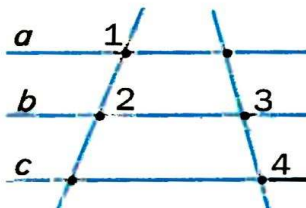
- $\angle 1 = 80^\circ$ ,  $\angle 2 = 100^\circ$ ,  $\angle 3 = 60^\circ$ . Знайдіть  $\angle 4$ ;
- $\angle 4 = \angle 3$ ,  $\angle 2 = 2 \angle 1$ . Знайдіть  $\angle 1$  і  $\angle 2$ ;
- $\angle 1 = 55^\circ$ ,  $\angle 2 = 125^\circ$ ,  $\angle 5 : \angle 3 = 3 : 1$ . Знайдіть  $\angle 4$ ;
- $\angle 3 = 70^\circ$ ,  $\angle 5 = 110^\circ$ ,  $\angle 2 - \angle 1 = 70^\circ$ . Знайдіть  $\angle 1$  і  $\angle 2$ .

**697.**  $AB \parallel CD$ ,  $AD$  — бісектриса  $\angle CAB$  (мал. 258).  $\angle ADC = 50^\circ$ . Знайдіть  $\angle ACD$ .

**698.** На сторонах  $AB$  і  $BC$   $\triangle ABC$  взято точки  $M$  і  $N$  так, що  $MN \parallel AC$  (мал. 255).  $\angle ACM = 65^\circ$ ,  $MC$  — бісектриса  $\angle AMN$ . Знайдіть  $\angle BMN$  і  $\angle BAC$ .

**699.** Чи паралельні прямі  $a$  і  $c$  (мал. 259), якщо:

- $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ,  $\angle 3 = \angle 4$ ;
- $\angle 2 = 50^\circ$ ,  $\angle 3 = 100^\circ$ ,  $\angle 4 = 100^\circ$ ,  $\angle 1 - \angle 4 = 30^\circ$ ;
- $\angle 2 : \angle 3 = 1 : 2$ ,  $\angle 3 - \angle 2 = 60^\circ$ ,  $\angle 1 = \angle 3$ ,  $\angle 4 = 130^\circ$ ?



Мал. 259

## до § 8

**700.** Доведіть, що кути, утворені при перетині двох перпендикулярних прямих, рівні.

**701.** Доведіть, що зовнішні різносторонні кути, утворені січною з паралельними прямими, рівні.

**702.** Доведіть, що зовнішні односторонні кути, утворені січною з паралельними прямими, в сумі дорівнюють  $180^\circ$ .

- 703.** Доведіть, що протилежні сторони прямокутника паралельні.
- 704.** Доведіть, що бісектриси зовнішніх різносторонніх кутів, утворених січною з паралельними прямими, паралельні.
- 705.** На прямій послідовно взято точки  $A, B, C$  і  $D$ .  $M$  — середина відрізка  $BC$ ,  $AB = CD$ . Доведіть, що  $M$  — середина  $AD$ .
- 706.** У чотирикутнику  $ABCD$   $BC \parallel AD$ . Доведіть, що сума кутів  $A$  і  $B$  даного чотирикутника дорівнює сумі кутів  $C$  і  $D$ .
- 707.** У  $\triangle ABC$   $P \in AB$ ,  $K \in BC$ ,  $PK \parallel AC$ . Доведіть, що кути  $\triangle ABC$  дорівнюють кутам  $\triangle PBK$ .
- 708.** Через точку на площині проведено 4 прямі. Доведіть, що принаймні один з утворених кутів менший за  $47^\circ$ .

## до § 9

- 709.** Знайдіть периметр трикутника, якщо одна з його сторін дорівнює 5 см, друга на 3 см більша, а третя на 3 см менша за суму перших двох.
- 710.** Чи існує трикутник, у якого одна сторона в 2 рази більша за другу, третя на 1 см менша за другу, а периметр дорівнює 11 см?
- 711.** Дві сторони трикутника дорівнюють 2 см і 3 см. Якому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона трикутника?
- 712.** З вершини  $B$   $\triangle ABC$  проведено висоту  $BK$ . Знайдіть  $KC$ , якщо  $AC = 10$  см,  $AK = 3$  см. Розгляньте випадки, коли:  
а)  $\angle A$  — гострий; б)  $\angle A$  — тупий.
- 713.** У  $\triangle ABC$  проведено висоту  $BK$ .  $AK : KC = 3 : 5$ ,  $AC = 16$  см. Знайдіть  $AK$  і  $KC$ , якщо: а)  $\angle A$  — гострий; б)  $\angle A$  — тупий.
- 714.** Висота і медіана прямокутного трикутника, проведені з вершини прямого кута, ділять кут на три рівні частини. Знайдіть кут між висотою і бісектрисою, проведеною з цієї вершини.
- 715.** З вершини тупого кута  $B$   $\triangle ABC$  проведено висоту, бісектрису і медіану. Кут між бісектрисою і висотою у 2 рази більший за кут між бісектрисою і медіаною. Знайдіть ці кути, якщо кут між висотою і медіаною дорівнює  $60^\circ$ .



## до § 10

- 716.** Знайдіть кути трикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 7.
- 717.** Знайдіть внутрішні кути трикутника, якщо один з них у 3 рази більший за другий, а зовнішній кут при третій вершині дорівнює  $100^\circ$ .
- 718.** Знайдіть внутрішні кути трикутника, якщо зовнішні кути пропорційні числам 3, 4 і 5.
- 719.** Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо кут між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини прямого кута, дорівнює  $20^\circ$ .
- 720.** У прямокутному  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) проведено висоту  $CH$ . Доведіть, що  $\angle HCB = \angle CAB$ .
- 721.** Знайдіть кути  $\triangle ABC$ , якщо  $\angle B = 100^\circ$ , а бісектриса  $BK$  є одночасно і висотою.
- 722.** Один із кутів трикутника на  $20^\circ$  більший за другий і на  $50^\circ$  менший за третій. Знайдіть кут між бісектрисами менших кутів трикутника.
- 723.** У  $\triangle ABC$   $\angle A = 70^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ . Знайдіть кут між:  
а) бісектрисами, проведеними з вершин  $A$  і  $C$ ;  
б) висотами, проведеними з вершин  $A$  і  $C$ .
- 724\*.** Доведіть, що кут між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини  $B$  рівнобедреного  $\triangle ABC$ , дорівнює піврізниці кутів  $A$  і  $C$ .

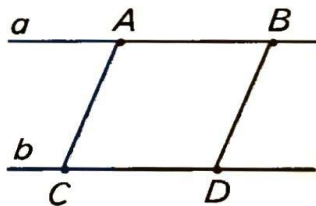
## до § 11

- 725.** Точка  $M$  ділить відрізок  $AB$  на два відрізки, довжини яких 5 см і 7 см. На які відрізки поділить точка  $N$  відрізок  $CD$ , якщо  $CD = AB$  і  $CN : ND = 1 : 5$ ?
- 726.**  $\angle AOB = \angle COD$ ,  $OM$  — внутрішній промінь  $\angle COD$ ,  $\angle COM : \angle MOD = 2 : 3$ , а  $\angle MOD - \angle COM = 30^\circ$ . Знайдіть  $\angle AOB$ .
- 727.**  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .  $\angle A = 70^\circ$ ,  $\angle B = 50^\circ$ . Знайдіть  $\angle C$ .
- 728.**  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .  $AC = 7$  см,  $AB - BC = 2$  см. Знайдіть сторони  $\triangle A_1B_1C_1$ , якщо його периметр 21 см.

- 729.** Чи рівні кути трикутників  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ , якщо  $\angle A = 70^\circ$ ,  $\angle C = 80^\circ$ , а кути  $\triangle A_1B_1C_1$  пропорційні числам 7, 5 і 8?
- 730.** Чи рівні квадрати  $ABCD$  і  $A_1B_1C_1D_1$ , якщо периметр квадрата  $ABCD$  дорівнює 20 см, а площа квадрата  $A_1B_1C_1D_1$  дорівнює:  
а)  $36 \text{ см}^2$ ; б)  $25 \text{ см}^2$ ?
- 731.** Радіус одного з кіл 5 см, а довжина другого  $10\pi$  см. Чи рівні ці кола?
- 732.** Довжина одного з кіл  $14\pi$  см, а площа круга, обмеженого другим колом,  $64\pi \text{ см}^2$ . Чи рівні ці кола?

## до § 12

- 733.** Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$ .  $AD \parallel CB$  і  $AD = CB$ . Доведіть, що  $\triangle AOD = \triangle COB$ .
- 734.** Рівні відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються так, що  $\angle ABC = \angle BCD$ . Доведіть, що  $AC = BD$ .
- 735.** Дано відрізок  $AB$  і точки  $C$  і  $D$  такі, що  $\angle ACB = \angle ADB$  і  $\angle CAB = \angle ABD$ . Доведіть, що  $AC = BD$ . Розгляньте випадки, коли точки  $C$  і  $D$  лежать в одній півплощині відносно прямої  $AB$  і в різних півплощинах.
- 736.** На паралельних прямих  $a$  і  $b$  взято точки  $A, B, C$  і  $D$ , як показано на малюнку 260;  $AB = CD$ . Доведіть, що  $AC \parallel BD$ .
- 737.** Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$ .  $AO = CO$ ,  $BO = DO$ . Доведіть, що  $\angle OBD = \angle ODB$ .
- 738.** У колі з центром  $O$  проведено діаметри  $AB$  і  $CD$ . Доведіть, що  $AC = BD$  і  $AC \parallel BD$ .
- 739.** На колі з центром  $O$  по один бік від діаметра  $AD$  взято точки  $B$  і  $C$  такі, що  $\angle AOB = \angle COD$ . Доведіть, що  $BD = AC$ .
- 740.**  $CD$  — медіана  $\triangle ABC$ ,  $C_1D_1$  — медіана  $\triangle A_1B_1C_1$ . Доведіть, що  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ , якщо  $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$ .
- 741.**  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ . Доведіть, що бісектриси, проведені з вершин  $B$  і  $B_1$ , рівні.



■ Мал. 260

**742.**  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ . Доведіть, що висоти, проведені з вершин  $A$  і  $A_1$ , рівні.

**743.**  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ . Доведіть, що медіани, проведені з вершин  $B$  і  $B_1$ , рівні.

## до § 13

**744.** Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює  $110^\circ$ . Обчисліть інші кути трикутника.

**745.** Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює  $80^\circ$ . Обчисліть інші кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?

**746.** Одна зі сторін рівнобедреного трикутника на 3 см більша за другу. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр 21 см. Розгляньте всі можливі випадки.

**747.** На основі  $AC$  рівнобедреного  $\triangle ABC$  взято точки  $M$  і  $N$  так, що  $AM = CN$ . Доведіть, що  $\triangle MBN$  — рівнобедрений.

**748.** Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює  $100^\circ$ . Під яким кутом перетинаються:

- а) рівні бісектриси трикутника;
- б) продовження рівних висот трикутника?

**749.** У  $\triangle ABC$  медіана  $AM$  перпендикулярна до бісектриси  $BK$ . Знайдіть  $BC$ , якщо  $AB = 10$  см.

**750.** Доведіть, що медіани, проведені до бічних сторін рівнобедреного трикутника, рівні.

**751.** Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$ .  $AO = CO$ ,  $BO = DO$ ,  $AO \neq BO$ .  $K$  — точка перетину прямих  $AD$  і  $BC$ . Доведіть, що  $\triangle DKB$  — рівнобедрений. Розгляньте випадки:

- а)  $AO < BO$ ; б)  $AO > BO$ .

**752.** Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут між бісектрисами, проведеними до бічних сторін, у 2 рази більший за кут при вершині.

**753.** Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює куту між бісектрисами, проведеними до основи і до бічної сторони.



- 754.** У рівнобедреному  $\triangle ABC$  кут при вершині  $B$  у 2 рази менший за кут при основі,  $AD$  — бісектриса,  $D \in BC$ . Доведіть, що  $\triangle CAD$  і  $\triangle ADB$  рівнобедрені.

## до § 14

- 755.** Дано відрізки  $AB$  і точки  $C$  та  $D$  поза прямою  $AB$  такі, що  $AC = BD$  і  $AD = BC$ . Доведіть, що  $\triangle ACB = \triangle BDA$ . Розгляньте різні випадки розміщення точок  $C$  і  $D$ .
- 756.** Протилежні сторони чотирикутника  $ABCD$  попарно рівні. Доведіть, що  $\triangle ABC = \triangle CDA$ .
- 757.** Протилежні сторони чотирикутника  $ABCD$  попарно рівні. Доведіть, що вони паралельні.
- 758.** Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$ ,  $AO = CO$ ,  $BO = DO$ . Доведіть, що  $\triangle ADB = \triangle CBD$ .
- 759.** Усередині рівнобедреного  $\triangle ABC$  з основою  $AC$  взято точку  $D$  таку, що  $AD = CD$ . Доведіть, що  $\angle ADB = \angle CDB$ .
- 760.** Точки  $C$  і  $D$  лежать по різні боки від прямої  $AB$ ,  $AC = AD$  і  $BC = BD$ . Доведіть, що  $AB$  — бісектриса  $\angle CAD$ .
- 761.** Трикутники  $ACB$  і  $ADB$  мають спільну основу  $AB$ ,  $AC = AD$ ,  $BC = BD$ . Доведіть, що  $AB \perp CD$ .
- 762.** Точки  $C$  і  $D$  лежать по один бік від прямої  $AB$ ,  $AC = BD$  і  $AD = CB$ . Доведіть, що  $\triangle AOB$  — рівнобедрений, де  $O$  — точка перетину відрізків  $AD$  і  $BC$ .
- 763.** Точки  $C$  і  $D$  лежать по один бік від прямої  $AB$ ,  $AC = BD$  і  $AD = CB$ . Доведіть, що  $\triangle AKB$  рівнобедрений, де  $K$  — точка перетину прямих  $AC$  і  $BD$ .

## до § 15

- 764.** Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо один з них у 4 рази більший за другий.
- 765.** Кути трикутника пропорційні числам 1, 2 і 3. Доведіть, що трикутник прямокутний.
- 766.** Один з кутів трикутника дорівнює сумі двох інших. Доведіть, що трикутник прямокутний.

- 767.** Один з катетів прямокутного трикутника більший за другий на 7 см і менший за гіпотенузу на 1 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр 30 см.
- 768.** Медіана трикутника дорівнює половині сторони, до якої вона проведена. Доведіть, що трикутник прямокутний.
- 769.** Знайдіть менший катет прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 10 см, а один із кутів  $30^\circ$ .
- 770.** Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а один з кутів  $30^\circ$ . Знайдіть відрізки, на які висота, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу.
- 771.** У  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $BP$  — бісектриса,  $BP = 5$  см. Знайдіть  $AC$ .
- 772.** У  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 30^\circ$ .  $CK \perp AB$ ,  $K \in AB$ . Знайдіть відстань від точки  $K$  до  $BC$ , якщо  $AC = 8$  см.
- 773.** Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 10 см. Знайдіть довжину висоти, проведеної з вершини прямого кута.
- 774.** Катети рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнюють по 10 см.  $CK$  — висота, проведена з вершини прямого кута. Знайдіть відстань від точки  $K$  до катетів.
- 775.**  $M$ ,  $N$ ,  $P$  і  $K$  — середини сторін квадрата  $ABCD$ . Доведіть, що  $MNP K$  — квадрат.

## до § 16

- 776.** У  $\triangle ABC$   $\angle A = 70^\circ$ ,  $\angle B = 80^\circ$ . Вкажіть найбільшу і найменшу сторони трикутника.
- 777.** У  $\triangle ABC$   $AB : 2 = BC : 3 = AC : 7$ . Вкажіть найбільший і найменший кути трикутника.
- 778.** Доведіть, що найбільша сторона трикутника лежить проти найменшого зовнішнього кута.
- 779.** У  $\triangle ABC$  на стороні  $AC$  взято точку  $K$  таку, що  $AB = KB$ . Доведіть, що  $\angle A > \angle C$ .
- 780.** Висота  $BK$   $\triangle ABC$  ділить сторону  $AC$  у відношенні  $AK : KC = 1 : 3$ . Порівняйте кути  $A$  і  $C$ .

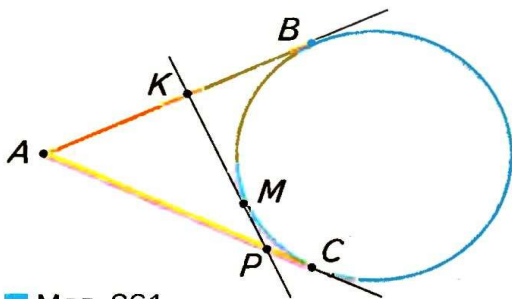
- 781.** Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 3 см і 6 см. Визначте третю сторону трикутника.
- 782.** Одна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 39 см, а периметр трикутника 157 см. Знайдіть інші сторони трикутника.
- 783.** Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 10 см. Яким натуральним числом може виражатися довжина третьої сторони?
- 784.** Одна сторона трикутника дорівнює 0,6 см, друга — у 3 рази більша. Знайдіть периметр трикутника, якщо довжина третьої сторони — натуральне число.
- 785.** Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 5 см і 2 см. Чи може довжина висоти, проведеної до основи, виражатися натуральним числом?
- 786.** Бічна сторона і основа рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють 5 см і 6 см. Знайдіть довжину висоти, проведеної до основи, скориставшись теоремою Піфагора (див. с. 118).

## до § 17

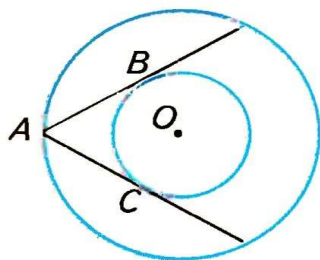
- 787.** Хорда  $AB$  кола із центром  $O$  дорівнює радіусу цього кола. Знайдіть  $\angle AOB$ .
- 788.** Знайдіть відстань від центра  $O$  кола радіуса  $r$  до хорди  $AB$ , якщо  $\angle AOB = 120^\circ$ .
- 789.** Діаметри  $AB$  і  $CD$  кола із центром  $O$  перпендикулярні. Доведіть, що  $\angle ACB = 90^\circ$ .
- 790.** У колі з центром  $O$  проведено хорди  $AB$  і  $CD$ .  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $\angle COD = 120^\circ$ . Яка з хорд лежить далі від центра кола і чому?
- 791.** Хорди  $AB$  і  $CD$  паралельні і лежать на однаковій відстані від центра кола. Доведіть, що  $AB = CD$ .
- 792.** Дано два кола з радіусами 3 см і 5 см. Як розміщені ці кола, якщо відстань між їх центрами дорівнює:  
а) 6 см; б) 8 см; в) 10 см?
- 793.** Два кола дотикаються зовні. Відстань між їх центрами дорівнює 12 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо один з них більший за другий на 2 см.



- 794.** Два кола мають внутрішній дотик. Відстань між їх центрами дорівнює 8 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо один з них у 3 рази менший за другий.
- 795.** Три кола з центрами  $O_1$ ,  $O_2$  і  $O_3$  попарно дотикаються одне до одного зовнішнім способом. Знайдіть їх радіуси, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 4, а периметр  $\triangle O_1O_2O_3$  дорівнює 36 см.
- 796.** Із точки  $A$  до кола проведено дотичні  $AB$  і  $AC$ , пряма  $KP$  дотикається до кола в точці  $M$  (мал. 261). Знайдіть  $AB$  і  $AC$ , якщо периметр  $\triangle AKP = 36$  см.
- 797.** Із точки  $A$  до кола з центром  $O$  проведено дотичні  $AB$  і  $AC$ ,  $\angle BOC = 120^\circ$ ,  $AB = 7$  см. Знайдіть периметр  $\triangle ABC$ .
- 798.** Знайдіть  $AB$  — ширину кільця, утвореного концентричними колами радіусів 10 см і 7 см.
- 799.** Знайдіть радіуси двох концентричних кіл, якщо вони відносяться як 2 : 5, а ширина кільця дорівнює 9 см.
- 800.** Дано два концентричні кола. Із точки  $A$  кола радіуса 10 см до кола меншого радіуса проведено дотичні  $AB$  і  $AC$  (мал. 262). Знайдіть радіус меншого кола, якщо  $\angle BAC = 60^\circ$ .



Мал. 261



Мал. 262

## до § 18

- 801.** Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців хорди  $AB$  кола з центром  $O$ .
- 802.** Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців основи рівнобедреного трикутника.

- 803.** Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від вершин рівностороннього трикутника.
- 804.** Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін рівностороннього трикутника.
- 805.** Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються.
- 806.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до двох паралельних прямих.
- 807.** Дано коло з центром  $O$  радіуса  $r$ . Знайдіть геометричне місце точок, які лежать на відстані  $2r$  від точки  $O$ .
- 808.** Дано коло радіуса 10 см. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіуса 3 см, які з даним колом мають дотик:  
а) зовнішній; б) внутрішній.
- 809.** Дано два кола рівних радіусів, які дотикаються зовні. Доведіть, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від центрів кіл, є спільна дотична цих кіл, яка проходить через точку дотику.

## до § 19

- 810.** Кут  $B$  прямокутного  $\triangle ABC$  дорівнює  $60^\circ$ , катет  $BC = 5$  см. Знайдіть радіус описаного кола.
- 811.** Сторони прямокутного  $\triangle ABC$  дорівнюють 9 см, 12 см і 15 см. Знайдіть радіуси описаного і вписаного кіл.
- 812.** У прямокутний трикутник з гіпотенузою 20 см вписано коло радіуса 3 см. Знайдіть периметр даного трикутника.
- 813.** Точка дотику кола, вписаного у трикутник, ділить одну зі сторін на відрізки 5 см і 7 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр 44 см.
- 814.** У  $\triangle ABC$  сторона  $AC = 15$  см. Точка дотику вписаного у трикутник кола ділить сторону  $AB$  у відношенні  $2 : 1$ , починаючи від вершини  $A$ . Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 42 см.
- 815.** Сторони трикутника дорівнюють 5 см, 7 см і 10 см. Знайдіть відрізки, на які точка дотику вписаного кола ділить найбільшу сторону.

- 816.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, кут при основі  $30^\circ$ . Знайдіть радіус описаного кола.
- 817.** У трикутнику центри вписаного і описаного кіл збігаються. Знайдіть кути трикутника.
- 818.** У  $\triangle ABC$  вписано коло,  $BC = a$ . Доведіть, що відстань від точки  $A$  до найближчої точки дотику дорівнює  $p - a$ , де  $p$  — півпериметр.
- 819.** У прямокутний трикутник зі сторонами  $AB = 10$  см,  $AC = 8$  см і  $BC = 6$  см вписано коло.  $MN$  — дотична до кола, проведена паралельно до  $BC$  ( $M \in AB$ ,  $N \in AC$ ). Знайдіть периметр  $\triangle AMN$ .
- 820.** Дано  $\triangle ABC$  зі сторонами 7 см, 9 см і 10 см. На його менших сторонах  $AB$  і  $BC$  взято точки  $P$  і  $K$  такі, що пряма  $PK$  дотикається до кола, вписаного в трикутник. Знайдіть периметр  $\triangle PBK$ .

## до § 20

- 821.** Поділіть даний відрізок у відношенні 1 : 3.
- 822.** Побудуйте прямий кут і проведіть його бісектрису.
- 823.** Побудуйте прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см.
- 824.** Побудуйте трикутник зі сторонами 5 см, 7 см і 9 см.
- 825.** Побудуйте рівнобедрений трикутник з основою  $a$  і бічною стороною  $b$ .
- 826.** Побудуйте рівнобедрений трикутник з основою  $a$  і кутом при основі  $\alpha$ .
- 827.** Побудуйте гострокутний і тупокутний трикутники і впишіть у них кола.
- 828.** Побудуйте прямокутний трикутник із катетами  $a$  і  $b$  та опишіть навколо нього коло.
- 829.** Побудуйте трикутник зі сторонами  $a$  і  $b$  і кутом між ними  $120^\circ$ . Знайдіть центр описаного кола та опишіть це коло.
- 830.** Побудуйте трикутник за двома сторонами і зовнішнім кутом при їх спільній вершині.
- 831.** Накресліть дві паралельні прямі, відстань між якими дорівнює даному відрізку.

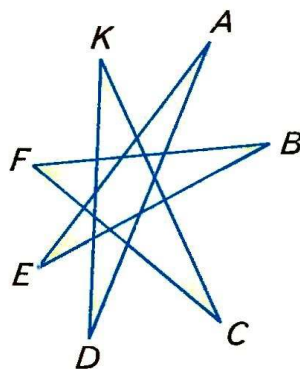


## до § 21

- 832.** Побудуйте трикутник, периметр якого дорівнює 18 см, а сторони пропорційні числам 2, 3 і 4.
- 833.** Побудуйте прямокутник, периметр якого дорівнює 20 см, а нерівні сторони відносяться як 2 : 3.
- 834.** Дано прямі  $a$  і  $c$ , що перетинаються, і відрізок  $KP$ . На прямій  $a$  вкажіть точку, віддалену від прямої  $c$  на відстань  $KP$ .
- 835.** Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, проведеною до однієї з цих сторін.
- 836.** За допомогою циркуля і лінійки побудуйте кут, який дорівнює: а)  $30^\circ$ ; б)  $60^\circ$ ; в)  $15^\circ$ ; г)  $120^\circ$ ; ґ)  $150^\circ$ ; д)  $75^\circ$ .
- 837.** Побудуйте трикутник за двома його зовнішніми кутами і стороною, що з'єднує вершини цих кутів.
- 838.** Опишіть навколо даного кола:  
а) квадрат; б) рівносторонній трикутник.
- 839.** Впишіть у дане коло:  
а) квадрат; б) рівносторонній трикутник.
- 840.** Дано коло радіуса  $r$ . Побудуйте геометричне місце середин його хорд довжини  $r$ .
- 841.** Дано точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Проведіть через точку  $A$  пряму, рівно віддалену від  $B$  і  $C$ .
- 842.** Навколо даного кола опишіть трикутник, два кути якого дані.
- 843.** Побудуйте коло даного радіуса, дотичне до обох сторін даного кута.
- 844.** Побудуйте коло даного радіуса, яке б дотикалося до однієї сторони даного кута і мало б центр на другій його стороні.
- 845.** Побудуйте коло даного радіуса, яке б дотикалося до даної прямої в даній її точці.
- 846.** Побудуйте геометричне місце точок, з яких дане коло видно під: а) прямим кутом; б) кутом  $60^\circ$ .
- 847.** Побудуйте коло, що дотикається до кожного з двох даних концентричних кіл.

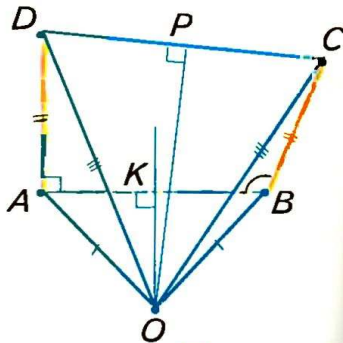
## ■ ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ ■

- 848.** Відстань від Землі до Сонця дорівнює приблизно 149 500 тис. км, а до Місяця — 400 тис. км. Знайдіть відстань від Місяця до Сонця під час:
- сонячного затемнення;
  - місячного затемнення.
- 849.** Точки  $A, B, C$  лежать на одній прямій; точки  $K, P, T$  — середини відрізків  $AB, AC$  і  $BC$ . Доведіть, що  $KP = BT$ .
- 850.** Точка  $C$  — середина відрізка  $AB$ . Знайдіть на відрізку  $AB$  таку точку  $X$ , щоб виконувалась рівність  $XA = 1,5(XB + XC)$ .
- 851.** Один із суміжних кутів у три рази більший від їх різниці. Знайдіть міри цих кутів.
- 852.** Точки  $A, B, C, D$  розміщені на площині так, що  $AB = BC = CA$  і  $DA = DB = DC$ . Знайдіть міру кута  $ADB$ .
- 853.** Знайдіть суму кутів  $A, B, C, D, E, F$ ,  $K$  семикутної зірки (мал. 263).
- 854.** Всередині трикутника  $ABC$  взято довільну точку  $X$ . Доведіть, що кут  $AXC$  більший від кута  $ABC$ .
- 855.** Побудуйте кут на 25 % більший від даного гострого кута.
- 856.** Чи можуть дві висоти трикутника точкою перетину ділитися пополам?
- 857.** Знайдіть периметр трикутника, якщо від однієї сторони трикутника він більший на  $a$ , від другої — на  $b$ , від третьої — на  $c$ .
- 858.** Доведіть, що сума медіан трикутника менша від його периметра, але більша від півпериметра.
- 859.** Доведіть, що будь-який трикутник можна розрізати на кілька рівнобедрених трикутників.
- 860.** Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$  так, що  $AC = AO = BO = BD$ . Доведіть, що  $OC = OD$ .



■ Мал. 263

- 861.** Відрізок  $BB_1$  – бісектриса  $\triangle ABC$ . Доведіть, що  $AB > AB_1$ , і  $BC > B_1C$ .
- 862.** Доведіть, що сума відстаней від довільної точки основи гострокутного рівнобедреного трикутника до його бічних сторін є сталою.
- 863.** У  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $\angle B = 20^\circ$ . На стороні  $AB$  взято точку  $M$  таку, що  $BM = AC$ . Знайдіть кут  $ACM$ .
- 864.** Гострі кути прямокутного трикутника відносяться як 1 : 3. Доведіть, що бісектриса його прямого кута дорівнює одному з катетів.
- 865.** Один з гострих кутів прямокутного трикутника на  $n^\circ$  більший від другого. Знайдіть кут між медіаною і висотою трикутника, проведеними з вершини прямого кута.
- 866.** Висота і медіана, проведені з вершини трикутника, ділять його кут на три рівні частини. Знайдіть кути цього трикутника.
- 867.** Доведіть, що кожен сторону трикутника з центра вписаного в нього кола видно під тупим кутом.
- 868.** Навколо рівностороннього трикутника  $ABC$  описано коло. Точка  $K$  кола лежить усередині кута  $C$ . Доведіть, що  $KA + KB = KC$ .
- 869.** Гіпотенуза прямокутного трикутника у 4 рази довша за проведену до неї висоту. Знайдіть міри гострих кутів трикутника.

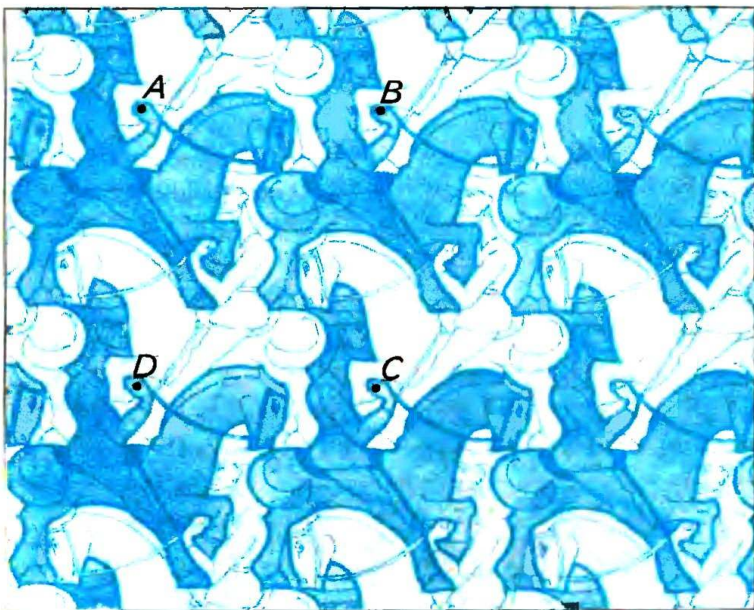


■ Мал. 264

- 870.** Знайдіть помилку в міркуваннях.  
Доведемо, що прямий кут дорівнює тупому. Нехай кут  $ABC$  тупий, а  $DAB$  прямий (мал. 264). Відкладемо  $AD = BC$ , проведемо відрізок  $DC$  і серединні перпендикуляри  $KO$  і  $PO$  відрізків  $AB$  та  $CD$ . Вони перетнуться в деякій точці  $O$ , бо прямі  $AB$  і  $CD$  не паралельні. Сполучивши точку  $O$  з  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$ , одержимо рівні трикутники  $OAD$  і  $OBC$  (за трьома сторонами). Отже,  $\angle OAD = \angle OBC$ . Кути  $OAB$  і  $OBA$  також рівні. Тому  $\angle DAB = \angle ABC$ , тобто прямий кут дорівнює тупому.



- 871.** Катети прямокутного трикутника дорівнюють  $a$  і  $b$ , а гіпотенуза —  $c$ . Знайдіть діаметр вписаного кола.
- 872.** Побудуйте прямокутний трикутник:
- 1) за катетом і різницею двох інших його сторін;
  - 2) за гіпотенузою і різницею катетів.
- 873.** Усі вершини на конях, зображені на малюнку 265, — рівні фігури. Знайдіть площу однієї фігури, якщо точки  $A, B, C, D$  — вершини чотирикутника площею  $S$ .



■ Мал. 265

- 874.** Побудуйте трикутник за двома кутами і різницею протилежних їм сторін.
- 875.** Дано тупокутний трикутник. Проведіть пряму, що відтинала б від нього такий трикутник, дві сторони і кут якого дорівнювали б двом сторонам і куту даного трикутника.
- 876.** Проведіть частину бісектриси кута, вершина якого недоступна (лежить за межею зошита).
- 877.** Побудуйте трикутник за периметром і двома кутами.

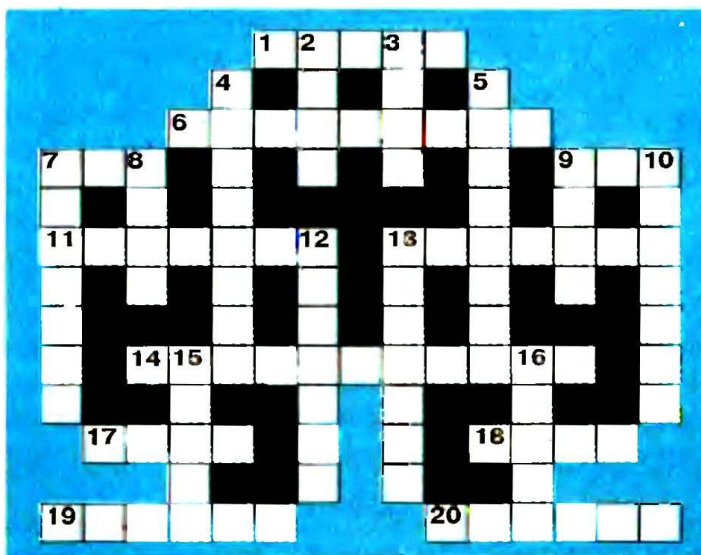
**878.** Розв'яжіть кросворд (мал. 266).

По горизонталі :

**1.** Основне геометричне поняття, що приймається без означення. **6.** Наука про геометричні фігури. **7.** Захищена споруда в порту. **9.** Система умовних знаків для передавання інформації. **11.** Пряма, яка має з колом тільки одну спільну точку. **13.** Неправильність у міркуваннях, побудовах тощо. **14.** Частина геометрії про фігури на площині. **17.** Восьма частина прямого кута. **18.** Частина площини, обмежена колом. **19.** Частина круга. **20.** Давньогрецький математик, автор книги «Основи».

По вертикалі :

**2.** Чотирикутник з рівними сторонами. **3.** Одиниця довжини. **4.** Кількісна характеристика предмета або явища. **5.** Тисячна частина метра. **7.** Відрізок, який сполучає вершину трикутника з серединою протилежної сторони. **8.** Одиниця об'єму. **9.** Геометрична фігура. **10.** Найбільша хорда кола. **12.** Твердження, яке приймається без доведення. **13.** Прилад для наближеного вимірювання площ. **15.** Норма, крайній ступінь обмеження. **16.** Латинська літера.



■ Мал. 266

# 3 історії геометрії

Геометрія — наука давня. Один грецький історик ще в V ст. до н. е. писав: «Геометрія, за свідченням дуже багатьох, була відкрита єгиптянами і виникла під час вимірювання землі. Це вимірювання було їм потрібне, бо внаслідок розливу Ніл постійно міняв своє русло. Немає нічого дивного в тому, що ця наука, як і інші, виникла з потреб людини».

З Єгипту геометричні відомості перейшли до Греції. Тут з'явилась і назва науки (від грецьких слів  $\gamma\eta$  — «земля» і  $\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\omega$  — «міряю»). Отже, спочатку геометрією називали землемірство.

Згодом зміст геометрії розширився. Потрібні були люди, які вмели вимірювати не тільки земельні ділянки. Будівельникам треба було відкладати прямі кути, провішувати прямі лінії, креслити кола. Мореплавцям, щоб орієнтуватися за зоряним небом, часто доводилося вимірювати кути. Для цього ще задовго до початку нашої ери було створено астролябію.

Спочатку властивості геометричних фігур встановлювали на основі дослідів. Тільки в першому тисячолітті до нашої ери їх почали доводити як теореми.

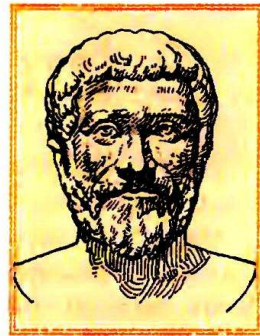
Одним із перших творців геометричної науки був давньогрецький учений **Фалес** (VI ст. до н. е.). Він довів теореми про рівність вертикальних кутів, про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника, про вписаний кут, який опирається на діаметр кола. Знав Фалес і другу ознаку рівності трикутників, і властивість прямокутного трикутника з кутом  $45^\circ$ . На основі останньої властивості він обчислив висоту єгипетської піраміди. Користуючись астролябією, Фалес передбачив сонячне затемнення 28 травня 585 р. до н. е.



Фалес



**Піфагор** (VI ст. до н. е.) — давньогрецький філософ і математик. Зі своїми учнями він досліджував властивості чисел, геометричних фігур, небесних світил. У його школі відкрито і доведено кілька геометричних теорем, зокрема про те, що у кожному прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів. Тепер відомо близько ста різних доведень теореми Піфагора.



*Піфагор*

Як наука геометрія вперше сформува-лась у Стародавній Греції, коли геометричні закономірності і залежності, знайдені спочатку дослідним шляхом, було зведено в систему. Одна з математичних праць тих далеких часів дійшла і до нас. Це — «Основи» давньогрецького математика **Евкліда** (III ст. до н. е.). Вони складаються з тринадцяти книг-сувоїв, перші шість з яких присвячені планіметрії. Робота Евкліда цікава не тільки своїм багатим змістом, а й формою викладу. В ній спочатку сформульовано означення й аксіоми, а всі наступні твердження доведено як теореми.



*Евклід*

Евклід не сам відкрив і довів усі викладені ним теореми. Багато зробили і його попередники. Але Евклід настільки вдало систематизував відомі йому математичні знання, що його «Основи» були впродовж 2000 років основним підручником з математики!

Цікавий факт з біографії Евкліда. Одного разу цар запитав математика, чи немає в геометрії коротшого шляху, ніж той, що його пропонує Евклід у своїх книжках. На це Евклід відповів: «Ні, в математиці навіть для царів немає інших шляхів!..»

Після Евкліда багато зробили для розвитку геометрії **Архімед**, **Аполлоній** та інші давньогрецькі математики.

Наступні півтори тисячі років геометрія в Європі майже не розвивалась. Тільки в епоху Ренесансу вона почала відроджуватись.

Коли Правобережна Україна входила до складу Польщі, юнаки з багатьох українських міст, які навчалися у вищих школах, геометрію вивчали спочатку за латинським перекладом «Основ» Евкліда, а згодом — за польським підручником С. Гжепського, надрукованим у Кракові 1565 р. Його титульна сторінка українською мовою перекладається так: *«Геометрія, тобто Землемірна Наука, по-польськи коротко написана за грецькими і латинськими книжками. В ній знайдеш ти також, як наші землеміри вимірювали ниви волоками або ланами. Тут також про югер, скільки він в собі містить. А ще — як виміряти бапти або що-небудь інше високе...»*

Студентів Києво-Могилянської академії геометрії навчали не завжди, а коли навчали, то латинською мовою. Зберігся конспект лекцій з геометрії, прочитаних у 1707–1708 рр. відомим українським філософом і церковним діячем Феофаном Прокоповичем. У ньому пояснювалося: *«Геометрія розподіляється на загальну й спеціальну... Спеціальна геометрія інакше називається геодезією»*. Лекцію про геодезію Прокопович починав так: *«Спеціальна геометрія, яку іноді називають практичною геометрією, а іноді геодезією, є однією з найшляхетніших, найкорисніших і найцікавіших галузей математики»*.

Але із часом у школах питанням практичної геометрії почали надавати дедалі менше уваги.

Особливо значними є внески в геометрію Р. Декарта, Л. Ейлера, М. І. Лобачевського.

Вам уже відома аксіома Евкліда про паралельні прямі. Понад 2000 років сотні геометрів намагалися довести твердження, яке Евклід прийняв без доведення. Багато часу згаяно, багато паперу списано... Але справжнього доведення так ніхто і не відшукав.

**Микола Іванович Лобачевський** (1792–1856) поклав край цим марним заняттям. Він показав, що твердження Евкліда не можна довести як теорему, і створив нову геометрію, яку тепер називають *геометрією Лобачевського*. Те, що



*М. Лобачевський*



зробив Лобачевський у геометрії, фахівці порівнюють з революційним переворотом Коперника в астрономії.

Лобачевський народився в Росії, а його рід походив з Волині.

З українських математиків найбільший внесок у розвиток геометрії зробили Г. Ф. Вороний, М. Є. Ващенко-Захарченко, О. С. Смогоржевський.



*Г. Вороний*

**Георгій Феодосійович Вороний** (1868–1908) народився в селі Журавка Чернігівської області. Був професором Петербурзького і Варшавського університетів. Досліджував питання про заповнення площини і простору рівними фігурами. Вважається творцем геометричної теорії чисел.

**Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко** (1825–1912) народився в селі Макіївка на Полтавщині. Навчався в Києві і Парижі, був професором Київського університету. Досліджував питання історії розвитку геометрії, надрукував кілька посібників з геометрії, переклав російською «Основи» Евкліда.

**Олександр Степанович Смогоржевський** (1896–1969) народився в селі Лісове на Вінниччині. Навчався в Немирові та Києві, був професором Київського політехнічного інституту. Досліджував питання, пов'язані з геометричними побудовами, надрукував кілька посібників і підручників, зокрема підручник з основ геометрії для студентів університетів. Його праці перекладено англійською, болгарською, японською та іншими мовами.

Розвивається геометрична наука і тепер. Геометрія продовжує служити людям. Ось що писав один з найвідоміших архітекторів XX ст. Ле Корбюзьє: «Ніколи ще до нашого часу ми не жили в такий геометричний період... Навколишній світ — це світ геометрії, чистий, істинний, бездоганий у наших очах. Усе навколо — геометрія».



# Предметний покажчик

- Аксиома 63
  - Евкліда 55
- Астролябія 20
- Бісектриса кута 21
  - трикутника 76
- Вершина кута 19
  - трикутника 76
- Вимірювальні прилади 15
- Висота трикутника 76
- Відношення паралельності 41
- Відрізок 13
  - одиничний 13
- Відстань 14
- Внутрішній промінь кута 21
- Внутрішні точки відрізка 13
- Внутрішня область кута 19
- Геометричне місце точок 141
- Геометричні побудови 154
- Геометрія 3
  - Евклідова 55
  - елементарна 8
  - Лобачевського 57
  - трикутника 77
- Гіпотенуза 116
- Градус 19
- Діаграма Ейлера 105
- Діаметр кола 134
  - круга 136
- Доведення 62
  - від супротивного 49
- Довжина відрізка 13
  - кола 136
- Дотик двох кіл 135
- Дотична до кола 135
- Дюйм 15
- Задачі на побудову 160
- Зовнішній кут трикутника 81
- Катет 116
- Коло 134
  - вписане 148
  - описане 147
- Концентричні кола 136
- Круг 136
- Кут 19
  - гострий 20
  - прямий 20
  - розгорнутий 19
  - тупий 20
- Кути вертикальні 32
  - відповідні 47
  - внутрішні односторонні 47
  - різносторонні 47
  - суміжні 32
  - трикутника 77
  - чотирикутника 82
- Лінійка 7
- Медіана трикутника 76
- Мінута 20
- Міра кута 19
- Нерівність трикутника 122
- Ознаки 62
  - паралельності прямих 47
  - прямокутних трикутників 116
  - рівності трикутників 93
- Паралельні відрізки 40
  - промені 40
  - прямі 40
- Периметр трикутника 76

- |                              |                          |
|------------------------------|--------------------------|
| Перпендикуляр 39             | Січна двох прямих 47     |
| — серединний 142             | — кола 134               |
| Перпендикулярні прямі 39     | Сторона кута 19          |
| Планіметрія 6                | — трикутника 77          |
| Площина 6                    | Сума кутів трикутника 81 |
| Побудови класичні 162        | Твердження протилежні 50 |
| — наближені 162              | — супротивні 49          |
| Похила 117                   | Теорема 32, 63           |
| Початок променя 8            | — обернена до даної 62   |
| Проекція похилої 117         | Точка 6                  |
| Промені 8                    | — дотику 135             |
| — доповняльні 8              | Транспортир 20           |
| — співнапрямлені 65          | Трикутник 76             |
| Пряма 7                      | — гострокутний 77        |
| Радіус кола 134              | — рівнобедрений 104      |
| — круга 136                  | — рівносторонній 104     |
| Рівність 87                  | — різносторонній 104     |
| — відрізків 13               | — тупокутний 77          |
| — кутів 20                   | Фігура геометрична 6     |
| — трикутників 93             | — неплоска 6             |
| — фігур 87                   | Фут 15                   |
| Румб 22                      | Хорда кола 134           |
| Секунда 20                   | Центр кола 134           |
| Середина відрізка 14         | — круга 136              |
| Серединний перпендикуляр 142 | Циркуль 134              |

### Про авторів епіграфів

Леонардо да Вінчі (1452–1519) — італійський архітектор, скульптор, художник, винахідник.

Спенсер Герберт (1820–1903) — англійський філософ, соціолог, психолог.

Олександр Степанович Смогоржевський (1896–1969) — український математик.

Прокл Діадох (410–485) — грецький філософ.

# Короткий тлумачний словник

**Аксиома** — твердження, яке приймається без доведення.

**Бісектриса кута** — внутрішній промінь кута, який ділить кут на дві рівні частини.

**Бісектриса трикутника** — частина бісектриси кута трикутника, яка лежить в його внутрішній області.

**Висота трикутника** — перпендикуляр, проведений з вершини трикутника на протилежну сторону або на її продовження.

**Відрізок** — частина прямої, яка лежить між її двома точками.

**Відстань від  $A$  до  $B$**  — довжина відрізка  $AB$ .

**Геометрична фігура** — довільна множина точок.

**Геометричне місце точок** — множина усіх точок, які задовольняють певні умови.

**Геометрія** — частина математики, в якій досліджуються властивості геометричних фігур.

**Гіпотенуза** — сторона прямокутного трикутника, протилежна прямому куту.

**Градус** — це  $\frac{1}{180}$  частина розгорнутого кута.

**Діаметр кола** — хорда кола, яка проходить через його центр.

**Доведення** — обґрунтування істинності твердження.

**Дотична до кола** — пряма, яка лежить у площині даного кола і має з ним тільки одну спільну точку.

**Катет** — сторона прямокутного трикутника, протилежна гострому куту.

**Коло** — множина всіх точок площини, рівновіддалених від деякої її точки.

**Круг** — скінченна частина площини, обмежена колом.



- Кут** — частина площини, обмежена двома променями зі спільним початком.
- Кути вертикальні** — два кути, сторони яких утворюють дві прямі, що перетинаються.
- Кути суміжні** — два кути, в яких одна сторона спільна, а дві інші — доповняльні промені.
- Медіана трикутника** — відрізок, який сполучає вершину трикутника з серединою протилежної сторони.
- Паралельні прямі** — дві прямі однієї площини, які не перетинаються.
- Периметр трикутника** — сума довжин усіх сторін трикутника.
- Перпендикулярні прямі** — дві прямі, які перетинаються під прямим кутом.
- Промінь** — нескінченна частина прямої, що лежить по один бік від деякої точки цієї прямої.
- Пряма** — неозначуване поняття, зміст якого розкривається описом або системою аксіом.
- Прямокутний трикутник** — трикутник, один з кутів якого прямий.
- Радіус кола** — відрізок, який сполучає довільну точку кола з його центром.
- Рівні фігури** — дві геометричні фігури, які можна сумістити накладанням.
- Рівнобедрений трикутник** — трикутник з двома рівними сторонами.
- Рівносторонній трикутник** — трикутник, усі сторони якого рівні.
- Теорема** — твердження, істинність якого встановлюється доведенням.
- Точка** — неозначуване поняття, зміст якого розкривається описом або системою аксіом.
- Трикутник** — замкнена ламана із трьох ланок або скінченна частина площини, обмежена такою ламаною.
- Хорда кола** — відрізок, який сполучає дві довільні точки кола.

# Відповіді і вказівки

**7. АВ. 11.** Так. **12.** Не належить. **13.** *КР, РТ, КТ, РК, ТР, ТК.*  
**16.** 4. **19.** Можна. **21.** 6. На 16, 17 або 18 частин. **28.** 20,5 см.  
**29.** 8 см. **31.** 10 дм. **33.** 1) 2 см; 6 дм; 20 км. **34.** 21 см. **42.** Так.  
**44.** а) 5,9 см. **45.** а) 0,6 дм. **46.** 13 см. **48.** 6 см. **50.** а), б). Так.  
**52.** 13 см і 7 см. **54.** 3 см, 9 см, 11 см, 17 см. **61.** 0,5 м. **65.** 30°.  
**70.** Ні. **73.** 2° 15'; 83° 20'. **78.** 90°. **79.** Ні; може бути. **81.** 15°;  
2,5°. **82.** 31° 15'. **83.** 90° або 30°. **84.** 180°; 60°. **85.** 20°.  
**86.** У 4 рази. **87.** 45°. **89.** 70° і 40°. **102.** Ні. **104.** 130°.  
**105.** 20°. **106.** а) 146°; г) 44° 13'. **108.** а) 75° і 105°. **109.** б) 72°  
і 108°. **111.** 60°. **120.** в) 50°, 130°, 50°, 130°. **121.** 80°; 100°;  
90°. **122.** а) 120°. **124.** 130°. **125.** а) 55°. **127.** Як 1 : 8; як  
1 : 4. **140.** Правильно. **143.** 135° і 135°. **145.** (0; 6), (6; 0);  
(0; -4), (-4; 0). Так. **150.** а) 50°. **161.** Ні. **162.** а) 60° і 120°;  
г) 108° і 72°. **163.** а) 0,1 *P*, 0,2 *P*, 0,3 *P*, 0,4 *P*. **172.** а) 90°, 90°,  
80°, 100°, 90°, 80°. **173.** а) Так. **174.** а) Так. **175.** Так. **176.** Так.  
**177.** а) Так. **180.** а) 90° і 90°; в) 120° і 60°. **181.** а) Так.  
**182.** а)  $a \parallel b \parallel c$ ; в)  $a \parallel b \parallel c$ . **185.** Так. **198.** 145°, 35° і 145°.  
**199.** 50°, 130°. **206.** 40°. **209.** 180°. **210.** а) 65° і 115°.  
**216.** 50°, 70° і 60°. **217.** 86°. **218.** 71°. **220.** а) 6 см; б) 7 см.  
**222.** б) Жодної; одну; безліч. **235.** Твердження в). **238.** Кути з  
відповідно паралельними сторонами не завжди рівні. **239.** а) Ні;  
б) ні. **242.** Твердження а). **246.** а) Ні; б) ні; в) ні. **263.** 15,8 см.  
**264.** 6 см. **265.** 39 см. **266.** Так. **269.** а) 4 см і 12 см; б) 6 см  
і 10 см; в) 8 см і 8 см; г) 5 см і 11 см. **272.** 12 см, 6 см, 8 см.  
**273.** 12 см. **274.** 30 см. **275.** Так. **276.** Так. **277.** 102 см.  
**279.** 3 см. **287.** 20 м. **288.** 50°. **294.** а) 36°, 54°, 90°; б) 15°,  
75°, 90°; в) 54°, 54°, 72°. **297.** а) 50°, 50° і 80°; б) 80°, 60° і 40°;  
в) 76°, 38° і 66°. **298.** 130°. **299.** Ні. **301.** 60°, 40° і 80°.  
**302.** 75° або 15°. **303.** 15°. **304.** а) 70°; б) 60°. **305.** а) 60°,  
30°; б) 60°, 30°. **306.** а) 140°, 130°, 90°; в) 130°, 130°, 100°.



**308.**  $180^\circ$ . **309.**  $270^\circ$ . **310.** Ні. **312.**  $0,5 a$ . **313.**  $24 \text{ см}$ . **314.**  $5 \text{ см}$ .  
**315.**  $3 \text{ см}$ . **316.**  $2 : 3$ . **327.** Ні. **329.**  $12 \text{ см}$ . **330.** Так. **331.**  $70^\circ$ ;  
 $3,8 \text{ см}$ . **332.**  $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ . **333.** Так. **340.** Так. Ні. **341.**  $26 \text{ см}$ .  
**345.**  $9\pi \text{ см}^2$ ;  $6\pi \text{ см}$ . **346.**  $1,8\pi \text{ см}^2$ . **348.**  $25\pi \text{ га}$ . **349.**  $55^\circ$ .  
**355.**  $12 \text{ см}$ . **356.** Так. **359.** Так. **364.** Бо  $\triangle CTP = \triangle CAB$ .  
**366.**  $8 \text{ см}$ . **369.** Нехай  $BM$  і  $B_1M_1$  — медіани рівних трикутників  
 $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ . Доведіть, що  $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ . **375.**  $40^\circ, 80^\circ$ .  
**376.** Так. **377.**  $90^\circ$ . **386.**  $67 \text{ см}$ . **387.**  $2 \text{ см}$ . **388.**  $50^\circ$ . **389.**  $120^\circ$ .  
**390.** а)  $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$  або  $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$ ; б)  $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$  або  $90^\circ$ ,  
 $45^\circ, 45^\circ$ . **393.** а)  $25^\circ$ ; б)  $75^\circ$ ; в)  $40^\circ$ . **394.** а)  $10 \text{ см}, 20 \text{ см}$  і  $20 \text{ см}$ ;  
б)  $15 \text{ см}, 15 \text{ см}$  і  $20 \text{ см}$ . **395.**  $30^\circ$ . **398.**  $\angle A$ . **399.**  $15 \text{ см}$ . **402.**  $20 \text{ см}$ ,  
 $20 \text{ см}, 10 \text{ см}$  або  $15 \text{ см}, 15 \text{ см}, 25 \text{ см}$ . **404.** а)  $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ ;  
б)  $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$  або  $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ ; в)  $165^\circ; 7,5^\circ; 7,5^\circ$ ; г)  $50^\circ, 65^\circ$ ,  
 $65^\circ$ . **406.**  $2a + b$ . **407.** а)  $2p - 2b$ ; б)  $p - \frac{a}{2}$ . **411.** Лежать на пря-  
мій, яка перпендикулярна до  $AB$  і проходить через її середину.  
**412.**  $80^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 100^\circ$ . **414.**  $96^\circ$ . **415.** а)  $60^\circ$  і  $120^\circ$ ; б)  $72^\circ$   
і  $108^\circ$ . **416.**  $6 \text{ см}$ . **417.**  $30 \text{ дм}$ . **421.** Доведіть рівність трикутників  
 $AOB, BOC$  і  $AOC$ . **429.** а) Доведіть спочатку, що  $\triangle AOB =$   
 $= \triangle AOC$ , а потім доведіть рівність трикутників  $ABM$  і  $ACM$ .  
б) Доведіть рівність трикутників  $OBM$  і  $OCM$ . **431.** 1) Проведіть  
діагональ  $BD$  і доведіть, що  $\triangle ABD = \triangle CDB$ . 2) Проведіть  
відрізок  $AC$  і доведіть, що  $\triangle ACB = \triangle CAD$ . **433.** а) Доведіть  
рівність трикутників  $APB$  і  $CPB$ . **437.**  $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ . **438.**  $60^\circ$ .  
**439.**  $60 \text{ см}$ . **440.**  $\frac{2}{3}p$ . **441.**  $90^\circ$ . **446.**  $40^\circ$  і  $50^\circ$ . **448.**  $30^\circ, 60^\circ$ ,  
 $90^\circ$ . **450.**  $40^\circ$  і  $50^\circ$ . **454.**  $AC = BC$ . **455.**  $180^\circ - \alpha$ . **457.**  $16 \text{ см}$ .  
**459.** а)  $9 \text{ см}$ ; б)  $9 \text{ см}$ . **460.** а)  $9,5 \text{ см}$ ; б)  $9,5 \text{ см}$ . **461.**  $27 \text{ см}$ .  
**462.**  $50^\circ$  і  $40^\circ$ . **463.** Ні. **465.** Ні. **467.**  $2 m$ . **468.**  $5 \text{ см}$ . **470.**  $70^\circ$ ,  
 $80^\circ, 30^\circ$ . **471.** Ні. **472.**  $36^\circ, 54^\circ, 90^\circ$ . **477.** а)  $AC$  — найбільша,  
 $BC$  — найменша. **478.**  $\angle B$  — найбільший,  $\angle C$  — найменший.  
**479.** Ні; так. **480.** Ні. **481.** Ні. **483.** Ні. **485.** Ні. **487.** Ні.  
**488.**  $3 \text{ см} < BC < 13 \text{ см}$ . **490.**  $70 \text{ см} < P < 126 \text{ см}$ . **491.** Так.  
**492.**  $75^\circ$  і  $105^\circ$ . **493.**  $80^\circ$  і  $80^\circ$ . **498.** в)  $0, 1, 2, 3, 4, 5$  або  $6$ ;  
г)  $0, 1, 2$  або безліч. **505.** а)  $12 \text{ м}$ ; б)  $2 \text{ м}$ . **506.** Так. **509.**  $120^\circ$ ,  
 $60^\circ$ . **511.** Якщо  $O$  — центр кола, то  $\triangle ABO = \triangle CDO$  (за трьома  
сторонами). А в рівних трикутниках відповідні висоти рівні.  
**512.** а) Із центра  $O$  даного кола проведіть пряму  $s$ , перпенди-  
кулярну до даної прямої. Якщо пряма  $s$  перетинає коло в точках  
 $A$  і  $B$ , то проведіть дотичні в цих точках. **514.**  $4 \text{ см}$  і  $12 \text{ см}$  або



8 см і 24 см. **515.** Прямокутні трикутники  $AOB$  і  $AOC$  рівні. **516.** 5 см. Бо катет, що лежить проти кута  $30^\circ$ , дорівнює половині гіпотенузи. **517.**  $90^\circ$ . **518.**  $60^\circ$ . **519.** Кожна із сторін  $O_1O_2$ ,  $O_2O_3$ ,  $O_3O_1$  дорівнює сумі двох рівних радіусів. Тому  $\triangle KPT$  рівносторонній. **520.**  $120^\circ$ ,  $\approx 1,4$  см. **521.**  $S = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi (r^2 - r_1^2) = \pi (r - r_1)(r + r_1) = mn (r + r_1) = ml$ . **522.**  $\frac{2}{3}a$ . **523.** 5 см. **524.** 12 см. **525.** Розрізьте уявно квадрат на 4 рівні прямокутні трикутники і складіть з них один прямокутник. **527.** Ні, бо пропущено слово «кута». **529.** Пряма, паралельна даним прямим і рівновіддалена від них. **530.** Пряма  $BK$ , пряма  $BC$ . **531.** Пряма  $CK$ . **532.** Так, якщо точка  $C$  — не середина відрізка  $AB$ . **533.** Так. **537.** Дві прямі, паралельні даній прямій. **540.** Дві прямі, паралельні даній прямій і рівновіддалені від неї. **541.** Коло. **543.** а) Дане коло і концентричне йому коло радіуса  $3r$ . **544.** Коло, концентричне даному; його діаметр дорівнює третині діаметра даного кола. **545.** Коло, концентричне даному. **547.** 4 прямі, паралельні даним прямим. **548.** 4 точки. **551.**  $135^\circ$ . **557.** 0, 1 або безліч. **559.** 0, 1, 2, 3, 4, 5 або 6. **561.** Ні. З периметром 8 см — можна. **564.**  $30^\circ$ ,  $30^\circ$  і  $120^\circ$ . **567.** Довжина кола більша. **569.** Ні. **572.**  $120^\circ$ . **574.**  $30^\circ$ ,  $30^\circ$  і  $120^\circ$ . **575.** 5 см. **576.** 12,5 м. **577.** Нехай  $O$  — центр вписаного в  $\triangle ABC$  кола. Трикутники  $OAB$ ,  $OBC$  і  $OCA$  рівні рівнобедрені, бо в них кути при основах — по  $30^\circ$ . Отже,  $OA = OB = OC$  — радіуси описаного кола. Якщо вписане коло дотикається до  $AB$  в точці  $H$ , то  $OH = 0,5 OB$  — як катет проти кута  $30^\circ$ . **578.** Точки дотику кола до сторін кута рівновіддалені від його вершини. **579.** 1. **580.**  $2(c + r)$ . **581.** 34 см. **582.** 4 см. **583.** Медіана, проведена з вершини прямого кута. **590.** Проведіть бісектрису даного кута і бісектрису його половини. **595.** Від обох кінців даного відрізка відкладіть рівні відрізки, а середній відрізок поділіть навпіл. **600.** Побудуйте трикутник за трьома даними рівними відрізками. **611.** Січна  $PM$  з даною і побудованою прямими утворює рівні внутрішні різносторонні кути. **612.** Якщо даний кут не прямий, то задача має 2 розв'язки. **613.**  $60^\circ$ . **614.** Трикутник  $ABC$  прямокутний і рівнобедрений, тому  $\angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$ . **615.** Трикутник тупокутний. **616.**  $60^\circ$ . **618.** Побудуйте прямий кут і на одній його стороні від вершини відкладіть половину основи, а на другій — висоту. **619.** 1) Побуду-

дуйте спочатку даний кут, на його стороні від вершини відкладіть відрізок, що дорівнює гіпотенузі. Побудуйте коло, діаметром якого є цей відрізок. **620.** Побудуйте допоміжний трикутник за трьома відомими відрізками: медіаною, даною стороною і половиною другої сторони. **621.** 1) Проведіть дві паралельні прямі, відстань між якими дорівнює даній висоті, на одній з них відкладіть одну з даних сторін. Задача може мати 0, 1 або 2 розв'язки. **623.** Скористайтесь методом ГМТ. Якщо дані прямі не паралельні, задача має 2 розв'язки. **624.** Проведіть серединний перпендикуляр відрізка, кінцями якого є дані точки. **625.** Через дану на стороні кута точку проведіть пряму, перпендикулярну до цієї сторони. Ця пряма перетинає бісектрису даного кута в точці, що є центром кола, яке треба побудувати. **626.** Гіпотенуза трикутника вдвічі довша за даний радіус кола. **627.** Спочатку проведіть коло даного радіуса, а з якої-небудь його точки — дві хорди даних довжин. Задача може мати 0, 1 або 2 розв'язки. **628.** Проведіть спочатку коло даного радіуса, а в ньому — хорду даної довжини. **629.** Проведіть коло даного радіуса і хорду, що дорівнює даній основі трикутника. Серединний перпендикуляр цієї хорди перетне коло у вершинах трикутників, які треба побудувати. **630.** Проведіть коло даного радіуса і його діаметр. В кінці діаметра відкладіть даний гострий кут. **631.** Проведіть пряму, рівновіддалену від даних паралельних прямих. З даної точки  $A$  як з центра опишіть дугу радіусом, що дорівнює половині відстані між даними прямими. Задача має 2 розв'язки. **632.** Проведіть коло даного радіуса і в ньому хорди  $AB = BC = DE = EF = r$ . Трикутники  $OAB$ ,  $OBC$ , ...,  $OEF$  рівні рівносторонні, всі їхні кути — по  $60^\circ$ . Тому  $\angle FOA = 60^\circ$  і  $\triangle OFA$  також рівносторонній. Отже,  $\triangle ACE$  — той, який треба було побудувати. *2-й спосіб.* Побудуйте  $\triangle AOC$  за даними сторонами  $OA = OC = r$  і кутом між ними  $\angle AOC = 120^\circ$ .  $AC$  — сторона рівностороннього трикутника, який треба побудувати. **634.** На даній гіпотенузі  $AB$ , як на діаметрі, побудуйте півколо. Знайдіть точки перетину півкола з прямою, паралельною  $AB$  і віддаленою від неї на відстань, що дорівнює даній висоті. **635.** Якщо дано катет  $a$  і протилежний йому кут  $A$ , то можна побудувати трикутник за даною стороною і прилеглими до неї кутами  $90^\circ$  і  $90^\circ - \angle A$ . **636.** Впишіть у прямий кут коло даного радіуса, відкладіть на



одній стороні кута даний катет, а з його кінця проведіть дотичну до кола. **639.** Побудуйте за катетом і гіпотенузою допоміжний, прямокутний трикутник  $CHM$ , де  $CH$  — висота,  $CM$  — медіана. На прямій  $HM$  відкладіть відрізки  $MA = MB = MC$ . Трикутник  $ACB$  — шуканий. **651.** а), б) 6 частин; в) 7 частин. **652.** а) 12 см; б) 20 см; в) 12,5 см; г) 7,5 см. **653.** 2 см і 6 см або 4 см і 12 см. **654.** 4 випадки: 1 см, 5 см, 9 см, 12 см. **655.** 1 : 4; 1 : 2; 2 : 1. **656.** а) 8 см; б) 12 см; в) 16 см. **657.** 5 см. **658.** а) 4 см; б) 6 см; в) 10 см. **659.**  $AC = 13,5$  см,  $BC = 1,5$  см або  $AC = 1,5$  см,  $BC = 13,5$  см. **660.**  $AB = 2$  см;  $AC = 8$  см або  $AC = 2$  см,  $AB = 8$  см. **662.** Ні. **664.** а)  $20^\circ$  і  $60^\circ$ ; б)  $30^\circ$  і  $50^\circ$ ; в)  $20^\circ$  і  $60^\circ$ ; г)  $40^\circ$  і  $40^\circ$ . **665.**  $10^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $50^\circ$ . **666.**  $80^\circ$ . **667.**  $50^\circ$  або  $30^\circ$ . **668.**  $20^\circ$ ,  $160^\circ$ . **669.**  $72^\circ$ ,  $108^\circ$ . **673.** а)  $130^\circ$ ; б)  $80^\circ$ ; в)  $144^\circ$ ; г)  $108^\circ$ ; р)  $105^\circ$ . **674.**  $35^\circ 25'$ ;  $144^\circ 35'$ ;  $144^\circ 35'$ . **675.**  $60^\circ$ ;  $120^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $120^\circ$ . **676.**  $90^\circ$ ;  $180^\circ$ . **678.**  $110^\circ$ ;  $70^\circ$ . **680.**  $144^\circ$ ;  $36^\circ$ ;  $144^\circ$ ;  $36^\circ$ . **681.**  $20^\circ$ ;  $160^\circ$ ;  $20^\circ$ ;  $160^\circ$ . **684.** 4 см. **686.** а) Ні; б) так; в) ні; г) так. **687.** а) Так; б) так; в) так. **688.** а) Так; б) ні; в) так. **689.** а)  $c \parallel d$ ; б)  $a \parallel b$ ; в)  $c \parallel d$ ; г)  $c \parallel d$ ;  $a \parallel b$ . **692.** а) так; б) так. **693.** а)  $a \parallel c$ ; б)  $a \parallel b$ ; в)  $b \parallel c$ ; г)  $a \parallel b \parallel c$ . **695.** а)  $70^\circ$ ; б)  $75^\circ$ ; в)  $80^\circ$ ; г)  $67^\circ 30'$ . **697.**  $80^\circ$ . **698.**  $50^\circ$ ;  $50^\circ$ . **699.** а) Так; б) так; в) Ні. **709.** 23 см. **710.** Ні. **711.** 2 см, 3 см або 4 см. **712.** а) 7 см; б) 13 см. **713.** а) 6 см і 10 см; б) 24 см і 40 см. **714.**  $15^\circ$ . **715.**  $40^\circ$  і  $20^\circ$ . **717.**  $25^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $80^\circ$ . **718.**  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ . **719.**  $25^\circ$ ,  $65^\circ$ . **722.**  $40^\circ$ . **723.**  $75^\circ$ ;  $30^\circ$ . **725.** 2 см і 10 см. **726.**  $150^\circ$ . **728.** 7 см, 8 см, 6 см. **729.** Ні. **730.** а) ні; б) так. **731.** Так. **732.** Ні. **745.**  $50^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $80^\circ$  або  $80^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $20^\circ$ . **746.** 5 см, 8 см, 8 см або 6 см, 6 см, 9 см. **748.** а)  $40^\circ$ ; б)  $80^\circ$ . **749.** 20 см. **752.**  $36^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $72^\circ$ . **753.**  $60^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $60^\circ$ . **764.**  $18^\circ$  і  $72^\circ$ . **767.** 5 см, 12 см, 13 см. **770.** 3 см і 9 см. **771.** 7,5 см. **772.** 2 см. **773.** 5 см. **774.** 5 см. **777.**  $\angle C$  — найменший;  $\angle B$  — найбільший. **780.**  $\angle A > \angle C$ . **781.** 6 см. **782.** 59 см і 59 см. **783.** 8 см, 9 см, 10 см, 11 см, 12 см. **784.** 4, 4 см. **785.** Ні. **786.** 4 см. **787.**  $60^\circ$ . **788.**  $\frac{1}{2}r$ . **790.**  $AB$ . **793.** 5 см і 7 см. **794.** 4 см і 12 см. **795.** 4 см, 6 см, 8 см. **797.** 21 см. **798.** 3 см. **799.** 6 см і 15 см. **800.** 5 см. **805.** Бісектриси утворених кутів. **807.** Коло з центром  $O$  радіуса  $2r$ . **808.** а) Коло з центром  $O$  радіуса 13 см; б) коло з центром  $O$  радіуса 7 см. **810.** 5 см. **811.** 7,5 см і 3 см. **812.** 46 см. **813.** 12 см, 15 см, 17 см. **814.** 9 см і 18 см. **815.** 4 см і 6 см.



**816.** 8 см. **819.** 12 см. **820.** 6 см. **848.** а) 149 100 тис. км; б) 149 900 тис. км. **850.**  $X$  — середина відрізка  $CB$ . **851.**  $108^\circ$  і  $72^\circ$ . **852.**  $120^\circ$ . **853.**  $180^\circ$ . **854.** Якщо промінь  $BX$  перетинає  $AC$  в точці  $K$ , то  $\angle AXK > \angle ABK$  і  $\angle CXK > \angle CBK$ . **855.** Поділіть даний кут на 4 рівні частини і добудуйте до даного кута одну з таких частин. **856.** Не можуть. Якщо висоти  $AH$  і  $CE$   $\triangle ABC$  перетинаються в точці  $O$ , то  $\triangle AOE = \triangle COH$ ,  $AO = OE$ , що неможливо. **857.**  $\frac{1}{2}(a + b + c)$ . **859.** Кожний трикутник можна розрізати на два прямокутні трикутники, а медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, ділить його на два рівнобедрені трикутники. **860.** Доведіть, що трикутники  $AOC$  і  $BOD$  рівнобедрені і рівні. **861.** Нехай  $\angle ABB_1 = \angle B_1BC = \alpha$ . Доведіть, що кожний з кутів  $AB_1B$  і  $BB_1C$  більший від  $\alpha$ . Для цього через вершину  $B$  проведіть пряму, паралельну  $AC$ . **862.** Нехай на основі рівнобедреного трикутника  $ABC$  лежить точка  $M$ . Проведіть відрізок  $MD \parallel AB$ ,  $D \in BC$  і доведіть, що  $MD = DC$ . **863.**  $70^\circ$ . Позначте всередині  $\triangle ABC$  точку  $K$  таку, що  $AK = KC = AC$ . Тоді  $\triangle BMC = \triangle AKB$ ,  $\angle BCM = 10^\circ$ . **866.**  $90^\circ$ ,  $30^\circ$  і  $60^\circ$ . Нехай  $CH$ ,  $CM$  — висота і медіана  $\triangle ABC$ ,  $\angle ACH = \angle HCM = \angle MCB = \alpha$ , а пряма  $CM$  перетинає описане коло в точці  $K$ . Тоді  $\angle CKB = \angle CAB$  і  $\angle CBK = \angle CHA = 90^\circ$ .  $CK$  — діаметр описаного кола, а оскільки  $AM = MB$ , то і  $AB$  — діаметр. **867.** Ці кути:  $90^\circ + 0,5 \angle A$ ,  $90^\circ + 0,5 \angle B$ ,  $90^\circ + 0,5 \angle C$ . **869.**  $15^\circ$  і  $75^\circ$ . **871.**  $a + b - c$ . **872.** 1) Нехай  $ABC$  — трикутник, який треба побудувати, і  $K$  — точка гіпотенузи  $AB$  така, що  $AK = AC$ . Відрізки  $CB$  і  $KB$  дані. На промені  $AC$  відкладіть  $CB_1 = KB$ . Трикутники  $ACK$  і  $AB_1B$  рівнобедрені. Побудуйте  $\triangle CBB_1$  і проведіть серединний перпендикуляр до відрізка  $BB_1$ . **874.** Нехай  $ABC$  — трикутник, який треба побудувати, і на його стороні  $AB$  точка  $K$  така, що  $AK = AC$ . Знайдіть кут  $CKB$ , побудуйте  $\triangle BKC$  і проведіть серединний перпендикуляр до відрізка  $CK$ . **875.** Нехай у  $\triangle ABC$  кут  $С$  тупий і  $K$  — точка сторони  $AB$  така, що  $AK = CB$ . Пряма  $CK$  та, яку вимагалось провести. **877.** Побудуйте спочатку трикутник за даним відрізком і прилеглими до нього половинами даних кутів. Потім проведіть серединні перпендикуляри двох сторін побудованого трикутника.

# ЗМІСТ

Від авторів ..... 3

## Розділ 1.

### НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

- § 1. Точки і прямі ..... 6
- § 2. Відрізки і їх довжини ..... 13
- § 3. Кути і їх міри ..... 19
  - Самостійна робота 1 ..... 27
  - Тестові завдання 1 ..... 28
  - Головне в розділі 1 ..... 30



## Розділ 2.

### ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

- § 4. Суміжні і вертикальні кути ..... 32
- § 5. Перпендикулярні і паралельні прямі ..... 39
- § 6. Ознаки паралельності прямих ..... 47
- § 7. Властивості паралельних прямих ..... 55
- § 8. Теореми і аксіоми ..... 62
  - Самостійна робота 2 ..... 71
  - Тестові завдання 2 ..... 72
  - Головне в розділі 2 ..... 74



## Розділ 3.

### ТРИКУТНИКИ

- § 9. Трикутник і його елементи ..... 76
- § 10. Сума кутів трикутника ..... 81
- § 11. Про рівність геометричних фігур ..... 87
- § 12. Ознаки рівності трикутників ..... 93
  - Самостійна робота 3 ..... 99
  - Тестові завдання 3 ..... 102
- § 13. Рівнобедрений трикутник ..... 104
- § 14. Третя ознака рівності трикутників ..... 110
- § 15. Прямокутний трикутник ..... 116
- § 16. Нерівності трикутника ..... 122
  - Самостійна робота 4 ..... 127
  - Тестові завдання 4 ..... 129
  - Головне в розділі 3 ..... 132

