А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

ГЕОМЕТРІЯ

підручник для 8 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2016

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 10.05.2016 № 491)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для учнів 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Л. В. Ізюмченко, доцент кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка, кандидат фізико-математичних наук

С. Г. Ботнарюк, учитель Хмельницького ліцею № 17 Хмельницької області, учитель-методист

Г. М. Рибінська, учитель Вознесенської загальноосвітньої школи I–III ступенів № 7 Миколаївської області, учитель-методист

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2016. — 208 с. : іл.
ISBN 978-966-474-275-4.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я721

ISBN 978-966-474-275-4

ВІД АВТОРІВ

Любі восьмикласники!

У цьому навчальному році ви продовжуватиме вивчати геометрію. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу і красиву науку, а отже, з інтересом будете опановувати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, що позначено «зірочкою» (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі, розміщені в кінці кожного параграфа.

Кожний пункт завершується рубрикою «Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте». До неї дібрано задачі, для розв'язування яких потрібні не спеціальні геометричні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни: вони розвивають «геометричний зір» та інтуїцію.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

Шановні колеги!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Звертаємо увагу на те, що в підручнику наявні задачі на побудову. Вони не є обов'язковими для розгляду. Цей матеріал доцільно використовувати лише в тому разі, коли учні вже ознайомлені з відповідним розділом з курсу геометрії 7 класу.

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які на розсуд учителя (з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу) можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка **та факультативних** занять.

Тож перетворімо разом шкільний курс геометрії в зрозумілий і привабливий предмет.

Бажаємо творчого натхнення та терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;

⊙ доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;

доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;

⊛ доведення теореми, не обов'язкове для вивчення;

▲ закінчення доведення теореми;

● закінчення розв'язання задачі;

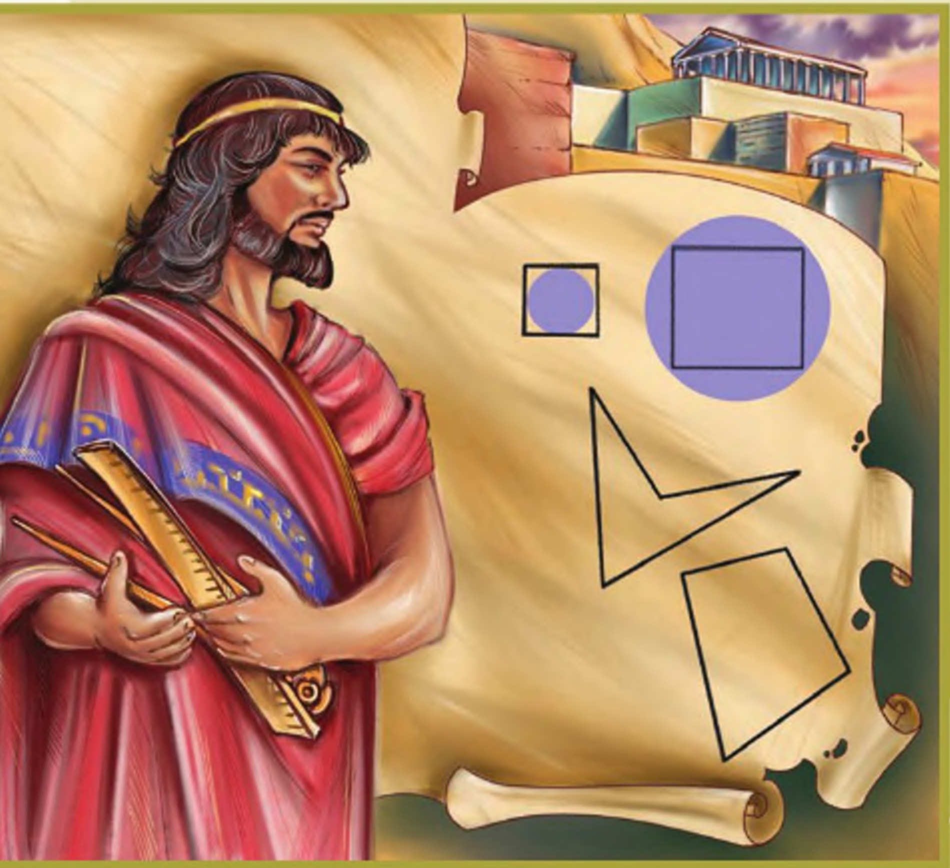
 рубрика «Коли зроблено уроки».

ЧОТИРИКУТНИКИ §1

У цьому параграфі розглядається знайома вам геометрична фігура **чотирикутник**. Ви ознайомитеся з окремими видами чотирикутника: паралелограмом, прямокутником, ромбом, квадратом, трапецією, вивчите властивості цих фігур і дізнаєтеся про ознаки, за допомогою яких серед чотирикутників можна розпізнати зазначені фігури.

Ви вивчите властивості відрізка, який сполучає середини сторін трикутника, і переконаєтеся в тому, що ці властивості можуть слугувати ключем до розв'язування цілого ряду задач.

Як виміряти дугу кола? Навколо якого чотирикутника можна описати коло? У який чотирикутник можна вписати коло? Опанувавши матеріал цього параграфа, ви отримаєте відповіді й на ці запитання.



1. Чотирикутник та його елементи

На рисунку 1 відрізки AB і BC мають тільки одну спільну точку B, яка є кінцем кожного з них. Такі відрізки називають **сусідніми**. На рисунку 2 кожні два відрізки є сусідніми.

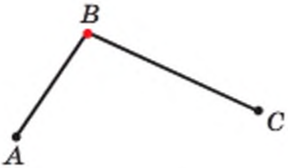


Рис. 1

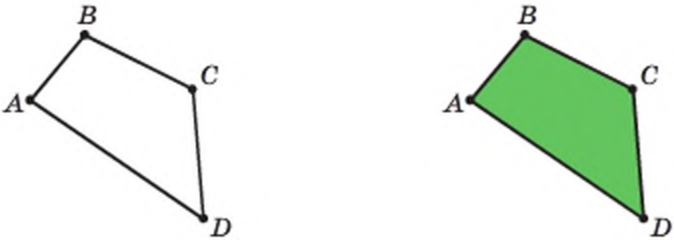
Рис. 2

Відрізки AB і CD на рисунку 3 не є сусідніми.

а *б*

Рис. 3

Розглянемо фігуру, яка складається із чотирьох точок A, B, C, D і чотирьох відрізків AB, BC, CD, DA таких, що ніякі два сусідніх відрізки не лежать на одній прямій і ніякі два несусідніх відрізки не мають спільних точок (рис. 4, *а*).

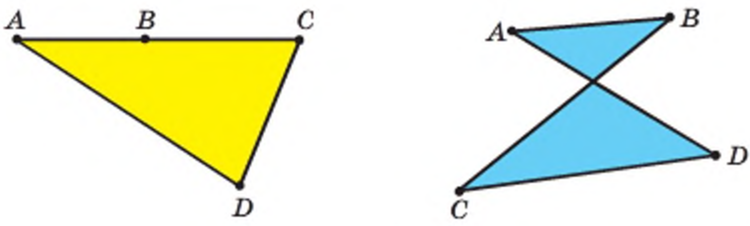


а *б*

Рис. 4

Фігура, утворена цими відрізками, обмежує частину площини, виділену на рисунку 4, *б* зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками AB, BC, CD і DA називають **чотирикутником.** Точки A, B, C, D називають **вершинами** чотирикутника, а відрізки AB, BC, CD, DA — **сторонами** чотирикутника.

На рисунку 5 зображено фігури, що складаються із чотирьох відрізків AB, BC, CD, DA та частини площини, яку вони обмежують. Проте ці фігури не є чотирикутниками. Поясніть чому.



а *б*

Рис. 5

Сторони чотирикутника, які є сусідніми відрізками, називають **сусідніми сторонами** чотирикутника. Вершини, які є кінцями однієї сторони, називають **сусідніми вершинами** чотирикутника. Сторони, які не є сусідніми, називають **протилежними сторонами** чотирикутника. Несусідні вершини називають **протилежними вершинами** чотирикутника.

На рисунку 6 зображено чотирикутник, у якому, наприклад, сторони MQ і MN є сусідніми, а сторони NP і MQ — протилежними. Вершини Q і P — сусідні, а вершини M і P — протилежні.

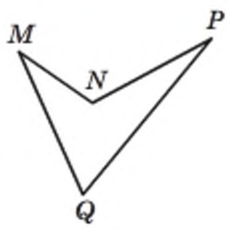
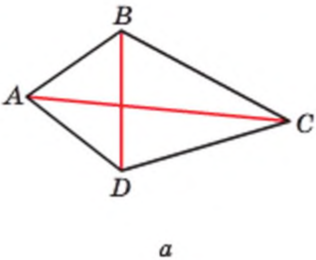


Рис. 6

Чотирикутник називають і позначають за його вершинами. Наприклад, на рисунку 4, *б* зображено чотирикутник $ABCD$, а на рисунку 6 — чотирикутник $MNPQ$. У позначенні чотирикутника букви, що стоять поруч, відповідають сусіднім вершинам чотирикутника. Наприклад, чотирикутник, зображений на рисунку 6, можна позначити ще й так: $PQMN$, або $MQPN$, або $NPQM$ тощо.

Суму довжин усіх сторін чотирикутника називають **периметром** чотирикутника.



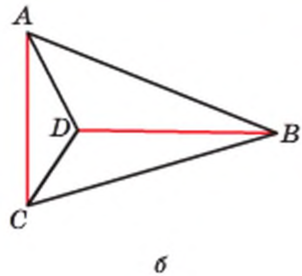


Рис. 7

Відрізок, який сполучає протилежні вершини чотирикутника, називають **діагоналлю**. На рисунку 7 відрізки AC і BD — діагоналі чотирикутника $ABCD$.

Кути ABC, BCD, CDA, DAB (рис. 8) називають **кутами** чотирикутника $ABCD$. У цьому чотирикутнику всі вони менші від розгорнутого кута. Такий чотирикутник називають **опуклим**. Однак існують чотирикутники, у яких не всі кути менші від розгорнутого. Наприклад, на рисунку 9 кут B чотирикутника $ABCD$ більший за 180°. Такий чотирикутник називають **неопуклим**[1].

Кути ABC і ADC називають **протилежними кутами** чотирикутника $ABCD$ (рис. 8, 9). Також протилежними є кути BAD і BCD.

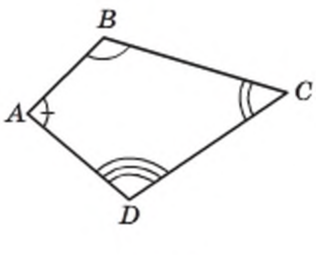


Рис. 8

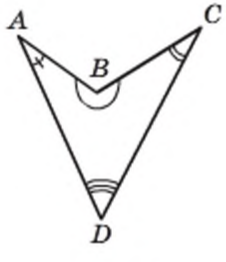


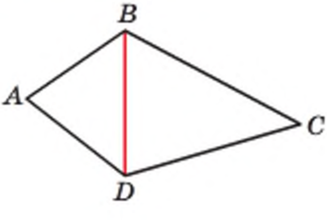
Рис. 9

Теорема 1.1. ***Сума кутів чотирикутника дорівнює* 360°.**

Доведення. ⊙ Проведемо в чотирикутнику діагональ, яка розбиває його на два трикутники. Наприклад, на рисунку 10 це діагональ BD. Тоді сума кутів чотирикутника $ABCD$ дорівнює сумі кутів трикутників ABD і CBD. Оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, то сума кутів чотирикутника дорівнює 360°. ▲

---

[1] Докладніше з поняттям «опуклість» ви ознайомитеся в п. 19.



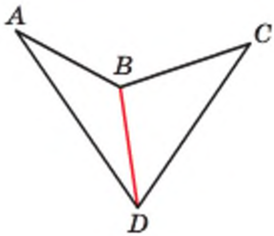


Рис. 10

Наслідок. ***У чотирикутнику тільки один із кутів може бути більшим за розгорнутий.***

Доведіть цю властивість самостійно.

Задача 1. Доведіть, що довжина будь-якої сторони чотирикутника менша від суми довжин трьох інших його сторін.

Розв'язання. Розглянемо довільний чотирикутник $ABCD$ (рис. 11). Покажемо, наприклад, що $AB < AD + DC + CB$.

Проведемо діагональ AC. Застосовуючи нерівність трикутника для сторін AB і AC відповідно трикутників ABC і ADC, отримуємо нерівності: $AB < AC + CB$, $AC < AD + DC$.

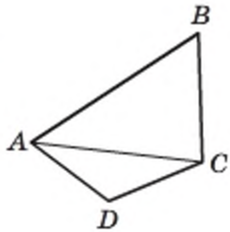


Рис. 11

Звідси $AB < AC + CB < AD + DC + CB$.

Отже, $AB < AD + DC + CB$.

Задача 2. Побудуйте чотирикутник за двома сусідніми сторонами та чотирма кутами, кожний з яких менший від розгорнутого.[1]

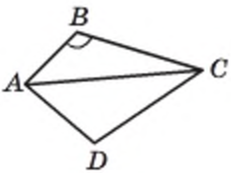


Рис. 12

Розв'язання. На рисунку 12 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому відомо довжини сторін AB і BC, а також усі його кути.

У трикутнику ABC відомо дві сторони AB і BC та кут B між ними. Отже, цей трикутник можна побудувати. Тепер можемо від променів AB і CB відкласти кути, які дорівнюють кутам чотирикутника при вершинах A і C.

Проведений аналіз показує, як будувати шуканий чотирикутник.

[1] У підручнику задачі на побудову не є обов'язковими для розгляду.

Будуємо трикутник за двома даними сторонами чотирикутника та кутом між ними. На рисунку 12 це трикутник ABC. Далі від променів AB і CB відкладаємо два відомих кути чотирикутника. Два побудованих промені перетинаються в точці D. Чотирикутник $ABCD$ — шуканий. ●

1. Поясніть, які відрізки називають сусідніми.
2. Поясніть, яку фігуру називають чотирикутником.
3. Які сторони чотирикутника називають сусідніми? протилежними?
4. Які вершини чотирикутника називають сусідніми? протилежними?
5. Як позначають чотирикутник?
6. Що називають периметром чотирикутника?
7. Що називають діагоналлю чотирикутника?
8. Який чотирикутник називають опуклим?
9. Сформулюйте теорему про суму кутів чотирикутника.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1.° Накресліть чотирикутник, у якому:
1) три кути тупі;
2) кути при сусідніх вершинах прямі, а два інших не є прямими;
3) одна діагональ точкою перетину діагоналей ділиться навпіл, а друга не ділиться навпіл;
4) діагоналі перпендикулярні.

2.° Накресліть довільний чотирикутник, позначте його вершини буквами M, K, E, F. Укажіть пари його сусідніх сторін, протилежних сторін, протилежних вершин. Запишіть які-небудь три позначення цього чотирикутника.

3.° Накресліть чотирикутник, у якому:
1) три кути гострі;
2) два протилежних кути прямі, а два інших не є прямими;
3) діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

ВПРАВИ

4.° Серед фігур, зображених на рисунку 13, укажіть чотирикутники.

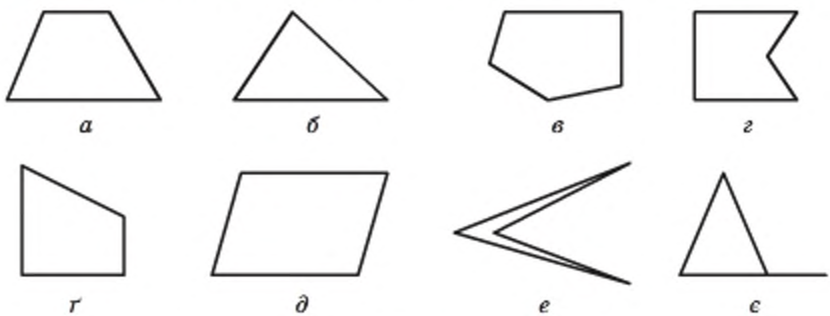


Рис. 13

5.° Наведіть чотири яких-небудь позначення чотирикутника, зображеного на рисунку 14. Укажіть:
1) вершини чотирикутника;
2) його сторони;
3) пари сусідніх вершин;
4) пари протилежних вершин;
5) пари сусідніх сторін;
6) пари протилежних сторін;
7) діагоналі чотирикутника.

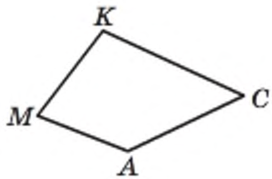


Рис. 14

6.° Серед чотирикутників, зображених на рисунку 15, укажіть опуклі.

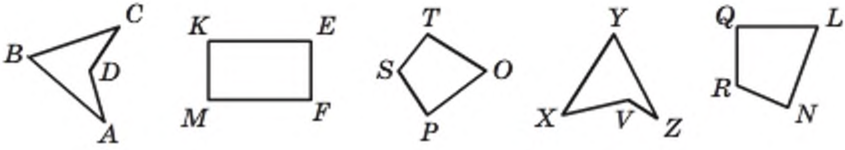


Рис. 15

7.° Чому дорівнює четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють 78°, 89° і 93°?

8.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони рівні між собою.

9.° У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle B = 150°$, $\angle A = \angle C = \angle D$. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.

10.° Один із кутів чотирикутника у 2 рази менший від другого кута, на $20°$ менший від третього та на $40°$ більший за четвертий. Знайдіть кути чотирикутника.

11.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 10 і 21. Чи є цей чотирикутник опуклим?

12.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо три його кути пропорційні числам 4, 5 і 7, а четвертий кут дорівнює їхній півсумі. Чи є цей чотирикутник опуклим?

13.° Чи може чотирикутник мати:
1) три прямих кути й один гострий;
2) три прямих кути й один тупий;
3) чотири прямих кути;
4) чотири гострих кути;
5) два прямих і два тупих кути;
6) два прямих кути, один гострий та один тупий?

У разі ствердної відповіді нарисуйте такий чотирикутник.

14.° Периметр чотирикутника дорівнює 63 см. Знайдіть його сторони, якщо друга сторона становить $\frac{2}{3}$ першої, третя — 50 % другої, а четверта — 150 % першої.

15.° Знайдіть сторони чотирикутника, якщо одна з них на 2 см більша за другу, на 6 см менша від третьої, у 3 рази менша від четвертої, а периметр дорівнює 64 см.

16.° У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і BC рівні, а діагональ BD утворює із цими сторонами рівні кути. Доведіть, що сторони CD і AD теж рівні.

17.° Діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл, одна з його сторін дорівнює 6 см. Чому дорівнює протилежна їй сторона чотирикутника?

18.° У чотирикутнику $MNKP$ відомо, що $MN = NK$, $MP = PK$, $\angle M = 100°$. Знайдіть кут K.

19.° У чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC утворює зі сторонами AB і AD рівні кути та зі сторонами CB і CD також рівні кути, $AB = 8$ см, $BC = 10$ см. Знайдіть периметр чотирикутника $ABCD$.

20.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 44°$, $\angle B = 56°$. Бісектриси AK і BM трикутника перетинаються в точці O. Знайдіть кути чотирикутника: 1) $MOKC$; 2) $AOBC$.

21.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 36°$, $\angle B = 72°$. Висоти AE і BF трикутника перетинаються в точці H. Знайдіть кути чотирикутника: 1) $CFHE$; 2) $ACBH$.

22.• Знайдіть діагональ чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 80 см, а периметри трикутників, на які ця діагональ розбиває даний чотирикутник, дорівнюють 36 см і 64 см.

23.• Чи можуть сторони чотирикутника дорівнювати:
1) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 9 дм; 2) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 10 дм?

24.•• У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle A = \angle C = 90°$. Доведіть, що бісектриси двох інших кутів чотирикутника або паралельні, або лежать на одній прямій.

25.•• Доведіть, що коли бісектриси двох протилежних кутів опуклого чотирикутника паралельні або лежать на одній прямій, то два інших кути чотирикутника рівні.

26.•• Побудуйте чотирикутник за його сторонами та одним із кутів.

27.•• Побудуйте чотирикутник за трьома сторонами та двома діагоналями.

28.•• Побудуйте чотирикутник за його сторонами та однією з діагоналей.

29.* Побудуйте чотирикутник $ABCD$ за кутами A і B, сторонами AB і BC та сумою сторін AD і CD.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

30. Пряма c перетинає кожну з прямих a і b (рис. 16). Укажіть пари різносторонніх і пари односторонніх кутів, які при цьому утворилися. Яке взаємне розміщення прямих a і b, якщо: 1) $\angle 1 = \angle 4$; 2) $\angle 1 = 20°$, $\angle 3 = 170°$?

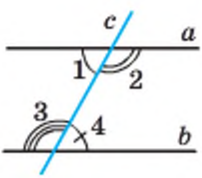


Рис. 16

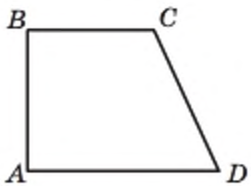


Рис. 17

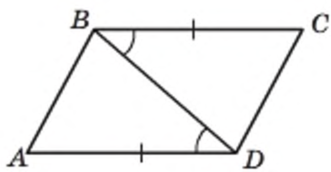


Рис. 18

31. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 17) $\angle C = 110°$, $\angle D = 70°$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

32. У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle A = \angle B = 90°$, $\angle C = 100°$. Чи є паралельними прямі: 1) BC і AD; 2) AB і CD?

33. На рисунку 18 $AD = BC$, $\angle ADB = \angle CBD$. Доведіть, що $AB = CD$ і $AB \parallel CD$.

34. Відрізок BK — бісектриса трикутника ABC. Пряма DK паралельна стороні AB і перетинає сторону BC у точці D, $\angle BDK = 116°$. Знайдіть кут BKD.

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 12, 13, 14 на с. 188, 189.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

35. Білу площину довільно забризкано чорною фарбою. Доведіть, що на площині знайдеться відрізок завдовжки 1 м, кінці якого зафарбовано одним кольором.

ДЕРЗАЙТЕ!

Задачу 29 позначено «зірочкою» (*). Це означає, що вона належить до задач підвищеної складності. Хоча таких задач не буде на самостійних і контрольних роботах, їх у підручнику чимало. У вас може виникнути запитання: «Навіщо ж витрачати час і сили на складні задачі, якщо вони не є обов'язковими для розв'язування, а високу оцінку можна заробити й значно меншими зусиллями?» На нашу думку, найкращу відповідь на це запитання можна знайти в книзі «Математика й романтика» відомого українського геометра та педагога Миколи Івановича Кованцова. Він писав: «Любі друзі! Беріться за розв'язування складних математичних задач! І тих, які щойно поставлені, і тих, які вже багато десятиліть або століть не піддаються розв'язуванню. Вас спіткають страждання й розчарування, коли здаватиметься, що ви марно витратили роки на пошуки примари, яка від вас ухиляється. Усе може бути. Але ви будете сторицею винагороджені, коли одного чудового дня опинитеся перед тією завітною ціллю, до якої так довго й складно йшли. Не будьте байдужими, інакше на вас чекає духовна смерть».

М. І. Кованцов
(1924–1988)

М. І. Кованцов майже 30 років очолював кафедру геометрії Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Його перу належить понад 200 наукових і науково-популярних праць.

Микола Іванович виховав десятки вчених, які сьогодні працюють як в Україні, так і в багатьох країнах світу.

2. Паралелограм. Властивості паралелограма

Означення. Паралелограмом називають чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні.

На рисунку 19 зображено паралелограм $ABCD$. За означенням паралелограма маємо: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Розглянемо деякі властивості паралелограма.

Теорема 2.1. ***Протилежні сторони паралелограма рівні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 19 зображено паралелограм $ABCD$. Доведемо, що $AB = CD$ і $BC = AD$.

Проведемо діагональ AC. Доведемо, що трикутники ABC і CDA рівні (рис. 20).

У цих трикутниках сторона AC — спільна, кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC, кути 3 і 4 рівні як різносторонні при паралельних прямих AB і CD та січній AC. Отже, трикутники ABC і CDA рівні за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $AB = CD$ і $BC = AD$. ▲

Теорема 2.2. ***Протилежні кути паралелограма рівні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 19 зображено паралелограм $ABCD$. Доведемо, що $\angle A = \angle C$ і $\angle B = \angle D$.

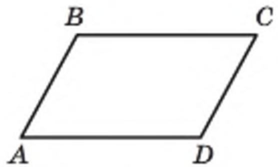


Рис. 19

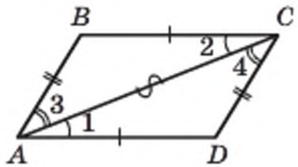


Рис. 20

Під час доведення попередньої теореми було встановлено, що $\triangle ABC = \triangle CDA$ (рис. 20). Звідси $\angle B = \angle D$. З рівності кутів 1 і 2 та рівності кутів 3 і 4 випливає, що $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Отже, $\angle BAD = \angle BCD$. ▲

Теорема 2.3. ***Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.***

Доведення. ⊙ На рисунку 21 зображено паралелограм $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Доведемо, що $AO = OC$ і $BO = OD$.

Розглянемо трикутники AOD і COB. Маємо: $\angle 1$ і $\angle 2$, $\angle 3$ і $\angle 4$ рівні як різносторонні при паралельних прямих AD і BC

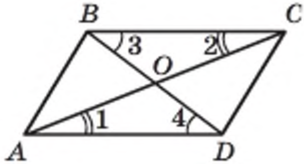


Рис. 21

та січних AC і BD відповідно. З теореми 2.1 отримуємо: $AD = BC$. Отже, трикутники AOD і COB рівні за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $AO = OC$, $BO = OD$. ▲

Означення. Висотою паралелограма називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить сторону паралелограма, на пряму, що містить протилежну сторону.

На рисунку 22 кожний із відрізків AF, QE, BM, PN, CK є висотою паралелограма $ABCD$.

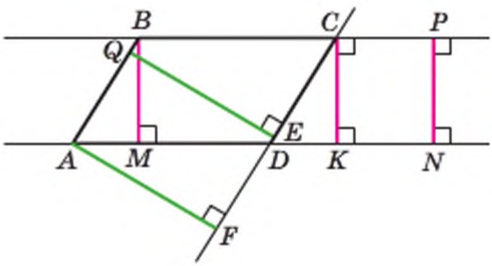


Рис. 22

Із курсу геометрії 7 класу ви знаєте, що всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої. Тому $AF = QE$ і $BM = PN = CK$.

Говорять, що **висоти** BM, CK, PN **проведено до сторін** BC і AD, а висоти AF, QE — до сторін AB і CD.

Задача 1. Доведіть, що прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Через кожну вершину даного трикутника ABC проведемо пряму, паралельну протилежній стороні. Отримаємо трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 23).

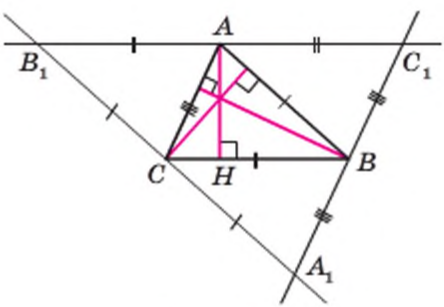


Рис. 23

Із побудови випливає, що чотирикутники AC_1BC і $ABCB_1$ — паралелограми. Звідси $AC_1 = BC = AB_1$. Отже, точка A є серединою відрізка B_1C_1.

Оскільки прямі B_1C_1 і BC паралельні, то висота AH трикутника ABC перпендикулярна до відрізка B_1C_1. Таким чином, пряма AH — серединний перпендикуляр сторони B_1C_1 трикутника $A_1B_1C_1$. Аналогічно можна довести, що прямі, які містять дві інші висоти трикутника ABC, є серединними перпендикулярами сторін C_1A_1 і A_1B_1 трикутника $A_1B_1C_1$.

Оскільки серединні перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці, то твердження задачі доведено.

Задача 2. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 60 см.

Розв'язання. Нехай бісектриса тупого кута B паралелограма $ABCD$ (рис. 24) перетинає сторону AD у точці M. За умовою $AM : MD = 2 : 1$.

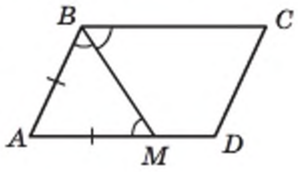


Рис. 24

Кути ABM і CBM рівні за умовою.

Кути CBM і AMB рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній BM.

Тоді $\angle ABM = \angle AMB$. Отже, трикутник BAM рівнобедрений, звідси $AB = AM$.

Нехай $MD = x$ см, тоді $AB = AM = 2x$ см, $AD = 3x$ см. Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то його периметр дорівнює $2(AB + AD)$. Ураховуючи, що за умовою периметр паралелограма дорівнює 60 см, отримуємо:

$$2(2x + 3x) = 60;$$
$$x = 6.$$

Отже, $AB = 12$ см, $AD = 18$ см.

Відповідь: 12 см, 18 см.

1. Який чотирикутник називають паралелограмом?
2. Яку властивість мають протилежні сторони паралелограма?
3. Яку властивість мають протилежні кути паралелограма?
4. Яку властивість мають діагоналі паралелограма?
5. Що називають висотою паралелограма?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

36.° На рисунку 25 зображено паралелограм $ABCD$. Зробіть такий рисунок у зошиті. Проведіть із точок B і M висоти паралелограма до сторони AD, а з точки K — висоту до сторони AB.

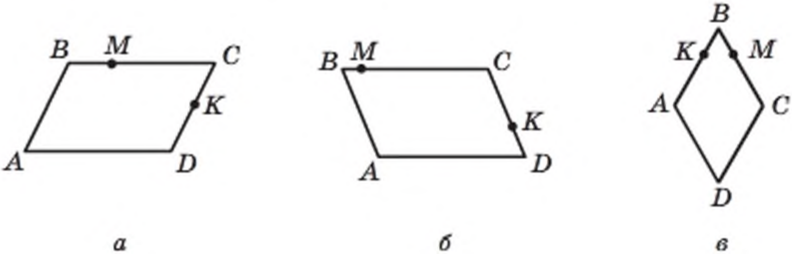


Рис. 25

ВПРАВИ

37.° Дві паралельні прямі перетинають три інші паралельні прямі. Скільки при цьому утворилося паралелограмів?

38.° На рисунку 26 зображено паралелограми. Визначте, не виконуючи вимірювань, на яких рисунках величини кутів або довжини відрізків позначено неправильно (довжини відрізків наведено в сантиметрах).

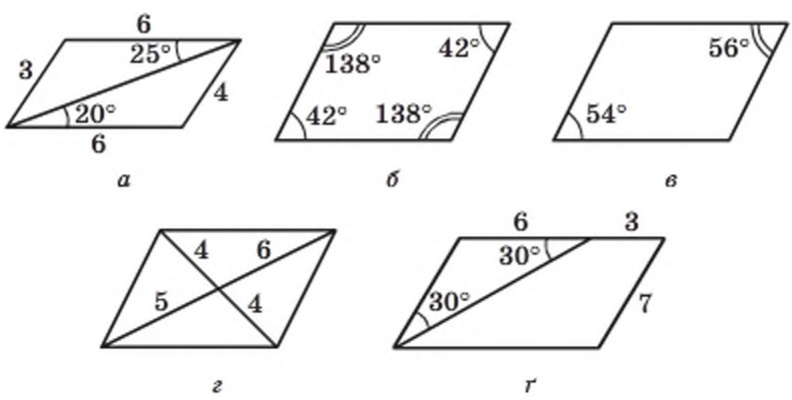


Рис. 26

39.° Чи вистачить 40 см дроту, щоб виготовити з нього паралелограм зі сторонами: 1) 14 см і 8 см; 2) 16 см і 4 см; 3) 12 см і 6 см?

40.° Периметр паралелограма дорівнює 112 см. Знайдіть його сторони, якщо: 1) одна з них на 12 см менша від другої; 2) дві його сторони відносяться як 5 : 9.

41.° Знайдіть сторони паралелограма, якщо одна з них у 5 разів більша за другу, а периметр паралелограма дорівнює 96 см.

42.° У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см, O — точка перетину його діагоналей. Знайдіть периметр трикутника COD.

43.° Доведіть, що сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°.

44.° Знайдіть кути паралелограма, якщо:
1) один із них дорівнює 70°;
1) сума двох його кутів дорівнює 100°;
2) різниця двох його кутів дорівнює 20°;
3) два його кути відносяться як 3 : 7.

45.° Знайдіть кути паралелограма, якщо один із них:
1) у 2 рази більший за другий;
2) на 24° менший від другого.

46.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 35°$. Через довільну точку, яка належить стороні BC, проведено дві прямі, паралельні сторонам AB і AC трикутника. Визначте вид чотирикутника, що утворився, та знайдіть усі його кути.

47.° Знайдіть кути паралелограма $ABCD$ (рис. 27), якщо $\angle ABD = 68°$, $\angle ADB = 47°$.

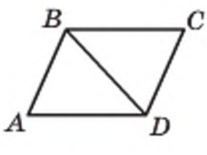


Рис. 27

48.° У паралелограмі $ABCD$ діагональ AC утворює зі стороною AB кут, який дорівнює 32°, $\angle BCD = 56°$. Знайдіть кути CAD і D.

49.° Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці M. Визначте величину кута M трикутника ABM.

50.° Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 10 см. Чи може одна з його діагоналей дорівнювати 16 см?

51.• Висота BK паралелограма $ABCD$ ділить його сторону AD на відрізки AK і KD такі, що $AK = 4$ см, $KD = 6$ см. Знайдіть кути й периметр паралелограма, якщо $\angle ABK = 30°$.

52.• Один із кутів паралелограма дорівнює 45°. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, дорівнює 3 см і ділить сторону паралелограма навпіл. Знайдіть цю сторону паралелограма та кути, які утворює діагональ, що сполучає вершини тупих кутів, зі сторонами паралелограма.

53.° У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $\angle C = 30°$, висота BH, проведена до сторони CD, дорівнює 7 см, а периметр паралелограма — 46 см. Знайдіть сторони паралелограма.

54.° Дано паралелограм $ABCD$ і трикутник MKN. Чи можуть одночасно виконуватися рівності $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle N$?

55.° Доведіть, що вершини B і D паралелограма $ABCD$ рівновіддалені від прямої AC.

56.° Доведіть, що будь-який відрізок, який проходить через точку перетину діагоналей паралелограма та кінці якого належать протилежним сторонам паралелограма, ділиться цією точкою навпіл.

57.° Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 24 см, $\angle ABC = 160°$, діагональ AC утворює зі стороною AD кут $10°$. Знайдіть сторони паралелограма.

58.° Діагональ BD паралелограма $ABCD$ утворює зі стороною AB кут $65°$, $\angle C = 50°$, $AB = 8$ см. Знайдіть периметр паралелограма.

59.° Знайдіть кути паралелограма $ABCD$, якщо $BD \perp AB$ і $BD = AB$.

60.° Діагональ паралелограма утворює з його сторонами кути $30°$ і $90°$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 36 см.

61.° Поза паралелограмом $ABCD$ проведено пряму, паралельну його діагоналі BD. Ця пряма перетинає прямі AB, BC, CD і AD у точках E, M, F і K відповідно. Доведіть, що $MK = EF$.

62.° Паралельно діагоналі AC паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає відрізки AB і BC у точках M і N, а прямі AD і CD у точках P і K відповідно. Доведіть, що $PM = NK$.

63.° Один із кутів, утворених при перетині бісектриси кута паралелограма з його стороною, дорівнює $24°$. Знайдіть кути паралелограма.

64.° Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M. Знайдіть периметр даного паралелограма, якщо $AB = 12$ см, $MC = 16$ см.

65.° Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 3 : 5, рахуючи від вершини тупого кута. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 66 см.

66.° Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ перетинає сторону CD у точці K так, що відрізок CK у 5 разів більший за відрізок KD. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 88 см.

67.• У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $AD = 12$ см, $AB = 3$ см, бісектриси кутів B і C перетинають сторону AD у точках E і F відповідно. Знайдіть відрізок EF.

68.• Кут між висотою BH паралелограма $ABCD$ і бісектрисою BM кута ABC дорівнює 24°. Знайдіть кути паралелограма.

69.• Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює гострому куту паралелограма.

70.• Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини гострого кута, дорівнює тупому куту паралелограма.

71.• Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 30°. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 4 см і 6 см.

72.• Висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, утворюють кут 150°, сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 18 см. Знайдіть висоти паралелограма.

73.• Через довільну точку основи рівнобедреного трикутника проведено прямі, паралельні його бічним сторонам. Доведіть, що периметр утвореного чотирикутника дорівнює сумі бічних сторін даного трикутника.

74.• Через кожну вершину трикутника ABC проведено пряму, паралельну протилежній стороні. Сума периметрів усіх утворених паралелограмів дорівнює 100 см. Знайдіть периметр трикутника ABC.

75.• Побудуйте паралелограм:
1) за двома сторонами та кутом між ними;
2) за двома діагоналями та стороною;
3) за стороною, діагоналлю та кутом між ними.

76.• Побудуйте паралелограм:
1) за двома сторонами та діагоналлю;
2) за двома діагоналями та кутом між ними.

77.•• Дано три точки, які не лежать на одній прямій. Побудуйте паралелограм, вершинами якого є дані точки. Скільки розв'язків має задача?

78.•• Точка перетину бісектрис двох сусідніх кутів паралелограма належить його стороні. Знайдіть відношення сусідніх сторін паралелограма.

79.•• На стороні BC паралелограма $ABCD$ існує така точка M, що $BM = MD = CD$. Знайдіть кути паралелограма, якщо $AD = BD$.

80.•• Побудуйте паралелограм:
1) за стороною, проведеною до неї висотою та діагоналлю;
2) за двома діагоналями та висотою;
3) за гострим кутом і двома висотами, проведеними до двох сусідніх сторін.

81.•• Побудуйте паралелограм:
1) за двома сторонами та висотою;
2) за діагоналлю та двома висотами, проведеними до двох сусідніх сторін.

82.* Із вершини B паралелограма $ABCD$ опустили перпендикуляр BE на діагональ AC. Через точку A проведено пряму m, перпендикулярну до прямої AD, а через точку C — пряму n, перпендикулярну до прямої CD. Доведіть, що точка перетину прямих m і n належить прямій BE.

83.* Побудуйте паралелограм за стороною, сумою діагоналей та кутом між діагоналями.

84.* На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ поза ним побудовано рівносторонні трикутники ABM і BCK. Доведіть, що трикутник MKD рівносторонній.

85.* Через точку, яка належить куту, проведіть пряму так, щоб відрізок цієї прямої, що міститься всередині кута, даною точкою ділився б навпіл.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

86. Довжина відрізка AB дорівнює 24 см. Точка C належить прямій AB, причому $BC = 5AC$. На відрізку AB позначено точку D так, що $AB = 4BD$. Знайдіть відрізок CD.

87. Скільки існує нерівних між собою:
1) прямокутних трикутників зі стороною 5 см і кутом 45°;
2) рівнобедрених трикутників зі стороною 6 см і кутом 30°;
3) прямокутних трикутників зі стороною 7 см і кутом 60°?

88. Діагоналі AC і BD чотирикутника $ABCD$ є діаметрами кола. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

89. Чи можна квадрат розміром 10×10 клітинок розрізати на 25 фігур, що складаються із чотирьох клітинок і мають такий вигляд, як зображено на рисунку 28?

Рис. 28

3. Ознаки паралелограма

Означення паралелограма дає змогу серед чотирикутників розпізнавати паралелограми. Цій самій меті слугують такі три теореми, які називають ознаками паралелограма.

Теорема 3.1 (обернена до теореми 2.1). ***Якщо в чотирикутнику кожні дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.***

Доведення. ⊙ На рисунку 29 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $AB = CD$ і $BC = AD$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

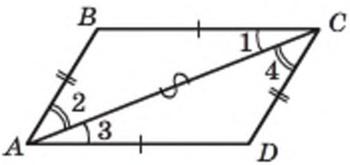


Рис. 29

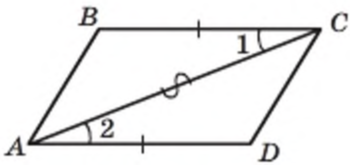


Рис. 30

Проведемо діагональ AC. Трикутники ABC і CDA рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$. Кути 1 і 3 є різносторонніми при прямих BC і AD та січній AC. Отже, $BC \parallel AD$. Аналогічно з рівності $\angle 2 = \angle 4$ випливає, що $AB \parallel CD$.

Отже, у чотирикутнику $ABCD$ кожні дві протилежні сторони паралельні, а тому цей чотирикутник — паралелограм. ▲

Теорема 3.2. ***Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні та паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.***

Доведення. ⊙ На рисунку 30 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $BC = AD$ і $BC \parallel AD$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Проведемо діагональ AC. У трикутниках ABC і CDA маємо: $BC = AD$ за умовою, кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC, а сторона AC — спільна. Отже, трикутники ABC і CDA рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $AB = CD$. Таким чином, у чотирикутнику $ABCD$ кожні дві протилежні сторони рівні. Тому за теоремою 3.1 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. ▲

Теорема 3.3 (обернена до теореми 2.3). ***Якщо в чотирикутнику діагоналі точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.***

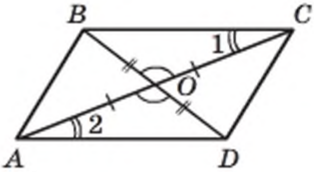


Рис. 31

Доведення. ⊙ На рисунку 31 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому діагоналі AC і BD перетинаються в точці O, причому $AO = OC$ і $BO = OD$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Оскільки кути BOC і DOA рівні як вертикальні, $AO = OC$ і $BO = OD$, то трикутники BOC і DOA рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $BC = AD$ і $\angle 1 = \angle 2$. Кути 1 і 2 є різносторонніми при прямих BC і AD та січній AC. Отже, $BC \parallel AD$.

Таким чином, у чотирикутнику $ABCD$ дві протилежні сторони рівні й паралельні. За теоремою 3.2 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. ▲

Ви знаєте, що трикутник **можна однозначно задати його сторонами**, тобто задача побудови трикутника за трьома сторонами має єдиний розв'язок. Інша **річ — паралелограм. На рисунку 32** зображено паралелограми $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, сторони яких рівні, тобто $AB = A_1B_1 = A_2B_2$ і $BC = B_1C_1 = B_2C_2$. Проте очевидно, що самі паралелограми не є рівними.

Сказане означає, що коли чотири рейки скріпити так, щоб утворився паралелограм, то отримана конструкція не буде жорсткою.

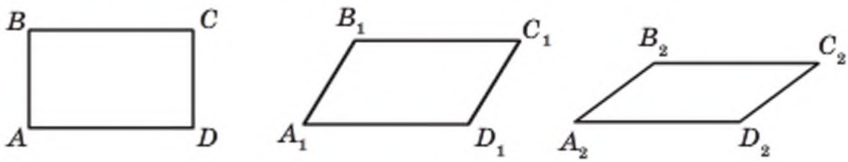


Рис. 32

Цю властивість паралелограма широко використовують на практиці. Завдяки його рухомості лампу можна встановлювати в зручне для роботи положення, а розсувну решітку — відсувати на потрібну відстань у дверному прорізі (рис. 33).

На рисунку 34 зображено схему механізму, який є складовою парової машини. Зі збільшенням швидкості обертання осі кулі віддаляються від неї під дією відцентрової сили, тим самим піднімаючи заслінку, яка регулює кількість пари. Механізм названо **паралелограмом Уатта** на честь винахідника першої універсальної парової машини.

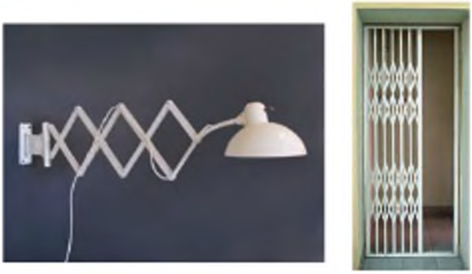


Рис. 33

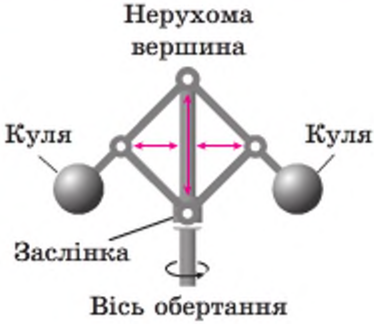


Рис. 34

Задача. Доведіть, що коли в чотирикутнику кожні два протилежні кути рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.

Розв'язання. На рисунку 35 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

За теоремою про суму кутів чотирикутника $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Враховуючи, що $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, отримаємо: $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$.

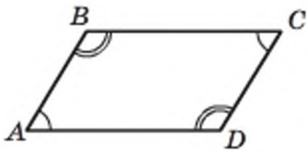


Рис. 35

Оскільки кути A і B — односторонні кути при прямих AD і BC та січній AB, а їхня сума дорівнює 180°, то $BC \parallel AD$.

Аналогічно доводимо, що $AB \parallel CD$.

Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

1. Які ознаки паралелограма ви знаєте? Сформулюйте їх.
2. Серед властивостей та ознак паралелограма вкажіть взаємно обернені теореми.
3. Яку властивість паралелограма широко використовують на практиці?

ВПРАВИ

90.° Доведіть, що коли сума кутів, прилеглих до будь-якої із сусідніх сторін чотирикутника, дорівнює 180°, то цей чотирикутник — паралелограм.

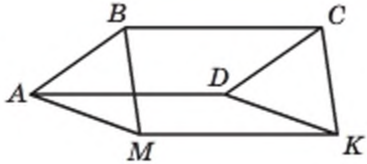


Рис. 36

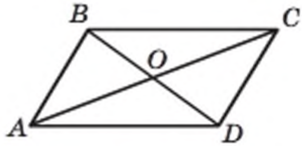


Рис. 37

91.° Чотирикутники $ABCD$ і $AMKD$ — паралелограми (рис. 36). Доведіть, що чотирикутник $BMKC$ — паралелограм.

92.° Відрізок AO — медіана трикутника ABD, відрізок BO — медіана трикутника ABC (рис. 37). Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

93.° На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначили точки M і K так, що $AM = CK$. Доведіть, що чотирикутник $MBKD$ — паралелограм.

94.° Два кола мають спільний центр O (рис. 38). В одному з кіл проведено діаметр AB, у другому — діаметр CD. Доведіть, що чотирикутник $ACBD$ — паралелограм.

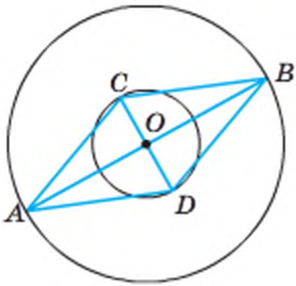


Рис. 38

95.° Точки E і F — відповідно середини сторін BC і AD паралелограма $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

96.° На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM і CK. Доведіть, що чотирикутник $MBKD$ — паралелограм.

97.° На сторонах паралелограма $ABCD$ (рис. 39) відклали рівні відрізки AM, BK, CE і DF. Доведіть, що чотирикутник $MKEF$ — паралелограм.

98.• У трикутнику ABC на продовженні медіани AM за точку M відклали відрізок MK, який дорівнює відрізку AM. Визначте вид чотирикутника $ABKC$.

99.• У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

100.• Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M, а бісектриса кута C — сторону AD у точці K. Доведіть, що чотирикутник $AMCK$ — паралелограм.

101.• На рисунку 40 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, $\angle BCP = \angle DAE$. Доведіть, що чотирикутник $APCE$ — паралелограм.

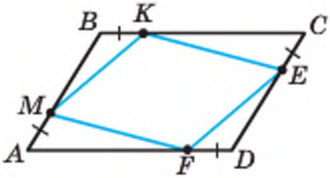


Рис. 39

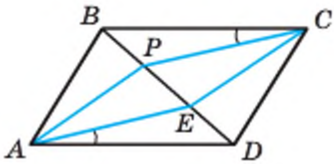


Рис. 40

102.• На рисунку 41 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, $\angle BEC = \angle DFA$. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

103.• Із вершин B і D паралелограма $ABCD$ проведено перпендикуляри BM і DK до діагоналі AC. Доведіть, що чотирикутник $BKDM$ — паралелограм.

104.• Бісектриси кутів A і C паралелограма $ABCD$ перетинають його діагональ BD у точках E і F відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

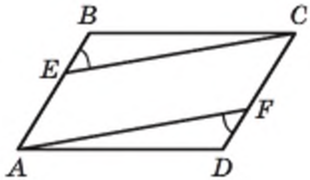


Рис. 41

105.•• Через середину O діагоналі NP паралелограма $MNKP$ проведено пряму, яка перетинає сторони MN і KP у точках A і B відповідно. Доведіть, що чотирикутник $ANBP$ — паралелограм.

106.•• Через точку перетину діагоналей паралелограма $CDEF$ проведено дві прямі, одна з яких перетинає сторони CD і EF у точках A і B відповідно, а друга — сторони DE і CF у точках M і K відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AMBK$ — паралелограм.

107.•• Точки M, N, K і P — середини сторін AB, BC, CD і AD паралелограма $ABCD$ відповідно. Доведіть, що чотирикутник, вершинами якого є точки перетину прямих AN, BK, CP і DM, — паралелограм.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

108. Прямі, на яких лежать бісектриси AK і BM трикутника ABC, перетинаються під кутом 74°. Знайдіть кут C.

109. Кут, протилежний основі рівнобедреного трикутника, дорівнює 120°, а висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 8 см. Знайдіть основу трикутника.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

110. Учитель запропонував учневі вирізати з листа картону розміром 8×8 клітинок вісім квадратів розміром 2×2 клітинки за умови не псувати клітинки, що залишилися. Потім виявилося, що потрібен ще один такий самий квадрат. Чи завжди можна це зробити із залишків листа?

НЕОБХІДНО І ДОСТАТНЬО

Із курсу геометрії 7 класу ви дізналися, що більшість теорем складається з двох частин: умови (те, що дано) і висновку (те, що треба довести).

Якщо твердження, що виражає умову, позначити буквою A, а твердження, що виражає висновок, — буквою B, то формулювання теореми можна зобразити такою схемою:

якщо A, то B.

Наприклад, теорему 2.3 можна сформулювати так:

	A		B
якщо	чотирикутник є паралелограмом,	**то**	діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл

Тоді теорему 3.3, обернену до теореми 2.3, можна сформулювати так:

	A		B
якщо	діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл,	**то**	чотирикутник є паралелограмом

Часто в повсякденному житті у своїх висловлюваннях ми користуємося словами «необхідно», «достатньо». Наведемо кілька прикладів.

- Для того щоб уміти розв'язувати задачі, *необхідно* знати теореми.
- Якщо ви на математичній олімпіаді правильно розв'язали всі запропоновані задачі, то цього *достатньо* для того, щоби посісти перше місце.

Уживання слів «необхідно» і «достатньо» тісно пов'язане з теоремами.

Розглянемо теорему:

	A		***B***
якщо	натуральне число кратне 10,	**то**	це число кратне 5

Умова A є достатньою для висновку B. Разом з тим подільність числа націло на 5 (твердження B) необхідна для подільності числа націло на 10 (твердження A).

Наведемо ще один приклад:

	A		***B***
якщо	два кути є вертикальними,	**то**	ці кути рівні

У цій теоремі твердження A є **достатньою умовою** для твердження B, тобто для того, щоб два кути були рівними, *достатньо*, щоб вони були вертикальними. У цій самій теоремі твердження B є **необхідною умовою** для твердження A, тобто для того, щоб два кути були вертикальними, *необхідно*, щоб вони були рівними. Зазначимо, що твердження B не є достатньою умовою для твердження A. Справді, якщо два кути рівні, то це зовсім не означає, що вони вертикальні.

Отже, у будь-якій теоремі виду **якщо *A*, то *B*** твердження A є достатнім для твердження B, а твердження B — необхідним для твердження A.

Якщо справедлива не тільки теорема

якщо *A*, то *B*,

але й обернена теорема

якщо *B*, то *A*,

то A є **необхідною і достатньою** умовою для B, а B — необхідною і достатньою умовою для A.

Наприклад, теореми 3.3 і 2.3 є взаємно оберненими. Мовою «необхідно — достатньо» цей факт можна сформулювати так:

для того щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб його діагоналі точкою перетину ділилися навпіл.

Наголосимо, що коли в теоремі є слова «необхідно» і «достатньо», то вона об'єднує дві теореми: пряму й обернену (прямою теоремою може бути будь-яка з двох теорем, тоді друга буде оберненою). Отже, доведення такої теореми має складатися з двох частин: доведень прямої та оберненої теорем. Теорему, яка об'єднує пряму та обернену теореми, називають **критерієм**.

Іноді замість «необхідно і достатньо» говорять «тоді й тільки тоді». Наприклад, взаємно обернені теореми 2.1 і 3.1 можна об'єднати в такий критерій:

чотирикутник є паралелограмом тоді й тільки тоді, коли кожні дві його протилежні сторони рівні.

Сформулюйте самостійно теорему 2.2 та ключову задачу з пункту 3 у вигляді теореми-критерію.

4. Прямокутник

Паралелограм — це чотирикутник, проте очевидно, що не кожний чотирикутник є паралелограмом. У цьому разі говорять, що паралелограм — це окремий вид чотирикутників. Рисунок 42 ілюструє цей факт.

Існують також окремі види паралелограмів.

Означення. Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути прямі.

На рисунку 43 зображено прямокутник $ABCD$.

З означення випливає, що прямокутник має всі властивості паралелограма. *У прямокутнику:*

- *протилежні сторони рівні;*
- *діагоналі точкою перетину діляться навпіл.*

Проте прямокутник має свої особливі властивості, яких не має паралелограм, відмінний від прямокутника. Так, з означення випливає, що всі кути прямокутника рівні. Ще одну властивість прямокутника встановлює така теорема.

Теорема 4.1. ***Діагоналі прямокутника рівні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 44 зображено прямокутник $ABCD$. Доведемо, що його діагоналі AC і BD рівні.

У прямокутних трикутниках ABD і DCA катети AB і DC рівні, а катет AD спільний. Тому трикутники ABD і DCA рівні за двома катетами. Звідси $BD = AC$. ▲

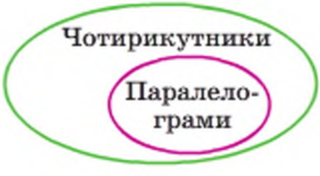


Рис. 42

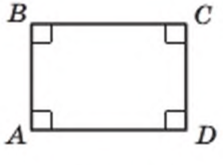


Рис. 43

Рис. 44

Означення прямокутника дає змогу серед паралелограмів розпізнавати прямокутники. Цій самій меті слугують такі дві теореми, які називають ознаками прямокутника.

Теорема 4.2. ***Якщо один із кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм — прямокутник.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 4.3. ***Якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм — прямокутник.***

Доведення. ⊙ На рисунку 45 зображено паралелограм $ABCD$, діагоналі AC і BD якого рівні. Доведемо, що паралелограм $ABCD$ — прямокутник.

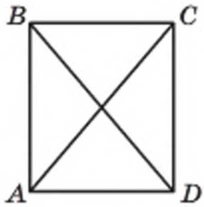


Рис. 45

Розглянемо трикутники ABD і DCA. У них $AB = CD$, $BD = AC$, AD — спільна сторона. Отже, ці трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle BAD = \angle CDA$. Ці кути є односторонніми при паралельних прямих AB і DC та січній AD. Таким чином, $\angle BAD + \angle CDA = 180°$. Тоді $\angle BAD = \angle CDA = 90°$. Тому за теоремою 4.2 паралелограм $ABCD$ — прямокутник. ▲

1. Яку фігуру називають прямокутником?
2. Які властивості має прямокутник?
3. Яку особливу властивість мають діагоналі прямокутника?
4. За якими ознаками можна встановити, що паралелограм є прямокутником?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

111.° Накресліть прямокутник. Користуючись лише лінійкою, знайдіть точку, яка рівновіддалена від його вершин.

ВПРАВИ

112.° Доведіть, що чотирикутник, усі кути якого прямі, є прямокутником.

113.° Діагоналі прямокутника $ABCD$ (рис. 46) перетинаються в точці O. Доведіть, що трикутники AOB і AOD рівнобедрені.

114.° Діагоналі прямокутника $ABCD$ (рис. 46) перетинаються в точці O, $\angle ABD = 64°$. Знайдіть кути COD і AOD.

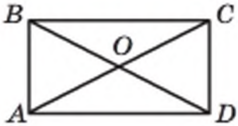


Рис. 46

115.° Діагоналі прямокутника $ABCD$ (рис. 46) перетинаються в точці O, $\angle ADB = 30°$, $BD = 10$ см. Знайдіть периметр трикутника AOB.

116.° Кут між діагоналями прямокутника дорівнює $60°$, а менша сторона прямокутника дорівнює 8 см. Знайдіть діагональ прямокутника.

117.• На діагоналі AC прямокутника $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM і CK (точка M лежить між точками A і K). Доведіть, що чотирикутник $BKDM$ — паралелограм, відмінний від прямокутника.

118.• На продовженні діагоналі BD прямокутника $ABCD$ за точку B позначили точку E, а на продовженні за точку D — точку F так, що $BE = DF$. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм, відмінний від прямокутника.

119.• Точка M — середина сторони BC прямокутника $ABCD$, $MA \perp MD$, периметр прямокутника дорівнює 36 см. Знайдіть сторони прямокутника.

120.• Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 30 см. Бісектриси кутів A і D перетинаються в точці M, яка належить стороні BC. Знайдіть сторони прямокутника.

121.• Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 55 см. Прямокутник $ABCD$ побудовано так, що дві його вершини A і D належать гіпотенузі, а дві інші — катетам даного трикутника. Знайдіть сторони прямокутника, якщо $AB : BC = 3 : 5$.

122.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = BC = 6$ см. Прямокутник $CMKN$ побудовано так, що точка M належить катету AC, точка N — катету BC, а точка K — гіпотенузі AB. Знайдіть периметр прямокутника $CMKN$.

123.• Доведіть, що коли діагоналі паралелограма утворюють рівні кути з однією з його сторін, то цей паралелограм є прямокутником.

124.• Доведіть, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.

125.[•] Побудуйте прямокутник:
1) за двома сторонами;
2) за діагоналлю та кутом між діагоналлю та стороною.

126.[•] Побудуйте прямокутник:
1) за стороною та діагоналлю;
2) за діагоналлю та кутом між діагоналями.

127.[••] Серединний перпендикуляр діагоналі AC прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M так, що $BM : MC = 1 : 2$. Знайдіть кути, на які діагональ прямокутника ділить його кут.

128.[••] У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $\angle BCA : \angle DCA = 1 : 5$, $AC = 18$ см. Знайдіть відстань від точки C до діагоналі BD.

129.[••] Доведіть, що бісектриси кутів паралелограма, у якого сусідні сторони не рівні, перетинаючись, утворюють прямокутник.

130.[••] Побудуйте прямокутник за стороною **та кутом між діагоналями**, який протилежний даній стороні.

131.[*] Побудуйте прямокутник:
1) за діагоналлю та різницею двох сторін;
2) за периметром і діагоналлю;
3) за периметром і кутом між діагоналями.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

132. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 48°$, відрізки AK і BM — його висоти. Знайдіть кут між прямими AK і BM.

133. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що $\angle A = \angle CBD$. Знайдіть кут ABC, якщо трикутники ABD і BCD мають ще одну пару рівних кутів.

134. Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC. Через точку C проведено пряму, яка паралельна прямій AD і перетинає пряму AB у точці E. Визначте вид трикутника ACE.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

135. На площині позначено 1000 точок. Доведіть, що існує пряма, відносно якої у кожній півплощині лежать по 500 точок.

5. Ромб

Ви вже знаєте, що прямокутник — це окремий вид паралелограма. Ознайомимося ще з одним видом паралелограма — ромбом.

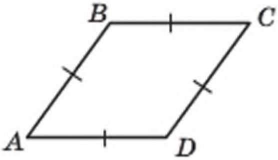


Рис. 47

Означення. Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.

На рисунку 47 зображено ромб $ABCD$.

З означення випливає, що ромб має всі властивості паралелограма. *У ромбі:*

- *протилежні кути рівні;*
- *діагоналі точкою перетину діляться навпіл.*

Проте ромб має і свої особливі властивості.

Теорема 5.1. ***Діагоналі ромба перпендикулярні та є бісектрисами його кутів.***

Доведення. ⊙ На рисунку 48 зображено ромб $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Доведемо, що $BD \perp AC$ і $\angle ABO = \angle CBO$.

Оскільки за означенням ромба всі його сторони рівні, то трикутник ABC рівнобедрений ($AB = BC$). За властивістю діагоналей паралелограма $AO = OC$. Тоді відрізок BO є медіаною трикутника ABC, а отже, і висотою та бісектрисою цього трикутника. Таким чином, $BD \perp AC$ і $\angle ABO = \angle CBO$. ▲

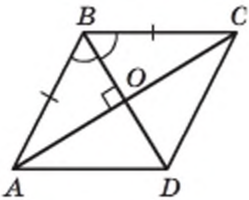


Рис. 48

Розпізнавати ромби серед паралелограмів дають змогу не лише означення ромба, а й такі дві теореми, які називають ознаками ромба.

Теорема 5.2. ***Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то цей паралелограм — ромб.***

Теорема 5.3. ***Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кута, то цей паралелограм — ромб.***

Доведіть ці теореми самостійно.

1. Яку фігуру називають ромбом?
2. Які властивості має ромб?
3. Які особливі властивості мають діагоналі ромба?
4. За якими ознаками можна встановити, що паралелограм є ромбом?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

136.° Накресліть ромб зі стороною 5 см і кутом 40°. Проведіть дві висоти з вершини його гострого кута та дві висоти з вершини тупого кута.

ВПРАВИ

137.° Доведіть, що коли дві сусідні сторони паралелограма рівні, то він є ромбом.

138.° Доведіть, що чотирикутник, усі сторони якого рівні, є ромбом.

139.° Діагональ AC ромба $ABCD$ (рис. 49) утворює зі стороною AD кут 42°. Знайдіть усі кути ромба.

140.° У ромбі $ABCD$ відомо, що $\angle C = 140°$, а діагоналі перетинаються в точці O. Знайдіть кути трикутника AOB.

141.° Одна з діагоналей ромба дорівнює його стороні. Знайдіть кути ромба.

142.° Знайдіть кути ромба, якщо його периметр дорівнює 24 см, а висота — 3 см.

143.° Знайдіть периметр ромба $ABCD$, якщо $\angle A = 60°$, $BD = 9$ см.

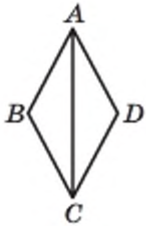


Рис. 49

144.° Кут D ромба $ABCD$ у 8 разів більший за кут CAD. Знайдіть кут BAD.

145.° Кути, які сторона ромба утворює з його діагоналями, відносяться як 2 : 7. Знайдіть кути ромба.

146.° Точки M і K — відповідно середини сторін AB і BC ромба $ABCD$. Доведіть, що $MD = KD$.

147.° Точки E і F — відповідно середини сторін BC і CD ромба $ABCD$. Доведіть, що $\angle EAC = \angle FAC$.

148.° Доведіть, що висоти ромба рівні.

149.• Висота ромба, проведена з вершини його тупого кута, ділить сторону ромба навпіл. Менша діагональ ромба дорівнює 4 см. Знайдіть кути та периметр ромба.

150.• Доведіть, що діагональ ромба ділить навпіл кут між висотами ромба, проведеними з тієї самої його вершини, що й діагональ.

151.• На сторонах AB і AD ромба $ABCD$ відкладено рівні відрізки AE і AF відповідно. Доведіть, що $\angle CEF = \angle CFE$.

152.• Відрізок AM — бісектриса трикутника ABC. Через точку M проведено пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає сторону AB у точці K, та пряму, яка паралельна стороні AB і перетинає сторону AC у точці D. Доведіть, що $AM \perp DK$.

153.• Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинають його сторони BC і AD у точках F і E відповідно. Визначте вид чотирикутника $ABFE$.

154.• У трикутнику ABC проведено серединний перпендикуляр його бісектриси BD, який перетинає сторони AB і BC у точках K і P відповідно. Визначте вид чотирикутника $BKDP$.

155.• Побудуйте ромб:
1) за стороною та кутом;
2) за двома діагоналями;
3) за висотою та кутом.

156.• Побудуйте ромб:
1) за стороною та діагоналлю;
2) за висотою та діагоналлю.

157.•• У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $AD = 9$ см, $\angle BDA = 30°$. На сторонах BC і AD позначено відповідно точки M і K так, що утворився ромб $AMCK$. Знайдіть сторону цього ромба.

158.•• Побудуйте ромб за діагоналлю та кутом, вершина якого належить цій діагоналі.

159.•• Побудуйте ромб за діагоналлю та протилежним їй кутом ромба.

160.* Побудуйте ромб:
1) за сумою діагоналей і кутом між діагоналлю та стороною;
2) за гострим кутом і різницею діагоналей;
3) за гострим кутом і сумою сторони та висоти;
4) за стороною та сумою діагоналей;
5) за тупим кутом і сумою діагоналей;
6) за стороною та різницею діагоналей.

161.* Дано точки M, N і K. Побудуйте ромб $ABCD$ так, щоб точка M була серединою сторони AB, а точки N і K — основами висот, проведених з вершини B до сторони AD і з вершини D до сторони BC відповідно.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

162. На сторонах кута з вершиною в точці A відкладено рівні відрізки AB і AC. Через точки B і C проведено прямі, які перпендикулярні до сторін AB і AC відповідно та перетинаються в точці D. Доведіть, що промінь AD є бісектрисою кута BAC.

163. На продовженні сторони AC трикутника ABC за точку A позначили точку D таку, що $AD = AB$, а на продовженні цієї сторони за точку C — точку E таку, що $CE = BC$. Знайдіть кути та периметр трикутника ABC, якщо $DE = 18$ см, $\angle BDA = 15°$, $\angle BEC = 36°$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

164. На аркуші паперу в клітинку вибрали довільно 100 клітинок. Доведіть, що серед них можна знайти не менше ніж 25 клітинок, які не мають спільних точок.

6. Квадрат

Означення. Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні.

На рисунку 50 зображено квадрат $ABCD$.

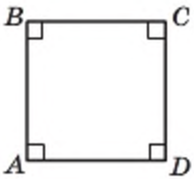


Рис. 50

Рис. 51

З наведеного означення випливає, що квадрат — це ромб, у якого всі кути рівні. Отже, квадрат є окремим видом і прямокутника, і ромба. Це ілюструє рисунок 51. Тому квадрат має всі властивості прямокутника та ромба. Звідси випливає, що:

- *усі кути квадрата прямі;*
- *діагоналі квадрата рівні, перпендикулярні та є бісектрисами його кутів.*

1. Яку фігуру називають квадратом?
2. Який ромб є квадратом?
3. Які властивості має квадрат?

ВПРАВИ

165.° Доведіть, що коли один із кутів ромба прямий, то цей ромб є квадратом.

166.° Доведіть, що коли дві сусідні сторони прямокутника рівні, то цей прямокутник є квадратом.

167.° Діагональ BD квадрата $ABCD$ дорівнює 5 см. Яка довжина діагоналі AC? Чому дорівнюють кути трикутника AOB, де O — точка перетину діагоналей квадрата?

168.° На стороні BC квадрата $ABCD$ (рис. 52) позначили точку K так, що $\angle AKB = 74°$. Знайдіть кут CAK.

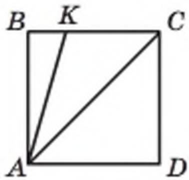


Рис. 52

169.° На стороні BC квадрата $ABCD$ позначили точку K так, що $AK = 2BK$. Знайдіть кут KAD.

170.° Чи є правильним твердження:

1) будь-який квадрат є паралелограмом;
2) будь-який ромб є квадратом;
3) будь-який прямокутник є квадратом;
4) будь-який квадрат є прямокутником;
5) будь-який квадрат є ромбом;
6) якщо діагоналі чотирикутника рівні, то він є прямокутником;
7) якщо діагоналі чотирикутника перпендикулярні, то він є ромбом;
8) існує ромб, який є прямокутником;
9) існує квадрат, який не є ромбом;
10) якщо діагоналі чотирикутника не перпендикулярні, то він не є ромбом;
11) якщо діагоналі паралелограма не рівні, то він не є прямокутником;
12) якщо діагональ прямокутника ділить його кут навпіл, то цей прямокутник є квадратом?

171.• Через вершини квадрата проведено прямі, паралельні його діагоналям. Доведіть, що точки перетину цих прямих є вершинами квадрата.

172.• У прямокутному трикутнику через точку перетину бісектриси прямого кута та гіпотенузи проведено прямі, паралельні катетам. Доведіть, що чотирикутник, який утворився, є квадратом.

173.• Точки M, K, N, P є відповідно серединами сторін AB, BC, CD і AD квадрата $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник $MKNP$ — квадрат.

174.[•] У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = BC = 14$ см. Дві сторони квадрата $CDEF$ лежать на катетах трикутника ABC, а вершина E належить гіпотенузі AB. Знайдіть периметр квадрата $CDEF$.

175.[•] У квадраті $ABCD$ позначено точку M так, що трикутник AMB рівносторонній. Доведіть, що трикутник CMD рівнобедрений.

176.[•] Доведіть, що коли діагоналі паралелограма рівні та перпендикулярні, то цей паралелограм є квадратом.

177.[•] Чотирикутники $ABCD$, $DEFM$, $MNKL$, $LPOS$, $SQTV$ — квадрати (рис. 53). Знайдіть суму довжин тих сторін квадратів, які не лежать на прямій AV, якщо довжина відрізка AV дорівнює 16 см.

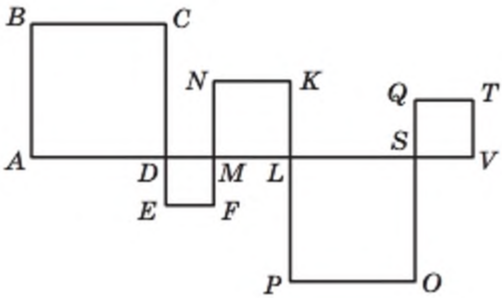


Рис. 53

178.[•] Побудуйте квадрат за його стороною.

179.[••] Доведіть, що точки перетину бісектрис кутів прямокутника, який не є квадратом, є вершинами квадрата.

180.[••] Вершини M і K рівностороннього трикутника AMK належать сторонам BC і CD квадрата $ABCD$. Доведіть, що $MK \parallel BD$.

181.[••] Дано точки M і K. Побудуйте квадрат $ABCD$ так, щоб точка M була серединою сторони AB, а точка K — серединою сторони BC.

182.[*] Через довільну точку, яка належить квадрату, проведено дві перпендикулярні прямі, кожна з яких перетинає дві протилежні сторони квадрата. Доведіть, що відрізки цих прямих, які належать квадрату, рівні.

183.[*] Побудуйте квадрат:

1) за сумою діагоналі та сторони;

2) за різницею діагоналі та сторони.

184.[*] У квадраті $ABCD$ позначено точку O так, що $\angle OAD = \angle ODA = 15°$. Доведіть, що трикутник BOC рівносторонній.

185.* На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ позначено точки M і E так, що кути BAM і MAE рівні. Доведіть, що $AE = BM + DE$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

186. На рисунку 54 $AB \parallel CD$, $AB = AE$, $CD = CE$. Доведіть, що $BE \perp DE$.

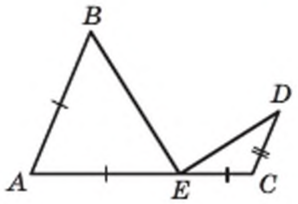


Рис. 54

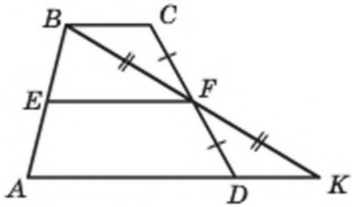


Рис. 55

187. На рисунку 55 $EF \parallel AD$, $BF = KF$, $CF = DF$. Доведіть, що $EF \parallel BC$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

188. Розташуйте на площині вісім точок так, щоб на серединному перпендикулярі будь-якого відрізка з кінцями в цих точках лежало рівно дві із цих точок.

7. Середня лінія трикутника

Означення. Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

На рисунку 56 відрізки MN, NE, EM — середні лінії трикутника ABC.

Теорема 7.1. ***Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох його сторін, паралельна третій стороні та дорівнює її половині.***

Доведення. Нехай MN — середня лінія трикутника ABC (рис. 57). Доведемо, що $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$.

На прямій MN позначимо точку E так, що $MN = NE$ (рис. 57). Сполучимо відрізком точки E і C. Оскільки точка N є серединою відрізка BC, то $BN = NC$. Кути 1 і 2 рівні як вертикальні. Отже,

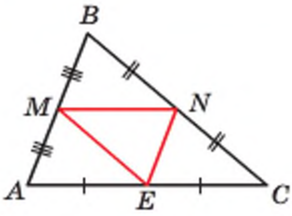


Рис. 56

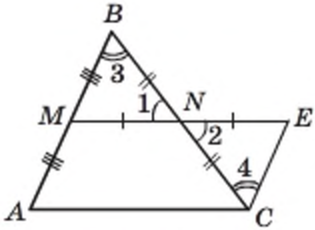


Рис. 57

трикутники MBN і ECN рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $MB = EC$ і $\angle 3 = \angle 4$. Ураховуючи, що $AM = BM$, отримаємо: $EC = AM$. Кути 3 і 4 є різносторонніми при прямих AB і EC та січній BC. Тоді $AB \parallel EC$.

Таким чином, у чотирикутнику $AMEC$ сторони AM і EC паралельні та рівні. Отже, за теоремою 3.2 чотирикутник $AMEC$ є паралелограмом. Звідси $ME \parallel AC$, тобто $MN \parallel AC$.

Також $ME = AC$. Оскільки $MN = \frac{1}{2}ME$, то $MN = \frac{1}{2}AC$. ▲

Задача. Доведіть, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.

Розв'язання. У чотирикутнику $ABCD$ точки M, N, K і P — середини сторін AB, BC, CD і AD відповідно (рис. 58).

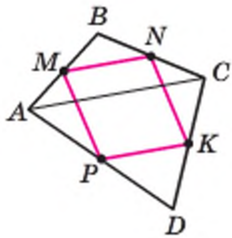


Рис. 58

Відрізок MN — середня лінія трикутника ABC. За властивістю середньої лінії трикутника $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$.

Відрізок PK — середня лінія трикутника ADC. За властивістю середньої лінії трикутника $PK \parallel AC$, $PK = \frac{1}{2}AC$.

Оскільки $MN \parallel AC$ і $PK \parallel AC$, то $MN \parallel PK$.

З рівностей $MN = \frac{1}{2}AC$ і $PK = \frac{1}{2}AC$ отримуємо: $MN = PK = \frac{1}{2}AC$.

Отже, у чотирикутнику $MNKP$ сторони MN і PK рівні та паралельні, тому чотирикутник $MNKP$ — паралелограм. ●

1. Що називають середньою лінією трикутника?
2. Скільки середніх ліній можна провести в трикутнику?
3. Які властивості має середня лінія трикутника?

ВПРАВИ

189.° Чи є відрізок MK середньою лінією трикутника ABC (рис. 59)?

190.° Чи є відрізок EF середньою лінією трикутника MKP (рис. 60)?

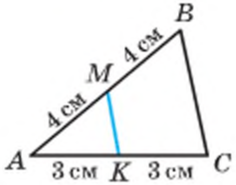


Рис. 59

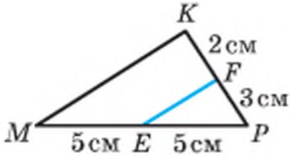


Рис. 60

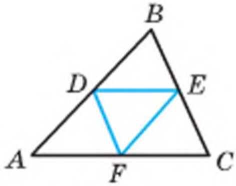


Рис. 61

191.° Відрізки DE і DF — середні лінії трикутника ABC (рис. 61). Чи є відрізок EF середньою лінією цього трикутника?

192.° Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 12 см. Знайдіть середні лінії цього трикутника.

193.° Точки M і K — середини сторін AB і AC трикутника ABC відповідно. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника MAK дорівнює 17 см.

194.° Доведіть, що периметр трикутника, сторони якого є середніми лініями трикутника ABC, дорівнює половині периметра трикутника ABC.

195.° Визначте вид трикутника, у якому середні лінії рівні між собою.

196.° Доведіть, що середні лінії трикутника розбивають його на чотири рівних трикутники.

197.° Точки E і F — відповідно середини сторін AB і BC трикутника ABC. Знайдіть сторону AC, якщо вона на 7 см більша за відрізок EF.

198.° Доведіть, що середня лінія DE трикутника ABC (точки D і E належать сторонам AB і BC відповідно) та його медіана BM точкою перетину діляться навпіл.

199.° Доведіть, що висота AM трикутника ABC перпендикулярна до його середньої лінії, яка сполучає середини сторін AB і AC.

200.• Знайдіть кути трикутника, дві середні лінії якого рівні та перпендикулярні.

201.• Середня лінія рівнобедреного трикутника, паралельна основі, дорівнює 6 см. Знайдіть сторони даного трикутника, якщо його периметр дорівнює 46 см.

202.° Сума діагоналей чотирикутника дорівнює 28 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершини якого є серединами сторін даного чотирикутника.

203.° Вершинами чотирикутника є середини сторін ромба з діагоналями 8 см і 14 см. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його сторони.

204.° Вершинами чотирикутника є середини сторін прямокутника з діагоналлю 12 см. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його сторони.

205.° Доведіть, що вершини трикутника рівновіддалені від прямої, на якій лежить його середня лінія.

206.°° На сторонах AB і BC трикутника позначено відповідно точки M і K так, що $AM = 3BM$, $CK = 3BK$. Доведіть, що $MK \parallel AC$, і знайдіть відрізок MK, якщо $AC = 16$ см.

207.°° Кути BAD і BCE — зовнішні кути трикутника ABC. Із вершини B проведено перпендикуляри BM і BK до бісектрис кутів BAD і BCE відповідно. Знайдіть відрізок MK, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 18 см.

208.°° Побудуйте трикутник за серединами трьох його сторін.

209.°° Побудуйте паралелограм за серединами трьох його сторін.

210.* Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні. Через середини сторін AB і AD проведено прямі, перпендикулярні відповідно до сторін DC і BC. Доведіть, що точка перетину проведених прямих належить прямій AC.

211.* Сторони AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$ рівні. Через середини діагоналей AC і BD проведено пряму, яка перетинає сторони AB і CD у точках M і N відповідно. Доведіть, що $\angle BMN = \angle CNM$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

212. До кола із центром O через точку C проведено дотичні CA і CB (A і B — точки дотику). Відрізок AD — діаметр кола. Доведіть, що $BD \parallel CO$.

213. У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle B = 32°$, AK — бісектриса трикутника. Через точку K проведено пряму, яка паралельна стороні AB і перетинає сторону AC у точці M. Знайдіть кут AKM.

214. Діагональ BD паралелограма $ABCD$ є його висотою та дорівнює стороні BC. Знайдіть сторону CD паралелограма, якщо точка B віддалена від прямої CD на 4 см.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

215. П'ять точок належать рівносторонньому трикутнику, сторона якого дорівнює 1 см. Доведіть, що із цих точок можна вибрати дві, відстань між якими не більша за 0,5 см.

8. Трапеція

Означення. Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Кожний із чотирикутників, зображених на рисунку 62, є трапецією.

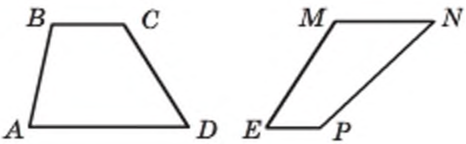


Рис. 62

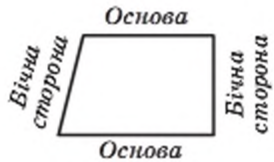


Рис. 63

Паралельні сторони трапеції називають **основами**, а непаралельні — **бічними сторонами** (рис. 63).

У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) кути A і D називають **кутами при основі** AD, а кути B і C — кутами при основі BC.

Означення. Висотою трапеції називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить одну з основ, на пряму, що містить другу основу.

На рисунку 64 кожний із відрізків BM, EF, DK, PQ є висотою трапеції $ABCD$. Довжини цих відрізків дорівнюють відстані між паралельними прямими BC і AD. Тому $BM = EF = DK = PQ$.

На рисунку 65 зображено трапецію $ABCD$, у якої бічні сторони AB і CD рівні. Таку трапецію називають **рівнобічною** або **рівнобедреною**.

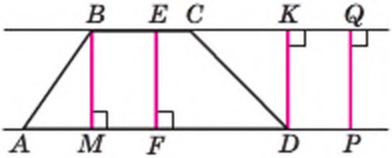


Рис. 64

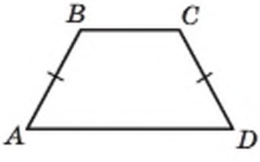


Рис. 65

Якщо бічна сторона трапеції є її висотою, то таку трапецію називають **прямокутною** (рис. 66).

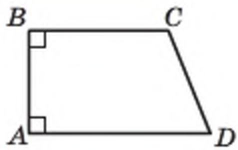


Рис. 66

Трапеція — це окремий вид чотирикутника. Зв'язок між чотирикутниками та їхніми окремими видами показано на рисунку 67.

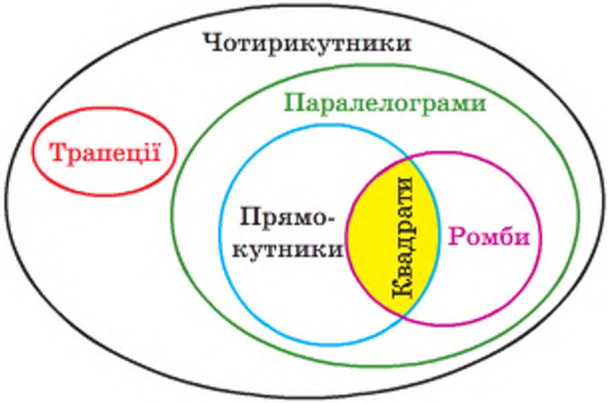


Рис. 67

Означення. Середньою лінією трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

На рисунку 68 відрізок MN — середня лінія трапеції $ABCD$.

Теорема 8.1. ***Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює половині їхньої суми.***

Доведення. Нехай MN — середня лінія трапеції $ABCD$ (рис. 69). Доведемо, що $MN \parallel AD$ і $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Проведемо пряму BN і точку її перетину з прямою AD позначимо буквою E.

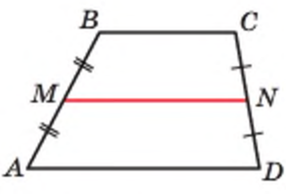


Рис. 68

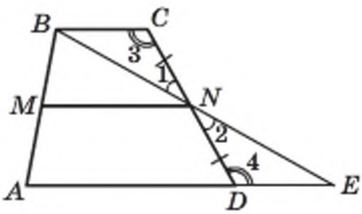


Рис. 69

Оскільки точка N — середина відрізка CD, то $CN = ND$. Кути 1 і 2 рівні як вертикальні, а кути 3 і 4 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AE та січній CD. Отже, трикутники BCN і EDN рівні за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $BC = DE$ і $BN = NE$. Тоді відрізок MN — середня лінія трикутника ABE. Із цього випливає, що $MN \parallel AE$, тобто $MN \parallel AD$, і $MN = \frac{1}{2}AE$. Маємо:

$$MN = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC). \blacktriangle$$

Задача (властивості рівнобічної трапеції). Доведіть, що в рівнобічній трапеції:

1) кути при кожній основі рівні;

2) діагоналі рівні;

3) висота трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить основу трапеції на два відрізки, менший з яких дорівнює половині різниці основ, а більший — половині суми основ (середній лінії трапеції).

Розв'язання. Розглянемо рівнобічну трапецію $ABCD$ ($AB = CD$).

1) Проведемо висоти BM і CK (рис. 70). Оскільки $AB = CD$ і $BM = CK$, то прямокутні трикутники AMB і DKC рівні за катетом і гіпотенузою. Тоді $\angle A = \angle D$.

Маємо: $\angle A = \angle D$, $\angle A + \angle ABC = 180°$, $\angle D + \angle DCB = 180°$. Отже, $\angle ABC = \angle DCB$.

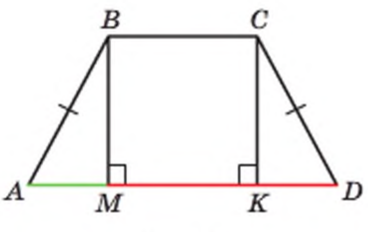


Рис. 70

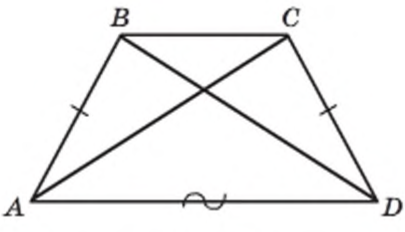


Рис. 71

2) Розглянемо трикутники ACD і DBA (рис. 71).

Маємо: $AB = CD$, AD — спільна сторона, кути BAD і CDA рівні як кути при основі рівнобічної трапеції. Отже, трикутники ACD і DBA рівні за двома сторонами та кутом між ними. Тоді $AC = BD$.

3) У чотирикутнику $BMKC$ (рис. 70) $BM \parallel CK$, $BC \parallel MK$, кут BMK прямий. Отже, цей чотирикутник є прямокутником. Звідси $MK = BC$.

З рівності трикутників AMB і DKC випливає, що $AM = KD$. Тоді

$$AM = \frac{AD - MK}{2} = \frac{AD - BC}{2};$$

$$MD = AD - AM = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{2AD - AD + BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

1. Який чотирикутник називають трапецією?
2. Які сторони трапеції називають основами? бічними сторонами?
3. Що називають висотою трапеції?
4. Які існують види трапецій?
5. Яку трапецію називають рівнобічною?
6. Яку трапецію називають прямокутною?
7. Що називають середньою лінією трапеції?
8. Сформулюйте теорему про властивості середньої лінії трапеції.
9. Сформулюйте властивості рівнобічної трапеції.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

216.° Накресліть, використовуючи клітинки зошита, трапецію:
1) рівнобічну;
2) прямокутну;
3) яка не є ні прямокутною, ні рівнобічною;
4) у якої один із кутів при основі гострий, а другий кут при цій самій основі тупий.

217.° Перерисуйте в зошит рисунок 72, проведіть висоти трапеції, одним із кінців яких є відповідно точки B, M, K і D.

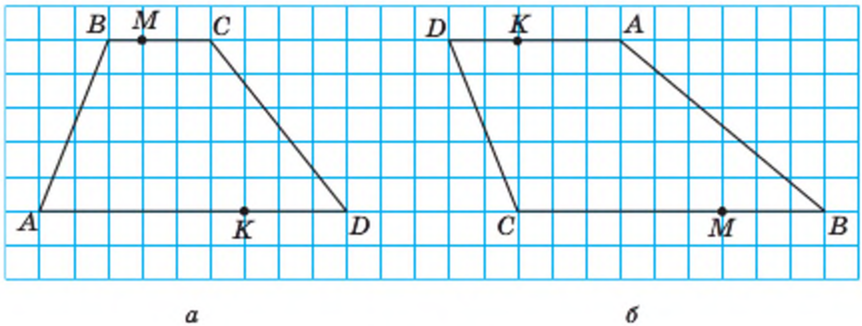


Рис. 72

ВПРАВИ

218.° Знайдіть на рисунку 73 трапеції, укажіть їхні основи та бічні сторони.

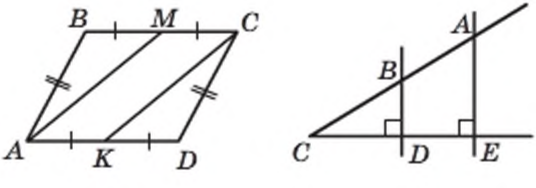


Рис. 73

219.° Чи є чотирикутник $ABCD$, зображений на рисунку 74, трапецією? У разі ствердної відповіді вкажіть основи та бічні сторони трапеції.

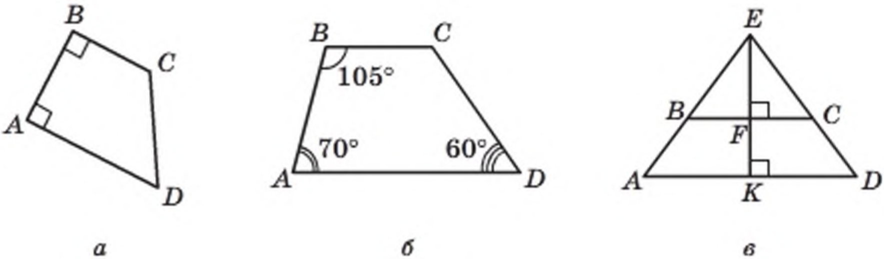


Рис. 74

220.° Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 52 см, основи — 13 см і 21 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

221.° Периметр трапеції дорівнює 49 см, бічні сторони — 5,6 см і 7,8 см. Знайдіть основи трапеції, якщо одна з них на 7,4 см більша за другу.

222.° Доведіть, що сума кутів трапеції, прилеглих до її бічної сторони, дорівнює 180°.

223.° 1) Знайдіть кути A і C трапеції $ABCD$ з основами AD і BC, якщо $\angle B = 132°$, $\angle D = 24°$.

2) Знайдіть кути трапеції $ABCD$, прилеглі до бічної сторони AB, якщо кут A менший від кута B на 38°.

224.° Знайдіть кути трапеції $ABCD$, прилеглі до бічної сторони CD, якщо $\angle C : \angle D = 8 : 7$.

225.° Один із кутів рівнобічної трапеції дорівнює 46°. Знайдіть решту її кутів.

226.° Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо різниця її протилежних кутів дорівнює 20°.

227.° У рівнобічній трапеції кут між бічною стороною та висотою, проведеною з вершини тупого кута, дорівнює 23°. Знайдіть кути трапеції.

228.° Чи можуть у трапеції бути:
1) три прямих кути;
2) три гострих кути;
3) два протилежних кути тупими;
4) два протилежних кути прямими;
5) два протилежних кути рівними?

229.° Чи можуть:
1) основи трапеції бути рівними;
2) діагоналі трапеції точкою перетину ділитися навпіл?

230.° Доведіть, що коли кути при одній з основ трапеції рівні, то дана трапеція є рівнобічною.

231.° Доведіть, що сума протилежних кутів рівнобічної трапеції дорівнює 180°. Чи є правильним обернене твердження: якщо сума протилежних кутів трапеції дорівнює 180°, то дана трапеція є рівнобічною?

232.° Середня лінія рівностороннього трикутника зі стороною 6 см розбиває його на трикутник і чотирикутник. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його периметр.

233.° Висота рівнобічної трапеції, проведена з кінця меншої основи, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть основи трапеції.

234.° Один із кутів рівнобічної трапеції дорівнює 60°, бічна сторона — 18 см, а сума основ — 50 см. Знайдіть основи трапеції.

235.° Основи прямокутної трапеції дорівнюють 10 см і 24 см, а один із кутів — 45°. Знайдіть меншу бічну сторону трапеції.

236.° Основи прямокутної трапеції дорівнюють 7 см і 15 см, а один із кутів — 60°. Знайдіть більшу бічну сторону трапеції.

237.° У трапеції $ABCD$ відомо, що $AB = CD$, $\angle BAC = 20°$, $\angle CAD = 50°$. Знайдіть кути ACB і ACD.

238.° У трапеції $ABCD$ відомо, що $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $BC = CD$, $\angle ABD = 80°$. Знайдіть кути трапеції.

239.° У трапеції $ABCD$ менша основа BC дорівнює 6 см. Через вершину B проведено пряму, яка паралельна стороні CD і перетинає сторону AD у точці M. Знайдіть периметр трапеції, якщо периметр трикутника ABM дорівнює 16 см.

240.° Через вершину C трапеції $ABCD$ проведено пряму, яка паралельна бічній стороні AB і перетинає більшу основу AD у точці E. Знайдіть кути трапеції, якщо $\angle D = 35°$, $\angle DCE = 65°$.

241.° Основи трапеції дорівнюють 9 см і 15 см. Чому дорівнює її середня лінія?

242.° Середня лінія трапеції дорівнює 8 см, а одна з основ — 5 см. Знайдіть другу основу трапеції.

243.° Одна з основ трапеції на 8 см більша за другу, а середня лінія дорівнює 17 см. Знайдіть основи трапеції.

244.° Основи трапеції відносяться як 3 : 4, а середня лінія дорівнює 14 см. Знайдіть основи трапеції.

245.° Кожну з бічних сторін трапеції $ABCD$ (рис. 75) поділено на чотири рівні частини: $AE = EF = FK = KB$, $DN = NM = MP = PC$. Знайдіть відрізки EN, FM і KP, якщо $AD = 19$ см, $BC = 11$ см.

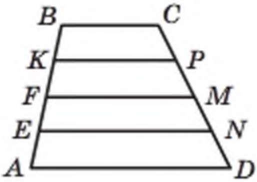


Рис. 75

246.° Висота прямокутної трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 7 см і 5 см, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть середню лінію трапеції.

247.° Середня лінія прямокутної трапеції дорівнює 9 см, а висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки, один з яких у 2 рази більший за другий, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть основи трапеції.

248.• Діагоналі рівнобічної трапеції $ABCD$ ($AB = CD$) перетинаються в точці O. Доведіть, що $AO = OD$ і $BO = OC$.

249.• Висота рівнобічної трапеції дорівнює h, а бічну сторону видно з точки перетину діагоналей під кутом[1] 60°. Знайдіть діагональ трапеції.

250.• Основи рівнобічної трапеції відносяться як 2 : 5, а діагональ ділить тупий кут трапеції навпіл. Знайдіть сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює 68 см.

---

[1] Нехай дано відрізок AB і точку M поза прямою AB таку, що $\angle AMB = \alpha$. У такому випадку говорять, що відрізок AB видно з точки M під кутом α.

251.° У трапеції $ABCD$ відомо, що $AB = CD$, $AD = 24$ см, $\angle ADB = \angle CDB$, а периметр дорівнює 60 см. Знайдіть невідомі сторони трапеції.

252.° Сторони трапеції дорівнюють a, a, a і $2a$. Знайдіть кути трапеції.

253.° У трапеції $ABCD$ діагональ AC перпендикулярна до бічної сторони CD і є бісектрисою кута BAD, $\angle D = 60°$, периметр трапеції дорівнює 40 см. Знайдіть основи трапеції.

254.° Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, а менша основа дорівнює бічній стороні. Знайдіть кути трапеції.

255.° За якої умови висота рівнобічної трапеції дорівнює половині різниці основ?

256.° Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, бічною стороною та кутом між ними.

257.° Побудуйте прямокутну трапецію за основами та меншою бічною стороною.

258.° Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, бічною стороною та діагоналлю.

259.° Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 6 см, більша основа — 10 см. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 60°.

260.° Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює 14 см і утворює з основою кут 60°. Знайдіть середню лінію трапеції.

261.° Середня лінія трапеції $ABCD$ розбиває її на дві трапеції, середні лінії яких дорівнюють 15 см і 19 см. Знайдіть основи трапеції $ABCD$.

262.•• Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, то її висота дорівнює середній лінії трапеції.

263.•• Доведіть, що коли висота рівнобічної трапеції дорівнює її середній лінії, то діагоналі трапеції перпендикулярні.

264.•• Діагональ прямокутної трапеції розбиває її на два трикутники, один з яких є рівностороннім зі стороною a. Знайдіть середню лінію трапеції.

265.•• Діагональ рівнобічної трапеції розбиває її на два рівнобедрених трикутники. Знайдіть кути трапеції.

266.•• У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) відомо, що $AC \perp BD$, $\angle CAD = 30°$, $BD = 8$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

267.•• Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, належить прямій, яка містить її середню лінію.

268.[••] Побудуйте трапецію:
1) за основами та бічними сторонами;
2) за основою, висотою та діагоналями;
3) за різницею основ, бічними сторонами та діагоналлю.

269.[••] Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, висотою та бічною стороною.

270.[••] Побудуйте трапецію:
1) за основами та діагоналями;
2) за бічними сторонами, середньою лінією та висотою;
3) за основою, прилеглим до неї кутом і бічними сторонами;
4) за бічними сторонами, висотою та однією з діагоналей.

271.[*] Через вершину B паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка не має з паралелограмом інших спільних точок. Вершини A і C віддалені від цієї прямої на відстані a і b відповідно. Знайдіть відстань від точки D до цієї прямої.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

272. У колі проведено діаметри AB і CD. Доведіть, що $AC = BD$ і $AC \parallel BD$.

273. У колі з центром O проведено діаметр AB і хорду AC. Доведіть, що $\angle BOC = 2\,\angle BAC$.

274. Пряма AB дотикається до кола з центром O в точці C, $AC = BC$. Доведіть, що $OA = OB$.

275. Хорда AB кола з центром O перпендикулярна до радіуса OC і ділить його навпіл. Знайдіть: 1) кут AOB; 2) кут ACB.

276. Скільки спільних точок мають два кола з радіусами 6 см і 8 см, якщо відстань між їхніми центрами дорівнює: 1) 15 см; 2) 14 см; 3) 10 см; 4) 2 см?

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 19–22 на с. 190–192.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

277. Многокутник розбито на трикутники, які пофарбовано в чорний та білий кольори так, що будь-які два трикутники, що мають спільну сторону, пофарбовано в різні кольори. Доведіть, що кількість чорних трикутників не більша за потроєну кількість білих трикутників.

9. Центральні та вписані кути

Означення. Центральним кутом кола називають кут з вершиною в центрі кола.

На рисунку 76 кут AOB — центральний. Сторони цього кута перетинають коло в точках A і B. Ці точки ділять коло на дві **дуги**, які виділено на рисунку 76 різним кольором. Точки A і B називають **кінцями дуги**, вони належать кожній з виділених дуг. Кожну із цих дуг можна позначити так: $\cup AB$ (читають: «дуга AB»).

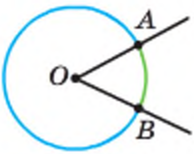


Рис. 76

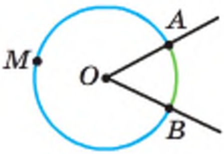


Рис. 77

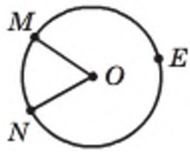


Рис. 78

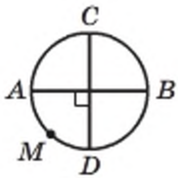


Рис. 79

Але за записом $\cup AB$ не можна розрізнити дуги на рисунку 76. Якщо на якійсь із двох дуг позначити точку (на рисунку 77 це точка M), то зрозуміло, що позначення $\cup AMB$ відноситься до «синьої» дуги. Якщо на одній із двох дуг AB відмічено точку, то домовимося, що позначення $\cup AB$ відноситься до дуги, якій ця точка не належить (на рисунку 77 це «зелена» дуга).

Дуга AB належить центральному куту AOB (рис. 77). У цьому випадку говорять, що центральний кут AOB **спирається на дугу** AB.

Кожна дуга кола, як і все коло, має **градусну міру**. *Градусну міру всього кола вважають рівною* 360°. Якщо центральний кут MON спирається на дугу MN (рис. 78), то градусну міру дуги MN вважають рівною градусній мірі кута MON і записують: $\cup MN = \angle MON$ (читають: «градусна міра дуги MN дорівнює градусній мірі кута MON»). Градусну міру дуги MEN (рис. 78) вважають рівною $360° - \angle MON$.

На рисунку 79 зображено коло, у якому проведено два перпендикулярних діаметри AB і CD. Тоді $\cup AMD = 90°$, $\cup ACD = 360° - 90° = 270°$, $\cup ACB = \cup ADB = 180°$. Кожну з дуг ACB і ADB називають **півколом**. На рисунку 79 півколами є також дуги CAD і CBD.

Про хорду, яка сполучає кінці дуги, говорять, що хорда **стягує** дугу. На рисунку 80 хорда AB стягує кожну з дуг AB і AKB.

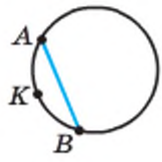


Рис. 80

Будь-яка хорда стягує дві дуги, сума градусних мір яких дорівнює 360°.

Означення. Вписаним кутом кола називають кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають коло.

На рисунку 81 кут ABC — вписаний. Дуга AC належить цьому куту, а дуга ABC — не належить. У такому випадку говорять, що вписаний кут ABC **спирається на дугу** AC. Також можна сказати, що вписаний кут ABC **спирається на хорду** AC.

Теорема 9.1. ***Градусна міра вписаного кута дорівнює половині градусної міри дуги, на яку він спирається.***

Доведення. На рисунку 81 кут ABC вписаний. Доведемо, що $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Розглянемо три випадки розташування центра O кола відносно вписаного кута ABC.

Випадок 1. Центр O належить одній зі сторін кута, наприклад стороні BC (рис. 82).

Проведемо радіус OA. Центральний кут AOC — зовнішній кут рівнобедреного трикутника ABO (сторони OA та OB рівні як радіуси). Тоді $\angle AOC = \angle A + \angle B$. Проте $\angle A = \angle B$. Звідси $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \cup AC$.

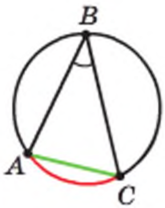


Рис. 81

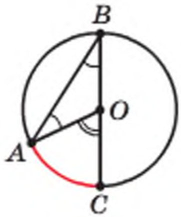


Рис. 82

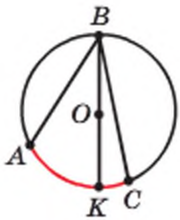


Рис. 83

Випадок 2. Центр O належить куту, проте не належить жодній із його сторін (рис. 83).

Проведемо діаметр BK. Згідно з доведеним $\angle ABK = \frac{1}{2} \cup AK$, $\angle KBC = \frac{1}{2} \cup KC$. Маємо: $\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = \frac{1}{2} \cup AK + \frac{1}{2} \cup KC = \frac{1}{2} \cup AKC$.

Випадок 3. Центр O не належить куту (рис. 84).

Для третього випадку проведіть доведення самостійно. ▲

Наслідок 1. ***Вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, рівні*** (рис. 85).

Наслідок 2. ***Вписаний кут, який спирається на діаметр (півколо), — прямий*** (рис. 86).

Доведіть ці властивості самостійно.

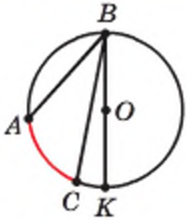


Рис. 84

Рис. 85

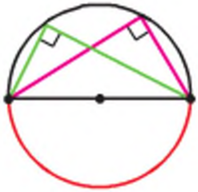


Рис. 86

Задача 1 (властивість кута між дотичною та хордою). Відрізок AB — хорда кола із центром O (рис. 87). Через точку A проведено дотичну MN. Доведіть, що $\angle MAB = \frac{1}{2} \cup AB$ і $\angle NAB = \frac{1}{2} \cup AKB$.

Розв'язання. Проведемо діаметр AD (рис. 87). Тоді кут B дорівнює $90°$ як вписаний, що спирається на діаметр AD. У прямокутному трикутнику ABD $\angle 2 + \angle 3 = 90°$. Оскільки MN — дотична, то $\angle DAM = 90°$. Тоді $\angle 1 + \angle 3 = 90°$. Отримуємо, що $\angle 1 = \angle 2$.

Отже, $\angle MAB = \angle BDA = \frac{1}{2} \cup AB$.

Маємо: $\angle NAB = 180° - \angle MAB = 180° - \frac{1}{2} \cup AB = 180° - \frac{1}{2} (360° - \cup AKB) = 180° - 180° + \frac{1}{2} \cup AKB = \frac{1}{2} \cup AKB$.

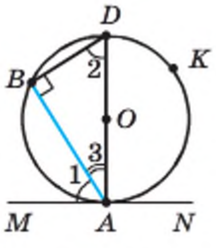


Рис. 87

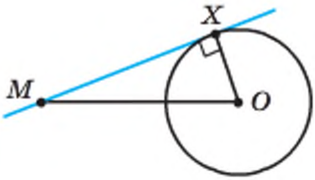


Рис. 88

Задача 2. Побудуйте дотичну до даного кола, яка проходить через дану точку, що лежить поза колом.

Розв'язання. На рисунку 88 зображено коло із центром O і точку M, яка лежить поза цим колом.

Нехай X — така точка кола, що пряма MX є дотичною (рис. 88). Тоді кут MXO прямий. Отже, його можна розглядати як вписаний у коло з діаметром MO.

Проведений аналіз показує, як провести побудову.

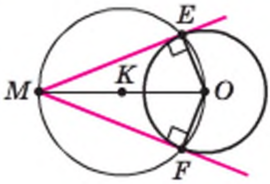


Рис. 89

Побудуємо відрізок MO та розділимо його навпіл (рис. 89). Нехай точка K — його середина. Побудуємо коло радіуса KO із центром K. Позначимо точки перетину побудованого та даного кіл буквами E і F. Тоді кожна з прямих ME і MF є шуканою дотичною.

Справді, кут MEO дорівнює $90°$ як вписаний кут, що спирається на діаметр MO. Відрізок OE — радіус даного кола. Тоді за ознакою дотичної пряма ME — шукана дотична.

1. Який кут називають центральним кутом кола?
2. Як називають частини кола, на які ділять його дві точки?
3. Яким символом позначають дугу кола?
4. У якому випадку говорять, що центральний кут спирається на дугу?
5. Чому вважають рівною градусну міру кола?
6. Як пов'язані градусні міри центрального кута кола та дуги, на яку цей кут спирається?
7. Скільки дуг стягує кожна хорда? Чому дорівнює сума їхніх градусних мір?
8. Який кут називають вписаним кутом кола?
9. У якому випадку говорять, що вписаний кут спирається на дугу?
10. Чому дорівнює градусна міра вписаного кута?
11. Яку властивість мають вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу?
12. Яким є вписаний кут, що спирається на діаметр?

ВПРАВИ

278.° Чому дорівнює градусна міра центрального кута кола, який спирається на дугу, що становить: 1) $\frac{1}{6}$ кола; 2) $\frac{1}{10}$ кола; 3) $\frac{1}{2}$ кола; 4) $\frac{2}{9}$ кола?

279.° Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його ділять дві точки, якщо градусна міра однієї з дуг на $80°$ більша за градусну міру другої.

280.° Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його ділять дві точки, якщо градусні міри цих дуг відносяться як 7 : 11.

281.° Знайдіть градусну міру дуги, яку описує кінець годинної стрілки: 1) за 2 год; 2) за 5 год; 3) за 8 год; 4) за 30 хв; 5) за 12 год.

282.° Які з кутів, зображених на рисунку 90, є вписаними? На яку дугу спирається кожний із вписаних кутів?

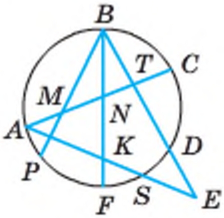


Рис. 90

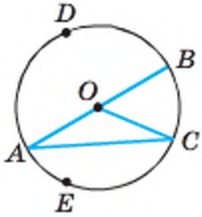
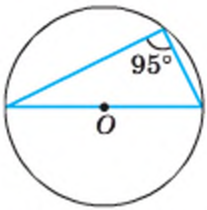


Рис. 91

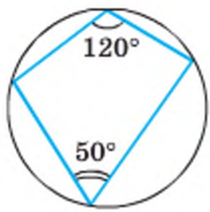
283.° На рисунку 91 зображено коло із центром O. Знайдіть:
1) кут BDC, якщо $\angle BAC = 40°$;
2) кут BEC, якщо $\angle BOC = 70°$;
3) дугу CE, якщо $\angle CDE = 80°$;
4) дугу DBA, якщо $\cup DBA = 300°$.

284.° Знайдіть помилки на рисунку 92.

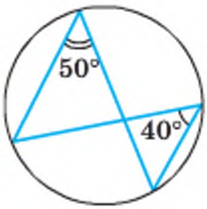


Точка O — центр кола

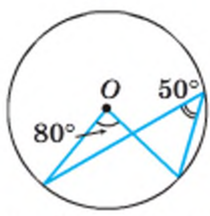
а



в



б



Точка O — центр кола

г

Рис. 92

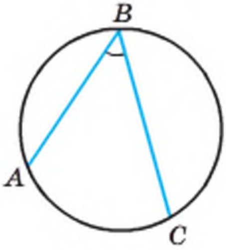


Рис. 93

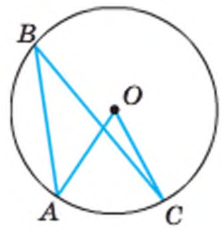


Рис. 94

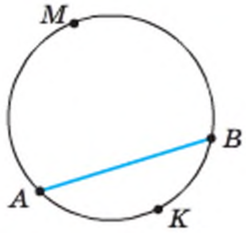


Рис. 95

285.° Знайдіть вписаний кут, якщо градусна міра дуги, на яку він спирається, дорівнює: 1) 84°; 2) 110°; 3) 230°; 4) 340°.

286.° На рисунку 93 $\cup AB = 74°$, $\angle ABC = 68°$. Знайдіть дугу BC.

287.° На рисунку 93 $\cup AB = 64°$, $\cup BC = 92°$. Знайдіть кут ABC.

288.° Центральний кут AOC на 25° більший за вписаний кут ABC, що спирається на дугу AC (рис. 94). Знайдіть кути AOC і ABC.

289.° Кінці хорди AB ділять коло на дві дуги, градусні міри яких відносяться як 3 : 7. Під якими кутами видно цю хорду з точок M і K (рис. 95)?

290.° На рисунку 96 хорди AB і CD рівні. Доведіть, що $\cup AMB = \cup CND$.

291.° Доведіть, що коли дві дуги кола рівні, то рівні й хорди, які їх стягують.

292.° Точки A, B і C ділять коло на три дуги так, що $\cup AB : \cup BC : \cup AC = 1 : 2 : 3$. Знайдіть кути трикутника ABC.

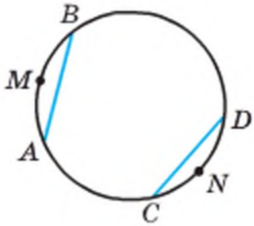


Рис. 96

293.° Вершини рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) ділять описане навколо нього коло на три дуги, причому $\cup AB = 70°$. Знайдіть кути трикутника ABC.

294.° Кінці діаметрів AC і BD кола послідовно сполучили так, що утворився чотирикутник $ABCD$.

1) Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

2) Знайдіть дуги AB, BC, CD і AD, якщо $\angle ABD = 80°$.

295.° Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 32°. Знайдіть градусні міри дуг, на які вершини трикутника ділять коло, описане навколо нього, та радіус цього кола, якщо гіпотенуза даного трикутника дорівнює 12 см.

296.• Доведіть, що коли вписаний кут є прямим, то він спирається на діаметр.

297.• Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M (рис. 97). Доведіть, що $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$.

298.• Хорди AB і CD кола не перетинаються, а прямі AB і CD перетинаються в точці M (рис. 98). Доведіть, що $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup BD)$.

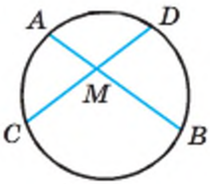


Рис. 97

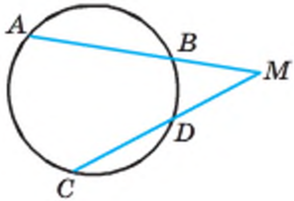


Рис. 98

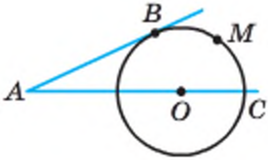


Рис. 99

299.• Через точку A, яка лежить поза колом із центром O, проведено дві прямі, одна з яких дотикається до кола в точці B, а друга проходить через його центр (рис. 99). Відомо, що $\cup BMC = 100°$. Знайдіть кут BAC.

300.• Бісектриса кута B трикутника ABC перетинає коло, описане навколо цього трикутника, у точці D. Знайдіть кути трикутника ADC, якщо $\angle ABC = 80°$.

301.• На дузі AC кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC, позначено точку M так, що $\cup AM = 2 \cup CM$. Знайдіть кути трикутника AMC.

302.• Коло, побудоване на стороні AB трикутника ABC як на діаметрі, перетинає сторони AC і BC у точках M і K відповідно. Доведіть, що відрізки AK і BM — висоти трикутника ABC.

303.• Коло, побудоване на стороні AC трикутника ABC як на діаметрі, перетинає сторону AB у точці K так, що $\angle ACK = \angle BCK$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

304.• Доведіть, що градусні міри дуг кола, які містяться між двома паралельними хордами, рівні.

305.• Вершини квадрата $ABCD$ лежать на колі. На дузі AB позначено довільну точку M. Доведіть, що $\angle AMD = \angle CMD = \angle CMB$.

306.[•] Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 56°. На бічній стороні трикутника як на діаметрі побудовано півколо, яке інші сторони трикутника ділять на три дуги. Знайдіть градусні міри утворених дуг.

307.[••] Як, користуючись лише косинцем, знайти центр даного кола?

308.[••] Дано коло, у якому проведено діаметр AB, і позначено точку C поза колом (рис. 100). Як, користуючись лише лінійкою, провести через точку C пряму, що перпендикулярна до прямої AB?

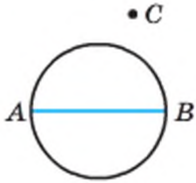


Рис. 100

309.[••] Два кола мають єдину спільну точку M. Через точку M проведено дві прямі, які перетинають дані кола. Точки їхнього перетину з колами, відмінні від точки M, сполучено хордами. Доведіть, що ці хорди паралельні.

310.[••] До кола, описаного навколо трикутника ABC, проведено в точці B дотичну, яка перетинає пряму AC у точці D. Відрізок BM — бісектриса трикутника ABC. Доведіть, що $BD = MD$.

311.[•] Дано відрізок AB і кут α. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $\angle AXB = \alpha$.

312.[•] Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом і висотою, проведеною до даної сторони.

313.[•] Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом і медіаною, проведеною до даної сторони.

314.[•] Побудуйте паралелограм за двома сторонами та кутом між діагоналями.

315.[•] Побудуйте паралелограм за кутом і двома діагоналями.

316.[•] У прямокутному трикутнику ABC на катеті AC як на діаметрі побудовано коло, що перетинає гіпотенузу AB у точці E. Через точку E проведено дотичну до кола, яка перетинає катет CB у точці D. Доведіть, що трикутник BDE рівнобедрений.

317.[•] Дано відрізок AB. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що трикутник AXB прямокутний.

318.[•] Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає описане навколо нього коло в точці D. Точка O — центр вписаного кола трикутника ABC. Доведіть, що $DO = DB = DC$.

319.[•] Бісектриси кутів A, B і C трикутника ABC перетинають описане навколо нього коло в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що $A_1B_1 \perp CC_1$.

320.* На рисунку 101 зображено два кола із центрами O_1 і O_2. Побудуйте пряму l, яка дотикається до цих кіл так, що точки дотику лежать в одній півплощині відносно прямої O_1O_2 (таку пряму називають **зовнішньою спільною дотичною** до двох даних кіл).

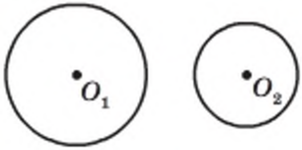


Рис. 101

321.* Побудуйте трикутник:

1) за стороною, протилежним їй кутом і радіусом вписаного кола;
2) за стороною, протилежним їй кутом і медіаною, проведеною до другої сторони.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

322. Периметр трикутника ABC дорівнює 30 см. Точка дотику вписаного кола до сторони AB ділить її у відношенні 3 : 2, рахуючи від вершини A, а точка дотику до сторони BC віддалена від вершини C на 5 см. Знайдіть сторони трикутника.

323. До кола, вписаного в трикутник ABC, проведено три дотичні (рис. 102). Периметри трикутників, які ці дотичні відтинають від даного трикутника, дорівнюють P_1, P_2 і P_3. Знайдіть периметр трикутника ABC.

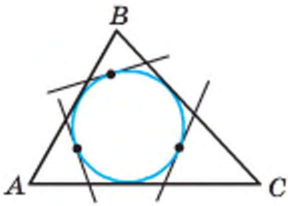


Рис. 102

324. Установіть вид трикутника, у якого центр описаного кола належить медіані.

Поновіть у пам'яті зміст пункту 22 на с. 192.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

325. Клітинки квадрата розміром 100 × 100 клітинок розфарбовано в шаховому порядку. Квадрат розрізали на квадрати, сторони яких містять непарну кількість клітинок, і в кожному такому квадраті позначили центральну клітинку. Доведіть, що білих і чорних клітинок позначено порівну.

ПЕРША ЗАДАЧА ПЕРШОЇ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

Сподіваємося, що задача 316 вам сподобалася і ви відчули радість успіху, розв'язавши її. Ця задача варта уваги ще й тому, що в 1961 р. саме її умовою починався текст першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків.

Узагалі, математичні олімпіади в Україні мають давню **традицію**. Перша міська олімпіада юних математиків відбулася в 1935 р. в Києві. З того часу минуло понад 80 років, і за ці роки математичні олімпіади стали для багатьох талановитих школярів першим кроком на шляху до наукової творчості. Сьогодні такі імена, як О. В. Погорєлов, С. Г. Крейн, М. О. Красносельський, В. Г. Дрінфельд, відомі всьому науковому світові. Усі вони в різні роки були переможцями математичних олімпіад в Україні.

Хочемо із задоволенням зазначити, що й зараз математичні олімпіади в Україні дуже популярні. Десятки тисяч школярів нашої країни на різних етапах беруть участь у цьому математичному змаганні. До організації та проведення олімпіад залучають найкращих учених, методистів, учителів. Саме завдяки їхньому ентузіазму та професіоналізму команда України гідно представляє нашу країну на міжнародних математичних олімпіадах.

Радимо й вам, любі восьмикласники, брати участь у математичних олімпіадах. Нижче ми наводимо текст першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Випробуйте свої сили.

1. У прямокутному трикутнику ABC на катеті AC як на діаметрі побудовано коло, що перетинає гіпотенузу AB у точці E. Через точку E проведено дотичну до кола, яка перетинає катет CB у точці D. Доведіть, що трикутник BDE рівнобедрений.
2. У площині розміщено n зубчастих коліс так, що перше зчеплене з другим, друге — із третім і т. д., а останнє — з першим. У яких випадках можуть рухатися колеса такої системи?
3. Обчисліть кути рівнобедреного трикутника, у якому центри вписаного й описаного кіл симетричні відносно прямої, що містить основу трикутника.
4. Доведіть, що при кожному цілому n вираз $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{30}$ також набуває цілих значень.
5. Побудуйте трикутник за двома даними точками, що є основами висот, опущених на дві сторони цього трикутника, та прямою, на якій розміщено його третю сторону.

10. Описане та вписане кола чотирикутника

Означення. Коло називають описаним навколо чотирикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

На рисунку 103 зображено коло, описане навколо чотирикутника $ABCD$. У цьому разі також говорять, що чотирикутник **вписаний** у коло.

Теорема 10.1. ***Якщо чотирикутник є вписаним у коло, то сума його протилежних кутів дорівнює*** **180°.**

Доведення. Нехай чотирикутник $ABCD$ вписано в коло (рис. 103). Доведемо, що $\angle A + \angle C = 180°$ і $\angle B + \angle D = 180°$.

Оскільки кути A і C є вписаними, то $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$ і $\angle C = \frac{1}{2} \cup DAB$. Маємо: $\cup BCD + \cup DAB = 360°$. Тоді $\angle A + \angle C = 180°$.

Аналогічно можна показати, що $\angle B + \angle D = 180°$. ▲

Ви знаєте, що навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Проте не будь-який чотирикутник має таку властивість. Наприклад, неможливо описати коло навколо паралелограма, відмінного від прямокутника. Розпізнавати чотирикутники, навколо яких можна описати коло, дає змогу така теорема.

Теорема 10.2 (обернена до теореми 10.1). ***Якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює*** **180°,** ***то навколо нього можна описати коло.***

Доведення. Розглянемо чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A + \angle C = 180°$. Доведемо, що навколо нього можна описати коло.

Припустимо, що навколо цього чотирикутника не можна описати коло. Опишемо коло навколо трикутника ABD. За припущенням точка C не належить цьому колу. Тому можливі два випадки.

Випадок 1. Точка C лежить поза описаним колом трикутника ABD (рис. 104).

Нехай сторона BC перетинає коло в точці C_1. Чотирикутник ABC_1D вписано в коло. Тоді за теоремою 10.1 отримуємо, що

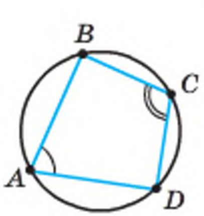


Рис. 103

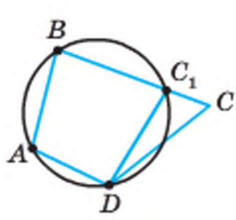


Рис. 104

$\angle A + \angle BC_1D = 180°$. Але за умовою $\angle A + \angle C = 180°$. Звідси $\angle BC_1D = \angle C$. Проте ця рівність виконуватися не може, оскільки за властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle BC_1D = \angle C + \angle CDC_1$.

Отже, точка C не може лежати поза колом, описаним навколо трикутника ABD.

Випадок 2. Точка C лежить усередині описаного кола трикутника ABD (рис. 105). Міркуючи аналогічно, можна показати, що точка C не може лежати всередині розглядуваного кола. Переконайтеся в цьому самостійно.

Таким чином, припустивши, що точка C не належить колу, описаному навколо трикутника ABD, ми отримали суперечність. ▲

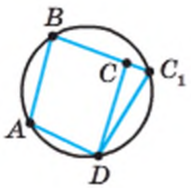


Рис. 105

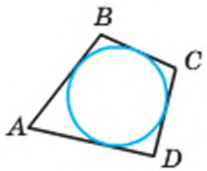


Рис. 106

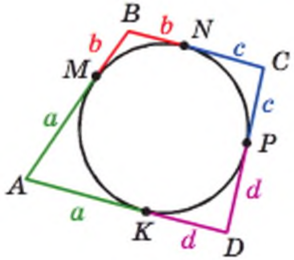


Рис. 107

Теорему 10.2 можна розглядати як ознаку належності чотирьох точок одному колу.

Якщо чотирикутник вписано **в коло, то існує точка, рівновіддалена** від усіх його вершин (центр описаного кола). Щоб знайти цю точку, достатньо знайти точку перетину серединних перпендикулярів двох сусідніх сторін чотирикутника.

Означення. Коло називають вписаним у чотирикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

На рисунку 106 зображено коло, вписане в чотирикутник $ABCD$. У цьому разі також говорять, що чотирикутник **описаний** навколо кола.

Теорема 10.3. ***Якщо чотирикутник є описаним навколо кола, то суми його протилежних сторін рівні.***

Доведення. Нехай чотирикутник $ABCD$ описано навколо кола (рис. 107). Доведемо, що $AB + CD = BC + AD$.

Точки M, N, P, K — точки дотику кола до сторін чотирикутника.

Оскільки відрізки дотичних, проведених до кола через одну точку, рівні, то $AK = AM$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DK$. Нехай $AK = a$, $BM = b$, $CN = c$, $DP = d$.

Тоді $AB + CD = a + b + c + d$,
$BC + AD = b + c + a + d$.
Отже, $AB + CD = BC + AD$. ▲

Ви знаєте, що в будь-який трикутник можна вписати коло. Проте не будь-який чотирикутник має цю властивість. Наприклад, неможливо вписати коло в прямокутник, відмінний від квадрата. Розпізнавати чотирикутники, у які можна вписати коло, дає змогу така теорема.

Теорема 10.4. ***Якщо в опуклому чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло.***

Доведення. Розглянемо опуклий чотирикутник $ABCD$, у якому $AB + CD = BC + AD$. Доведемо, що в нього можна вписати коло.

Нехай бісектриси кутів A і B перетинаються в точці O (рис. 108). Тоді точка O рівновіддалена від сторін AB, BC і AD. Отже, існує коло із центром у точці O, яке дотикається до трьох цих сторін.

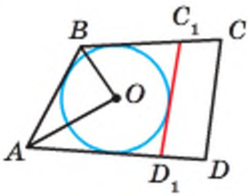


Рис. 108

Припустимо, що це коло не дотикається до сторони CD. Тоді можливі два випадки.

Випадок 1. Сторона CD не має спільних точок з побудованим колом.

Проведемо дотичну C_1D_1 паралельно стороні CD (рис. 108). Чотирикутник ABC_1D_1 описано навколо кола. Тоді за теоремою 10.3 отримуємо, що

$$AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1. \qquad (1)$$

Проте за умовою

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (2)$$

Віднімемо від рівності (2) рівність (1):

$$CD - C_1D_1 = BC - BC_1 + AD - AD_1.$$

Звідси маємо: $CD - C_1D_1 = C_1C + D_1D$; $CD = C_1C + D_1D + C_1D_1$. Ця рівність суперечить твердженню, доведеному в ключовій задачі п. 1.

Отже, сторона CD повинна мати спільні точки з розглядуваним колом.

Випадок 2. Сторона CD має дві спільні точки з побудованим колом.

Міркуючи аналогічно, можна показати, що сторона CD не може мати дві спільні точки з побудованим колом. Переконайтеся в цьому самостійно.

Таким чином, припустивши, що побудоване коло не дотикається до сторони CD, ми отримали суперечність. ▲

Якщо чотирикутник описано **навколо кола, то існує точка, рівновіддалена від усіх його сторін (центр вписаного кола). Щоб знайти цю точку, достатньо знайти точку перетину бісектрис двох сусідніх кутів цього чотирикутника.**

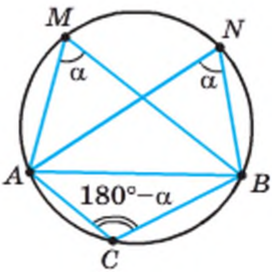


Рис. 109

Задача (ознака належності чотирьох точок одному колу). Точки A, M, N, B такі, що $\angle AMB = \angle ANB$, причому точки M і N лежать в одній півплощині відносно прямої AB. Доведіть, що точки A, M, N, B лежать на одному колі.

Розв'язання. Нехай $\angle AMB = \angle ANB = \alpha$. Навколо трикутника AMB опишемо коло (рис. 109). Нехай C — довільна точка кола, яка не належить дузі AMB. Тоді чотирикутник $ACBM$ вписано в коло. Звідси $\angle C = 180° - \alpha$. Маємо: $\angle C + \angle N = 180°$. Отже, за теоремою 10.2 навколо чотирикутника $ACBN$ можна описати коло. Оскільки навколо трикутника ABC можна описати тільки одне коло, то цьому колу належать як точка M, так і точка N.

1. Яке коло називають описаним навколо чотирикутника?
2. У якому випадку говорять, що чотирикутник вписаний у коло?
3. Яку властивість мають кути чотирикутника, вписаного в коло?
4. За якої умови навколо чотирикутника можна описати коло?
5. Яке коло називають вписаним у чотирикутник?
6. У якому випадку говорять, що чотирикутник описаний навколо кола?
7. Яку властивість мають сторони чотирикутника, описаного навколо кола?
8. За якої умови в чотирикутник можна вписати коло?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

326.° Накресліть прямокутник зі сторонами 2 см і 3 см. Опишіть навколо нього коло.

327.° Накресліть довільну рівнобічну трапецію. Опишіть навколо неї коло.

328.° Накресліть рівнобічну трапецію з більшою основою 6 см, бічною стороною 4 см і кутом 60°. Впишіть у неї коло.

329.° Накресліть довільний квадрат. Впишіть у нього коло й опишіть навколо нього коло.

ВПРАВИ

330.° Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо його кути A, B, C і D відповідно дорівнюють:
1) 90°, 90°, 80°, 100°;
2) 90°, 80°, 90°, 100°;
3) 50°, 70°, 130°, 110°?

331.° Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо його кути A, B, C і D відповідно пропорційні числам:
1) 3, 8, 11, 6;
2) 4, 5, 4, 2?

332.° Доведіть, що можна описати коло навколо:
1) будь-якого прямокутника;
2) будь-якої рівнобічної трапеції.

333.° Яка точка є центром кола, описаного навколо прямокутника?

334.° Чи можна описати коло навколо ромба, який не є квадратом?

335.° У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $AB = 12$ см, $\angle CAD = 30°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного прямокутника.

336.° Чи можна вписати коло в чотирикутник $ABCD$, якщо його сторони AB, BC, CD, AD відповідно пропорційні числам:
1) 7, 8, 12, 11;
2) 7, 12, 8, 11?

337.° Сума двох протилежних сторін чотирикутника, описаного навколо кола, дорівнює 18 см. Знайдіть периметр даного чотирикутника.

338.° Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 7 см. Чому дорівнює периметр даної трапеції, якщо в неї можна вписати коло?

339.° У чотирикутнику $CDEF$, у який можна вписати коло, $CD = 6$ см, $DE = 8$ см, $EF = 12$ см. Знайдіть сторону CF.

340.° Доведіть, що в будь-який ромб можна вписати коло. Яка точка є центром кола, вписаного в ромб?

341.° Чи можна вписати коло в паралелограм, який не є ромбом?

342.° Під яким кутом видно бічну сторону трапеції із центра вписаного кола?

343.° Один із кутів ромба дорівнює 60°, а більша діагональ — 24 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в даний ромб.

344.• Доведіть, що коли в прямокутник можна вписати коло, то цей прямокутник є квадратом.

345.$^{\bullet}$ Доведіть, що коли навколо ромба можна описати коло, то цей ромб є квадратом.

346.$^{\bullet}$ Сторона AD чотирикутника $ABCD$ є діаметром кола, описаного навколо нього, $\angle ABC = 108°$, $\angle BCD = 132°$. Знайдіть кути BAD, ADC, CAD, BDA.

347.$^{\bullet}$ Знайдіть кути чотирикутника $MNKP$, вписаного в коло, якщо $\angle MKP = 58°$, $\angle MPN = 34°$, $\angle KMP = 16°$.

348.$^{\bullet}$ Рівнобічну трапецію вписано в коло, центр якого належить одній з основ. Кут між діагоналями трапеції, протилежний її бічній стороні, дорівнює 56°. Знайдіть кути трапеції.

349.$^{\bullet}$ Висоти BM і CK гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Доведіть, що точки A, K, H і M лежать на одному колі.

350.$^{\bullet}$ У прямокутну трапецію вписано коло. Точка дотику ділить більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайдіть периметр даної трапеції, якщо радіус вписаного кола дорівнює 20 см.

351.$^{\bullet}$ У прямокутну трапецію вписано коло. Точка дотику ділить більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 3 см і 12 см. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо периметр трапеції дорівнює 54 см.

352.$^{\bullet\bullet}$ Центр кола, описаного навколо трапеції, належить більшій основі, а бічна сторона дорівнює меншій основі. Знайдіть кути трапеції.

353.$^{\bullet\bullet}$ Діагональ трапеції, вписаної в коло, дорівнює d. Бічну сторону видно із центра описаного кола під кутом 120°. Знайдіть середню лінію трапеції.

354.$^{\bullet\bullet}$ Бічні сторони та менша основа рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см, а один з її кутів дорівнює 60°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даної трапеції.

355.$^{\bullet\bullet}$ З довільної точки M катета AC прямокутного трикутника ABC опущено перпендикуляр MK на гіпотенузу AB. Доведіть, що $\angle MKC = \angle MBC$.

356.$^{\bullet\bullet}$ З довільної точки O, яка належить гострому куту A, але не належить його сторонам, опущено перпендикуляри OB і OC на його сторони. Доведіть, що $\angle OAB = \angle OCB$.

357.$^{\bullet}$ Бісектриси BK і CM трикутника ABC перетинаються в точці O, $\angle A = 60°$. Знайдіть кут CMK.

358.$^{\bullet}$ Бісектриси MA і KB трикутника MNK перетинаються в точці O, точки A, N, B і O лежать на одному колі. Знайдіть кут N.

359.* Поза прямокутним трикутником ABC на його гіпотенузі AB побудовано квадрат $ABFD$. Доведіть, що $\angle ACO = \angle OCB$, де O — точка перетину діагоналей квадрата.

360.* Вершини A і B трикутника ABC із прямим кутом C ковзають по сторонах прямого кута з вершиною P (рис. 110). Доведіть, що точка C при цьому переміщується по відрізку.

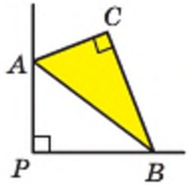


Рис. 110

361.* З довільної точки M, яка належить куту з вершиною A, але не належить його сторонам, проведено перпендикуляри MP і MQ до сторін кута. Із точки A проведено перпендикуляр AK до відрізка PQ. Доведіть, що $\angle PAK = \angle MAQ$.

362.* У гострокутному трикутнику ABC відрізки CC_1 і AA_1 — висоти. Доведіть, що серединний перпендикуляр відрізка C_1A_1 проходить через середину сторони AC.

363.* На бічних сторонах трапеції, у яку можна вписати коло, як на діаметрах побудовано два кола. Доведіть, що ці кола мають одну спільну точку.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

364. Через середину діагоналі AC паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає сторони BC і AD. Ця пряма перетинає прямі AB і CD у точках M і K відповідно. Визначте вид чотирикутника $AMCK$.

365. У трикутнику ABC відрізок AD — бісектриса. Через точку D проведено пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає сторону AB у точці E. Через точку E проведено пряму, яка паралельна стороні BC і перетинає сторону AC у точці F. Доведіть, що $AE = CF$.

366. Висота BM ромба $ABCD$, опущена з вершини тупого кута на сторону AD, перетинає діагональ AC у точці K, $\angle BKC = 64°$. Знайдіть кут ABC.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

367. Чи можна квадрат розрізати на тисячокутник і 199 п'ятикутників?

ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Яким із наведених способів можна позначити чотирикутник, зображений на рисунку 111?

А) $MPQN$; В) $NPMQ$;
Б) $QMNP$; Г) $QNPM$.

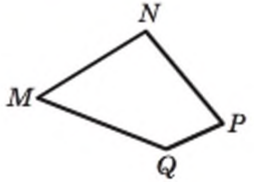


Рис. 111

2. Які кути може мати чотирикутник?

А) Чотири тупих кути;
Б) чотири гострих кути;
В) два тупих і два прямих кути;
Г) два прямих кути, один гострий кут і один тупий кут.

3. У чотирикутнику кожна сторона дорівнює одній і тій самій його діагоналі. Чому дорівнюють кути чотирикутника?

А) 60°, 60°, 120°, 120°;
Б) 60°, 120°, 90°, 90°;
В) 90°, 90°, 90°, 90°;
Г) 150°, 30°, 150°, 30°.

4. Бісектриса кута паралелограма ділить його сторону навпіл. Чому дорівнюють сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 30 см?

А) 5 см, 10 см; В) 7 см, 8 см;
Б) 6 см, 4 см; Г) 3 см, 12 см.

5. Чотирикутник є паралелограмом, якщо:

А) у нього є дві пари рівних сторін;
Б) у нього є дві пари рівних кутів;
В) кожна діагональ ділить його на два рівних трикутники;
Г) у нього три сторони рівні.

6. Яке з даних тверджень неправильне?

А) Чотирикутник, який одночасно є і ромбом, і прямокутником, — квадрат;
Б) паралелограм, у якого діагоналі рівні й перпендикулярні, — квадрат;
В) паралелограм, у якого всі кути прямі й діагоналі рівні, — квадрат;
Г) ромб, у якого діагоналі рівні, — квадрат.

7. У трикутнику ABC точки M і N належать відповідно сторонам AB і BC. Відрізок MN є середньою лінією, якщо:
   А) $MN \parallel AC$;
   Б) $MN = \frac{1}{2}AC$;
   В) $MN = \frac{1}{2}AC$, $\angle BNM = \angle BAC$;
   Г) $MN = \frac{1}{2}AC$, $\angle BNM = \angle BCA$.

8. Яку з даних властивостей не може мати трапеція?
   А) Протилежні кути рівні;
   Б) діагоналі рівні та перпендикулярні;
   В) один із кутів при більшій основі більший за один із кутів при меншій основі;
   Г) середня лінія трапеції дорівнює її висоті.

9. Вписані кути одного кола рівні, якщо вони:
   А) спираються на одну хорду;
   Б) мають спільну вершину;
   В) спираються на одну дугу;
   Г) мають спільну сторону.

10. Навколо чотирикутника $CDEF$ описано коло, $\angle CDF = 80°$, $\angle DEC = 30°$. Чому дорівнює кут DCF?
   А) $50°$;
   Б) $110°$;
   В) $70°$;
   Г) $90°$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Сума кутів чотирикутника

Сума кутів чотирикутника дорівнює $360°$.

Паралелограм

Паралелограмом називають чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні.

Властивості паралелограма

- Протилежні сторони паралелограма рівні.
- Протилежні кути паралелограма рівні.
- Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Висота паралелограма

Висотою паралелограма називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить сторону паралелограма, на пряму, що містить протилежну сторону.

Ознаки паралелограма

- Якщо в чотирикутнику кожні дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
- Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні та паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.
- Якщо в чотирикутнику діагоналі точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.

Прямокутник

Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути прямі.

Особлива властивість прямокутника

Діагоналі прямокутника рівні.

Ознаки прямокутника

- Якщо один із кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм — прямокутник.
- Якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм — прямокутник.

Ромб

Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.

Особлива властивість ромба

Діагоналі ромба перпендикулярні та є бісектрисами його кутів.

Ознаки ромба

- Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то цей паралелограм — ромб.
- Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кута, то цей паралелограм — ромб.

Квадрат

Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні.

Середня лінія трикутника

Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

Властивість середньої лінії трикутника

Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох його сторін, паралельна третій стороні та дорівнює її половині.

Трапеція

Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Висота трапеції

Висотою трапеції називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить одну з основ, на пряму, що містить другу основу.

Середня лінія трапеції

Середньою лінією трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

Властивість середньої лінії трапеції

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює половині їхньої суми.

Центральний кут кола

Центральним кутом кола називають кут з вершиною в центрі кола.

Вписаний кут кола

Вписаним кутом кола називають кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають коло.

Градусна міра вписаного кута кола

Градусна міра вписаного кута дорівнює половині градусної міри дуги, на яку він спирається.

Властивості вписаних кутів

- Вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, рівні.
- Вписаний кут, який спирається на діаметр (півколо), — прямий.

Коло, описане навколо чотирикутника

Коло називають описаним навколо чотирикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

Властивість чотирикутника, вписаного в коло

Якщо чотирикутник є вписаним у коло, то сума його протилежних кутів дорівнює $180°$.

Ознака чотирикутника, навколо якого можна описати коло

Якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло.

Коло, вписане в чотирикутник

Коло називають вписаним у чотирикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

Властивість кола, описаного навколо чотирикутника

Якщо чотирикутник є описаним навколо кола, то суми його протилежних сторін рівні.

Ознака чотирикутника, у який можна вписати коло

Якщо в опуклому чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло.

ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ §2

Опанувавши матеріал цього параграфа, ви дізнаєтеся про властивості відрізків, які паралельні прямі відтинають на сторонах кута.

Ви навчитеся серед трикутників знаходити такі, що **мають однакову форму**, але різні розміри.

Ознайомитеся з властивістю хорд, які перетинаються, і властивістю дотичної і січної, проведених до кола через одну точку.

Дізнаєтеся, які трикутники називають подібними, і навчитеся застосовувати їхні властивості.

11. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки

Теорема 11.1 (теорема Фалеса). ***Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на другій його стороні.***

Доведення. Нехай маємо кут AOB (рис. 112). Відомо, що $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_3B_3 \parallel A_4B_4$, ... Доведемо, що $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots$.

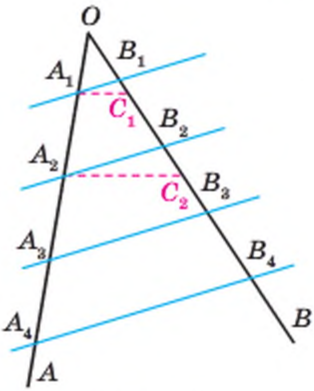


Рис. 112

Припустимо, що $OB_1 \neq B_1B_2$. Нехай серединою відрізка OB_2 є деяка точка C_1. Тоді відрізок A_1C_1 — середня лінія трикутника A_2OB_2. Звідси $A_1C_1 \parallel A_2B_2$. Отже, через точку A_1 проходять дві прямі, паралельні прямій A_2B_2, що суперечить аксіомі паралельності прямих. Ми отримали суперечність. Таким чином, $OB_1 = B_1B_2$.

Припустимо, що $B_1B_2 \neq B_2B_3$. Нехай серединою відрізка B_1B_3 є деяка точка C_2. Тоді відрізок A_2C_2 — середня лінія трапеції $A_3A_1B_1B_3$. Звідси $A_2C_2 \parallel A_3B_3$. Таким чином, через точку A_2 проходять дві прямі, паралельні прямій A_3B_3. Ми отримали суперечність. Отже, $B_1B_2 = B_2B_3$.

Аналогічно доводимо, що $B_2B_3 = B_3B_4$ і т. д. ▲

Означення. Відношенням двох відрізків називають відношення їхніх довжин, виражених в одних і тих самих одиницях виміру.

Якщо, наприклад, $AB = 8$ см, $CD = 6$ см, то відношення відрізка AB до відрізка CD дорівнює $\frac{8}{6}$. Записують: $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{6}$, тобто $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$.

Фале́с Мілетський
(бл. 625 — бл. 547 до н. е.)

Давньогрецький філософ, учений, купець і державний діяч. Походив з Мілета — порту в Малій Азії на узбережжі Егейського моря.

Якщо $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$, то говорять, що відрізки AB і CD **пропорційні** відповідно відрізкам A_1B_1 і C_1D_1.

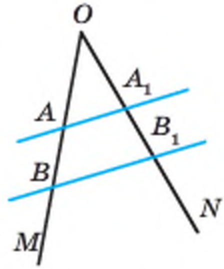


Рис. 113

Аналогічно можна говорити про пропорційність більшої кількості відрізків. Наприклад, якщо $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{MN}{M_1N_1}$, то говорять, що відрізки AB, CD, MN пропорційні відповідно відрізкам A_1B_1, C_1D_1, M_1N_1.

Теорема 11.2 (теорема про пропорційні відрізки). ***Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, що утворилися на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам, що утворилися на другій стороні кута.***

Доведення цієї теореми виходить за рамки шкільного курсу геометрії. Ми наведемо доведення для окремого випадку.

Нехай сторони кута MON перетнуто паралельними прямими AA_1 і BB_1 (рис. 113). Доведемо, що:

1) $\frac{OA}{OA_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$; 2) $\frac{OA}{OA_1}=\frac{OB}{OB_1}$; 3) $\frac{OB}{OB_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$.

Доведемо першу з наведених рівностей (інші дві доводять аналогічно).

Нехай для відрізків OA і AB існує такий відрізок завдовжки l, який укладається ціле число разів у кожному з них. Маємо: $OA = ml$, $AB = nl$, де m і n — деякі натуральні числа.

Тоді відрізки OA і AB можна поділити відповідно на m і n рівних відрізків, кожний з яких дорівнює l.

Через кінці отриманих відрізків проведемо прямі, паралельні прямій BB_1 (рис. 114). За теоремою Фалеса ці прямі ділять відрізки OA_1 і A_1B_1 відповідно на m і n рівних відрізків. Нехай кожний із цих відрізків дорівнює l_1. Звідси $OA_1 = ml_1$, $A_1B_1 = nl_1$.

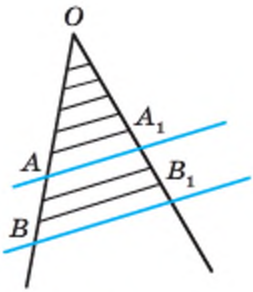


Рис. 114

Маємо: $\frac{OA}{AB}=\frac{ml}{nl}=\frac{m}{n}$, $\frac{OA_1}{A_1B_1}=\frac{ml_1}{nl_1}=\frac{m}{n}$. Звідси $\frac{OA}{AB}=\frac{OA_1}{A_1B_1}$. Тоді $\frac{OA}{OA_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$.

Чому ж наведені міркування не можна вважати повним доведенням теореми? Річ у тім, що не для будь-яких двох відрізків існує відрізок, що вміщається в кожному з них ціле число разів. Зокрема, для відрізків OA і AB

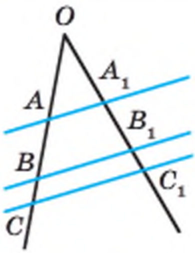


Рис. 115

такий відрізок може й не існувати. Доведення для цього випадку виходить за межі розглядуваного курсу. ▲

Якщо рисунок 113 доповнити прямою CC_1, паралельною прямій BB_1 (рис. 115), то, міркуючи аналогічно, отримаємо, наприклад, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

Теорема 11.2 залишається справедливою, якщо замість сторін кута взяти дві будь-які прямі.

Теорема 11.3. ***Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини трикутника.***

Доведення. На рисунку 116 медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M. Доведемо, що медіана CC_1 також проходить через точку M і $\frac{BM}{MB_1} = \frac{AM}{MA_1} = \frac{CM}{MC_1} = \frac{2}{1}$.

Проведемо $B_1K \parallel AA_1$. Оскільки $AB_1 = B_1C$, то за теоремою Фалеса $A_1K = KC$, тобто $\frac{A_1C}{A_1K} = \frac{2}{1}$. Оскільки $BA_1 = A_1C$, то $\frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$. За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{BM}{MB_1} = \frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$.

Таким чином, медіана AA_1, перетинаючи медіану BB_1, ділить її у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини B.

Аналогічно можна довести (зробіть це самостійно), що медіана CC_1 також ділить медіану BB_1 у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини B (рис. 117).

А це означає, що всі три медіани трикутника ABC проходять через одну точку. Ми довели, що ця точка ділить медіану BB_1 у відношенні 2 : 1. Аналогічно можна довести, що ця точка ділить у відношенні 2 : 1 також медіани AA_1 і CC_1. ▲

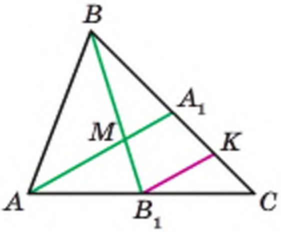


Рис. 116

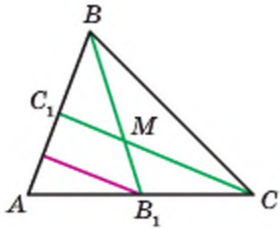


Рис. 117

На рисунку 118 зображено трикутник ABC. Точка D належить стороні AC. У цьому разі говорять, що сторони AB і BC **прилягають** відповідно до відрізків AD і DC.

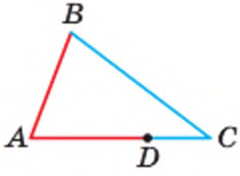


Рис. 118

Теорема 11.4 (властивість бісектриси трикутника). ***Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.***

Доведення. На рисунку 119 відрізок BD — бісектриса трикутника ABC. Доведемо, що $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}$.

Через точку C проведемо пряму, паралельну прямій BD. Нехай проведена пряма перетинає пряму AB у точці E. Кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BD і CE та січній BC; кути 3 і 4 рівні як відповідні при паралельних прямих BD і CE та січній AE. Оскільки BD — бісектриса трикутника ABC, то $\angle 4 = \angle 1$. Звідси $\angle 2 = \angle 3$. Тоді трикутник CBE рівнобедрений з рівними сторонами BC і BE. За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BE}$.

Оскільки $BE = BC$, то $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}$. ▲

Задача. Поділіть даний відрізок на три рівних відрізки.

Розв'язання. Через кінець A даного відрізка AB проведемо промінь AC, який не належить прямій AB (рис. 120). Позначимо на промені AC довільну точку A_1. Потім позначимо точки A_2 і A_3 так, щоб $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$. Проведемо відрізок A_3B. Через точки A_1 і A_2 проведемо прямі, паралельні прямій A_3B. Вони перетинатимуть відрізок AB у точках B_1 і B_2 відповідно. За теоремою Фалеса $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$. ●

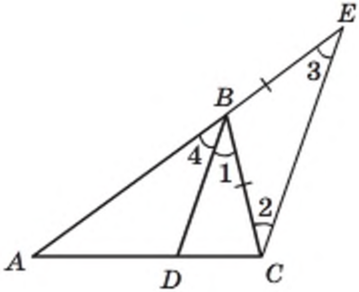


Рис. 119

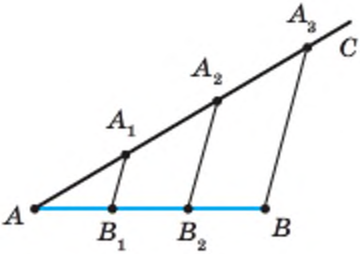


Рис. 120

1. Сформулюйте теорему Фалеса.
2. Що називають відношенням двох відрізків?
3. У якому випадку говорять, що відрізки AB і CD пропорційні відрізкам A_1B_1 і C_1D_1?
4. Сформулюйте теорему про пропорційні відрізки.
5. Сформулюйте теорему про перетин медіан трикутника.
6. Сформулюйте властивість бісектриси трикутника.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

368.° Накресліть довільний відрізок і поділіть його на п'ять рівних частин.

369.° Накресліть довільний відрізок і поділіть його на сім рівних частин.

370.° Накресліть довільний відрізок AB і побудуйте на ньому точку C таку, що $AC : CB = 2 : 7$.

371.° Накресліть довільний відрізок CD і побудуйте на ньому точку E таку, що $CE : ED = 1 : 5$.

ВПРАВИ

372.° На рисунку 121 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OB_1 = 3$ см. Знайдіть відрізки B_1B_2, OB_3, B_1B_4.

373.° На рисунку 122 $AB = BC$, $EF = 5$ см. Знайдіть відрізок ED.

374.° Знайдіть відношення відрізків AB і CD, якщо їхні довжини відповідно дорівнюють 12 см і 18 см. Чи зміниться це відношення, якщо довжини даних відрізків виразити в дециметрах? у міліметрах?

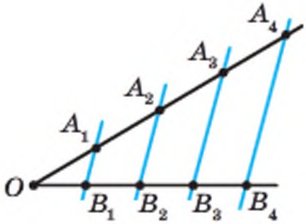


Рис. 121

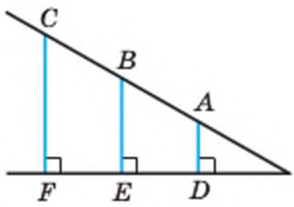


Рис. 122

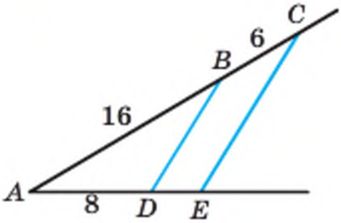


Рис. 123

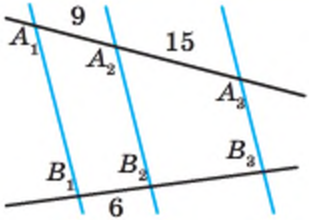


Рис. 124

375.° Чи пропорційні відрізки AB і CD відповідно відрізкам EF і MK, якщо:
1) $AB = 16$ см, $CD = 6$ см, $EF = 24$ см, $MK = 9$ см;
2) $AB = 8$ см, $CD = 20$ см, $EF = 10$ см, $MK = 35$ см?

376.° Серед відрізків AB, CD, EF, MK, PS виберіть чотири відрізки так, щоб два з них були пропорційними двом іншим відрізкам, якщо $AB = 3$ см, $CD = 16$ см, $EF = 18$ см, $MK = 36$ см, $PS = 6$ см.

377.° На рисунку 123 $BD \parallel CE$, $AB = 16$ см, $BC = 6$ см, $AD = 8$ см. Знайдіть відрізок DE.

378.° На рисунку 124 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = 9$ см, $A_2A_3 = 15$ см, $B_1B_2 = 6$ см. Знайдіть відрізок B_2B_3.

379.° На рисунку 125 $DE \parallel AC$, $BE = 10$ см, відрізок BD у два рази більший за відрізок AD. Знайдіть відрізок BC.

380.° Пряма, паралельна стороні BC трикутника ABC, перетинає його сторону AB у точці M, а сторону AC — у точці K, $AM = 9$ см, $BM = 6$ см, $KC = 8$ см. Знайдіть відрізок AK.

381.° Доведіть, що середня лінія трикутника ABC, паралельна стороні AC, ділить навпіл будь-який відрізок, який сполучає вершину B з довільною точкою сторони AC.

382.° Відстань від точки перетину діагоналей прямокутника до його більшої сторони дорівнює 7 см. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.

383.° Висота рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. На якій відстані від сторін трикутника розташована точка перетину його бісектрис?

384.° Медіана CD трикутника ABC дорівнює 9 см. Знайдіть відрізки CO і OD, де O — точка перетину медіан трикутника ABC.

385.° Відрізок BD є бісектрисою трикутника ABC, $AB = 40$ см, $AD = 30$ см, $CD = 12$ см. Знайдіть сторону BC.

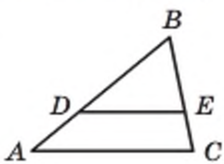


Рис. 125

386.° Відрізок AM — бісектриса трикутника ABC, $AB = 48$ см, $AC = 32$ см, $BM = 18$ см. Знайдіть сторону BC.

387.• Кінці відрізка, який не перетинає дану пряму, віддалені від цієї прямої на 8 см і 14 см. Знайдіть відстань від середини цього відрізка до даної прямої.

388.• Відстань від середини хорди BC до діаметра AC дорівнює 3 см, $\angle BAC = 30°$. Знайдіть хорду AB.

389.• Відрізок BM — висота ромба $ABCD$, проведена до сторони AD, $\angle A = 45°$, $AM = 8$ см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей ромба до сторони AD.

390.• У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $AC = 8$ см, AD — медіана, BE — висота, $BE = 12$ см. Із точки D опущено перпендикуляр DF на сторону AC. Знайдіть відрізок DF і кут ADF.

391.• Сторона AC трикутника ABC дорівнює 24 см. Сторону AB поділили на чотири рівних відрізки та через точки поділу провели прямі, паралельні стороні AC. Знайдіть відрізки цих прямих, які належать трикутнику.

392.• Основи трапеції дорівнюють 16 см і 28 см. Одну з бічних сторін поділили на три рівних відрізки та через точки поділу провели прямі, паралельні основам. Знайдіть відрізки цих прямих, які належать трапеції.

393.• Сторону DE трикутника DEF поділили на три рівних відрізки та через точки поділу провели прямі, паралельні стороні DF. Знайдіть відрізки цих прямих, які належать трикутнику DEF, якщо $DF = 15$ см.

394.• Доведіть, що середня лінія трапеції ділить її діагоналі навпіл.

395.• Середня лінія MK трапеції $ABCD$ перетинає діагональ AC у точці E, $ME = 4$ см, $EK = 6$ см. Знайдіть основи трапеції.

396.• Діагоналі трапеції перетинають її середню лінію MK у точках E і F. Доведіть, що $ME = KF$.

397.• Основи трапеції дорівнюють 12 см і 22 см. Знайдіть відрізки, на які діагоналі трапеції ділять її середню лінію.

398.• На рисунку 126 $AE \parallel BF \parallel CM \parallel DK$, $AB = 25$ см, $BC = 20$ см, $CD = 35$ см, $EK = 48$ см. Знайдіть відрізки EF, FM і MK.

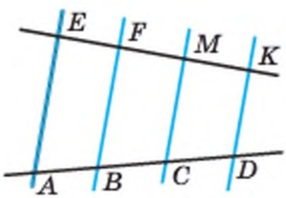


Рис. 126

399.° Через точку D, позначену на стороні AC трикутника ABC, проведено пряму, яка паралельна стороні AB і перетинає сторону BC у точці E. Знайдіть відрізок BE, якщо $AD : DC = 5 : 7$, $BC = 36$ см.

400.° Точки M і K — середини сторін AB і AD паралелограма $ABCD$ відповідно. Доведіть, що точка перетину прямих BK і DM належить діагоналі AC.

401.° Доведіть, що коли дві медіани трикутника рівні, то цей трикутник рівнобедрений.

402.° У трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено медіану AM і висоту BH. Знайдіть висоту BH, якщо $AM = 45$ см, $\angle CAM = 30°$.

403.° Дано відрізок AB і точку O, яка не належить прямій AB. Побудуйте трикутник, для якого відрізок AB є стороною, а точка O — точкою перетину медіан.

404.° Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $AB = 28$ см, $BC = 20$ см, $AC = 36$ см. Знайдіть відрізки AD і CD.

405.° У трикутник ABC вписано ромб $CDEF$ так, що кут C у них спільний, а вершини D, E і F ромба належать відповідно сторонам AC, AB і BC трикутника. Знайдіть сторони AC і BC, якщо $AE = 30$ см, $BE = 12$ см, а периметр трикутника дорівнює 105 см.

406.° Сторони трикутника дорівнюють 39 см, 65 см і 80 см. Коло, центр якого належить більшій стороні трикутника, дотикається до двох інших його сторін. На які відрізки центр цього кола ділить сторону трикутника?

407.° Точка D — середина основи AC рівнобедреного трикутника ABC. На стороні AB позначили точку M так, що $AM : MB = 2 : 7$. У якому відношенні пряма BD ділить відрізок CM?

408.° У рівнобедреному трикутнику DEF провели висоту EC до його основи та на бічній стороні EF позначили точку A. Відрізки EC і DA перетинаються в точці O, причому $AO : OD = 3 : 8$. Знайдіть відношення $EA : AF$.

409.° У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 42 см, а основа відноситься до бічної сторони як $6 : 11$. Знайдіть радіус кола, вписаного в даний трикутник.

410.° Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 60 см, а центр вписаного кола ділить медіану, проведену до основи, у відношенні $12 : 5$. Знайдіть основу трикутника.

411.°° На стороні BC трикутника ABC позначено точку M так, що $BM : MC = 3 : 10$. У якому відношенні відрізок AM ділить медіану BK трикутника ABC?

412.•• На стороні AB трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : MB = 4 : 3$. У якому відношенні медіана BK: 1) ділить відрізок CM; 2) ділиться відрізком CM?

413.•• Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний її основам і дорівнює половині їхньої різниці.

414.•• Дано відрізки a, b, c. Побудуйте відрізок x такий, що $a : x = b : c$.

415.•• Через точку O, яка належить даному куту, проведіть відрізок, кінці якого належать сторонам даного кута та який ділиться точкою O: 1) навпіл; 2) у відношенні $2 : 3$.

416.•• Побудуйте трикутник:
1) за стороною та кутами, які ця сторона утворює з медіанами, проведеними до двох інших сторін;
2) за двома медіанами та кутом між ними;
3) за висотою та медіаною, проведеними до однієї сторони, і кутом між цією стороною та медіаною, проведеною до іншої сторони;
4) за трьома медіанами.

417.•• Побудуйте трикутник:
1) за стороною та медіанами, проведеними до двох інших сторін;
2) за висотою, проведеною до однієї зі сторін, і медіанами, проведеними до двох інших сторін.

418.•• На сторонах кута A позначено точки B_1, B_2, C_1, C_2 так, що $\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$ (рис. 127). Доведіть, що $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

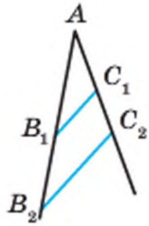


Рис. 127

419.* Бісектриса зовнішнього кута при вершині B трикутника ABC перетинає промінь AC у точці D. Доведіть, що $AB : BC = AD : CD$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

420. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює a. На дузі AC кола із центром B, радіус якого дорівнює a, позначено точку E таку, що $\angle BEC = 75°$. Знайдіть відрізок AE.

421. Діагональ трапеції перпендикулярна до її основ, тупий кут, прилеглий до більшої основи, дорівнює $120°$, бічна сторона, прилегла до цього кута, — 12 см, а більша основа — 16 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

422. Рівносторонній трикутник покрито п'ятьма меншими рівними між собою рівносторонніми трикутниками. Доведіть, що для покриття досить і чотирьох таких трикутників.

12. Подібні трикутники

На рисунку 128 ви бачите зменшене зображення обкладинки підручника з геометрії. Узагалі, у повсякденному житті ви часто стикаєтеся з об'єктами, **які мають однакову форму, але різні розміри** (рис. 129).

Рис. 128

Рис. 129

Геометричні фігури, які мають однакову форму, називають **подібними**. Наприклад, подібними є будь-які два кола, два квадрати, два рівносторонніх трикутники (рис. 130).

На рисунку 131 зображено трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких рівні кути: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Сторони AB і A_1B_1 лежать проти рівних кутів C і C_1. Такі сторони називають **відповідними**. Відповідними також є сторони BC і B_1C_1, CA і C_1A_1.

Рис. 130

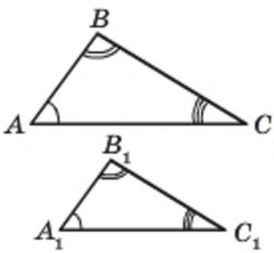


Рис. 131

Означення. **Два трикутники називають подібними, якщо їхні кути відповідно рівні та сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам другого трикутника.**

Наприклад, на рисунку 132 зображено трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = 2$. За означенням ці трикутники подібні. Пишуть: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ (читають: «трикутник ABC подібний трикутнику $A_1B_1C_1$»).

Число 2, якому дорівнює відношення відповідних сторін, називають **коефіцієнтом подібності**. Говорять, що трикутник ABC подібний трикутнику $A_1B_1C_1$ із **коефіцієнтом подібності, який дорівнює 2**. Пишуть: $\Delta ABC \overset{2}{\backsim} \Delta A_1B_1C_1$.

Оскільки $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{1}{2}$, то можна також сказати, що трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC із коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$. Пишуть: $\Delta A_1B_1C_1 \overset{1/2}{\backsim} \Delta ABC$.

З означення рівних трикутників випливає, що будь-які два рівних трикутники подібні з коефіцієнтом подібності, який дорівнює 1.

Якщо $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ і $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A_2B_2C_2$. Доведіть цю властивість самостійно.

Лема[1] про подібні трикутники. ***Пряма, яка паралельна стороні трикутника та перетинає дві інших його сторони, відтинає від даного трикутника йому подібний.***

Доведення. На рисунку 133 зображено трикутник ABC, відрізок A_1C_1 паралельний стороні AC. Доведемо, що $\Delta A_1BC_1 \backsim \Delta ABC$.

Кути A і A_1, C і C_1 рівні як відповідні при паралельних прямих A_1C_1 і AC та січних AB і CB відповідно. Отже, кути трикутників, що розглядаються, відповідно рівні.

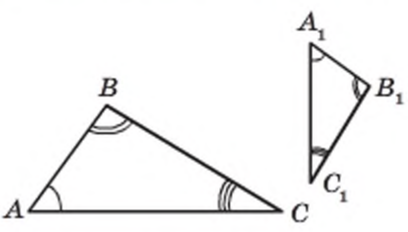


Рис. 132

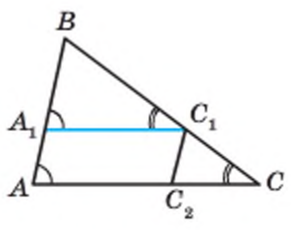


Рис. 133

[1] **Лемою** називають допоміжну теорему, яку використовують для доведення інших теорем.

Покажемо, що сторони BA і BC пропорційні відповідно сторонам BA_1 і BC_1.

Із теореми про пропорційні відрізки (теорема 11.2) випливає, що $\frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Звідси $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$.

Проведемо $C_1C_2 \parallel AB$. Отримуємо: $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{AC_2}$. За означенням чотирикутник $AA_1C_1C_2$ — паралелограм. Тоді $AC_2 = A_1C_1$. Звідси $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Таким чином, ми довели, що $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Отже, у трикутниках A_1BC_1 і ABC кути відповідно рівні та відповідні сторони пропорційні. Тому за означенням ці трикутники подібні. ▲

Задача. Доведіть, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

Розв'язання. Нехай трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC із коефіцієнтом подібності k. Тоді $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, звідки $A_1B_1 = k \cdot AB$, $B_1C_1 = k \cdot BC$, $A_1C_1 = k \cdot AC$.

Позначимо буквою P_1 периметр трикутника $A_1B_1C_1$, буквою P — периметр трикутника ABC. Маємо:

$P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k \cdot AB + k \cdot BC + k \cdot AC = k\,(AB + BC + AC) = kP$, тобто $\frac{P_1}{P} = k$. ●

1. Які два трикутники називають подібними?
2. Як знайти коефіцієнт подібності двох подібних трикутників?
3. Сформулюйте лему про подібні трикутники.

ВПРАВИ

423.° На рисунку 134 зображено подібні трикутники ABC і DEF, рівні кути яких позначено однаковою кількістю дужок. Які сторони цих трикутників пропорційні? Запишіть відповідні рівності.

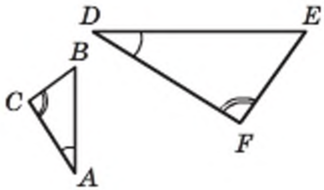


Рис. 134

424.° Чи подібні трикутники ABC і MNK, якщо $\angle A = 40°$, $\angle B = 82°$, $\angle M = 40°$, $\angle K = 58°$, $AB = 2{,}4$ см, $BC = 2{,}1$ см, $AC = 3{,}9$ см, $MN = 3{,}2$ см, $NK = 2{,}8$ см, $MK = 5{,}2$ см?

425.° Відомо, що $\Delta DEF \overset{0,3}{\backsim} \Delta MCP$, причому стороні DE відповідає сторона MC, стороні DF — сторона MP, $MC = 12$ см, $MP = 8$ см, $EF = 4{,}5$ см. Знайдіть невідомі сторони даних трикутників.

426.° Відомо, що $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$, причому $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см, $A_1B_1 = 9$ см. Знайдіть сторони B_1C_1 і A_1C_1.

427.° Знайдіть кути трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$, причому стороні AB відповідає сторона A_1B_1, стороні BC — сторона B_1C_1, $\angle A = 25°$, $\angle B = 70°$.

428.° Сторони MK і DE, KT і EF — відповідні сторони подібних трикутників MKT і DEF, $MK = 18$ см, $KT = 16$ см, $MT = 28$ см, $MK : DE = 4 : 5$. Знайдіть сторони трикутника DEF.

429.° На рисунку 135 $AB \parallel CD$. Знайдіть на цьому рисунку подібні трикутники. Запишіть пропорції, які починаються з відношення: 1) $\frac{AE}{CE}$; 2) $\frac{CD}{AB}$; 3) $\frac{AB}{AE}$.

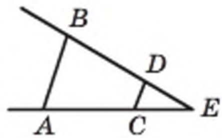


Рис. 135

430.° Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторону AB у точці D, а сторону BC — у точці E. Знайдіть:
1) відрізок BD, якщо $AB = 16$ см, $AC = 20$ см, $DE = 15$ см;
2) відрізок AD, якщо $AB = 28$ см, $BC = 63$ см, $BE = 27$ см.

431.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = 6$ см. Через точку M сторони AB проведено пряму, яка паралельна стороні BC і перетинає сторону AC у точці K. Знайдіть невідомі сторони трикутника ABC, якщо $AM = 4$ см, $MK = 8$ см, $AK = 9$ см.

432.° Знайдіть висоту вежі (рис. 136), якщо відстані від спостерігача до жердини та до вежі відповідно дорівнюють 1,5 м і 39 м, висота жердини — 3 м, а зріст спостерігача — 1,8 м.

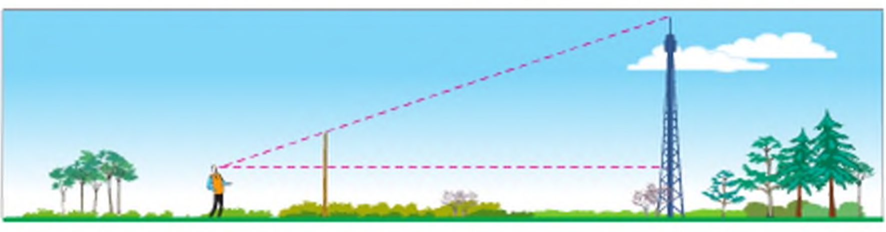


Рис. 136

433.° Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E. Знайдіть відрізок CE, якщо $DE = 40$ см, $BC : AD = 4 : 5$.

434.° Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M. Знайдіть меншу основу трапеції, якщо більша основа AD дорівнює 42 см, $AB = 9$ см, $BM = 54$ см.

435.° Користуючись означенням подібних трикутників, доведіть, що будь-які два рівносторонніх трикутники подібні.

436.• Точки M і K — середини сторін CD і AD квадрата $ABCD$ відповідно. Користуючись означенням подібних трикутників, доведіть, що $\Delta MDK \backsim \Delta BCD$.

437.• Сторони трикутника відносяться як 5 : 4 : 7. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого: 1) периметр дорівнює 64 см; 2) менша сторона дорівнює 24 см.

438.• Сторони даного трикутника дорівнюють 15 см, 25 см і 35 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого: 1) периметр дорівнює 45 см; 2) різниця найбільшої і найменшої сторін становить 16 см.

439.• На рисунку 137 зображено трикутник ABC і вписаний у нього ромб $BDEK$. Знайдіть сторону ромба, якщо $AB = 10$ см, $BC = 15$ см.

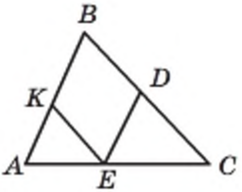


Рис. 137

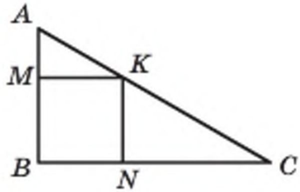


Рис. 138

440.• На рисунку 138 зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle B = 90°$) і вписаний у нього квадрат $BMKN$. Знайдіть відрізок CN, якщо $BM = 6$ см, $AB = 10$ см.

441.• Два кола із центрами O_1 і O_2 та радіусами 8 см і 12 см відповідно мають тільки одну спільну точку A (точка A лежить між точками O_1 і O_2). Їхня спільна зовнішня дотична перетинає пряму O_1O_2 у точці B. Знайдіть відстані від точки B до центрів даних кіл.

442.•• Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Через середину висоти трикутника, опущеної на його основу, проведено пряму, паралельну бічній стороні. Знайдіть периметр трикутника, який ця пряма відтинає від даного.

443.** У рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 12 см, а бічна сторона — 18 см, вписано коло. Знайдіть відстань між точками дотику цього кола до бічних сторін трикутника.

444.* У трикутнику ABC відомо, що $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $\angle ABC = 120°$, BD — бісектриса. Знайдіть відрізок BD.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

445. Сторона BC паралелограма $ABCD$ у 2 рази більша за сторону AB. Бісектриси кутів A і B паралелограма перетинають пряму CD у точках M і K відповідно (рис. 139). Знайдіть сторони паралелограма, якщо $MK = 18$ см.

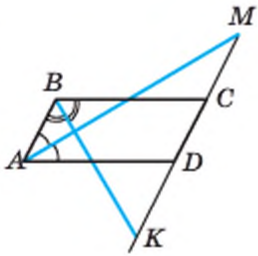


Рис. 139

446. Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O, кут AOD на 60° більший за кут AOB, $AC = 24$ см. Знайдіть периметр трикутника COD.

447. Коло, центр якого належить стороні AB трикутника ABC, проходить через точку B, дотикається до сторони AC у точці C і перетинає сторону AB у точці D, причому $AD : BD = 1 : 2$. Знайдіть кути: 1) трикутника ABC; 2) трикутника BCD.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

448. На площині позначили 25 точок так, що серед будь-яких трьох із них знайдуться дві точки, відстань між якими менша від одиниці. Доведіть, що існує коло одиничного радіуса, яке містить не менше ніж 13 даних точок.

13. Перша ознака подібності трикутників

Якщо для трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ виконуються умови $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$, то за означенням ці трикутники подібні.

Чи можна за меншою кількістю умов визначати подібність трикутників? На це запитання відповідають ознаки подібності трикутників.

Теорема 13.1 (перша ознака подібності трикутників: за двома кутами). ***Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.***

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Доведемо, що $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Якщо $AB = A_1B_1$, то трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за другою ознакою рівності трикутників, а отже, ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад, $AB > A_1B_1$. Відкладемо на стороні BA відрізок BA_2, який дорівнює стороні B_1A_1. Через точку A_2 проведемо пряму A_2C_2, паралельну стороні AC (рис. 140).

Кути A і BA_2C_2 є відповідними при паралельних прямих A_2C_2 і AC та січній AA_2. Звідси $\angle A = \angle BA_2C_2$. Але $\angle A = \angle A_1$. Отримуємо, що $\angle A_1 = \angle BA_2C_2$. Таким чином, трикутники A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за другою ознакою рівності трикутників. За лемою про подібні трикутники $\Delta A_2BC_2 \backsim \Delta ABC$. Отже, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ▲

Задача 1. Середня лінія трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) дорівнює 24 см, а її діагоналі перетинаються в точці O. Знайдіть основи трапеції, якщо $AO : OC = 5 : 3$.

Розв'язання. Розглянемо трикутники AOD і COB (рис. 141). Кути AOD і BOC рівні як вертикальні, кути CAD і ACB рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC. Отже, трикутники AOD і COB подібні за двома кутами.

Тоді $\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO} = \frac{5}{3}$.

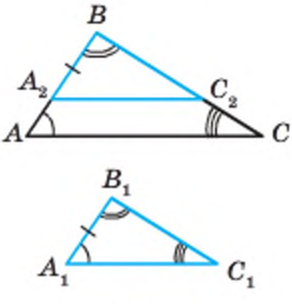


Рис. 140

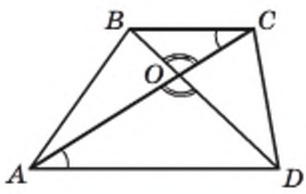


Рис. 141

Нехай $BC = 3x$ см, тоді $AD = 5x$ см.

Оскільки середня лінія трапеції дорівнює 24 см, то $BC + AD = 48$ см.

Маємо: $3x + 5x = 48$. Звідси $x = 6$.

Отже, $BC = 18$ см, $AD = 30$ см.

Відповідь: 18 см, 30 см.

Задача 2 (властивість хорд, які перетинаються). Доведіть, що коли хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, то $AM \cdot MB = DM \cdot MC$ (рис. 142).

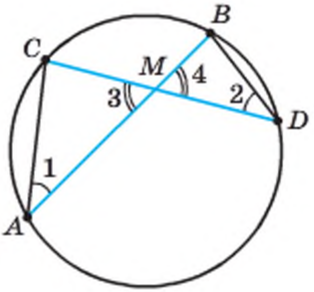


Рис. 142

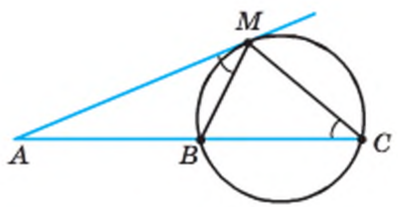


Рис. 143

Розв'язання. Розглянемо трикутники ACM і DBM. Кути 3 і 4 рівні як вертикальні, кути 1 і 2 рівні як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу. Отже, трикутники ACM і DBM подібні за першою ознакою подібності трикутників. Тоді $\frac{AM}{DM} = \frac{MC}{MB}$. Звідси $AM \cdot MB = DM \cdot MC$.

Задача 3 (властивість дотичної та січної). Доведіть, що коли через точку A до кола проведено дотичну AM (M — точка дотику) і пряму (січну), яка перетинає коло в точках B і C (рис. 143), то $AM^2 = AC \cdot AB$.

Розв'язання. Розглянемо трикутники AMB і ACM. У них кут A спільний. За властивістю кута між дотичною та хордою (див. ключову задачу 1 п. 9) $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MB$. Кут MCB вписаний. Він спирається на дугу MB, тому $\angle MCB = \frac{1}{2} \cup MB$. Звідси $\angle AMB = \angle MCB$. Отже, трикутники AMB і ACM подібні за першою ознакою подібності трикутників. Тоді $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$. Звідси $AM^2 = AC \cdot AB$.

1. Сформулюйте першу ознаку подібності трикутників.
2. Сформулюйте властивість хорд, які перетинаються.
3. Сформулюйте властивість дотичної та січної, проведених до кола через одну точку.

ВПРАВИ

449.° На рисунку 144 $\angle BAC = \angle BED$. Чи подібні трикутники ABC і EDB? У разі ствердної відповіді вкажіть пари відповідних сторін.

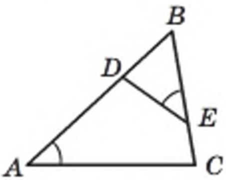


Рис. 144

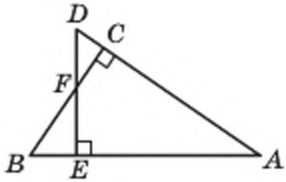


Рис. 145

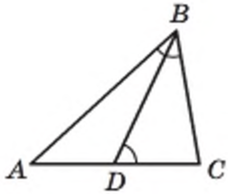
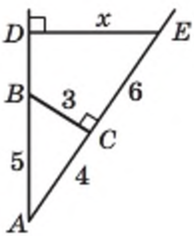


Рис. 146

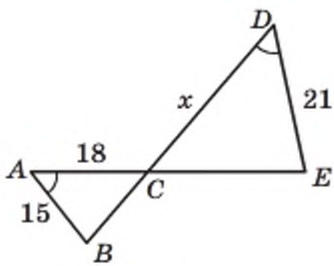
450.° На рисунку 145 $DE \perp AB$, $BC \perp AD$. Укажіть усі пари подібних трикутників, які зображено на цьому рисунку.

451.° На рисунку 146 $\angle ABC = \angle BDC$. Які трикутники на цьому рисунку подібні? Запишіть рівність відношень їхніх відповідних сторін.

452.° Укажіть пари подібних трикутників, зображених на рисунку 147, знайдіть довжину відрізка x (розміри дано в сантиметрах).



а



б

Рис. 147

453.° У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ відомо, що $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $A_1C_1 = 18$ см. Знайдіть невідомі сторони даних трикутників.

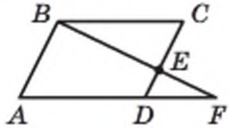


Рис. 148

454.° На стороні CD паралелограма $ABCD$ (рис. 148) позначено точку E, прямі BE і AD перетинаються в точці F, $CE = 8$ см, $DE = 4$ см, $BE = 10$ см, $AD = 9$ см. Знайдіть відрізки EF і FD.

455.° У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) відомо, що $AD = 20$ см, $BC = 15$ см, O — точка перетину діагоналей, $AO = 16$ см. Знайдіть OC.

456.° Діагоналі трапеції $ABCD$ з основами BC і AD перетинаються в точці O. Знайдіть основу AD, якщо $BO : OD = 3 : 7$, $BC = 18$ см.

457.° Чи подібні два прямокутних трикутники, якщо серед кутів одного з них є кут, який дорівнює 38°, а серед кутів другого — кут, який дорівнює 52°?

458.° Доведіть, що два рівнобедрених трикутники подібні, якщо кути, протилежні їхнім основам, рівні.

459.° Чи можна стверджувати, що два рівнобедрених трикутники подібні, якщо в них є: 1) по рівному гострому куту; 2) по прямому куту; 3) по рівному тупому куту?

460.° Кут між бічною стороною та основою одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту між бічною стороною та основою другого рівнобедреного трикутника. Бічна сторона та основа першого трикутника дорівнюють 18 см і 10 см відповідно, а основа другого — 8 см. Знайдіть бічну сторону другого трикутника.

461.° Із вершини прямого кута трикутника опущено висоту на гіпотенузу. Скільки подібних трикутників утворилося при цьому?

462.° Сторони паралелограма дорівнюють 20 см і 14 см, висота, проведена до більшої сторони, дорівнює 7 см. Знайдіть висоту паралелограма, проведену до меншої сторони.

463.• У трапеції $ABCD$ з основами BC і AD діагоналі перетинаються в точці O, $BO = 4$ см, $OD = 20$ см, $AC = 36$ см. Знайдіть відрізки AO і OC.

464.• У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) відомо, що $AD = 18$ см, $BC = 14$ см, $AC = 24$ см. Знайдіть відрізки, на які точка перетину діагоналей ділить діагональ AC.

465.• Доведіть, що в подібних трикутниках бісектриси, проведені з вершин відповідних кутів, відносяться як відповідні сторони.

466.° Доведіть, що в подібних трикутниках висоти, проведені з вершин відповідних кутів, відносяться як відповідні сторони.

467.° Основи BC і AD трапеції $ABCD$ дорівнюють відповідно 28 см і 63 см, $\angle ABC = \angle ACD$. Знайдіть діагональ AC.

468.° На стороні AC трикутника ABC позначили точку D таку, що $\angle ABD = \angle C$, $AB = 20$ см, $BC = 28$ см, $AC = 40$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутника ABD.

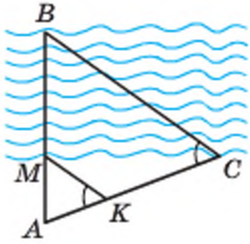


Рис. 149

469.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 20 см, а більший катет — 16 см. Знайдіть відрізки, на які серединний перпендикуляр гіпотенузи ділить більший катет.

470.° Поясніть за допомогою рисунка 149, як можна знайти ширину BM річки, використовуючи подібність трикутників.

471.° Зображення дерева, віддаленого на 60 м від об'єктива фотоапарата, має на плівці висоту 8 мм (рис. 150). Відстань від об'єктива до зображення дорівнює 40 мм. Яка висота дерева?

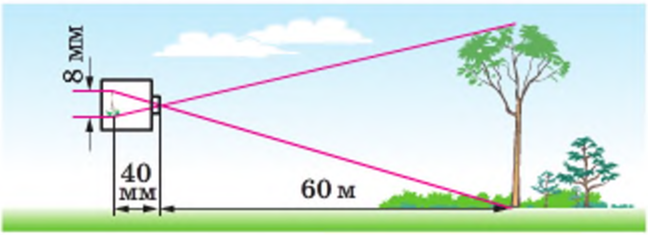


Рис. 150

472.° Знайдіть висоту дерева, якщо довжина його тіні дорівнює 8,4 м, а довжина тіні від вертикального стовпа заввишки 2 м у той самий час доби дорівнює 2,4 м (рис. 151).

Рис. 151

473.$^{\bullet}$ Чи може пряма перетинати дві сторони рівнобедреного трикутника, відтинаючи від нього трикутник, йому подібний, і не бути паралельною третій стороні?

474.$^{\bullet}$ Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, $AM = 6$ см, $BM = 14$ см, $CM = 12$ см. Знайдіть відрізок DM.

475.$^{\bullet}$ Хорди MK і NP кола перетинаються в точці F, $MF = 9$ см, $KF = 12$ см, а відрізок NF у 3 рази довший за відрізок PF. Знайдіть довжину хорди NP.

476.$^{\bullet}$ Точка K ділить хорду AC кола навпіл, а хорду DE — на відрізки завдовжки 2 см і 32 см. Знайдіть довжину хорди AC.

477.$^{\bullet\bullet}$ Точка E ділить хорду CD кола на відрізки завдовжки 15 см і 16 см. Знайдіть радіус кола, якщо відстань від точки E до центра кола дорівнює 4 см.

478.$^{\bullet\bullet}$ Точка P ділить хорду MK кола на два відрізки завдовжки 8 см і 12 см. Знайдіть відстань від точки P до центра кола, якщо його радіус дорівнює 11 см.

479.$^{\bullet\bullet}$ Через точку A проведено до кола дотичну AM (M — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках K і P (точка K лежить між точками A і P). Знайдіть відрізок KP, якщо $AM = 12$ см, $AP = 18$ см.

480.$^{\bullet\bullet}$ Через точку A, яка лежить поза колом, проведено дві прямі, одна з яких дотикається до кола в точці B, а друга перетинає коло в точках C і D (точка C лежить між точками A і D), $AB = 18$ см, $AC : CD = 4 : 5$. Знайдіть відрізок AD.

481.$^{\bullet\bullet}$ Через точку A, що лежить поза колом (рис. 152), проведено дві прямі, одна з яких перетинає коло в точках B і C (точка B лежить між точками A і C), а друга — у точках D і E (точка D лежить між точками A і E).

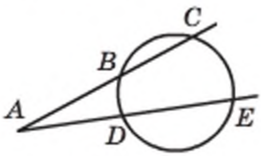


Рис. 152

1) Доведіть, що $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

2) Знайдіть відрізок AE, якщо $AB = 18$ см, $BC = 12$ см і $AD : DE = 5 : 7$.

482.$^{\bullet\bullet}$ У колі, радіус якого дорівнює 8 см, проведено хорду AB. На прямій AB поза відрізком AB позначили точку C таку, що $AC : BC = 1 : 4$. Знайдіть відстань від точки C до центра кола, якщо $AB = 9$ см.

483.$^{\bullet\bullet}$ У трикутник ABC вписано квадрат так, що дві його сусідні вершини належать стороні AC, а дві інші — сторонам AB і BC відповідно. Знайдіть сторону квадрата, якщо $AC = a$, а висота, проведена до сторони AC, дорівнює h.

484.•• У трикутнику ABC відомо, що $BC = 72$ см, AD — висота, $AD = 24$ см. У даний трикутник вписано прямокутник $MNKP$ так, що вершини M і P належать стороні BC, а вершини N і K — сторонам AB і AC відповідно. Знайдіть сторони прямокутника, якщо $MP : MN = 9 : 5$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

485. Знайдіть кути паралелограма, якщо кут між його висотами, проведеними з однієї вершини, дорівнює: 1) 20°; 2) 130°.

486. Два кола із центрами O_1 і O_2, радіуси яких рівні, перетинаються в точках A і B. Відрізок O_1O_2 перетинає дані кола в точках C і D. Доведіть, що чотирикутник $ACBD$ — ромб.

487. Один із кутів прямокутної трапеції дорівнює 135°, середня лінія — 21 см, а основи відносяться як 5 : 2. Знайдіть меншу бічну сторону трапеції.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

488. Як два рівних опуклих чотирикутники розрізати на частини, з яких можна скласти паралелограм?

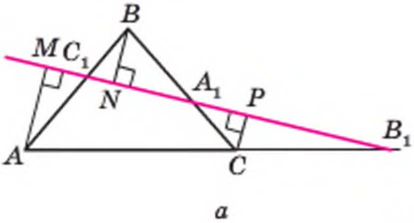
ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ

Точки, які належать одній прямій, називають **колінеарними**. Дві точки колінеарні завжди.

У цьому оповіданні ви дізнаєтеся про одну знамениту теорему, яка слугує критерієм колінеарності трьох точок. Ця теорема носить ім'я давньогрецького математика й астронома Менелая Александрійського (І–ІІ ст. н. е.).

Теорема Менелая. ***На сторонах AB і BC трикутника ABC позначено відповідно точки C_1 і A_1, а на продовженні сторони AC — точку B_1. Для того щоб точки A_1, B_1, C_1 лежали на одній прямій, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність***

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$



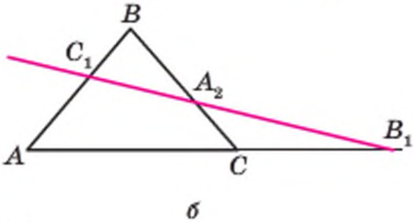


Рис. 153

Доведення. Спочатку доведемо необхідну умову колінеарності: якщо точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій, то виконується рівність (*).

Із вершин трикутника ABC опустимо перпендикуляри AM, BN і CP на пряму C_1B_1 (рис. 153, *а*). Оскільки $\angle MC_1A = \angle NC_1B$, то трикутники AMC_1 і BNC_1 подібні за першою ознакою подібності трикутників. Звідси $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AM}{BN}$. Із подібності трикутників BNA_1 і CPA_1 отримуємо: $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{CP}$. Із подібності трикутників B_1CP і B_1AM випливає рівність $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CP}{AM}$. Перемноживши почленно ліві та праві частини пропорцій $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AM}{BN}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{CP}$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CP}{AM}$, отримуємо рівність $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AM}{BN} \cdot \frac{BN}{CP} \cdot \frac{CP}{AM} = 1$.

Тепер доведемо достатню умову колінеарності: якщо виконується рівність (*), то точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

Нехай пряма C_1B_1 перетинає сторону BC трикутника ABC у деякій точці A_2 (рис. 153, *б*). Оскільки точки C_1, A_2, B_1 лежать на одній прямій, то з доведеного вище можна записати: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Зіставляючи цю рівність з рівністю (*), доходимо висновку, що $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA_2}{A_2C}$, тобто точки A_2 і A_1 ділять відрізок BC в одному й тому самому відношенні, а отже, ці точки збігаються. Звідси випливає, що пряма C_1B_1 перетинає сторону BC у точці A_1. ▲

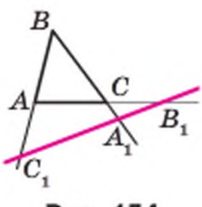


Рис. 154

Зауважимо, що теорема залишається справедливою і тоді, коли точки A_1, B_1, C_1 лежать не на сторонах трикутника ABC, а на їхніх продовженнях (рис. 154).

ВПРАВИ

1. Спільні дотичні до трьох кіл перетинаються в точках A, B і C (рис. 155). Доведіть, що ці точки колінеарні.

Вказівка. Застосуйте теорему Менелая до трикутника $O_1O_2O_3$ та точок A, B, C, які лежать на продовженнях його сторін.

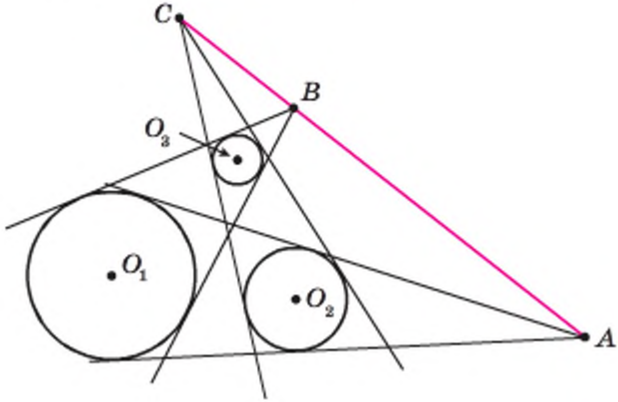


Рис. 155

2. Коло із центром O_1 дотикається до двох кіл із центрами O_2 і O_3 у точках B і A відповідно (рис. 156). Доведіть, що точка C — точка перетину спільних дотичних до кіл із центрами O_2 і O_3 — належить прямій AB.

3. У точках A, B, C проведено дотичні до кола (рис. 157). Доведіть, що точки M, N і P колінеарні.

Вказівка. Застосовуючи теорему Менелая до трикутника ABC, скористайтеся ключовою задачею 3 п. 13.

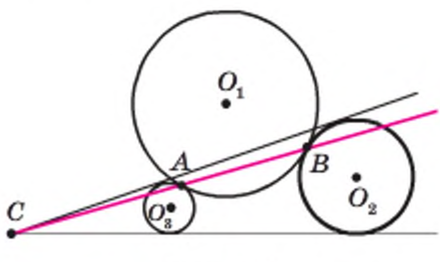


Рис. 156

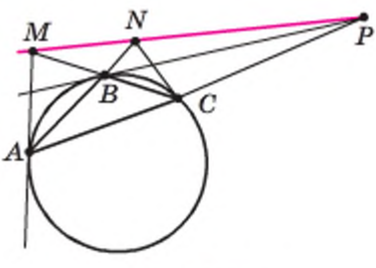


Рис. 157

4. Пряма перетинає сторони AB, BC і продовження сторони AC трикутника ABC відповідно в точках D, E, F. Доведіть, що середини відрізків DC, AE, BF лежать на одній прямій (цю пряму називають *прямою Гаусса*).

Вказівка. Застосуйте теорему Менелая до трикутника, вершини якого є серединами сторін трикутника ABC.

Карл Фрідріх Гаусс
(1777–1855)

Видатний німецький математик, астроном, фізик, геодезист. У його творчості органічно поєднувалися дослідження з теоретичної та прикладної математики. Праці Гаусса справили значний вплив на подальший розвиток алгебри, теорії чисел, геометрії, теорії електрики та магнетизму.

ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ

Теорема Птолемея. ***Добуток діагоналей вписаного в коло чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.***

Доведення. На рисунку 158 зображено вписаний у коло чотирикутник $ABCD$. Доведемо, що $AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AC$.

Клавдій Птолемей
(бл. 100 — бл. 178)

Давньогрецький математик і астроном. Автор геоцентричної моделі Всесвіту. Розробив математичну теорію руху планет, яка дає змогу обчислювати їхнє положення. Створив прообраз сучасної системи координат.

На діагоналі AC позначимо точку K так, що $\angle 1 = \angle 2$. Кути 3 і 4 рівні як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу. Отже, трикутники ABK і DBC подібні за першою ознакою подібності трикутників (кути 3 і 4 рівні як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу). Звідси $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{DC}$, тобто

$$AB \cdot DC = BD \cdot AK. \quad (1)$$

Оскільки $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle ABD = \angle KBC$. Кути 5 і 6 рівні як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу. Тому $\Delta KBC \backsim \Delta ABD$. Звідси $\frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}$, тобто

$$BC \cdot AD = BD \cdot KC. \quad (2)$$

Додавши рівності (1) і (2), отримаємо:

$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AK + BD \cdot KC$, тобто

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD\,(AK + KC) = BD \cdot AC. \ ▲$$

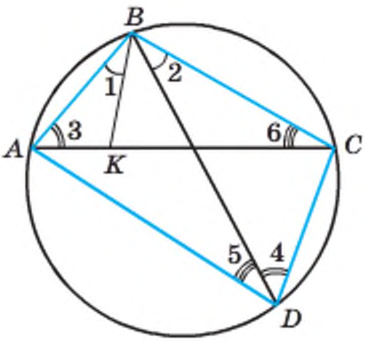


Рис. 158

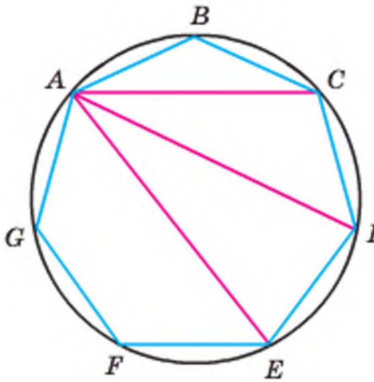


Рис. 159

ВПРАВИ

1. Нехай M — довільна точка кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC. Доведіть, що один із відрізків MA, MB, MC дорівнює сумі двох інших.

2. На колі позначено точки A, B, C, D так, що $\cup AB = \cup BC = \cup CD$. Доведіть, що $AC^2 = AB \cdot (BC + AD)$.

3. На рисунку 159 зображено вписаний у коло семикутник $ABCDEFG$, у якого всі сторони рівні. Доведіть, що $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$.

14. Друга та третя ознаки подібності трикутників

Теорема 14.1 (друга ознака подібності трикутників: за двома сторонами та кутом між ними). ***Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника та кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.***

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=k$ і $\angle B=\angle B_1$. Доведемо, що $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Якщо $k = 1$, то $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$, а отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за першою ознакою рівності трикутників, тому ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад, $k > 1$, тобто $AB > A_1B_1$ і $BC > B_1C_1$. На сторонах BA і BC позначимо відповідно точки A_2 і C_2 так, що $BA_2 = A_1B_1$ і $BC_2 = B_1C_1$ (рис. 160). Тоді $\frac{AB}{BA_2}=\frac{BC}{BC_2}$.

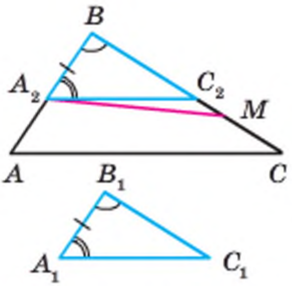


Рис. 160

Покажемо, що $A_2C_2 \parallel AC$. Припустимо, що це не так. Тоді на стороні BC позначимо точку M таку, що $A_2M \parallel AC$. Маємо: $\frac{AB}{BA_2}=\frac{BC}{BM}$. Але $\frac{AB}{BA_2}=\frac{BC}{BC_2}$, тоді $\frac{BC}{BC_2}=\frac{BC}{BM}$, тобто $BC_2 = BM$. Отже, буквами M і C_2 позначено одну й ту саму точку. Тоді $A_2C_2 \parallel AC$.

За лемою про подібні трикутники отримуємо, що $\Delta ABC \backsim \Delta A_2BC_2$. Трикутники A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ▲

Теорема 14.2 (третя ознака подібності трикутників: за трьома сторонами). ***Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.***

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=k$. Доведемо, що $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Якщо $k = 1$, то трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників, а отже, ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад, $k > 1$. На сторонах BA і BC позначимо відповідно точки A_2 і C_2 такі, що $BA_2 = A_1B_1$, $BC_2 = B_1C_1$ (рис. 161). Тоді $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2} = k$. У трикутниках ABC і A_2BC_2 кут B спільний, прилеглі до нього сторони пропорційні. Отже, за другою ознакою подібності трикутників ці трикутники подібні, причому коефіцієнт подібності дорівнює k. Тоді $\frac{CA}{C_2A_2} = k$. Ураховуючи, що за умовою $\frac{CA}{C_1A_1} = k$, отримуємо: $A_1C_1 = A_2C_2$. Отже, трикутники A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. З урахуванням того, що $\Delta ABC \backsim \Delta A_2BC_2$, отримуємо: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ▲

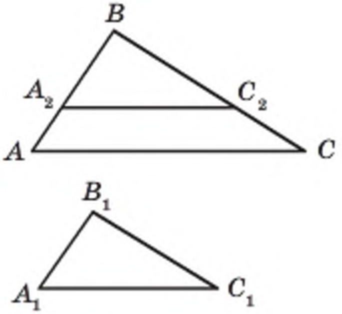


Рис. 161

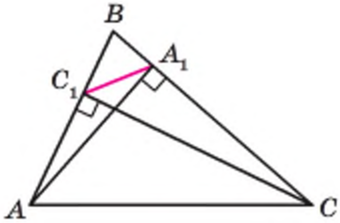


Рис. 162

Задача. Доведіть, що відрізок, який сполучає основи двох висот гострокутного трикутника, відтинає трикутник, подібний даному.

Розв'язання. На рисунку 162 відрізки AA_1 і CC_1 — висоти трикутника ABC. Доведемо, що $\Delta A_1BC_1 \backsim \Delta ABC$.

У прямокутних трикутниках ABA_1 і CBC_1 гострий кут B спільний. Отже, трикутники ABA_1 і CBC_1 подібні за першою ознакою подібності трикутників. Звідси $\frac{AB}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Тоді $\frac{AB}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$. Кут B спільний для трикутників ABC і A_1BC_1. Отже, трикутники ABC і A_1BC_1 подібні за другою ознакою подібності трикутників. ●

1. Сформулюйте другу ознаку подібності трикутників.
2. Сформулюйте третю ознаку подібності трикутників.

ВПРАВИ

489.° На одній стороні кута A відкладено відрізки AB і AD, а на другій — відрізки AC і AE. Чи подібні трикутники ABC і ADE, якщо $AB = 4$ см, $AD = 20$ см, $AC = 10$ см, $AE = 8$ см?

490.° На сторонах AB і AC трикутника ABC (рис. 163) позначили відповідно точки D і E так, що $AD = \frac{4}{7}AC$, $AE = \frac{4}{7}AB$. Знайдіть відрізок DE, якщо $BC = 21$ см.

491.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = 21$ см, $AC = 42$ см, $BC = 28$ см (рис. 164). На продовженнях відрізків AB і BC за точку B відкладено відповідно відрізки BM і BK, $BM = 8$ см, $BK = 6$ см. Знайдіть відрізок KM.

492.° Відрізки AB і CD перетинаються в точці O (рис. 165), $AO = 24$ см, $BO = 16$ см, $CO = 15$ см, $OD = 10$ см, $\angle ACO = 72°$. Знайдіть кут BDO.

493.° На сторонах AC і BC трикутника ABC позначили відповідно точки M і K так, що $CM = 15$ см, $CK = 12$ см. Знайдіть відрізок MK, якщо $AC = 20$ см, $BC = 25$ см, $AB = 30$ см.

494.° Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB = 6$ см, $BC = 10$ см, $AC = 14$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $B_1C_1 = 15$ см, $A_1C_1 = 21$ см;
2) $AB = 1,3$ см, $BC = 2,5$ см, $AC = 3,2$ см, $A_1B_1 = 26$ см, $B_1C_1 = 50$ см, $A_1C_1 = 60$ см?

495.° Чи подібні два трикутники, якщо сторони одного відносяться як 3 : 8 : 9, а сторони другого дорівнюють 24 см, 9 см, 27 см?

496.• У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ відомо, що $\angle A = \angle A_1$, кожна зі сторін AB і AC становить 0,6 сторін A_1B_1 і A_1C_1 відповідно. Знайдіть сторони BC і B_1C_1, якщо їхня сума дорівнює 48 см.

497.• У трикутниках DEF і MKN відомо, що $\angle E = \angle K$, а кожна зі сторін DE і EF у 2,5 раза більша за сторони MK і KN відповідно. Знайдіть сторони DF і MN, якщо їхня різниця дорівнює 30 см.

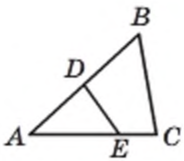


Рис. 163

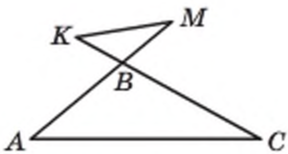


Рис. 164

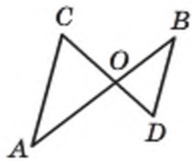


Рис. 165

498.• На сторонах AB і AC трикутника ABC позначили відповідно точки D і E так, що $AD : DB = AE : EC = 3 : 5$. Знайдіть відрізок DE, якщо $BC = 16$ см.

499.• З дерев'яних паличок виготовили три подібні різносторонні трикутники. У кожному з них більшу сторону пофарбували в блакитний колір, а меншу — у жовтий. З блакитних паличок склали один трикутник, а з жовтих — другий. Чи будуть ці трикутники подібні?

500.•• У трикутнику ABC відомо, що $AC = a$, $AB = BC = b$, AM і CK — бісектриси трикутника. Знайдіть відрізок MK.

501.•• У трикутнику ABC відомо, що $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 16$ см. На стороні AC позначено точку D так, що $CD = 9$ см. Знайдіть відрізок BD.

502.• Із точки A проведено два промені AM і AN. На промені AM позначено точки H і B, а на промені AN — точки C і D так, що $AH \cdot AB = AC \cdot AD$. Доведіть, що точки H, B, C і D лежать на одному колі.

503.• На медіані BM трикутника ABC позначили точку K так, що $\angle MKC = \angle BCM$. Доведіть, що $\angle AKM = \angle BAM$.

504.• Відрізки AB і CD перетинаються в точці M. Відомо, що $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Доведіть, що точки A, B, C і D лежать на одному колі.

505.• На спільній хорді двох кіл, що перетинаються, позначили точку M і через неї провели хорди AB і CD (рис. 166). Доведіть, що $\angle DAB = \angle BCD$.

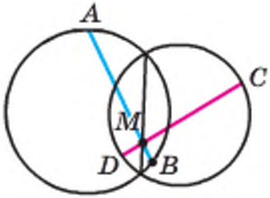


Рис. 166

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

506. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 46 см, $\angle BAD = \angle ADB$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо периметр трикутника BCD дорівнює 32 см.

507. На діагоналі BD квадрата $ABCD$ позначили точку E так, що $DE = AD$. Через точку E проведено пряму, яка перпендикулярна до прямої BD і перетинає сторону AB у точці F. Доведіть, що $AF = FE = BE$.

508. У трапеції $ABCD$ відомо, що $\angle B = 90°$, $\angle C = 150°$, $BC = 5$ см. Знайдіть сторону CD, якщо висота трапеції, проведена з вершини C, розбиває дану трапецію на трикутник і квадрат.

Поновіть у пам'яті зміст пункту 7 на с. 186 і пункту 17 на с. 190.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

509. На колі позначили 999 точок синім олівцем та одну точку червоним олівцем. Яких многокутників з вершинами в позначених точках більше: тих, що містять червону точку, чи тих, що її не містять?

ПРЯМА ЕЙЛЕРА

Точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника — це центр кола, описаного навколо трикутника. Позначимо цю точку буквою O.

Точка перетину бісектрис трикутника — це центр вписаного кола. Позначимо цю точку буквою J.

Точку перетину прямих, які містять висоти трикутника, називають **ортоцентром** трикутника. Позначимо цю точку буквою H.

Точку перетину медіан трикутника називають **центроїдом** трикутника. Позначимо цю точку буквою M.

Точки O, J, H, M називають **чудовими точками** трикутника. Використання такого емоційного епітета цілком обґрунтовано. Адже цим точкам притаманна ціла низка красивих властивостей. Хіба не чудово вже те, що вони є в будь-якому трикутнику?

Розглянемо одну з багатьох теорем про чудові точки трикутника.

Теорема. ***У будь-якому трикутнику центр описаного кола, центроїд і ортоцентр лежать на одній прямій.***

Цю пряму називають **прямою Ейлера**.

Доведення. Для рівнобедреного трикутника твердження, що доводиться, є очевидним.

Леонард Ейлер
(1707–1783)

Видатний математик, фізик, механік, астроном.

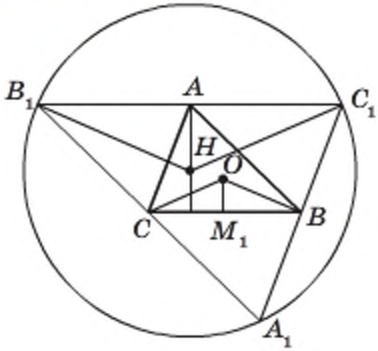


Рис. 167

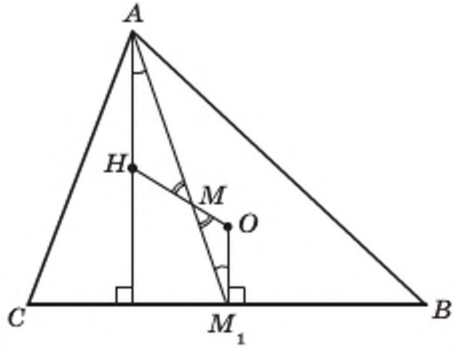


Рис. 168

Якщо даний трикутник ABC прямокутний ($\angle C = 90°$), то його ортоцентр — це точка C, центр описаного кола — середина гіпотенузи AB. Тоді зрозуміло, що всі три точки, про які йдеться в теоремі, належать медіані, проведеній до гіпотенузи.

Доведемо теорему для гострокутного різностороннього трикутника.

Лема. ***Якщо H — ортоцентр трикутника ABC, OM_1 — перпендикуляр, опущений із центра O описаного кола на сторону BC, то $AH = 2OM_1$*** (рис. 167).

Доведення. Виконаємо додаткову побудову, уже знайому вам з розв'язання ключової задачі п. 2: через кожну вершину трикутника ABC проведемо пряму, паралельну протилежній стороні. Отримаємо трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 167). У зазначеній ключовій задачі було показано, що ортоцентр H трикутника ABC є центром описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$. Для цього кола кут B_1HC_1 є центральним, а кут $B_1A_1C_1$ — вписаним. Оскільки обидва кути спираються на одну й ту саму дугу, то $\angle B_1HC_1 = 2\angle B_1A_1C_1$. Кути BAC і $B_1A_1C_1$ рівні як протилежні кути паралелограма ABA_1C, тому $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1HC_1$. Оскільки $B_1C_1 = 2BC$, то рівнобедрені трикутники B_1HC_1 і COB подібні з коефіцієнтом подібності 2. Оскільки відрізки AH і OM_1 — відповідні висоти подібних трикутників, то $AH = 2OM_1$.

Доведемо тепер основну теорему.

Оскільки точка M_1 — середина сторони BC, то відрізок AM_1 — медіана трикутника ABC (рис. 168). Нехай M — точка перетину відрізків AM_1 і HO. Оскільки $AH \parallel OM_1$, то $\angle HAM = \angle OM_1M$. Кути AMH і M_1MO рівні як вертикальні. Отже, трикутники HAM

і OM_1M подібні за першою ознакою подібності трикутників. Звідси $\frac{AM}{MM_1} = \frac{AH}{OM_1} = 2$. Отже, точка M поділяє медіану AM_1 у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини A. Звідси точка M — центроїд трикутника ABC.

Доведення для випадку тупокутного трикутника аналогічне. ▲

Звернемо увагу на те, що ми не лише встановили факт належності точок O, M, H одній прямій, а й довели рівність

$$HM = 2MO,$$

яка є ще однією властивістю чудових точок трикутника.

ВПРАВИ

1. Дано дві точки, які лежать в одній півплощині відносно даної прямої. Побудуйте трикутник, одна зі сторін якого лежить на даній прямій, а центр описаного кола та ортоцентр є двома даними точками.

2. Побудуйте трикутник ABC за трьома даними точками: вершиною A, ортоцентром H і центром O описаного кола.

3. Бісектриса кута A гострокутного трикутника ABC перпендикулярна до прямої Ейлера цього трикутника. Доведіть, що $\angle A = 60°$.

Вказівка. Доведіть, що $HA = OA$.

ЗАВДАННЯ № 2 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. На рисунку 169 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = \frac{1}{2}A_1A_3$. Звідси випливає, що:

А) $A_1A_2 = B_1B_2$;
В) $A_1A_3 = B_1B_3$;
Б) $B_1B_3 = 2B_2B_3$;
Г) $A_1A_2 = B_2B_3$.

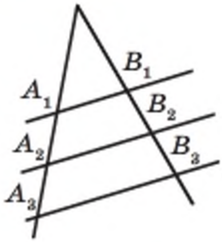


Рис. 169

2. Якщо медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M, то яка з даних рівностей є правильною для будь-якого трикутника ABC?

А) $AM : MB_1 = BM : MA_1$;
Б) $MA_1 = \frac{1}{3}MB$;
В) $MA_1 = \frac{1}{2}AM$;
Г) $MB_1 = \frac{1}{2}BB_1$.

3. На рисунку 170 $A_1C_1 \parallel AC$. Тоді:

А) $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BA_1}{A_1A}$;
В) $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$;
Б) $\frac{BA_1}{AB} = \frac{CB}{BC_1}$;
Г) $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BA_1}{AB}$.

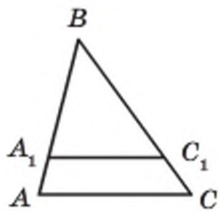


Рис. 170

4. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 8$ см, $BC = 4$ см, $AC = 9$ см. У якому відношенні центр вписаного кола ділить бісектрису BB_1, рахуючи від вершини B?

А) 2 : 3;
В) 4 : 3;
Б) 2 : 1;
Г) 3 : 4.

5. Через точку M сторони BC паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка паралельна стороні CD. Ця пряма перетинає відрізки BD і AD у точках K і F відповідно. Відомо, що $BM : FD = 2 : 1$. Чому дорівнює відношення $KD : BK$?

А) 2 : 1;
В) 1 : 3;
Б) 1 : 2;
Г) 4 : 1.

6. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 14$ см, $BC = 21$ см. На стороні AB на відстані 4 см від вершини A позначено точку D, через яку проведено пряму, паралельну стороні AC. Знайдіть відрізки, на які ця пряма ділить сторону BC.

А) 12 см, 9 см;
В) 15 см, 6 см;
Б) 18 см, 3 см;
Г) 14 см, 7 см.

7. Відрізок MN проведено через точку перетину діагоналей нерівнобедреної трапеції $ABCD$ паралельно її основам (рис. 171). Скільки пар подібних трикутників зображено на рисунку?
А) 4; Б) 6; В) 3; Г) 5.

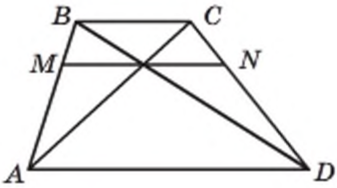


Рис. 171

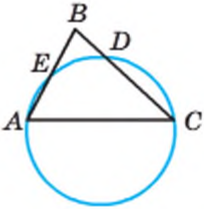


Рис. 172

8. Через вершини A і C нерівнобедреного трикутника ABC проведено коло, яке перетинає сторони BA і BC у точках E і D відповідно (рис. 172). Яка з даних рівностей є правильною?
А) $\frac{BC}{BD}=\frac{BA}{BC}$; Б) $\frac{BE}{BC}=\frac{BD}{BA}$; В) $\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BC}$; Г) $\frac{BD}{DE}=\frac{BC}{AC}$.

9. Хорда AB перетинає хорду CD у її середині та ділиться цією точкою на відрізки, які дорівнюють 4 см і 25 см. Знайдіть хорду CD.
А) 10 см; В) 100 см;
Б) 5 см; Г) 20 см.

10. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 10$ см, $BC = 4$ см, $CA = 8$ см. На стороні AC позначено точку D таку, що $AD = 6$ см. Знайдіть відрізок BD.
А) 5 см; В) 6 см;
Б) 4 см; Г) 7 см.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Теорема Фалеса

Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на другій його стороні.

Теорема про пропорційні відрізки

Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, що утворилися на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам, що утворилися на другій стороні кута.

Властивість медіан трикутника

Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини трикутника.

Властивість бісектриси трикутника

Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.

Подібні трикутники

Два трикутники називають подібними, якщо їхні кути відповідно рівні та сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам другого трикутника.

Лема про подібні трикутники

Пряма, яка паралельна стороні трикутника та перетинає дві інших його сторони, відтинає від даного трикутника йому подібний.

Перша ознака подібності трикутників: за двома кутами

Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

Друга ознака подібності трикутників: за двома сторонами та кутом між ними

Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника та кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

Третя ознака подібності трикутників: за трьома сторонами

Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

§3 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

У цьому параграфі ви ознайомитеся зі знаменитою теоремою Піфагора.

Ви навчитеся за відомими сторонами та кутами прямокутного трикутника знаходити його невідомі сторони та кути.

15. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику

На рисунку 173 відрізок CD — висота прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$).

Відрізки AD і DB називають **проекціями** катетів AC і CB відповідно на гіпотенузу.

Лема. ***Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить трикутник на два подібних прямокутних трикутники, кожен з яких подібний даному трикутнику.***

Доведіть лему самостійно.

Теорема 15.1. ***Квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проекцій катетів на гіпотенузу. Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи та проекції цього катета на гіпотенузу.***

Доведення. На рисунку 173 відрізок CD — висота прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$). Доведемо, що:

$$CD^2 = AD \cdot DB,\ AC^2 = AB \cdot AD,\ BC^2 = AB \cdot DB.$$

Оскільки $\Delta CBD \sim \Delta ACD$, то $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$. Звідси $CD^2 = AD \cdot DB$.

Оскільки $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, то $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$. Звідси $AC^2 = AB \cdot AD$.

Оскільки $\Delta ABC \sim \Delta CBD$, то $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC}$. Звідси $BC^2 = AB \cdot DB$. ▲

Якщо довжини відрізків на рисунку 173 позначити так: $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $CD = h_c$, $AD = b_c$, $DB = a_c$, то доведені співвідношення набувають вигляду:

$$\boxed{h_c^2 = a_c b_c,\ a^2 = a_c c,\ b^2 = b_c c}$$

Ці рівності називають **метричними співвідношеннями в прямокутному трикутнику.**

Приклад. Дано два відрізки, довжини яких дорівнюють a і b (рис. 174). Побудуйте третій відрізок, довжина якого дорівнює $\sqrt{ab}$.

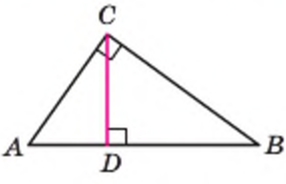


Рис. 173

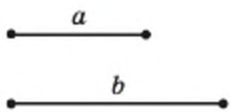


Рис. 174

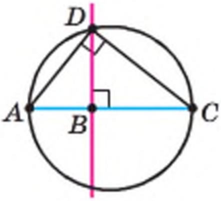


Рис. 175

Розв'язання. Розглянемо трикутник ADC ($\angle ADC = 90°$), у якому відрізок DB є висотою (рис. 175). Маємо: $DB = \sqrt{AB \cdot BC}$. Якщо позначити $AB = a$, $BC = b$, то $DB = \sqrt{ab}$.

Проведений аналіз показує, як провести побудову.

На довільній прямій позначимо точку A та відкладемо послідовно відрізки AB і BC так, що $AB = a$, $BC = b$. Побудуємо коло з діаметром AC. Через точку B проведемо пряму, перпендикулярну до прямої AC (рис. 175). Нехай D — одна з точок перетину прямої та кола.

Доведемо, що відрізок DB шуканий. Справді, $\angle ADC = 90°$ як вписаний кут, що спирається на діаметр AC. Тоді за теоремою 15.1 $DB^2 = AB \cdot BC$, тобто $DB = \sqrt{ab}$. ●

1. Якою формулою пов'язані висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, і проекції катетів на гіпотенузу?
2. Якою формулою пов'язані катет, гіпотенуза та проекція цього катета на гіпотенузу?

ВПРАВИ

510.° Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 2 см і 18 см.

511.° Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а його проекція на гіпотенузу — 4 см. Знайдіть гіпотенузу.

512.° Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки завдовжки 5 см і 20 см. Знайдіть катети трикутника.

513.° Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює 48 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу — 36 см. Знайдіть сторони даного трикутника.

514.• Знайдіть катети прямокутного трикутника, висота якого ділить гіпотенузу на відрізки, один з яких на 3 см менший від цієї висоти, а другий — на 4 см більший за висоту.

515.• Знайдіть менший катет прямокутного трикутника та його висоту, проведену до гіпотенузи, якщо більший катет менший від гіпотенузи на 10 см і **більший за свою проекцію на гіпотенузу на 8 см.**

516.• Перпендикуляр, опущений із точки перетину діагоналей ромба на його сторону, дорівнює 2 см і ділить цю сторону на відрізки, які відносяться як 1 : 4. Знайдіть діагоналі ромба.

517.• Перпендикуляр, опущений із точки кола на діаметр, ділить його на два відрізки, один з яких дорівнює 4 см. Знайдіть радіус кола, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 10 см.

518.• Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 25 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.

519.•• Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, належить її більшій основі. Знайдіть радіус цього кола, якщо діагональ трапеції дорівнює 20 см, а проекція діагоналі на більшу основу — 16 см.

520.•• Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, яка дорівнює 12 см. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює 10 см.

521.•• Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, якщо її діагональ перпендикулярна до бічної сторони, а різниця квадратів основ дорівнює 25 см.

522.•• У прямокутну трапецію вписано коло. Точка дотику ділить більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайдіть периметр трапеції.

523.•• У рівнобічну трапецію вписано коло. Точка дотику ділить бічну сторону на відрізки завдовжки 3 см і 27 см. Знайдіть висоту трапеції.

524.•• Дано два відрізки, довжини яких дорівнюють a і b. Побудуйте відрізок завдовжки $\sqrt{\frac{ab}{2}}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

525. Периметр паралелограма більший за одну зі сторін на 35 см і більший за другу сторону на 28 см. Знайдіть сторони паралелограма.

526. На сторонах AB, BC, CD і AD квадрата $ABCD$ позначили відповідно точки M, N, K і E так, що чотирикутник $MNKE$ є прямокутником, сторони якого паралельні діагоналям квадрата. Знайдіть периметр прямокутника $MNKE$, якщо діагональ квадрата $ABCD$ дорівнює 7 см.

527. У коло вписано трапецію, діагональ якої ділить кут при більшій основі навпіл. Знайдіть дуги, на які ділять коло вершини трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 74°.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

528. У вписаного в коло многокутника вибрали вершину та провели всі діагоналі, яким ця вершина належить. Доведіть, що серед трикутників, що утворилися, не більше ніж один є гострокутним.

16. Теорема Піфагора

Теорема 16.1 (теорема Піфагора). ***У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.***

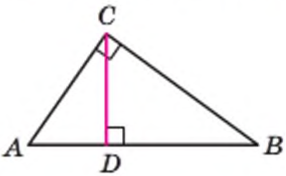


Рис. 176

Доведення. ⊙ На рисунку 176 зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$). Доведемо, що $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Проведемо висоту CD. Застосувавши теорему 15.1 для катетів AC і BC, отримуємо: $AC^2 = AB \cdot AD$ і $BC^2 = AB \cdot DB$. Додавши почленно ці рівності, отримаємо: $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB$.

Далі маємо: $AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB) = AB^2$. ▲

Якщо в прямокутному трикутнику довжини катетів дорівнюють a і b, а довжина гіпотенузи дорівнює c, то теорему Піфагора можна виразити такою рівністю:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Теорема Піфагора дає змогу за двома сторонами прямокутного трикутника знайти його третю сторону:

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2};\ a = \sqrt{c^2 - b^2};\ b = \sqrt{c^2 - a^2}}$$

З рівності $c^2 = a^2 + b^2$ також випливає, що $c^2 > a^2$ і $c^2 > b^2$, звідси $c > a$ і $c > b$, тобто ***гіпотенуза більша за будь-який із катетів***[1].

---

[1] Іншим способом цей факт було встановлено в курсі геометрії 7 класу.

1. Сформулюйте теорему Піфагора.
2. Запишіть теорему Піфагора, якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b, а гіпотенуза дорівнює c.
3. Як за двома сторонами прямокутного трикутника знайти його третю сторону?
4. Яка зі сторін прямокутного трикутника є найбільшою?

ВПРАВИ

529.° Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: 1) 3 см і 4 см; 2) 6 см і 9 см.

530.° Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза та другий катет відповідно дорівнюють: 1) 15 см і 12 см; 2) 7 см і $\sqrt{13}$ см.

531.° Нехай a і b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза. Знайдіть невідому сторону трикутника, якщо: 1) $a = 5$ см, $b = 12$ см; 2) $a = 1$ см, $c = 2$ см; 3) $b = 3$ см, $c = \sqrt{90}$ см.

532.° Сторони прямокутника дорівнюють 9 см і 40 см. Чому дорівнює його діагональ?

533.° Одна зі сторін прямокутника дорівнює 7 см, а діагональ — 25 см. Знайдіть сусідню з даною сторону прямокутника.

534.° Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 29 см, а висота, проведена до основи, — 21 см. Чому дорівнює основа трикутника?

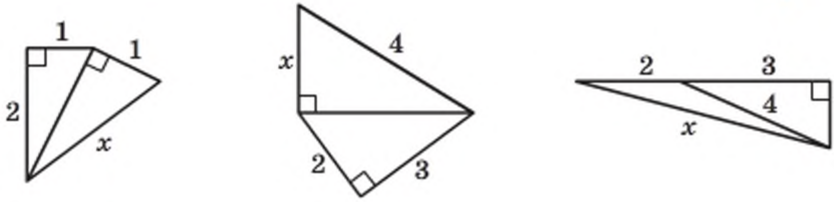
535.° Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 35 см, а його основа — 24 см. Чому дорівнює бічна сторона трикутника?

536.° У колі, радіус якого дорівнює 10 см, проведено хорду завдовжки 16 см. Знайдіть відстань від центра кола до даної хорди.

537.° Знайдіть периметр ромба, діагоналі якого дорівнюють 24 см і 32 см.

538.° Сторона ромба дорівнює 26 см, а одна з діагоналей — 48 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

539.° Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 21 см, а другий катет на 7 см менший від гіпотенузи. Знайдіть периметр трикутника.



а *б* *в*

Рис. 177

540.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 26 см, а катети відносяться як 5 : 12. Знайдіть катети цього трикутника.

541.• Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до нього, — 5 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

542.• У трикутнику ABC відомо, що $BC = 20$ см, висота BD ділить сторону AC на відрізки $AD = 5$ см і $CD = 16$ см. Знайдіть сторону AB.

543.• У трикутнику ABC відомо, що $AB = 17$ см, $BC = 9$ см, кут C тупий, висота AD дорівнює 8 см. Знайдіть сторону AC.

544.• Знайдіть висоту рівностороннього трикутника зі стороною a.

545.• Знайдіть діагональ квадрата зі стороною a.

546.• Знайдіть сторону рівностороннього трикутника, висота якого дорівнює h.

547.• Знайдіть катети прямокутного рівнобедреного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює c.

548.• Знайдіть довжину невідомого відрізка x на рисунку 177 (розміри дано в сантиметрах).

549.• Знайдіть довжину невідомого відрізка x на рисунку 178 (розміри дано в сантиметрах).

550.• У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 8 см. Вона ділить бічну сторону на два відрізки, один з яких, прилеглий до вершини рівнобедреного трикутника, дорівнює 6 см. Знайдіть основу трикутника.

а *б*

Рис. 178

551.° Висота рівнобедреного трикутника, опущена на бічну сторону, ділить її на відрізки завдовжки 4 см і 16 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника.

552.° Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 24 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 13 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

553.° Висота рівнобедреного гострокутного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 8 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

554.° Основа рівнобедреного трикутника на 2 см більша за бічну сторону. Знайдіть сторони трикутника, якщо висота, проведена до основи, дорівнює 8 см.

555.° Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 90 см, а висота, проведена до основи, — 15 см. Знайдіть сторони трикутника.

556.° Сторони тупокутного трикутника дорівнюють 29 см, 25 см і 6 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до меншої сторони.

557.° Сторони трикутника дорівнюють 36 см, 29 см і 25 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до більшої сторони.

558.° Із точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких відносяться як 5 : 6, а проекції цих похилих на пряму дорівнюють 7 см і 18 см. Знайдіть відстань від даної точки до цієї прямої.

559.° Із точки до прямої проведено дві похилі завдовжки 15 см і 27 см. Сума довжин проекцій цих похилих на пряму дорівнює 24 см. Знайдіть проекцію кожної похилої.

560.° Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить один із його катетів на відрізки 2 см і 6 см. Знайдіть сторони трикутника.

561.° Знайдіть сторони паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 16 см і 20 см, якщо одна з діагоналей перпендикулярна до його сторони.

562.° Знайдіть периметр прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 30 см і 40 см.

563.° Знайдіть периметр прямокутного трикутника, якщо бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки завдовжки 24 см і 51 см.

564.$^{\bullet}$ (*Старовинна арабська задача.*) На протилежних берегах річки ростуть одна проти одної дві пальми. Висота однієї з них дорівнює 30 ліктів, висота другої — 20 ліктів, а відстань між прикорнями пальм — 50 ліктів. На вершечку кожної пальми сидить птах. Раптом обидва птахи побачили рибу, яка з'явилася на поверхні води між пальмами. Вони злетіли з пальм одночасно і, рухаючись з однаковою швидкістю, одночасно схопили рибу. На якій відстані від прикорня вищої пальми з'явилася риба?

565.$^{\bullet\bullet}$ Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 20 см, а діагональ є бісектрисою тупого кута трапеції. Знайдіть цю діагональ.

566.$^{\bullet\bullet}$ Основи прямокутної трапеції дорівнюють 18 см і 12 см, а діагональ є бісектрисою гострого кута трапеції. Знайдіть цю діагональ.

567.$^{\bullet\bullet}$ У колі по різні боки від його центра проведено дві паралельні хорди завдовжки 16 см і 32 см. Відстань між хордами дорівнює 16 см. Знайдіть радіус кола.

568.$^{\bullet\bullet}$ У колі по один бік від його центра проведено дві паралельні хорди завдовжки 48 см і 24 см. Відстань між хордами дорівнює 12 см. Знайдіть радіус кола.

569.$^{\bullet\bullet}$ Радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, дорівнює 12 см, а відстань від вершини рівнобедреного трикутника до центра кола — 20 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

570.$^{\bullet\bullet}$ Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить її більшу основу на відрізки завдовжки 20 см і 25 см, рахуючи від вершини прямого кута. Обчисліть периметр трапеції.

571.$^{\bullet\bullet}$ Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить її меншу основу на відрізки завдовжки 6 см і 3 см, рахуючи від вершини прямого кута. Обчисліть периметр трапеції.

572.$^{\bullet\bullet}$ Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 24 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини меншого гострого кута.

573.$^{\bullet\bullet}$ Медіани AM і CK трикутника ABC перпендикулярні. Знайдіть сторони трикутника, якщо $AM = 9$ см і $CK = 12$ см.

574.$^{\bullet\bullet}$ У трикутнику ABC медіани BM і CK перпендикулярні та перетинаються в точці O. Знайдіть відрізок AO, якщо $BM = 36$ см і $CK = 15$ см.

575.•• (*Задача Бхаскари*[1].) Над озером тихим, з півфута[2] заввишки
Підносилась лотоса квітка.
І одного разу поривчастий вітер
Відніс її раптом убік.
Нема більше квітки над тою водою.
Натрапив на неї рибалка завзятий
В двох футах від місця, де та росла.
Отож пропоную тобі запитання:
Яка ж того озера тут глибина?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

576. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $BC = 5$ см, $AC = 12$ см. Знайдіть відношення:
1) катета, прилеглого до кута A, і гіпотенузи;
2) катета, протилежного куту A, і гіпотенузи;
3) катета, прилеглого до кута B, і гіпотенузи;
4) катета, прилеглого до кута B, і катета, протилежного цьому куту.

577. На одній стороні кута A позначили точки B, C і D так, що $AB = BC = 5$ см, $CD = 10$ см (рис. 179). Із точок B, C і D опущено перпендикуляри BE, CF і DM на другу сторону кута A, причому $AE = 4$ см. Знайдіть відношення катета, прилеглого до кута A, і гіпотенузи:
1) у трикутнику AEB;
2) у трикутнику AFC;
3) у трикутнику AMD.

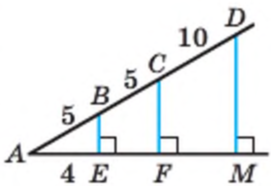


Рис. 179

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

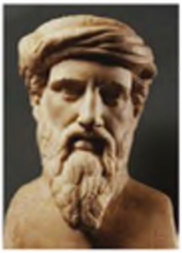
578. У квадраті зі стороною 1 м довільно позначили 51 точку. Доведіть, що серед цих точок існують три, які можна накрити квадратом зі стороною 20 см.

---

[1] Бхáскара (1114–1185) — індійський математик і астроном.
[2] 1 фут = 30,48 см.

ПІФАГОР

Ви вивчили знамениту теорему, яка носить ім'я видатного давньогрецького вченого Піфагора.



Піфагор
(VI ст. до н. е.)

Дослідження стародавніх текстів свідчать, що твердження цієї теореми було відоме задовго до Піфагора. Чому ж її приписують Піфагорові? Скоріш за все тому, що саме Піфагор винайшов доведення цього твердження.

Про життя Піфагора мало що відомо достовірно. Він народився на грецькому острові Самос. За легендами, він багато подорожував, набуваючи знань і мудрощів.

Після того як Піфагор оселився в грецькій колонії Кротон (на півдні Італії), навколо нього сформувалося численне коло відданих учнів та однодумців. Так виник піфагорійський союз (або кротонське братство). Вплив цього союзу був настільки значним, що навіть кілька століть по смерті Піфагора багато великих математиків Стародавнього світу називали себе піфагорійцями.

17. Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника

На рисунку 180 зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Нагадаємо, що катет BC називають **протилежним** куту A, а катет AC — **прилеглим** до цього кута.

Рис. 180

Означення. Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

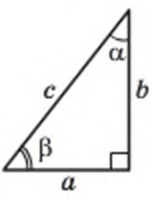


Рис. 181

Синус кута A позначають так: $\sin A$ (читають: «синус A»). Для гострих кутів A і B прямокутного трикутника ABC маємо:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \ \sin B = \frac{AC}{AB}.$$

Для прямокутного трикутника, зображеного на рисунку 181, можна записати: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\sin \beta = \frac{b}{c}$.

Розглянемо прямокутний рівнобедрений трикутник ABC ($\angle C = 90°$), у якому $AC = BC = a$ (рис. 182).

Маємо: $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

За означенням $\sin A = \frac{BC}{AB}$, звідси $\sin A = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Бачимо, що синус гострого кута прямокутного рівнобедреного трикутника не залежить від розмірів трикутника, бо отримане значення синуса однакове для всіх значень a. Оскільки $\angle A = 45°$, то $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Цей запис не пов'язують із конкретним прямокутним рівнобедреним трикутником.

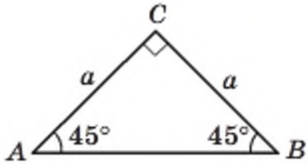


Рис. 182

Узагалі, *якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то синуси цих кутів рівні*.

Справді, ці прямокутні трикутники є подібними за першою ознакою подібності трикутників. Тому відношення катета до гіпотенузи одного трикутника дорівнює відношенню відповідного катета до гіпотенузи другого трикутника.

Наприклад, запис $\sin 17°$ можна віднести до всіх кутів, градусні міри яких дорівнюють $17°$. Значення цього синуса можна обчислити один раз, вибравши довільний прямокутний трикутник з гострим кутом $17°$.

Отже, ***синус гострого кута залежить тільки від величини цього кута***.

Означення. Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Косинус кута A позначають так: $\cos A$ (читають: «косинус A»).

Для гострих кутів A і B прямокутного трикутника ABC (рис. 180) можна записати:

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \ \cos B = \frac{BC}{AB}.$$

Зазначимо, що катет прямокутного трикутника менший від його гіпотенузи, а тому *синус і косинус гострого кута менші від* 1.

Означення. Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.

Тангенс кута A позначають так: $\operatorname{tg} A$ (читають: «тангенс A»).

Для гострих кутів A і B прямокутного трикутника ABC (рис. 180) можна записати:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}, \ \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}.$$

Означення. Котангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до протилежного.

Котангенс кута A позначають так: $\mathrm{ctg}\, A$ (читають: «котангенс A»).

Для гострих кутів A і B прямокутного трикутника ABC (рис. 180) можна записати:

$$\mathrm{ctg}\, A = \frac{AC}{BC},\ \mathrm{ctg}\, B = \frac{BC}{AC}.$$

Для прямокутного трикутника, зображеного на рисунку 181, записують: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$, $\mathrm{ctg}\,\beta = \frac{a}{b}$.

Як було встановлено, синус кута залежить тільки від величини кута. Міркуючи аналогічно, можна дійти такого висновку:

косинус, тангенс і котангенс гострого кута залежать тільки від величини цього кута.

Узагалі, кожному гострому куту α відповідає єдине число — значення синуса (косинуса, тангенса, котангенса) цього кута. Тому залежність значення синуса (косинуса, тангенса, котангенса) гострого кута від величини цього кута є функціональною. Функцію, яка відповідає цій залежності, називають **тригонометричною**. Так, $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $y = \mathrm{tg}\,\alpha$, $y = \mathrm{ctg}\,\alpha$ — тригонометричні функції, аргументами яких є гострі кути.

З давніх часів люди складали таблиці наближених значень тригонометричних функцій з деяким кроком, один раз обчислюючи значення тригонометричних функцій для конкретного аргументу. Потім ці таблиці широко використовували в багатьох галузях науки й техніки.

У наш час значення тригонометричних функцій гострих кутів зручно знаходити за допомогою мікрокалькулятора.

Тангенс і котангенс гострого кута можна виразити через синус і косинус цього самого кута. Розглянемо прямокутний трикутник (рис. 181). Запишемо: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha$, $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\,\alpha$. Отже, одержуємо такі формули:

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Зауважимо, що тангенс і котангенс одного й того самого гострого кута є взаємно оберненими числами, тобто має місце рівність:

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1}$$

За теоремою Піфагора $a^2+b^2=c^2$. Обидві частини цієї рівності поділимо на c^2. Маємо: $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$. Ураховуючи, що $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\cos\alpha=\frac{b}{c}$, отримаємо:

$$(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1.$$

Прийнято записувати: $(\sin\alpha)^2=\sin^2\alpha$, $(\cos\alpha)^2=\cos^2\alpha$. Звідси маємо:

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$$

Цю формулу називають **основною тригонометричною тотожністю.**

Зазначимо, що $\cos\beta=\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\sin\beta=\cos\alpha=\frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$. Оскільки $\beta=90°-\alpha$, то одержуємо такі формули:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(90°-\alpha)&=\sin\alpha\\ \sin(90°-\alpha)&=\cos\alpha\\ \operatorname{tg}(90°-\alpha)&=\operatorname{ctg}\alpha\\ \operatorname{ctg}(90°-\alpha)&=\operatorname{tg}\alpha\end{aligned}}$$

Ми вже знаємо, що $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Знайдемо тепер $\cos 45°$, $\operatorname{tg} 45°$ і $\operatorname{ctg} 45°$. Маємо:

$$\cos 45°=\sin(90°-45°)=\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45°=\frac{\sin 45°}{\cos 45°}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1,\ \operatorname{ctg} 45°=\frac{1}{\operatorname{tg} 45°}=1.$$

Знайдемо синус, косинус, тангенс і котангенс кутів 30° і 60°.

Розглянемо прямокутний трикутник ABC, у якому $\angle C=90°$, $\angle A=30°$ (рис. 183).

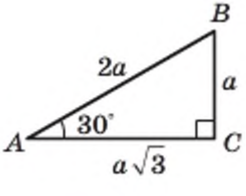


Рис. 183

Нехай $BC=a$. Тоді за властивістю катета, який лежить проти кута 30°, отримуємо, що $AB=2a$. Із теореми Піфагора випливає, що $AC^2=AB^2-BC^2$. Маємо: $AC^2=4a^2-a^2=3a^2$; $AC=a\sqrt{3}$. Звідси знаходимо:

$$\sin 30°=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2},\ \cos 30°=\frac{a\sqrt{3}}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30°=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \operatorname{ctg} 30°=\frac{1}{\operatorname{tg} 30°}=\sqrt{3}.$$

Оскільки $60° = 90° - 30°$, то отримуємо:

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{tg}\, 60° = \mathrm{ctg}\, 30° = \sqrt{3},\ \mathrm{ctg}\, 60° = \mathrm{tg}\, 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Значення синуса, косинуса, тангенса й котангенса для кутів 30°, 45° і 60° корисно запам'ятати.

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

?

1. Що називають синусом гострого кута прямокутного трикутника?
2. Що називають косинусом гострого кута прямокутного трикутника?
3. Що називають тангенсом гострого кута прямокутного трикутника?
4. Що називають котангенсом гострого кута прямокутного трикутника?
5. Від чого залежать синус, косинус, тангенс і котангенс кута?
6. Як пов'язані між собою $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$?
7. Як пов'язані між собою $\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$?
8. Як пов'язані між собою $\mathrm{tg}\,\alpha$ і $\mathrm{ctg}\,\alpha$?
9. Як пов'язані між собою $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$?
10. Чому дорівнює $\sin(90° - \alpha)$? $\cos(90° - \alpha)$? $\mathrm{tg}(90° - \alpha)$? $\mathrm{ctg}(90° - \alpha)$?
11. Чому дорівнює $\sin 45°$? $\cos 45°$? $\mathrm{tg}\, 45°$? $\mathrm{ctg}\, 45°$?
12. Чому дорівнює $\sin 30°$? $\cos 30°$? $\mathrm{tg}\, 30°$? $\mathrm{ctg}\, 30°$?
13. Чому дорівнює $\sin 60°$? $\cos 60°$? $\mathrm{tg}\, 60°$? $\mathrm{ctg}\, 60°$?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

579.• Побудуйте кут:

1) тангенс якого дорівнює $\frac{4}{5}$; 2) синус якого дорівнює $\frac{2}{3}$.

580.• Побудуйте кут:

1) косинус якого дорівнює $\frac{1}{4}$; 2) котангенс якого дорівнює $\frac{1}{2}$.

ВПРАВИ

581.° Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 8 см і 10 см. Знайдіть:

1) синус кута, який лежить проти меншого катета;
2) косинус кута, який прилягає до більшого катета;
3) тангенс кута, протилежного меншому катету;
4) котангенс кута, прилеглого до більшого катета.

582.° Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 2 см. Знайдіть:

1) тангенс кута, прилеглого до більшого катета;
2) синус кута, протилежного меншому катету;
3) косинус кута, прилеглого до більшого катета;
4) котангенс кута, протилежного більшому катету.

583.° Знайдіть значення виразу:

1) $\cos^2 45° + \mathrm{tg}^2\, 60°$; 2) $2\cos^2 60° - \sin^2 30° + \sin 60° \,\mathrm{ctg}\, 60°$.

584.° Знайдіть значення виразу:

1) $\cos^2 30° - \sin^2 45°$; 2) $3\,\mathrm{tg}^2\, 30° + 4\,\mathrm{tg}\, 45° + \cos 30° \,\mathrm{ctg}\, 30°$.

585.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $BC = 77$ см, $AB = 125$ см. Знайдіть синуси гострих кутів трикутника.

586.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $BC = 41$ см, $AC = 20$ см. Знайдіть косинуси гострих кутів трикутника.

587.• Знайдіть $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ і $\mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

588.• Знайдіть $\cos\beta$, $\mathrm{tg}\,\beta$ і $\mathrm{ctg}\,\beta$, якщо $\sin\beta = \frac{4}{5}$.

589.• Синус гострого кута прямокутного трикутника дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс другого гострого кута цього трикутника.

590.• Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона — 13 см. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кута між бічною стороною трикутника та висотою, проведеною до його основи.

591.° Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а висота, проведена до основи, — 8 см. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кута при основі трикутника.

592.° Знайдіть кути ромба, діагоналі якого дорівнюють 4 см і $4\sqrt{3}$ см.

593.° Знайдіть кути між діагоналлю прямокутника та його сторонами, довжини яких дорівнюють $\sqrt{3}$ см і 3 см.

594.° У трапеції $ABCD$ відомо, що $AB = CD = 9$ см, $BC = 10$ см, $AD = 14$ см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута A трапеції.

595.° У прямокутній трапеції $ABCD$ відомо, що $BC \parallel AD$, $\angle A = 90°$, $AB = 4$ см, $BC = 8$ см, $AD = 12$ см. Знайдіть кути трапеції.

596.° Доведіть, що тангенси гострих кутів прямокутного трикутника є взаємно оберненими числами.

597.° Доведіть тотожність:

1) $1+\mathrm{tg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; 2) $1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

598.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin^2 18° + \sin^2 72°$; 2) $\cos^3 36° - \sin^3 54°$.

599.•• Катети прямокутного трикутника дорівнюють 30 см і 40 см. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кута між медіаною та висотою, проведеними до гіпотенузи.

600.•• У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, BD і AM — висоти трикутника, $BD : AM = 3 : 1$. Знайдіть $\cos C$.

601.•• У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, BD і CK — висоти трикутника, $\cos A = \dfrac{3}{7}$. Знайдіть відношення $CK : BD$.

602.• Доведіть, що кути ABC і DEF, зображені на рисунку 184, рівні.

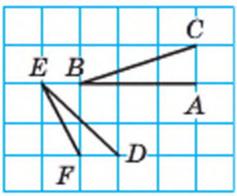


Рис. 184

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

603. Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці M, $AB = 6$ см. Знайдіть радіус кола, яке проходить через точки A, B і M.

604. Хорди AB і BC кола перпендикулярні, а відстань між їхніми серединами дорівнює 12 см. Знайдіть радіус кола.

605. У трикутнику ABC відомо, що BK — висота, AM — бісектриса, $BK = 26$ см, $AB : AC = 6 : 7$. Із точки M опущено перпендикуляр MD на сторону AC. Знайдіть відрізок MD.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

606. Дано два круги, які не мають спільних точок. Чи існує точка, що не належить жодному з кругів, така, що будь-яка пряма, яка проходить через цю точку, перетинає хоча б один із цих кругів?

18. Розв'язування прямокутних трикутників

На рисунку 185 зображено прямокутний трикутник з гострими кутами α і β, катети якого дорівнюють a і b, а гіпотенуза дорівнює c.

За означенням синуса гострого кута прямокутного трикутника $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$. Звідси $a = c \sin\alpha$, $b = c \sin\beta$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на синус кута, протилежного цьому катету.***

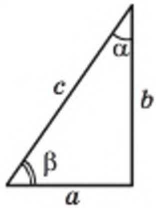


Рис. 185

За означенням косинуса гострого кута прямокутного трикутника $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$. Звідси $b = c \cos\alpha$, $a = c \cos\beta$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на косинус кута, прилеглого до цього катета.***

За означенням тангенса гострого кута прямокутного трикутника $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$. Звідси $a = b \operatorname{tg}\alpha$, $b = a \operatorname{tg}\beta$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює добутку другого катета на тангенс кута, протилежного першому катету.***

За означенням котангенса гострого кута прямокутного трикутника $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$. Звідси $b = a \operatorname{ctg}\alpha$, $a = b \operatorname{ctg}\beta$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює добутку другого катета на котангенс кута, прилеглого до першого катета.***

З рівностей $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ і $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ отримуємо: $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ і $c = \frac{b}{\cos\alpha}$.

Отже, ***гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на синус протилежного йому кута;***

гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на косинус прилеглого до нього кута.

Розв'язати прямокутний трикутник означає знайти його сторони й кути за відомими сторонами та кутами.

Наведені вище правила дають змогу розв'язувати прямокутний трикутник за однією стороною та одним гострим кутом.

У задачах на розв'язування прямокутних трикутників, якщо не обумовлено інше, прийнято такі позначення (див. рис. 185): c — гіпотенуза, a і b — катети, α і β — кути, протилежні катетам a і b відповідно.

Задача 1. Розв'яжіть прямокутний трикутник за катетом і гострим кутом: $a = 14$ см, $\alpha = 38°$. (Значення тригонометричних функцій знайдіть за допомогою мікрокалькулятора та округліть їх до сотих. Значення довжин сторін округліть до десятих.)

Розв'язання. Маємо:

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 38° = 52°$;

$b = a \operatorname{tg} \beta = 14 \operatorname{tg} 52° \approx 14 \cdot 1{,}28 \approx 17{,}9$ (см);

$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{14}{\sin 38°} \approx \frac{14}{0{,}62} \approx 22{,}6$ (см).

Відповідь: $c \approx 22{,}6$ см, $b \approx 17{,}9$ см, $\beta = 52°$.

Зазначимо, що цю задачу можна було розв'язати і в інший спосіб: наприклад, знайти гіпотенузу, використовуючи теорему Піфагора.

Задача 2. Розв'яжіть прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою: $a = 26$ см, $c = 34$ см.

Розв'язання. Маємо: $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{26}{34} = 0{,}7647\ldots$.

Обчислюємо кут α за допомогою мікрокалькулятора: $\alpha \approx 50°$. Тоді $\beta \approx 40°$.

$$b = c \sin \beta \approx 34 \sin 40° \approx 34 \cdot 0{,}643 \approx$$
$$\approx 21{,}862 \approx 21{,}9 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $b \approx 21{,}9$ см, $\alpha \approx 50°$, $\beta \approx 40°$.

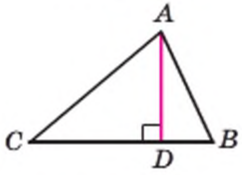


Рис. 186

Задача 3. Висота AD трикутника ABC (рис. 186) ділить його сторону BC на відрізки BD і CD такі, що $BD = 2\sqrt{3}$ см, $CD = 8$ см. Знайдіть сторони AB і AC, якщо $\angle B = 60°$.

Розв'язання. Із трикутника ADB ($\angle ADB = 90°$) отримуємо:

$$AD = BD \text{ tg } B = 2\sqrt{3} \text{ tg } 60° = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \text{ (см)};$$

$$AB = \frac{BD}{\cos B} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 60°} = 2\sqrt{3} : \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Із трикутника ADC ($\angle ADC = 90°$) отримуємо:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $4\sqrt{3}$ см, 10 см.

Задача 4. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, кут при основі дорівнює α. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

Розв'язання. У трикутнику ABC (рис. 187) $AB = BC = b$, $\angle BAC = \alpha$. Проведемо висоту BD.

Із трикутника ADB ($\angle ADB = 90°$) отримуємо: $AD = AB \cos \angle BAD = b \cos \alpha$.

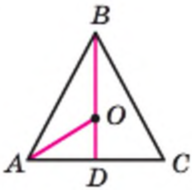


Рис. 187

Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC. Отже, точка O належить висоті BD і бісектрисі AO кута BAC. Оскільки $OD \perp AC$, то вписане коло дотикається до сторони AC у точці D. Таким чином, OD — радіус вписаного кола. Відрізок AO — бісектриса кута BAD, тому $\angle OAD = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{\alpha}{2}$.

Із трикутника ADO ($\angle ADO = 90°$) отримуємо:

$$OD = AD \text{ tg } \angle OAD = b \cos \alpha \text{ tg } \frac{\alpha}{2}.$$

Відповідь: $b \cos \alpha \text{ tg } \frac{\alpha}{2}$.

1. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомо гіпотенузу та кут, протилежний цьому катету?
2. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомо гіпотенузу та кут, прилеглий до цього катета?
3. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомо другий катет і кут, протилежний шуканому катету?
4. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомо другий катет і кут, прилеглий до шуканого катета?
5. Як можна знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомо катет і протилежний цьому катету кут?
6. Як можна знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомо катет і прилеглий до цього катета кут?

ВПРАВИ

607.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$. Знайдіть сторону:

1) BC, якщо $AB = 12$ см, $\sin A = \frac{3}{4}$;
2) AC, якщо $AB = 21$ см, $\cos A = 0{,}4$;
3) AC, якщо $BC = 4$ см, $\operatorname{tg} A = 1{,}6$;
4) AB, якщо $BC = 14$ см, $\cos B = \frac{7}{9}$;
5) AB, якщо $AC = 3{,}2$ см, $\sin B = 0{,}16$;
6) BC, якщо $AC = 2{,}3$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{1}{2}$.

608.° У трикутнику DEF відомо, що $\angle E = 90°$. Знайдіть сторону:

1) DE, якщо $DF = 18$ см, $\cos D = \frac{2}{9}$;
2) DF, якщо $EF = 3{,}5$ см, $\cos F = 0{,}7$;
3) EF, якщо $DE = 2{,}4$ см, $\operatorname{tg} D = \frac{11}{12}$.

609.° У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 17 см, а синус одного з гострих кутів — $\frac{8}{17}$. Знайдіть катети трикутника.

610.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а косинус одного з гострих кутів — 0,8. Знайдіть катети трикутника.

611.° Катет прямокутного трикутника дорівнює 48 см, а тангенс протилежного кута — $3\frac{3}{7}$. Знайдіть другий катет і гіпотенузу трикутника.

612.° У прямокутному трикутнику один із катетів дорівнює 12 см, а тангенс прилеглого кута — 0,75. Знайдіть другий катет і гіпотенузу трикутника.

613.° Розв'яжіть прямокутний трикутник:

1) за гіпотенузою та гострим кутом: $c = 28$ см, $\alpha = 48°$;
2) за катетом і гострим кутом: $a = 56$ см, $\beta = 74°$;
3) за катетом і гіпотенузою: $a = 5$ см, $c = 9$ см;
4) за двома катетами: $a = 3$ см, $b = 7$ см.

614.° Розв'яжіть прямокутний трикутник за відомими елементами:

1) $a = 34$ см, $\alpha = 55°$;
2) $c = 16$ см, $\beta = 18°$;
3) $b = 12$ см, $c = 13$ см;
4) $a = 4$ см, $b = 14$ см.

615.° Використовуючи дані рисунка 188, знайдіть висоту ялинки.

616.° Якої довжини має бути пожежна драбина, щоб нею можна було піднятися на дах будинку заввишки 9 м, якщо ставити її під кутом 70° до поверхні землі?

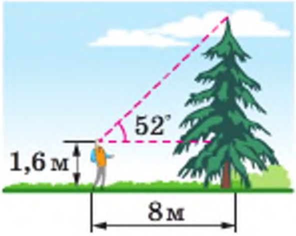


Рис. 188

617.° Проїхавши від старту прямолінійною ділянкою шосе 300 м, велосипедист опинився в точці, розташованій на 11 м вище, ніж точка старту. Знайдіть тангенс кута підйому шосе на цій ділянці.

618.° Під яким кутом падає на землю сонячний промінь, якщо довжина тіні від вертикальної жердини дорівнює довжині самої жердини?

619.• Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120°, а висота, проведена до основи, — $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторони трикутника.

620.• Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 12 см, а кут при основі — 45°. Знайдіть висоту та бічну сторону трапеції.

621.• Діагональ паралелограма перпендикулярна до його сторони й дорівнює a. Знайдіть сторони паралелограма, якщо один із його кутів дорівнює 30°.

622.• Сторона ромба дорівнює a, а один із його кутів — 60°. Знайдіть діагоналі ромба.

623.• Траншея в перерізі має форму рівнобічної трапеції (рис. 189). Знайдіть кут, який утворюють стінки траншеї з її дном.

624.• Ширина насипу шосейної дороги в нижній його частині дорівнює 80 м (рис. 190), висота насипу — 5 м, а відкоси нахилені до горизонту під кутом 20°. Знайдіть ширину насипу у верхній його частині.

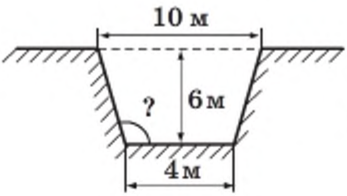


Рис. 189

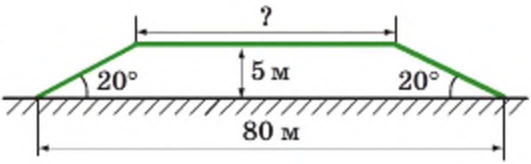


Рис. 190

625.° Висота BD трикутника ABC ділить сторону AC на відрізки AD і CD так, що $AD = 12$ см, $CD = 4$ см. Знайдіть сторону BC, якщо $\angle A = 30°$.

626.° Висота AF ділить сторону BC трикутника ABC на відрізки BF і CF. Знайдіть сторону AC, якщо $CF = \sqrt{13}$ см, $\angle B = 60°$, а сторона AB дорівнює 18 см.

627.° Із точки D, що лежить поза прямою n, проведено до цієї прямої похилі DK і DB, які утворюють з нею кути 45° і 60° відповідно. Знайдіть довжину проекції похилої DK на пряму n, якщо $DB = 10\sqrt{3}$ см.

628.° Із точки M, що лежить поза прямою l, проведено до цієї прямої похилі MN і MK, які утворюють з нею кути 30° і 45° відповідно. Знайдіть похилу MK, якщо проекція похилої MN на пряму l дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

629.° Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює β, висота, проведена до бічної сторони, — h. Знайдіть основу трикутника.

630.° Висота, проведена з вершини прямого кута трикутника, дорівнює h, гострий кут — α. Знайдіть сторони трикутника.

631.° Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює a. Кут між другим катетом і висотою, проведеною з вершини прямого кута, дорівнює φ. Знайдіть невідомі сторони трикутника та проведену висоту.

632.° Більша діагональ ромба дорівнює d, а гострий кут — α. Знайдіть сторону та меншу діагональ ромба.

633.° Гострий кут ромба дорівнює α, радіус вписаного кола — r. Знайдіть сторону та діагоналі ромба.

634.°° Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони та утворює з основою трапеції кут 30°. Знайдіть висоту трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює R.

635.°° Одна зі сторін трикутника дорівнює a, прилеглі до неї кути — 45° і 60°. Знайдіть висоту трикутника, проведену до даної сторони.

636.°° Основи трапеції дорівнюють 7 см і 15 см, а кути при більшій основі — 30° і 60°. Знайдіть висоту та діагоналі трапеції.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

637. Периметр паралелограма дорівнює 48 см. Бісектриса тупого кута ділить його сторону у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини гострого кута. Чи може менша сторона паралелограма дорівнювати 7 см?

638. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло, $\angle BAC = 52°$, $\angle DBC = 34°$, $\angle ADB = 17°$. Знайдіть кути чотирикутника.

639. Відомо, що O — точка перетину діагоналей AC і BD трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Знайдіть відрізки BO і OD, якщо $AO : OC = 7 : 6$ і $BD = 39$ см.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

640. Розріжте ромб на чотири чотирикутники так, щоб кожний із них був вписаним у коло й описаним навколо кола.

ЗАВДАННЯ № 3 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Діаметр AB кола із центром O перпендикулярний до хорди CD (рис. 191). Яка з наведених рівностей є неправильною?

А) $AC^2 = AM \cdot AB$; В) $AD^2 = MB \cdot AB$;
Б) $CM^2 = AM \cdot MB$; Г) $DM^2 = AM \cdot MB$.

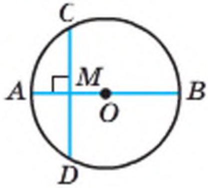
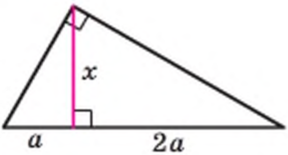
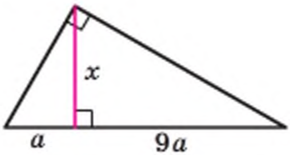
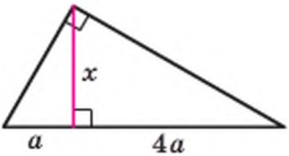


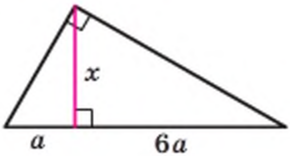
Рис. 191

2. На якому рисунку довжина відрізка x дорівнює $2a$?

А)


В)


Б)


Г)


3. Із теореми Піфагора випливає, що гіпотенуза:

А) дорівнює сумі катетів;
Б) дорівнює сумі квадратів катетів;
В) більша за катет;
Г) дорівнює квадрату суми катетів.

4. Довжина відрізка x на рисунку 192 дорівнює:

А) 4; Б) 3; В) 5; Г) $3\sqrt{2}$.

5. Бісектриса рівностороннього трикутника зі стороною a дорівнює:

А) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; Б) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$; В) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; Г) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

6. Радіус кола, описаного навколо квадрата зі стороною a, дорівнює:

А) $\dfrac{a}{2}$; Б) $a\sqrt{2}$; В) $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$; Г) $2a$.

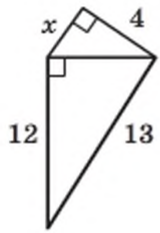


Рис. 192

7. Висота рівнобедреного прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює a. Тоді його катет дорівнює:

А) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; Б) $a\sqrt{2}$; В) $2a$; Г) $\dfrac{a}{2}$.

8. Нехай α і β — гострі кути прямокутного нерівнобедреного трикутника. Яка з наведених рівностей є правильною?

А) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha$; В) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \sin\beta$;

Б) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\beta$; Г) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \sin\beta$.

9. Нехай α — гострий кут прямокутного трикутника. Яка з даних рівностей не може виконуватися?

А) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; В) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$; Г) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

10. Довжина відрізка x на рисунку 193 дорівнює:

А) $\frac{\sqrt{2}}{2} a \sin\alpha$; В) $\frac{a\sqrt{2}}{2} \cos\alpha$;

Б) $\frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg}\alpha$; Г) $a\sqrt{2} \operatorname{tg}\alpha$.

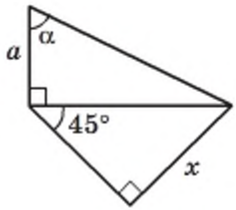


Рис. 193

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику

Квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проекцій катетів на гіпотенузу.

Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи та проекції цього катета на гіпотенузу.

Теорема Піфагора

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Синус гострого кута прямокутного трикутника

Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Косинус гострого кута прямокутного трикутника

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Тангенс гострого кута прямокутного трикутника

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.

Котангенс гострого кута прямокутного трикутника

Котангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до протилежного.

Тригонометричні формули

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — основна тригонометрична тотожність

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

Співвідношення між сторонами та значеннями тригонометричних функцій кутів у прямокутному трикутнику

- Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на синус кута, протилежного цьому катету.
- Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на косинус кута, прилеглого до цього катета.
- Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку другого катета на тангенс кута, протилежного першому катету.
- Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку другого катета на котангенс кута, прилеглого до першого катета.
- Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на синус протилежного йому кута.
- Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на косинус прилеглого до нього кута.

МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩА МНОГОКУТНИКА §4

Вивчивши матеріал цього параграфа, ви дізнаєтеся про формулу, за допомогою якої можна знайти суму кутів опуклого многокутника.

Ви розширите свої уявлення про таку знайому вам величину, як площа.

Ви навчитеся знаходити площу паралелограма, трикутника, трапеції.

19. Многокутники

Розглянемо фігуру, яка складається з точок A_1, A_2, A_3, ..., A_n і відрізків A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 таких, що жодні два сусідніх відрізки не лежать на одній прямій і ніякі два несусідніх відрізки не мають спільних точок (рис. 194).

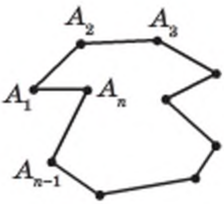


Рис. 194

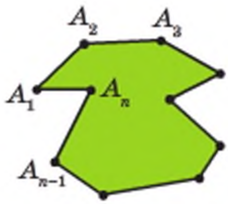


Рис. 195

Фігура, утворена цими відрізками, обмежує частину площини, виділену на рисунку 195 зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 називають **многокутником**. Точки A_1, A_2, A_3, ..., A_n називають **вершинами** многокутника, а вказані вище відрізки — **сторонами** многокутника.

Сторони, що є сусідніми відрізками, називають **сусідніми сторонами** многокутника. Вершини, які є кінцями однієї сторони, називають **сусідніми вершинами** многокутника.

Дві сусідні сторони многокутника утворюють **кут** многокутника. Наприклад, на рисунку 196 α, β, γ, δ є кутами многокутника, а φ не є кутом многокутника.

Многокутник називають за кількістю його кутів: трикутник, чотирикутник, п'ятикутник тощо.

Многокутник позначають за його вершинами. Наприклад, на рисунку 197 зображено п'ятикутник $ABCDE$. У позначенні многокутника букви, які стоять поруч, відповідають сусіднім вершинам. Наприклад, п'ятикутник, зображений на рисунку 197, можна також позначити інакше: $CDEAB$, $EABCD$, $EDCBA$ тощо.

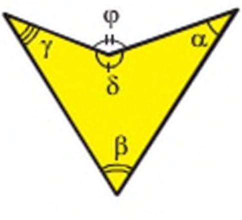


Рис. 196

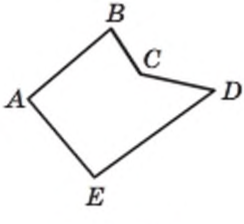


Рис. 197

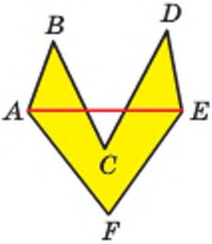


Рис. 198

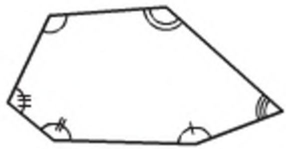


Рис. 199

Периметром многокутника називають суму довжин усіх його сторін.

Відрізок, який сполучає несусідні вершини многокутника, називають **діагоналлю**. Наприклад, на рисунку 198 відрізок AE — діагональ шестикутника $ABCDEF$.

На рисунку 199 зображено многокутник, усі кути якого менші від розгорнутого. Такий многокутник називають **опуклим**. Із сказаного випливає, що будь-який трикутник є опуклим многокутником. Зауважимо, що многокутники, зображені на рисунках 196–198, не є опуклими.

Опуклий многокутник має такі властивості:

1) *опуклий многокутник розташований в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону* (рис. 200);

2) *опуклий многокутник, відмінний від трикутника, містить будь-яку свою діагональ* (рис. 201).

Якщо многокутник не є опуклим, то він таких властивостей не має (рис. 198, 202).

Теорема 19.1. ***Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює 180° (n − 2).***

Доведення. Для випадку $n = 3$ теорему було доведено в 7 класі (теорема 16.1).

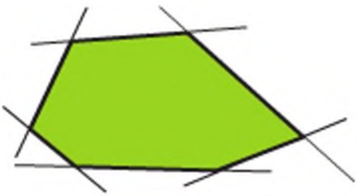


Рис. 200

Рис. 201

Рис. 202

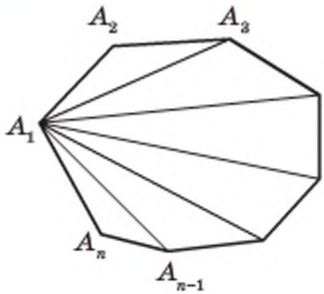


Рис. 203

Рис. 204

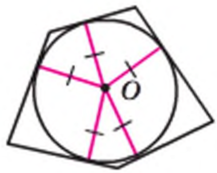


Рис. 205

Нехай $n > 3$. На рисунку 203 зображено опуклий n-кутник $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$. Доведемо, що сума всіх його кутів дорівнює $180° (n - 2)$.

Проведемо всі його діагоналі, які виходять із вершини A_1. Ці діагоналі розбивають даний многокутник на $(n - 2)$ трикутники. Сума всіх кутів цих трикутників дорівнює сумі кутів n-кутника. Оскільки сума кутів кожного трикутника дорівнює $180°$, то шукана сума дорівнює $180° (n - 2)$. ▲

Зазначимо, що наведена теорема є справедливою також для будь-якого многокутника, що не є опуклим.

Означення. Коло називають описаним навколо многокутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

На рисунку 204 зображено коло, описане навколо многокутника. У цьому разі також говорять, що многокутник **вписаний** у коло.

Центр кола, описаного навколо многокутника, рівновіддалений від усіх його вершин. Отже, цей центр належить серединним перпендикулярам усіх сторін многокутника, вписаного в коло.

Навколо многокутника можна описати коло, якщо існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин. Отже, якщо серединні перпендикуляри всіх сторін многокутника перетинаються в одній точці, то навколо такого многокутника можна описати коло.

Означення. Коло називають вписаним у многокутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

На рисунку 205 зображено коло, вписане в многокутник. У цьому разі також говорять, що многокутник **описаний** навколо кола.

Центр кола, вписаного в многокутник, рівновіддалений від усіх його сторін. Отже, цей центр належить бісектрисам усіх кутів многокутника, описаного навколо кола.

1. Поясніть, яку фігуру називають многокутником.
2. Що називають периметром многокутника?
3. Що називають діагоналлю многокутника?
4. Який многокутник називають опуклим?
5. Як розташований опуклий многокутник відносно будь-якої прямої, що містить його сторону?
6. Чому дорівнює сума кутів опуклого n-кутника?
7. Яке коло називають описаним навколо многокутника?
8. Яка точка є центром кола, описаного навколо многокутника?
9. Яке коло називають вписаним у многокутник?
10. Яка точка є центром кола, вписаного в многокутник?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

641.° Накресліть і позначте довільний опуклий семикутник, назвіть усі його вершини та сторони. Проведіть з однієї вершини всі діагоналі, назвіть їх. На скільки трикутників діагоналі розбили семикутник?

642.° Накресліть шестикутник, кожний кут якого дорівнює 120°, а кожна сторона — 4 см. Опишіть навколо цього шестикутника коло та впишіть у нього коло.

643.° Накресліть п'ятикутник, кожний кут якого дорівнює 108°, а кожна сторона — 3 см. Опишіть навколо цього п'ятикутника коло та впишіть у нього коло.

644.° Накресліть коло довільного радіуса, поділіть його на 8 рівних дуг. Використовуючи точки поділу, побудуйте восьмикутник, вписаний у коло.

645.° Накресліть коло довільного радіуса, поділіть його на 12 рівних дуг. Використовуючи точки поділу, побудуйте дванадцятикутник, вписаний у коло.

ВПРАВИ

646.° Знайдіть сторони п'ятикутника $ABCDE$, якщо сторона BC на 1 см більша за сторону AB, CD на 2 см більша за AB, DE на 3 см більша за AB, AE на 4 см більша за AB, а периметр п'ятикутника дорівнює 100 см.

647.° Знайдіть суму кутів опуклого: 1) п'ятикутника; 2) восьмикутника; 3) двадцятичотирьохкутника.

648.° Знайдіть суму кутів опуклого: 1) дев'ятикутника; 2) шістнадцятикутника.

649.° Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює: 1) 1800°; 2) 720°; 3) 1600°?

650.° Чи існує многокутник, кожний кут якого дорівнює: 1) 150°; 2) 100°?

651.• Під час знімання плану земельної ділянки, яка має форму п'ятикутника (рис. 206), отримали такі величини кутів: $\angle A = 116°$, $\angle B = 98°$, $\angle C = 124°$, $\angle D = 102°$, $\angle E = 130°$. Чи правильно було виконано вимірювання?

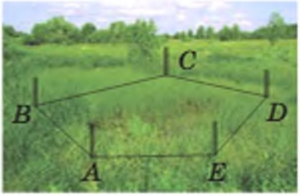


Рис. 206

652.• Знайдіть кути опуклого шестикутника, якщо вони відносяться як 3 : 3 : 4 : 4 : 5 : 5.

653.• Знайдіть кути опуклого семикутника, якщо вони відносяться як 6 : 7 : 8 : 9 : 9 : 10 : 11.

654.• Скільки діагоналей можна провести: 1) у дев'ятикутнику; 2) у двадцятикутнику; 3) у n-кутнику?

655.• В опуклому многокутнику 54 діагоналі. Знайдіть кількість його сторін і суму кутів.

656.• Доведіть, що коли всі сторони многокутника, вписаного в коло, рівні, то й усі його кути теж рівні.

657.• Доведіть, що коли всі кути многокутника, описаного навколо кола, рівні, то й усі його сторони теж рівні.

658.•• Усі сторони опуклого п'ятикутника рівні, а кути, прилеглі до однієї зі сторін, — прямі. Знайдіть решту кутів п'ятикутника.

659.•• Три кути опуклого многокутника дорівнюють по 100°, а решта — по 120°. Визначте вид многокутника.

660.•• Доведіть, що коли кути опуклого шестикутника рівні, то його сторони утворюють три пари паралельних сторін.

661.•• Доведіть, що коли кути опуклого п'ятикутника рівні, то він не має паралельних сторін.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

662. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута й ділить середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 7 см і 11 см. Знайдіть периметр трапеції.

663. Медіана та висота прямокутного трикутника, проведені до гіпотенузи, дорівнюють відповідно 13 см і 12 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

664. Бісектриса кута A трикутника ABC ($\angle C = 90°$) ділить катет BC на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть радіус кола, яке проходить через точку A, точку C і точку перетину даної бісектриси з катетом BC.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

665. На колі радіуса 1 позначили 1000 точок. Доведіть, що знайдеться точка, яка належить даному колу, сума відстаней від якої до позначених точок більша за 1000.

20. Поняття площі многокутника. Площа прямокутника

З такою величиною, як площа, ви часто стикаєтеся **в повсякденному** житті: площа квартири, площа дачної ділянки, площа поля тощо.

Досвід підказує вам, що рівні земельні ділянки мають рівні площі; що площа квартири дорівнює сумі площ усіх її приміщень (кімнат, кухні, коридору тощо).

Ви знаєте, що площі земельних ділянок вимірюють у сотках (арах) і гектарах; площі регіонів і держав — у квадратних кілометрах; площу квартири — у квадратних метрах.

На цих практичних знаннях про площу будується означення площі многокутника.

Означення. Площею многокутника називають додатну величину, яка має такі властивості:

1) **рівні многокутники мають рівні площі;**
2) **якщо многокутник складено з кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;**
3) **за одиницю виміру площі беруть одиничний квадрат, тобто квадрат зі стороною, яка дорівнює одиниці виміру довжини.**

Виміряти площу многокутника — це означає порівняти його площу з площею одиничного квадрата. У результаті отримують **числове значення площі** даного многокутника. Це число показує, у скільки разів площа даного многокутника відрізняється від площі одиничного квадрата.

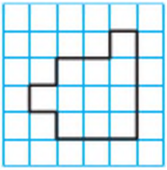


Рис. 207

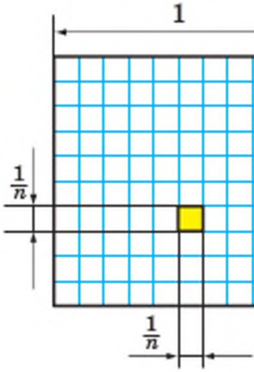


Рис. 208

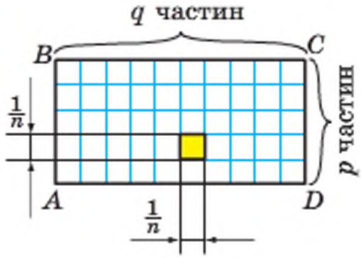


Рис. 209

Наприклад, якщо клітинку вашого зошита прийняти за одиничний квадрат, то площа многокутника, зображеного на рисунку 207, дорівнюватиме 11 квадратним одиницям (коротко записують: 11 од.^{2}).

Зазвичай для знаходження площі використовують формули, тобто обчислюють площу многокутника за певними його відомими елементами (сторонами, діагоналями, висотами тощо). Деякі з них ви вже знаєте. Наприклад, ви неодноразово застосовували формулу $S = ab$, де S — площа прямокутника, a і b — довжини його сусідніх сторін.

Для доведення цієї формули буде потрібною така лема.

Лема. ***Площа квадрата зі стороною $\frac{1}{n}$ од. (n — натуральне число) дорівнює $\frac{1}{n^2}$ од.^{2}.***

Доведення. Розглянемо одиничний квадрат і поділимо його на n^2 рівних квадратів зі стороною $\frac{1}{n}$ (рис. 208).

З означення площі многокутника (властивість 1) випливає, що всі ці квадрати мають рівні площі. За властивістю 2 сума площ цих квадратів дорівнює площі одиничного квадрата, тобто 1 од.^{2}. Тому площа кожного маленького квадрата дорівнює $\frac{1}{n^2}$ од.^{2}. ▲

Теорема 20.1. ***Площа прямокутника дорівнює добутку довжин його сусідніх сторін.***

Доведення. На рисунку 209 зображено прямокутник $ABCD$, довжини сусідніх сторін якого дорівнюють a і b: $AB = a$, $BC = b$. Доведемо, що площу S прямокутника обчислюють за формулою $S = ab$ для випадку, коли a і b — раціональні числа.

Числа a і b подамо у вигляді звичайних дробів з однаковими знаменниками:

$$a = \frac{p}{n},\ b = \frac{q}{n},$$

де p, q, n — натуральні числа.

Поділимо сторону AB на p рівних частин, а сторону BC — на q рівних частин. Через точки поділу проведемо прямі, паралельні сторонам прямокутника. Тоді прямокутник буде поділено на pq рівних квадратів зі стороною $\frac{1}{n}$.

Згідно з лемою площа кожного квадрата дорівнює $\frac{1}{n^2}$. З означення площі (властивість 2) випливає, що площа прямокутника дорівнює сумі площ усіх квадратів, тобто

$$S = \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}_{pq \text{ доданків}} = pq \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab.$$

Розгляд випадку, коли хоча б одне із чисел a або b є ірраціональним, виходить за межі шкільного курсу геометрії. ▲

Означення. Многокутники, які мають рівні площі, називають *рівновеликими*.

З означення площі (властивість 1) випливає, що всі рівні фігури рівновеликі. Проте не всі фігури, які мають рівні площі, є рівними. Наприклад, на рисунку 210 зображено два многокутники, кожний з яких складається із семи одиничних квадратів. Ці многокутники рівновеликі, але не рівні.

Рис. 210

1. Що називають площею многокутника?
2. Що означає виміряти площу многокутника?
3. Що показує числове значення площі?
4. Чому дорівнює площа квадрата зі стороною $\frac{1}{n}$ од., де n — натуральне число?
5. Чому дорівнює площа прямокутника?
6. Які многокутники називають рівновеликими?
7. Чи можна стверджувати, що коли дві фігури рівні, то вони рівновеликі?
8. Чи можна стверджувати, що коли дві фігури рівновеликі, то вони рівні?

ВПРАВИ

666.° Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них на 5 см більша за другу, а площа прямокутника дорівнює 36 см².

667.° Площа прямокутника дорівнює 270 см², а його сторони відносяться як 5 : 6. Чому дорівнюють сторони прямокутника?

668.° Які з прямокутників, зображених на рисунку 211, рівновеликі?

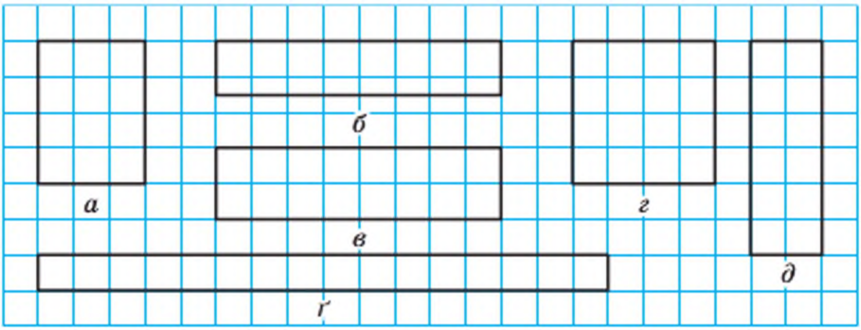


Рис. 211

669.° Квадрат зі стороною 12 см і прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює 8 см, рівновеликі. Знайдіть периметр даного прямокутника.

670.° Знайдіть периметр квадрата, який рівновеликий прямокутнику зі сторонами 2 см і 32 см.

671.° Чи вистачить 5 т гороху, щоб засіяти ним поле, яке має форму прямокутника зі сторонами 500 м і 400 м, якщо на 1 га треба висіяти 260 кг гороху?

672.° Довжина стіни дорівнює 6 м, а висота — 3 м. Чи вистачить п'яти контейнерів кахлю, щоб обкласти ним цю стіну, якщо одна плитка має форму квадрата зі стороною 15 см, а в одному контейнері вміщуються 160 плиток?

673.° Витрати емалевої фарби на одношарове покриття становлять 180 г на 1 м². Чи вистачить 3 кг емалі, щоби пофарбувати стіну завдовжки 6 м і заввишки 3 м?

674.° Тиск деякого газу в посудині становить 0,0015 Н/м². З якою силою тисне цей газ на стінку посудини прямокутної форми розміром 35 × 24 см?

675.° Границя міцності сталі деякої марки дорівнює 60 Н/мм². При якому навантаженні розірветься стержень, поперечний переріз якого є прямокутником зі сторонами 20 мм і 10 мм?

676.• Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з однією зі сторін кут α. Знайдіть площу прямокутника.

677.• Сторона прямокутника дорівнює 15 см і утворює з діагоналлю кут 30°. Знайдіть площу прямокутника.

678.• Знайдіть відношення площ двох квадратів, сторони яких відносяться як: 1) $3 : 4$; 2) $2 : \sqrt{5}$.

679.• Як відносяться сторони двох квадратів, якщо їхні площі відносяться як: 1) $25 : 36$; 2) $3 : 49$?

680.• Одна зі сторін прямокутника дорівнює 28 см. Як зміниться площа прямокутника, якщо сусідню його сторону зменшити на 5 см?

681.• Як зміниться площа прямокутника, якщо:
1) дві його протилежні сторони збільшити в 3 рази;
2) усі його сторони збільшити в 3 рази;
3) дві його протилежні сторони збільшити в 6 разів, а дві інші — зменшити в 3 рази?

682.• Як зміниться площа прямокутника, якщо:
1) дві його протилежні сторони зменшити в 4 рази, а дві інші — у 2 рази;
2) дві його протилежні сторони збільшити в 4 рази, а дві інші — зменшити в 4 рази?

683.• На продовженні сторони AD паралелограма $ABCD$ за точку D позначено точку M так, що $AD = MD$. Доведіть, що паралелограм $ABCD$ і трикутник ABM рівновеликі.

684.• Площа квадрата $ABCD$ дорівнює 10 см² (рис. 212). Чому дорівнює площа прямокутника $BMKD$?

685.• Доведіть, що коли точка E — середина відрізка AK (рис. 213), то трикутник AKD і прямокутник $ABCD$ рівновеликі.

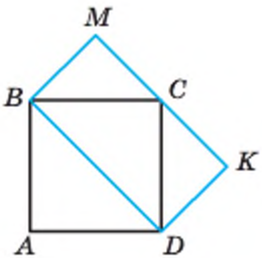


Рис. 212

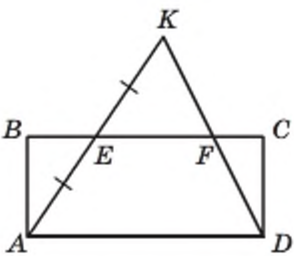


Рис. 213

686.• У скільки разів площа квадрата, описаного навколо кола, більша за площу квадрата, вписаного в це коло?

687.• Площа прямокутного аркуша паперу, довжини сторін якого виражено цілими числами сантиметрів, дорівнює 12 см^2. Скільки квадратів площею 4 см^2 можна вирізати із цього аркуша?

688.• Площа прямокутного аркуша паперу, довжини сторін якого виражено цілими числами сантиметрів, дорівнює 18 см^2. Скільки квадратів зі стороною 3 см можна вирізати із цього аркуша?

689.• Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні 2 : 7. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 108 см.

690.• Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні 1 : 4. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 36 см^2.

691.* Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює сумі площ двох даних квадратів.

692.* Сторони прямокутника дорівнюють a і b. Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює площі даного прямокутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

693. Серединний перпендикуляр діагоналі BD паралелограма $ABCD$ перетинає сторони AB і CD. Продовження сторін AD і BC він перетинає в точках M і K відповідно. Визначте вид чотирикутника $MBKD$.

694. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M. Знайдіть відрізок AM, якщо $AB = 6$ см і $BC : AD = 3 : 4$.

695. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей ромба до його сторони, якщо гострий кут ромба дорівнює 30°, а сторона — 8 см.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

696. Кожний із двох подібних трикутників розрізали на два трикутники так, що одна з отриманих частин одного трикутника подібна одній із частин другого трикутника. Чи можна стверджувати, що дві інші частини також подібні?

21. Площа паралелограма

Теорема 21.1. ***Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони та висоти, яка проведена до цієї сторони.***

Доведення. ⊙ На рисунку 214 зображено паралелограм $ABCD$, площа якого дорівнює S, і його висоту BM. Доведемо, що $S = BC \cdot BM$.

Проведемо висоту CN. Легко показати (зробіть це самостійно), що чотирикутник $MBCN$ — прямокутник. Покажемо, що він рівновеликий даному паралелограму.

Площа паралелограма дорівнює сумі площ трикутника ABM і трапеції $MBCD$. Площа прямокутника дорівнює сумі площ зазначеної трапеції та трикутника DCN. Проте трикутники ABM і DCN рівні за гіпотенузою та гострим кутом (відрізки AB і CD рівні як протилежні сторони паралелограма, кути 1 і 2 рівні як відповідні при паралельних прямих AB і DC та січній AD). Отже, ці трикутники рівновеликі. Звідси випливає, що паралелограм $ABCD$ і прямокутник $MBCN$ рівновеликі.

За теоремою 20.1 площа прямокутника дорівнює добутку довжин сторін BC і BM. Тоді $S = BC \cdot BM$, де S — площа паралелограма $ABCD$.

Щоб завершити доведення, потрібно розглянути випадки, коли основа M висоти BM не належатиме стороні AD (рис. 215) або збігатиметься з вершиною D (рис. 216). І в цьому разі паралелограм $ABCD$ і прямокутник $MBCN$ будуть рівновеликими. Доведіть цей факт самостійно. ▲

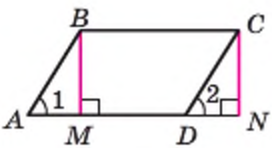


Рис. 214

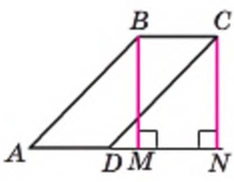


Рис. 215

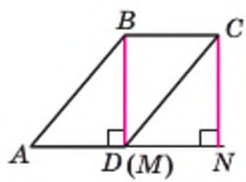


Рис. 216

Якщо позначити довжини сторони паралелограма та проведеної до неї висоти відповідно буквами a і h, то площу S паралелограма обчислюють за формулою

$$\boxed{S = ah}$$

1. Чому дорівнює площа паралелограма?
2. За якою формулою обчислюють площу паралелограма?

ВПРАВИ

697.° Знайдіть площу паралелограма, сторона якого дорівнює 14 см, а проведена до неї висота — 6 см.

698.° Обчисліть площу паралелограма, зображеного на рисунку 217 (розміри дано в сантиметрах).

Рис. 217

699.° Які з паралелограмів, зображених на рисунку 218, рівновеликі?

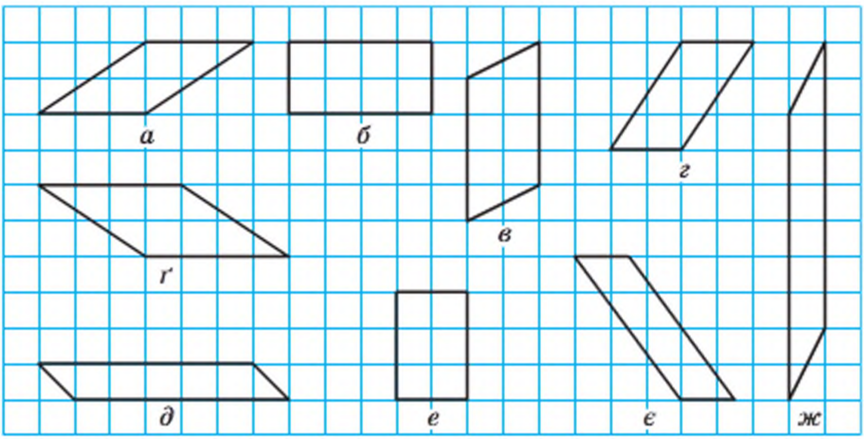


Рис. 218

700.° Площа паралелограма $ABCD$ (рис. 219) дорівнює S. Чому дорівнює площа зафарбованої фігури?

701.° Площа паралелограма дорівнює 17 см², а одна з його сторін — 3,4 см. Знайдіть висоту паралелограма, проведену до цієї сторони.

702.° Площа паралелограма дорівнює 40 см², а висоти дорівнюють 5 см і 4 см. Знайдіть сторони цього паралелограма.

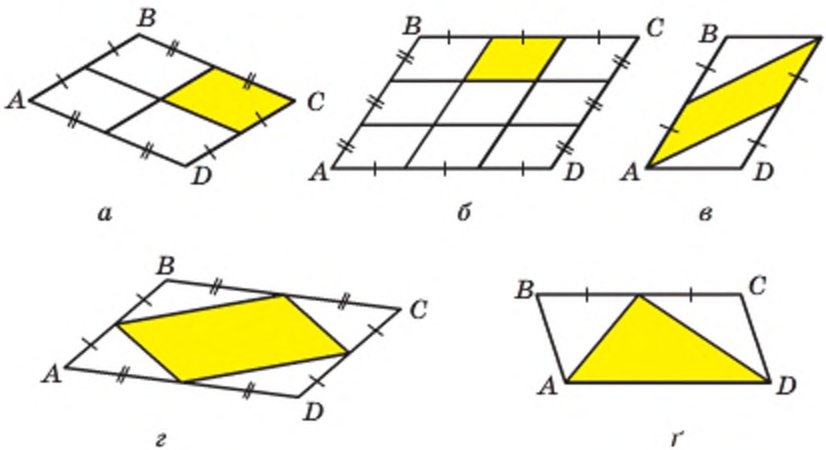


Рис. 219

703.° Заповніть таблицю, де a — довжина сторони паралелограма, h — довжина висоти, проведеної до цієї сторони, S — площа паралелограма:

a	6,2 см	16 дм	
h	7 см		0,9 м
S		64 дм²	5,4 м²

704.• Сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 15 см, а одна з висот дорівнює: 1) 6 см; 2) 12 см. Знайдіть другу висоту паралелограма. Скільки розв'язків у кожному випадку має задача?

705.• Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 15 см і 25 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до меншої сторони.

706.• Знайдіть площу паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 26 см і 24 см, а одна з них перпендикулярна до сторони паралелограма.

707.• Діагональ паралелограма, яка дорівнює 18 см, перпендикулярна до однієї зі сторін і утворює кут 30° із другою стороною. Знайдіть площу паралелограма.

708.• Сторони паралелограма дорівнюють a і b, його гострий кут дорівнює α. Знайдіть площу паралелограма.

709.° Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 60°. Знайдіть площу паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 8 см і 12 см.

710.° Сторони паралелограма дорівнюють 14 см і 20 см, а кут між його висотами, проведеними з вершини тупого кута, — 45°. Знайдіть площу паралелограма.

711.° Знайдіть площу ромба, якщо його висота дорівнює 6 см, а більша діагональ — 10 см.

712.° Менша діагональ ромба дорівнює a, а один із кутів — 60°. Знайдіть площу ромба.

713.° Доведіть, що висоти паралелограма обернено пропорційні сторонам, до яких вони проведені.

714.° Сторони паралелограма дорівнюють 9 см і 12 см, а сума двох його нерівних висот дорівнює 14 см. Знайдіть площу паралелограма.

715.° Різниця двох сторін паралелограма дорівнює 12 см, а проведені до них висоти дорівнюють 15 см і 10 см. Знайдіть площу паралелограма.

716.°° Доведіть, що з усіх паралелограмів зі сторонами a і b найбільшу площу має прямокутник.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

717. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = 7$ см, $BC = 24$ см, AM — бісектриса. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кутів BAC і AMC.

718. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC медіани AM і CK перетинаються в точці O. Доведіть, що трикутник AOC рівнобедрений, і знайдіть його бічні сторони, якщо $AM = 21$ см.

719. На медіані AM трикутника ABC позначено точку D так, що $AD : DM = 1 : 3$. Через точку D проведено пряму, паралельну стороні AC. У якому відношенні ця пряма ділить сторону BC, рахуючи від вершини C?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

720. Доведіть, що в опуклому дев'ятикутнику знайдуться дві діагоналі, кут між якими менший від 7°.

22. Площа трикутника

Теорема 22.1. ***Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони та проведеної до неї висоти.***

Доведення. ⊙ На рисунку 220 зображено трикутник ABC, площа якого дорівнює S, і його висоту BM. Доведемо, що $S = \frac{1}{2}AC \cdot BM$.

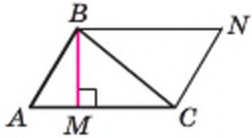


Рис. 220

Через вершини B і C трикутника проведемо прямі, паралельні сторонам AC і AB відповідно (рис. 220). Нехай ці прямі перетинаються в точці N. Чотирикутник $ABNC$ — паралелограм за означенням. Трикутники ABC і NCB рівні (доведіть це самостійно). Отже, їхні площі також рівні. Тоді площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма $ABNC$. Висота BM трикутника ABC є також висотою паралелограма $ABNC$. Звідси $S = \frac{1}{2}AC \cdot BM$. ▲

Якщо скористатися позначеннями для висот і сторін трикутника ABC, то згідно з доведеною теоремою маємо:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,$$

де S — площа трикутника.

Наслідок. ***Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Задача. Доведіть, що площа ромба дорівнює половині добутку його діагоналей.

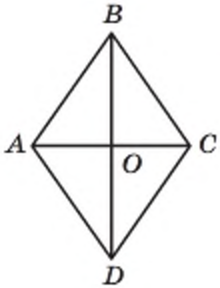


Рис. 221

Розв'язання. На рисунку 221 зображено ромб $ABCD$, площа якого дорівнює S. Його діагоналі AC і BD перетинаються в точці O. Доведемо, що $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.

Оскільки діагоналі ромба перпендикулярні, то відрізки AO і CO є висотами трикутників BAD і BCD відповідно. Тоді можна записати:

$$S = S_{BAD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot AO + \frac{1}{2}BD \cdot CO = \frac{1}{2}BD\,(AO + CO) = \frac{1}{2}BD \cdot AC.$$ ●

1. Як знайти площу трикутника, якщо відомо його сторону та висоту, проведену до неї?
2. Як знайти площу прямокутного трикутника, якщо відомо його катети?

ВПРАВИ

721.° **Сторона трикутника дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї, — 2,5 см. Знайдіть площу трикутника.**

722.° **Знайдіть площу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 10 см і 18 см.**

723.° **Які з трикутників, зображених на рисунку 222, рівновеликі?**

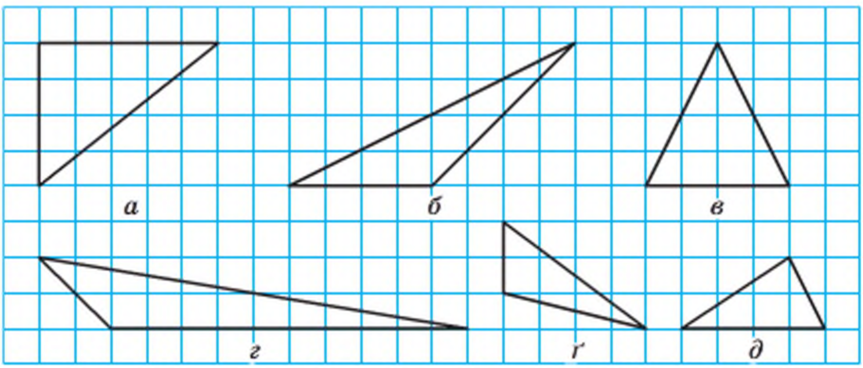


Рис. 222

724.° **Обчисліть площі трикутників, зображених на рисунку 223, якщо довжина сторони клітинки дорівнює одиниці довжини.**

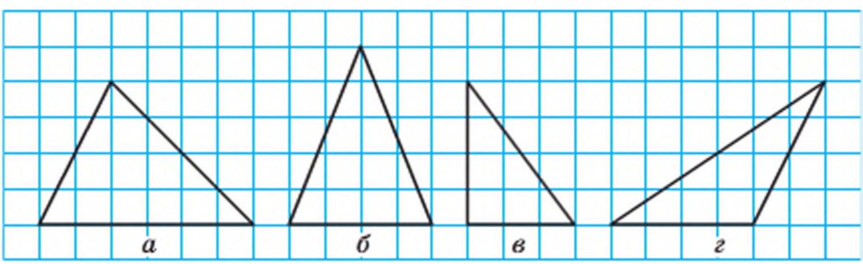


Рис. 223

725.° Площа трикутника дорівнює 48 $см^2$. Знайдіть сторону трикутника, якщо висота, проведена до цієї сторони, дорівнює 8 см.

726.° Відомо, що дві сторони трикутника дорівнюють 24 см і 9 см, а висота, проведена до більшої з відомих сторін, — 6 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до меншої з відомих сторін.

727.° Заповніть таблицю, де a — довжина сторони трикутника, h — довжина висоти, проведеної до неї, S — площа трикутника:

a	2,4 см	9 дм	
h	4 см		5 м
S		81 $дм^2$	65 $м^2$

728.° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 24 см, а бічна сторона — 13 см.

729.° Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 61 см, а висота, проведена до основи, — 60 см. Знайдіть площу трикутника.

730.° Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, — 18,5 см. Знайдіть площу трикутника.

731.• Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки завдовжки 3 см і 27 см.

732.• Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 8 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу — 6 см. Знайдіть площу трикутника.

733.• Висота BD трикутника ABC ділить його сторону AC на відрізки AD і CD. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $BC = \sqrt{37}$ см, $\angle A = 30°$, $CD = 5$ см.

734.• Висота AM трикутника ABC ділить його сторону BC на відрізки BM і MC. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AC = 26$ см, $\angle B = 45°$.

735.• Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює b, а кут при основі дорівнює α.

736.• Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює h, а кут при вершині дорівнює β. Знайдіть площу трикутника.

737.• Знайдіть площу рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює a.

738.° Знайдіть площу рівнобедреного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює c.

739.° Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо його катети дорівнюють 10 см і 24 см.

740.° Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки завдовжки 8 см і 12 см. Знайдіть площу трикутника.

741.° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 54 см, а висота, проведена до основи, — 9 см.

742.° Основа рівнобедреного трикутника відноситься до його висоти, опущеної на основу, як 8 : 3, бічна сторона трикутника дорівнює 40 см. Знайдіть площу трикутника.

743.° Доведіть, що площа опуклого чотирикутника, діагоналі якого перпендикулярні, дорівнює половині їхнього добутку.

744.° Площа ромба дорівнює 120 см^2, а його діагоналі відносяться як 5 : 12. Знайдіть периметр ромба.

745.° Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 25 см, а сума діагоналей — 62 см.

746.° Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 39 см, а різниця діагоналей — 42 см.

747.° Дано пряму l і паралельний їй відрізок AB. Доведіть, що всі трикутники AXB, де X — довільна точка прямої l, рівновеликі.

748.° Доведіть, що коли висота одного трикутника дорівнює висоті другого трикутника, то площі даних трикутників відносяться як їхні сторони, до яких проведено ці висоти.

749.° Доведіть, що медіана трикутника розбиває його на два рівновеликих трикутники.

750.° На стороні AC трикутника ABC позначено точку M так, що $\frac{AM}{MC}=\frac{m}{n}$. Доведіть, що $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}}=\frac{m}{n}$.

751.° У трикутнику провели всі три медіани. Доведіть, що вони розбивають трикутник на шість рівновеликих трикутників.

752.° Через вершину B трикутника ABC проведіть дві прямі так, щоб вони розбили даний трикутник на три рівновеликих трикутники.

753.° Через вершину паралелограма проведіть прямі так, щоб вони розбили даний паралелограм: 1) на чотири рівновеликих многокутники; 2) п'ять рівновеликих многокутників.

754.° Через вершину ромба проведіть дві прямі так, щоб вони розбили даний ромб на три рівновеликих многокутники.

755.° Побудуйте трикутник, рівновеликий даному паралелограму.

756.° У трикутнику проведено три висоти. Доведіть, що до найбільшої сторони трикутника проведено найменшу висоту.

757.•• На стороні AC трикутника ABC позначено точку M так, що $\frac{AM}{MC}=\frac{m}{n}$. Нехай X — довільна внутрішня точка відрізка BM. Доведіть, що $\frac{S_{ABX}}{S_{CBX}}=\frac{m}{n}$.

758.•• Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки, один з яких на 14 см більший за другий. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 4 см.

759.•• У прямокутному трикутнику ABC до гіпотенузи AB проведено висоту CM. Площа трикутника ACM дорівнює 6 см^2, а площа трикутника BCM — 54 см^2. Знайдіть сторони трикутника ABC.

760.•• Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса його гострого кута ділить протилежний катет на відрізки завдовжки 21 см і 35 см.

761.•• Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 2 см і 6 см.

762.•• Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить його висоту, проведену до основи, на відрізки, довжини яких дорівнюють 34 см і 16 см. Знайдіть площу даного трикутника.

763.•• У рівнобедрений трикутник вписано коло. Точка дотику ділить бічну сторону трикутника у відношенні 9 : 8, рахуючи від вершини рівнобедреного трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 16 см.

764.* На продовженнях сторін AB, BC, AC рівностороннього трикутника ABC за точки B, C і A відповідно позначено точки D, E і F так, що $BD = CE = AF = 2AB$. Знайдіть площу трикутника DEF, якщо площа трикутника ABC дорівнює 1 см^2.

765.* У трикутнику ABC позначено точку M так, що площі трикутників AMB, BMC і AMC рівні. Доведіть, що M — точка перетину медіан трикутника ABC.

766.* На стороні AC трикутника ABC позначено точку D. Проведіть через цю точку пряму так, щоб вона розбила даний трикутник на два рівновеликих многокутники.

767.* Доведіть, що сума відстаней від довільної точки рівностороннього трикутника до його сторін є сталою для даного трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

768. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці M. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle AMB = 117°$.

769. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 18 см і 12 см. Бічна сторона утворює з основою кут 30°. Знайдіть діагональ трапеції.

770. Центр кола, вписаного в рівнобічну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на 12 см і 16 см. Знайдіть периметр трапеції.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

771. На площині дано n точок ($n > 3$), жодні три з яких не лежать на одній прямій. Доведіть, що існує трикутник з вершинами в даних точках, який не містить жодної з решти $(n - 3)$ точок.

23. Площа трапеції

Теорема 23.1. ***Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ і висоти.***

Доведення. На рисунку 224 зображено трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$), площа якої дорівнює S. Відрізок CN — висота цієї трапеції. Доведемо, що $S = \frac{1}{2}\,(BC + AD) \cdot CN$.

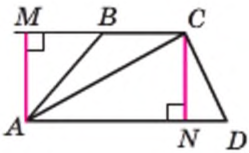


Рис. 224

Проведемо діагональ AC і висоту AM трапеції. Відрізки AM і CN є висотами трикутників ABC і ACD відповідно.

Маємо:

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}BC \cdot AM + \frac{1}{2}AD \cdot CN =$$

$$= \frac{1}{2}BC \cdot CN + \frac{1}{2}AD \cdot CN = \frac{1}{2}\,(BC + AD) \cdot CN. \blacktriangle$$

Якщо позначити довжини основ трапеції та її висоти відповідно буквами a, b і h, то площу S трапеції обчислюють за формулою

$$\boxed{S = \frac{a+b}{2} \cdot h}$$

Наслідок. ***Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії та висоти.***

1. Сформулюйте теорему про площу трапеції.
2. За якою формулою обчислюють площу трапеції?

ВПРАВИ

772.° Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 12 см, а висота — 6 см.

773.° Знайдіть площу трапеції, середня лінія якої дорівнює 18 см, а висота — 9 см.

774.° Площа трапеції дорівнює 96 см^2, а її висота — 3 см. Знайдіть основи трапеції, якщо вони відносяться як 3 : 5.

775.° Площа трапеції дорівнює 45 см^2, одна з основ — 8 см, а висота — 6 см. Знайдіть другу основу трапеції.

776.° Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 14 см і 16 см, а діагональ — 17 см.

777.° Чому дорівнює площа прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 9 см і 16 см, а більша бічна сторона — $\sqrt{65}$ см?

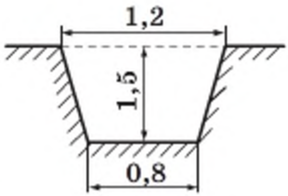


Рис. 225

778.° Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 14 см і 32 см, а бічна сторона — 15 см.

779.° На рисунку 225 зображено поперечний переріз траншеї, який має форму трапеції. Обчисліть площу цього поперечного перерізу (розміри дано в метрах).

780.° Знайдіть площу трапеції, зображеної на рисунку 226 (розміри дано в сантиметрах).

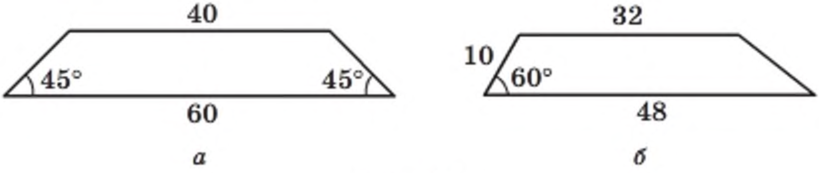


Рис. 226

781.° Знайдіть площу трапеції, зображеної на рисунку 227 (розміри дано в сантиметрах).

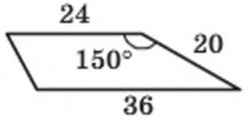


Рис. 227

782.• У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута й ділить середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 6 см і 12 см. Знайдіть площу трапеції.

783.• Основи прямокутної трапеції дорівнюють 9 см і 17 см, а діагональ є бісектрисою її тупого кута. Обчисліть площу трапеції.

784.• Точка перетину бісектрис гострих кутів при основі трапеції належить другій основі. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 17 см і 25 см, а висота — 15 см.

785.• Точка перетину бісектрис тупих кутів при основі трапеції належить другій основі. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 10 см і 17 см, а висота — 8 см.

786.• Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює $20\sqrt{3}$ см і утворює з основою кут 60°. Знайдіть площу трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

787.• Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 32 см і 50 см. Чому дорівнює площа даної трапеції, якщо в неї можна вписати коло?

788.• Менша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 8 см, а гострий кут — 45°. Знайдіть площу трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

789.• Більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 28 см, а гострий кут — 30°. Знайдіть площу трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

790.• Доведіть, що пряма, яка проходить через середину середньої лінії трапеції та перетинає її основи, розбиває дану трапецію на два рівновеликих многокутники.

791.• Побудуйте рівновеликий даній трапеції:
1) паралелограм, відмінний від прямокутника;
2) прямокутник.

792.• Побудуйте трикутник, рівновеликий даній трапеції.

793.•• Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 24 см і 40 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

794.•• Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, яка дорівнює 15 см. Знайдіть площу трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо неї, дорівнює 12,5 см.

795.•• Діагоналі трапеції перпендикулярні, одна з них дорівнює 48 см, а середня лінія трапеції — 25 см. Знайдіть площу трапеції.

796.•• Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута й перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює a.

797.•• У рівнобічну трапецію вписано коло. Одна з її бічних сторін точкою дотику ділиться на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть площу трапеції.

798.•• У прямокутну трапецію вписано коло радіуса 12 см. Більша з бічних сторін точкою дотику ділиться на два відрізки, більший з яких дорівнює 16 см. Знайдіть площу трапеції.

799.•• Діагональ рівнобічної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 12 см, а бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

800.•• Більша діагональ прямокутної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 9 см. Більша бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

801.•• У трапеції $ABCD$ відомо, що $BC \parallel AD$, точка M — середина сторони AB. Знайдіть площу трикутника CMD, якщо площа даної трапеції дорівнює S.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

802. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 50 см, а периметр трикутника ABD — 40 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо $AD = BD$.

803. Коло, побудоване на діагоналі AC ромба $ABCD$ як на діаметрі, проходить через середину сторони AB. Знайдіть кути ромба.

804. На сторонах AB, BC і AC трикутника ABC позначили відповідно точки M, K і D так, що $MK \parallel AC$, $DK \parallel AB$, $BK : KC = 3 : 2$. Знайдіть периметр чотирикутника $AMKD$, якщо $AC = 15$ см, $AB = 25$ см.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

805. Чи можна квадрат зі стороною 1,5 см покрити трьома квадратами зі стороною 1 см?

РІВНОСКЛАДЕНІ Й РІВНОВЕЛИКІ МНОГОКУТНИКИ

Якщо деякий многокутник можна розрізати на частини та скласти з них інший многокутник, то такі многокутники називають **рівноскладеними**.

Наприклад, якщо прямокутник розрізати вздовж його діагоналі (рис. 228), то отримаємо два рівних прямокутних трикутники, з яких можна скласти рівнобедрений трикутник (рис. 229). Фігури на рисунках 228 і 229 — рівноскладені.

Рис. 228

Рис. 229

Очевидно, що рівноскладені многокутники є рівновеликими. Цей факт застосовують під час доведення теорем і розв'язування задач. Наприклад, доводячи теорему 21.1, ми фактично розрізали паралелограм на трикутник ABM і трапецію $MBCD$, з яких склали прямокутник $MBCN$ (див. рис. 215).

Якщо трикутник розрізати вздовж середньої лінії, то з отриманих трикутника та трапеції можна скласти паралелограм (рис. 230).

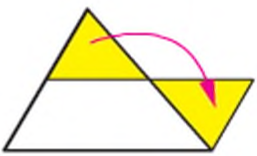


Рис. 230

Рис. 231

Легко встановити (зробіть це самостійно), що таке розрізання трикутника приводить до ще одного доведення теореми про площу трикутника (теорема 22.1). Цій самій меті слугує розрізання трикутника на частини, з яких можна скласти прямокутник (рис. 231).

Евклід у своїй знаменитій книзі «Начала» формулює теорему Піфагора так:

«Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах».

Якщо показати, що можна розрізати квадрати, побудовані на катетах, на частини та скласти із цих частин квадрат зі стороною, яка дорівнює гіпотенузі, то тим самим буде доведено теорему Піфагора.

На рисунку 232 показано один із можливих способів такого розрізання. Квадрати, побудовані на катетах, розрізано на частини, площі яких дорівнюють S_1, S_2, S_3, S_4. Із цих частин складено квадрат, побудований на гіпотенузі.

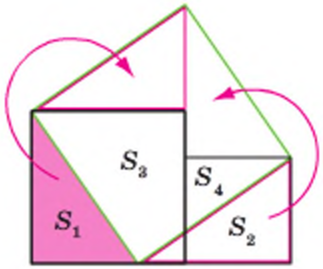


Рис. 232

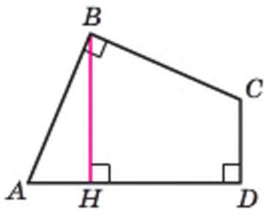


Рис. 233

З означення площі многокутника випливає, що рівноскладені многокутники є рівновеликими. Проте зовсім неочевидною є така теорема.

Теорема. ***Будь-які два рівновеликих многокутники є рівноскладеними.***

Уперше цей факт довів у 1832 р. угорський математик Фаркаш Бойяї. Трохи згодом німецький математик Пауль Гервін знайшов інше доведення. Тому цю теорему називають теоремою Бойяї—Гервіна.

ВПРАВИ

1. Доведіть, що трапеція є рівноскладеною з паралелограмом, основа якого дорівнює середній лінії трапеції, а висота — висоті трапеції.
2. Доведіть, що площа трапеції дорівнює добутку бічної сторони та перпендикуляра, опущеного на пряму, яка містить цю сторону, із середини другої бічної сторони.
3. У чотирикутнику $ABCD$ кути ABC і ADC прямі, а сторони AB і BC рівні (рис. 233). Відомо, що $BH \perp AD$ і $BH = 1$. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$.

ТЕОРЕМА ЧЕВИ

На сторонах BC, CA і AB трикутника ABC позначимо довільні точки A_1, B_1, C_1 (рис. 234). Кожен із відрізків AA_1, BB_1, CC_1 називають **чевіаною** трикутника ABC. Така назва пов'язана з ім'ям італійського інженера й математика Джованні Чеви (1648–1734), який відкрив дивовижну теорему.

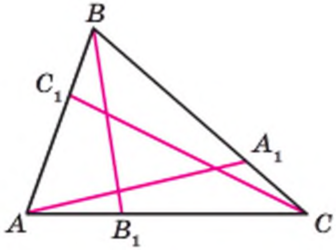


Рис. 234

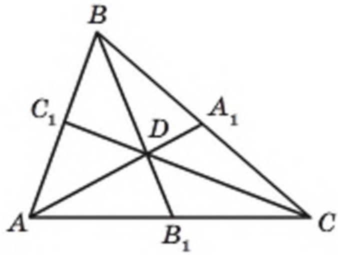


Рис. 235

Якщо точки A_1, B_1 і C_1 узято так, що чевіани є бісектрисами, або медіанами, або висотами гострокутного трикутника, то ці чевіани перетинаються в одній точці.

Якщо три прямі перетинаються в одній точці, то їх називають **конкурентними**.

Теорема Чеви дає загальний критерій конкурентності трьох довільних чевіан.

Теорема. ***Для того щоб чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 трикутника ABC перетиналися в одній точці, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність***

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

Доведення. Доведемо спочатку необхідну умову конкурентності: якщо чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці, то виконується рівність (*).

Скориставшися результатом ключової задачі 757, можна записати (рис. 235):

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_{ADC}}{S_{BDC}}, \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{BDC}}{S_{ABD}}.$$

Перемноживши записані рівності, отримаємо рівність (*).

Доведемо тепер достатню умову конкурентності: якщо виконується рівність (*), то чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці.

Нехай чевіани AA_1 і BB_1 перетинаються в точці D, а чевіана, яка проходить через вершину C і точку D, перетинає сторону AB у деякій точці C_2. З доведеного вище можна записати:

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Зіставляючи цю рівність з рівністю (*), доходимо висновку, що $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B}$, тобто точки C_1 і C_2 ділять відрізок AB в одному й тому самому відношенні, а отже, ці точки збігаються. Таким чином, пряма CD перетинає сторону AB у точці C_1. ▲

ВПРАВИ

1. Доведіть, що:
1) медіани трикутника конкурентні;
2) бісектриси трикутника конкурентні;
3) висоти гострокутного трикутника конкурентні.

2. Нехай A_1, B_1, C_1 — точки дотику вписаного кола відповідно до сторін BC, AC, AB трикутника ABC. Доведіть, що чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні.

3. Прямі AP, BP і CP перетинають сторони трикутника ABC у точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що прямі, які проходять через середини сторін BC, CA і AB паралельно прямим AP, BP і CP відповідно, конкурентні.

Вказівка. Застосуйте теорему Чеви до трикутника, вершини якого є серединами сторін трикутника ABC.

ЗАВДАННЯ № 4 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Скільки сторін в опуклому n-кутнику, якщо сума його кутів дорівнює 1260°?
А) 7; Б) 9; В) 11; Г) 13.

2. В опуклому n-кутнику 14 діагоналей. Чому дорівнює сума його кутів?
А) 1000°; Б) 800°; В) 900°; Г) 720°.

3. Як зміниться площа прямокутника, якщо кожну з його сторін зменшити в 10 разів?
А) Зменшиться в 100 разів;
Б) зменшиться у 20 разів;
В) зменшиться в 10 разів;
Г) зменшиться в 1000 разів.

4. Площа паралелограма дорівнює 80 см², а одна з його сторін — 16 см. Якої довжини може бути сусідня сторона паралелограма?
А) 2 см; Б) 3 см; В) 4 см; Г) 6 см.

5. На стороні BC паралелограма $ABCD$ позначено точку M так, що $BM : MC = 1 : 3$. Чому дорівнює площа трикутника ABM, якщо площа паралелограма дорівнює S?
А) $\frac{S}{8}$; Б) $\frac{S}{4}$; В) $\frac{S}{16}$; Г) $\frac{S}{2}$.

6. На рисунку 236 площа кожного з маленьких квадратів дорівнює 4 см². Чому дорівнює площа великого квадрата?
А) 16 см²; Б) 20 см²; В) 32 см²; Г) 40 см².

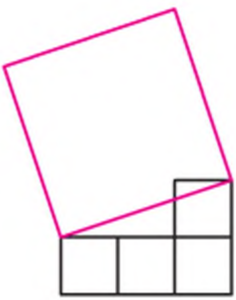


Рис. 236

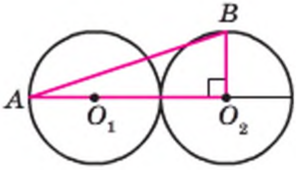


Рис. 237

7. У коло радіуса 1 см вписано квадрат і рівносторонній трикутник. Чому дорівнює відношення площі даного трикутника до площі квадрата?

А) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; Б) $3\sqrt{3}$; В) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; Г) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

8. Точки O_1 і O_2 — центри рівних кіл, які мають тільки одну спільну точку (рис. 237), $BO_2 \perp O_1O_2$, $AB = 10$ см. Чому дорівнює площа трикутника ABO_2?

А) 10 см²; Б) 15 см²; В) 18 см²; Г) 20 см².

9. Дано дві точки A і B. Геометричним місцем точок X таких, що площі трикутників AXB дорівнюють даному числу S, є:

А) коло з діаметром AB;

Б) серединний перпендикуляр відрізка AB;

В) пряма, паралельна AB;

Г) дві прямі, паралельні AB.

10. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні та ділять її середню лінію на три рівні частини. Чому дорівнює площа трапеції, якщо її більша основа дорівнює 12 см?

А) 50 см²; Б) 64 см²; В) 81 см²; Г) 144 см².

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4

Сума кутів опуклого n-кутника

Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° (n - 2)$.

Коло, описане навколо многокутника

Коло називають описаним навколо многокутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

Коло, вписане в многокутник

Коло називають вписаним у многокутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

Площа многокутника

Площею многокутника називають додатну величину, яка має такі властивості:

1) рівні многокутники мають рівні площі;
2) якщо многокутник складено з кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;

3) за одиницю виміру площі беруть одиничний квадрат, тобто квадрат зі стороною, яка дорівнює одиниці виміру довжини.

Площа прямокутника

Площа прямокутника дорівнює добутку довжин його сусідніх сторін.

Рівновеликі многокутники

Многокутники, які мають рівні площі, називають рівновеликими.

Площа паралелограма

Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони та висоти, яка проведена до цієї сторони.

Площа трикутника

Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони та проведеної до неї висоти.

Площа прямокутного трикутника

Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів.

Площа трапеції

- Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ і висоти.
- Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії та висоти.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 8 КЛАСУ

1. Чотирикутники

806. Знайдіть периметр паралелограма, якщо бісектриса одного з його кутів ділить сторону паралелограма на відрізки завдовжки 9 см і 14 см.

807. Бісектриса кута BAD паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M так, що $BM : MC = 5 : 4$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо периметр трикутника BOC на 8 см більший за периметр трикутника COD, де O — точка перетину діагоналей паралелограма.

808. У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $2\angle ADB = \angle A + \angle BDC$. Знайдіть кут ADB.

809. У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $AB = a$, $BC = b$, $a > b$. Кола, вписані в трикутники ABD і CBD, дотикаються до діагоналі BD у точках M і K відповідно. Знайдіть відрізок MK.

810. Скільки різних паралелограмів можна скласти з двох рівних трикутників, якщо вони: 1) різносторонні; 2) рівнобедрені; 3) рівносторонні?

811. Чи є правильним твердження:

1) якщо діагоналі чотирикутника рівні, то цей чотирикутник — паралелограм;
2) якщо дві сторони чотирикутника паралельні й точка перетину діагоналей рівновіддалена від цих сторін, то цей чотирикутник — паралелограм;
3) якщо дві сторони чотирикутника паралельні, а дві інші — рівні, то цей чотирикутник — паралелограм;
4) якщо бісектриси двох протилежних кутів чотирикутника перпендикулярні до бісектриси його третього кута, то цей чотирикутник — паралелограм;
5) якщо діагональ чотирикутника розбиває його на два рівних трикутники, то цей чотирикутник — паралелограм;
6) якщо кожна діагональ чотирикутника розбиває його на два рівних трикутники, то цей чотирикутник — паралелограм;
7) якщо кожні дві протилежні вершини чотирикутника рівновіддалені від діагоналі, яка сполучає дві інші вершини, то цей чотирикутник — паралелограм?

812. Чи є правильним твердження:

1) якщо дві сторони чотирикутника паралельні, а одна з діагоналей розбиває чотирикутник на два рівних трикутники, то цей чотирикутник — паралелограм;

2) якщо дві сторони чотирикутника паралельні, а точка перетину діагоналей ділить одну з них навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм;
3) якщо дві протилежні сторони чотирикутника рівні та діагоналі його рівні, то цей чотирикутник — паралелограм?

813. Периметр ромба дорівнює 8 см, а його висота — 1 см. Знайдіть кути ромба.

814. Кут при вершині B ромба $ABCD$ дорівнює 40°, точки M і K — основи перпендикулярів, опущених із вершини A на сторони BC і CD відповідно. Знайдіть кути трикутника AMK.

815. Перпендикуляр, опущений із вершини B прямокутника $ABCD$ на діагональ AC, ділить кут ABC на два кути, величини яких відносяться як 1 : 3. Знайдіть кут між проведеним перпендикуляром і діагоналлю BD.

816. Серединний перпендикуляр діагоналі прямокутника утворює з його більшою стороною кут 60°. Відрізок цієї прямої, який належить прямокутнику, дорівнює 12 см. Знайдіть більшу сторону прямокутника.

817. На діагоналі AC ромба $ABCD$ позначено точки M і K так, що $AM = CK$. Доведіть, що $\angle ABM = \angle CBK$.

818. Периметр ромба на 42 см більший за сторону ромба. Знайдіть периметр ромба.

819. Чи є правильним твердження:
1) якщо діагоналі чотирикутника рівні, то цей чотирикутник — прямокутник;
2) якщо діагоналі чотирикутника рівні та перпендикулярні, то цей чотирикутник — квадрат;
3) якщо діагоналі чотирикутника перпендикулярні та точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — квадрат;
4) якщо діагоналі чотирикутника рівні, перпендикулярні та точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — квадрат;
5) якщо три сторони чотирикутника рівні, а діагональ є бісектрисою одного з його кутів, то цей чотирикутник — ромб?

У разі ствердної відповіді обґрунтуйте її, у разі заперечної — накресліть чотирикутник, який слугує контрприкладом.

820. На сторонах AB, BC і AC трикутника ABC позначено точки D, F і E відповідно так, що $BD = BF = DE = EF$. Доведіть, що точка F належить бісектрисі кута BDE.

821. Відстань від середини хорди AC кола до діаметра AB дорівнює 4 см. Знайдіть хорду BC, якщо $\angle BAC = 30°$.

822. Побудуйте паралелограм за його вершиною та серединами сторін, яким ця вершина не належить.

823. Бічна сторона AB і менша основа BC трапеції $ABCD$ дорівнюють відповідно 16 см і 15 см. Який із відрізків перетинає бісектриса кута BAD — основу BC чи бічну сторону CD?

824. Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює більшій основі та утворює з нею кут 40°. Знайдіть кути трапеції.

825. Кут між двома січними, які проходять через точку поза колом, дорівнює 35°. Градусна міра більшої дуги кола, що міститься між сторонами цього кута, дорівнює 100°. Знайдіть градусну міру меншої дуги, яка міститься між сторонами даного кута.

826. Доведіть, що коли вершина кута лежить поза колом, а кут спирається на діаметр кола, то цей кут гострий.

827. Доведіть, що коли вершина кута лежить усередині кола, а кут спирається на діаметр кола, то цей кут тупий або розгорнутий.

828. Діагоналі чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, перпендикулярні, $\angle ACB = 10°$, $\angle BDC = 70°$. Знайдіть кути даного чотирикутника.

2. Подібність трикутників

829. Дві паралельні прямі перетинають одну зі сторін кута з вершиною M у точках A і C, а другу — відповідно в точках B і D. Знайдіть відрізки MA і MC, якщо $MB : BD = 2 : 3$ і $MA + MC = 14$ см.

830. Знайдіть відношення основ трапеції, якщо її діагоналі ділять середню лінію трапеції на три рівні частини.

831. На медіані BD трикутника ABC позначено точку M так, що $BM : MD = 3 : 2$. Пряма AM перетинає сторону BC у точці E. У якому відношенні точка E ділить сторону BC, рахуючи від вершини B?

832. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає діагональ BD і сторону BC у точках E і F відповідно, $BE : ED = 2 : 7$. Знайдіть відношення $BF : FC$.

833. Медіани AD і BM трикутника ABC перетинаються в точці O. Через точку O проведено пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть відрізки BD, DK і KC, якщо $BC = 18$ см.

834. Бісектриса BD трикутника ABC ділить сторону AC на відрізки AD і DC, довжини яких відносяться як 3 : 5. Знайдіть сторони AB і BC, якщо їхня сума дорівнює 56 см.

835. Радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, становить $\frac{2}{9}$ висоти, проведеної до основи трикутника. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 72 см.

836. Сторони трикутника дорівнюють 2,5 см, 4,5 см і 6 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо його більша сторона дорівнює 24 см.

837. У трикутник ABC вписано ромб $ADEF$ так, що кут A у них спільний, а вершина E належить стороні BC. Знайдіть сторону ромба, якщо $AB = a$, $AC = b$.

838. Периметр паралелограма дорівнює 72 см, а його висоти відносяться як 5 : 7. Знайдіть сторони паралелограма.

839. Дано три точки, які не лежать на одній прямій. Проведіть пряму, рівновіддалену від цих точок. Скільки розв'язків має задача?

840. Пряма MB перетинає коло в точках A і B (точка A лежить між точками M і B), а пряма MD — у точках C і D (точка C лежить між точками M і D). Знайдіть відрізок AB, якщо $AB = MC$, $MA = 20$ см, $CD = 11$ см.

841. Пряма AB дотикається до кола в точці B, а пряма AC перетинає коло в точках C і D (точка D лежить між точками A і C). Знайдіть відрізок CD, якщо $AB = 6$ см, $AC = 9$ см.

842. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, $CM = 4$ см, $DM = 6$ см, відрізок AM на 2 см більший за відрізок BM. Знайдіть хорду AB.

843. На одній стороні кута з вершиною в точці A позначили точки B і C, а на другій — точки D і E, причому $AB = 10$ см, $AC = 18$ см, $AD : AE = 5 : 9$. Знайдіть відрізок CE, якщо $BD = 20$ см.

3. Розв'язування прямокутних трикутників

844. Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 10 см, а відстань між серединою гіпотенузи та основою висоти трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює 6 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

845. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а висота, проведена до основи, на 6 см менша від основи. Знайдіть основу трикутника.

846. Із точки K, що лежить поза прямою a, проведено до цієї прямої похилі KA і KB, які утворюють з нею кути 45° і 30° відповідно. Знайдіть проекцію похилої KB на пряму a, якщо $KA = 8\sqrt{6}$ см.

847. Перпендикуляр, проведений із точки перетину діагоналей ромба до його сторони, ділить її на відрізки завдовжки 4 см і 25 см. Знайдіть діагоналі ромба.

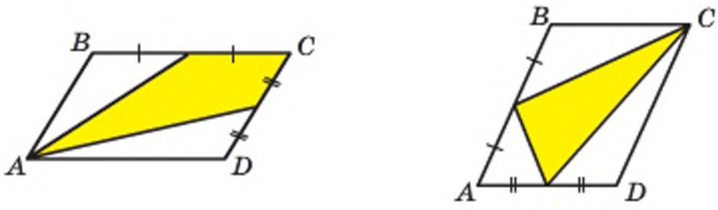
848. Коло, центр якого належить гіпотенузі прямокутного трикутника, дотикається до більшого катета й проходить через вершину протилежного гострого кута. Знайдіть радіус кола, якщо катети дорівнюють 5 см і 12 см.

849. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відстань від вершини меншого гострого кута трикутника до центра вписаного кола.

850. Перпендикуляр, опущений із точки кола на його діаметр, ділить діаметр на два відрізки, один з яких на 27 см більший за другий. Знайдіть діаметр кола, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 18 см.

4. Многокутники. Площа многокутника

851. Площа паралелограма $ABCD$ дорівнює S. Знайдіть площу зафарбованої фігури (рис. 238).



а *б*

Рис. 238

852. Знайдіть площу паралелограма $ABCD$, якщо $BD \perp AD$, $BD = 16$ см, $\angle A = 45°$.

853. Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює d.

854. Знайдіть площу рівностороннього трикутника, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює R.

855. Катет прямокутного трикутника дорівнює b, а протилежний йому кут дорівнює β. Знайдіть площу трикутника.

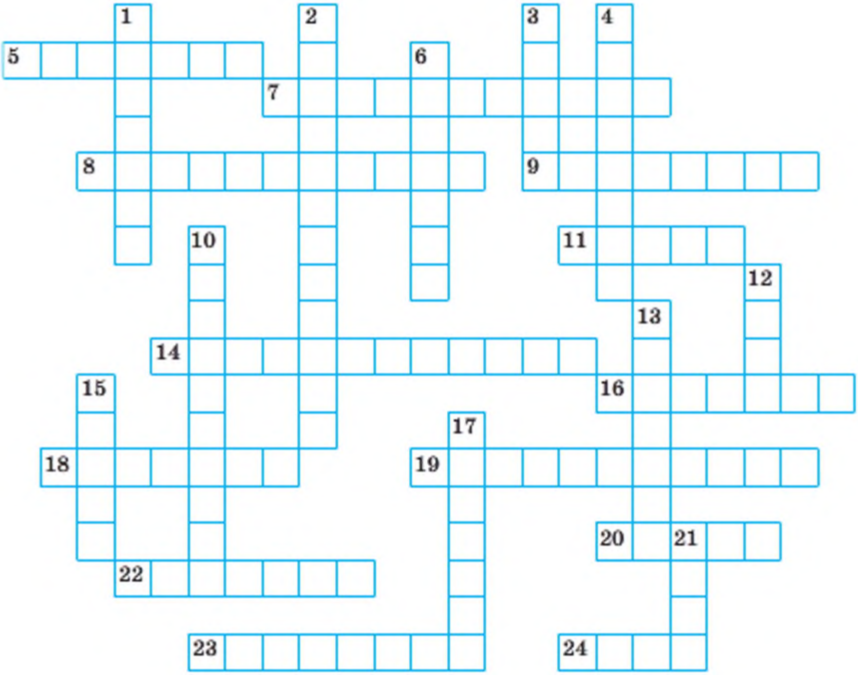
856. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α, а гіпотенуза дорівнює c. Знайдіть площу трикутника.

857. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 15 см, а висота — $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 150°.

858. Діагоналі рівнобічної трапеції є бісектрисами її гострих кутів і точкою перетину діляться у відношенні 5 : 13. Знайдіть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 90 см.

859. Площа рівнобічної трапеції дорівнює $36\sqrt{2}$ см², а гострий кут — 45°. Знайдіть висоту трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

860. Розгадайте кросворд.



По горизонталі: 5. Давньогрецький учений. **7.** Один із видів паралелограма. **8.** Кут, вершиною якого є центр кола. **9.** Чотирикутник, у якого тільки одна пара паралельних сторін. **11.** Відношення катета, протилежного гострому куту прямокутного трикутника, до гіпотенузи. **14.** Геометрична фігура. **16.** Трикутники, кути яких рівні, а сторони пропорційні. **18.** Відношення катета, прилеглого до гострого кута прямокутного трикутника, до гіпотенузи. **19.** Многокутники, які мають рівні площі. **20.** Давньогрецький математик. **22.** Прямокутник, у якого всі сторони рівні. **23.** Сума сторін многокутника. **24.** Одна із частин кола, на які ділять його дві точки.

По вертикалі: 1. Відношення катета, протилежного гострому куту прямокутного трикутника, до прилеглого катета. **2.** Вид чотирикутника. **3.** Сторона прямокутного трикутника. **4.** Кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають це коло. **6.** Пряма, яка проходить через точку кола та перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку. **10.** Сторона прямокутного трикутника, квадрат якої дорівнює сумі квадратів двох інших сторін. **12.** Паралелограм, у якого всі сторони рівні. **13.** Твердження, правильність якого встановлюють за допомогою доведення. **15.** Величина. **17.** Хорда кола, яка проходить через його центр. **21.** Допоміжна теорема.

ДРУЖИМО З КОМП'ЮТЕРОМ

У 7 класі ви вже користувалися комп'ютером під час вивчення геометрії. У 8 класі ви вивчатимете більш складні геометричні фігури, а отже, зможете вдосконалити свої вміння, опанувавши складніші інструменти графічних пакетів.

Нагадаємо, що, крім завдань, наведених у цьому розділі, ви зможете застосовувати різноманітні програми, призначені спеціально для засвоєння шкільного курсу геометрії. Ви можете звертатися до глобальної мережі Інтернет для пошуку цих програм та іншої потрібної вам інформації.

У цьому розділі наведено завдання, які ви зможете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем. Більшість із них — завдання на побудову геометричних фігур, для яких ви застосовуватимете певний графічний редактор. Крім цих завдань, ви можете виконувати завдання з рубрики «Практичні завдання» та розв'язувати задачі на побудову не лише в зошиті, а й за допомогою комп'ютера. У 7 класі ви дізналися, що в геометрії побудови проводять за допомогою лінійки та циркуля. Тому вам потрібно знайти серед інструментів графічного редактора ті, що виконують функції лінійки та циркуля.

1. Чотирикутник та його елементи

1. Побудуйте чотирикутники, що ілюструватимуть теоретичні відомості цього параграфа.

2. Паралелограм. Властивості паралелограма

2. Визначте, якими властивостями паралелограма треба скористатися, щоби правильно зобразити цю фігуру. Які інструменти графічного редактора треба для цього застосувати? Нарисуйте паралелограм і побудуйте дві його висоти, що виходять з однієї вершини. Який інструмент ви використаєте, щоб опустити висоту на задану сторону?

3. Ознаки паралелограма

3. Уявіть собі, що зображено чотирикутник. У який спосіб ви можете перевірити, чи є він паралелограмом? Якими інструментами графічного редактора можна для цього скористатися?

4. Прямокутник

4. Знайдіть у графічному редакторі засіб, що дає змогу швидко будувати різні прямокутники.

5. Ромб

5. Яка властивість ромба дає змогу швидко й правильно побудувати ромб?

6. Побудуйте два перпендикулярних відрізки, що перетинаються. Уявіть собі, що вони є діагоналями чотирикутника, і побудуйте цей чотирикутник. Чи обов'язково ви отримаєте ромб? Якою умовою треба доповнити це завдання, щоб отриманий чотирикутник неодмінно виявився ромбом?

6. Квадрат

7. Знайдіть у графічному редакторі засіб, який дає змогу швидко будувати різні квадрати.

7. Середня лінія трикутника

8. Який інструмент графічного редактора ви використаєте, щоб знайти середину відрізка?

9. Нарисуйте довільний чотирикутник. Виконайте побудову, яка проілюструє ключову задачу п. 7. Як ви перевірите, що відрізки, які сполучають середини сторін даного чотирикутника, утворили паралелограм?

8. Трапеція

10. Побудуйте трапецію. Якими інструментами графічного редактора ви скористаєтеся, щоб забезпечити паралельність сторін трапеції? щоби побудувати рівнобічну трапецію? щоби побудувати прямокутну трапецію?

9. Центральні та вписані кути

11. Нарисуйте коло та побудуйте кілька вписаних кутів, які спираються на одну й ту саму дугу. Користуючись інструментами графічного редактора, визначте їхні градусні міри.

12. Нарисуйте коло, побудуйте центральний і вписаний кути, які спираються на одну й ту саму дугу. Перевірте, як співвідносяться величини цих кутів.

10. Описане та вписане кола чотирикутника

13. Знайдіть оптимальний спосіб побудови рисунків, на яких мають бути зображені коло, вписані в коло та описані навколо кола чотирикутники. Яка властивість дотичної до кола дає змогу правильно зобразити описаний чотирикутник?

11. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки

14. Побудуйте рисунки, що ілюструють теорему Фалеса та теорему про пропорційні відрізки. Виміряте довжини потрібних відрізків і перевірте, чи виконуються для них твердження цих теорем. Наскільки точно можна виміряти відрізки засобами графічного редактора, яким ви користуєтеся?

15. Уявіть собі, що у вашому графічному редакторі немає інструмента, який дає змогу будувати паралельні прямі. Як ви можете побудувати паралельні прямі, спираючись на теорему Фалеса?

12. Подібні трикутники

16. Опануйте інструменти графічного редактора, які дають змогу зображати фігури, що мають однакову форму, але різні розміри. Побудуйте за допомогою цих інструментів подібні трикутники.

17. Побудуйте графічну ілюстрацію до леми про подібні трикутники. Користуючись зазначеними інструментами, покажіть, що зображені трикутники справді є подібними.

13. Перша ознака подібності трикутників

18. Побудуйте два відрізки різної довжини. Уявіть собі, що це відповідні сторони подібних трикутників. Узявши перший із цих відрізків як сторону, побудуйте довільний трикутник. Побудуйте подібний йому трикутник, узявши другий відрізок як його сторону; застосуйте для цього першу ознаку подібності трикутників.

14. Друга та третя ознаки подібності трикутників

19. Придумайте самостійно та виконайте завдання, яке дало б змогу за допомогою комп'ютера продемонструвати другу та третю ознаки подібності трикутників.

15. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику

20. Побудуйте прямокутний трикутник та опустіть висоту на гіпотенузу. Переконайтеся, що виконується лема п. 15.

16. Теорема Піфагора

21. Часто теорему Піфагора ілюструють, побудувавши квадрати на сторонах прямокутного трикутника. Багато поколінь школярів називають цей рисунок «Піфагорові штани» й формулюють теорему в жартівливій формі: «Піфагорові штани на всі сторони рівні». Побудуйте цей рисунок.

22. Чи є в графічному редакторі інструмент для розрізання фігури на частини, якими надалі можна оперувати окремо?

23. Розрізавши на частини квадрати, побудовані на катетах, можна скласти із цих частин квадрат, побудований на гіпотенузі. Для довільного трикутника пошук таких частин — задача непроста. А ось для рівнобедреного трикутника знайти такий спосіб розрізання досить легко. Які це частини? Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник. Створіть такий набір фігур, щоб, переміщуючи їх, можна було скласти або квадрат, побудований на гіпотенузі, або два квадрати, побудовані на катетах.

17. Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника

24. Опануйте інструменти калькулятора, які дають змогу знаходити тригонометричні функції гострого кута трикутника.

25. Знайдіть інструменти для знаходження тригонометричних функцій у мові програмування, яку ви вивчаєте.

18. Розв'язування прямокутних трикутників

26. Під час розв'язування задач цього пункту користуйтеся калькулятором для обчислень.

19. Многокутники

27. Сформулюйте який-небудь набір властивостей многокутника (кількість сторін, опуклість, вписаний у коло, описаний навколо кола тощо). Побудуйте многокутник, що має цей набір властивостей. Якими інструментами графічного редактора треба скористатися, щоб забезпечити виконання заданих властивостей?

20. Поняття площі многокутника. Площа прямокутника

28. Побудуйте квадрат і візьміть його за одиничний. Скопіюйте його кілька разів. З отриманих одиничних квадратів складіть кілька різних рівновеликих прямокутників.

21. Площа паралелограма

29. Створіть набір фігур, за допомогою яких можна проілюструвати доведення теореми про площу паралелограма. Якою властивістю площі многокутника ми при цьому користуємося?

30. Теорема 21.1 є справедливою незалежно від того, яку зі сторін паралелограма з опущеною на неї висотою вибрати для обчислення площі. Створіть набір фігур, за допомогою яких можна проілюструвати це твердження.

22. Площа трикутника

31. Створіть набори фігур, за допомогою яких можна проілюструвати доведення тверджень теоретичної частини цього параграфа.

23. Площа трапеції

32. Побудуйте довільну трапецію. Розріжте її на частини так, щоби показати, що формула для обчислення площі трапеції є правильною.

ВІДОМОСТІ З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

Найпростіші геометричні фігури та їхні властивості

1. Точки та прямі

- *Основна властивість прямої*. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.
- Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що перетинаються.
- Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.

2. Відрізок і його довжина

- Точки A і B прямої a (рис. 248) обмежують частину прямої, яку разом з точками A і B називають відрізком, а точки A і B — кінцями цього відрізка.

Рис. 248

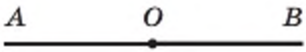


Рис. 249

- Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.
- Рівні відрізки мають рівні довжини, і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки.
- *Основна властивість довжини відрізка*. Якщо точка C є внутрішньою точкою відрізка AB, то відрізок AB дорівнює сумі відрізків AC і CB, тобто $AB = AC + CB$.
- Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB. Якщо точки A і B збігаються, то вважають, що відстань між ними дорівнює нулю.

3. Промінь. Кут

- Точка O прямої AB (рис. 249) розбиває пряму на дві частини, кожну з яких разом з точкою O називають променем або півпрямою. Точку O називають початком променя.
- Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають доповняльними.

- Два промені OA та OB, що мають спільний початок (рис. 250), розбивають площину на дві частини, кожну з яких разом із променями OA та OB називають кутом. Промені OA та OB називають сторонами кута, а точку O — вершиною кута.

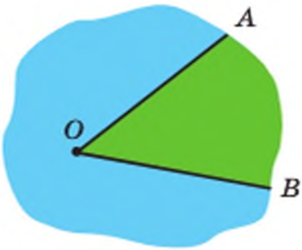


Рис. 250

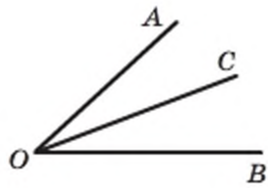


Рис. 251

- Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають розгорнутим.
- Два кути називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.
- Бісектрисою кута називають промінь з початком у вершині кута, який ділить цей кут на два рівних кути.

4. Вимірювання кутів

- Кожний кут має певну величину (градусну міру).
- Кут, градусна міра якого дорівнює 90°, називають прямим. Кут, градусна міра якого менша від 90°, називають гострим. Кут, градусна міра якого більша за 90°, але менша від 180°, називають тупим.
- Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути.
- *Основна властивість величини кута.* Якщо промінь OC ділить кут AOB на два кути AOC і COB (рис. 251), то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

5. Суміжні та вертикальні кути

- Два кути називають суміжними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями.
- Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

- Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.
- Вертикальні кути рівні.

6. Перпендикулярні прямі. Серединний перпендикуляр

- Дві прямі називають перпендикулярними, якщо при їхньому перетині утворився прямий кут.
- Неперпендикулярні прямі при перетині утворюють пару рівних гострих кутів і пару рівних тупих кутів. Величину гострого кута називають кутом між неперпендикулярними прямими.
- Якщо прямі перпендикулярні, то вважають, що кут між ними дорівнює 90°.
- Два відрізки називають перпендикулярними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.
- На рисунку 252 зображено пряму a та перпендикулярний до неї відрізок AB, кінець B якого належить прямій a. У такому випадку говорять, що з точки A на пряму a опущено перпендикуляр AB. Точку B називають основою перпендикуляра AB.

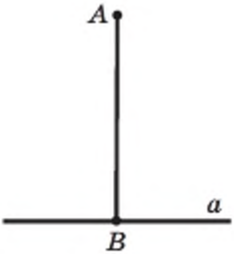


Рис. 252

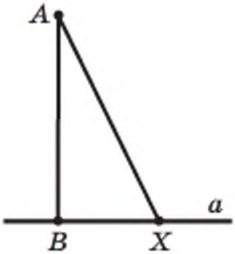


Рис. 253

- Довжину перпендикуляра AB називають відстанню від точки A до прямої a. Якщо точка A належить прямій a, то вважають, що відстань від точки A до прямої a дорівнює нулю.
- Опустимо з точки A на пряму a перпендикуляр AB (рис. 253). Нехай X — довільна точка прямої a, відмінна від точки B. Відрізок AX називають похилою, проведеною з точки A до прямої a.
- Через дану точку проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної.

- Пряму, яка перпендикулярна до відрізка **та проходить через** його середину, називають серединним перпендикуляром відрізка.
- Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.
- Якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка.

Трикутники

7. Трикутник і його елементи. Рівні трикутники

- Три точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, сполучено відрізками (рис. 254). Утворена фігура обмежує частину площини, яку разом з відрізками AB, BC і CA називають трикутником. Точки A, B, C називають вершинами, а відрізки AB, BC, CA — сторонами трикутника. Трикутник називають і позначають за його вершинами.

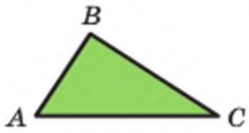


Рис. 254

- У трикутнику ABC кут B називають кутом, протилежним стороні AC, а кути A і C — кутами, прилеглими до сторони AC.
- Периметром трикутника називають суму довжин усіх його сторін.
- Трикутник називають гострокутним, якщо всі його кути гострі; прямокутним, якщо один із його кутів прямий; тупокутним, якщо один із його кутів тупий.
- Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають гіпотенузою, а сторони, прилеглі до прямого кута, — катетами.
- *Нерівність трикутника.* Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.
- Два трикутники називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням. Ті пари сторін і кутів, які суміщаються при накладанні рівних трикутників, називають відповідними сторонами й відповідними кутами.
- У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути.
- У трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони.
- У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.

8. Висота, медіана, бісектриса трикутника

- ✓ Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають висотою трикутника.
- ✓ Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони, називають медіаною трикутника.
- ✓ Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають бісектрисою трикутника.

9. Ознаки рівності трикутників

- ✓ *Перша ознака рівності трикутників: за двома сторонами та кутом між ними*. Якщо дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам та куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.
- ✓ *Друга ознака рівності трикутників: за стороною та двома прилеглими до неї кутами*. Якщо сторона та два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.
- ✓ *Третя ознака рівності трикутників: за трьома сторонами*. Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

10. Рівнобедрений трикутник та його властивості. Рівносторонній трикутник

- ✓ Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають рівнобедреним.
- ✓ Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають бічними сторонами, а третю сторону — основою рівнобедреного трикутника.
- ✓ Вершиною рівнобедреного трикутника називають спільну точку його бічних сторін.
- ✓ У рівнобедреному трикутнику:
  1) кути при основі рівні;
  2) бісектриса трикутника, проведена до його основи, є медіаною та висотою трикутника.
- ✓ Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають рівностороннім.

- У рівносторонньому трикутнику:
  1) усі кути рівні;
  2) бісектриса, висота й медіана, проведені з однієї вершини, збігаються.

11. Ознаки рівнобедреного трикутника

- Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.
- Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.
- Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.
- Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.

Паралельні прямі. Сума кутів трикутника

12. Паралельні прямі

- Дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються.
- *Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності прямих).* Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.
- Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.
- Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.
- Відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.

13. Ознаки паралельності двох прямих

- Якщо дві прямі a і b перетнути третьою прямою c, то утвориться вісім кутів (рис. 255). Пряму c називають січною прямих a і b.
  Кути 3 і 6, 4 і 5 називають односторонніми.
  Кути 3 і 5, 4 і 6 називають різносторонніми.
  Кути 6 і 2, 5 і 1, 3 і 7, 4 і 8 називають відповідними.

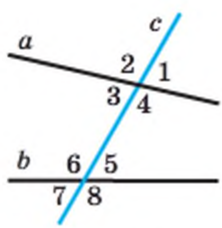


Рис. 255

- ✓ Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.
- ✓ Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180°, то прямі паралельні.
- ✓ Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

14. Властивості паралельних прямих

- ✓ Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то:
  - кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні;
  - кути, які утворюють пару відповідних кутів, рівні;
  - сума кутів, які утворюють пару односторонніх кутів, дорівнює 180°.
- ✓ Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої.

15. Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника

- ✓ Сума кутів трикутника дорівнює 180°.
- ✓ Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.
- ✓ Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний із кутом цього трикутника.
- ✓ Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.
- ✓ Зовнішній кут трикутника більший за кожний із кутів трикутника, не суміжних з ним.

16. Ознаки рівності прямокутних трикутників

- ✓ *Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та катетом.* Якщо гіпотенуза та катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та катету другого, то такі трикутники рівні.
- ✓ *Ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами.* Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.
- ✓ *Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом.* Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

- *Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом*. Якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні.
- *Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та гострим кутом*. Якщо гіпотенуза та гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

17. Властивості прямокутного трикутника

- У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет.
- Катет, який лежить проти кута, величина якого дорівнює 30°, дорівнює половині гіпотенузи.
- Якщо катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.

Коло та круг

18. Геометричне місце точок

- Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину всіх точок, які мають певну властивість.
- Серединний перпендикуляр відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.
- Бісектриса кута є геометричним місцем точок, які належать куту й рівновіддалені від його сторін.

19. Коло та круг, їхні елементи

- Колом називають геометричне місце точок, відстані від яких до заданої точки дорівнюють даному додатному числу. Задану точку називають центром кола.
- Будь-який відрізок, що сполучає точку кола з його центром, називають радіусом кола.
- Відрізок, який сполучає дві точки кола, називають хордою кола. Хорду, яка проходить через центр кола, називають діаметром.

- ✔ Діаметр кола вдвічі більший за його радіус.
- ✔ Кругом називають геометричне місце точок, відстані від яких до заданої точки не більші за дане додатне число. Задану точку називають центром круга. Радіус кола, яке обмежує круг, називають радіусом круга. Якщо X — довільна точка круга із центром O та радіусом R, то $OX \leqslant R$.
  Коло, яке обмежує круг, йому належить.
- ✔ Хорда й діаметр круга — це хорда й діаметр кола, яке обмежує круг.

20. Властивості кола

- ✔ Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.
- ✔ Діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.

21. Взаємне розміщення прямої та кола. Дотична до кола

- ✔ Пряма та коло можуть не мати спільних точок, мати дві спільні точки або мати одну спільну точку.
- ✔ Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають дотичною до кола.
- ✔ Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.
- ✔ Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.
- ✔ Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.
- ✔ Якщо через дану точку до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.

22. Описане та вписане кола трикутника

- ✔ Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.
  На рисунку 256 зображено коло, описане навколо трикутника. У цьому разі також говорять, що трикутник вписаний у коло.

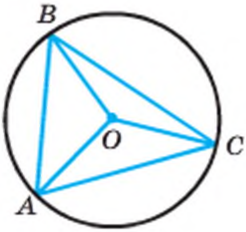


Рис. 256

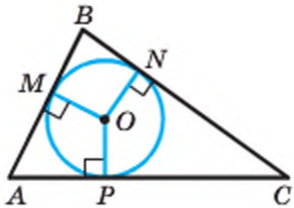


Рис. 257

- ✔ Центр описаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його вершин.
- ✔ Навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Центр кола, описаного навколо трикутника, — це точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника.
- ✔ Серединні перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці.
- ✔ Коло називають вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.
  На рисунку 257 зображено коло, вписане в трикутник. У цьому разі також говорять, що трикутник описаний навколо кола.
- ✔ Центр вписаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його сторін.
- ✔ У будь-який трикутник можна вписати коло. Центр кола, вписаного в трикутник, — це точка перетину бісектрис трикутника.
- ✔ Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.
- ✔ Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, обчислюють за формулою $r = \frac{a+b-c}{2}$, де r — радіус вписаного кола, a і b — катети, c — гіпотенуза.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

§ 1. Чотирикутники

1. Чотирикутник та його елементи

14. 18 см, 12 см, 6 см, 27 см. **15.** 10 см, 8 см, 16 см, 30 см. **20.** 1) 72°, 130°, 78°, 80°; 2) 22°, 230°, 28°, 80°. **22.** 10 см. **26.** *Вказівка*. Побудуйте трикутник за двома сусідніми сторонами чотирикутника та відомим кутом між ними. Третя сторона цього трикутника є діагоналлю шуканого чотирикутника. **29.** *Вказівка*. Побудуйте трикутник ABC за двома сторонами AB і BC та кутом B між ними. У трикутнику ACD відомо сторону AC, прилеглий кут CAD ($\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC$) і суму сторін AD і CD. Побудову трикутника за стороною, прилеглим кутом і сумою двох інших його сторін було розглянуто в курсі геометрії 7 класу. **34.** 32°.

2. Паралелограм. Властивості паралелограма

49. 90°. **53.** 9 см, 14 см. **57.** $AB = BC = CD = AD = 6$ см. **58.** 32 см. **59.** 45°, 135°. **60.** 6 см, 12 см. **64.** 80 см. **65.** 9 см, 24 см. **66.** 20 см, 24 см. **67.** 6 см. **68.** 48°, 132°. **71.** 40 см. **72.** 5 см, 9 см. **74.** 25 см. **77.** 3. **78.** 2 : 1. **79.** 72°, 108°. **82.** *Вказівка*. Шукана точка є точкою перетину висот трикутника ABC. **84.** *Вказівка*. Доведіть, що $\Delta MAD = \Delta DKC = \Delta MBK$. **85.** *Вказівка*. Побудуйте паралелограм, одна вершина якого збігається з вершиною даного кута, дві інші вершини лежать на сторонах кута, а точка перетину діагоналей паралелограма збігається з даною точкою. **86.** 24 см або 14 см.

3. Ознаки паралелограма

108. 32°. **109.** 16 см.

4. Прямокутник

119. 6 см, 12 см. **120.** 5 см, 10 см. **121.** 15 см, 25 см. **122.** 12 см. **124.** *Вказівка*. Нехай CM — медіана прямокутного трикутника ABC, проведена до гіпотенузи AB (рис. 239). На продовженні відрізка CM за точку M відкладіть відрізок MD, який дорівнює CM. Визначте вид чотирикутника $ACBD$ і скористайтеся властивостями

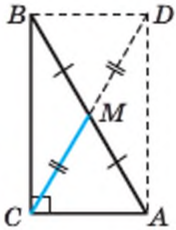


Рис. 239

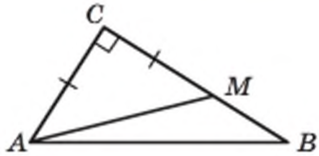


Рис. 240

чотирикутників такого виду. **127.** 30°, 60°. *Вказівка*. Покажіть, що в прямокутному трикутнику ABM гіпотенуза AM у 2 рази більша за катет BM. **128.** 4,5 см. **131.** 1) *Вказівка*. Задача зводиться до побудови прямокутного трикутника за гіпотенузою та різницею катетів. На рисунку 240 зображено прямокутний трикутник ACB, у якому відомо гіпотенузу AB і різницю катетів. На катеті BC позначено точку M так, що $CM = AC$. Тоді $BM = BC - AC$. Звідси $\angle AMB = 135°$. Отже, можна побудувати трикутник AMB за сторонами AB і MB та кутом AMB. **132.** 48°. **133.** 90°. **134.** Трикутник ACE рівнобедрений.

5. Ромб

157. 6 см. **160.** 1) *Вказівка*. Задача зводиться до побудови прямокутного трикутника за сумою катетів і гострим кутом. На рисунку 241 зображено прямокутний трикутник ABC, у якому відомо кут A та суму катетів AC і CB. Тоді $AM = AC + CB$, $\angle CMB = 45°$. Трикутник AMB можна побудувати за стороною AM і двома прилеглими кутами. **161.** *Вказівка*. Середина відрізка NK — точка O є точкою перетину діагоналей ромба. Тоді пряма MO паралельна сторонам BC і AD. Довжина відрізка MO дорівнює половині сторони ромба. **163.** 30°, 72°, 78°; 18 см.

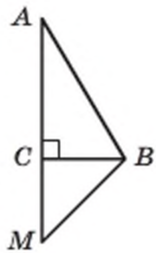


Рис. 241

6. Квадрат

174. 28 см. **177.** 48 см. **180.** *Вказівка*. Доведіть, що $AC \perp MK$. **181.** *Вказівка*. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою MK. **182.** *Вказівка*. Побудуйте два прямокутних трикутники, у кожному з яких один катет дорівнює стороні квадрата, а гіпотенузи є даними відрізками. Доведіть рівність цих трикутників. **184.** *Вказівка.* Побудуйте рівносторонній трикутник BO_1C так, щоб точка O_1 належала квадрату. Покажіть, що $\angle O_1AD = \angle O_1DA = 15°$. Звідси випливає, що точки O і O_1 збігаються. **185.** *Вказівка.* На продовженні відрізка CD за точку D позначте точку M_1 так, щоб $DM_1 = BM$. Доведіть, що $\angle EAM_1 = \angle EM_1A$.

6. Середня лінія трикутника

202. 28 см. **206.** $MK = 4$ см. *Вказівка.* Проведіть середню лінію трикутника ABC. **207.** 9 см. *Вказівка.* Розгляньте трикутник, для якого відрізок MK є середньою лінією. **210.** *Вказівка.* Нехай точки M, K і F — середини відрізків AB, AD і AC відповідно. Визначте, яким прямим належать висоти трикутника MKF. **211.** *Вказівка.* Нехай точки E, F і K — середини відрізків AC, BC і BD відповідно. Доведіть, що трикутник EFK рівнобедрений. **213.** 37°. **214.** 8 см.

8. Трапеція

234. 16 см, 34 см. **236.** 16 см. **237.** 50°, 60°. **239.** 28 см. **247.** 7,2 см, 10,8 см. **249.** $2h$. **250.** 8 см, 20 см, 20 см, 20 см. **251.** 12 см, 12 см, 12 см. **252.** 60°, 120°. **253.** 8 см, 16 см. **254.** 60°, 120°. **255.** Якщо гострий кут трапеції дорівнює 45°. **260.** 7 см. **261.** 13 см, 21 см. **264.** $\frac{3a}{4}$. **265.** 72°, 108°. **266.** 8 см. *Вказівка.* Проведіть через вершину C пряму, паралельну прямій BD. Нехай E — точка перетину проведеної прямої з прямою AD. Розгляньте трикутник ACE. **267.** *Вказівка.* Точка перетину бісектрис — вершина прямокутного трикутника, гіпотенузою якого є бічна сторона трапеції. Розгляньте медіану цього трикутника, проведену до гіпотенузи, і доведіть, що вона паралельна основам трапеції. **268.** 1) *Вказівка.* Через одну з вершин меншої основи проведіть пряму, паралельну бічній стороні трапеції. Задачу зведено до побудови трикутника за трьома сторонами; 2) *Вказівка.* Через одну з вершин меншої основи проведіть пряму, паралельну діагоналі трапеції. Задачу зведено до побудови трикутника за двома сторонами та висотою, проведеною до третьої сторони. **271.** $a + b$. *Вказівка.* Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма. Проведіть перпендикуляри AM, OK і CE до прямої, яка проходить через точку B, і покажіть, що $OK = \frac{a+b}{2}$. **275.** 1) 120°; 2) 120°.

9. Центральні та вписані кути

297. *Вказівка*. Проведіть хорду BC і скористайтеся тим, що кут AMC — зовнішній кут трикутника BMC. **298.** *Вказівка*. Проведіть хорду BC і скористайтеся тим, що кут ABC — зовнішній кут трикутника BMC. **299.** $10°$. **300.** $40°$, $40°$, $100°$. **301.** $120°$, $20°$, $40°$. **306.** $56°$, $56°$, $68°$. **308.** *Вказівка*. Опустіть із вершин A і B висоти трикутника ABC. **309.** *Вказівка*. Через спільну точку кіл проведіть їхню спільну дотичну. Скориставшися ключовою задачею п. 9, доведіть, що розглядувані хорди паралельні спільній дотичній. **310.** *Вказівка*. $\angle MBD = \angle MBC + \angle CBD = \angle MBA + \angle BAC = \angle BMD$. **311.** Шукане ГМТ — дві дуги, зображені на рисунку **242, за винятком** точок A і B. *Вказівка*. Проведіть два промені AC і BC так, що $\angle BAC = \angle ABC = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Нехай ці промені перетинаються в точці C. Очевидно, що $\angle ACB = \alpha$. Опишіть коло навколо трикутника ABC. Виконавши аналогічну побудову в іншій півплощині відносно прямої AB, отримайте трикутник ABC_1, навколо якого теж опишіть коло. Дуги ACB і AC_1B, за винятком точок A і B, є шуканим ГМТ. **313.** *Вказівка*. Скористайтеся результатами задачі 311. **314.** *Вказівка*. Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, точка M — середина сторони AD (рис. 243). Тоді $OM = \frac{1}{2}AB$. Трикутник AOD можна побудувати (див. задачу 313). **316.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 1 п. 9. **317.** Шукане ГМТ виділено на рисунку 244 синім кольором.

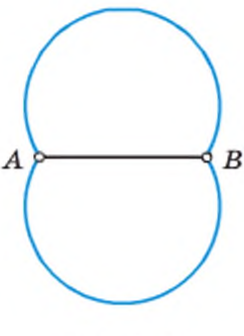


Рис. 242

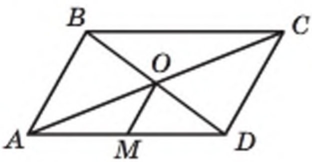


Рис. 243

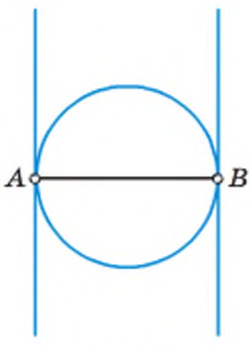


Рис. 244

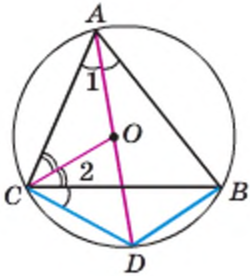


Рис. 245

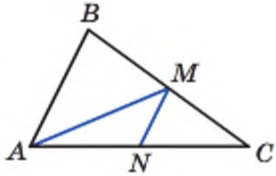


Рис. 246

318. *Вказівка*. $\angle DCB = \angle DAB = \angle 1$ (рис. 245). Тоді $\angle OCD = \angle 1 + \angle 2$, $\angle COD = \angle 1 + \angle ACO$. Проте $\angle ACO = \angle 2$. Отже, $\angle OCD = \angle COD$. **319.** *Вказівка*. Нехай відрізки AA_1 і CC_1 перетинаються в точці M. Обчисліть кут C_1MB_1, скориставшися результатами задачі 297. **320.** *Вказівка*. Побудуйте коло із центром у точці O_1 і радіусом, який дорівнює різниці радіусів даних кіл. Проведіть через точку O_2 дотичну до побудованого кола. **321.** 1) *Вказівка*. Нехай точка O — центр вписаного кола трикутника ABC, у якому відомо кут B і сторону AC. Доведіть, що $\angle AOC = 90° + \frac{1}{2}\angle B$. У трикутнику AOC відомо сторону AC, кут AOC і висоту, проведену з вершини O (радіус вписаного кола). Далі див. задачу 312; 2) *Вказівка*. На рисунку 246 зображено трикутник ABC, у якому відомо сторону AC, кут B і медіану, проведену до сторони BC. Проведіть середню лінію MN трикутника ABC. Тоді $\angle NMC = \angle B$. Побудуйте ГМТ точок X таких, що $\angle NXC = \angle B$. **322.** 9 см, 10 см, 11 см. **323.** $P_1 + P_2 + P_3$. **324.** Прямокутний або рівнобедрений.

10. Описане та вписане кола чотирикутника

342. 90°. **343.** 6 см. **347.** 88°, 74°, 92°, 106°. **348.** 62°, 118°. **350.** 196 см. **351.** 6 см. **352.** 60°, 120°. **353.** $\frac{d}{2}$. *Вказівка*. Доведіть, що кут між діагоналлю та більшою основою трапеції дорівнює 60°. Далі скористайтеся ключовою задачею п. 8. **354.** 6 см. *Вказівка*. Доведіть, що центр кола, описаного навколо трапеції, є серединою більшої основи. **355.** *Вказівка*. Опишіть коло навколо чотирикутника $CMKB$. **357.** 30°. *Вказівка*. Доведіть, що навколо чотирикутника $AMOK$ можна описати коло, і скористайтеся тим, що бісектриси трикутника перетинаються в одній точці. **358.** 60°. *Вказівка*.

Позначивши $\angle N = \alpha$, виразіть через α кут AOB. **359.** *Вказівка*. Доведіть, що навколо чотирикутника $ACBO$ можна описати коло. **360.** *Вказівка*. Доведіть, що кут CPB не змінює своєї величини. **361.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що в прямокутних трикутниках APK і AMQ гострі кути APQ і AMQ рівні. **362.** *Вказівка*. Точки A, C, A_1 і C_1 лежать на колі з діаметром AC. Скористайтеся тим, що серединний перпендикуляр хорди проходить через центр кола. **363.** *Вказівка*. Доведіть, що середня лінія даної трапеції дорівнює сумі радіусів побудованих кіл. **366.** 128°.

§ 2. Подібність трикутників

11. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки

386. 30 см. **388.** 12 см. **389.** 4 см. **390.** 6 см, 45°. **392.** 20 см, 24 см. **393.** 5 см, 10 см. **395.** 8 см, 12 см. **397.** 6 см, 5 см, 6 см. **398.** 15 см, 12 см, 21 см. **399.** 15 см. **402.** 45 см. **404.** 21 см, 15 см. **405.** 45 см, 18 см. **406.** 30 см, 50 см. **407.** 7 : 9. **408.** 3 : 5. **409.** 9 см. **410.** 50 см. **411.** 3 : 5. *Вказівка*. Проведіть через точку K пряму, паралельну прямій AM. **412.** 1) 3 : 7. *Вказівка*. Проведіть через точку M пряму, паралельну прямій BK; 2) 2 : 3. *Вказівка*. Проведіть через точку K пряму, паралельну прямій CM. **413.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що середня лінія трапеції ділить діагональ навпіл. **415.** 2) *Вказівка*. Нехай дано кут ABC. Проведіть пряму OK, паралельну променю BC (точка K належить стороні AB). На промені KA позначте точку M таку, що $MK : KB = 2 : 3$. **416.** 3) *Вказівка*. Побудуйте прямокутний трикутник BDK, у якому катет BD дорівнює даній висоті, а гіпотенуза BK — даній медіані. За даним кутом і кутом BKD знайдіть кут між двома медіанами трикутника; 4) *Вказівка*. Нехай ABC — шуканий трикутник, медіани AA_1, BB_1 і CC_1 якого перетинаються в точці M. На промені MB_1 позначте точку F так, щоб $MB_1 = B_1F$. Трикутник MCF можна побудувати за трьома сторонами. **417.** 2) *Вказівка*. Нехай ABC — шуканий трикутник, медіани AA_1 і CC_1 якого перетинаються в точці M. Трикутник AMC можна побудувати за двома сторонами та висотою, проведеною до третьої сторони. **419.** *Вказівка*. Проведіть через точку C пряму, паралельну прямій BD. Нехай проведена пряма перетинає сторону AB у точці E. Доведіть, що $BC = BE$, і скористайтеся теоремою про пропорційні відрізки. **420.** a. **421.** 11 см.

12. Подібні трикутники

432. 33 м. **439.** 6 см. **440.** 9 см. **441.** 40 см, 60 см. **442.** 36 см. **443.** 8 см. **444.** 4,8 см. *Вказівка*. Через вершину A проведіть пряму, паралельну прямій BD. **445.** 6 см, 12 см. **446.** 36 см. **447.** 1) 30°, 30°, 120°; 2) 30°, 60°, 90°.

13. Перша ознака подібності трикутників

463. 6 см, 30 см. **464.** 10,5 см, 13,5 см. **467.** 42 см. **468.** 10 см, 14 см. **469.** 12,5 см, 3,5 см. **471.** 12 м. **475.** 24 см. **476.** 16 см. **477.** 16 см. **478.** 5 см. *Вказівка*. Проведіть через точку P діаметр кола та скористайтеся ключовою задачею 2 п. 13. **479.** 10 см. **480.** 27 см. **481.** 2) 36 см. **482.** 10 см. **483.** $\frac{ah}{a+h}$. **484.** 27 см, 15 см. **485.** 1) 20°, 160°; 2) 50°, 130°. **487.** 18 см.

14. Друга та третя ознаки подібності трикутників

496. 18 см, 30 см. **497.** 50 см, 20 см. **498.** 6 см. **500.** $\frac{ab}{a+b}$. *Вказівка*. Доведіть, що $\Delta KBM \backsim \Delta ABC$ із коефіцієнтом подібності $\frac{b}{a+b}$. **501.** 6 см. *Вказівка*. Доведіть, що $\Delta ABC \backsim \Delta BDC$. **502.** *Вказівка*. Доведіть, що $\Delta AHC \backsim \Delta ABD$ за другою ознакою подібності трикутників. Звідси $\angle ACH = \angle ABD$. **503.** *Вказівка*. Доведіть, що з подібності трикутників BMC і CMK випливає подібність трикутників ABM і KAM. **505.** *Вказівка*. Нехай кола перетинаються в точках E і F. Для двох пар хорд AB і EF, CD і EF застосуйте ключову задачу 2 п. 13. **506.** 9 см, 14 см. **508.** 10 см.

§ 3. Розв'язування прямокутних трикутників

15. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику

514. 15 см, 20 см. **515.** 30 см, 24 см. **516.** $2\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{5}$ см. **517.** 14,5 см. **518.** 62 см. **519.** 12,5 см. **520.** 12,8 см. **521.** 2,5 см. **522.** 196 см. *Вказівка*. Доведіть, що кінці бічної сторони трапеції та центр вписаного кола є вершинами прямокутного трикутника. **523.** 18 см. **525.** 7 см, 14 см. **526.** 14 см. **527.** 74°, 74°, 74°, 138°.

16. Теорема Піфагора

542. 13 см. **543.** 10 см. **544.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **545.** $a\sqrt{2}$. **546.** $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. **547.** $\frac{c}{\sqrt{2}}$. **548.** *а*) $\sqrt{6}$ см; *б*) $\sqrt{3}$ см; *в*) $4\sqrt{2}$ см. **549.** *а*) $\sqrt{2}$ см; *б*) 1 см. **550.** $4\sqrt{5}$ см. **551.** $4\sqrt{10}$ см. **552.** $4\sqrt{13}$ см. **553.** $4\sqrt{5}$ см. **554.** 10 см, 10 см, 12 см. **555.** 40 см, 25 см, 25 см. **556.** 20 см. **557.** 20 см. **558.** 24 см. **559.** 1,5 см, 22,5 см. **560.** 8 см, 6 см, 10 см. **561.** 6 см, $2\sqrt{73}$ см. **562.** 168 см. **563.** 200 см. **564.** 20 ліктів. **565.** $8\sqrt{10}$ см. *Вказівка*. Доведіть, що бічна сторона трапеції дорівнює її більшій основі. **566.** $12\sqrt{3}$ см. **567.** $2\sqrt{65}$ см. **568.** $12\sqrt{5}$ см. **569.** 128 см. *Вказівка*. Скористайтеся властивістю бісектриси кута трикутника та знайдіть відношення бічної сторони до половини основи. **570.** 162 см. **571.** 54 см. **572.** $8\sqrt{10}$ см. **573.** 10 см, $4\sqrt{13}$ см, $2\sqrt{73}$ см. **574.** 26 см. **575.** $3\frac{3}{4}$ фута.

17. Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника

595. 45°, 135°. **598.** 1) 1; 2) 0. **599.** 0,28; 0,96; $\frac{7}{24}$; $\frac{24}{7}$. **600.** $\frac{1}{6}$. *Вказівка*. З подібності трикутників AMC і BDC випливає, що $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BD} = \frac{1}{3}$. **601.** $\frac{6}{7}$. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $\frac{KC}{AC} = \frac{BD}{AB}$. **602.** *Вказівка*. Із точки F опустіть перпендикуляр на відрізок ED. Знайдіть тангенси кутів E і B. **603.** 3 см. **604.** 12 см. **605.** 14 см.

18. Розв'язування прямокутних трикутників

618. 45°. **621.** $2a$, $a\sqrt{3}$. **622.** a, $a\sqrt{3}$. **625.** 8 см. **626.** 16 см. **627.** 15 см. **628.** $4\sqrt{2}$ см. **629.** $\frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **630.** $\frac{h}{\sin\alpha}$, $\frac{h}{\cos\alpha}$, $\frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}$. **631.** $a \operatorname{tg} \varphi$, $\frac{a}{\cos\varphi}$, $a \sin \varphi$. **632.** $\frac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, $d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. **633.** $\frac{2r}{\sin\alpha}$, $\frac{2r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{2r}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **634.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **635.** $\frac{a(3-\sqrt{3})}{2}$. **636.** $2\sqrt{3}$ см, $\sqrt{93}$ см, $\sqrt{181}$ см. **638.** $\angle A = 86°$, $\angle B = 111°$, $\angle C = 94°$, $\angle D = 69°$. **639.** 18 см, 21 см.

§ 4. Многокутники. Площа многокутника

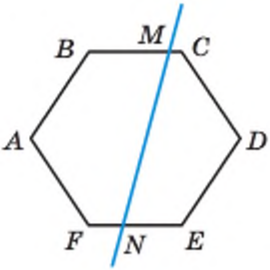


Рис. 247

19. Многокутники

654. 3) $\frac{n(n-3)}{2}$. **655.** 12 сторін, 1800°. **658.** 150°, 60°, 150°. **659.** П'ятикутник. **660.** *Вказівка*. Нехай $ABCDEF$ — шестикутник, кожний кут якого дорівнює 120°. Якщо провести січну MN (рис. 247), то сума кутів п'ятикутника $ABMNF$ дорівнюватиме 540°. Тоді сума кутів BMN і FNM дорівнює 180°. **662.** 80 см. **663.** $(26+10\sqrt{13})$ см. **664.** $3\sqrt{5}$ см.

20. Поняття площі многокутника. Площа прямокутника

674. 0,000126 Н. **675.** 12 000 Н. **676.** $d^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **677.** $75\sqrt{3}$ см². **686.** У 2 рази. **687.** Жодного, або два, або три. **688.** Жодного або два. **689.** 504 см². **690.** 30 см. **691.** *Вказівка*. Побудуйте прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють сторонам даних квадратів. **692.** *Вказівка*. Сторона шуканого квадрата $x=\sqrt{ab}$. **694.** 24 см. **695.** 2 см.

21. Площа паралелограма

704. 1) Два розв'язки: 4 см і 9 см; 2) один розв'язок: 8 см. **705.** 300 см². **706.** 120 см². **707.** $108\sqrt{3}$ см². **708.** $ab \sin\alpha$. **709.** $64\sqrt{3}$ см². **710.** $140\sqrt{2}$ см². **711.** 37,5 см². **712.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **714.** 72 см². **715.** 360 см². **719.** 1 : 7.

22. Площа трикутника

732. $\frac{200}{3}$ см². **733.** $11\sqrt{3}$ см². **734.** 170 см². **735.** $b^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **736.** $h^2 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. **737.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **738.** $\frac{c^2}{4}$. **739.** $\frac{120}{13}$ см. **740.** 96 см². **741.** 108 см². **742.** 768 см². **744.** 52 см. **745.** 336 см². **746.** 1080 см². **757.** *Вказівка*. Урахуйте, що трикутники ABX і AXM мають спільну висоту. Таку саму властивість мають і трикутники CBX і CXM. **758.** 120 см². **759.** 20 см, $6\sqrt{10}$ см, $2\sqrt{10}$ см. **760.** 1176 см². **761.** 9,6 см². **762.** $\frac{4000}{3}$ см². *Вказівка*. Скориставшись властивістю бісектриси трикутника, знайдіть відношення бічної сторони та половини основи трикутника. **763.** $\frac{4000}{3}$ см². **764.** 19 см². *Вказівка*. Скористайтеся результатами задач 750 і 757. **765.** *Вказівка*. Проведіть прямі AM, BM і CM та скористайтеся результатами задачі 757. **766.** *Вказівка*. Проведіть медіану AM. Нехай N — точка на стороні BC така, що $AN \parallel DM$. Доведіть, що пряма DN — шукана. **768.** 78°, 78°, 24°. **769.** $2\sqrt{57}$ см. **770.** 80 см.

23. Площа трапеції

782. $108\sqrt{3}$ см². **783.** 195 см². **784.** 840 см². **785.** 132 см². **786.** $600\sqrt{3}$ см². **787.** 1640 см². **788.** $(32+32\sqrt{2})$ см². **789.** 294 см². **793.** 512 см². **794.** 192 см². **795.** 336 см². *Вказівка*. У даній трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) через вершину C проведіть пряму CF, паралельну діагоналі BD (точка F належить AD), і розгляньте трикутник ACF. **796.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. *Вказівка*. Доведіть, що кут при більшій основі трапеції дорівнює 60°. **797.** 156 см². *Вказівка*. Нехай O — центр кола, вписаного в трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Доведіть, що трикутник AOB є прямокутним, і знайдіть його висоту, проведену з вершини O. **798.** 588 см². **799.** 2187 см². *Вказівка*. Доведіть, що діагональ даної трапеції є бісектрисою кута при основі. Далі скористайтеся властивістю бісектриси трикутника. **800.** 936 см². **801.** $\frac{S}{2}$. *Вказівка*. Проведіть середню лінію MN трапеції. Доведіть, що висоти трикутників MCN і MND, проведені з вершин C і D, дорівнюють половині висоти трапеції. **802.** 15 см, 10 см. **803.** 60°, 120°. **804.** 38 см.

Вправи для повторення курсу геометрії 8 класу

806. 64 см або 74 см. **807.** 10 см, 18 см. **808.** 60°. **809.** $a - b$. **811.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) ні; 6) так; 7) так. *Вказівка*. Доведіть, що точкою перетину діагоналі діляться навпіл. **812.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **813.** 30°, 150°. **814.** 40°, 70°, 70°. **815.** 45°. **816.** 18 см. **818.** 56 см. **821.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см. **823.** CD. **824.** 70°, 110°. **825.** 30°. **828.** 80°, 100°, 150°, 30°. **829.** 4 см, 10 см. **830.** 1 : 2. **831.** 3 : 4. **832.** 2 : 5. **833.** 9 см, 3 см, 6 см. **834.** 21 см, 35 см. **835.** 28 см, 28 см, 16 см. **837.** $\frac{ab}{a+b}$. **838.** 21 см, 15 см. **840.** 25 см. **841.** 5 см. **842.** 10 см.

843. 36 см. **844.** $(12\sqrt{5}+20)$ см. **845.** 18 см. **846.** 24 см. **847.** $4\sqrt{29}$ см, $10\sqrt{29}$ см. **848.** $\frac{65}{18}$ см. **849.** $2\sqrt{10}$ см. **850.** 45 см. **851.** *а)* $\frac{S}{2}$; *б)* $\frac{3S}{8}$. **852.** 256 см². **853.** $\frac{1}{2}d^2$. **854.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **855.** $\frac{b^2}{2\operatorname{tg}\beta}$. **856.** $\frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha$. **857.** $72\sqrt{3}$ см². **858.** 24 300 см². **859.** 6 см.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Номер завдання	Номер задачі									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Б	Г	А	А	В	В	Г	А	В	В
2	Б	В	В	В	Б	В	Г	Б	Г	А
3	В	Б	В	Б	Г	В	Б	В	Г	Б
4	Б	В	А	Г	А	Г	Г	Б	Г	В

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ
підручник для 8 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Відповідальний за випуск *Д. В. Москаленко*
Літературний редактор *Т. Є. Цента*
Художнє оформлення та дізайн *Д. В. Висоцький*
Технічний редактор *О. В. Лісневська*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 13,00. Обл.-вид. арк. 11,86.
Тираж 174 850 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003